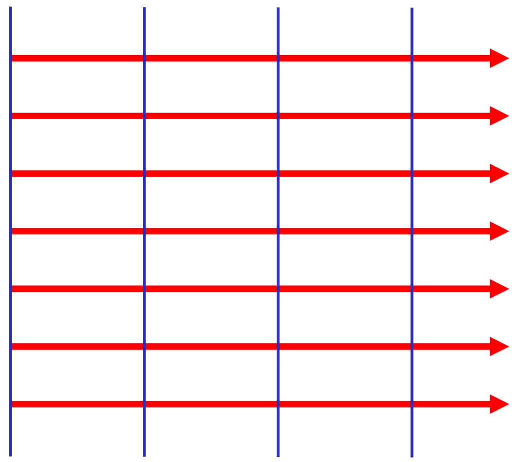
Ottica Geometrica

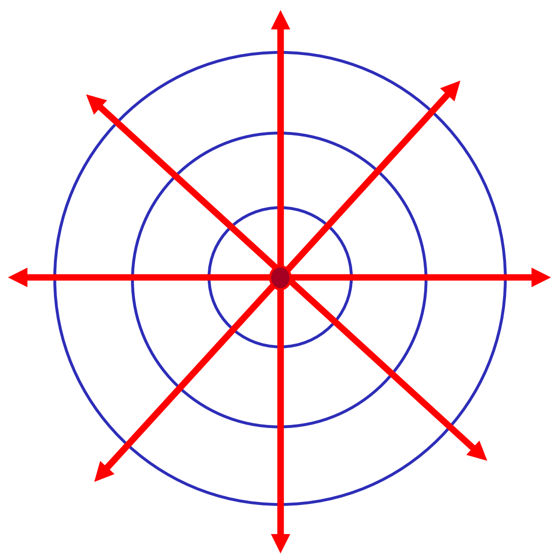
Ipotesi dell'ottica geometrica:
In un mezzo trasparente, omogeneo e isotropo, la radiazione elettromagnetica si propaga senza deviare per effetto della presenza di ostacoli.

⇒ Si trascurano gli effetti di diffrazione.

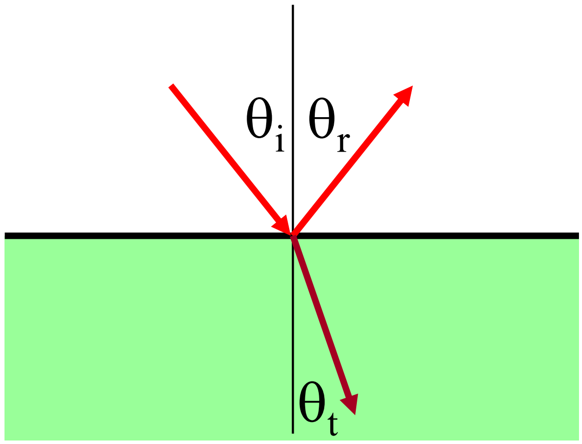
⇒ Si ha una **propagazione a raggi**, che in presenza di mezzi materiali è determinata esclusivamente dalle leggi di Snell.



onda piana



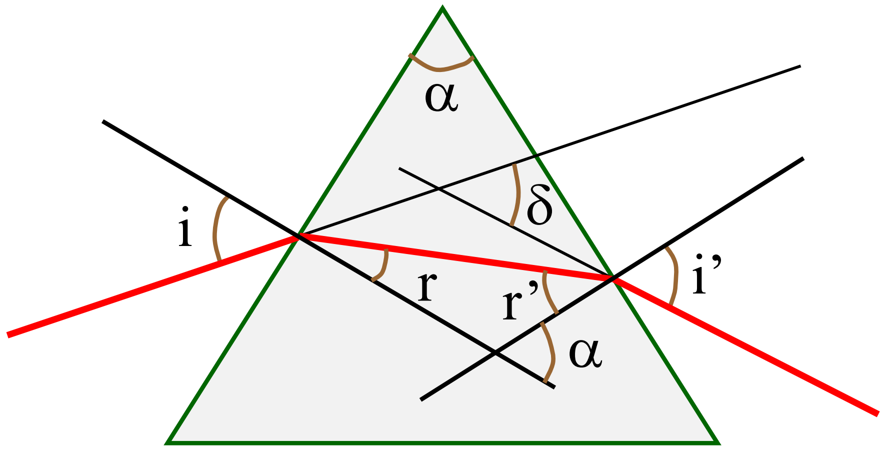
onda sferica



$$\theta_i = \theta_r$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

Prisma



Le relazioni tra gli angoli del prisma sono:

$$\sin i = n \sin r \qquad \sin i' = n \sin r'$$

$$r + r' = \alpha \qquad \delta = (i - r) + (i' - r') = i + i' - \alpha$$

dove:

α = **angolo di apertura**

δ = **angolo di deviazione**

Si ha la **deviazione minima δ_{min}** quando:

$$\frac{d\delta}{di} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di'}{di} = -1$$

Dalle relazioni di Snell:

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr \qquad \cos i' \, di' = n \cos r' dr'$$

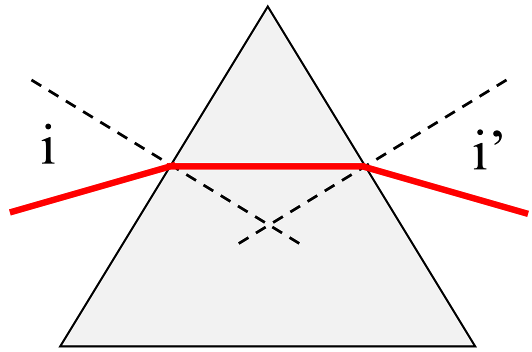
Inoltre:

$$r + r' = \alpha \quad \Rightarrow \quad dr = -dr'$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} = -1$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{i = i' \qquad r = r'}$$

A deviazione minima:



$$i = i'$$
$$r = r'$$

$$r = \frac{\alpha}{2} \qquad 2i = \delta_{\min} + \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\left[\left(\delta_{\min} + \alpha\right)/2\right]}{\sin\left(\alpha/2\right)}}$$

Misura sperimentale di n:

1) Si determina sperimentalmente δ_{min} per una data lunghezza d'onda;

2) Da δ_{min} si calcola n.

In generale l'indice di rifrazione del prisma dipende da λ.
Dalla formula dei dielettrici, trascurando l'assorbimento Γ:

$$n^2 = 1 + \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \left(\text{dove: } \gamma = 0\right)$$

Assumendo $\omega << \omega_0$:

$$n = \left(1 + \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{k/2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \frac{k}{2\omega_0^2}\frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \cong$$

$$\cong 1 + \frac{k}{2\omega_0^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 1 + \frac{k}{2\omega_0^2}\left(1 + \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2 \lambda^2}\right)$$

$$\boxed{n = k_1 + \frac{k_2}{\lambda^2}}$$

Formula di Cauchy

La **dispersione D** è la variazione della deviazione minima con la lunghezza d'onda:

$$\boxed{D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn}\frac{dn}{d\lambda}}$$

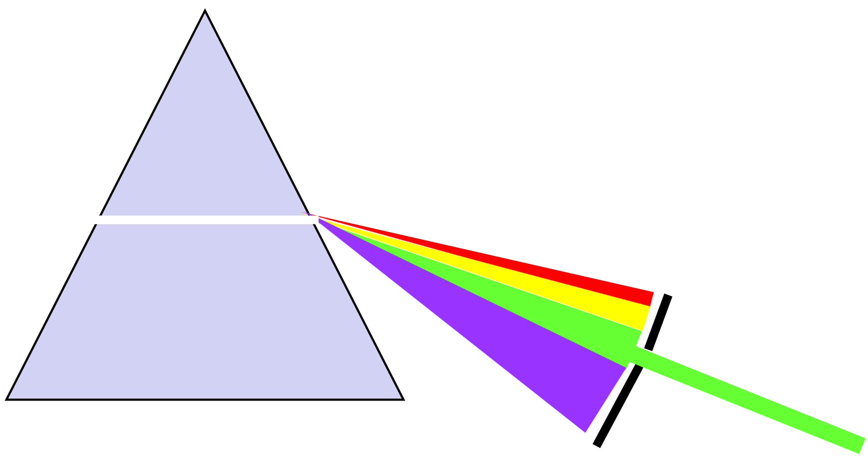
A deviazione minima:

$$\frac{dn}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\left(\frac{\sin\left[\left(\delta_{\min}+\alpha\right)/2\right]}{\sin\left(\alpha/2\right)}\right) = \frac{\cos\left[\left(\delta_{\min}+\alpha\right)/2\right]}{2\sin\left(\alpha/2\right)}$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(k_1 + \frac{k_2}{\lambda^2}\right) = -\frac{2k_2}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = \frac{d\delta}{d\lambda} = -\frac{2\sin\left(\alpha/2\right)}{\cos\left[\left(\delta_{\min}+\alpha\right)/2\right]}\frac{2k_2}{\lambda^3} \propto \frac{1}{\lambda^3}}$$

Il violetto risulta più deviato del rosso.

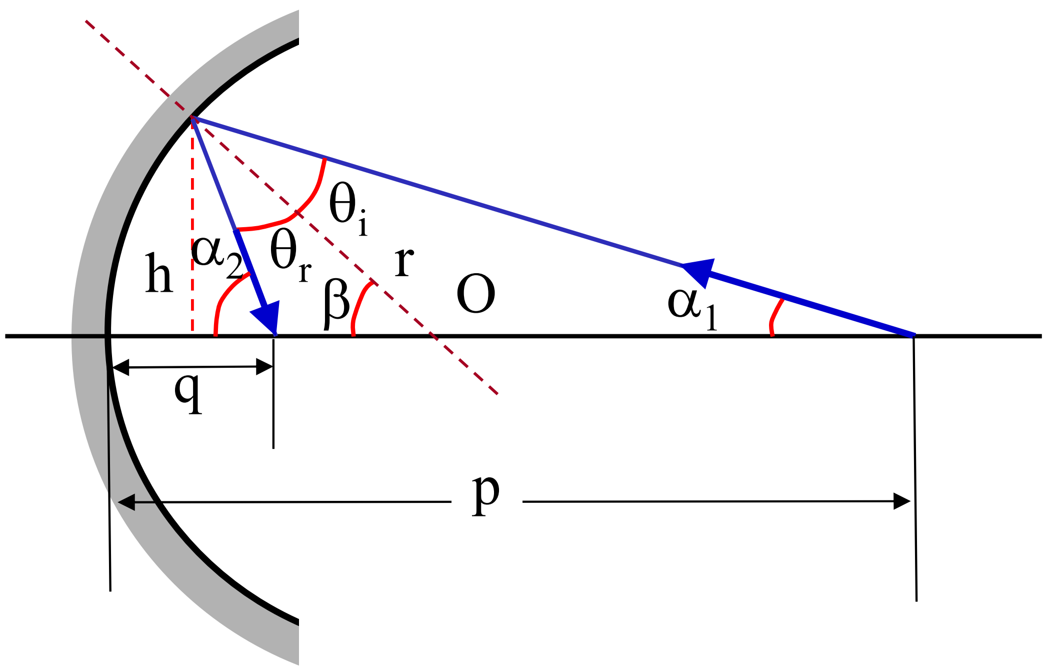


Principio alla base del funzionamento dello **spettrometro** e del **monocromatore a prisma**.

Componenti ottici basati sulla riflessione

Specchio sferico

- Superficie sferica ideale totalmente riflettente.
- Approssimazione dell'ottica geometrica.
- **Approssimazione parassiale:** i raggi che incidono sulla superficie sono concentrati in una piccola zona intorno all'asse.



$$\beta = \theta_i + \alpha_1 \qquad \alpha_2 = \beta + \theta_r \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta$$

Nella approssimazione parassiale, approssimando gli angoli alle tangenti:

$$\alpha_1 \cong tg\,\alpha_1 = \frac{h}{p} \qquad \alpha_2 \cong tg\,\alpha_2 = \frac{h}{q} \qquad \beta \cong tg\,\beta = \frac{h}{r}$$

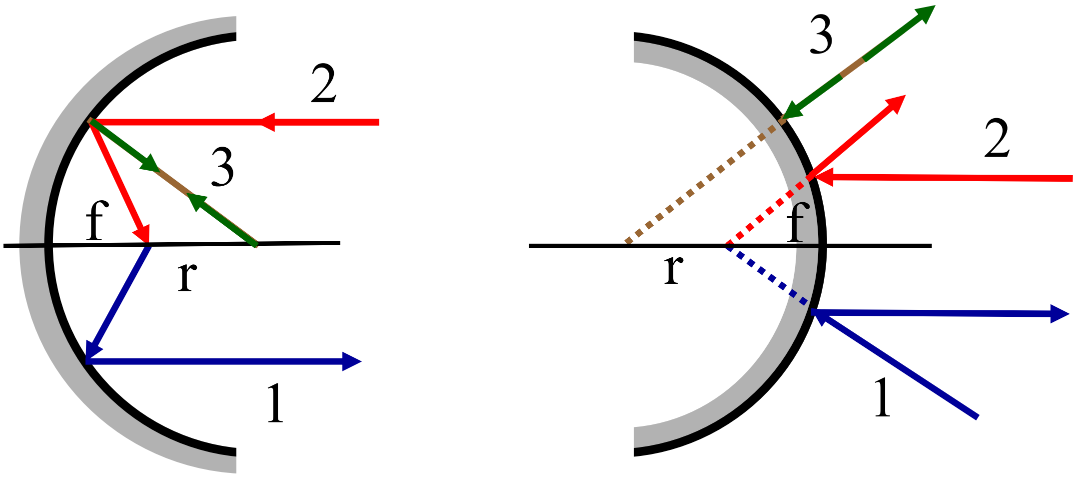
$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}}$$ **Legge degli specchi**

$$f = \frac{r}{2}$$ = **Distanza focale dello specchio**

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}$$

Raggi principali sono quelli per cui:

1: $p = f \rightarrow q = \infty$
2: $p = \infty \rightarrow q = f$
3: $p = 2f \rightarrow q = 2f = r$

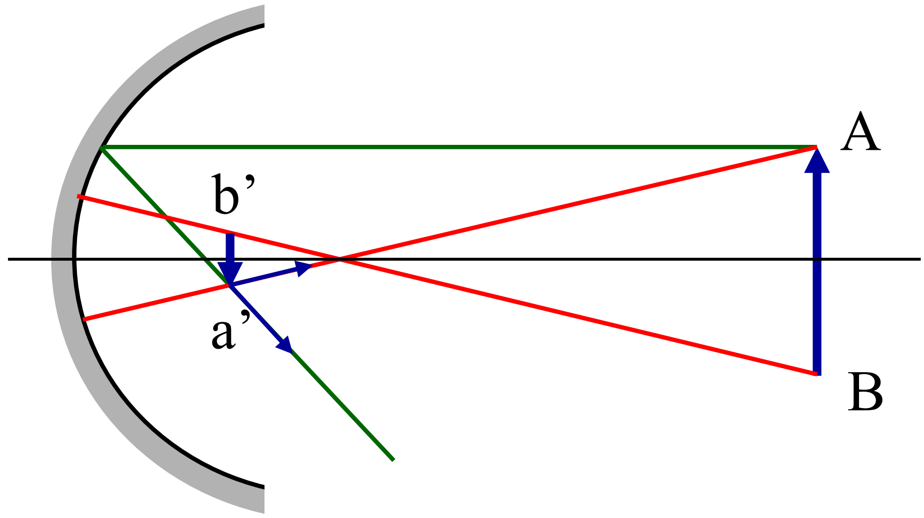


$f > 0$
specchio **concavo**

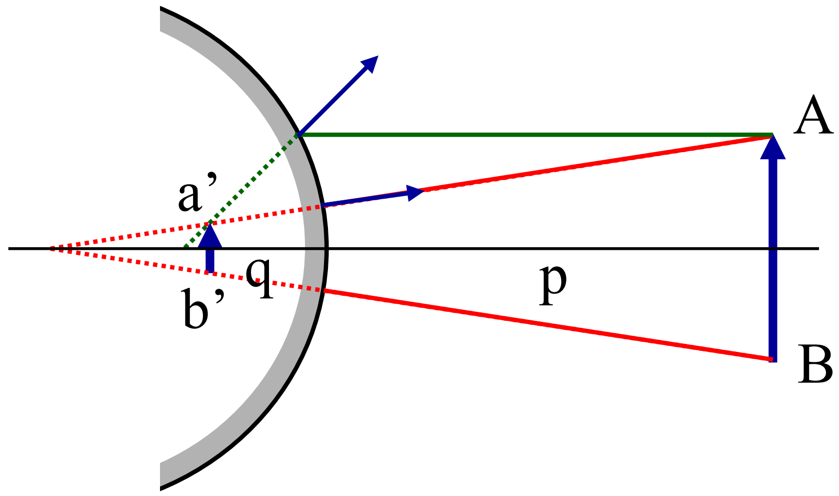
$f < 0$
specchio **convesso**

Per convenzione: $\boldsymbol{r > 0}$ per lo **specchio concavo**,
$\boldsymbol{r < 0}$ per lo **specchio convesso**.

Specchio concavo: i raggi convergono fisicamente nel fuoco o nel centro.
Specchio convesso: i raggi sembrano provenire dal fuoco o dal centro, che sono posti dietro lo specchio.



Lo specchio concavo produce:
- un'**immagine reale** e **capovolta** per p > f
- un'**immagine virtuale** e **diritta** per p < f .



Lo specchio convesso produce un'**immagine virtuale** e **diritta**.

Nell'ottica geometrica, l'immagine di un oggetto è la replica identica, a parte un fattore di scala detto **ingrandimento M**:

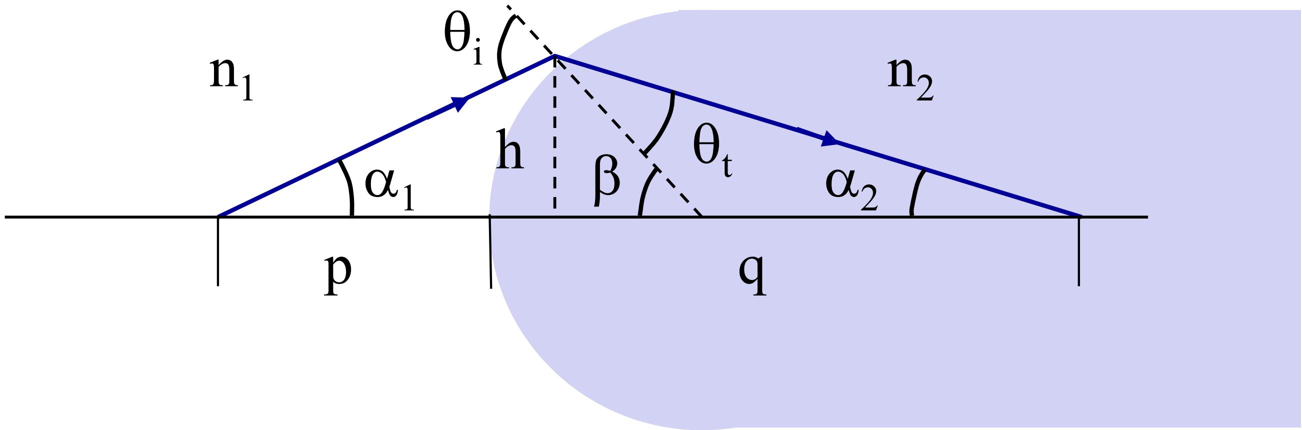
$$M = \frac{a'b'}{AB} = \frac{q}{p}$$

[a'b'/AB = (r-q)/(p-r)
Si ricava r dalla legge degli specchi e si sostituisce]

Componenti ottici basati sulla rifrazione

Diottro sferico

Rifrazione su una superficie sferica.



$$\beta = \theta_t + \alpha_2 \qquad \theta_i = \beta + \alpha_1 \qquad n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

In approssimazione parassiale, per piccoli angoli:

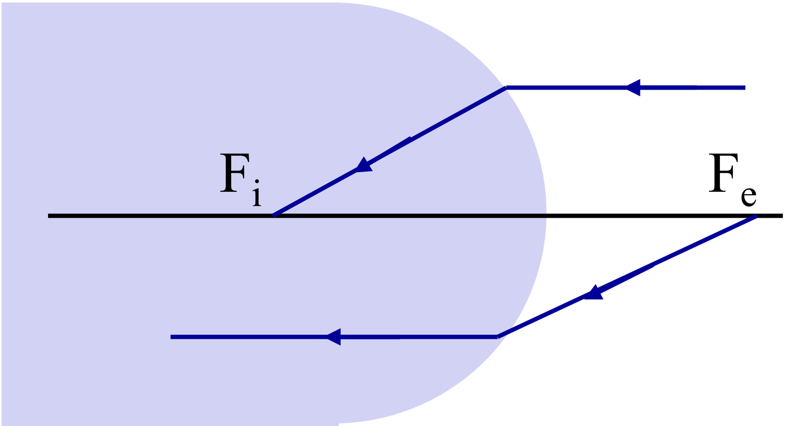
$$n_1\theta_i \cong n_2\theta_t \qquad \alpha_1 \cong \frac{h}{p} \qquad \alpha_2 \cong \frac{h}{q} \qquad \beta \cong \frac{h}{r}$$

$$n_2(\beta - \alpha_2) = n_1(\beta + \alpha_1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$$

Formula del diottro sferico

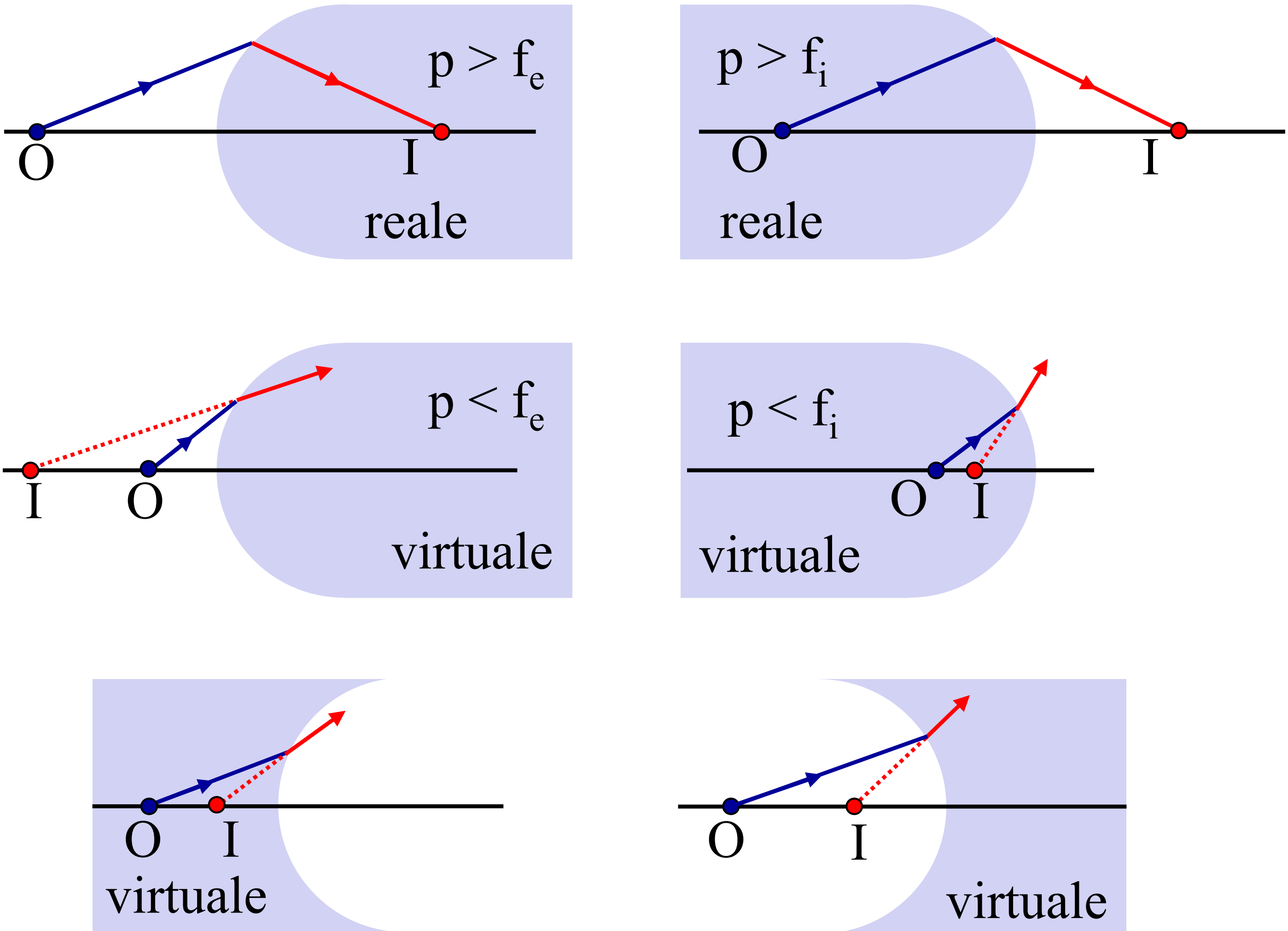
A differenza dello specchio, il diottro ha due punti focali:



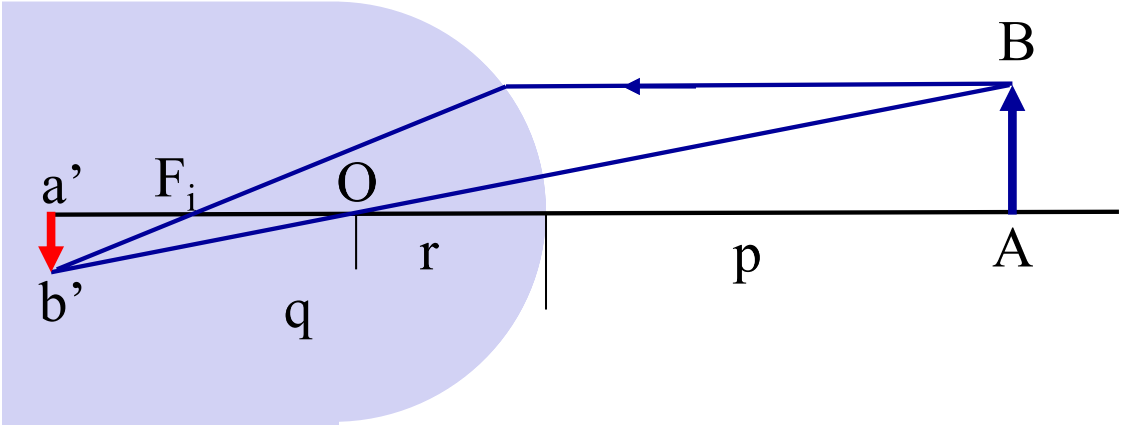
$$q = \infty \qquad \frac{n_1}{f_e} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

$$p = \infty \qquad \frac{n_2}{f_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

***a)* Formazione di immagini reali e virtuali** con diottri positivi (convessi) e negativi (concavi).



b) Formazione di immagini di oggetti estesi



Ricavando *r* dalla legge del diottro:

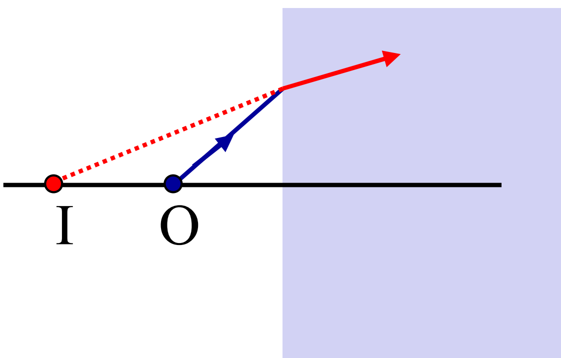
$$r = \frac{(n_2 - n_1)\,pq}{n_1 q + n_2 p}$$

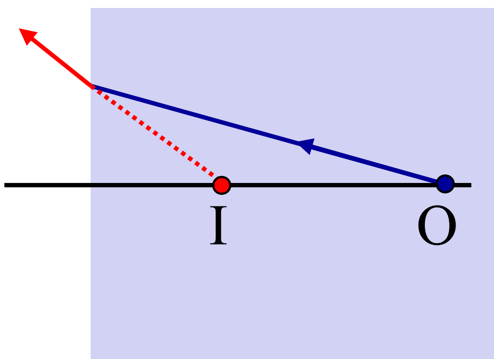
$$\Rightarrow \qquad M = \frac{a'b'}{AB} = \frac{q-r}{p+r} = \frac{n_1 q}{n_2 p}$$

Diottro piano ($r \to \infty$)

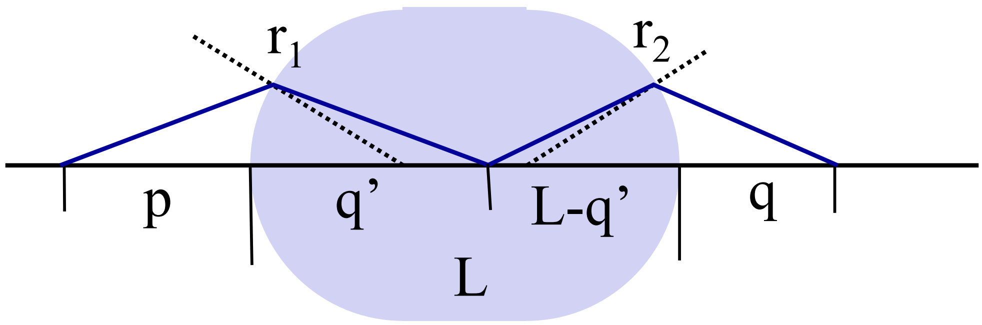
$$r \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad M = -1$$

$\Rightarrow$ Oggetto e immagine sono sempre di verso concorde (immagine virtuale e diritta).





Lente sottile



Combinando le equazioni di due diottri:

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{q'}=\frac{n_2-n_1}{r_1}$$

$$\frac{n_2}{L-q'}+\frac{n_1}{q}=\frac{n_1-n_2}{r_2}$$

Consideriamo una **lente sottile**, dove: *$L << p, q, q'$*:

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_1}{q}=\frac{n_2-n_1}{r_1}+\frac{n_1-n_2}{r_2}$$

Se la lente è in aria: $n_1 = 1$

$$\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

La lente ha due fuochi uguali e in posizione simmetrica:

$$p=\infty \qquad \frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$q=\infty \qquad \frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Se f è la lunghezza focale:

$$\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}}$$

Legge delle lenti sottili

Si hanno diversi tipi di lenti:

- biconvessa
  $r_1 > 0 \quad r_2 < 0 \quad f > 0$

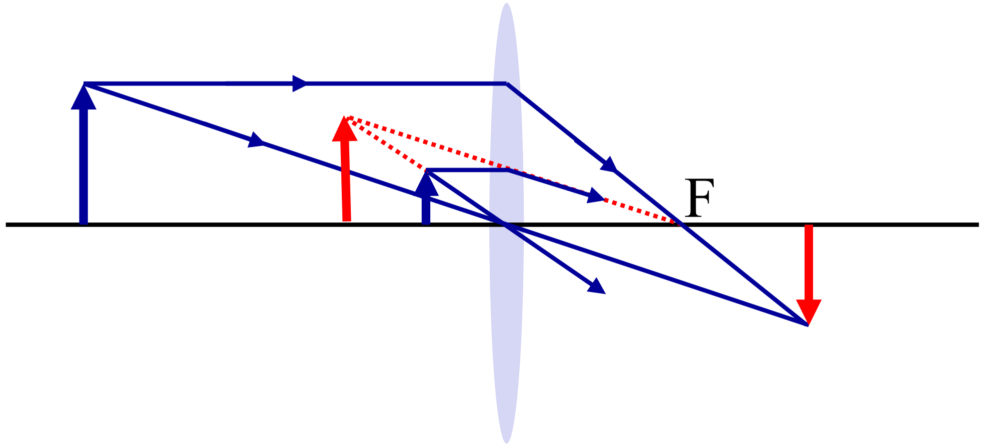
- pianoconvessa
  $r_1 = \infty \quad r_2 < 0 \quad f > 0$

- biconcava
  $r_1 < 0 \quad r_2 > 0 \quad f < 0$

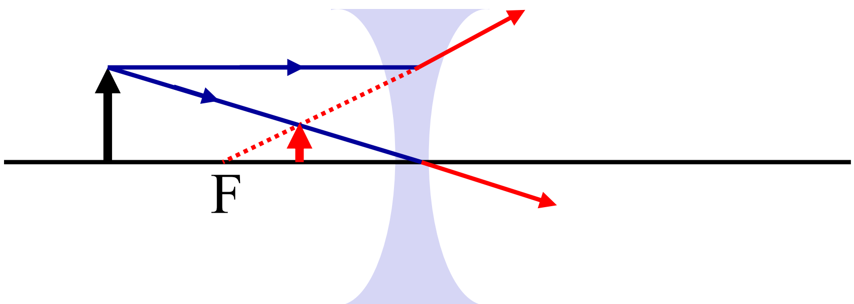
- pianoconcava
  $r_1 = \infty \quad r_2 > 0 \quad f < 0$

- menisco
  $r_1 > 0 \quad r_2 > 0$
  $f > 0$ o $f < 0$ (dipende da r_1 e r_2)

Lente convergente (**$f > 0$**):
- immagine reale e capovolta, se $p > f$,
- immagine virtuale e diritta, se $p < f$.



Lente divergente (**$f < 0$**): l'immagine è sempre virtuale.



L'**ingrandimento** dell'immagine è sempre:

$$\boxed{M = \frac{q}{p}}$$

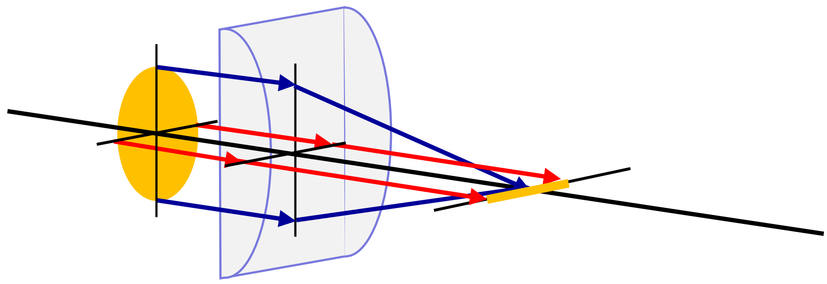
Componendo più lenti sottili a contatto si ottiene una ***lente sottile equivalente*** la cui focale risulta:

$$\frac{1}{f} = \sum_i \frac{1}{f_i}$$

dove le focali vanno sommate con il loro segno.

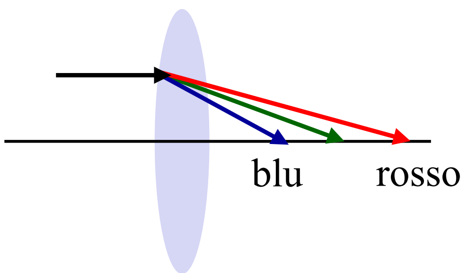
Caso limite: $r_x = \infty \;\Rightarrow$ **Lente cilindrica**

Trasforma un cerchio in una linea.

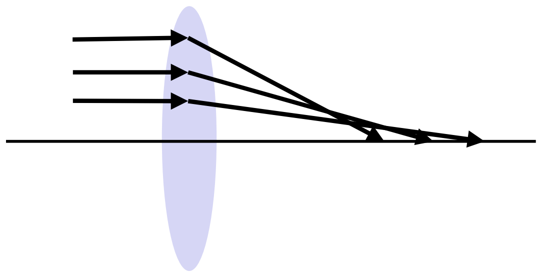


Aberrazioni

- **cromatica**
  - n funzione di λ
- **sferica**
  - non in approssimazione parassiale
  - lente non sottile
- **astigmatica**
  - curvatura diversa secondo due assi



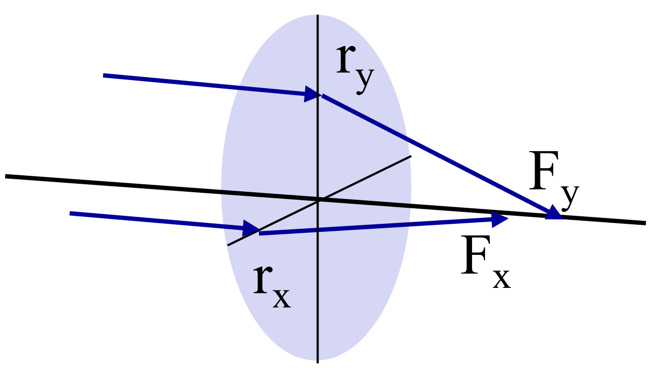
cromatica



sferica

Aberrazione astigmatica:

- Direzioni corrispondenti a curvature diverse vanno a fuoco a distanze diverse.
- Si osserva per oggetti posti fuori dall'asse ottico.



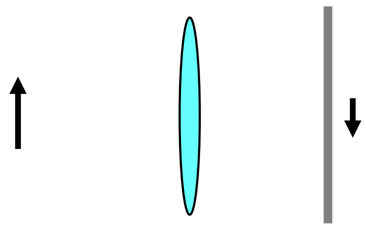
Occhio umano

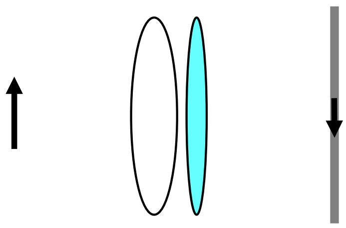
• Il ***cristallino*** è una lente biconvessa, convergente, con:
- $n \cong 1.4\text{-}1.45$
- Tipicamente: $r_1 \cong 10$ mm e $r_2 \cong 6$ mm.

• Ha focale variabile grazie ai muscoli ciliari che ne variano i raggi di curvatura.

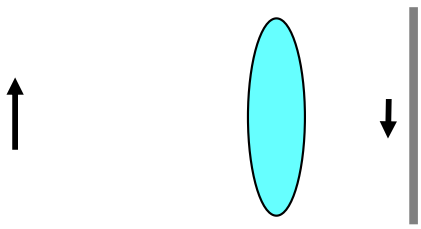
• La deformabilità consente l'**accomodamento**, cioè la formazione di immagini reali e capovolte sulla retina per oggetti posti a distanze che variano tra:
- **Punto prossimo**: $d_P \cong 15\text{-}25$ cm
- **Punto remoto**: $d_R \to \infty$.

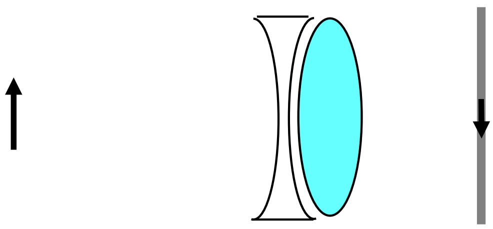
• **Ipermetrope** (presbite):
- $d_P > 25$ cm, cristallino poco convergente
- Richiede una correzione con lente convergente





• **Miope**:
- $d_R < \infty$, cristallino troppo convergente
- Richiede una correzione con lente divergente.





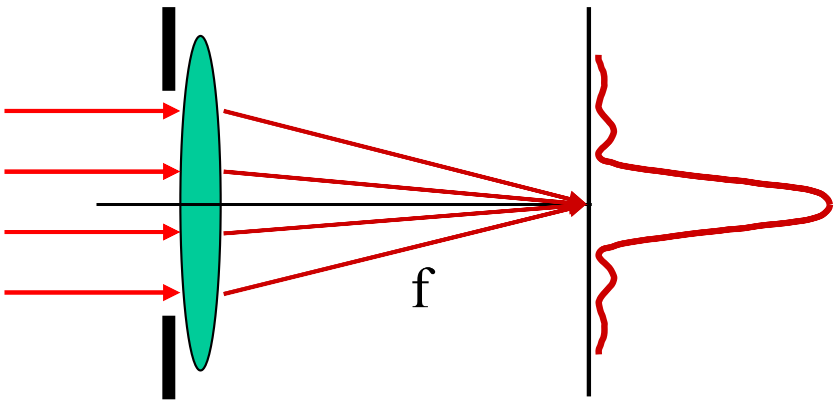
Effetti di diffrazione

• Una lente fa convergere nel punto di fuoco un fascio di raggi paralleli.

⇒ La lente forma nel punto di fuoco l'immagine di una sorgente all'infinito.

• La figura di diffrazione di Fraunhofer si osserva nella appossimazione che l'apertura sia a distanza infinita (raggi paralleli).

⇒ Ponendo un'apertura davanti a una lente, nel fuoco della lente si osserva la figura di diffrazione di Fraunhofer dell'apertura.



• L'effetto di diffrazione è quello di trasformare il punto focale dell'ottica geometrica in una figura di diffrazione.

⇒ Tenendo conto degli effetti di diffrazione intrinseci nel fatto che la lente ha una apertura finita, **l'immagine che si ottiene con una lente non sarà mai una replica perfetta dell'oggetto**.

• Un sistema ottico al cui interno si assumono le leggi dell'ottica geometrica e i cui effetti di diffrazione sono determinati dalle aperture del sistema si dice **limitato per diffrazione**.