Dispensa di Analisi vettoriale:

vettori
e
operatori differenziali

Andrea Farina

Politecnico di Milano
Dipartimento di Fisica

andrea.farina@polimi.it

9 maggio 2012

Richiami di algebra vettoriale

Definizione 1. Si dicono **Grandezze scalari** quelle quantità fisicamente osservabili determinate da un numero invariante rispetto a un cambiamento del sistema di coordinate (es massa,carica elettrica).

Definizione 2. Si dicono **Grandezze vettoriali** quelle quantità fisicamente osservabili, determinate da una direzione, un verso e un numero reale positivo (detto modulo o intensità) invarianti rispetto a un cambiamento del sistema di coordinate (es velocità, accelerazione, forza).

Dipendono invece dal sistema di coordinate *le componenti* del vettore, che nel caso tridimensionale costituiscono una terna di numeri reali (v_x, v_y, v_z) legati al vettore $\mathbf{v}$ dalla relazione:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{u}_x + v_y\mathbf{u}_y + v_z\mathbf{u}_z$$

con $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ versori degli assi coordinati (Fig 1).

Definizione 3. Definiamo **prodotto scalare** fra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, lo scalare a, dato dalla relazione:

$$a = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos\alpha \tag{1}$$

con α angolo compreso tra i due vettori.

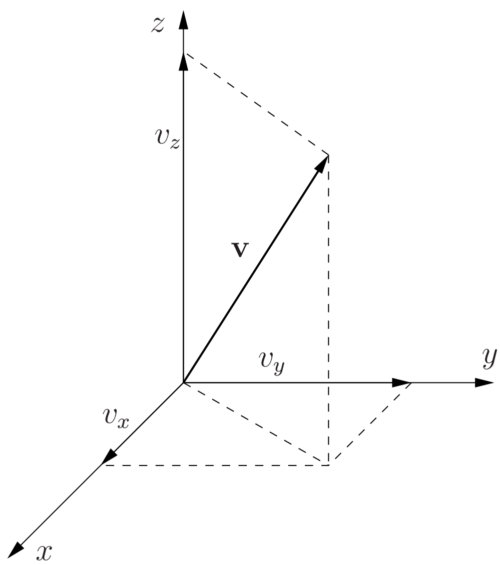


Figura 1: Rappresentazione del vettore $\mathbf{v}$ e delle sue componenti.

Proprietà 3.1.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

Proprietà 3.2. Se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ allora:

- $\mathbf{v} = 0$ oppure
- $\mathbf{w} = 0$ oppure
- $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$

Proprietà 3.3.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

Definizione 4. Definiamo **prodotto vettoriale** fra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, definito come:

- $|\mathbf{b}| = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \sin\alpha$
- direzione di $\mathbf{b} \perp$ al piano formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$
- verso di $\mathbf{b}$ individuato dalla *regola della mano destra*

Proprietà 4.1.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

Proprietà 4.2. Se $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ allora:

- $\mathbf{v} = 0$ oppure
- $\mathbf{w} = 0$ oppure
- $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$

Proprietà 4.3.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y)\,\mathbf{u}_x + (v_z w_x - v_x w_z)\,\mathbf{u}_y + \\ + (v_x w_y - v_y w_x)\,\mathbf{u}_z$$

Campi scalari e vettoriali

Definizione 5. Assegnato un dominio Ω dello spazio, se esiste una funzione U che a ogni punto $P \in \Omega$ associa uno scalare $U(P)$, diremo che in Ω è definito un **campo scalare U**.

Un campo scalare tridimensionale può essere rappresentato tramite *superfici di livello*, definite dalla famiglia di equazioni:

$$U(x, y, z) = U_0$$

sulle quali $U(P)$ assume valore costante U_0.

Esempio 5.1.

$$U = kz$$

Le superfici di livello sono piani perpendicolari all'asse z (Fig. 2).

Esempio 5.2.

$$U = x^2 + y^2 + z^2$$

Le superfici di livello sono sfere concentriche (Fig 3).

Definizione 6. Assegnato un dominio Ω dello spazio, se esiste una funzione $\mathbf{v}$ che associa a ogni punto $P \in \Omega$ un vettore $\mathbf{v}(P)$, diremo che in Ω è definito un **campo vettoriale v**.

Un campo vettoriale è sempre individuabile mediante 3 campi scalari che ne definiscono le componenti:

$$\begin{cases} v_x = v_x(P) \\ v_y = v_y(P) \\ v_z = v_z(P) \end{cases}$$

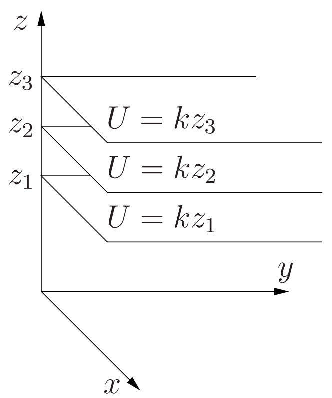


Figura 2: Superfici di livello dell'esempio 5.1.

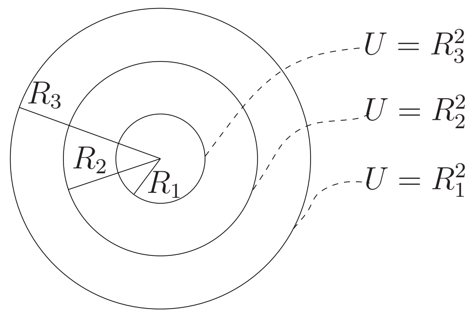


Figura 3: Superfici di livello dell'esempio 5.2.

Geometricamente un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ è rappresentabile mediante le *linee di flusso* (dette talvolta *linee di forza*), definite come linee orientate la cui tangente in un punto P definisce la direzione di $\mathbf{v}(P)$ e il cui verso coincide con quello di $\mathbf{v}(P)$ (Fig 4). Per convenzione la densità di linee di flusso disegnate in una certa regione è proporzionale al modulo di $\mathbf{v}(P)$ ivi assunto.

Esempio 6.1. Sia dato il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{v}(P) = \frac{x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

È possibile dimostrare che questo campo è radiale (Fig. 5) e che il suo modulo è proporzionale a $\frac{1}{r^2}$. Infatti:

$$\mathbf{v}(P) = \frac{x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{3/2}} = \frac{\mathbf{u}_r}{r^2}$$

Definizione 7. Si dicono **sorgenti** del campo i punti per cui passa più di una linea di flusso. Le sorgenti si dicono *positive* se le linee sono uscenti, *negative* se sono entranti

Osservazione. Un campo privo di sorgenti presenta linee di flusso chiuse o che si estendono all'infinito.

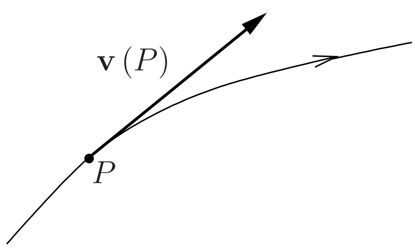


Figura 4: Esempio di linea di flusso.

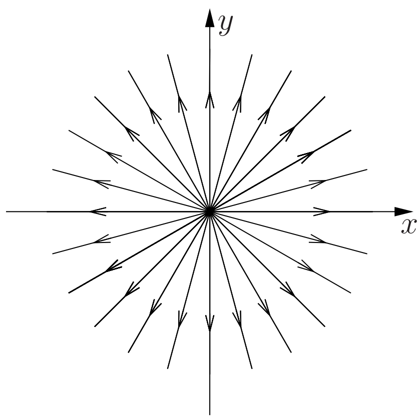


Figura 5: Linee di flusso dell'esempio 6.1.

Analisi vettoriale e operatori differenziali

Definizione 8. Sia assegnato un campo scalare $f = f(x, y, z)$ continuo e derivabile in una regione Ω dello spazio. Definiamo **gradiente** di f il vettore:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

Proprietà 8.1. Considerato il vettore $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ nel punto P e uno spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\mathbf{r}$ da P a Q (Fig. 6), la quantità

$$\mathrm{d}f = \operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \operatorname{grad} f \cdot (\mathrm{d}x\mathbf{u}_x + \mathrm{d}y\mathbf{u}_y + \mathrm{d}z\mathbf{u}_z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

indica di quanto varia la funzione f nel passare da P a Q:

$$\mathrm{d}f = f(Q) - f(P) = \operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Proprietà 8.2. Poiché

$$\operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = |\operatorname{grad} f|\,|\mathrm{d}\mathbf{r}|\cos\alpha$$

ne deduciamo che $\mathrm{d}f = \operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ è massimo quando $\alpha = 0$, cioè quando $\mathrm{d}\mathbf{r} \parallel \operatorname{grad} f$.
Dunque spostandosi nella direzione del vettore $\operatorname{grad} f$, la funzione f subisce la variazione maggiore; in altre parole il vettore $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ indica in quale direzione f varia più velocemente.

Proprietà 8.3. Se P e Q appartengono entrambi a una superficie di livello (Fig. 7) allora:

$$f(P) = f(Q) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = f(P) - f(Q) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}f = 0$$

il che comporta che $\operatorname{grad} f \perp \mathrm{d}\mathbf{r}$. Ma $\mathrm{d}\mathbf{r}$ giace sulla superficie di livello, dunque $\operatorname{grad} f$ è sempre perpendicolare alle superfici di livello.

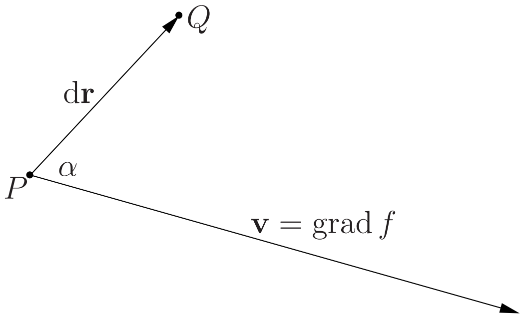


Figura 6: Incremento del campo scalare f nel passare da P a Q.

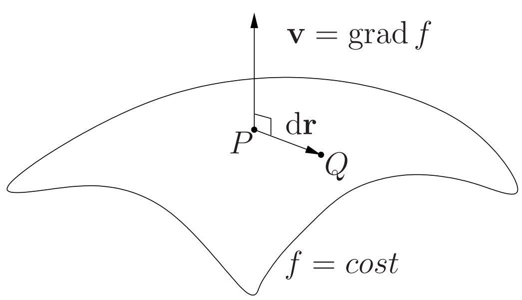


Figura 7: Spostamento infinitesimo su una superficie di livello.

Proprietà 8.4. Come diretta conseguenza della Proprietà 3, se considero $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ come un campo vettoriale, le sue linee di flusso sono perpendicolari alle superfici di livello di f.

Esempio 8.1. Sia (Fig.8)

$$f(x, y, z) = kz$$

risulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = k \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{grad} f = k\mathbf{u}_z$$

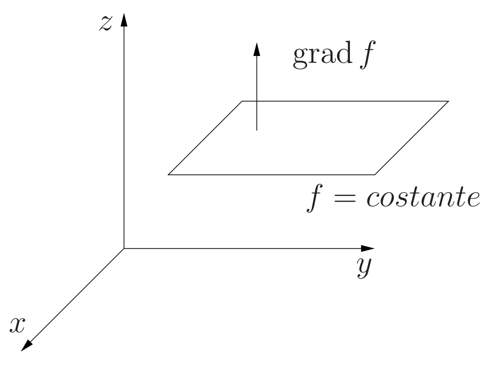


Figura 8: Esempio 8.1.

Osservazione. Data una funzione $f(P)$ è sempre possibile calcolare il vettore $\operatorname{grad} f$. Tuttavia, dato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ non è detto che esso sia il gradiente di una certa funzione.

Definizione 9. Chiamiamo un campo $\mathbf{v}(P)$ **conservativo** se esiste una funzione $f(P)$ tale che:

$$\mathbf{v}(P) = \operatorname{grad} f(P)$$

Proprietà 9.1. Si consideri in una regione dello spazio un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ che si possa scrivere come gradiente di una funzione f: $\mathbf{v}(P) = \operatorname{grad} f(P)$. Sia inoltre assegnata una linea generica orientata γ che connetta i punti $P1$ e $P2$ (Fig.9), l'integrale di linea

$$\int_{\overset{\gamma}{P_1 \to P_2}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

può essere scritto, per le proprietà del gradiente, come:

$$\int_{\overset{\gamma}{P_1 \to P_2}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\overset{\gamma}{P_1 \to P_2}} \operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\overset{\gamma}{P_1 \to P_2}} \mathrm{d}f = f(P2) - f(P1)$$

e dunque *non dipende* dal percorso γ, ma solo dagli estremi $P1$ e $P2$.

Proprietà 9.2. Nel caso si consideri una linea γ orientata *chiusa* (Fig.10), la Proprietà 1 si riduce a:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(P2) - f(P1) = f(P1) - f(P1) = 0$$

Questo integrale è detto **circuitazione** di $\mathbf{v}$ lungo γ.

Si dimostra che se $\forall$ linea chiusa γ la circuitazione di $\mathbf{v}$ è nulla, allora $\mathbf{v}$ è conservativo.

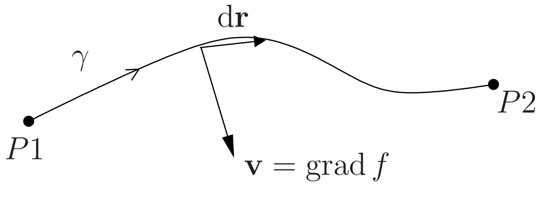


Figura 9: Linea generica che connette i punti $P1$ e $P2$.

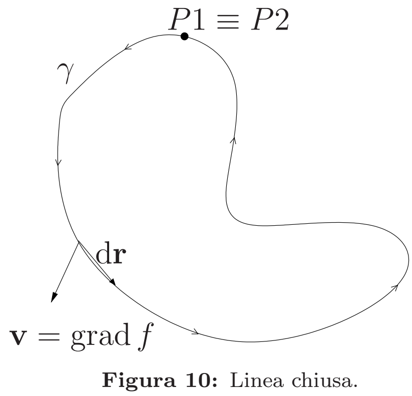


Figura 10: Linea chiusa.

Sono tipici campi conservativi:

- La forza (e il campo) gravitazionale;
- La forza elettrostatica (e il relativo campo elettrostatico);
- La forza elastica.

In genere un campo vettoriale dipendente dal tempo non è conservativo (non è tuttavia una regola generale).

Definizione 10. Considerato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ e una superficie Σ (Fig.11), suddividiamo Σ in tante areole infinitesime $\mathrm{d}\Sigma$ e determiniamo il valore di $\mathbf{v}(P)$ in ogni punto della superficie. Possiamo assumere che $\mathbf{v}(P)$ sia approssimativamente costante all'interno di ogni areola $\mathrm{d}\Sigma$. A ogni elemento $\mathrm{d}\Sigma$ associamo un versore $\mathbf{n}$ perpendicolare a $\mathrm{d}\Sigma$.
Chiameremo la quantità:

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}\Sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\Sigma$$

flusso di $\mathbf{v}$ attraverso l'elemento superficiale $\mathrm{d}\Sigma$.
La somma di tutti i flussi infinitesimi di $\mathbf{v}$ lungo la superficie:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{v}) = \iint_{\Sigma}\mathrm{d}\Phi(\mathbf{v}) = \iint_{\Sigma}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\Sigma$$

è dunque il **flusso** di $\mathbf{v}$ attraverso Σ.

Se Σ è una superficie chiusa, la normale n alla superficie è sempre presa con verso uscente dalla superficie stessa. In tal caso, se $\mathbf{v}$ è anche esso uscente dalla superficie avremo $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{v}) > 0$ e diremo che il flusso è *uscente* da Σ.

Definizione 11. Considerato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ dotato di componenti continue e derivabili, definiamo **divergenza** di $\mathbf{v}(P)$ uno scalare:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

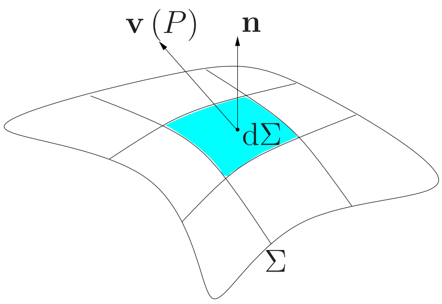


Figura 11: Superficie utilizzata per la definizione di flusso.

Proprietà 11.1. *Teorema della divergenza.* Considerata una regione dello spazio τ delimitata da una superficie chiusa Σ (Fig.12), risulta che:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{v}) = \oiint_\Sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\Sigma = \iiint_\tau \operatorname{div}\mathbf{v}\mathrm{d}\tau$$

Proprietà 11.2. Dal teorema precedente risulta che, considerato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ tale che $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ ovunque, il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ è sempre nullo. Un siffatto campo si dice **solenoidale**.
I campi solenoidali hanno necessariamente linee di flusso chiuse. Tipico campo solenoidale è il campo magnetico.

Proprietà 11.3. Se consideriamo un volumetto infinitesimo $\mathrm{d}\tau$, racchiuso dalla superficie $\mathrm{d}\Sigma$ e valutiamo il flusso del campo $\mathbf{v}(P)$ attraverso $\mathrm{d}\Sigma$ avremo, per il teorema della divergenza:

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}\Sigma}(\mathbf{v}) \simeq \mathrm{d}\tau\operatorname{div}\mathbf{v}$$

Possono dunque aversi i seguenti casi:

a) $\operatorname{div}\mathbf{v} > o$ dunque $\mathrm{d}\Phi > 0$ quindi le linee di flusso di $\mathbf{v}$ escono da $\mathrm{d}\tau$. Nel volumetto $\mathrm{d}\tau$ ci deve essere una sorgente positiva del campo (Fig.13).

b) $\operatorname{div}\mathbf{v} < 0$ dunque $\mathrm{d}\Phi < 0$ ne deriva che in $\mathrm{d}\tau$ ci sarà una sorgente negativa (Fig.14).

c) $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ dunque $\mathrm{d}\Phi = 0$ in tal caso il flusso netto è nullo, tante linee di flusso entrano in $\mathrm{d}\tau$ quante ne escono. Quindi in $\mathrm{d}\tau$ non ci sono sorgenti del campo (Fig.15).

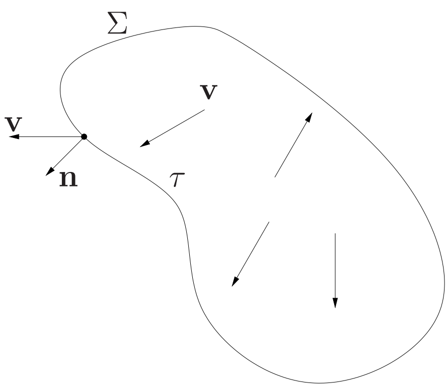


Figura 12: Regione di spazio utilizzata per il teorema della divergenza.

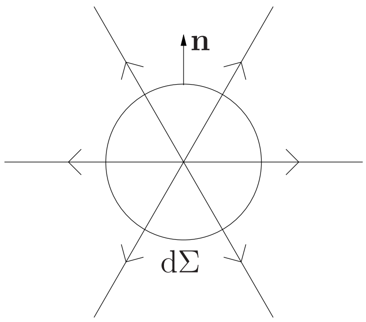


Figura 13: Sorgente positiva (a).

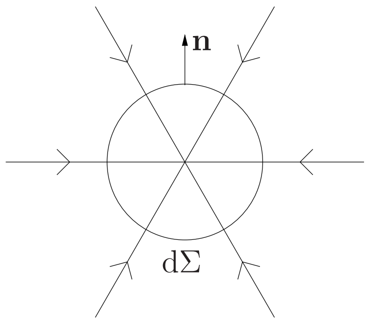


Figura 14: Sorgente negativa (b).

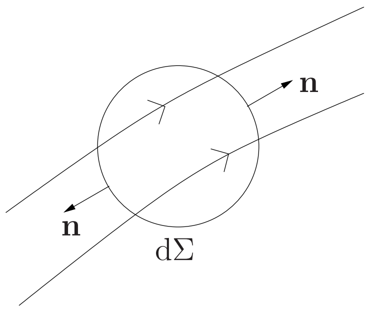


Figura 15: Flusso nullo (c).

Definizione 12. Considerato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ in una certa regione dello spazio, dotato di componenti continue e derivabili, definiamo **rotore** di $\mathbf{v}(P)$ il vettore:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{u}_y + \\ + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{u}_z$$

Proprietà 12.1. *Teorema di Stokes.* Si consideri una linea chiusa orientata γ e una superficie aperta Σ che abbia γ per contorno (Fig.16). Si scelga il versore $\mathbf{n}$ normale a Σ in modo che, rispetto al verso di γ, soddisfi la regola del cavatappi. Risulta che:

$$\oint_\gamma \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_\Sigma (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})\cdot \mathbf{n}\mathrm{d}\Sigma$$

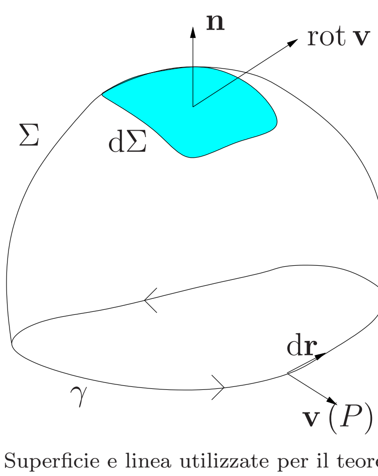


Figura 16: Superficie e linea utilizzate per il teorema di Stokes.

Proprietà 12.2. Per una campo $\mathbf{v}(P)$ conservativo, la circuitazione lungo qualsiasi linea chiusa γ è sempre nulla. Pertanto per tali campi $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$. Inoltre i campi siffatti sono definiti *irrotazionali*.

Proprietà 12.3. Equivalente alla Proprietà 2 è dire che rot (grad f) $= 0$ qualunque sia f (identità).

Proprietà 12.4. Nei punti in cui $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \neq 0$, ci sono vortici per il campo $\mathbf{v}$.

Esempio 12.1. Sia dato il campo $\mathbf{v}(P) = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$ (Fig.17)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Esempio 12.2. Sia dato il campo $\mathbf{v}(P) = y\mathbf{u}_x - x\mathbf{u}_y$ (Fig.18)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{u}_z \left(-\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = -2\mathbf{u}_z$$

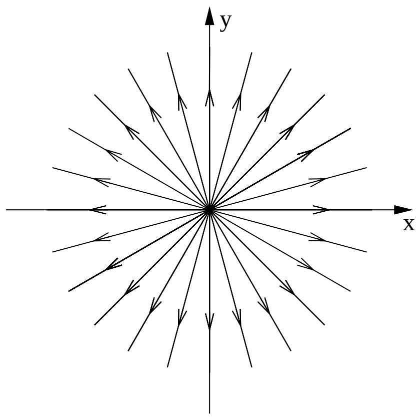


Figura 17: Esempio 12.1.

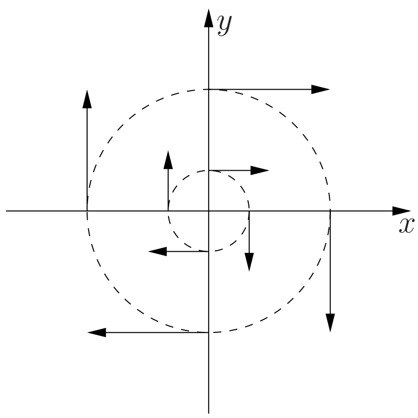


Figura 18: Esempio 12.2.

Definizione 13. Dato un campo scalare $f(P)$, definiamo **laplaciano** di f lo scalare

$$\triangle f = \text{div }(\text{grad}\, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Una funzione f tale per cui $\triangle f = 0$ si dice *armonica*.

Esempio 13.1. Sia $f = x^2 y + y^3 x + z^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3 \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 x \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6yx \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \\ \\ \frac{\partial^2 fg}{\partial z^2} = 2 \end{cases}$$

Dunque

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2y + 6xy + 2$$

Identità operatoriali

Si dimostrano le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
&\text{rot }(\text{grad}\, f) = 0 \\
&\text{div }(\text{rot}\, \mathbf{v}) = 0 \\
&\text{grad }(fg) = g\text{grad}\, f + f\text{grad}\, g \\
&\text{rot }(\text{rot}\, \mathbf{v}) = \text{grad }(\text{div}\, \mathbf{v}) - \triangle \mathbf{v} \\
&\text{div }(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \text{rot}\, \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \text{rot}\, \mathbf{w} \\
&\text{div }(f\mathbf{v}) = f\text{div}\, \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\text{grad}\, f)
\end{aligned}$$

Operatori vettoriali - complementi

Definizioni

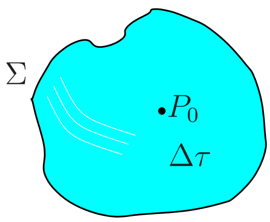
Gli operatori gradiente, divergenza, rotore e laplaciano possono essere definiti in *forma intrinseca*, indipendentemente dal sistema di coordinate in cui possiamo rappresentare i campi su cui operano. Nel seguito si assumerà che i campi (scalari o vettoriali) siano dotati di opportune condizioni di continuità e derivabilità nel dominio Ω in cui sono definiti.

Gradiente. Sia assegnato un campo scalare $f = f(P)$. Considerato un generico spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\mathbf{r}$ che porti dal punto P_0 al punto $P_0 + \mathrm{d}P$, definiamo **gradiente** della funzione f nel punto P quel vettore $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\, f$, tale che nel passaggi da P_0 a $P_0 + \mathrm{d}P$ il differenziale della funzione sia pari a:

$$\mathrm{d}f = f(P_0 + \mathrm{d}P) - f(P_0) = \mathrm{grad}\, f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

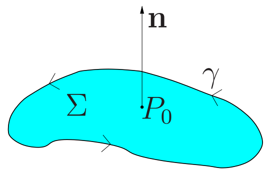
Divergenza. Sia assegnato un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$. Consideriamo un elemento di volume $\Delta\tau$ centrato nel punto P_0 e delimitato da una superficie chiusa Σ. Detto $\Phi_\Sigma(\mathbf{v})$ il flusso del vettore $\mathbf{v}$ attraverso Σ, definiamo **divergenza** del campo $\mathbf{v}$ in P_0 la quantità

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Phi_\Sigma(\mathbf{v})}{\Delta\tau}$$



Rotore. Sia assegnato un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$ e si consideri in un punto P_0 dello spazio un versore $\mathbf{n}$ passante per P di direzione fissata. Sia assegnata una superficie aperta generica Σ di area S_Σ passante per P, tale che $\mathbf{n}$ sia ad essa perpendicolare. Sia γ la linea chiusa che costituisce l'orlo della superficie Σ, orientata secondo la regola della vite destrorsa (una vite destrorsa che ruoti nel verso di percorrenza di γ avanza nella direzione di $\mathbf{n}$).
Si faccia tendere la linea γ a un punto coincidente con P_0, mantenendo costante la direzione della normale $\mathbf{n}$ alla superficie Σ in P_0. Definiamo **rotore** del vettore $\mathbf{v}$ in P_0 il vettore $\mathbf{w} = \mathrm{rot}\, \mathbf{v}$ tale per cui:

$$(\mathrm{rot}\, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{S_\Sigma \to 0} \frac{\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{S_\Sigma}$$



Laplaciano. Assegnato una campo scalare $f = f(P)$ si definisce **laplaciano** di f la quanità:

$$\triangle f = \mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\, f)$$

Nota

Le definizioni così introdotte consentono di ricavare direttamente le proprietà degli operatori. Infatti:

- Dalla definizione di *gradiente* di un campo scalare f, si dimostra facilmente che:
  - $\mathrm{grad}\, f$ è un vettore che punta sempre nella direzione di massimo accrescimento di f;
  - $\mathrm{grad}\, f$ è sempre diretto perpendicolarmente alle superfici di livello di f;
  - Un campo $\mathbf{v}(P) = \mathrm{grad}\, f$ è sempre conservativo.
- Dalla definizione di *divergenza* di un campo vettoriale $\mathbf{v}$, deriva che:
  - Se in un punto $(\mathrm{div}\, \mathbf{v}) < 0$, > 0 oppure $= 0$, avremo in quel punto rispettivamente una sorgente di campo negativa, positiva oppure nessuna sorgente;
  - Il teorema della divergenza è conseguenza diretta della definizione.
- Dalla definizione di *rotore* di un campo vettoriale $\mathbf{v}$, deriva che:
  - Un campo conservativo ha sempre rotore nullo;
  - Il teorema di Stokes è conseguenza diretta della definizione;
  - Un campo conservativo non può avere linee di flusso chiuse (altrimenti la circuitazione del campo lungo una linea di flusso sarebbe diversa da zero). Di conseguenza un campo *irrotazionale* non può essere anche *solenoidale* (i campi solenoidali hanno linee di flusso chiuse o che terminano all'infinito).

L'operatore *nabla* ∇

È possibile riscrivere le definizioni degli operatori differenziali *gradiente*, *divergenza*, *rotore* e *laplaciano* in una notazione più compatta e intuitiva tramite la definizione dell'operatore vettoriale **nabla**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

Le definizioni degli operatori diventano quindi:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{u}_y + \\ + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{u}_z$$

$$\triangle f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Come è possibile osservare l'operatore gradiente equivale a un prodotto per uno scalare, la divergenza a un prodotto scalare, il rotore a un prodotto vettoriale e il laplaciano al modulo dell'operatore nabla moltiplicato per uno scalare.
Le identità vettoriali possono quindi essere riscritte nel seguente modo:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$
$$\nabla (fg) = g\nabla f + f\nabla g$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \nabla \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{w}$$
$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla f)$$

A titolo di esempio le prime due identità richiamano rispettivamente le relazioni:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{b} = 0$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

Gli operatori proiettati su sistemi di coordinate

Gli operatori gradiente, divergenza, rotore e laplaciano possono essere espressi in forma esplicita una volta che si stabilisca il sistema di coordinate in cui rappresentare i campi scalari o vettoriali su cui operano.

Coordinate cartesiane

Individuato un sistema di coordinate cartesiane costituito da una terna *destrorsa* di assi x, y e z a cui siano associati i versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$, risulta

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\tfrac{\partial v_z}{\partial y} - \tfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{u}_x + \left(\tfrac{\partial v_x}{\partial z} - \tfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{u}_y + $$
$$+ \left(\tfrac{\partial v_y}{\partial x} - \tfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{u}_z$$

$$\triangle f = \operatorname{div}\,(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordinate cilindriche

Indicando con r, φ e z la terna di numeri che individua un punto in coordinate cilindriche e con $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\varphi$, $\mathbf{u}_z$ i versori associati, risulta:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\varphi & v_z \end{vmatrix} = \left(\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \tfrac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{u}_r + \left(\tfrac{\partial v_r}{\partial z} - \tfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)\mathbf{u}_\varphi +$$
$$+\tfrac{1}{r}\left(\tfrac{\partial}{\partial r}\,(r v_\varphi) - \tfrac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{u}_z$$

$$\triangle f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordinate sferiche

Indicando con r, ϑ e φ la terna di numeri che individua un punto in coordinate sferiche e con $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\vartheta$, $\mathbf{u}_\varphi$ i versori associati, risulta:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathbf{u}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta v_\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\vartheta & r\sin\vartheta\mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ v_r & rv_\vartheta & r\sin\vartheta v_\varphi \end{vmatrix} &= \tfrac{1}{r\sin\vartheta}\left(\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta v_\varphi\right) - \tfrac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{u}_r + \\ &+ \tfrac{1}{r}\left(\tfrac{1}{\sin\vartheta}\tfrac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \tfrac{\partial}{\partial r}\left(rv_\varphi\right)\right)\mathbf{u}_\vartheta + \\ &+ \tfrac{1}{r}\left(\tfrac{\partial}{\partial r}\left(rv_\vartheta\right) - \tfrac{\partial v_r}{\partial\vartheta}\right)\mathbf{u}_\varphi\end{aligned}$$

$$\triangle f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$