Sommario: Campo elettrico

Campo elettrico: se F è la forza sulla carica q_0, il campo elettrico è:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Linee di forza: il campo si rappresenta figurativamente mediante le sue linee di forza: in ogni punto il campo è sempre tangente alla linea; la densità delle linee indica l'intensità del campo. Le linee escono dalle cariche positive che generano il campo, ed entrano in quelle negative

Campo generato da una carica puntiforme Q:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Campo generato da un dipolo di carica q: (lungo l'asse del dipolo). P è il momento di dipolo

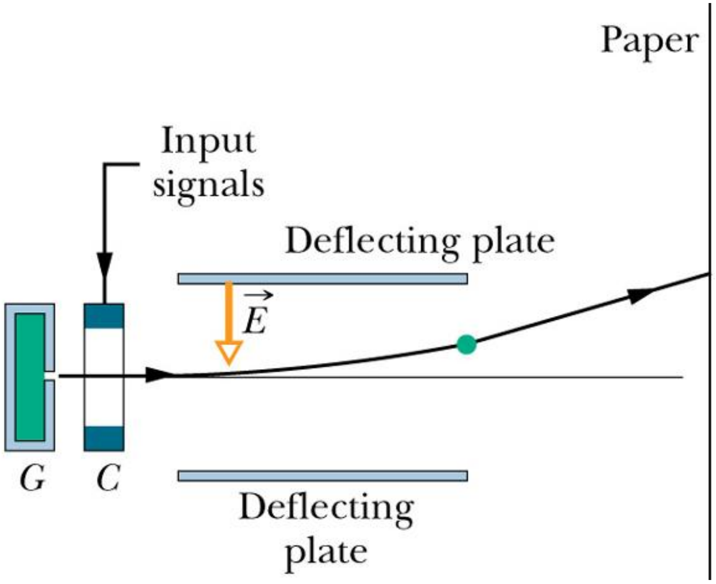
$$\vec{E} = \frac{2k}{z^3}\vec{P} \qquad \vec{P} = q\vec{d}$$

Dipolo P in un campo elettrico:

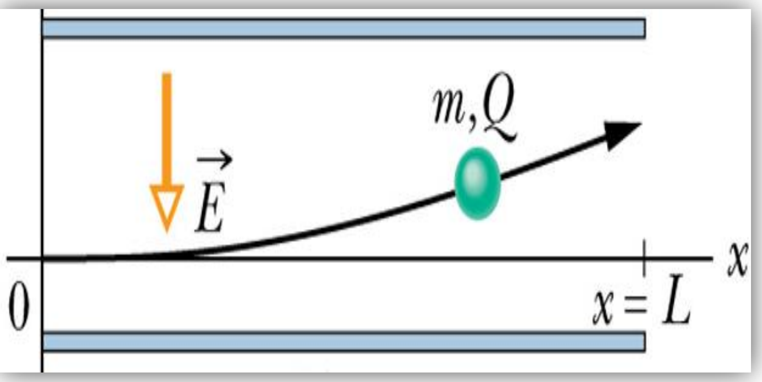
$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$$

Esercizio: stampante a getto d'inchiostro

Nelle stampanti a getto d'inchiostro, minuscole goccioline vengono spruzzate sul foglio di carta. Esse vengono espulse da un serbatoio (G), e ricevono una carica elettrica attraversando l'unità C; il segnale d'ingresso elabora l'immagine da stampare e regola la quantità di carica immessa nella goccia da cui dipende la successiva traiettoria della goccia ed il punto del foglio di carta in cui la goccia va ad impattare. Ogni singolo carattere richiede circa 100 gocce d'inchiostro.



Esercizio: calcolo della deflessione



$m=1.4\times10^{-10}$ Kg
$Q= -2\times10^{-13}$ C
v_x=18 m/s (velocità d'ingresso)
L=1.8 cm
$E= 1.4\times10^{6}$ N/C

Calcolare la deflessione verticale subita dalla goccia nel punto di uscita dai piatti (supponendo trascurabile la forza di gravità)

Prima dell'ingresso tra I piatti la goccia è ferma lungo y; tra i piatti la goccia subisce la forza del campo ed è accelerata verso l'alto. La cinematica ci dice che la goccia si sposta lungo y secondo la legge:

$$y(t)=\frac{1}{2}a_y t^2$$

L'accelerazione lungo y è data da: $a_y=\frac{Q}{m}E=\frac{2\times1.4}{1.4}\times10^3\frac{N}{Kg}=2000\frac{m}{s^2}$

Lungo x non ci sono forze applicate, dunque la goccia prosegue del suo moto rettilineo uniforme. Dunque:

$$x(t)=v_x t$$

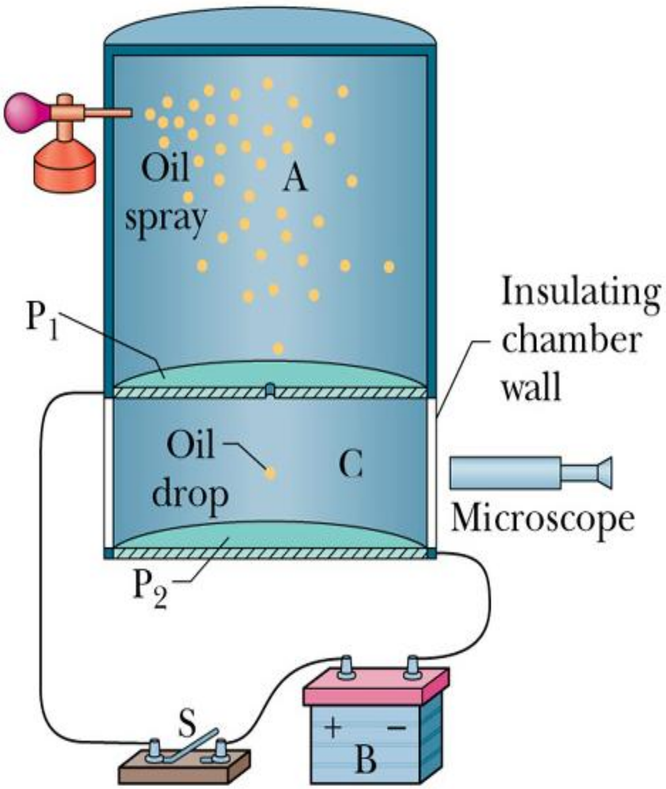
La goccia arriva al bordo dei piatti (*x*=*L*) all'istante t_1: $t_1=\frac{L}{v_x}=\frac{1.8\times10^{-2}m}{18(m/s)}=10^{-3}s$

La deflessione lungo y nell'istante di uscita è dunque:

$$y(t_1)=\frac{1}{2}a_y t_1^2=1000\frac{m}{s^2}10^{-6}s^2=10^{-3}m$$

Misura della carica elementare

Nel 1910 il fisico americano Robert Milliken utilizzò lo strumento in figura per misurare la carica elementare. Goccioline d'olio vengono introdotte nella camera mediante nebulizzatore. Per strofinio alcune gocce si caricano positivamente, altre negativamente precipitando per gravità sul piatto P1; attraverso un foro, alcune gocce penetrano nella camera isolata delimitata dai piatti P1 e P2.



A circuito chiuso si genera un campo elettrico uniforme tra i piatti conduttori P1 (carico +) e P2 (carico -); la gocce cariche negativamente sono attratte verso l'alto dal campo e verso il basso dalla gravità: all'equilibrio tra le due forze la goccia procede con velocità uniforme: osservando col microscopio la goccia nella camera C si misura la sua velocità e da questa si ricava la carica elettrica. Misurando la velocità di un gran numero di gocce, Milliken concluse che tutte le cariche erano sempre multiple di 1.592×10^{-19} C, un'eccellente approssimazione del valore esatto di $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C !!

Per questo eccezionale risultato Milliken vinse il Nobel per la Fisica nel 1923

Legge di Gauss

Johann Friedrich Carl Gauss (Braunschweig, 30 aprile 1777 – Gottinga, 23febbraio 1855). Matematico, astronomo e fisico. Definito "il Principe dei matematici", è annoverato fra i più importanti scienziati della storia avendo contribuito in modo decisivo all'evoluzione delle scienze matematiche, fisiche e naturali.

✓Si deve al Fisico e Matematico tedesco Carl Friedrich Gauss la scoperta di una legge che rappresenta un formidabile strumento per l'analisi dei problemi elettrostatici.

✓Sfruttando la simmetria della distribuzione di carica, la legge di Gauss facilita la formulazione analitica della relazione tra distribuzioni continue di carica e campi elettrici da esse generati.

✓La legge di Gauss si fonda su un concetto matematico estremamente importante non soltanto in elettromagnetismo, ma nelle Scienze in generale: il concetto di **FLUSSO** di un campo vettoriale

Il flusso

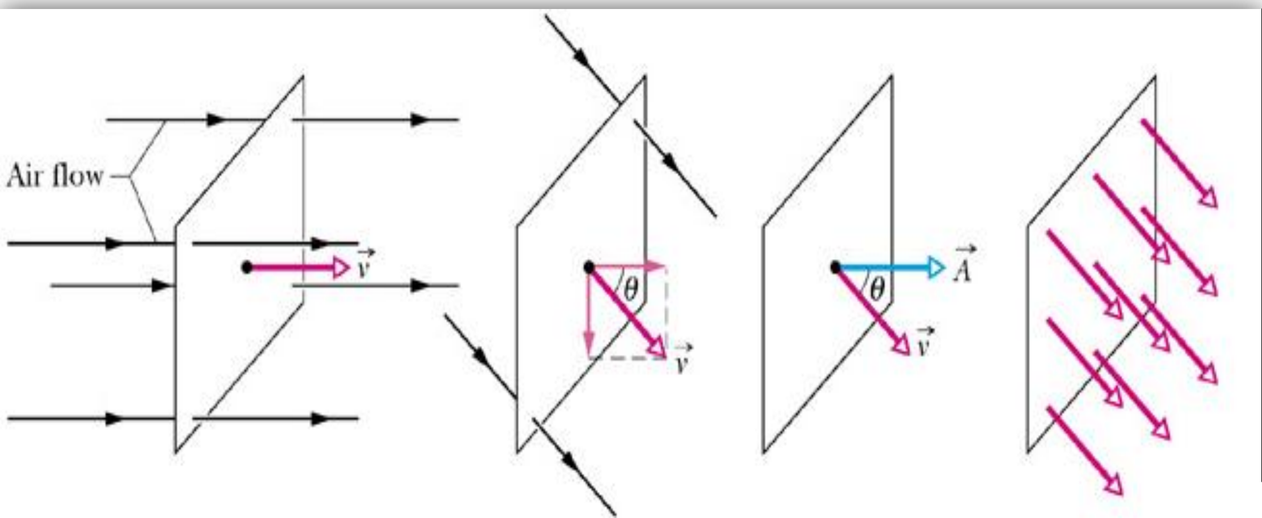
Immaginiamo un campo di velocità (v), ad esempio la velocità di un flusso d'aria (campo di vento); consideriamo una spira quadrata di area A. Quanta aria attraversa la spira nell'unità di tempo? (consideriamo v costante)

Velocità perpendicolare all'area: $\Phi = v\,A$

Velocità parallela all'area: $\Phi = 0$

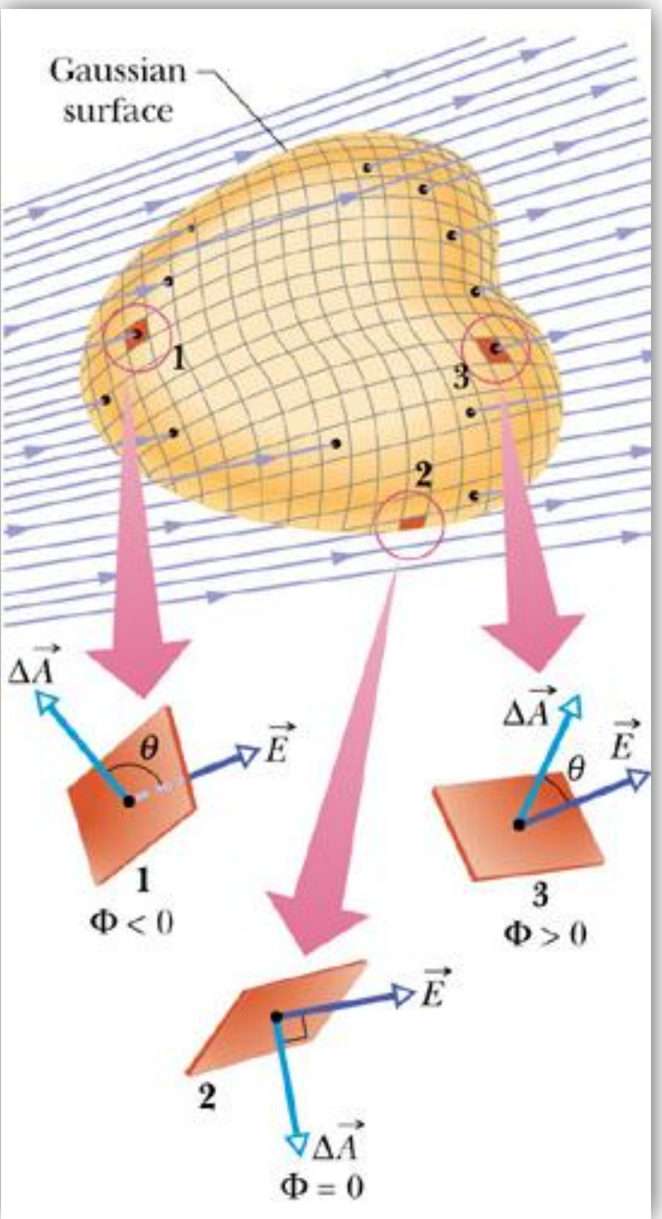
Direzione qualunque della velocità: $\Phi = v\,A\cos(\theta)$

In generale: $\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}$



Il FLUSSO d'aria è il prodotto scalare di **v** e del vettore areale **A** (perpendicolare al piano della spira, di modulo uguale ad A).
NB: il flusso cambia segno se il vento inverte direzione

Flusso del campo elettrico



Il concetto di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie può essere applicato a qualsiasi grandezza vettoriale, non solo alla velocità. Per esempio possiamo applicarlo al campo elettrico.

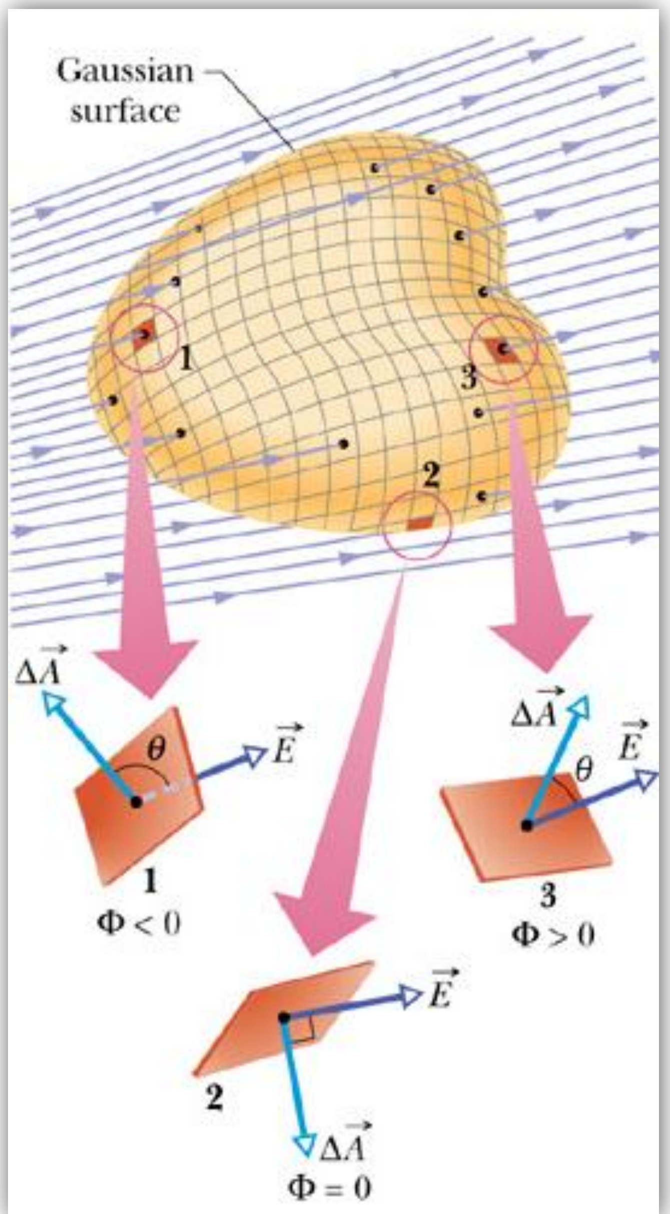
$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

La superficie non deve necessariamente essere piana: possiamo definire il flusso attraverso una superficie qualunque sfruttando il calcolo infinitesimale. Consideriamo la superficie chiusa in figura, e scomponiamola in minuscoli quadratini di area ΔA. Per ogni quadratino si ha:

$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$$

Per il segno del flusso vale quanto visto nel caso del vento: il flusso è positivo se il campo è uscente dal quadratino, negativo se entrante, nullo se parallelo al quadratino

Flusso del campo elettrico



Per passare dal singolo quadratino alla superficie totale, si procede come al solito nel calcolo infinitesimale: si somma su tutti i quadratini facendo tendere a zero l'area del singolo quadratino. Ciò corrisponde a calcolare l'integrale di superficie:

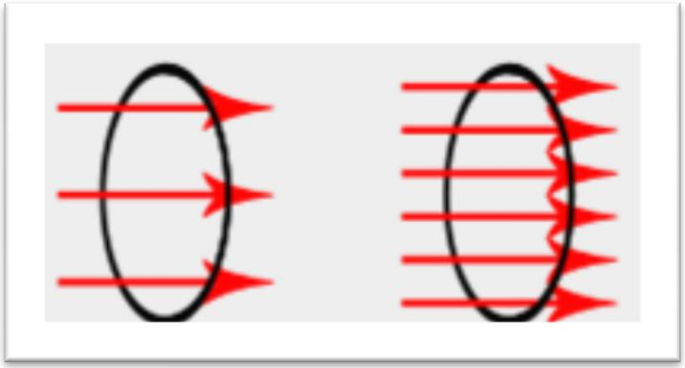
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Il cerchietto sul simbolo di integrale indica che è calcolato su una superficie chiusa. Dunque il calcolo del flusso richiede la conoscenza del campo elettrico su ogni punto della superficie considerata.

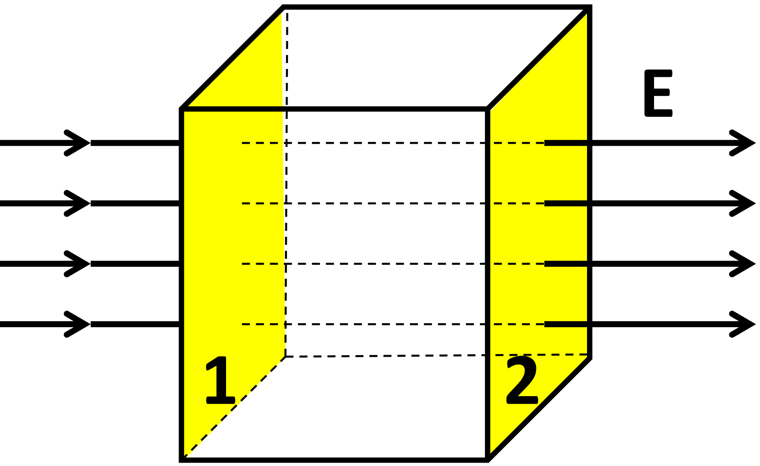
$$[\Phi] = \left[\frac{N\,m^2}{C}\right]$$

Il flusso è una quantità scalare; le sue dimensioni fisiche sono quelle di un campo elettrico per una superficie, dunque si misura in Newton per metro quadro su Coulomb

Flusso del campo elettrico



La densità delle linee di campo elettrico che attraversano una superficie è una misura dell'intensità del campo. Ne segue che il flusso è proporzionale al numero di linee di campo per unità di superficie.



Consideriamo il flusso di un campo elettrico uniforme attraverso un parallelepipedo. Il campo è perpendicolare alle facce 1 e 2, dunque attraverso le altre facce il flusso è nullo. Essendo E uniforme, il numero di linee di flusso attraverso 1 e 2 è lo stesso, ma attraverso 1 le linee di campo sono entranti, mentre attraverso 2 le linee sono uscenti, dunque se A è l'area delle facce:

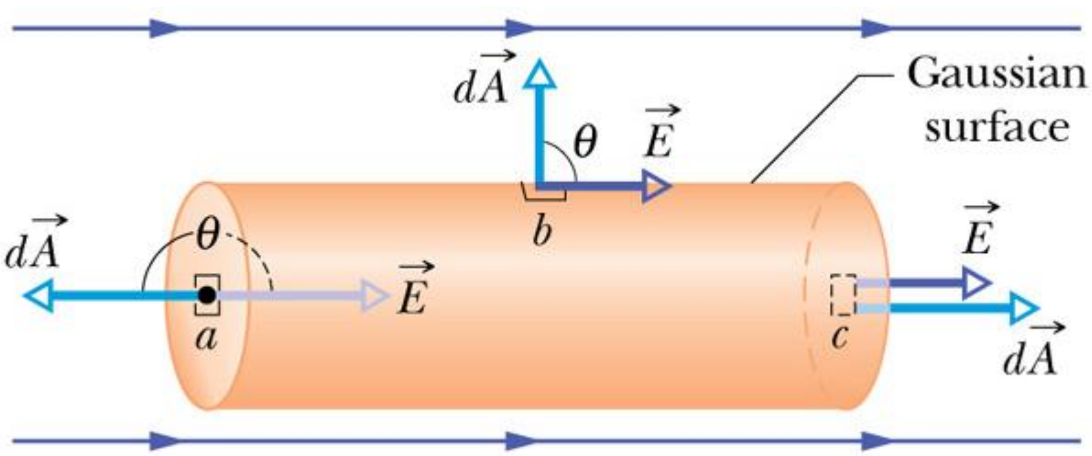
$$\Phi_1 = -EA \quad \Phi_2 = EA \quad \Phi_1 = -\Phi_2$$

$$\Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Il numero di linee entranti è uguale al numero di linee uscenti dal parallelepipedo: il flusso netto attraverso la superficie chiusa è NULLO

Problema 23.1

Calcolare il flusso di un campo elettrico uniforme attraverso il cilindro; l'asse del cilindro è parallelo al campo.
Questo caso è del tutto analogo al precedente: si sfrutta la simmetria per determinare il flusso totale; non fa alcuna differenza il fatto di avere un cilindro invece di un parallelepipedo



$$\Phi_a = -EA$$

$$\Phi_b = 0$$

$$\Phi_c = EA$$

$$\Rightarrow \Phi = 0$$

Problema 23.2

Consideriamo un campo elettrico NON UNIFORME $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$ $\quad E_x = 3x\frac{N}{C}$ $\quad E_y = 4\frac{N}{C}$

Calcolare il flusso attraverso il cubo di lato L=2 m disposto come in figura

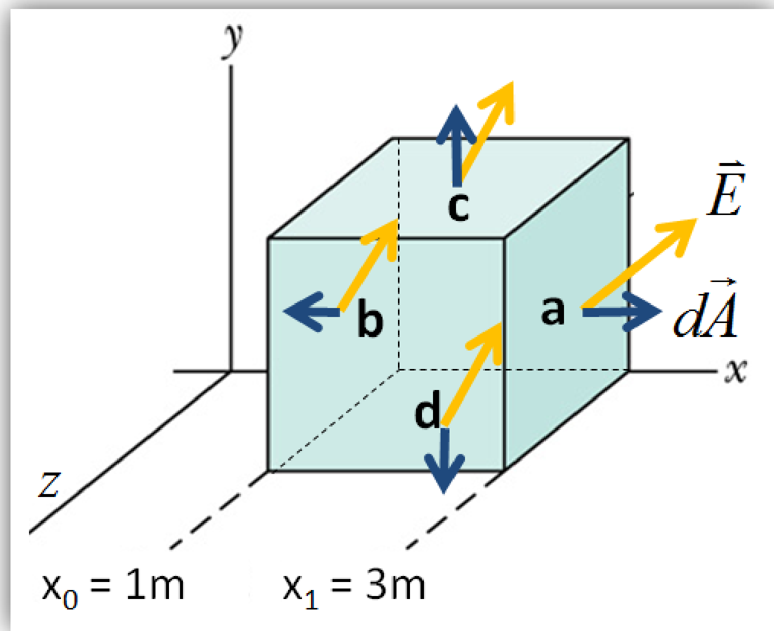
$$\Phi_a = \int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} = 3x_1\int_a dA = 3x_1 A = 36\frac{Nm^2}{C}$$

$$\Phi_b = -\int_b E_x dA = -3x_0\int_b dA = -3x_0 A = -12\frac{Nm^2}{C}$$

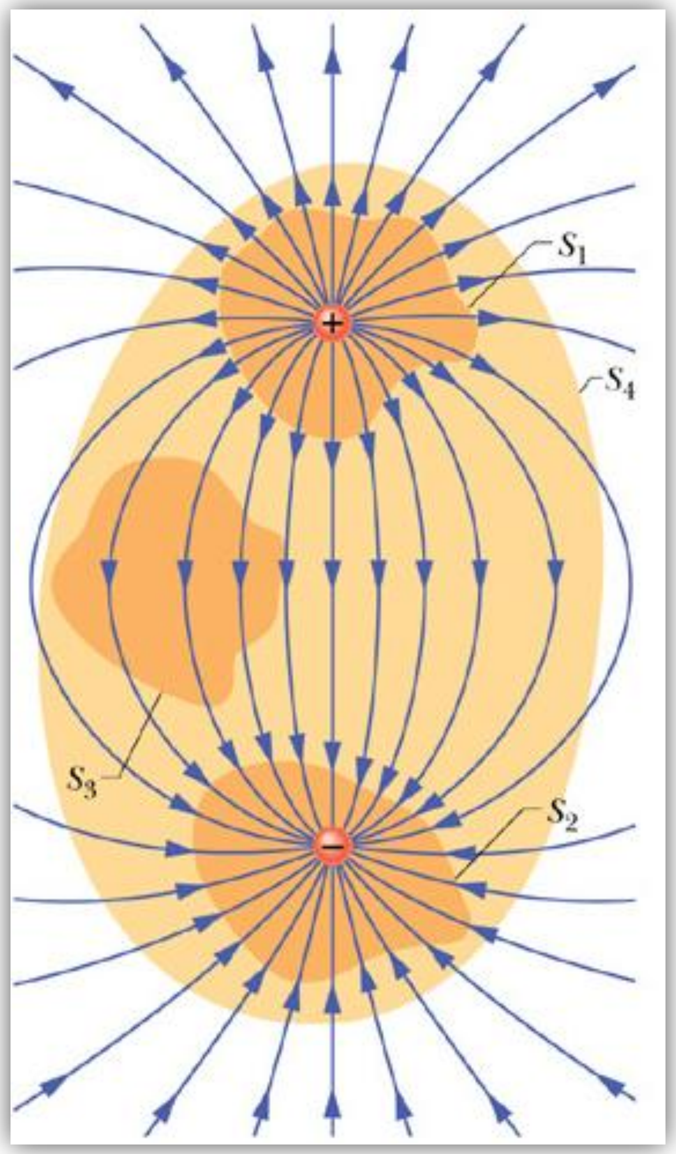
$$\Phi_c = \int_c E_y dA = 4\int_c dA = 16\frac{Nm^2}{C}$$

$$\Phi_d = -\int_d E_y dA = -16\frac{Nm^2}{C}$$

$$\Rightarrow \Phi = \Phi_a + \Phi_b + \Phi_c + \Phi_d = 24\frac{Nm^2}{C}$$



Legge di Gauss



Il **flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica elettrica contenuta nella superficie**, divisa per la costante dielettrica del vuoto

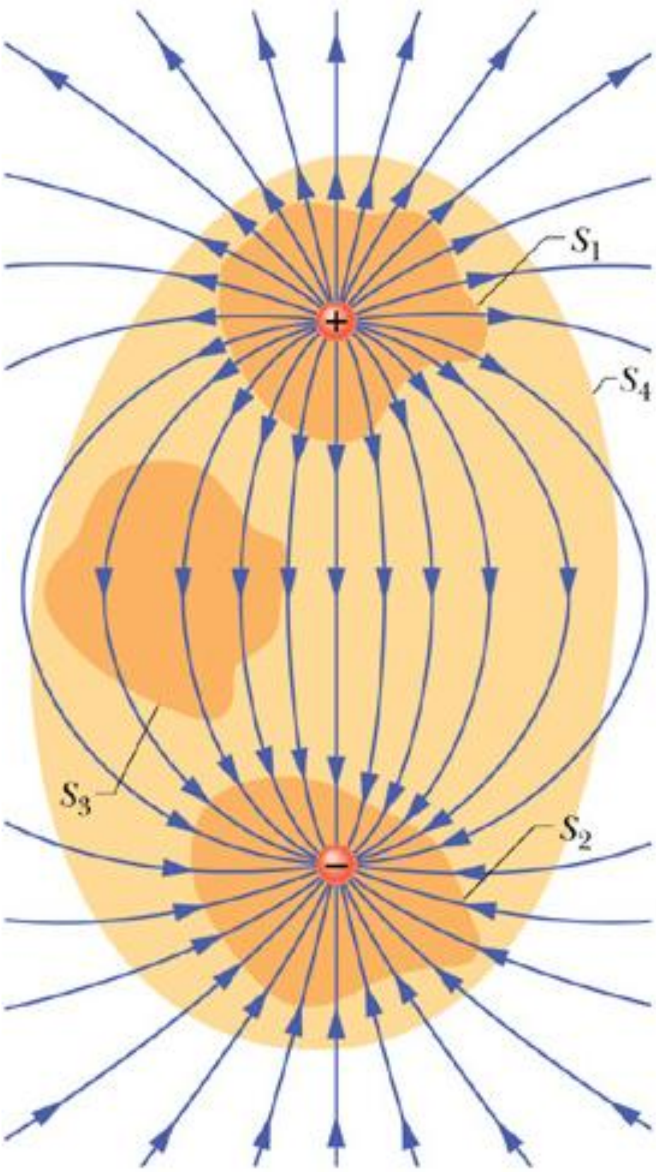
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

✓Eventuali cariche **esterne alla superficie, non importa quanto grandi, non danno alcun contributo al flusso**.

✓**Non ha importanza la forma e la posizione della carica interna**: conta soltanto la carica totale ed il segno

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2} \qquad [\Phi] = \left[\frac{N\,m^2}{C}\right]$$

Legge di Gauss



Consideriamo un campo di dipolo di carica q, e calcoliamo il flusso attraverso le 4 superfici in figura

$$\Phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

La superficie 1 contiene la carica positiva del dipolo

$$\Phi_2 = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

La superficie 2 contiene la carica negativa del dipolo

$$\Phi_3 = 0$$

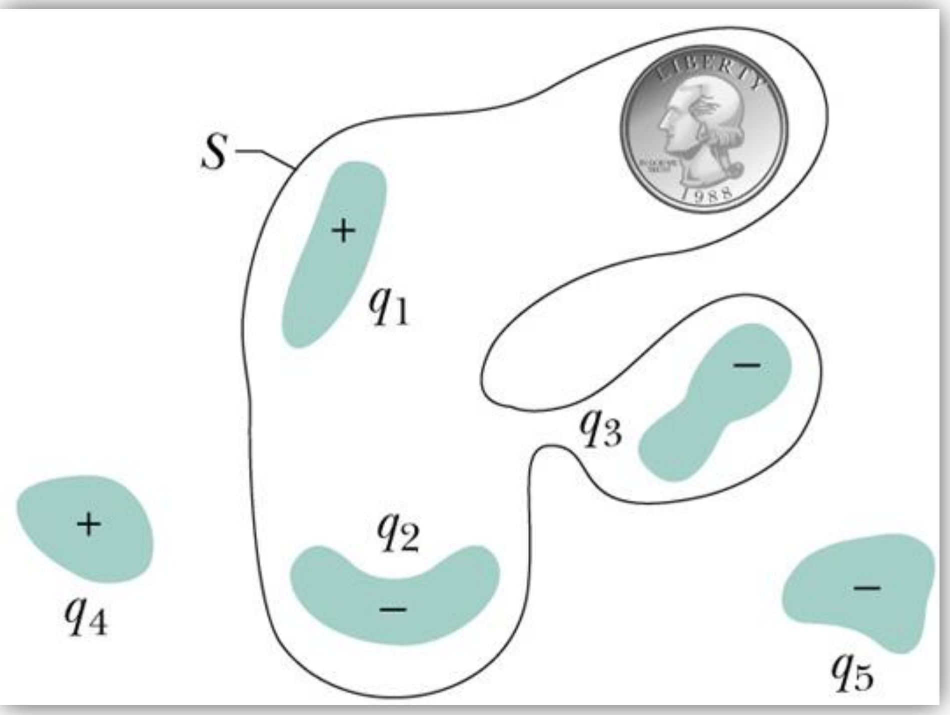
La superficie 3 non ha carica al suo interno

$$\Phi_4 = 0$$

La superficie 4 racchiude entrambe le cariche, per cui la carica netta è nulla

Problema 23.3

Consideriamo la superficie S in figura; le aree verdi rappresentano alcune distribuzioni di carica; la moneta è neutra. Calcoliamo il flusso elettrico attraverso S



$$q_1 = q_4 = 3.1\,\mathrm{nC}$$

$$q_2 = q_5 = -5.9\,\mathrm{nC}$$

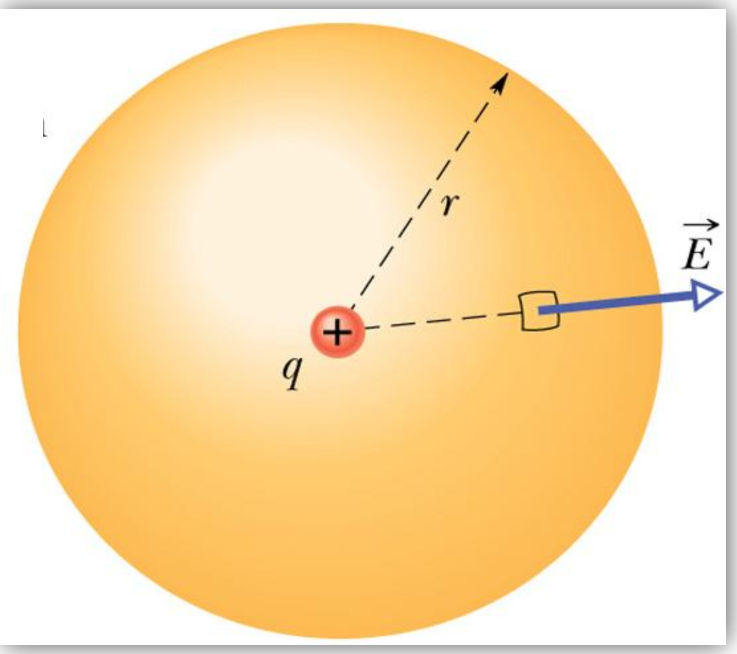
$$q_3 = -3.1\,\mathrm{nC}$$

Solo q1, q2, q3 contribuiscono al flusso; la moneta essendo neutra non contribuisce, anche se polarizzata per induzione

$$\Phi = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0} = -\frac{5.9\,nC}{8.85\times 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\,m^2}} = -0.66\times 10^{3}\,\frac{N\,m^2}{C}$$

Equivalenza tra leggi di Gauss e di Coulomb

Le leggi di Gauss e Coulomb, essendo entrambe valide, debbono potersi ricavare l'una dall'altra. Dimostriamo la loro equivalenza nel caso semplice di una singola carica puntiforme racchiusa da una superficie sferica.



Per simmetria, il campo elettrico è sempre perpendicolare alla superficie ed ha lo stesso modulo su ciascun punto della superficie. Si può quindi scrivere:

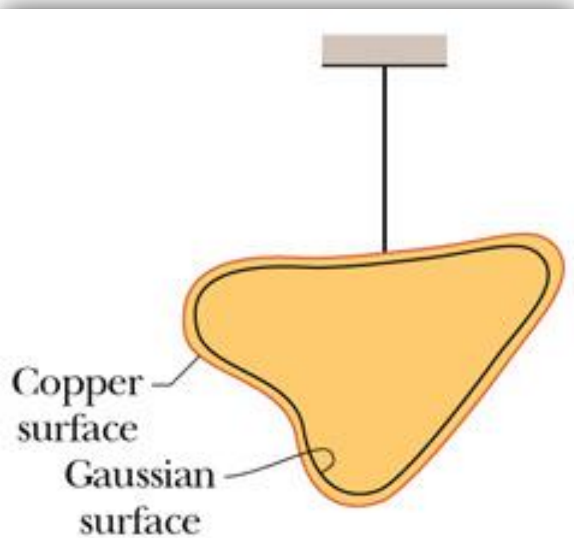
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = ES = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$S = 4\pi r^2$ è la superficie della sfera

$$\Rightarrow \quad E = \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Dalla legge di Gauss, sfruttando la simmetria sferica, abbiamo ricavato la legge di Coulomb

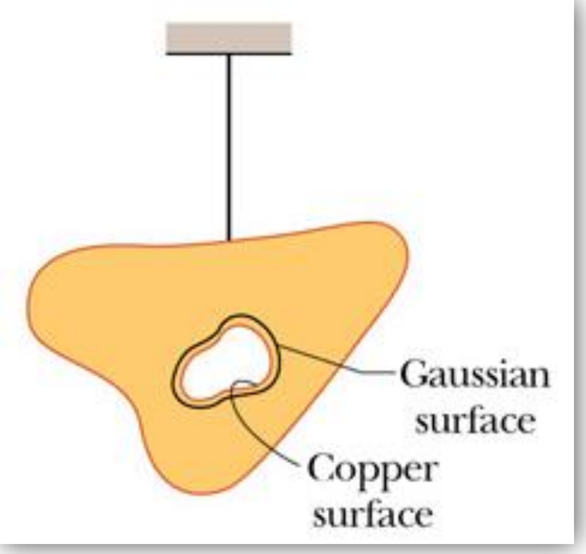
Legge di Gauss e materiali conduttori



In un **conduttore carico la carica si ridistribuisce sulla superficie: non ci sono cariche all'interno del materiale**. Ciò sembra ragionevole considerando che le cariche, potendo muoversi, tendono ad allontanarsi il più possibile. Il teorema di Gauss ci fornisce una prova di questo comportamento.

Consideriamo un conduttore carico appeso ad un filo (dunque isolato); il **campo elettrico in ogni punto interno al conduttore deve essere nullo**, altrimenti si genererebbero correnti perpetue che ovviamente non esistono e violerebbero la **condizione di equilibrio elettrostatico.**
Dunque, **su qualunque superficie chiusa contenuta all'interno del materiale il campo è sempre nullo**, e di conseguenza il **flusso attraverso la superficie è nullo**. Per la legge di Gauss, concludiamo che **non può esistere carica al suo interno**. Il flusso è diverso da zero solo se la superficie di gauss include la superficie del materiale.

Legge di Gauss e materiali conduttori

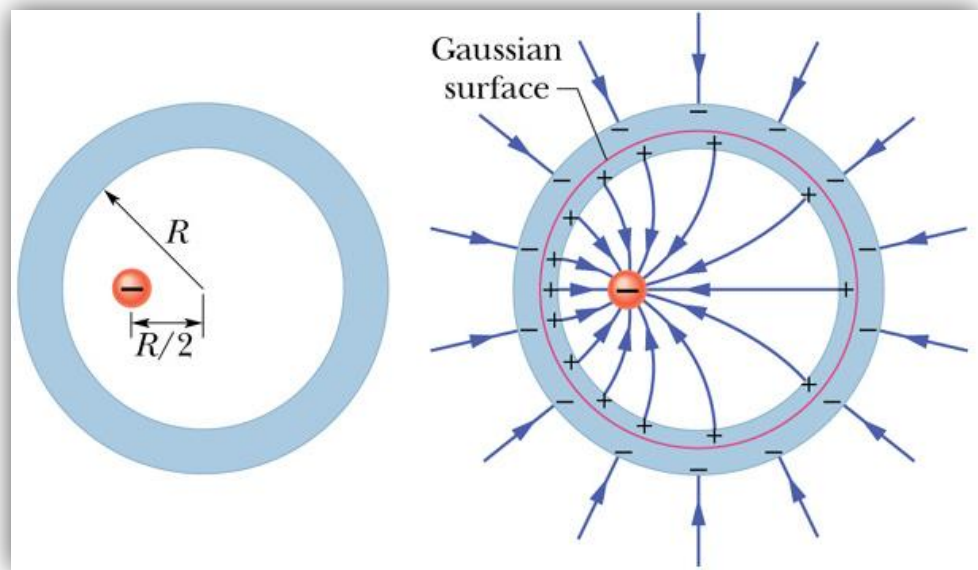


E se il conduttore contiene una **cavità all'interno** ? Consideriamo una superficie gaussiana interna al materiale, che racchiuda totalmente la cavità. Per la legge di Gauss, non può esserci carica interna alla superficie gaussiana, dunque non può esserci carica sulla superficie della cavità. **La carica può distribuirsi soltanto sulla superficie esterna del conduttore, non su una superficie interna**

Problema 23.4

Consideriamo una sfera conduttiva neutra cava al suo interno, con una carica negativa posta all'interno della regione cava, spostata di R/2 rispetto al centro.

Quali cariche compaiono per induzione nel conduttore ? Come sono distribuite ?

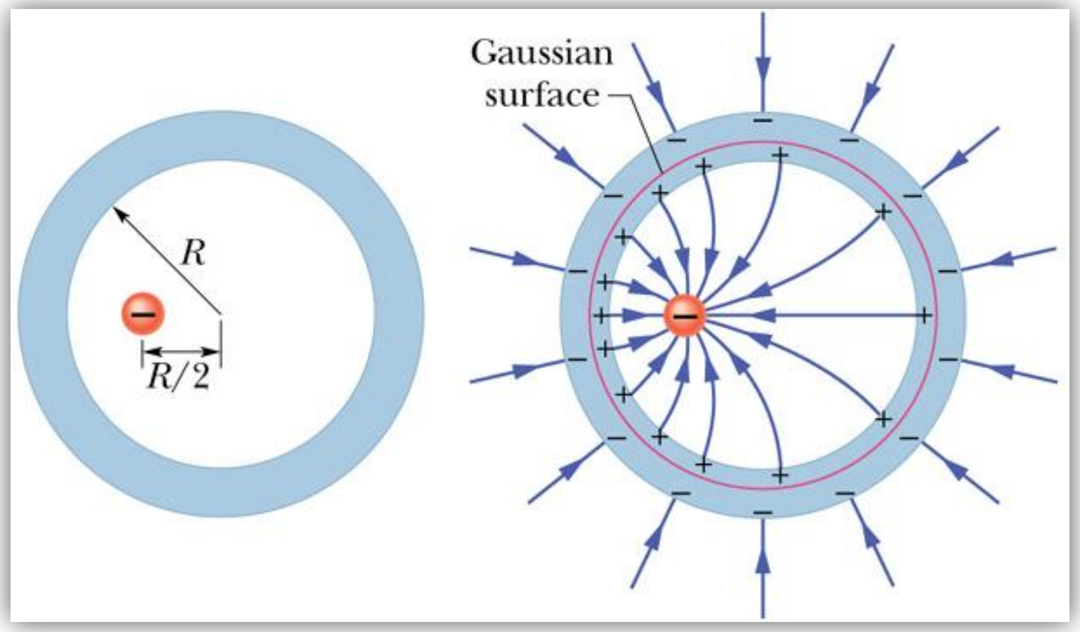


All'equilibrio elettrostatico il campo all'interno del conduttore è nullo in tutti i punti; dunque, considerando la superficie chiusa disegnata in rosso, si ha **che il flusso attraverso la superficie deve essere nullo**, e **nulla deve essere anche la carica interna alla superficie**. Dunque, sulla superficie interna della cavità deve essere distribuita una carica uguale ed opposta in segno a quella della carica puntuale negativa.

La carica positiva generata per induzione sulla parete della cavità è disomogenea, poiché si addensa maggiormente vicino alla carica puntuale negativa, spostata lateralmente rispetto al centro. Infine, poiché la sfera è neutra, una carica uguale e negativa deve generarsi sulla superficie esterna. Questa è distribuita uniformemente, poiché il campo della carica puntiforme negativa e quello della carica indotta positiva si compensano, dunque la carica esterna non risente delle altre cariche.

Problema 23.4

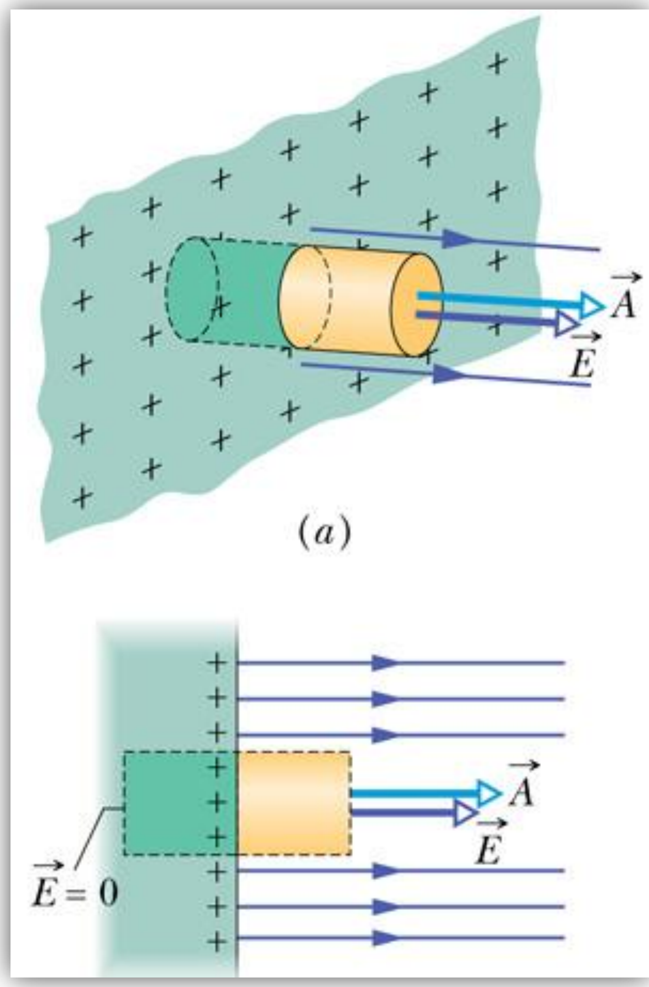
Cosa succede se la pallina ha carica q=-50e, e la sfera conduttiva, invece di essere neutra ha carica Q=-100e ?



All'equilibrio elettrostatico il campo all'interno del conduttore è nullo in tutti i punti; dunque, considerando la superficie chiusa disegnata in rosso, si ha che il flusso attraverso la superficie deve essere nullo, e tale deve essere anche la carica interna alla superficie. Dunque, sulla superficie interna della cavità deve essere distribuita una carica uguale ed opposta in segno a quella della carica puntuale negativa.

Per la conservazione della carica, sulla superficie esterna della sfera deve perciò essere distribuita una carica Q=-150e

Campo elettrico esterno alla superficie di un conduttore



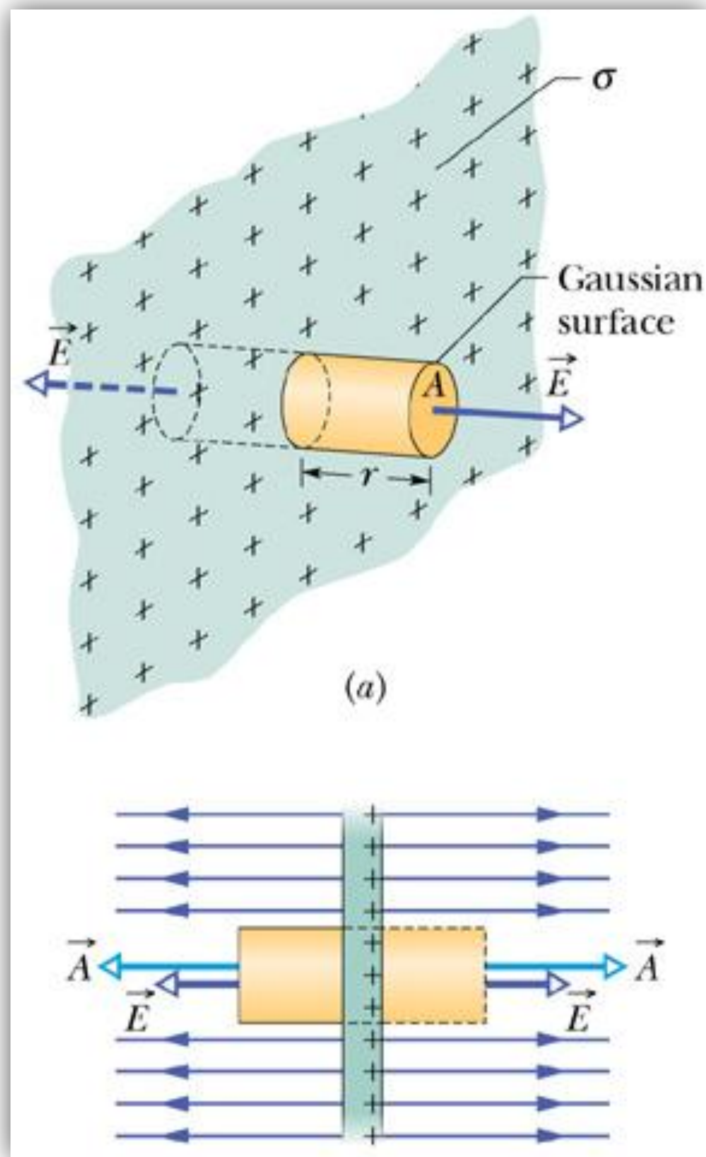
Consideriamo una **superficie piana** (o supponiamo di essere abbastanza vicini alla superficie da poter trascurare la curvatura) con densità σ uniforme. **All'equilibrio elettrostatico il campo deve essere perpendicolare alla superficie**, altrimenti le cariche si muoverebbero sulla superficie. Calcoliamo il flusso attraverso la superficie cilindrica in Figura, contenente una porzione dA di superficie. Il flusso attraverso il cilindretto è dato interamente dal flusso attraverso la base esterna. Se dA è l'area della base:

$$d\Phi = E\,dA = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\,dA}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Campo uniforme in modulo, direzione, e verso

il fatto che il campo sia uniforme NON dipende dalla posizione verticale del cilindretto, né da quanto il cilindretto è lungo, ma solo dalla legge di Gauss e dal fatto che σ è uniforme. L'unica assunzione è che il campo sia perpendicolare alla superficie

Legge di Gauss: lamina isolante



Consideriamo una lamina isolante di dimensione infinita (ad es. un foglio di plastica) carico positivamente su una faccia, con densità di carica uniforme σ; si calcoli il campo elettrico a distanza r dalla superficie.

Per simmetria il campo deve essere perpendicolare alla superficie. Consideriamo il cilindretto il Figura, e valutiamo il flusso attraverso il cilindretto. Se dA è l'area della base cilindrica, trascurando lo spessore del foglio, si ha:

$$d\,\Phi = 2E\,dA = \frac{\sigma\,dA}{\varepsilon_0}$$

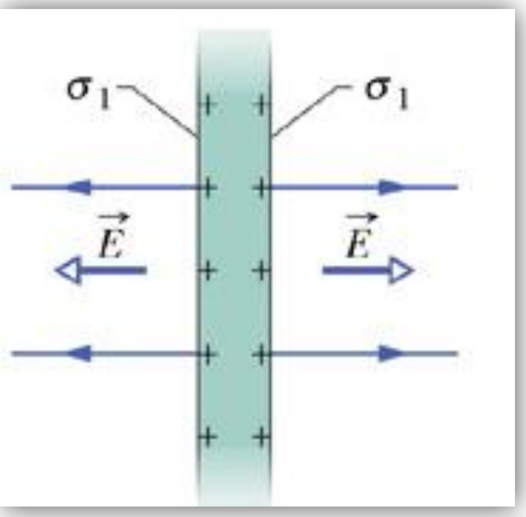
Il fattore 2 tiene conto del flusso attraverso le due basi del cilindro: su entrambe campo e vettore areale sono paralleli e concordi

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Campo uniforme

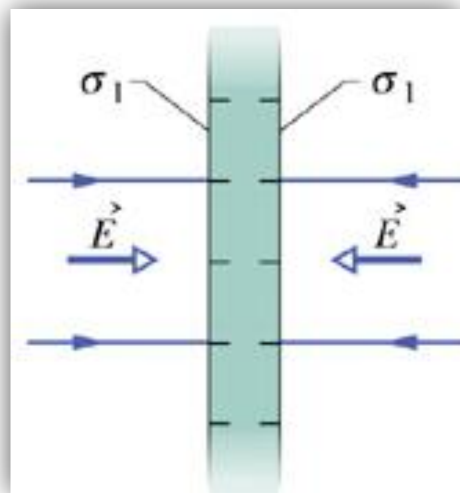
Legge di Gauss: piastra conduttrice

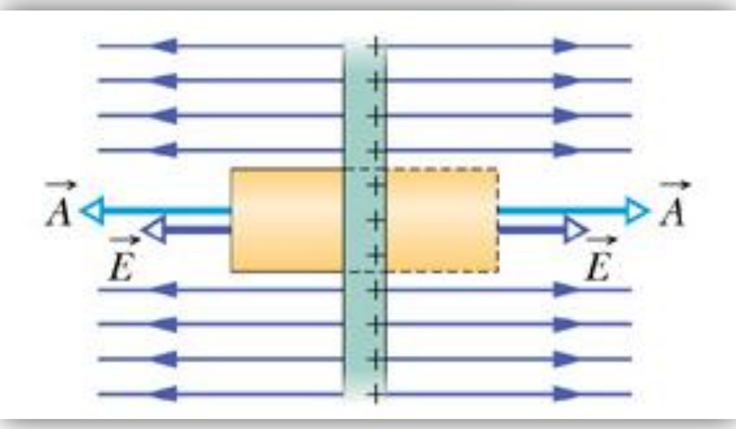
Consideriamo una **piastra conduttiva di dimensione infinita** con carica positiva in eccesso. Al solito, il campo interno al conduttore è nullo e la carica si ridistribuisce sulle superfici. Sia σ_1 la densità di carica uniforme sulle superfici. Utilizzando Gauss, abbiamo visto in precedenza che il campo elettrico all'esterno della superficie è:



$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

Per σ_1 positiva il campo ai due lati della piastra è uscente dalla piastra; per σ_1 negativa il campo è lo stesso in modulo ma entrante nella piastra





Notiamo la differenza col caso del foglio isolante:

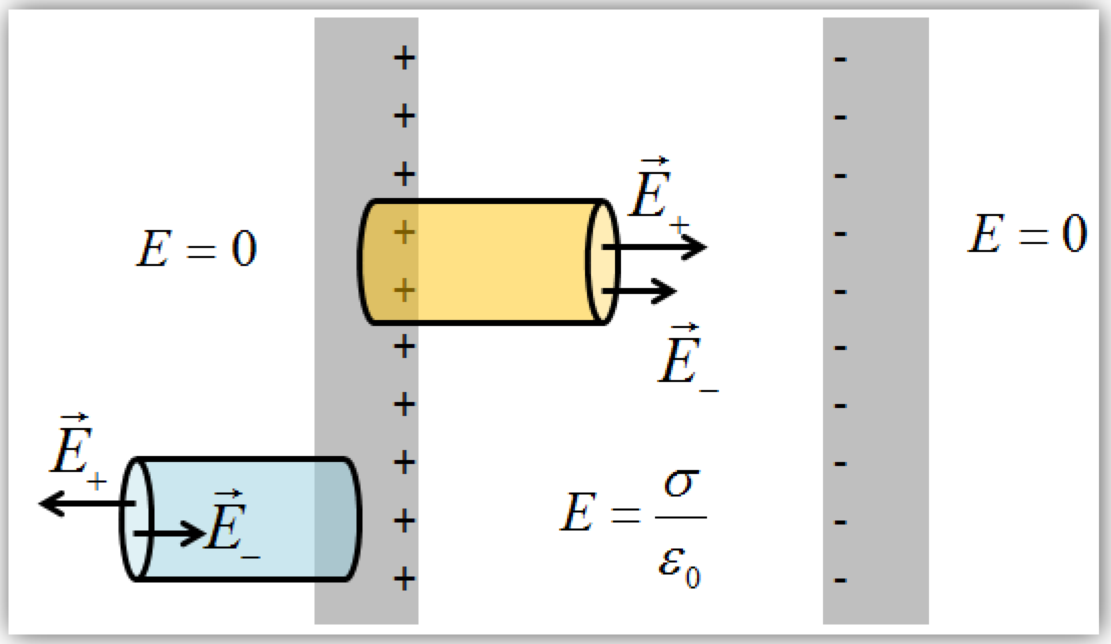
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Qui la carica è fissa e non si ridistribuisce sulle due facce: a parità di carica totale la densità σ_1 deve essere metà di quella dell'isolante, ed il campo all'esterno è lo stesso nei due casi

Legge di Gauss: doppia piastra conduttiva

Consideriamo due piastre conduttive infinite con densità di carica σ uguali in modulo ma opposte in segno, poste una di fronte all'altra. Poiché le cariche si attraggono, esse si depositano sulle superfici interne al doppio strato. Siano E_+ ad E_- i campi elettrici dovuti alle due distribuzioni di carica. Assumiamo al solito che i campi siano perpendicolari alle piastre. Applichiamo Gauss al cilindretto arancione in figura per calcolare il **campo tra le due piastre.** Solo una base del cilindro contribuisce al flusso:

$$d\Phi = E_+ dA + E_- dA = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, dA}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Applichiamo Gauss al cilindretto azzurro per calcolare il **campo esterno alle piastre**. Adesso i campi sono discordi, e la carica interna al cilindro è nulla:

$$d\Phi = E_+ dA + E_- dA = 0$$

$$\Rightarrow E_+ = -E_-; \quad E = 0$$

Legge di Gauss: doppia piastra conduttrice

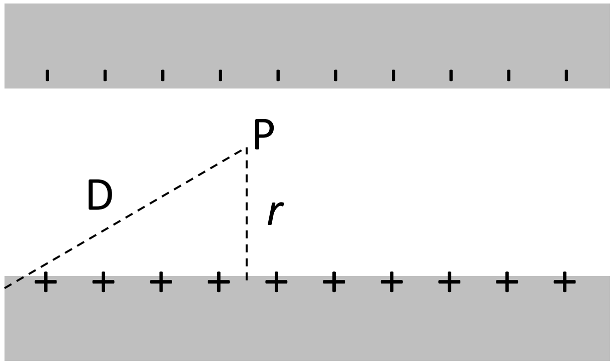
Due considerazioni importanti:

- ✓ Se avessimo applicato Gauss a ciascuna piastra separatamente per ottenere E_+ ed E_- per poi sommarli, avremmo ottenuto un risultato sbagliato. Infatti si avrebbe:

$$E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \cancel{E = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}}$$

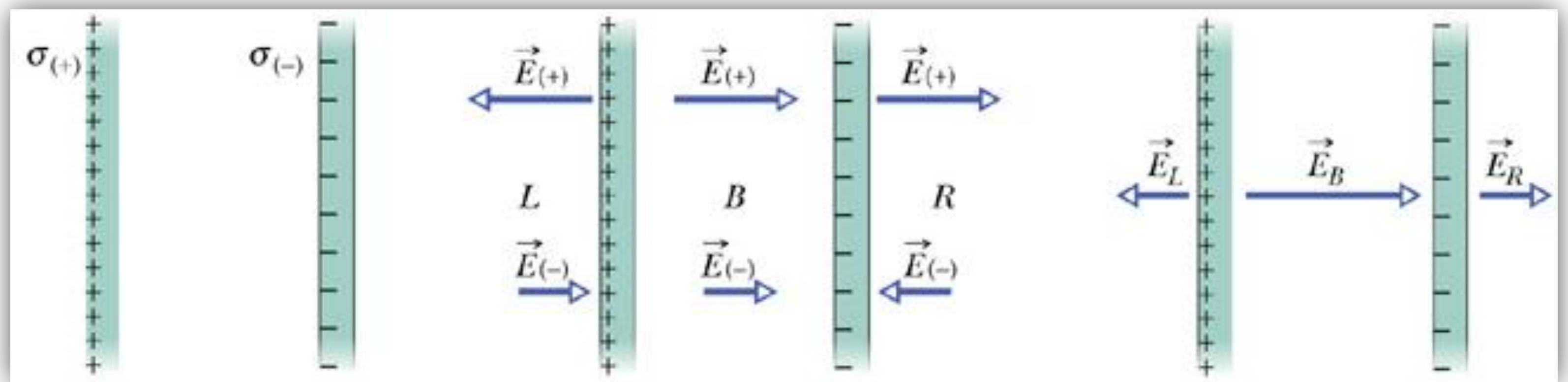
  Per un **conduttore la distribuzione di carica della doppia piastra NON è uguale alla sovrapposizione delle cariche in due piastre isolate**.

- ✓ Si potrebbe pensare che risultati relativi a piastre o fogli infiniti non siano applicabili nella realtà. Al contrario, i risultati sono significativi anche per piastre finite, a patto che i punti in cui si valuta il campo siano molto più lontani dai bordi della piastra che dalla perpendicolare r alla superficie, in modo che i cosiddetti ***effetti di bordo*** **siano trascurabili**



Problema 23.6

Consideriamo due **lamine isolanti parallele molto estese**, con densità $\sigma_+ = 6.8\ \mu C/m^2$ e $\sigma_- = -4.3\ \mu C/m^2$. Calcolare il campo tra le lamine e nelle regioni esterne



Essendo le lamine isolanti, le cariche sulle piastre sono fisse: si può applicare il principio di sovrapposizione e calcolare il campo totale come somma dei campi di ciascuna piastra

$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} = \frac{3.4\times10^{-6}(C/m^2)}{8.85\times10^{-12}\dfrac{C^2}{N\,m^2}} = 0.384\times10^6\,\frac{N}{C}$$

$$E_- = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = \frac{2.15\times10^{-6}(C/m^2)}{8.85\times10^{-12}\dfrac{C^2}{N\,m^2}} = 0.243\times10^6\,\frac{N}{C}$$

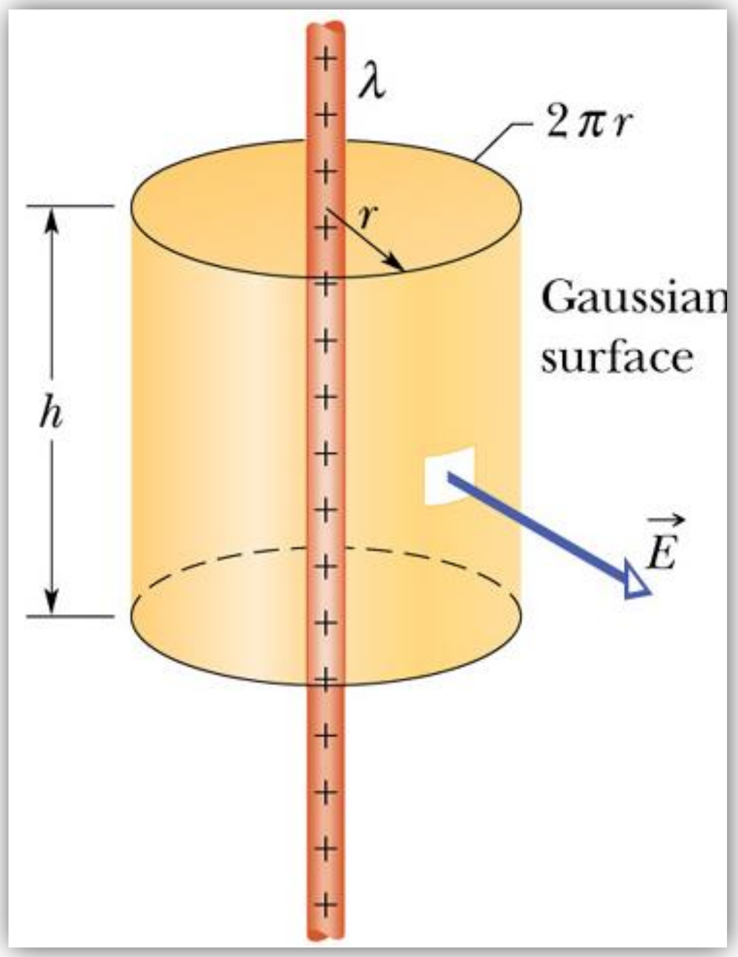
Nella regione interna i campi si sommano:

$$E = E_+ + E_- = 0.627\times10^6\,\frac{N}{C}$$

Nelle regioni esterne si sottraggono:

$$E = E_+ - E_- = 0.141\times10^6\,\frac{N}{C}$$

Legge di Gauss: simmetria cilindrica



Consideriamo una bacchetta di plastica (isolante) di lunghezza infinita, con densità di carica lineare uniforme λ; sfruttiamo la legge di Gauss per calcolare il campo della bacchetta in un punto r.

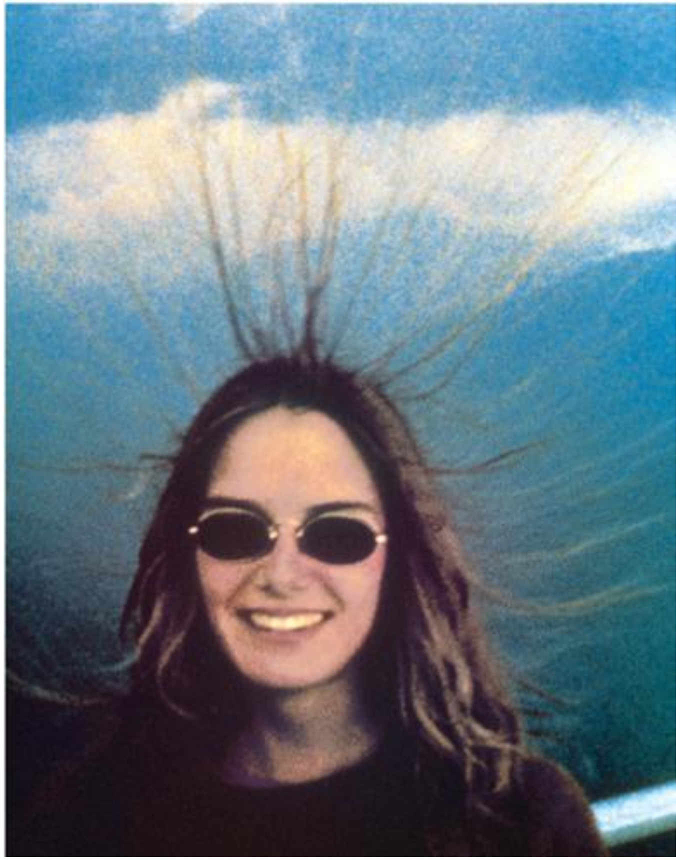
Consideriamo la superficie cilindrica in figura, di altezza h e raggio r; essendo la bacchetta infinita, il campo non può che essere perpendicolare alla superficie del cilindro. Dalla legge di Gauss:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi r h) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

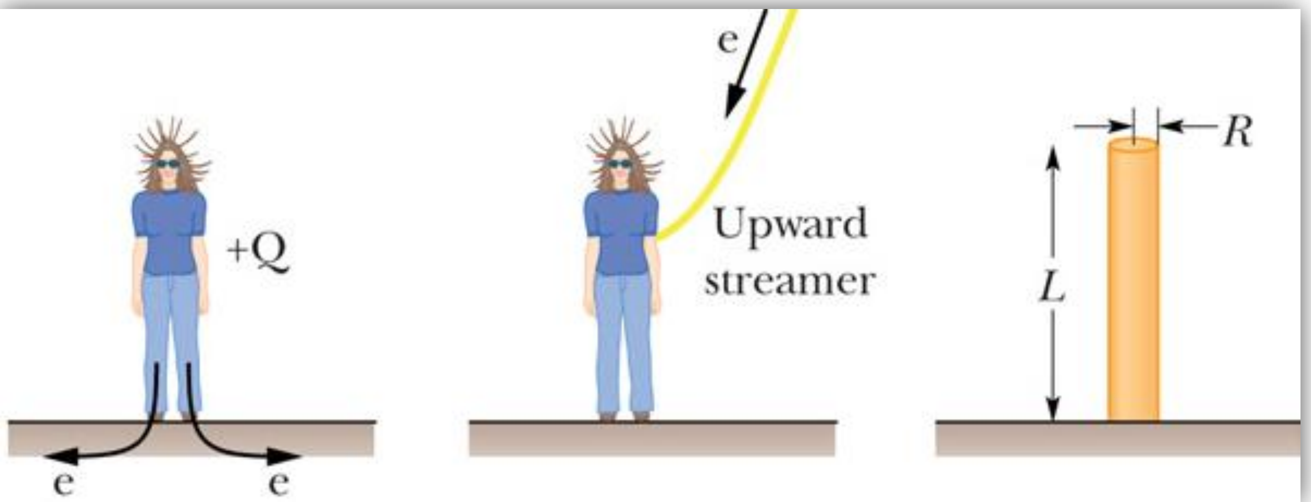
Questa espressione resta valida anche per una bacchetta di dimensioni finite, a patto che la lunghezza della bacchetta sia grande rispetto alla distanza r, in modo da poter trascurare gli effetti di bordo

Problema 23.5



Fenomeni temporaleschi sono in grado di caricare il nostro corpo di grandi quantità di carica. La foto scattata al Sequoia National Park (USA) mostra capelli carichi positivamente che si divaricano in modo spettacolare. Per induzione, la carica negativa alla base di nuvole temporalesche ha spinto via gli elettroni dal corpo della ragazza verso terra, lasciandola in stato di carica netta positiva. Questa pericolosa situazione avrebbe potuto generare una scarica di elettroni dall'aria circostante tendente a neutralizzare la carica, producendo una corrente forse mortale.

Problema 23.5



Approssimiamo il corpo della ragazza con un cilindro conduttore di altezza L=1.8 m e raggio R= 0.1 m; sia E_c=2.4 MN/C il campo critico necessario a scatenare il fulmine

Calcoliamo la carica critica Q di cui deve essere carica la ragazza per produrre il fulmine. Poiché L>>R, sfruttiamo la legge di Gauss per la distribuzione lineare di carica:

$$E_c = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R\,L} \qquad \text{essendo} \quad Q = \lambda L$$

La carica corrispondente al campo critico è quindi:

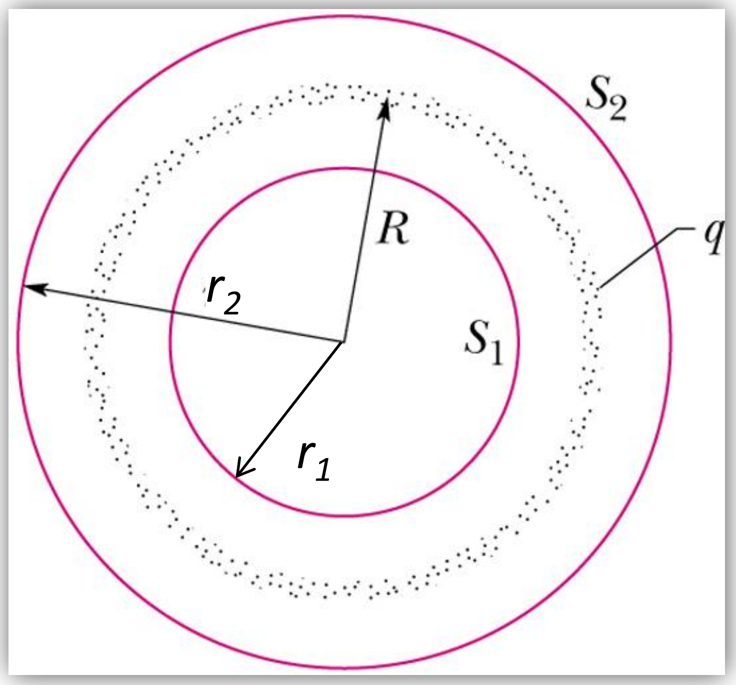
$$Q = 2\pi\varepsilon_0 R\,L\,E_c = \frac{1}{2k}R\,L E_c = \frac{0.1\times1.8\times2.4}{2\times9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}\frac{MNm^2}{C} = 0.24\times10^{-4}C$$

Legge di Gauss: gusci a simmetria sferica

Utilizziamo la legge di Gauss per dimostrare i due teoremi dei gusci sferici:

✓Un **guscio sferico uniformemente carico** attrae o respinge una particella carica posta **al di fuori del guscio come se tutta la carica fosse concentrata nel centro del guscio**.

✓Un **guscio sferico uniformemente carico non esercita alcuna forza elettrostatica su una particella carica posta al suo interno**



Partiamo dal presupposto che il campo elettrico è radiale in tutti i punti. Applichiamo Gauss alla superficie S_2. Si ha:

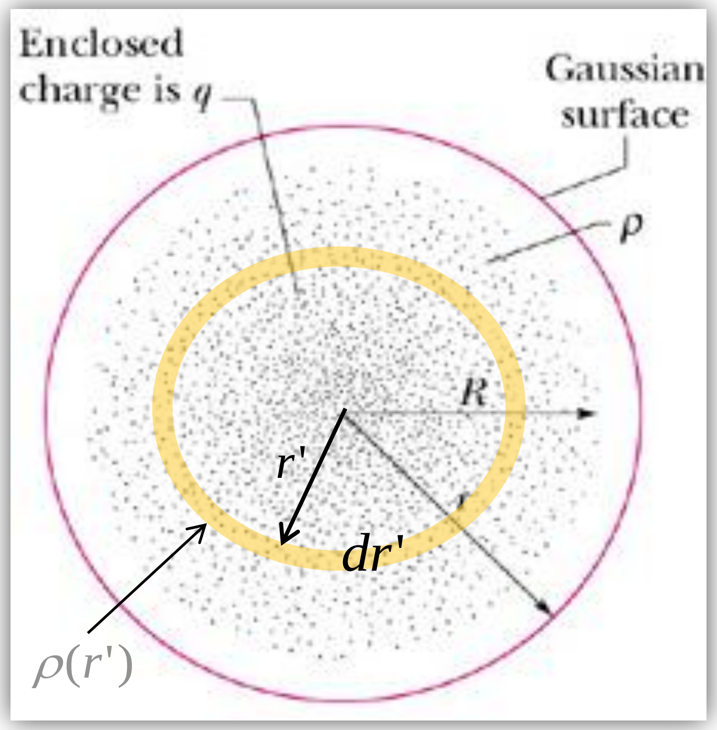
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r_2^{\,2}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^{\,2}}$$

Ovvero il **campo esterno al guscio è uguale a quello di una carica puntiforme *q* collocata al centro**. Applichiamo Gauss alla superficie S_1:

$$\Phi = E\left(4\pi r_1^{\,2}\right) = 0 \Rightarrow E = 0$$

Ovvero il campo generato dal guscio al suo interno è nullo

Legge di Gauss: sfera isolante con densità radiale



Consideriamo una sfera isolante avente densità di carica 3D radiale, ovvero dipendente soltanto dal modulo di *r*: $\rho = \rho(r)$

Per calcolare il campo possiamo scomporre la sfera in tanti gusci sottili concentrici, ciascuno con la sua densità uniforme $\rho(r)$, ed applicare a ciascuno di essi le leggi dei gusci

Calcoliamo il campo nel punto *r* esterno alla sfera carica. Consideriamo il guscio giallo in figura di raggio r' e spessore infinitesimo dr'; Il campo dovuto a questo guscio sottile è:

$$dE_{r'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_{r'}}{r^2}$$

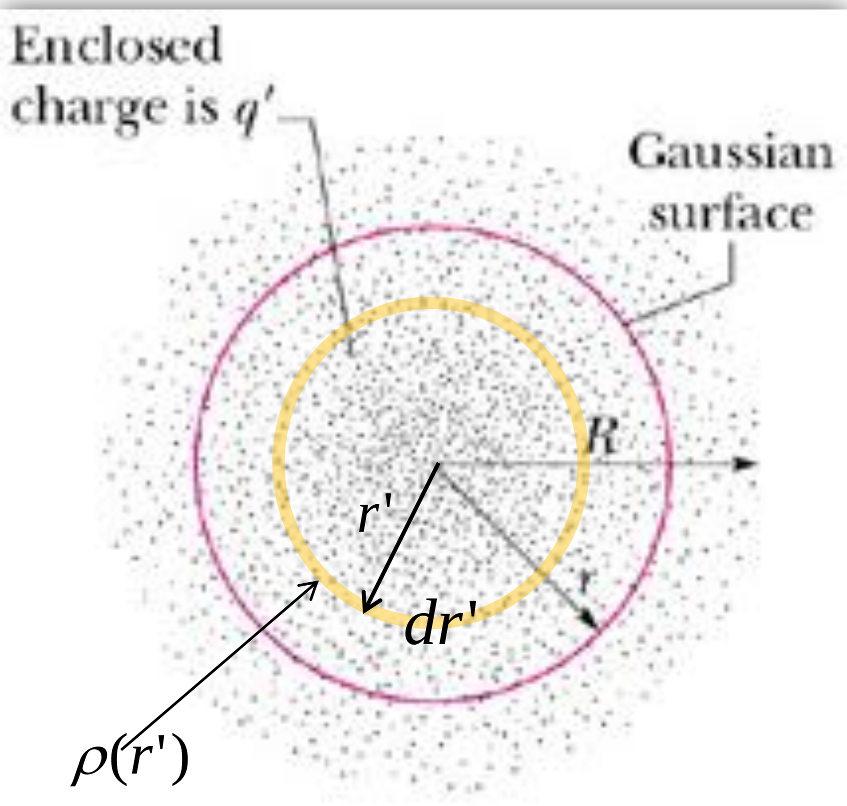
$$dq_{r'} = \rho(r')4\pi r'^2 dr'$$ è la carica del guscio

Ripetendo il ragionamento per tutti i gusci, e sommando sui gusci si ha:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Si ritrova lo stesso risultato ottenuto per una sfera di carica omogenea: **al di fuori del guscio** non importa se la carica sia omogenea o radiale; in entrambe i casi **il campo è quello di una carica puntiforme collocata nel centro della sfera**

Legge di Gauss: sfera isolante con densità radiale



Stessa sfera con densità di carica radiale

$$\rho = \rho(r)$$

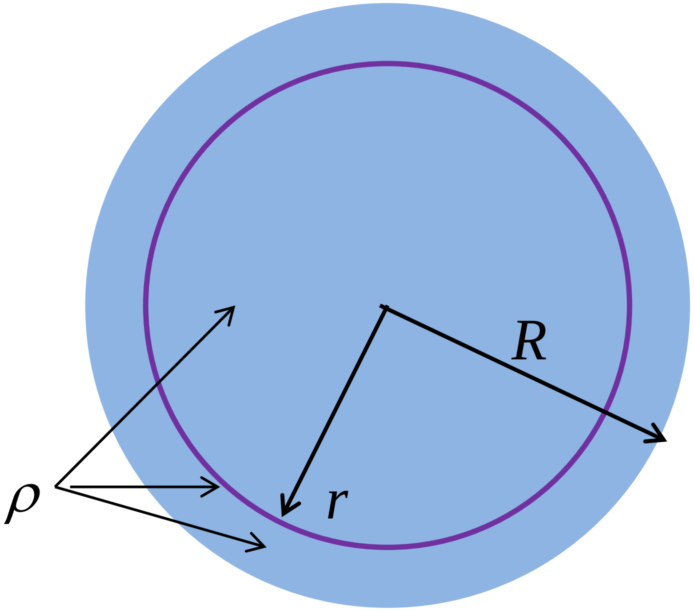
Calcoliamo adesso il **campo in un punto r INTERNO alla sfera**. Scomponiamo la sfera in gusci di raggio maggiore e minore di r, ed applichiamo le regole dei gusci: i primi non contribuiscono, mentre i gusci interni danno

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}$$

Ovviamente adesso q' non è la carica totale della sfera, ma soltanto quella dei gusci interni

Il campo in un punto interno *r* alla sfera di densità radiale è **uguale al campo di una carica puntiforme collocata nel centro della sfera, di carica uguale a tutta e solo la carica contenuta all'INTERNO della superficie di raggio *r*.**

Legge di Gauss: sfera isolante uniformemente carica



Applichiamo il risultato recedente al caso in cui la densità non sia radiale ma uniforme, ovvero costante in tutti i punti della sfera

$$\rho = \text{costante}$$

Sia q' la carica contenuta nella superficie di raggio r', e q la carica totale della sfera.

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}$$

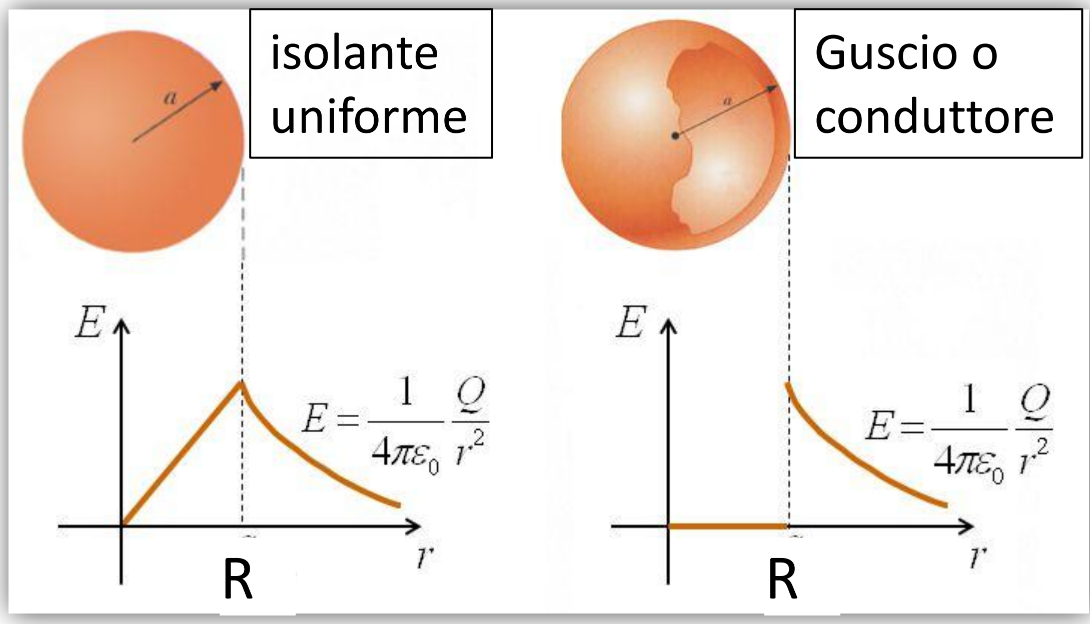
Essendo la densità costante, si ha:

$$q = \rho\frac{4\pi R^3}{3}; \quad q' = \rho\frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \frac{q'}{q} = \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \quad E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r$$

Il campo in un punto interno *r* ad una sfera uniformemente carica è molto diverso da quello esterno, e **cresce linearmente con la distanza dall'origine**

Legge di Gauss: sfera uniformemente carica



Riepilogando, nei casi di:

- ✓Sfera uniformemente carica
- ✓Sfera con simmetria radiale
- ✓Guscio sferico

Il **campo esterno** è sempre lo stesso ed uguale a quello di una carica puntiforme collocata nel centro della sfera:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Di contro, il **campo interno** è molto diverso nei 3 casi:

per un guscio o una sfera conduttiva: $E = 0$

per una sfera uniformemente carica: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r$

per la sfera a simmetria radiale il campo interno è più complesso e dipende dal valore della densità $\rho(r)$