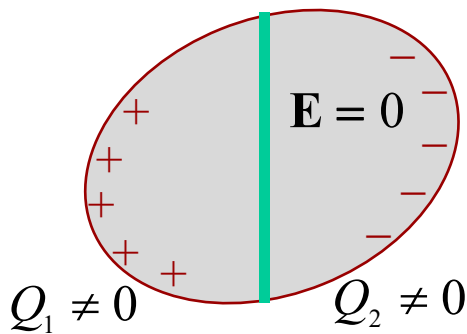


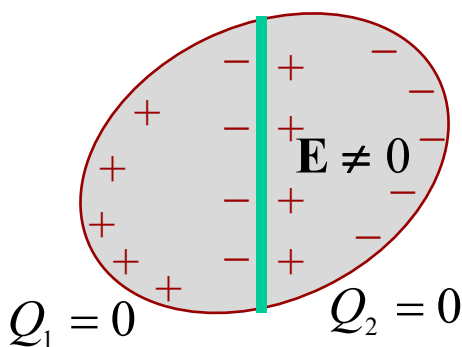
Dielettrici



Conduttore

\Rightarrow carica libera

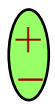
\Rightarrow **induzione**



Dielettrico

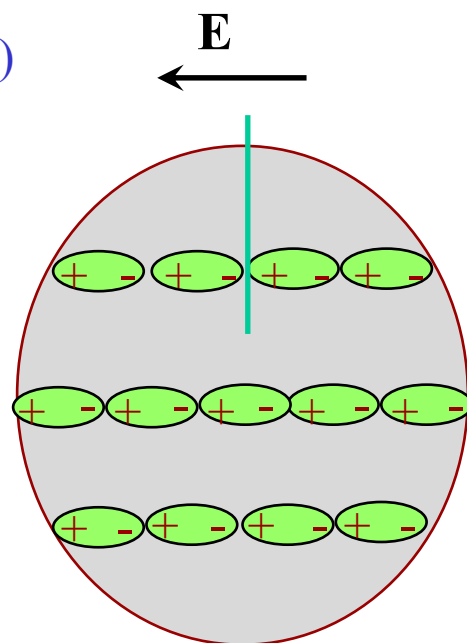
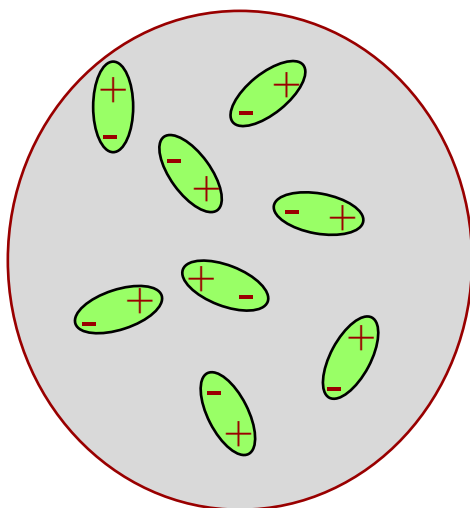
\Rightarrow carica di polarizzazione

\Rightarrow **polarizzazione**



Dipolo elettrico

(es. sistema nucleo-elettrone)



Il dielettrico può essere rappresentato come una distribuzione di **dipoli elettrici**, cioè coppie di cariche uguali e contrarie, legate, che possono ruotare intorno ad una posizione di equilibrio.

Dielettrici e Polarizzazione

Il **dipolo** è l'elemento costitutivo

⇒ Il dielettrico è **sempre globalmente neutro**.

La distribuzione dei dipoli può determinare distribuzioni di carica di superficie e di volume.

Polarizzazione P: Momento di dipolo per unità di volume

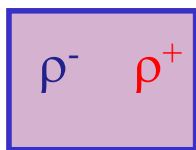
$$\mathbf{P} \triangleq \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau} = N \langle \mathbf{p} \rangle \quad (N = \text{Densità di dipoli})$$

S.I.: $(\text{Cm})/(\text{m}^3) = \text{C}/\text{m}^2$

Grandezza macroscopica, definita in ogni punto del volume del dielettrico

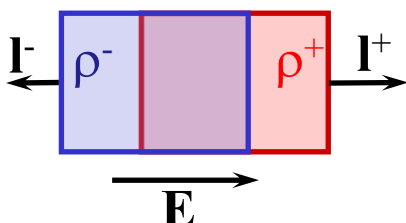
Schematizziamo il sistema con densità di carica di volume positive e negative e definiamo il campo nel dielettrico come campo medio nell'intorno di un punto.

In assenza di \mathbf{E} :



$$\rho^+ + \rho^- = 0 \quad \left| \rho^+ \Delta\tau \right| = \left| \rho^- \Delta\tau \right|$$

In presenza di \mathbf{E} :



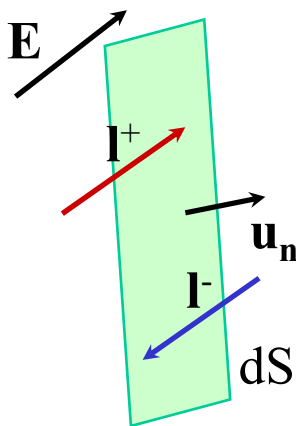
spostamento netto: $\mathbf{l} = \mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-$

$$\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-) \rho^+ \Delta\tau = \rho^+ \Delta\tau \mathbf{l}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \rho^+ \mathbf{l}$$

Distribuzione di **carica di superficie** generata dalla parte terminale dei dipoli.

Distribuzione di **carica di volume** generata da disomogeneità del materiale (dipoli diversi nel volume non vengono compensati)



dS = superficie infinitesima all'interno del volume del dielettrico.

Attraverso dS passa una carica:

$$dQ^+ = \rho^+ \mathbf{l}^+ \cdot \mathbf{u}_n dS$$

$$dQ^- = \rho^- \mathbf{l}^- \cdot \mathbf{u}_n dS$$

$$\Rightarrow dQ = \rho^+ (\mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-) \cdot \mathbf{u}_n dS = \rho^+ \mathbf{l} \cdot \mathbf{u}_n dS = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

Per una superficie chiusa Σ all'interno del dielettrico:

$$Q_p = -\iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

dove il segno $-$ indica che la carica è entrante.

$$Q_p = \iiint_{\tau} \rho_p d\tau \quad \Rightarrow \quad \rho_p = -\text{div } \mathbf{P}$$

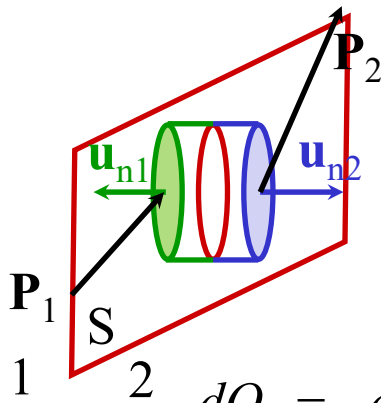
Sulla superficie del dielettrico:

$$dQ_p = \sigma_p dS = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n$$

La carica totale è sempre nulla:

$$Q_T = \iint_{\Sigma} \sigma_p dS + \iiint_{\tau} \rho_p d\tau = \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS - \iiint_{\tau} \text{div } \mathbf{P} d\tau = 0$$

Condizioni al contorno tra due dielettrici



S = Superficie di separazione tra due dielettrici.

Consideriamo un cilindro le cui basi siano una nel mezzo 1 e l'altra nel mezzo 2.

$$dQ_p = -d\Phi_\Sigma(\mathbf{P})$$

$$dQ_p = dQ_1 + dQ_2 + dQ_s$$

$$dQ_1 = \rho_1 d\tau_1$$

$$dQ_2 = \rho_2 d\tau_2$$

$$dQ_s = \sigma_p dS$$

Facendo tendere a zero l'altezza del cilindro:

$$dQ_1 + dQ_2 \rightarrow 0$$

$$d\Phi_{lat} \rightarrow 0$$

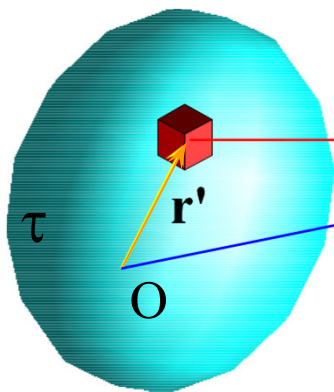
$$\Phi_\Sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{u}_{n2} dS_2 + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_{n1} dS_1 = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{u}_n dS = -\sigma_p dS$$

$$\sigma_p = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{u}_n = P_{n1} - P_{n2} = -[P_n]$$

Alla superficie di separazione:

- la componente normale di \mathbf{P} è discontinua
- la discontinuità è pari alla densità di carica di polarizzazione netta

Campo \mathbf{E} da cariche di polarizzazione



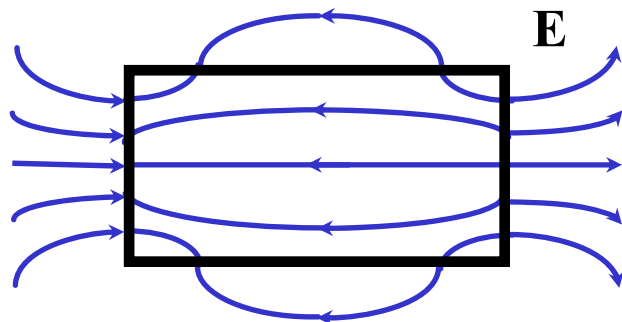
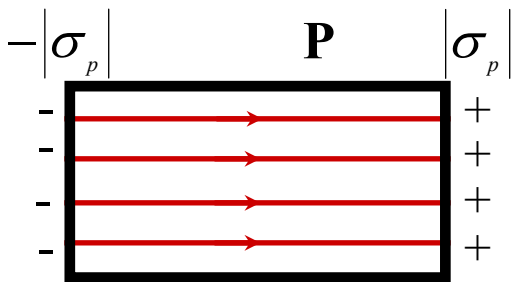
Consideriamo un elemento di volume $\Delta\tau$

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{P}\Delta\tau$$

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Delta\tau$$

$$\Rightarrow V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau$$

Esempio: Cilindro finito uniformemente polarizzato



$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = |\mathbf{P}| \quad \rho_p = 0$$

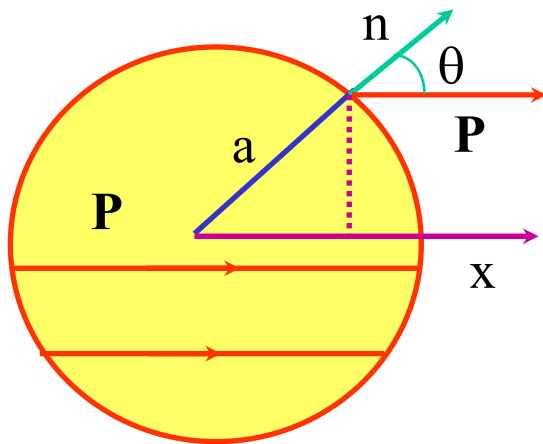
A grandi distanze, \mathbf{E} è il campo di un dipolo di momento:

$$p = (\sigma_p S) h = \sigma_p \tau = P \tau$$

Per uno strato indefinito ($S \rightarrow \infty$): $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$

Per un cilindro infinitamente lungo ($h \rightarrow \infty$): $\mathbf{E} \rightarrow 0$

Esempio: Sfera dielettrica polarizzata uniformemente



$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = P \cos \theta$$

Per simmetria, il sistema equivale a un dipolo posto nel centro della sfera costituito da due cariche Q a distanza l

$$Q = \rho^+ \tau \quad -Q = \rho^- \tau = -\rho^+ \tau$$

$$\mathbf{p} = Ql = \tau \rho^+ l = \tau \mathbf{P}$$

All'esterno della sfera:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \tau$$

Sulla superficie: $r = a \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = Pa \cos \theta \quad x = a \cos \theta$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \frac{P}{a^3} x = \frac{\tau P x}{3\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{P}{3\epsilon_0} x$$

Essendo \mathbf{P} uniforme: $\text{div } \mathbf{P} = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$

Posto: $V = kx$, dove: $k = P/3\epsilon_0$

$$V = \frac{P}{3\epsilon_0} x \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

V soddisfa l'eq. di Laplace e le condizioni al contorno.
 \mathbf{E} è uniforme e opposto a \mathbf{P} .

Vettore spostamento elettrico \mathbf{D}

Per il teorema di Gauss:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \frac{Q_{lib} + Q_p}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \frac{Q_{lib}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

Quindi:

$$\iint_{\Sigma} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{u}_n dS = Q_{lib}$$

Definiamo: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \text{Vettore spostamento elettrico}$

Nel S.I. \mathbf{D} si misura in: $C m^{-2}$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D} &= \rho_{lib} \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho_{lib} + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Da:

$$\epsilon_0 \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0 = \oint_{\gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t dl - \oint_{\gamma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl$$

Cioè:

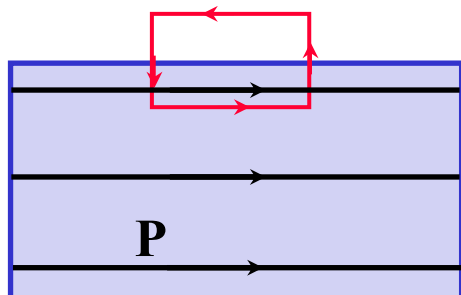
$$\text{rot } \mathbf{D} = \text{rot } \mathbf{P}$$

In generale: $\text{rot } \mathbf{P} \neq 0 \Rightarrow \text{rot } \mathbf{D} \neq 0$

$\Rightarrow \mathbf{D}$ non è conservativo

Esempi: Polarizzazione uniforme

a) Mezzo generico

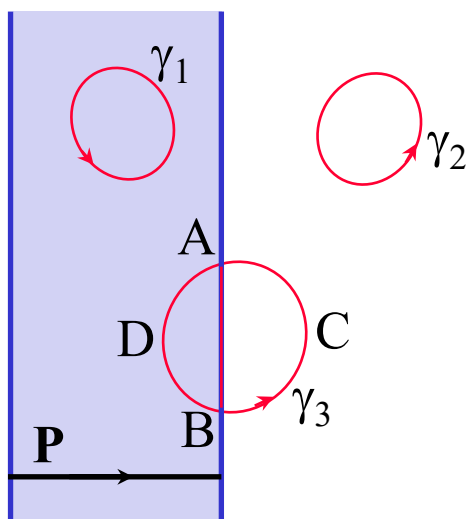


\mathbf{P} uniforme

$$\oint_{\gamma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = Pl \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rot } \mathbf{P} \neq 0$$

b) Strato indefinito



\mathbf{P} uniforme

$$\gamma_1 : \mathbf{P} = \text{cost} \Rightarrow \oint_{\gamma_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\gamma_2 : \mathbf{P} = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma_2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\gamma_3 : \oint_{\gamma_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = ?$$

$$\oint_{ABC} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0 \Rightarrow \int_{AB} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl + \int_{BCA} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\mathbf{P} \perp AB \Rightarrow \int_{AB} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\Rightarrow \int_{BCA} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\text{Analogamente: } \int_{ADB} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0 \quad (\gamma_3 = BCA \cup ADB)$$

$$\text{rot } \mathbf{P} = 0$$

Suscettività Dielettrica e Costante Dielettrica

Relazione caratteristica $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$

Consideriamo **materiali omogenei**

- Materiali isotropi

- \mathbf{P} , \mathbf{E} e \mathbf{D} sono **paralleli**
- χ ed ε sono **scalari**

$$\mathbf{P} = \chi(\mathbf{E})\mathbf{E} \quad \mathbf{P} \parallel \mathbf{E} \quad \chi = \text{Suscettività dielettrica}$$

Nel S.I.: $F/m = C^2/(Nm^2)$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi \mathbf{E} = \varepsilon(\mathbf{E}) \mathbf{E}$$

$$\varepsilon(\mathbf{E}) = \varepsilon_0 + \chi(\mathbf{E}) \quad \varepsilon = \text{Costante dielettrica}$$

- Materiali lineari

Per certi intervalli di temperatura e campo \mathbf{E} , molti dielettrici omogenei e isotropi sono lineari, cioè:

- \mathbf{P} , \mathbf{E} e \mathbf{D} sono **proporzionali**
- χ ed ε sono **costanti**

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}$$

$\varepsilon_r = \text{Costante dielettrica relativa}$

($\varepsilon_{r,aria} \cong 1.0006$, $\varepsilon_{r,vetro} \approx 4-8$, $\varepsilon_{r,acqua} \cong 80$)

$$\text{rot } \mathbf{D} = \text{rot}(\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \text{rot } \mathbf{E} + \text{grad } \varepsilon \times \mathbf{E} = \text{grad } \varepsilon \times \mathbf{E}$$

Se il mezzo è omogeneo ($\varepsilon = \text{cost}$) $\Rightarrow \text{grad } \varepsilon = 0$

$$\text{rot } \mathbf{D} = 0$$

- **Materiali anisotropi** ($\mathbf{P} \nparallel \mathbf{E}$)

Solidi cristallini e liquidi particolari (cristalli liquidi)

$$\begin{aligned}P_x &= \chi_{11}E_x + \chi_{12}E_y + \chi_{13}E_z \\P_y &= \chi_{21}E_x + \chi_{22}E_y + \chi_{23}E_z \\P_z &= \chi_{31}E_x + \chi_{32}E_y + \chi_{33}E_z\end{aligned}$$

- **Materiali non lineari** ($\mathbf{P} \not\propto \mathbf{E}$)

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} + \chi_2 \mathbf{E}^2 + \chi_3 \mathbf{E}^3 + \dots$$

Applicazione: Modulatori ottici telecom

- **Materiali piezoelettrici**

Cristalli (es. quarzo), ma anche ceramiche

Se polarizzati, si deformano

Applicazioni: Posizionatori micrometrici, oscillatori al quarzo

Se deformati, si polarizzano

Applicazioni: Dinamometri

- **Altri materiali**

- Elettreti
- Ferroelectrici

Per i **dielettrici lineari**:

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\operatorname{div}(\chi \mathbf{E}) = -\operatorname{div}[\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}] = \\ &= -\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_{lib} \end{aligned}$$

$$\rho_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_{lib}$$

Analogamente, per la carica di superficie
(es. superficie di contatto tra dielettrici e conduttori):

$$\sigma_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_{lib}$$

Equazioni generali per i mezzi lineari

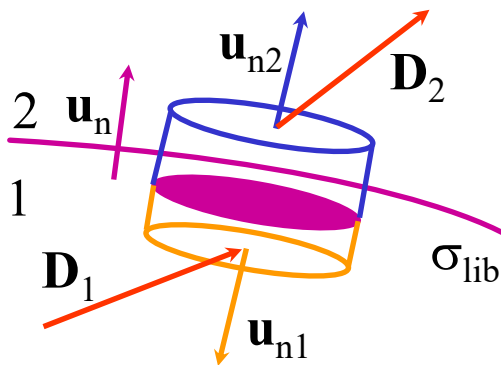
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 V &= -\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} & \text{per } \rho_{lib} &= 0 & \nabla^2 V &= 0 \end{aligned}$$

Presenza di più dielettrici

- discontinuità alla superficie fra dielettrici diversi
- condizioni al contorno necessarie su ogni superficie

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2} \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 \\ \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} &= \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} \end{aligned}$$

Condizioni al contorno per \mathbf{E} e \mathbf{D}



Cilindro di altezza infinitesima con le basi rispettivamente nel mezzo 1 e 2

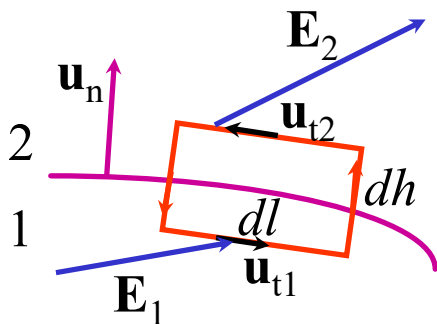
$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}$$

$$\sigma_{\text{lib}} dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}_{n1} dS + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_{n2} dS$$

$$[D_n] = \sigma_{\text{lib}}$$

$$\text{Se } \sigma_{\text{lib}} = 0 \Rightarrow [D_n] = 0$$

Se non c'è carica libera sulla superficie di separazione, si conserva la componente normale di \mathbf{D} ($\text{div } \mathbf{D} = 0$)



Linea chiusa rettangolare, a cavallo della superficie, con linee normali infinitesime ($dh \ll dl$)

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_{t2} dl - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_{t1} dl = 0$$

$$[E_t] = 0$$

La componente tangente del campo \mathbf{E} si conserva sempre ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$)

Legge di rifrazione delle linee di campo

In assenza di carica libera sulla superficie:

$$\begin{aligned}[D_n] &= 0 \Rightarrow [\varepsilon_0 E_n + P_n] = 0 \\ \Rightarrow [\varepsilon_0 E_n] &= -[P_n] = \sigma_p\end{aligned}$$

Inoltre:

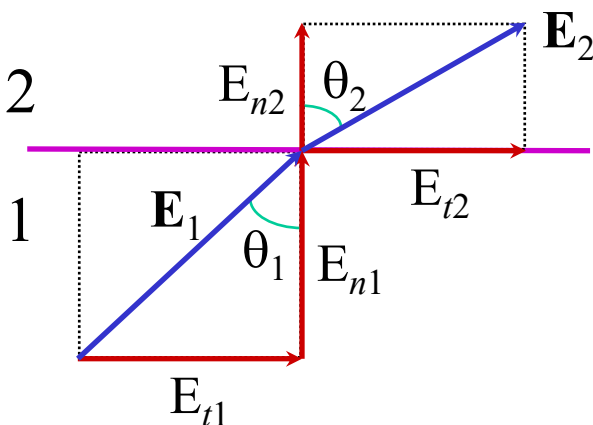
$$\begin{aligned}[E_t] &= 0 \\ \Rightarrow [D_t] &= [P_t]\end{aligned}$$

Per due mezzi lineari in assenza di cariche libere sulla superficie di separazione:

$$D_{n1} = D_{n2} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

Dividendo per $E_{t1} = E_{t2}$

$$\varepsilon_1 \frac{E_{n1}}{E_{t1}} = \varepsilon_2 \frac{E_{n2}}{E_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\tan \theta_2}$$

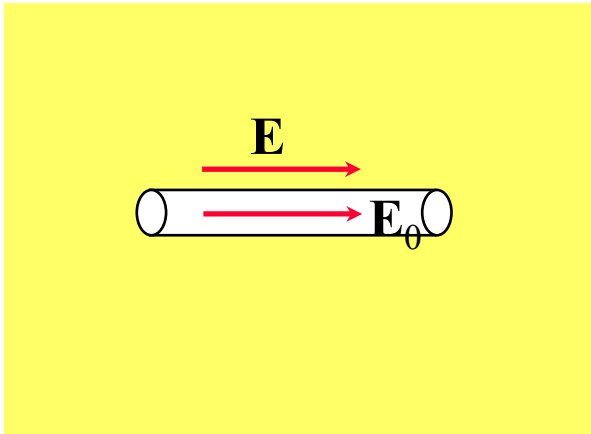


$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Legge di rifrazione
delle linee di campo

Definizione operativa di **E** e **D**

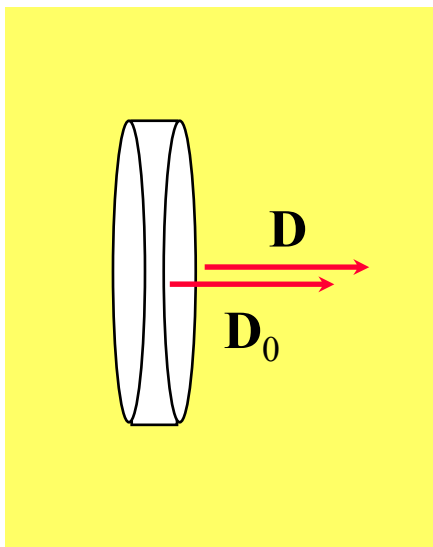
Cavità cilindrica con asse parallelo ad **E** e altezza grande rispetto alle dimensioni delle basi.



$$\begin{aligned} h &\gg \sqrt{S} & [E_t] &= 0 \\ \Rightarrow E &= E_t = E_{0t} = E_0 \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \end{aligned}$$

Per la conservazione della componente tangente di **E**, il campo nella cavità è uguale a quello nel dielettrico.

Cavità cilindrica con asse parallelo a **D** e altezza piccola rispetto alle dimensioni delle basi.



$$\begin{aligned} h &\ll \sqrt{S} & [D_n] &= 0 \\ \Rightarrow D &= D_n = D_{0n} = D_0 \\ \Rightarrow \mathbf{D} &= \mathbf{D}_0 \end{aligned}$$

Per la conservazione della componente normale di **D**, il campo **D** nella cavità è uguale a quello nel dielettrico.

Energia elettrostatica

U in presenza di un dielettrico è il lavoro per:

- La costruzione della **distribuzione di carica libera** ρ_{lib}
(= portare la carica dall'infinito alla configurazione finale)
- La **polarizzazione del dielettrico**
(dovuta alla presenza di carica libera)

Equivalentemente: U è il lavoro per costruire la **distribuzione di carica libera**, ma **in presenza** del potenziale dovuto sia a ρ_{lib} che a ρ_p

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \rho_{\text{lib}} V d\tau$$

dove: $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ V è soluzione dell'equazione:

$$\rho_{\text{lib}} = \text{div } \mathbf{D}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_{\text{lib}} + \rho_p}{\epsilon_0}$$

In generale, per uno scalare (V) e un vettore (\mathbf{D}):

$$\text{div}(\mathbf{VD}) = V \text{div } \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \text{grad } V = V \text{div } \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$$

↑ a) ↑ b)

a) Lavoro per costruire la distribuzione di carica
(come nel vuoto)

b) Lavoro di polarizzazione del dielettrico

A parità di campo \mathbf{E} la densità di energia u è maggiore in presenza di dielettrici (b)

Sfera dielettrica in campo \mathbf{E}_0 uniforme

Il campo totale \mathbf{E} è uguale al campo esterno \mathbf{E}_0 più il campo determinato dalla polarizzazione della sfera \mathbf{E}_p

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$$

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

Supponendo \mathbf{P} uniforme nella sfera

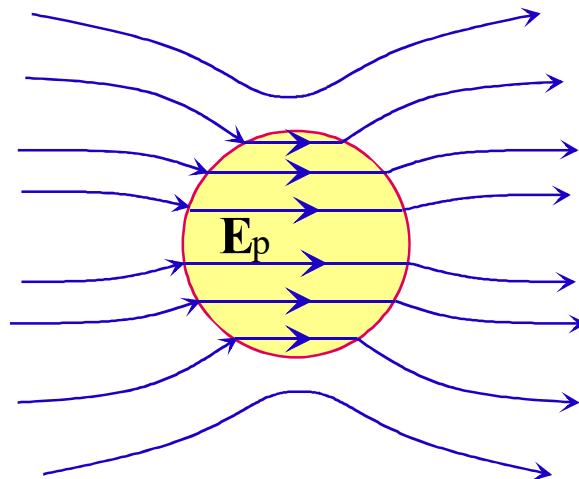
$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{3} \mathbf{E}$$

anche il campo \mathbf{E} risulta uniforme nella sfera

$$\mathbf{E} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \mathbf{E}_0 \quad (\mathbf{E} < \mathbf{E}_0)$$
$$\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{(2 + \epsilon_r) \epsilon_0} \mathbf{E}_0$$

all'esterno \mathbf{E}_p è un campo di dipolo



Campo elettrico efficace

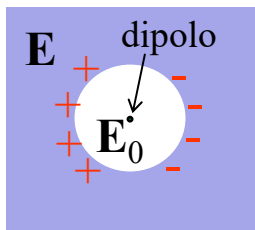
E_{eff} = Campo elettrico efficace

= Campo che agisce sulla singola molecola nella posizione considerata

= Campo dovuto a tutte le molecole del dielettrico, eccetto quella considerata

Il dielettrico si comporta come una distribuzione di dipoli.

Supponiamo di rimuovere una sfera di dielettrico centrata nel punto P in cui vogliamo valutare E_{eff} .



$$E_{\text{eff}} = E_0 + E_{\text{dip}}$$

con: E_0 = Campo in P dopo aver tolto la sfera

E_{dip} = Contributo di tutti i dipoli, eccetto quello in P

$$E_0 = E - E_{\text{sfera}}$$

con: E = Campo nel dielettrico prima di rimuovere la sfera

E_{sfera} = Campo generato dalla sfera di dielettrico

$$E_{\text{sfera}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

In molte situazioni (gas, liquidi non polari, cristalli a reticolo cubico, ...):

$$E_{\text{dip}} \cong 0$$

$$\Rightarrow E_{\text{eff}} \cong E_0 = E + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Modello microscopico della polarizzazione

Il comportamento elettrico di un dielettrico è caratterizzato dalla **relazione costitutiva** $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ del materiale.

$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ può essere determinata:

- **sperimentalmente**
- con un **modello microscopico** del materiale.

Una trattazione teorica accurata si basa sulla meccanica quantistica. Vediamo una **trattazione classica** approssimata, ma qualitativamente corretta.

\mathbf{p}_{mi} = Momento di dipolo della singola molecola

In un volumetto $\Delta\tau$ con n molecole:

$$\Delta\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{mi} = n \langle \mathbf{p}_m \rangle$$

dove il momento molecolare medio risulta:

$$\langle \mathbf{p}_m \rangle = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{p}_{mi}$$

Quindi:

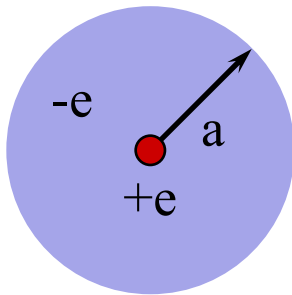
$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{n \langle \mathbf{p}_m \rangle}{\Delta\tau}$$

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_m \rangle$$

con N = numero medio di molecole per unità di volume

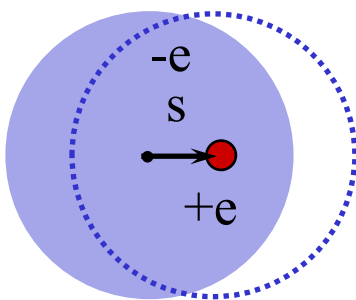
Polarizzazione per deformazione

Molecole **non** polari ($\mathbf{p} = 0$)



Modello di Bohr:

- carica puntiforme positiva $+e$ (nucleo)
- nube elettronica di carica negativa $-e$ distribuita uniformemente in una sfera di raggio a



Sotto effetto di \mathbf{E}_{eff} il baricentro di $-e$ si sposta rigidamente fino a raggiungere la posizione di equilibrio a distanza s .

Solo la carica q_e , nella sfera di raggio s :

$$q_e = \rho \frac{4}{3} \pi s^3 = \frac{-e}{\frac{4}{3} \pi a^3} \frac{4}{3} \pi s^3 = -e \frac{s^3}{a^3}$$

determina un'interazione (attrazione coulombiana) netta con $+e$:

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{s}{a} \right)^3 \frac{-e}{s^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-es}{a^3}$$

All'equilibrio \mathbf{E}_c è uguale e opposto a \mathbf{E}_{eff} :

$$E_{\text{eff}} = \frac{es}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{e} E_{\text{eff}}$$

$$\Rightarrow p_m = es = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_{\text{eff}}$$

$$\mathbf{p}_m = \alpha_e \mathbf{E}_{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = N \alpha_e \mathbf{E}_{\text{eff}} \propto \mathbf{E}_{\text{eff}}$$

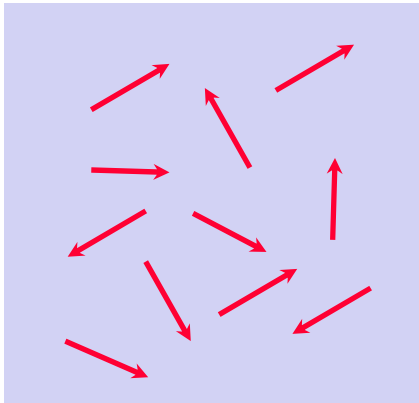
dove: α_e = Polarizzabilità elettronica

Polarizzazione per orientamento

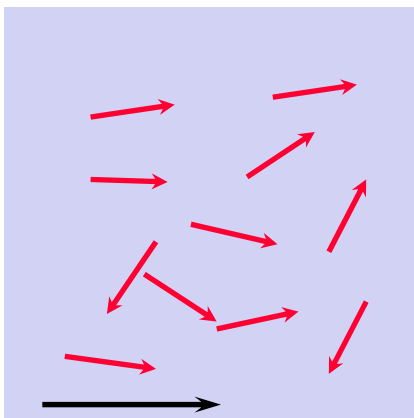
Si verifica nei **materiali polari**, dove le molecole possiedono un **momento di dipolo proprio p** anche in assenza di campo esterno:

$$p \neq 0$$

Nei materiali omogenei e isotropi, in assenza di campo esterno, per effetto del moto di **agitazione termica** i dipoli sono disposti casualmente e il dipolo medio è uguale a zero:



$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{p} \rangle = 0$$



\mathbf{E}_{eff}

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{p} \rangle \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} \neq 0$$

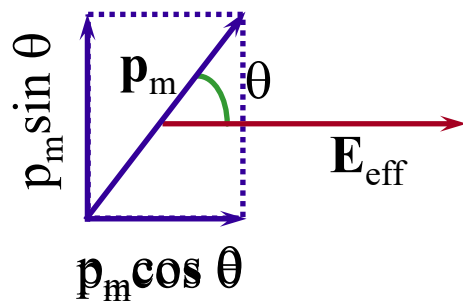
\mathbf{E}_{eff} tende ad allineare i dipoli

\Rightarrow Componente media di dipolo nella direzione del campo

\Rightarrow Componente ortogonale a media nulla

La polarizzazione **P** dipende da $\langle \mathbf{p} \rangle$

\Rightarrow Per valutare la polarizzazione indotta occorre determinare il momento di dipolo medio nella direzione di \mathbf{E}_{eff} :



$$\langle p_m \cos \theta \rangle$$

L'energia del dipolo vale:

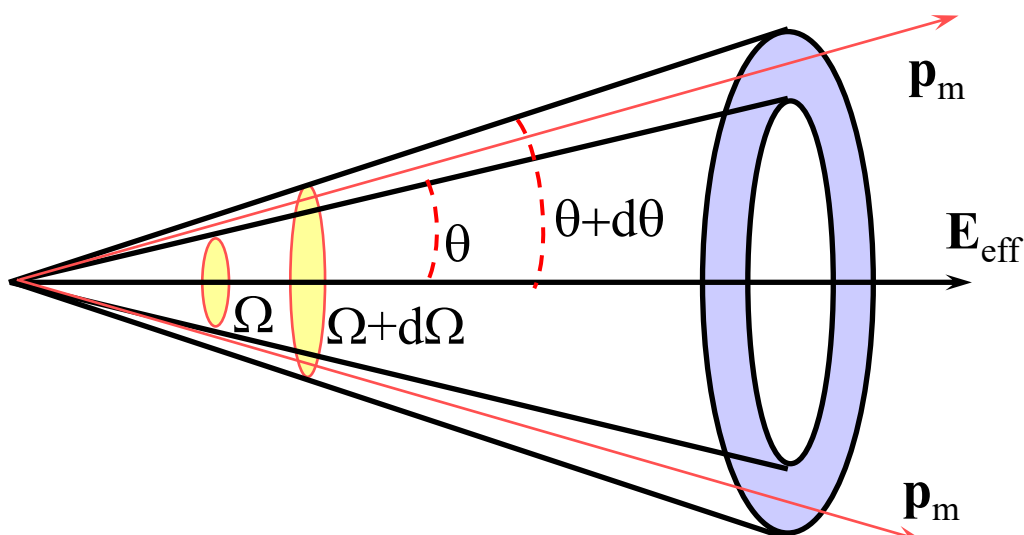
$$U = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{E}_{\text{eff}} = -p_m E_{\text{eff}} \cos \theta$$

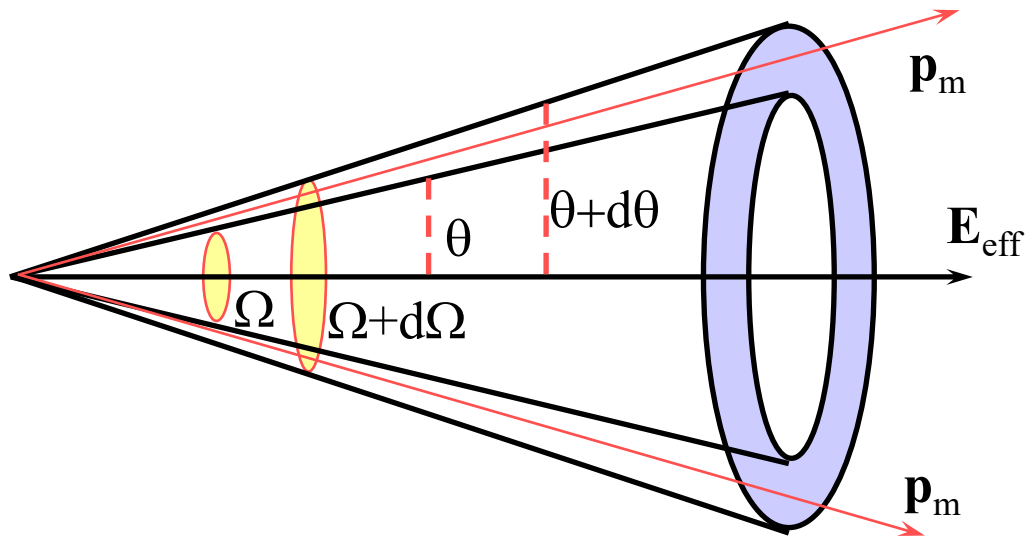
Dalla statistica di Boltzmann, la probabilità per un dipolo di avere energia U (e di formare un angolo θ con \mathbf{E}_{eff}) è proporzionale a:

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$$

I dipoli che formano un angolo θ con \mathbf{E}_{eff} sono diretti lungo un cono di semiapertura θ .

\Rightarrow I dipoli che formano un angolo compreso tra θ e $\theta+d\theta$ sono compresi tra l'angolo solido Ω e $\Omega+d\Omega$:





I dipoli contenuti nell'angolo solido compreso tra Ω e $\Omega+d\Omega$ hanno eguale probabilità.

Il numero di dipoli in tale intervallo è:

$$dN = A \exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT}\right) d\Omega$$

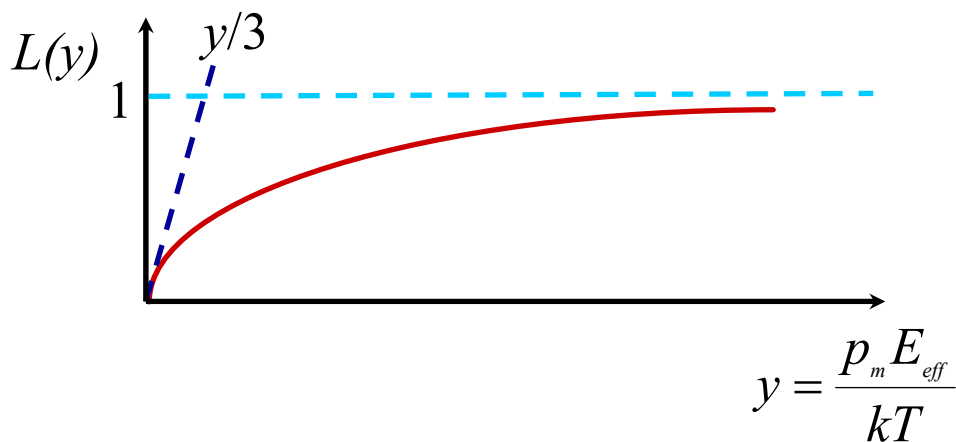
Il valore medio di $p_m \cos \theta$ si ottiene sommando su tutto l'angolo solido i valori pesati con le rispettive probabilità per ogni angolo solido:

$$\langle p_m \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^{4\pi} p_m \cos \theta A e^{-\frac{U(\theta)}{kT}} d\Omega}{\int_0^{4\pi} A e^{-\frac{U(\theta)}{kT}} d\Omega}$$

Ponendo: $y = \frac{p_m E_{eff}}{kT}$

$$\langle p_m \cos \theta \rangle = p_m \langle \cos \theta \rangle = p_m \left(\coth y - \frac{1}{y} \right)$$

$$L(y) = \coth y - \frac{1}{y} \quad \text{Funzione di Langevin}$$



Per $y \rightarrow \infty \Rightarrow L \rightarrow 1$ $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ Tutte le molecole sono allineate

Per piccoli valori di y : $L(y) \rightarrow \frac{y}{3}$ (tangente nell'origine)

$$\langle p_m \cos \theta \rangle = p_m \frac{y}{3} = \frac{p_m^2 E_{eff}}{kT}$$

$$\langle \mathbf{p}_m \rangle = \alpha_o \mathbf{E}_{eff} \quad \mathbf{P} = N\alpha_o \mathbf{E}_{eff}$$

$$\alpha_o = \frac{p_m^2}{3kT} = \text{Polarizzabilità per orientamento}$$

$$\alpha_o = \frac{p_m^2}{3kT} \propto \frac{1}{T}$$

Per i **materiali lineari**:

$$\langle \mathbf{p}_m \rangle = \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}} \quad \mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_m \rangle = N\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \mathbf{E}_{\text{eff}}$$

da cui:

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \frac{1}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \mathbf{E} \quad \mathbf{P} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \mathbf{E} = \chi \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$$

$$\chi = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

Relazione di Clausius - Mossotti
(es. solidi)

$$\text{Se } \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \ll 1 \quad (\text{es. gas})$$

$$\Rightarrow \chi = N\alpha \quad \mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E}$$