Esercitazione 12: Cicli Termodinamici e Secondo Principio della Termodinamica

1. Una macchina termica reversibile lavora con due serbatoi, assorbendo calore da una massa d'acqua posta inizialmente a temperatura $T_a = 20°\mathrm{C}$ e cedendo calore ad una massa M di ghiaccio a $T_g = 0°\mathrm{C}$. Durante il funzionamento della macchina, l'acqua diminuisce progressivamente la sua temperatura, sino a quando la macchina non può più produrre lavoro. Sapendo che si sono sciolti $M_g = 1000\,\mathrm{kg}$ di ghiaccio, e che $M_g \ll M$, calcolare:

   (a) il calore Q_1 assorbito dall'acqua ed il calore Q_2 ceduto al ghiaccio;

   (b) il lavoro L prodotto dalla macchina;

   (c) il redimento η della macchina.

   [Calore latente di fusione: $\lambda_f = 333.5\,\mathrm{kJ/kg}$]

   $$Q_1 = -C(T_g - T_a) = 345.6\,\mathrm{MJ},\ Q_2 = -M_g\lambda_f = -333.5\,\mathrm{MJ}\ ;\ W = Q_1 + Q_2 = 12.1\,\mathrm{MJ};$$
   $$\eta = W/Q_1 = 0.035$$

2. Due moli di gas perfetto biatomico sono inizialmente confinate in un volume $V_A = 5\,\mathrm{l}$ alla pressione $p_A = 6\,\mathrm{atm}$. Il gas compie un ciclo termodinamico reversibile composto da:

   - $A \to B$: espansione isobara fino ad un volume $V_B = 4V_A$;
   - $B \to C$: espansione adiabatica che riduce la pressione fino a $p_c = p_a/3$;
   - $C \to D$: compressione isobara che riduce la temperatura fino al suo valore iniziale $T_D = T_A$;
   - $D \to A$: compressione isoterma che riporta il gas nella situazione di partenza.

   Si calcoli:

   (a) il calore scambiato con il gas, il lavoro compiuto dal gas e la variazione di entropia per ogni trasformazione;

   (b) il rendimento del ciclo e lo si confronti con il rendimento di una ipotetica macchina di Carnot che lavora tra le due temperature estreme toccate dal gas durante il ciclo.

   $$Q_{AB} = 31.9\,\mathrm{kJ},\ W_{AB} = 9.1\,\mathrm{kJ};\ Q_{BC} = 0\,\mathrm{kJ},\ W_{BC} = 8.2\,\mathrm{kJ};\ Q_{CD} = -20.4\,\mathrm{kJ},$$
   $$W_{CD} = -5.8\,\mathrm{kJ};\ Q_{DA} = -3.3\,\mathrm{kJ},\ W_{DA} = -3.3\,\mathrm{kJ};\ \eta = 0.25 < \eta_{\mathrm{carnot}} = 0.75.$$

3. Una quantità di azoto pari a $m = 1\,\mathrm{g}$ può essere considerata approssimativamente un gas perfetto biatomico con peso molecolare $M = 28\,\mathrm{g/mol}$. Tale gas compie un ciclo termodinamico reversibile composto da:

   - espansione isoterma da V_A a $V_B = 3V_A$ alla temperatura $T_1 = 380°\mathrm{C}$;
   - espansione adiabatica da V_B a V_C con temperatura finale $T_2 = 327°\mathrm{C}$;
   - compressione isoterma da V_C a V_A;
   - trasformazione isocora fino alla pressione iniziale.
     Disegnare sul piano $(p.V)$ il ciclo così descritto e calcolare il lavoro W compiuto dal gas supponendo tutte le trasformazioni reversibili

$W = 19\,J$

4. Una macchina termica reversibile scambia calore con tre serbatoi a differente temperatura: $T_1 = 500\,\mathrm{K}$, $T_2 = 400\,\mathrm{K}$ e $T_3 = 300\,\mathrm{K}$. Ad ogni ciclo la macchina assorbe una quantità di calore $Q_1 = 100\,\mathrm{J}$ dal primo serbatoio e produce un lavoro $W = 50\,\mathrm{J}$. Determinare il rendimento della macchina.

$\eta = 0.357$

5. Un gas perfetto biatomico si espande seguendo una trasformazione reversibile dallo stato A allo stato B lungo la quale il prodotto TV si mantiene costante. Noti T_A e il rapporto V_A/V_B calcolare, discutendone il segno, la variazione di energia interna e il calore scambiato dal gas.

$\Delta U = nc_v T_A(V_A/V_B - 1) < 0$; $Q = \frac{3}{2}nRT_A(V_A/V_B - 1)$

6. In un contenitore adiabatico sono poste $n = 2$ moli di un gas ideale biatomico nello stato iniziale p_0, v_0, T_0; il gas subisce una espansione per mezzo di un pistone adiabatico che lo porta a dimezzare il valore della pressione: determinare lo stato finale di volume e temperatura in funzione delle grandezze dello stato iniziale:

   - nel caso in cui l'espansione sia libera;
   - nel caso in cui l'espansione avvenga contro una pressione esterna costante pari a $p_0/2$;
   - nel caso in cui l'espansione sia reversibile.

   In tutti i casi determinare la variazione di energia interna del gas e la variazione di entropia della trasformazione.

$\Delta U_a = 0$; $\Delta S_a = nR\ln(V_1/V_0) = 11.5\,\mathrm{J/K}$; $\Delta U_b = -\frac{5}{14}nRT_0$;
$\Delta S_b = nc_V\ln(p_2/p_0) + nc_p\ln(V_2/V_0) = 2.55\,\mathrm{J/K}$;
$\Delta U_c = \frac{5}{2}nRT_0\left(0.5^{3.5} - 1\right) = -2.28nRT_0 \Delta S_c = 0\,\mathrm{J/K}$;

7. Partendo dal caso affrontato nell'esercizio precedente, si supponga ora che il contenitore sia a contatto con una sorgente a temperatura costante T_0 uguale a quella iniziale del gas. Il gas subisce quindi un'espansione che lo porta ancora una volta a dimezzare il valore della pressione: determinare lo stato finale di volume e temperatura in funzione delle grandezze dello stato iniziale:

   - nel caso in cui l'espansione sia libera;
   - nel caso in cui l'espansione avvenga contro una pressione esterna costante pari a $p_0/2$;
   - nel caso in cui l'espansione sia reversibile.

   In tutti i casi determinare la variazione di energia interna del gas e la variazione di entropia della trasformazione. Determinare anche la variazione dell'entropia dell'universo.

Per tutte le trasformazioni: $T_1 = T_0$, $p_1 = p_0/2$, $V_1 = 2V_0$, $\Delta U = 0$, $\Delta S_{\text{gas}} = 11.53\,\mathrm{J/K}$.
Le variazioni di entropia dell'universo sono: $\Delta S_A^{\text{tot}} = 11.53\,\mathrm{J/K}$; $\Delta S_B^{\text{tot}} = 3.22\,\mathrm{J/K}$;
$\Delta S_C^{\text{tot}} = 0\,\mathrm{J/K}$.

8. Un blocco di rame ($c_{Cu} = 387\,\mathrm{J/kgK}$) di massa $m_1 = 500\,\mathrm{g}$ e volume trascurabile si trova alla temperature $T_1 = 300°\mathrm{C}$ e viene immerso in un contenitore di volume $V = 10\,\mathrm{l}$ pieno d'acqua alla temperature $T_2 = 20°\mathrm{C}$. Trovare la variazione di entropia del sistema, trascurando le dispersioni di calore con l'ambiente.

$\Delta S_{\mathrm{tot}} = 55\,\mathrm{J/K}$

9. Una macchina termica lavora tra due serbatoi aventi temperatura $T_1 = 800°\mathrm{C}$ e $T_2 = 300°\mathrm{C}$, fornendo una potenza media $P = 10\,\mathrm{kW}$; sapendo che il suo rendimento η è 0.6 volte quello di una macchina di Carnot operante tra gli stessi serbatoi, trovare, dopo un'ora di funzionamento:

   (a) i calori Q_1 e Q_2 scambiati con i serbatoi;

   (b) la variazione di entropia ΔS dell' universo.

$Q_1 = 129\,\mathrm{MJ}$, $Q_2 = -93\,\mathrm{MJ}$; $\Delta S = 42.1\,\mathrm{kJ/K}$

10. Due macchine termiche utilizzano gli stessi serbatoi $T_1 = 600\,\mathrm{K}$ e $T_2 = 300\,\mathrm{k}$:

   (a) la prima macchina è reversibile, ed assorbe un calore $Q_1 = 2000\,\mathrm{J}$ per ciclo;

   (b) la seconda macchina è irreversibile con un rendimento $\eta_{\mathrm{irr}} = 0.3$ e produce lo stesso lavoro W della prima.

   Determinare la variazione di entropia dell'universo per ciclo.

$\Delta S_1 = 0\,\mathrm{kJ/K}$,$\Delta S_2 = 2.22\,\mathrm{kJ/K}$

11. Un ciclo Diesel è costituito da una serie di trasformazioni in successione per un gas perfetto:

   - $A \to B$: compressione adiabatica;
   - $B \to C$: trasformazione a pressione costante;
   - $C \to D$: espansione adiabatica;
   - $D \to A$: trasformazione a volume costante.

   Calcolare esplicitamente l'efficienza esprimendola in termine dei rapporti $r = V_D/V_B$ e $a = V_C/C_B$.

12. Un gas ideale biatomico descrive un ciclo reversibile composto da un'isobara (che raddoppia il volume del gas), un'espansione adiabatica ed una compressione isoterma. Determinare il rendimento del ciclo.

$\eta = 1 - \ln 2$

13. Una macchina frigorifera compie n = 4 cicli/secondo assorbendo una potenza $P = 1.2\,\mathrm{kW}$; la macchina lavora in modo irreversibile scambiando calore con due sorgenti alle temperature $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ e $T_2 = 250\,\mathrm{K}$. Sapendo che in ogni ciclo si ha una variazione di entropia di $\Delta S = 0.4\,\mathrm{J/K}$, determinare:

(a) il numero N di cicli necessario a sottrarre alla sorgente fredda una quantità di calore $Q_{\text{ass}}^{\text{tot}} = 250\,\text{kJ}$;

(b) il coefficiente di prestazione della macchina frigorifera (dato dal rapporto tra il calore sottratto ed il lavoro fornito) della macchina.

$$Q_{\text{ass}} = \left(\frac{P}{nT_1} - \Delta S\right)\frac{T_1T_2}{T_1-T_2} = 900\,\text{J};\ N = \frac{Q_{\text{ass}}^{\text{tot}}}{Q_{\text{ass}}} = 278;\ \epsilon_F = \frac{Q_{\text{ass}}}{P}n = 3$$

14. Si abbia un contenitore con $n = 2$ moli di un gas biatomico avente volume V_0 e temperatura T_0. Il gas compie una trasformazione reversibile caratterizzata dalla trasformazione di stato $p = kV$ con k costante, in seguito alla quale il volume del gas raddoppia. Relativamente a tale trasformazione, calcolare:

    (a) il lavoro W svolto dal gas;

    (b) il calore specifico molare c_x;

    (c) la variazione totale di entropia ΔS;

    (d) la funzione di stato $T(S)$;

$$W = \frac{3}{2}kV_0^2;\ c_x = 3R;\ \Delta S = 3nRln(4);\ T(S) = T_0 \exp\left(\frac{S(T)-S(T_0)}{3nR}\right)$$

15. Un contenitore, a contatto con un serbatoio avente temperatura T, è diviso tramite una valvola in due parti di uguale volume V; inizialmente nella prima camera si trovano $n = 8\,\text{mol}$, e nella seconda c'è il vuoto. Aprendo la valvola si fanno fluire $n_2 = 3\,\text{mol}$ nella seconda camera; calcolare la variazione complessiva di entropia del sistema.

$$\Delta S = (n - n_2)R\ln\frac{n}{n-n_2} + n_2R\ln\frac{n}{n_2}$$

16. Una macchina termica scambia calore con due serbatoi a temperature T e $2T$; la macchina funziona con $n = 3$ moli di un gas ideale e percorre un ciclo costituito da:

    - due isoterme reversibili alle temperature T e $2T$ dei serbatoi in cui scambia rispettivamente i calori Q_{AB} e C_{CD};
    - due isocore irreversibili a volume $2V$ e V, durante le quali scambia rispettivamente il calore Q_{BC} con il serbatoio a temperatura T ed il calore Q_{DA} con il serbatoio a temperatura $2T$.

    Sapendo che ad ogni ciclo l'entropia dell'universo aumenta di $\Delta S = 3R\,\text{mol}$, calcolare:

    (a) i calori scambiati in ogni trasformazione;

    (b) il calore specifico a volume costante c_V;

    (c) il rendimento η della macchina.

$$Q_{AB} = 2nRT\ln(2);\ Q_{BC} = -nc_VT;\ Q_{CD} = -nRT\ln(2);\ Q_{DA} = nc_VT;\ c_V = 2R;\ \eta = 0.205$$