Energia delle onde e Teorema di Poynting

Al sole, ci si scotta. Nel forno a microonde, il cibo cuoce. Da dove viene questa energia?

Un'onda e.m. interagisce con una carica q (e^-, atomo, molecola) mediante la forza elettrica e la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

q si mette in *moto* e acquista *energia cinetica* (micro), che viene poi ceduta all'ambiente sotto forma di *calore* (macro)

$\Rightarrow$ Il campo e.m. cede energia alla materia

Per un **materiale lineare** ed **isotropo**, la densità di energia è:

$$u = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

L'espressione di u è stata ottenuta in condizioni stazionarie e supposta valida anche per campi variabili

Per tutte le onde, l'energia per metà associata ad **E** e per metà associata a **B**

Verifichiamolo per le onde piane:

$$E = vB \qquad \Rightarrow \qquad u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{E^2}{2\mu v^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = u_e$$

Calcoliamo la potenza dissipata per effetto Joule

$$P_{diss} = \Delta V\ I = \int_\gamma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_t\, dl \iint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{u}_n\, dS$$

dove: $d\tau = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_n\, dl\, ds$ = elementino di tubo di flusso di **J**

$$P_{diss} = \iiint_\tau \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,d\tau = \iiint_\tau P_{\tau,diss}\,d\tau$$

La **densità di energia dissipata per effetto Joule** è:

$$\mathrm{P}_{\tau,\mathrm{diss}} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

Premessa:

$$div\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot rot\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot rot\,\mathbf{b}$$

Per **E** e **B**:

$$div(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) - \mathbf{E}\cdot rot\,\mathbf{B}$$

Introduciamo la IV eq. di Maxwell nell'espressione di $\mathrm{P}_{\tau,\mathrm{diss}}$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = \mathbf{E}\cdot\left(\frac{1}{\mu}rot\,\mathbf{B} - \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\mu}div(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{\mathbf{B}}{\mu}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Definiamo:

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}} = \textit{Vettore di Poynting}$$

Inoltre:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = -div\,\mathbf{P}$$

Integriamo su tutto il volume τ e applichiamo il teorema della divergenza:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau u\,d\tau = -\iiint_\tau \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,d\tau - \iint_\Sigma \mathbf{P}\cdot\mathbf{u}_n dS}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

a) b) c)

a) Variazione dell'energia del campo e.m. nell'unità di tempo
b) Potenza dissipata, trasferita alle cariche in moto
c) Flusso del vettore di Poynting = Potenza entrante =
= –(Potenza uscente)

Teorema di Poynting: La variazione di energia e.m. è dovuta alla dissipazione per effetto Joule e al flusso del vettore di Poynting (conservazione dell'energia, bilancio energetico)

⇒ Il flusso di **P** attraverso l'elemento di superficie dS rappresenta l'energia e.m. che l'onda trasporta attraverso dS nell'unità di tempo

In un materiale conduttore, dove è presente una forza elettromotrice (generatore), l'espressione si generalizza:

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_m = \rho\mathbf{J}$$

$$\boxed{\iiint_\tau \mathbf{E}_m\cdot\mathbf{J}\,d\tau = \iiint_\tau \rho J^2 d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau u\,d\tau + \iint_\Sigma \mathbf{P}\cdot\mathbf{u}_n dS}$$

Considieriamo il vettore di Poynting **P**:

- Direzione e verso uguali a **k**, cioè direzione e verso della propagazione dell'onda

Il flusso di energia e.m. è ortogonale sia ad **E** che a **B**

- Modulo = **Intensità istantanea dell'onda** = **Energia che il campo trasporta nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione**

Unità in SI: W m^{-2}

Esempi di applicazione del Teorema di Poynting

a) Condensatore

Consideriamo un condensatore piano (raggio *R* e distanza *d* tra le armature) ideale (**E** uniforme)

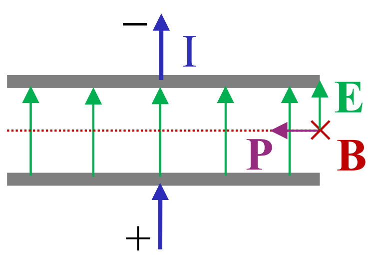
Durante la carica, l'energia è:

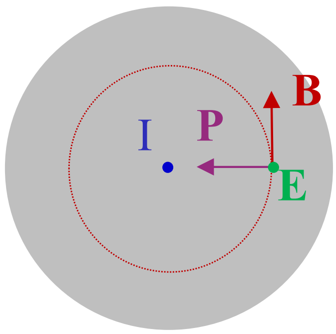
$$U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 \tau = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 \pi R^2 d$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial U_e}{\partial t} = \varepsilon_o E \pi R^2 d \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_o \tau E \frac{\partial E}{\partial t}$$

La variazione di **E** fa variare U.

L'energia entra come flusso di **P**, che è radiale entrante





Durante la carica, **E** = **E**(t) genera **B** = **B**(t)

Dalla legge di Ampere (IV eq. di Maxwell):

$$2\pi r\, B = \mu_o \frac{\partial D}{\partial t}\pi r^2 = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial E}{\partial t}\pi r^2$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2}\varepsilon_o \mu_o r \frac{\partial E}{\partial t}$$

Il vettore di Poynting ha modulo:

$$P = EH = \frac{1}{2}\varepsilon_o r E \frac{\partial E}{\partial t}$$

Il flusso di **P**, cioè l'energia entrante "lateralmente" è:

$$\phi_{lat}\left(\mathbf{P}\right) = P\left(2\pi R\, d\right) = \varepsilon_o\left(\pi R^2 d\right) E \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_o \tau\, E \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial U_e}{\partial t}$$

Durante la carica, **B**(t) è presente anche all'interno del condensatore e contribuisce all'energia

$$B = \frac{1}{2}\varepsilon_o \mu_o r \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad u_m = \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{1}{2}\mu_o \left(\frac{\varepsilon_o r}{2}\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2$$

Confrontiamo u_e ed u_m:

$$\frac{u_e}{u_m} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_o E^2}{\frac{1}{2}\mu_o \left(\frac{\varepsilon_o r}{2}\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2} = \frac{4E^2}{\left(\frac{r}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2}$$

$u_e >> u_m$ quando i campi sono **lentamente variabili**, cioè quando E varia poco ($\partial E/\partial t \approx 0$) nel tempo di transito dell'onda attraverso il condensatore (R/c)

b) Solenoide

Consideriamo la carica di un solenoide ideale (B uniforme) di lunghezza L, con n spire per unità di lunghezza

B è parallelo all'asse con modulo: $B = \mu_o nI$

E' il caso duale del condensatore

L'energia magnetica è:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_o}$$

E è tangente a circonferenze coassiali con il solenoide
Dalla II eq. di Maxwell:

$$2\pi r\, E = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$$

L'energia elettrica associata è:

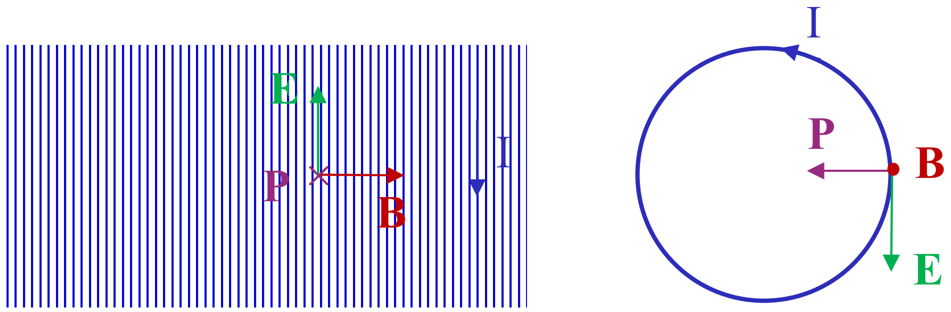
$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o \frac{r^2}{4}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)^2$$

Confrontiamo u_m ed u_e:

$$\frac{u_m}{u_e} = \frac{\dfrac{B^2}{2\mu_o}}{\dfrac{1}{2}\varepsilon_o \dfrac{r^2}{4}\left(\dfrac{\partial B}{\partial t}\right)^2} = \frac{B^2}{\varepsilon_o\mu_o \dfrac{r^2}{4}\left(\dfrac{\partial B}{\partial t}\right)^2} = \frac{4B^2}{\left(\dfrac{r}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t}\right)^2}$$

Analogamente al caso del condensatore, se i **campi** sono **lentamente variabili**: $u_m >> u_e$

Il vettore di Poynting è diretto radialmente



La variazione di energia è dovuta al flusso di **P**:

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{B}{\mu_o}\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial U_m}{\partial t} = \tau\frac{B}{\mu_o}\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$P = \frac{1}{\mu_o}EB = \frac{r}{2\mu_o}B\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_{lat}(\mathbf{P}) = (2\pi RL)\frac{R}{2\mu_o}B\frac{\partial B}{\partial t} = (\pi R^2 L)\frac{B}{\mu_o}\frac{\partial B}{\partial t} = \tau\frac{B}{\mu_o}\frac{\partial B}{\partial t}$$

c) Filo percorso da corrente stazionaria

Consideriamo un tratto di conduttore ohmico omogeneo cilindrico di raggio R e lunghezza L

La potenza dissipata per effetto Joule è:

$$P_{diss} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \; \tau = EJ(\pi R^2 L)$$

Questa energia entra nel conduttore come flusso di **P**

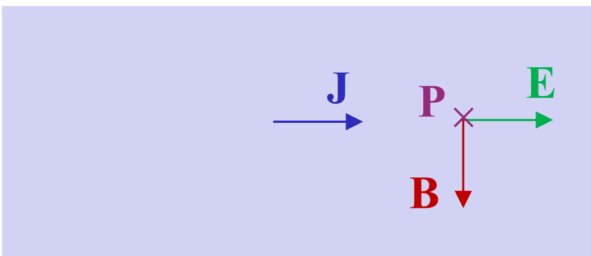
Sulla superficie esterna, c'è un campo **E** parallelo all'asse del conduttore (dato che $E_{t,int} = E_{t,est}$)

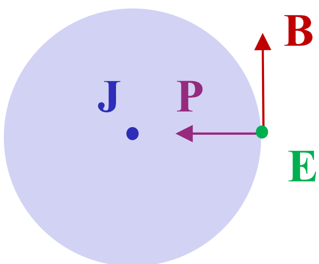
B è noto dalla legge di Ampere:

$$B = \frac{\mu_o \left(J\pi R^2 \right)}{2\pi R} = \frac{\mu_o RJ}{2}$$

P è radiale ed il suo flusso attraverso la superficie laterale è:

$$P\left(2\pi RL\right) = \frac{EB}{\mu_o} 2\pi RL = E\frac{\mu_o RJ}{2\mu_o} 2\pi RL = EJ\left(\pi R^2 L\right) = EJ\tau$$





L'energia dissipata entra nel conduttore come flusso di **P** attraverso la superficie laterale

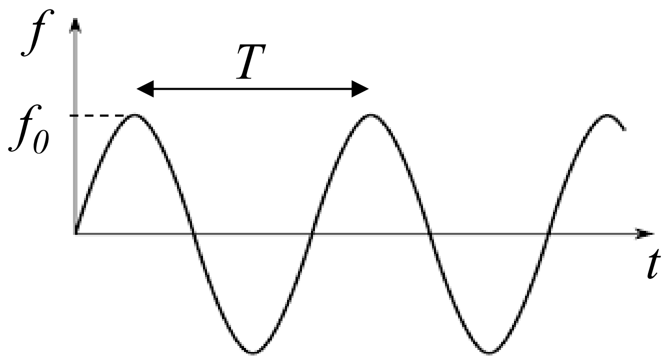
Onde piane sinusoidali (armoniche)

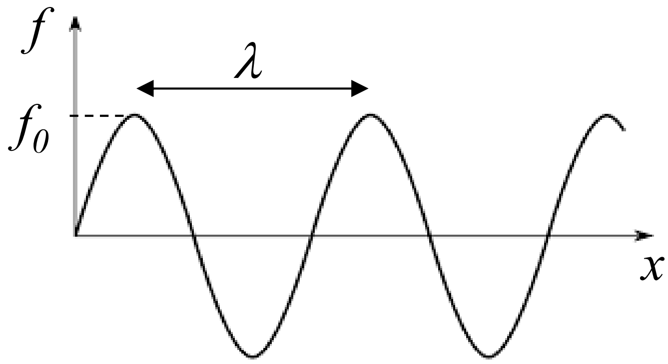
L'**onda piana sinusoidale (armonica)** è descritta da una funzione del tipo:

$$\boxed{f(x - ct) = f_o \sin[k(x - ct)] = f_o \sin(kx - \omega t)}$$

dove:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$





$T = \frac{1}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\omega} =$ **periodo** = intervallo di tempo tra due massimi successivi

λ = **lunghezza d'onda** = distanza tra due massimi successivi

$c = \lambda\upsilon = \frac{\omega}{k} =$ **velocità di fase**

Definiamo il **vettore d'onda k**:

- **Modulo**: $k = 2\pi / \lambda = \omega / c$
- **Direzione** e **verso** dati dalla propagazione dell'onda

Nell'intervallo di tempo T (che intercorre tra due massimi), l'onda, propagandosi con velocità c, si è spostata di un tratto pari alla distanza λ tra un massimo e il successivo:

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad \Rightarrow \quad c = \lambda \upsilon$$

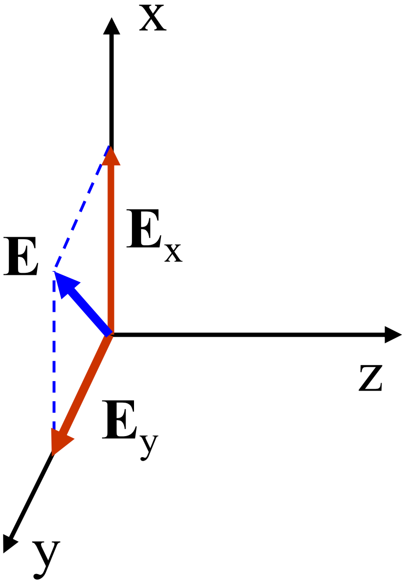
Ogni combinazione lineare di onde piane monocromatiche (sinusoidali) è soluzione delle eq. di Maxwell (e delle onde)

Ogni onda può essere vista come una sovrapposizione di onde piane monocromatiche (Analisi di Fourier)

$\Rightarrow$ Per conoscere le caratteristiche di qualsiasi onda, basta studiare le proprietà delle onde armoniche e sovrapporre gli effetti

Polarizzazione

La **polarizzazione** delle onde piane viene definita rispetto al campo **E** (Analogamente per **B**)

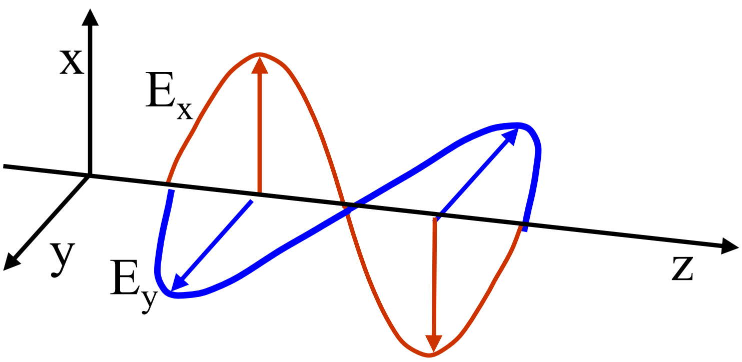


Se un'onda piana sinusoidale si propaga in direzione *z*, il campo **E** può essere espresso come:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{u}_x \text{ e } E_y\mathbf{u}_y$$

dove:

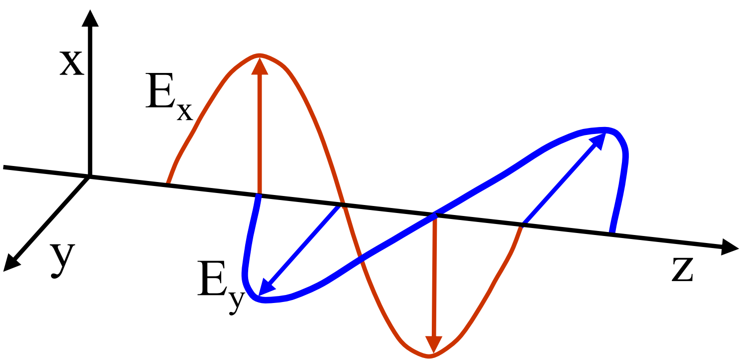
$$E_x(P,t) = E_x(P)\sin\left(\omega t + \phi_x(P)\right)$$
$$E_y(P,t) = E_y(P)\sin\left(\omega t + \phi_y(P)\right)$$



Se: $\boxed{\phi_x = \phi_y + n\pi}$

Polarizzazione lineare

$\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{E}_y$ variano **in fase** e il campo **E** oscilla secondo una direzione costante.



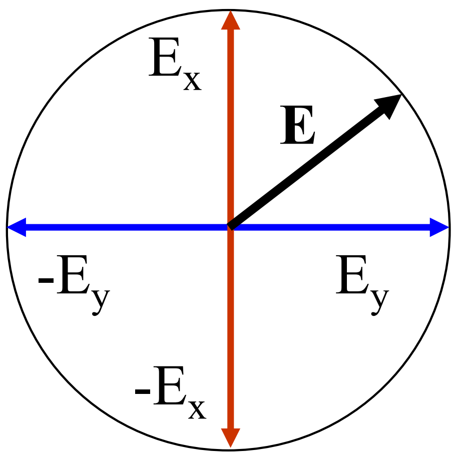
Se le due componenti di **E** sono **in quadratura di fase**:

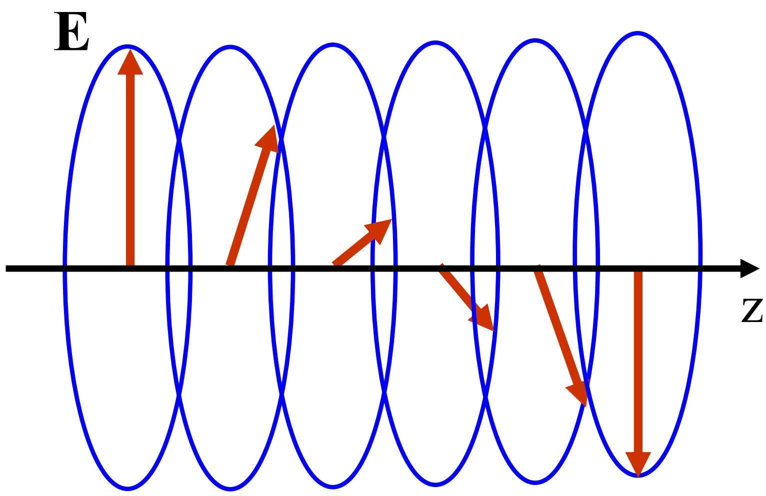
$$\phi_x = \phi_y + (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

il campo **E** ruota (quando E_y è nullo è diretto come E_x e viceversa).

Se $E_x = E_y$, il vertice del vettore **E** percorre una circonferenza:

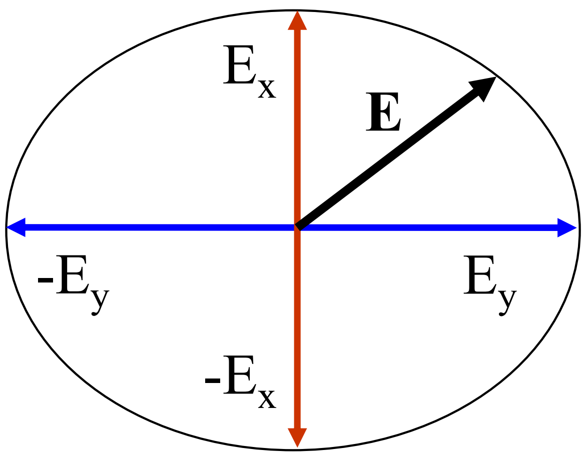
la **polarizzazione** è **circolare**





Se $E_x \neq E_y$, il vertice del vettore **E** percorre un'ellisse:

la **polarizzazione** è **ellittica**



Se la direzione di **E varia casualmente**, l'**onda** è **depolarizzata**

La polarizzazione può essere valutata durante la propagazione o al passare del tempo in una data posizione z

Qualsiasi onda piana può essere vista come la combinazione di due onde con polarizzazione lineare ortogonale

Esempi

Le onde radio e TV sono polarizzate (si orientano le antenne per migliorare la ricezione)

La luce naturale non è polarizzata, perché è la combinazione di molte onde emesse indipendentemente da atomi diversi, che cambiano fase su tempi dell'ordine di 10^{-8} s e non sono monocromatiche

Applicazione: polaroid (occhiali da sole)

Plastica con lunghe catene polimeriche allineate con un processo di estrusione e stiramento

Gli elettroni sono liberi di muoversi lungo l'asse della molecola

E *parallelo* alle molecole mette in moto gli e^- e l'energia viene assorbita

E *ortogonale* alle molecole non viene assorbito

Due polaroid incrociati estinguono la luce

Uno la attenua soltanto, perché assorbe solo metà della luce

Spettro elettromagnetico

	λ	ν
Audio	10^4 - 10 km	30 Hz - 30 kHz
Radio	600 - 2.8 m	500 kHz - 108 MHz
TV (VHF)	5.5 - 1.5 m	55 - 200 MHz
TV (UHF)	75 - 37.5 cm	400 - 800 MHz
Radar (banda s)	10 cm	3 GHz
IR	2 mm - 760 nm	
VIS	760 - 390 nm	
UV	390 - 100 nm	
X	100 nm - 1 Å	
γ	< 1 Å	

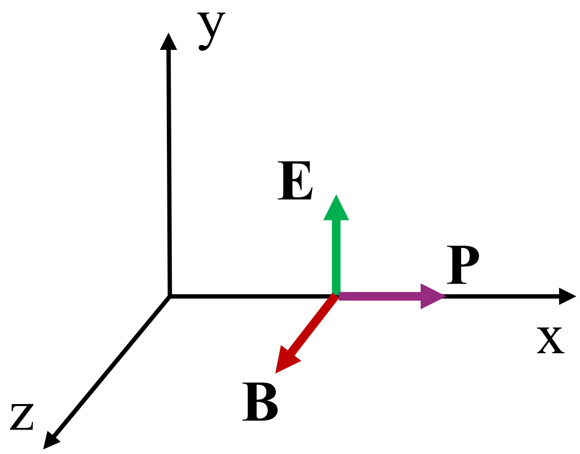
Microonde: $\lambda \approx$ 2.8 m – 1 cm; $\nu \approx$ 108 MHz – 10 GHz

3G/4G: $\nu \approx$ 800 MHz – 2.6 GHz
5G: $\nu \approx$ 700 MHz – 26 GHz

Intensità ed energia delle onde piane armoniche

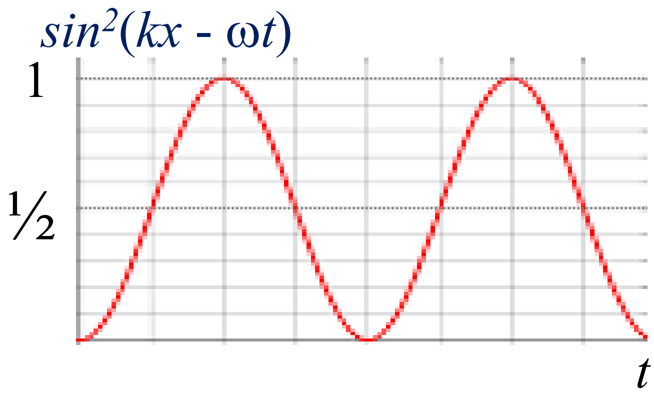
Per un'onda piana sinusoidale, che si propaga lungo x:

- $E = E_o sin(kx - \omega t)$
- $B = B_o sin(kx - \omega t)$
- $E_o = cB_o$ $\quad (E_o = vB_o)$
- $\omega = kc$ $\quad (\omega = kv)$



La **densità di energia** ($u_e = u_m = u/2$) è:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon E_o^2 + \frac{B_o^2}{2\mu}\right)\sin^2(kx - \omega t) = \varepsilon E_o^2 \sin^2(kx - \omega t)$$



frequenza 2ω

La **densità media di energia** è:

$$\boxed{\bar{u} = \frac{1}{2}\varepsilon E_o^2 = \frac{B_o^2}{2\mu}}$$

Questo è il valore che ha significato dal punto di vista fisico, se si considerano intervalli di tempo superiori al periodo dell'onda

La frequenza della luce è così elevata (≈10^{14} Hz) che nessuno strumento (compreso l'occhio) è in grado di seguirne le oscillazioni
Gli strumenti (e l'occhio) sono sensibili all'intensità media

L'**intensità istantanea** è: $I = P = \frac{E_o B_o}{\mu} \sin^2(kx - \omega t)$

L'**intensità media** è:

$$\boxed{\overline{I} = \overline{P} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_o^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_o^2 = \frac{c}{n}\overline{u} = v\overline{u}}$$

dove: $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$ = **indice di rifrazione**

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n} = v}$ = **velocità della luce nel mezzo**

L'energia dell'onda si muove con velocità $v = c/n$ nel mezzo

Esempi

- Radiazione solare sulla superficie terrestre: I_{med} ≈ 1 kW/m^2

- Laser pointer: P_{med} = 1 mW,
focalizzando su 5 μm di raggio: I_{med} ≈ 10^7 W/m^2

- Laser impulsati: P_{med} ≈ 10^9 W,
focalizzando: I_{med} ≈ 10 W^{19}/m^2

Quantità di moto e pressione di radiazione

Un'onda che investe la superficie di un mezzo esercita su di essa una forza

Pressione di radiazione = forza per unità di superficie esercitata da un'onda sulla superficie di un mezzo ortogonale alla sua direzione di propagazione

L'interazione tra onda e materiale avviene attraverso le cariche presenti nel materiale ed è descritta da:

$$\mathbf{F}_\mathrm{q} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\mathrm{q} \times \mathbf{B})$$

La forza esercitata sull'unità di superficie è:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\mathrm{q} \times \mathbf{B})$$

dove: σ = densità di carica superficiale del mezzo

La componente elettrica $\frac{d\mathbf{F}_e}{dS} = \sigma\mathbf{E}$ mette in moto gli e^- del mezzo lungo la superficie con velocità $\mathbf{v}_\mathrm{q}$ // $\mathbf{E}$

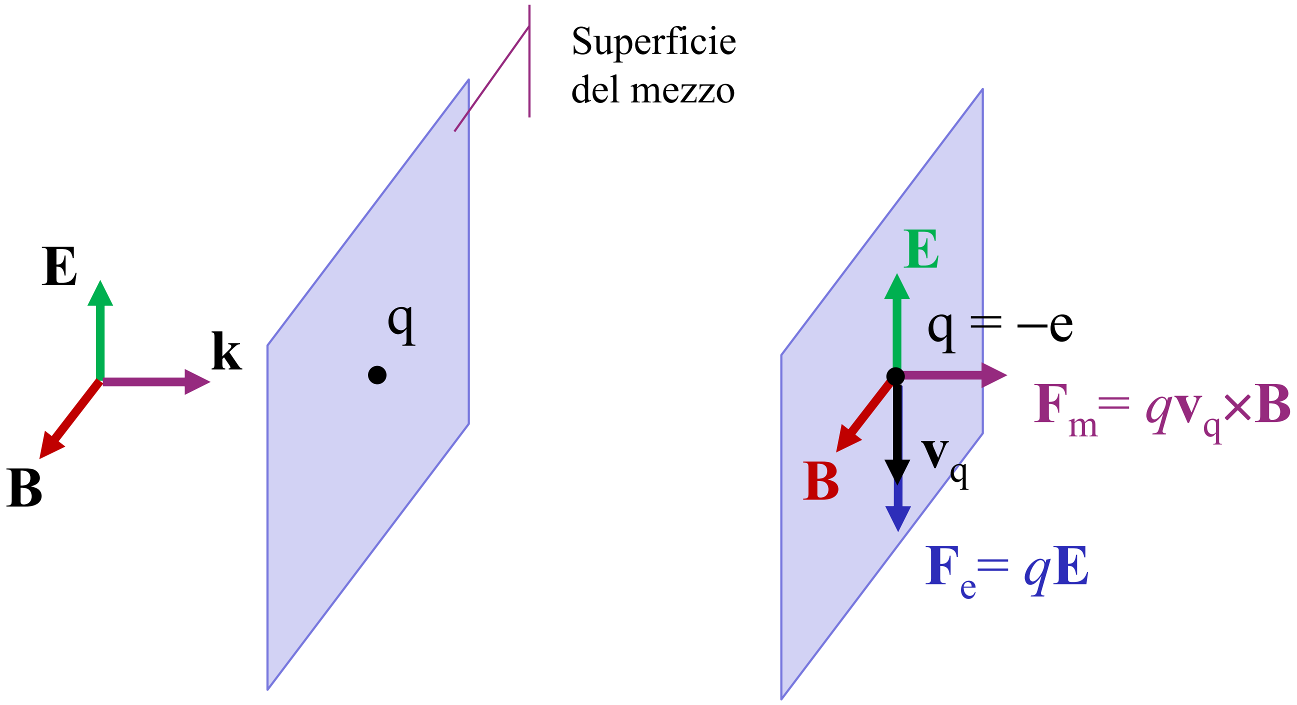
$\Rightarrow$ Il materiale assorbe energia dall'onda

La potenza assorbita per unità di superficie è:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} \cdot \mathbf{v}_q = \frac{d\mathbf{F}_e}{dS} \cdot \mathbf{v}_q = \sigma E v_q$$

L'intensità media assorbita dal mezzo è:

$$\bar{I} = \sigma\left(\overline{E\bar{v}_q}\right)$$



Gli e⁻ in moto interagiscono con **B** secondo $\frac{d\mathbf{F}_m}{dS} = \sigma \mathbf{v}_q \times \mathbf{B}$, diretta verso l'interno del materiale.

La forza magnetica ha effetti meccanici sul materiale.

Per un'**onda piana**, la forza magnetica per unità di superficie è:

$$\frac{d\overline{F}_m}{dS} = \sigma\left(\overline{B v_q}\right) = \frac{\sigma}{v}\left(\overline{E v_q}\right) = \frac{\overline{I}}{v}$$

L'onda esercita una **pressione di radiazione** p_{em}:

$$\boxed{p_{em} = \frac{\overline{I}}{v}}$$

In generale, con una trattazione simile a quella del teorema di Poynting, si trova l'espressione della **quantità di moto intrinseca** (per unità di volume) **g** dell'onda:

$$\boxed{\mathbf{g} = \frac{\mathbf{P}}{v^2} = \varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B}}$$

Per un'**onda piana** che si propaga in un mezzo:

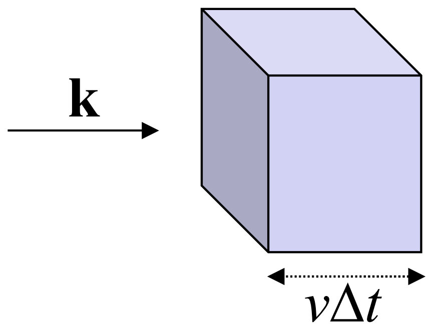
$$\overline{g} = \frac{\overline{I}}{v^2} = \frac{\overline{u}}{v} \qquad \text{con:} \quad v = \frac{c}{n}$$

Consideriamo un'onda piana che incide su una superficie **perfettamente assorbente**

Tutta l'energia (e quindi la quantità di moto) viene assorbita dal mezzo

In un intervallo di tempo Δt, sulla superficie S incide la quantità di moto G:

$$G = \overline{g}\, S\, v\, \Delta t$$



La forza media esercitata dalla superficie sull'onda S è $-F$ (uguale e contraria a quella che l'onda esercita sulla superficie).
Per il teorema dell'impulso:

$$-\overline{F}\Delta t = \Delta G = -\overline{g}\, S\, v\, \Delta t \quad \Rightarrow \quad \overline{F} = \overline{g}\, S\, v$$

La pressione è:

$$p_{em} = \overline{g}\; v = \overline{u} = \frac{\overline{I}}{v}$$

Se la superficie è **perfettamente riflettente**, l'onda viene riflessa indietro, si inverte la direzione di propagazione, quindi la quantità di moto finale è uguale e contraria a quella iniziale

La forza esercitata e la pressione sono quindi doppie:

$$-F\Delta t = \Delta G = -2\overline{g}\, S\, v\, \Delta t \qquad\qquad p_{em} = 2\overline{g}\ v = 2\overline{u} = \frac{2\overline{I}}{v}$$

Esempio: pressione su uno specchio che riflette la luce del sole

$I \approx 1.4 \times 10^3$ W/m^2 all'esterno dell'atmosfera terrestre

$v \cong 3 \times 10^8$ m/s

$\Rightarrow\ p \approx 10^{-5}$ N/m^2 = 5×10^{-10} atm

La pressione di radiazione è molto piccola, ma misurabile e se osservano gli effetti

Proposta di impiego come sistema di propulsione per astronavi a vela nel sistema solare

La direzione della coda delle comete è dovuta alla pressione della radiazione solare