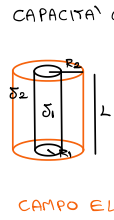
2 - Conduttori

Friday, 5 August 2022 21:05

ESERCIZIO 1

CAPACITA' CONDENSATORE CILINDRICO



ASSUMIAMO $L >> R_2$

NO 'EFFETTO DI BORDO'

APPROSSIMAZIONE L INFINITA

CAMPO ELETTRICO INTERNO

$\vec{E} = E(r)\vec{u_r}$

SUPERFICE GAUSS CILINDRICA $R_1 < r < R_2$

$\oint E\,\hat{n}_i\,dS = 2\pi r L \cdot R(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}\vec{u_r}$

DIFFERENZA DI POTENZIALE

$\Delta V = V(R_1) - V(R_2)$

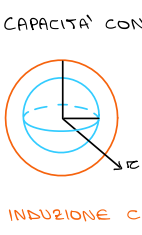
$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\log\frac{R_2}{R_1}$

CAPACITA' CONDENSATORE

$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\log(R_2/R_1)}$

ESERCIZIO 2

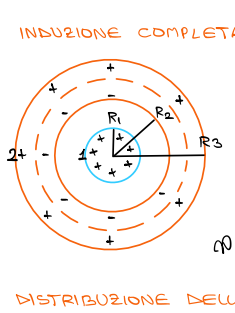
CAPACITA' CONDENSATORE SFERICO



CONSIDERO SOLO LO SPAZIO INTERNO TRA LE SFERE

NESSUNA ULTERIORE IPOTESI

INDUZIONE COMPLETA



ABBIAMO UNA SFERA (1) E UN GUSCIO SFERICO (2)

CARICO SFERA 1 DI +Q

PER INDUZIONE COMPLETA IL GUSCIO SI CARICA DI −Q A RAGGIO R_2 E DI +Q A R_3

DISTRIBUZIONE DELLA CARICA

$$Q_\Sigma(r) = \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R_1 \\ Q & r \in (R_2, R_2) \\ 0 & r \in (R_2, R_3) \\ Q & r > R_3 \end{array}\right.$$

CAMPO ELETTRICO

RADIALE PER SIMMETRIA SFERICA $\vec{E} = E(r)\vec{u_r}$

$r < R_1 \vee r \in (R_2, R_3)$

$Q_{INT} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$

$r \in (R_1, R_2) \vee r > R_3$

$Q_{INT} = 0 \rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

$$\vec{E}(r) = \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} & r \in (R_2, R_2) \\ 0 & r \in (R_2, R_3) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} & r > R_3 \end{array}\right.$$

DIFFERENZA DI POTENZIALE

$\Delta V = V(R_1) - V(R_2)$

$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} =$

$= +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$

CAPACITA' DEL CONDENSATORE

$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

ESERCIZIO 3

CONDUTTORE SFERICO ISOLATO CARICATO +Q
CALCOLA IL POTENZIALE ASSUMENDO $V(\infty) = 0$

DISTRIBUZIONE DI CARICA

$$Q_{\Sigma(r)} = \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R \\ Q & r > R \end{array}\right.$$

CAMPO ELETTRICO

$$\vec{E}(r) = \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} & r > R \end{array}\right.$$

RICAVO IL POTENZIALE DA E

$V = -\text{GRAD}\,\vec{E}$

$V(r) = \int_{V(RIF)}^{V(r)} dV = -\int_{RIF}^{r} E(r)\,dr$

$V(RIF) = V(\infty) = 0$

$r > R$ $\quad \bigcirc \xrightarrow{r} \infty$

$V(r) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r$

$= +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$r < R$ $\quad \bigcirc \xrightarrow{r} \infty$

$V(r) = -\int_\infty^r E(r)\,dr = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr - \cancel{\int_R^r 0\,dr}$

$= V(R) = \text{COST} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

POTENZIALE ELETTRICO

$$\Delta V(r) = \left|\begin{array}{ll} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{array}\right.$$

CAPACITA' DEL CONDENSATORE

$C = \frac{\Delta V_{MAX}}{Q} = 4\pi\varepsilon_0 R$

ENERGIA ELETTROSTATICA

$U = \int_\Sigma \frac{1}{2}\sigma V\,dS = \int \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi R^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,dr$

$= \frac{1}{2}\frac{Q}{\cancel{4\pi R^2}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\cancel{4\pi R^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

METODI ALTERNATIVI

GENERALE $\quad U = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,dr$

DISTRIBUZIONE σ $\quad U = \int_\Sigma \frac{1}{2}\sigma V_0\,d\Sigma$

EQUIPOTENZIATA $\quad U = \frac{1}{2}QV_0 = \frac{1}{2}CV_0^2$

ESERCIZIO 4

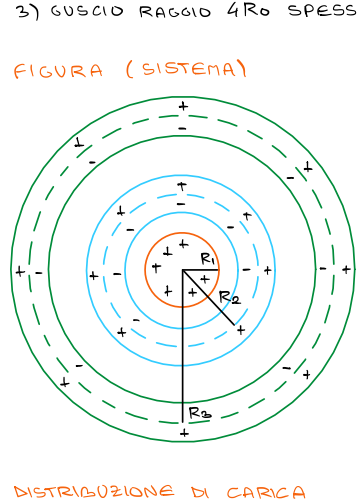
3 CONDUTTORI SFERICI CONCENTRICI

1) SFERA METALLICA R_0 CARICA Q

2) GUSCIO RAGGIO $2R_0$ SPESSORE $R_0/2$

3) GUSCIO RAGGIO $4R_0$ SPESSORE R_0

FIGURA (SISTEMA)



DISTRIBUZIONE DI CARICA

PER INDUZIONE COMPLETA SE PONIAMO UNA Q SULLA SFERA 1 OTTENIAMO LA SEGUENTE DISTRIBUZIONE

$$Q_{\Sigma(r)} = \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R_0 \\ Q & r \in (R_0, 2R_0) \\ 0 & r \in (2R_0, \frac{5}{2}R_0) \\ Q & r \in (\frac{5}{2}R_0, 4R_0) \\ 0 & r \in (4R_0, 5R_0) \\ Q & r > 5R_0 \end{array}\right.$$

NOTA LA CARICA NON SI NEUTRALIZZA FINCHE' NON SI RAGGIUNGE IL GUSCIO NEUTRO (TRATTEGGIATO)

CAMPO ELETTRICO

DALL' ESERCIZIO 3 SEGUE CHE

$$\vec{E}(r) = \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R_0 \\ \vec{E_0} & r \in (R_0, 2R_0) \\ 0 & r \in (2R_0, \frac{5}{2}R_0) \\ \vec{E_0} & r \in (\frac{5}{2}R_0, 4R_0) \\ 0 & r \in (4R_0, 5R_0) \\ \vec{E_0} & r > 5R_0 \end{array}\right.$$

DOVE $\vec{E_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

DIFFERENZA DI POTENZIALE

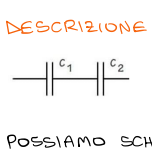
CONSIDERIAMO QUELLA TRA GUSCIO INTERNO ED ESTERNO

$\Delta V = \int_{R_0}^{4R_0} E(r)\,dr = \int_{R_0}^{2R_0}\frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \int_{\frac{5}{2}R_0}^{4R_0}\frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$= \cdots = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{2R_0}\right) + \left(\frac{2}{5R_0} - \frac{1}{4R_0}\right)\right] =$

$= \cdots = \frac{13Q}{80\pi\varepsilon_0 R}$

DESCRIZIONE ALTERNATIVA



CONDENSATORI IN SERIE

POSSIAMO SCHEMATIZZARE IL SISTEMA CON UN C_{EQ}

$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C_{EQ}}$

DOVE $\quad C_{EQ} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$

RICORDIAMO LA CAPACITA' DI UN CONDENSATORE SFERICO

$C_{SFERICO} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_{IN} R_{OUT}}{R_{OUT} - R_{IN}}$

$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_0 (2R_0)}{2R_0 - R_0} = 8\pi\varepsilon_0 R_0$

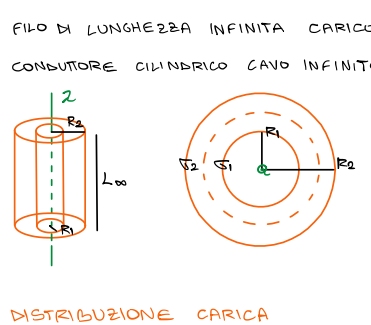
$C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0(\frac{5}{2}R_0)(4R_0)}{4R_0 - 5/2 R_0} = \frac{80\pi\varepsilon_0 R}{3}$ $\quad \rightarrow C_{EQ} = \frac{80\pi\varepsilon_0 R_0}{13}$

DA QUA CALCOLIAMO LA $\Delta V = \frac{13Q}{80\pi\varepsilon_0 R_0}$

ESERCIZIO 5

FILO DI LUNGHEZZA INFINITA CARICO λ

CONDUTTORE CILINDRICO CAVO INFINITO



DISTRIBUZIONE CARICA

$$Q(\Sigma) = \left|\begin{array}{ll} \lambda L & r < R_1 \\ \lambda L + 2\pi L R_1\sigma_1 & r \in (R_1, R_2) \\ \lambda L + 2\pi L(R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2) & r > R_2 \end{array}\right.$$

CONDIZIONE IL CAMPO ALL' INTERNO DI UN CONDENSATORE DEVE ESSERE NULLO, INOLTRE SIAMO IN INDUZIONE COMPLETA

$$Q(\Sigma) = \left|\begin{array}{ll} Q = \lambda L & r < R_1 \\ 0 & r \in (R_1, R_2) \\ Q = \lambda L & r > R_2 \end{array}\right.$$

CAMPO ELETTRICO

$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r L \cdot E(r)$

GAUSS $\quad \Phi(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}(r) = \left|\begin{array}{ll} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r < R_1 \\ 0 & r \in (R_1, R_2) \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R_2 \end{array}\right.$$

DENSITA' SUPERFICIALI σ1, σ2

$Q = 0$ PER $r \in (R_1, R_2)$

$\rightarrow \lambda L + 2\pi L R_1\sigma_1 = 0$ $\quad \sigma_1 = -\frac{\lambda}{2\pi R_1}$

$Q = \lambda L$ PER $r > R_2$

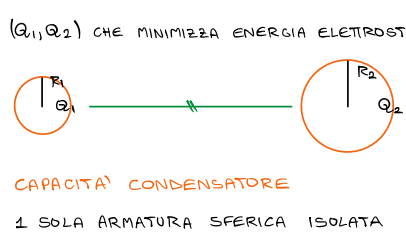
$\cancel{\lambda L} + 2\pi R_1 L\sigma_1 + 2\pi R_2 L\sigma_2 = \cancel{\lambda L}$

$\sigma_2 = -\frac{\sigma_1 R_1}{R_2} = +\frac{\lambda}{2\pi R_2}$

ESERCIZIO 6

CONDUTTORI SFERICI (R_1, R_2) CARICATI (Q_1, Q_2) POSTI A DISTANZA INFINITA $L >> R$

(Q_1, Q_2) CHE MINIMIZZA ENERGIA ELETTROSTATICA



CAPACITA' CONDENSATORE

1 SOLA ARMATURA SFERICA ISOLATA

$C_x = 4\pi\varepsilon_0 R_x$

DISTRIBUZIONE CARICA

$$Q_x(\Sigma) \simeq \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R_x \\ Q_x & r > R_x \end{array}\right.$$

CAMPO ELETTRICO

$$\vec{E_x}(r) \simeq \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R_x \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_x \end{array}\right.$$

POTENZIALE

$$V_x(r) \simeq \left|\begin{array}{ll} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_x} & r < R_x \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R_x \end{array}\right.$$

ENERGIA SISTEMA

SOTTO IPOTESI DI SUPERFICI EQUIPOTENZIATE CARICATE SUPERFICIALMENTE CON Q

IPOTESI $\quad Q_1 + Q_2 = Q$

$U = \frac{1}{2}Q_1\Delta V_1 + \frac{1}{2}Q_2\Delta V_2$

$= \frac{1}{2}Q_1\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{1}{2}Q_2\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

$= \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{(Q - Q_1)^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$

PROBLEMA DI MINIMO

$\frac{\partial U}{\partial Q_1} = 0 \longrightarrow \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q - Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 0$

$\frac{Q_1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}R_1} = \frac{Q - Q_1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}R_2}$ $\quad R_2Q_1 = R_1Q - R_1Q_1$

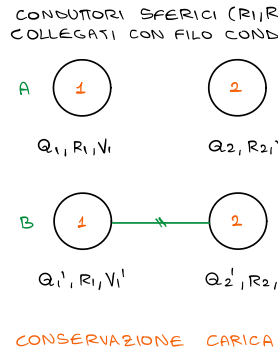
$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}Q$ $\quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}Q$

POTENZIALE A U_{MINIMA}

$V_1 = V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)}$

ESERCIZIO 7

CONDUTTORI SFERICI (R_1, R_2) CARICHI (Q_1, Q_2)
COLLEGATI CON FILO CONDUTTORE $C_{FILO} \approx 0$



CONSERVAZIONE CARICA

$Q_A = Q_B$ $\quad Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$

COLLEGAMENTO ELETTRICO

CONDIZIONE DI EQUIPOTENZIALITA'

$V_1' = V_2' = V_{FINALE} = V'$

DIFFERENZA DI POTENZIALE

$V_1' = V_2' \longrightarrow \frac{Q_1'}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}R_1} = \frac{Q_2'}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}R_2}$

CONDIZIONE SULLA CARICA $\quad Q_2' = \frac{R_2}{R_1}Q_1'$

CARICHE FINALI

$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$

$Q_1 + Q_2 = Q_1' + \frac{R_2}{R_1}Q_1'$

$$\left|\begin{array}{l} Q_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(Q_1 + Q_2) \\ Q_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(Q_1 + Q_2) \end{array}\right.$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO FINALE

$V' = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\cdot\frac{R_1}{(R_1 + R_2)}(Q_1 + Q_2)$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1 + Q_2}{R_1 + R_2}$

ENERGIA DISSIPATA PER IL TRASFERIMENTO DI CARICA

$\Delta U = U_A - U_B$

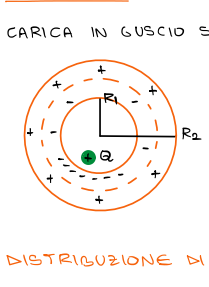
$= \left(\frac{Q_1V_1}{2} + \frac{Q_2V_2}{2}\right) - \left(\frac{Q_1'V_1'}{2} + \frac{Q_2'V_2'}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)}\right)$

$= \cdots = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(Q_1R_2 - Q_2R_1)^2}{R_1R_2(R_1 + R_2)}$

ESERCIZIO 8

CARICA IN GUSCIO SFERICO



INDIPENDENTEMENTE DALLA POSIZIONE DELLA CARICA Q:

$Q_1 = -Q$ $\quad Q_2 = +Q$

POICHE' SCARICO ED ISOLATO

DISTRIBUZIONE DI CARICA

$$Q(\Sigma) = \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R^* \\ Q & r \in (R^*, R_1) \\ 0 & r \in (R_1, R_2) \\ Q & r > R_2 \end{array}\right.$$

SE LA CARICA +Q NON E' CENTRATA ALLORA $\exists R^* < R_1$ TALE CHE $Q \in B_{R^*}(0)$

PER SEMPLICITA' USIAMO QUESTA DISTRIBUZIONE

$$Q(\Sigma) = \left|\begin{array}{ll} Q & r < R_1 \\ 0 & r \in (R_1, R_2) \\ Q & r > R_2 \end{array}\right.$$

CAMPO ELETTRICO

$$\vec{E}(r) = \left|\begin{array}{ll} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} & r < R_1 \\ 0 & r \in (R_1, R_2) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} & r > R_2 \end{array}\right.$$

RICAVO IL POTENZIALE

$\vec{E} = -\nabla V = -\text{GRAD}\,V$

$\int_0^{V(r)} dr = \int_\infty^r E(r)\cdot dr$

$r > R_2$

$V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$r \in (R_1, R_2)$

$V(r) = V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ COST

$r < R_1$

$V(r) = V(R_2) + \int_{R_1}^r E\,dr =$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2 + r}{R_2 r}$

POTENZIALE ELETTROSTATICO

$$V(r) = \left|\begin{array}{ll} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2 + r}{R_2 r} & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & r \in (R_1, R_2) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R_2 \end{array}\right.$$

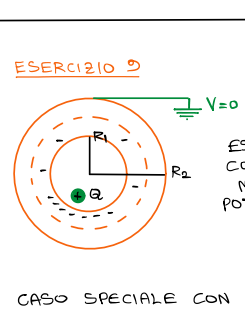
POTENZIALE DEL CONDUTTORE

DISTRIBUZIONI SUPERFICIALI

σ1 NON UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA (IN GENERALE) DIPENDE DALLA POSIZIONE DI Q

σ2 UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA POICHE' LA SUPERFICIE 1 FA DA SCHERMO E LE CARICHE IN 2 HANNO MODO DI POSIZIONARSI NELLA CONFIGURAZIONE CHE MINIMIZZA LE INTERAZIONI ELETTROSTATICHE

ESERCIZIO 9



ESERCIZIO 8 MA CON SFERA CAVA MANTENUTA A POTENZIALE NULLO

CASO SPECIALE CON Q AL CENTRO

DISTRIBUZIONE

$$Q(\Sigma) = \left|\begin{array}{ll} Q & r < R_1 \\ 0 & r \geq R_1 \end{array}\right.$$

CAMPO

$$\vec{E}(r) = \left|\begin{array}{ll} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} & r < R_1 \\ 0 & r \geq R_1 \end{array}\right.$$ POICHE' $Q = 0$

POTENZIALE

$$V(r) = \left|\begin{array}{ll} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r < R_1 \\ 0 & r \geq R_1 \end{array}\right.$$ PER IPOTESI

DISTRIBUZIONI

$\sigma_1 = -Q$ $\quad$ NON OMOGENEO

$\sigma_2 = 0$ $\quad$ POICHE' $V = 0 \longrightarrow E = 0 \longrightarrow Q = 0$

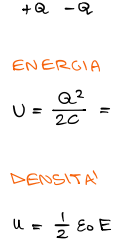
ESERCIZIO 10

CONDENSATORE PIANO CONTENENTE ENERGIA $U = \frac{Q^2}{2C}$

DIMOSTRO CHE $\quad U = \int_\tau u = \int_\tau \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,d\tau$

CONDENSATORE

CARICA Q, CAPACITA' C, AREA S, DISTANZA d



$C = \frac{\varepsilon_0\cdot S}{d}$ $\quad$ ARMATURE PIANE PARALLELE $d < S$

ENERGIA ELETTROSTATICA

$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$

DENSITA' DI ENERGIA

$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ $\quad U = \frac{1}{2}\int_\tau \varepsilon_0 E^2\,d\tau$

VOLUME INTERNO CONDENSATORE $\quad \tau = Sd$

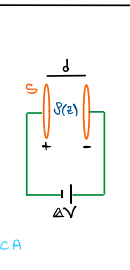
CAMPO ELETTRICO IN CONDENSATORE PIANO $\quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$

$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)^2 Sd = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$ ☑

ESERCIZIO 11

CONDENSATORE PIANO ARMATURE CIRCOLARI DISTANZA $d << R$

ARMATURE CONNESSE A GENERATORE ΔV



DENSITA' CARICA VOLUMETRICA

NELLO SPAZIO TRA LE ARMATURE $\quad \rho(z) = \rho_0 e^{-z/2}$ $\quad z \in (0, d)$

RICAVO IL CAMPO ELETTRICO

PER SIMMETRIA DISTRIBUZIONE $\quad \vec{E} = E(z)\vec{u_z}$

FORMA LOCALE GAUSS $\quad \text{DIV}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}e^{-z/2}$

$\int dE = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int e^{-z/2}\,dz$

$\vec{E}(z) = \left(-\frac{2\rho_0}{\varepsilon_0}e^{-z/2} + A\right)\vec{u_z}$

COSTANTE DI INTEGRAZIONE

$V(d) - V(0) = -\int_0^d E(z)\,dz = \Delta V$

$-\left(-\frac{2^2\rho_0}{\varepsilon_0}e^{-d/2} + \frac{2^2\rho_0}{\varepsilon_0} + Ad - A_0\right) = \Delta V$

$A = \cdots = \frac{\rho_0 2^2}{\varepsilon_0}\left(1 - e^{-d/2}\right) - \frac{\Delta V}{d}$

CAMPO ELETTRICO CONDENSATORE

$\vec{E}(z) = \left[-\frac{\Delta V}{d} + \frac{\rho_0 2^2}{\varepsilon_0 d}\left(1 - e^{-d/2}\right) - \frac{\rho_0 2}{\varepsilon_0}e^{-z/2}\right]\vec{u_z}$

CARICHE INDOTTE SUL CONDENSATORE

TEOREMA DI COULOMB $\quad E(x = k) = \frac{\sigma_k}{\varepsilon_0}$

$\sigma_1 = \varepsilon_0 E(z = 0^+) = -\frac{\Delta V\varepsilon_0}{d} + \frac{\rho_0 2^2}{d}\left(1 - e^{-d/2}\right) - \rho_0 2$

$\sigma_2 = \varepsilon_0 E(z = d^-) = -\frac{\Delta V\varepsilon_0}{d} + \frac{\rho_0 2^2}{d}\left(1 - e^{-d/2}\right) - \rho_0 2e^{-d/2}$

$Q_1 = \pi R^2\sigma_1$ $\quad Q_2 = \pi R^2\sigma_2$

$Q_1 \neq Q_2$ NO INDUZIONE COMPLETA

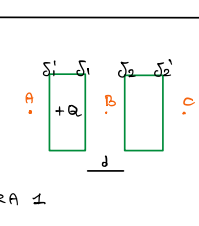
PRESENZA DI CARICA NELLA REGIONE INTERNA

ESERCIZIO 12

PIASTRE CONDUTTRICI PARALLELE DISTANZA d

NO EFFETTI DI BORDO

PONGO CARICA +Q IN PIASTRA 1



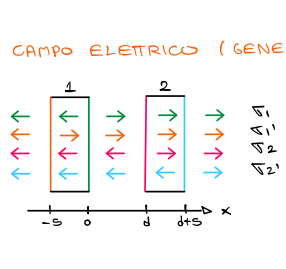
PIASTRA 1

$\sigma_1 + \sigma_1' = \frac{Q}{S}$

PIASTRA 2

$\sigma_2 + \sigma_2' = 0$

CAMPO ELETTRICO (GENERALE)



$$\vec{E}(x) = \left|\begin{array}{lll} -\frac{\sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 + \sigma_2'}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} & x < -S & \\ 0 & x \in (-S, 0) & \text{PIASTRA 1} \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_1' - \sigma_2 - \sigma_2'}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} & x \in (0, d) & \text{CONDENSATORE} \\ 0 & x \in (d, d+S) & \text{PIASTRA 2} \\ +\frac{\sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 + \sigma_2'}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} & x > d+S & \end{array}\right.$$

IL CAMPO ELETTRICO E' ZERO DENTRO LE PIASTRE PERCHE' SONO CONDUTTORI

CONDIZIONI DEI CONDUTTORI

$\vec{E}_{INTERNO,1} = 0 \qquad -\frac{-\sigma_1' + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_2'}{2\varepsilon_0} = 0$

$\vec{E}_{INTERNO,2} = 0 \qquad +\frac{-\sigma_2' + \sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2}{2\varepsilon_0} = 0$

TUTTE LE CONDIZIONI SU σ_x

4 VARIABILI, 4 EQUAZIONI

$$\left|\begin{array}{ll} \sigma_1 + \sigma_1' = \frac{Q}{S} & \text{PIASTRA 1 CARICA} \\ \sigma_2 + \sigma_2' = 0 & \text{PIASTRA 2 SCARICA} \\ -\sigma_1' + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_2' = 0 & \text{PIASTRA 1 CONDUTTRICE} \\ -\sigma_2' + \sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 = 0 & \text{PIASTRA 2 CONDUTTRICE} \end{array}\right.$$

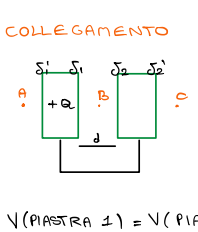
$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 + \sigma_1' = \frac{Q}{S} \\ \sigma_2 + \sigma_2' = 0 \\ -\sigma_1' + \sigma_1 + \cancel{\sigma_2 + \sigma_2'} = 0 \\ -\sigma_2' + \sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 = 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 2\sigma_1 = \frac{Q}{S} \\ \sigma_2 + \sigma_2' = 0 \\ \sigma_1' = \sigma_1 \\ — \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{Q}{2S} \\ \sigma_1' = \frac{Q}{2S} \\ \sigma_2' = -\sigma_2 \\ — \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} — \\ — \\ \sigma_2' = -\sigma_2 \\ \frac{Q}{S} + 2\sigma_2 = 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ll} \sigma_1 = \frac{Q}{2S} & k \\ \sigma_1' = \frac{Q}{2S} & k \\ \sigma_2 = -\frac{Q}{2S} & -k \\ \sigma_2' = +\frac{Q}{2S} & k \end{array}\right.$$

CAMPO ELETTRICO (COMPLETO)

$$\vec{E}(x) = \left|\begin{array}{ll} -\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\vec{u_x} & x < -S \\ 0 & x \in (-S, 0) \\ +\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\vec{u_x} & x \in (0, d) \\ 0 & x \in (d, d+S) \\ +\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\vec{u_x} & x > d+S \end{array}\right.$$

COLLEGAMENTO ELETTRICO



TRASFERIMENTO DI CARICA CHE PORTA A EQUIPOTENZIARE LE DUE PIASTRE

V(PIASTRA 1) = V(PIASTRA 2) = V'

$\Delta V = 0 \longrightarrow V = 0$ ALL' INTERNO DEL CONDENSATORE

PER IL TEOREMA DI COULOMB $\quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0$

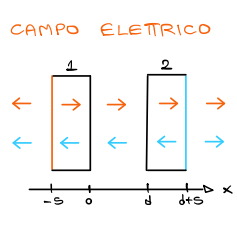
LA CARICA VIENE RIPARTITA EQUAMENTE

$\cancel{\sigma_1} + \sigma_1' = \frac{Q}{2S}$ $\quad \cancel{\sigma_2} + \sigma_2' = \frac{Q}{2S}$

CARICA SUPERFICIALE σ_x

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_1' = \frac{Q}{2S} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_2' = \frac{Q}{2S} \end{array}\right.$$

CAMPO ELETTRICO



$$\vec{E}(x) = \left|\begin{array}{lll} -\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\vec{u_x} & x < -S & \\ 0 & x \in (-S, 0) & \text{PIASTRA 1} \\ 0 & x \in (0, d) & \text{EQUIPOTENZIATI} \\ 0 & x \in (d, d+S) & \text{PIASTRA 2} \\ +\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\vec{u_x} & x > d+S & \end{array}\right.$$

ENERGIA DISSIPATA

CAMBIA SOLO IL VALORE DEL CAMPO ELETTRICO IN B (INTERNO)

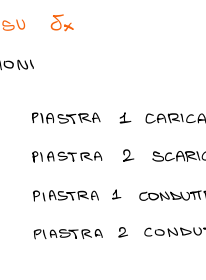
$U = \int u = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_B^2\,d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{Q^2}{4\varepsilon_0^2 S^2}Sd = \frac{Q^2 d}{8\varepsilon_0 S}$

ESERCIZIO 13

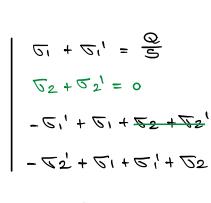
CONDENSATORE PIANO

$D << \sqrt{S}$ (INFINITO)

DDP COSTANTE V_0



DISTRIBUZIONE CARICA

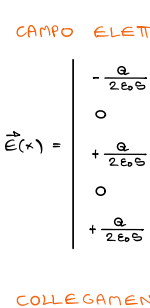


DDP COSTANTE
+
INDUZIONE COMPLETA
+
NEUTRALITA' LASTRA

SUPERFICIE GAUSSIANA CILINDRICA Σ

$$Q(\Sigma) = \left|\begin{array}{ll} 0 & y < 0 \\ -Q & y \in (0, k) \\ 0 & y \in (k, k+\Delta) \\ -Q & y \in (k+\Delta, d) \\ 0 & y > d \end{array}\right.$$

CAMPO ELETTRICO



$$\vec{E}(y) = \left|\begin{array}{ll} 0 & y < 0 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y} & y \in (0, k) \\ 0 & y \in (k, k+\Delta) \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y} & y \in (k+\Delta, d) \\ 0 & y > d \end{array}\right.$$

DENSITA' SUPERFICIALI σ_x

$\Delta V = -E\Delta x$

$V_0 = E_0(k) + E_0(d - \Delta - k) = E_0(d - \Delta)$

$E_0 = \frac{V_0}{d - \Delta}$ $\quad \sigma = \varepsilon_0 E_0 = \frac{\varepsilon_0 V_0}{d - \Delta}$

ESERCIZIO 14

ESERCIZIO PRECEDENTE

FORZA ELETTROSTATICA AGENTE SU LASTRA

$F = qE = \sigma S E$

$F_1 = F(y = k) = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\vec{u_y}$

$F_2 = F(y = k+\Delta) = +\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\vec{u_y}$

$\vec{F} = \sum F_i = 0$ $\quad$ FORZA TOTALE NULLA

LAVORO ESTERNO

$L_{ESTERNO} + L_{CAMPO} = \Delta E_{\cancel{CINETICA}}$

$L_{EST} = -L_{CAMPO}$

IL LAVORO NON E' COMPIUTO A SPESA DEL CONDENSATORE (V_0 COSTANTE) MA DAL GENERATORE ESTERNO

$L_{CAMPO} + \Delta U = L_{GEN}$

$L_{CAMPO} = L_{GEN} - \Delta U = V_0(Q - Q') - \left(\frac{1}{2}QV_0 - \frac{1}{2}Q'V_0\right)$

(Q, Q') CARICA SULLE LASTRE DEL CONDENSATORE PRIMA E DOPO L' INSERIMENTO DELLA LASTRA

$L_{EST} = -\frac{1}{2}(Q - Q')V_0$

SENZA LASTRA

$Q' = C'V_0 = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{d}$

CON LASTRA

$C_{EQ} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - \Delta}$

$Q = CV_0 = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{d - \Delta}$

LAVORO ELETTROSTATICO

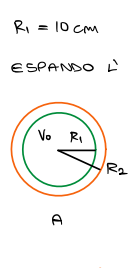
$L_{EST} = -\Delta U = -\frac{\varepsilon_0 V_0^2 S}{2}\cdot\frac{\Delta}{d(d - \Delta)}$

ESERCIZIO 15

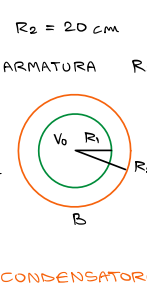
CONDENSATORE SFERICO VUOTO

$R_1 = 10\,\text{cm}$ $\quad R_2 = 20\,\text{cm}$ $\quad \Delta V = 10^3\,\text{V}$

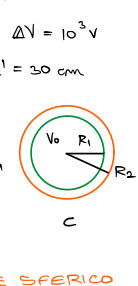
ESPANDO L' ARMATURA $\quad R_2' = 30\,\text{cm}$



A



B



C

CAPACITA' CONDENSATORE SFERICO

$C = C_A = C_C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

$C' = C_B = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2'}{R_2' - R_1}$

GENERATORE COLLEGATO

$V = \Delta V = V_A = V_B$

DIFFERENZA IN ENERGIA

$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = \frac{1}{2}C_B V_B^2 + \frac{1}{2}C_A V_A^2$

$= \frac{1}{2}\Delta V^2(C' - C) \simeq -2.78\cdot 10^{-5}\,\text{J}$

SCOLLEGO IL CARICATORE

PROCESSO CONTRARIO, RIDUCO $R_2' \rightarrow R_2$

CARICA SU CONDENSATORE ESPANSO

$Q = V_B C_B = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2'}{R_2' - R_1}\Delta V$

CONSERVAZIONE DELLA CARICA $\quad Q_B = Q_C$

DIFFERENZA DI POTENZIALE FINALE

$Q_C = V_C C_C$ $\quad Q = C'\Delta V$

$\Delta V' = \frac{Q}{C'} = \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0 R_1}R_2'}{R_2' - R_1}\Delta V\,\frac{R_2 - R_1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0 R_1}R_2}$

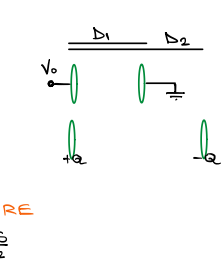
$\Delta V' = \Delta V\,\frac{R_2'(R_2 - R_1)}{R_2(R_2' - R_1)} \simeq 750\,\text{V}$

ESERCIZIO 16

CONDENSATORE PIANO

DISTANZA INIZIALE D_1

DISTANZA FINALE D_2



CAPACITA' CONDENSATORE

$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{D_1}$ $\quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{D_2}$

DIFFERENZA DI POTENZIALE

$V_1 = V_0$ $\quad V_2 = ?$

DISTRIBUZIONE DI CARICA

$Q_{SISTEMA} = \sum Q_{ARMATURE} = 0$

$Q = C_1V_1 = C_2V_2 = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{D_1}$

QUESTO VALE SOLO PERCHE' SCOLLEGANDO IL CARICATORE Q E' COSTANTE

FORZA ATTRAZIONE TRA ARMATURE

$\vec{E}_{\substack{SINGOLA\\ARMATURA}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$

$\vec{F} = Q\vec{E} = Q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = -\frac{Q^2}{2S\varepsilon_0}\vec{u_x}$

$= -\frac{\varepsilon_0^{\cancel{2}} S^{\cancel{2}} V_0^2}{D_1^2}\frac{1}{2S\cancel{\varepsilon_0}} = -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2D_1^2}\vec{u_x}$

LA FORZA E' DISTANTE INDIPENDENTEMENTE DALLA DISTANZA TRA LE 2 ARMATURE

LAVORO CAMPO ELETTRICO

$L = \int \vec{F}\,d\ell = \int_{D_1}^{D_2} -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2D_1^2}\,d\ell = -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2D_1^2}(D_2 - D_1)$

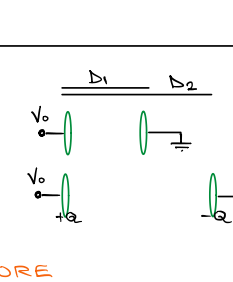
LAVORO PER ALLONTANARE LE ARMATURE

$L_{CAMPO} + L_{EST} = \Delta E_{CIN} = 0$

$L_{EST} = -L = \Delta U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right)Q^2 = +\frac{\varepsilon_0 S V_0^2(D_2 - D_1)}{2D_1^2}$

ESERCIZIO 17

ESERCIZIO 16 MA IL POTENZIALE RESTA COSTANTE



CAPACITA' CONDENSATORE

$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$ $\quad$ UGUALE A PRIMA

DIFFERENZA DI POTENZIALE

$V_1 = V_2 = V_0$ $\quad$ COSTANTE PER IPOTESI

DISTRIBUZIONE DI CARICA

$Q(x) = C(x)V_0 = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{x}$

FORZA ATTRAZIONE TRA ARMATURE

$\vec{E}_{\substack{SINGOLA\\ARMATURA}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$

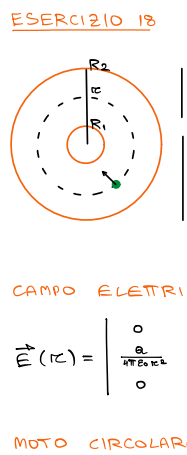
$\vec{F} = Q\vec{E} = -\frac{\varepsilon_0 S V_0}{x}\frac{\cancel{\varepsilon_0 S}V_0}{2\cancel{\varepsilon_0 S}x} = -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2x^2}\vec{u_x}$

LAVORO FORZE ESTERNE

$L_{EST} = -\int_{D_1}^{D_2} F(x)\,dx = -\Delta U = \frac{1}{2}(C_2V_2 - C_1V_1)$

$= \frac{\varepsilon_0 S V_0}{2}\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right)$

ESERCIZIO 18



CONDENSATORE SFERICO

$R_1 = 20\,\text{cm}$ $\quad R_2 = 30\,\text{cm}$ $\quad Q = 10^{-8}\,\text{C}$

PARTICELLA

$m = 1.672\cdot 10^{-27}\,\text{kg}$ $\quad q = 1.6\cdot 10^{-19}\,\text{C}$

RUOTA UNIFORMEMENTE SU $r = 25\,\text{cm}$

CAMPO ELETTRICO CONDENSATORE

$$\vec{E}(r) = \left|\begin{array}{ll} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \in (R_1, R_2) \\ 0 & r > R_2 \end{array}\right. \leftarrow$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$F_{ELETTRICA} = F_{CENTRIPETA}$

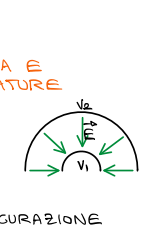
$qE = \frac{mv^2}{r}$ $\quad v = +\sqrt{\frac{qEr}{m}} = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r m}} \simeq 1.85\cdot 10^5\,\text{m/s}$

$\omega = \frac{v}{r} = 7.42\cdot 10^5\,\text{RAD/S}$

DIREZIONE DELLA FORZA E POTENZIALE DELLE ARMATURE

ELETTRICA $\quad + \vec{u_r}$

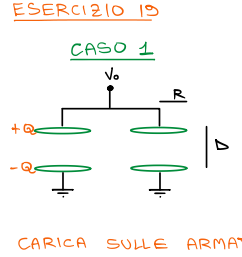
PUNTA AL CENTRO



PER AVER QUESTA CONFIGURAZIONE $V_2 > V_1$ QUINDI $Q(R_2) = +Q$ $\quad Q(R_1) = -Q$

ESERCIZIO 19

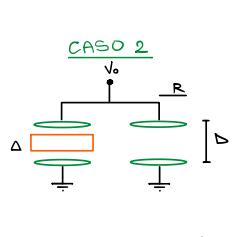
CASO 1



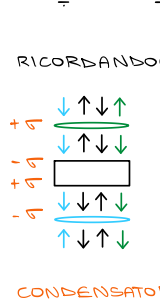
CARICA SULLE ARMATURE

$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 S}{D}V = \frac{\varepsilon_0\pi R^2 V_0}{D}$

CASO 2



RICORDANDOCI L' ESERCIZIO 13



$$\vec{E}(y) = \left|\begin{array}{ll} 0 & y < 0 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y} & y \in (0, k) \\ 0 & y \in (k, k+\Delta) \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y} & y \in (k+\Delta, d) \\ 0 & y > d \end{array}\right.$$

CONDENSATORI

POSSIAMO VEDERE IL SISTEMA COME 3 CONDENSATORI

$C_1 = \frac{\varepsilon_0 Q}{D}$ $\quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 Q}{x}$ $\quad C_3 = \frac{\varepsilon_0 Q}{D - \Delta}$

I CONDENSATORI 2 E 3 SONO IN SERIE

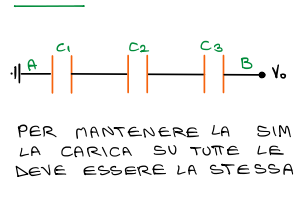
$C_{23} = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0\pi R^2}{D - \Delta}$

CARICA SULLE ARMATURE

$Q' = C_{23}V_0 = \frac{\varepsilon_0\pi R^2 V_0}{D - \Delta}$

ESERCIZIO 20

CASO 1



ΔV_{AB} COST

PER MANTENERE LA SIMMETRIA LA CARICA SU TUTTE LE ARMATURE DEVE ESSERE LA STESSA

CONDENSATORI IN SERIE

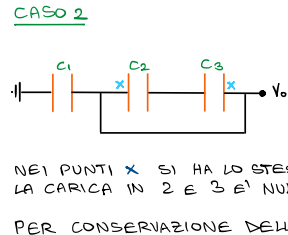
$C_{EQ} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}$

CARICA SUPERFICIALE

POICHE' IL VOLTAGGIO E' COSTANTE

$Q = C_{EQ}V_0$

CASO 2



ΔV_{AB} COST

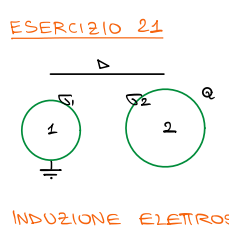
NEI PUNTI x SI HA LO STESSO POTENZIALE LA CARICA IN 2 E 3 E' NULLA

PER CONSERVAZIONE DELLA CARICA $\quad Q_1 = C_{EQ}V_0$ RESTA INVARIATA

ENERGIA DISSIPATA

$U_{DISS} = \Delta U_2 + \Delta U_3 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_3}$

ESERCIZIO 21



IPOTESI $D >> R_1, R_2$

INDUZIONE ELETTROSTATICA

PONGO CARICA Q SU SFERA 2
CARICA q INDOTTA IN SFERA 1 ?

$q = \int_{S_1}\sigma_1\,dS_1$ $\quad Q = \int_{S_2}\sigma_2\,dS_2$

DENSITA' DI CARICA NON UNIFORMI

POTENZIALE

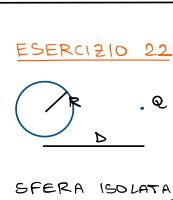
POICHE' COLLEGATO A MASSA

$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D} = 0 \longrightarrow q = \frac{R_1}{D}Q$

$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\frac{\sigma_1}{r}\,dS_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma_2}{r}\,dS_2$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 D} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_1}{D^2}\right)$

ESERCIZIO 22



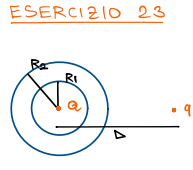
SFERA ISOLATA E SCARICA AVVICINATA A CARICA Q

CARICA SFERA SI RIDISTRIBUISCE PER AVERE $E_{INTERNO} = 0$ (CONDUTTORE)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\sigma}{r}\,dS$ $\quad$ CAMPO INTERNO NULLO

ESERCIZIO 23



$$\vec{E}(r) = \left|\begin{array}{ll} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r < R_1 \\ 0 & r \in (R_1, R_2) \end{array}\right.$$

σ1 OMOGENEA SE Q CENTRATA NON INFLUENZATA DA q

σ2 INFLUENZATA DA q MAI OMOGENEA

E' COME SE LA CAVITA' NON CI FOSSE

$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 D} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$