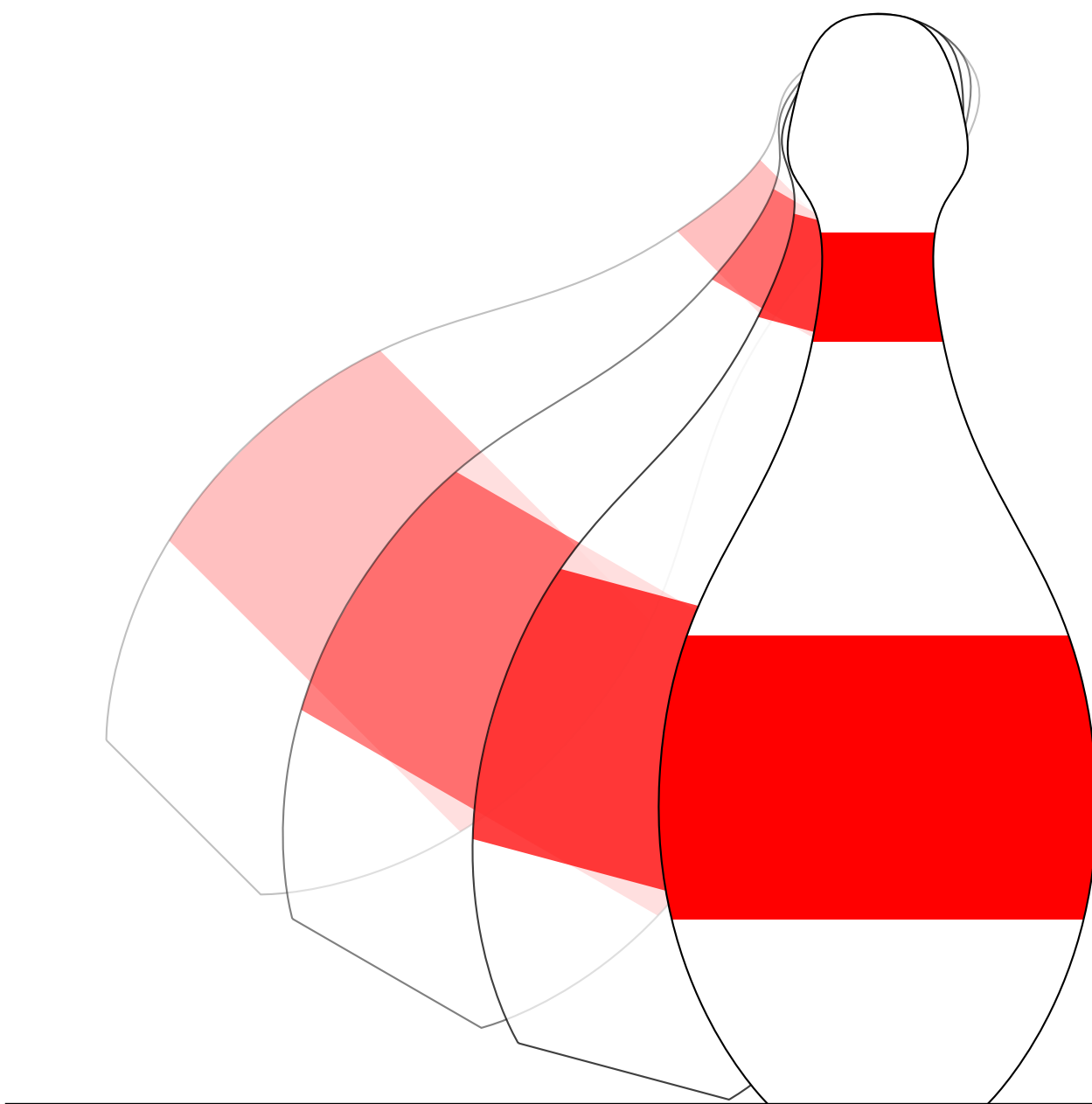


Meccanica dei Sistemi

Andrea Crespi



Indice

1	Sistemi di punti materiali	4
1.1	Introduzione	4
1.2	Quantità di moto e momento angolare per un sistema di punti	5
1.3	Definizione di sistema rigido	5
2	Il centro di massa	6
2.1	Definizione e proprietà	6
2.2	I teoremi del centro di massa	9
2.3	Il sistema di riferimento del centro di massa e i teoremi di König	10
3	Dinamica dei sistemi di punti	13
3.1	Le Equazioni Cardinali della Meccanica	13
3.2	Il Teorema delle Forze Parallele e il baricentro	14
3.3	Leggi di conservazione	15
3.4	Lavoro ed energia	16
4	Urti ed esplosioni	18
4.1	Modello fisico dei fenomeni d'urto	18
4.2	Urti e leggi di conservazione	19
4.3	Esplosioni	23
5	Meccanica dei sistemi rigidi: peculiarità	24
5.1	Cinematica dei punti del sistema	24
5.2	Il problema statico	25
6	Moti rotatori ad asse fisso	27
6.1	Scomposizione del momento angolare	27
6.2	Energia e lavoro nel moto rotatorio	31
6.3	Calcolo del momento di inerzia	32
7	Moti rotatori ad asse mobile	38
7.1	Descrizione delle rototraslazioni	38
7.2	Il moto di rotolamento	39
7.3	Reazioni vincolari nel moto di rotolamento	40

1 Sistemi di punti materiali

1.1 Introduzione

Le Leggi di Newton permettono di studiare la dinamica non solo di un singolo punto materiale, ma anche di corpi estesi costituiti da numerosi punti, interagenti fra loro oppure no.

Sistema di punti materiali

Si definisce sistema di punti materiali un insieme continuo o discreto di punti, ciascuno caratterizzato da massa, posizione e velocità.

Possiamo essere interessati a descrivere molti punti come un unico sistema quando il numero di questi punti è così elevato che sarebbe troppo dispendioso (o impossibile!) studiarli singolarmente. La Meccanica dei Sistemi definisce allora alcune grandezze collettive o globali che permettono di studiare il suo comportamento dinamico in modo conveniente. In altri casi, anche se il numero di punti costituenti il sistema è ridotto e potrebbero essere studiati individualmente, queste grandezze collettive permette di evidenziare meglio i vincoli esistenti tra le posizioni o le velocità dei singoli punti, e perciò di raggiungere una descrizione dinamica completa in modo semplice. Un esempio significativo della potenza di questo approccio sarà lo studio dei fenomeni d'urto tra due corpi (Sezione 4).

Come menzionato nella definizione, i sistemi meccanici possono essere *sistemi discreti*, costituiti da un numero finito di punti materiali, ciascuno con massa m_i , oppure possono essere *sistemi continui* ed estesi nello spazio, composti da infiniti elementi di massa dm . I risultati presentati nelle seguenti sezioni saranno validi in entrambi i casi: per passare da una forma all'altra è sufficiente sostituire adeguatamente le sommatorie sugli m_i con integrali su dm o viceversa.

Ciascuno dei punti costituenti il sistema può interagire con gli altri punti del sistema oppure con corpi posti al di fuori di esso; per questo, esso può essere sottoposto a diverse forze. Si definisce:

forze interna : una forza applicata a un punto materiale appartenente al sistema, tale che la sua forza di reazione è ancora applicata a un punto del sistema. Sono forze dovute all'interazione tra i punti dello stesso sistema.

forze esterna : una forza applicata a un punto materiale appartenente al sistema, tale che la sua forza di reazione non è applicata a un punto interno al sistema. Sono forze dovute all'interazione dei punti del sistema con l'esterno.

La scelta di definire più corpi, ovvero più punti materiali, come un unico sistema può essere suggerita dall'esperienza e dalla convenienza di trattazione. Tuttavia, è sempre in qualche modo arbitraria e non influenza di per sé il comportamento fisico degli elementi, ma solo la descrizione che noi facciamo di esso. Si può anche sottolineare come la definizione di una data forza come forza interna o esterna non è dovuto ad attributi fisici ed intrinseci della forza stessa, ma proprio dalla nostra scelta (più o meno naturale) di includere certi altri punti nel sistema oppure no.

Come si può forse intuire dalla discussione precedente, nell'affrontare i problemi che coinvolgono sistemi di punti (a differenza del caso in cui sia coinvolto un singolo punto materiale) è importante stabilire non solo quali forze siano applicate al sistema, ma anche individuare correttamente il loro *punto di applicazione*. Il punto di applicazione della forza determina infatti il momento meccanico che essa produce rispetto a un certo polo e perciò, come vedremo in dettaglio, determina il moto del sistema sia in modo qualitativo che quantitativo. Per alcuni tipi di forze il punto di applicazione è dato nel problema specifico: ad esempio, se una cassa è tirata tramite una fune, la forza di tensione si applicherà alla cassa esattamente nel punto in cui è collegata la fune. Per altri tipi di forze il punto di applicazione è intrinseco nella loro natura: ad esempio, la forza peso si applica in un punto detto *baricentro* del sistema (come vedremo nella Sezione 3.2). Per altri tipi di forze il punto di applicazione può non essere scontato: un esempio significativo è il caso della reazione vincolare, normale o tangenziale, del piano su cui un corpo rigido è appoggiato. A quest'ultimo tipo di forze sarà dedicata una discussione specifica nella Sezione 5.2 e 7.3.

1.2 Quantità di moto e momento angolare per un sistema di punti

Cominciamo fin d'ora ad estendere la definizione di alcune grandezze fisiche dinamiche al caso di un sistema di punti. Vedremo nelle sezioni seguenti come il fatto di aver assunto queste definizioni permetta di dimostrare un alcuni teoremi che permettono di studiare convenientemente il moto del sistema.

Quantità di moto di un sistema di punti

La quantità di moto \vec{Q} di un sistema di N punti materiali si definisce come la somma delle quantità di moto dei singoli punti:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N \vec{q}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (1-1)$$

Se si tratta di un sistema continuo, possiamo invece definire:

$$\vec{Q} = \int_M \vec{v} dm \quad (1-2)$$

Momento angolare di un sistema di punti

Il momento angolare \vec{L} di un sistema di N punti materiali, rispetto a un polo Ω , si definisce come la somma dei momenti angolari rispetto ad Ω dei singoli punti

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^N \vec{l}_{i,\Omega} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times \vec{q}_i \quad (1-3)$$

dove $\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{r}_\Omega$ è il vettore che congiunge Ω al punto materiale i -esimo. Anche in questo caso è possibile estendere la definizione ai sistemi continui

$$\vec{L}_\Omega = \int \vec{r}^* \times d\vec{q} = \int_M \vec{r}^* \times \vec{v}_i dm \quad (1-4)$$

1.3 Definizione di sistema rigido

Un caso particolare di sistema di punti materiali è un sistema in cui le distanze relative tra le varie coppie di punti sono fisse e inalterabili.

Sistemi rigidi

Si definisce **sistema rigido** o **corpo rigido** un sistema di punti materiali in cui le distanze fra tutte le possibili coppie di punti che lo costituiscono si mantengono inalterate, indipendentemente dall'applicazione di forze o momenti.

Questo tipo di modello può essere particolarmente appropriato per la descrizione dei corpi solidi estesi, in prima approssimazione indeformabili. In realtà, i materiali reali sono sempre in qualche misura elastici: se un corpo è sottoposto a forze (interne o esterne), esso sarà sempre soggetto a una seppur minima deformazione. Inoltre, se le forze sono troppo intense, il corpo può deformarsi in modo permanente (deformazione plastica) o rompersi. Il modello del corpo rigido è dunque appropriato per la descrizione della cinematica e della dinamica di corpi solidi estesi quando le forze applicate non sono troppo intense, in modo da rendere le deformazioni indotte trascurabili. Vedremo nella Sezione 5.1 e seguenti come le specificità del corpo rigido consentano di derivare un certo numero di relazioni particolari, valide per solo questo tipo di sistemi.

2 Il centro di massa

2.1 Definizione e proprietà

In un sistema di punti materiali, ciascun punto possiede parametri cinematici (posizione, velocità, accelerazione) in generale indipendenti da quelli degli altri. Esiste tuttavia un punto geometrico che può essere assunto, per alcuni aspetti, come “centro” virtuale del sistema. Questo punto è il **centro di massa**: sarà definito qui di seguito e ne saranno descritte le principali proprietà.

Centro di massa

Per un sistema costituito di N punti materiali, ciascuno di massa m_i , si definisce il **centro di massa** come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (2-1)$$

avendo indicato con $M = \sum_{i=1}^N m_i$ la massa totale del sistema.

Per un sistema continuo, costituito da punti materiali di massa infinitesima dm , si può estendere la definizione come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{CM} \vec{r} dm \quad (2-2)$$

con $M = \int dm$ massa totale del sistema

Sottolineiamo il fatto che il centro di massa indica una *posizione puramente geometrica* e non un punto materiale: in corrispondenza di \vec{r}_{CM} può non trovarsi alcun punto fisico appartenente al sistema. Le coordinate cartesiane del centro di massa discendono direttamente dalla definizione (2-1):

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \quad (2-3)$$

Per comprenderne meglio il significato, valutiamo la posizione del centro di massa di due punti materiali, di massa m_A e m_B , posti a distanza D fra di loro (vedi Figura 1a). Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con l'origine in A e l'asse x orientato in modo che B giaccia sul semiasse positivo (la scelta di questo sistema di riferimento è del tutto arbitraria, ma perfettamente lecita ed utile per semplificare i calcoli). I vettori posizione di questi due punti diventano:

$$\vec{r}_A = 0 \quad \vec{r}_B = D \vec{u}_x \quad (2-4)$$

Applicando semplicemente la definizione risulta:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_B}{m_A + m_B} D \vec{u}_x \quad (2-5)$$

le distanze dei due punti dal centro di massa sono:

$$|\vec{r}_A - \vec{r}_{CM}| = \frac{m_B}{m_A + m_B} D \quad |\vec{r}_B - \vec{r}_{CM}| = \frac{m_A}{m_A + m_B} D \quad (2-6)$$

Perciò:

- il centro di massa di due punti materiali giace sul segmento congiungente i due punti
- il centro di massa è più vicino al punto materiale con la massa maggiore
- se $m_A = m_B$ il centro di massa è equidistante dai due punti

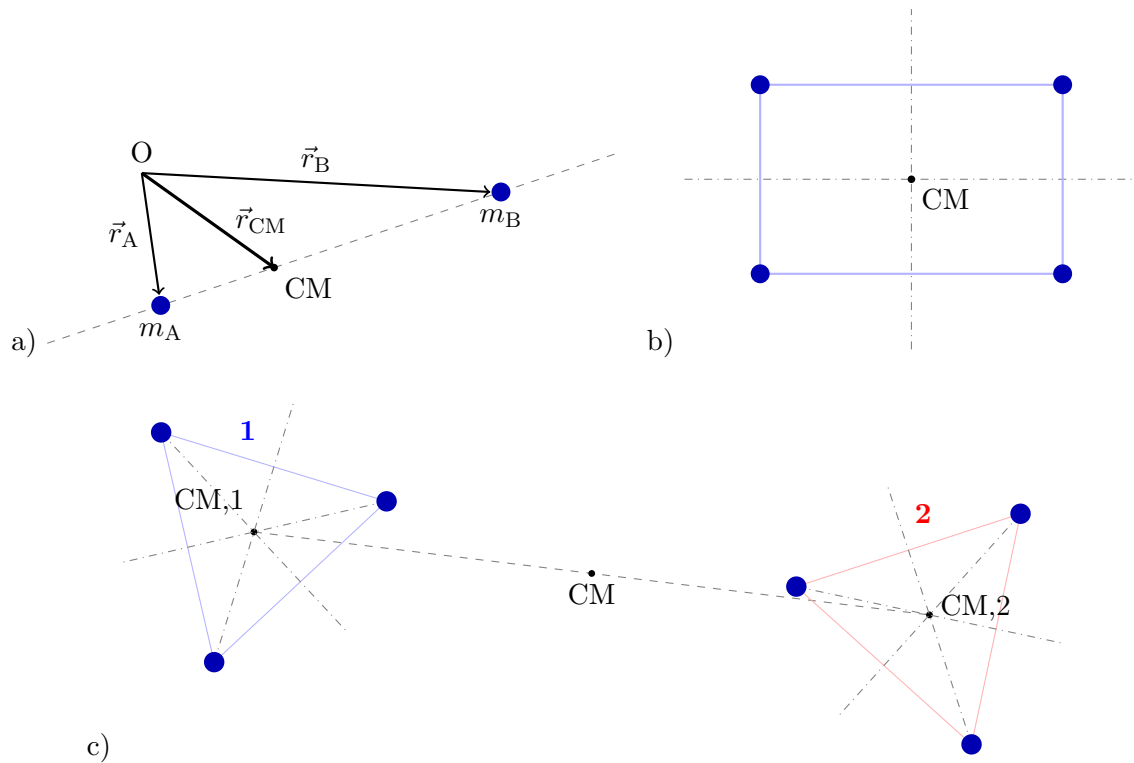


Figura 1: (a) Il centro di massa di due punti materiali A e B giace sul segmento che li congiunge, più vicino al punto di massa maggiore secondo le formule (2-6). (b) Quattro punti materiali disposti ai vertici di un rettangolo: il centro di massa è posto all'intersezione dei due assi di simmetria. (c) Un sistema è composto da sei punti di eguale massa m , disposti su due triangoli equilateri posti a una certa distanza fra loro. Considerando i due sottosistemi separatamente, ciascun triangolo ha il suo centro di massa $CM,1$ e $CM, 2$, posto all'intersezione dei suoi assi di simmetria. Il centro di massa CM del sistema complessivo coincide con il centro di massa di due punti materiali, ciascuno di massa $3m$, posti in corrispondenza di $CM,1$ e $CM,2$.

Centro di massa e assi di simmetria

Nel caso in cui un sistema di punti materiali possieda un asse di simmetria, il centro di massa giace su quell'asse di simmetria. Se un sistema possiede più di un asse di simmetria, il centro di massa giace all'intersezione degli assi.

Se un sistema mostra una certa simmetria, significa che operando sul sistema una certa trasformazione geometrica (ad esempio una riflessione o una rotazione di un dato angolo), il sistema trasformato è indistinguibile da quello originale. Ne consegue che il centro di massa del sistema non deve spostarsi quando viene operata questa trasformazione geometrica, altrimenti avremmo un elemento per distinguere il sistema trasformato dall'originale. Ora, i punti dello spazio che rimangono fissi durante la trasformazione formano per definizione l'asse di simmetria. È immediato concludere che il centro di massa appartiene proprio all'asse.

Se sono presenti più assi di simmetria, potremmo ripetere il ragionamento fatto qui sopra per ciascun asse. Perciò, il centro di massa appartiene a tutti gli assi, ovvero è situato nella loro intersezione (vedi esempio in Figura 1b). ■

Proprietà distributiva del centro di massa

Se un sistema di punti materiali è suddiviso in K sottosistemi, il centro di massa dell'intero sistema coincide con il centro di massa di K punti materiali, ciascuno dei quali è collocato nel centro di massa di un sottosistema e possiede l'intera massa del sottosistema stesso.

Definiamo l'insieme σ dei punti del sistema e i sottoinsiemi σ_j (con $1 \leq j \leq K$) che definiscono i punti di sottosistemi (vedi anche esempio in Figura 1c). L'insieme σ coincide con l'unione di tutti i sottoinsiemi σ_j . Il centro di massa del sottosistema j -esimo è:

$$\vec{r}_{\text{CM},j} = \frac{1}{M_j} \sum_{i \in \sigma_j} m_i \vec{r}_i \quad (2-7)$$

dove la sommatoria è operata sui punti del sottosistema σ_j e, naturalmente, $M_j = \sum_{i \in \sigma_j} m_i$. Se ora calcoliamo il centro di massa dei vari punti $\vec{r}_{\text{CM},j}$, cioè dei centri di massa dei sottosistemi, otteniamo:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{j=1}^K M_j \vec{r}_{\text{CM},j}}{\sum_{j=1}^K M_j} = \frac{\sum_{j=1}^K M_j \cdot \frac{1}{M_j} \sum_{i \in \sigma_j} m_i \vec{r}_i}{\sum_{j=1}^K \sum_{i \in \sigma_j} m_i} \quad (2-8)$$

È ora evidente che la doppia sommatoria $\sum_{j=1}^K \sum_{i \in \sigma_j}$ è equivalente a una sola sommatoria che comprende tutti i punti del sistema intero $\sum_{i \in \sigma}$. Si ottiene allora:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i \in \sigma} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i \in \sigma} m_i} \quad (2-9)$$

cioè la definizione usuale di centro di massa per i punti materiali appartenenti a σ . La proprietà distributiva del centro di massa è dunque dimostrata. ■

2.2 I teoremi del centro di massa

Il centro di massa raccoglie in sé in modo semplice alcune significative proprietà legate al *moto di traslazione* del sistema di punti. In particolare, dimostreremo qui di seguito due teoremi che riguardano la velocità e l'accelerazione del centro di massa e consentono di metterle in relazione, l'una con la quantità di moto, l'altra con la forze applicate al sistema di punti.

Avvertiamo già che le grandezze fisiche che descrivono le rotazioni, quali il momento angolare, hanno un comportamento più complesso; ne discuteremo nella sezione 2.3.

Primo Teorema del Centro di Massa

*Ai fini del calcolo della **quantità di moto** il sistema si comporta come un unico punto materiale, di massa M pari alla massa totale del sistema e situato nel centro di massa.*

$$\vec{Q} = M\vec{v}_{\text{CM}} \quad (2-10)$$

I) Derivando la (2-2) rispetto al tempo si ottiene la velocità del centro di massa e si può ricavare:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_i \vec{q}_i \quad (2-11)$$

II) Ricordando la definizione (1-1) di quantità di moto per un sistema di punti si ricava la (2-10). ■

Secondo Teorema del Centro di Massa (Teorema del Moto del Centro di Massa)

Il centro di massa si muove come un punto materiale sul quale sia concentrata tutta la massa M del sistema e sul quale agiscano tutte e sole le forze esterne al sistema.

$$\vec{F}^{(e)} = M\vec{a}_{\text{CM}} \quad (2-12)$$

I) Derivando ancora rispetto al tempo la (2-11) si ottiene l'accelerazione del centro di massa:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i \frac{d\vec{q}_i}{dt} \quad (2-13)$$

II) Appliciamo a ciascun termine della sommatoria nella (2-13) il Secondo Principio della Dinamica: la derivata della quantità di moto del punto materiale i -esimo è pari alla risultante $\vec{f}_{\text{ris},i}$ delle forze agenti su questo punto. In parte queste sono forze interne $\vec{f}_{ij}^{(i)}$ dovute all'interazione di ciascun altro punto $j \neq i$ con il punto i -esimo. In parte sono forze esterne, che danno una risultante $\vec{f}_i^{(e)}$ sul punto i -esimo.

$$\frac{d\vec{q}_i}{dt} = \vec{f}_{\text{ris},i} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}^{(i)} + \vec{f}_i^{(e)} \quad (2-14)$$

Sostituendo nella (2-13) abbiamo:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \left(\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}^{(i)} + \sum_i \vec{f}_i^{(e)} \right) \quad (2-15)$$

- III) Analizziamo la sommatoria delle forze interne. Poiché sono interazioni a coppie tra i punti del sistema, per ogni termine $\vec{f}_{ij}^{(i)}$ esisterà la sua reazione sull'altro punto $\vec{f}_{ji}^{(i)}$. Per il Terzo Principio della Dinamica però:

$$\vec{f}_{ji}^{(i)} = -\vec{f}_{ij}^{(i)} \quad (2-16)$$

Si può allora concludere che la risultante di tutte le forze interne agenti sul sistema è nulla:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \underbrace{\vec{f}_{ij}^{(i)} + \vec{f}_{ji}^{(i)}}_{=0} = 0 \quad (2-17)$$

- IV) Sfruttando quanto dimostrato al passaggio III), possiamo scrivere l'accelerazione del centro di massa (2-15) come:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{f}_i^{(e)} = \frac{1}{M} \vec{F}^{(e)} \quad (2-18)$$

avendo indicato con $\vec{F}^{(e)}$ la risultante delle forze esterne sul sistema di punti materiali. È dunque dimostrata la (2-12). ■

2.3 Il sistema di riferimento del centro di massa e i teoremi di König

Consideriamo un sistema di riferimento S inerziale e un sistema di riferimento S' con origine nel centro di massa del sistema di punti materiali e che *mantenga un'orientazione costante*. Questo sistema di riferimento S' dunque non ruota rispetto ad S, ma può essere non inerziale se il centro di massa accelera. Le leggi di trasformazione della posizione e della velocità del punto materiale i -esimo si scrivono in questo caso come:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i \\ \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i \end{cases} \quad (2-19)$$

dove i termini \vec{r}_i e \vec{v}_i indicano la posizione e la velocità del punto i -esimo in un sistema di riferimento S, mentre \vec{r}'_i e \vec{v}'_i indicano la posizione e la velocità del punto nel sistema di riferimento S'. I vettori \vec{r}_{CM} e \vec{v}_{CM} indicano la posizione e la velocità del centro di massa nel sistema di riferimento S.

È interessante valutare in S' le grandezze dinamiche del sistema di punti, quali la quantità di moto, il momento angolare e l'energia cinetica.

Quantità di moto nel sistema di riferimento del centro di massa

La quantità di moto di un sistema di punti materiali, valutata in un sistema di riferimento S' non rotante e avente origine nel centro di massa, è nulla.

$$\boxed{\vec{Q}' = 0} \quad (2-20)$$

- I) Poiché l'origine di S' coincide con il centro di massa:

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = \sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{r}_{CM} = M \vec{r}_{CM} - M \vec{r}_{CM} = 0 \quad (2-21)$$

- II) Si ricava allora semplicemente:

$$\vec{Q}' = \sum_i m_i \vec{v}'_i = \sum_i m_i \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{v}_{CM} = \vec{Q} - M \vec{v}_{CM} = 0 \quad (2-22)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato l'Equazione(2-10) cioè il Primo Teorema del Centro di Massa. ■

Teorema di König per il Momento Angolare

Il momento angolare \vec{L}_O di un sistema di punti, valutato rispetto a un polo coincidente con l'origine O di un sistema di riferimento inerziale, è esprimibile come somma di due contributi:

$$\vec{L}_O = \vec{L}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} \quad (2-23)$$

- $\vec{L}'_{CM} = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$ è detto **momento angolare intrinseco** ed è il momento angolare del sistema di punti valutato in un sistema di riferimento non rotante, con origine nel centro di massa;
- $\vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$ è un termine che equivale al momento angolare rispetto ad O di un punto materiale fittizio, coincidente con il centro di massa del sistema (in posizione \vec{r}_{CM} con velocità istantanea \vec{v}_{CM}) e avente l'intera sua massa M .

- I) Si consideri un sistema di riferimento inerziale S centrato in O e un sistema di riferimento S' centrato sul centro di massa. Valgono le relazioni (2-19).
- II) Per dimostrare la (2-23) sviluppiamo il momento angolare del sistema rispetto a un polo situato in O come segue:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) = \\ &= \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i = \\ &= \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}'_i \right) + \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right) \times \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i = \\ &= \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + 0 + 0 + \vec{L}'_{CM} \end{aligned} \quad (2-24)$$

■

Teorema di König per l'Energia Cinetica

L'energia cinetica E_K di un sistema di punti materiali è esprimibile come somma di due contributi:

$$E_K = E'_K + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad (2-25)$$

- $E'_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ è l'energia cinetica del sistema di punti valutata in un sistema di riferimento non rotante, con origine nel centro di massa;
- $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ equivale all'energia cinetica di un punto materiale fittizio, coincidente con il centro di massa del sistema e avente l'intera sua massa M .

- I) Si consideri un sistema di riferimento S e un sistema di riferimento S' centrato sul centro di massa, entrambi non rotanti rispetto a un sistema di riferimento inerziale, per cui valgono le relazioni (2-19).

II) L'energia cinetica del sistema di punti può essere sviluppata come segue:

$$\begin{aligned}
 E_K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \\
 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_{\text{CM}} \cdot \vec{v}_{\text{CM}} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \underbrace{(\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{\text{CM}})}_{= 2\vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{\text{CM}}} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}'_i = \\
 &= \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v}'_i \right) \cdot \vec{v}_{\text{CM}}}_{= \vec{Q}' = 0} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{= E'_K}
 \end{aligned} \tag{2-26}$$

■

Una importante conseguenza della relazione (2-25) è che, essendo $\frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 \geq 0$:

$$E'_K \leq E_K \tag{2-27}$$

Si può osservare che il sistema di riferimento di partenza, in cui è stata calcolata E_K , poteva essere un qualsiasi sistema di riferimento non rotante. Si può concludere perciò che *nel sistema di riferimento S' , con origine nel centro di massa, l'energia cinetica del sistema di punti assume il valore minore possibile* tra tutti i sistemi di riferimento non rotanti.

3 Dinamica dei sistemi di punti

3.1 Le Equazioni Cardinali della Meccanica

Dai passaggi svolti nella Sezione 2.2 per dimostrare il Secondo Teorema del Centro di Massa, e tenendo presente la definizione di quantità di moto \vec{Q} di un sistema di punti, è immediato dimostrare anche la seguente relazione:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{q}_i}{dt} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}^{(i)} + \sum_i \vec{f}_i^{(e)} = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)} \quad (3-1)$$

Essa costituisce l'estensione del Secondo Principio della Dinamica per i sistemi di punti materiali e governa in generale i moti di traslazione di questi ultimi. Se per un singolo punto materiale la variazione di quantità di moto nell'unità di tempo (ovvero la sua derivata) è data dalla risultante di tutte le forze, *per un sistema di punti essa è data dalla risultante delle sole forze esterne*. Il risultato:

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)}} \quad (3-2)$$

è detto **Prima Equazione Cardinale della Meccanica**.

Integrando nel tempo la (3-2) otteniamo l'estensione del **Teorema dell'Impulso** per un sistema di punti materiali: la variazione di quantità di moto di un sistema di punti è pari all'impulso della risultante delle forze esterne in quell'intervallo di tempo.

$$\vec{J}_{t_1, t_2}(\vec{F}^{(e)}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(e)} dt = \Delta \vec{Q} = \vec{Q}(t_2) - \vec{Q}(t_1) \quad (3-3)$$

Valutiamo ora la variazione nell'unità di tempo del momento angolare di un sistema rispetto a un polo Ω . Per un singolo punto materiale avevamo:

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega - \vec{v}_\Omega \times \vec{q} \quad (3-4)$$

dove $\vec{\tau}_\Omega$ è il momento risultante di tutte le forze applicate al punto materiale e \vec{v}_Ω è la velocità istantanea di traslazione del polo. Per un sistema di punti, data la definizione (1-3) e tenendo presente la (3-4) appena scritta, abbiamo:

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_{i,\Omega}}{dt} = \sum_i [\vec{\tau}_{i,\Omega} - \vec{v}_\Omega \times \vec{q}_i] = \sum_i \vec{\tau}_{i,\Omega} - \vec{v}_\Omega \times \sum_i \vec{q}_i \quad (3-5)$$

Ora, i momenti $\vec{\tau}_{i,\Omega}$ includono sia contributi di forze esterne che di forze interne:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,\Omega} = \sum_i \vec{\tau}_{i,\Omega}^{(i)} + \vec{\tau}_{i,\Omega}^{(e)} \quad (3-6)$$

Considerando che per le forze interne vale la (2-16) possiamo scrivere:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,\Omega}^{(i)} = \sum_i \sum_{j \leq i} \vec{r}_i^* \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j^* \times \vec{f}_{ji} = \sum_i \sum_{j \leq i} (\vec{r}_i^* - \vec{r}_j^*) \times \vec{f}_{ij} \quad (3-7)$$

La forza di interazione tra due punti materiali \vec{f}_{ij} è necessariamente diretta lungo la congiungente dei due punti e perciò parallela al vettore $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i^* - \vec{r}_j^*$. Perciò, la sommatoria nella (3-7) si annulla perché è nullo ogni suo termine:

$$(\vec{r}_i^* - \vec{r}_j^*) \times \vec{f}_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \vec{\tau}_{i,\Omega}^{(i)} = 0 \quad (3-8)$$

Concludendo, si può riscrivere la (3-5) come segue:

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{i,\Omega}^{(e)} - \vec{v}_\Omega \times \sum_i \vec{q}_i = \vec{\tau}_\Omega^{(e)} - \vec{v}_\Omega \times \vec{Q} = \vec{\tau}_\Omega^{(e)} - M \vec{v}_\Omega \times \vec{v}_{CM} \quad (3-9)$$

Nei casi in cui il polo Ω sia fisso ($\vec{v}_\Omega = 0$) oppure coincida con il centro di massa ($\vec{v}_\Omega = \vec{v}_{CM}$), o ancora abbia velocità parallela a quella del centro di massa ($\vec{v}_\Omega \parallel \vec{v}_{CM}$), l'equazione (3-5) diventa più semplice e prende la forma nota come **Seconda Equazione Cardinale della Meccanica**.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{(e)}} \quad (3-10)$$

Sottolineiamo che il momento risultante delle forze è *ben diverso* dal momento della risultante delle forze. Ciascuna forza esterna ha un suo punto di applicazione e una sua direzione, in generale diversa, e rispetto a un dato polo Ω darà uno specifico contributo di momento. Si può avere un momento non nullo anche in presenza di risultante nulla (si pensi al caso della *coppia di forze*) o viceversa momento nullo con risultante delle forze non nulla (si pensi al caso in cui una forza esterna è applicata direttamente al polo).

3.2 Il Teorema delle Forze Parallele e il baricentro

I risultati dimostrati finora ci permettono di “semplificare” il ruolo delle forze interne della dinamica del sistema. Di fatto, abbiamo mostrato come *per alcuni aspetti* esse siano irrilevanti.

Vediamo ora un risultato che permette di gestire in modo semplice il contributo di alcuni tipi di forze esterne. In particolare, mostriamo che se un insieme di forze applicate a punti diversi di un sistema ha una direzione comune, è possibile sostituirlo con un unico vettore forza, applicato a un punto adeguato, in modo da avere *la stessa forza risultante e lo stesso momento risultante* dell'insieme di forze. Più precisamente, il **Teorema delle Forze Parallele** enuncia e dimostra quanto segue:

Sia dato un insieme di forze, dirette secondo un versore comune \vec{u} :

$$\vec{f}_i = f_i \vec{u} \quad (3-11)$$

e applicate ai punti \vec{r}_i . La forza \vec{F} applicata al punto \vec{r}_f , definiti rispettivamente:

$$\vec{F} = \sum_i f_i \vec{u} \quad \vec{r}_f = \frac{\sum_i f_i \vec{r}_i}{\sum_i f_i} \quad (3-12)$$

ha la stessa risultante e lo stesso momento risultante (rispetto a un polo qualsiasi) dell'insieme di forze \vec{f}_i .

- I) Che la forza \vec{F} definita dalla (3-12) abbia la stessa risultante dell'insieme di forze (3-11) è intrinseco nella sua stessa definizione. Dimostriamo nel seguito che, dato un qualsiasi polo Ω , l'insieme delle forze (3-11) e \vec{F} danno lo stesso momento risultante.
- II) La posizione \vec{r}' di un punto qualsiasi dello spazio rispetto a Ω si scrive in funzione della posizione \vec{r} rispetto all'origine e della posizione di Ω come:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_\Omega$$

III) Possiamo sviluppare il momento $\vec{\tau}_\Omega$ esercitato da \vec{F} come segue:

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_\Omega &= \vec{r}'_f \times \vec{F} = \vec{r}'_f \times \vec{F} - \vec{r}_\Omega \times \vec{F} = \\
 &= \frac{\sum_i f_i \vec{r}_i}{(\sum_i f_i)} \times \left(\sum_i f_i \right) \vec{u} - \vec{r}_\Omega \times \sum_i f_i \vec{u} = \\
 &= \sum_i (f_i \vec{r}_i \times \vec{u}) - \vec{r}_\Omega \times \sum_i f_i \vec{u} = \\
 &= \sum_i \vec{r}_i \times f_i \vec{u} - \sum_i \vec{r}_\Omega \times f_i \vec{u} = \\
 &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times f_i \vec{u} = \\
 &= \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{f}_i = \sum_i \vec{\tau}_{f_i}
 \end{aligned} \tag{3-13}$$

È così dimostrata l'equivalenza con la risultante dei momenti esercitati dalle singole \vec{f}_i rispetto al polo Ω . ■

Un caso particolarmente significativo di applicazione di questo teorema è quello della **forza peso**. Se un sistema di punti è soggetto alla forza peso, ad ogni punto è applicata una forza $\vec{p}_i = m_i g \vec{u}_G$. Sfruttando il teorema delle forze parallele è possibile sostituire l'insieme delle forze \vec{p}_i con un'unica forza:

$$\vec{P} = M g \vec{u}_G \tag{3-14}$$

applicata a un punto detto **baricentro** o **centro di gravità**, che coincide con il centro di massa.

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i g \vec{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} \tag{3-15}$$

Può essere opportuno osservare che il centro di applicazione della forza di gravità coincide con il centro di massa solo se la forza di gravità ha per tutti i punti la stessa direzione. Ciò vale per i corpi di dimensioni contenute e posti in prossimità della superficie terrestre, per cui si può applicare la consueta formula della forza peso. Può non valere, tuttavia, per corpi molto estesi dove in punti diversi la forza di gravità può avere intensità e direzioni diverse.

3.3 Leggi di conservazione

Le due Equazioni Cardinali (3-2) e (3-10) ci permettono anche di enunciare le due leggi di conservazione seguenti:

- **la quantità di moto di un sistema di punti materiali si conserva se la risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nulla**
- **il momento angolare di un sistema di punti materiali si conserva se il momento risultante delle forze esterne è nullo**

In particolare, entrambe le gradezze si conservano per un **sistema isolato**, cioè un sistema che non interagisce con il mondo esterno. Notiamo inoltre che, affinché si conservi il momento angolare del sistema *le forze esterne possono dare anche una risultante non nulla* ma ciò che è rilevante è che sia nullo il loro *momento*. Ad esempio, ciò può accadere se le forze esterne sono applicate direttamente al polo Ω .

Poiché sia la quantità di moto sia il momento angolare sono grandezze vettoriali, la (3-2) e la (3-10) possono essere scomposte ciascuna in tre equazioni scalari, lungo i tre assi ortogonali di un sistema di riferimento a scelta. Ciò implica che, in presenza di forze esterne (o momenti esterni) con una direzione ben determinata, la quantità di moto (o il momento angolare) *conservano le componenti ortogonali a tale direzione*, pur non conservandosi globalmente.

3.4 Lavoro ed energia

Per un singolo punto materiale, il Teorema dell'Energia Cinetica afferma che il lavoro della risultante di tutte le forze applicate, nel passare da una posizione a un'altra, è pari alla variazione di energia cinetica. Questo teorema deve continuare a valere per *ciascuno* dei punti materiali di cui è costituito un sistema:

$$\Delta E_{K,i} = \mathcal{L}_i \quad (3-16)$$

Sommando i contributi su tutti i punti del sistema otteniamo:

$$\Delta E_K = \sum_i \Delta E_{K,i} = \sum_i \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{tot} \quad (3-17)$$

cioè la variazione di energia cinetica totale ΔE_K del sistema di punti è pari alla somma dei lavori \mathcal{L}_i delle forze agenti su *ciascun punto* del sistema. È importante sottolineare il fatto che qui occorre considerare **sia le forze interne sia le forze esterne**:

$$\sum_i \mathcal{L}_i = \sum_i \mathcal{L}_i^{(e)} + \sum_i \mathcal{L}_i^{(i)} \quad (3-18)$$

Infatti, anche se per ogni forza interna \vec{f}_{ij} esiste la sua reazione uguale e contraria $\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$, le due forze sono applicate a punti differenti, che compiono in generale spostamenti differenti, per cui la somma dei lavori in generale non è nulla.

Per comprendere meglio ciò che accade consideriamo due punti materiali all'interno di un sistema, posti inizialmente in posizione rispettivamente \vec{r}_1 ed \vec{r}_2 , che possono essere inizialmente fermi oppure in movimento ciascuno con la sua velocità. Assumiamo che i punti siano soggetti a una forza di interazione reciproca: sul punto 1 agisce una forza \vec{f}_{12} e sul punto 2 una reazione uguale e contraria $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$ (vedi Figura 2). Si tratta chiaramente di forze *interne*. In un intervallo di tempo infinitesimo il punto 1 compie uno spostamento $d\vec{r}_1$ e il punto 2 compie uno spostamento $d\vec{r}_2$, in generale differente dal primo. Il lavoro infinitesimo di queste due forze è:

$$\delta \mathcal{L}_1 = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 \quad \delta \mathcal{L}_2 = \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = -\vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_2 \quad (3-19)$$

La loro somma è:

$$\delta \mathcal{L}^{(i)} = \delta \mathcal{L}_1 + \delta \mathcal{L}_2 = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 - \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{f}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{\rho} \quad (3-20)$$

dove abbiamo definito un vettore che congiunge i due punti $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Ora, la forza di interazione \vec{f}_{12} giace proprio sulla congiungente $\vec{\rho}$ dei due punti, perciò:

$$\delta \mathcal{L}^{(i)} = \pm |\vec{f}_{12}| \cdot d|\vec{\rho}| \quad (3-21)$$

dove $|\vec{f}_{12}|$ è il modulo della forza sulla direzione di $\vec{\rho}$. Il segno del lavoro $\delta \mathcal{L}^{(i)}$ potrà essere positivo o negativo a seconda dei casi, ma sarà comunque *non nullo* se i due punti 1 e 2 modificano la loro distanza relativa $|\vec{\rho}|$ in presenza di una forza di interazione.

Un caso particolare ma assai rilevante è quello dei sistemi rigidi, in cui la distanza relativa tra i punti del sistema rimane sempre inalterata: in questi sistemi le forze interne non compiono mai lavoro.

Le forze interne ed esterne possono essere conservative o non conservative. Il lavoro di tutte le forze agenti sul sistema può essere dunque ulteriormente scomposto:

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}^{C,(i)} + \mathcal{L}^{NC,(i)} + \mathcal{L}^{C,(e)} + \mathcal{L}^{NC,(e)} = \Delta E_K \quad (3-22)$$

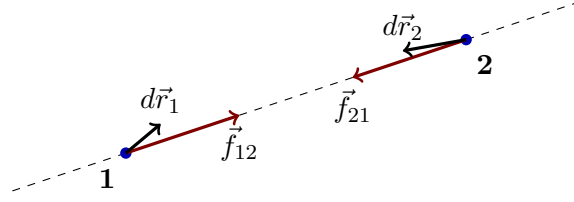


Figura 2: Due punti materiali soggetti a forze interne.

Ciascun contributo di lavoro è chiaramente da intendersi come sommatoria dei lavori su ciascun punto materiale costituente il sistema. Per i contributi conservativi è possibile scrivere il lavoro come differenza di un'energia potenziale propriamente definita:

$$\mathcal{L}^{C,(i)} = -\Delta U^{(i)} \qquad \mathcal{L}^{C,(e)} = -\Delta U^{(e)} \qquad (3-23)$$

L'**energia potenziale interna** è data in particolare dalle interazioni a coppie tra le particelle del sistema. Ad ogni possibile coppia di particelle è associabile un contributo di energia potenziale:

$$U^{(i)} = \sum_i \sum_{j>i} U_{ij} \qquad (3-24)$$

Notiamo che in questa doppia sommatoria ogni coppia è considerata una volta soltanto (la coppia ij sarebbe infatti uguale alla coppia ji).

Si può definire così l'**energia meccanica del sistema** come la somma dell'energia cinetica e dei due contributi di energia potenziale:

$$E_M = E_K + U^{(i)} + U^{(e)} \qquad (3-25)$$

Con queste definizioni consegue che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative (interne ed esterne), in analogia al caso del singolo punto materiale.

$$\Delta E_M = \Delta E_K + \Delta U^{(i)} + \Delta U^{(e)} = \Delta E_K - \mathcal{L}^{C,(i)} - \mathcal{L}^{C,(e)}$$

$$\boxed{\Delta E_M = \mathcal{L}^{NC,(i)} + \mathcal{L}^{NC,(e)} = \mathcal{L}^{NC}} \qquad (3-26)$$

Consegue anche che l'**energia meccanica di un sistema di punti materiali si conserva se non agiscono forze non conservative (esterne o interne)**.

4 Urti ed esplosioni

4.1 Modello fisico dei fenomeni d'urto

Si definisce usualmente **urto** un processo di interazione tra due (o più) corpi che avviene tramite **forze molto intense** che si sviluppano per un **tempo molto breve** rispetto ai tempi di osservazione. In particolare, se consideriamo i due (o più) corpi che si urtano come un unico sistema, le forze di interazione durante l'urto sono *forze interne* e sono tipicamente molto più intense delle *forze esterne* a cui tali corpi sono soggetti.

Un esempio può essere quello di due palle da biliardo che si scontrano mentre rotolano sul tavolo di gioco. Ciascuna di esse è soggetta a forze esterne, quali la forza peso o la reazione normale al tavolo. Fino a un istante prima dell'urto ed anche successivamente all'urto stesso, l'interazione tra le due biglie è assolutamente trascurabile: se non si toccano, non c'è né attrazione né repulsione. Quando però le due biglie si colpiscono, per un tempo brevissimo vengono in contatto e si respingono reciprocamente con intense forze repulsive. Si tratta di fatto di forze elastiche che, data la rigidità dei due oggetti, si sviluppano con grande intensità anche con una deformazione minima.

Per descrivere questi fenomeni si può impiegare un modello idealizzato. Le forze di interazione tra i due corpi sono considerate nulle fino a un tempo t_0 che definisce lo stato del sistema *prima dell'urto*. Esse agiscono quindi per un tempo Δt ; infine, sono di nuovo nulle al tempo $t_0 + \Delta t$, che definisce lo stato del sistema *dopo l'urto*. La durata Δt è trascurabile rispetto ai tempi di evoluzione dettati dalle altre forze in gioco sul sistema; idealmente, può essere considerata tendente a zero. Tuttavia, l'intensità della forza di interazione tra i due corpi durante l'urto è così elevata che produce comunque un impulso finito. Nel nostro modello idealizzato essa può essere considerata inversamente proporzionale a Δt , ad esempio:

$$\vec{f}_{12} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \vec{J}_{12} & \text{per } t_0 < t \leq t_0 + \Delta t \\ 0 & \text{per } t \leq t_0 \vee t > t_0 + \Delta t \end{cases} \quad (4-1)$$

In questo modo, l'impulso prodotto da tale forza nell'intervallo di tempo Δt è:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{f}_{12} dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{1}{\Delta t} \vec{J}_{12} dt = \vec{J}_{12} \quad (4-2)$$

Una forza di questo tipo è detta **forza impulsiva**, perché genera un impulso finito, anche se agisce per un tempo infinitesimo.

Consideriamo più in dettaglio la variazione di quantità di moto di due corpi che si urtano, tra gli istanti immediatamente successivo e immediatamente precedente all'urto. Sfruttando il Teorema dell'Impulso, scriviamo per ciascun corpo:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{q}_1 &= \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_{12} dt + \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_1^{(e)} dt \\ \Delta \vec{q}_2 &= \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_{21} dt + \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_2^{(e)} dt \end{aligned} \quad (4-3)$$

dove $\vec{f}_1^{(e)}$ e $\vec{f}_2^{(e)}$ sono le forze esterne agenti sui due corpi. Ora, dalla (4-2) abbiamo che $\int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_{12} dt = \vec{J}_{12}$. Poiché $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$, per il secondo corpo sarà invece $\int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_{21} dt = -\vec{J}_{12}$. **Se le forze esterne non sono impulsive** anch'esse, il loro integrale nel tempo per un tempo $\Delta t \simeq 0$ sarà circa nullo:

$$\int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_1^{(e)} dt \simeq 0 \quad \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_2^{(e)} dt \simeq 0 \quad (4-4)$$

Perciò, possiamo concludere:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{q}_1 &\simeq \vec{J}_{(1,2)} \\ \Delta \vec{q}_2 &\simeq -\vec{J}_{(1,2)} \end{aligned} \quad (4-5)$$

4.2 Urti e leggi di conservazione

A causa del processo di urto ciascuno dei corpi coinvolti varia la sua quantità di moto. Se consideriamo però il sistema nel suo complesso, il fatto che le forze di interazione dell'urto sono forze *interne* fa sì che esse non influenzino la quantità di moto del sistema, le cui variazioni dipendono dalle sole forze esterne (vedi la Prima Equazione Cardinale). Assumendo dunque che l'urto abbia una durata trascurabile $\Delta t \simeq 0$ e che le forze esterne non siano impulsive, possiamo scrivere:

$$\Delta \vec{Q} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F}^{(e)} dt \simeq 0 \quad (4-6)$$

Analoghe considerazioni possono essere fatte sul momento angolare \vec{L}_Ω del sistema. Da una parte, le forze interne non possono provocarne alcuna variazione. Dall'altra, se le forze esterne non sono impulsive oppure se, pur essendo impulsive, esse hanno momento nullo rispetto a Ω , la variazione di \vec{L}_Ω nel tempo Δt sarà comunque trascurabile.

$$\Delta \vec{L}_\Omega = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{\tau}_\Omega^{(e)} dt \simeq 0 \quad (4-7)$$

In presenza di fenomeni d'urto si può quindi assumere che:

- **si conserva la quantità di moto** \vec{Q} del sistema se le forze esterne non sono impulsive
- **si conserva il momento angolare** \vec{L}_Ω del sistema se le forze esterne non sono impulsive o se hanno momento nullo rispetto ad Ω

È importante sottolineare che le due condizioni non coincidono. Può accadere che in un urto si conservi il momento angolare ma non la quantità di moto del sistema, se le forze esterne sono impulsive ma danno momento nullo. Inoltre, notiamo che la relazione di conservazione di \vec{Q} è una relazione vettoriale, che si compone di tre relazioni scalari indipendenti, una per ogni asse cartesiano. In presenza di una forza esterna impulsiva con una *direzione ben precisa*, non si conserva la componente di \vec{Q} parallela alle forze esterne, mentre si possono conservare le altre componenti.

Per quanto riguarda le variazioni di energia del sistema durante l'urto, possono osservarsi situazioni differenti. Si usa distinguere principalmente due casi, a seconda delle *variazioni di energia cinetica durante l'urto*. Il fenomeno d'urto si definisce:

- **urto elastico** se l'energia cinetica del sistema si conserva
- **urto anelastico** se l'energia cinetica del sistema diminuisce

Abbiamo già discusso come l'urto avvenga in un tempo molto breve, in cui l'azione delle forze esterne è trascurabile. La diversa natura di un urto, elastica o anelastica, dipenderà quindi solo dalla particolare natura delle forze interne impulsive. Di fatto, la condizione di urto elastico si può raggiungere solo in assenza di *forze interne dissipative*¹ che agiscano tra i corpi coinvolti nell'urto.

In ogni caso, *la quantità di energia cinetica persa in un urto anelastico non può essere arbitrariamente grande*. In assenza di forze impulsive esterne, infatti, si deve conservare la quantità di moto e perciò, per il Primo Teorema del Centro di Massa, anche la velocità del centro di massa del sistema. Rispetto alla scomposizione dell'energia cinetica secondo il Teorema di König, ciò significa che rimane invariato il termine $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$. Si conclude allora che in un urto anelastico può essere persa, al più, una quantità di energia cinetica pari a E'_K : in tal caso, dopo l'urto l'energia cinetica del sistema diventa uguale a $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$. Questo caso limite è detto **urto completamente anelastico**. Se il termine E'_K è diventato nullo dopo l'urto, significa che i corpi hanno velocità nulle rispetto al centro di massa. In altre parole, dopo un urto completamente anelastico i corpi coinvolti *procedono tutti alla stessa velocità* (pari appunto a \vec{v}_{CM}). Un tipico caso di urto completamente anelastico è quello di due corpi che, dopo un urto, rimangono incastrati o attaccati l'uno all'altro.

I Riquadri 1, 2, 3 e 4 discutono alcuni casi particolarmente rilevanti di urti tra due corpi.

¹Ribadiamo che forze dissipative *esterne* non sono determinanti, a meno che siano impulsive, in quanto il loro lavoro è trascurabile.

Riquadro 1 - Urto elastico in una dimensione (caso generale)

Affrontiamo il caso dell'urto elastico tra due punti materiali di massa m_1 e m_2 , che si muovono sia prima che dopo l'urto lungo una direzione fissata. Questo può accadere ad esempio in forza di un vincolo esterno, come può essere per due sfere che rotolano su un binario. Oppure, ciò può avvenire semplicemente per la simmetria del sistema, come nel caso di due biglie che si urtano centralmente, avendo le velocità iniziali giacenti sulla stessa retta.

Poiché stiamo considerando il caso di un urto elastico, scriviamo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica. Anche per la quantità di moto possiamo scrivere semplicemente un'equazione scalare, considerando per i vettori velocità la loro proiezione scalare (che potrà essere in generale positiva o negativa) sulla direzione fissata. Si ha:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases} \quad (4-8)$$

dove abbiamo indicato con v_1 e v_2 le velocità dei due punti materiali prima dell'urto, con v'_1 e v'_2 le velocità dopo l'urto.

È questo un sistema di due equazioni, perciò può essere risolto per diverse coppie di incognite, a seconda del problema di interesse. Qui lo risolviamo per ricavare le velocità dopo l'urto, considerando note le velocità prima dell'urto e le masse dei due punti. Procediamo come segue:

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 (v'^2_2 - v_2^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \\ m_1 (v_1 + v'_1) \cdot (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 + v_2) \cdot (v'_2 - v_2) \end{cases}$$

dividendo ora membro a membro la seconda per la prima otteniamo:

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \\ v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \end{cases} \quad (4-9)$$

Il sistema di equazioni è ora diventato molto semplice da risolvere. Con pochi altri passaggi algebrici si ricava:

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v'_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (4-10)$$

Riquadro 2 - Urto elastico in una dimensione (casi notevoli)

È istruttivo evidenziare alcuni casi notevoli dell'urto elastico già affrontato in generale nel Riquadro 1. Questi risultati possono essere ricavati valutando le (4-10) nelle condizioni specificate.

Urto elastico tra particelle di massa uguale

Se $m_1 = m_2$ le (4-10) si semplificano notevolmente:

$$\begin{cases} v'_1 = v_2 \\ v'_2 = v_1 \end{cases} \quad (4-11)$$

Quindi se i due corpi hanno la stessa massa, in un urto elastico essi scambiano le loro velocità. Un caso peculiare è quello di due masse uguali, di cui una inizialmente ferma: dopo l'urto il primo corpo si ferma, mentre il secondo acquista la velocità precedentemente posseduta dal primo.

Urto elastico con un corpo di massa molto grande

Se $m_2 \gg m_1$ o $m_2 \rightarrow \infty$, valutando il limite delle (4-10) si ottiene:

$$\begin{cases} v'_1 = 2v_2 - v_1 \\ v'_2 = v_2 \end{cases} \quad (4-12)$$

Il caso forse più interessante che può essere rappresentato in questo modo è quello di un *urto elastico contro una parete fissa*. Essa può essere assimilata a un corpo di massa $m_2 \rightarrow \infty$ inizialmente fermo ($v_2 = 0$). La soluzione (4-12) conferma che, come è comune esperienza, la parete rimane ferma anche dopo l'urto ($v'_2 = v_2 = 0$). Invece, il corpo che urta contro la parete, rimbalza all'indietro con velocità in modulo uguale a quella prima dell'urto ($v'_1 = -v_1$). Il corpo che rimbalza ha subito una variazione di quantità di moto $\Delta q_1 = -2m_1v_1$. È importante sottolineare che, per la conservazione della quantità di moto, anche il corpo di massa m_2 deve aver acquisito una variazione di quantità di moto pari a $\Delta q_2 = -\Delta q_1$. Tuttavia, questa variazione di quantità di moto, vista la grande massa della parete, non produce variazioni apprezzabili della sua velocità: infatti $\Delta v_2 = v'_2 - v_2 = \Delta q_2/m_2 \simeq 0$.

Riquadro 3 - Urto completamente anelastico di due corpi

Consideriamo due corpi di massa m_1 e m_2 , procedenti inizialmente a velocità \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , che si urtano in modo completamente anelastico. Sappiamo che in queste condizioni si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica. Sappiamo anche che i corpi, dopo un urto completamente anelastico, procederanno con la stessa velocità \vec{V} . Questa condizione ci permette di calcolare \vec{V} semplicemente imponendo la conservazione della quantità di moto. Infatti:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (4-13)$$

La velocità dei due corpi, rimasti attaccati dopo l'urto, è pari alla media pesata (sulle masse m_1 ed m_2) delle velocità prima dell'urto.

Riquadro 4 - Urto elastico obliquo contro una parete

Ci riferiamo alla situazione mostrata in figura, in cui una pallina di massa m colpisce una parete con velocità \vec{v}_1 . Il vettore \vec{v}_1 descrive un angolo α_1 arbitrario rispetto alla normale al piano della parete. Nella nostra descrizione la parete è assimilata a un corpo di massa $m_2 \rightarrow \infty$. La velocità della pallina (e di conseguenza la sua quantità di moto) può essere scomposta nelle due componenti, parallela e ortogonale al piano della parete.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1,\parallel} + \vec{v}_{1,\perp} \Rightarrow \vec{q}_1 = \vec{q}_{1,\parallel} + \vec{q}_{1,\perp} = m_1 \vec{v}_{1,\parallel} + m_1 \vec{v}_{1,\perp} \quad (4-14)$$

Notiamo che la forza impulsiva che agisce durante il fenomeno d'urto è la *reazione normale* alla parete. Perciò, può influenzare soltanto la componente normale della quantità di moto di m_1 . La componente parallela, invece, non “vede” l'urto. Possiamo allora scrivere la conservazione della quantità di moto scomposta nelle due direzioni come segue:

$$\begin{cases} \Delta q_{1,\parallel} = 0 \\ \Delta q_{2,\perp} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1,\parallel} = m_1 v'_{1,\parallel} \\ m_1 v_{1,\perp} = m_1 v'_{1,\perp} + m_2 v'_2 \end{cases} \quad (4-15)$$

Per quanto riguarda invece la conservazione dell'energia cinetica, scomponendo $v_1^2 = v_{1,\parallel}^2 + v_{1,\perp}^2$ possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\parallel}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{1,\perp}^2 = \frac{1}{2} m_1 v'_{1,\parallel}^2 + \frac{1}{2} m_1 v'_{1,\perp}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (4-16)$$

ma avendo già constatato che $v_{1,\parallel} = v'_{1,\parallel}$, essa si riduce a:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\perp}^2 = \frac{1}{2} m_1 v'_{1,\perp}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (4-17)$$

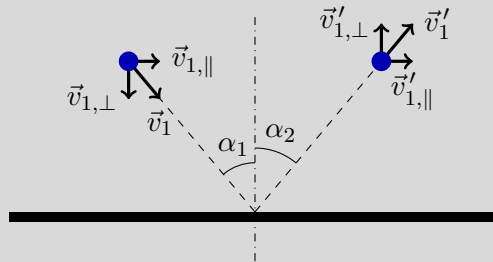
A questo punto osserviamo che la seconda delle (4-15) e la (4-17), messe a sistema, sono analoghe alle equazioni che descrivono un urto unidimensionale in cui un corpo di massa m_1 e velocità $v_{1,\perp}$ incide su un corpo fermo di massa $m_2 \rightarrow \infty$. In questo caso (vedi Riquadro 2), dopo l'urto il corpo di massa m_1 inverte il segno della sua velocità. Le velocità della pallina prima e dopo l'urto sono quindi governate dalle relazioni:

$$\begin{cases} v'_{1,\parallel} = v_{1,\parallel} \\ v'_{1,\perp} = -v_{1,\perp} \end{cases} \quad (4-18)$$

Si può verificare che:

$$|\tan \alpha_1| = \left| \frac{v_{1,\parallel}}{v_{1,\perp}} \right| = \left| \frac{v'_{1,\parallel}}{v'_{1,\perp}} \right| = |\tan \alpha_2| \quad (4-19)$$

in altre parole, la pallina rimbalza sulla parete in modo speculare.



4.3 Esplosioni

Concludendo questa sezione, è utile discutere brevemente anche il caso delle **esplosioni**. Qui, corpi dapprima uniti insieme acquistano velocità diverse a seguito dell'azione di forze interne che tendono a separarli. Anche in questo caso si tratta di forze molto intense che sono in grado di produrre variazioni di quantità di moto *dei singoli corpi* pur agendo per tempi brevissimi, cioè *forze impulsive*. Per questo motivo, è possibile estendere alle esplosioni molte considerazioni già fatte per il caso degli urti. In particolare, in assenza di forze esterne impulsive, si conserva la quantità di moto del sistema. In assenza di momenti impulsivi di forze esterne, si conserva invece il momento angolare.

Al contrario del caso degli urti, tuttavia, in un'esplosione non si conserva, in genere, l'energia cinetica del sistema. Anzi, tipicamente essa aumenta. Perciò, le forze interne che agiscono non saranno attriti o forze dissipative, bensì forze scaturite da particolari meccanismi chimici o meccanici. Per certi aspetti, un'esplosione può essere vista come un urto completamente anelastico che avviene all'inverso nel tempo.

Riquadro 5 - Sparo di una palla di cannone

Studiamo lo sparo di una palla di cannone, che immediatamente dopo lo sparo possiede velocità \vec{v} con un angolo α rispetto all'orizzontale. Immaginiamo inoltre il cannone di montato su un carrello così che possa scorrere sul piano orizzontale. Il cannone (incluso il carrello) ha massa M ; la palla ha massa m . Prima dello sparo entrambi sono fermi.

Se il cannone è inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, le forze interne impulsive dell'esplosione sono dirette lungo questa direzione. Se il cannone e la palla fossero liberi da vincoli, entrambi acquisirebbero quantità di moto (di segno opposto) lungo questa direzione. In realtà, durante l'urto il cannone è soggetto alla reazione normale del piano d'appoggio. *Questa forza deve essere impulsiva* perché deve bilanciare il contributo di impulso verticale dato dalle forze interne dell'esplosione *sul cannone*.

Rispetto al sistema cannone-proiettile la reazione normale del piano è dunque una forza esterna impulsiva e il sistema non conserva il vettore quantità di moto \vec{Q} . *Conserva tuttavia la componente di quantità di moto parallela al piano Q_{\parallel}* .

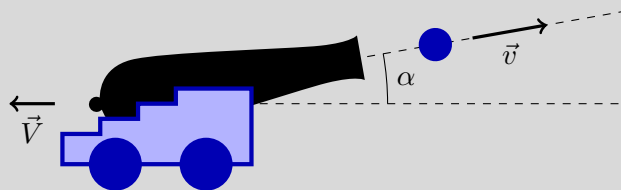
Inizialmente, la quantità di moto del sistema è nulla e dunque lo è anche la sua componente parallela al piano. Se indichiamo con v e V le velocità rispettivamente del proiettile e del cannone immediatamente dopo lo sparo, la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto si scrive:

$$m v \cos \alpha + M V = Q_{\parallel} = 0 \quad (4-20)$$

Si ricava che dopo lo sparo il cannone acquisisce una velocità, detta *velocità di rinculo*, pari a:

$$V = -\frac{m}{M} v \cos \alpha \quad (4-21)$$

Essa è proporzionale alla velocità v acquisita dal proiettile, opposta ad essa in segno e proporzionale al rapporto tra le masse $\frac{m}{M}$. Tipicamente la massa del cannone è molto maggiore di quella del proiettile, perciò la velocità di rinculo è assai più bassa di quella acquisita dal proiettile. Si intuisce tuttavia che nel caso opposto $m > M$ sarebbe il cannone ad essere "sparato" e non il proiettile!



5 Meccanica dei sistemi rigidi: peculiarità

5.1 Cinematica dei punti del sistema

Il vantaggio della schematizzazione di un corpo come *rigido*, nella descrizione del moto, è intrinseco nella proprietà enunciata nella definizione stessa data nella Sezione 1.3. In particolare, un sistema è definito rigido se le distanze tra i punti che lo costituiscono rimangono inalterate indipendentemente dall'applicazione di forze o momenti.

Ora, se le distanze tra i punti del corpo rimangono fissate, rimangono fissate anche le loro posizioni rispetto a un sistema di riferimento solidale con il corpo stesso. Il moto di ciascun punto materiale che compone il corpo rigido è dunque noto se è nota l'evoluzione di un sistema di riferimento solidale con esso (che possiamo denominare S' , con origine O') rispetto al sistema di riferimento inerziale esterno (S , con origine O). Il numero di **gradi di libertà** del corpo rigido è perciò pari a 6: le 3 coordinate spaziali dell'origine e i 3 angoli che definiscono l'orientazione nello spazio del sistema S' .

Per la descrizione del moto dei singoli punti possiamo adattare le equazioni ricavate nell'ambito della Meccanica Relativa. Le **velocità** sono descritte dalla relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}'$$

dove \vec{v}' è la velocità dei punti relativa al sistema S' e \vec{v}_t è la velocità di trascinamento. Poiché in un sistema rigido \vec{v}' è nulla per definizione (i punti mantengono identicamente le loro posizioni rispetto a S'), la velocità di ciascun punto diventa identica alla velocità di trascinamento. Possiamo allora scrivere:

$$\vec{v} = \vec{v}_t = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (5-1)$$

dove \vec{V} è la velocità di traslazione di O' misurata in S , e $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ tiene conto di una eventuale rotazione di S' rispetto a S a velocità angolare $\vec{\omega}$ (essendo $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$ il vettore posizione del punto scelto rispetto a O').

Dati due punti P e Q arbitrari appartenenti al corpo rigido, è possibile scrivere una semplice relazione tra le loro velocità (nel sistema di riferimento S). Scrivendo per ciascuno la (5-1) e poi sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}'_Q - \vec{r}'_P) = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \quad (5-2)$$

Tramite la (5-2) possiamo anche legare la velocità di un punto arbitrario del corpo rigido rispetto alla velocità del centro di massa (CM) del corpo rigido, prendendo quest'ultimo come punto P :

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) \quad (5-3)$$

Abbiamo qui tralasciato il pedice Q ad indicare l'arbitrarietà del punto scelto.

Nella descrizione del moto di un corpo rigido si usa distinguere tre casi:

moto traslatorio moto di pura traslazione, vedi Figura 3a. Si ha $\omega = 0$ quindi tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità e seguono traiettorie sovrapponibili.

moto rotatorio puro moto di pura rotazione attorno a un asse che può essere interno o esterno al corpo rigido, vedi Figura 3b. Fissando l'origine di S e S' in modo che siano coincidenti e poste sull'asse di rotazione, si ha $\vec{V} = 0$ e $\vec{r}' = \vec{r}$. Possiamo scrivere la velocità di ogni punto del corpo come:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5-4)$$

Tutti i punti descrivono traiettorie circolari (o archi di cerchio), concentriche all'asse di rotazione e giacenti su piani ortogonali ad esso.

moto di rototraslazione è il caso più generale in cui c'è una componente di traslazione e di rotazione. Un caso speciale di rototraslazione è il moto di rotolamento, che sarà approfondito nella Sezione 7.

5.2 Il problema statico

Il ridotto numero di gradi di libertà permette di studiare il problema statico di un sistema rigido (cioè la condizione per cui ogni punto del sistema rimane in equilibrio con velocità e accelerazione nulla) semplicemente tramite le due Equazioni Cardinali, ovvero imponendo che sia nulla la risultante delle forze esterne applicate e che sia nullo il momento delle forze esterne (per ogni polo Ω).

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = 0 \\ \vec{\tau}_{\Omega}^{(e)} = 0 \end{cases} \quad (5-5)$$

Un caso particolarmente significativo è quello dell'**equilibrio statico di un solido appoggiato** su un piano (vedi Figura 4). In questa situazione sono rilevanti le reazioni vincolari del piano d'appoggio, che può valer la pena discutere in qualche dettaglio qui di seguito.

Come noto dallo studio della dinamica del punto materiale, si denomina **reazione vincolare normale** \vec{R}_n la forza che il piano d'appoggio esercita, ortogonalmente alla sua superficie, su un corpo in contatto con esso. Essa descrive fisicamente il fatto che il piano d'appoggio è "impenetrabile" e si oppone alle altre forze che spingono il corpo *contro* al piano. In linea di principio, ad ogni punto del corpo in contatto con il piano è applicata una forza di reazione normale infinitesima; poiché tutte queste forze hanno la stessa direzione è possibile applicare il Teorema delle Forze Parallele (Sezione 3.2) e ricondurle a un'unica forza \vec{R}_n applicata in un punto appropriato.

Se è noto dal problema che il corpo rimanga appoggiato, il modulo di \vec{R}_n si può calcolare imponendo il bilanciamento delle altre forze nella direzione normale (ad esempio la forza peso):

$$F_{ris,n} = F_{1,n} + F_{2,n} + \dots + R_n = 0 \quad (5-6)$$

Per quanto riguarda il punto di applicazione, se il corpo rigido è in contatto con il piano tramite un unico punto, la reazione vincolare normale non potrà che essere applicata a quel punto. Se invece il corpo rigido è in contatto con il piano tramite una superficie estesa, occorre fare ulteriori considerazioni. Se sappiamo che il corpo *non ruota* rispetto al piano, il momento risultante di tutte le forze, calcolato rispetto a un punto qualsiasi del corpo rigido, dovrà essere nullo: \vec{R}_n si applicherà al punto appropriato per verificare questa condizione.

$$\vec{\tau}_{ris} = \vec{\tau}_{F_1} + \vec{\tau}_{F_2} + \dots + \vec{\tau}_{R_n} = 0 \quad (5-7)$$

Se l'unica altra forza applicata al corpo è il suo stesso peso \vec{P} , per soddisfare la (5-6) dovrà essere necessariamente $|\vec{R}_n| = |\vec{P}|$. Poiché \vec{R}_n e \vec{P} formano a questo punto una coppia di forze uguali in modulo e direzione, ma opposte in verso, l'unico modo per annullare anche il momento risultante è che agiscano sulla stessa retta verticale. In pratica, la reazione vincolare deve applicarsi al punto della base del solido che giace sulla verticale del baricentro. Se però il solido ha una forma tale per cui la verticale del baricentro cade *al di fuori* della base d'appoggio, questa condizione non può essere raggiunta e il corpo si ribalterà.

In alcune situazioni può diventare rilevante anche la **reazione vincolare tangenziale**, costituita generalmente dalle forze di **attrito radente statico o dinamico**. Si tratta di quelle forze di interazione tra il corpo rigido e la superficie di appoggio che hanno origine dalle forze di coesione tra i due materiali. La direzione è parallela al piano d'appoggio (da cui l'aggettivo *tangenziale*) e il verso si oppone al movimento del corpo (potenziale o in atto); il modulo è in genere legato a quello della reazione vincolare normale. Anche in questo caso il punto di applicazione dovrà trovarsi *sulla base di appoggio* del corpo rigido.

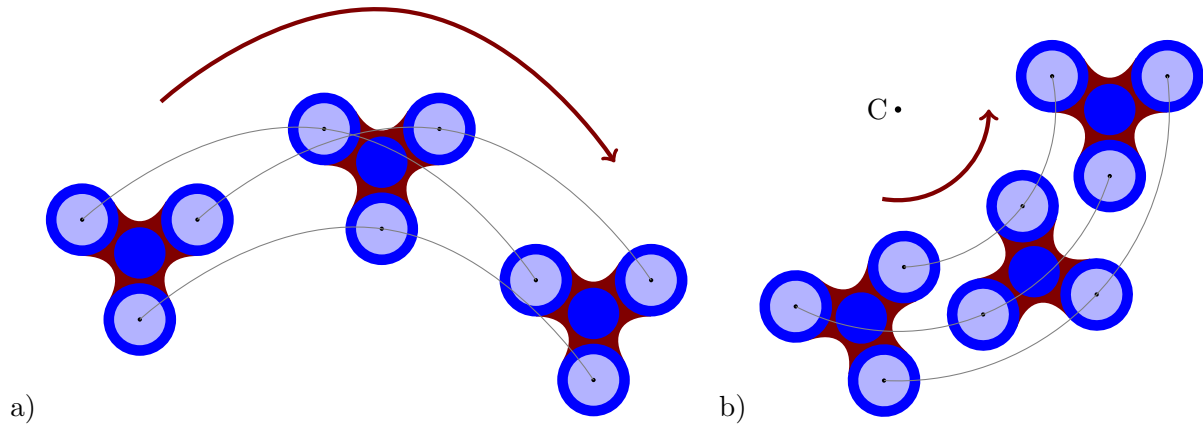


Figura 3: (a) Traslazione pura di un corpo rigido: i punti del corpo hanno traiettorie esattamente sovrapponibili. (b) Rotazione pura di un corpo rigido attorno a un asse ortogonale al foglio, passante per C. I punti descrivono archi di circonferenza centrati in C.

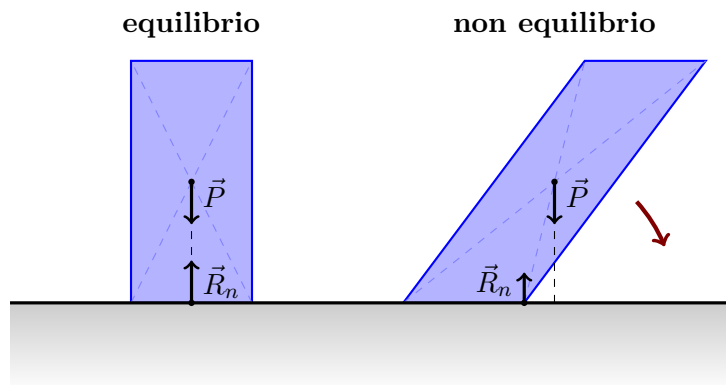


Figura 4: Due parallelepipedi omogenei diversi sono appoggiati su un piano orizzontale. Il parallelepipedo a sinistra rimane appoggiato in una condizione di equilibrio: la reazione normale \vec{R}_n del piano d'appoggio si può applicare a un punto della base che sta sulla verticale del baricentro, così da annullare sia la risultante delle forze esterne sia la risultante dei momenti. Il parallelepipedo a destra ha una forma tale per cui la verticale del baricentro cade al di fuori della base: questo corpo non può quindi rimanere appoggiato in equilibrio su quella base ma si ribalterà.

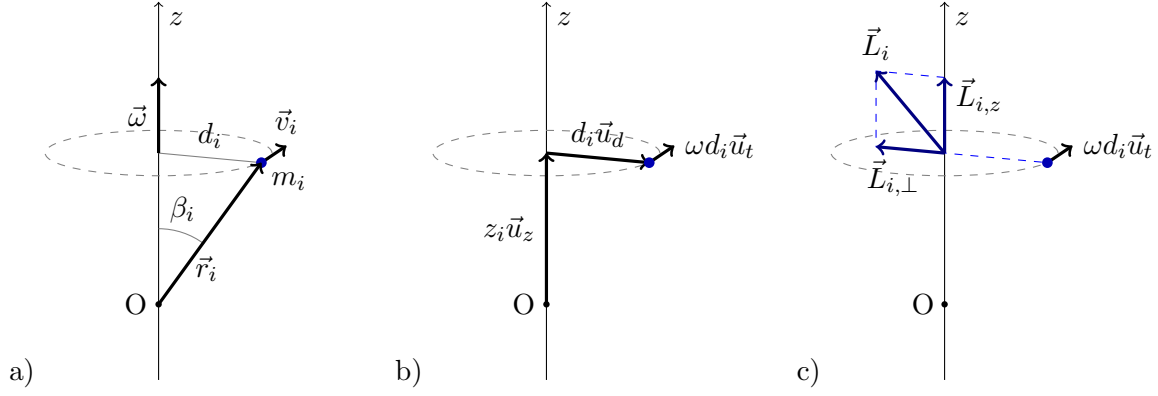


Figura 5: Schemi delle distanze geometriche e delle grandezze vettoriali rilevanti per il calcolo del momento angolare. (a) Una massa m_i (parte di un sistema di N masse) ruota a velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno a un asse fisso z . Il vettore \vec{r}_i la congiunge al polo O scelto sull'asse. (b) Il vettore \vec{r}_i si può scomporre nelle direzioni assiale e radiale $\vec{r}_i = z_i \vec{u}_z + d_i \vec{u}_d$ e la velocità tangenziale si può scrivere come $\omega d_i \vec{u}_t$. (c) Il contributo \vec{L}_i della massa m_i al momento angolare complessivo del sistema ha sia una componente parallela sia una componente normale all'asse z .

6 Moti rotatori ad asse fisso

6.1 Scomposizione del momento angolare

Il moto rotatorio intorno a un asse fisso nello spazio, detto anche **moto rotatorio puro**, è il tipo di moto di molti organi meccanici rotanti all'interno di macchine: ruote, alberi, turbine, volani... Perciò, lo studio di questo tipo di movimento, oltre che essere rilevante dal punto di vista teorico, è di grande importanza pratica per le numerose applicazioni. Per semplicità (e senza perdere in generalità) assumeremo nella descrizione del moto un sistema di riferimento in cui l'asse z è parallelo e coincidente con l'asse di rotazione ($\vec{\omega} \parallel \vec{u}_z$).

Il **momento angolare** del sistema, calcolato rispetto a un polo O appartenente all'asse di rotazione, è:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (6-1)$$

dove abbiamo tralasciato il pedice O al vettore \vec{L} per semplicità di notazione. Possiamo scrivere la velocità del punto materiale i -esimo come:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega r_i \sin \beta_i \vec{u}_t = \omega d_i \vec{u}_t \quad (6-2)$$

essendo β_i l'angolo tra il vettore \vec{r}_i e l'asse di rotazione, d_i la distanza tra l'asse di rotazione e il punto materiale i -esimo e \vec{u}_t il versore tangente alla traiettoria circolare del punto materiale (Figura 5a).

Si osserva che in generale \vec{L} non è parallelo all'asse di rotazione, ma si potrà scrivere come somma di una componente parallela all'asse \vec{L}_z e una componente ortogonale ad esso \vec{L}_\perp . Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i [(z_i \vec{u}_z + d_i \vec{u}_d) \times \omega d_i \vec{u}_t] \end{aligned} \quad (6-3)$$

dove \vec{u}_d è un versore radiale che origina dall'asse di rotazione come in Figura 5b. Ora, $\vec{u}_z \times \vec{u}_t =$

$-\vec{u}_d \perp \vec{u}_z$ mentre $\vec{u}_d \times \vec{u}_t = \vec{u}_z$, perciò (vedi Figura 5c):

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i [-z_i \omega d_i \vec{u}_d + \omega d_i^2 \vec{u}_z] = \\ &= - \underbrace{\sum_i m_i z_i \omega d_i \vec{u}_d}_{\vec{L}_\perp} + \underbrace{\sum_i m_i \omega d_i^2 \vec{u}_z}_{\vec{L}_z}\end{aligned}\quad (6-4)$$

Nel termine \vec{L}_z , detto anche **momento angolare assiale**, possiamo raccogliere $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$, scrivendo:

$$\boxed{\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}} \quad (6-5)$$

dove è stato introdotto il **momento di inerzia assiale** relativo all'asse z .

Momento di inerzia assiale

Si definisce momento di inerzia assiale di un sistema rigido, rispetto a un asse di rotazione z :

$$I_z = \sum_i d_i^2 m_i \quad \text{per sistemi discreti} \quad (6-6)$$

$$I_z = \int d^2 dm \quad \text{per sistemi continui} \quad (6-7)$$

dove d_i (d) è la distanza della massa i -esima (della massa dm) dall'asse z . Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del momento di inerzia è il $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Il momento di inerzia assiale così definito è uno scalare² e dipende:

- dalla distribuzione delle masse dei punti materiali che compongono il corpo rigido, e non solo dalla massa totale
- dall'asse scelto di rotazione, quindi non è una proprietà intrinseca del corpo rigido

La componente \vec{L}_\perp dipende da come è orientato *in quell'istante* il corpo rotante: in un moto di rotazione attorno all'asse fissato, anche la componente \vec{L}_\perp dovrà ruotare alla stessa velocità angolare ω (mantenendosi su un piano ortogonale a $\vec{\omega}$). Perciò, in generale il vettore \vec{L} ruota attorno all'asse di rotazione descrivendo un cono, in un moto detto *precessione del momento angolare*.

Si può notare dall'espressione $\vec{L}_\perp = -\sum_i m_i z_i \omega d_i \vec{u}_d$ che \vec{L}_\perp si può annullare in alcune condizioni, ad esempio se l'asse di rotazione è asse di simmetria. In tal caso infatti, per ogni massa m_i posta alla coordinata z e indicata da un vettore ortogonale all'asse $d_i \vec{u}_{d_i}$, ne esisterà anche un'altra uguale (la sua simmetrica) $m_j = m_i$ posta alla stessa coordinata z dalla parte opposta dell'asse $d_j \vec{u}_{d_j} = -d_i \vec{u}_{d_i}$, così che la sommatoria nell'espressione di \vec{L}_\perp diventa nulla.

Si potrebbe ulteriormente dimostrare (Teorema di Poinsot) che, scelto un qualsiasi punto O come polo, esistono almeno tre assi di rotazione possibili, mutuamente ortogonali e passanti per O, per cui $\vec{L}_\perp = 0$ e $\vec{L} \parallel \omega$. Questi si dicono *assi principali di inerzia*. Se il polo O coincide con il centro di massa, si parla di *assi centrali di inerzia*. Poiché essi esistono per qualsiasi punto e per qualsiasi corpo rigido, essi non sono necessariamente assi di simmetria del corpo; se però il corpo possiede degli assi di simmetria, questi possono essere assi principali di inerzia.

²In realtà, una trattazione più completa dell'argomento (accennata in Appendice) porterebbe alla definizione del momento d'inerzia \mathbf{I} come un tensore, rappresentabile con una matrice 3×3 , con cui si può scrivere una relazione sintetica: $\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$. Il *tensore* momento di inerzia è allora una proprietà intrinseca del corpo rigido in quanto tale, che mette in relazione l'intero vettore momento angolare \vec{L} (incluso anche la componente ortogonale) con il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$.

Fin qui, abbiamo compiuto delle osservazioni sulle caratteristiche del vettore \vec{L} se si *impone* che il corpo rigido stia ruotando attorno a un asse che rimane fisso nello spazio. Non abbiamo ancora studiato però quali forze o momenti debbano agire affinché il corpo si mantenga in un moto siffatto, oppure lo modifichi. Come è noto, questi aspetti possono essere studiati tramite le Equazioni Cardinali. Scriviamo dunque anzitutto la Seconda Equazione Cardinale; per un corpo rigido rotante e applicando la scomposizione del momento angolare vista sopra possiamo scrivere:

$$\vec{\tau}^{(e)} = \frac{d\vec{L}_z}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} \quad (6-8)$$

Per la loro stessa definizione, \vec{L}_z è parallelo all'asse z mentre \vec{L}_\perp giace su piano ad esso ortogonale, istante per istante. Perciò anche le loro derivate saranno rispettivamente sempre parallela e ortogonale all'asse z . Decomponendo $\vec{\tau}^{(e)}$ sulle direzioni parallela e ortogonale a z , otteniamo:

$$\vec{\tau}_z^{(e)} = \tau_z^{(e)} \vec{u}_z = \frac{dL_z}{dt} \vec{u}_z \quad \vec{\tau}_\perp^{(e)} = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} \quad (6-9)$$

Analizziamo meglio il ruolo delle due componenti del momento delle forze esterne.

- Per quanto riguarda $\vec{\tau}_z^{(e)}$, vale l'equazione scalare:

$$\tau_z^{(e)} = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} \quad (6-10)$$

$$\boxed{\tau_z^{(e)} = I_z \alpha} \quad (6-11)$$

dove $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ è l'accelerazione angolare. La componente parallela a z del momento delle forze esterne è *responsabile di accelerazioni o decelerazioni (angolari) nel moto rotatorio del corpo rigido*. Se $\tau_z^{(e)} = 0$ il corpo resta in quiete o ruota a velocità ω costante (vedi però anche il Riquadro 6). Altrimenti $\tau_z^{(e)} \neq 0$ determinerà una accelerazione angolare α che, integrata, permette di calcolare la velocità angolare ω e la posizione angolare θ in funzione del tempo.

$$\alpha(t) = \frac{\tau_z^{(e)}(t)}{I} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt \quad (6-12)$$

Se α è costante si ha un moto circolare uniformemente accelerato:

$$\alpha = \frac{\tau_z^{(e)}}{I} = \text{cost.} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (6-13)$$

- Il ruolo di $\vec{\tau}_\perp^{(e)}$ è differente. In un moto di rotazione attorno all'asse fissato, \vec{L}_\perp muta continuamente direzione, ruotando anch'esso attorno all'asse a velocità angolare ω . $\vec{\tau}_\perp^{(e)}$ deve essere il responsabile di questa rotazione di \vec{L}_\perp . Ciò significa che se $\vec{L}_\perp \neq 0$, per sostenere il moto *deve esistere* anche un momento $\vec{\tau}_\perp^{(e)} = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} \neq 0$. Tale momento è usualmente fornito dai vincoli dell'asse fisico di rotazione del corpo rigido.

Per concludere questa analisi consideriamo anche la Prima Equazione Cardinale. Nel caso di un moto rotatorio anche il centro di massa segue una traiettoria circolare, ed avrà sempre un'accelerazione con una componente di tipo centripeto. Nel caso di un moto con ω costante (moto circolare uniforme del centro di massa) questa è l'unica componente dell'accelerazione:

$$\vec{F}^{(e)} = M \vec{a}_{CM} = M \omega^2 d_{CM} (-\vec{u}_d) \quad (6-15)$$

dove d_{CM} è la distanza del centro di massa dall'asse di rotazione e $-\vec{u}_d$ è un versore radiale rivolto verso l'asse. Se l'asse di rotazione non passa per il centro di massa ($d_{CM} \neq 0$) è dunque necessario fornire

Riquadro 6 - Conservazione del momento angolare assiale

Nel caso di un moto rotatorio ad asse fisso è possibile trattare separatamente la componente assiale del momento angolare, per cui:

$$\tau_z^{(e)} = \frac{dL_z}{dt}$$

In assenza di momento meccanico assiale ($\tau_z^{(e)} = 0$) il momento angolare assiale si conserva ($L_z = \text{cost.}$).

Nel caso di un corpo rigido e indeformabile, con I_z ben definito e costante nel tempo, questo comporta che la sua velocità angolare di rotazione rimanga costante. Se invece abbiamo a che fare con un sistema meccanico deformabile o con parti mobili, che può perciò cambiare il suo momento di inerzia da un valore I_1 a un valore I_2 , la conservazione del momento angolare assiale implica:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad (6-14)$$

In pratica, se il corpo modifica il suo momento di inerzia durante il moto rotatorio (in assenza di momenti di forze esterne) la sua velocità angolare di rotazione *varierà*: se $I_2 < I_1$ subirà una accelerazione angolare ($\omega_2 > \omega_1$), viceversa subirà una decelerazione.

Pensiamo a una ballerina che inizia a girare su se stessa, inizialmente con le braccia allargate: se stringe a sé le braccia durante la rotazione, diminuisce il suo momento di inerzia assiale e aumenterà di conseguenza la sua velocità di rotazione.

una forza esterna che funga da forza centripeta. Essa non compie lavoro e non produce accelerazioni angolari, ma serve per mantenere la rotazione sull'asse scelto.

Si capisce allora come sia spesso preferibile, nella progettazione di componenti meccanici rotanti, equilibrare le forme e i componenti in modo che l'asse di rotazione corrisponda proprio a uno degli assi centrali di inerzia. In questo modo per mantenere il moto non è necessario esercitare né un momento esterno (perché $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$) né una reazione vincolare centripeta (perché $d_{CM} = 0$). In caso contrario, queste forze e momenti devono essere esercitati dai vincoli sull'asse fisico rotante (ad esempio le reazioni sugli alloggiamenti dell'albero rotante). Queste forze possono sollecitare e logorare i componenti meccanici, soprattutto ad ω elevate. Un esempio è la necessità dell'equilibratura degli pneumatici di un'automobile: se non sono ben equilibrati con appositi contrappesi sul cerchione possono dare sollecitazioni pericolose per i giunti meccanici e produrre vibrazioni mentre si guida, in particolare alle alte velocità.

6.2 Energia e lavoro nel moto rotatorio

L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali è:

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6-16)$$

Per un corpo rigido rotante *con asse fisso* possiamo scrivere v_i^2 come:

$$v_i^2 = |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 = \omega^2 r_i^2 \sin^2 \beta_i = \omega^2 d_i^2 \quad (6-17)$$

dove β_i è l'angolo tra il vettore \vec{r}_i e l'asse di rotazione, e d_i è la distanza tra l'asse di rotazione e il punto materiale i -esimo. Sostituendo la (6-17) nella (6-16) si ottiene:

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i d_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (6-18)$$

dove figura il momento di inerzia assiale I_z , definito nella Sezione 6. La (6-18) quantifica l'energia cinetica di un corpo rigido dovuta al solo movimento di rotazione attorno all'asse.

Consideriamo ora il **lavoro** prodotto dalle forze esterne su un sistema rigido in pura rotazione. Per il teorema delle forze vive, se abbiamo un cambiamento della velocità di rotazione da ω_1 a ω_2 si avrà:

$$\mathcal{L}^{(e)} = \Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_1^2 \quad (6-19)$$

Se però calcoliamo la stessa quantità per una variazione infinitesima, ovvero differenziando l'espressione dell'energia cinetica:

$$\delta \mathcal{L}^{(e)} = dE_K = I_z \omega d\omega = I_z \omega \alpha dt = I_z \alpha d\theta = \tau_z^{(e)} d\theta \quad (6-20)$$

dove abbiamo sostituito $d\omega = \alpha dt$, $d\theta = \omega dt$ e $\tau_z^{(e)} = I_z \alpha$. Passando di nuova in forma integrale, otteniamo:

$$\mathcal{L}^{(e)} = \Delta E_C = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z^{(e)} d\theta \quad (6-21)$$

Si nota come questa espressione presenti una certa somiglianza formale con la definizione del lavoro di una forza, che è l'integrale della stessa lungo una coordinata spaziale. Qui abbiamo mostrato che per un corpo rigido rotante il lavoro di tutte le forze esterne è dato dall'integrale del loro momento assiale lungo la coordinata angolare. Non abbiamo considerato le forze interne, perché non essendovi spostamento relativo tra i vari punti del corpo rigido, danno un lavoro risultante nullo.

Si può calcolare facilmente anche la **potenza sviluppata**:

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{L}^{(e)}}{dt} = \frac{d\mathcal{L}^{(e)}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \tau_z^{(e)} \omega \quad (6-22)$$

Ricordando che $\tau_z^{(e)}$ altro non è che la proiezione di $\vec{\tau}^{(e)}$ sull'asse di rotazione z e che $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ si può scrivere anche la relazione sintetica:

$$\mathcal{P} = \vec{\tau}^{(e)} \cdot \vec{\omega} \quad (6-23)$$

6.3 Calcolo del momento di inerzia

Il momento di inerzia gioca, per i moti rotatori, un ruolo simile a quello della massa per i moti lineari. Non sarà sfuggita l'analogia tra la (6-11) e il Secondo Principio della Dinamica $F = ma$: al posto della forza ritroviamo il momento, al posto dell'accelerazione lineare l'accelerazione angolare e al posto della massa proprio il momento di inerzia. Discutiamo ora alcune proprietà e teoremi, oltre che alcuni esempi, che possono facilitarne il calcolo nelle situazioni di interesse.

Per un **solido omogeneo** di densità ρ uniforme, l'elemento di massa dm all'interno dell'integrale (6-7) si può scrivere $dm = \rho dV$, da cui:

$$I = \int d^2 dm = \int d^2 \rho dV = \rho \int d^2 dV = M \cdot \frac{\int d^2 dV}{V} \quad (6-24)$$

dove è stata impiegata la definizione di densità per un corpo omogeneo $\rho = M/V$, essendo M e V rispettivamente la massa e il volume del solido. Si osserva che per questo tipo di corpi il momento di inerzia è proporzionale a M e ad un fattore, pari a $\frac{\int d^2 dV}{V}$, che dipende solo dalla forma geometrica del corpo (oltre che, naturalmente, dall'asse scelto).

Essendo definito tramite sommatorie o integrali, **il momento di inerzia è additivo**: se si suddivide un sistema in più parti, il momento di inerzia dell'insieme è pari alla somma dei momenti di inerzia delle singole parti, calcolati tutti rispetto allo stesso asse. Nel Riquadro 7, ad esempio, si mostra come calcolare il momento di inerzia di un anello sottile e, nei Riquadri 8 e 9, come a partire da quel risultato sia possibile ricavare il momento di inerzia di un disco o di un cilindro pieno, scomponendoli adeguatamente in parti.

In molti casi, il calcolo del momento di inerzia di un corpo rigido per un asse passante per il centro di massa presenta delle semplificazioni, perché si possono sfruttare eventuali simmetrie del corpo rigido per svolgere l'integrale. Il **Teorema di Huygens-Steiner**, enunciato e dimostrato qui di seguito, permette di ricavare da questo i momenti di inerzia dello stesso corpo rispetto ad assi paralleli al primo. La dimostrazione è qui effettuata per un sistema continuo ma potrebbe svolgersi analogamente per un sistema discreto.

Il momento di inerzia di un corpo rigido di massa M , rispetto ad un asse a distanza D dal centro di massa, è dato da:

$$I = I_{CM} + MD^2 \quad (6-25)$$

dove I_{CM} è il momento di inerzia dello stesso corpo, calcolato rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

- I) Sia z l'asse rispetto al quale vogliamo calcolare I e sia z' l'asse parallelo a z passante per il centro di massa. Definiamo due sistemi di coordinate cartesiane, come in Figura 6, con $y \equiv y'$ in modo che intersechino sia z sia z' .
- II) I quadrati della distanza d di un punto P qualsiasi di massa dm dall'asse z e della distanza d' dello stesso punto dall'asse z' sono dati da:

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad d'^2 = x'^2 + y'^2 \quad (6-26)$$

- III) Dalla costruzione geometrica in figura è semplice ricavare che $x = x'$ e $y = y' + D$:

$$d^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + (y' + D)^2 = x'^2 + y'^2 + 2Dy' + D^2 = d'^2 + 2Dy' + D^2 \quad (6-27)$$

- IV) Scrivendo ora il momento di inerzia relativo all'asse z e sostituendo la (6-27) otteniamo:

$$I = \int d^2 dm = \int d'^2 dm + \int 2Dy' dm + \int D^2 dm \quad (6-28)$$

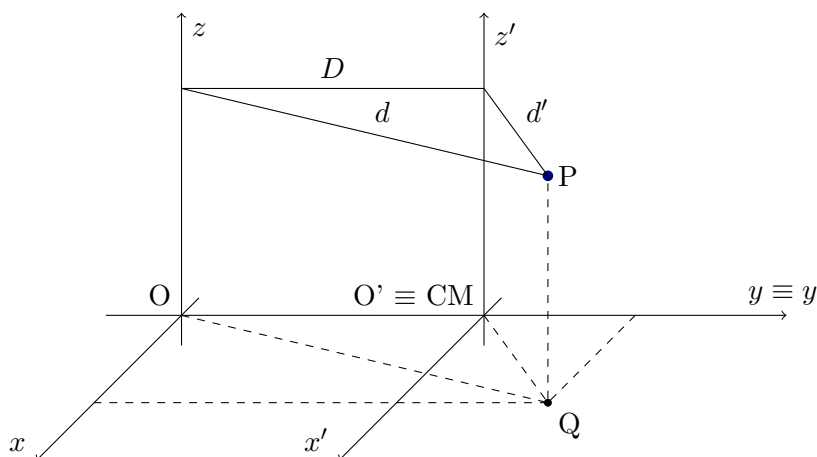


Figura 6: Ciascun punto P del corpo rigido è posto a una distanza d dall'asse z e a una distanza d' dall'asse z' . La distanza tra i due assi è pari a D . I due sistemi di coordinate cartesiane $Oxyz$ e $O'x'y'z'$ sono costruiti in modo che $y \equiv y'$.

V) Analizziamo i termini di questa somma

- $\int d'^2 dm = I_{CM}$
- $\int 2Dy' dm = 2D \int y' dm = 2DM y'_{CM} = 0$ (ricordando che il centro di massa nel sistema di coordinate $O'x'y'z'$ giace proprio sull'asse z' , quindi $y'_{CM} = 0$)
- $\int D^2 dm = MD^2$

Si ricava quindi la (6-25). ■

Un esempio di applicazione del Teorema di Huygens-Steiner è dato nel Riquadro 10.

Infine, un teorema utile per trattare corpi rigidi assimilabili a oggetti piani sottili (di spessore trascurabile) è il seguente.

Dato un sistema rigido planare, di spessore trascurabile, giacente sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano, vale la seguente formula:

$$\boxed{I_z = I_x + I_y} \quad (6-29)$$

dove I_x , I_y e I_z indicano i momenti di inerzia calcolati rispetto ai tre assi cartesiani.

I) Le espressioni dei momenti di inerzia rispetto ai tre assi, in coordinate cartesiane, si scrivono come:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_y = \int (x^2 + z^2) dm \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm \quad (6-30)$$

II) Per un sistema giacente sul piano xy la coordinata z delle masse dm considerate nell'integrale sarà sempre nulla. Perciò

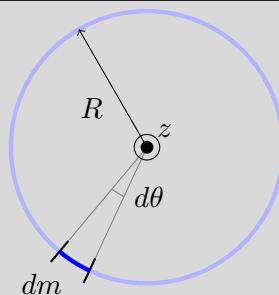
$$I_x = \int y^2 dm \quad I_y = \int x^2 dm \quad (6-31)$$

da cui è immediato ricavare la tesi:

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_x + I_y \quad (6-32)$$

■

Riquadro 7 - Momento di inerzia di un anello sottile



Calcoliamo il momento di inerzia di un anello circolare sottile di massa M e raggio R , rispetto a un asse z passante per il suo centro e ortogonale al piano su cui giace. Per poter svolgere l'integrale (6-7) è necessario operare correttamente e in modo conveniente la scomposizione in elementi di massa dm .

Nel caso di un anello l'elemento dm può essere un archetto infinitesimo di ampiezza angolare $d\theta$, che ha una lunghezza lineare $dl = R d\theta$.

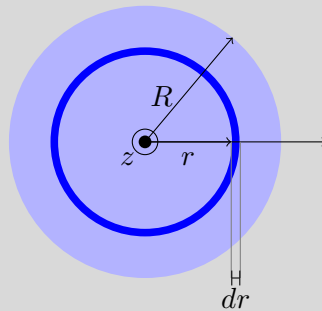
Se l'anello ha densità lineare uniforme $\lambda = \frac{M}{L_{tot}} = \frac{M}{2\pi R}$ si ha:

$$dm = \lambda dl = \frac{M}{2\pi R} R d\theta = \frac{M}{2\pi} d\theta$$

Si può allora integrare su tutto il cerchio, da 0 a 2π , considerando che tutti gli elementi di massa hanno la stessa distanza $d = R$ dall'asse:

$$I = \int d^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{I_z = MR^2}$$

Riquadro 8 - Momento di inerzia di un disco



Calcoliamo il momento di inerzia di un disco sottile di massa M e raggio R , rispetto a un asse z passante per il suo centro e ortogonale al piano su cui giace.

La densità superficiale del disco (massa per unità di superficie) è $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$.

Possiamo visualizzare il disco come la composizione di anelli di raggio r crescente, da 0 a R , e spessore infinitesimo dr : il momento di inerzia del disco sarà la somma (meglio, l'integrale) dei momenti di inerzia degli anelli.

Ciascun anello ha un'area infinitesima pari a (gli infinitesimi di ordine superiore al primo si trascurano):

$$dA = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(\cancel{r^2} + 2r dr + \underbrace{dr^2}_{\ll dr} - \cancel{r^2}) = 2\pi r dr$$

e quindi una massa:

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = 2 \frac{Mr}{R^2} dr$$

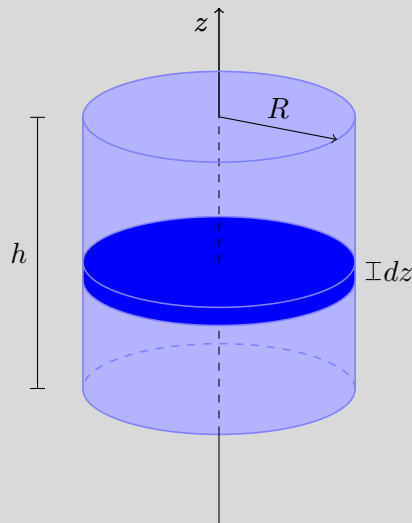
Impiegando la formula del momento di inerzia di un anello ricavata nel Riquadro 7, con r come raggio e sostituendo alla massa l'espressione di dm , ricaviamo il momento di inerzia infinitesimo:

$$dI_z = 2 \frac{Mr}{R^2} dr \cdot r^2 = 2 \frac{Mr^3}{R^2} dr$$

Integrando da 0 a R si ottiene infine:

$$I_z = \int dI_z = \int_0^R 2 \frac{Mr^3}{R^2} dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{1}{2} MR^2}$$

Riquadro 9 - Momento di inerzia di un cilindro pieno



Calcoliamo il momento di inerzia di un cilindro pieno, di massa M , raggio R e altezza h rispetto all'asse di simmetria ortogonale alle sue basi.

La densità volumetrica del cilindro è $\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$.

Possiamo considerare il cilindro come l'insieme di molti dischi di raggio R e spessore dz impilati l'uno sull'altro: ciascuno di questi dischi ha spessore infinitesimo ed ha un momento di inerzia infinitesimo calcolabile con la formula ricavata nel Riquadro 8.

In dettaglio, ciascun disco ha una massa infinitesima:

$$dm = \rho dV = \rho \pi R^2 dz = \frac{M}{\pi R^2 h} \pi R^2 dz = \frac{M}{h} dz$$

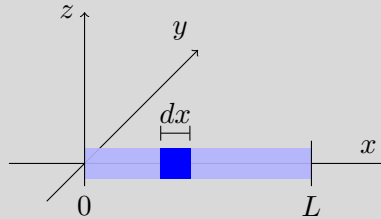
per cui, integrando i contributi di tutti i dischi:

$$I_z = \int dI_z = \int_0^h \frac{1}{2} R^2 \frac{M}{h} dz = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} \int_0^h dz = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} h \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{1}{2} MR^2}$$

Notiamo che l'espressione è formalmente identica a quella del momento di inerzia di un disco.

Riquadro 10 - Momento di inerzia di una sbarra

Rispetto a un asse passante per un estremo



Consideriamo una sbarra sottile, di massa M e lunghezza L ; imponiamo un sistema di coordinate cartesiane con l'origine a un estremo della sbarra e orientato in modo che essa giaccia sull'asse x , dalla parte positiva. Calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'asse z tramite l'integrale (6-7).

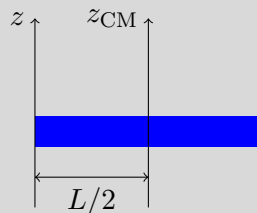
Si può considerare convenientemente come elemento di massa dm un tratto di sbarra di lunghezza infinitesima dx . La densità lineare della sbarra è $\lambda = M/L$ e la massa dell'elemento infinitesimo è:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

Scriviamo l'integrale ricordando che la distanza di ogni elemento dall'asse z è proprio $d \equiv x$:

$$I_z = \int d^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3} \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{1}{3} ML^2}$$

Rispetto a un asse passante per il centro



L'asse passante per il centro della sbarra, ovvero per il suo centro di massa, è parallelo all'asse z considerato nel calcolo precedente, e posto a distanza $D = L/2$ da esso.

Applicando il teorema di Huygens-Steiner abbiamo:

$$I_z = I_{CM} + MD^2 \Rightarrow I_{CM} = I_z - MD^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{3} ML^2 - M \frac{L^2}{4} \Rightarrow \boxed{I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2}$$

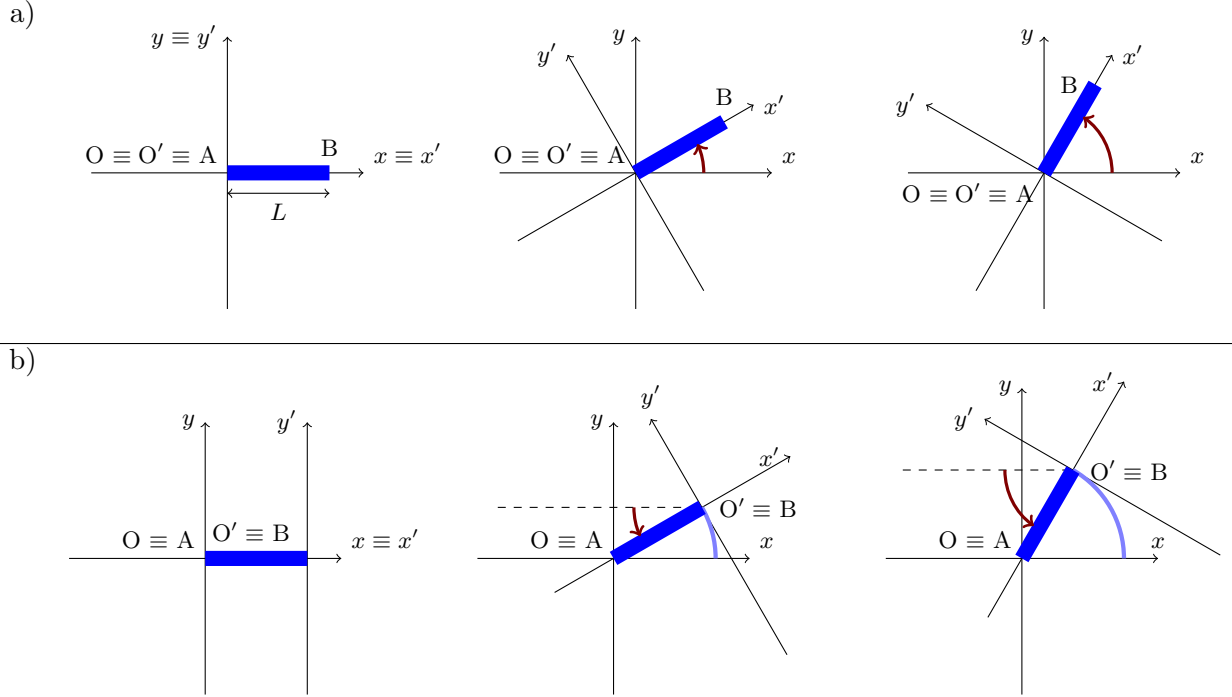


Figura 7: (a) Moto di una sbarra AB, descritto come rotazione pura attorno a un asse passante per l'estremo A. Il sistema di riferimento esterno Oxy e il sistema di riferimento $O'x'y'$, quest'ultimo solidale con la sbarra, hanno entrambi origine in A. (b) Lo stesso moto può essere descritto come una rotazione attorno a un asse passante per B, che contestualmente trasla lungo la traiettoria evidenziata in azzurro. In questa rappresentazione il sistema di riferimento esterno Oxy ha ancora origine in A, il sistema di riferimento solidale con la sbarra $O'x'y'$ ha origine in B.

7 Moti rotatori ad asse mobile

7.1 Descrizione delle rototraslazioni

Il tipo di moto più generale di un corpo rigido è, come già menzionato, una *rototraslazione*: la rotazione attorno a un asse combinata con un moto di traslazione, ed eventuale cambio di orientazione dell'asse stesso, lungo una traiettoria arbitraria. Il moto dei singoli punti del corpo rigido è descritto cinematicamente dalla (5-1) e la dinamica è regolata dalle Equazioni Cardinali della Meccanica.

È importante osservare che un moto di un corpo rigido che non sia una pura traslazione non ha una rappresentazione matematica univoca, ma possono esistere diverse rappresentazioni cinematiche ugualmente valide. Formalmente, ciò è evidente già dalla formula (5-2) dove si vede come il centro di rotazione possa essere scelto arbitrariamente. Come esempio significativo, per quanto semplice, si può considerare il moto rotatorio di una sbarra di lunghezza L e estremi AB, rappresentato in Figura 7. Tale moto può essere descritto o come una rotazione pura attorno all'estremo A (Figura 7a), oppure come una rotazione attorno all'estremo B combinata con un moto traslatorio dell'asse di rotazione, lungo una circonferenza di raggio L (Figura 7b).

Di fatto, è spesso vantaggioso descrivere un moto rototraslatorio con riferimento a un asse di rotazione passante per il centro di massa. In tal caso possiamo scrivere il momento angolare e l'energia cinetica sfruttando i Teoremi di König. In particolare, l'energia cinetica del corpo rigido è data dalla Equazione 2-25, qui riportata per comodità:

$$E_K = E'_K + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

dove E'_K è l'energia cinetica del corpo rigido in un sistema di riferimento non rotante centrato sul centro di massa. Avendo però considerato l'asse di rotazione proprio passante per il centro di massa,

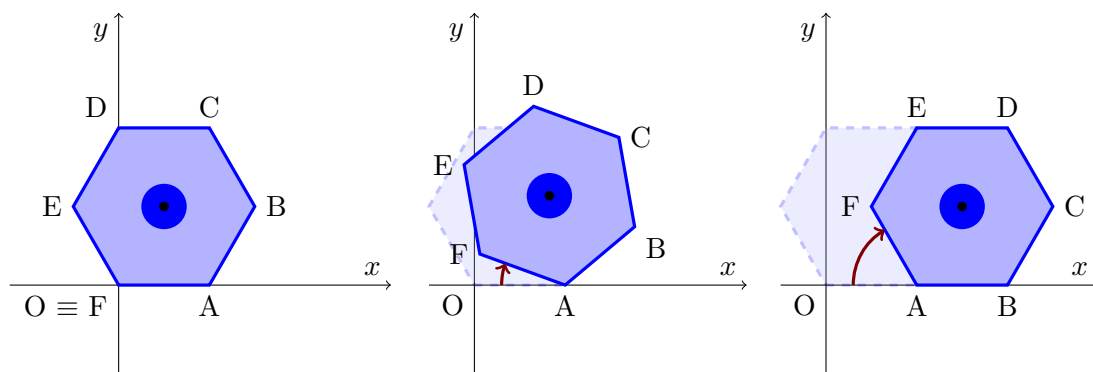


Figura 8: Rotolamento di un solido prismatico a sezione esagonale (una matita): il moto si compone di rotazioni pure successive, attorno agli spigoli.

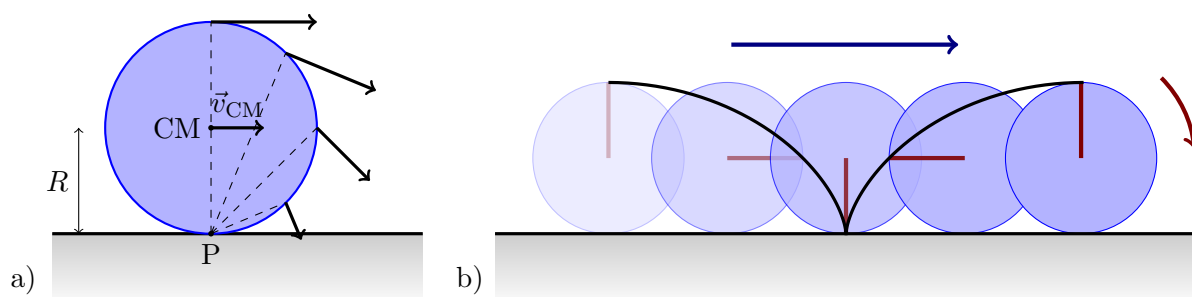


Figura 9: (a) Un disco di raggio R rotola senza strisciare su una superficie piana. In ogni istante il suo moto può essere descritto come una rotazione pura attorno all'asse di istantanea rotazione P , che costituisce la linea d'appoggio del disco in quell'istante. (b) Si evidenzia la traiettoria seguita da un punto del disco durante il rotolamento, detta *cicloide*.

in quel sistema di riferimento il corpo sta effettuando una rotazione pura, per cui $E'_K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ dove I_{CM} è il momento di inerzia assiale (calcolato rispetto a questo asse passante per il centro di massa). Possiamo quindi scrivere in generale l'energia cinetica di un corpo rigido in rototraslazione come:

$$E_K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \quad (7-1)$$

7.2 Il moto di rotolamento

In un moto rototraslatorio generico, v_{CM} e ω non sono legate da relazioni specifiche e possono assumere valori arbitrari. Un caso particolare di grande interesse pratico, in cui invece queste grandezze sono strettamente legate tra di loro, è quello del **rotolamento**. Nel moto di rotolamento un corpo trasla e insieme ruota, rimanendo sempre appoggiato su una superficie. Se il corpo rigido, nel punto di contatto, *non striscia* contro la superficie si parla di *rotolamento puro*.

Prima di affrontare il caso più notevole, che è quello del rotolamento di un corpo con sezione circolare, quale ad esempio una ruota, può essere istruttivo fare qualche considerazione sul rotolamento di un solido poligonale, ad esempio una matita esagonale (vedi Figura 8). La matita, dapprima appoggiata sulla faccia AF , per rotolare verso destra rimanendo a contatto con il piano dovrà ruotare avendo come *asse fisso* lo spigolo passante per A ; dopo una rotazione di 60° si appoggerà di nuovo sul piano, ma con la faccia AB . Tramite questa rotazione il centro di massa della matita ha subito una traslazione orizzontale pari esattamente alla lunghezza del lato dell'esagono. Successivamente, per continuare il suo movimento, la matita dovrà ruotare attorno allo spigolo passante per B , e poi per quello passante per C e così via, fino a ritornare ancora ad A . Il rotolamento si compone di *moti rotatori puri* successivi, attorno ad assi diversi. Questi assi coincidono con diversi punti di appoggio

distribuiti lungo il perimetro. Se non c'è strisciamento, in ciascuna rotazione parziale l'asse rimane fisso e fermo e, dopo tale rotazione parziale, il centro di massa del corpo avrà subito una traslazione pari alla distanza tra questo asse di rotazione e il successivo. Quando il solido avrà descritto una rotazione totale di 360° , cioè un giro completo, il centro di massa sarà traslato parallelamente al piano di una lunghezza pari al perimetro del poligono che congiunge i punti di appoggio.

Possiamo ora pensare al caso di un poligono regolare con un sempre maggiore numero di lati, fino ad arrivare al cerchio, che può essere visto come un poligono con lati di lunghezza infinitesima. Il rotolamento di un cilindro o di un disco di raggio R può essere descritto come la successione di rotazioni infinitesime attorno al punto di contatto, detto centro di *istantanea rotazione* (vedi Figura 9). Esattamente come nel caso del poligono, l'asse di ciascuna rotazione parziale ha *velocità nulla rispetto al piano di appoggio* e rimane *fisso nello spazio*. Da una rotazione infinitesima all'altra non è l'asse fisicamente a traslare, ma è la rotazione che avviene attorno a un asse diverso.

Il centro di massa, che coincide con il centro del disco, è posto a distanza R dal punto di appoggio. Esso assume una velocità:

$$\vec{v}_{CM} = \omega R \vec{u}_x \quad (7-2)$$

Si conferma che dopo un giro (svolto in un tempo $T = 2\pi/\omega$), il centro di massa subisce una traslazione $\Delta x = v_{CM}T = 2\pi R$ pari al perimetro della sezione circolare.

La (7-2) è la relazione cercata tra la velocità del centro di massa e la velocità angolare nel caso del rotolamento puro. Sostituendo la (7-2) nella (5-3) è possibile ricavare la velocità di un punto qualsiasi del disco che rotola. Possiamo inoltre scrivere l'energia cinetica del corpo rigido come:

$$E_K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2 \quad (7-3)$$

Tenendo presente il teorema di Huygens-Steiner, possiamo osservare che $I_{CM} + MR^2$ equivale al momento di inerzia del corpo rigido calcolato rispetto all'asse di istantanea rotazione (che dista $D = R$ dal centro di massa). Infatti, per quanto già discusso, il corpo rigido sta compiendo delle *rotazioni pure, con asse fisso* attorno all'asse di istantanea rotazione. È dunque corretto calcolare l'energia cinetica di un corpo in rotolamento puro anche usando semplicemente la (6-18), se il momento di inerzia assiale è calcolato rispetto all'asse di istantanea rotazione:

$$E_K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 \quad \text{con} \quad I_P = I_{CM} + MR^2 \quad (7-4)$$

7.3 Reazioni vincolari nel moto di rotolamento

Può essere opportuno, per concludere, discutere brevemente la presenza delle **forze di reazione vincolare del piano in un moto di rotolamento puro**. Come già visto, in un moto di rotolamento puro il punto di appoggio del corpo rigido *non striscia* sulla superficie; in altre parole è in ogni istante *fermo rispetto ad essa*. Ciò implica che, se presente, la reazione tangenziale deve essere una forza di *attrito statico*.

Consideriamo, come esempio, una ruota che rotola su un piano orizzontale (Figura 10). Se la ruota è soggetta alla sola forza peso, il piano d'appoggio dovrà reagire con una forza normale \vec{R}_n per sostenerla: poiché il punto di contatto si trova esattamente sulla verticale del baricentro, questa \vec{R}_n si applica proprio in quel punto e non produce momento. In assenza di un momento risultante non c'è nessuna tendenza del punto di appoggio a spostarsi rispetto al piano, a cui una forza di attrito si debba opporre. La forza di attrito statico è dunque nulla e la ruota continua a rotolare con la stessa ω senza accelerare né decelerare, oppure rimane ferma se lo era inizialmente.

La situazione è diversa se sulla ruota agisce anche una coppia o momento torcente $\vec{\tau}_M$, come può accadere se la ruota è collegata a un motore (ad esempio la ruota posteriore di una motocicletta). La forza peso e la reazione normale si bilanciano come nel caso precedente. Per valutare la forza di attrito statico $\vec{F}_a = F_a \vec{u}_x$ dobbiamo invece considerare insieme le due equazioni cardinali. Se la ruota

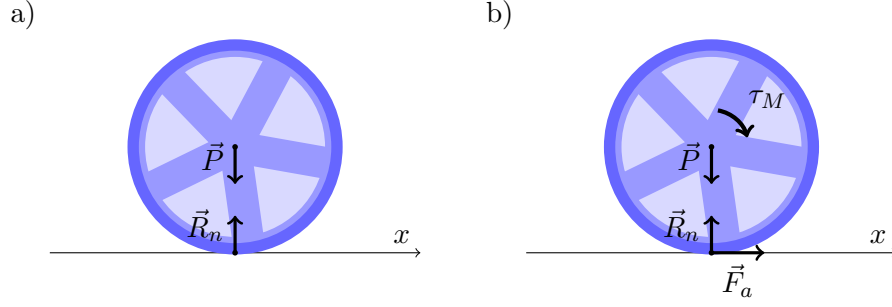


Figura 10: Un corpo rigido di sezione circolare, ad esempio una ruota, rotola senza strisciare su un piano orizzontale. (a) In assenza di forze esterne con componenti orizzontali, la reazione vincolare normale, applicata al punto di istantanea rotazione, bilancia la forza peso; la reazione vincolare tangenziale è invece nulla. La ruota continua a rotolare con la stessa velocità angolare oppure rimane ferma. (b) Se la ruota è sottoposta anche a un momento esterno $\vec{\tau}_M$ non nullo, sul punto di contatto il piano eserciterà anche una reazione tangenziale, ovvero una forza di attrito statico \vec{F}_a . Quest'ultima può essere vista come la responsabile dell'accelerazione del centro di massa della ruota.

ha massa M , raggio R e momento di inerzia I rispetto all'asse di rotazione, queste si scrivono:

$$\begin{cases} \vec{F}_{ris} = \vec{P} + \vec{F}_a + \vec{R}_n = F_a \vec{u}_x = M a_{CM} \vec{u}_x \\ \vec{\tau}_{ris} = (\tau_M - F_a \cdot R) \vec{u}_z = I \alpha \vec{u}_z \end{cases} \quad (7-5)$$

Possiamo già osservare, ancor prima di risolvere il sistema, che la risultante delle forze è proprio pari alla forza di attrito statico, quindi sarà lei la “responsabile” dell'accelerazione lineare del centro di massa della ruota. Poiché in un moto di rotolamento puro $v_{CM} = \omega R$, si ha anche $a_{CM} = R \alpha_{CM}$. Sostituendo questa relazione nella prima equazione ricaviamo $\alpha_{CM} = \frac{F_a}{MR}$, che a sua volta sostituito nella seconda ci permette di ottenere:

$$F_a = \frac{\tau_M}{R + \frac{I}{MR}} \quad (7-6)$$

La forza di attrito statico è dunque non nulla, rivolta nel verso positivo dell'asse x e proporzionale al momento fornito.

La forza di attrito statico avrà in ogni caso un valore massimo raggiungibile $F_{a,max} = \mu_s R_n = \mu_s M g$. Questo fissa il massimo momento che può essere fornito alla ruota senza farla slittare, e quindi la massima accelerazione ammissibile. Sappiamo bene che se si spinge troppo l'acceleratore dell'automobile in una partenza da fermi, soprattutto su fondo scivoloso, le ruote possono slittare; la spiegazione è proprio questa.

Appendice: Il tensore di inerzia

Il momento angolare di un sistema di punti materiali di massa m_i è dato da:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

dove \vec{r}_i e \vec{v}_i sono le posizioni e le velocità dei punti materiali.

Se il sistema è un corpo rigido che sta ruotando a velocità angolare $\vec{\omega}$ (l'asse di rotazione è identificato dalla direzione del vettore) e consideriamo un sistema di riferimento che abbia l'origine sull'asse di rotazione, le velocità dei punti si possono scrivere come:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (\text{A-1})$$

Sostituendo la (A-1) nell'espressione del momento angolare e applicando l'identità vettoriale (valida per ogni terna di vettori)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) = \\ &= \sum_i m_i \begin{bmatrix} \cancel{\omega_x x^2} + \omega_x y^2 + \omega_x z^2 - \cancel{x^2 \omega_x} - xy\omega_y - xz\omega_z \\ \omega_y x^2 + \cancel{\omega_y y^2} + \omega_y z^2 - yx\omega_x - \cancel{y^2 \omega_y} - yz\omega_z \\ \omega_z x^2 + \omega_z y^2 + \cancel{\omega_z z^2} - zx\omega_x - zy\omega_y - \cancel{z^2 \omega_z} \end{bmatrix} = \\ &= \sum_i m_i \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

ovvero:

$$\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \quad (\text{A-3})$$

dove \mathbf{I} è detto **tensore d'inerzia**.

Il tensore di inerzia si definisce come:

$$\mathbf{I} = \sum_i m_i \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \int \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm \quad (\text{A-4})$$

per sistemi discreti e continui rispettivamente. Gli elementi della matrice dipendono quindi da come è stato definito il sistema di coordinate, cioè da dove è stata posta l'origine e da come sono orientati gli assi.

La (A-2) è un'espressione per il momento angolare più generale della (6-5) ed dettaglia il fatto che \vec{L} non è necessariamente parallelo a $\vec{\omega}$.

Il tensore di inerzia è somma di matrici simmetriche 3×3 , perciò sarà anch'esso una matrice simmetrica 3×3 . Dall'algebra sappiamo che una tale matrice è diagonalizzabile; questo significa che se orientiamo gli assi xyz secondo direzioni appropriate (le direzioni degli autovettori ortogonali di \mathbf{I}), il tensore di inerzia diventa una matrice diagonale. Dal punto di vista fisico questo dimostra che per ogni punto (cioè per ogni possibile collocazione dell'origine degli assi) passano tre direzioni dell'asse di rotazione per cui $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$; essi sono detti *assi principali di inerzia*.

Si potrebbe ulteriormente dimostrare che, utilizzando il tensore di inerzia, l'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido si scrive come:

$$E_K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \quad (\text{A-5})$$