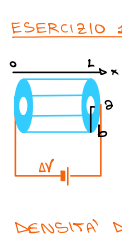
# 4 - Correnti

Saturday, 13 August 2022 16:30

## ESERCIZIO 1



GENERATORE ΔV

CONDUTTORE CILINDRO CAVO $L, a, b$

RESISTIVITA' ALLUMINIO $\gamma_{Al}$

INTENSITA' DI CORRENTE ?

### DENSITA' DI CORRENTE

$I$ UNIFORME → $\vec{J}$ UNIFORME

SEZIONE $A = \pi(b^2 - a^2)$

$$\vec{J} = \frac{I}{A}\vec{u_x}$$

### CAMPO ELETTRICO

LEGGE DI OHM LOCALE

$\vec{E} = \gamma\vec{J} = \frac{\gamma I}{A}\vec{u_x}$

### INTENSITA' DI CORRENTE

ΔV COSTANTE

$\Delta V = V(0) - V(L) = \int_0^L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{\gamma L}{A} I$

$\rightarrow \quad I = \frac{A\,\Delta V}{\gamma L} = \frac{\pi(b^2-a^2)\,\Delta V}{\gamma_{Al}\,L}$

### RESISTENZA ELETTRICA

$I = \frac{A\,\Delta V}{\gamma L}$ OHM LOCALE

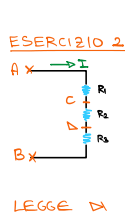
$I = \Delta V\, R^{-1}$ OHM GENERALE

$\rightarrow \quad R = \boxed{\frac{L\gamma}{A}}^{*} = \frac{L\,\gamma_{Al}}{\pi(b^2-a^2)}$

* VALE PER TUTTI I CONDUTTORI A SEZIONE COSTANTE

---

## ESERCIZIO 2



CONDUTTORI IN SERIE

$\Delta V_{AB}$ COSTANTE

RESISTENZA EQUIVALENTE ?

### LEGGE DI OHM (INDIVIDUALE)

$V_A - V_C = R_1 I$

$V_C - V_D = R_2 I \quad +$

$V_D - V_B = R_3 I \quad +$

TUTTE E 3 LE RESISTENZE CONDIVIDONO LA STESSA INTENSITA' DI CORRENTE

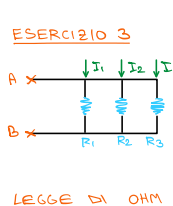
$V_A \cancel{-V_C + V_C} \cancel{-V_D + V_D} - V_B = R_1 I + R_2 I + R_3 I$

$V_A - V_B = \Delta V_{AB} = (R_1 + R_2 + R_3)\, I$

### RESISTENZA EQUIVALENTE $R_{EQ} = \sum R_i$

---

## ESERCIZIO 3



CONDUTTORI IN PARALLELO

$\Delta V_{AB}$ COSTANTE

RESISTENZA EQUIVALENTE ?

### LEGGE DI OHM (INDIVIDUALE)

$I_1 = \frac{\Delta V_{AB}}{R_1} \quad I_2 = \frac{\Delta V_{AB}}{R_2} \quad I_3 = \frac{\Delta V_{AB}}{R_3}$

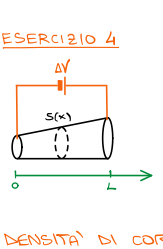
### CONSERVAZIONE DELLA CARICA

$I = I_1 + I_2 + I_3 = \Delta V_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$

### RESISTENZA EQUIVALENTE $R_{EQ} = \left(\sum \frac{1}{R_i}\right)^{-1}$

---

## ESERCIZIO 4



RESISTIVITA' $\gamma = \gamma(S)$
UNIFORME ∀ SEZIONE

RESISTENZA ?

### DENSITA' DI CORRENTE

ΔV PRODUCE UN FLUSSO DI CORRENTE STAZIONARIA $I$

CONDUTTORE FILIFORME → $J(x) = \frac{I}{S(x)}$

### CAMPO ELETTRICO

$E(x) = \gamma(x) J(x) = \gamma(x)\frac{I}{S(x)}$ OHM LOCALE

### RESISTENZA ELETTRICA

$\Delta V = V(0) - V(L) = \int_0^L E(x)\,dx = I\int_0^L \frac{\gamma(x)}{S(x)}\,dx$

$\Delta V = I R$ OHM GENERALE

$R = \int_0^L \frac{\gamma(x)}{S(x)}\,dx$

---

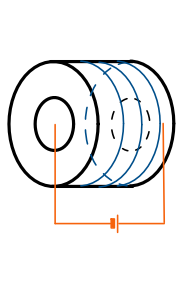
## ESERCIZIO 5

ΔV COST (INTERNA - ESTERNA)

CILINDRO CAVO $a, b, L$

RESISTIVITA' $\gamma$

POTENZA $P = ?$



### DENSITA' DI CORRENTE

$\vec{J} = J(r)\vec{u_r} = \frac{I}{S(r)}\vec{u_r} \qquad r \in (a,b)$

$\vec{J} = \frac{I}{2\pi r L}\vec{u_r}$

### CAMPO ELETTRICO

$\vec{E} = \gamma\vec{J} = E(r)\vec{u_r} = \frac{\gamma I}{2\pi r L}\vec{u_r}$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$\Delta V = V(b) - V(a) = \int_a^b \frac{\gamma I}{2\pi r L}\,dr = \frac{\gamma I}{2\pi L}\log\left(\frac{b}{a}\right)$

$I = \frac{2\pi L\,\Delta V}{\gamma\log(b/a)}$

### POTENZA DISSIPATA

EFFETTO JOULE $\quad P = VI = \frac{2\pi L\,\Delta V^2}{\gamma\log(b/a)}$

### PROCEDIMENTO ALTERNATIVO

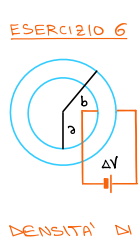
$dR = \frac{\gamma\,dr}{S(r)} = \frac{\gamma\,dr}{2\pi r L}$

$R = \int_a^b \frac{\gamma\,dr}{2\pi r L} = \frac{\gamma}{2\pi L}\log(b/a)$

$P = \frac{\Delta V^2}{R}$

---

## ESERCIZIO 6



GENERATORE MANTIENE ΔV

GUSCIO SFERICO CONDUTTORE

RESISTIVITA' $\gamma$

INTENSITA' DI CORRENTE ?

### DENSITA' DI CORRENTE

$\vec{J} = J(r)\vec{u_r} = \frac{I}{S(r)}\vec{u_r} = \frac{I}{4\pi r^2}\vec{u_r}$

### CAMPO ELETTRICO

$\vec{E} = \gamma\vec{J} = \frac{\gamma I}{4\pi r^2}\vec{u_r}$

### CORRENTE ELETTRICA

$\Delta V = V(b) - V(a) = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$= \frac{\gamma I}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\gamma I}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{\gamma I\,(b-a)}{4\pi a b}$

$I = \frac{4\pi a b\,\Delta V}{\gamma(b-a)}$

### ALTERNATIVAMENTE

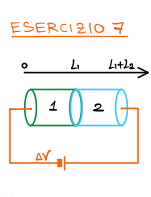
$dR = \frac{\gamma\,dr}{S(r)} = \frac{\gamma\,dr}{4\pi r^2}$

$R = \int_a^b \frac{\gamma}{4\pi}\frac{dr}{r^2} = \frac{\gamma(b-a)}{4\pi a b}$

$\Delta V = R I \quad \rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{4\pi a b\,\Delta V}{\gamma(b-a)}$

---

## ESERCIZIO 7



GENERATORE ΔV COSTANTE

CONDUTTORE CILINDRICO $S$

DUE MATERIALI $\gamma_1, \gamma_2$

### METODO 1

### DENSITA' DI CORRENTE

$\vec{J} = \frac{I}{S}\vec{u_x}$ IPOTESI: - $I$ COSTANTE STAZIONARIA
- $S$ UNIFORME IN $x \in (0, L_1+L_2)$

### CAMPO ELETTRICO

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1 & x \in (0, L_1) \\ \gamma_2 & x \in (L_1, L_1+L_2) \\ 0 & x > L_1+L_2 \end{cases} \quad \text{RESISTIVITA'}$$

$$\vec{E}(x) = \gamma(x)\vec{J} = \begin{cases} \frac{\gamma_1 I}{S} & x \in (0, L_1) \\ \frac{\gamma_2 I}{S} & x \in (L_1, L_1+L_2) \\ 0 & x > L_1+L_2 \end{cases}$$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$\Delta V = \int_0^{L_1}\vec{E}\,dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2}\vec{E}\cdot dx =$

$= \int_0^{L_1}\frac{\gamma_1 I}{S}dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2}\frac{\gamma_2 I}{S}dx$

$= \frac{I}{S}(\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2)$

$I = \frac{\Delta V\,S}{\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2}$

### METODO 2

### RESISTENZE IN SERIE

$R = R_1 + R_2 = \frac{\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2}{S}$

### LEGGE DI OHM

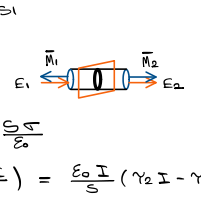
$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V\,S}{\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2}$

### CARICA SU SUPERFICIE DISCONTINUITA'

SI ACCUMULA UNA CARICA Q POICHE' I 2 CAMPI ELETTRICI SONO DIVERSI

TEOREMA DI GAUSS

$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{INC}}{\varepsilon_0}$



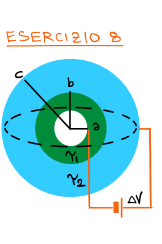
$(\vec{E_1}\cdot\vec{n_1} + \vec{E_2}\cdot\vec{n_2})S = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0}$

$\sigma = \varepsilon_0\left(+\frac{\gamma_2 I}{S} - \frac{\gamma_1 I}{S}\right) = \frac{\varepsilon_0 I}{S}(\gamma_2 I - \gamma_1 I)$

$= \frac{\varepsilon_0(\gamma_2 - \gamma_1)\,\Delta V}{\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2}$

---

## ESERCIZIO 8



2 CONDUTTORI A GUSCIO SFERICO DISPOSTI CONCENTRICAMENTE

ΔV COSTANTE

RESISTIVITA' MATERIALI $\gamma_1\ \gamma_2$

### METODO 1

### DENSITA' DI CORRENTE

$\vec{J} = J(r)\vec{u_r} = \frac{I}{4\pi r^2}\vec{u_r} \qquad r \in (a,c)$

### DISTRIBUZIONE DI RESISTIVITA'

$$\gamma(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \gamma_1 & r \in (a,b) \\ \gamma_2 & r \in (b,c) \\ 0 & r > c \end{cases}$$

### CAMPO ELETTRICO

$$\vec{E} = \gamma(r)\vec{J}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{I\gamma_1}{4\pi r^2} & r \in (a,b) \\ \frac{I\gamma_2}{4\pi r^2} & r \in (b,c) \\ 0 & r > c \end{cases}$$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$\Delta V = \int E\,dr = 0 + \int_a^b \frac{I\gamma_1}{4\pi r^2}dr + \int_b^c \frac{I\gamma_2}{4\pi r^2}dr + 0$

$= \frac{I}{4\pi}\left[\gamma_1\left(-\frac{1}{r}\right)_a^b + \gamma_2\left(-\frac{1}{r}\right)_b^c\right]$

$= \frac{I}{4\pi}\left[\frac{\gamma_1(b-a)}{ab} + \frac{\gamma_2(c-b)}{bc}\right]$

$I = \frac{4\pi\,\Delta V\,abc}{\gamma_1 c(b-a) + \gamma_2 a(c-b)}$

### CALCOLO DI $\vec{J}$

$\vec{J} = \frac{I}{S(r)}\vec{u_r} = \frac{4\pi\,\Delta V\,abc}{\gamma_1 c(b-a) + \gamma_2 a(c-b)}\cdot\frac{\vec{u_r}}{4\pi r^2} = k\frac{\Delta V}{r^2}\vec{u_r}$

### METODO 2

### RESISTENZE IN SERIE

$dR = \frac{\gamma(r)\,dr}{S(r)} = \frac{\gamma(r)\,dr}{4\pi r^2}$

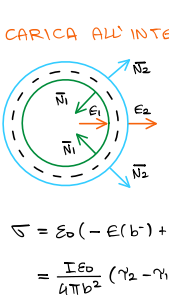
$R = R_1 + R_2 = \int_a^b \frac{\gamma_1\,dr}{4\pi r^2} + \int_b^c \frac{\gamma_2\,dr}{4\pi r^2}$

$= \frac{\gamma_1 c(b-a) + \gamma_2 a(c-b)}{4\pi\,abc}$

### LEGGE DI OHM

$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{4\pi\,\Delta V\,abc}{\gamma_1 c(b-a) + \gamma_2 a(c-b)}$

### CARICA ALL'INTERFACCIA



TEOREMA DI GAUSS

$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{INC}}{\varepsilon_0}$

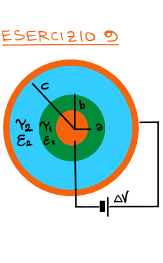
$S\vec{E_1}\cdot\vec{n_1} + S\vec{E_2}\cdot\vec{n_2} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

$\sigma = \varepsilon_0(-E(b^-) + E(b^+)) = \varepsilon_0\left(-\frac{I\gamma_1}{4\pi b^2} + \frac{I\gamma_2}{4\pi b^2}\right)$

$= \frac{I\varepsilon_0}{4\pi b^2}(\gamma_2 - \gamma_1) = \frac{\varepsilon_0\,a c\,\Delta V}{\gamma_1 c(b-a) + \gamma_2 a(c-b)}\cdot\frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{b}$

---

## ESERCIZIO 9



GENERATORE ΔV COSTANTE

CONDENSATORE CILINDRICO LUNGO $L$

DIELETTRICI ISOLANTI IMPERFETTI $\varepsilon_k\ \gamma_k$

CARICHE SUPERFICIALI

### DENSITA' DI CARICA

IPOTESI $L >> c$ → NO EFFETTI DI BORDO

$\vec{J} = J(r)\vec{u_r} = \frac{I}{S(r)}\vec{u_r} = \frac{I}{2\pi r L}\vec{u_r}$

### DISTRIBUZIONE DI RESISTIVITA'

$$\gamma(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \gamma_1 & r \in (a,b) \\ \gamma_2 & r \in (b,c) \\ 0 & r > c \end{cases}$$

### CAMPO ELETTRICO

$$\vec{E}(r) = \gamma(r)\vec{J}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\gamma_1 I}{2\pi r L}\vec{u_r} & r \in (a,b) \\ \frac{\gamma_2 I}{2\pi r L}\vec{u_r} & r \in (b,c) \\ 0 & r > c \end{cases}$$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$\Delta V = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 + \int_a^b \frac{\gamma_1 I}{2\pi L}\frac{dr}{r} + \int_b^c \frac{\gamma_2 I}{2\pi L}\frac{dr}{r} + 0$

$= \frac{I}{2\pi L}\left[\gamma_1(\log r)_a^b + \gamma_2(\log r)_b^c\right] =$

$= \frac{I}{2\pi L}(\gamma_1\log(b/a) + \gamma_2\log(c/b))$

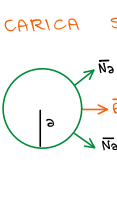
RISOLVENDO PER $I$

$I = \frac{2\pi L\,\Delta V}{\gamma_1\log(b/a) + \gamma_2\log(c/b)}$

### RICAVO NUMERICAMENTE $\vec{E}$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\gamma_1 I}{2\pi r L}\vec{u_r} = \frac{\gamma_1\,\Delta V}{\gamma_1\log(b/a) + \gamma_2\log(c/b)}\frac{\vec{u_r}}{r} & r \in (a,b) \\ \frac{\gamma_2 I}{2\pi r L}\vec{u_r} = \frac{\gamma_2\,\Delta V}{\gamma_1\log(b/a) + \gamma_2\log(c/b)}\frac{\vec{u_r}}{r} & r \in (b,c) \\ 0 & r > c \end{cases}$$

### CARICA SU $r = a$

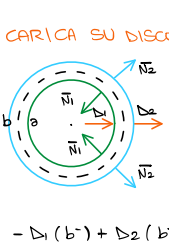


TEOREMA DI GAUSS

$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = 2\pi a L\,E(a) = \frac{Q(a)}{\varepsilon_1}$

$Q(a) = \cancel{2\pi a L}\frac{\gamma_1 I}{\cancel{2\pi a L}}\varepsilon_1 = \gamma_1\varepsilon_1 I$

### CARICA SU DISCONTINUITA' $r = b$



TEOREMA DI GAUSS

$\Phi(\vec{D}) = 2\pi r L\,D(r) = Q_{inc}$

$S\vec{D_1}\cdot\vec{n_1} + S\vec{D_2}\cdot\vec{n_2} = S\sigma$

$-D_1(b^-) + D_2(b^+) = \sigma(b)$

$-\varepsilon_1 E_1(b^-) + \varepsilon_2 E_2(b^+) = \sigma(b)$

$\sigma(b) = \frac{\gamma_2\varepsilon_2 I}{2\pi b L} - \frac{\gamma_1\varepsilon_1 I}{2\pi b L} = \frac{I}{2\pi b L}(\gamma_2\varepsilon_2 - \gamma_1\varepsilon_1)$

$Q(b) = 2\pi b L\,\sigma$

### CARICA SU $r = c$

CONDENSATORE COME CONDUTTORE IDEALE $\gamma = 0$

POICHE' $\vec{E} = 0$ PER $r > c$ → $Q_{SISTEMA} = 0$

$Q(a) + Q(b) + Q(c) = 0$

$Q(c) = -\gamma_1\varepsilon_1 I - 2\pi b L\sigma$

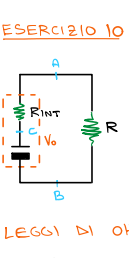
$= -\gamma_1\varepsilon_1 I - I(\gamma_2\varepsilon_2 - \gamma_1\varepsilon_1)$

$= \cancel{-\gamma_1\varepsilon_1 I} - \gamma_2\varepsilon_2 I \cancel{+\gamma_1\varepsilon_1 I}$

$= -\gamma_2\varepsilon_2 I$

---

## ESERCIZIO 10



GENERATORE REALE SVILUPPA DDP $V_0$

SCHEMATIZZATO COME IDEALE + $R_{INT}$

EFFETTO JOULE ?

### LEGGI DI OHM (INDIVIDUALI)

$V_A - V_B = R I \quad +$

$V_C - V_A = R_{INT} I \quad =$

$\cancel{V_A} - V_B + V_C \cancel{-V_A} = I(R + R_{INT})$ SERIE

$V_0 = V_C - V_B = I(R + R_{INT})$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$R$ IN SERIE → $I$ CONDIVISA

$I = \frac{V_0}{R + R_{INT}}$

### EFFETTO JOULE

$P_{DISS} = I\,V_{TOT} = I^2 R = \frac{R}{(R_{INT} + R)^2}V_0^2$

DOVE $V = \frac{R\,V_0}{R + R_{INT}} = RI$

### POTENZA MASSIMA DISSIPATA

INDIVIDUO IL PUNTO DI MASSIMO

$\frac{\partial P_{DISS}}{\partial R} = V_0^2\cdot\frac{1\cdot(R_{INT}+R)^2 - R\cdot 2\cdot(R_{INT}+R)}{(R_{INT}+R)^4} =$

$= \frac{R_{INT} - R}{(R_{INT}+R)^3}V_0^2$

$\frac{\partial P_{DISS}}{\partial R} > 0 \quad \rightarrow \quad R < R_{INT}$

$$\begin{array}{c|cc} & R_{INT} & \\ \hline P' & + & - \\ P & \nearrow & \searrow \\ & MAX & \end{array}$$

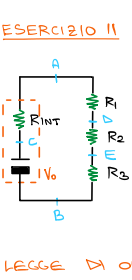
CALCOLO IL MASSIMO

$\max(P_{DISS}) = P_{DISS}(R = R_{INT}) =$

$= \frac{R_{INT}}{(R_{INT}+R_{INT})^2}V_0^2 = \frac{\cancel{R_{INT}}}{4R_{INT}^{\cancel{2}}}V_0^2 = \frac{V_0^2}{4R_{INT}}$

---

## ESERCIZIO 11



GENERATORE REALE $V_0$

DESCRITTO CON IDEALE + $R_{INT}$

RESISTENZE IN SERIE $R_1, R_2, R_3$

$I$, $\Delta V_{AB}$, ΔV RESISTENZE

### LEGGE DI OHM (INDIVIDUALE)

$V_C - V_A = R_{INT} I \quad +$

$V_A - V_D = R_1 I \quad +$

$V_D - V_E = R_2 I \quad +$

$V_E - V_B = R_3 I \quad =$

$V_C \cancel{-V_A + V_A} \cancel{-V_D + V_D} \cancel{-V_E + V_E} - V_B = (R_{INT} + R_1 + R_2 + R_3)\,I$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$V_0 = V_C - V_B = \sum R I \qquad I = \frac{V_0}{R_{INT} + R_1 + R_2 + R_3} = \frac{V_0}{\sum R_i}$

### DDP TRA A E B

$V_A - V_B = R_{AB} I$

$\Delta V_{AB} = (R_1 + R_2 + R_3)\,I = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_{INT} + R_1 + R_2 + R_3}V_0$

$\Delta V_{AB} < V_0$ " DDP A VUOTO"

### DDP TRA I SINGOLI CONDENSATORI

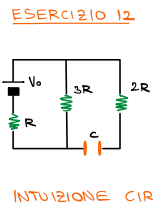
$V_1 = V_A - V_D = R_1 I$

$V_2 = V_D - V_E = R_2 I \qquad V_k = \frac{R_k V_0}{R_{INT} + R_1 + R_2 + R_3}$

$V_3 = V_E - V_B = R_3 I$

---

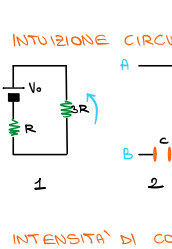
## ESERCIZIO 12



CONSIDERA IL CIRCUITO

$I$, $\Delta V_{COND}$, $P_{DISS}$, $U_{COND}$

### INTUIZIONE CIRCUITO



NEL CIRCUITO 2 NON CIRCOLA $I$

PRESENZA DI C REGIME STAZIONARIO

### INTENSITA' DI CORRENTE

LEGGE DI OHM, RESISTENZE IN SERIE

$I = \frac{V_0}{R + 3R} = \frac{V_0}{4R}$

### POTENZA DISSIPATA

$P_{DISS} = V_0 I = \frac{V_0^2}{4R}$

### DDP TRA A E B

$V_3 = V_A - V_B = \Delta V_{AB} = 3R\,I = \frac{3}{4}V_0$

### ENERGIA INTERNA CONDENSATORE

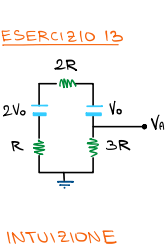
$V_2 = 0$ POICHE' NON CIRCOLA CORRENTE

$\Delta V_{COND} = \Delta V_{AB} = \frac{3}{4}V_0$

$U_{COND} = \frac{1}{2}C\,\Delta V_{AB}^2$

---

## ESERCIZIO 13



CONSIDERA IL CIRCUITO

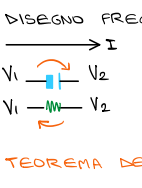
$3R \rightarrow R_{VAR} \in \mathbb{R}^+ \quad (0, \infty)$

$V_A(V_0, R)$ IN ENTRAMBI I CASI

### INTUIZIONE

SUPPONIAMO $I$ CIRCOLI IN VERSO ORARIO

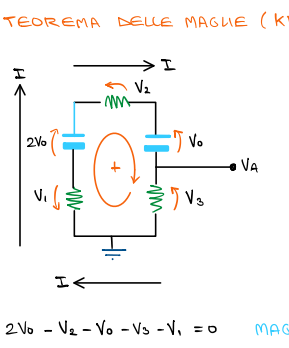
DISEGNO FRECCE DI TENSIONE



CON $V_2 > V_1$

CON $V_2 < V_1$

### TEOREMA DELLE MAGLIE (KIRCHHOFF)



$2V_0 - V_2 - V_0 - V_3 - V_1 = 0$ MAGLIA

### INTENSITA' DI CORRENTE

$V_2 = 2RI$

$V_3 = V_A = R_{VAR}\,I$

$V_1 = RI$

$2V_0 - 2RI - V_0 - R_{VAR}I - RI = 0$

$V_0 = I(3R + R_{VAR})$

$I = \frac{V_0}{3R + R_{VAR}}$

### DIFFERENZA DI POTENZIALE

CASO 1 $R_{VAR} = 3V_0$

$V_A = 3RI = \frac{3R\,V_0}{6R} = \frac{V_0}{2}$

CASO 2 $R_{VAR}$ GENERICA

$V_A = R_{VAR}\,I = \frac{R_{VAR}}{3R + R_{VAR}}V_0$

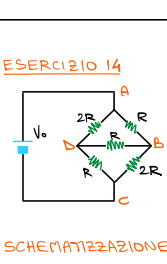
### CASI LIMITE

$\lim_{R_{VAR}\to 0} V_A = \frac{0}{3R}V_0 = 0$

$\lim_{R_{VAR}\to\infty} V_A = \frac{R_{VAR}}{R_{VAR}}V_0 = V_0$

---

## ESERCIZIO 14



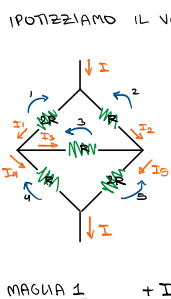
CONSIDERA IL CIRCUITO

GENERATO $\Delta V = V_0$ COSTANTE

$I_k$, $I$, $\Delta V_{BD}$

### SCHEMATIZZAZIONE CIRCUITO

IPOTIZZIAMO IL VERSO DI $I$



CONSERVAZIONE

$I = I_1 + I_2$

$I_1 = I_3 + I_4$

$I_5 = I_3 + I_2$

$I = I_4 + I_5$

MAGLIA 1 $\quad +I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0$

MAGLIA 2 $\quad -I_3 R_3 - I_5 R_5 + I_4 R_4 = 0$

GENERATORE $\quad I_1 R_1 + I_4 R_4 = V_0$

### INTENSITA' DI CORRENTI $I_k$

| | |
|---|---|
| $I = I_1 + I_2 = I_4 + I_5$ | $I = I_1 + I_2 = I_4 + I_5$ |
| $I R_1 + I_4 R_4 = V_0$ | $2I_1 + I_4 = V_0/R$ |
| $I_1 = I_3 + I_4$ | $I_1 = I_3 + I_4$ |
| $I_5 = I_3 + I_2$ | $I_5 = I_3 + I_2$ |
| $+I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0$ | $2I_1 - I_2 + I_3 = 0$ |
| $-I_3 R_3 - I_5 R_5 + I_4 R_4 = 0$ | $-I_3 - 2I_5 + I_4 = 0$ |

PER SIMMETRIA 180° → $I_1 = I_5$, $I_2 = I_4$

RIDUZIONE GDL SISTEMA

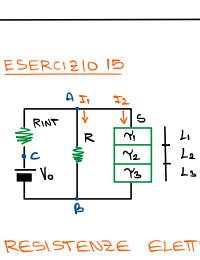
$I_1 = I_5 = \frac{2V_0}{7R}$

$I_2 = I_4 = \frac{3V_0}{7R}$

$I_3 = -\frac{I_1}{2} = -\frac{V_0}{7R}$

---

## ESERCIZIO 15



CONSIDERA IL CIRCUITO

3 MATERIALI DIVERSI $\gamma_{1,2,3}$

CALCOLA $I_1, I_2$

### RESISTENZE ELETTRICHE

$R_1 = \frac{\gamma_1 L_1}{S} \quad R_2 = \frac{\gamma_2 L_2}{S} \quad R_3 = \frac{\gamma_3 L_3}{S}$

$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{(\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2 + \gamma_3 L_3)}{S} = \frac{\sum\gamma_i L_i}{S}$

### LEGGI DI OHM (INDIVIDUALI)

$V_C - V_A = R_{INT} I$

$V_A - V_B = R I_1 \qquad I_1 = \Delta V_{AB}/R$

$V_A - V_B = R_{123} I_2 \qquad I_2 = \Delta V_{AB}/R_{123}$

$I_{TOT} = I = I_1 + I_2 \quad \rightarrow \quad I = \Delta V_{AB}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{123}}\right)$

### RESISTENZA INTERNA

$I$ E' LA STESSA CHE PASSA PER $R_{INT}$

$V_C - V_A = R_{INT} I = \frac{R_{INT}(R_{123} + R)}{R_{123} R}\Delta V_{AB}$

### DDP TRA A E B

$V_0 = V_C - V_B = V_C - V_A + V_{AB} = \frac{R_{INT}(1 + R/R_{123}) + R}{R}V_{AB}$

$V_{AB} = \frac{R\,V_0}{R_{INT}(1 + R/R_{123}) + R}$

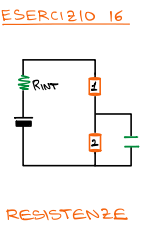
### INTENSITA' DI CORRENTI $I_k$

$I_1 = \frac{\Delta V_{AB}}{R} = \frac{V_0}{R + R_{INT}(1 + R/R_{123})} = \frac{V_0}{R + R_{INT}(1 + RS/\sum\gamma_i L_i)}$

$I_2 = \frac{\Delta V_{AB}}{R_{123}} = \frac{V_0}{R_{123} + R_{INT}(1 + R_{123}/R)} = \frac{V_0 S}{\sum\gamma_i L_i + R_{INT}(S + \sum\gamma_i L_i/R)}$

---

## ESERCIZIO 16



GENERATORE $V_0$ COST

CONDUTTORI CILINDRICI $S, \gamma_i, L_i$

ΔV RESISTORI, $Q_{COND}$

### RESISTENZE

$R_1 = \frac{\gamma_1 L_1}{S} \quad R_2 = \frac{\gamma_2 L_2}{S}$

$R_{EQ} = R_{INT} + R_1 + R_2$ SERIE

### INTENSITA' DI CORRENTE

IN CONDIZIONI STAZIONARIE $I_{COND} = 0$
E' COME SE IL CIRCUITO FOSSE APERTO

$I = \frac{V_0}{R_{EQ}} = \frac{S V_0}{S R_{INT} + \gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2}$

### DDP DEI RESISTORI

LEGGE DI OHM INDIVIDUALE

$V_1 = R_1 I = \frac{\gamma_1 L_1 V_0}{S R_{INT} + \gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2}$

$V_2 = R_2 I = \frac{\gamma_2 L_2 V_0}{S R_{INT} + \gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2}$

### CONDENSATORE

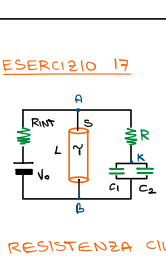
PER GARANTIRE $I_{COND} = 0$
DEVE ESSERE CARICO

E' IN PARALLELO CON IL RESISTORE 2

$\rightarrow \quad Q = C V_2 = \frac{\gamma_2 L_2\,C\,V_0}{S R_{INT} + \gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2}$

---

## ESERCIZIO 17



CONSIDERA IL CIRCUITO

$\Delta V = V_0$ CONDIZIONI STAZIONARIE

$P_{EROGATA}$, $U_{CONDENSATORI}$

### RESISTENZA CILINDRO

$R = \frac{\gamma L}{S}$

### INTENSITA' DI CORRENTE

IN CONDIZIONI STAZIONARIE C SONO CARICHI
E NON PASSA I IN PARTE DESTRA DEL CIRCUITO

$V_0 = (R_{INT} + R_{CIL})\,I$

$I = \frac{V_0}{R_{INT} + R_{CIL}} = \frac{S V_0}{S R_{INT} + \gamma L}$

### POTENZA EROGATA

$P_{GEN} = V_0 I = \frac{S V_0^2}{S R_{INT} + \gamma L}$

### ENERGIA IN CONDENSATORI

HA LA STESSA $\Delta V_{AB}$ DI CILINDRO

$V_A - V_B = \Delta V_{AB} = R_{CIL} I = \frac{\gamma L}{S R_{INT} + \gamma L}V_0$

POICHE' IN R NON PASSA CORRENTE,
NON FA CAMBIARE IL POTENZIALE

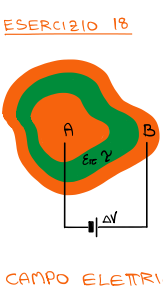
$\Delta V_{AB} = \Delta V_{KB}$

$U_1 = \frac{1}{2}C_1\,\Delta V^2 = \frac{C_1}{2}\Delta V_{AB}^2$

$U_2 = \frac{1}{2}C_2\,\Delta V^2 = \frac{C_2}{2}\Delta V_{AB}^2$

---

## ESERCIZIO 18



CONDUTTORE A, B

INTERCAPEDINE DIALETTRICA ISOLANTE IMPERFETTO $\varepsilon_r\ \gamma$

CONDENSATORE CON PERDITE

RESISTENZA DI PERDITA ?

### CAMPO ELETTRICO

$\vec{E}$ DIPENDE DA GEOMETRIA CONDENSATORE

$\Delta V_{AB} = \int_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s}$

TEOREMA DI GAUSS

$Q = \Phi(\vec{D}) = \int_\Sigma \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = \varepsilon_0\varepsilon_r\int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$

### CAPACITA' DEL CONDENSATORE

$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{V_{AB}}\int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{V_{AB}}\Phi(\vec{E}) \quad (1)$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$\vec{E} = \gamma\vec{J}$

$I = \int_\Sigma \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{1}{\gamma}\int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{\Phi(\vec{E})}{\gamma}$

### RESISTENZA DI PERDITA

$\Delta V = RI$

$R_{PERDITA} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{\gamma\,V_{AB}}{\int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS} = \frac{\gamma\,V_{AB}}{\Phi(\vec{E})} \quad (2)$

### RELAZIONE RESISTENZA - CAPACITA'

UNISCO LE EQUAZIONI (1), (2)

$R_P = \frac{\gamma\,V_{AB}}{\Phi(E)}$

$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{V_{AB}}\Phi(E)$

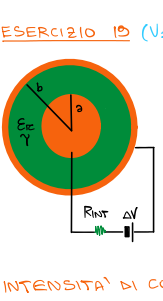
$\Phi(E) = \Phi(E) \quad \rightarrow \quad \frac{C\,V_{AB}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\gamma\,V_{AB}}{R_P}$

$C R_P = \varepsilon_0\varepsilon_r\gamma$

NOTARE COME C, R DIPENDANO DALLA GEOMETRIA DEL PROBLEMA MA IL LORO PRODOTTO INVECE NO

---

## ESERCIZIO 19 (V1)



CONDENSATORE CILINDRICO

$L >> b$ → NO EFFETTO DI BORDO

DIELETTRICO IMPERFETTO $\varepsilon_r\ \gamma$

GENERATORE $V_0$, $R_{INT}$

CALCOLA $P_{GEN}$, $U_{COND}$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$I = \frac{V_0}{R_{INT} + R_{COND}}$

### DENSITA' DI CORRENTE

$\vec{J} = J(r)\vec{u_r} = \frac{I}{2\pi r L}\vec{u_r}$

### CAMPO ELETTRICO

$$\gamma(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \gamma & r \in (a,b) \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{E}(r) = \gamma(r)\vec{J}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\gamma I}{2\pi r L}\vec{u_r} & r \in (a,b) \\ 0 & r > b \end{cases}$$

### DIFFERENZA DI POTENZIALE DEL CONDENSATORE

$\Delta V_{AB} = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 + \int_a^b \frac{\gamma I}{2\pi L}\frac{dr}{r} + 0$

$= \frac{\gamma I}{2\pi L}\left|\log r\right|_a^b = \frac{\gamma I\log(b/a)}{2\pi L}$

### RESISTENZA DEL CONDENSATORE

$R_{COND} = \frac{\Delta V_{AB}}{I} = \frac{\gamma\log(b/a)}{2\pi L}$

### CALCOLO NUMERICO $I$

$I = \frac{V_0}{R_{INT} + R_{COND}} = \frac{2\pi L\,V_0}{2\pi L\,R_{INT} + \gamma\log(b/a)}$

### POTENZA EROGATA

$P_{GEN} = V_0 I = \frac{2\pi L\,V_0^2}{2\pi L\,R_{INT} + \gamma\log(b/a)}$

### CAPACITA' CONDENSATORE

E' NOTA POICHE' CILINDRICO $\quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\log(b/a)}$

IN ALTERNATIVA SI RICAVA CON GAUSS

$\Phi(\vec{D}) = 2\pi r L\,D(r) = Q$

$\vec{D}(r) = \frac{Q}{2\pi r L}\vec{u_r}$

$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{2\pi r\,\varepsilon_0\varepsilon_r L}\vec{u_r}$ VALIDE PER $r \in (a,b)$ NULLI ALTROVE

$\Delta V = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\frac{dr}{r} = \frac{Q\log(b/a)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}$

$Q = C\,\Delta V \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\log(b/a)}$

### ENERGIA ELETTROSTATICA CONDENSATORE

$U = \frac{1}{2}C\,V_{COND}^2 = \frac{1}{2}C\,V_{AB}^2$

$= \frac{1}{2}\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\cancel{\log(b/a)}}\cdot\frac{\gamma^2 I^2\log^{\cancel{2}}(b/a)}{(2\pi L)^2}$

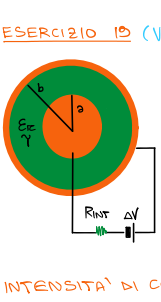
$= \frac{\gamma^2\varepsilon_0\varepsilon_r\log(b/a)}{4\pi L}I^2$

$= \frac{\gamma^2\varepsilon_0\varepsilon_r\log(b/a)}{2\cdot 2\pi L}\cdot\frac{(2\pi L)^2 V_0^2}{(2\pi L\,R_{INT} + \gamma\log(b/a))^2}$

$= \frac{\gamma^2\,2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L\log(b/a)}{2\left[2\pi L\,R_{INT} + \gamma\log(b/a)\right]^2}V_0^2$

---

## ESERCIZIO 19 (V2)



CONDENSATORE SFERICO

~~$L >> b$ → NO EFFETTO DI BORDO~~

DIELETTRICO IMPERFETTO $\varepsilon_r\ \gamma$

GENERATORE $V_0$, $R_{INT}$

CALCOLA $P_{GEN}$, $U_{COND}$

### INTENSITA' DI CORRENTE

$I = \frac{V_0}{R_{INT} + R_{COND}}$

### DENSITA' DI CORRENTE

$\vec{J} = J(r)\vec{u_r} = \frac{I}{4\pi r^2}\vec{u_r}$

### CAMPO ELETTRICO

$$\gamma(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \gamma & r \in (a,b) \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{E}(r) = \gamma(r)\vec{J}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\gamma I}{4\pi r^2}\vec{u_r} & r \in (a,b) \\ 0 & r > b \end{cases}$$

### DIFFERENZA DI POTENZIALE DEL CONDENSATORE

$\Delta V_{AB} = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 + \int_a^b \frac{\gamma I}{4\pi}\frac{dr}{r^2} + 0$

$= \frac{\gamma I}{4\pi}\left(-\frac{1}{r}\right)_a^b = \frac{\gamma I}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

$= \frac{\gamma I}{4\pi}\cdot\frac{b-a}{ab}$

### RESISTENZA DEL CONDENSATORE

$R_{COND} = \frac{\Delta V_{AB}}{I} = \frac{\gamma(b-a)}{4\pi ab}$

### CALCOLO NUMERICO $I$

$I = \frac{V_0}{R_{INT} + R_{COND}} = \frac{4\pi ab\,V_0}{4\pi ab\,R_{INT} + \gamma(b-a)}$

### POTENZA EROGATA

$P_{GEN} = V_0 I = \frac{4\pi ab\,V_0^2}{4\pi ab\,R_{INT} + \gamma(b-a)}$

### CAPACITA' CONDENSATORE

E' NOTA POICHE' SFERA $\quad C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{b-a}$

IN ALTERNATIVA SI RICAVA CON GAUSS

$\Phi(\vec{D}) = 4\pi r^2 D(r) = Q$

$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{u_r}$

$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{u_r}$ VALIDE PER $r \in (a,b)$ NULLI ALTROVE

$\Delta V = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q(b-a)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}$

$Q = C\,\Delta V \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{b-a}$

### ENERGIA ELETTROSTATICA CONDENSATORE

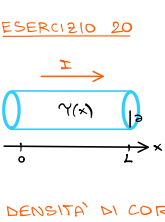
$U = \frac{1}{2}C\,V_{COND}^2 = \frac{1}{2}C\,V_{AB}^2$

$= \frac{1}{2}\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{\cancel{b-a}}\cdot\frac{\gamma^2 I^2(b-a)^{\cancel{2}}}{(4\pi ab)^2}$

$= \frac{\gamma^2\varepsilon_0\varepsilon_r(b-a)}{8\pi ab}I^2$

---

## ESERCIZIO 20



CONDUTTORE CILINDRICO

RESISTIVITA' VARIA LINEARMENTE

$\gamma(x) = \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\frac{x}{L} \qquad x \in (0, L)$

CALCOLA $\rho(x)$ DISTRIBUZIONE CARICA

### DENSITA' DI CORRENTE

$\gamma(x)$ VARIA LUNGO x

OGNI SESSIONE E' UNIFORME → $\vec{J}$ COSTANTE

$\vec{J} = \frac{I}{S}\vec{u_x} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{u_x}$

### CAMPO ELETTRICO

LEGGE DI OHM IN FORMA LOCALE

$\vec{E} = \gamma(x)\vec{J}(x) = \left[\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\frac{x}{L}\right]\frac{I}{\pi a^2}\vec{u_x}$

### DENSITA' DI CARICA

I EQUAZIONE MAXWELL

$\text{DIV}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\frac{I}{\pi a^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)\frac{x}{L}\right] = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

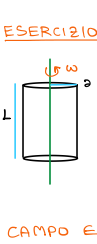
$\frac{I}{\pi a^2}\cdot\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{L} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\rightarrow \quad \rho = \frac{\varepsilon_0 I(\gamma_2 - \gamma_1)}{\pi a^2 L}$

DENSITA' VOLUMETRICA

---

## ESERCIZIO 21



CONDUTTORE CILINDRICO

NO EFFETTO BORDO $L >> a$

ω ANGOLARE COSTANTE

COSA SUCCEDE ALLE CARICHE ?

### CAMPO ELETTRICO

A REGIME $(\omega, q = 0)$ IL MOTO DEGLI $e^-$
E' SOLIDALE CON IL CONDENSATORE

MOTO CIRCOLARE $e^-$ → ∃ FORZA CENTRIPETA

$\vec{F} = q_e\vec{E} = m_e\omega^2 r\,\vec{u_r} \qquad r \in (0, a)$

$\vec{E}(r) = \frac{m_e\omega^2 r}{|q_e|}\vec{u_r}$

### DIFFERENZA DI POTENZIALE

$\Delta V = V(r=0) - V(r=a) = \int_0^a \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$= \int_0^a \frac{m_e\omega^2}{|q_e|}r\,dr = \frac{m_e\omega^2 a^2}{2|q_e|}$

### DENSITA' VOLUMETRICA

$\text{DIV}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\rho(r) = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial r}E(r) = \frac{\varepsilon_0 m_e\omega^2}{|q_e|}$ COSTANTE

### DENSITA' SUPERFICIALE

IL CILINDRO E' GLOBALMENTE NEUTRO

$Q_S = \sigma(2\pi a L)$ SUPERFICIALE

$Q_V = \rho(\pi a^2 L)$ VOLUMETRICA

$Q_S + Q_V = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma = -\frac{\rho a}{2} = -\frac{\varepsilon_0 m_e\omega^2 a}{2|q_e|}$

---

## ESERCIZIO 22

MATERIALE CONDUTTORE

CAMMINO MEDIO $l_M = 1.5\times 10^{-8}\,m$

DENSITA' ELETTRONICA $N = 8.5\times 10^{28}\,m^{-3}$

RESISTIVITA' A T = 300K ?

TEOREMA EQUIPARTIZIONE ENERGIA

$\overline{E_K} = \frac{1}{2}m_e\overline{v}^2 = \frac{3}{2}K_B T$

$\overline{v} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m_e}} = 1.17\times 10^5\,m/s$

TEMPO DI COLLISIONE

$\Delta t = \frac{l_m}{\overline{v}} = 1.28\times 10^{-13}\,s$

$v_D = \frac{a\tau}{2} = \frac{q_e\,\Delta t}{2m_e}E$

$J = q_e N v_D = \frac{q_e^2 N\,\Delta t}{2m_e}E$

RESISTIVITA' $\quad \gamma = \frac{E}{J} = \frac{2m_e v_T}{q_e^2 N l_M}$