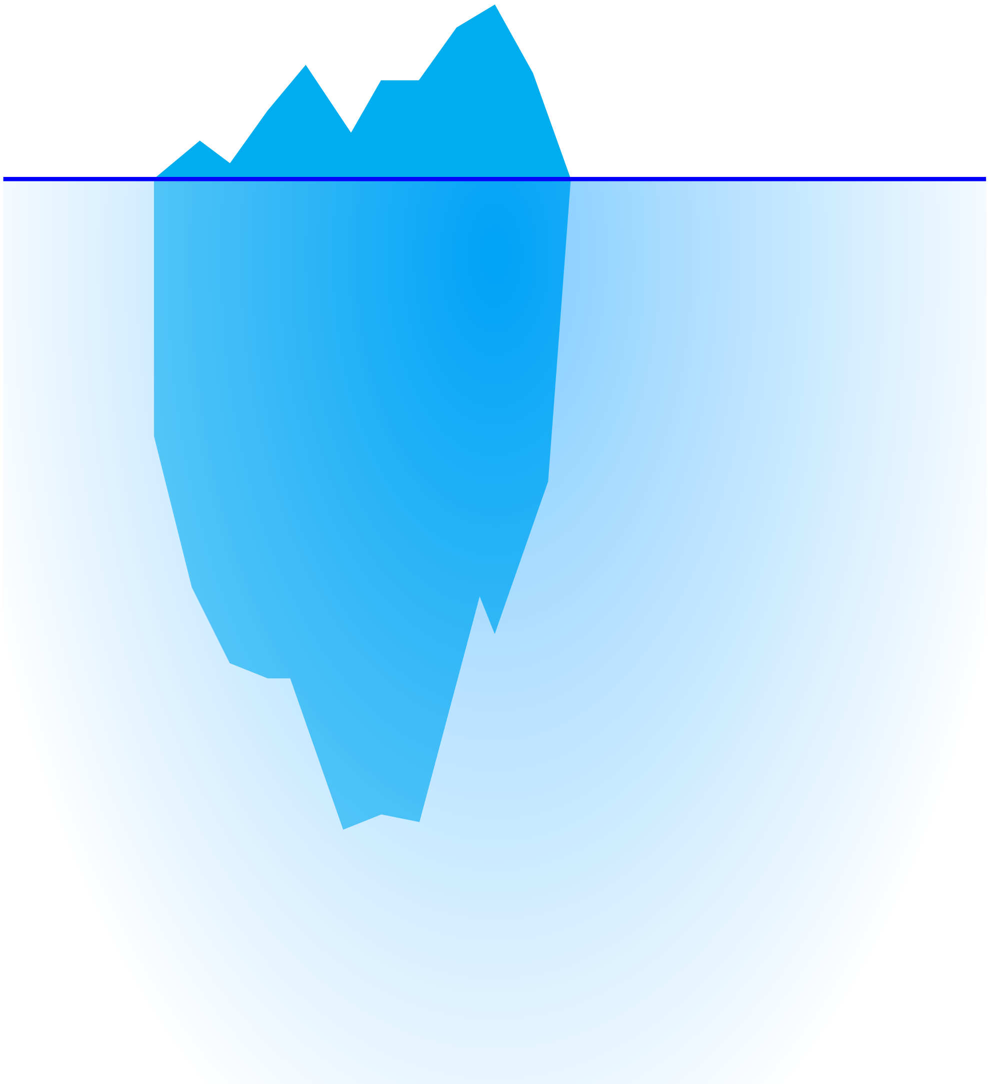


Statica dei Fluidi

Andrea Crespi

1 Definizioni introduttive

È noto dalla quotidiana osservazione della realtà che la materia possa trovarsi in tre distinti stati di aggregazione: *solido*, *liquido* o *aeriforme*. Una distinzione semplice tra i tre stati, per quanto abbastanza idealizzata, può essere fatta a seconda della possibilità, o meno, di operare cambiamenti di forma o di volume su una certa porzione di materia (vedi Tabella 1).

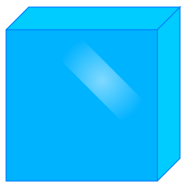
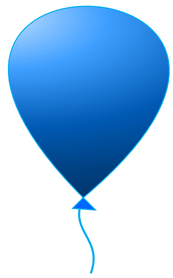
	Solido	Liquido	Aeriforme
			
Volume proprio	SÌ	SÌ	NO
Forma propria	SÌ	NO	NO

Tabella 1: Tabella delle proprietà distintive degli stati di aggregazione della materia.

Almeno in prima approssimazione e se non è sottoposto a forze eccessive, un solido può essere considerato come un *corpo rigido* dotato sia di una *forma propria* che di un *volume proprio*. In altre parole, può essere considerato come un sistema di numerosissimi punti materiali (i suoi atomi o molecole costituenti) con forti vincoli reciproci, tali per cui essi mantengono in ogni caso la loro posizione relativa. Se si esercita una forza anche su uno solo di questi punti, questa forza si trasmette in qualche modo a tutto il corpo in virtù della sua rigidità (ovvero delle forze che legano i punti gli uni agli altri). Il corpo non si deforma, ma può eventualmente traslare o ruotare, in accordo con le Equazioni Cardinali della Dinamica.

È ben evidente come un *liquido* abbia un comportamento molto diverso. Applicando una forza a un punto di un liquido (pensiamo di toccare con un bastoncino la superficie dell'acqua in una bacinella), quel punto o porzione su cui agiamo si sposta e scivola sulle altre vicine senza praticamente opporre resistenza. Possiamo anche mutare la forma del liquido cambiando o deformando il recipiente che lo contiene, ma non è possibile modificarne il volume. Possiamo pensare ad esempio a una bottiglia di plastica leggera; se è vuota può essere schiacciata facilmente, mentre se è piena d'acqua non riusciamo a comprimerla. Perciò, si dice idealmente che un liquido ha un volume proprio, ma non ha forma propria.

Un caso ancora diverso è quello degli *aeriformi* (gas o vapori), in cui i diversi punti materiali hanno un legame reciproco molto debole. È possibile cambiare forma e volume di una data porzione di materia agendo adeguatamente con delle forze sulla superficie che la racchiude, o non agendo con alcuna forza e dunque lasciandola espandere fino a riempire tutto lo spazio disponibile. Un aeriforme non ha né volume né forma propri.

Si dicono **fluidi** quei sistemi che non hanno una forma propria e i cui punti materiali costituenti possono scorrere gli uni sugli altri in modo continuo. Sono fluidi, perciò, i liquidi e gli aeriformi. Nel seguito ci riferiremo in particolare ai **liquidi perfetti**, definiti come segue.

Liquidi perfetti

- *fluidi*: non hanno forma propria
- *incomprimibili e indilatabili*: hanno volume proprio
- *non viscosi*: i punti materiali che lo compongono possono scorrere gli uni sugli altri liberamente senza alcun attrito

Anche quello di *liquido perfetto* è un modello **ideale**, che approssima bene il comportamento di molti liquidi, ma non corrisponde alla descrizione precisa di alcun liquido reale. I liquidi reali, infatti, avranno sempre una certa viscosità (cioè attrito interno nel fluire) e una certa comprimibilità (per quanto molto piccola).
Un fluido è un sistema contenente moltissime particelle dotate di massa, ciascuna delle quali segue necessariamente le leggi della Meccanica Newtoniana. Dato il loro elevatissimo numero, non è possibile (e nemmeno interessante) risolvere le equazioni per le singole particelle; se ne tratteranno invece equazioni complessive, che derivano dalla Dinamica dei Sistemi.

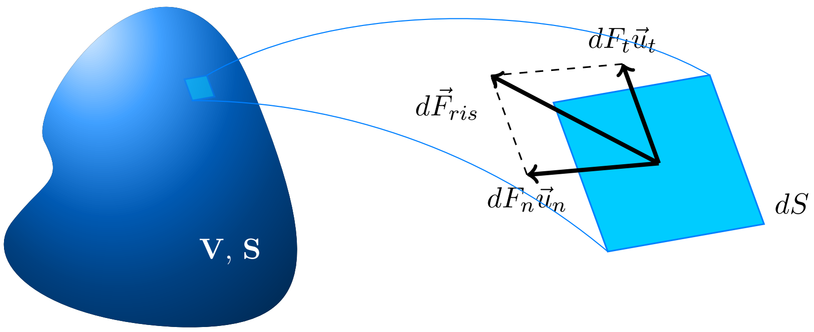


Figura 1: Forze agenti sull'elemento di superficie dS: si usa scomporre la risultante nelle sue componenti normale e tangente.

2 Forze di volume e superficie

Consideriamo una porzione di fluido, avente un certo volume V e racchiusa in una superficie S. La superficie può essere fisica e reale o può essere solamente la frontiera immaginaria che delimita il volume V scelto. Si usa distinguere le forze agenti su questa porzione di fluido in **forze di volume** e **forze di superficie**.

- **forze di volume**: sono forze con azione a distanza (gravitazionale, elettrica, magnetica. . .) o forze apparenti (se si adottano sistemi di riferimento non inerziali). Esse agiscono su ogni punto del fluido in virtù del fatto che ha una massa, una carica elettrica o un'altra proprietà fisica.
- **forze di superficie**: sono forze di contatto, esercitate sulla porzione di fluido in esame attraverso la superficie che la racchiude. Possono essere esercitate dalla parete di un recipiente piuttosto che da un altro tipo di diaframma fisico, oppure dalle porzioni stesse di fluido circostanti.

Dato un elemento di superficie dS, con il suo versore normale $\vec{u}_n$, è utile scomporre la risultante delle forze applicate $d\vec{F}_{ris}$ secondo le due componenti parallela e ortogonale a $\vec{u}_n$ come in Figura 1.

$$d\vec{F}_{ris} = dF_n\vec{u}_n + dF_t\vec{u}_t \tag{2-1}$$

Riquadro 1 - Unità di misura

La *pressione* e lo *sforzo di taglio* sono **forze per unità di superficie**. Entrambi hanno dunque dimensioni:

$$[F]\,[S]^{-1} = ([M]\,[L]\,[T]^{-2})\,[L]^{-2} = [M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-2}$$

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della pressione e dello sforzo di taglio è il **Pascal** (abbreviato Pa):

$$\boxed{1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}}$$

Altre unità di misura per queste grandezze, usate più in particolare per la pressione, sono:

il *bar*	1 bar = 10^5 Pa
l'*atmosfera*	1 atm = 1.01325 bar = 101325 Pa
il *millimetro di mercurio* o *torr*	1 mmHg = 1 torr = 1/760 atm $\simeq$ 133.3 Pa

La due componenti, divise per la superficie dS, sono dette rispettivamente *pressione* e *sforzo di taglio*. Nel Sistema Internazionale l'unità di misura impiegata per queste grandezze è il Pascal, definito come 1 Pa = 1 N/m^2 (vedi anche Riquadro 1).

Pressione

$$p = \lim_{S \to 0} \frac{F_n}{S} = \frac{dF_n}{dS} \tag{2-2}$$

Si può mostrare (vedi Riquadro 2) che **la pressione in un dato punto di un fluido non dipende dall'orientazione della superficie considerata**. Infatti, a ragione essa è una grandezza puramente scalare.

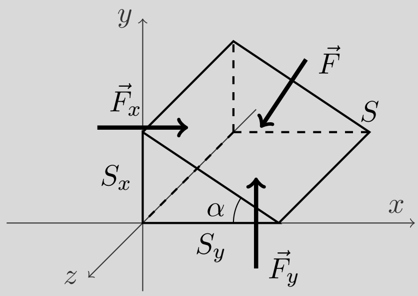
Sforzo di taglio

$$\vec{T} = \lim_{S \to 0} \frac{F_t}{S} \vec{u}_t = \frac{dF_t}{dS} \vec{u}_t \tag{2-3}$$

Gli sforzi di taglio rappresentano le forze di attrito tra porzioni adiacenti di fluido. Si hanno sforzi di taglio non nulli solo in fluidi *viscosi* (con attriti interni) e *in movimento*. **Gli sforzi di taglio sono invece nulli**:

- in condizioni *statiche*, per ogni tipo di fluido, se il fluido è fermo;
- in ogni condizione, nei *liquidi perfetti*, per la totale assenza di attriti interni.

Riquadro 2 - Teorema di isotropia della pressione



Consideriamo un elemento di fluido in equilibrio, di forma prismatica come in figura, e valutiamo le forze agenti su di esso. Saranno forze di volume, proporzionali al cubo delle dimensioni lineari del prisma, e forze di superficie, proporzionali al quadrato delle dimensioni lineari. Se prendiamo un prisma molto piccolo (ovvero facciamo tendere a zero le dimensioni lineari), le forze di volume diventano trascurabili rispetto a quelle di superficie, e possiamo considerare solo queste ultime.
Siamo inoltre in un caso statico, quindi non ci sono sforzi di taglio e le forze di superficie sono ortogonali alle superfici stesse. Poiché l'elemento di fluido è in equilibrio, le forze di superficie dovranno dare una risultante nulla:

$$\vec{F}_{ris} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F} = 0 \tag{2-4}$$

Non abbiamo incluso le forze agenti sulle facce triangolari, poiché sono uguali e opposte per simmetria.
Scrivendo la (2-4) scomposta sugli assi cartesiani, si ottiene:

$$F_x = F \sin\alpha \qquad F_y = F \cos\alpha \tag{2-5}$$

Le superfici delle facce del prisma invece sono geometricamente legate dalle relazioni:

$$S_x = S \sin\alpha \qquad S_y = S \cos\alpha \tag{2-6}$$

Calcolando ora le pressioni sulle tre facce rettangolari:

$$p = \frac{F}{S} \qquad p_x = \frac{F_x}{S_x} = \frac{F \sin\alpha}{S \sin\alpha} = p \qquad p_y = \frac{F_y}{S_y} = \frac{F \cos\alpha}{S \cos\alpha} = p \tag{2-7}$$

È perciò dimostrato che la pressione è identica sulle facce del prisma e non dipende dall'orientazione della superficie presa. La pressione può essere considerata una funzione della sola posizione, ovvero una proprietà di *ciascun punto* del fluido.

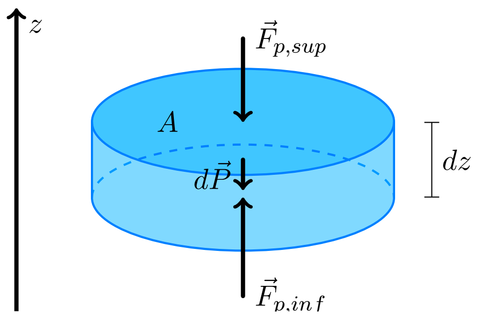


Figura 2: Porzione di fluido delimitata da una superficie cilindrica di altezza dZ e base A. $\vec{F}_{p,sup}$ e $\vec{F}_{p,inf}$ sono le forze di pressione agenti sulle basi superiore e inferiore rispettivamente; $d\vec{P}$ è la forza peso applicata alla porzione di fluido. Le forze di pressione agenti sulla superficie laterale si bilanciano per simmetria e non sono rappresentate.

3 L'equazione della statica

Studiamo ora più in dettaglio la condizione di equilibrio meccanico di un fluido sottoposto a forze esterne, cercando di individuare la relazione che deve esistere tra le forze di superficie e le forze di volume, affinché tale equilibrio possa sussistere. In particolare, consideriamo il caso di un fluido di densità ρ sottoposto all'azione della forza peso (ogni unità di massa di fluido subisce una forza $\rho\vec{g}$).
Fissiamo un sistema di riferimento con l'asse z avente la stessa direzione dell'accelerazione di gravità, ma verso opposto. In tal caso l'accelerazione di gravità si scrive $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Ci concentriamo, all'interno del fluido in equilibrio, sulla porzione di esso racchiusa dal cilindretto rappresentato in Figura 2, avente le direttrici parallele a $\vec{u}_z$. Il cilindretto ha base di area A e altezza infinitesima dz. Sottolineiamo che la superficie cilindrica che stiamo considerando è fittizia e semplicemente rappresenta la frontiera che racchiude la porzione (cilindrica) di fluido in esame.
Al fine di imporre l'equilibrio meccanico, valutiamo tutte le forze a cui è sottoposta questa porzione infinitesima di fluido:

- la **forza peso**, proporzionale alla massa dm della porzione infinitesima di fluido:
$$d\vec{P} = dm\,\vec{g} = \rho\, dV \vec{g} = -\rho A\, dz\, g\, \vec{u}_z$$
dove abbiamo sostituito l'espressione del volume infinitesimo del cilindretto $dV = A\,dz$;

- le **forze di pressione sulla superficie laterale** del cilindro: queste si annullano vicendevolmente per la simmetria cilindrica del sistema rispetto all'asse z;

- le **forze di pressione sulle superfici di base**: la pressione può essere scritta come funzione di z; perciò, le forze agenti rispettivamente sulla superficie inferiore (posta a quota z) e sulla superficie superiore (posta a quota $z + dz$) si possono scrivere come
$$\vec{F}_{p,inf} = p(z) A\,\vec{u}_z \qquad \vec{F}_{p,sup} = -p(z+dz) A\,\vec{u}_z$$

Non sussistono sforzi di taglio in quanto il sistema è per definizione in equilibrio statico.
Poiché il volume di fluido considerato è in equilibrio, la risultante delle forze agenti su di esso deve essere nulla:

$$\vec{F}_{ris} = d\vec{P} + \vec{F}_{p,inf} + \vec{F}_{p,sup} = -\rho A\, dz\, g\vec{u}_z + p(z) A\,\vec{u}_z - p(z+dz) A\,\vec{u}_z = 0 \tag{3-1}$$

Questa è un'equazione vettoriale, ma tutti i vettori presenti sono diretti come z; possiamo allora riscriverla in forma scalare, semplificando l'area A:

$$-\rho g\, dz + p(z) - p(z+dz) = 0 \tag{3-2}$$
$$\frac{p(z+dz) - p(z)}{dz} = -\rho g \tag{3-3}$$

Ora, la scrittura $\frac{p(z+dz)-p(z)}{dz}$ non è altro che la derivata di p rispetto a z (dz è inteso come tendente a zero, essendo infinitesimo). Possiamo allora scrivere l'**Equazione della statica** dei fluidi pesanti nella forma:

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g} \tag{3-4}$$

La (3-4) mostra che la pressione in un fluido sottposto alla forza peso in generale non è uniforme, ma decresce al crescere di z (che è un asse rivolto verso l'alto), ovvero cresce all'aumentare della profondità.
In presenza di forze di volume diverse, o da aggiungersi oltre alla forza peso, che danno per unità di massa una risultante $\vec{H} = H\vec{u}_H$, possiamo generalizzare la (3-4) come:

$$\frac{dp}{dh} = H \tag{3-5}$$

essendo h la coordinata di un asse allineato come $\vec{u}_H$, il versore di $\vec{H}$. Il campo $\vec{H}$ e il versore corrispondente potrebbero anche variare da punto a punto. Usando il concetto di *gradiente*, si può più sinteticamente scrivere:

$$\boxed{\nabla p = \vec{H}} \tag{3-6}$$

4 La legge di Stevino

La Legge della Statica, così come è stata ricavata, vale per un fluido generico, liquido o aeriforme. Vediamo ora le conseguenze più particolari di questa legge per un liquido, ovvero per un fluido assunto come incomprimibile. Integriamo la (3-4) tra due quote arbitrarie, z_1 e z_2, all'interno di un certo volume di liquido. Data l'incomprimibilità possiamo considerare ρ come una costante e abbiamo:

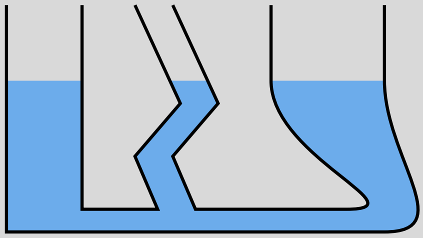
$$p(z_2) - p(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dp}{dz}\, dz = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g\, dz = (z_1 - z_2)\rho g \tag{4-1}$$

Questa espressione ci mostra come la pressione dipenda solo dalla quota z e, più in particolare, come la differenza di pressione tra due punti sia direttamente proporzionale alla differenza di quota.
È interessante riscrivere la (4-1) considerando come z_1 la quota della superficie libera del liquido, a cui è presente una pressione $p(z_1) = p_0$ data ad esempio dall'atmosfera sovrastante, e come z_2 la quota di una profondità arbitraria h, per cui $z_1 - z_2 = h$. Si ottiene:

$$\boxed{p(h) = p_0 + \rho g h} \tag{4-2}$$

Questa relazione prende il nome di **Legge di Stevino** e permette di ricavare la pressione presente a una certa profondità di liquido. Il termine $\rho g h$ è detto *pressione idrostatica*.
Osservando ancora la relazione (4-1) possiamo notare che essa fornisce solo il valore della *differenza* di pressione tra due punti. Infatti, per scrivere la (4-2), che dà la pressione in termini assoluti, abbiamo dovuto imporre la pressione p_0 sulla superficie. Questo significa anche che *un incremento di pressione esercitato in un punto di un liquido si trasferisce identicamente su tutto il liquido* (legge nota anche come **Principio di Pascal**). Più in dettaglio, se si aumenta la pressione di un liquido in un punto di un contributo Δp, allora in tutti gli altri punti del liquido la pressione aumenta di Δp.
Il Principio di Pascal vale in realtà più in generale per tutti i fluidi, e non solo per i liquidi incomprimibili, perché è dovuto proprio alla forma dell'Equazione della Statica. L'Equazione della Statica vincola infatti la *derivata* e quindi la *differenza infinitesima di pressione* tra due punti, ma non dà vincoli sulla pressione assoluta.

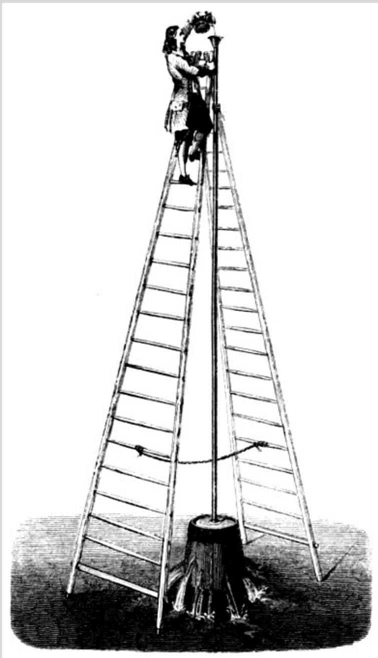
Riquadro 3 - La legge dei vasi comunicanti



Una conseguenza dell'Equazione della Statica e della Legge di Stevino è la **Legge dei vasi comunicanti**: *se recipienti di diversa forma e dimensione sono riempiti con il medesimo liquido e sono posti in comunicazione, il livello del liquido sarà lo stesso in ciascun recipiente.* Come già discusso, infatti, la pressione di un liquido incomprimibile sottoposto alla forza peso dipende solo dalla quota z. Alla quota del passaggio di comunicazione tra due recipienti la pressione deve avere un unico valore.
D'altra parte, dalla (4-2) vediamo che la pressione dipende solo dall'altezza del liquido sovrastante. Quindi in ciascuno dei recipienti comunicanti deve esserci, sopra alla quota del passaggio, la stessa altezza di liquido.

Riquadro 4 - Il paradosso idrostatico e la botte di Pascal

In accordo con la Legge di Stevino, la pressione statica di un liquido a una certa quota z dipende dalla *sola* altezza del liquido sovrastante e non dal suo volume. Questo può avere conseguenze all'apparenza paradossali, tanto che alcune situazioni sono denominate **paradosso idrostatico**. Si consideri l'esperimento rappresentato nella figura qui a fianco, attribuito a Blaise Pascal che lo ideò a metà del '600. Una botte è riempita d'acqua tramite un tubo stretto e molto lungo, posto al di sopra. Quando la botte è piena e si riempie totalmente anche il tubo, la pressione alla base diventa sufficiente a rompere la botte. Notiamo che, essendo il tubo molto stretto, il volume (e di conseguenza la massa) dell'acqua in esso contenuta è piuttosto piccolo. La pressione alla base della botte dipende tuttavia *solamente* dalla quota del pelo libero superiore: poiché il tubo è molto alto si può raggiungere una pressione così elevata da rompere il recipiente.



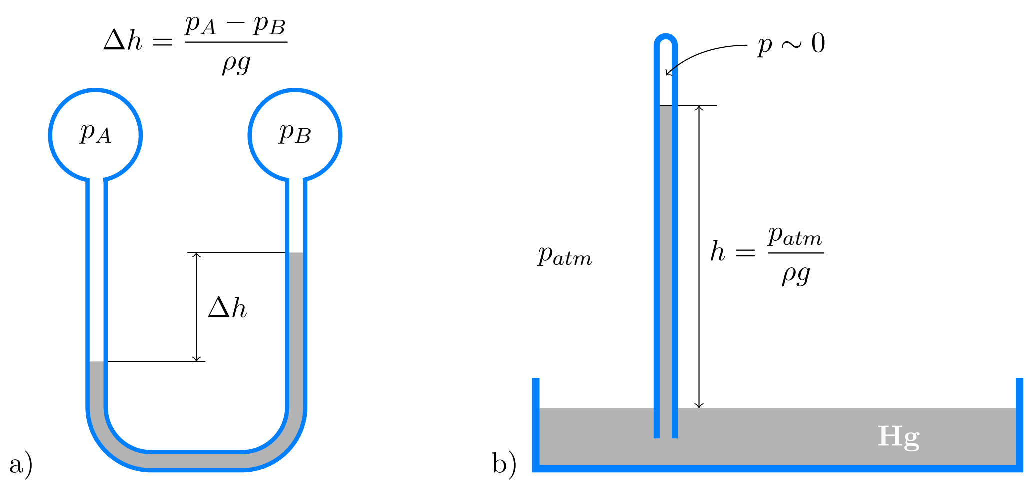


Figura 3: Schema di un manometro a mercurio (a) e del barometro di Torricelli (b).

5 Misura della pressione

La Legge di Stevino può suggerire delle modalità sperimentali per la misura della pressione, o meglio delle differenze di pressione. Si consideri un tubo di vetro piegato a U, contenente una certa quantità di mercurio e con le estremità messe in comunicazione con recipienti a pressione diversa come in Figura 3a. Applicando lo stesso ragionamento fatto per i vasi comunicanti (Riquadro 3) scriviamo la pressione alla base della U: $\rho g h_A + p_A = \rho g h_B + p_B$. La differenza tra le pressioni può essere ricavata facilmente in funzione della differenza fra le altezze: $\Delta p = p_A - p_B = (h_B - h_A)\,\rho g = \Delta h\,\rho g$. Uno strumento siffatto è detto **manometro a mercurio**; l'impiego del mercurio, piuttosto che altri liquidi come l'acqua, è dovuto alla sua elevata densità ($\rho = 13.6 \cdot 10^3$ kg/m^3).

Evangelista Torricelli nel 1644 impiegò lo stesso principio di funzionamento per dimostrare l'esistenza della *pressione atmosferica* e fornirne una misura quantitativa. Torricelli riempì di mercurio un tubo di vetro, tappato a un'estremità, di circa un metro di lunghezza; lo capovolse quindi in una bacinella contenente mercurio (vedi Figura 3b). Osservò che il mercurio nel tubo scendeva di livello, ma senza svuotarsi del tutto, assestandosi a una altezza $h \sim 760$ mm rispetto alla superficie del liquido nella bacinella. La spiegazione di quanto osservato è che nella parte superiore del tubo si è creato il vuoto (con buona approssimazione) e agisce una pressione nulla, mentre sulla superficie del mercurio nella bacinella agisce la pressione atmosferica p_{atm}; la colonna di mercurio nel tubo fornisce, alla sua base, una pressione tale da bilanciare la pressione atmosferica. Conoscendo l'accelerazione di gravità e la densità del mercurio, è possibile ricavare il valore della pressione atmosferica dalla misura dell'altezza h; infatti, scrivendo la legge di Stevino, $p_{atm} = \rho g h$. Ripetendo le misure nel tempo, Torricelli e gli scienziati suoi contemporanei scoprirono inoltre che la pressione atmosferica varia a seconda delle condizioni meteorologiche, e diminuisce con l'altitudine.

Uno strumento che funziona in questo modo è detto **barometro di Torricelli**. L'importanza storica di questo esperimento, così come di questa modalità di misura della pressione, è tale che il *millimetro di mercurio* (mmHg) costituisce una unità di misura della pressione ancora oggi spesso impiegata (ad esempio dai medici per quantificare la pressione sanguigna), anche se non fa parte del Sistema Internazionale. 1 mmHg corrisponde alla pressione incrementale che fa innalzare di un millimetro il livello della colonna di mercurio (vedi anche il Riquadro 1).

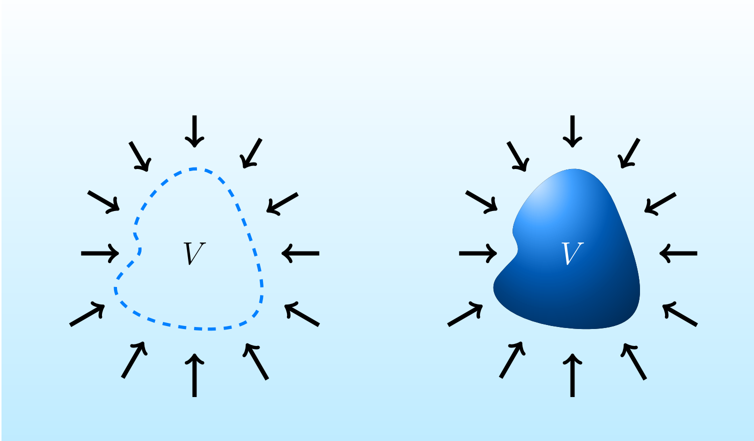


Figura 4: Osservazione alla base della Legge di Archimede: le forze di superficie, ovvero le forze di pressione, agenti su un corpo di volume V immerso in un fluido, sono le stesse che si avrebbero sul corrispondente volume di fluido omogeneo in assenza del corpo.

6 La Legge di Archimede

Ci proponiamo ora di studiare meglio le forze che un fluido di densità ρ esercita su un corpo immerso in esso. Consideriamo a tal proposito un oggetto di forma qualsiasi, immerso in un fluido, e identifichiamo il volume V che esso occupa e la superficie S che delimita questo volume V.

Il fluido può agire su questo oggetto solo tramite forze *di superficie*. Se il fluido presenta attriti interni trascurabili, queste forze saranno solamente forze di *pressione*, come già discusso. Più precisamente, possiamo dire che studiare le forze che il fluido esercita sul corpo equivale a valutare la **risultante delle forze di pressione**. Tale risultante si ricava in realtà molto facilmente.

Pensiamo di sostituire al corpo immerso un uguale volume V (con la stessa forma e la stessa superficie di delimitazione S) ma costituito dello stesso fluido in cui è immerso. In pratica stiamo considerando una situazione in cui l'oggetto immerso non c'è più e c'è unicamente il fluido: la superficie S è puramente fittizia per delimitare il volume V. È chiaro che questa sarebbe una situazione di perfetto equilibrio meccanico: il volume di fluido considerato non avrebbe ragione di spostarsi verso il basso affondando o verso l'alto dirigendosi verso la superficie. Questo significa che la risultante di *tutte* le forze agenti sul volume V è nulla. Le forze agenti sono la risultante delle forze di pressione, che agiscono sulla superficie S, e la forza peso, dovuta alla massa della porzione di fluido considerata:

$$\vec{F}_p + \vec{P} = 0 \tag{6-1}$$

ma

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g} \tag{6-2}$$

dunque:

$$\vec{F}_p = -\rho V \vec{g} \tag{6-3}$$

La risultante delle forze di pressione è uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso, alla forza peso della massa di fluido.

Le forze di pressione non dipendono da cosa c'è *dentro* alla superficie S, ma solo da come è fatta la superficie. Dunque, la risultante delle forze di pressione, calcolata per il caso del volume V uniformemente riempito di fluido, deve essere la stessa del caso in cui a occupare il volume V sia l'oggetto immerso considerato all'inizio (Figura 4). È dimostrata allora la cosiddetta **Legge di Archimede**, solitamente formulata come segue:

> *Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta $\vec{F}_A$ verso l'alto pari al peso del fluido spostato:*
>
> $$\boxed{\vec{F}_A = -\rho V_{imm.}\vec{g}} \tag{6-4}$$
>
> *essendo ρ la densità del fluido, $V_{imm.}$ il volume immerso e $\vec{g}$ l'accelerazione di gravità.*

La *spinta verso l'alto* è proprio questa risultante delle forze di pressione, che è in modulo pari al peso del fluido che occuperebbe il volume V, ovvero il fluido che è stato "spostato" nell'immergere il corpo. Essa è detta *spinta idrostatica* (soprattutto nel caso in cui il fluido sia acqua) o *spinta di Archimede.* Quanto enunciato è valido anche per un corpo parzialmente immerso in un fluido: bisogna considerare allora il solo volume del *fluido spostato*, cioè solo la parte di volume del corpo che si trova al di sotto del livello della superficie del fluido.
Un corpo immerso in un fluido è in generale soggetto anche ad altre forze, in particolare alla sua forza peso. L'equilibrio tra la forza di Archimede e le altre forze regola il galleggiamento dei corpi. Un corpo galleggia quando è immerso per una parte sufficiente a far sì che la spinta di Archimede (proporzionale al peso di fluido corrispondente al volume immerso) bilanci il peso del corpo. Un corpo affonda inesorabilmente, invece, nel caso in cui il suo peso sia comunque superiore alla spinta di Archimede ottenuta quando esso è completamente immerso. Se consideriamo un corpo di volume V costituito da un materiale omogeneo di densità ρ_C, possiamo imporre la condizione di galleggiamento come segue:

$$P \leq F_{A,max} \qquad \rightarrow \qquad \rho_C V g \leq \rho V g \qquad \rightarrow \qquad \rho_C \leq \rho \tag{6-5}$$

dove abbiamo considerato che il peso del corpo è in modulo pari a $P = \rho_C V g$ e la spinta massima di Archimede, quando esso è completamente immerso, è in modulo pari a $F_{A,max} = \rho V g$. Un corpo dunque galleggia se la sua densità è inferiore alla densità del liquido in cui è immerso.
Nello studio del galleggiamento dei corpi occorre infine considerare anche il **punto di applicazione** della spinta idrostatica. Dal ragionamento condotto sopra per dimostrare la Legge di Archimede si può evincere che il punto di applicazione della spinta è il *baricentro della massa di fluido spostata.* È importante sottolineare che, in generale, questo non coincide con il baricentro del corpo immerso. Una condizione necessaria per l'equilibrio di galleggiamento è che il corpo galleggiante si orienti in modo tale che il suo baricentro (punto di applicazione della forza peso) e il baricentro del fluido spostato (punto di applicazione della spinta di Archimede) si trovino sulla stessa retta verticale: in questa situazione daranno infatti un momento risultante nullo.

Appendice: Cenni di dinamica dei fluidi

Descrivere il moto di un fluido è un problema non semplice. Un fluido è un sistema meccanico composto da moltissime particelle, ciascuna sottoposta a forze di interazione a breve distanza con le particelle vicine o con le pareti di un recipiente, e a forze di interazione a grande distanza quali la forza peso. Anche per il problema dinamico è possibile trattare grandezze collettive di alcune porzioni ben individuate di fluido, invece delle posizioni e delle velocità di ciascuna particella; tuttavia, stabilire il moto di un fluido date le interazioni in gioco rimane un problema tutt'altro che banale.
In questa appendice ci limiteremo a studiare, all'interno di approssimazioni ben definite, un unico problema: quello di un **liquido perfetto che scorre in un condotto, in regime stazionario**. È questo un interessante esempio, molto semplice, ma di grande utilità per le applicazioni.
Anzitutto, si definisce regime di **moto stazionario** una situazione in cui la velocità delle particelle di fluido (così come le altre quantità collettive che descrivono il fluido stesso) *non dipendono dal tempo.* Possono dipendere però, ad esempio, dalla posizione nello spazio. È un esempio di moto stazionario di un fluido quello dell'acqua che fluisce nelle condotte di casa, quando un rubinetto è lasciato aperto con la manopola in una data posizione.
Qui studiamo il moto stazionario di un fluido in un condotto che può avere una sezione di forma arbitraria, anche variabile lungo il percorso. Inoltre, i vari tratti di condotto possono trovarsi ad altezze differenti dal suolo. Facciamo in particolare le seguenti approssimazioni:

- Sono trascurabili tutti gli attriti e le altre forze dissipative, sia relative tra particelle dello stesso fluido, sia tra il fluido e l'esterno (ad es. le pareti del tubo). Questa condizione è in realtà contenuta nell'ipotesi di liquido perfetto (cfr. Sez. 1).

- In ciascuna sezione del condotto, la velocità v e la pressione p del fluido sono uniformi in tutti i punti. Dipenderanno quindi solo dalla sezione scelta e, in generale, potranno essere diversi da una sezione all'altra. Si assumerà inoltre che tutti i punti di una stessa sezione abbiano la stessa energia potenziale della forza peso; in altre parole, le differenze di altezza h all'interno della stessa sezione sono trascurabili. Queste approssimazioni indicano di fatto che la sezione del condotto non è mai troppo grande.

Consideriamo ora un tratto definito di condotto, delimitato da una sezione S_1 (posta ad altezza h_1) e una sezione S_2 (posta ad altezza h_2), in due istanti di tempo t e $t + dt$ appena successivi (vedi Figura 5). Si può dire che nell'intervallo infinitesimo dt sia entrato nel tubo un volume dV_1 di fluido dalla parte della sezione S_1 e sia uscito un pari volume dV_2 dalla parte della sezione S_2. Essendo in regime stazionario, la quantità di fluido contenuto nel tubo non deve variare nel tempo, quindi:

$$dV_1 = dV_2 = dV = dm/\rho \tag{A-1}$$

dove ρ è la densità del fluido e dm la massa infinitesima entrata e uscita. Osserviamo che la densità del fluido ρ è una costante, avendo assunto il liquido *perfetto* e quindi *incomprimibile.*
Potremmo anche scrivere i volumetti dV_1 e dV_2 come $dV_1 = S_1\, dx_1$ e $dV_2 = S_2\, dx_2$ (vedi Fig. 5). Poiché in un tempo dt il volumetto dV_1 attraversa (entrando) la sezione S_1 e il volumetto dV_2 attraversa (uscendo) la sezione S_2, si ha anche $dx_1 = v_1 dt$ e $dx_2 = v_2 dt$. Sostituendo queste relazioni in (A-1) e dividendo per dt si ottiene:

$$\frac{dV_1}{dt} = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \frac{dV_2}{dt} \tag{A-2}$$

Vista l'arbitrarietà con cui sono state scelte le sezioni S_1 ed S_2 si può affermare che la quantità $S \cdot v$, o più in generale la quantità $\frac{dV}{dt}$, sia costante lungo il condotto. Ciò significa che nei punti dove il condotto ha una sezione inferiore la velocità del fluido aumenterà, mentre nei punti in cui il condotto è più largo si avrà una velocità più bassa.
La quantità $\frac{dV}{dt}$ ovvero il volume di fluido che attraversa una data sezione S nell'unità di tempo si definisce **portata** (più precisamente, *portata volumetrica*) e si indica con Q. Come mostrato, per un

fluido che scorre in un condotto, Q è costante e non dipende dalla sezione, se il moto è stazionario.

$$\boxed{Q = Sv = cost.} \tag{A-3}$$

Proseguiamo ora il nostro studio applicando considerazioni energetiche. Scriviamo l'energia meccanica totale del sistema costituito dal fluido contenuto nel tubo. con l'aggiunta del volume dV. Inizialmente, all'istante t:

$$E_1 = E_V + dm\, gh_1 + \frac{1}{2}\, dm\, v_1^2 = E_V + \rho dV\, gh_1 + \rho dV \frac{1}{2} v_1^2 \tag{A-4}$$

dove E_V è l'energia meccanica di tutto il fluido contenuto tra le sezioni S_1 ed S_2, $\rho dV\, gh_1$ è l'energia potenziale della forza peso del volume dV_1 appena prima di entrare attraverso la sezione S_1, $\rho dV \frac{1}{2} v_1^2$ è la sua energia cinetica.
Per il tempo $t + dt$ scriviamo invece:

$$E_2 = E_V + \rho dV\, gh_2 + \rho dV \frac{1}{2} v_2^2 \tag{A-5}$$

infatti l'energia meccanica contenuta tra le sezioni S_1 ed S_2 non può mutare (essendo il condotto in regime stazionario). Il sistema che avevamo scelto di considerare è ora però composto dal fluido tra S_1 ed S_2 più il volume dV che ha appena attraversato S_2, quindi si trova ad altezza h_2 ed ha velocità v_2.
Tra questi due istanti di tempo, la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze esterne che hanno agito sul sistema:

$$E_2 - E_1 = \delta\mathcal{L}_{est} \tag{A-6}$$

In particolare, hanno agito forze di pressione sia sul volumetto dV_1 mentre attraversa la sezione S_1, sia sul volumetto dV_2 che attraversa la sezione S_2:

$$F_{p,1} = p_1 S_1 \qquad F_{p,2} = p_2 S_2 \tag{A-7}$$

Tali forze hanno svolto lavoro rispettivamente sul cammino $dx_1 = v_1\, dt$ concordemente al verso dello spostamento e sul cammino $dx_2 = v_2 dt$ con verso opposto. Il lavoro si calcola dunque come:

$$\delta\mathcal{L}_{est} = \delta\mathcal{L}_p = \delta\mathcal{L}_{p,1} + \delta\mathcal{L}_{p,2} = p_1 S_1 dx_1 - p_2 S_2 dx_2 \tag{A-8}$$

Osserviamo che $S_1 dx_1 = dV_1 = dV$ e $S_2 dx_2 = dV_2 = dV$, da cui:

$$\delta\mathcal{L}_p = (p_1 - p_2)\, dV \tag{A-9}$$

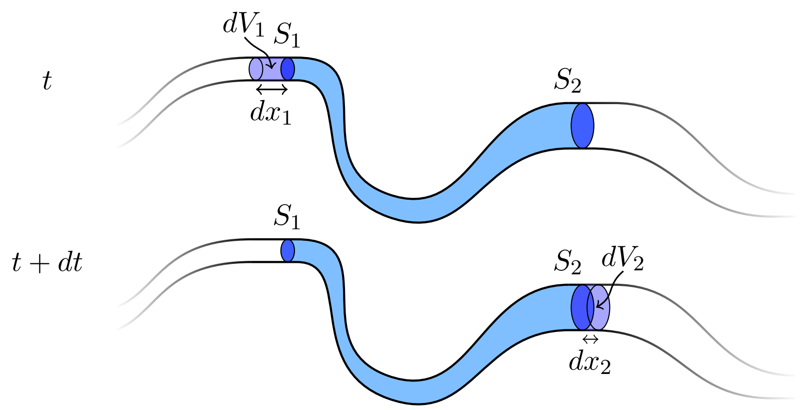


Figura 5: Condotto contenente un fluido in moto stazionario. Scelte due sezioni arbitrarie S_1 e S_2, si studia l'evoluzione tra il tempo t e il tempo $t + dt$, in cui un volumetto di fluido dV_1 attraversa la sezione S_1 e un volumetto dV_2 attraversa la sezione S_2.

Possiamo ora scrivere la (A-6) come:

$$E_2 - E_1 = E_V + \rho dV\, gh_2 + \rho dV \frac{1}{2} v_2^2 - E_V - \rho dV\, gh_1 - \frac{1}{2}\rho dV\, v_1^2 = (p_1 - p_2)\, dV = \delta\mathcal{L}_{est} \qquad \text{(A-10)}$$

$$\rho dV\, gh_2 + \rho dV \frac{1}{2} v_2^2 + p_2 dV = \rho dV\, gh_1 + \rho dV \frac{1}{2} v_1^2 + p_1 dV \qquad \text{(A-11)}$$

$$p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \qquad \text{(A-12)}$$

Vista l'arbitrarietà con cui sono state scelte le sezioni S_1 ed S_2 ciò significa che ovunque lungo il condotto vale la relazione:

$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2 = cost.} \qquad \text{(A-13)}$$

che prende il nome di **Teorema di Bernoulli**.
La (A-13) è un risultato di fondamentale importanza nella Dinamica dei Fluidi. In particolare, ci indica che al variare della velocità di un fluido (come può essere in conseguenza della variazione di sezione di un condotto, vedi la (A-2)), varia anche la pressione. A un aumento di velocità del fluido corrisponde una diminuzione di pressione, a una diminuzione di velocità un suo aumento.