Sorgenti coerenti e incoerenti

Consideriamo due onde piane con $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ che si propagano nello stesso mezzo ($k_1 = k_2$)

$$E_1 = E_{o1}\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1 - \varphi_1)} = E_{o1}\; e^{i\omega t}\; e^{-i\phi_1}$$

$$E_2 = E_{o2}\; e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2 - \varphi_2)} = E_{o2}\; e^{i\omega t}\; e^{-i\phi_2}$$

dove: $\phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi$

Il campo totale risulta:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

e l'intensità:

$$I \propto \left|\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\right|^2 = E_{o1}{}^2 + E_{o2}{}^2 + 2E_{o1}E_{o2}\cos(\phi_2 - \phi_1)$$

- Se **$(\phi_2 - \phi_1) = cost$** nel tempo in ogni punto, le **sorgenti** sono **coerenti**:
  - l'intensità è modulata dalla fase (**Interferenza**), che varia con la posizione.
  - l'intensità totale è proporzionale al modulo quadro della somma dei campi.

$$I \propto \left|\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\right|^2$$

- Se **$(\phi_2 - \phi_1) \neq cost$**, le **sorgenti** sono **incoerenti**:
  - l'intensità totale è uguale alla somma delle intensità ed indipendente dalla posizione.

$$\overline{\cos(\phi_2 - \phi_1)} = 0$$

$$\mathrm{I} \propto \mathrm{E}_{o1}^2 + \mathrm{E}_{o2}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

Interferenza

L'**interferenza** si osserva per tutte le grandezze che si propagano per onde (con trattazione matematica indipendente dal tipo di onda).

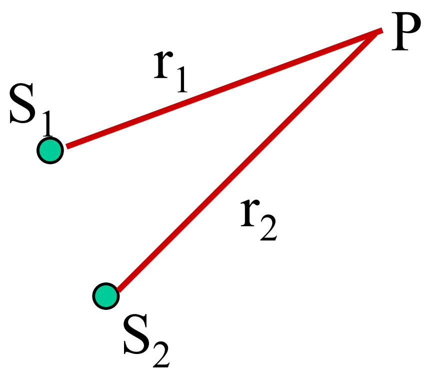
$\Rightarrow$ Prova della natura ondulatoria di una grandezza.

Con esperimenti di interferenza è stato dimostrato:
- Esistenza delle onde e.m. (Hertz, 1888)
- La luce si propaga per onde (Young, 1801).

Consideriamo due sorgenti coerenti (ad es., sorgenti puntiformi di onde sferiche):

$$\xi_1 = \xi_{01}\sin(\omega t - k\,r_1) \qquad \phi_1 = k\,r_1 + \varphi_1$$

$$\xi_2 = \xi_{02}\sin(\omega t - k\,r_2) \qquad \phi_2 = k\,r_2 + \varphi_2$$



Condizioni di interferenza:
- ***sorgenti coerenti***
- ***uguale frequenza***
- ***uguale*** stato di ***polarizzazione***: interferiscono tra loro solo le componenti di **E** secondo lo stesso asse (es. E_{1x} con E_{2x})

Differenza di fase: $\delta = \phi_2 - \phi_1 = (k_2 r_2 - k_1 r_1) = \dfrac{2\pi}{\lambda_o}(n_2 r_2 - n_1 r_1)$

Cammino ottico: Prodotto del cammino geometrico per l'indice di rifrazione (= nr).

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\text{con: } \xi_0 = \sqrt{\xi_{01}{}^2 + \xi_{02}{}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\delta}$$

$$\xi_{max} = |\xi_{01} + \xi_{02}| \qquad \cos\delta = 1$$

$$\xi_{min} = |\xi_{01} - \xi_{02}| \qquad \cos\delta = -1$$

Consideriamo propagazione nel vuoto o nello stesso mezzo ($n_1 = n_2$):

$\boxed{\delta = 2n\pi}$ **Interferenza costruttiva**

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad (r_2 - r_1) = n\lambda$$

La differenza dei cammini ottici è multiplo intero di λ

$\boxed{\delta = (2n+1)\pi}$ **Interferenza distruttiva**

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2n+1)\pi \quad \Rightarrow \quad (r_2 - r_1) = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

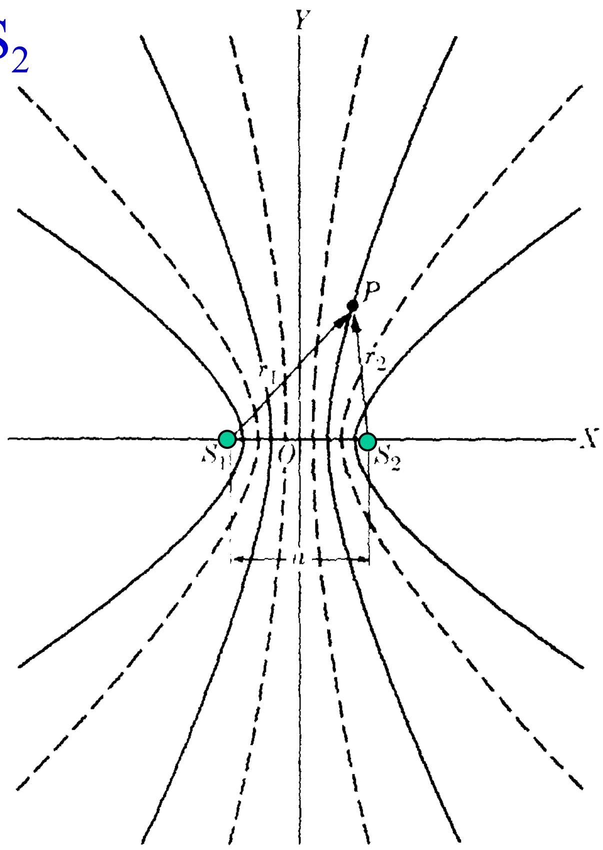
La differenza dei cammini ottici è multiplo dispari di $\lambda / 2$

$$\delta = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \xi = \xi_0 \sin(\omega t + \alpha) \qquad (\alpha = \text{cost}) \quad (*)$$

$\Rightarrow$ No propagazione $\Rightarrow$ **Onda stazionaria**

Luogo dei punti con: $(\mathbf{r_2 - r_1}) = \mathbf{cost}$

$\Rightarrow$ Iperboli con fuochi in S_1 e S_2



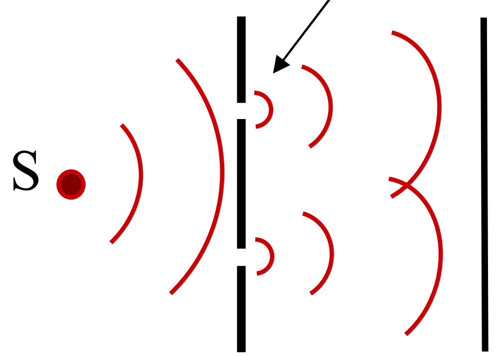
Ventri:
$r_2 - r_1 = n\lambda$

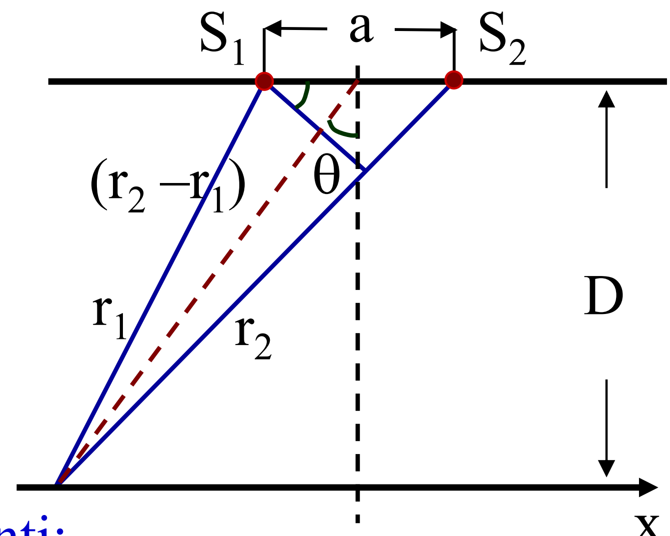
Nodi:
$r_2 - r_1 = (2n+1)\lambda/2$

(*) $$tg\alpha = \frac{\xi_{o1}\sin\phi_1 + \xi_{o2}\sin\phi_2}{\xi_{o1}\cos\phi_1 + \xi_{o2}\cos\phi_2}$$

Interferenza di due sorgenti luminose: Esperimento di Young (1801)

Principio di Huygens





A grande distanza dalle sorgenti:

$$a << r_1, r_2 \qquad r_1 \cong r_2 \qquad \xi_{01} \cong \xi_{02}$$

$$\xi_o = \sqrt{\xi_{o1}{}^2 + \xi_{o2}{}^2 + 2\xi_{o1}\xi_{o2}\cos\delta} = \xi_{o1}\sqrt{2(1+\cos\delta)} =$$

$$= \xi_{o1}\sqrt{2\left(1 + 2\cos^2(\delta/2) - 1\right)} = 2\xi_{o1}\cos\frac{\delta}{2}$$

L'intensità è proporzionale al quadrato del campo:

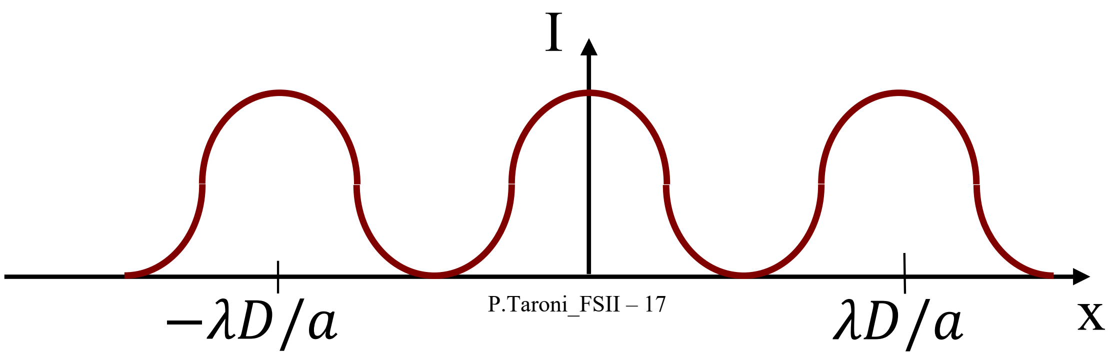
$$\boxed{I = I_o \cos^2\frac{\delta}{2}} \qquad \text{dove: } I_o = I_{max} = 4I_1$$

dove: $\quad r_2 - r_1 = a \sin\theta \quad$ e $\quad \sin\theta \cong \mathrm{tg}\,\theta \cong x/D$

$$\Rightarrow \qquad \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda} \cong \frac{2\pi a}{\lambda}\frac{x}{D}$$

$I = I_{max}$ quando:

$$\boxed{\frac{\delta}{2} = n\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi a x}{\lambda D} = n\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{n\lambda D}{a}}$$



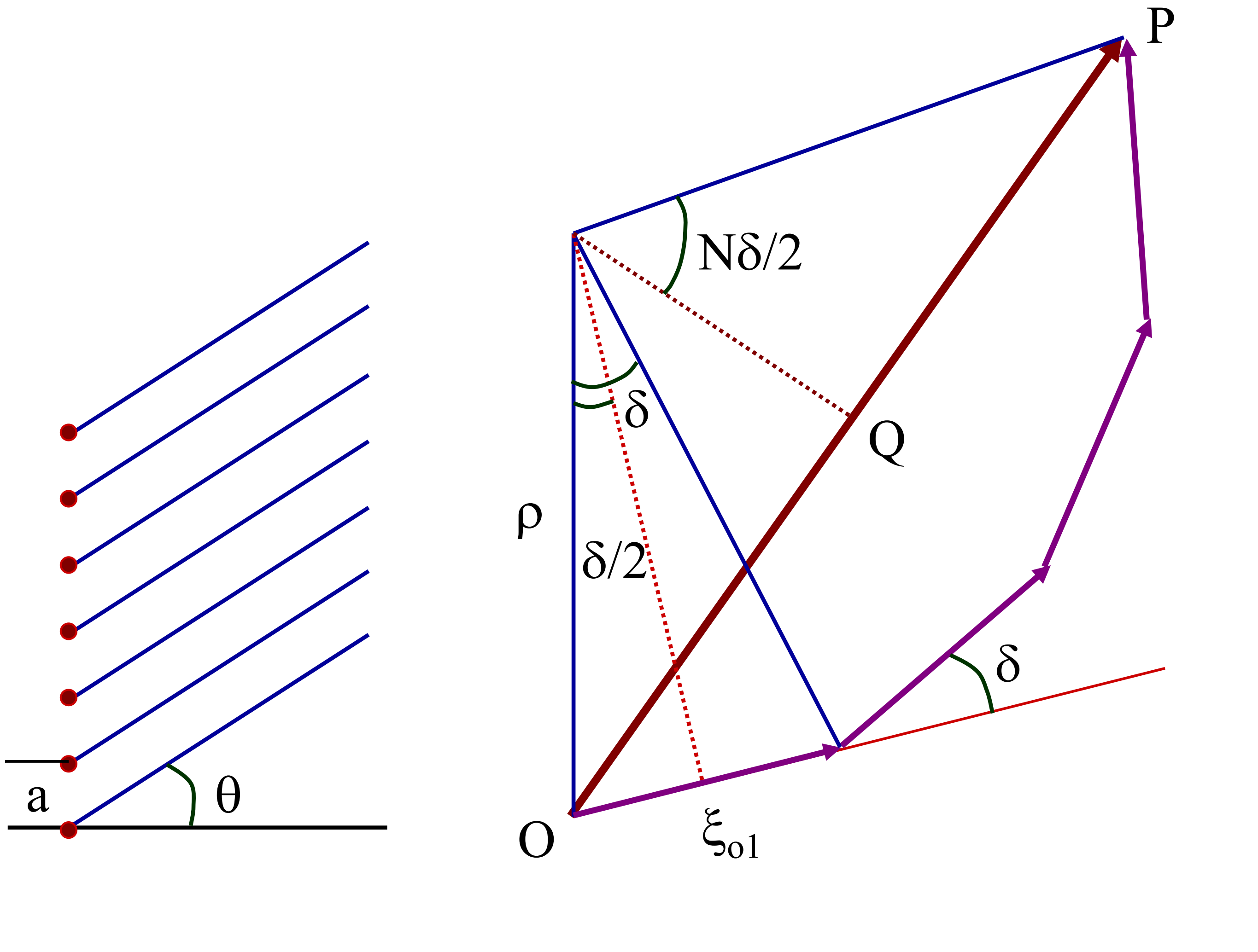
Interferenza di N sorgenti

Consideriamo N sorgenti sferiche puntiformi coerenti, spaziate di a una dall'altra.

Utilizziamo il metodo dei vettori rotanti.

A grande distanza:

$$r_1 \cong r_2 \cong r_3 \cong \ldots\ldots\ldots \cong r_N \qquad \xi_{o1} \cong \xi_{o2} \cong \xi_{o3} \cong \ldots\ldots\ldots \cong \xi_{oN}$$



Ogni sorgente è sfasata rispetto alla precedente della stessa quantità δ :

$$\delta = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

Dalla composizione dei vettori rotanti, l'ampiezza totale OP è:

$$OP = \xi_o = 2OQ = 2\rho \sin \frac{N\delta}{2}$$

dove:

$$\xi_{o1} = 2\rho \sin \frac{\delta}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{\xi_{o1}}{2\sin(\delta/2)}$$

$$\xi_o = \xi_{o1} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} = \xi_{o1} \frac{\sin\left(\frac{N\pi a \sin \vartheta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a \sin \vartheta}{\lambda}\right)}$$

$$\boxed{I = I_1 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = I_1 \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}}$$

dove I_1 è l'intensità della singola sorgente.

Per **N = 2**:

$$\xi_o = \xi_{o1} \frac{\sin \delta}{\sin(\delta/2)} = \xi_{o1} \frac{2\sin(\delta/2)\cos(\delta/2)}{\sin(\delta/2)} = 2\xi_{o1} \cos \frac{\delta}{2}$$

$$I = I_o \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

L'intensità è massima quando tutti i campi sono in fase:

$$\delta = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda} = 2n\pi \qquad (n = \text{intero})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} = \pm N$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = I_{max} = N^2 I_1} \quad \text{per:} \quad \boxed{a \sin\theta = n\lambda}$$

Massimi principali

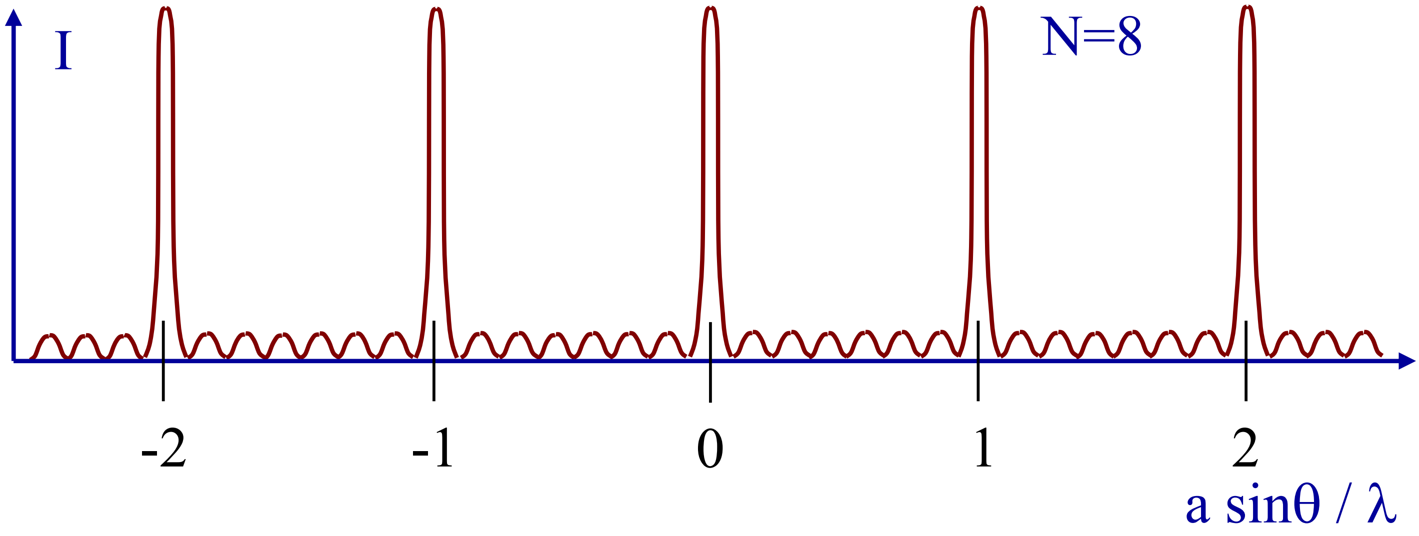
$\boxed{I = I_{min} = 0}$ si ha per:

$$\frac{N\delta}{2} = \frac{N\pi a \sin\theta}{\lambda} = m\pi \qquad (m = \text{intero})$$

$$\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = \frac{m}{N}\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \sin\theta = \frac{m}{N}\lambda}$$

m assume tutti i valori eccetto 0, N, 2N, ..., perchè in corrispondenza di questi valori ci sono i massimi principali.

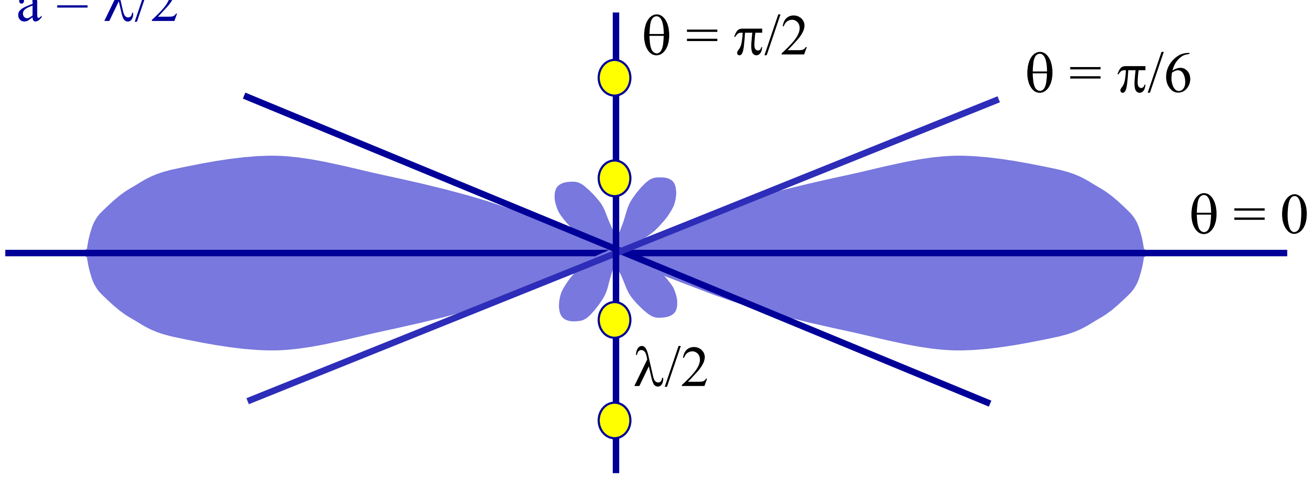
Tra due zeri c'è un massimo (**massimo secondario**).
$\Rightarrow$ Tra due massimi principali, ci sono (N-2) massimi secondari.



Per N grande, l'intensità delle N sorgenti si concentra prevalentemente nei massimi principali.

⇒ L'interferenza comporta una forte dipendenza dell'intensità dalla direzione, cioè dall'angolo θ.

Esempio: antenna costituita da N = 4 sorgenti spaziate di a = λ/2



$I = I_{max}$: $a \sin\theta = n\lambda$ $\sin\theta = 2n$ Max per $n = 0$

$\theta = 0$ $\theta = \pi$

$I = 0$: $a \sin\theta = (m/N)\lambda$ $\sin\theta = m/2$ $m = \pm 1;\ m = \pm 2$

$\theta = \pm\pi/6$ $\theta = \pm\pi/2$