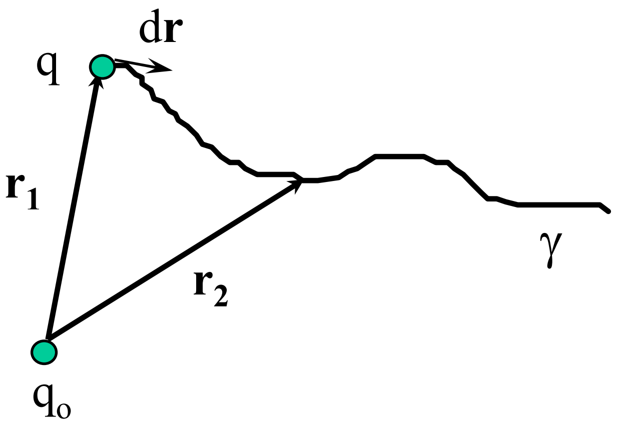
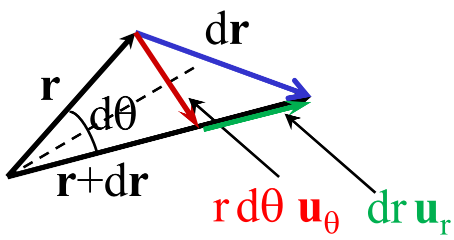
Energia potenziale elettrostatica
di cariche puntiformi



q si sposta con $v \longrightarrow 0$

$$L = \int_{r_1,\gamma}^{r_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$



dove: $d\mathbf{r} = dr\mathbf{u}_r + rd\theta\mathbf{u}_\theta$

$$L = \frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{dr}}{r^2} = \frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Il lavoro **non** dipende dal cammino $\Rightarrow$ **Forza conservativa**

$$\Rightarrow \qquad L = -\Delta U = U(r_1) - U(r_2)$$

U(r) = **Energia elettrostatica** di q in posizione **r** nel campo di q_o
= Lavoro compiuto dal campo quando q si muove da **r** alla posizione di riferimento (dove non ha interazioni $\Rightarrow$ U = 0)
= Lavoro compiuto contro il campo quando q si muove dalla posizione di riferimento (dove U = 0) a **r**

$U(r)$ è definita a meno di una costante additiva, che dipende dalla scelta arbitraria dello **stato di riferimento** e del valore attribuito a U in quella posizione.

L'espressione di $U(r)$ dipende dalla distribuzione di carica che genera l'interazione.

Esempio: interazione tra due cariche puntiformi

$$L\left(r \to r_{rif}\right) = -\Delta U = U\left(r\right) - U\left(r_{rif}\right) =$$

$$= \frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{dr}}{r^2} = \frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{rif}} \right)$$

Scegliamo arbitrariamente:

$$r_{rif} \to \infty \qquad U\left(\infty\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad U\left(r\right) = L + U\left(r_{rif}\right) = \frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

L'energia è una **grandezza scalare**.

$\Rightarrow$ Consente una descrizione più semplice, ma non completa.

Potenziale elettrostatico

Definizione di **potenziale elettrostatico**:

$$V = \frac{U}{q} = \int_r^{rif} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \qquad [V(rif) = 0]$$

SI: Volt (V) = Joule/Coulomb

$V(r)$ = Lavoro del campo per portare la carica unitaria dalla posizione **r** alla posizione di riferimento [$V(rif) = 0$]

Il valore di $V(r)$ dipende dal valore arbitrario di $V(rif)$.
$\Rightarrow$ Non ha significato fisico.

$$V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = L_{q\ unit}$$

ΔV = Lavoro del campo quando la *carica unitaria* si sposta da $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$

ΔV è la grandezza fisica (che si misura) ed ha significato fisico.

Se una carica q è in moto (lento) in un campo elettrostatico, la sua ***energia meccanica*** è ***costante***:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{cost}$$

Se $q > 0$ si muove verso punti a potenziale minore, la sua velocità aumenta
Viceversa, se $q < 0$ o se si muove verso punti a potenziale maggiore

Applicazione: Acceleratori elettrostatici di particelle

Elettronvolt (eV) = Energia acquistata da una carica elementare (e) accelerata da una *ddp* = 1 V

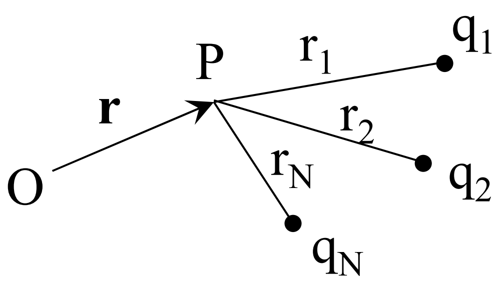
1 eV = 1.6 x 10^{-19} J

Potenziale elettrostatico di sistemi e distribuzioni di cariche

Potenziale generato da una singola **carica puntiforme**:

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad [V(\infty) = 0]$$

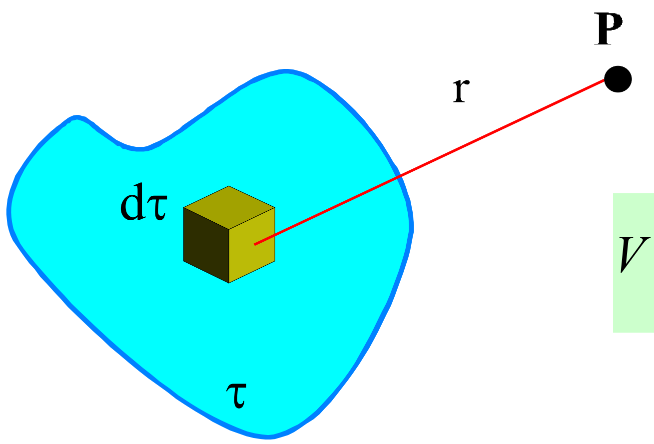
Per un sistema di **N cariche puntiformi**:



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q}{r_i}$$

$$[V(\infty) = 0]$$

Per una distribuzione di **carica di volume con densità** ρ:



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho\, d\tau}{r}$$

Per una distribuzione **superficiale** di carica **con densità** σ su una superficie S:

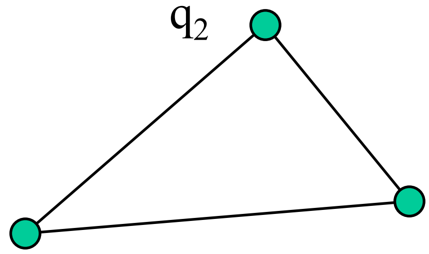
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S} \frac{\sigma\, dS}{r}$$

Per una distribuzione **lineare** di carica **con densità** λ su una linea l:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{l} \frac{\lambda dl}{r}$$

Energia potenziale elettrostatica di sistemi e distribuzioni di cariche

- Per un sistema di 3 cariche puntiformi:



$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

L'energia elettrostatica è un'energia di ***interazione***, non associata alla singola carica.

- Per un sistema di **N cariche puntiformi**:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_i V_i$$

- Per **distribuzioni continue di carica**:

$$V(r) = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho V d\tau \qquad V(r) = \frac{1}{2}\iint_S \sigma V dS \qquad V(r) = \frac{1}{2}\int_l \lambda V dl$$

Dal potenziale al campo: Operatore gradiente

Consideriamo una funzione scalare $V(r)$.
$V(r) = cost$ definisce una famiglia di superfici (isolivello)
In coord. cartesiane, fissato $P(x_0,y_0,z_0)$,

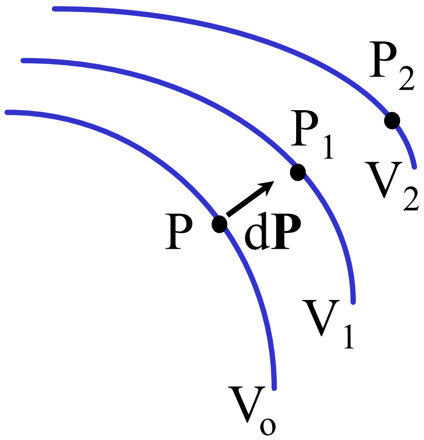
$$V(x,y,z) = V(x_0,y_0,z_0)$$

rappresenta una **superficie di isolivello** passante per il punto P.

Se ad uno spostamento infinitesimo $dr(dx,dy,dz)$ del punto P corrisponde una variazione dV della funzione V:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

(differenziale esatto)



Allora è possibile definire:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{u}_x + E_y\mathbf{u}_y + E_z\mathbf{u}_z$$

$$\text{tale che}: \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \;;\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \;;\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \qquad dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \qquad \mathbf{E} = -grad\, V$$

$$grad \xrightarrow[\text{cartesian}]{\text{coordinate}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x, \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y, \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)$$

Il **gradiente** è un operatore che trasforma uno scalare in un vettore

- *Direzione e verso*: definiscono la direzione di massimo incremento della funzione
- *Modulo*: uguale alla derivata direzionale massima

$$grad\ V = \frac{\partial V}{\partial n}\boldsymbol{u}_n$$

dove: $\mathbf{u}_n$ = normale alla superficie di isolivello

Vale anche il teorema inverso.

Dato un vettore **E,** se:

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

è un differenziale esatto, allora esiste una funzione V, tale che:

$$\mathbf{E} = -grad\ V$$

Per il campo elettrico, valgono le relazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} &V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \\ &dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \end{aligned}}$$

Quindi:

$$\boxed{\mathbf{E} = -grad\ V}$$

Energia del campo elettrico

$$\rho = \varepsilon_0 \, div \, \mathbf{E} \qquad \Rightarrow \qquad \rho V = \varepsilon_0 \, V \, div \, \mathbf{E}$$

Vale l'identità:

$$div\left(f\mathbf{A}\right) = f \, div \, \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot grad \, f$$

Quindi:

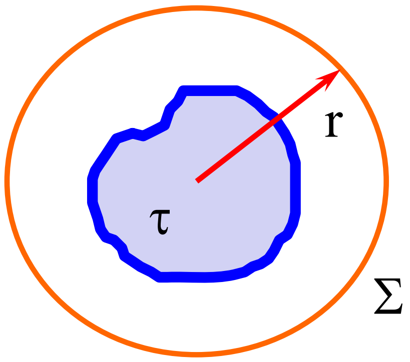
$$\varepsilon_0 \, V \, div \, \mathbf{E} = \varepsilon_0 \, div\left(V\mathbf{E}\right) - \varepsilon_0 \, \mathbf{E} \cdot grad \, V$$

$$\Rightarrow \quad \rho V = \varepsilon_0 \, div\left(V\mathbf{E}\right) + \varepsilon_0 \, E^2$$

Integrando sul volume τ:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_\tau \rho V \, d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_\tau div\left(V\mathbf{E}\right) d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_\tau E^2 \, d\tau$$

Essendo τ il volume in cui è contenuta la densità di carica ρ,



per il teorema della divergenza:

$$\iiint_{\tau} div(V\mathbf{E})\,d\tau = \iint_{\Sigma} V\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\,dS$$

dove:

$$\Sigma \propto r^2 \qquad e \qquad VE \propto \frac{1}{r^3}$$

$$\Rightarrow \quad \iint_{\Sigma} V\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\,dS \to 0 \qquad per \quad r\to\infty$$

Perciò:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\tau\infty} \rho V\,d\tau = \frac{1}{2}\iiint_{\tau\infty} \varepsilon_0\,E^2\,d\tau$$

dove si definisce:

$$u = \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,E^2$$

u = **Densità di energia** (di volume) del campo elettrico

Operatore rotore

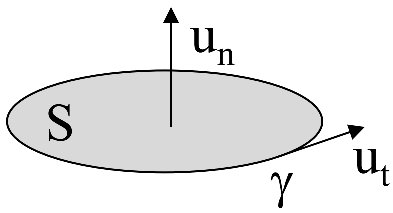
Il **rotore** è un operatore differenziale applicabile ad un vettore **v**

$$rot\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \ldots$$

$$rot\,\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

Teorema di Stokes: *La circuitazione di un vettore **v** lungo una linea chiusa γ è uguale al flusso del rotore attraverso la superficie S, che ha γ come contorno*

$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t dl = \iint_S rot\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n dS$$



L'espressione del rotore dipende dal sistema di coordinate, ma la definizione è intrinseca.

$$rot\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t dl}{S}$$

Il rotore descrive i **vortici** del campo, cioè le linee attorno a cui si avvolgono le linee di forza del campo

Se rot **v** = 0, il campo è ***irrotazionale***

⇒ Non ha vortici

⇒ Le linee di campo sono linee aperte

Irrotazionalità del campo: Circuitazione e rotore

E di una carica puntiforme è **conservativo**.
Per il principio di sovrapposizione, questa proprietà vale in generale.

$$\oint_\gamma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_t\, dl = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{A,\gamma 1}^{B} \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_t\, dl = \int_{A,\gamma 2}^{B} \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_t\, dl$$

CNS perché il campo sia conservativo è che sia irrotazionale

In una regione dello spazio in cui ***non*** c'è ***carica*** o c'è ***carica di volume***, per il teorema del rotore e per l'irrotazionalità del campo:

$$\oint_\gamma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_t dl = \iint_S rot\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS \qquad \oint_\gamma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_t\, dl = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{rot } \mathbf{E} = 0}$$

II equazione di Maxwell per il campo elettrostatico

Mediante gli operatori divergenza e rotore si possono scrivere le **equazioni fondamentali dell'elettrostatica**:

$$\boxed{\begin{aligned} div\,\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_o} \\ rot\,\mathbf{E} &= 0 \end{aligned}}$$

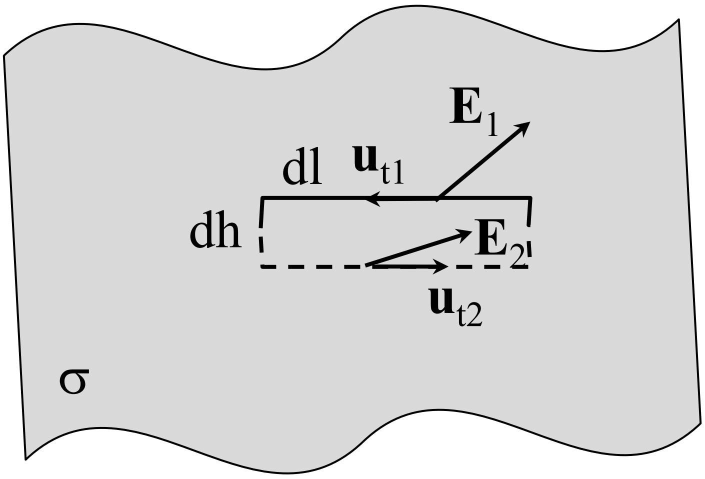
Eq. di Maxwell in e.s.

In queste due equazioni sono implicitamente contenute tutte le proprietà del campo **E** in elettrostatica

Condizioni al contorno per E:
Componente tangente

Distribuzione superficiale di carica di densità σ.

Imponiamo l'irrotazionalità del campo lungo una linea chiusa infinitesima rettangolare γ a cavallo di S, con $dl >> dh$



$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t \, dl = \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_{t1} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_{t2} \right) dl + \ldots = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{t1} - E_{t2} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{[\mathrm{E}_t] = 0}$$

Comportamento locale del campo

Non esiste carica

$$div\,\mathbf{E} = 0 \qquad rot\,\mathbf{E} = 0$$

Densità di volume ρ

$$div\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad rot\,\mathbf{E} = 0$$

Densità superficiale σ

$$[E_n] = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \qquad [E_t] = 0$$

Densità lineare λ

$$E_n \to \infty \quad (\text{come } \lim_{r\to 0} \frac{1}{r})$$

$$E_t \to \infty \quad (\text{come } \lim_{r\to 0} ln\, r)$$

Th. di Gauss + Irrotazionalità

(+ Comportamento all'infinito)

$$\Updownarrow$$

Legge di Coulomb + Princ. di sovrapposizione

Equazione di Poisson

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$$

Le due equazioni del campo elettrico si possono esprimere in una unica equazione differenziale di secondo grado in V

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dove: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Operatore Laplaciano

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ **Equazione di Poisson**

Assegnate ρ e le condizioni al contorno, esiste un'**unica soluzione** dell'equazione di Poisson:

- *Problema di Dirichlet*: $V(P)\,, \forall P \in \Sigma$
- *Problema di Neumann*: $\frac{\partial V(P)}{\partial n}, \forall P \in \Sigma$

Equazione di Laplace

Nelle regioni di spazio dove $\rho = 0$

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

Equazione di Laplace

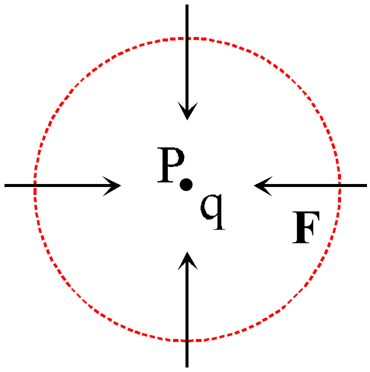
Soluzioni: ***Funzioni armoniche***

Proprietà delle funzioni armoniche:

- Il valore medio della funzione su una superficie sferica è uguale al valore al centro della sfera
- Se la funzione è costante su tutti i punti di una superficie chiusa è costante ed ha lo stesso valore nel volume interno

Per le proprietà delle funzioni armoniche, una carica **non può essere in equilibrio stabile** in un campo di forze elettrostatiche.

Dimostrazione per assurdo:



Se q è in equilibrio stabile, **E** è diretto verso P. Essendo:

$$\mathbf{E} = \text{-grad } V$$

in ogni intorno di P:

$$V(P) < V$$

Presa una superficie sferica arbitraria centrata su P, può essere:

V costante sulla superficie

$$\Rightarrow V(P) = V$$

V variabile sulla superficie

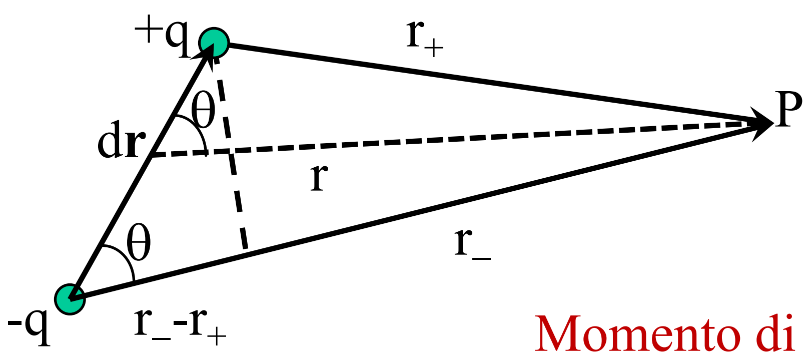
$$\Rightarrow V(P) = V_{medio}$$

$V(P) > V$ su alcuni punti della superficie

Per le proprietà delle funzioni armoniche non può essere $V(P) < V$ in ogni intorno

$\Rightarrow$ P non può essere un punto di equilibrio stabile

Dipolo elettrico



Momento di dipolo $\mathbf{p} = q\,d\mathbf{r}$

Per r >> dr (a grandi distanze)

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \cong \frac{q\,dr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \quad V(P) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{E} = -gradV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)$$

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{r\to\infty} V = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} r^2 V = \alpha$$

$$\lim_{r\to\infty} E = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} r^3 E = \beta$$

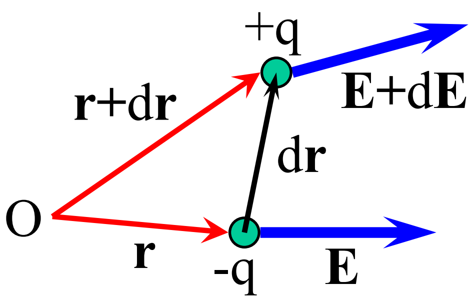
Esempi:

molecole ioniche

antenne

Interazione dipolo - campo elettrico

Ipotesi: Sistema rigido



$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z$$

$$d\mathbf{E} = dE_x\mathbf{u}_x + dE_y\mathbf{u}_y + dE_z\mathbf{u}_z$$

Essendo:

$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz = grad\, E_x \cdot d\mathbf{r}$$

si utilizza la scrittura formale:

$$d\mathbf{E} = grad\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Forza

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_- + \mathbf{F}_+ = -q\mathbf{E} + q(\mathbf{E} + d\mathbf{E})$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = q\,d\mathbf{E} = \mathbf{p} \cdot grad\,\mathbf{E}$$

Se **E** uniforme: $\mathbf{F} = 0$

Momento

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_- + (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \times \mathbf{F}_+ = -\mathbf{r} \times q\mathbf{E} + (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \times q(\mathbf{E} + d\mathbf{E}) =$$

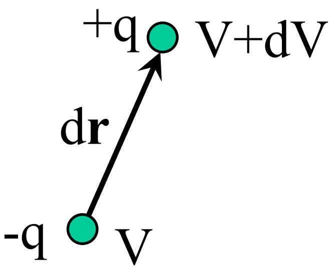
$$= q d\mathbf{r} \times \mathbf{E} + \mathbf{r} \times q\,d\mathbf{E} + d\mathbf{r} \times q\,d\mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Se **E** uniforme: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$

$\boldsymbol{\tau}$ tende ad allineare il dipolo con il campo **E**

Energia di un dipolo in un campo **E**



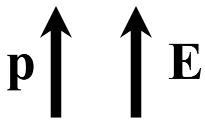
$$dV = gradV \cdot d\mathbf{r}$$

Energia del dipolo:

$$U = U_+ + U_- = q(V + dV) - qV = qd\mathbf{r} \cdot gradV$$

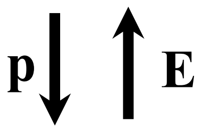
$$\Rightarrow \qquad \boxed{U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}$$

Energia minima $\qquad U_{\min} = -|\mathbf{p}||\mathbf{E}|$



p ed **E** paralleli ed equiversi $\Rightarrow$ equilibrio stabile

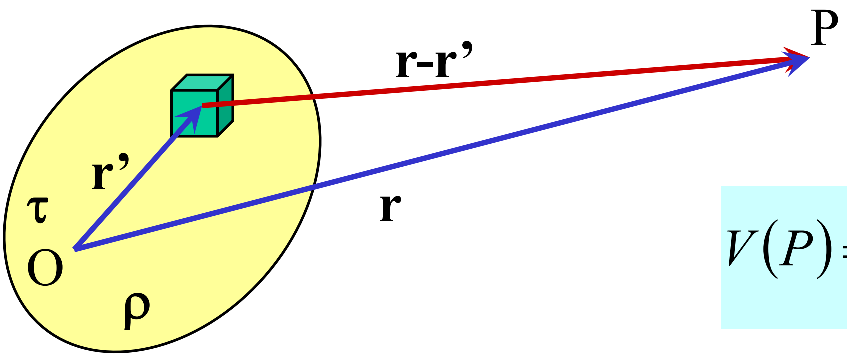
Energia massima $\qquad U_{\max} = |\mathbf{p}||\mathbf{E}|$



p ed **E** paralleli con versi opposti $\Rightarrow$ equilibrio instabile

Sviluppo in serie di multipoli

Densità di carica ρ(**r'**) nel volume τ



$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau$$

A grande distanza dalla distribuzione di carica:

$$|\mathbf{r}| >> |\mathbf{r}'| \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}| << 1$$

e l'espressione:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

si può sviluppare in serie $\left[(1-\mathrm{x})^{-1/2}\right]$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right) + \cdots\cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \left(-\frac{r'^2}{r^3} + \cdots\cdots\right)$$

Sostituendo nell'espressione del potenziale:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\tau \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau + \cdots\cdots$$

Arrestando la serie ai primi due termini:

$$V(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \iiint_\tau \rho(\mathbf{r}') d\tau + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \iiint_\tau \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau$$

Ponendo:

$$Q = \iiint_\tau \rho(\mathbf{r}') d\tau \qquad e \qquad \mathbf{p} = \iiint_\tau \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau$$

i primi due termini della serie sono:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}$$

Monopolo Dipolo

Il primo termine corrisponde a una carica puntiforme **(monopolo)** ottenuta ponendo tutta la carica netta della distribuzione nel baricentro delle cariche.
Il secondo è il termine di **dipolo** che descrive al primo ordine la simmetria tra le cariche positive e negative della distribuzione.

Un osservatore che dall'infinito si avvicina alla distribuzione "vede" inizialmente una carica puntiforme. Se la carica netta della distribuzione è nulla vede un dipolo.

Definendo baricentro delle cariche la distanza dall'origine:

$$r'_b = \frac{\iiint_\tau \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')d\tau}{\iiint_\tau \rho(\mathbf{r}')d\tau}$$

lo sviluppo in serie si può interpretare in termini di simmetria rispetto a tale punto.

Il termine di simmetria successivo al dipolo è quello di quadrupolo (2 cariche positive e 2 negative):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\iiint_\tau \rho(\mathbf{r}')\left[\frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - r'^2}{2}\right]d\tau}{r^3}$$