

**M. MARANO, S. LONGHI, M. NISOLI
R. OSELLAME, S. STAGIRA**

FISICA SPERIMENTALE

PROBLEMI DI ELETTRONAGNETISMO

Prima edizione: Gennaio 2003

Ristampa corretta: Gennaio 2006

Ristampa: Maggio 2008



© SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO s.r.l.

40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136

www.editrice-esculapio.it

Tutti i diritti riservati. Riproduzione anche parziale vietata.

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta,
archiviata in un sistema di recupero o trasmessa, in qualsiasi forma
o con qualsiasi mezzo elettronico, meccanico, fotoriproduzione,
memorizzazione o altro, senza permesso scritto da parte dell'Editore.

a Marcello



Prefazione

Questo volume contiene una raccolta di problemi di Elettromagnetismo nata dall'esperienza didattica maturata dagli autori nell'insegnamento dei corsi di Fisica Sperimentale presso le Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Il volume fa parte di una collana scritta per il nuovo ordinamento degli studi universitari per le Facoltà scientifiche. La riorganizzazione dei corsi universitari ha segnato una certa discontinuità di metodo e di programma rispetto ai corsi tradizionalmente impartiti nelle Facoltà di Ingegneria e di Scienze. Alle modifiche dei programmi e dei metodi di insegnamento si accompagna la necessità e la difficoltà di dover presentare a studenti del primo anno argomenti e problemi di una certa complessità, trattati in passato al secondo anno degli studi. Il frequente ricorso alla discussione di esempi e l'applicazione delle leggi allo svolgimento dei problemi acquista, in questa prospettiva, una importanza non trascurabile nell'insegnamento dei nuovi corsi.

Sulla base di queste considerazioni e della nostra esperienza didattica, ci è parso che i numerosi eserciziari di Elettromagnetismo attualmente in uso e scritti per corsi del vecchio ordinamento degli studi siano di scarsa utilità allo studente, che deve spesso fare i conti con una tipologia di problemi e con metodi di svolgimento poco consoni alla sua preparazione ed alle sue basi matematiche.

Lo scopo principale di questo volume è di fornire allo studente un nuovo e valido contributo didattico allo studio dell'Elettromagnetismo mediante lo svolgimento accurato, metodico ma lineare, di numerosi problemi. Gli esercizi sono raggruppati in sette capitoli organizzati per argomenti ed aree tematiche: elettrostatica nel vuoto, nei conduttori e nei mezzi dielettrici; correnti in regime stazionario; campi magnetici stazionari nel vuoto e nella materia; induzione elettromagnetica e correnti di spostamento. I problemi, di difficoltà e gradualità diverse, sono completamente e dettagliatamente risolti in maniera critica, aiutando lo studente ad acquisire la metodologia di soluzione più per comprensione che per imitazione. Alcuni argomenti o metodi di svolgimento più ostici sono talvolta discussi al termine degli esercizi per stimolare l'interesse e le conoscenze degli studenti più brillanti. Molti problemi sono tratti da esercizi assegnati in prove d'esame. Argomenti più avanzati come onde elettromagnetiche, ottica ondulatoria ed ottica geometrica, usualmente omessi negli attuali corsi di base, saranno affrontati in un successivo volume.

Questa raccolta di problemi è rivolta in particolare a studenti impegnati ad affrontare argomenti di Elettromagnetismo in un corso di Fisica di base nelle Facoltà di Ingegneria o di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Ci auguriamo che il nostro lavoro aiuti lo studente nella comprensione dell'Elettromagnetismo mediante lo svolgimento di problemi secondo le nuove metodologie ed i nuovi programmi posti dalla riforma universitaria.

La presente edizione è stata riveduta ed ampliata rispetto alla precedente; gli autori desiderano ringraziare colleghi e studenti che hanno fornito lo spunto per questa opera di revisione.

Milano, novembre 2005

Gli autori

Indice

1 Elettrostatica nel vuoto	1
1.1 Problemi	1
1.2 Soluzioni	7
2 Elettrostatica dei conduttori	35
2.1 Problemi	35
2.2 Soluzioni	41
3 Elettrostatica in presenza di dielettrici	67
3.1 Problemi	67
3.2 Soluzioni	73
4 Correnti stazionarie	93
4.1 Problemi	93
4.2 Soluzioni	99
5 Magnetostatica nel vuoto	123
5.1 Problemi	123
5.2 Soluzioni	129
6 Magnetostatica nella materia	165
6.1 Problemi	165
6.2 Soluzioni	169
7 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo	189
7.1 Problemi	189
7.2 Soluzioni	195
A Costanti ed unità di misura	235
B Richiami di trigonometria	239
C Algebra dei numeri complessi	243
C.1 Definizioni	243
C.2 Rappresentazione polare ed esponenziale	244

D Calcolo differenziale ed integrale	245
D.1 Regole di derivazione di una funzione	245
D.2 Regole di integrazione di una funzione	246
D.3 Espansione in serie di una funzione	247

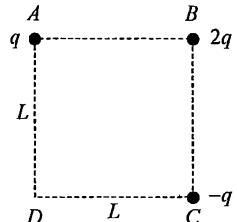
Capitolo 1

Elettrostatica nel vuoto

1.1 Problemi

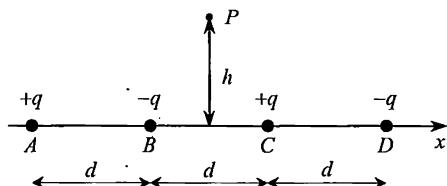
P.1.1.

Tre cariche puntiformi, q , $2q$ e $-q$ sono poste su tre vertici di un quadrato di lato L , come mostrato in figura. Si calcolino (i) il campo elettrostatico, in modulo, direzione e verso, e il potenziale, nella posizione del quarto vertice del quadrato; (ii) la forza elettrostatica cui è sottoposta una carica puntiforme positiva q_0 posta nel quarto vertice del quadrato e la sua energia potenziale.



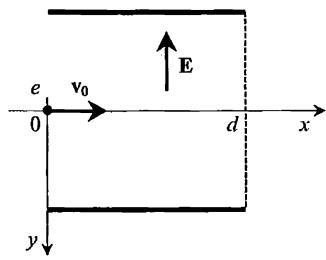
P.1.2.

Quattro cariche puntiformi, due positive e due negative, aventi lo stesso valore assoluto $q = 10 \text{ nC}$, sono allineate lungo un asse x come mostrato in figura, a distanza $d = 2 \text{ cm}$ l'una dall'altra. Si calcoli il campo elettrico e il potenziale in un punto P dell'asse del sistema (vedi figura) posto a distanza $h = 3 \text{ cm}$ dall'asse x .



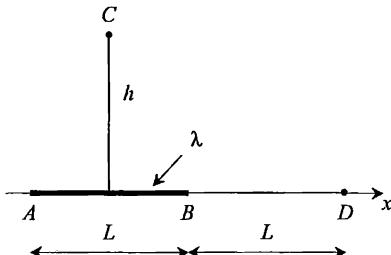
P.1.3.

Un elettrone (massa $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, carica $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) in moto con velocità \mathbf{v}_0 orizzontale e di modulo $v_0 = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$, entra in una regione in cui è presente un campo elettristico uniforme e costante, \mathbf{E} , di modulo $E = 500 \text{ N/C}$, perpendicolare a \mathbf{v}_0 e diretto verso l'alto. Tale regione si estende in direzione orizzontale per un tratto $d = 5 \text{ cm}$, come mostrato in figura. Si calcoli la velocità dell'elettrone, in modulo, direzione e verso e lo spostamento in direzione verticale subito dall'elettrone, all'uscita dalla regione in cui è presente il campo elettrico.

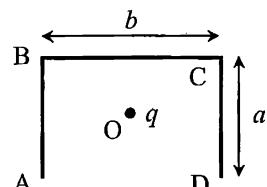


P.1.4.

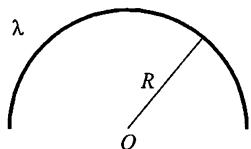
Un filo rettilineo AB di lunghezza L e sezione trascurabile, disposto lungo un asse x come mostrato in figura, è uniformemente carico con densità lineare di carica λ . Si calcoli il campo elettrostatico generato dal filo in un punto C posto su un asse perpendicolare al filo, a distanza h dal filo stesso e in un punto D dell'asse x posto a distanza L dall'estremo B del filo.

**P.1.5.**

Una carica positiva Q è uniformemente distribuita su tre lati di un rettangolo ABCD, con $AB=CD=a$ e $BC=AD=b$. Una carica puntiforme q è posta nel centro O del rettangolo ABCD. Si determini la forza elettrostatica agente su q .

**P.1.6.**

Un filo rigido sottile, uniformemente carico con densità lineare di carica λ , ha la forma di una semicirconferenza di raggio R . Si calcoli il campo elettrostatico nel centro della semicirconferenza.

**P.1.7.**

Una carica positiva è uniformemente distribuita su un sottile anello circolare di raggio R , con densità lineare di carica λ . Si calcoli il campo elettrostatico sull'asse perpendicolare all'anello, passante per il centro dell'anello stesso. Si studi poi il moto lungo l'asse di una particella puntiforme di massa m e carica $-Q$, nell'ipotesi di piccoli spostamenti attorno al centro dell'anello.

P.1.8.

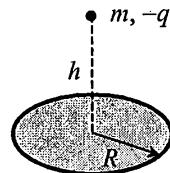
Una carica positiva è uniformemente distribuita su un sottile anello circolare di raggio R , con densità lineare di carica λ . Si calcoli il potenziale elettrostatico sull'asse perpendicolare all'anello, passante per il centro dell'anello stesso. Utilizzando il risultato ottenuto, si ricavi l'espressione del campo elettrostatico sull'asse dell'anello carico.

P.1.9.

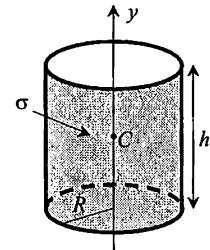
Si calcoli il campo e il potenziale elettrostatico sull'asse di un disco di raggio R su cui è uniformemente distribuita una carica Q .

P.1.10.

Una carica positiva Q è distribuita in modo uniforme su un disco sottile di raggio R . Una particella di massa m e carica $-q$ è tenuta in quiete sull'asse del disco, a una distanza $h = 3R$ dal centro del disco, come mostrato in figura. Si calcoli la velocità con cui la particella raggiunge il centro del disco una volta lasciata libera di muoversi.

**P.1.11.**

Una carica positiva è distribuita con densità superficiale uniforme, σ , su una superficie cilindrica di altezza h e raggio di base R e sulla superficie di base inferiore, come mostrato in figura. Si calcoli il campo elettrostatico nel centro, C, del cilindro.

**P.1.12.**

Due corpi puntiformi A e B, di massa m e M ($M \gg m$) rispettivamente ed uguale carica q , si trovano inizialmente a grande distanza l'uno dall'altro. Il corpo A viene lanciato verso il secondo corpo con velocità v_0 . Si calcoli a quale distanza dal corpo B la velocità di A si dimezza.

P.1.13.

Una carica elettrica è distribuita con densità superficiale positiva σ_1 e σ_2 sui piani $x = 0$ e $x = d$, rispettivamente. Si calcolino il campo elettrico e il potenziale in tutto lo spazio, assumendo che il potenziale sia nullo per $x = 0$.

P.1.14.

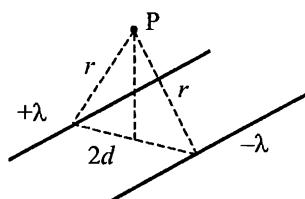
Una carica elettrica positiva è distribuita con densità volumetrica uniforme ρ all'interno di una sfera di raggio R . Si calcolino il campo elettrico e il potenziale.

P.1.15.

Una carica positiva è distribuita, con densità volumetrica ρ uniforme, nella regione di spazio limitata dai piani $x = -d$ e $x = d$. Si calcoli il campo ed il potenziale elettrostatico, assumendo che il potenziale sia nullo sul piano $x = 0$.

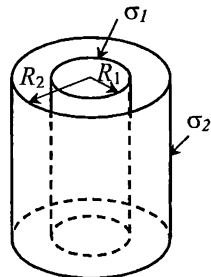
P.1.16.

Si considerino due fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita, uniformemente carichi con densità lineare di carica $+\lambda$ e $-\lambda$, posti a distanza $2d$ l'uno dall'altro, come mostrato in figura. Si determini il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica assegnata nel punto P posto su un piano perpendicolare ai due fili, alla stessa distanza r dai due fili (vedi figura).



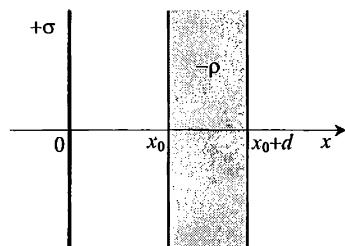
P.1.17.

Una carica elettrica è distribuita, con densità superficiale positiva σ_1 e σ_2 , su due superfici cilindriche coassiali infinite di raggi R_1 e R_2 rispettivamente, come mostrato in figura. Si calcolino il campo elettrostatico e il potenziale in tutto lo spazio, assumendo nullo il potenziale sulla superficie di raggio R_2 .

P.1.18.

Una carica elettrica positiva è distribuita con densità superficiale uniforme $+σ$, sul piano $x = 0$. Una carica elettrica negativa è distribuita, con densità volumetrica uniforme, $-ρ$, nella regione di spazio limitata dai piani $x = x_0$ e $x = x_0 + d$. Si calcoli:

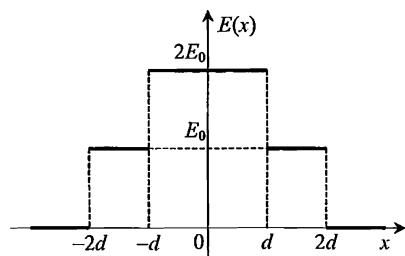
- la relazione fra $σ$ e $ρ$ affinché il campo elettrico sia nullo nelle regioni $x < 0$ e $x > x_0 + d$;
- l'andamento del campo elettrico e del potenziale, nelle condizioni di cui al punto (i), per $0 < x < x_0 + d$. Si assuma $V = 0$ per $x = x_0 + d$. Si rappresenti graficamente tale andamento.
- La forza per unità di superficie agente sul piano $x = 0$.

P.1.19.

Una carica elettrica positiva è distribuita, con densità volumetrica uniforme $ρ$, all'interno di un cilindro di altezza infinita e di raggio R . Si calcoli il campo elettrico e il potenziale in funzione della distanza dall'asse del cilindro, assumendo che il potenziale sia nullo su tale asse.

P.1.20.

In una regione di spazio compresa fra i piani $x = -2d$ e $x = 2d$ è presente un campo elettrico E , diretto in direzione perpendicolare ai piani, il cui modulo varia come mostrato in figura. Si determini la distribuzione di carica che genera tale campo. Si calcoli e si rappresenti graficamente il potenziale elettrostatico in funzione di x , assumendo che il potenziale sia nullo per $x = 0$. Si calcoli infine la velocità, per $x = 2d$, di una particella puntiforme di carica q e massa m , posta con velocità nulla nel punto di coordinata $x = 0$ e libera di muoversi.



P.1.21.

Una carica positiva Q è distribuita all'interno di una sfera di raggio R . La densità di carica di volume varia radialmente con la legge $\rho = ar$ ($0 < r < R$), con a costante. Si determinino:

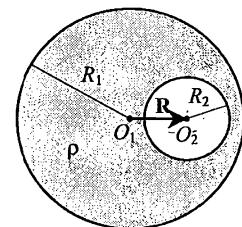
- la costante a ;
- il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica in tutto lo spazio.

P.1.22.

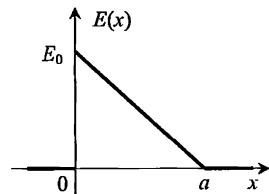
Una carica Q è uniformemente distribuita su una superficie sferica di raggio R . Si calcoli l'energia elettrostatica della distribuzione. Si calcoli inoltre l'energia cinetica complessiva che le cariche acquisterebbero portandosi a distanza $r > R$ dal centro della sfera se fossero, tutte allo stesso istante, lasciate libere di allontanarsi dalla sfera stessa.

P.1.23.

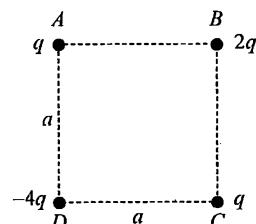
Si consideri una sfera con centro in O_1 e raggio R_1 , uniformemente carica con densità di carica volumetrica ρ . All'interno della sfera viene praticato un foro sferico con centro in O_2 e raggio $R_2 < R_1$, all'interno del quale c'è il vuoto, come mostrato in figura. Sia R la distanza fra O_1 e O_2 . Si calcoli il campo elettrico all'interno del foro.

**P.1.24.**

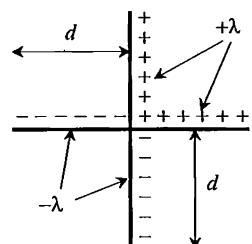
Si determini la distribuzione di carica che genera il campo elettrico unidimensionale il cui modulo è rappresentato in figura.

**P.1.25.**

Un sistema rigido di cariche è costituito da quattro cariche puntiformi, con valori q , q , $2q$ e $-4q$, disposte ai vertici di un quadrato di lato a , come mostrato in figura. Si calcoli l'energia potenziale elettrostatica del sistema di cariche assegnato.

**P.1.26.**

Si determini il momento di dipolo della distribuzione di cariche indicata in figura. Sia λ la densità di carica per unità di lunghezza.



P.1.27.

Una particella puntiforme di carica q e massa m è posta al centro di una regione sferica di raggio R , contenente una carica $-q$, distribuita in modo uniforme. In tale regione viene applicato un campo elettrico \mathbf{E}_0 , che provoca lo spostamento della particella dal centro della regione sferica di una quantità r ($r < R$). Si determinino:

- (i) lo spostamento \mathbf{r} della particella di massa m all'equilibrio;
- (ii) il momento di dipolo elettrico associato alla distribuzione di carica;
- (iii) il moto della particella quando il campo \mathbf{E}_0 viene tolto in un tempo molto breve.

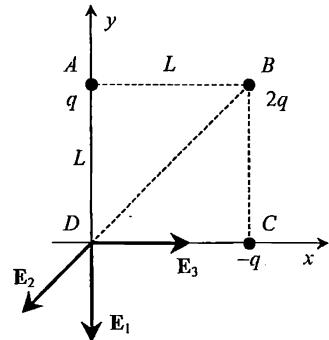
1.2 Soluzioni

S.1.1.

Per determinare il campo elettrico nella posizione del quarto vertice, D, del quadrato applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti. Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xy , disposto come mostrato in figura. Il campo in D è dato da:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3, \quad (1)$$

essendo \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 ed \mathbf{E}_3 i campi elettrici generati in D, separatamente, dalle cariche poste in A, B e C:



$$\mathbf{E}_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \mathbf{u}_y,$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 (L\sqrt{2})^2} \mathbf{u}_{DB} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2 \sqrt{2}} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y), \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \mathbf{u}_x.$$

Si noti che, nel derivare l'espressione vettoriale di \mathbf{E}_2 , si è tenuto conto che il versore \mathbf{u}_{DB} della direzione DB (bisettrice), diretto da D verso B, è $\mathbf{u}_{DB} = (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$, e che l'intensità del campo E_2 è $2q/[4\pi\epsilon_0(L\sqrt{2})^2] = q/(4\pi\epsilon_0 L^2)$.

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{u}_x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{u}_y \right]. \quad (3)$$

Il modulo del campo elettrico è dato da:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 L^2}. \quad (4)$$

Il vettore \mathbf{E} forma con l'asse delle x un angolo α dato da:

$$\alpha = \text{atan} \frac{E_y}{E_x} = -80.3^\circ. \quad (5)$$

Il potenziale elettrostatico in D si calcola applicando nuovamente il principio di sovrapposizione degli effetti: $V = V_1 + V_2 + V_3$, essendo V_1 , V_2 e V_3 i potenziali generati in D, separatamente, dalle cariche poste in A, B e C:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L},$$

$$V_2 = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 L}, \quad (6)$$

$$V_3 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

Si ha quindi:

$$V = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 L}. \quad (7)$$

La forza elettrostatica cui è sottoposta una carica puntiforme positiva, q_0 , posta in D è $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ e la sua energia potenziale è: $U = q_0V$.

S.1.2.

Per determinare il campo elettrostatico nel punto P posto sull'asse del sistema di cariche, applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti. Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xy , disposto come mostrato in figura. Il campo in P è dato da:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4, \quad (1)$$

essendo \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 ed \mathbf{E}_4 i campi elettrici generati in P, separatamente, dalle cariche poste in A, B, C e D. La somma vettoriale (1) si esegue in modo molto semplice osservando che i campi elettrici generati in P dalle cariche poste in A e in D hanno la stessa componente orizzontale, mentre le componenti verticali sono uguali in valore assoluto ma di segno contrario. Quindi $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4$ risulta diretto come l'asse x ed ha componente x pari alla somma delle componenti orizzontali di \mathbf{E}_1 e di \mathbf{E}_4 :

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4 = 2 \frac{q \cos \theta_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{u}_x, \quad (2)$$

dove:

$$r_1 = \sqrt{h^2 + \frac{9}{4}d^2} \simeq 4.24 \text{ cm}, \quad (3)$$

$$\theta_1 = \text{atan} \frac{2h}{3d} = 45^\circ. \quad (4)$$

Analogamente per la somma dei campi generati in P dalle cariche poste in B e in C:

$$\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = -2 \frac{q \cos \theta_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{u}_x, \quad (5)$$

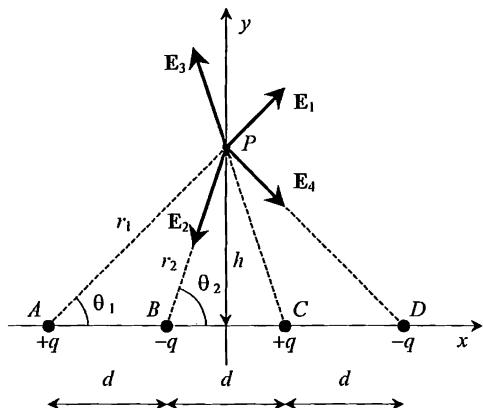
dove:

$$r_2 = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} \simeq 3.16 \text{ cm}, \quad (6)$$

$$\theta_2 = \text{atan} \frac{2h}{d} \simeq 71.56^\circ. \quad (7)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta_1}{r_1^2} - \frac{\cos \theta_2}{r_2^2} \right) \mathbf{u}_x = 1.38 \times 10^4 \text{ u}_x \text{ N/C}. \quad (8)$$



Il potenziale elettrostatico nel punto P si calcola applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = 0 \quad (9)$$

S.1.3.

L'elettrone è sottoposto alla forza peso, mg , e alla forza elettrostatica $\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}$. La forza peso può essere trascurata rispetto alla forza elettrica, infatti:

$$mg = 8.9 \times 10^{-30} N \ll |e|E = 8 \times 10^{-17} N \quad (1)$$

Per studiare il moto dell'elettrone nella regione in cui è presente il campo elettrico ($0 \leq x \leq d$) applichiamo la seconda legge della dinamica: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, dove $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e = |e|E\mathbf{u}_y$. Proiettiamo tale legge lungo gli assi x ed y otteniamo:

$$\begin{aligned} ma_x &= 0 \\ ma_y &= |e|E. \end{aligned} \quad (2)$$

Lungo l'asse x il moto dell'elettrone è rettilineo ed uniforme, mentre lungo l'asse y il moto è uniformemente accelerato. Integrando la legge di Newton possiamo determinare le componenti cartesiane della velocità:

$$v_x = v_0$$

$$\int_0^{v_y} dv_y = \frac{|e|E}{m} \int_0^t dt, \quad (3)$$

da cui si ottiene:

$$v_x = v_0$$

$$v_y = \frac{|e|E}{m} t, \quad (4)$$

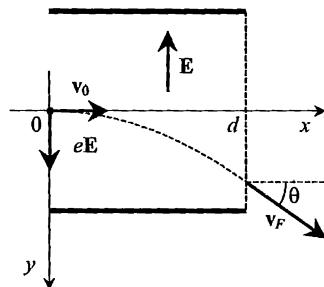
da cui, per integrazione, possiamo ottenere le equazioni parametriche del moto dell'elettrone:

$$\begin{aligned} \int_0^x dx &= \int_0^t v_0 dt \\ \int_0^y dy &= \frac{|e|E}{m} \int_0^t t dt, \end{aligned} \quad (5)$$

cioè:

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{|e|E}{2m} t^2. \quad (6)$$



La traiettoria seguita dall'elettrone si ottiene dalle equazioni parametriche del moto eliminando la dipendenza dal parametro t , $t = x/v_0$:

$$y = \frac{|e|E}{2mv_0^2} x^2. \quad (7)$$

La traiettoria è quindi una parabola.

Possiamo calcolare l'istante t_F in cui l'elettrone esce dalla regione in cui è presente il campo elettrico imponendo $x = d$ nella prima delle (6): $t_F = d/v_0$. Lo spostamento in direzione verticale subito dall'elettrone si ottiene dall'equazione (7):

$$y_F = y(t_F) = \frac{|e|Ed^2}{2mv_0^2} = 1.22 \text{ cm}. \quad (8)$$

Le componenti cartesiane della velocità di uscita dell'elettrone, \mathbf{v}_F , si ottengono dalle equazioni (4):

$$\begin{aligned} v_{Fx}(t_F) &= v_0 \\ v_{Fy}(t_F) &= \frac{|e|Ed}{mv_0} \end{aligned} \quad (9)$$

Il modulo di \mathbf{v}_F è dato da:

$$|\mathbf{v}_F| = \sqrt{v_{Fx}^2 + v_{Fy}^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{|e|Ed}{mv_0}\right)^2} = 3.34 \times 10^6 \text{ m/s}. \quad (10)$$

\mathbf{v}_F forma con l'asse x un angolo θ dato da:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{Fy}}{v_{Fx}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{|e|Ed}{mv_0^2}\right) = 26^\circ. \quad (11)$$

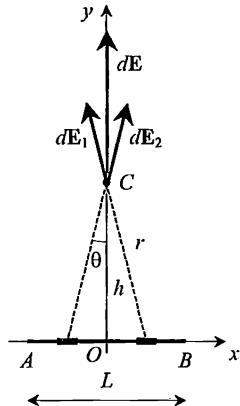
S.1.4.

Sceglieremo un sistema di assi cartesiani ortogonali xy disposto come mostrato in figura. In particolare, l'asse x è diretto come il filo, con origine nel punto medio di AB . Per calcolare il campo elettrico nel punto C dell'asse y , posto a distanza h dal filo, consideriamo due elementi infinitesimi del filo, di lunghezza dx , simmetrici rispetto all'asse y , la cui carica vale $dq = \lambda dx$. I campi elettrici, $d\mathbf{E}_1$ e $d\mathbf{E}_2$, generati da tali elementi in C hanno la stessa componente y e componenti x uguali in modulo ma di segno opposto. Il campo complessivo, $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$, è quindi diretto come l'asse y ed ha modulo dato da:

$$|d\mathbf{E}| = 2 \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \quad (1)$$

dove r è la distanza fra l'elemento di filo dx e il punto C , e θ è mostrato in figura. Per eseguire l'integrazione su tutto il filo, esprimiamo dx e r in funzione di θ e della distanza h . Si ottiene:

$$r = \frac{h}{\cos\theta}; \quad (2)$$



$$x = h \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{h}{\cos^2 \theta} d\theta. \quad (3)$$

Si ottiene:

$$|\mathbf{E}| = \int_O^B |d\mathbf{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \int_0^{\theta_m} \cos \theta \, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \sin \theta_m, \quad (4)$$

dove θ_m è l'angolo θ corrispondente al segmento AC. Poiché:

$$\sin \theta_m = \frac{L}{\sqrt{4h^2 + L^2}}, \quad (5)$$

si ottiene:

$$\mathbf{E}(C) = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}} \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

Si noti che dall'Eq.(4) si ottiene facilmente il campo generato in C da un filo rettilineo di lunghezza infinita uniformemente carico. In tal caso $\theta_m = \pi/2$, quindi:

$$\mathbf{E}(C) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \mathbf{u}_y. \quad (7)$$

Calcoliamo ora il campo elettrico generato dal filo AB nel punto D posto sull'asse x a distanza L dall'estremo B. Il campo elettrico generato in D da un elemento dx del filo, di carica $dq = \lambda dx$, è ovviamente diretto come l'asse x ed è dato da:

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{3}{2}L - x\right)^2} \mathbf{u}_x. \quad (8)$$

Integrando su tutto il filo si ottiene:

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_x \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\left(\frac{3}{2}L - x\right)^2} = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 L} \mathbf{u}_x. \quad (9)$$

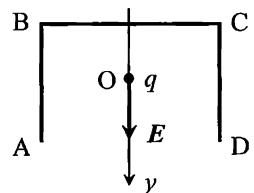
S.1.5.

La forza elettrostatica agente sulla carica puntiforme q è data da:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1)$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrostatico generato in O dalla carica Q distribuita sui tre lati del rettangolo ABCD. Tale campo si può calcolare facilmente applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come somma vettoriale dei campi generati, in O, dalla carica distribuita sui lati AB, BC e CD. Utilizzando uno dei risultati dell'esercizio precedente, si ha che il campo generato in un punto dell'asse da una carica uniformemente distribuita su un filo di lunghezza L , a distanza h dal filo stesso ha modulo dato da (vedi la (6) dell'esercizio precedente):

$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}} \quad (2)$$



ed è diretto come l'asse del filo. Nella (2) λ è la densità di carica lineare. Nel caso in esame i campi generati in O dalla carica distribuita sui lati AB e CD sono uguali in modulo e direzione ed opposti in verso, quindi la loro somma vettoriale è nulla. Pertanto il campo \mathbf{E} generato in O dalla distribuzione di carica assegnata dall'esercizio è dovuto esclusivamente alla carica distribuita sul lato BC. Utilizzando la (2) si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda b}{\pi \epsilon_0 a \sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{u}_y \quad (3)$$

avendo introdotto un asse y coincidente con l'asse del lato BC, come mostrato in figura. Nella (3) la densità lineare di carica, λ , è data da:

$$\lambda = \frac{Q}{2a + b} \quad (4)$$

Utilizzando le relazioni (1), (3) e (4), si ottiene la forza elettrostatica agente sulla carica puntiforme q :

$$\mathbf{F} = \frac{qQb}{\pi \epsilon_0 a (2a + b) \sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{u}_y. \quad (5)$$

S.1.6.

Scegliamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xy disposto come mostrato in figura. Siano dl_1 e dl_2 ($dl_1 = dl_2 = dl$) due elementi infinitesimi della semicirconferenza posti in posizioni simmetriche rispetto all'asse y . I campi elettrici, $d\mathbf{E}_1$ e $d\mathbf{E}_2$, generati da tali elementi nel centro della semicirconferenza hanno la stessa componente y e componenti x uguali in valore assoluto ma di segno opposto. Il campo complessivo, $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$, è quindi diretto come l'asse y ed ha modulo dato da:

$$|d\mathbf{E}| = 2 \frac{\lambda dl}{4\pi \epsilon_0 R^2} \cos \theta. \quad (1)$$

Il campo totale si ottiene integrando la (1), facendo variare θ fra 0 e $\pi/2$, ricordando che $dl = R d\theta$:

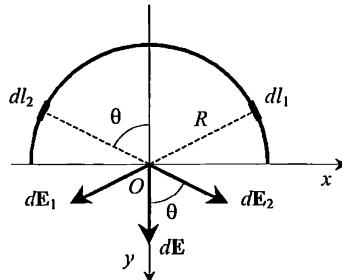
$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R}. \quad (2)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \mathbf{u}_y. \quad (3)$$

S.1.7.

Indichiamo con y l'asse perpendicolare all'anello. Consideriamo due elementi infinitesimi di circonferenza, di lunghezza dl , posti in posizioni diametralmente opposte sulla circonferenza, come mostrato in figura. I campi elettrici, $d\mathbf{E}_1$ e $d\mathbf{E}_2$, generati da tali elementi in un punto P dell'asse y , hanno la stessa componente y e componenti normali a y uguali



in valore assoluto ma di segno opposto. Il campo complessivo, $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$, è quindi diretto come l'asse y ed ha modulo dato da:

$$|d\mathbf{E}| = \frac{2\lambda dl \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1)$$

dove:

$$r^2 = R^2 + y^2, \quad (2)$$

$$\cos \theta = \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Il campo totale si ottiene integrando la (1):

$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^2} \int dl = \frac{\lambda R \cos \theta}{2\epsilon_0 r^2}. \quad (4)$$

Si osservi che, poiché nella (1) si è considerato il contributo di *due* elementi di filo diametralmente opposti, l'integrale che compare nella (4) è stato eseguito su mezza circonferenza.

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda R y}{2\epsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y \quad (5)$$

In prossimità del centro dell'anello si ha $y \ll R$, quindi il campo si può approssimare come segue:

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda y}{2\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

La forza che si esercita su una carica puntiforme negativa, $-Q$, posta in un punto dell'asse nell'intorno del centro dell'anello è quindi data da:

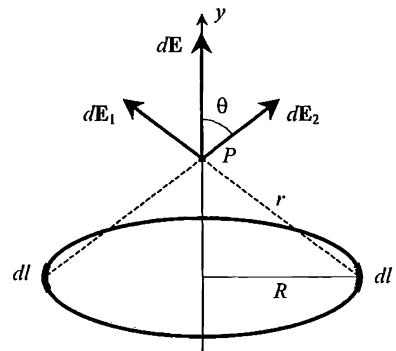
$$\mathbf{F} = -Q\mathbf{E} = -\frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 R^2} y \mathbf{u}_y. \quad (7)$$

L'equazione di moto di tale particella sarà dunque:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 R^2} y, \quad (8)$$

che rappresenta un moto armonico semplice lungo l'asse y , di pulsazione ω data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 m R^2}}. \quad (9)$$



S.1.8.

Per calcolare il potenziale elettrostatico generato dall'anello carico, in un punto P dell'asse, possiamo applicare il principio di sovrapposizione e scrivere:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\lambda d\ell}{r} \quad (1)$$

dove l'integrale è esteso a tutto l'anello di raggio R . La distanza, r , fra l'elemento di linea $d\ell$ e il punto P in cui si vuole calcolare il potenziale non dipende dalla posizione sull'anello, quindi può uscire dal segno di integrale, come pure la densità di carica costante λ . Si ha quindi:

$$V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\ell} d\ell = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (2\pi R) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + y^2}} \quad (2)$$

avendo introdotto un asse y diretto come l'asse dell'anello. Per calcolare l'espressione del campo elettrico in un punto P sull'asse dell'anello, osserviamo che per simmetria esso sarà diretto lungo l'asse y , e cioè $\mathbf{E} = E_y(y)\mathbf{u}_y$; la componente cartesiana E_y del campo sarà legata al potenziale dalla nota relazione:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\lambda Ry}{2\epsilon_0(R^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

dove si è usato per $V(y)$ l'espressione (2). Si ha dunque:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda R y}{2\epsilon_0(R^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y \quad (4)$$

che coincide, ovviamente con il risultato ottenuto nell'esercizio precedente.

S.1.9.

Il campo elettrico generato dal disco uniformemente carico si può calcolare suddividendo il disco in un numero infinito di spire circolari di raggio r ($0 \leq r \leq R$). Il campo elettrico generato da una spira di raggio r uniformemente carica in un punto dell'asse è dato dalla formula (5) dell'esercizio 7:

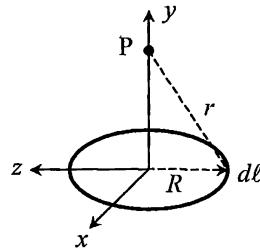
$$\mathbf{E} = \frac{\lambda ry}{2\epsilon_0(r^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y, \quad (1)$$

dove λ è la densità lineare di carica della spira. Indicando con q la carica complessiva della spira, $q = 2\pi r \lambda$, la (1) si può scrivere come segue:

$$\mathbf{E} = \frac{q y}{4\pi\epsilon_0(r^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y. \quad (2)$$

Nel caso in esame si ha che la carica sulla spira di raggio r e spessore dr è data da:

$$q = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2Qr}{R^2} dr, \quad (3)$$



Il campo elettrico $d\mathbf{E}$ generato dalla spira di raggio r e spessore dr in un punto dell'asse del disco si ottiene quindi dalle (2) e (3):

$$d\mathbf{E} = \frac{Qy r dr}{2\pi\epsilon_0 R^2 (r^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y, \quad (4)$$

Il campo elettrostatico generato dalla carica distribuita sull'intero disco si calcola integrando la (4) per r variabile da 0 a R :

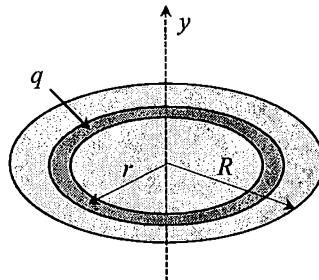
$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Qy \mathbf{u}_y}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + y^2)^{3/2}} dr = \frac{Qy \mathbf{u}_y}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2}} \right]_0^R = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right] \mathbf{u}_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Se indichiamo con σ la densità superficiale di carica, $\sigma = Q/(\pi R^2)$, la (5) si può scrivere come segue:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right] \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

Si noti che dalla (6) si ottiene facilmente il campo generato da un piano infinito uniformemente carico. In questo caso $R \rightarrow \infty$ quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_y. \quad (7)$$



Per calcolare il potenziale elettrostatico in un punto dell'asse del disco applichiamo ancora il principio di sovrapposizione degli effetti. Il potenziale generato in un punto dell'asse (y) da una spira di raggio r uniformemente carica con densità lineare di carica λ è dato dalla formula (2) dell'esercizio precedente:

$$V = \frac{\lambda r}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + y^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + y^2}}. \quad (8)$$

Il potenziale, dV , generato dalla spira di raggio r e spessore dr in un punto dell'asse del disco si ottiene dalle (8) e (3):

$$dV = \frac{Qr}{2\pi\epsilon_0 R^2 \sqrt{r^2 + y^2}} dr. \quad (9)$$

Il potenziale elettrostatico generato dalla carica distribuita sull'intero disco si calcola integrando la (9) per r variabile da 0 a R :

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2 + y^2}} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{r^2 + y^2} \right]_0^R = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{R^2 + y^2} - y \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Anche in questo caso, come nell'esercizio precedente, il campo elettrostatico sull'asse del disco, diretto per simmetria lungo l'asse stesso ($\mathbf{E} = E_y(y)\mathbf{u}_y$), si può calcolare con la relazione:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right], \quad (11)$$

che coincide, ovviamente, con la (5).

S.1.10.

Le forze agenti sulla particella di massa m sono la forza peso, mg , e la forza elettrostatica generata dalla carica Q distribuita sul disco di raggio R . Dal momento che le forze applicate sono conservative, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia. La forza peso può essere trascurata rispetto alla forza elettrostatica. Inizialmente la particella è in quiete, quindi l'energia è di tipo puramente potenziale:

$$\mathcal{E}(i) = -qV(A), \quad (1)$$

dove $V(A)$ è il potenziale elettrostatico generato in A dalla carica Q . Ricordando che il potenziale generato sull'asse da una carica Q uniformemente distribuita su un disco di raggio R , a distanza h dal disco stesso è data dalla (10) dell'esercizio precedente:

$$V(h) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{R^2 + h^2} - h \right] \quad (2)$$

si ottiene:

$$\mathcal{E}(i) = -\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 R} (\sqrt{10} - 3). \quad (3)$$

Quando la particella, lasciata libera di muoversi, raggiunge il centro del disco, l'energia totale è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elettrostatica:

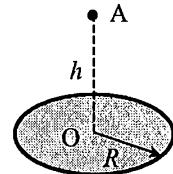
$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}mv^2 - qV(O), \quad (4)$$

dove $V(O)$ è il potenziale al centro del disco ($h = 0$ nella (2)):

$$V(O) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (5)$$

Utilizzando le (3)-(5) e il principio di conservazione dell'energia ($\mathcal{E}(i) = \mathcal{E}(f)$), si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 m R} (4 - \sqrt{10})} \quad (6)$$



S.1.11.

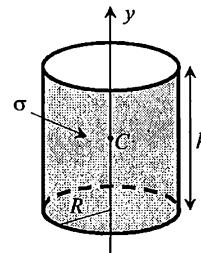
Il problema si risolve facilmente applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. La distribuzione di carica assegnata è equivalente a una carica distribuita, con densità σ , sulla superficie cilindrica e sulle *due* basi del cilindro, a cui si sovrappone una carica distribuita, con densità $-\sigma$, sulla base superiore del cilindro. Il campo elettrico generato

in C dalla carica distribuita sulla superficie cilindrica e sulle *due* basi è nullo per ragioni di simmetria. Infatti le cariche distribuite sulle due basi generano in C due campi elettrici diretti come l'asse del cilindro, uguali in modulo e di verso opposto (vedi il problema 9). La superficie cilindrica si può scomporre in un numero infinito di spire di raggio R . I campi elettrici generati in C dalle coppie di spire i cui centri sono posti in posizioni simmetriche rispetto a C, sono diretti come l'asse del cilindro, hanno lo stesso modulo ma hanno verso opposto (vedi il problema 7).

Il campo elettrico generato in C dalla distribuzione di carica assegnata è quindi il campo generato sull'asse da un disco di raggio R , uniformemente carico con densità di carica $-\sigma$, e quindi è dato da (vedi il problema 9):

$$\mathbf{E}(C) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{h}{\sqrt{4R^2 + h^2}} \right] \mathbf{u}_y, \quad (1)$$

avendo fissato un asse y coincidente con l'asse del cilindro e diretto verso l'alto, come mostrato in figura.



S.1.12.

Dal momento che la massa M del corpo B è molto maggiore di quella del corpo A, possiamo trascurare il moto di B. L'unica forza agente su A è quella elettrostatica esercitata dal corpo B (possiamo infatti trascurare la forza peso rispetto a quella elettrostatica), quindi l'energia totale si conserva. Inizialmente i due corpi si trovano a grande distanza l'uno dall'altro, quindi l'energia di A è di tipo cinetico:

$$\mathcal{E}(\infty) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1)$$

A distanza r da B l'energia del corpo A è data dalla somma dell'energia cinetica e di quella potenziale:

$$\mathcal{E}(r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia è possibile calcolare la distanza r fra A e B in corrispondenza della quale $v = v_0/2$. Uguagliando le (1) e (2), con $v = v_0/2$, si ottiene:

$$r = \frac{2q^2}{3\pi\epsilon_0 mv_0^2}. \quad (3)$$

S.1.13.

L'esercizio si risolve applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Calcoleremo il campo elettrico generato, separatamente, dalle due distribuzioni superficiali di carica. Consideriamo quindi il piano $x = 0$ uniformemente carico, con densità di carica σ_1 . Data la simmetria, il campo elettrico deve essere perpendicolare al piano e deve avere lo stesso modulo ma verso opposto sulle coppie di piani perpendicolari all'asse x , posti in posizioni simmetriche rispetto al piano carico. Applichiamo quindi il teorema di Gauss, considerando una superficie cilindrica perpendicolare al piano $x = 0$, con basi di area

A poste in posizioni simmetriche rispetto al piano (superficie Σ_1 mostrata in figura). Si ottiene:

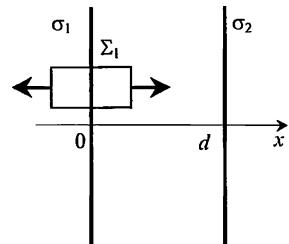
$$\Phi_{\Sigma_1}(E_1) = 2E_1 A = \frac{\sigma_1 A}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}. \quad (1)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} u_x, \quad x < 0 \\ E_1 &= \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} u_x, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Analogamente per il piano $x = d$. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} u_x, \quad x < 0 \\ E &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} u_x, \quad 0 < x < d \\ E &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} u_x, \quad x > d \end{aligned} \quad (3)$$

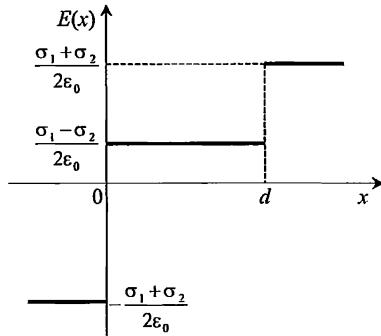


L'andamento del campo elettrico è riportato in figura (si è assunto $\sigma_1 > \sigma_2$). Si osservi che il campo elettrico è discontinuo in corrispondenza delle due distribuzioni superficiali di carica. Calcoliamo ora il potenziale assumendo $V = 0$ per $x = 0$. Dalla definizione di potenziale si ha: $dV = -E dx$, quindi per $x < 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{V(x)} dV &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \int_0^x dx \\ V(x) &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x \end{aligned} \quad (4)$$

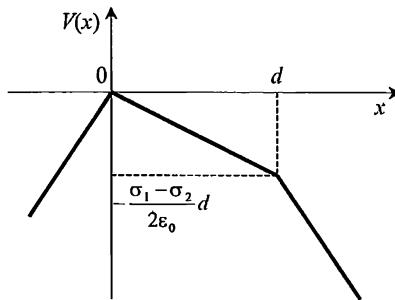
Per $0 < x < d$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{V(x)} dV &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \int_0^x dx \\ V(x) &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} x \end{aligned} \quad (5)$$



Infine, per $x > d$, osservando che il potenziale è continuo in $x = d$, dal momento che il campo elettrico si mantiene limitato in $x = d$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{V(d)}^{V(x)} dV &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \int_d^x dx \\ V(x) &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} d - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} (x - d) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d \end{aligned} \quad (6)$$



L'andamento del potenziale è riportato in figura.

S.1.14.

Data la simmetria della distribuzione di carica, il campo elettrico presenta una simmetria sferica: ha direzione radiale e ha lo stesso valore su superfici sferiche, Σ , di raggio r arbitrario concentriche alla distribuzione di carica. Per determinare il campo elettrico applicheremo il teorema di Gauss. Il campo in un punto interno alla sfera di raggio R si calcola come segue:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (1)$$

Per $0 < r < R$ si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} \quad (2)$$

essendo \mathbf{u}_r il versore radiale uscente dal centro della sfera.

In un punto esterno alla sfera si ha invece:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (3)$$

Per $r > R$ si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad (4)$$

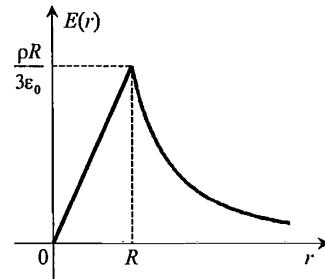
Se indichiamo con Q la carica totale posseduta dalla sfera, $Q = 4\pi R^3 \rho / 3$, il campo esterno si può scrivere come segue:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (5)$$

cioè una sfera con carica Q uniformemente distribuita produce nei punti esterni lo stesso campo elettrico generato da una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera.

L'andamento del campo elettrico in funzione di r è riportato in figura. Calcoliamo ora il potenziale, assumendo $V = 0$ all'infinito. Dalla definizione di potenziale si ha: $dV = -E dr$, quindi, per $r > R$ si ottiene:

$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$



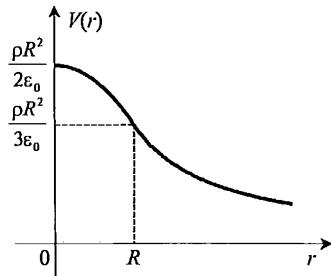
$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (6)$$

Per $0 < r < R$, osservando che il potenziale è continuo in $r = R$, possiamo scrivere:

$$\int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr$$

$$V(r) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2). \quad (7)$$

L'andamento del potenziale in funzione di r è riportato in figura.



S.1.15.

Introduciamo un asse x perpendicolare allo strato carico, con origine nel centro dello strato, come mostrato in figura. Per calcolare il campo elettrico è opportuno applicare il teorema di Gauss. Data la simmetria della configurazione il campo elettrico è parallelo all'asse x , ha lo stesso modulo ma verso opposto sulle coppie di piani perpendicolari all'asse x , posti in posizioni simmetriche rispetto al piano $x = 0$. Per prima cosa calcoliamo il campo esterno. Consideriamo una superficie cilindrica con basi di area A poste in posizioni simmetriche rispetto allo strato (superficie Σ_1 mostrata in figura).

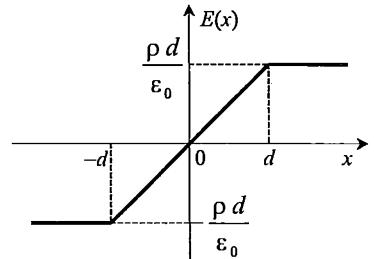
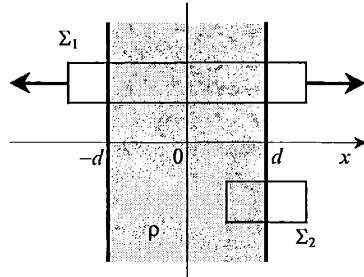
Si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{E}) = 2EA = \frac{\rho}{\epsilon_0} A 2d. \quad (1)$$

Il campo elettrico esterno allo strato è dunque uniforme ed è dato da:

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad x < -d \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho d}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad x > d$$



Per calcolare il campo elettrico all'interno dello strato, $\mathbf{E} = E(x)\mathbf{u}_x$, consideriamo una superficie cilindrica Σ_2 posta a cavallo del piano $x = d$:

$$\Phi_{\Sigma_2}(\mathbf{E}) = -E(x)A + \frac{\rho d}{\epsilon_0} A = \frac{\rho A(d-x)}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

da cui si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x. \quad (4)$$

Possiamo rappresentare graficamente l'andamento del campo elettrico in funzione di x . Calcoliamo ora il potenziale generato dallo strato uniformemente carico, ricordando la definizione di potenziale: $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$. Nel caso in esame si ottiene: $dV = -E dx$. Per $-d < x < d$, assumendo che il potenziale sia nullo per $x = 0$, si ottiene:

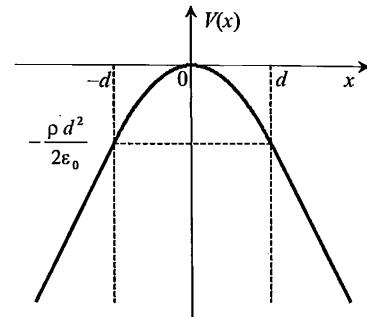
$$\int_0^{V(x)} dV = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^x x dx$$

$$V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2. \quad (5)$$

Per $x > d$, ricordando che il potenziale è continuo in $x = d$, si ha:

$$\int_{V(d)}^{V(x)} dV = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \int_d^x dx$$

$$V(x) = V(d) - \frac{\rho d}{\epsilon_0} (x - d) = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} (2x - d). \quad (6)$$



Analogamente per $x < -d$, ricordando che il potenziale è continuo in $x = -d$, si ha:

$$V(x) = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} (2x + d). \quad (7)$$

L'andamento del potenziale è mostrato in figura. Si noti che per $x = d$ la retta che rappresenta il potenziale per $x > d$ è tangente alla parabola. Analogamente per $x = -d$.

S.1.16.

Il problema si risolve facilmente applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Il campo elettrico \mathbf{E} in P è dato dalla somma vettoriale dei campi \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 generati, separatamente, dai due fili carichi. Il campo elettrico generato da un filo rettilineo indefinito uniformemente carico si calcola utilizzando il teorema di Gauss. Data la simmetria del problema, il campo elettrostatico è dotato di simmetria cilindrica: è radiale ed ha lo stesso modulo in tutti i punti di superfici cilindriche coassiali col filo. Utilizzando come superficie di Gauss una superficie cilindrica di raggio arbitrario r , di altezza arbitraria h , coassiale al filo, applicando il teorema di Gauss si ottiene:

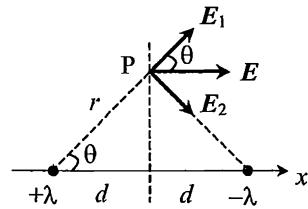
$$\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (2)$$

avendo indicato con \mathbf{u}_r il versore radiale uscente dal filo. Nel caso in esame il campo elettrostatico totale in P è dato da:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (3)$$



dove:

$$|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

Con riferimento alla figura si ha:

$$\mathbf{E} = 2|\mathbf{E}_1| \cos \theta \mathbf{u}_x \quad (5)$$

avendo introdotto un asse x perpendicolare ad entrambi i fili e l'angolo θ tale che:

$$\cos \theta = d/r \quad (6)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda d}{\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_x \quad (7)$$

S.1.17.

Data la simmetria della distribuzione di carica possiamo calcolare il campo elettrostatico applicando il teorema di Gauss. Il campo è radiale ed assume lo stesso modulo su superfici cilindriche coassiali con la distribuzione di carica assegnata. Assumendo come superficie di Gauss Σ una di tali superfici cilindriche di altezza arbitraria h e di raggio r , si ottiene che il flusso uscente del campo \mathbf{E} è dato da:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 2\pi r h E. \quad (1)$$

Per $0 < r < R_1$, applicando il teorema di Gauss si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 0 \quad (2)$$

dal momento che non c'è alcuna carica all'interno della superficie cilindrica di raggio r . Dalle (1) e (2) si ottiene:

$$\mathbf{E} = 0. \quad (3)$$

Procedendo allo stesso modo, per $R_1 < r < R_2$ si ha:

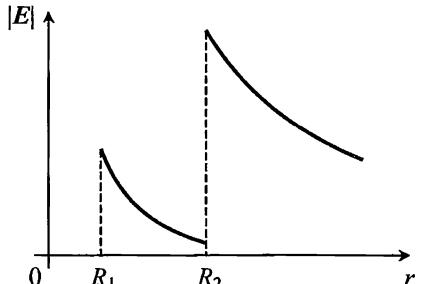
$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{\sigma_1 2\pi R_1 h}{\epsilon_0} \quad (4)$$

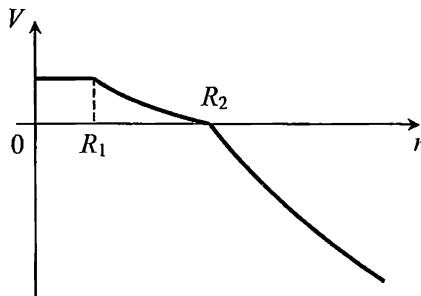
dal momento che la carica interna alla superficie Σ è distribuita sulla superficie cilindrica di raggio R_1 . Utilizzando le (1) e (4) si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (5)$$

essendo \mathbf{u}_r il versore radiale uscente. Infine, per $r > R_2$ si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{2\pi h (\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\epsilon_0} \quad (6)$$





Dalle (1) e (6) si ha:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (7)$$

L'andamento del campo elettrico in funzione di r è mostrato in figura. Si noti che in corrispondenza delle due distribuzioni di carica superficiali il campo elettrostatico è discontinuo. Calcoliamo ora il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica, ricordando che si assume nullo il potenziale per $r = R_2$. Per $r \geq R_2$ si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = - \int_{R_2}^r E dr = - \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{dr}{r} \quad (8)$$

da cui si ricava:

$$V(r) = - \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_2} \quad (9)$$

Per $R_1 \leq r \leq R_2$ si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = - \int_{R_2}^r E dr = - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{dr}{r} \quad (10)$$

da cui:

$$V(r) = - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_2} \quad (11)$$

Infine, per $0 \leq r \leq R_1$, dal momento che il campo elettrostatico è nullo, il potenziale è costante. Poiché per $r = R_1$ il potenziale deve essere continuo (il campo non diverge), si ottiene:

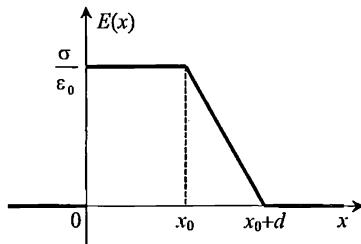
$$V(r) = V(R_1) = - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (12)$$

L'andamento del potenziale elettrostatico in funzione di r è mostrato in figura.

S.1.18.

L'esercizio si risolve applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Calcoleremo quindi il campo elettrostatico generato, separatamente, dalla distribuzione superficiale di carica e dallo strato piano. Il campo totale è la somma vettoriale dei due campi. Per quanto riguarda la distribuzione superficiale di carica, ricordando il risultato dell'esercizio 13, si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x < 0 \\ \mathbf{E}_1 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x > 0\end{aligned}\quad (1)$$



Per quanto riguarda la distribuzione volumetrica di carica, si procede come mostrato nel problema 15, ponendo attenzione al fatto che, nel caso in esame, la densità di carica è $-\rho$, lo spessore dello strato è d e il piano di simmetria dello strato è il piano $x = x_0 + (d/2)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2 &= \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x < x_0 \\ \mathbf{E}_2 &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \left[x - \left(x_0 + \frac{d}{2} \right) \right] \mathbf{u}_x, & x_0 < x < x_0 + d \\ \mathbf{E}_2 &= -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x > x_0 + d\end{aligned}\quad (2)$$

Il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica assegnata è dato da: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Affinché il campo elettrico totale sia nullo nelle regioni $x < 0$ e $x > x_0 + d$ deve risultare:

$$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma = \rho d. \quad (3)$$

In tal caso il campo elettrico totale è dato da:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= 0, & x < 0, x > x_0 + d \\ \mathbf{E} &= \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \right) \mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & 0 < x < x_0 \\ \mathbf{E} &= \left\{ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \left[x - \left(x_0 + \frac{d}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{x - x_0}{d} \right) \mathbf{u}_x, & x_0 < x < x_0 + d\end{aligned}\quad (4)$$

L'andamento del campo elettrico è rappresentato in figura. Si noti che in corrispondenza della distribuzione di carica superficiale il campo elettrico è discontinuo, mentre è continuo in corrispondenza della distribuzione di carica volumetrica. Calcoliamo ora il potenziale assumendo $V = 0$ per $x = x_0 + d$. Dalla definizione di potenziale si ha: $dV = -E dx$. Per $x > x_0 + d$ il potenziale è costante; dal momento che il potenziale è continuo in $x = x_0 + d$, si ha che $V = 0$ per $x > x_0 + d$. Per $x_0 < x < x_0 + d$ si ha:

$$\int_0^{V(x)} dV = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{x_0+d}^x \left(1 - \frac{x - x_0}{d} \right) dx$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 d} [x^2 - 2(x_0 + d)x + (x_0 + d)^2]. \quad (5)$$

Per $0 < x < x_0$, osservando che il potenziale è continuo in $x = x_0$ ($V(x_0) = \sigma d / (2\epsilon_0)$):

$$\int_{V(x_0)}^{V(x)} dV = - \int_{x_0}^x \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{d}{2} + x_0 - x \right) \quad (6)$$

Infine, per $x < 0$ il potenziale è costante. Poiché il potenziale è continuo in $x = 0$ si ottiene:

$$V(x) = V(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{d}{2} + x_0 \right). \quad (7)$$

L'andamento del potenziale è rappresentato in figura. Si noti che in $x = x_0 + d$ la parabola che rappresenta l'andamento del potenziale per $x_0 < x < x_0 + d$ ha tangente orizzontale, mentre in $x = x_0$ tale parabola ha come tangente la retta che rappresenta l'andamento del potenziale per $0 < x < x_0$. Infatti: $E(x_0^-) = E(x_0^+)$ e $E[(x_0 + d)^-] = E[(x_0 + d)^+]$. Si noti inoltre che in corrispondenza della distribuzione superficiale di carica il potenziale è continuo. Calcoliamo ora la forza per unità di superficie agente sul piano $x = 0$. Isoliamo su tale piano un elemento di superficie dS . Il campo elettrico \mathbf{E} in vicinanza del piano può essere decomposto nella somma di due contributi: quello prodotto da dS , \mathbf{E}_{dS} , e quello prodotto dal resto della distribuzione di carica, \mathbf{E}_{tot-dS} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{dS} + \mathbf{E}_{tot-dS} \Rightarrow \mathbf{E}_{tot-dS} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{dS}. \quad (8)$$

Il campo elettrico \mathbf{E} , come abbiamo visto, vale:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad 0 < x < x_0$$

$$\mathbf{E} = 0, \quad x < 0 \quad (9)$$

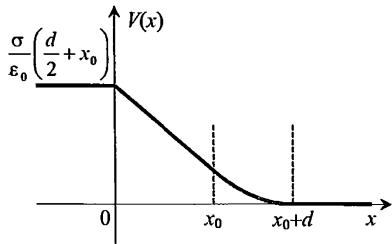
In un punto molto vicino a dS il campo elettrico \mathbf{E}_{dS} prodotto da dS stesso è uguale al campo generato da un piano carico indefinito:

$$\mathbf{E}_{dS} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad x > 0$$

$$\mathbf{E}_{dS} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad x < 0 \quad (10)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E}_{tot-dS} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x \quad x < 0 \text{ e } x > 0 \quad (11)$$



La forza elettrostatica sulla superficie dS è la forza $d\mathbf{F}$ che si esercita su una carica $dq = \sigma dS$ a causa della presenza del campo \mathbf{E}_{tot-dS} . Si ha quindi:

$$d\mathbf{F} = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \mathbf{u}_x, \quad (12)$$

pertanto la pressione elettrostatica è data da:

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}. \quad (13)$$

S.1.19.

Per calcolare il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica assegnata, applichiamo il teorema di Gauss. Data la simmetria cilindrica della distribuzione, anche il campo elettrico presenta la stessa simmetria. Quindi le sue linee di forza sono radiali (perpendicolari all'asse del cilindro) e il campo elettrico ha lo stesso modulo su una superficie cilindrica di raggio generico r coassiale con la distribuzione assegnata. Assumendo come superficie di Gauss una superficie cilindrica Σ di raggio r ($0 < r < R$) e altezza h , si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 2\pi rhE = \frac{\rho}{\epsilon_0}\pi r^2 h \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_r \quad (1)$$

essendo \mathbf{u}_r il versore radiale uscente dall'asse. Per $r > R$ si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 2\pi rhE = \frac{\rho}{\epsilon_0}\pi R^2 h \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (2)$$

L'andamento del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del cilindro è mostrato in figura.

Calcoliamo ora il potenziale generato dalla distribuzione di carica, assumendo che il potenziale sia nullo per $r = 0$. Dalla definizione di potenziale si ha: $dV = -E dr$. Per $0 < r < R$ si ottiene:

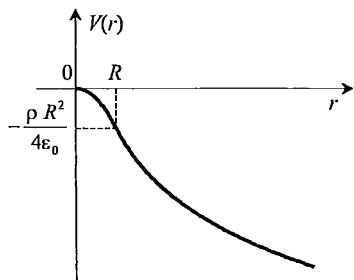
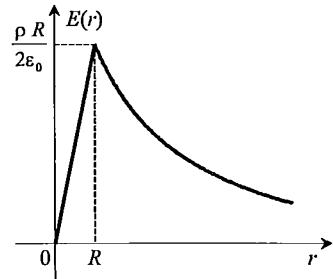
$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^r r dr$$

$$V(r) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2. \quad (3)$$

Per $r > R$, osservando che il potenziale è continuo in $r = R$ ($V(R) = -\rho R^2 / (4\epsilon_0)$) si ha:

$$\int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_R^r \frac{dr}{r}$$

$$V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{R} \right). \quad (4)$$



L'andamento del potenziale in funzione di r è mostrato in figura.

S.1.20.

La configurazione di campo elettrico assegnata si può immaginare come la sovrapposizione di due campi elettrici uniformi di modulo E_0 , il primo presente fra i piani $x = \pm d$, il secondo presente fra i piani $x = \pm 2d$. Un campo elettrico uniforme fra due piani è generato da due distribuzioni plane di carica, uniformi e di segno opposto. Infatti, consideriamo due piani infiniti con densità superficiali da carica $+\sigma$ e $-\sigma$ posti in $x = -2d$ e $x = 2d$, rispettivamente. Il campo elettrico generato si può calcolare applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come mostrato nel problema 13, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 0, & x < -2d, \quad x > 2d \\ \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & -2d < x < 2d \end{aligned} \tag{1}$$

Nel nostro caso deve essere $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_x$ per $-2d < x < 2d$, quindi deve risultare $\sigma = \epsilon_0 E_0$. Ripetendo lo stesso ragionamento nel caso del campo elettrico uniforme $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_x$ nella regione compresa fra i piani $x = -d$ e $x = d$, si conclude che il campo elettrico unidimensionale assegnato dal problema è generato da quattro distribuzioni plane infinite di carica poste sui piani $x = \pm 2d$ e $x = \pm d$, di valore assoluto $\sigma = \epsilon_0 E_0$, di segno positivo per $x = -2d$ e $x = -d$ e di segno negativo per $x = d$ e $x = 2d$.

Calcoliamo ora il potenziale corrispondente, assumendo che il potenziale sia nullo per $x = 0$. Per $-d < x < d$ si ha:

$$\int_0^{V(x)} dV = -2E_0 \int_0^x dx \Rightarrow V(x) = -2E_0 x. \tag{2}$$

Per $d < x < 2d$, osservando che il potenziale è continuo in $x = d$ ($V(d) = -2E_0 d$) si ha:

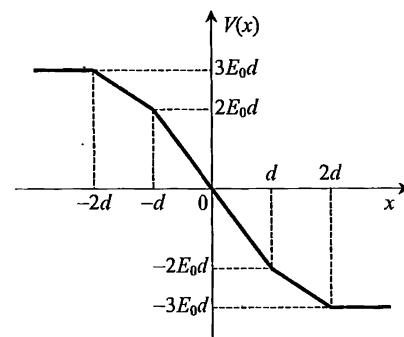
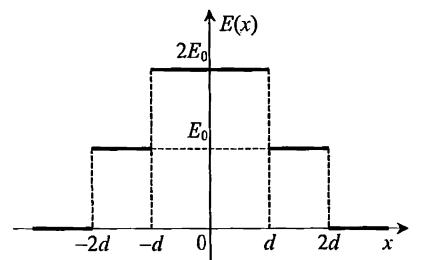
$$\int_{V(d)}^{V(x)} dV = -E_0 \int_d^x dx \Rightarrow V(x) = -E_0(x+d). \tag{3}$$

Per $x > 2d$ il potenziale è costante e continuo in $x = 2d$, quindi:

$$V(x) = -3E_0 d. \tag{4}$$

Procedendo nello stesso modo si ottiene:

$$\begin{aligned} V(x) &= -E_0(x-d), & -2d < x < -d \\ V(x) &= 3E_0 d, & x < -2d \end{aligned} \tag{5}$$



L'andamento del potenziale in funzione di x è mostrato in figura. Calcoliamo infine la velocità, per $x = 2d$, di una particella di carica q e massa m , posta con velocità nulla in $x = 0$. Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_c = E_c(2d) - E_c(0) = \mathcal{L}_{campo}, \quad (6)$$

avendo indicato con \mathcal{L}_{campo} il lavoro compiuto dalle forze del campo, dato per definizione da $\mathcal{L}_{campo} = -q \Delta V = -q[V(2d) - V(0)]$. Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 3qE_0d, \quad (7)$$

da cui si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{6qE_0d}{m}}. \quad (8)$$

S.1.21.

La carica totale Q distribuita all'interno della sfera di raggio R è legata alla densità di carica volumetrica dalla seguente relazione:

$$Q = \int_{\text{sfera}} \rho(r) d\tau, \quad (1)$$

dove $d\tau$ è l'elemento di volume infinitesimo e l'integrale è esteso all'intera sfera. Nel caso in esame di simmetria sferica $d\tau = 4\pi r^2 dr$, quindi:

$$Q = \int_0^R 4\pi ar^3 dr = \pi aR^4. \quad (2)$$

Si ha quindi:

$$a = \frac{Q}{\pi R^4}. \quad (3)$$

Per calcolare il campo elettrico applichiamo il teorema di Gauss. La distribuzione di carica ha simmetria sferica, quindi scegliamo come superficie di Gauss un'arbitraria superficie sferica Σ di raggio r concentrica con la sfera carica. Per $0 < r < R$ si ottiene:

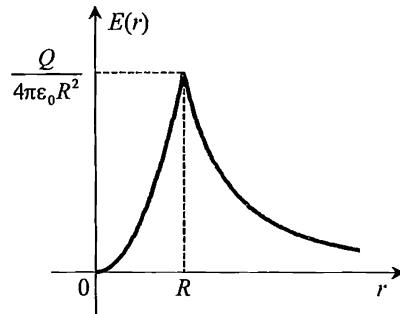
$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

dove Q_{int} è la carica contenuta all'interno della sfera di raggio r , cioè:

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^r 4\pi ar^3 dr = \pi ar^4 = Q \left(\frac{r}{R} \right)^4. \quad (5)$$

Per $0 < r < R$ si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \mathbf{u}_r = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^4} \mathbf{u}_r. \quad (6)$$



Nei punti esterni alla sfera il campo è lo stesso che si avrebbe nel caso in cui la carica \$Q\$ fosse concentrata nel centro della sfera:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r. \quad (7)$$

L'andamento del campo elettrico in funzione della distanza \$r\$ dal centro della sfera è mostrato in figura.

S.1.22.

L'energia elettrostatica della configurazione di carica assegnata si può calcolare utilizzando la formula seguente:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma V \, dS, \quad (1)$$

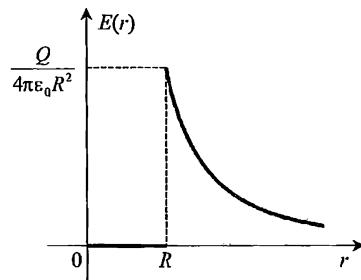
dove l'integrale è esteso alla superficie sferica su cui è presente la carica con densità superficiale \$\sigma\$. Per prima cosa calcoliamo il campo elettrico e il potenziale generato da una carica \$Q\$ distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio \$R\$. Applichiamo il teorema di Gauss, assumendo, data la particolare simmetria della distribuzione di carica, una superficie di Gauss \$\Sigma\$ sferica, di raggio generico \$r\$, concentrica a quella assegnata. Per \$0 < r < R\$ si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Per \$r > R\$ si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (3)$$

come se la carica \$Q\$ fosse concentrata nel centro della superficie sferica. Il potenziale elettrostatico si calcola facilmente. Se assumiamo che il potenziale sia nullo all'infinito si



ottiene, per $r > R$:

$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

Per $0 < r < R$ il potenziale è costante e continuo in $r = R$, quindi:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5)$$

Gli andamenti del campo elettrico e del potenziale in funzione di r sono mostrati in figura. Possiamo ora calcolare l'energia elettrostatica. Utilizzando la formula (1) si ottiene:

$$U = \frac{1}{2} \sigma V \int_S dS = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (6)$$

Si ottiene lo stesso risultato applicando la formula seguente:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon_0 E^2 d\tau, \quad (7)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio in cui è presente il campo elettrico. Ricordando che, data la simmetria sferica, possiamo scrivere $d\tau = 4\pi r^2 dr$, si ottiene:

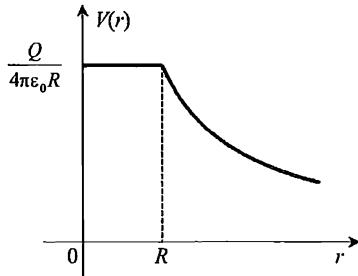
$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (8)$$

Infine, per calcolare l'energia cinetica che le cariche acquisterebbero portandosi a distanza $r > R$ dal centro della sfera se fossero, tutte nello stesso istante, lasciate libere di allontanarsi, si applica il teorema dell'energia cinetica. Dal momento che le uniche forze presenti e che compiono lavoro sono le forze del campo, si ha:

$$\Delta E_c = E_{c,fin} - E_{c,in} = \mathcal{L}_{campo} = -\Delta U = U(R) - U(r). \quad (9)$$

Dl momento che $E_{c,in} = 0$ si ha:

$$E_{k,fin} = U(R) - U(r) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (10)$$



S.1.23.

Il problema si risolve applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. La distribuzione di carica assegnata equivale a una sfera di centro O_1 e raggio R_1 uniformemente carica con densità volumetrica ρ a cui si sovrappone una sfera con centro in O_2 e raggio R_2 uniformemente carica con densità volumetrica $-\rho$. Il campo elettrico generato da una carica distribuita con densità volumetrica costante in una sfera è stato calcolato nel problema 14. In un punto interno al foro si ha:

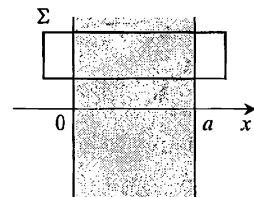
$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_1 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{R}, \quad (1)$$

essendo \mathbf{R} il vettore che congiunge O_1 con O_2 . Si vede quindi che il campo all'interno della cavità è uniforme ed è proporzionale alla distanza fra i centri delle due sfere. Nel caso particolare in cui i due centri coincidano (guscio sferico di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2) il campo elettrico all'interno della cavità è nullo, come risulta evidente applicando direttamente il teorema di Gauss.

S.1.24.

Il campo assegnato è generato da una carica distribuita nella regione di spazio compresa fra i piani $x = 0$ e $x = a$. Nella regione $0 < x < a$ il campo elettrico è dato da:

$$\mathbf{E} = \left(-\frac{E_0}{a} x + E_0 \right) \mathbf{u}_x. \quad (1)$$



Applichiamo il teorema di Gauss in forma locale: $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Nel caso unidimensionale in esame si ottiene:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

da cui si ha, per $0 < x < a$:

$$\rho = \epsilon_0 \frac{dE}{dx} = -\epsilon_0 \frac{E_0}{a}. \quad (3)$$

In $x = 0$ il campo elettrico presenta una discontinuità, quindi in $x = 0$ deve essere presente una distribuzione superficiale di carica σ , il cui valore può essere calcolato facilmente mediante la condizione di raccordo del campo elettrostatico ad una superficie piana di carica, ottenendo $\sigma = \epsilon_0 E_0$. Alternativamente, possiamo calcolare σ applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie cilindrica Σ , con asse parallelo all'asse x , con basi di area arbitraria A poste, come mostrato in figura, a cavallo dell'intera distribuzione di carica. Si ha: $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 0$, dal momento che il campo è nullo per $x < 0$ e $x > a$. Si ha quindi che la carica interna alla superficie Σ è nulla:

$$A(\sigma + \rho a) = 0 \Rightarrow \sigma = -\rho a = \epsilon_0 E_0. \quad (4)$$

S.1.25.

Per calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema di cariche puntiformi in considerazione, seguiamo il processo che porta alla costruzione del sistema in esame. Per spostare una carica si agisce su di essa con una forza esterna uguale e contraria a quella dovuta al campo elettrostatico generato dalle altre cariche del sistema. In tal modo il lavoro complessivo delle due forze agenti sulla carica in esame (quella esterna e il risultante delle forze elettrostatiche dovute alle altre cariche) è nullo, la variazione di energia cinetica è di conseguenza nulla, quindi il lavoro eseguito dalla forza esterna, \mathcal{L}^{est} , si converte totalmente in energia potenziale del sistema. Assegnando, convenzionalmente, energia nulla alla configurazione in cui tutte le cariche sono a distanza infinita fra di loro, si ha: $U = \mathcal{L}^{est}$. Calcoliamo tale lavoro.

Il posizionamento della prima carica, per esempio la carica q in posizione A, viene effettuato compiendo lavoro nullo, poiché inizialmente, quando tutte le cariche del sistema sono a distanza infinita l'una dall'altra, non è presente alcun campo elettrostatico. Il posizionamento della seconda carica, per esempio la carica $2q$ in posizione B, a partire dall'infinito fino alla posizione finale B, viene fatto muovendo la carica nel campo elettrostatico generato dalla prima carica in posizione A. La forza esterna che agisce su $2q$ è data da:

$$\mathbf{F}_1^{est} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_{rA} \quad (1)$$

essendo \mathbf{u}_{rA} il versore uscente da q diretto lungo la congiungente le due cariche. Si ha quindi:

$$\mathcal{L}_1^{est} = \int_{\infty}^B \mathbf{F}_1^{est} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} \int_{\infty}^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (2)$$

Per il trasporto della terza carica, ad esempio la carica q in posizione C, si procede nello stesso modo, ricordando che ora il campo elettrostatico in cui la carica si muove è generato dalle due cariche già collocate nelle rispettive posizioni finali. Possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si immagina dapprima che la carica venga spostata nel campo elettrostatico generato dalla sola carica q posta in A. In tal caso il lavoro esterno è dato da (vedi la (2)):

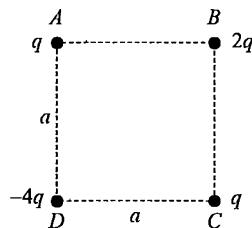
$$\mathcal{L}_{2,A}^{est} = \frac{q^2\sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 a} \quad (3)$$

Si immagina poi di spostare la carica in considerazione nel campo elettrostatico generato dalla sola carica $2q$ posta in B. In tal caso si ottiene:

$$\mathcal{L}_{2,B}^{est} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (4)$$

Il lavoro complessivo è quindi:

$$\mathcal{L}_2^{est} = \frac{q^2\sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (5)$$



A questo punto dobbiamo posizionare l'ultima carica, $-4q$, in posizione D. In tal caso, seguendo lo stesso procedimento, otteniamo:

$$\mathcal{L}_3^{est} = -\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a} - \frac{q^2\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 a} - \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a} \quad (6)$$

L'energia potenziale elettrostatica del sistema di cariche è quindi data da:

$$U = \mathcal{L}_1^{est} + \mathcal{L}_2^{est} + \mathcal{L}_3^{est} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}(8 + 7\sqrt{2}) \quad (7)$$

Il procedimento descritto porta ad una semplice espressione dell'energia potenziale elettrostatica per un sistema di cariche puntiformi:

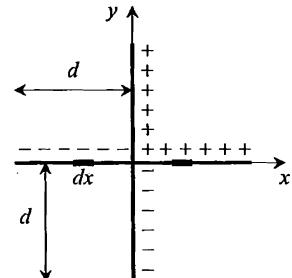
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, j \neq i}^4 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (8)$$

dove r_{ij} rappresenta la distanza fra le cariche i e j ed N è il numero complessivo delle cariche che compongono il sistema in esame. L'applicazione diretta della (8) ($N=4$) porta alla (7).

S.1.26.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xy come mostrato in figura. Consideriamo dapprima la carica distribuita lungo l'asse x , e due elementi infinitesimi dx posti in posizioni simmetriche rispetto all'origine (a distanza x dall'origine stessa). Essi costituiscono un dipolo elettrico di momento $d\mathbf{p} = (2x)\lambda dx \mathbf{u}_x$. Il momento di dipolo complessivo della carica distribuita lungo l'asse x sarà dunque:

$$\mathbf{p}_1 = \lambda \mathbf{u}_x \int_0^d 2x dx = \lambda d^2 \mathbf{u}_x. \quad (1)$$



Allo stesso modo il momento di dipolo della carica distribuita lungo l'asse y sarà dato da:

$$\mathbf{p}_2 = \lambda \mathbf{u}_y \int_0^d 2y dy = \lambda d^2 \mathbf{u}_y. \quad (2)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento di dipolo elettrico complessivo è dato da:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \lambda d^2(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y). \quad (3)$$

S.1.27.

La particella di massa m e carica q è sottoposta all'azione di due forze: la forza $q\mathbf{E}_0$ dovuta al campo applicato e la forza $q\mathbf{E}$ dovuta al campo generato, nella posizione occupata dalla particella, dalla carica $-q$ distribuita in modo uniforme nella sfera di raggio R .

Esaurito il transitorio di applicazione del campo \mathbf{E}_0 , la particella raggiunge una posizione di equilibrio. Si ha quindi che il risultante delle forze ad essa applicate è nullo:

$$q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{E}_0. \quad (1)$$

Come mostrato nel problema 14, il campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica con densità volumetrica ρ in un punto interno alla sfera stessa, è dato da:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}, \quad (2)$$

essendo \mathbf{r} il vettore posizione della particella di massa m . Nel nostro caso $\rho = -3q/(4\pi R^3)$. Si ha quindi:

$$\frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0} = -\mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = -\frac{3\epsilon_0}{\rho} \mathbf{E}_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{q} \mathbf{E}_0. \quad (3)$$

Il momento di dipolo elettrico associato alla distribuzione di carica è dato da:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0. \quad (4)$$

Quando il campo \mathbf{E}_0 viene tolto improvvisamente, la particella di massa m risulta sottoposta alla forza \mathbf{F} data da:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{q^2 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{u}_r, \quad (5)$$

essendo \mathbf{u}_r il versore radiale uscente dal centro della sfera. La legge di moto della particella è data da:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r. \quad (6)$$

Si riconosce che il moto della particella è armonico semplice, con pulsazione ω data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}. \quad (7)$$

Capitolo 2

Elettrostatica dei conduttori

2.1 Problemi

P.2.1.

Si calcoli la capacità di un condensatore cilindrico, costituito da due armature metalliche coassiali di altezza L , raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 , assumendo $L \gg R_2$.

P.2.2.

Si consideri un sistema di due conduttori sferici concentrici, in cui il conduttore interno ha raggio R_1 , mentre il secondo conduttore è un guscio di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 . Si calcoli la capacità di tale condensatore sferico.

P.2.3.

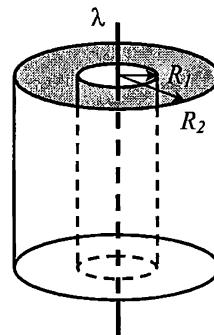
Un conduttore sferico di raggio R , isolato e posto lontano da ogni altro corpo, presenta una carica elettrica Q . Si determini il potenziale elettrostatico V_0 del conduttore, assumendo nullo il potenziale all'infinito. Si calcoli inoltre la capacità del conduttore e la sua energia elettrostatica.

P.2.4.

Si consideri un sistema costituito da tre conduttori sferici concentrici. Il primo è una sfera metallica piena di raggio R_0 ; il secondo è un guscio di raggio interno $2R_0$ e spessore $R_0/2$; il terzo è un guscio di raggio interno $4R_0$ e spessore R_0 . Assumendo che sulla sfera più interna sia posta una carica Q , si determini la differenza di potenziale fra la sfera ed il guscio più esterno. Si verifichi che tale risultato potrebbe essere ottenuto schematizzando il sistema come un unico condensatore, equivalente alla serie di due condensatori sferici.

P.2.5.

Una carica positiva è distribuita uniformemente, con densità lineare λ , su un filo rettilineo di lunghezza infinita. Il filo è posto sull'asse di un conduttore cilindrico cavo, di lunghezza infinita, di raggio interno R_1 ed esterno R_2 , isolato ed inizialmente scarico. Si calcolino:
 (i) il campo elettrico in tutto lo spazio;
 (ii) le densità superficiali delle cariche indotte sulle superfici interna ed esterna del conduttore cilindrico.



P.2.6.

Due conduttori sferici di raggi R_1 e R_2 , posti a grande distanza uno dall'altro, sono caricati con cariche Q_1 e Q_2 , rispettivamente. A parità di carica totale $Q = Q_1 + Q_2$ presente sui due conduttori, si determini per quali valori di Q_1 e Q_2 l'energia elettrostatica del sistema risulta minima. In tale condizione si ricavi la relazione esistente tra i potenziali elettrostatici dei due conduttori.

P.2.7.

Due conduttori sferici di raggi R_1 ed R_2 sono caricati con cariche elettriche Q_1 e Q_2 , rispettivamente, e posti a grande distanza l'uno dall'altro. I due conduttori vengono poi collegati elettricamente mediante un filo conduttore di capacità trascurabile. Si calcolino le cariche elettriche presenti su ciascuno dei due conduttori dopo il collegamento, il loro potenziale elettrostatico, e l'energia dissipata a seguito del trasferimento di carica.

P.2.8.

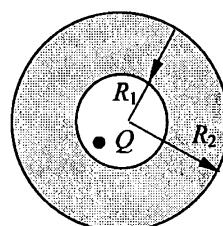
Una carica puntiforme Q viene posta all'interno di un guscio sferico metallico di raggio interno R_1 ed esterno R_2 , isolato ed inizialmente scarico, come mostrato in figura. Detta r la distanza dal centro del conduttore sferico si dica, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- (i) il campo elettrico è nullo per $r > R_1$;
- (ii) il campo elettrico è nullo per $r < R_2$;
- (iii) la carica elettrica totale che si distribuisce sulla superficie interna, di raggio R_1 , del conduttore è $-Q$;
- (iv) le cariche indotte sulle due superfici, di raggi R_1 ed R_2 del conduttore, si distribuiscono con densità superficiale uniforme;
- (v) il potenziale elettrostatico del conduttore è dato da $V_0 = Q/(4\pi\epsilon_0 R_2)$.

Nel caso particolare in cui la carica puntiforme sia posta al centro della cavità sferica, si calcoli il campo elettrico in ogni punto dello spazio.

P.2.9.

Si ripeta l'esercizio precedente nell'ipotesi in cui la sfera conduttrice cava sia mantenuta



a potenziale nullo.

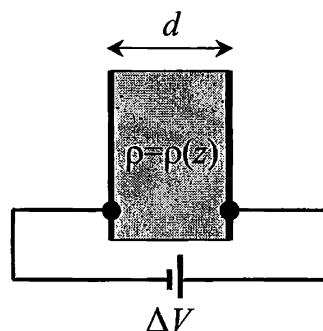
P.2.10.

Si consideri l'energia elettrostatica $U = Q^2/(2C)$ racchiusa in un condensatore piano di capacità C sulle cui armature sia deposita una carica Q . Detto E il modulo del campo elettrostatico presente nel condensatore, si dimostri che U è pari all'integrale della densità di energia $u = \epsilon_0 E^2/2$ esteso al volume racchiuso tra le due armature.

P.2.11.

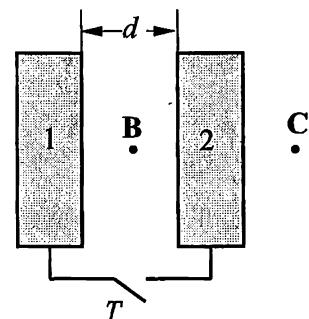
Un condensatore piano è costituito da due armature circolari di raggio R poste a distanza d ($d \ll R$). Le armature sono connesse ad un generatore di differenza di potenziale ΔV , come mostrato in figura. Nello spazio tra le due armature è presente una densità di carica volumetrica ρ che varia nella regione $0 < z < d$ fra le due armature secondo la legge $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/\lambda)$, dove ρ_0 e λ sono costanti. Si calcolino:

- l'espressione del campo elettrico tra le armature del condensatore;
- le cariche indotte sulle due armature del condensatore.



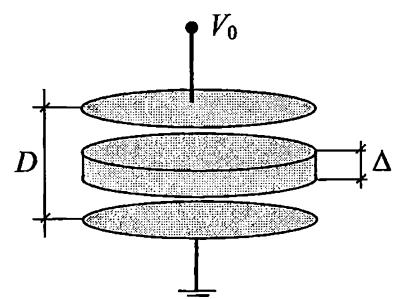
P.2.12.

Due piastre conduttrici uguali, di superficie S , sono disposte parallelamente a distanza d una dall'altra, come mostrato in figura. Sulla piastra 1 viene posta una carica elettrica Q . Trascurando gli effetti di bordo, si determinino le cariche elettriche che si localizzano sulle quattro superfici delle due lastre ed il campo elettrostatico nelle regioni A, B e C di figura. Successivamente l'interruttore T viene chiuso. Ad equilibrio raggiunto, si calcolino le espressioni delle cariche elettriche localizzate sulle quattro superfici nella nuova condizione e la variazione di energia elettrostatica del sistema.



P.2.13.

Un condensatore piano, costituito da due armature piane e parallele di area S poste a distanza D ($D \ll \sqrt{S}$), è connesso ad un generatore che mantiene una differenza di potenziale V_0 fra le armature. Una lastra di conduttore a facce piane e parallele, di spessore Δ ($\Delta < D$), viene inserita internamente al condensatore, come mostrato in figura. Si calcolino la densità superficiale delle cariche indotte sulla lastra e il campo elettrico nelle due zone comprese fra la lastra e le armature.



P.2.14.

Si consideri il problema precedente. Si calcoli la forza totale agente sulla lastra posta fra le armature del condensatore ed il lavoro esterno compiuto per inserire la lastra.

P.2.15.

Un condensatore sferico ha armature di raggi $R_1 = 10$ cm ed $R_2 = 20$ cm, fra le quali vi è il vuoto. Esso viene caricato con un generatore che fornisce una differenza di potenziale $V_0 = 10^3$ V fra le armature. L'armatura esterna viene espansa fino a raggiungere un raggio $R'_2 = 30$ cm mantenendo il sistema collegato al generatore. Si calcoli la variazione di energia elettrostatica conseguente all'espansione della armatura. Ad espansione avvenuta, il generatore viene sconnesso, e l'armatura esterna viene riportata al raggio iniziale R_2 . Calcolare la nuova differenza di potenziale tra le armature del condensatore.

P.2.16.

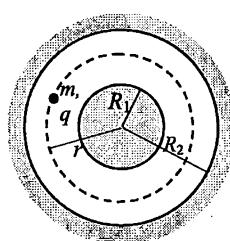
Un condensatore piano, costituito da due armature metalliche di area S poste ad una distanza $x = d_1$, è caricato mediante un generatore che fornisce una differenza di potenziale V_0 fra le due armature. Le armature del condensatore vengono quindi allontanate fino ad una distanza $x = d_2$. Trascurando effetti di bordo, si calcolino la forza di attrazione fra le due armature ed il lavoro esterno compiuto per allontanare le armature assumendo che il generatore venga sconnesso dalle armature dopo che queste sono state caricate.

P.2.17.

Si ripeta l'esercizio precedente assumendo che il condensatore resti collegato al generatore durante lo spostamento delle armature.

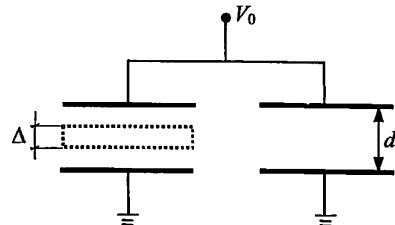
P.2.18.

Un condensatore sferico è costituito da due armature di raggi $R_1 = 20$ cm e $R_2 = 30$ cm, ed è caricato con una carica $Q = 10^{-8}$ C. Una particella di massa $m = 1.672 \times 10^{-27}$ kg e carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C ruota uniformemente su una orbita circolare di raggio $r = 25$ cm, compresa fra le due armature sferiche del condensatore e concentrica ad esse (si veda la figura a lato). Si calcoli la velocità angolare di rotazione della particella nella sua orbita, precisando quale delle due armature del condensatore è a potenziale superiore.

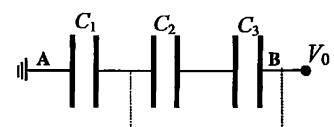


P.2.19.

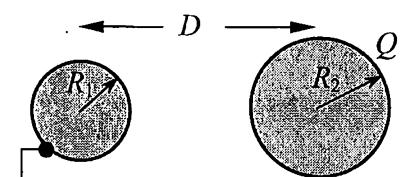
Due condensatori piani uguali, costituiti da due armature circolari di raggio R poste a distanza d in vuoto ($d \ll R$), sono collegati in parallelo, come mostrato in figura, e connessi ad un generatore che stabilisce una differenza di potenziale V_0 tra le armature dei condensatori. Si calcolino le espressioni delle cariche elettriche presenti sulle armature dei condensatori. Un disco conduttore, a facce piane e parallele di spessore $\Delta < d$, viene successivamente inserito internamente ad uno dei condensatori. Sapendo che i due condensatori restano collegati al generatore esterno, si calcolino le espressioni delle cariche elettriche indotte sulle facce della lastra conduttrice e sulle armature dei due condensatori ad equilibrio raggiunto.

**P.2.20.**

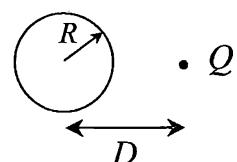
Tre condensatori in serie hanno capacità $C_1 = 0.5 \mu\text{F}$, $C_2 = 0.8 \mu\text{F}$ e $C_3 = 0.1 \mu\text{F}$. Si calcoli la carica elettrica presente sulle armature di ciascun condensatore quando fra i morsetti A e B viene applicata una differenza di potenziale $V_0 = 100 \text{ V}$. Successivamente i condensatori vengono scollegati dal generatore ed il morsetto B viene collegato ad un punto del conduttore che unisce C_1 e C_2 (vedi figura). Si calcolino le cariche elettriche presenti sulle armature dei condensatori dopo il collegamento e l'energia dissipata in tale processo.

**P.2.21.**

Due sferette conduttrici, di raggi R_1 ed R_2 , sono poste nel vuoto a distanza D l'una dall'altra, con $D \gg R_1, R_2$. La sferetta di raggio R_1 è collegata a massa, mentre la sferetta di raggio R_2 è isolata e caricata con una carica Q . Si calcoli la carica elettrica totale q indotta sulla sferetta di raggio R_1 ed il potenziale della sferetta di raggio R_2 .

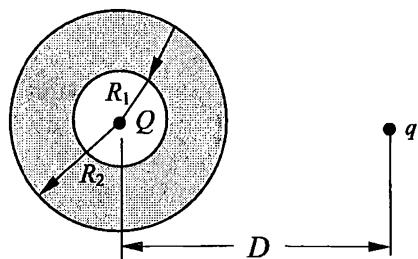
**P.2.22.**

Una sfera conduttrice di raggio R , isolata ed inizialmente scarica, viene posta in prossimità di una carica elettrica puntiforme Q , a distanza $D > R$ dal suo centro. Descrivere qualitativamente le proprietà della distribuzione delle cariche indotte sulla superficie della sfera, e si calcoli il potenziale elettrostatico della sfera.



P 2.23.

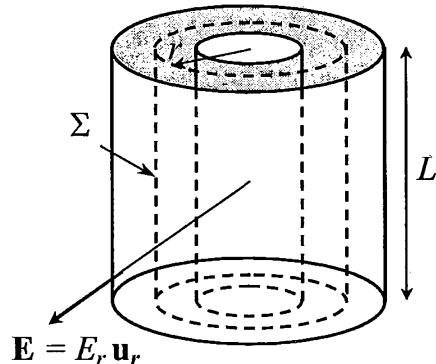
Nel centro di un conduttore sferico cavo, di raggi interno R_1 ed esterno R_2 , isolato e scarico, viene posta una carica elettrica Q . Una seconda carica elettrica q è posta esternamente al conduttore ad una distanza $D > R_2$ da Q . Si calcolino l'espressione del campo elettrico ad una distanza $r < R_2$ dalla carica Q e la distribuzione della carica indotta sulla superficie interna della cavità. Si calcoli poi il potenziale elettrostatico del conduttore.



2.2 Soluzioni

S.2.1.

Per la simmetria cilindrica del problema e trascurando effetti di bordo, il campo elettrico fra le armature del condensatore ha linee di forza radiali e la sua intensità dipende solo dalla distanza r dall'asse del condensatore, cioè $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{u}_r$, dove \mathbf{u}_r è il versore radiale in coordinate cilindriche. Per il calcolo di $E_r(r)$ si applichi il teorema di Gauss assumendo come superficie Gaussiana Σ una superficie cilindrica coassiale al condensatore, di altezza L e raggio r , con $R_1 < r < R_2$ (vedi figura). Se Q è la carica elettrica presente sull'armatura interna ($r = R_1$) del condensatore (e quindi, per induzione completa, $-Q$ la carica presente sull'armatura esterna $r = R_2$), si avrà perciò:



$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 2\pi r L E_r = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

da cui:

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}. \quad (2)$$

La differenza di potenziale $\Delta V = V(R_1) - V(R_2)$ fra l'armatura interna ed esterna del condensatore vale dunque:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E_r(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (3)$$

La capacità del condensatore è, infine:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (4)$$

S.2.2.

Al fine di calcolare la capacità della struttura, supponiamo che inizialmente sia la sfera che il guscio conduttori siano scarichi; successivamente poniamo di caricare la sfera più interna, di raggio R_1 , con una carica Q ; per induzione elettrostatica completa, la superficie interna del guscio conduttore, di raggio R_2 , si caricherà con carica $-Q$; infine, data la neutralità complessiva del guscio, che inizialmente era scarico, sulla superficie esterna di raggio R_3 dovrà comparire nuovamente una carica Q . Il campo elettrico generato dalla configurazione di carica così ottenuta può essere calcolato mediante il teorema di Gauss, sfruttando la simmetria sferica della configurazione. Detta Σ una superficie gaussiana sferica, concentrica alla struttura, di raggio variabile r , il flusso del campo elettrico \mathbf{E} attraverso Σ sarà pari a:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

dove Q_{Σ} è la quantità di carica contenuta all'interno di Σ ed \mathbf{n} la normale a tale superficie. Risulta che:

$$Q_{\Sigma} = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ Q, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & R_2 < r < R_3 \\ Q, & r > R_3 \end{cases} \quad (2)$$

Detto \mathbf{u}_r il versore radiale diretto dal centro della struttura verso l'esterno, a causa della simmetria del sistema dovrà risultare che $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$. Sostituendo tale espressione nella (1), si ottiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella precedente espressione, si ottiene l'andamento del campo elettrico:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases} \quad (4)$$

La differenza di potenziale tra i due conduttori è dunque pari a:

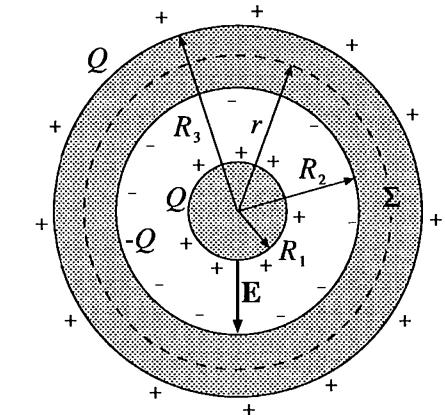
$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}. \quad (5)$$

Si noti che ΔV non dipende da R_3 ; la capacità del sistema infine è pari a:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (6)$$

S.2.3.

La carica elettrica Q si distribuisce sulla superficie del conduttore in modo che il campo elettrico da essa generato *internamente* al conduttore sia nullo. In tal caso, il potenziale V_0 del conduttore sarà uguale in tutti i suoi punti, ed il rapporto $C = Q/V_0$, indipendente



dalla carica Q posta sul conduttore, rappresenta la capacità del conduttore. Nel caso di conduttore sferico, la distribuzione superficiale di carica che annulla il campo entro il conduttore sarà, per la simmetria sferica del problema, *uniformemente* distribuita sulla superficie di raggio $r = R$, con densità $\sigma = Q/(4\pi R^2)$. Infatti, applicando il teorema di Gauss nella forma integrale ad una sfera Gaussiana concentrica al conduttore e di raggio generico r , tenendo conto che le linee di forza del campo elettrico sono radiali, è facile constatare che il campo elettrico generato da tale distribuzione di carica vale $\mathbf{E}(r) = E_r(r)\mathbf{u}_r$, dove \mathbf{u}_r è il versore radiale e:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R. \end{cases} \quad (1)$$

Il potenziale elettrostatico V_0 della sfera, assumendo uguale a zero il potenziale all'infinito, vale perciò:

$$V_0 = \int_R^\infty E_r(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (2)$$

e la capacità del conduttore, di conseguenza:

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (3)$$

Per il calcolo dell'energia elettrostatica U del conduttore si può procedere sostanzialmente in due modi. Il modo più semplice è di ricordare che, per una distribuzione di carica di densità superficiale σ posta su di una superficie Σ ad un potenziale V , l'energia elettrostatica della distribuzione vale:

$$U = \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \sigma V dS; \quad (4)$$

nel caso di un conduttore la superficie su cui la carica è distribuita è equipotenziale e pertanto U assume la semplice espressione:

$$U = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (5)$$

Si noti che, in base alla definizione di capacità, l'energia può essere riscritta anche nella forma:

$$U = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2. \quad (6)$$

Un secondo metodo istruttivo ed assai generale per il calcolo dell'energia elettrostatica è quello di utilizzare la nozione di densità di energia elettrostatica u , che nel vuoto assume la forma $u = (1/2)\epsilon_0 E^2$; l'energia elettrostatica U è dunque ottenuta integrando la densità di energia u su *tutto* lo spazio:

$$U = \int_{\text{tutto spazio}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau, \quad (7)$$

dove dr è l'elemento di volume. Nel nostro caso, conviene svolgere l'integrale che compare nella (7) in coordinate sferiche; ricordando che il volume di una corona sferica, compresa fra i raggi r ed $r + dr$, è $d\tau = 4\pi r^2 dr$, e che il campo elettrico, dato dalla (1), dipende solo dalla distanza r , si ha:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}, \quad (8)$$

che coincide con l'espressione (5).

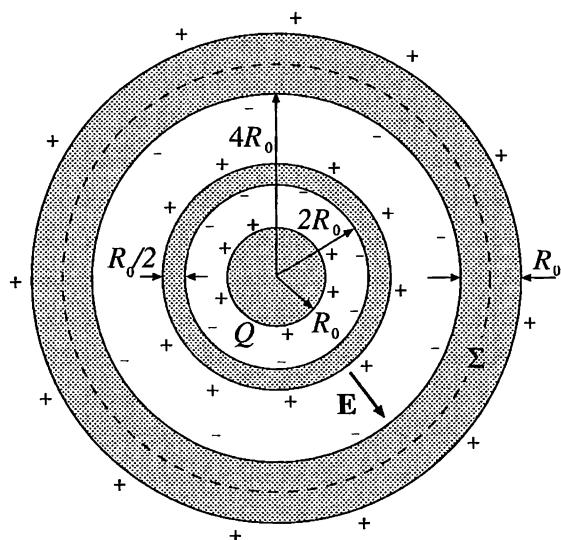
S.2.4.

Supponiamo che inizialmente sia la sfera che i gusci conduttori siano scarichi; successivamente la sfera interna, di raggio R_0 , viene caricata con una carica Q ; per induzione elettrostatica completa, la superficie interna dei due gusci conduttori si caricherà con carica $-Q$; infine, data la neutralità complessiva dei due gusci, che inizialmente erano scarichi, sulla loro superficie esterna dovrà comparire nuovamente una carica Q .

Il campo elettrico generato da tale configurazione di carica può essere calcolato mediante il teorema di Gauss, sfruttando la simmetria sferica della configurazione. Detta Σ una superficie gaussiana sferica, concentrica alla struttura, di raggio r , il flusso del campo elettrico \mathbf{E} attraverso Σ sarà pari a:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \int_\Sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_\Sigma}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

dove Q_Σ è la quantità di carica contenuta all'interno di Σ ed \mathbf{n} la normale a tale superficie. Risulta che:



$$Q_\Sigma = \begin{cases} 0, & r < R_0 \\ Q, & R_0 < r < 2R_0 \\ 0, & 2R_0 < r < 5R_0/2 \\ Q, & 5R_0/2 < r < 4R_0 \\ 0, & 4R_0 < r < 5R_0 \\ Q, & r > 5R_0 \end{cases} \quad (2)$$

Detto \mathbf{u}_r il versore radiale diretto dal centro della struttura verso l'esterno, a causa della simmetria del sistema dovrà risultare che $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$. Sostituendo tale espressione nella (1), si ottiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_\Sigma}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella precedente espressione, si ottiene l'andamento del campo elettrico:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_0 < r < 2R_0 \\ 0 & 2R_0 < r < 5R_0/2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & 5R_0/2 < r < 4R_0 \\ 0 & 4R_0 < r < 5R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > 5R_0 \end{cases} \quad (4)$$

La differenza di potenziale tra la sfera interna ed il guscio più esterno sarà dunque pari a:

$$\Delta V = \int_{R_0}^{4R_0} E(r) dr = \int_{R_0}^{2R_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{5R_0/2}^{4R_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr, \quad (5)$$

dove si è tenuto conto della nullità di $E(r)$ per $2R_0 < r < 5R_0/2$. Dalla precedente espressione si ottiene:

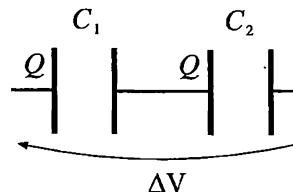
$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{2R_0} \right) + \left(\frac{2}{5R_0} - \frac{1}{4R_0} \right) \right] = \frac{13Q}{80\pi\epsilon_0 R_0}. \quad (6)$$

Il sistema di conduttori può anche essere visto come la serie di due condensatori sferici; difatti la differenza di potenziale totale ΔV ai capi della struttura è pari a:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2, \quad (7)$$

dove ΔV_1 è la differenza di potenziale tra la sfera interna ed il guscio intermedio, mentre ΔV_2 è la differenza di potenziale tra il guscio intermedio ed il guscio esterno. Schematizzando l'insieme della sfera interna e del guscio intermedio come un condensatore di capacità C_1 e considerando l'insieme del guscio intermedio e del guscio esterno come un condensatore di capacità C_2 , potremo allora riscrivere la precedente relazione nella forma:

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right] = \frac{Q}{C}, \quad (8)$$



essendo

$$C = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]^{-1} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \quad (9)$$

la capacità equivalente della serie dei due condensatori. Ricordando che la capacità di un condensatore sferico di raggio interno R_1 ed esterno R_2 vale:

$$C_{\text{sferico}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad (10)$$

si ottiene $C_1 = 8\pi\epsilon_0 R_0$ e $C_2 = 80\pi\epsilon_0 R_0/3$; sostituendo tali valori nella espressione della capacità equivalente, otteniamo $C = 80\pi\epsilon_0 R_0/13$. Da tale valore, si ricava poi la differenza di potenziale complessiva ai capi della serie dei due condensatori, che risulta pari a $\Delta V = Q/C = 13Q/80\pi\epsilon_0 R_0$, in accordo con quanto già determinato in precedenza.

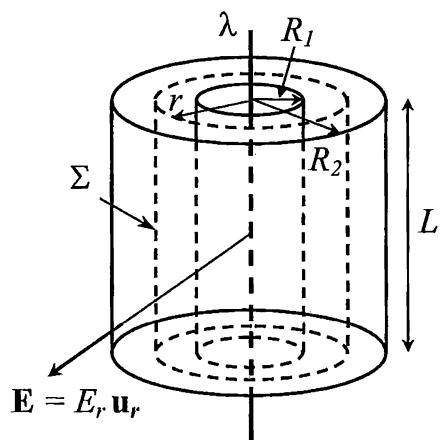
S.2.5.

Indichiamo con σ_1 e σ_2 le densità delle cariche superficiali indotte sulle due superfici cilindriche, di raggi R_1 ed R_2 , rispettivamente, del conduttore cavo. Per la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico avrà linee di forza radiali, ed il modulo del campo elettrico dipenderà solamente dalla distanza r dall'asse del cilindro, cioè potremo scrivere $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{u}_r$, dove \mathbf{u}_r è il versore radiale in geometria cilindrica (vedi figura). Inoltre, sempre per considerazioni di simmetria sarà lecito assumere che σ_1 e σ_2 siano uniformi sulle superfici del conduttore cilindrico. Per determinare σ_1 , σ_2 e l'espressione del campo elettrico $E_r(r)$, consideriamo una superficie Gaussiana cilindrica Σ , coassiale col filo cavo, di raggio r ed altezza L , come mostrato in figura. Se applichiamo il teorema di Gauss alla superficie Σ , riconoscendo che il flusso del campo elettrico attraverso Σ è pari a $2\pi r L E_r(r)$, potremo scrivere:

$$E_r(r) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0 2\pi L r}, \quad (1)$$

dove $Q(\Sigma)$ è la carica elettrica totale contenuta internamente alla superficie Gaussiana Σ . Evidentemente, il valore di $Q(\Sigma)$ dipenderà dal raggio r di Σ , e si avrà precisamente:

$$Q(\Sigma) = \begin{cases} \lambda L & r < R_1, \\ \lambda L + 2\pi R_1 L \sigma_1 & R_1 < r < R_2, \\ \lambda L + 2\pi R_1 L \sigma_1 + 2\pi R_2 L \sigma_2 & r > R_2. \end{cases} \quad (2)$$



Si noti che, dovendo essere nullo il campo elettrico internamente al conduttore, e cioè $E_r = 0$ per $R_1 < r < R_2$, dalla (1) discende che deve essere $Q(\Sigma) = 0$ per $R_1 < r < R_2$.

Dalla (2) si determina dunque la seguente espressione per la densità superficiale di carica σ_1 sulla superficie interna del conduttore:

$$\sigma_1 = -\frac{\lambda}{2\pi R_1}. \quad (3)$$

Per calcolare la densità superficiale di carica σ_2 , occorre imporre che il conduttore abbia una carica totale nulla: infatti esso è isolato ed inizialmente scarico. La carica totale, localizzata sulle superfici laterali interna ed esterna del conduttore cilindrico, deve dunque essere uguale a zero, cioè:

$$2\pi R_1 \sigma_1 + 2\pi R_2 \sigma_2 = 0. \quad (4)$$

Sostituendo l'espressione di σ_1 data dalla (3) nella (4), si ottiene infine per σ_2 la seguente espressione:

$$\sigma_2 = \frac{\lambda}{2\pi R_2}. \quad (5)$$

Infine, dalla (1) e (2) possiamo determinare l'espressione del campo elettrico:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & r < R_1, \\ 0 & R_1 < r < R_2, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & r > R_2. \end{cases} \quad (6)$$

S.2.6.

Indichiamo con Q_1 e con $Q_2 = Q - Q_1$ le cariche elettriche presenti sui due conduttori sferici e con V_1 e V_2 i loro potenziali elettrostatici. L'energia elettrostatica U del sistema, pari alla somma delle energie dei singoli conduttori, è data da:

$$U = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2. \quad (1)$$

Se i due conduttori sono posti a grande distanza l'uno dall'altro, in modo da poter trascurare la mutua induzione elettrostatica fra essi, si avrà $V_1 \simeq Q_1/(4\pi\epsilon_0 R_1) = Q_1/C_1$ e $V_2 \simeq Q_2/(4\pi\epsilon_0 R_2) = Q_2/C_2$, essendo $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$ e $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$ le capacità dei due singoli conduttori sferici. Sostituendo tali espressioni dei potenziali nella equazione (1), si avrà dunque:

$$U = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{(Q - Q_1)^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (2)$$

Se consideriamo la carica totale Q presente sui due conduttori costante, la (2) mostra che l'energia elettrostatica del sistema è una funzione della sola carica Q_1 presente sul conduttore sferico di raggio R_1 , cioè $U = U(Q_1)$. Il calcolo del valore di Q_1 che rende minima l'energia elettrostatica del sistema equivale dunque alla determinazione del minimo della funzione $U = U(Q_1)$. La condizione di stazionarietà:

$$\frac{dU}{dQ_1} = 0 \quad (3)$$

fornisce la seguente equazione per Q_1 :

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q - Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0, \quad (4)$$

da cui:

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q. \quad (5)$$

Si può facilmente constatare che il punto di stazionarietà, dato dalla equazione (5), corrisponde effettivamente ad un punto di minimo per la energia $U = U(Q_1)$. L'espressione corrispondente di $Q_2 = Q - Q_1$ che si ottiene è formalmente uguale alla (5) pur di sostituire gli indici 1 e 2. I potenziali dei due conduttori, $V_1 = Q_1/(4\pi\epsilon_0 R_1)$ e $V_2 = Q_1/(4\pi\epsilon_0 R_2)$, nella condizione di minimo di energia valgono infine:

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}. \quad (6)$$

Il risultato espresso dalla (6) merita un commento: esso mostra che, a parità di carica elettrica totale, la ripartizione di carica fra i due conduttori che rende minima l'energia elettrostatica del sistema è quella che rende uguali i potenziali dei conduttori stessi. Tale risultato è assai generale, e si può dimostrare essere valido per un sistema di N conduttori di forma arbitraria.

S.2.7.

Indichiamo con Q'_1 e Q'_2 le cariche elettriche possedute dai conduttori e con V'_1 e V'_2 i loro potenziali elettrici dopo il collegamento elettrico; si noti che, una volta collegate, le due sfere formano un unico sistema conduttore, la cui superficie deve essere equipotenziale. Inoltre la carica complessiva del sistema deve mantenersi costante. Pertanto le condizioni da imporre per risolvere il problema sono la conservazione della carica elettrica e l'equipotenzialità dei due conduttori dopo il collegamento. Poiché il filo che collega i due conduttori sferici ha una capacità trascurabile, e quindi la carica localizzata su di esso è trascurabile, potremo scrivere:

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2. \quad (1)$$

La condizione di equipotenzialità comporta la relazione:

$$V'_1 = V'_2; \quad (2)$$

per il calcolo dei potenziali V'_1 e V'_2 dei due conduttori, osserviamo che, se trascuriamo la loro mutua induzione elettrostatica (ciò è lecito essendo la distanza dei conduttori grande rispetto ai loro raggi di curvatura), potremo scrivere semplicemente $V'_1 = Q'_1/C_1$ e $V'_2 = Q'_2/C_2$, dove C_1 e C_2 sono le capacità dei due conduttori sferici, presi singolarmente. Poiché la capacità di un conduttore sferico di raggio R è $C = 4\pi\epsilon_0 R$, si avrà:

$$\frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (3)$$

Le equazioni (1) e (3) costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite Q'_1 e Q'_2 , che risolto fornisce:

$$Q'_1 = \frac{R_1(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2} \quad (4)$$

$$Q'_2 = \frac{R_2(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2}. \quad (5)$$

Si noti che tale risultato coincide con quanto ottenuto nel precedente esercizio; pertanto, sulla scorta dei risultati già ottenuti, si deduce che la carica complessiva, dopo il collegamento tra i conduttori, si distribuisce in modo da minimizzare l'energia elettrostatica del sistema.

L'energia dissipata nel collegamento dei conduttori è uguale alla differenza tra l'energia elettrostatica U del sistema prima del collegamento, U_i , e dopo il collegamento, U_f . Ricordando che l'energia elettrostatica di un sistema di N conduttori, carichi con cariche elettriche Q_k e potenziali V_k ($k = 1, 2, \dots, N$), è $U = (1/2) \sum_{k=1}^N V_k Q_k$ e tenuto conto della definizione di capacità, si avrà nel nostro caso:

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} \quad (6)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \frac{Q'^1_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q'^2_2^2}{C_2} = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}, \quad (7)$$

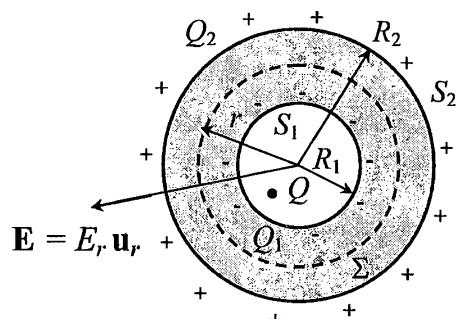
e quindi per l'energia dissipata si ha:

$$U_i - U_f = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(Q_1 R_2 - Q_2 R_1)^2}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)}. \quad (8)$$

S.2.8.

Per rispondere alle domande del problema, occorre anzitutto determinare la distribuzione delle cariche indotte sul conduttore. La presenza della carica puntiforme Q internamente alla cavità del conduttore sferico determina, per il fenomeno dell'induzione elettrostatica, la presenza di cariche superficiali, distribuite con densità superficiali σ_1 e σ_2 , sulle due superfici sferiche S_1 ed S_2 , interna ed esterna, rispettivamente (vedi figura). Le cariche indotte totali, Q_1 e Q_2 , presenti sulle due superfici del conduttore, saranno date da:

$$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 dS_1, \quad Q_2 = \int_{S_2} \sigma_2 dS_2. \quad (1)$$



Il problema del calcolo delle densità superficiali di carica, σ_1 e σ_2 , si può formulare nel seguente modo: le distribuzioni delle cariche indotte su S_1 e S_2 saranno tali che il campo

elettrico totale, generato dalle dette cariche indotte e dalla carica puntiforme Q , sia nullo internamente al conduttore o, che è lo stesso, che il potenziale elettrostatico corrispondente sia costante in tutta la regione del conduttore. È facile mostrare che, indipendentemente dalla posizione della carica Q nella cavità del conduttore, è sempre $Q_1 = -Q$ e $Q_2 = Q$. Si consideri infatti una superficie Gaussiana Σ , interamente contenuta dentro il conduttore, ad esempio una sfera concentrica di raggio r , con $R_1 < r < R_2$ (vedi figura), e si applichi il teorema di Gauss in forma integrale a tale superficie. Poiché sui punti di tale superficie, interna al conduttore, il campo elettrico è zero, necessariamente discende che la carica totale $Q(\Sigma)$ contenuta internamente alla superficie Σ deve essere zero. Tale carica comprende la carica puntiforme Q e l'insieme di cariche indotte sulla superficie S_1 , e cioè $Q(\Sigma) = Q + Q_1 = 0$. Del resto, poiché il conduttore è isolato ed inizialmente scarico, la sua carica elettrica totale si deve conservare, e dunque $Q_1 + Q_2 = 0$, cioè $Q_2 = -Q_1 = Q$. Per determinare la distribuzione di carica σ_2 sulla superficie esterna, osserviamo che, per il principio dello schermo elettrostatico, tale distribuzione è *indipendente* dalla distribuzione delle cariche elettriche presenti sulla superficie S_1 e dalla posizione della carica puntiforme Q : la densità superficiale σ_2 si distribuirà in modo che la superficie $r = R_2$ del conduttore sia equipotenziale. Per una superficie *sferica*, ciò corrisponde ad una distribuzione uniforme di carica, e cioè:

$$\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2^2}. \quad (2)$$

Applicando il teorema di Gauss ad una sfera Σ , concentrica col conduttore e di raggio $r > R_2$, si ottiene facilmente che, per $r > R_2$:

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3)$$

e che il potenziale elettrostatico corrispondente del conduttore è (assumendo, come sempre, il potenziale nullo all'infinito):

$$V_0 = \int_{R_2}^{\infty} E_r(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (4)$$

Si noti che i risultati espressi dalle equazioni (2), (3) e (4) hanno validità generale, per una posizione *arbitraria* della carica puntiforme Q entro la cavità del conduttore. Veniamo ora, invece, alla determinazione della densità di carica σ_1 sulla superficie interna del conduttore. Il problema della determinazione di σ_1 si può formulare nel seguente modo: le cariche indotte sulla superficie $r = R_1$ si disporranno in modo che il campo elettrico generato da dette cariche e dalla carica puntiforme Q posta nella cavità sia zero per $r > R_1$ (azione di schermo). In generale, tale problema non è di facile soluzione, e sarebbe *sbagliato* supporre che, in generale, la carica indotta si distribuisca uniformemente su S_1 , e cioè che σ_1 sia uniforme. L'unico caso in cui ciò accade è quello in cui la carica puntiforme Q è posta esattamente al centro della cavità. In tal caso, infatti, una distribuzione uniforme per σ_1 , con $\sigma_1 = Q/(4\pi R_1^2)$, scherma esattamente la carica puntiforme.

Siamo ora in grado di rispondere alle domande del problema.

- (i) L'affermazione è manifestamente falsa: il campo elettrico è nullo nella regione interna al conduttore, ma non nella regione $r > R_2$.
- (ii) L'affermazione è falsa: il campo elettrico è nullo nella regione interna al conduttore,

ma non nella cavità: l'effetto di schermo agisce cioè per $r > R_1$, non per $r < R_1$.

(iii) L'affermazione è sempre vera, come discusso in precedenza.

(iv) L'affermazione è falsa. Mentre è sempre vero che σ_2 è uniforme, le cariche indotte sulla superficie interna S_1 si distribuiranno con una densità σ_1 uniforme se e solo se la carica puntiforme è posta al centro della cavità.

(v) L'affermazione è corretta.

Nel caso in cui la carica puntiforme è posta al centro della cavità, la densità di carica indotta su S_1 è uniforme, $\sigma_1 = -Q/(4\pi R_1^2)$, e l'espressione del campo elettrico si può calcolare applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica Gaussiana di raggio r arbitrario (vedi figura), ottenendo:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < R_1, \\ 0 & R_1 < r < R_2, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_2. \end{cases} \quad (5)$$

Si osservi che il campo elettrico è discontinuo sulle superfici del conduttore S_1 e S_2 , e tali discontinuità sono uguali a σ_1/ϵ_0 e σ_2/ϵ_0 , rispettivamente, in accordo col teorema di Coulomb per i conduttori.

S.2.9.

Nel caso in cui il conduttore sferico sia mantenuto a potenziale nullo, le considerazioni fatte nel problema precedente vanno modificate. In particolare, la condizione che il potenziale del conduttore sia nullo implica che, questa volta, la densità di carica superficiale σ_2 delle cariche indotte sulla superficie esterna S_2 del conduttore sia zero, e che il campo elettrico sia zero quindi non solo internamente al conduttore, cioè per $R_1 < r < R_2$, ma anche per $r > R_2$. La distribuzione di carica superficiale σ_1 sulla superficie conduttrice interna S_1 ed il campo elettrico presente internamente alla cavità *non* vengono invece modificati dalla condizione che il potenziale del conduttore sia nullo. Ciò premesso, è facile convincersi che: l'affermazione (i) è corretta; l'affermazione (ii) è errata; l'affermazione (iii) è corretta; l'affermazione (iv) è errata; l'affermazione (v) è manifestamente errata (il conduttore è ora a potenziale zero).

Nel caso particolare in cui la carica puntiforme è posta al centro della cavità, σ_1 si distribuisce uniformemente su S_1 e l'espressione del campo elettrico è:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < R_1, \\ 0 & r > R_1. \end{cases} \quad (1)$$

S.2.10.

Se Q è la carica presente sulle armature di un condensatore di capacità C , l'energia elettrostatica che è necessario spendere per caricare il condensatore (che quindi risulta

immagazzinata nel condensatore) è pari a:

$$U = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1)$$

Nel caso di un condensatore piano, costituito da due armature piane e parallele, di area S e poste a distanza d (con $d \ll \sqrt{S}$), la capacità C è data da:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}, \quad (2)$$

per cui, dalle (1) e (2), si ha per il condensatore piano:

$$U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}. \quad (3)$$

Introducendo la densità di energia $u = (1/2)\epsilon_0 E^2$ del campo elettrico, l'energia complessiva associata al campo sarà invece:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon_0 E^2; \quad (4)$$

tal quantità rappresenta l'energia necessaria per creare la distribuzione di campo elettrostatico all'interno del condensatore. Poiché in un condensatore piano, trascurando effetti di bordo, il campo elettrico è uniforme e pari a $E = Q/(\epsilon_0 S)$, detto $\tau = Sd$ il volume della regione di spazio compresa fra le armature, si ha:

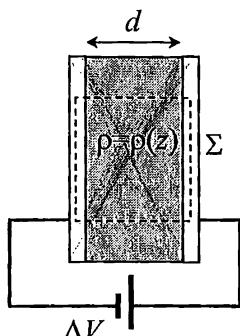
$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{S^2 \epsilon_0^2} Sd = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S} = U; \quad (5)$$

quindi l'energia necessaria a caricare il condensatore equivale all'energia immagazzinata nel campo elettrostatico, nella regione racchiusa dal condensatore stesso.

S.2.11.

Poiché si ha una distribuzione di carica in geometria piana, il campo elettrico fra le armature del condensatore è diretto lungo l'asse z del condensatore e la sua intensità dipende, al più, dalla sola coordinata z , cioè $\mathbf{E} = E_z(z) \mathbf{u}_z$. Per il calcolo del campo elettrico $E_z(z)$ nella regione fra le armature del condensatore ($0 < z < d$), conviene utilizzare la forma differenziale del teorema di Gauss, div $\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, dove ρ è la densità volumetrica di carica presente fra le armature. Poiché nel nostro caso div $\mathbf{E} = dE_z/dz$, si ha con ciò:

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \exp(-z/\lambda). \quad (1)$$



Se integriamo l'equazione (1), si ottiene:

$$E_z(z) = -\frac{\lambda \rho_0}{\epsilon_0} \exp(-z/\lambda) + A, \quad (2)$$

dove A è una costante di integrazione. Per il calcolo di A osserviamo che, poiché il condensatore è connesso ad un generatore che impone ai capi del condensatore una differenza di potenziale ΔV , deve avversi:

$$V(d) - V(0) = - \int_0^d E_z(z) dz = \Delta V. \quad (3)$$

Sostituendo l'espressione del campo elettrico, data dalla equazione (2), nella equazione (3) e svolgendo l'integrale si ottiene:

$$\frac{\rho_0 \lambda^2}{\epsilon_0} [1 - \exp(-d/\lambda)] - Ad = \Delta V, \quad (4)$$

da cui:

$$A = \frac{\rho_0 \lambda^2}{\epsilon_0 d} [1 - \exp(-d/\lambda)] - \frac{\Delta V}{d}. \quad (5)$$

Il campo elettrico fra le due armature vale, in definitiva:

$$E_z(z) = -\frac{\Delta V}{d} + \frac{\rho_0 \lambda^2}{\epsilon_0 d} [1 - \exp(-d/\lambda)] - \frac{\rho_0 \lambda}{\epsilon_0} \exp(-z/\lambda). \quad (6)$$

Le densità superficiali delle cariche elettriche indotte sulle due superfici delle armature del condensatore, poste a $z = 0$ e $z = d$, sono date, per il teorema di Coulomb, da:

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_z(z = 0^+) = -\frac{\Delta V \epsilon_0}{d} + \frac{\rho_0 \lambda^2}{d} [1 - \exp(-d/\lambda)] - \rho_0 \lambda \quad (7)$$

$$\sigma_2 = -\epsilon_0 E_z(z = d^-) = \frac{\Delta V \epsilon_0}{d} - \frac{\rho_0 \lambda^2}{d} [1 - \exp(-d/\lambda)] + \rho_0 \lambda \exp(-d/\lambda), \quad (8)$$

e le cariche elettriche indotte totali, di conseguenza, sono:

$$Q_1 = \pi R^2 \sigma_1, \quad Q_2 = \pi R^2 \sigma_2. \quad (9)$$

Si noti che $Q_1 \neq Q_2$, cioè le due armature non sono in induzione completa. Ciò è dovuto alla presenza di carica nella regione compresa tra le due armature; si noti che, applicando il teorema di Gauss in forma integrale alla superficie cilindrica Σ di figura, con le basi interne ai due conduttori, si ottiene che il flusso del campo attraverso Σ deve risultare nullo. Infatti il campo \mathbf{E} lungo le basi di Σ è nullo essendo all'interno del conduttore, mentre il flusso lungo la superficie laterale si annulla essendo \mathbf{E} parallelo alla superficie stessa. Ciò comporta che la carica elettrica totale contenuta internamente a Σ sia nulla, e cioè che:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \int_0^d \rho(z) dz = 0 \quad (10)$$

come si può verificare considerando le espressioni (7) ed (8).

S.2.12.

Si consideri anzitutto il sistema dei due conduttori sconnessi, e si indichino con $\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2$ le densità delle cariche elettriche superficiali che si distribuiscono sulle quattro facce piane dei due conduttori (si veda la figura). Le densità superficiali si calcolano osservando

che:

- La carica totale sul conduttore 1 è Q , per cui:

$$\sigma_1 + \sigma'_1 = \frac{Q}{S}. \quad (1)$$

- Il conduttore 2 è scarico, e perciò:

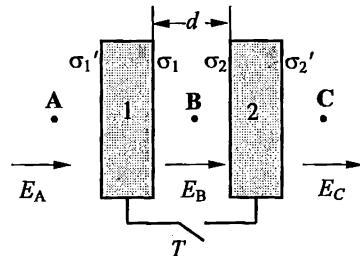
$$\sigma_2 + \sigma'_2 = 0. \quad (2)$$

- Il campo elettrico internamente al conduttore 1, E_1 , è nullo, cioè:

$$E_1 = \frac{\sigma'_1 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma'_2}{2\epsilon_0} = 0, \quad (3)$$

da cui, usando la (2):

$$\sigma'_1 = \sigma_1. \quad (4)$$



Si noti che il campo E_1 è stato calcolato come sovrapposizione dei campi generati dai quattro piani di carica, trascurando effetti di bordo.

- Il campo elettrico E_2 , interno al conduttore 2, è nullo, e dunque:

$$E_2 = \frac{\sigma'_1 + \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma'_2}{2\epsilon_0} = 0, \quad (5)$$

che può scriversi, mediante le (2) e (4), nella forma:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0. \quad (6)$$

Le (1,2,4,6) costituiscono quattro equazioni nelle quattro incognite σ_1 , σ'_1 , σ_2 , e σ'_2 , che risolte danno:

$$\sigma_1 = \sigma'_1 = \frac{Q}{2S} \quad (7)$$

$$\sigma_2 = -\sigma'_2 = -\frac{Q}{2S}. \quad (8)$$

I campi elettrici E_A , E_B ed E_C nelle tre regioni A , B e C di figura si calcolano mediante il principio di sovrapposizione come somma dei campi generati dai quattro piani di cariche. Si ha facilmente:

$$E_A = -\frac{\sigma_1 + \sigma'_1 + \sigma_2 + \sigma'_2}{2\epsilon_0} = -\frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \quad (9)$$

$$E_B = \frac{\sigma_1 + \sigma'_1 - \sigma_2 - \sigma'_2}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \quad (10)$$

$$E_C = \frac{\sigma_1 + \sigma'_1 + \sigma_2 + \sigma'_2}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}. \quad (11)$$

avendo assunto positivo il campo elettrico se orientato dal conduttore 1 verso il conduttore 2.

Si supponga ora di chiudere l'interruttore T , per cui i due conduttori si portano allo stesso potenziale. In tal caso il campo elettrico nella regione di spazio compresa fra i due conduttori (regione B) è nullo: se così non fosse, per simmetria esso sarebbe uniforme e diretto in direzione perpendicolare alle facce dei conduttori, per cui la differenza di potenziale tra essi, valutata come integrale di campo, sarebbe non nulla. Come conseguenza, per il teorema di Coulomb si può subito concludere che le densità superficiali delle cariche indotte σ_1 e σ_2 sulle due superfici interne dei conduttori sono nulle, cioè:

$$\sigma_1 = 0 \quad , \quad \sigma_2 = 0. \quad (12)$$

Le densità di cariche indotte σ'_1 e σ'_2 sulle altre due facce piane dei conduttori si determinano imponendo la conservazione della carica elettrica, e cioè che $\sigma'_1 + \sigma'_2 = Q/S$, e che il campo elettrico generato dai due strati di carica sia nullo nella regione di spazio interna ai due conduttori, e cioè che $\sigma'_1 = \sigma'_2$. Si ha così:

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{Q}{2S}. \quad (13)$$

Si può ottenere lo stesso risultato osservando che, dopo la chiusura dell'interruttore, la carica Q non può che ripartirsi nello stesso modo sulle due lastre 1 e 2, cioè:

$$\left(\begin{array}{l} \sigma_1 + \sigma'_1 = \frac{Q}{2S}, \\ \sigma_2 + \sigma'_2 = \frac{Q}{2S}. \end{array} \right) \quad (14)$$

$$(15)$$

Poichè i campi all'interno dei conduttori 1 e 2 sono nulli, le relazioni (3) e (5) continuano a valere. Le relazioni (3), (5), (14) e (15) costituiscono un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite σ_1 , σ'_1 , σ_2 e σ'_2 che ha come soluzione le (12) e (13).

Si noti che la distribuzione superficiale di cariche indotte dalla chiusura dell'interruttore genera, nelle regioni A e C esterne ai due conduttori, un campo elettrico esattamente uguale a quello che si aveva prima della chiusura dell'interruttore. Dal punto di vista del campo elettrostatico, la chiusura dell'interruttore comporta quindi la scomparsa del campo elettrico nella regione B. L'energia dissipata a seguito della chiusura dell'interruttore è quindi uguale all'energia elettrostatica inizialmente presente nella regione B, e cioè:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_B^2 S d = \frac{Q^2 d}{8\epsilon_0 S}. \quad (16)$$

S.2.13.

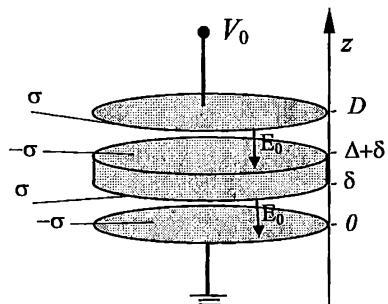
Dopo l'inserimento della lastra, per induzione elettrostatica si inducono sulle due facce della lastra delle cariche superficiali, di segno opposto a quelle presenti sulle armature del condensatore ad esse affacciate, di densità opposte, σ e $-\sigma$,

per mantenere la neutralità della lastra. Con riferimento alla figura, il campo elettrico E nella regione del condensatore compresa tra le armature e le lastre, cioè per $0 < z < \delta$ e per $\delta + \Delta < z < D$, è dato da $E_0 = \sigma/\epsilon_0$, in accordo con il teorema di Coulomb. Il valore della densità σ di cariche indotte si determina perciò imponendo che la differenza di potenziale fra le armature sia uguale al valore V_0 imposto dal generatore, e cioè:

$$V_0 = E_0 \delta + E_0(D - \Delta - \delta), \quad (1)$$

da cui:

$$E_0 = \frac{V_0}{D - \Delta}, \quad \sigma = \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon_0 V_0}{D - \Delta}. \quad (2)$$



S.2.14.

Per il calcolo della forza agente sulla lastra, osserviamo che su ciascuna delle due facce si esercita una pressione elettrostatica pari a $\sigma^2/(2\epsilon_0)$. Quindi sulla superficie posta in $z = \delta$ (vedi la figura dell'esercizio precedente) agisce una forza \mathbf{F}_1 data da:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z, \quad (1)$$

mentre sulla superficie posta in $z = \Delta + \delta$ agisce una forza \mathbf{F}_2 data da:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z. \quad (2)$$

Quindi la forza totale agente sulla lastra, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, è nulla.

Per il calcolo del lavoro esterno \mathcal{L}_{ext} compiuto per inserire la lastra, osserviamo che, per il teorema dell'energia cinetica, supponendo all'inizio ed alla fine nulla l'energia cinetica della lastra, deve avversi:

$$\mathcal{L}_{ext} + \mathcal{L}_c = 0, \quad (3)$$

dove \mathcal{L}_c è il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico agenti sulla lastra mentre essa viene inserita. Il sistema in considerazione non è isolato, dato che un generatore di tensione è collegato al condensatore per tutta la durata del processo di inserimento della lastra. Quindi il lavoro meccanico compiuto dalle forze del campo è compiuto non solo a spese dell'energia elettrostatica del condensatore, ma anche a spese del generatore esterno. Il principio di conservazione dell'energia si scrive quindi come segue:

$$\mathcal{L}_c + \Delta U_V = \mathcal{L}_{gen}, \quad (4)$$

dove ΔU_V rappresenta la variazione dell'energia elettrostatica del condensatore mantenuto a una differenza di potenziale V_0 costante, e \mathcal{L}_{gen} è il lavoro compiuto dal generatore esterno. Calcoliamo dapprima ΔU_V . Prima dell'inserimento della lastra l'energia elettrostatica del condensatore è data da:

$$U_{V,i} = \frac{1}{2} Q' V_0, \quad (5)$$

avendo indicato con Q' la carica presente inizialmente sulle armature del condensatore. Dopo l'inserimento della lastra si ha:

$$U_{V,f} = \frac{1}{2} Q V_0, \quad (6)$$

dove Q rappresenta la carica sulle armature del condensatore dopo l'inserimento della lastra. Si ha quindi:

$$\Delta U_V = U_{V,f} - U_{V,i} = \frac{1}{2} V_0(Q - Q'). \quad (7)$$

Calcoliamo ora il lavoro compiuto dal generatore. Dato che a seguito dell'inserimento della lastra la carica sulle armature del condensatore è variata da Q' a Q , il lavoro erogato dal generatore è dato da:

$$\mathcal{L}_{gen} = V_0(Q - Q'). \quad (8)$$

Dalle relazioni (4), (7) e (8) si ha:

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{gen} - \Delta U_V = \frac{1}{2} V_0(Q - Q') = \Delta U_V. \quad (9)$$

Quindi, dalle relazioni (3) e (9) si ricava il lavoro esterno:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = -\Delta U_V. \quad (10)$$

Calcoliamo esplicitamente ΔU_V . La carica presente sulle armature del condensatore prima dell'inserimento della lastra è data da:

$$Q' = C' V_0 = \epsilon_0 \frac{S}{D} V_0. \quad (11)$$

Dopo l'inserimento della lastra si hanno due condensatori in serie la cui capacità totale C è data da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{D - \Delta - \delta}{\epsilon_0 S} + \frac{\delta}{\epsilon_0 S} = \frac{D - \Delta}{\epsilon_0 S}, \\ C &= \epsilon_0 \frac{S}{D - \Delta}. \end{aligned} \quad (12)$$

La carica presente sulle armature dopo l'inserimento della lastra è quindi data da:

$$Q = C V_0 = \epsilon_0 \frac{S}{D - \Delta} V_0. \quad (13)$$

La variazione dell'energia elettrostatica è quindi:

$$\Delta U_V = \frac{1}{2} V_0(Q - Q') = \frac{1}{2} V_0^2 \epsilon_0 S \left(\frac{1}{D - \Delta} - \frac{1}{D} \right). \quad (14)$$

Quindi:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\Delta U_V = -\frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2} \frac{\Delta}{D(D-\Delta)}. \quad (15)$$

Si osservi che, poiché \mathcal{L}_{ext} è negativo, la lastra è risucchiata dentro il condensatore.

S.2.15.

Indicando con C_i e C_f le capacità del condensatore sferico nella condizione iniziale e finale, la variazione di energia elettrostatica del condensatore a seguito della espansione dell'armatura sarà data da:

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_f V_0^2 - \frac{1}{2} C_i V_0^2 = \frac{1}{2} V_0^2 \left(\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R'_2}{R'_2 - R_1} - \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \simeq -2.78 \times 10^{-6} \text{ J}, \quad (1)$$

dove abbiamo utilizzato, per la capacità di un condensatore sferico di raggi interno R_1 ed esterno R_2 , l'espressione $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$.

Ad espansione avvenuta, la carica presente sulle armature del condensatore varrà:

$$Q_f = V_0 C_f = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R'_2}{R'_2 - R_1} V_0. \quad (2)$$

Se il condensatore viene scollegato al generatore e l'armatura esterna contratta nella sua posizione iniziale, la carica presente sulle armature resta invariata, e la nuova differenza di potenziale che si stabilisce fra esse varrà:

$$V'_0 = \frac{Q_f}{C_i} = V_0 \frac{C_f}{C_i} = V_0 \frac{R'_2}{R_2} \frac{R_2 - R_1}{R'_2 - R_1} = 750 \text{ V}. \quad (3)$$

S.2.16.

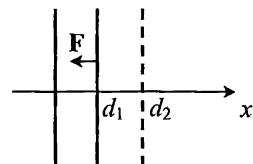
Indichiamo con x la distanza che separa le due armature del condensatore piano. Su ciascuna armatura si esercita una pressione elettrostatica p pari a $p = \sigma^2 / (2\epsilon_0)$, essendo $\sigma = Q/S$ la densità superficiale delle cariche libere presenti sulle armature e Q la carica inizialmente presente su esse.

Poiché per $x = d_1$ il condensatore è caricato con un generatore che fornisce una differenza di potenziale V_0 , ricordando che la capacità di un condensatore piano è $C(x) = \epsilon_0 S/x$, avremo:

$$Q = C_1 V_0 = \frac{\epsilon_0 S V_0}{d_1}, \quad (1)$$

dove C_1 è la capacità iniziale del condensatore, cioè per $x = d_1$. La forza di attrazione agente su ciascuna armatura vale perciò:

$$F = pS = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2}, \quad (2)$$



quindi si ha:

$$\mathbf{F} = -\frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2} \mathbf{u}_x, \quad (3)$$

avendo assunto un asse x come indicato in figura. Si noti che tale forza è costante, indipendente dalla distanza fra le armature, dal momento che il sistema è isolato e quindi Q è costante. Il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico quando la distanza fra le armature viene aumentata da $x = d_1$ a $x = d_2$ è dato da:

$$\mathcal{L}_c = -\frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2} (d_2 - d_1). \quad (4)$$

Per allontanare le armature bisogna applicare una forza esterna; affinchè il lavoro complessivo compiuto dalle forze del campo e dalla forza esterna sia nullo e non vi sia quindi variazione dell'energia cinetica del sistema, si deve avere:

$$\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{ext} = 0, \quad (5)$$

quindi:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2} (d_2 - d_1). \quad (6)$$

E' interessante osservare che si poteva giungere al risultato espresso dall'espressione precedente mediante considerazioni di carattere energetico. Dal momento che il sistema è isolato, le forze elettrostatiche compiono lavoro a spese dell'energia elettrostatica del sistema, quindi:

$$\mathcal{L}_c = -\Delta U. \quad (7)$$

Il lavoro esterno è quindi dato dalla seguente equazione:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = \Delta U = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) Q^2 = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2} (d_2 - d_1), \quad (8)$$

essendo $C_2 = \epsilon_0 S / d_2$ la capacità finale del condensatore.

S.2.17.

Se nello spostamento dell'armatura il condensatore resta collegato al generatore, la carica elettrica presente sulle armature varia nello spostamento secondo la legge:

$$Q(x) = C(x)V_0 = \frac{\epsilon_0 S V_0}{x}, \quad (1)$$

dove x è la distanza corrente fra le due armature. In tal caso, la forza di attrazione fra le armature sarà:

$$F = pS = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2x^2}, \quad (2)$$

quindi:

$$\mathbf{F} = -\frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2x^2} \mathbf{u}_x, \quad (3)$$

avendo introdotto un asse x come nella figura dell'esercizio precedente. Il lavoro compiuto dalle forze del campo a seguito dell'allontanamento delle armature è quindi dato da:

$$\mathcal{L}_c = -\frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right). \quad (4)$$

Come nel caso dell'esercizio precedente si ha poi:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right). \quad (5)$$

Anche in questo caso si poteva giungere al risultato precedente mediante considerazioni energetiche, e cioè \mathcal{L}_e è uguale ed opposto al lavoro meccanico \mathcal{L} compiuto dalla forza elettrostatica di attrazione agente sull'armatura nello spostamento. Tuttavia, in questo caso sarebbe errato porre $\mathcal{L} = -\Delta U$, essendo ΔU la variazione di energia elettrostatica del condensatore. Per capire ciò, occorre osservare che ΔU è uguale, a parte un cambio di segno, al lavoro compiuto da *tutte* le forze elettrostatiche agenti sul sistema, e che, nello spostamento dell'armatura, si ha il trasferimento di una quantità di carica $\Delta Q = Q(x = d_2) - Q(x = d_1) = Q_2 - Q_1$ da una armatura, a potenziale zero, all'altra armatura, a potenziale V_0 . Tale trasferimento di carica viene compiuto dal generatore esterno, che rimane collegato al condensatore. Dato che a seguito dell'allontanamento delle armature la carica del condensatore è variata da Q_1 a Q_2 , il lavoro erogato dal generatore è dato da:

$$\mathcal{L}_{gen} = V_0(Q_2 - Q_1). \quad (6)$$

Dal momento che la variazione di energia elettrostatica del condensatore è data da:

$$\Delta U_V = \frac{1}{2} V_0(Q_2 - Q_1), \quad (7)$$

risulta:

$$\mathcal{L}_{gen} = 2\Delta U_V. \quad (8)$$

Per il principio di conservazione dell'energia si ha (vedi l'esercizio (2.14)):

$$\mathcal{L}_c + \Delta U_V = \mathcal{L}_{gen}, \quad (9)$$

quindi:

$$\mathcal{L}_c = -\Delta U_V + \mathcal{L}_{gen} = \Delta U_V. \quad (10)$$

Il lavoro esterno è quindi dato da:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = -\Delta U_V = \frac{1}{2} V_0^2 [C(x = d_1) - C(x = d_2)] = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right). \quad (11)$$

S.2.18.

Fra le armature del condensatore si stabilisce un campo elettrico con linee di forza radiali e di modulo:

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1)$$

dove Q è la carica elettrica presente sulle armature ed r la distanza dal centro delle armature sferiche ($R_1 < r < R_2$). Se una particella di carica q e massa m ruota con velocità angolare ω su un'orbita circolare di raggio r , la forza centripeta $qE_r(r)$ dovuta al campo elettrostatico presente fra le armature del condensatore deve uguagliare il prodotto della massa m della particella e della sua accelerazione normale, $\omega^2 r$, cioè:

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\omega^2 r, \quad (2)$$

da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mr^3}} \simeq 7.42 \times 10^5 \text{ rad/s.} \quad (3)$$

Si osservi che l'armatura esterna è carica positivamente, mentre quella interna negativamente, essendo la forza elettrostatica centripeta diretta verso il centro dell'orbita circolare di moto.

S.2.19.

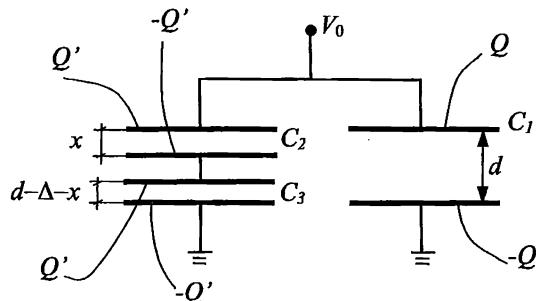
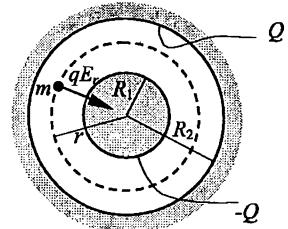
La carica presente sulle armature dei due condensatori varrà, all'inizio:

$$Q = CV_0 = \frac{\epsilon_0\pi R^2 V_0}{d}, \quad (1)$$

essendo $C = \epsilon_0\pi R^2/d$ la capacità di ciascuno dei due condensatori. Quando in uno dei due condensatori viene inserito un disco metallico di spessore $\Delta < d$, la situazione è quella indicata in figura. In tal caso, si ha un sistema di tre condensatori, di capacità $C_1 = C$, $C_2 = \epsilon_0\pi R^2/x$ e $C_3 = \epsilon_0\pi R^2/(d - \Delta - x)$,

essendo x la distanza della superficie del disco da una delle armature del condensatore (vedi figura). Si noti che i condensatori 2 e 3 costituiscono una serie di condensatori di capacità equivalente $C_{eq} = 1/(1/C_2 + 1/C_3) = \epsilon_0\pi R^2/(d - \Delta)$. La distribuzione della carica nelle armature dei condensatori e sulle facce del disco conduttore sono quelle mostrate in figura, dove manifestamente Q è ancora dato dalla equazione (1), mentre Q' vale:

$$Q' = C_{eq}V_0 = \frac{\epsilon_0\pi R^2 V_0}{d - \Delta}. \quad (2)$$



S.2.20.

I tre condensatori sono in serie, per cui, detta Q la carica presente sulle armature dei condensatori, deve avversi:

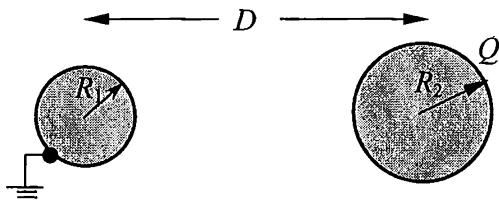
$$Q = V_0 C = \frac{V_0}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \simeq 7.55 \mu\text{C}, \quad (1)$$

dove $C = (1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3)^{-1} \simeq 0.0755 \mu\text{F}$ è la capacità equivalente dei tre condensatori in serie. Se i condensatori di capacità C_2 e C_3 vengono collegati come in figura, la carica sulle armature di essi si porterà a zero, mentre la carica presente sulle armature del condensatore di capacità C_1 resterà invariata. La energia dissipata U_{diss} nel processo sarà perciò uguale all'energia inizialmente immagazzinata nei condensatori di capacità C_2 e C_3 , e cioè:

$$U_{diss} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_3} \simeq 320 \mu\text{J}. \quad (2)$$

S.2.21.

Questo problema riguarda il fenomeno di induzione elettrostatica fra due sfere conduttrici, di raggi R_1 ed R_2 , poste ad una distanza D , nelle quali la prima sfera è mantenuta a potenziale nullo mentre la seconda è isolata e presenta una carica elettrica Q (vedi figura). Osserviamo che, pur essendo il potenziale della sfera di raggio R_1 nullo, sarebbe errato concludere che la carica elettrica presente su essa sia zero, a causa della presenza della seconda sfera carica. Se indichiamo con σ_1 e con σ_2 le densità superficiali delle cariche elettriche sulle superfici delle sfere conduttrici di raggi R_1 ed R_2 , rispettivamente, e con q la carica elettrica totale incognita presente sulla sfera a massa, si avrà evidentemente:



$$q = \int_{S_1} \sigma_1 dS_1, \quad Q = \int_{S_2} \sigma_2 dS_2, \quad (1)$$

dove gli integrali sono estesi alle superfici S_1 ed S_2 delle due sfere, con ovvio significato dei simboli. Si noti che le densità di carica *non* saranno uniformemente distribuite sulle due superfici sferiche S_1 ed S_2 a causa del fenomeno dell'induzione elettrostatica; la loro distribuzione sarà invece tale da rendere il potenziale V_1 della sfera di raggio R_1 uguale a zero, essendo tale conduttore collegato a massa. Ricordando l'espressione del potenziale elettrostatico generato da distribuzioni superficiali di carica, potremo cioè scrivere:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma_1}{r} dS_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma_2}{r} dS_2, \quad (2)$$

dove r è la distanza del punto corrente di integrazione dal centro della sfera S_1 . Si noti ora che, nel primo integrale a secondo membro nell'equazione (2), la distanza r assume il valore costante R_1 pari al raggio della sfera S_1 , mentre nel secondo integrale nella equazione (2),

usando l'approssimazione $D \gg R_1, R_2$ data nel testo dell'esercizio, potremo assumere $r \simeq D$. Si avrà dunque:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 D} \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 = 0. \quad (3)$$

Utilizzando le (1), la relazione (3) fornisce dunque una equazione nell'incognita q :

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D} = 0, \quad (4)$$

che dà:

$$q = -\frac{R_1}{D} Q. \quad (5)$$

Per determinare l'espressione del potenziale V_2 della sfera S_2 , valutiamo, come nella (2), il potenziale elettrostatico nel centro della sfera S_2 ; avremo cioè:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma_1}{r'} dS_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma_2}{r'} dS_2, \quad (6)$$

dove ora r' è la distanza del punto corrente di integrazione dal centro della sfera S_2 . Procedendo come sopra, notiamo che possiamo ora porre $r' \simeq D$ nel primo integrale a secondo membro della equazione (6), e $r' = R_2$ nel secondo integrale. Quindi si otterrà, con l'uso delle (1) e (5):

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{R_1}{D^2} \right). \quad (7)$$

S.2.22.

La presenza della carica puntiforme Q in prossimità della sfera conduttrice, isolata ed inizialmente scarica, determinerà per il fenomeno dell'induzione elettrostatica una ridistribuzione di carica sulla superficie del conduttore in modo che il campo elettrico generato da tale distribuzione superficiale di carica sia, *internamente* alla sfera conduttrice, uguale ed opposto al campo elettrico generato dalla carica puntiforme Q . Se, ad esempio, la carica Q è positiva, ci si aspetta che la densità superficiale σ delle cariche indotte sia negativa nella porzione della superficie sferica affacciata alla carica e positiva dall'altro lato. Inoltre, poiché il conduttore è isolato, la carica totale sul conduttore dovrà conservarsi, e dovrà in particolare essere uguale a zero, essendo il conduttore inizialmente scarico, cioè:

$$\int_S \sigma dS = 0, \quad (1)$$

essendo S la superficie sferica del conduttore. Il problema della determinazione della distribuzione di carica indotta σ può essere svolto in maniera analitica mediante un metodo, detto delle cariche immagini, discusso in molti testi di elettrostatica; come complemento discuteremo tale metodo al termine dell'esercizio. Tuttavia, se, come ci chiede il problema, ci si limita al calcolo del potenziale V_0 della sfera conduttrice, possiamo procedere più

semplicemente osservando che, per il principio di sovrapposizione, il potenziale elettrostatico al centro della sfera conduttrice, assumendo nullo il potenziale all'infinito, è dato da:

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r} dS, \quad (2)$$

dove r è la distanza fra il punto corrente di integrazione sulla superficie sferica S ed il centro della sfera stessa. Si noti che la scelta del calcolo del potenziale V_0 nel centro della sfera, e non in un suo altro punto (si rammenti che in un conduttore il potenziale assume lo stesso valore in tutti i suoi punti), consente di svolgere in maniera semplice l'integrale che compare nella (2). Infatti, in tal caso, è $r = R$, e dunque:

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_S \sigma dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D}, \quad (3)$$

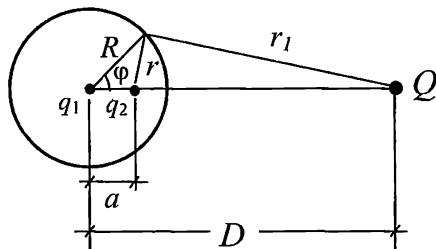
dove abbiamo usato la (1).

Complemento: il metodo delle cariche immagini.

Il potenziale in un generico punto P dello spazio sarà dato, per il principio di sovrapposizione, da:

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r_2} dS, \quad (4)$$

dove r_1 è la distanza di P dalla carica Q ed r_2 la distanza del punto corrente di integrazione, sulla superficie conduttrice S , dal punto P . Se il punto P fosse scelto



coincidente col centro della sfera, per il calcolo del potenziale potremmo procedere come in precedenza, ottendo il risultato espresso dalla equazione (3). E' chiaro poi che, essendo il conduttore equipotenziale, il calcolo della equazione (4) dovrà dare ancora il valore V_0 ogni volta che P è un punto interno (o di superficie) del conduttore. Poniamoci, ora, il problema del calcolo del potenziale $V(P)$ in un punto P esterno alla sfera conduttrice. Per questo, si introduce *tentativamente* la seguente ipotesi di lavoro: che il potenziale elettrostatico generato dalle cariche superficiali indotte sulla sfera conduttrice sia, nei punti P esterni alla sfera conduttrice, formalmente lo stesso di quello generato da una opportuna distribuzione di cariche puntiformi, dette *cariche immagini*, poste internamente alla sfera (vedi figura). Tali cariche sono del tutto fittizie e rappresentano solamente un artificio matematico per il calcolo dell'integrale di superficie che compare nella (4). La posizione ed il valore di tali cariche immagini andrà determinato in modo che, quando P si avvicina ai punti della superficie sferica conduttrice, dovrà essere $V(P) = V_0$ costante: è la condizione di equipotenzialità del conduttore. Nel nostro problema, sceglieremo tentativamente come cariche immagini due cariche puntiformi, q_1 e q_2 , il cui valore è per ora incognito, poste la prima al centro della sfera e la seconda sulla retta congiungente Q e q_1 , ad una distanza, anch'essa per ora incognita, a da q_1 , con $a < R$ (vedi figura). Se P è scelto sulla superficie del conduttore, avremo quindi:

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = V_0, \quad (5)$$

dove r_1 ed r sono le distanze di Q e q_2 da P , rispettivamente. Introdotto l'angolo φ di figura ed osservando che, per il teorema del coseno:

$$r_1 = \sqrt{D^2 + R^2 - 2RD \cos \varphi}, \quad r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2Ra \cos \varphi}, \quad (6)$$

la equazione (5), ove si tenga conto dell'espressione del potenziale V_0 data dalla (3), diventa:

$$\frac{Q}{\sqrt{D^2 + R^2 - 2RD \cos \varphi}} + \frac{q_2}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2Ra \cos \varphi}} = \frac{Q}{D} - \frac{q_1}{R}. \quad (7)$$

Le incognite a , q_1 e q_2 vanno determinate in modo che la equazione (7) sia soddisfatta comunque si scelga il punto P sulla sfera conduttrice, e cioè per ogni valore dell'angolo φ . Per questo, è chiaro che l'espressione a primo membro della (7) deve essere indipendente da φ , e quindi la derivata rispetto a φ di tale espressione deve essere zero. Ciò conduce facilmente alla seguente condizione:

$$QD(a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi)^{3/2} = -q_2 a(D^2 + R^2 - 2DR \cos \varphi)^{3/2}, \quad (8)$$

e cioè, alla condizione:

$$\left(\frac{|Q|D}{|q_2|a} \right)^{2/3} (a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi) = D^2 + R^2 - 2RD \cos \varphi, \quad (9)$$

con q_2 di segno opposto a Q [si veda la (8)]. Uguagliando i coefficienti dei termini costanti e moltiplicativi di $\cos \varphi$ nella (9), si ha così:

$$q_2 = -Q \sqrt{\frac{a}{D}} \quad (10)$$

$$D(a^2 + R^2) = a(D^2 + R^2). \quad (11)$$

La (11) è una equazione di secondo grado che ammette due radici, $a = D$ e $a = R^2/D$; poiché richiediamo $a < R$, solo la seconda soluzione è accettabile. Dalla (10) si determina poi il valore della carica immagine q_2 . Infine il valore di q_1 si può ottenere dalla (7) imponendo, per esempio, che essa sia soddisfatta per $\varphi = \pi/2$. Si ottiene così, in conclusione:

$$a = R^2/D \quad (12)$$

$$q_2 = -Q(R/D) \quad (13)$$

$$q_1 = -q_2 = Q(R/D). \quad (14)$$

Si osservi che la somma delle cariche immagini, $q_1 + q_2$, è zero: ciò è dovuto al fatto che la sfera conduttrice è scarica, ed infatti si potrebbe dimostrare in generale che la somma delle cariche immagini è sempre uguale alla carica totale posseduta dal conduttore. In tal modo, il potenziale elettrostatico (e quindi anche il campo elettrico) generato dalle cariche superficiali indotte è equivalente, esternamente al conduttore, a quelle di un dipolo elettrico: ciò rende quantitativamente l'idea che la presenza della carica puntiforme Q induce sulla sfera metallica una separazione di cariche, positive e negative, sulle due regioni, quella affacciata alla carica inducente e quella nascosta, della sfera.

S.2.23.

L'esercizio si risolve agevolmente applicando il principio dello schermo elettrostatico. Indichiamo con S_1 , S_2 le superfici interna ed esterna, rispettivamente, del conduttore sferico cavo, e con σ_1 e σ_2 le densità superficiali indotte, su dette superfici, a causa della presenza della carica Q , posta al centro della cavità, e della carica q , posta fuori dal conduttore ad una distanza $D > R_2$ (vedi figura).

Per il principio dello schermo elettrostatico, la distribuzione σ_1 dipende unicamente dalla presenza della carica Q , mentre non è influenzata dalla presenza della carica esterna q ; in particolare, se fosse $Q = 0$, si avrebbe $\sigma_1 = 0$. Poiché la carica Q è posta al centro della cavità, avremo che, come già discusso nel problema 2.8, la densità σ_1 è uniforme e pari a:

$$\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi R_1^2}. \quad (1)$$

Il campo elettrico per $r < R_2$ assume dunque l'espressione consueta:

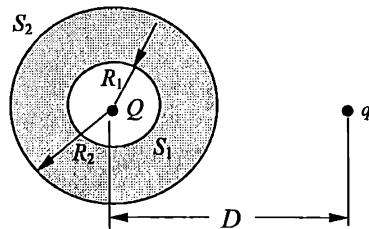
$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2. \end{cases} \quad (2)$$

La distribuzione σ_2 delle cariche indotte su S_2 è invece influenzata dalla presenza della carica esterna q , oltre che da Q ; poiché il conduttore è scarico ed isolato, dovrà avversi:

$$\int_{S_2} \sigma_2 dS_2 = Q, \quad (3)$$

ma ora σ_2 non sarà distribuita uniformemente su S_2 . Per il calcolo del potenziale elettrostatico V_0 del conduttore osserviamo che, per $r > R_2$, il campo elettrico è generato solamente dalle cariche su S_2 e da q , e cioè è lo stesso che si avrebbe se il conduttore non avesse alcuna cavità, fosse carico con carica Q , e vi fosse solo la carica esterna q . Il calcolo di V_0 può quindi esservi svolto col procedimento presentato nello svolgimento del problema precedente, con la differenza che qui il conduttore sferico presenta una carica Q anziché essere scarico. Si ottiene perciò:

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (4)$$



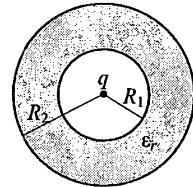
Capitolo 3

Elettrostatica in presenza di dielettrici

3.1 Problemi

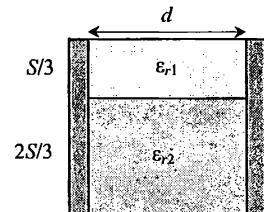
P.3.1.

Nel centro di una calotta sferica di materiale dielettrico omogeneo e isotropo, con costante dielettrica relativa ϵ_r e di raggi R_1 e R_2 ($R_1 < R_2$), è localizzata una carica puntiforme positiva q . Si calcolino: (i) il vettore spostamento-dielettrico \mathbf{D} e il campo elettrico \mathbf{E} in funzione della distanza, r , dal centro della calotta; (ii) la densità di carica di polarizzazione sulle due superfici sferiche di raggio R_1 e R_2 .



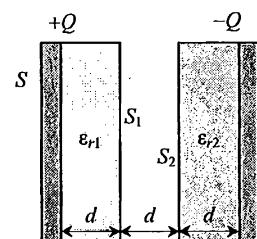
P.3.2.

Lo spazio fra le armature di un condensatore piano isolato è completamente riempito con due lastre dielettriche poste come mostrato in figura. Sia Q la carica del condensatore e d la distanza fra le armature di area S . La lastra con costante dielettrica relativa ϵ_{r1} copre un terzo della superficie delle armature, la seconda, con costante dielettrica relativa ϵ_{r2} , copre la parte rimanente. Si calcolino: (i) il campo elettrico nel condensatore; (ii) la capacità del condensatore; (iii) le cariche di polarizzazione.



P.3.3.

Un condensatore piano (area delle armature S , distanza fra le stesse $3d$) è parzialmente riempito, come mostrato in figura, con due dielettrici di costante dielettrica relativa ϵ_{r1} ed ϵ_{r2} . Sulle armature, isolate, viene posta una carica $+Q$ e $-Q$, rispettivamente. Si calcolino: (i) il campo elettrico all'interno del condensatore; (ii) la densità superficiale di carica di polarizzazione sulle superfici S_1 e S_2 dei dielettrici (vedi figura); (iii) la capacità del condensatore.



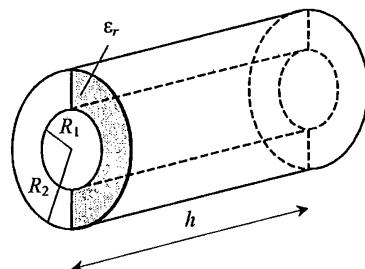
P.3.4.

Una sfera conduttrice di raggio R è caricata con una carica

totale Q e sconnessa dal generatore. Tale sfera è per metà immersa in un dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r , come mostrato in figura. All'esterno c'è il vuoto. Si calcoli: (i) il potenziale della sfera; (ii) la densità superficiale di carica libera sulla sfera conduttrice; (iii) la densità superficiale di carica di polarizzazione nel dielettrico.

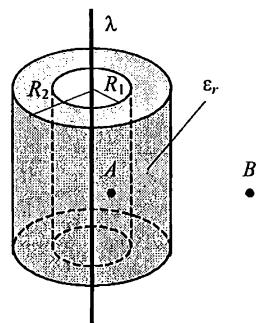
P.3.5.

Un condensatore cilindrico di raggio interno R_1 , raggio esterno R_2 ed altezza h , è riempito per metà con un dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa ϵ_r , come mostrato in figura. Sull'armatura interna del condensatore è depositata una carica Q . Si calcolino: (i) il campo elettrico nel condensatore; (ii) la capacità del condensatore; (iii) la densità di carica di polarizzazione sulle due armature; (iv) la carica libera sull'armatura interna in corrispondenza del vuoto e del dielettrico.



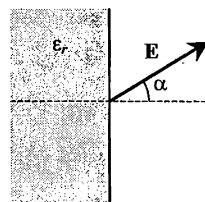
P.3.6.

Una carica positiva è disposta su un filo rettilineo indefinito con densità lineare di carica uniforme, λ . Un guscio cilindrico di materiale dielettrico uniforme ed isotropo, di raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2 = 2R_1$ e di costante dielettrica relativa ϵ_r , è disposto in modo coassiale rispetto al filo, come mostrato in figura. Si calcolino: (i) il campo elettrico in funzione della distanza dal filo; (ii) la differenza di potenziale fra due punti, A e B, posti a distanza $R_1/2$ e $2R_2$, rispettivamente, dal filo.



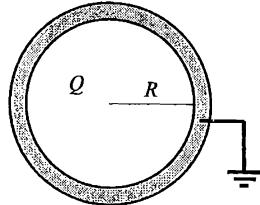
P.3.7.

Si consideri una lastra di materiale dielettrico, omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2$. All'esterno è presente un campo elettrico uniforme, \mathbf{E} , di modulo $E = 100 \text{ V/m}$, le cui linee di forza formano un angolo $\alpha = 40^\circ$ con la normale alla lastra (vedi figura). Si determinino: (i) il campo elettrico nel materiale dielettrico, in modulo, direzione e verso; (ii) la densità superficiale delle cariche di polarizzazione sulla superficie della lastra.

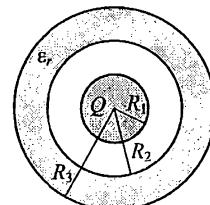


P.3.8.

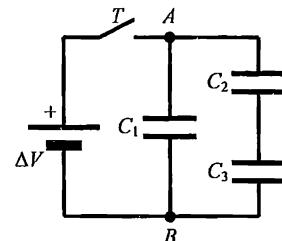
In una sfera di raggio R di materiale dielettrico (costante dielettrica relativa ϵ_r) è uniformemente distribuita una carica elettrica Q . La superficie esterna della sfera è ricoperta da un sottile strato metallico collegato a terra. Si calcolino: (i) il campo elettrico e il potenziale in funzione della distanza dal centro della sfera; (ii) la densità di cariche superficiali indotte nel metallo; (iii) le densità di carica di polarizzazione nella sfera e sulla sua superficie.

P.3.9.

Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 2$ cm e carica $Q = 1$ mC è circondata da un guscio di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$, di raggio interno $R_2 = 4$ cm e raggio esterno $R_3 = 8$ cm. Si calcoli l'energia elettrostatica del sistema.

**P.3.10.**

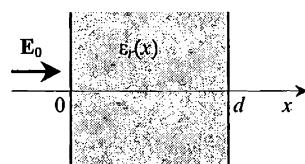
Tre condensatori, di capacità $C_1 = 0.5 \mu\text{F}$, $C_2 = 1 \mu\text{F}$, $C_3 = 1.5 \mu\text{F}$, sono collegati come mostrato in figura. Inizialmente fra i morsetti A e B viene imposta una differenza di potenziale $\Delta V = 5$ V per mezzo di un opportuno generatore. Successivamente l'interruttore T viene aperto e il sistema rimane isolato. A questo punto il condensatore C_2 viene completamente riempito con una lastra di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$. Si calcolino le cariche presenti sulle armature dei tre condensatori nello stato finale e la variazione di energia elettrostatica del sistema.

**P.3.11.**

Una sottile sbarra di materiale dielettrico di sezione S e di lunghezza L è polarizzata longitudinalmente con polarizzazione $P = P_x = ax^2 + b$ (a, b costanti). Si determinino: (i) la densità di carica di polarizzazione di volume e di superficie; (ii) la carica totale nel dielettrico.

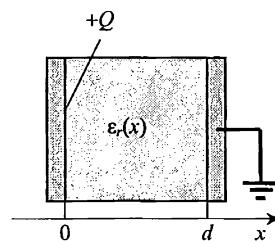
P.3.12.

Si consideri una lastra di materiale dielettrico di spessore d e di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3d/(x+d)$ ($0 < x < d$), essendo x la distanza da una superficie della lastra (vedi figura). La lastra è immersa in un campo elettrostatico costante E_0 , perpendicolare alla lastra. Si calcolino: (i) il vettore polarizzazione; (ii) la densità di carica di polarizzazione sulle superfici della lastra; (iii) la densità volumetrica di carica di polarizzazione.

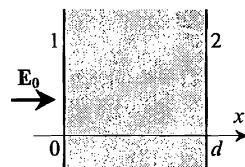


P.3.13.

Un condensatore piano (superficie delle armature S , distanza fra le stesse d) è completamente riempito con un materiale dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa ϵ_r varia con la legge seguente: $\epsilon_r = ax + b$ ($0 < x < d$). L'armatura posta a $x = 0$ possiede una carica $+Q$, la seconda è collegata a terra. Si calcolino: (i) la differenza di potenziale fra le armature; (ii) la capacità del condensatore; (iii) le densità di carica di polarizzazione di superficie e di volume.

P.3.14.

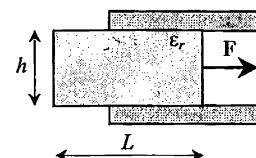
Una lastra piana di materiale dielettrico *non* omogeneo, di spessore d , viene inserita in un campo elettrico uniforme E_0 , normale alla lastra stessa. Si verifica che il dielettrico si polarizza con polarizzazione P parallela a E_0 e che si forma nel dielettrico una carica di polarizzazione distribuita con densità volumetrica $-\rho_0$. Sapendo che la densità superficiale di carica di polarizzazione è trascurabile sulla faccia 1 (vedi figura), si determinino: (i) la polarizzazione P in funzione di x ; (ii) il campo elettrico in funzione di x ; (iii) la densità di carica di polarizzazione sulla faccia 2 della lastra.

P.3.15.

Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita, con densità ρ_{lib} , all'interno di una lastra piana di materiale dielettrico, omogeneo ed isotropo, di spessore d , con costante dielettrica relativa ϵ_r , posta nel vuoto. Si calcoli il campo elettrico E ed il potenziale V in funzione della posizione, all'interno e all'esterno della lastra, ponendo uguale a zero il potenziale sulla superficie di sinistra della lastra. Si tracci un diagramma qualitativo dell'andamento di queste grandezze fisiche in funzione della posizione.

P.3.16.

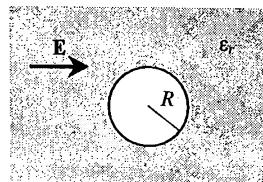
Si calcoli la forza con cui una lastrina di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa ϵ_r , di spessore h e superficie quadrata di lato L , viene risucchiata fra le armature di un condensatore piano della stessa forma, mantenuto isolato, su cui è localizzata una carica Q .

P.3.17.

Si calcoli la forza con cui una lastrina di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa ϵ_r , di spessore h e superficie quadrata di lato L , viene risucchiata fra le armature di un condensatore piano della stessa forma, collegato ad un generatore, che mantiene fra le armature una differenza di potenziale costante pari a V .

P.3.18.

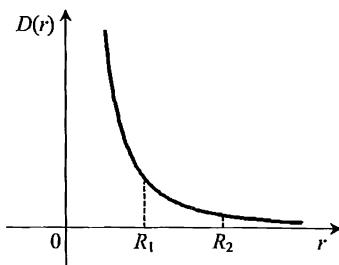
In una sfera di materiale dielettrico con polarizzazione uniforme \mathbf{P} , il campo elettrico interno risulta essere $\mathbf{E}_d = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$. Si consideri un corpo di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa ϵ_r , in cui è presente un campo elettrostatico uniforme \mathbf{E} . In tale dielettrico viene praticata una cavità sferica di raggio R . Si calcoli il campo elettrico all'interno della cavità.



3.2 Soluzioni

3.2.1.

Calcoliamo il vettore spostamento elettrico \mathbf{D} , che non è influenzato dalle cariche di polarizzazione. Per ragioni di simmetria \mathbf{D} è diretto radialmente e ha lo stesso valore in tutti i punti di una superficie sferica Σ , di raggio arbitrario r , concentrica al guscio sferico assegnato dal problema. Applichiamo il teorema di Gauss osservando che la sola carica libera presente è la carica puntiforme q posta nel centro del guscio dielettrico. Per $r > 0$ si ha:



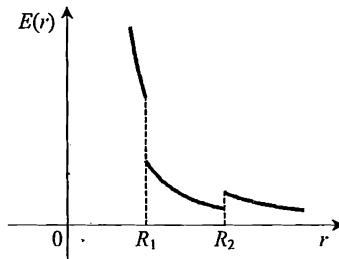
$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r. \quad (1)$$

Il campo elettrico ha l'andamento seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, & 0 < r < R_1 \text{ e } r > R_2, \\ \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \mathbf{u}_r, & R_1 < r < R_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Gli andamenti di \mathbf{D} e di \mathbf{E} sono mostrati in figura.

La densità superficiale di carica di polarizzazione è data dalla formula seguente: $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, essendo \mathbf{P} il vettore polarizzazione e \mathbf{n} il versore normale uscente dalla superficie in considerazione. Calcoliamo per prima cosa il vettore polarizzazione all'interno del guscio dielettrico:



$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r r^2} \mathbf{u}_r. \quad (3)$$

Si ha quindi che le densità superficiali di carica di polarizzazione sulle superfici sferiche di raggio R_1 e R_2 sono date da:

$$\sigma_P(R_1) = \mathbf{P}(R_1) \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_1^2} \mathbf{u}_r \cdot (-\mathbf{u}_r) = -\frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_1^2}, \quad (4)$$

$$\sigma_P(R_2) = \mathbf{P}(R_2) \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_2^2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_2^2}. \quad (5)$$

In corrispondenza di $r = R_1$ e $r = R_2$ si hanno quindi due distribuzioni superficiali di carica di polarizzazione. Per questo motivo il campo elettrico è discontinuo in $r = R_1$ e $r = R_2$. Si noti che la carica superficiale di polarizzazione totale è nulla, infatti:

$$Q_s = \sigma_P(R_1) 4\pi R_1^2 + \sigma_P(R_2) 4\pi R_2^2 = 0. \quad (6)$$

S.3.2.

(i) Il campo elettrico è ortogonale alle armature del condensatore e parallelo all'interfaccia fra i due dielettrici. Poiché si conserva la componenti tangenziale del campo elettrico in corrispondenza della superficie di separazione fra due mezzi, si ha:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}, \quad (1)$$

dove \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 sono i campi elettrici nei dielettrici 1 e 2 rispettivamente. I vettori spostamento elettrico nei due dielettrici sono dati da:

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{E}. \quad (2)$$

Dal teorema di Coulomb si ha che le densità superficiali di carica libera sull'armatura di sinistra del condensatore, in corrispondenza dei due dielettrici, sono date da:

$$\sigma_{l1} = D_1 \quad \text{e} \quad \sigma_{l2} = D_2. \quad (3)$$

La carica libera totale sull'armatura del condensatore è Q , quindi:

$$\sigma_{l1} S_1 + \sigma_{l2} S_2 = Q, \quad (4)$$

da cui:

$$\epsilon_0 E \left(\epsilon_{r1} \frac{S}{3} + \epsilon_{r2} \frac{2S}{3} \right) = Q \Rightarrow E = \frac{3Q}{\epsilon_0 (\epsilon_{r1} + 2\epsilon_{r2}) S}. \quad (5)$$

(ii) Dal momento che il campo elettrico è uniforme all'interno del condensatore, la differenza di potenziale fra le armature è data da:

$$\Delta V = Ed = \frac{3Qd}{\epsilon_0 (\epsilon_{r1} + 2\epsilon_{r2}) S}. \quad (6)$$

La capacità è quindi data da:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{3d} + \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{2S}{3d}. \quad (7)$$

Il condensatore è equivalente a due condensatori in parallelo di capacità C_1 e C_2 :

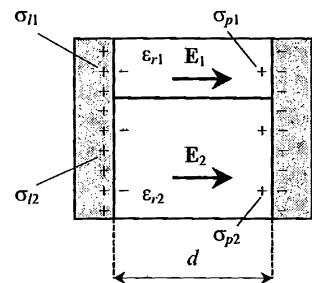
$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{3d}, \quad C_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{2S}{3d}. \quad (8)$$

La capacità totale è quindi data da $C = C_1 + C_2$, in accordo con quanto calcolato.

(iii) Per calcolare le cariche di polarizzazione, determiniamo dapprima la polarizzazione all'interno dei due dielettrici:

$$\mathbf{P}_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) \mathbf{E}, \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) \mathbf{E}. \quad (10)$$



Le densità di carica di polarizzazione superficiale all'interfaccia fra i dielettrici e l'armatura di sinistra del condensatore sono date da:

$$\sigma_{P1} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n} = -\epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)E, \quad (11)$$

$$\sigma_{P2} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n} = -\epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E, \quad (12)$$

avendo indicato con \mathbf{n} il versore normale uscente dai dielettrici. Si osservi che:

$$\sigma_{l1} + \sigma_{P1} = \sigma_{l2} + \sigma_{P2} = \epsilon_0 E, \quad (13)$$

come deve essere, dal momento che il campo elettrico è uniforme all'interno del condensatore. All'interfaccia fra i due dielettrici non si manifesta alcuna carica di polarizzazione dal momento che su tale superficie il vettore polarizzazione è perpendicolare al versore normale uscente. Dal momento che la polarizzazione è uniforme, la densità di carica di polarizzazione volumetrica è nulla.

S.3.3.

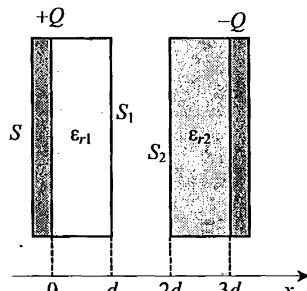
(i) Il vettore \mathbf{D} è perpendicolare alle armature del condensatore e quindi anche alle superfici S_1 e S_2 . Dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di \mathbf{D} , si deduce che il vettore \mathbf{D} mantiene lo stesso valore in tutto il condensatore.

Indicando con \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_2 il vettore \mathbf{D} nel dielettrico 1, nel vuoto e nel dielettrico 2, rispettivamente, possiamo scrivere:

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}. \quad (1)$$

Il valore di \mathbf{D} è determinato dalle sole cariche libere depositate sulle armature del condensatore, ed è quindi dato da:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x, \quad (2)$$



avendo introdotto un asse x perpendicolare alle armature. Ricordando il legame fra \mathbf{D} ed \mathbf{E} , $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$, possiamo calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S} \mathbf{u}_x, \quad 0 < x < d$$

$$\mathbf{E}_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \mathbf{u}_x, \quad d < x < 2d \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S} \mathbf{u}_x, \quad 2d < x < 3d$$

(ii) Calcoliamo ora la polarizzazione all'interno dei due dielettrici:

$$\mathbf{P}_1 = \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1) \mathbf{E}_1 = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x, \quad 0 < x < d \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_2 = \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1) \mathbf{E}_2 = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x, \quad 2d < x < 3d$$

Le cariche di polarizzazione sulle superfici S_1 e S_2 si calcolano come segue:

$$\sigma_{P1} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_x = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{S}, \quad (5)$$

$$\sigma_{P2} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{P}_1 \cdot (-\mathbf{u}_x) = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{S}. \quad (6)$$

(iii) Per calcolare la capacità del condensatore dobbiamo prima calcolare la differenza di potenziale fra le armature. Si ottiene:

$$\Delta V = E_1 d + E_0 d + E_2 d = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} + 1 \right). \quad (7)$$

La capacità del condensatore è quindi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2} + \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}} \frac{S}{d}. \quad (8)$$

Si osservi che il condensatore è equivalente a tre condensatori piani in serie, di capacità C_1 , C_0 e C_2 date da:

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{d}, \quad C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \quad C_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{S}{d}. \quad (9)$$

Quindi la capacità C complessiva si può anche ottenere utilizzando la formula seguente:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_2}. \quad (10)$$

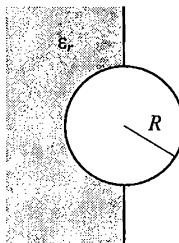
S.3.4.

(i) Dal momento che si conserva la componente tangenziale del campo elettrico all'interfaccia dielettrico-vuoto e poiché il campo elettrico è radiale, si ha:

$$E_v = E_d \equiv E, \quad (1)$$

essendo E_v ed E_d i campi elettrici nel vuoto e nel dielettrico, rispettivamente. Per il vettore \mathbf{D} si ha quindi:

$$\frac{D_v}{\epsilon_0} = \frac{D_d}{\epsilon_0 \epsilon_r}. \quad (2)$$



Applichiamo ora il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica Σ di raggio $r > R$, osservando che la sola carica libera presente è la carica Q sulla sfera conduttrice:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 2\pi r^2 (D_d + D_v) = Q. \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella (3) si ottiene, per $r > R$:

$$\mathbf{D}_v = \frac{Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)r^2} \mathbf{u}_r, \quad (4)$$

$$\mathbf{D}_d = \frac{\epsilon_r Q}{2\pi(1+\epsilon_r)r^2} \mathbf{u}_r. \quad (5)$$

Il campo elettrico è quindi dato, per $r > R$, dalla seguente espressione:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}_v}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)r^2} \mathbf{u}_r. \quad (6)$$

Il potenziale V , per $r > R$ si calcola ricordando che $dV = -E dr$ e ponendo uguale a zero il potenziale all'infinito. Si ottiene:

$$V(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)r}. \quad (7)$$

Il potenziale della sfera è dunque:

$$V = V(R) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)R}. \quad (8)$$

(ii) Per calcolare la densità superficiale delle cariche libere sulla sfera conduttrice, applichiamo il teorema di Coulomb. Si ha:

$$\sigma_{ld} = D_d(r = R), \quad \sigma_{lv} = D_v(r = R), \quad (9)$$

essendo σ_{ld} e σ_{lv} le densità di carica libera sulla superficie della sfera conduttrice in corrispondenza del dielettrico e del vuoto, rispettivamente. Usando le (4) e (5) si ha quindi:

$$\sigma_{ld} = \frac{\epsilon_r Q}{2\pi(1+\epsilon_r)R^2} \quad \sigma_{lv} = \frac{Q}{2\pi(1+\epsilon_r)R^2}. \quad (10)$$

(iii) Per calcolare la densità superficiale di carica di polarizzazione all'interfaccia sfera conduttrice-dielettrico calcoliamo prima il vettore polarizzazione:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{2\pi(\epsilon_r + 1)r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11)$$

Quindi:

$$\sigma_P = \mathbf{P}(R) \cdot (-\mathbf{u}_r) = -P(R) = -\frac{Q(\epsilon_r - 1)}{2\pi(\epsilon_r + 1)R^2}. \quad (12)$$

Si osservi che risulta:

$$\sigma_{ld} + \sigma_P = \sigma_{lv}, \quad (13)$$

come deve essere, dal momento che il campo elettrico all'esterno della sfera conduttrice si può calcolare applicando il teorema di Coulomb:

$$E(R) = \frac{\sigma_{ld} + \sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{lv}}{\epsilon_0}. \quad (14)$$

S.3.5.

(i) Per ragioni di simmetria il campo elettrico all'interno del condensatore è radiale. Inoltre, poiché all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente tangente del campo

elettrico, si deduce che il campo elettrico non cambia nel passaggio fra vuoto e dielettrico. Si ha quindi:

$$E_0 = E_d \equiv E, \quad (1)$$

avendo indicato con E_0 e con E_d i campi elettrici nel vuoto e nel dielettrico, rispettivamente. Ricordando la relazione fra E e D , si ottiene:

$$\frac{D_0}{\epsilon_0} = \frac{D_d}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow D_d = \epsilon_r D_0, \quad (2)$$

indicando con \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_d il vettore \mathbf{D} nel vuoto e nel dielettrico.

Applichiamo ora il teorema di Gauss al vettore \mathbf{D} , considerando una superficie di Gauss Σ cilindrica, di raggio arbitrario r ($R_1 < r < R_2$), coassiale con le armature del condensatore. Si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = \pi r h (D_0 + D_d) = Q. \quad (3)$$

Usando la (2) nella (3) si ottiene:

$$\mathbf{D}_0 = \frac{Q}{\pi(\epsilon_r + 1)hr} \mathbf{u}_r, \quad (4)$$

$$\mathbf{D}_d = \frac{\epsilon_r Q}{\pi(\epsilon_r + 1)hr} \mathbf{u}_r. \quad (5)$$

Il campo elettrico nel condensatore è quindi dato da:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) hr} \mathbf{u}_r. \quad (6)$$

(ii) Per calcolare la capacità del condensatore, calcoliamo prima la differenza di potenziale fra le armature:

$$\Delta V = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) h} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (7)$$

La capacità del condensatore è quindi:

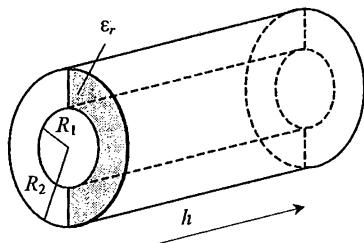
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) h}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (8)$$

(iii) Il vettore polarizzazione all'interno del dielettrico è dato da:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{\pi (\epsilon_r + 1) h r} \mathbf{u}_r. \quad (9)$$

La densità superficiale di carica di polarizzazione sul dielettrico in corrispondenza delle armature del condensatore si ricava come segue:

$$\sigma_P(R_1) = \mathbf{P}(R_1) \cdot (-\mathbf{u}_r) = -\frac{(\epsilon_r - 1) Q}{\pi (\epsilon_r + 1) h R_1}, \quad (10)$$



$$\sigma_P(R_2) = \mathbf{P}(R_2) \cdot \mathbf{u}_r = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{\pi(\epsilon_r + 1) h R_2}. \quad (11)$$

(iv) La densità di carica libera sulle armature si calcola applicando il teorema di Coulomb:

$$\sigma_{l0}(R_1) = D_0(R_1), \quad \sigma_{ld}(R_1) = D_d(R_1), \quad (12)$$

avendo indicato con σ_{l0} e σ_{ld} la densità superficiale di carica libera sull'armatura interna del condensatore, in corrispondenza del vuoto e del dielettrico, rispettivamente. La carica libera sull'armatura interna in corrispondenza del vuoto e del dielettrico è quindi:

$$Q_0 = \pi R_1 h \sigma_{l0}(R_1) = \frac{Q}{\epsilon_r + 1}, \quad (13)$$

$$Q_d = \pi R_1 h \sigma_{ld}(R_1) = \frac{\epsilon_r Q}{\epsilon_r + 1}. \quad (14)$$

Ovviamente $Q_0 + Q_d = Q$.

Si osservi che il condensatore cilindrico assegnato dal problema è equivalente a due condensatori in parallelo, con armature di forma semicilindrica, uno vuoto e il secondo completamente riempito di dielettrico, di capacità C_0 e C_d date da:

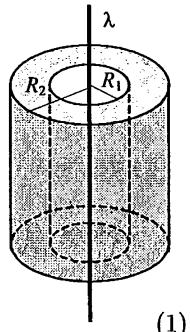
$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{\pi \epsilon_0 h}{\ln R_2/R_1} \quad C_d = \frac{Q_d}{\Delta V} = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r h}{\ln R_2/R_1}. \quad (15)$$

La capacità totale C è data da $C = C_1 + C_2$.

S.3.6.

(i) Data la geometria del sistema il campo elettrico \mathbf{E} e il vettore \mathbf{D} sono radiali e dotati di simmetria cilindrica. Quindi \mathbf{D} risulta perpendicolare alle superfici di separazione fra il guscio dielettrico e il vuoto. Dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di \mathbf{D} , si conclude che, nel caso in esame, tale vettore non subisce alcuna variazione nel passaggio fra vuoto e dielettrico. Per calcolare \mathbf{D} applichiamo il teorema di Gauss, assumendo una superficie cilindrica Σ di raggio generico r e di altezza arbitraria h :

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 2\pi r h D = \lambda h.$$



Si ha quindi:

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{u}_r. \quad (2)$$

Il campo elettrico si calcola facilmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r, & 0 < r < R_1, \quad r > R_2; \\ \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r r} \mathbf{u}_r, & R_1 < r < R_2. \end{aligned} \quad (3)$$

(ii) Calcoliamo ora la differenza di potenziale fra i punti A e B.

$$\int_{V(A)}^{V(B)} dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1/2}^{R_1} \frac{dr}{r} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{2R_2} \frac{dr}{r}, \quad (4)$$

da cui risulta:

$$V(B) - V(A) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(2 \ln 2 + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) = -\frac{\lambda \ln 2}{2\pi\epsilon_0} \left(2 + \frac{1}{\epsilon_r} \right). \quad (5)$$

S.3.7.

Sceglieremo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xy in cui l'asse x , con origine sulla superficie di interfaccia fra vuoto e dielettrico, è perpendicolare alla lastra, mentre l'asse y risulta parallelo alla lastra, come mostrato in figura. Consideriamo le condizioni al contorno per i campi \mathbf{E} e \mathbf{D} .

All'interfaccia vuoto-dielettrico si conserva la componente tangente del campo elettrico, si ha quindi:

$$E_y = E_{dy} = E \sin \alpha, \quad (1)$$

avendo indicato con E_y ed E_{dy} le componenti y dei campi elettrici nel vuoto e nel dielettrico, rispettivamente. All'interfaccia vuoto-dielettrico si conserva la componente normale del vettore \mathbf{D} :

$$D_x = D_{dx} = \epsilon_0 E \cos \alpha, \quad (2)$$

con ovvio significato dei simboli. Dalla (2) si può calcolare la componente normale del campo elettrico all'interno del dielettrico:

$$E_{dx} = \frac{D_{dx}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = E \frac{\cos \alpha}{\epsilon_r}. \quad (3)$$

Il campo elettrico nel dielettrico è quindi dato da:

$$\mathbf{E}_d = E \frac{\cos \alpha}{\epsilon_r} \mathbf{u}_x + E \sin \alpha \mathbf{u}_y. \quad (4)$$

Il modulo di \mathbf{E}_d vale:

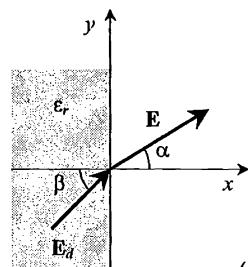
$$|\mathbf{E}_d| = \frac{E}{\epsilon_r} \sqrt{\cos^2 \alpha + \epsilon_r^2 \sin^2 \alpha} = 74.8 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (5)$$

\mathbf{E}_d forma un angolo β con l'asse x , la cui tangente è data da:

$$\tan \beta = \frac{E_{dy}}{E_{dx}} = \epsilon_r \tan \alpha \Rightarrow \beta = 59.2^\circ. \quad (6)$$

Dal momento che la polarizzazione è data da $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}_d$, la densità superficiale di carica di polarizzazione è data da:

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_x = P_x = \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} E \cos \alpha = 3.4 \times 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}. \quad (7)$$



S.3.8.

(i) Calcoliamo dapprima il vettore \mathbf{D} , che dipende solo dalle cariche libere. Data la simmetria del problema, il vettore \mathbf{D} è radiale e assume lo stesso valore sulle superfici sferiche Σ di raggio r arbitrario, concentriche alla sfera dielettrica. Applichiamo il teorema di Gauss.

Per $0 < r < R$ si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q_{lib}(r), \quad (1)$$

essendo $Q_{lib}(r)$ la carica libera interna alla superficie sferica Σ . Poiché la carica elettrica Q è distribuita uniformemente all'interno della sfera dielettrica di raggio R , si ha che la densità volumetrica della carica libera è data da:

$$\rho_{lib} = \frac{3Q}{4\pi R^3}. \quad (2)$$

Dalle (1) e (2) si ottiene:

$$4\pi r^2 D = \rho_{lib} \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{Qr}{4\pi R^3} \mathbf{u}_r. \quad (3)$$

All'interno dello strato metallico che circonda la sfera dielettrica il vettore \mathbf{D} è nullo (come pure il campo elettrico). Applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica Σ , di raggio r , contenuta nello strato metallico, si ottiene: $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 0 = Q_{lib}$, essendo Q_{lib} , come al solito, la carica libera totale interna a Σ , data dalla somma della carica Q distribuita nel dielettrico e della carica indotta sulla superficie interna dello strato metallico. Si ha quindi che la carica indotta è data da $Q_{indotta} = -Q$. Il conduttore è collegato a terra, quindi la sua superficie esterna risulta scarica.

Applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica Σ esterna allo strato conduttore, dal momento che la carica libera totale interna a Σ è nulla, si conclude che $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ all'esterno dello strato metallico.

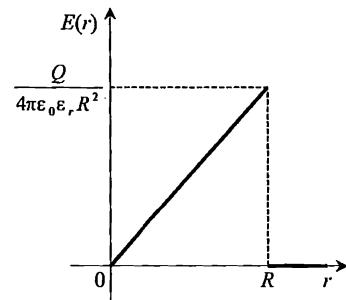
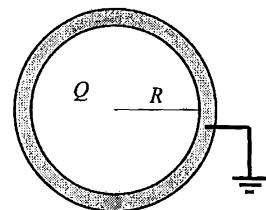
Il campo elettrico si calcola facilmente ricordando la relazione fra \mathbf{D} ed \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \mathbf{u}_r, \quad 0 < r < R; \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad r > R.$$

L'andamento del campo elettrico in funzione di r è mostrato in figura. Calcoliamo ora il potenziale, ricordando che lo strato metallico è posto a terra ($V = 0$). Per $r > R$ si ha: $V(r) = 0$. Per $0 < r < R$, ricordando che il potenziale è continuo per $r = R$, si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \int_R^r r dr, \quad (5)$$



da cui:

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} (R^2 - r^2). \quad (6)$$

L'andamento del potenziale in funzione di r è mostrato in figura.

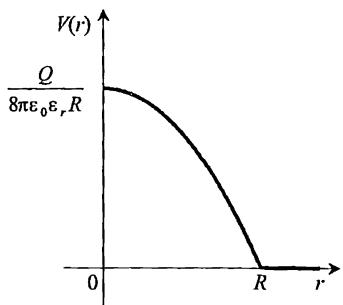
(ii) Come già osservato, sulla superficie interna dello strato metallico viene indotta una carica $-Q$, distribuita in modo uniforme con densità superficiale σ data da:

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (7)$$

La superficie esterna dello strato metallico risulta invece scarica.

(iii) Determiniamo la polarizzazione all'interno della sfera dielettrica ($0 < r < R$):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^3} \mathbf{u}_r. \quad (8)$$



La densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico a contatto con il guscio metallico è data da:

$$\sigma_P = \mathbf{P}(R) \cdot \mathbf{n} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2}. \quad (9)$$

La densità volumetrica di carica di polarizzazione si calcola utilizzando la relazione $\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P}$. Ricordando l'espressione dell'operatore divergenza in coordinate sferiche si ha:

$$\rho_P = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 P(r)] = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^3} r^3 \right] = -\frac{3(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^3}. \quad (10)$$

La carica di polarizzazione è quindi distribuita in modo uniforme all'interno della sfera dielettrica. Si osservi che la carica di polarizzazione totale è nulla. Infatti:

$$Q_P = \int_S \sigma_P dS + \int_\tau \rho_P d\tau = \sigma_P 4\pi R^2 + \rho_P \frac{4}{3}\pi R^3 = 0, \quad (11)$$

essendo S la superficie sferica di raggio R e τ il volume della sfera. Questo è un risultato del tutto generale, come si può facilmente dimostrare. La carica di polarizzazione totale è data da:

$$Q_P = \int_S \sigma_P dS + \int_\tau \rho_P d\tau = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS - \int_\tau \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau. \quad (12)$$

Per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_\tau \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13)$$

Dalle (12) e (13) si ha quindi che $Q_P = 0$.

S.3.9.

E' opportuno calcolare prima \mathbf{D} . Data la simmetria del problema, \mathbf{D} è radiale e dotato di simmetria sferica, e dunque è ortogonale alle superfici di interfaccia fra il guscio dielettrico e il vuoto. Applichiamo il teorema di Gauss, considerando una generica superficie Σ concentrica alla sfera conduttrice e di raggio r . Se $0 < r < R_1$ si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = 0. \quad (1)$$

Per $r > R_1$ si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r. \quad (2)$$

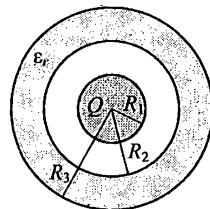
Il vettore \mathbf{D} non cambia passando dal vuoto al dielettrico dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di tale vettore.

Il campo elettrico si calcola facilmente:

$$\mathbf{E} = 0, \quad 0 < r < R_1;$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad R_1 < r < R_2, \quad r > R_3; \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{u}_r, \quad R_2 < r < R_3.$$



La densità di energia del campo elettrostatico è data da:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (4)$$

L'energia elettrostatica totale del sistema si calcola come segue:

$$U = \int_{\tau} u \, d\tau, \quad (5)$$

essendo τ il volume totale in cui è presente il campo e $d\tau$ l'elemento di volume infinitesimo che, data la simmetria sferica, è dato da $d\tau = 4\pi r^2 dr$. Nel caso in esame si ottiene:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \int_{R_2}^{R_3} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_3}^{\infty} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \dots \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right] = 1.87 \times 10^5 \text{ J}. \end{aligned} \quad (6)$$

S.3.10.

Situazione iniziale: l'interruttore T è chiuso. I condensatori C_2 e C_3 sono collegati in serie, quindi sono equivalenti ad un condensatore di capacità C_{23} data da:

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow \quad C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 0.6 \text{ } \mu\text{F}. \quad (1)$$

Tale condensatore è collegato in parallelo con il condensatore C_1 .

Il sistema di tre condensatori è quindi equivalente ad un unico condensatore di capacità C data da:

$$C = C_1 + C_{23} = 1.1 \text{ } \mu\text{F}. \quad (2)$$

La carica totale Q presente su tale condensatore equivalente è:

$$Q = C \Delta V = 5.5 \text{ } \mu\text{C}, \quad (3)$$

e si distribuisce sulle armature superiori di C_1 e di C_2 . Si ha quindi: $Q = Q_1 + Q_2$, dove $Q_1 = C_1 \Delta V$ e $Q_2 = C_{23} \Delta V$. La carica presente sull'armatura superiore di C_3 è ovviamente pari a Q_2 , essendo C_3 in serie a C_2 .

L'energia elettrostatica iniziale è data da:

$$U_i = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = 13.75 \text{ } \mu\text{J}. \quad (4)$$

L'interruttore viene successivamente aperto. Il sistema è isolato, quindi la carica totale non può cambiare. Quando il condensatore 2 viene riempito di dielettrico, la sua capacità diventa:

$$C_{2d} = \epsilon_r C_2 = 4 \text{ } \mu\text{F}. \quad (5)$$

La capacità del condensatore equivalente alla serie del condensatore 2 (riempito di dielettrico) e del condensatore 3 (vuoto) è:

$$C_{23,d} = \frac{C_{2d} C_3}{C_{2d} + C_3} = 1.1 \text{ } \mu\text{F}. \quad (6)$$

La capacità del condensatore equivalente all'intero sistema è quindi:

$$C_d = C_1 + C_{23,d} = 1.6 \text{ } \mu\text{F}. \quad (7)$$

Indicando con ΔV_d la nuova differenza di potenziale fra i morsetti A e B, e con Q_{1d} e Q_{2d} le cariche presenti, rispettivamente, sulle armature superiori dei condensatori 1 e 2, si ottiene:

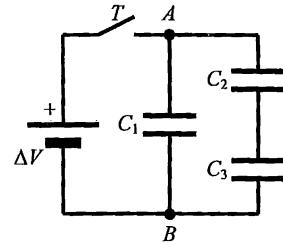
$$Q_{1d} = C_1 \Delta V_d, \quad Q_{2d} = C_{23,d} \Delta V_d. \quad (8)$$

Poiché il sistema è isolato la carica totale si conserva:

$$Q_{1d} + Q_{2d} = Q, \quad (9)$$

cioè:

$$C_d \Delta V_d = C \Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta V_d = \frac{C}{C_d} \Delta V = 3.44 \text{ V}. \quad (10)$$



Usando le (8) si possono calcolare le cariche presenti sui tre condensatori:

$$Q_{1d} = 1.72 \mu\text{C}, \quad Q_{2d} = Q_{3d} = 3.78 \mu\text{C}. \quad (11)$$

L'energia elettrostatica finale è data da:

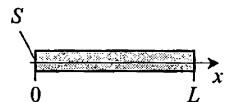
$$U_f = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_d} \quad (12)$$

Quindi la variazione di energia elettrostatica del sistema è pari a:

$$\Delta U = U_f - U_i = -4.3 \mu\text{J}. \quad (13)$$

S.3.11.

Le densità superficiali di carica di polarizzazione sulle superfici della sbarra poste in $x = 0$ e $x = L$ sono date da:



$$\begin{aligned} \sigma_P(0) &= \mathbf{P}(0) \cdot (-\mathbf{u}_x) = -b \\ \sigma_P(L) &= \mathbf{P}(L) \cdot \mathbf{u}_x = aL^2 + b. \end{aligned} \quad (1)$$

Sulla superficie laterale della sbarra non è presente alcuna carica di polarizzazione, dal momento che \mathbf{P} è parallelo alla superficie stessa. La densità volumetrica di carica di polarizzazione si calcola come segue:

$$\rho_P(x) = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx} = -2ax. \quad (2)$$

La carica di polarizzazione di volume totale è quindi:

$$Q_{P,v} = \int_0^L \rho_P(x) S dx = -aSL^2. \quad (3)$$

La carica superficiale di polarizzazione totale è data da:

$$Q_{p,S} = \sigma_P(0)S + \sigma_P(L)S = aSL^2. \quad (4)$$

La carica di polarizzazione totale è quindi nulla.

S.3.12.

Il vettore \mathbf{D} , perpendicolare alla lastra dielettrica, non cambia passando dal vuoto al dielettrico, dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di \mathbf{D} . Quindi $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ in tutto lo spazio. Il campo elettrico \mathbf{E} nel dielettrico è quindi dato da ($0 < x < d$):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} = \frac{x+d}{3d} \mathbf{E}_0. \quad (1)$$

Il vettore polarizzazione si calcola quindi nel modo seguente ($0 < x < d$):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{2d - x}{3d} \mathbf{E}_0. \quad (2)$$

Le densità superficiali di carica di polarizzazione sulle superfici della lastra sono date da:

$$\begin{aligned}\sigma_P(0) &= \mathbf{P}(0) \cdot (-\mathbf{u}_x) = -\frac{2}{3} \epsilon_0 E_0, \\ \sigma_P(d) &= \mathbf{P}(d) \cdot \mathbf{u}_x = \frac{1}{3} \epsilon_0 E_0.\end{aligned} \quad (3)$$

La densità volumetrica di carica di polarizzazione è:

$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx} = \frac{\epsilon_0}{3d} E_0. \quad (4)$$

Si osservi che, come deve risultare, la carica di polarizzazione totale è nulla.

S.3.13.

(i) Il vettore \mathbf{D} è perpendicolare alle armature del condensatore e dipende solo dalla carica libera Q depositata sull'armatura posta a $x = 0$. Si ha quindi, per $0 < x < d$:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x. \quad (1)$$

Ricordando la relazione fra campo elettrico e vettore \mathbf{D} , si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0(ax + b)S} \mathbf{u}_x. \quad (2)$$

Il potenziale in un punto generico all'interno del condensatore si calcola come segue, ricordando che l'armatura posta in $x = d$ è collegata a terra ($V(d) = 0$):

$$\int_0^{V(x)} dV = - \int_d^x E dx = - \int_d^x \frac{Q}{\epsilon_0(ax + b)S} dx, \quad (3)$$

da cui:

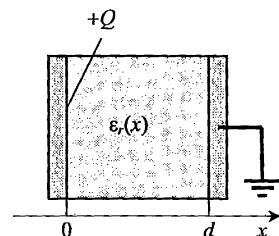
$$V(x) = \frac{Q}{\epsilon_0 a S} \ln \frac{ad + b}{ax + b}. \quad (4)$$

La differenza di potenziale fra le armature del condensatore è quindi:

$$\Delta V = \frac{Q}{\epsilon_0 a S} \ln \left(1 + \frac{ad}{b} \right). \quad (5)$$

(ii) La capacità del condensatore si calcola facilmente:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 a S / \ln \left(1 + \frac{ad}{b} \right). \quad (6)$$



(iii) Calcoliamo il vettore polarizzazione all'interno del dielettrico:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{ax + b}\right) \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x. \quad (7)$$

La densità superficiale di carica di polarizzazione è data da:

$$\begin{aligned}\sigma_P(x=0) &= \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}(0) \cdot (-\mathbf{u}_x) = \left(\frac{1}{b} - 1\right) \frac{Q}{S}, \\ \sigma_P(x=d) &= \mathbf{P}(d) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}(d) \cdot \mathbf{u}_x = \left(1 - \frac{1}{ad + b}\right) \frac{Q}{S}.\end{aligned} \quad (8)$$

La densità volumetrica di carica di polarizzazione all'interno del dielettrico è data da:

$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx} = -\frac{a}{(ax + b)^2} \frac{Q}{S}. \quad (9)$$

Si osservi che, come deve risultare, la carica totale di polarizzazione è nulla:

$$Q_P = \sigma_P(0)S + \sigma_P(d)S + \int_0^d \rho_P(x) S dx = 0. \quad (10)$$

S.3.14.

(i) Dal momento che all'interfaccia dielettrico-vuoto si conserva la componente tangente del campo elettrico, tale campo è perpendicolare alla lastra anche all'interno del dielettrico. Si ha quindi che il vettore polarizzazione è parallelo all'asse x (perpendicolare alla lastra). Il vettore \mathbf{P} si calcola ricordando la relazione fra \mathbf{P} e densità volumetrica di carica di polarizzazione, ρ_P :

$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx}. \quad (1)$$

Nel caso in esame si ha quindi:

$$dP = \rho_0 dx. \quad (2)$$

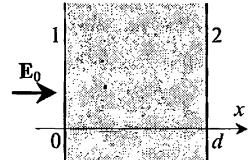
Per integrare l'equazione (2) dobbiamo conoscere una condizione al contorno. Dal momento che la densità superficiale di carica di polarizzazione in corrispondenza della superficie $x=0$ è trascurabile, si ottiene:

$$\sigma_P(0) = \mathbf{P}(0) \cdot (-\mathbf{u}_x) = -P(0) = 0. \quad (3)$$

Possiamo ora integrare la (2):

$$\int_0^{P(x)} dP = \int_0^x \rho_0 dx \Rightarrow \mathbf{P} = \rho_0 x \mathbf{u}_x. \quad (4)$$

(ii) Calcoliamo prima il vettore \mathbf{D} . Osserviamo che \mathbf{D} è perpendicolare alla lastra anche all'interno del dielettrico, quindi, dal momento che all'interfaccia vuoto-dielettrico si conserva la componente normale di \mathbf{D} , si conclude che tale vettore ha la stessa espressione in



tutto lo spazio: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$. Ricordando che $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{P}$, si ricava che il campo elettrico all'interno della lastra è dato da:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P}) = \left(E_0 - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x \right) \mathbf{u}_x. \quad (5)$$

Infine, la densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie $x = d$ è data da:

$$\sigma_P(d) = \mathbf{P}(d) \cdot \mathbf{u}_x = \rho_0 d. \quad (6)$$

S.3.15.

Calcoliamo il vettore \mathbf{D} in tutto lo spazio. Data la simmetria della configurazione tale vettore è parallelo all'asse x (perpendicolare alla lastra) e ha lo stesso modulo e verso opposto sulle coppie di piani perpendicolari all'asse x , posti in posizioni simmetriche rispetto alla lastra. Possiamo applicare il teorema di Gauss. Per calcolare \mathbf{D} all'esterno della lastra consideriamo una superficie cilindrica Σ_1 con basi di area A poste in posizioni simmetriche rispetto alla lastra come mostrato in figura:

$$\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{D}) = 2DA = \rho_{lib}Ad, \quad (1)$$

da cui si ottiene:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 = -\frac{1}{2} \rho_{lib}d \mathbf{u}_x, \quad x < 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_2 = \frac{1}{2} \rho_{lib}d \mathbf{u}_x, \quad x > d$$

Per calcolare il vettore $\mathbf{D} = D \mathbf{u}_x$ all'interno del dielettrico, consideriamo una superficie cilindrica Σ_2 posta a cavallo del piano $x = d$:

$$\Phi_{\Sigma_2}(\mathbf{D}) = D_2 A - DA = \rho_{lib}A(d - x), \quad (3)$$

da cui si ottiene, per $0 < x < d$:

$$\mathbf{D} = \rho_{lib} \left(x - \frac{d}{2} \right) \mathbf{u}_x. \quad (4)$$

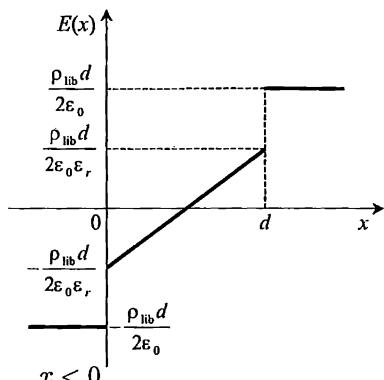
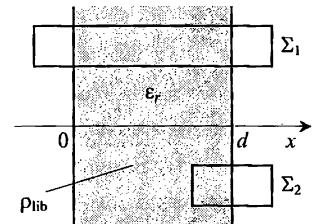
Possiamo ora determinare facilmente il campo

elettrico:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_{lib}}{2\epsilon_0} d \mathbf{u}_x,$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(x - \frac{d}{2} \right) \mathbf{u}_x, \quad 0 < x < d \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{lib}}{2\epsilon_0} d \mathbf{u}_x, \quad x > d$$



Calcoliamo ora il potenziale, assumendo $V = 0$ per $x = 0$. Per $x < 0$ si ha:

$$\int_0^{V(x)} dV = - \int_0^x E dx = \frac{\rho_{lib}d}{2\epsilon_0} \int_0^x dx, \quad (6)$$

da cui:

$$V(x) = \frac{\rho_{lib}d}{2\epsilon_0} x. \quad (7)$$

Per $0 < x < d$ si ottiene:

$$\int_0^{V(x)} dV = - \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_0^x \left(x - \frac{d}{2} \right) dx, \quad (8)$$

da cui:

$$V(x) = - \frac{\rho_{lib}}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x^2 - xd). \quad (9)$$

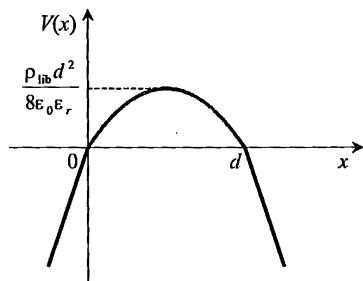
Infine, per $x > d$, poiché il potenziale è continuo in $x = d$, si ha:

$$\int_{V(d)}^{V(x)} dV = - \frac{\rho_{lib}d}{2\epsilon_0} \int_d^x dx, \quad (10)$$

da cui:

$$V(x) = - \frac{\rho_{lib}d}{2\epsilon_0} (x - d). \quad (11)$$

Gli andamenti del campo elettrico e del potenziale in funzione di x sono mostrati in figura.



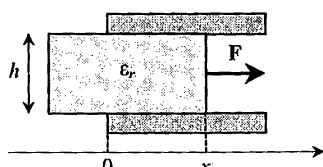
S.3.16.

Il sistema in considerazione è *isolato*, quindi il lavoro compiuto dalle forze del campo sulla lastrina dielettrica è compiuto a spese dell'energia elettrostatica U del sistema. Per la conservazione dell'energia possiamo quindi scrivere:

$$dL_{campo} + dU = 0, \quad (1)$$

dove, indicando con \mathbf{F} la forza elettrica agente sul dielettrico, si ha:

$$dL_{campo} = \mathbf{F} \cdot dr. \quad (2)$$



Nel caso in esame, indicando con x un asse parallelo alle armature del condensatore, si ha:

$$F dx + dU = 0 \Rightarrow F = - \frac{dU}{dx}. \quad (3)$$

Calcoliamo quindi l'energia elettrostatica del condensatore, nella situazione in cui la lastrina dielettrica è inserita per un tratto x fra le armature. Come visto nel problema P.3.2., il

sistema è equivalente a due condensatori in parallelo, uno, di capacità C_1 , completamente riempito di dielettrico, il secondo, di capacità C_2 , vuoto. Si ha:

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{Lx}{h}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{L(L-x)}{h}. \quad (4)$$

La capacità complessiva è quindi data da:

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{L}{h} [L + x(\epsilon_r - 1)]. \quad (5)$$

L'energia elettrostatica totale del condensatore è data da:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{hQ^2}{2\epsilon_0 L [L + x(\epsilon_r - 1)]}. \quad (6)$$

La forza che agisce sulla lastrina dielettrica si calcola quindi nel modo seguente:

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dx} \mathbf{u}_x = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 L} \frac{\epsilon_r - 1}{[L + x(\epsilon_r - 1)]^2} \mathbf{u}_x. \quad (7)$$

Si osservi che l'energia elettrostatica diminuisce al crescere di x , cioè quando la lastrina penetra tra le armature del condensatore:

$$dU = \left(\frac{dU}{dx} \right)_Q dx = -\frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 L} \frac{\epsilon_r - 1}{[L + x(\epsilon_r - 1)]^2} dx, \quad (8)$$

quando $dx > 0$ (dielettrico risucchiato fra le armature) si ha $dU < 0$: il sistema si porta quindi verso il minimo di energia elettrostatica.

S.3.17.

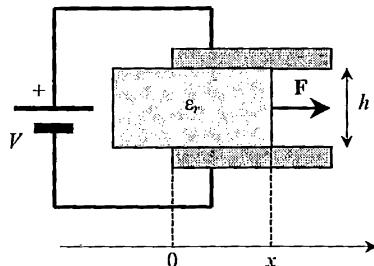
A differenza del caso presentato nell'esercizio precedente, il sistema è *non isolato*, dato che un generatore di tensione è collegato al condensatore per tutta la durata del processo. In questo caso il lavoro meccanico compiuto dalle forze del campo è compiuto non soltanto a spese dell'energia elettrostatica del condensatore, ma anche a spese del generatore esterno. Il principio di conservazione dell'energia si scrive quindi nel modo seguente:

$$dL_{campo} + dU_V = dL_{gen}, \quad (1)$$

avendo indicato con dL_{campo} il lavoro compiuto dalle forze del campo per uno spostamento infinitesimo della lastrina dielettrica; dU_V la corrispondente variazione dell'energia elettrostatica del condensatore mantenuto a una differenza di potenziale V costante; dL_{gen} è il lavoro compiuto dal generatore esterno.

Calcoliamo dapprima l'energia elettrostatica del condensatore. La capacità del condensatore è stata calcolata nell'esercizio precedente:

$$C = \epsilon_0 \frac{L}{h} [L + x(\epsilon_r - 1)]. \quad (2)$$



Si può quindi scrivere:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\epsilon_0 LV^2}{2h}[L + x(\epsilon_r - 1)]. \quad (3)$$

Se la lastrina viene risucchiata di un tratto dx , la corrispondente variazione di energia elettrostatica è data da:

$$dU_V = \left(\frac{dU}{dx} \right)_V dx = \frac{\epsilon_0 LV^2}{2h}(\epsilon_r - 1) dx. \quad (4)$$

Il corrispondente lavoro compiuto dalla forza elettrostatica è:

$$dL_{campo} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dx. \quad (5)$$

Dal momento che la variazione di capacità conseguente allo spostamento dx del dielettrico comporta anche una variazione della carica sulle armature del condensatore pari a $dQ = V dC$, il generatore deve compiere un lavoro dL_{gen} pari a:

$$dL_{gen} = V dQ = V^2 dC = V^2 \frac{\epsilon_0 L}{h}(\epsilon_r - 1) dx. \quad (6)$$

Utilizzando la (1) si ottiene quindi:

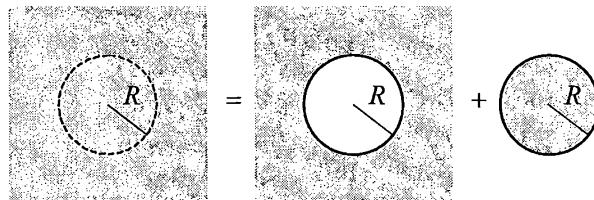
$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_0 LV^2}{2h}(\epsilon_r - 1) \mathbf{u}_x. \quad (7)$$

Si osservi che $dL_{gen} = 2 dU_V$, quindi: $dL_{campo} = dL_{gen} - dU_V = dU_V$. Si ricava che, nel caso di un sistema non isolato, la forza agente è data da:

$$F = \frac{dU}{dx}. \quad (8)$$

S.3.18.

Per calcolare il campo elettrico all'interno della cavità utilizzeremo il principio di sovrapposizione degli effetti. La configurazione assegnata si può immaginare come ottenuta rimuovendo una sfera di materiale polarizzato, supponendo di congelare lo stato di polarizzazione presente nella sfera. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il campo



elettrico nel dielettrico prima di praticare il foro è la somma del campo generato dalle cariche esterne alla sfera e del campo generato dalle cariche interne alla sfera polarizzata. Indicando con \mathbf{E} il campo presente nel dielettrico, si ottiene:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{sf}, \quad (1)$$

dove \mathbf{E}_c è il campo nella cavità, che dobbiamo calcolare, e \mathbf{E}_{sf} è il campo nella sfera uniformemente polarizzata, dato da:

$$\mathbf{E}_{sf} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}, \quad (2)$$

dove $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$. Si ha quindi:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{sf} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \frac{2 + \epsilon_r}{3}\mathbf{E}. \quad (3)$$

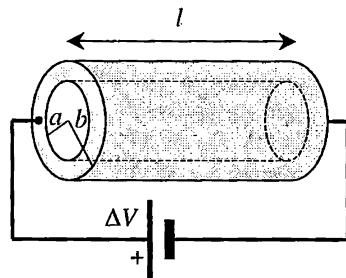
Capitolo 4

Correnti stazionarie

4.1 Problemi

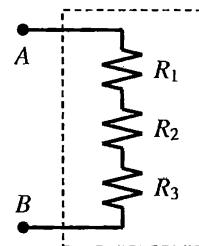
P.4.1.

Un generatore di differenza di potenziale $\Delta V = 25 \text{ mV}$ è connesso agli estremi di un conduttore di alluminio a forma di cilindro cavo, di lunghezza $l = 75 \text{ cm}$ e raggi di base interno ed esterno $a = 0.6 \text{ mm}$ e $b = 0.7 \text{ mm}$, rispettivamente (vedi figura). Sapendo che la resistività dell'alluminio è $\tau = 2.7 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$, si calcolino l'intensità di corrente che fluisce nel conduttore e la sua resistenza elettrica R .



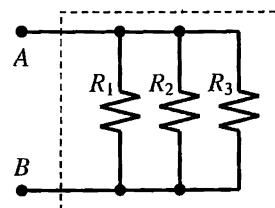
P.4.2.

Tre conduttori che presentano rispettivamente valori di resistenza R_1 , R_2 e R_3 sono connessi in serie, come indicato in figura. Si calcoli il valore di resistenza equivalente della serie dei tre conduttori, cioè la resistenza di un conduttore nel quale, se sostituito alla serie dei tre conduttori, fluirebbe la stessa intensità di corrente, a parità di differenza di potenziale applicata fra i due estremi A e B .



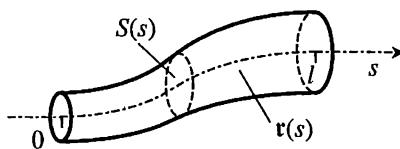
P.4.3.

Tre conduttori che presentano rispettivamente valori di resistenza R_1 , R_2 e R_3 sono connessi in parallelo, come indicato in figura. Si calcoli il valore di resistenza equivalente del parallelo fra i tre conduttori, cioè la resistenza di un conduttore ai capi del quale, se sostituito al parallelo dei tre conduttori, a parità di intensità di corrente totale nei tre conduttori, si avrebbe la stessa differenza di potenziale fra i due estremi A e B .

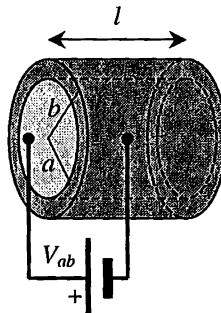


P 4.4.

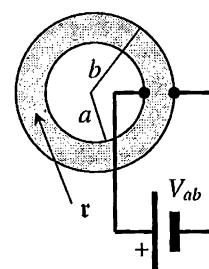
Un filo conduttore curvilineo ha lunghezza l , sezione S variabile lungo il suo asse secondo l'espressione $S = S(s)$ (dove s rappresenta l'ascissa curvilinea) e resistività variabile secondo la legge $\tau = \tau(s)$, ma uniforme in ogni sezione del filo (vedi figura). Si ricavi l'espressione della resistenza elettrica di tale conduttore.

**P 4.5.**

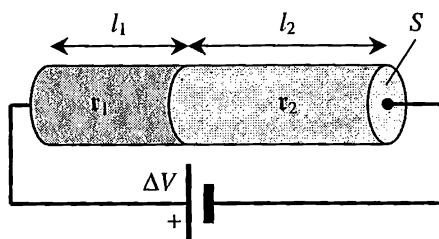
Un generatore mantiene una differenza di potenziale $V_{ab} = 1.5$ V tra la superficie interna e quella esterna di un conduttore a forma di cilindro cavo, di lunghezza $l = 1$ mm e raggi di base interno ed esterno $a = 0.2$ mm e $b = 0.8$ mm, rispettivamente (vedi figura). Sapendo che la resistività del conduttore è $\tau = 3.5 \Omega \text{ cm}$, si calcoli la potenza erogata dal generatore.

**P 4.6.**

Un generatore mantiene una differenza di potenziale V_{ab} tra la superficie interna e quella esterna di un guscio sferico di materiale conduttore, di raggi interno ed esterno a e b , rispettivamente, e di resistività τ (vedi figura). Si calcoli l'intensità di corrente che fluisce nel conduttore.

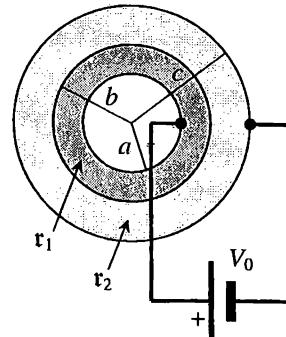
**P 4.7.**

Un generatore di differenza di potenziale ΔV è connesso ai capi di un conduttore cilindrico di sezione S , che presenta una resistività τ_1 in un primo tratto, di lunghezza l_1 , e poi una differente resistività τ_2 in un secondo tratto, di lunghezza l_2 (vedi figura). Si calcolino l'intensità di corrente che fluisce nel conduttore e la densità di carica elettrica che si accumula alla superficie di discontinuità fra i due tratti di conduttore.

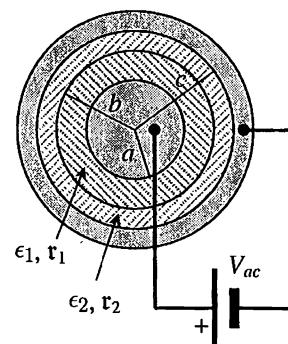


P.4.8.

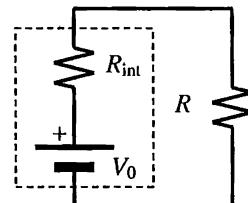
Due conduttori a forma di guscio sferico sono disposti concentricamente e connessi ad un generatore di differenza di potenziale V_0 , come indicato in figura. Siano a , b e c i loro raggi interni ed esterni, r_1 e r_2 i rispettivi valori di resistività. Si calcolino, all'interno dei due conduttori, la densità di corrente J ed il campo elettrico E . Si calcoli infine la densità di carica elettrica che si accumula all'interfaccia fra i due conduttori.

P.4.9.

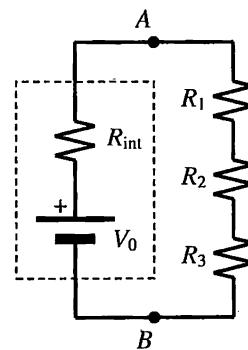
Un generatore mantiene una differenza di potenziale V_{ac} tra le armature di un condensatore cilindrico, di raggi interno ed esterno a e c , rispettivamente, e di altezza $h \gg c$. Lo spazio fra le armature è riempito da due diversi dielettrici, a forma di guscio cilindrico, di raggi (a, b) e (b, c) , come indicato in figura. Le costanti dielettriche assolute valgono ϵ_1 ed ϵ_2 , rispettivamente; entrambi i dielettrici sono isolanti imperfetti, cioè presentano resistività finite r_1 e r_2 . Si calcolino la carica immagazzinata su ciascuna delle armature e la densità di carica libera che si accumula all'interfaccia fra i due dielettrici.

P.4.10.

Un generatore reale che sviluppa una differenza di potenziale V_0 può essere schematizzato come un generatore ideale con una resistenza interna R_{int} , di piccolo valore, collegata in serie. Il generatore viene utilizzato per alimentare un carico di resistenza R , come indicato in figura. Si calcoli la potenza trasferita dal generatore al carico e dissipata per effetto Joule nel resistore. Fissati V_0 e R_{int} , per quale valore di R tale potenza è massima?

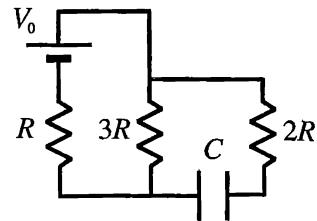
P.4.11.

Un generatore di differenza di potenziale $V_0 = 12$ V con resistenza interna $R_{int} = 0.5 \Omega$ è collegato ad una serie di tre resistori, di resistenze $R_1 = 7.5 \Omega$, $R_2 = 3.5 \Omega$ ed $R_3 = 4.5 \Omega$, come mostrato in figura. Si calcolino la corrente che circola nel circuito, la differenza di potenziale ai capi di ciascuno dei tre resistori e la differenza di potenziale V_{AB} ai capi del generatore reale.

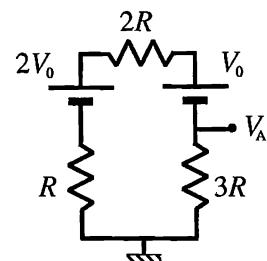


P.4.12.

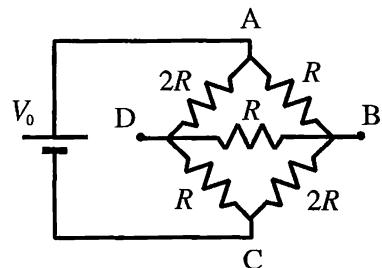
Si consideri il circuito in figura; si calcolino: (i) la corrente circolante nel circuito; (ii) la differenza di potenziale ai capi del condensatore in regime stazionario; (iii) la potenza dissipata dal generatore; (iv) l'energia immagazzinata nel condensatore. [$R = 50 \Omega$; $C = 150 \text{ nF}$; $V_0 = 12 \text{ V}$.]

**P.4.13.**

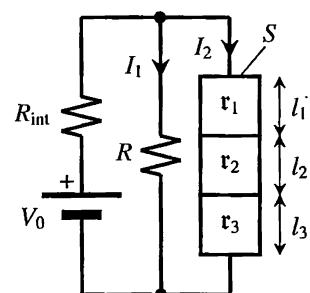
Al morsetto di uscita del circuito mostrato a lato è presente una differenza di potenziale V_A misurata rispetto alla massa. Si determini il valore di V_A in funzione delle quantità V_0 ed R ; se si sostituisse la resistenza $3R$ con una resistenza variabile R_{var} , quali sarebbero i valori di V_A che si potrebbero ottenere variando R_{var} tra zero (cortocircuito) ed infinito (circuito aperto)?

**P.4.14.**

Si consideri un circuito costituito da cinque resistori, disposti come in figura; agli estremi A e C del circuito si connette un generatore che mantiene una differenza di potenziale V_0 costante; si calcolino: (i) la corrente circolante attraverso il generatore; (ii) la differenza di potenziale tra gli estremi B e D del circuito. [$R = 100 \Omega$; $V_0 = 15 \text{ V}$]

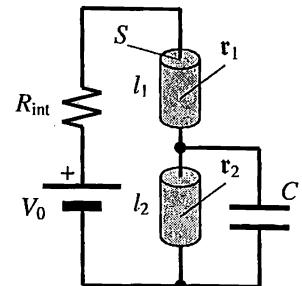
**P.4.15.**

Un generatore di differenza di potenziale V_0 con resistenza interna R_{int} è collegato ad un carico di resistenza R e ad un conduttore formato da tre tratti di materiali diversi, di uguale sezione S e con resistività e lunghezze pari a (r_1, l_1) , (r_2, l_2) e (r_3, l_3) , rispettivamente, come mostrato in figura. Si calcolino le correnti I_1 e I_2 che fuiscono nei due conduttori.



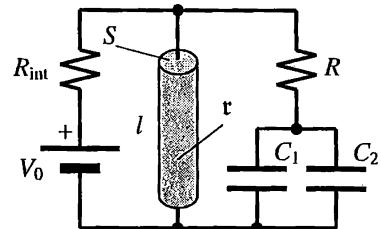
P.4.16.

Un generatore di differenza di potenziale $V_0 = 12$ V con resistenza interna $R_{\text{int}} = 1 \Omega$ è collegato al circuito mostrato in figura. I due conduttori cilindrici del circuito hanno sezione $S = 1 \text{ mm}^2$, lunghezza $l_1 = 1.4 \text{ cm}$ e $l_2 = 2.5 \text{ cm}$, e resistività $r_1 = 2.5 \times 10^{-2} \Omega \text{ cm}$ e $r_2 = 2.2 \times 10^{-2} \Omega \text{ cm}$, rispettivamente; il condensatore ha capacità $C = 100 \text{ nF}$. Si calcolino, in condizioni stazionarie, la differenza di potenziale ai capi di ciascun resistore e la carica immagazzinata nel condensatore.



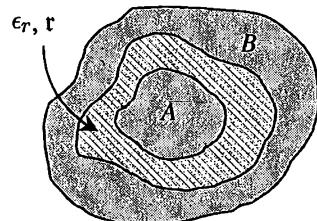
P.4.17.

Un generatore di differenza di potenziale V_0 con resistenza interna R_{int} è collegato al circuito mostrato in figura, composto da un conduttore cilindrico di lunghezza l , sezione S e resistività r , un resistore di resistenza R e due condensatori di capacità C_1 e C_2 . Si calcolino, in condizioni stazionarie, la potenza erogata dal generatore e l'energia elettrostatica immagazzinata in ciascun condensatore.



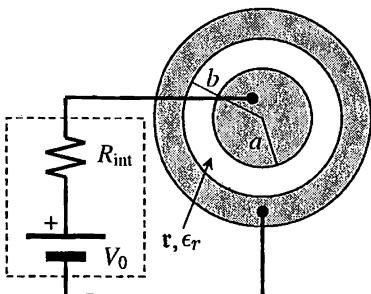
P.4.18.

Un conduttore A è completamente racchiuso da un conduttore cavo B ; l'intercapedine è riempita da un materiale dielettrico con costante dielettrica relativa ϵ_r , ma non perfettamente isolante, con resistività r finita. La struttura costituisce quindi un condensatore con perdite. Si mostri che, qualunque siano le dimensioni e la forma del condensatore, la sua resistenza di perdita R_C e la sua capacità C sono legate dall'equazione $R_C C = r \epsilon_0 \epsilon_r$.



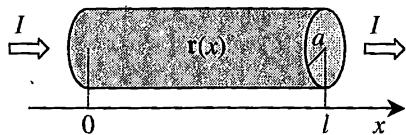
P.4.19.

Un condensatore cilindrico, di raggi interno ed esterno a e b e di altezza $h \gg b$, è riempito con un dielettrico imperfetto, di costante dielettrica relativa ϵ_r e di resistività r finita. Le due armature sono connesse ad un generatore di differenza di potenziale V_0 con resistenza interna R_{int} (vedi figura). Si calcolino la potenza erogata dal generatore e l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

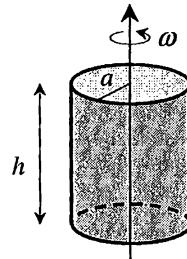


P.4.20.

Una corrente stazionaria I fluisce attraverso un conduttore cilindrico, di lunghezza l e raggio di base a (vedi figura). La resistività τ varia linearmente lungo l'asse x del conduttore secondo l'espressione $\tau(x) = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1)x/l$, con $0 \leq x \leq l$. Si calcoli la distribuzione della densità volumetrica di carica $\rho(x)$ lungo il conduttore.

P.4.21.

Un conduttore cilindrico di raggio a e di altezza $h \gg a$ ruota attorno al suo asse con velocità angolare costante ω . Indicando con m_e la massa e con q_e la carica di un elettrone, si calcolino la differenza di potenziale $V(0) - V(a)$ fra l'asse del conduttore e la sua superficie laterale, la densità volumetrica ρ e quella superficiale σ delle cariche indotte nel conduttore a causa della rotazione.

P.4.22.

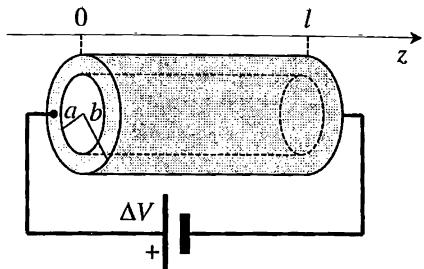
All'interno di un materiale conduttore, il libero cammino medio per gli elettroni di conduzione, cioè lo spazio percorso in media tra due urti successivi contro gli ioni del reticolo metallico, vale $l_m = 1.5 \times 10^{-8}$ m. La densità degli elettroni di conduzione nel metallo vale $n = 5.5 \times 10^{28}$ m $^{-3}$. Ricordando che la massa e la carica di un elettrone valgono circa $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg e $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C rispettivamente, si utilizzi un semplice modello microscopico della conduzione per ottenere una stima della resistività del conduttore alla temperatura $T = 300$ K.

4.2 Soluzioni

S.4.1.

La corrente stazionaria che fluisce nel conduttore quando una differenza di potenziale ΔV viene applicata ai suoi estremi è distribuita uniformemente sulla sua sezione, di area $S = \pi(b^2 - a^2)$. La densità di corrente \mathbf{J} , quindi, è uniforme in tutti i punti del conduttore, ed è legata all'intensità di corrente I dalla seguente relazione:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S} \mathbf{u}_z, \quad (1)$$



dove \mathbf{u}_z indica il versore dell'asse z , che abbiamo preso diretto come il flusso di corrente, cioè dall'estremo del conduttore a potenziale più alto verso quello a potenziale più basso (vedi figura). Applicando la legge di Ohm in forma locale, quindi, possiamo scrivere la relazione che lega I al campo elettrico \mathbf{E} all'interno del conduttore:

$$\mathbf{E} = \tau \mathbf{J} = \frac{\tau I}{S} \mathbf{u}_z. \quad (2)$$

A questo punto, poiché il generatore mantiene una differenza di potenziale ΔV tra i due estremi del conduttore, possiamo scrivere:

$$\Delta V = V(0) - V(l) = \int_0^l E(z) dz = \frac{\tau l}{S} I. \quad (3)$$

Da questa espressione ricaviamo subito l'intensità di corrente:

$$I = \frac{S \Delta V}{\tau l} = \frac{\pi(b^2 - a^2) \Delta V}{\tau l} \simeq 504 \text{ mA}. \quad (4)$$

Sempre dall'equazione (3), tenendo conto della legge di Ohm in forma integrale, otteniamo che la resistenza R del conduttore vale

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\tau l}{S}, \quad (5)$$

e quindi, nel nostro caso:

$$R = \frac{\tau l}{\pi(b^2 - a^2)} \simeq 49.6 \times 10^{-3} \Omega. \quad (6)$$

Osserviamo che l'equazione (5) sopra ricavata è di validità generale per tutti i conduttori omogenei di forma "cilindrica", cioè con sezione costante (non necessariamente di forma circolare) e superficie laterale ortogonale alle basi, in cui la differenza di potenziale sia applicata fra le due basi. In questo caso, infatti, la corrente stazionaria si distribuisce uniformemente sulla sezione e quindi si può applicare il ragionamento sopra descritto.

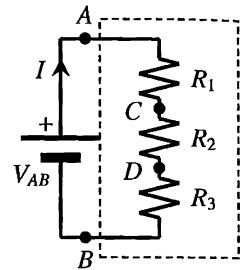
S.4.2.

Supponiamo di connettere un generatore di differenza di potenziale $V_{AB} = V_A - V_B$ alla serie dei tre resistori, fra i due estremi A e B (vedi figura). Nei tre conduttori fluirà una corrente stazionaria con la stessa intensità I (essendo connessi in serie), che ovviamente risulterà direttamente proporzionale a V_{AB} . Per calcolare la relazione che lega I a V_{AB} applichiamo la legge di Ohm in forma integrale a ciascuno dei conduttori:

$$V_1 = V_A - V_C = R_1 I, \quad (1)$$

$$V_2 = V_C - V_D = R_2 I, \quad (2)$$

$$V_3 = V_D - V_B = R_3 I. \quad (3)$$



Sommendo membro a membro queste tre equazioni otteniamo:

$$V_A - V_C + V_C - V_D + V_D - V_B = V_A - V_B = (R_1 + R_2 + R_3) I. \quad (4)$$

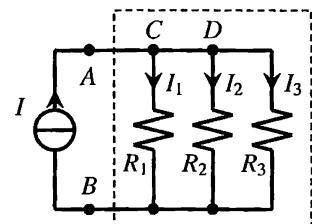
Di conseguenza possiamo calcolare la resistenza "equivalente serie" R_{ser} come il rapporto fra V_{AB} e I , cioè:

$$R_{\text{ser}} = R_1 + R_2 + R_3. \quad (5)$$

Questo risultato si generalizza in maniera ovvia al caso di un numero qualunque di resistenze connesse in serie: la resistenza equivalente è pari alla somma delle singole resistenze. Questa equivalenza è da intendersi ai fini esterni, cioè per quanto riguarda il rapporto fra la differenza di potenziale totale ai capi della serie e l'intensità di corrente che vi fluisce; naturalmente occorre invece considerare le singole resistenze (eventualmente dopo aver sfruttato l'equivalenza per calcolare la corrente che fluisce nella serie) se si vuol calcolare la differenza di potenziale ai capi di qualcuna di esse.

S.4.3.

Supponiamo, in questo caso, di alimentare il parallelo delle tre resistenze con un generatore di corrente stazionaria I (vedi figura). Fra gli estremi A e B si svilupperà una certa differenza di potenziale $V_{AB} = V_A - V_B$, che sarà ovviamente la stessa ai capi di ciascuno dei tre conduttori, appunto perché sono connessi in parallelo. Possiamo allora applicare la legge di Ohm in forma integrale a ciascuno dei conduttori per calcolare l'intensità di corrente che vi fluisce:



$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1}, \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2}, \quad (2)$$

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3}. \quad (3)$$

Nel caso stazionario, essendo la divergenza del vettore densità di corrente \mathbf{J} pari a zero, l'intensità di corrente totale che entra in un nodo (o, più in generale, in una qualunque

superficie chiusa) è sempre uguale a quella che ne esce. In particolare, applicando questa legge ai nodi C e D otteniamo che la corrente totale I che fluisce nel parallelo è la somma delle tre correnti:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (4)$$

Possiamo quindi calcolare la resistenza "equivalente parallelo" R_{par} come il rapporto fra V_{AB} e I , cioè:

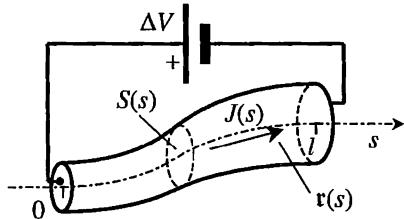
$$R_{\text{par}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} \quad . \quad (5)$$

Questo risultato si generalizza in maniera ovvia al caso di un numero qualunque di resistenze connesse in parallelo: la resistenza equivalente è tale che il suo reciproco è pari alla somma dei reciproci delle singole resistenze. Come nel caso delle resistenze in serie, anche questa equivalenza è da intendersi ai soli fini esterni, cioè per quanto riguarda il rapporto fra la differenza di potenziale ai capi del parallelo e l'intensità di corrente totale che vi fluisce; occorre invece considerare le singole resistenze (eventualmente dopo aver sfruttato l'equivalenza per calcolare la differenza di potenziale ai capi del parallelo) se si vuole calcolare la corrente che fluisce attraverso qualcuna di esse.

S.4.4.

Per calcolare la resistenza elettrica R immaginiamo di applicare ai capi del conduttore una differenza di potenziale $\Delta V = V(0) - V(l)$, che produce un flusso di corrente stazionaria di intensità I nel verso in cui l'ascissa curvilinea s cresce. In ogni sezione del filo la densità di corrente \mathbf{J} è tangente al filo conduttore ed uniforme, poiché il conduttore è per ipotesi filiforme e la resistività varia con s ma non sulla sezione stessa. Precisamente, avremo per il modulo J della densità di corrente:

$$J(s) = \frac{I}{S(s)}. \quad (1)$$



Applicando la legge di Ohm in forma locale otteniamo dunque che il campo elettrico vale

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{r}(s) J(s) = \mathbf{r}(s) \frac{I}{S(s)}; \quad (2)$$

la differenza di potenziale ai capi del conduttore risulta perciò

$$\Delta V = V(0) - V(l) = \int_0^l \mathbf{E}(s) ds = I \int_0^l \frac{\mathbf{r}(s) ds}{S(s)}. \quad (3)$$

Infine, confrontando l'equazione (3) con la legge di Ohm in forma integrale, si ottiene l'espressione della resistenza:

$$R = \int_0^l \frac{\mathbf{r}(s) ds}{S(s)}. \quad (4)$$

Come caso particolare, se la sezione S e la resistività τ sono costanti lungo il filo, si ottiene la ben nota relazione per il calcolo della resistenza:

$$R = \frac{\tau l}{S}, \quad (5)$$

che abbiamo già ricavato nel risolvere il primo esercizio di questo capitolo. L'espressione (4) ha un'interpretazione fisica abbastanza semplice: il filo conduttore può essere pensato come una serie infinita di tratti di conduttore, di spessore infinitesimo ds , in ciascuno dei quali la resistività e la sezione sono uniformi. Ogni tratto presenta dunque una resistenza infinitesima dR che, in base all'equazione (5), vale

$$dR = \frac{\tau(s) ds}{S(s)}; \quad (6)$$

la resistenza totale è la somma di tutte queste resistenze in serie, cioè l'integrale di dR , trattandosi di infiniti termini. Ovviamente anche questo modo di procedere porta a scrivere l'equazione (4) per la resistenza di un filo conduttore con resistività e/o sezione non costante.

S.4.5.

Per calcolare la potenza erogata dal generatore è sufficiente calcolare l'intensità I della corrente stazionaria che fluisce dalla superficie interna verso quella esterna. Assumiamo che il generatore mantenga una differenza di potenziale V_{ab} tra la superficie interna del conduttore e quella esterna, ma che entrambe le superfici siano equipotenziali. Data la simmetria cilindrica della struttura, la densità di corrente ha certamente direzione radiale e modulo che dipende solo dalla distanza r dall'asse della struttura cilindrica:

$$\mathbf{J} = J(r)\mathbf{u}_r, \quad (1)$$

dove \mathbf{u}_r indica il versore radiale uscente in un sistema di coordinate cilindriche. Se consideriamo le superfici cilindriche di raggio r e di lunghezza l , con $a < r < b$, coassiali con il conduttore, in condizioni stazionarie la corrente I che le attraversa è la stessa per tutte queste superfici, quindi la densità di corrente vale:

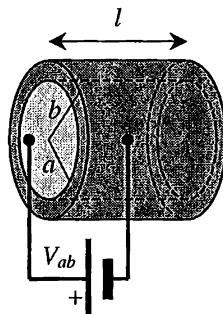
$$\mathbf{J} = \frac{I}{S(r)}\mathbf{u}_r = \frac{I}{2\pi rl}\mathbf{u}_r, \quad (2)$$

dove con $S(r) = 2\pi rl$ abbiamo indicato l'area laterale della generica superficie cilindrica di raggio r . Il campo elettrico nel conduttore, perciò, vale:

$$\mathbf{E} = \tau \mathbf{J} = E(r)\mathbf{u}_r = \frac{\tau I}{2\pi rl}\mathbf{u}_r. \quad (3)$$

Possiamo ora imporre che l'integrale del campo elettrico lungo una linea radiale che va dalla superficie interna a quella esterna sia pari alla differenza di potenziale V_{ab} mantenuta dal generatore tra le due superfici:

$$V_{ab} = \int_a^b E(r) dr = \frac{\tau I}{2\pi l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\tau I}{2\pi l} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (4)$$



A questo punto siamo in grado di calcolare la corrente I , che è l'unica incognita nell'equazione (4), e quindi la potenza erogata dal generatore:

$$P = I V_{ab} = \frac{2\pi l V_{ab}^2}{\mathfrak{r} \ln(b/a)} \simeq 0.29 \text{ W}. \quad (5)$$

Un possibile procedimento alternativo consiste nel calcolare anzitutto la resistenza R del conduttore, e quindi la potenza erogata dal generatore. Per calcolare la resistenza R possiamo pensare il conduttore come una sequenza di gusci cilindrici, ciascuno di spessore infinitesimo dr , tutti collegati in serie. Questa scomposizione ha senso perché la densità di corrente \mathbf{J} ha direzione radiale nel conduttore e quindi è ortogonale alle superfici di ciascuno di questi gusci cilindrici. Il generico guscio di raggio r ha una superficie laterale $S(r)$, che costituisce la sezione del conduttore, mentre lo spessore dr fa da lunghezza del conduttore. La resistenza infinitesima del guscio cilindrico, quindi, si può calcolare applicando l'equazione (6) dell'esercizio precedente:

$$dR = \frac{\mathfrak{r} dr}{S(r)} = \frac{\mathfrak{r} dr}{2\pi r l}. \quad (6)$$

La resistenza totale del conduttore si calcola sommando tutte le resistenze dei gusci cilindrici, cioè eseguendo il seguente integrale:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\mathfrak{r} dr}{2\pi r l} = \frac{\mathfrak{r}}{2\pi l} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (7)$$

Utilizzando quindi l'espressione $P = V_{ab}^2/R$ per la potenza erogata dal generatore si per-
viene allo stesso risultato ottenuto in precedenza.

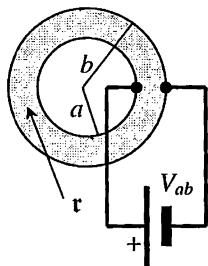
S.4.6.

Data la simmetria sferica del problema, la densità di corrente \mathbf{J} ed il campo elettrico \mathbf{E} hanno direzione radiale e modulo che dipende solo dalla distanza r dal centro della struttura. Ragionando come nell'esercizio precedente, in questo caso possiamo pensare il conduttore come una serie di gusci sferici di spessore infinitesimo dr . Il generico guscio sferico, di raggio r , presenta una superficie

$$S(r) = 4\pi r^2, \quad (1)$$

e quindi una resistenza infinitesima pari a:

$$dR = \frac{\mathfrak{r} dr}{S(r)} = \frac{\mathfrak{r} dr}{4\pi r^2}. \quad (2)$$



La resistenza totale è l'integrale di questa espressione:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\mathfrak{r} dr}{4\pi r^2} = \frac{\mathfrak{r}}{4\pi} \frac{b-a}{ab}. \quad (3)$$

L'intensità di corrente che fluisce nel conduttore, infine, si calcola applicando la legge di Ohm in forma integrale:

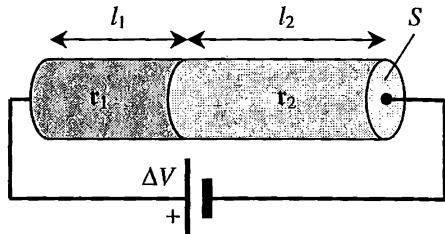
$$I = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{4\pi ab V_{ab}}{(b-a)\mathfrak{r}}. \quad (4)$$

S.4.7.

La resistenza totale del conduttore si calcola sommando le resistenze dei singoli tratti, che sono connessi in serie:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}{S}. \quad (1)$$

Di conseguenza, in base alla legge di Ohm in forma integrale, l'intensità di corrente vale:



$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V S}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}. \quad (2)$$

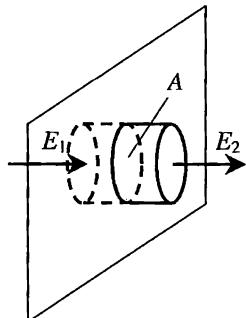
Poiché i due tratti di conduttore hanno valori di resistività differente, anche il campo elettrico assume due valori diversi nelle due regioni. Infatti, per la legge di Ohm in forma locale, esso risulta pari al prodotto della resistività per la densità di corrente $J = I/S$, che è la stessa nei due tratti:

$$E_1 = \tau_1 \frac{I}{S} = \frac{\tau_1 \Delta V}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}, \quad (3)$$

$$E_2 = \tau_2 \frac{I}{S} = \frac{\tau_2 \Delta V}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}. \quad (4)$$

Per questo motivo si accumula una carica elettrica all'interfaccia tra i due materiali, con una certa densità σ proporzionale alla differenza tra i valori del campo elettrico nelle due regioni. Infatti, applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di base A che si trovi a cavallo dell'interfaccia, come indicato in figura, tenendo conto delle direzioni dei campi E_1 ed E_2 , si ottiene:

$$\Phi_{\text{cil}}(\mathbf{E}) = \int_{\text{cil}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = (E_2 - E_1)A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \quad (5)$$



dove con \mathbf{n} abbiamo indicato il versore normale alla superficie del cilindro ed uscente da essa. In conclusione, in base a quest'ultima espressione e tenendo conto delle equazioni (3) e (4), la densità di carica accumulata all'interfaccia risulta pari a:

$$\sigma = \epsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\epsilon_0(\tau_2 - \tau_1)\Delta V}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}. \quad (6)$$

S.4.8.

Osserviamo anzitutto che la densità di corrente \mathbf{J} , a causa della simmetria sferica della struttura, è diretta radialmente e dipende in modulo solo dalla distanza r dal centro. In condizioni stazionarie, la divergenza di \mathbf{J} è nulla e quindi l'intensità I della corrente che attraversa una qualunque superficie sferica di raggio r concentrica con i conduttori (con $a < r < c$) è sempre la stessa. Inoltre, per ciascuna di tali superfici sferiche, la densità di corrente è legata ad I dalla seguente relazione:

$$\mathbf{J} = J(r) \mathbf{u}_r = \frac{I}{S(r)} \mathbf{u}_r = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r, \quad (1)$$

dove, con $S(r)$ abbiamo indicato l'area della superficie sferica

considerata. Ora, per calcolare I è sufficiente esprimere il campo elettrico in funzione di I e poi imporre che il suo integrale lungo una linea radiale che va dalla superficie di raggio a a quella di raggio c sia pari alla differenza di potenziale V_0 , mantenuta dal generatore fra le due superfici estreme. Dalla legge di Ohm in forma locale si ottiene:

$$\mathbf{E} = E(r) \mathbf{u}_r = \begin{cases} \frac{r_1 I}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r, & a < r < b, \\ \frac{r_2 I}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r, & b < r < c. \end{cases} \quad (2)$$

La differenza di potenziale vale quindi:

$$V_0 = \int_a^c E(r) dr = \int_a^b \frac{r_1 I}{4\pi r^2} dr + \int_b^c \frac{r_2 I}{4\pi r^2} dr = \frac{I}{4\pi} \left[\frac{r_1(b-a)}{ab} + \frac{r_2(c-b)}{bc} \right]. \quad (3)$$

Da questa equazione possiamo ricavare l'intensità di corrente I :

$$I = \frac{4\pi V_0 abc}{r_1 c(b-a) + r_2 a(c-b)}. \quad (4)$$

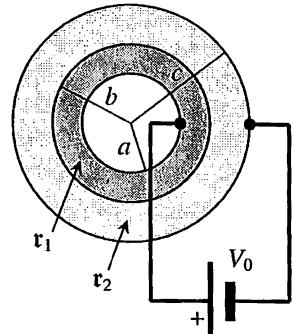
Sostituendo tale espressione nelle equazioni (1) e (2) si ottengono gli andamenti della densità di corrente e del campo elettrico nei conduttori:

$$\mathbf{J} = \frac{abc}{r_1 c(b-a) + r_2 a(c-b)} \frac{V_0}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{abc}{r_1 c(b-a) + r_2 a(c-b)} \frac{r_1 V_0}{r^2} \mathbf{u}_r, & a < r < b, \\ \frac{abc}{r_1 c(b-a) + r_2 a(c-b)} \frac{r_2 V_0}{r^2} \mathbf{u}_r, & b < r < c. \end{cases} \quad (6)$$

Per calcolare la densità di carica σ che si accumula fra i due conduttori consideriamo la superficie Σ di un guscio sferico, concentrico con la struttura, di spessore infinitesimo dr e che si trovi a cavallo della discontinuità di raggio b . Applicando il teorema di Gauss alla superficie Σ otteniamo:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = [E(b^+) - E(b^-)] 4\pi b^2 = \frac{\sigma 4\pi b^2}{\epsilon_0}, \quad (7)$$



dove con $E(b^+)$ ed $E(b^-)$ abbiamo indicato i valori del campo elettrico sulle superfici esterna ed interna di Σ , cioè ad una distanza dal centro, rispettivamente, superiore e inferiore di un infinitesimo a b . A questo punto, utilizzando l'equazione (6) per le espressioni del campo elettrico, si ricava:

$$\sigma = \epsilon_0 [E(b^+) - E(b^-)] = \epsilon_0 \frac{ac}{\tau_1 c(b-a) + \tau_2 a(c-b)} \frac{(\tau_2 - \tau_1)V_0}{b}. \quad (8)$$

Nota. E' interessante osservare che il segno della densità di carica che si accumula all'interfaccia dei due conduttori dipende dalla differenza di resistività degli stessi.

Inoltre, i due gusci sferici possono anche essere trattati come due resistenze in serie e quindi la resistenza totale vista dal generatore di tensione è pari a $R_{tot} = R_1 + R_2$, dove le due resistenze possono essere calcolate singolarmente utilizzando l'equazione (6) della soluzione S.4.4, applicata ad una geometria sferica. Si ottiene quindi:

$$R_{tot} = \frac{\tau_1}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{\tau_2}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\tau_1 c(b-a) + \tau_2 a(c-b)}{4\pi abc} \quad (9)$$

da cui si può ricavare la corrente I mediante la legge di Ohm, $I = V_0/R_{tot}$, ottenendo in modo alternativo l'equazione (4).

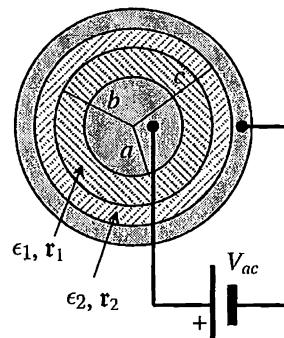
S.4.9.

Per calcolare la carica immagazzinata sulle armature e quella che si accumula fra i due dielettrici occorre anzitutto calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore.

Possiamo trascurare gli effetti di bordo, grazie all'ipotesi $h \gg c$ che viene fatta nel testo. Di conseguenza, data la simmetria cilindrica del problema, la densità di corrente J e il campo elettrico E all'interno del condensatore hanno entrambi direzione radiale (in coordinate cilindriche) e dipendono in modulo solo dalla distanza r dall'asse di simmetria:

$$\mathbf{J} = J(r) \mathbf{u}_r, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \tau \mathbf{J} = E(r) \mathbf{u}_r, \quad (2)$$



dove \mathbf{u}_r indica il versore radiale uscente in un sistema di coordinate cilindriche. Inoltre, in condizioni stazionarie, l'intensità di corrente I che attraversa una qualunque superficie cilindrica di raggio r , con $a < r < c$, e di altezza h , coassiale con i conduttori, è sempre la stessa. Di conseguenza la densità di corrente è legata alla corrente I dalla seguente relazione:

$$J(r) = \frac{I}{S(r)} = \frac{I}{2\pi hr}, \quad (3)$$

dove $S(r) = 2\pi rh$ indica l'area della superficie cilindrica di raggio r e di altezza h . L'andamento del campo elettrico in funzione di I si ricava applicando la legge di Ohm in forma

locale:

$$E(r) = \epsilon J(r) = \begin{cases} \frac{\epsilon_1}{2\pi h r} I, & a < r < b, \\ \frac{\epsilon_2}{2\pi h r} I, & b < r < c. \end{cases} \quad (4)$$

Per calcolare I basta integrare il campo elettrico lungo una linea radiale che va dalla superficie di raggio a a quella di raggio c ed imporre che la differenza di potenziale sia pari a quella del generatore, cioè V_{ac} :

$$V_{ac} = \int_a^c E(r) dr = \frac{I}{2\pi h} \left(\epsilon_1 \int_a^b \frac{dr}{r} + \epsilon_2 \int_b^c \frac{dr}{r} \right) = \frac{I}{2\pi h} [\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)], \quad (5)$$

da cui

$$I = \frac{2\pi h}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} V_{ac}. \quad (6)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (4) si ricava l'andamento del campo elettrico nei due dielettrici:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} \frac{V_{ac}}{r} \mathbf{u}_r, & a < r < b, \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} \frac{V_{ac}}{r} \mathbf{u}_r, & b < r < c. \end{cases} \quad (7)$$

A questo punto possiamo calcolare la carica Q_a immagazzinata sull'armatura di raggio a applicando il teorema di Gauss. Considerando infatti una superficie cilindrica S di raggio r , con $a < r < b$, e di altezza h , avremo:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_a}{\epsilon_1}, \quad a < r < b, \quad (8)$$

da cui si ricava Q_a sostituendo l'espressione (7) del campo elettrico:

$$Q_a = \frac{\epsilon_1 \epsilon_1}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} 2\pi h V_{ac}. \quad (9)$$

Per quanto riguarda la densità di carica libera σ alla discontinuità possiamo applicare la legge di Gauss alla superficie Σ di un guscio cilindrico di spessore infinitesimo dr , di altezza h e a cavallo dell'interfaccia di raggio b fra i due dielettrici. Poiché le costanti dielettriche dei due mezzi sono differenti applichiamo la legge di Gauss per il vettore spostamento elettrico $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = \int_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = [D(b^+) - D(b^-)] 2\pi b h = \sigma 2\pi b h, \quad (10)$$

da cui

$$\sigma = D(b^+) - D(b^-) = \epsilon_2 E(b^+) - \epsilon_1 E(b^-). \quad (11)$$

Sostituendo in questa espressione i valori del campo elettrico calcolati utilizzando l'equazione (7) si ottiene:

$$\sigma = \frac{(\epsilon_2 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_1)}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} \frac{V_{ac}}{b}. \quad (12)$$

Resta infine da calcolare la carica Q_c depositata sull'armatura esterna, che per via della corrente di perdita non ha lo stesso modulo di Q_a , come avviene in un condensatore ideale. E' facile rendersi conto del fatto che, in questo caso, la carica indotta Q_c è uguale in modulo e opposta in segno alla somma di Q_a e della carica libera che si accumula alla superficie di discontinuità fra i due dielettrici:

$$Q_c = -(Q_a + \sigma 2\pi b h). \quad (13)$$

Se infatti consideriamo una superficie chiusa Σ' che si trovi interamente nel conduttore esterno, ad esempio una superficie cilindrica con raggio maggiore di c , il campo elettrico è certamente nullo in tutti i suoi punti (poiché consideriamo le armature del condensatore come conduttori ideali, cioè con resistività nulla) e quindi certamente il flusso del vettore spostamento elettrico uscente da Σ' si annulla. Per il teorema di Gauss, dunque, la carica libera totale all'interno di Σ' è zero, cioè vale l'equazione (13). Sostituendo le espressioni di Q_a [equazione (9)] e di σ [equazione (12)] otteniamo la seguente espressione per Q_c :

$$Q_c = -2\pi h V_{ac} \frac{\tau_2 \epsilon_2}{\tau_1 \ln(b/a) + \tau_2 \ln(c/b)}. \quad (14)$$

S.4.10.

L'intensità di corrente I che circola nella resistenza di carico R è la stessa che attraversa anche la resistenza interna R_{int} del generatore. Applicando la legge di Ohm separatamente alle due resistenze si ottiene che:

$$V_A - V_B = R I, \quad (1)$$

$$V_C - V_A = R_{int} I. \quad (2)$$

Poiché, inoltre, il generatore ideale mantiene una differenza di potenziale V_0 tra i punti C e B , avremo che:

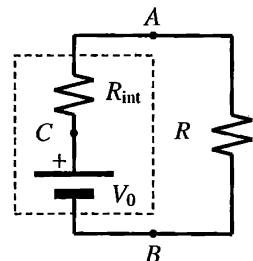
$$V_0 = V_C - V_B = (V_C - V_A) + (V_A - V_B) = (R_{int} + R)I. \quad (3)$$

La corrente che circola nei due resistori, cioè, essendo essi connessi in serie, è la stessa che attraverserebbe un unico resistore di resistenza pari alla somma $R_{int} + R$. Dall'equazione (3) si ricava subito I in funzione di V_0 , R e R_{int} ; la potenza trasferita dal generatore al carico, che viene dissipata per effetto Joule nel resistore, si calcola come:

$$P_{diss} = I^2 R = \frac{R}{(R_{int} + R)^2} V_0^2. \quad (4)$$

Se pensiamo di variare R , mantenendo invece fissi V_0 e R_{int} , la potenza dissipata è nulla per $R = 0$ (corto-circuito) e tende a zero per $R \rightarrow \infty$ (circuito aperto). E' logico, quindi, che tale potenza risulti massima per R pari ad un certo valore intermedio R_{max} . Per ricavare R_{max} calcoliamo la derivata di P_{diss} rispetto ad R :

$$\frac{dP_{diss}}{dR} = \frac{(R_{int} + R)^2 - 2(R_{int} + R)R}{(R_{int} + R)^4} V_0^2 = \frac{R_{int} - R}{(R_{int} + R)^3} V_0^2. \quad (5)$$



La derivata risulta positiva (e quindi la funzione crescente) per $R < R_{\text{int}}$, negativa per $R > R_{\text{int}}$; di conseguenza, il punto di massimo si ha proprio per

$$R = R_{\text{max}} = R_{\text{int}}. \quad (6)$$

Questa situazione viene comunemente descritta dicendo che la potenza trasferita al carico è massima se la resistenza del carico è *adattata* alla resistenza interna del generatore.

S.4.11.

Dal momento che i quattro resistori sono connessi in serie, la corrente che circola in essi è la stessa che circolerebbe in un unico resistore di resistenza pari alla somma delle quattro resistenze, come nell'esercizio precedente:

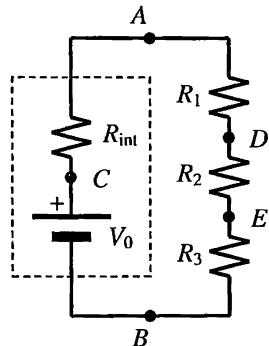
$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} = 750 \text{ mA}. \quad (1)$$

Indichiamo come V_1 , V_2 e V_3 le differenze di potenziale ai capi di R_1 , R_2 ed R_3 . Possiamo calcolare tali differenze di potenziale semplicemente applicando a ciascuno dei resistori la legge di Ohm:

$$V_1 = V_A - V_D = R_1 I = \frac{R_1}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} V_0 = 5.625 \text{ V}, \quad (2)$$

$$V_2 = V_D - V_E = R_2 I = \frac{R_2}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} V_0 = 2.625 \text{ V}, \quad (3)$$

$$V_3 = V_E - V_B = R_3 I = \frac{R_3}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} V_0 = 3.375 \text{ V}. \quad (4)$$



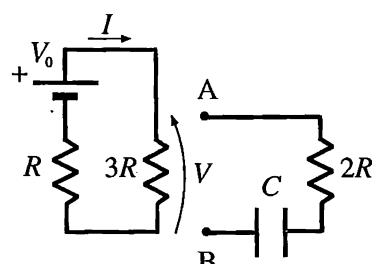
Infine, la differenza di potenziale ai capi del generatore reale si può calcolare come:

$$V_{AB} = V_A - V_B = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} V_0 = 11.625 \text{ V}. \quad (5)$$

Osserviamo che V_{AB} risulta leggermente inferiore a V_0 ; quest'ultima viene anche chiamata differenza di potenziale *a vuoto* (cioè in assenza di carico) del generatore.

S.4.12.

Per risolvere il problema, notiamo che nel ramo contenente il condensatore (tratto AB in figura) non circola corrente, in quanto il condensatore stesso agisce in regime stazionario da circuito aperto; ai fini del calcolo della corrente, possiamo separare questo tratto dal resto del circuito nel modo mostrato in figura. La corrente i circolante nel sistema sarà allora pari, per la legge di Ohm, a:



$$i = \frac{V_0}{R + 3R} = \frac{V_0}{4R}. \quad (1)$$

La potenza dissipata dal generatore sarà allora pari a:

$$\mathcal{P} = V_0 i = \frac{V_0^2}{4R}. \quad (2)$$

La differenza di potenziale V ai capi della resistenza $3R$ è pari anche alla differenza di potenziale ai capi del ramo AB del circuito (si veda la figura); poiché in questa parte del circuito non circola corrente, la differenza di potenziale ai capi della resistenza $2R$ sarà nulla; dunque ai capi del condensatore si trova una differenza di potenziale pari proprio a V . In base al risultato dell'equazione (1) si ottiene:

$$V = 3R i = \frac{3}{4}V_0. \quad (3)$$

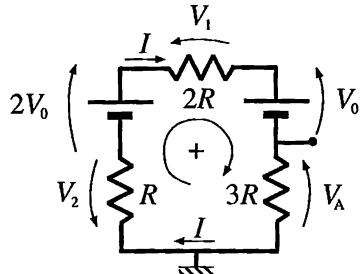
Possiamo a tal punto calcolare l'energia U immagazzinata nel condensatore mediante la ben nota espressione:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{9}{32}CV_0^2. \quad (4)$$

Sostituendo nelle precedenti espressioni i valori numerici assegnati dal testo, si ottiene $i = 0.06 \text{ A}$, $V = 9 \text{ V}$, $\mathcal{P} = 0.72 \text{ W}$ ed $U = 6.07 \mu\text{J}$.

S.4.13.

Supporremo nel seguito che la corrente i circolante nel sistema fluisca in verso orario, come illustrato in figura. Per poter risolvere il problema fissiamo una convenzione di segno per le differenze di potenziale: indicheremo la differenza di potenziale ai capi di un componente del circuito mediante una freccia, la cui testa coincida con l'estremo a potenziale più alto e la cui coda con l'estremo a potenziale più basso; assumeremo poi che differenze di potenziale orientate in verso orario siano positive, mentre saranno negative se dotate di verso opposto. In base al verso assegnato alla corrente, le differenze di potenziale ai capi dei vari componenti risultano orientate come in figura (si noti che per i generatori l'estremo a potenziale maggiore è quello disegnato con il segmento più lungo e sottile; per i resistori si assume che l'estremo in cui la corrente entra è quello a potenziale maggiore). Si noti che la differenza di potenziale V_A tra il morsetto di uscita del circuito e la massa coincide con la differenza di potenziale ai capi della resistenza $3R$; chiameremo inoltre con V_1 e V_2 le differenze di potenziale rispettivamente ai capi delle resistenze $2R$ ed R . A tal punto possiamo applicare al circuito la conservatività del campo elettrico, che si traduce semplicemente nel fatto che la somma delle differenze di potenziale lungo un percorso chiuso è nulla; pertanto:



$$2V_0 - V_1 - V_0 - V_A - V_2 = 0; \quad (1)$$

In base alla legge di Ohm possiamo porre:

$$\begin{cases} V_1 = 2R i \\ V_2 = R i \\ V_A = 3R i \end{cases} \quad (2)$$

Sostituendo le (2) nella (1), otteniamo:

$$i = \frac{V_0}{6R}, \quad (3)$$

che, sostituita nella terza delle (2), comporta:

$$V_A = \frac{V_0}{2}. \quad (4)$$

Se la resistenza $3R$ fosse sostituita da una resistenza variabile R_{var} , dovremmo sostituire la terza delle (2) con l'equazione:

$$V_A = R_{var} i, \quad (5)$$

da cui, dopo sostituzione nella (1), otterremmo:

$$i = \frac{V_0}{3R + R_{var}}. \quad (6)$$

Sostituendo tale espressione di nuovo nella (5), si ottiene infine:

$$V_A = V_0 \frac{R_{var}}{3R + R_{var}}; \quad (7)$$

se poniamo nella (7) che R_{var} sia nulla (corto circuito), otteniamo ovviamente:

$$V_A, c. c. = 0; \quad (8)$$

se imponiamo nella (7) che $R_{var} \rightarrow \infty$ (circuito aperto) otteniamo invece:

$$V_A, c. a. = \lim_{R_{var} \rightarrow \infty} V_0 \frac{R_{var}}{3R + R_{var}} = V_0. \quad (9)$$

S.4.14.

Consideriamo al momento il circuito privo del generatore ed ipotizziamo che in ingresso (morsetto A) fluisca una corrente i . Tale corrente si ripartirà tra i due resistori superiori in due correnti i_1 ed i_2 ; essendo in regime stazionario, la somma delle correnti afferenti ad un nodo del circuito deve essere uguale a quella delle correnti uscenti; posto che le correnti in ingresso siano prese col segno positivo mentre quelle uscenti con segno negativo, possiamo riscrivere ciò nella forma:

$$i - i_1 - i_2 = 0, \quad (1)$$

che diviene semplicemente:

$$i = i_1 + i_2. \quad (2)$$

La corrente i_1 si ripartisce nel nodo D tra una corrente i_3 che scorre nel resistore centrale ed una corrente i_4 che scorre nel resistore inferiore; possiamo quindi porre:

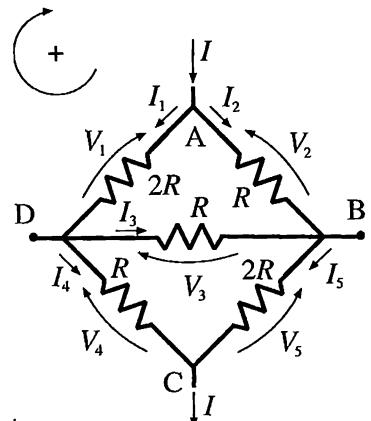
$$i_1 = i_3 + i_4; \quad (3)$$

nel nodo B avremo invece che la corrente i_2 si somma alla i_3 ; la somma i_5 scorre poi nel resistore inferiore; pertanto:

$$i_5 = i_2 + i_3. \quad (4)$$

Infine nel nodo C le correnti i_4 ed i_5 si sommano per dar vita nuovamente alla corrente i (si rammenta che i nodi A e C sono fra loro connessi mediante il generatore):

$$i = i_4 + i_5 = i_1 + i_2. \quad (5)$$



Consideriamo ora le relazioni fra le differenze di potenziale ai capi dei vari componenti del circuito; si rammenta che la somma delle differenze di potenziale lungo un percorso chiuso è pari a zero. Assumeremo come positive le differenze di potenziale orientate in verso orario (si veda la figura); nella maglia superiore del circuito possiamo porre:

$$V_1 - V_2 + V_3 = 0; \quad (6)$$

nella maglia inferiore avremo:

$$V_4 - V_3 - V_5 = 0, \quad (7)$$

ricordando che i capi A e C sono collegati al generatore di differenza di potenziale V_0 , possiamo porre:

$$V_1 + V_4 = V_0; \quad (8)$$

infine, considerando l'intero circuito, otterremo:

$$V_1 - V_2 - V_5 + V_4 = 0. \quad (9)$$

Si noti che le equazioni determinate precedentemente sono fra loro linearmente dipendenti; in particolare la (5) dipende dalle (2-4), mentre la (9) dipende dalle (6-8). Pertanto non tutte le equazioni determinate sono utili ai fini della soluzione del problema.

Mediante la legge di Ohm, possiamo legare poi correnti e differenze di potenziale:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = 2R i_1; \quad V_2 = R i_2; \\ V_3 = R i_3; \quad V_4 = R i_4; \\ V_5 = 2R i_5. \end{array} \right. \quad (10)$$

Sostituendo le (10) nelle (6-8) otteniamo:

$$\begin{cases} 2R i_1 - R i_2 + R i_3 = 0 \\ R i_4 - R i_3 - 2R i_5 = 0 \\ 2R i_1 + R i_4 = V_0 \end{cases} \quad (11)$$

Semplificando opportunamente le precedenti equazioni ed aggiungendo le (2-4), otteniamo un sistema di sei equazioni in sei incognite:

$$\begin{cases} 2i_1 - i_2 + i_3 = 0; & i_4 - i_3 - 2i_5 = 0; \\ 2i_1 + i_4 = V_0/R; & i - i_1 - i_2 = 0; \\ i_1 - i_3 - i_4 = 0; & i_5 - i_2 - i_3 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Si noti che non è indispensabile risolvere il sistema con i metodi ordinari: difatti si può notare che il circuito non cambia se viene ruotato di 180° ; pertanto, per simmetria, si avrà che:

$$\begin{cases} i_1 = i_5 \\ i_2 = i_4 \end{cases} \quad (13)$$

le quali, sostituite nel sistema precedente e tenuto conto dei valori numerici assegnati dal problema, consentono di ottenere la soluzione:

$$\begin{cases} i_1 = i_5 = \frac{2V_0}{7R} = 42.8 \text{ mA} \\ i_2 = i_4 = \frac{3V_0}{7R} = 64.3 \text{ mA} \\ i_3 = -\frac{i_1}{2} = -\frac{V_0}{7R} = -21.4 \text{ mA} \end{cases} \quad (14)$$

Si noti che la corrente i_3 ha verso opposto a quello ipotizzato nella figura iniziale. Dai risultati precedenti, si ottiene poi la corrente circolante attraverso il generatore $i = i_1 + i_2 = 107.1 \text{ mA}$. La differenza di potenziale tra i morsetti B e D è pari a $R i_3 = V_0/7 = 2.14 \text{ V}$.

S.4.15.

Anzitutto calcoliamo le resistenze dei singoli tratti di conduttore, che valgono rispettivamente:

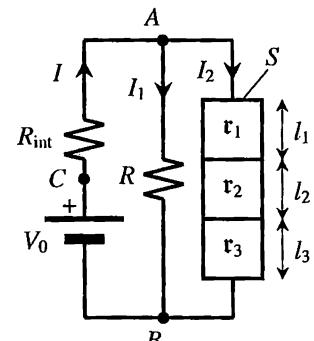
$$R_1 = \frac{r_1 l_1}{S}, \quad (1)$$

$$R_2 = \frac{r_2 l_2}{S}, \quad (2)$$

$$R_3 = \frac{r_3 l_3}{S}. \quad (3)$$

Poiché i singoli tratti sono connessi in serie e quindi attraversati dalla stessa intensità di corrente, la resistenza globale è semplicemente la somma delle tre resistenze parziali:

$$R_{\text{ser}} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3}{S}. \quad (4)$$



Poiché questo conduttore e la resistenza R sono connessi in parallelo, la differenza di potenziale $V_{AB} = V_A - V_B$ ai capi di essi è la stessa. Le intensità di corrente I_1 e I_2 che li attraversano, in base alla legge di Ohm, si possono esprimere in funzione di V_{AB} come:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R}, \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_{\text{ser}}}. \quad (6)$$

Si tratta ora di calcolare V_{AB} . La corrente I erogata dal generatore, che attraversa la sua resistenza interna, è quella che entra nel nodo A ; poiché siamo in condizioni stazionarie, la corrente che entra in un nodo (o, più in generale, in una superficie chiusa) è sempre uguale a quella che ne esce, e quindi:

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\text{ser}}} \right) V_{AB}. \quad (7)$$

In altre parole, la corrente totale che circola nel parallelo delle due resistenze è la stessa che attraverserebbe, a parità di differenza di potenziale V_{AB} , un unico resistore di resistenza R_{par} tale che l'inverso di R_{par} sia pari alla somma degli inversi. Poiché questa stessa corrente attraversa anche la resistenza interna, la differenza di potenziale ai suoi capi vale:

$$V_C - V_A = R_{\text{int}} I = \frac{R_{\text{int}} (R_{\text{ser}} + R)}{R R_{\text{ser}}} V_{AB}. \quad (8)$$

A questo punto consideriamo che il generatore mantiene una differenza di potenziale V_0 fra il punto C e il punto B , quindi:

$$V_0 = V_C - V_B = V_C - V_A + V_{AB} = \frac{R_{\text{int}} (1 + R/R_{\text{ser}}) + R}{R} V_{AB}. \quad (9)$$

Da questa equazione ricaviamo ora V_{AB} in funzione di V_0 e ne sostituiamo l'espressione nelle equazioni (5) e (6) per I_1 e I_2 :

$$I_1 = \frac{V_0}{R + R_{\text{int}} (1 + R/R_{\text{ser}})}, \quad (10)$$

$$I_2 = \frac{V_0}{R_{\text{ser}} + R_{\text{int}} (1 + R_{\text{ser}}/R)}. \quad (11)$$

Sostituendo anche l'equazione (4) per R_{ser} , infine, otteniamo:

$$I_1 = \frac{V_0}{R + R_{\text{int}}[1 + R S / (\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2 + \tau_3 l_3)]}, \quad (12)$$

$$I_2 = \frac{V_0 S}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2 + \tau_3 l_3 + R_{\text{int}}[S + (\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2 + \tau_3 l_3)/R]}. \quad (13)$$

S.4.16.

Calcoliamo anzitutto le resistenze dei due conduttori cilindrici, che valgono rispettivamente:

$$R_1 = \frac{\tau_1 l_1}{S}, \quad (1)$$

$$R_2 = \frac{\tau_2 l_2}{S}. \quad (2)$$

Osserviamo poi che, in condizioni stazionarie, non c'è corrente che attraversa il condensatore, il quale si comporta come un circuito aperto. Per questo motivo l'intensità I della corrente che fluisce nei due conduttori cilindrici è la stessa, come se fossero connessi in serie. Per calcolarla è sufficiente dividere la differenza di potenziale V_0 per la resistenza totale:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2} = \frac{S V_0}{S R_{\text{int}} + \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}. \quad (3)$$

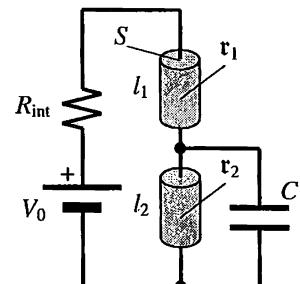
La differenza di potenziale ai capi di ciascuno dei due conduttori cilindrici si calcola applicando la legge di Ohm, cioè moltiplicando la corrente I per la rispettiva resistenza:

$$V_1 = R_1 I = \frac{\tau_1 l_1}{S R_{\text{int}} + \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2} V_0 = 4.2 \text{ V}, \quad (4)$$

$$V_2 = R_2 I = \frac{\tau_2 l_2}{S R_{\text{int}} + \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2} V_0 = 6.6 \text{ V}. \quad (5)$$

La differenza di potenziale V_2 è la stessa che troviamo ai capi del condensatore. In base alla definizione di capacità $C = Q/\Delta V$, dove ΔV indica la differenza di potenziale ai capi del condensatore, la carica immagazzinata in esso vale:

$$Q = C V_2 = \frac{\tau_2 l_2}{S R_{\text{int}} + \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2} C V_0 = 6.6 \times 10^{-7} \text{ C}. \quad (6)$$



S.4.17.

In condizioni stazionarie i due condensatori si comportano come circuiti aperti, cioè attraverso di essi non fluisce alcuna corrente. Per questo motivo anche la resistenza R non è attraversata da corrente, e dunque la differenza di potenziale ai suoi capi è nulla:

$$V_A = V_C. \quad (1)$$

La corrente I erogata dal generatore fluisce invece, oltre che nella resistenza interna, nel conduttore cilindrico, la cui resistenza vale:

$$R_{\text{cil}} = \frac{\tau l}{S}. \quad (2)$$

Per calcolare I dividiamo la differenza di potenziale per la resistenza totale:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_{\text{cil}}} = \frac{S V_0}{S R_{\text{int}} + \tau l}. \quad (3)$$

La potenza erogata dal generatore vale quindi:

$$P_{\text{gen}} = V_0 I = \frac{S V_0^2}{S R_{\text{int}} + \tau l}. \quad (4)$$

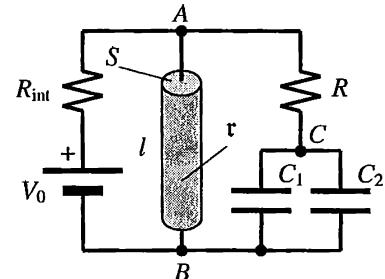
L'energia elettrostatica immagazzinata nei condensatori dipende dalla differenza di potenziale $V_C - V_B$ ai loro capi, che in base all'equazione (1) è uguale alla differenza di potenziale $V_A - V_B$ ai capi del resistore cilindrico. Quest'ultima si calcola semplicemente applicando la legge di Ohm:

$$V_A - V_B = R_{\text{cil}} I = \frac{\tau l}{S R_{\text{int}} + \tau l} V_0. \quad (5)$$

Ricordiamo infine che l'energia elettrostatica U immagazzinata in un condensatore di capacità C si può esprimere come $U = C \Delta V^2 / 2$, dove ΔV indica la differenza di potenziale ai suoi capi. Nel nostro caso, perciò, per C_1 e C_2 avremo rispettivamente:

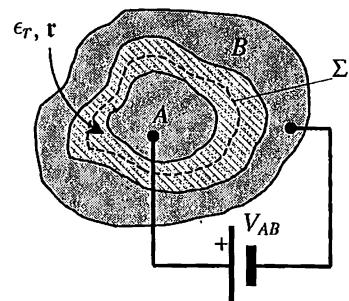
$$U_1 = \frac{C_1(V_C - V_B)^2}{2} = \frac{C_1}{2} \left(\frac{\tau l}{S R_{\text{int}} + \tau l} \right)^2 V_0^2, \quad (6)$$

$$U_2 = \frac{C_2(V_C - V_B)^2}{2} = \frac{C_2}{2} \left(\frac{\tau l}{S R_{\text{int}} + \tau l} \right)^2 V_0^2. \quad (7)$$



S.4.18.

Sia la resistenza di perdita R_C sia la capacità C del condensatore possono essere calcolate immaginando di collegare un generatore di differenza di potenziale V_{AB} fra l'armatura interna e quella esterna, come indicato in figura. In questo caso, infatti, fra le due armature si genera una certa configurazione di campo elettrico \mathbf{E} , che dipende dalla particolare geometria del condensatore. In ogni punto, tuttavia, il campo ha intensità direttamente proporzionale a V_{AB} , poiché il suo integrale lungo una qualunque linea orientata γ che va dal conduttore interno a quello esterno è pari appunto alla differenza di potenziale imposta dal generatore:



$$V_{AB} = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1)$$

Al campo elettrico sono legate sia la carica immagazzinata sulle armature sia l'intensità di corrente di perdita che fluisce nel condensatore. Consideriamo infatti una superficie chiusa Σ che racchiuda il conduttore A ma non il conduttore B , come indicato in figura. La carica libera interna a Σ , cioè la carica Q immagazzinata sull'armatura interna, in base al teorema di Gauss, è pari al flusso del vettore spostamento elettrico $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ uscente da Σ :

$$Q = \int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon_0 \epsilon_r \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2)$$

La capacità del condensatore, di conseguenza, si calcola come:

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{V_{AB}} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3)$$

L'intensità di corrente I che fluisce dall'armatura interna verso quella esterna, d'altra parte, è pari al flusso della densità di corrente \mathbf{J} uscente da Σ . Ricordando anche la legge di Ohm in forma locale $\mathbf{E} = \tau \mathbf{J}$, quindi, possiamo scrivere:

$$I = \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\tau} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4)$$

La resistenza di perdita R_C , in base alla legge di Ohm in forma integrale, vale:

$$R_C = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{\tau V_{AB}}{\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS}. \quad (5)$$

Se ora calcoliamo il prodotto $R_C C$ utilizzando le equazioni (5) e (3) otteniamo che la differenza di potenziale ed il flusso del campo elettrico si semplificano, e risulta:

$$R_C C = \tau \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (6)$$

Sia la resistenza di perdita sia la capacità, ovviamente, dipendono dalla particolare geometria e dalle dimensioni del condensatore; il loro prodotto, tuttavia, non ne dipende,

come abbiamo appena dimostrato.

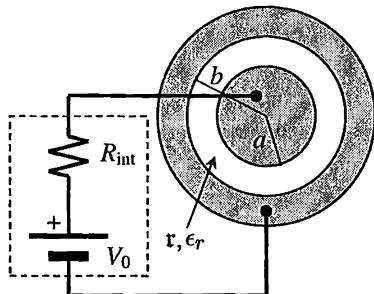
S.4.19.

Per calcolare la potenza erogata dal generatore e l'energia immagazzinata nel condensatore occorre anzitutto calcolare l'intensità I della corrente stazionaria che fluisce nel condensatore. Se indichiamo come R_C la resistenza di perdita del condensatore, la corrente vale:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_C}. \quad (1)$$

Per calcolare R_C consideriamo anzitutto la simmetria cilindrica del problema: nell'ipotesi $h \gg b$ gli effetti di bordo sono trascurabili e quindi il campo elettrico \mathbf{E} e la densità di corrente \mathbf{J} hanno direzione radiale (in un sistema di coordinate cilindriche) e modulo che dipende solo dalla distanza r dall'asse di simmetria. Sia V_{ab} la differenza di potenziale (incognita) ai capi del condensatore, che è pari all'integrale del campo elettrico:

$$V_{ab} = \int_a^b E(r) dr = \int_a^b \tau J(r) dr. \quad (2)$$



L'intensità I della corrente è legata alla densità $J(r)$ dalla seguente relazione:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = J(r) 2\pi r h, \quad (3)$$

dove con S abbiamo indicato la generica superficie cilндrica di raggio r ($a < r < b$) e di altezza h . Ricavando da questa equazione l'espressione di $J(r)$ in funzione di I e sostituendola nell'equazione (2) otteniamo:

$$V_{ab} = \int_a^b \frac{\tau I}{2\pi r h} dr = \frac{\tau I}{2\pi h} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (4)$$

In base alla legge di Ohm in forma integrale, ciò significa che la resistenza di perdita del condensatore vale:

$$R_C = \frac{\tau}{2\pi h} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (5)$$

A questo punto siamo in grado di calcolare l'intensità di corrente I erogata dal generatore, semplicemente dividendo la differenza di potenziale V_0 del generatore per la resistenza totale:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_C} = \frac{2\pi h V_0}{2\pi h R_{\text{int}} + \tau \ln(b/a)}. \quad (6)$$

La potenza erogata dal generatore, quindi, vale:

$$P_{\text{gen}} = V_0 I = \frac{2\pi h V_0^2}{2\pi h R_{\text{int}} + \tau \ln(b/a)}. \quad (7)$$

L'energia elettrostatica U immagazzinata nel condensatore vale $U = CV_{ab}^2/2$, dove C indica la sua capacità. La differenza di potenziale V_{ab} si calcola moltiplicando la corrente I [equazione (6)] per la resistenza di perdita R_C [equazione (5)]:

$$V_{ab} = R_C I = \frac{\tau \ln(b/a)}{2\pi h R_{int} + \tau \ln(b/a)} V_0. \quad (8)$$

Per quanto riguarda la capacità, essendo un condensatore cilindrico la sua espressione è ben nota o comunque si può ricavare facilmente applicando il teorema di Gauss. Oppure si può calcolare utilizzando l'equazione (6) dell'esercizio precedente, dal momento che abbiamo già calcolato la resistenza di perdita. Seguendo questa seconda strada possiamo scrivere che:

$$C = \frac{\tau \epsilon_0 \epsilon_r}{R_C} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r h}{\ln(b/a)}. \quad (9)$$

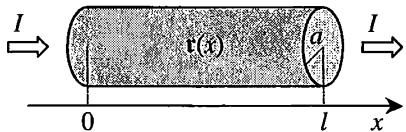
Facciamo notare per inciso che era anche possibile calcolare la capacità C con il teorema di Gauss e poi utilizzare l'equazione (6) dell'esercizio precedente per calcolare R_C . In definitiva, siamo ora in grado di calcolare l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore:

$$U = \frac{CV_{ab}^2}{2} = \frac{\tau^2 2\pi \epsilon_0 \epsilon_r h \ln(b/a)}{2[2\pi h R_{int} + \tau \ln(b/a)]^2} V_0^2. \quad (10)$$

S.4.20.

Poiché la resistività del conduttore varia lungo l'asse x , ma è uniforme in ogni sua sezione ortogonale all'asse stesso, la densità di corrente è uniforme in tutto il conduttore, ed ha modulo pari al rapporto fra l'intensità I della corrente e l'area S della sezione:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S} \mathbf{u}_x = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{u}_x. \quad (1)$$



Applicando la legge di Ohm in forma locale, e tenendo conto dell'espressione della resistività data nel testo, possiamo calcolare il campo elettrico all'interno del conduttore:

$$\mathbf{E} = E(x) \mathbf{u}_x = \tau(x) \mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \left[\tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \frac{x}{l} \right] \mathbf{u}_x. \quad (2)$$

A questo punto, per calcolare la densità volumetrica di carica $\rho(x)$, applichiamo la prima equazione di Maxwell:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

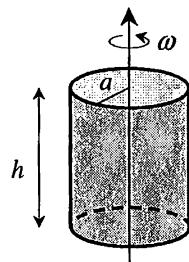
Poiché in questo caso il campo elettrico è diretto parallelamente all'asse x e dipende solo dalla coordinata x , il calcolo della divergenza si riduce ad una semplice derivata rispetto a x :

$$\rho = \epsilon_0 \frac{dE(x)}{dx} = \frac{\epsilon_0 (\tau_2 - \tau_1) I}{\pi a^2 l}. \quad (4)$$

Abbiamo ottenuto che la densità volumetrica di carica nel conduttore è uniforme quando la resistività varia linearmente lungo l'asse.

S.4.21.

Un sistema di riferimento inerziale vede il cilindro in rotazione con velocità angolare ω . A regime il moto degli elettroni di conduzione è solidale con quello del conduttore, quindi è circolare uniforme con la stessa velocità angolare ω . Affinché gli elettroni di conduzione, liberi di muoversi all'interno del conduttore, seguano un moto circolare uniforme è necessario che su di essi agisca una forza centripeta. L'origine di questa forza centripeta può essere attribuita solo alla presenza di un campo elettrico che si viene ad instaurare nel conduttore e tale da indurre una forza sugli elettroni pari a



$$\mathbf{F} = -|q_e|\mathbf{E}, \quad (1)$$

dove q_e è la carica negativa dell'elettrone ed \mathbf{E} è il campo elettrico agente su di esso. Per il secondo principio della dinamica applicato al moto circolare dell'elettrone questa forza deve dar luogo ad una forza centripeta \mathbf{F}_{cp} secondo l'espressione

$$\mathbf{F} = -|q_e|\mathbf{E} = \mathbf{F}_{cp} = -m_e \omega^2 r \mathbf{u}_r, \quad (2)$$

dove m_e è la massa dell'elettrone, r la sua distanza dall'asse (con $0 < r < a$) e \mathbf{u}_r è il versore radiale uscente in un sistema di coordinate cilindriche (vedi figura). Da questa espressione siamo in grado di calcolare il campo elettrico, che risulta diretto radialmente e verso l'esterno del conduttore:

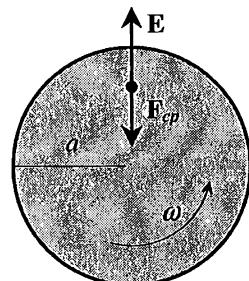
$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r = \frac{m_e \omega^2 r}{|q_e|} \mathbf{u}_r. \quad (3)$$

La differenza di potenziale fra l'asse del cilindro e la superficie laterale si calcola integrando il campo lungo una linea radiale:

$$V(0) - V(a) = \int_0^a E(r) dr = \frac{m_e \omega^2}{|q_e|} \int_0^a r dr = \frac{m_e \omega^2 a^2}{2|q_e|}. \quad (4)$$

Noto l'andamento del campo elettrico, la densità di carica ρ per unità di volume si calcola applicando la prima equazione di Maxwell, e ricordando che per un campo vettoriale diretto radialmente e con modulo che dipende solo da r la divergenza si riduce ad una derivata rispetto ad r :

$$\rho(r) = \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{dE(r)}{dr} = \frac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{|q_e|}. \quad (5)$$



La densità volumetrica di carica risulta positiva ed uniforme all'interno del cilindro. Tuttavia, poiché globalmente il conduttore è neutro, sulla superficie laterale avremo un accumulo di elettroni e cioè una densità superficiale di carica σ negativa. Per calcolarla imponiamo che, per neutralità, la carica totale del cilindro sia nulla:

$$Q_{\text{tot}} = \rho \pi a^2 h + \sigma 2\pi a h = 0, \quad (6)$$

da cui

$$\sigma = -\frac{\rho a}{2} = -\frac{\epsilon_0 m_e \omega^2 a}{2|q_e|}. \quad (7)$$

Un'interpretazione più intuitiva di questo risultato si ottiene risolvendo il problema in un sistema di riferimento rotante, solidale con il conduttore. In esso gli elettroni di conduzione, a transitorio esaurito, sono fermi. D'altra parte un osservatore non inerziale in rotazione vede una forza apparente centrifuga che agisce sugli elettroni di conduzione

$$\mathbf{F}_{cf} = m_e \omega^2 r \mathbf{u}_r. \quad (8)$$

Affinché gli elettroni rimangano fermi è quindi indispensabile che sia presente una forza elettrostatica a bilanciare quella centrifuga e quindi

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{cf} = -|q_e| \mathbf{E} + m_e \omega^2 r \mathbf{u}_r = 0, \quad (9)$$

da cui si ricava l'espressione del campo elettrostatico, che coincide con quella dell'equazione (3). Ricapitolando, in un sistema di riferimento non inerziale solidale con il conduttore rotante gli elettroni di conduzione sono soggetti alla forza centrifuga e a quella elettrostatica. Poiché nel sistema rotante gli elettroni sono fermi, queste due forze sono uguali in modulo e direzione, ma opposte in verso. Questo modo di vedere le cose ha il pregio di far comprendere meglio che, durante la fase transitoria, gli elettroni sono spinti dalla forza centrifuga verso la superficie laterale del cilindro, finché l'accumulo di cariche, negative sulla superficie e positive all'interno, genera una forza elettrostatica che controbilancia quella centrifuga. Per questo motivo, a transitorio esaurito, avremo sulla superficie laterale una densità superficiale di carica negativa, secondo l'equazione (7).

S.4.22.

Un semplice modello microscopico della conduzione nei metalli si basa sull'assunto che gli elettroni di conduzione abbiano un moto uniformemente accelerato sotto l'azione del campo elettrico, finché non urtano contro gli ioni del reticolo metallico. La durata dell'urto, cioè il tempo di interazione con gli ioni, è trascurabile rispetto all'intervallo di tempo fra un urto e il successivo. Oltre al moto uniformemente accelerato dovuto alla presenza di campo elettrico, gli elettroni di conduzione compiono un moto caotico a grande velocità per effetto dell'agitazione termica. In particolare, possiamo ottenere una stima della velocità quadratica media degli elettroni, dovuta al solo moto di agitazione termica, applicando il teorema di equipartizione dell'energia: ad ogni grado di libertà dell'elettrone corrisponde un'energia cinetica media pari a $k_B T/2$, dove $k_B \simeq 1.38 \times 10^{-23}$ J/K rappresenta la costante di Boltzmann. Per un elettrone, quindi:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (1)$$

La radice quadrata della velocità quadratica media viene solitamente detta *velocità termica* v_T e dà un'indicazione del modulo della velocità con cui si muovono gli elettroni in assenza di campo elettrico:

$$v_T = \langle v^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \simeq 1.17 \times 10^5 \text{ m/s.} \quad (2)$$

Come già discusso precedentemente, tra un urto ed il successivo, l'elettrone è accelerato dal campo esterno \mathbf{E} e subisce una accelerazione pari a $\mathbf{a} = q_e \mathbf{E} / m_e$. La velocità termica v_T alla temperatura $T = 300\text{K}$ è però molto maggiore della variazione di velocità indotta dal campo elettrico; il tempo medio τ fra una collisione e la successiva è quindi determinato principalmente dalla velocità termica secondo la relazione:

$$\tau = \frac{l_m}{v_T} \simeq 1.28 \times 10^{-13} \text{ s}, \quad (3)$$

dove l_m è il libero cammino medio. Assumendo che dopo ogni urto la direzione della velocità sia diretta casualmente nello spazio, possiamo calcolare il valor medio temporale, su tempi lunghi rispetto al tempo medio collisionale τ , della velocità dell'elettrone (velocità di deriva) come la metà della massima velocità raggiunta a causa del campo elettrico appena prima dell'urto successivo:

$$\langle \mathbf{v}_d \rangle = \frac{\mathbf{a}\tau}{2} = \frac{q_e \tau}{2m_e} \mathbf{E}. \quad (4)$$

Ricordando che la densità di corrente vale $\mathbf{J} = q_e n \langle \mathbf{v}_d \rangle$, dove n è la densità elettronica (numero di elettroni per unità di volume), si ha:

$$\mathbf{J} = \frac{q_e^2 n \tau}{2m_e} \mathbf{E}, \quad (5)$$

e quindi per la resistività si ottiene la seguente espressione:

$$\tau = \frac{2m_e}{q_e^2 n \tau} = \frac{2m_e v_T}{q_e^2 n l_m} \simeq 10^{-8} \Omega \text{ m}. \quad (6)$$

Capitolo 5

Magnetostatica nel vuoto

5.1 Problemi

P.5.1.

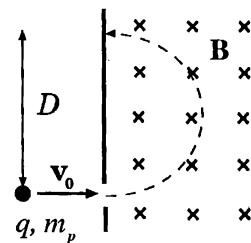
Si consideri una particella di carica positiva q e massa m in moto in una regione occupata da un campo di induzione magnetica \mathbf{B} uniforme e costante nel tempo. Detta \mathbf{v}_0 la velocità della particella all'istante $t = 0$, si determini la sua traiettoria in funzione dell'angolo tra \mathbf{v}_0 e \mathbf{B} .

P.5.2.

Si risolva il problema precedente nel caso in cui, oltre al campo \mathbf{B} , sia presente anche un campo elettrico \mathbf{E} uniforme e costante, diretto perpendicolarmente a \mathbf{B} . Si assuma per semplicità che la velocità iniziale sia perpendicolare ad entrambi i campi.

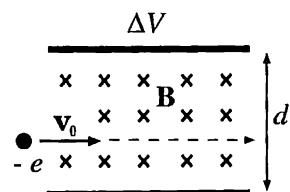
P.5.3.

Un protone, di massa m_p e carica q , penetra in una regione delimitata da un piano indefinito, in cui è presente un campo di induzione magnetica \mathbf{B} parallelo al piano di delimitazione, con verso entrante nel foglio. La velocità iniziale \mathbf{v}_0 della particella è perpendicolare sia al piano di delimitazione che alla direzione del campo \mathbf{B} . Si stabilisca la traiettoria della particella e la massima distanza D che essa raggiunge sul piano di delimitazione rispetto al punto di ingresso. [$|\mathbf{B}| = 0.5 \text{ T}$, $|\mathbf{v}_0| = 5 \times 10^6 \text{ m/s}$, $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$]



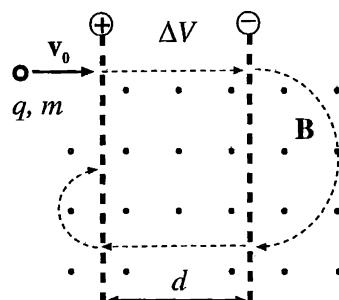
P.5.4.

Ad un condensatore piano, le cui armature distano d , è applicata una differenza di potenziale ΔV . Nel condensatore è presente un campo di induzione magnetica \mathbf{B} uniforme e parallelo alle armature, come in figura. Un elettrone (carica $-e$) giunge nel condensatore con velocità \mathbf{v}_0 perpendicolare a \mathbf{B} . Si calcoli il valore di ΔV per cui l'elettrone attraversa il condensatore senza deviazioni; quale delle due armature deve essere caricata positivamente? [$d = 5 \text{ cm}$, $|\mathbf{B}| = 0.3 \text{ T}$, $|\mathbf{v}_0| = 2 \times 10^5 \text{ m/s}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$]

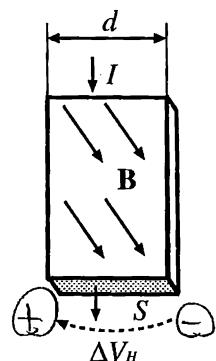


P.5.5.

Fra due griglie metalliche distanti d è applicata una differenza di potenziale ΔV . Nella regione considerata è presente un campo di induzione magnetica \mathbf{B} uniforme e diretto parallelamente alle griglie, come in figura. Una particella di carica $q > 0$ e massa m viene lanciata, con velocità iniziale \mathbf{v}_0 perpendicolare alle griglie, all'interno del condensatore da queste formato. Trascurando gli effetti della forza di Lorentz nella regione tra le griglie, si stabilisca la traiettoria della carica e la minima distanza a cui questa giunge dal punto di partenza.

**P.5.6.**

Si consideri una lastra di argento con sezione di area $S = 5 \text{ mm}^2$ e larghezza $d = 5 \text{ cm}$ in cui scorra una corrente $I = 10 \text{ A}$ in direzione longitudinale, come in figura. Sia inoltre presente un campo di induzione magnetica \mathbf{B} uniforme e diretto perpendicolarmente alla lastra ed alla direzione di scorrimento della corrente. Il modulo del campo magnetico è di 0.7 T . Detto n il numero di portatori per unità di volume, si determini il valore della differenza di potenziale ΔV_H che compare a regime ai capi della lastra in direzione trasversale. [Nell'argento i portatori di carica sono elettroni ed $n = 5.86 \times 10^{28} \text{ elettroni/m}^3$]

**P.5.7.**

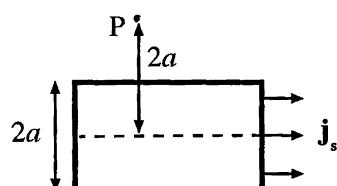
Si consideri un filo conduttore rettilineo indefinito e di sezione trascurabile, in cui scorre una corrente stazionaria I . Si calcoli il campo magnetico in tutto lo spazio impiegando il principio di sovrapposizione.

P.5.8.

Sono assegnati due fili conduttori rettilinei indefiniti e paralleli, posti a distanza $2a$, percorsi da due correnti di uguale intensità I . Si calcoli il campo di induzione magnetica generato nel piano in cui giacciono i fili; si consideri sia il caso in cui le correnti siano dirette nello stesso verso che quello in cui siano dirette in verso opposto. Si determini inoltre l'andamento qualitativo delle linee di flusso di \mathbf{B} nel piano perpendicolare ai due fili.

P.5.9.

Un nastro conduttore di lunghezza infinita, larghezza $2a$ e spessore trascurabile è percorso da una densità di corrente superficiale j_s . Sfruttando il risultato ottenuto negli esercizi precedenti, si calcoli il campo di induzione magnetica generato dal nastro nel suo stesso piano di giacenza, nel punto P ad una distanza $r = 2a$ dal suo asse.

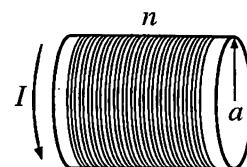


P.5.10.

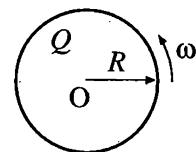
Si determini il campo di induzione magnetica generato lungo l'asse di una spira circolare di raggio a e sezione trascurabile percorsa da una corrente I .

P.5.11.

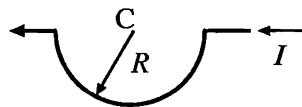
Sfruttando il risultato ottenuto nell'esercizio precedente, si calcoli il campo di induzione magnetica generato da un solenoide indefinito di sezione circolare di raggio a , con un numero n di spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente I .

**P.5.12.**

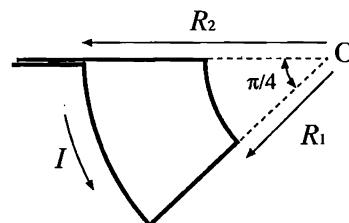
Su un disco di raggio R è deposta una carica Q con densità superficiale uniforme. Il disco viene posto in rotazione con velocità angolare ω . Si calcoli il campo di induzione magnetica prodotto nel suo centro.

**P.5.13.**

Si consideri un filo percorso da una corrente I , formato da due tratti rettilinei ed un semicerchio di raggio R , come in figura. Il filo ha una lunghezza complessiva pari a $6R$. Si calcoli il campo di induzione magnetica generato nel punto C al centro del semicerchio.

**P.5.14.**

Un circuito è costituito da due archi di cerchio concentrici di raggi R_1 ed R_2 e da due segmenti radiali, come in figura. L'angolo sotteso ai due archi è di $\pi/4$ radianti. Si calcoli il campo di induzione magnetica generato nel centro O degli archi.

**P.5.15.**

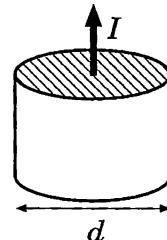
Si consideri nuovamente un filo conduttore rettilineo indefinito in cui scorre una corrente I . Si calcoli il campo di induzione magnetica in tutto lo spazio impiegando la legge di Ampere. Quali ipotesi sono necessarie per risolvere il quesito?

P.5.16.

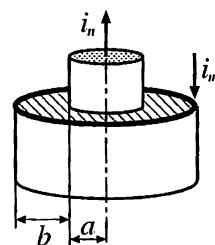
Si ripeta il calcolo del campo di induzione magnetica generato da un solenoide indefinito di raggio a , con un numero n di spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente I , impiegando unicamente la legge di Ampere. Quali ipotesi di partenza sono necessarie affinché si possa procedere alla soluzione del problema?

P.5.17.

Si consideri un cavo conduttore costituito da un cilindro rettilineo indefinito di diametro $d = 5$ cm in cui scorra una corrente $I = 5$ A. Assumendo che la densità di corrente nel conduttore sia uniforme lungo la sezione, si calcoli il campo di induzione magnetica in tutto lo spazio e se ne stabilisca il valore massimo.

**P.5.18.**

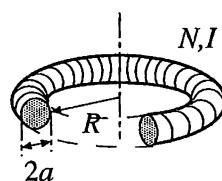
Un cavo coassiale è costituito da un nucleo di materiale conduttore di raggio $a = 2$ mm, una guaina di plastica ed una maglia metallica esterna. La guaina isolante ha spessore $b = 2$ mm, mentre la maglia metallica ha spessore trascurabile. Nel nucleo e nella maglia scorrono due correnti, i_n ed i_m , con versi opposti. Si stabilisca l'entità delle due correnti affinché il campo di induzione magnetica a distanza $r_1 = 3$ mm dall'asse del cavo abbia modulo pari a 10^{-3} T e sia opposto al campo a distanza $r_2 = 6$ mm.

**P.5.19.**

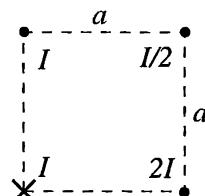
Un solenoide rettilineo indefinito è costituito da $n = 10^3$ spire per metro di lunghezza. Al suo interno un elettrone si muove, sotto l'influenza della forza di Lorenz, con velocità $v = 10^7$ m/s. Sapendo che il solenoide ha un raggio di 5 cm, si stabilisca la minima intensità di corrente che deve passare nelle sue spire affinché l'elettrone non urti le sue pareti. [Massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg]

P.5.20.

Si calcoli il campo di induzione magnetica generato dal solenoide toroidale (di cui si mostra in figura una sezione) di raggio maggiore R e raggio interno a , dotato di N spire percorse da una corrente I .

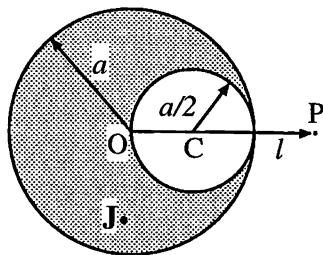
**P.5.21.**

Quattro fili indefiniti sono posti ai vertici di un quadrato di lato a e sono percorsi da corrente, come illustrato in figura. Si calcoli il campo di induzione magnetica complessivo nel centro del quadrato.

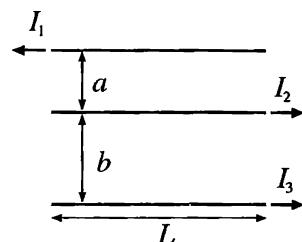


P.5.22.

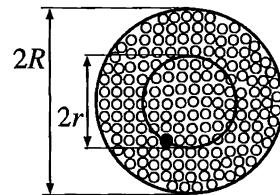
Un conduttore cilindrico indefinito di raggio a è percorso da una corrente I distribuita uniformemente sulla sua sezione. Successivamente viene praticata nel conduttore una cavità cilindrica di raggio $a/2$ per tutta la sua lunghezza, mantenendo la stessa densità di corrente iniziale; il centro C della cavità dista $a/2$ dal centro O del conduttore. Si calcoli il campo di induzione magnetica B generato in O , in C ed in un punto P a distanza $l > a$ dall'asse del conduttore, posto sulla congiungente OC .

**P.5.23.**

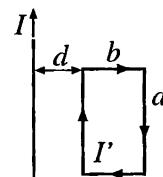
Si considerino tre fili rettilinei paralleli di lunghezza L ; la distanza tra il filo superiore e quello centrale è pari ad a , mentre tra il filo centrale e quello inferiore la distanza è pari a $b = 3a/2$. Dette $I_1 = I$, $I_2 = 3I$ ed $I_3 = 2I$ le correnti che circolano rispettivamente nei fili secondo i versi indicati in figura, si calcoli la forza agente sul filo centrale. [$L = 1.5 \text{ m}$; $a = 3 \text{ cm}$; $I = 15 \text{ A}$]

**P.5.24.**

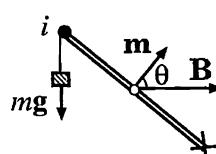
Si consideri un insieme di 100 fili rettilinei indefiniti che formano un cavo cilindrico di raggio $R = 0.5 \text{ cm}$. Ciascun filo è attraversato da una corrente $i = 2 \text{ A}$. Si determini, in modulo direzione e verso, la forza per unità di lunghezza che agisce su uno dei fili che si trova a distanza $r = R/2$ dal centro dell'insieme.

**P.5.25.**

In un filo rettilineo indefinito scorre una corrente $I = 50 \text{ A}$. Una spira rettangolare, di lato maggiore $a = 10 \text{ cm}$ e minore $b = 5 \text{ cm}$, è attraversata da una corrente $I' = 10 \text{ A}$. Si calcoli la forza agente sulla spira quando il suo lato maggiore più vicino al filo è ad esso parallelo ad una distanza $d = 5 \text{ cm}$. Si determini quale deve essere il verso di percorrenza delle correnti per avere forza di natura repulsiva.

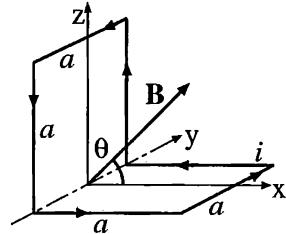
**P.5.26.**

Una spira quadrata di lato a può ruotare attorno al suo asse orizzontale ed è percorsa da una corrente i . Nella regione considerata è presente un campo di induzione magnetica B uniforme, diretto orizzontalmente e perpendicolare all'asse di rotazione. Ad un estremo della spira è appesa una massa m . Si stabilisca il massimo valore della massa che la spira può sollevare in virtù della forza magnetica. [$a = 10 \text{ cm}$, $i = 5 \text{ A}$, $|B| = 1 \text{ T}$]

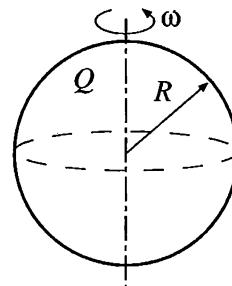


P 5.27.

Una spira viene piegata ad angolo retto in corrispondenza dell'asse mediano del lato più lungo, in modo da formare una L (vedi figura) costituita da due spire quadrate uguali di lato a . La spira così ottenuta può ruotare attorno a tale asse; inoltre su di essa agisce un campo di induzione magnetica \mathbf{B} costante ed uniforme, diretto perpendicolarmente all'asse stesso. Detta i la corrente che scorre nella spira, si determini in quali posizioni il momento meccanico agente su di essa risulta massimo.

P 5.28.

Si calcoli il momento di dipolo magnetico di una sfera di raggio R sulla cui superficie sia deposita uniformemente una carica Q e che ruoti intorno ad un asse passante per il suo centro con velocità angolare ω .

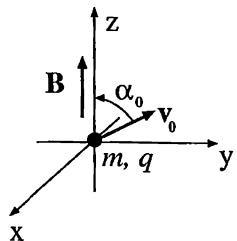


5.2 Soluzioni

S.5.1.

(1) Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, possiamo assumere senza ledere la generalità del problema che il campo \mathbf{B} sia parallelo all'asse z e che la velocità iniziale \mathbf{v}_0 giaccia nel piano xy . Porremo inoltre che la posizione iniziale della particella \mathbf{r}_0 coincida con l'origine delle coordinate. Detto α_0 l'angolo iniziale formato da \mathbf{B} e \mathbf{v}_0 , avremo dunque:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = B \mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_0 = v_0 [\cos(\alpha_0) \mathbf{u}_z + \sin(\alpha_0) \mathbf{u}_y] \\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1)$$



L'unica forza agente sulla particella è la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2)$$

Si può facilmente constatare che la potenza $\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ dissipata dalla forza durante il moto della particella è nulla, in quanto \mathbf{F} e \mathbf{v} sono fra loro ortogonali. Poiché la forza non compie lavoro, in virtù del teorema dell'energia cinetica il modulo della velocità della particella è costante durante il moto e quindi pari al suo valore iniziale:

$$|\mathbf{v}| = v_0. \quad (3)$$

Tale assunzione è valida sinché si trascura la dissipazione di energia per irraggiamento; per un approfondimento di tale questione si rimanda alle note di fine esercizio. Si noti inoltre che \mathbf{F} e \mathbf{B} sono perpendicolari fra loro; pertanto la componente della forza lungo l'asse z è nulla. In base al secondo principio della dinamica, ciò comporta che:

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0, \quad (4)$$

essendo a_z la componente dell'accelerazione della particella lungo l'asse z e v_z la corrispondente componente della velocità. Dall'equazione (4) deriva che v_z è anche essa una costante del moto ed è pari al suo valore iniziale:

$$v_z = v_0 \cos(\alpha_0). \quad (5)$$

Con l'aiuto delle equazioni (3) e (5), si verifica che il vettore \mathbf{v} forma un angolo α costante con l'asse z :

$$\alpha = \arccos \left[\frac{v_z}{v_0} \right] = \alpha_0, \quad (6)$$

quindi la proiezione di \mathbf{v} sul piano xy è anche essa costante e pari a

$$v_{xy} = v_0 \sin(\alpha_0). \quad (7)$$

Per quanto riguarda la forza \mathbf{F} , si noti che essa giace nel piano xy ed ha modulo costante, che risulta per la (2) pari a:

¹Nota introduttiva. Il campo di induzione magnetica \mathbf{B} verrà in seguito abbreviato col termine "campo magnetico", benché tale denominazione sia riservata al campo \mathbf{H} . Nel capitolo successivo, relativo alla magnetostatica nella materia, si tornerà alla dizione corretta.

$$|\mathbf{F}| = q B v_0 \sin(\alpha_0) = q B v_{xy}. \quad (8)$$

Distinguiamo a tal punto tre situazioni:

i. Se $\alpha_0 = 0$ (ovvero se \mathbf{v}_0 è parallelo a \mathbf{B} ed all'asse z), per la (2) la forza \mathbf{F} è nulla; pertanto il moto della particella procede lungo l'asse z a velocità costante. Tenuto conto delle condizioni iniziali (1), le equazioni parametriche del moto sono:

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_z t = v_0 t. \end{cases} \quad (9)$$

ii. Se $\alpha_0 = \pi/2$ (ovvero se \mathbf{v}_0 giace nel piano xy) in base alle (2), (7) ed (8) la forza agente sulla carica ha modulo costante, giace nel piano xy ed è sempre perpendicolare alla velocità; inoltre la velocità della carica ha modulo costante e giace sempre nel piano xy. Il moto della carica si evolve quindi nel piano xy; le caratteristiche di forza e velocità sono quelle tipiche di un moto circolare uniforme. Per determinare il raggio R_0 dell'orbita circolare, imponiamo che la forza magnetica agisca da forza centripeta. Pertanto avremo:

$$|\mathbf{F}| = qv_0 B = m \frac{v_0^2}{R_0}, \quad (10)$$

da cui:

$$R_0 = \frac{mv_0}{qB}. \quad (11)$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali (si osservi in proposito la figura a lato), il moto sarà descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = R_0 [1 - \cos(\omega t)] \\ y(t) = R_0 \sin(\omega t) \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Il valore di ω si ottiene imponendo che la velocità all'istante $t = 0$ soddisfi le condizioni iniziali:

$$v_{x0} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0; \quad (13)$$

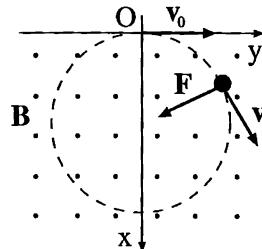
si ricava in tal modo che

$$\omega = \frac{qB}{m}. \quad (14)$$

Si noti che il periodo dell'orbita compiuta dalla particella, pari a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad (15)$$

non dipende dalla velocità della particella.



iii. Per un valore generico di α_0 compreso fra $-\pi$ e π , il moto risulta una sovrapposizione dei due casi precedentemente esaminati. Ripetendo i ragionamenti precedenti otterremo quindi:

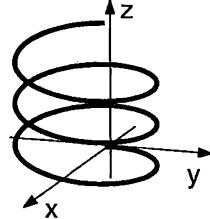
$$\begin{cases} x(t) = R [1 - \cos(\omega t)] \\ y(t) = R \sin(\omega t) \\ z(t) = v_z t \end{cases} \quad (16)$$

dove

$$v_z = v_0 \cos(\alpha_0) \quad (17)$$

ed

$$R = \frac{mv_{xy}}{qB} = \frac{mv_0 \sin(\alpha_0)}{qB}. \quad (18)$$



Tali equazioni rappresentano un moto spiraliforme, come mostrato in figura.

Nota. Nel risolvere l'esercizio si è assunto che l'energia cinetica della particella rimanga costante durante il moto. Questa ipotesi a rigore non vale per angoli $\alpha_0 \neq 0$, in quanto la carica, trovandosi in moto accelerato, perde energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Possiamo valutare l'andamento dell'energia nel tempo mediante la formula di Larmor:

$$\mathcal{P} = -\frac{dE_c}{dt} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2, \quad (19)$$

dove \mathcal{P} è la potenza dissipata per emissione di radiazione, E_c è l'energia cinetica della particella, c è la velocità della luce ed a il modulo dell'accelerazione. Limitandoci al caso di moto non relativistico (cioè per $v \ll c$) nel piano xy , risulta che $a = qvB/m$; usando questa relazione nell'espressione dell'energia cinetica otteniamo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^3a^2}{2q^2B^2}. \quad (20)$$

Ricavando E_c in funzione di a dalla (20) e sostituendo nella (19), otteniamo infine la relazione:

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}, \quad (21)$$

dove

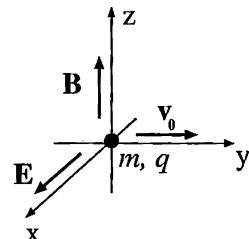
$$\tau = \frac{3\pi c m^3}{\mu_0 q^4 B^2}. \quad (22)$$

La (21) ammette soluzione del tipo $E_c = E_{c0} e^{-t/\tau}$, con E_{c0} energia cinetica iniziale; l'energia e di conseguenza la velocità della carica decadono esponenzialmente nel tempo. Il moto non sarà quindi uniforme, ma evolverà lungo una spirale di raggio sempre più piccolo al diminuire della velocità. Si noti che nel caso di un elettrone in moto in un campo magnetico $B = 1$ T, la costante di decadimento è pari a $\tau = 2.6$ s.

S.5.2.

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ed assumiamo per semplicità che il campo \mathbf{B} sia parallelo all'asse z, che il campo \mathbf{E} sia parallelo all'asse x e che la velocità iniziale \mathbf{v}_0 sia parallela ad y. Assumeremo inoltre che la posizione iniziale della particella \mathbf{r}_0 coincida con l'origine delle coordinate. Avremo pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = B \mathbf{u}_z \\ \mathbf{E} = E \mathbf{u}_x \\ \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{u}_y \\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (1)$$



È importante notare che in questo caso il moto della particella non è la sovrapposizione dei moti in presenza dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} presi separatamente. Contrariamente al campo magnetico, il campo elettrico compie lavoro sulla carica e quindi altera il modulo della velocità; di conseguenza anche la forza di Lorentz cambia in modulo durante il moto. La forza complessiva agente sulla carica è data in questo caso dalla relazione:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} + q \mathbf{E}. \quad (2)$$

Utilizzando il secondo principio della dinamica, otteniamo poi l'equazione di moto nella forma:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{q}{m} \mathbf{E}. \quad (3)$$

Svolgendo il prodotto vettore nella (3) otteniamo:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = B v_y \mathbf{u}_x - B v_x \mathbf{u}_y. \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) e proiettando l'equazione sui tre assi cartesiani, giungiamo poi alle equazioni di moto scalari:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y + \frac{qE}{m} \quad (5)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x \quad (6)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (7)$$

Dall'ultima equazione deriva che la componente v_z della velocità è costante durante il moto. In base alle condizioni iniziali tale componente risulta nulla; pertanto il moto si svolge nel piano xy. Ricavando v_y dalla (5) e derivandola rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{d}{dt} v_y = \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{qB} \left(\frac{dv_x}{dt} - \frac{qE}{m} \right) \right] = \frac{m}{qB} \frac{d^2 v_x}{dt^2}. \quad (8)$$

Sostituendo questa espressione nella equazione (6), giungiamo poi alla relazione:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0, \quad (9)$$

che ammette soluzione

$$v_x = A \sin(\omega t + \phi), \quad (10)$$

dove $\omega = qB/m$. Per determinare le costanti arbitrarie A e ϕ , osserviamo che le condizioni iniziali impongono $v_x(0) = 0$, per cui deve risultare $\phi = 0$. Sostituendo la (10) nella (5) otteniamo poi:

$$v_y = \frac{m}{qB} A \omega \cos(\omega t) - \frac{E}{B}; \quad (11)$$

imponendo la condizione iniziale $v_y(0) = v_0$ e sostituendo il valore di ω , otteniamo:

$$A = v_0 + \frac{E}{B}. \quad (12)$$

Riepilogando, le componenti della velocità obbediscono alle relazioni:

$$\begin{cases} v_x(t) = (v_0 + V) \sin(\omega t) \\ v_y(t) = (v_0 + V) \cos(\omega t) - V \\ v_z(t) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

dove

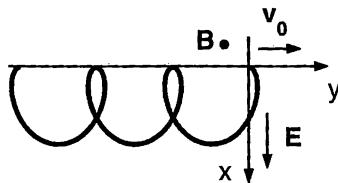
$$V = \frac{E}{B}. \quad (14)$$

Integrando le equazioni precedenti ed imponendo che in $t = 0$ la particella si trovi nell'origine delle coordinate, si ottiene poi:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0 + V}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \\ y(t) = \frac{v_0 + V}{\omega} \sin(\omega t) - Vt \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Queste equazioni descrivono la composizione di un moto circolare uniforme nel piano xy con un moto rettilineo uniforme di velocità $\mathbf{V} = -(E/B)\mathbf{u}_y$ in direzione opposta all'asse y (vedi figura); tale composizione prende il nome di moto cicloidale. Si noti il risultato controintuitivo: ci si aspetterebbe che la particella si allontani indefinitamente in direzione dell'asse x per l'azione del campo elettrico; la dipendenza della forza di Lorentz dalla velocità comporta tuttavia un esito differente. Si osservi altresì che la direzione in cui si sviluppa il moto cicloidale ($-\mathbf{u}_y$) è indipendente dal segno della carica q : i vettori \mathbf{E} , \mathbf{B} e

\mathbf{V} formano sempre una terna destrorsa. Il segno della carica q determina solo il semipiano a x positive o negative in cui si svolge il moto cicloidale.



Nota. Anche nello svolgimento di questo esercizio non si è tenuto conto della perdita di energia per emissione di radiazione; giungere tuttavia ad un'espressione analitica per l'evoluzione dell'energia cinetica in presenza di irraggiamento elettromagnetico è in tal caso più difficile. Si noti altresì che per valori di $V = E/B$ prossimi alla velocità della luce, la trattazione qui presentata perde valore; in questa situazione si rende necessario un approccio di tipo relativistico, che è ben al di là degli scopi di questa opera.

S.5.3.

Il moto della particella nella regione occupata dal campo magnetico avviene sotto l'azione della forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Come precedentemente analizzato nel primo problema di questo capitolo, nel caso in cui la velocità iniziale v_0 della particella ed il campo magnetico \mathbf{B} siano perpendicolari, il moto risulta circolare uniforme. Assegnati i versi della velocità e del campo magnetico ed essendo la carica positiva, in base alla (1) deduciamo che il verso di percorrenza della traiettoria circolare debba essere antiorario (vedi figura). Imponendo che la forza magnetica operi come forza centripeta, otteniamo:

$$|\mathbf{F}| = q v_0 B = m_p \frac{v_0^2}{R}, \quad (2)$$

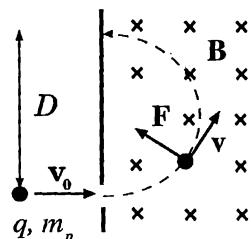
dove v_0 è il modulo della velocità iniziale, B il modulo del campo magnetico ed R il raggio della traiettoria circolare. Dalla (2) si deduce che il raggio della traiettoria risulta pari a:

$$R = \frac{m_p v_0}{q B}. \quad (3)$$

Si noti che la massima distanza D che la particella raggiunge dal punto di ingresso è pari al diametro della traiettoria. Pertanto sostituendo i valori assegnati dal problema:

$$D = 2R = 0.2088 \text{ m.} \quad (4)$$

Nota. Il sistema analizzato in questo problema è detto spettrometro di Dempster ed è stato uno dei primi dispositivi impiegati per determinare la massa di particelle cariche (tipicamente per lo studio degli isotopi ionizzati di un elemento); per questo motivo viene anche chiamato spettrometro di massa. Gli ioni prodotti da una sorgente vengono



accelerati mediante una differenza di potenziale ΔV fino a raggiungere l'energia cinetica $E_c = q\Delta V$, dove q è la carica degli ioni. La velocità con cui essi giungono nello spettrometro è quindi pari a:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}. \quad (5)$$

Le cariche vengono poi deflesse dalla forza di Lorentz e colpiscono la parete dello spettrometro in una posizione a distanza D dall'ingresso pari a:

$$D = 2 \frac{mv_0}{qB} = 2 \sqrt{\frac{2m\Delta V}{qB^2}}. \quad (6)$$

Si scopre quindi che, a parità di carica, la posizione in cui le particelle giungono dipende dalla loro massa m . Ponendo sulla parete dello spettrometro un rivelatore, è possibile ricavare un'analisi delle masse delle particelle inviate al suo interno mediante una misura della posizione in cui esse arrivano.

S.5.4.

Il moto della particella all'interno del condensatore è influenzato sia dal campo magnetico B che dal campo elettrico E . La forza risultante agente sull'elettrone è quindi data dalla relazione:

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B} - e\mathbf{E}. \quad (1)$$

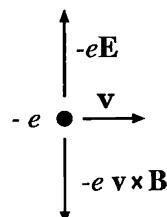
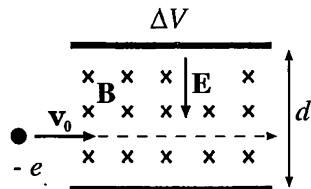
dove $-e$ è la carica dell'elettrone. Si osservi che, essendo l'elettrone carico negativamente ed essendo il verso del campo magnetico entrante nel piano del foglio, la forza di Lorentz sarà diretta verso il basso. Affinché l'elettrone attraversi il sistema senza deviazioni, è necessario impostare che la forza risultante agente su di esso sia nulla. Pertanto è necessario polarizzare il condensatore in modo che la forza elettrica agente sull'elettrone sia diretta verso l'alto e dunque compensi quella di Lorentz.

Ciò comporta che l'armatura superiore del condensatore sia caricata positivamente. Annullando la forza totale agente sulla carica, la velocità v dell'elettrone rimarrà inalterata e pari al valore iniziale v_0 . Bilanciando le due forze avremo:

$$e E = e v_0 B, \quad (2)$$

dove E è il modulo del campo elettrico, B il modulo del campo magnetico e v_0 il modulo della velocità iniziale. Se assumiamo di trascurare gli effetti di bordo all'interno del condensatore, possiamo calcolare facilmente il campo elettrico in funzione della differenza di potenziale ΔV tra le armature e della distanza d che le separa. Si ha infatti che:

$$E = \frac{\Delta V}{d}, \quad (3)$$



e quindi, sostituendo la (3) nella (2), otteniamo che la differenza di potenziale da applicare ai capi del condensatore vale:

$$\Delta V = v_0 d B = 3000 \text{ V}. \quad (4)$$

Nota. Il sistema analizzato in questo problema può essere utilizzato come selettore di velocità di una particella. Come si può notare dall'equazione (4), fissati ΔV , B e le dimensioni del condensatore d , la velocità che una particella deve avere per attraversare la regione senza deflessioni è data da:

$$v_0 = \frac{\Delta V}{Bd}. \quad (5)$$

Ponendo una sottile fenditura al di là del selettore, verranno selezionate e lasciate passare solo quelle particelle, non deflesse, dotate della velocità indicata nella relazione (5).

S.5.5.

Nel seguito ipotizzeremo che la forza di Lorentz agente sulla particella all'interno del condensatore formato dalle griglie, abbia effetti trascurabili; pertanto si assumerà che la carica sia dotata in tale regione di moto rettilineo.

Trascurando gli effetti di bordo, possiamo inoltre assumere che il campo elettrico sia uniforme tra le griglie e nullo all'esterno. Per valutare la velocità in uscita dal condensatore possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\Delta E_m = 0, \quad (1)$$

dove $E_m = E_c + qV$ è l'energia meccanica, E_c l'energia cinetica e qV l'energia potenziale della carica sottoposta al potenziale elettrostatico V . Dalla (1) deriva quindi che:

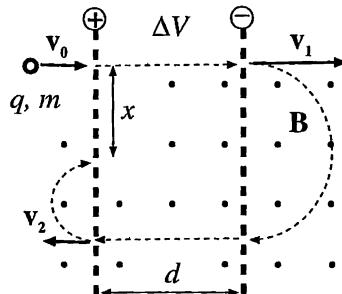
$$\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 \right) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 \right) = 0, \quad (2)$$

dove v_1 è il modulo della velocità in uscita dalla griglia a potenziale V_1 e v_0 la velocità in ingresso alla griglia di potenziale V_0 . Otteniamo pertanto:

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{2q\Delta V}{m}, \quad (3)$$

dove $\Delta V = V_0 - V_1$ è la differenza di potenziale tra le griglie. Si noti che $\Delta V > 0$, la particella viene dunque accelerata nel primo passaggio. A causa del campo magnetico presente nella regione, la carica compirà una traiettoria semicircolare sotto l'azione della forza di Lorentz, mantenendo costante il modulo della velocità (vedi figura). Il raggio R_1 di questa traiettoria, per quanto visto nei precedenti problemi, è dato dalla relazione:

$$R_1 = \frac{mv_1}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{v_0^2 + \frac{2q\Delta V}{m}}, \quad (4)$$



dove B è il modulo del campo magnetico. Successivamente la carica ritorna nel condensatore, dove stavolta viene decellerata. La velocità v_2 in uscita dal condensatore si può calcolare applicando nuovamente il principio di conservazione dell'energia. Avremo:

$$\left(\frac{1}{2}mv_2^2 + qV_0 \right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 \right) = 0. \quad (5)$$

Sostituendo la (3) nella (5) si ottiene $v_2 = v_0$. Del resto a tale risultato si poteva giungere direttamente, osservando che l'energia meccanica si conserva lungo tutta la traiettoria. La particella compie a tal punto una nuova traiettoria semicircolare, di raggio:

$$R_2 = \frac{mv_2}{qB} = \frac{mv_0}{qB}. \quad (6)$$

La minima distanza x dal punto di partenza in cui la carica verrà a trovarsi è (vedi figura):

$$x = 2R_1 - 2R_2 = \frac{2m}{qB} \left[\sqrt{v_0^2 + \frac{2q\Delta V}{m}} - v_0 \right]. \quad (7)$$

Nota. Il dispositivo illustrato nell'esercizio, con poche variazioni, può essere impiegato per accelerare una carica. Per fare ciò è sufficiente invertire ogni volta la polarità delle griglie mentre la carica si trova all'esterno del condensatore; in tal modo la particella verrà ulteriormente accelerata ad ogni successivo passaggio. Un simile dispositivo prende il nome di ciclotrone. Si noti che, sinché la velocità della particella non raggiunge il regime relativistico, il tempo T_s impiegato per compiere le orbite semicircolari è indipendente dalla velocità della carica ed è pari a:

$$T_s = \frac{1}{2} \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB}. \quad (8)$$

Pertanto il ciclotrone può essere polarizzato mediante una tensione alternata di periodo $T = 2T_s$, in modo che ad ogni successivo passaggio della carica la polarizzazione delle griglie venga invertita.

S.5.6.

All'istante $t = 0$ in cui lasciamo fluire corrente nella lastra di argento, i portatori di carica sono sottoposti alla forza di Lorentz $\mathbf{F}_L = -ev \times \mathbf{B}$; si noti che se la corrente I fluisce verso il basso (vedi figura) gli elettroni hanno una velocità iniziale v diretta verso l'alto.

Con i versi dei vettori assegnati nella figura, gli elettroni tenderanno dunque ad addensarsi sul lato destro della lastra; sul lato sinistro avremo un addensamento di cariche positive, dovuto alla mancata copertura degli ioni del metallo da parte degli elettroni. Lo sbilanciamento di cariche così prodotto comporta la comparsa di un campo elettrico \mathbf{E}_H diretto trasversalmente; come conseguenza comparirà anche una forza elettrica \mathbf{F}_E agente sugli elettroni. Si noti che $\mathbf{F}_E = -e\mathbf{E}_H$ si oppone a \mathbf{F}_L ; dunque a regime, quando l'accumulo di cariche ai lati della sbarra sarà terminato, le due forze si bilanceranno esattamente. Uguagliando i moduli delle due forze, avremo pertanto che

$$eE_H = evB, \quad (1)$$

essendo v il modulo della velocità, B quello del campo magnetico ed E_H il modulo del campo elettrico. Assumendo che il campo \mathbf{E}_H sia uniforme, possiamo allora ricavare dalla (1) la differenza di potenziale ΔV_H che si instaura in direzione trasversale ai capi della lastra:

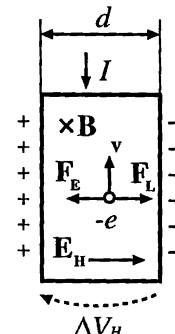
$$\Delta V_H = dE_H = dvB. \quad (2)$$

Per calcolare il valore di ΔV_H in funzione dei dati assegnati, osserviamo che la corrente che fluisce nella lastra può essere espressa come:

$$I = S J, \quad (3)$$

dove J è il modulo del vettore densità di corrente ed S la sezione della lastra. Dalla definizione del vettore densità di corrente $\mathbf{J} = -e n \mathbf{v}$, deriva dunque che:

$$v = \frac{J}{e n} = \frac{I}{e n S}. \quad (4)$$



Sostituendo la (4) nella (2), otteniamo infine:

$$\Delta V_H = \frac{I d B}{e n S} = 1.5 \mu\text{V}. \quad (5)$$

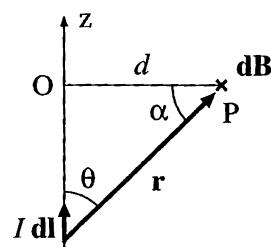
Nota. La comparsa di una differenza di potenziale trasversale ai capi di una lastra conduttrice percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico viene detta effetto Hall, od anche effetto galvanomagnetico trasversale. Questo fenomeno è largamente impiegato per realizzare magnetometri, nei quali la misura di un campo magnetico avviene tramite una misura di differenza di potenziale. Dalla (5) si evince infatti che il modulo del campo magnetico è dato da:

$$B = \frac{e n S \Delta V_H}{I d}, \quad (6)$$

per cui, conoscendo la geometria della sonda esposta al campo, la corrente che vi scorre e le proprietà del conduttore che la compone, si può ottenere una misura di B dalla misura di ΔV_H .

S.5.7.

Consideriamo un sistema di coordinate cilindriche in cui l'asse z coincida col filo ed abbia verso concorde con quello di scorrimento della corrente I ; assumeremo che il punto P , in cui intendiamo calcolare il campo magnetico, abbia coordinata $z = 0$. Possiamo pensare di scomporre il filo in elementi infinitesimi $d\mathbf{l} = dz \mathbf{u}_z$ diretti nello stesso verso della corrente. Il campo magnetico infinitesimo $d\mathbf{B}$ generato da uno di tali elementi in un punto P a distanza d dal filo vale (vedi figura):



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}, \quad (1)$$

dove \mathbf{r} è il vettore che spicca dalla posizione di $d\mathbf{l}$ individua il punto P ed $r = |\mathbf{r}|$. Si noti che $d\mathbf{B}$ è perpendicolare al piano contenente il filo ed il punto P; il verso di $d\mathbf{B}$ è quello in cui ruota una vite destrorsa che avanza nella direzione di scorrimento della corrente. Chiameremo \mathbf{u}_θ il versore diretto come $d\mathbf{B}$; si osservi che tale versore è tangente alla circonferenza centrata sul filo, passante per P e appartenente ad un piano perpendicolare al filo stesso. Pertanto, esprimendo il prodotto vettore:

$$d\mathbf{B} = dB \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz \sin \theta}{r^2} \mathbf{u}_\theta, \quad (2)$$

essendo θ l'angolo formato da $d\mathbf{l}$ ed \mathbf{r} . Si ossevi che tutti gli elementi infinitesimi in cui si scomponete il filo generano un campo magnetico in P diretto allo stesso modo. Avremo quindi che il campo magnetico complessivo è pari a:

$$\mathbf{B} = \int_{filo} dB \mathbf{u}_\theta = \int_{filo} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz \cos \alpha}{r^2} \mathbf{u}_\theta, \quad (3)$$

dove si è sfruttato il fatto che $\cos \alpha = \sin \theta$, essendo α l'angolo complementare di θ (come in figura). Possiamo riesprimere r in funzione di d secondo la relazione:

$$r = d / \cos \alpha, \quad (4)$$

e dunque

$$z = r \sin \alpha = d \tan \alpha, \quad (5)$$

essendo z la coordinata dell'elemento di filo preso in considerazione. Differenziando l'equazione (5) otteniamo:

$$dz = |d\mathbf{l}| = \frac{d}{\cos^2 \alpha} d\alpha. \quad (6)$$

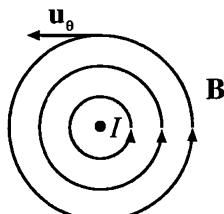
Sostituendo la (4) e la (6) nella (3), otteniamo:

$$\mathbf{B} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \cos \alpha d\alpha \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{u}_\theta. \quad (7)$$

L'equazione (7) è anche detta legge di Biot-Savart. Il tipico andamento delle linee di flusso del campo magnetico è mostrato nella figura a lato, in cui si assume che il filo rettilineo sia perpendicolare al piano del foglio e la corrente I fluisca verso il lettore.

S.5.8.

Incominciamo col considerare il caso in cui le correnti siano equiveze. Nella figura successiva si possono osservare i versi dei campi magnetici \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 generati singolarmente dai due fili nel piano in cui i fili stessi giacciono; i campi risultano sempre perpendicolari a tale piano. Le correnti che scorrono nei fili sono pari a $I_1 = I_2 = I$. Sceglieremo una terna cartesiana destra Oxyz in cui l'asse y sia parallelo ai fili, l'asse z (non mostrato) sia diretto verso il lettore e l'origine degli assi sia posizionata nel punto medio tra i fili. Il campo magnetico generato nel piano xy dal filo di sinistra sarà dato dalla relazione:



$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} \mathbf{u}_z, \quad (1)$$

mentre il campo generato dal filo di destra sarà:

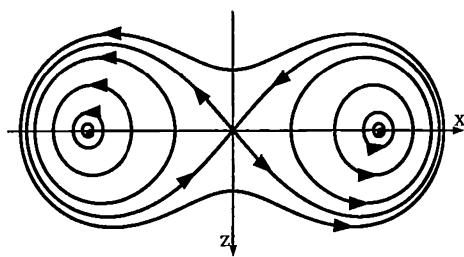
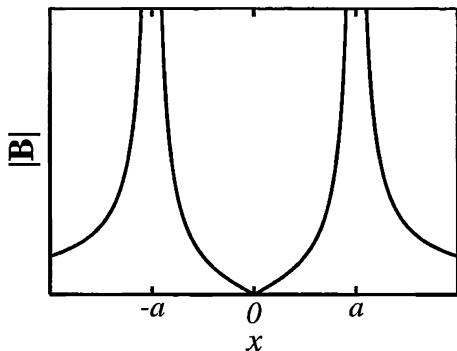
$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} \mathbf{u}_z. \quad (2)$$

Per ottenere le espressioni (1) e (2), abbiamo utilizzato la legge di Biot-Savart ricavata nell'esercizio precedente. Si noti che a denominatore di queste espressioni compare la distanza dal filo sorgente del campo; il segno negativo dipende esclusivamente dal verso scelto per l'asse z . Poiché per il campo magnetico vale il principio di sovrapposizione, il campo totale \mathbf{B} sarà la somma dei campi generati dai fili, dunque:

$$\mathbf{B} = -\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} \right] \mathbf{u}_z, \quad (3)$$

da cui:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{x}{(x+a)(x-a)} \mathbf{u}_z. \quad (4)$$



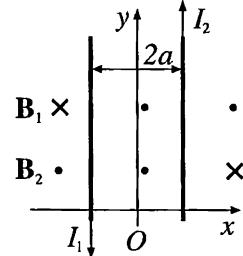
Possiamo dunque dedurre dalla (4) che il campo complessivo si annulla lungo l'asse y ; questo si nota anche dal grafico di $|\mathbf{B}|$ riportato in funzione di x . Si noti come il campo tenda ad infinito in corrispondenza della posizione dei fili. In figura è stato anche riportato l'andamento delle linee di flusso del campo magnetico nel piano xz ; le correnti scorrono perpendicolarmente al piano del foglio, entrambe verso il lettore. Si noti che le linee di flusso sembrano convergere nell'origine O delle coordinate; tuttavia tale punto non rappresenta una sorgente di campo: \mathbf{B} infatti è nullo in O e dunque in questa posizione le linee di flusso non sono definite.

Consideriamo ora il caso in cui le correnti siano opposte. La figura a lato mostra i versi dei campi magnetici \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 generati singolarmente dai due fili nel piano xy . Poiché nel caso che ora stiamo considerando la corrente I_1 è stata invertita, il campo totale nel piano xy risulterà pari a:

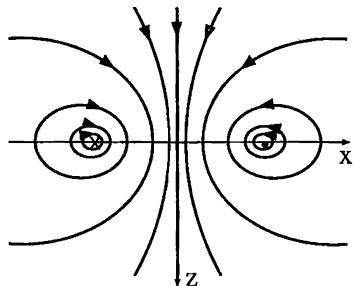
$$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} \right] \mathbf{u}_z, \quad (5)$$

da cui:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{(x+a)(x-a)} \mathbf{u}_z. \quad (6)$$



Si lascia al lettore il compito di determinare l'andamento del modulo di \mathbf{B} sul piano xy in funzione di x . L'andamento delle linee di flusso del campo sul piano xz è visibile nello schema a fianco riportato; le correnti scorrono perpendicolarmente al piano del foglio, quella di destra verso il lettore mentre quella di sinistra in verso opposto. Si osservi in questo caso che nella regione compresa tra i fili i campi sono concordi.

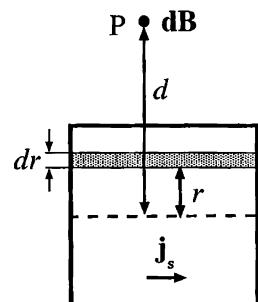


S.5.9.

Il nastro conduttore può essere scomposto in infinite strisce di spessore infinitesimo dr parallele all'asse del nastro stesso.

Chiamiamo r la distanza di una di queste strisce dall'asse del nastro; sia inoltre d la distanza tra l'asse ed il punto P in cui dobbiamo valutare il campo magnetico \mathbf{B} . Ogni striscia può essere assimilata ad un filo rettilineo indefinito in cui scorre una corrente infinitesima $dI = j_s dr$; la distanza tra la striscia e P è pari a $d-r$ e quindi, applicando la legge di Biot-Savart, il campo magnetico generato dalla striscia in quel punto ha modulo pari a:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(d-r)}. \quad (1)$$



Si noti che ogni striscia considerata genera un campo \mathbf{dB} perpendicolare al piano del foglio; con i versi assegnati in figura, possiamo concludere che il campo complessivo in P , somma di tutti i contributi infinitesimi, sarà diretto perpendicolarmente al foglio verso il lettore. Pertanto:

$$B = \int dB = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 j_s}{2\pi(d-r)} dr, \quad (2)$$

da cui risulta

$$B(d) = \frac{\mu_0 j_s}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}. \quad (3)$$

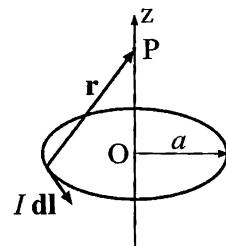
Sostituendo nella (3) la distanza $d = 2a$ a cui il problema richiede di calcolare il campo, otteniamo:

$$B(2a) = \frac{\mu_0 j_s}{2\pi} \ln 3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln 3, \quad (4)$$

dove si è fatto riferimento alla corrente totale $I = 2aj_s$ che scorre nel nastro, pari al prodotto della densità di corrente superficiale per la larghezza del nastro stesso.

S.5.10.

Sceglieremo l'asse z coincidente con l'asse della spira; per comodità assumeremo che il verso dell'asse coincida con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nella direzione di circolazione della corrente nella spira. Assumeremo inoltre che l'origine delle coordinate coincida col centro O della spira. Il campo magnetico prodotto nel punto P sull'asse della spira è dato da:



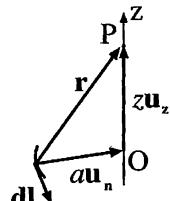
$$\mathbf{B} = \int_{\text{spira}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione che, spiccato dall'elemento di circuito dl della spira, punta nella posizione di P , $r = |\mathbf{r}|$ ed il percorso di integrazione si intende esteso all'intera spira. Poiché per simmetria la distanza r di P da dl è costante lungo la spira, l'equazione (1) può essere riscritta nella forma:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \int_{\text{spira}} \mathbf{dl} \times \mathbf{r}. \quad (2)$$

Al fine di risolvere agevolmente l'integrale, possiamo scomporre il vettore \mathbf{r} nella somma di uno spostamento radiale più uno spostamento lungo l'asse z secondo la relazione $\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z + a\mathbf{u}_n$, dove z è la coordinata di P , a il raggio della spira ed \mathbf{u}_n un versore radiale diretto dall'elementino dl verso O , come illustrato in figura. Pertanto avremo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left[\int_{\text{spira}} \mathbf{dl} \times z\mathbf{u}_z + \int_{\text{spira}} \mathbf{dl} \times a\mathbf{u}_n \right], \quad (3)$$



da cui, tenuto conto che il termine $z\mathbf{u}_z$ è costante lungo il percorso di integrazione, otteniamo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left[\left(\int_{\text{spira}} \mathbf{dl} \right) \times z\mathbf{u}_z + a \int_{\text{spira}} \mathbf{dl} \times \mathbf{u}_n \right]. \quad (4)$$

Si noti che il primo integrale nella (4) è nullo, in quanto somma di spostamenti lungo un percorso chiuso, che dunque è pari ad uno spostamento di lunghezza nulla. Pertanto:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \int_{\text{spira}} \mathbf{dl} \times \mathbf{u}_n. \quad (5)$$

Come può evincersi dalla figura, risulta $d\mathbf{l} \times \mathbf{u}_n = dl\mathbf{u}_z$, dove $dl = |d\mathbf{l}|$. Sulla scorta di ciò, otteniamo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a I}{4\pi r^3} \int_{\text{spira}} dl \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3} \mathbf{u}_z; \quad (6)$$

nel calcolare l'integrale nella (6) si è tenuto conto del fatto che la somma dei moduli degli spostamenti è pari alla circonferenza della spira. Esprimendo poi r in funzione di z ed a , otteniamo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a^2 I \mathbf{u}_z}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

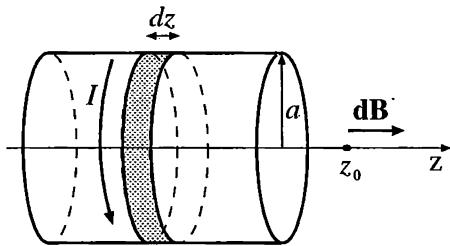
In particolare nel centro della spira il campo magnetico è pari a:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 I \mathbf{u}_z}{2a}. \quad (8)$$

Si noti che \mathbf{B} è diretto come l'asse z e quindi segue la regola del cavatappi: il verso del campo magnetico coincide con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nella direzione di circolazione della corrente nella spira.

S.5.11.

Assumiamo per semplicità che l'asse del solenoide coincida con l'asse z delle coordinate. Porremo inoltre che la corrente fluente nelle spire del solenoide circoli nel verso in cui ruota una vite destrorsa che avanzi nella direzione dell'asse z .



Incominciamo col calcolare il campo \mathbf{B} prodotto lungo z . Una porzione infinitesima del solenoide di lunghezza dz può essere assimilata ad una spira circolare in cui fluisca la corrente infinitesima $di = I n dz$, essendo I la corrente che scorre nella singola spira ed n il numero di spire per unità di lunghezza. Ovviamente tale assunzione equivale a considerare la corrente come uniformemente distribuita sulla superficie del solenoide anziché essere concentrata nelle singole spire avvolte su di esso; l'approssimazione che compiamo con tale assunzione può considerarsi accettabile sinché la densità di spire è elevata od il raggio a del solenoide è molto maggiore della separazione fra le spire. Detta z la coordinata del tratto infinitesimo di solenoide considerato e z_0 la posizione in cui vogliamo calcolare il campo magnetico $d\mathbf{B}$ da esso prodotto, risulterà:

$$d\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 a^2 di \mathbf{u}_z}{2[(z - z_0)^2 + a^2]^{3/2}}. \quad (1)$$

L'equazione (1) è stata ottenuta nella soluzione del precedente esercizio. Il campo magnetico complessivo si otterrà sommando i campi prodotti dalle porzioni infinitesime in cui il solenoide è scomposto. Pertanto:

$$\mathbf{B}(z_0) = \int_{\text{solenoide}} d\mathbf{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 a^2 I n \mathbf{u}_z dz}{2[(z - z_0)^2 + a^2]^{3/2}}. \quad (2)$$

Per risolvere l'integrale nella (2), possiamo per esempio effettuare la sostituzione $(z - z_0) = a \cotan\theta$; il differenziale può allora essere riscritto nella forma:

$$dz = d(z - z_0) = -\frac{a d\theta}{\sin^2 \theta}; \quad (3)$$

gli estremi di integrazione si trasformano secondo le relazioni:

$$\begin{cases} z_{\text{sup}} = \infty & \rightarrow \theta_{\text{sup}} = 0 \\ z_{\text{inf}} = -\infty & \rightarrow \theta_{\text{inf}} = \pi \end{cases}, \quad (4)$$

da cui, sostituendo nella (2), otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z_0) &= - \int_{\pi}^0 \frac{\mu_0 a^2 I n \mathbf{u}_z}{2} \frac{1}{[a^2 \cotan^2 \theta + a^2]^{3/2}} \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta} = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I n \mathbf{u}_z}{2} \frac{1}{[\cotan^2 \theta + 1]^{3/2}} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Moltiplicando per $\sin \theta$ numeratore e denominatore dell'integranda, tenendo conto che $\cotan \theta = \cos \theta / \sin \theta$ e semplificando, possiamo riscrivere la (5) nella forma:

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 I n \mathbf{u}_z}{2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \mu_0 I n \mathbf{u}_z. \quad (6)$$

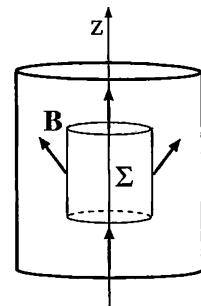
Si noti che il risultato ottenuto è indipendente sia dal raggio a del solenoide che dalla posizione z_0 in cui è stato calcolato il campo; quest'ultima proprietà poteva essere prevista già in partenza, poiché il solenoide è indefinito. Risulta quindi che lungo l'asse z \mathbf{B} è costante e diretto come l'asse stesso. Si noti che, data la simmetria cilindrica del solenoide, il modulo del campo magnetico nei punti lontani dall'asse z deve dipendere unicamente dalla distanza r dall'asse stesso. Per ricavare il valore di \mathbf{B} in tali punti, dobbiamo fare uso delle proprietà fondamentali del campo magnetico riassunte nelle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \\ \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_c. \end{cases} \quad (7)$$

La prima delle (7) stabilisce la solenoidalità del campo: il flusso di \mathbf{B} attraverso una superficie chiusa Σ è sempre nullo. Da ciò deriva direttamente che \mathbf{B} , se diverso da zero, è sicuramente parallelo all'asse z . Consideriamo infatti una superficie cilindrica coassiale al solenoide; il campo \mathbf{B} avrà simmetria cilindrica (in quanto il solenoide è cilindrico) e non dipenderà da z (essendo il solenoide indefinito).

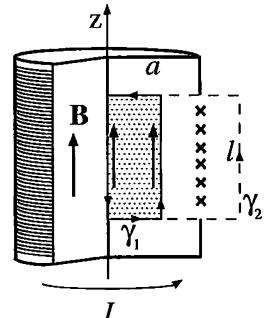
Pertanto la somma dei flussi di \mathbf{B} attraverso le due basi di Σ sarà nulla; se per assurdo il campo non fosse parallelo all'asse z (vedi figura), il flusso attraverso la superficie laterale sarebbe diverso da zero e quindi sarebbe diverso da zero il flusso totale attraverso Σ , il che contraddice la proprietà di solenoidalità. Il campo magnetico sarà dunque esprimibile nella forma $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_z$, essendo r la distanza dall'asse del solenoide. A tal punto possiamo applicare la seconda delle (7), che esprime la legge di Ampere: la circuitazione di \mathbf{B} attraverso un percorso chiuso γ è proporzionale alla corrente i_c concatenata a γ . Consideriamo un percorso chiuso rettangolare γ_1 con un lato di lunghezza l coincidente con l'asse del solenoide e l'altro lato, perpendicolare all'asse, di lunghezza $r < a$; assumiamo che γ_1 abbia verso di percorrenza antiorario. Essendo nulla la corrente concatenata a γ_1 (vedi figura successiva), è nulla anche la circuitazione del campo magnetico. Tuttavia, calcolando l'integrale di circuitazione, avremo:

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = lB(r) - lB(0) = 0. \quad (8)$$



Si noti che i lati perpendicolari all'asse non contribuiscono alla circuitazione (poiché lo spostamento $d\mathbf{l}$ è perpendicolare al campo \mathbf{B}), mentre il lato coincidente con l'asse contribuisce con un termine negativo (in quanto il campo \mathbf{B} sull'asse ha verso opposto a quello di percorrenza della linea). Dalla (8) deriva che $B(r) = B(0)$ e quindi il campo \mathbf{B} ha lo stesso modulo in ogni punto a distanza minore di a dall'asse z (ovvero per tutti i punti all'interno del solenoide). Ripetendo il calcolo della circuitazione sul percorso γ_2 con lati di lunghezza l ed $r > a$, otterremo questa volta:

$$\oint_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = lB(r) - lB(0) = -\mu_0 n l I. \quad (9)$$



Si noti il segno negativo al secondo membro della (9): la corrente concatenata a γ_2 è infatti entrante nel piano del foglio e dunque va considerata con segno negativo perché ha verso discorde da quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di percorrenza scelto per la linea γ_2 . Ricordando che, per la (6) il modulo di $\mathbf{B}(0)$ è pari a $\mu_0 n I$, ne deriva che nei punti esterni al solenoide indefinito il campo magnetico è nullo. Pertanto, riepilogando, risulta:

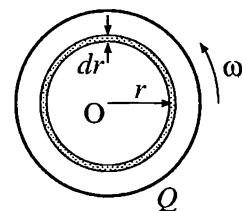
$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{u}_z & r < a, \\ 0 & r > a. \end{cases} \quad (10)$$

S.5.12.

Poiché la carica è distribuita uniformemente sul disco, la densità di carica superficiale presente su di esso è pari a:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}, \quad (1)$$

dove Q è la carica deposta ed R il raggio del disco. Il disco può essere scomposto in corone circolari concentriche di spessore infinitesimo dr e raggio medio r , come illustrato in figura. Ponendo il disco in rotazione attorno al suo asse, ognuno di questi elementi genera un campo magnetico $d\mathbf{B}$ assimilabile a quello generato da una spira circolare percorsa da una corrente infinitesima di intensità:



$$dI = \frac{dq}{T}, \quad (2)$$

dove dq è la carica infinitesima presente sulla corona circolare e T il periodo di rotazione. Risulta che la carica presente sulla corona circolare è data da:

$$dq = \sigma 2\pi r dr, \quad (3)$$

mentre il periodo di rotazione è legato alla velocità angolare del disco dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4)$$

Dalle relazioni (1-4) risulta poi:

$$dI = \sigma \omega r dr = \frac{Q \omega r}{\pi R^2} dr. \quad (5)$$

In base a quanto illustrato nei precedenti esercizi, il campo magnetico generato nel centro O del disco da una delle spire elementari è dato da:

$$d\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 dI \mathbf{u}_z}{2r}, \quad (6)$$

dove \mathbf{u}_z è il versore orientato nella direzione di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nello stesso verso del disco. Avendo scelto in figura un verso di rotazione antiorario, il versore \mathbf{u}_z risulta diretto perpendicolarmente al piano del foglio verso il lettore. Il campo magnetico complessivo nel centro del disco sarà allora dato dalla relazione:

$$\mathbf{B}(O) = \int_{\text{disco}} d\mathbf{B}(O) = \int_0^R \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \mathbf{u}_z dr, \quad (7)$$

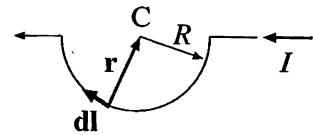
da cui deriva:

$$\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R} \mathbf{u}_z. \quad (8)$$

S.5.13.

Il campo magnetico prodotto dal filo nel punto C può essere calcolato mediante il principio di sovrapposizione: scomponendo il filo in elementi infinitesimi dl , il campo dB prodotto da ciascuno di essi sarà dato dalla relazione:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}, \quad (1)$$



dove r è il vettore posizione che, spiccato dall'elemento dl , individua il punto C ed r ne è il relativo modulo. Il

campo complessivo B si otterrà come somma dei campi prodotti dai vari elementi del filo. Si noti che gli elementi disposti lungo i due tratti rettilinei del filo non contribuiscono al campo magnetico in C, in quanto i vettori r e dl risultano in questi casi tra loro paralleli. L'unico contributo deriva pertanto dal tratto semicircolare:

$$B(C) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{semic.}} \frac{Idl \times r}{R^3}, \quad (2)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $r = R$ lungo il tratto semicircolare. Detto u_z il versore perpendicolare al piano del foglio e da questo uscente, risulterà che $dl \times r = -dl R u_z$, essendo dl il modulo di dl . Pertanto il campo magnetico in C sarà pari a:

$$B(C) = -\frac{\mu_0 I u_z}{4\pi R^2} \int_{\text{semic.}} dl, \quad (3)$$

da cui, essendo l'integrale pari alla lunghezza della semicirconferenza:

$$B(C) = -\frac{\mu_0 I}{4R} u_z. \quad (4)$$

S.5.14.

Calcoliamo il campo magnetico generato nel punto O mediante il principio di sovrapposizione. Come già visto nel precedente esercizio, i tratti radiali del circuito non contribuiscono al campo $B(O)$, per cui possiamo porre:

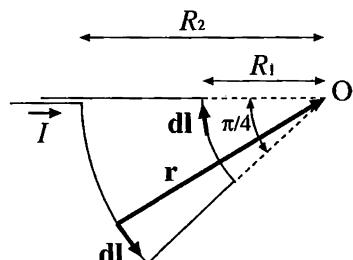
$$B(O) = \int_{\text{arco } R_1} dB + \int_{\text{arco } R_2} dB, \quad (1)$$

dove il campo dB generato da un elemento infinitesimo dl del circuito è dato ancora una volta dalla relazione:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}. \quad (2)$$

Dalle (1-2) si ottiene:

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_{\text{arco } R_1} \frac{dl \times r}{R_1^3} + \int_{\text{arco } R_2} \frac{dl \times r}{R_2^3} \right]. \quad (3)$$



Si noti che, rispetto al punto O, la corrente fluisce in senso antiorario nel tratto di raggio maggiore ed in senso orario nel tratto di raggio minore. Pertanto i due tratti del circuito contribuiranno in O con campi magnetici di segno opposto. Detto u_z il versore

perpendicolare al piano del foglio e diretto verso il lettore, potremo riscrivere la (3) nella forma:

$$\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{u}_z \left[\int_{\text{arcoR}_2} \frac{dl}{R_2^2} - \int_{\text{arcoR}_1} \frac{dl}{R_1^2} \right], \quad (4)$$

da cui otterremo poi:

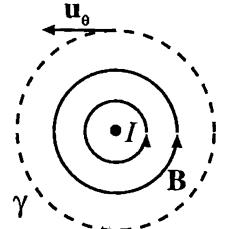
$$\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{u}_z \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] = -\frac{\mu_0 I}{16R_1 R_2} (R_2 - R_1) \mathbf{u}_z. \quad (5)$$

S.5.15.

Si consideri un filo rettilineo indefinito perpendicolare al piano del foglio in cui scorra una corrente I diretta verso il lettore. In base alla geometria del sistema, si deduce che il campo magnetico generato dal filo è dotato di simmetria cilindrica. Possiamo esprimere lo stesso concetto affermando che il campo \mathbf{B} deve essere invariante per rotazioni arbitrarie attorno ad un asse coincidente col filo (difatti la disposizione del filo non cambia se esso ruota su se stesso). Pertanto il modulo di \mathbf{B} dipende esclusivamente dalla distanza r dal filo. Il campo magnetico obbedisce inoltre alla equazione:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}; \quad (1)$$

il significato di tale relazione è semplice: le correnti costituiscono i vortici per le linee di flusso di \mathbf{B} . In base a questa proprietà e considerata la simmetria cilindrica del campo, la forma più semplice che possiamo attribuire alle linee di flusso di \mathbf{B} è quella di circonferenze concentriche giacenti nel piano del foglio (vedi figura). Per calcolare il campo magnetico possiamo ricorrere ora alla legge di Ampere, che è semplicemente una formulazione integrale della (1):



$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_c, \quad (2)$$

dove γ è un percorso chiuso orientato, $d\mathbf{s}$ uno spostamento infinitesimo lungo il percorso ed i_c la corrente totale ad esso concatenata; il segno di i_c viene scelto secondo la regola del cavatappi: sono positive le correnti che scorrono nel verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di percorrenza di γ . Per comodità sceglieremo per γ un orientamento antiorario, di modo che la corrente I che scorre nel filo risulti positiva. Al fine di semplificare la (2), daremo inoltre a γ una forma circolare, con centro coincidente col filo e raggio generico r . Detto \mathbf{u}_θ il versore tangente a γ diretto in verso antiorario e tenuto conto delle proprietà di \mathbf{B} , possiamo allora riscrivere la (2) nella forma:

$$\oint_{\gamma} B(r) \mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{s} \mathbf{u}_\theta = \mu_0 I, \quad (3)$$

dove $ds = |d\mathbf{s}|$; si noti che la corrente concatenata $i_c = I$ per qualunque valore del raggio di γ . Tenuto conto che $B(r)$ è costante lungo il percorso di integrazione, otteniamo poi:

$$B(r) \oint_{\gamma} ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 I, \quad (4)$$

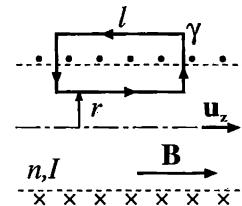
da cui:

$$\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{u}_\theta. \quad (5)$$

La (5) coincide col risultato ottenuto in precedenza calcolando il campo magnetico mediante principio di sovrapposizione.

S.5.16.

Come già visto precedentemente, considerando il solenoide rettilineo indefinito come l'insieme di infinite spire, si giunge alla conclusione che il campo magnetico \mathbf{B} generato dal solenoide debba essere parallelo all'asse stesso e non possa variare se ci si sposta lungo il solenoide. Tale conclusione può essere ottenuta indipendentemente dal calcolo effettivo di \mathbf{B} , semplicemente sulla base della simmetria cilindrica del sistema, sul fatto che il solenoide sia di estensione infinita e sulla solenoidalità del campo magnetico (si veda in proposito la soluzione dell'esercizio 11). Detta r la distanza dall'asse del solenoide ed \mathbf{u}_z il versore parallelo a tale asse, porremo pertanto che $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_z$. Al fine di calcolare il campo con la sola legge di Ampere è ora necessario fare un'ipotesi: assumeremo che \mathbf{B} al di fuori del solenoide sia nullo. Tale ipotesi è giustificabile solo a posteriori, sulla base del calcolo del campo mediante il principio di sovrapposizione. Osserviamo comunque, senza pretesa di legittimare l'ipotesi introdotta, che le linee di flusso del campo \mathbf{B} sono chiuse, ma in questo caso specifico esse si ricongiungono all'infinito; dunque assumere che \mathbf{B} sia nullo fuori dal solenoide non viola la proprietà di solenoidalità. Consideriamo ora un percorso chiuso orientato γ di forma rettangolare, parzialmente introdotto nel solenoide, con un lato parallelo a \mathbf{u}_z di lunghezza l . Nella figura è mostrata una sezione del sistema; le correnti sul bordo superiore del solenoide scorrono verso il lettore mentre quelle sul bordo inferiore sono dirette in verso opposto; notare che una vite destrorsa che ruoti nel verso delle correnti, avanza nella direzione di \mathbf{u}_z . Scegliamo per γ un verso antiorario; in virtù della regola del cavatappi, le correnti concatenate ad essa sono positive. Applicando la legge di Ampere, si ottiene:



$$\oint_\gamma B(r)\mathbf{u}_z \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 n l I, \quad (1)$$

dove $n l I$ è la corrente concatenata a γ ed n è il numero di spire per unità di lunghezza. Si noti che il lato esterno al solenoide non contribuisce al calcolo, in quanto il campo esterno è nullo; i lati perpendicolari all'asse non danno contributi in quanto lo spostamento $d\mathbf{s}$ lungo di essi è perpendicolare al campo magnetico \mathbf{B} . Pertanto potremo riscrivere la (1) nella forma:

$$l B(r) = \mu_0 n l I, \quad (2)$$

dove r è la distanza dall'asse del solenoide a cui si trova il lato interno di γ . Dalla (2) otteniamo poi:

$$B(r) = \mu_0 n I. \quad (3)$$

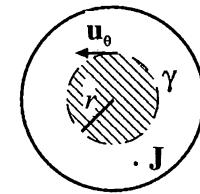
Riassumendo, risulta:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{u}_z & r < a, \\ \mathbf{0} & r > a. \end{cases} \quad (4)$$

essendo a il raggio del solenoide. Dalla (4) si nota che il modulo del campo all'interno del solenoide non dipende dalla posizione in cui lo calcoliamo; il risultato ottenuto è ovviamente identico a quanto trovato determinando il campo \mathbf{B} mediante il principio di sovrapposizione.

S.5.17.

Il cavo conduttore indefinito è dotato di simmetria cilindrica, per cui possiamo ipotizzare che il campo magnetico da esso generato goda dello stesso tipo di simmetria. Come già visto nel caso del campo \mathbf{B} generato dal filo, applicheremo la legge di Ampere lungo un percorso chiuso circolare γ concentrato alla sezione del conduttore, di raggio generico r . Nella figura è riportata la sezione del conduttore; il vettore densità di corrente \mathbf{J} è perpendicolare al piano del foglio, diretto verso il lettore. Sceglieremo per γ un verso di percorrenza antiorario, in modo che la corrente concatenata ad essa risulti positiva; il versore \mathbf{u}_θ individua l'orientamento della linea. In virtù della simmetria del sistema, porremo allora che $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$; applicando la legge di Ampere lungo γ otterremo quindi:



$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} B(r) \mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{s} \mathbf{u}_\theta = \mu_0 i_c, \quad (1)$$

essendo ds il modulo dello spostamento $d\mathbf{s}$ lungo γ ed i_c la corrente ad essa concatenata. Tenuto conto che $B(r)$ è costante lungo γ , la (1) diviene:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 i_c, \quad (2)$$

da cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}. \quad (3)$$

Si noti che, nell'ipotesi che la densità di corrente \mathbf{J} sia uniforme sulla sezione del conduttore, risulterà:

$$J = \frac{I}{\pi(d/2)^2} = \frac{4I}{\pi d^2}, \quad (4)$$

essendo d il diametro del conduttore e $J = |\mathbf{J}|$. La corrente i_c concatenata da γ è data dalla relazione:

$$i_c = \int_{\Sigma_\gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA \quad (5)$$

in cui: Σ_γ è una superficie che abbia γ per contorno; \mathbf{n} un versore normale a tale superficie, il cui verso sia quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di

percorrenza di γ ; dA un elemento infinitesimo di Σ_γ . La corrente concatenata assume poi due diversi andamenti in funzione del raggio r di γ :

(a) per $r < (d/2)$ risulterà:

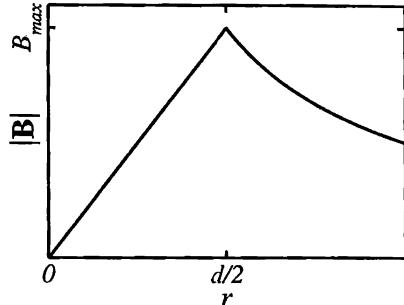
$$i_c = J\pi r^2 = \frac{4Ir^2}{d^2}; \quad (6)$$

(b) per $r \geq (d/2)$ avremo:

$$i_c = I. \quad (7)$$

Sostituendo le (6-7) nella (3) otteniamo poi l'andamento del campo magnetico, come di seguito riassunto:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 Ir}{\pi d^2} \mathbf{u}_\theta & r < (d/2), \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & r \geq (d/2). \end{cases} \quad (8)$$



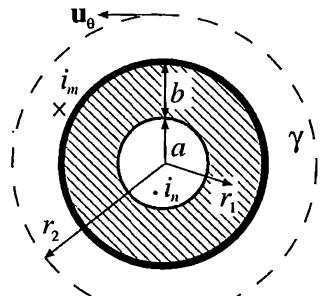
L'andamento del modulo di \mathbf{B} è mostrato nel grafico in funzione della distanza r dall'asse; si noti che sulla superficie laterale del cilindro, ovvero per $r = (d/2)$, il campo risulta continuo ed assume il massimo valore, pari a:

$$B_{max} = \frac{\mu_0 I}{\pi d} = 4 \times 10^{-5} \text{ T}. \quad (9)$$

S.5.18.

Per risolvere l'esercizio si farà uso della legge di Ampere. La figura mostra una sezione del cavo coassiale; la corrente nella parte centrale (nucleo) scorre verso il lettore, mentre quella nella maglia esterna scorre verso il foglio. Vista la simmetria cilндrica del sistema, possiamo supporre che il campo magnetico generato dalle correnti sia esprimibile nella forma $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$, essendo r la distanza dall'asse del cavo coassiale ed \mathbf{u}_θ un versore tangente alle linee di flusso circolari del campo, centrate sull'asse del cavo. Si assumerà per

\mathbf{u}_θ un verso antiorario; si noti che tale assunzione non è vincolante, poiché se il campo magnetico risultante fosse diretto in verso orario, la quantità $B(r)$ risulterebbe semplicemente di segno negativo. Applichiamo la legge di Ampere ad una linea chiusa circolare γ centrata sull'asse del cavo. Porremo che anche γ sia orientata in verso antiorario; con questa assunzione e sulla base della regola del cavatappi, assegneremo segno positivo alla corrente i_n emergente dal nucleo del cavo coassiale, mentre riterremo negativa la corrente i_m che scorre nella maglia. Risulta per la legge di Ampere:



$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_\gamma B(r) \mathbf{u}_\theta \cdot ds \mathbf{u}_\theta = \mu_0 i_c, \quad (1)$$

essendo i_c la corrente concatenata a γ . Come già visto nel precedente esercizio, la (1) si riduce a:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}, \quad (2)$$

essendo r il raggio della linea γ . La corrente concatenata al percorso di integrazione sarà pari a

$$i_c = \int_{\Sigma_\gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (3)$$

dove Σ_γ è una superficie che abbia γ per contorno, \mathbf{J} è la densità di corrente ed \mathbf{n} è un versore normale a tale superficie, il cui verso sia quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di percorrenza di γ . Nell'ipotesi che la densità di corrente \mathbf{J}_n nel conduttore centrale sia uniforme sulla sezione, risulterà:

$$J_n = \frac{i_n}{\pi a^2}, \quad (4)$$

essendo a il raggio del nucleo conduttore e $J_n = |\mathbf{J}_n|$. Sulla base di quanto detto, la corrente i_c concatenata da γ assume tre diversi andamenti in funzione del raggio r di γ :

(a) per $r < a$ risulterà:

$$i_c = J_n \pi r^2 = \frac{i_n r^2}{a^2}; \quad (5)$$

(b) per $a \leq r < (a + b)$ avremo:

$$i_c = i_n; \quad (6)$$

(c) per $r \geq (a + b)$ infine risulterà:

$$i_c = i_n - i_m. \quad (7)$$

Sulla base delle relazioni (2-7) possiamo allora dire che il campo prodotto dal cavo coassiale avrà la seguente struttura:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i_n r}{2\pi a^2} \mathbf{u}_\theta & r < a, \\ \frac{\mu_0 i_n}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & a \leq r < (a + b), \\ \frac{\mu_0 (i_n - i_m)}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & r \geq (a + b). \end{cases} \quad (8)$$

Si noti che $a < r_1 < (a + b)$, per cui il campo magnetico a questa distanza sarà:

$$\mathbf{B}(r_1) = \frac{\mu_0 i_n}{2\pi r_1} \mathbf{u}_\theta; \quad (9)$$

risulta invece che $r_2 > (a + b)$ e quindi il campo magnetico alla distanza r_2 è:

$$\vec{B}(r_2) = \frac{\mu_0(i_n - i_m)}{2\pi r_2} \mathbf{u}_\theta. \quad (10)$$

Imponendo quanto richiesto dal problema, otteniamo:

$$\begin{cases} \mathbf{B}(r_1) = -\mathbf{B}(r_2), \\ |\mathbf{B}(r_1)| = |\mathbf{B}(r_2)| = B, \end{cases} \quad (11)$$

essendo $B = 10^{-3}$ T. Dalle relazioni (9-11) otteniamo poi:

$$\begin{cases} \frac{i_n}{r_1} = \frac{(i_m - i_n)}{r_2}, \\ \frac{i_n}{r_1} = \frac{2\pi B}{\mu_0}. \end{cases} \quad (12)$$

Dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$\begin{cases} i_m = \frac{2\pi B}{\mu_0}(r_1 + r_2), \\ i_n = \frac{2\pi B}{\mu_0}r_1. \end{cases} \quad (13)$$

Sostituendo nelle (13) i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo poi $i_n = 15$ A ed $i_m = 45$ A.

S.5.19.

Sia a il raggio del solenoide indefinito ed I la corrente che scorre nelle sue spire. Il campo magnetico \mathbf{B} generato dal solenoide avrà modulo pari a $B = \mu_0 n I$ e sarà diretto lungo l'asse. La forza agente sull'elettrone sarà pari a:

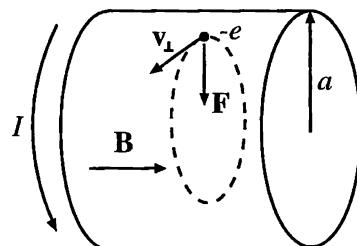
$$\mathbf{F} = -ev \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

con v velocità dell'elettrone ed $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C carica elementare; questa forza costrignerà l'elettrone ad un'orbita di tipo elicoidale lungo l'asse del solenoide. Come già visto nel primo esercizio di questo capitolo, il raggio R della traiettoria elicoidale si può calcolare dalla (1) imponendo che la forza magnetica agisca da forza centripeta:

$$|\mathbf{F}| = ev_\perp B = m_e \frac{v_\perp^2}{R}, \quad (2)$$

dove $v_\perp = v \sin \theta$ è la proiezione della velocità della particella in direzione perpendicolare al campo magnetico, v è il modulo della velocità e θ è l'angolo che questa forma con \mathbf{B} . Dalla (2) otteniamo:

$$R = \frac{m_e v \sin \theta}{e B}. \quad (3)$$



Dalla precedente espressione risulta che, a parità di energia cinetica e dunque di modulo della velocità degli elettroni, il massimo raggio della traiettoria si ha per $\theta = \pi/2$; in questo caso il moto è circolare uniforme ed avviene nel piano perpendicolare a \mathbf{B} . Per stabilire quale valore debba assumere il campo magnetico al fine di evitare che gli elettroni collidano con le pareti del solenoide, assumiamo come caso limite quello in cui il raggio massimo della traiettoria elettronica sia pari a quello del solenoide:

$$R_{max} = \frac{m_e v}{e B} = a. \quad (4)$$

Dalla (4) otteniamo, inserendo l'espressione del campo magnetico in funzione della corrente I :

$$I = \frac{m_e v}{\mu_0 e n a}. \quad (5)$$

Utilizzando nella (5) i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo infine che la minima corrente necessaria a contenere gli elettroni nel solenoide è pari ad $I = 0.9$ A.

S.5.20.

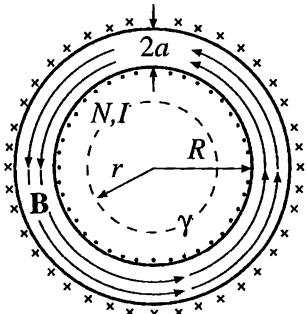
Data la struttura del solenoide toroidale, possiamo supporre che il campo magnetico abbia simmetria di rotazione attorno all'asse del solenoide stesso. Le linee di flusso del campo magnetico saranno allora descritte da circonferenze centrate sul tale asse. Nel seguito faremo riferimento alla figura a lato, in cui è mostrata una sezione della struttura. Si assumerà che la corrente nelle spire scorra verso il lettore nel lato interno del solenoide, mentre sul lato esterno scorra verso il piano del foglio. Ci aspetteremo, in virtù di quanto visto nei precedenti esercizi, che il campo \mathbf{B} sia diretto per la regola del cavatappi in verso antiorario. Detto \mathbf{u}_θ un versore tangente alle linee di flusso circolari e diretto in verso antiorario, possiamo allora porre $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$, essendo r la distanza dall'asse del toro. Scelta una linea chiusa circolare γ orientata anch'essa in verso antiorario, risulterà per la legge di Ampere:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} B(r) \mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{s} \mathbf{u}_\theta = \mu_0 i_c, \quad (1)$$

essendo i_c la corrente concatenata a γ . Risulterà:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}, \quad (2)$$

essendo r il raggio della linea γ . La corrente i_c concatenata da γ assume tre diversi andamenti in funzione del raggio r di γ : per $r < R$ avremo che $i_c = 0$, in quanto la linea non concatena alcuna corrente; per $R < r < (R + 2a)$ la corrente concatenata sarà $i_c = N I$, dove N è il numero di spire presenti nel solenoide. Si noti il segno positivo della corrente concatenata, ottenuto in base al verso di percorrenza scelto per γ . Infine per $r > (R + 2a)$ risulterà ancora $i_c = 0$, in quanto la linea γ concatenerà due volte ogni spira, con versi opposti di scorrimento della corrente. Sostituendo questi risultati nella



(2) possiamo calcolare l'andamento del campo magnetico generato dal solenoide, che sarà pari a:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mathbf{0} & r < R, \\ \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & R < r < (R + 2a), \\ \mathbf{0} & r > (R + 2a). \end{cases} \quad (3)$$

Si noti che, nel caso in cui si abbia $R \gg a$, nella zona interna del solenoide possiamo porre $r \approx R$; sostituendo questa relazione nella (3) otteniamo infine che nel solenoide $\mathbf{B} = \mu_0 N I / (2\pi R) \mathbf{u}_\theta = \mu_0 n I \mathbf{u}_\theta$, dove con n si è indicato il numero di spire per unità di lunghezza (grandezza univocamente definita nel solenoide curvo solo se $R \gg a$, altrimenti $n = n(r)$). Per quanto concerne il modulo del campo magnetico, questo risultato assume la stessa espressione ottenuta per il solenoide rettilineo indefinito.

S.5.21.

Al fine di esprimere in forma vettoriale il campo magnetico generato dai fili, introdurremo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali avente origine nel centro del quadrato ed i cui assi siano disposti lungo le sue diagonali.

I fili saranno numerati in senso orario da 1 a 4, come in figura. Si verifica facilmente che essi sono equidistanti dal centro del quadrato; la distanza che li separa dal centro è pari a $d = a\sqrt{2}/2$. In base alla legge di Biot-Savart, il modulo del campo magnetico generato dal filo k -simo nel centro è pari a:

$$B_k = \frac{\mu_0 i_k}{2\pi d} = \frac{\mu_0 i_k \sqrt{2}}{2\pi a}, \quad (1)$$

dove i_k è la corrente che scorre nel filo in questione. Sostituendo nella (1) i valori delle correnti che scorrono nei fili e tenendo conto della direzione e del verso corretti, otteniamo che il campo generato dal filo 1 sarà:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a} \mathbf{u}_x; \quad (2)$$

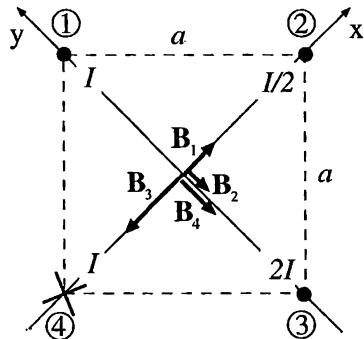
quello generato dal filo 2:

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi a} \mathbf{u}_y; \quad (3)$$

quello generato dal filo 3:

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi a} \mathbf{u}_x; \quad (4)$$

ed infine quello generato dal filo 4:



$$\mathbf{B}_4 = -\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a} \mathbf{u}_y. \quad (5)$$

Il campo complessivo, che per il principio di sovrapposizione è la somma dei campi generati dai quattro fili, sarà dato da:

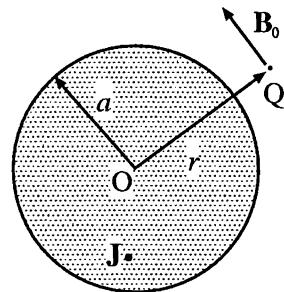
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4 = -\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a} \left[\mathbf{u}_x + \frac{3}{2} \mathbf{u}_y \right]. \quad (6)$$

S.5.22.

Si noti che la densità di corrente \mathbf{J} circolante nel cilindro prima e dopo la creazione della cavità è la stessa, possiamo pertanto risolvere il problema col principio di sovrapposizione: il campo magnetico \mathbf{B} generato dalla struttura è pari al campo \mathbf{B}_0 generato dal cilindro pieno di raggio a , sottratto del campo \mathbf{B}_c generato dal cilindro di raggio

$a/2$ che è stato enucleato dal conduttore per creare la cavità. Le figure illustrano l'andamento di questi campi in un generico punto Q . Chiameremo r la distanza dal centro O del conduttore pieno ed r' la distanza dal centro C della cavità. In base ai dati del problema, la densità di corrente che fluisce nel conduttore è pari a:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{u}_z, \quad (1)$$

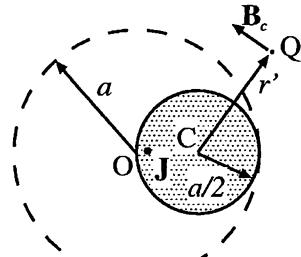


essendo \mathbf{u}_z un versore perpendicolare al piano del foglio, diretto verso il lettore. Applicando la legge di Ampere al conduttore pieno (per i dettagli sul calcolo del campo magnetico si veda ad esempio l'esercizio 17), si ottiene che il campo \mathbf{B}_0 da questo generato è pari a:

$$\mathbf{B}_0(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi r^2 J}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{u}_\theta & r < a, \\ \frac{\mu_0 \pi a^2 J}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & r \geq a, \end{cases} \quad (2)$$

dove $J = |\mathbf{J}|$ ed \mathbf{u}_θ è un versore tangente alle linee di flusso circolari di \mathbf{B}_0 centrate in O e diretto in verso antiorario. Applicando ancora la legge di Ampere al cilindro di raggio $a/2$ enucleato dal conduttore, otteniamo che il campo \mathbf{B}_c da questo generato è:

$$\mathbf{B}_c(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi r'^2 J}{2\pi r'} \mathbf{u}_{\theta'} = \frac{\mu_0 I r'}{2\pi a^2} \mathbf{u}_{\theta'} & r' < (a/2), \\ \frac{\mu_0 \pi (a/2)^2 J}{2\pi r'} \mathbf{u}_{\theta'} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'} \mathbf{u}_{\theta'} & r' \geq (a/2), \end{cases} \quad (3)$$



dove $\mathbf{u}_{\theta'}$ è un versore tangente alle linee di flusso circolari di \mathbf{B}_c centrate in C e diretto in verso antiorario, mentre $I' = I/4$ è la corrente complessiva che scorre in questo secondo

conduttore. Imponendo che $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_c$ e facendo uso dei versori degli assi x ed y mostrati in figura, otteniamo per il campo in O:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(O) &= \mathbf{B}_0(O) - \mathbf{B}_c(O) = \\ &= 0 - \left[-\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y;\end{aligned}\quad (4)$$

per il campo in C otterremo invece:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(C) &= \mathbf{B}_0(C) - \mathbf{B}_c(C) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y - 0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y;\end{aligned}\quad (5)$$

ed infine per il campo nel punto P, a distanza $l > a$ dal centro del sistema, otterremo:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(P) &= \mathbf{B}_0(P) - \mathbf{B}_c(P) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \mathbf{u}_y - \frac{\mu_0 I}{4\pi(2l-a)} \mathbf{u}_y = \frac{\mu_0 I(3l-2a)}{4\pi l(2l-a)} \mathbf{u}_y.\end{aligned}\quad (6)$$

Nota. Ponendo $l = a$, ovvero calcolando il campo nel punto P' sul bordo esterno della cavità, otterremo ancora

$$\mathbf{B}(P') = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y. \quad (7)$$

Confrontando le (4), (5) ed (7), si nota che il campo magnetico nei tre punti considerati assume lo stesso valore. Si può dimostrare, mediante l'uso della trigonometria, che in realtà il campo magnetico sul bordo ed all'interno della cavità è uniforme ed è proprio pari a

$$\mathbf{B}_{\text{cav}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y. \quad (8)$$

Si lascia al lettore il compito di dimostrare questa proprietà.

S.5.23.

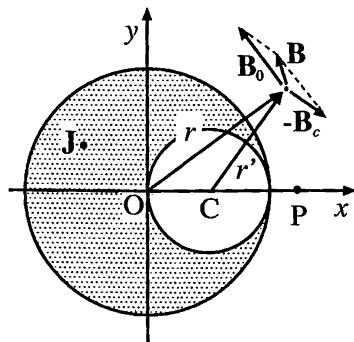
Per determinare la forza \mathbf{F} agente sul filo centrale, faremo uso della relazione:

$$\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B}; \quad (1)$$

essendo i la corrente che scorre nel filo sottoposto alla forza magnetica, \mathbf{B} il campo agente sul filo, \mathbf{l} un vettore che individua lunghezza e disposizione del filo ed il cui verso corrisponde al verso di scorrimento della corrente i . Nel caso specifico in esame, porremo:

$$\mathbf{F} = I_2 L \mathbf{u}_x \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3); \quad (2)$$

dove \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_3 sono rispettivamente i campi magnetici generati dal filo superiore e da quello inferiore nella posizione del filo centrale; I_2 è la corrente che scorre in tale filo ed



\mathbf{u}_x è il versore dell'asse x (mostrato in figura), che individua la direzione di scorrimento della corrente nel filo centrale. Nell'impiegare la relazione (1) si assume implicitamente che il campo magnetico complessivo agente sul filo sia uniforme; tale ipotesi è ragionevole fintanto che la distanza che separa i fili è molto piccola rispetto alla loro lunghezza, come del resto si può constatare dai dati assegnati dal problema. In tal caso infatti possiamo calcolare i campi magnetici mediante la legge di Biot-Savart, nonostante il fatto che i fili che li generano non siano indefiniti. In base ai versi delle correnti, il campo generato dal filo superiore nella posizione del filo centrale sarà:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \mathbf{u}_z, \quad (3)$$

essendo \mathbf{u}_z il versore perpendicolare al piano del foglio, diretto verso il lettore. Il campo magnetico generato dal filo inferiore risulterà:

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi b} \mathbf{u}_z = \frac{2\mu_0 I}{3\pi a} \mathbf{u}_z. \quad (4)$$

Sostituendo la (3) e la (4) nella (2) otterremo:

$$\mathbf{F} = 3I L \frac{7\mu_0 I}{6\pi a} \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z. \quad (5)$$

Si noti che $\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_y$, per cui la (5) diviene:

$$\mathbf{F} = -\frac{7\mu_0 I^2 L}{2\pi a} \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

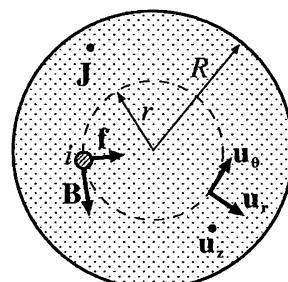
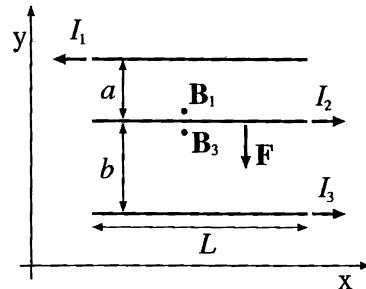
Sostituendo i valori numerici assegnati, si ottiene che il modulo della forza di interazione è $F = |\mathbf{F}| = 0.016$ N.

S.5.24.

Dato l'elevato numero di fili che compongono il cavo, è lecito assumere, ai fini del calcolo del campo magnetico, che il cavo sia un conduttore cilindrico massiccio in cui la densità di corrente \mathbf{J} sia distribuita uniformemente. Porremo, come mostrato in figura, che la corrente fluisca in direzione perpendicolare al piano del foglio, verso il lettore. La densità di corrente efficace nel cavo sarà data da:

$$J = \frac{100 i}{\pi R^2}, \quad (1)$$

essendo $J = |\mathbf{J}|$ ed R il raggio del cavo. Il calcolo del campo magnetico \mathbf{B} procederà mediante l'impiego della legge di Ampere; per i dettagli riguardanti il calcolo di \mathbf{B} si rimanda alla soluzione dell'esercizio 17. Riassumeremo qui il risultato di tale procedimento; il campo magnetico sarà pari a:



$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi r^2 J}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 100i r}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\theta & r < R, \\ \frac{\mu_0 \pi R^2 J}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 100i}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & r \geq R, \end{cases} \quad (2)$$

essendo r la distanza dall'asse del cavo a cui valutiamo il campo ed \mathbf{u}_θ un versore diretto in verso antiorario, tangente alle linee di flusso circolari di \mathbf{B} centrate sull'asse del cavo. Il campo magnetico alla distanza $r = R/2$ all'interno dal cavo sarà quindi pari a:

$$\mathbf{B}(R/2) = \frac{25\mu_0 i}{\pi R} \mathbf{u}_\theta. \quad (3)$$

La forza per unità di lunghezza \mathbf{f} agente sul filo a distanza $R/2$ dall'asse sarà dunque pari a:

$$\mathbf{f} = i \mathbf{u}_z \times \mathbf{B}(R/2) = \frac{25\mu_0 i^2}{\pi R} \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\theta, \quad (4)$$

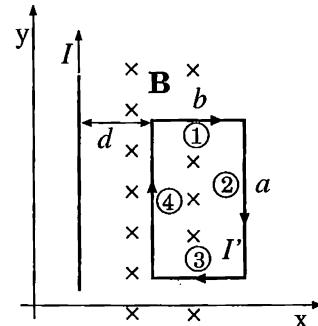
essendo \mathbf{u}_z un versore perpendicolare al piano del foglio, diretto come la corrente (cioè verso il lettore). Si noti che $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\theta = -\mathbf{u}_r$, dove per \mathbf{u}_r si intende un versore giacente nel piano del foglio e diretto radialmente rispetto all'asse del cavo con verso uscente da questo (come in figura). Pertanto

$$\mathbf{f} = -\frac{25\mu_0 i^2}{\pi R} \mathbf{u}_r. \quad (5)$$

A causa delle forze magnetiche, il filo risulta attratto verso il centro del cavo. Sostituendo nella precedente relazione i valori numerici assegnati, otteniamo che $|\mathbf{f}| = 0.008$ N.

S.5.25.

Supponiamo che il filo e la spira giacciono nel piano del foglio; introduciamo un sistema di coordinate cartesiane i cui assi x ed y giacciono nello stesso piano, mentre l'asse z sia perpendicolare al foglio e diretto verso il lettore. Sia la corrente I nel filo diretta come l'asse y , mentre supporremo che la corrente I' nella spira circoli in verso orario, come in figura. Secondo la legge di Biot-Savart il campo magnetico generato dal filo nella posizione occupata dalla spira sarà espresso dalla relazione:



$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{u}_z. \quad (1)$$

Possiamo calcolare la forza complessiva agente sulla spira come somma delle forze agenti sui suoi lati. Per determinare la forza \mathbf{F}_i agente sul lato i -esimo, utilizzeremo la relazione:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int I' d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

essendo $\mathbf{d}\mathbf{l}$ un vettore che individua lunghezza e disposizione di un elementino infinitesimo del lato della spira ed il cui verso corrisponde al verso di scorimento della corrente. Numerando i lati da 1 a 4 in verso orario, avremo:

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\text{lato } 1} \mathbf{dF} = \int_{\text{lato } 1} I' dx \mathbf{u}_x \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

che diviene, con l'aiuto della (1):

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\text{lato } 1} I' dx \mathbf{u}_x \times \left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{u}_z \right], \quad (4)$$

da cui, tenuto conto che $\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_y$:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I' I \mathbf{u}_y}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{dx}{x}. \quad (5)$$

Svolgendo l'integrale nella (5) otteniamo poi:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

Passando al lato 2, avremo:

$$\mathbf{F}_2 = \int_{\text{lato } 2} \mathbf{dF} = \int_{\text{lato } 2} -I' dy \mathbf{u}_y \times \mathbf{B}, \quad (7)$$

da cui otteniamo:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi} \int_{\text{lato } 2} \frac{dy}{x} \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z. \quad (8)$$

Tenuto conto che $\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x$ e che lungo il lato 2 risulta $x = (d+b)$, possiamo riscrivere la forza come:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi(d+b)} \mathbf{u}_x \int_0^a dy = \frac{\mu_0 I' I a}{2\pi(d+b)} \mathbf{u}_x. \quad (9)$$

La forza agente sul lato 3, opposto al lato 1, sarà data dalla:

$$\mathbf{F}_3 = \int_{\text{lato } 3} \mathbf{dF} = \int_{\text{lato } 3} -I' dx \mathbf{u}_x \times \mathbf{B}; \quad (10)$$

confrontando la (10) con l'espressione (3) si nota che la forza risultante è l'opposto di quella agente sul lato 1, per cui possiamo scrivere direttamente:

$$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_0 I' I}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \mathbf{u}_y. \quad (11)$$

Infine la forza agente sul quarto lato sarà:

$$\mathbf{F}_4 = \int_{\text{lato } 4} \mathbf{dF} = \int_{\text{lato } 4} I' dy \mathbf{u}_y \times \mathbf{B}, \quad (12)$$

da cui otteniamo:

$$\mathbf{F}_4 = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi} \int_{\text{lato } 4} -\frac{dy}{x} \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z. \quad (13)$$

Poiché lungo il lato 4 si ha $x = d$, possiamo riscrivere la forza come:

$$\mathbf{F}_4 = -\frac{\mu_0 I' I}{2\pi d} \mathbf{u}_x \int_0^a dy = -\frac{\mu_0 I' I a}{2\pi d} \mathbf{u}_x. \quad (14)$$

Sommendo le (6), (9), (11) e (14), si giunge ad ottenere la forza complessiva \mathbf{F} agente sulla spira:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4, \quad (15)$$

da cui:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I' I a}{2\pi} \left[\frac{1}{d+b} - \frac{1}{d} \right] \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_0 I' I a b}{2\pi d(d+b)} \mathbf{u}_x. \quad (16)$$

Sostituendo nella (16) i valori assegnati dal problema, risulta che il modulo della forza è pari a $|\mathbf{F}| = 10^{-4}$ N. Si noti che la forza è attrattiva; per ottenere una forza repulsiva dobbiamo invertire il verso di scorrimento della corrente nella spira, rendendolo antiorario.

S.5.26.

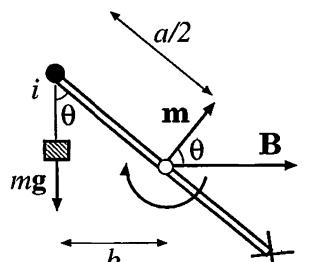
La figura mostra la spira di lato; l'asse di rotazione è perpendicolare al piano del foglio; la corrente sul lato superiore della spira scorre verso il lettore, mentre ha verso opposto sul lato inferiore. Il momento meccanico \mathfrak{M} agente sulla spira è dato dalla relazione:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

essendo \mathbf{m} il momento di dipolo magnetico della spira. Per il principio di equivalenza di Ampere, si ha:

$$\mathbf{m} = i a^2 \mathbf{n}, \quad (2)$$

dove la normale alla spira \mathbf{n} è un versore perpendicolare al piano in cui la spira giace ed il cui verso coincide con quello di avanzamento di una vite destroversa che ruoti nel verso di scorrimento della corrente nella spira. Riferendoci alla figura, il momento \mathfrak{M} impone alla spira una rotazione in verso orario, in quanto è diretto perpendicolarmente al piano del foglio in verso entrante. Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene:



$$|\mathfrak{M}| = Ba^2 i \sin \theta \quad (3)$$

essendo θ l'angolo che \mathbf{B} forma con \mathbf{m} . Per poter sollevare la massa legata all'estremo della spira, è necessario che il momento meccanico indotto dalle forze magnetiche sia pari o superiore al momento meccanico esercitato sul sistema dalla forza peso; si noti che la forza gravitazionale agente sulla massa impone al sistema un verso di rotazione antiorario. Detto \mathfrak{M}_p il momento esercitato dalla forza peso, si ha:

$$|\mathfrak{M}_p| = mgb, \quad (4)$$

dove b è il braccio della forza peso rispetto all'asse di rotazione della spira. Si noti che $b = (a/2) \sin \theta$, per cui imponendo

$$|\mathfrak{M}_p| \leq |\mathfrak{M}|, \quad (5)$$

otteniamo dalla (3):

$$\frac{mga}{2} \sin \theta \leq Ba^2 i \sin \theta, \quad (6)$$

da cui

$$m \leq \frac{2iBa}{g}. \quad (7)$$

Sostituendo nella (7) i valori numerici assegnati dal problema, si ottiene $m \leq 0.10$ kg.

S.5.27.

La spira a forma di L può essere pensata come l'insieme di due spire piane separate con un lato in comune, anche se tale lato è fisicamente mancante; infatti le correnti delle due spire che scorrono lungo questo lato (coincidente con l'asse di rotazione) sono tra loro opposte e dunque la loro somma è nulla. Riferendoci alla figura, introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui gli assi x e z sono diretti lungo i lati della L, mentre l'asse y coinciderà con l'asse di rotazione del sistema. Per la spira giacente sul piano zy introdurremo una normale $\mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_x$, mentre per la spira sul piano xy introdurremo la normale $\mathbf{n}_2 = \mathbf{u}_z$. Le due normali sono state scelte mediante la regola del cavatappi sulla base del verso di scorrimento delle correnti lungo le due spire. Il momento magnetico complessivo \mathbf{m} della spira ad L è la somma dei momenti magnetici \mathbf{m}_1 ed \mathbf{m}_2 delle due spire piane, che scriveremo in base al principio di equivalenza di Ampere:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = a^2 i \mathbf{n}_1 + a^2 i \mathbf{n}_2, \quad (1)$$

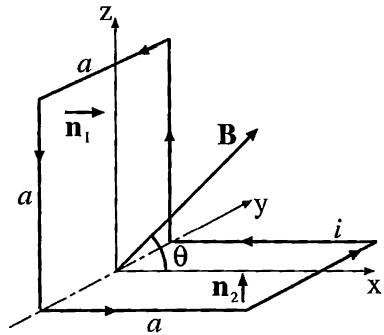
da cui otteniamo:

$$\mathbf{m} = a^2 i [\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z]. \quad (2)$$

Il momento meccanico \mathfrak{M} agente sulla spira sarà allora pari a:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

essendo il campo magnetico dato dall'espressione



$$\mathbf{B} = B[\cos \theta \mathbf{u}_x + \sin \theta \mathbf{u}_z], \quad (4)$$

dove θ è l'angolo che \mathbf{B} forma con l'asse x e B è il suo modulo. Sostituendo la (4) e la (2) nella (3) si ottiene:

$$\mathfrak{M} = a^2 i B [\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z] \times [\cos \theta \mathbf{u}_x + \sin \theta \mathbf{u}_z]; \quad (5)$$

tenendo conto che $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y$ e che $\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_y$, possiamo riscrivere la precedente relazione nella forma:

$$\mathfrak{M} = a^2 i B (\cos \theta - \sin \theta) \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

Il modulo del momento meccanico è massimo quando è massima la funzione $|\cos \theta - \sin \theta|$. Si può verificare facilmente che ciò accade per $\theta_1 = -\pi/4$ e per $\theta_2 = 3\pi/4$.

S.5.28.

Essendo la carica Q distribuita sulla superficie sferica in modo uniforme, la densità superficiale di carica sarà

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (1)$$

Divideremo la superficie sferica in sottili strisce lungo i paralleli, la cui posizione rispetto all'equatore sarà individuata da un angolo θ ; chiameremo inoltre $d\theta$ l'angolo infinitesimo che sottende una di queste strisce. Ciascuna di queste strisce, una volta in moto, è equivalente ad una spira percorsa da corrente; il momento magnetico complessivo sarà la somma dei momenti magnetici di tutte le spire equivalenti che compongono la sfera. Detta dq la carica infinitesima presente su una di queste spire, potremo porre:

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r Rd\theta, \quad (2)$$

essendo r il raggio della striscia circolare, $Rd\theta$ il suo spessore e dA l'area della striscia. Si noti che $r = R \cos \theta$. La corrente equivalente dI che scorre in una delle strisce è data da:

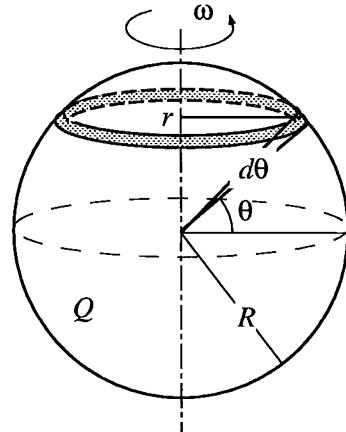
$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi}, \quad (3)$$

essendo T il periodo di rotazione ed ω la velocità angolare della sfera. Sostituendo nella (3) la (2) e l'espressione per r , otteniamo:

$$dI = \frac{Q\omega \cos \theta d\theta}{4\pi}. \quad (4)$$

Il momento magnetico associato alla spira equivalente è pari a:

$$\mathbf{dm} = \pi r^2 di \mathbf{u}_z = \frac{Q\omega R^2 \cos^3 \theta d\theta}{4} \mathbf{u}_z, \quad (5)$$



dove \mathbf{u}_z è un versore diretto come l'asse di rotazione ed il cui verso coincida con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nello stesso verso della sfera. Il momento magnetico complessivo \mathbf{m} sarà pari a:

$$\mathbf{m} = \int_{\text{sfera}} d\mathbf{m} = 2 \frac{Q\omega R^2}{4} \mathbf{u}_z \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta. \quad (6)$$

Si noti che $\cos \theta \, d\theta = d[\sin \theta]$ e che $\cos^2 \theta = [1 - \sin^2 \theta]$; pertanto con la sostituzione $x = \sin \theta$, possiamo riesprimere la (6) nella forma:

$$\mathbf{m} = \frac{Q\omega R^2}{2} \mathbf{u}_z \int_0^1 (1 - x^2) \, dx, \quad (7)$$

da cui

$$\mathbf{m} = \frac{Q\omega R^2}{3} \mathbf{u}_z. \quad (8)$$

Capitolo 6

Magnetostatica nella materia

6.1 Problemi

P.6.1.

Si calcoli il momento di dipolo magnetico associato ad un atomo neutro monoelettronico in cui l'elettrone descriva un'orbita circolare di raggio pari al raggio di Bohr a_0 . Assumendo che un certo materiale sia composto da tale specie atomica, con una densità per unità di volume n , si calcoli la magnetizzazione al suo interno nell'ipotesi che tutti i momenti magnetici atomici siano allineati. Si trascuri nel calcolo il momento di spin elettronico. [$a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m, massa elettronica $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $n = 2 \times 10^{24}$ atomi/cm³]

P.6.2.

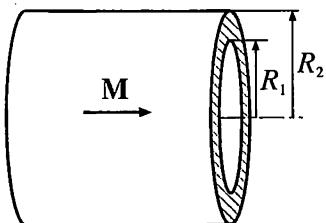
Si consideri un atomo monoelettronico. Si confronti il momento di dipolo magnetico dell'atomo imperturbato con quello che l'atomo acquisisce in presenza di un campo di induzione magnetica \mathbf{B} costante e perpendicolare al piano dell'orbita. Si supponga che l'elettrone descriva un'orbita circolare di raggio pari al raggio di Bohr a_0 sia in assenza che in presenza del campo \mathbf{B} . [$a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m, $|\mathbf{B}| = 0.3$ T]

P.6.3.

Si descriva il moto di un elettrone orbitante attorno ad un nucleo atomico, in presenza di un campo di induzione magnetica \mathbf{B} costante e di direzione generica. Si trascuri il momento di spin dell'elettrone.

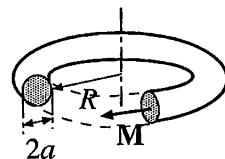
P.6.4.

Sia assegnato un magnete indefinito a forma di guscio cilindrico di raggio interno R_1 ed esterno R_2 , con magnetizzazione \mathbf{M} uniforme nel magnete e diretta secondo l'asse del cilindro. Si ricavino il campo magnetico \mathbf{H} ed il campo di induzione magnetica \mathbf{B} generati dal magnete in tutto lo spazio.

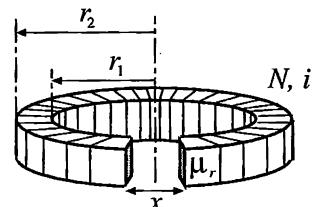


P.6.5.

Si consideri un toro di raggio medio R e raggio interno a formato da materiale magnetizzato con magnetizzazione M uniforme sulla sua sezione e diretta tangenzialmente (vedi figura). Si determini l'andamento dei campi B e H nel materiale. Si ricavi inoltre il valore di tali campi in presenza di un sottile taglio trasversale di spessore d .

**P.6.6.**

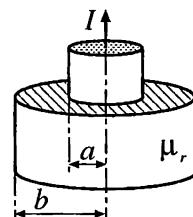
Si consideri un solenoide avvolto su un anello di sezione quadrata di raggi interno r_1 ed esterno r_2 costituito da materiale di permeabilità magnetica relativa μ_r . L'avvolgimento è formato da N spire percorse da corrente i e si interrompe per un tratto di lunghezza $x \ll r_1$, in cui è stato praticato un taglio nell'anello. Determinare il campo B in funzione della distanza dal centro dell'anello.

**P.6.7.**

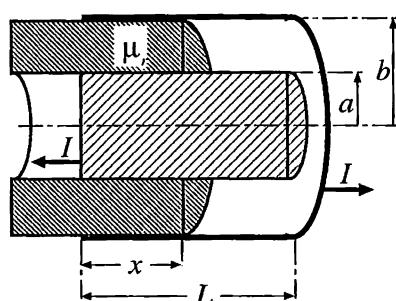
Si consideri il solenoide del problema precedente. Si calcoli l'energia magnetica immagazzinata nella regione in cui il solenoide è interrotto e l'energia immagazzinata nel resto dell'anello magnetizzato.

P.6.8.

Un filo cilindrico conduttore indefinito di raggio a , percorso da corrente I uniformemente distribuita sulla sua sezione, è circondato da una guaina cilindrica di materiale magnetico di permeabilità μ_r e raggio esterno b . Calcolare il campo magnetico H in tutti i punti dello spazio e la densità di corrente superficiale di magnetizzazione che scorre sulle superfici della guaina.

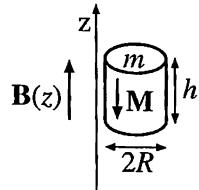
**P.6.9.**

Si consideri un cavo coassiale costituito da un nucleo cilindrico conduttore di raggio a e da una maglia metallica di spessore trascurabile e raggio b , entrambi percorsi da correnti di intensità I dotate di versi opposti. Lo spazio tra nucleo e maglia è parzialmente riempito da un materiale di permeabilità magnetica μ_r . Sia L la lunghezza del cavo. Trascurando gli effetti di bordo, calcolare la forza con cui il materiale è risucchiato quando è inserito nel cavo per un tratto di lunghezza x .

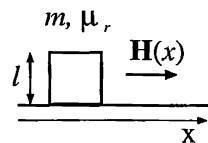


P.6.10.

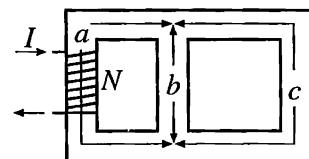
Si consideri un magnete permanente di massa m e forma cilindrica (raggio di base R ed altezza h), libero di scorrere lungo delle guide verticali e dotato al suo interno di una magnetizzazione M diretta verso il basso. Il magnete è sottoposto ad un campo di induzione magnetica \mathbf{B} diretto verso l'alto, il cui modulo varia con la quota z secondo la legge $B(z) = a/(b + z)$. Si calcoli a quale quota la forza magnetica e la forza peso si bilanciano; si assuma, ai fini del calcolo, che il magnete sia di piccole dimensioni.

**P.6.11.**

Si consideri un cubetto di materiale diamagnetico con permeabilità relativa μ_r , avente massa m e spigolo di lunghezza l , libero di scorrere su un piano orizzontale. Il cubetto è sottoposto ad un campo magnetico \mathbf{H} diretto orizzontalmente, il cui modulo varia con la posizione x secondo la legge $H(x) = k/(x + 1)$. Si calcoli la forza agente sul cubetto; si assuma, ai fini del calcolo, che il cubetto sia di piccole dimensioni e che il campo \mathbf{H} non vari passando dall'aria al materiale. Si determini inoltre la velocità che il cubetto raggiunge in $x = L$, partendo da fermo nella posizione $x = 0$.

**P.6.12.**

Sia assegnato il circuito magnetico mostrato in figura, il cui nucleo ha permeabilità magnetica relativa $\mu_r \gg 1$ e sezione costante; le sue parti hanno rispettivamente lunghezze a , b e c . Sul lato di lunghezza a vi è un avvolgimento di N spire, in cui scorre una corrente I col verso indicato in figura. Si determini il campo magnetico \mathbf{H} presente nei tre rami del circuito; si trascuri il flusso disperso del campo.



6.2 Soluzioni

S.6.1.

La forza elettrica agente sull'elettrone è data da:

$$\mathbf{F}_e = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \mathbf{u}_r, \quad (1)$$

con $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C carica elementare, a_0 raggio dell'orbita circolare descritta dall'elettrone ed \mathbf{u}_r versore radiale diretto dal nucleo atomico verso l'esterno. La forza è di tipo centrale e possiamo dunque assimilarla ad una forza centripeta, secondo la relazione:

$$\mathbf{F}_e = -m_e \frac{v^2}{a_0} \mathbf{u}_r, \quad (2)$$

con m_e massa elettronica e v modulo della velocità. Avendo ipotizzato un'orbita circolare, il moto risulta di tipo uniforme e dunque v è costante. Usando le (1) e (2), otteniamo che

$$v = \sqrt{\frac{a_0 F_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0}}. \quad (3)$$

Il periodo di rivoluzione T dell'elettrone attorno al nucleo è quindi dato da:

$$T = \frac{2\pi a_0}{v} = \sqrt{\frac{16\pi^3 \epsilon_0 m_e a_0^3}{e^2}}. \quad (4)$$

L'orbita elettronica è associabile, dal punto di vista magnetico, ad una spira circolare attraversata da una corrente i pari a:

$$i = \frac{e}{T} = \sqrt{\frac{e^4}{16\pi^3 \epsilon_0 m_e a_0^3}}. \quad (5)$$

Per il teorema di equivalenza di Ampere il momento magnetico della spira elettronica è pari a:

$$\mathbf{m} = A i \mathbf{n}, \quad (6)$$

con $A = \pi a_0^2$ area racchiusa dall'orbita ed \mathbf{n} normale al piano orbitale, scelta in base alla regola del cavatappi (si ricordi che il verso della corrente i è opposto a quello di moto dell'elettrone). Sostituendo la (5) nella (6) si ha poi:

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \sqrt{\frac{a_0 e^4}{16\pi\epsilon_0 m_e}}. \quad (7)$$

Sostituendo i valori assegnati dal problema, otteniamo $|\mathbf{m}| = \mu_B = 9.2 \times 10^{-24}$ A m². Tale quantità è anche detta magnetone di Bohr. Si noti che nella teoria dell'atomo di Bohr i raggi delle orbite elettroniche sono quantizzati, per cui sono quantizzati anche i momenti magnetici atomici; il magnetone di Bohr rappresenta il quanto di momento magnetico orbitale. Per calcolare la magnetizzazione \mathbf{M} all'interno del materiale nel caso in cui tutti

i momenti magnetici siano allineati, è sufficiente moltiplicare \mathbf{m} per il numero di atomi per unità di volume n . Otterremo pertanto:

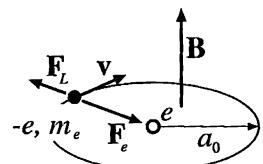
$$\mathbf{M} = nm, \quad (8)$$

da cui, sostituendo i valori numerici, si ricava $|\mathbf{M}| = 1.84 \times 10^7 \text{ A/m}$.

Nota. Normalmente il completo allineamento dei dipoli magnetici (condizione di saturazione) può essere raggiunto nei materiali ferromagnetici mediante un campo magnetico esterno, ma è molto difficile da conseguire nei materiali paramagnetici, in cui l'agitazione termica contrasta efficacemente l'allineamento imposto dal campo inducente; difatti in questi materiali la magnetizzazione raggiunge, in condizioni ordinarie, valori inferiori di alcuni ordini di grandezza rispetto al valore di saturazione.

S.6.2.

Applicando il principio di equivalenza di Ampere, come visto nell'esercizio precedente, il momento magnetico per l'atomo imperturbato è pari a:



$$|\mathbf{m}_0| = \sqrt{\frac{a_0 e^4}{16\pi\epsilon_0 m_e}} = \mu_B, \quad (1)$$

dove $\mu_B = 9.2 \times 10^{-24} \text{ A m}^2$ è il magnetone di Bohr. Applicando il campo di induzione magnetica, l'elettrone sarà sottoposto alla forza di Lorentz \mathbf{F}_L , che si sommerà vettorialmente alla forza \mathbf{F}_e di attrazione coulombiana col nucleo. Entrambe saranno dirette radialmente; nell'ipotesi che l'elettrone orbiti in verso orario (vedi figura), la forza di Lorentz $\mathbf{F}_L = -ev \times \mathbf{B}$ risulta diretta verso l'esterno. Assumendo il raggio dell'orbita pari ad a_0 , imponiamo che la forza risultante funga da forza centripeta secondo la relazione:

$$|\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_e| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} - evB = m_e \frac{v^2}{a_0}. \quad (2)$$

Risolvendo la (2) rispetto a v , otteniamo che la velocità di rivoluzione elettronica attorno al nucleo è pari a:

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0} + \frac{e^2 B^2 a_0^2}{4m_e^2}} - \frac{eBa_0}{2m_e}. \quad (3)$$

Il momento magnetico della spira elettronica sarà allora dato da:

$$|\mathbf{m}| = \pi a_0^2 i = \pi a_0^2 \frac{e}{T}, \quad (4)$$

essendo $T = 2\pi a_0/v$ il periodo di rivoluzione elettronico. Sostituendo il valore di v ottenuto nella (3), giungiamo alla relazione:

$$|\mathbf{m}| = \frac{a_0 ev}{2} = \frac{a_0 e}{2} \left[\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0} + \frac{e^2 B^2 a_0^2}{4m_e^2}} - \frac{eBa_0}{2m_e} \right]. \quad (5)$$

Tenuto conto della diseguaglianza

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0} \gg \frac{e^2 B^2 a_0^2}{4m_e} \quad (6)$$

che vale sicuramente nel caso del campo di induzione magnetica in considerazione, otteniamo che la variazione di momento magnetico vale:

$$\Delta m = |\mathbf{m}| - |\mathbf{m}_0| = -\frac{e^2 a_0^2}{4m_e} B. \quad (7)$$

Si verifica facilmente che la relazione vettoriale per \mathbf{m} è:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 - \frac{e^2 a_0^2}{4m_e} \mathbf{B}, \quad (8)$$

per cui la variazione di momento magnetico è sempre opposta al campo magnetico induttore tale variazione. Sostituendo i valori numerici, otteniamo che tale variazione è $\Delta m = -5.9 \times 10^{-30} \text{ A m}^2$, dunque ben 6 ordini di grandezza più piccola rispetto al valore intrinseco di momento magnetico posseduto dall'atomo.

Nota. Il meccanismo qui descritto è alla base dei fenomeni magnetici nei materiali diamagnetici, ovvero in quei materiali in cui il momento magnetico intrinseco dell'atomo è nullo per compensazione interna tra le varie spire elettroniche che lo compongono. In presenza di un campo di induzione magnetica esterno, l'atomo assume un momento magnetico indotto

$$\mathbf{m}_i = -\frac{e^2 a_0^2}{4m_e} \mathbf{B}, \quad (9)$$

e di conseguenza compare una magnetizzazione indotta

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}_i = -n \frac{e^2 a_0^2}{4m_e} \mathbf{B}, \quad (10)$$

essendo n il numero di elettroni per unità di volume nel materiale. Se assumiamo, come nel precedente esercizio, una densità $n = 2 \times 10^{24} \text{ atomi/cm}^3$, otteniamo una magnetizzazione pari a 11.8 A/m .

S.6.3.

Nella trattazione che segue si trascureranno le perdite di energia subite dall'elettrone orbitante a causa dell'irraggiamento elettromagnetico; si vedano in proposito le note al primo esercizio del capitolo precedente. Considereremo d'ora in poi un atomo monoelettronico neutro. In assenza di campo magnetico esterno l'elettrone si muove sotto l'azione della forza elettrica, che esprimeremo come:

$$\mathbf{F}_e = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (1)$$

essendo $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ la carica elementare, r la distanza tra nucleo atomico ed elettrone ed \mathbf{u}_r un versore radiale diretto dal nucleo verso l'esterno. Si noti il carattere di centralità di tale forza, che comporta la conservazione del momento angolare orbitale $\mathbf{L}_{(O)} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}$ dell'elettrone calcolato rispetto al punto O in cui è posto il nucleo. Poiché il moto elettronico è assimilabile al fluire di una corrente in una spira, possiamo attribuire

all'atomo un momento di dipolo magnetico, che per il principio di equivalenza di Ampere è pari a:

$$\mathbf{m} = A i \mathbf{n}, \quad (2)$$

essendo A l'area racchiusa dall'orbita, $i = e/T$ la corrente equivalente che scorre nella spira, T il periodo dell'orbita ed \mathbf{n} la normale al piano dell'orbita con verso scelto in base alla regola del cavatappi. Si noti che, a causa della carica negativa dell'elettrone, la corrente fluisce in verso opposto a quello di moto della carica. Si rammenta che, svolgendosi il moto in presenza di una forza centrale, l'area racchiusa dall'orbita è pari a:

$$A = \frac{|\mathbf{L}_{(O)}|T}{2m_e}, \quad (3)$$

con m_e massa elettronica. Sostituendo la (3) nella (2) e notando che $\mathbf{L}_{(O)}$ ed \mathbf{m} sono entrambi perpendicolari al piano dell'orbita ma hanno versi opposti, otteniamo infine:

$$\mathbf{m} = -\frac{e\mathbf{L}_{(O)}}{2m_e}. \quad (4)$$

Applichiamo ora all'atomo il campo di induzione magnetica $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$, essendo \mathbf{u}_z il versore dell'asse z , diretto come il campo. La spira elettronica sarà sottoposta al momento meccanico \mathfrak{M} , dato dalla relazione:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \frac{e\mathbf{L}_{(O)}}{2m_e}, \quad (5)$$

dove si è fatto uso della (4) e della anticommutatività del prodotto vettore; l'impiego della (4), a rigore valido solo in presenza di forze centrali, può ritenersi ancora giustificabile poiché la forza magnetica agente sull'elettrone è di gran lunga meno intensa di quella elettrica. Ricordiamo qui la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} = \mathfrak{M}, \quad (6)$$

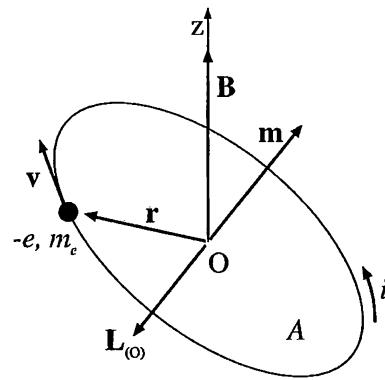
che applicata alla (5) dà la relazione:

$$\frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} = \mathbf{B} \times \frac{e\mathbf{L}_{(O)}}{2m_e}. \quad (7)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri della (7) per \mathbf{u}_z , otteniamo:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = 0, \quad (8)$$

essendo L_z la componente di $\mathbf{L}_{(O)}$ lungo l'asse z . Si noti che il secondo membro della (7) è perpendicolare a \mathbf{B} e dunque il prodotto scalare per \mathbf{u}_z è nullo. La (8) comporta dunque che



$$L_z = \text{costante}. \quad (9)$$

Si noti altresì che

$$\frac{d|\mathbf{L}_{(O)}|^2}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{L}_{(O)} \cdot \mathbf{L}_{(O)}] = 2\mathbf{L}_{(O)} \cdot \frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt}; \quad (10)$$

sostituendo nella precedente relazione la (7) otteniamo poi:

$$\frac{d|\mathbf{L}_{(O)}|^2}{dt} = 2\mathbf{L}_{(O)} \cdot \left[\mathbf{B} \times \frac{e\mathbf{L}_{(O)}}{2m_e} \right]. \quad (11)$$

Tuttavia il secondo membro della (11) è nullo, poiché $\mathbf{L}_{(O)}$ è perpendicolare al vettore $\mathbf{B} \times \mathbf{L}_{(O)}$; pertanto possiamo porre

$$|\mathbf{L}_{(O)}| = \text{costante}. \quad (12)$$

Le equazioni (9) e (12) sono già sufficienti a stabilire il tipo di moto descritto dall'elettrone: il vettore $\mathbf{L}_{(O)}$ si mantiene costante in modulo pur cambiando direzione, mentre la sua proiezione lungo l'asse z rimane costante. Possiamo concludere che $\mathbf{L}_{(O)}$ descrive una superficie conica avente l'asse z per asse di rotazione; questo tipo di moto prende il nome di precessione. Il piano dell'orbita, sempre perpendicolare al vettore momento angolare, segue l'andamento di $\mathbf{L}_{(O)}$ durante il moto di precessione. Poiché per la (4) i vettori $\mathbf{L}_{(O)}$ ed \mathbf{m} sono proporzionali, anche il vettore momento magnetico descriverà una superficie conica (vedi figura). Rimane da stabilire in che modo i vettori $\mathbf{L}_{(O)}$ ed \mathbf{m} si muovono lungo tali superfici coniche. Possiamo in proposito riscrivere la (7) nella forma:

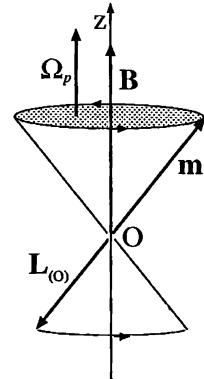
$$\frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} = \Omega_p \times \mathbf{L}_{(O)}, \quad (13)$$

con

$$\Omega_p = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}. \quad (14)$$

Si noti che il vettore Ω_p ha le dimensioni di una velocità angolare. Difatti l'equazione (13) ha la stessa struttura dell'equazione che descrive il moto circolare uniforme di un oggetto puntiforme, pur di sostituire ad $\mathbf{L}_{(O)}$ il vettore posizione che individua l'oggetto in moto. Pertanto il vettore $\mathbf{L}_{(O)}$ (e dunque anche \mathbf{m}) si muove lungo la superficie conica con velocità angolare costante $\Omega_p = eB/(2m_e)$. Il moto qui descritto (precessione dell'orbita elettronica in un campo magnetico esterno) è noto come precessione di Larmor.

Nota. Nell'esercizio precedente si è discusso della variazione di momento magnetico $\Delta\mathbf{m}$ della spira elettronica quando ad essa viene applicato un campo di induzione magnetica \mathbf{B} perpendicolare al piano dell'orbita; il fenomeno della precessione di Larmor rappresenta la generalizzazione di tale meccanismo nel caso in cui i vari dipoli atomici siano orientati in modo casuale rispetto al campo magnetico esterno. Il fenomeno assume particolare importanza nei materiali diamagnetici; si può in questo caso dimostrare che il

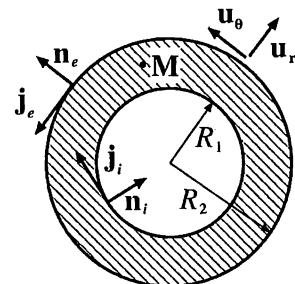


momento magnetico efficace indotto negli atomi, mediato su tutte le possibili direzioni di orientamento delle orbite elettroniche, è pari a:

$$\mathbf{m}_i = -\frac{e^2 a_0^2}{6m_e} \mathbf{B}. \quad (15)$$

S.6.4.

Faremo riferimento alla figura a lato, in cui il magnete è mostrato in sezione. Assumeremo che la magnetizzazione sia scrivibile come $\mathbf{M} = M \mathbf{u}_z$, essendo \mathbf{u}_z un versore parallelo all'asse del magnete, diretto verso il lettore. Introduciamo inoltre un versore radiale \mathbf{u}_r , diretto verso l'esterno, ed un versore \mathbf{u}_θ tangente alla superficie cilindrica e diretto in verso antiorario. Essendo la magnetizzazione uniforme, la densità di corrente di magnetizzazione \mathbf{J}_m all'interno del materiale è nulla, in quanto



$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{J}_m = 0. \quad (1)$$

La densità di corrente superficiale di magnetizzazione \mathbf{j}_{sm} è invece data dalla relazione:

$$\mathbf{j}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (2)$$

essendo \mathbf{n} un versore normale uscente dalla superficie su cui valutiamo la corrente in questione. Riferendoci alla figura, possiamo notare che sulla superficie esterna scorrerà una densità di corrente superficiale \mathbf{j}_e pari a :

$$\mathbf{j}_e = M \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_r = M \mathbf{u}_\theta, \quad (3)$$

mentre sulla superficie interna la densità di corrente superficiale \mathbf{j}_i sarà pari a:

$$\mathbf{j}_i = -M \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_r = -M \mathbf{u}_\theta. \quad (4)$$

Si ricorda che la densità di corrente superficiale ha le dimensioni di una corrente su di una lunghezza; in altre parole la corrente che, ad esempio, scorre su un tratto di lunghezza l del magnete dal lato esterno, è pari ad $i_e = |\mathbf{j}_e|l = Ml$.

Ai fini del calcolo dei campi \mathbf{B} ed \mathbf{H} , osserviamo che il magnete è equivalente a due solenoidi, rispettivamente di raggi R_1 ed R_2 , coassiali e percorsi da correnti opposte. Si rammenta che il campo \mathbf{B} prodotto da un solenoide di raggio a , su cui siano avvolte n spire per unità di lunghezza percorse da corrente i , vale:

$$|\mathbf{B}(r)| = \begin{cases} \mu_0 j_s & r < a, \\ 0 & r \geq a, \end{cases} \quad (5)$$

con r distanza dall'asse del solenoide. Si noti che la quantità $j_s = n i$ altro non è che la quantità di corrente che scorre su un tratto di solenoide di lunghezza unitaria; pertanto si tratta di una densità di corrente superficiale. Per analogia con il caso del solenoide,

possiamo allora dire che la corrente superficiale sul lato esterno del magnete genera un campo di induzione magnetica \mathbf{B}_e pari a:

$$\mathbf{B}_e(r) = \begin{cases} \mu_0 j_e \mathbf{u}_z & r < R_2, \\ \mathbf{0} & r \geq R_2; \end{cases} \quad (6)$$

mentre la corrente superficiale interna, che circola in verso opposto, genera un campo di induzione magnetica \mathbf{B}_i pari a:

$$\mathbf{B}_i(r) = \begin{cases} -\mu_0 j_i \mathbf{u}_z & r < R_1, \\ \mathbf{0} & r \geq R_1. \end{cases} \quad (7)$$

Poiché per il principio di sovrapposizione il campo complessivo è pari a $\mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_e$ e dato che $j_i = j_e = M$, otteniamo:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mathbf{0} & r < R_1, \\ \mu_0 M \mathbf{u}_z = \mu_0 \mathbf{M} & R_1 \leq r < R_2, \\ \mathbf{0} & r \geq R_2. \end{cases} \quad (8)$$

Per quanto concerne il campo magnetico \mathbf{H} , ricordiamo che, per definizione, risulta:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (9)$$

Impiegando la (9) nella (8), risulta evidente che il campo \mathbf{H} è nullo ovunque (ovviamente la magnetizzazione è nulla al di fuori del materiale che costituisce il magnete).

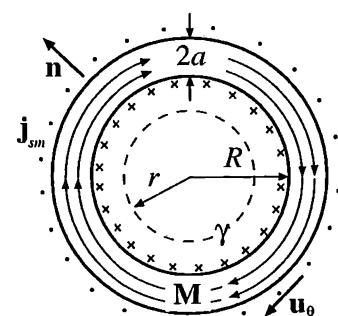
Nota. La ragione della nullità di \mathbf{H} diviene chiara se si osserva che le estremità del magnete sono le sorgenti di questo campo (si ricordi che le linee di flusso di \mathbf{H} sono aperte). Tuttavia il magnete qui considerato è indefinito, dunque le sue estremità sono infinitamente lontane. Essendo le sorgenti di \mathbf{H} infinitamente lontane, ne deriva che il campo non può che essere nullo.

S.6.5.

Sulla superficie del toro scorre una densità di corrente superficiale \mathbf{j}_{sm} data dalla relazione:

$$\mathbf{j}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (1)$$

con \mathbf{M} magnetizzazione nel materiale ed \mathbf{n} normale uscente dalla superficie su cui valutiamo la corrente. Faremo riferimento alla sezione del toro mostrata in figura; poiché la magnetizzazione in questo caso ha verso orario, la corrente sulla superficie esterna scorrerà verso il lettore mentre sul lato interno scorrerà verso il piano del foglio. Si noti che $|\mathbf{j}_{sm}| = M$, essendo M il modulo della magnetizzazione nel materiale. Data la simmetria assiale del sistema, ci aspettiamo che i campi magnetico ed



induzione magnetica abbiano una struttura del tipo $\mathbf{H} = H(r)\mathbf{u}_\theta$ e $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$, essendo \mathbf{u}_θ un versore, diretto in senso orario, tangente alle circonferenze centrate sull'asse del toro ed r la distanza da tale asse. Consideriamo ora una linea chiusa circolare γ di raggio r , il cui centro sia posto sull'asse del toro e che sia orientata anch'essa in verso orario. Applicando la legge di Ampere lungo tale linea, avremo:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} B(r) \mathbf{u}_\theta \cdot ds \mathbf{u}_\theta = \mu_0 i_c, \quad (2)$$

essendo i_c la corrente concatenata a γ . La (2) si semplifica nella relazione

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}. \quad (3)$$

Distinguiamo a tal punto tre situazioni: per $r < R$ avremo che $i_c = 0$, in quanto la linea non concatena alcuna corrente; per $R \leq r < (R + 2a)$ la corrente concatenata sarà $i_c = 2\pi R j_{sm}$, con $j_{sm} = |\mathbf{j}_{sm}|$. Si noti il segno positivo della corrente concatenata, ottenuto in base al verso di percorrenza scelto per γ . Infine per $r \geq (R + 2a)$ si avrà $i_c = 2\pi j_{sm}[R - (R + 2a)]$, in quanto la linea γ concatenerà due volte le correnti superficiali, con versi opposti di scorrimento. In questo ultimo caso, qualora risulti $a \ll R$, potremo senz'altro assumere che la corrente concatenata complessiva sia nulla. Sostituendo i valori di i_c nella (3) e osservando che $j_{sm} = M$, otteniamo:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mathbf{0} & r < R, \\ \frac{\mu_0 M R}{r} \mathbf{u}_\theta & R \leq r < (R + 2a), \\ \mathbf{0} & r \geq (R + 2a). \end{cases} \quad (4)$$

Impiegando a tal punto la definizione del campo magnetico \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (5)$$

e sostituendo tale espressione nella (4), si giunge alla:

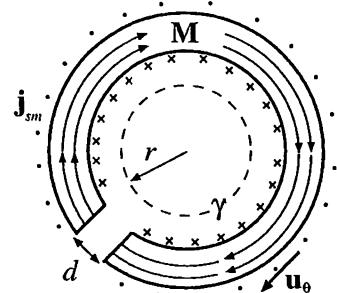
$$\mathbf{H}(r) = \begin{cases} \mathbf{0} & r < R, \\ M \left[\frac{R}{r} - 1 \right] \mathbf{u}_\theta & R \leq r < (R + 2a), \\ \mathbf{0} & r \geq (R + 2a). \end{cases} \quad (6)$$

Si noti che, nella ipotesi che $a \ll R$, possiamo porre $r \approx R$, per cui la (6) si riduce semplicemente alla constatazione che il campo \mathbf{H} è nullo anche all'interno del materiale magnetizzato. Consideriamo ora la seconda parte dell'esercizio. Assumeremo che, praticando un taglio trasversale sottile nel toro, i campi siano ancora descritti da linee di flusso circolari centrate sull'asse del toro. Limiteremo la trattazione al calcolo dei campi per $R \leq r < (R + 2a)$. In questa nuova situazione si farà uso della condizione al contorno per la componente normale del campo \mathbf{B} all'interfaccia aria-magnete:

$$B_{n, \text{aria}} = B_{n, \text{magn}} \quad (7)$$

dove $B_{n, \text{aria}}$ è la proiezione del campo \mathbf{B} nel traferro lungo la normale al taglio e $B_{n, \text{magn}}$ è la proiezione su tale normale del campo nel materiale magnetizzato. Poiché il taglio praticato è perpendicolare alle linee di flusso del campo, la (7) ci dice che \mathbf{B} è continuo passando dal materiale all'aria, come se il taglio non esistesse. Considerata ancora una linea chiusa circolare γ di raggio r ed applicandovi la legge di Ampere, avremo pertanto:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i_c, \quad (8)$$



dove $B(r)$ è lo stesso in aria e nel materiale. La corrente concatenata alla linea γ risulterà $i_c = (2\pi R - d) j_{sm}$, a causa del taglio praticato nel toro. Utilizzando tale risultato nella (8), ricordando che $j_{sm} = M$ ed assumendo $a \ll R$, otteniamo infine:

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 (2\pi R - d) M}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta \approx \mu_0 M \left(1 - \frac{d}{2\pi R}\right) \mathbf{u}_\theta. \quad (9)$$

Il calcolo di \mathbf{H} è leggermente più complesso: in aria risulterà

$$\mathbf{H}_{\text{aria}}(r) = \frac{\mathbf{B}(r)}{\mu_0} \approx M \left(1 - \frac{d}{2\pi R}\right) \mathbf{u}_\theta, \quad (10)$$

mentre nel magnete avremo:

$$\mathbf{H}_{\text{magn}}(r) = \frac{\mathbf{B}(r)}{\mu_0} - \mathbf{M} \approx -\frac{dM}{2\pi R} \mathbf{u}_\theta. \quad (11)$$

Si noti il cambio di verso di \mathbf{H} al passaggio aria-magnete; si può agevolmente constatare che i bordi del taglio si comportano da sorgenti per il campo magnetico \mathbf{H} .

S.6.6.

Vista la simmetria assiale ed essendo il taglio praticato nell'anello di piccolo spessore, assumeremo ancora una volta che i campi \mathbf{H} e \mathbf{B} abbiano linee di flusso circolari centrate sull'asse dell'anello. Faremo riferimento alla figura successiva, in cui è mostrata una sezione dell'anello; supporremo che la corrente fluente nelle spire sia diretta verso il lettore sul lato esterno dell'anello, mentre sarà diretta verso il piano del foglio nel lato interno. Pertanto porremo $\mathbf{H} = H(r)\mathbf{u}_\theta$ e $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$, essendo \mathbf{u}_θ un versore, diretto in senso orario, tangente alle circonferenze centrate sull'asse dell'anello ed r la distanza da tale asse. Consideriamo ora una linea chiusa circolare γ di raggio r , con centro sull'asse dell'anello, e che sia orientata anch'essa in verso orario. Applicheremo la legge di Ampere per il campo \mathbf{H} lungo γ ; si noti che tale campo dipende solo dalle correnti di conduzione (che sono note) e non da quelle di magnetizzazione, che invece non sono conosciute. Risulterà:

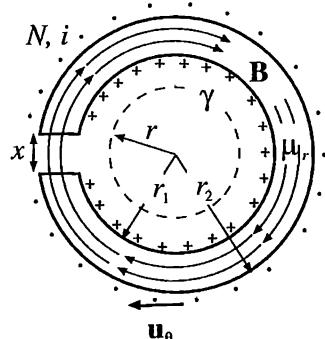
$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_c^{\text{cond}}, \quad (1)$$

dove I_c^{cond} è la corrente di conduzione concatenata a γ . La (1), limitatamente alla regione occupata dal materiale magnetico, può essere riscritta nella forma:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = xH_{\text{aria}}(r) + (2\pi r - x)H_{\text{magn}}(r) = I_c^{\text{cond}}, \quad (2)$$

dove $H_{\text{aria}}(r)$ ed $H_{\text{magn}}(r)$ sono rispettivamente i campi magnetici nel traferro e nel materiale magnetico. Per poter risolvere l'equazione (2) impiegheremo la relazione costitutiva per il materiale; risulta infatti che:

$$\begin{cases} H_{\text{aria}} = \frac{B_{\text{aria}}}{\mu_0}, \\ H_{\text{magn}} = \frac{B_{\text{magn}}}{\mu_0 \mu_r}, \end{cases} \quad (3)$$



essendo $B_{\text{aria}}(r)$ e $B_{\text{magn}}(r)$ rispettivamente i campi di induzione magnetica nel traferro e nel materiale magnetico. Per legare fra loro i campi \mathbf{B} nelle due zone, si impiegherà la condizione al contorno per la componente normale del campo \mathbf{B} all'interfaccia aria-magnete:

$$B_{n,\text{aria}} = B_{n,\text{magn}} \quad (4)$$

dove $B_{n,\text{aria}}$ è la proiezione del campo \mathbf{B} nel traferro lungo la normale al taglio e $B_{n,\text{magn}}$ è la proiezione su tale normale del campo nel materiale magnetizzato. Poiché il taglio praticato è perpendicolare alle linee di flusso del campo, la (4) comporta che \mathbf{B} sia continuo passando dal materiale all'aria. Pertanto, con l'aiuto delle (3) e (4), la (2) diviene:

$$xH_{\text{aria}}(r) + (2\pi r - x) \frac{H_{\text{aria}}(r)}{\mu_r} = I_c^{\text{cond}}, \quad (5)$$

da cui deriva

$$H_{\text{aria}}(r) = \frac{\mu_r I_c^{\text{cond}}}{2\pi r + x(\mu_r - 1)}. \quad (6)$$

La (6), con l'aiuto delle (3) e (4), comporta che il campo \mathbf{B} nella regione occupata dal materiale sia pari a:

$$\mathbf{B}(r) = \mu_0 H_{\text{aria}}(r) \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 \mu_r I_c^{\text{cond}}}{2\pi r + x(\mu_r - 1)} \mathbf{u}_\theta. \quad (7)$$

Possiamo a tal punto distinguere tre situazioni in funzione del raggio r di γ : per $r < r_1$ avremo che $I_c^{\text{cond}} = 0$, in quanto la linea non concatena alcuna corrente; per $r_1 \leq r < r_2$ la corrente concatenata sarà $I_c^{\text{cond}} = Ni$. Si noti il segno positivo della corrente concatenata, ottenuto in base al verso di percorrenza scelto per γ . Infine per $r \geq r_2$ risulterà ancora $I_c^{\text{cond}} = 0$, in quanto la linea γ concatenerà due volte ogni spira, con versi opposti di

scorrimento della corrente. Pertanto, applicando questo risultato alla (1) e con l'aiuto della (7), otteniamo:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mathbf{0} & r < r_1, \\ \frac{\mu_0 \mu_r N i}{2\pi r + x(\mu_r - 1)} \mathbf{u}_\theta & r_1 \leq r < r_2, \\ \mathbf{0} & r \geq r_2. \end{cases} \quad (8)$$

S.6.7.

Si assuma che in una regione dello spazio siano presenti un campo magnetico \mathbf{H} ed un campo di induzione magnetica \mathbf{B} . In tale regione sarà racchiusa una densità di energia per unità di volume u_m pari a:

$$u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (1)$$

Applichiamo la (1) al campo calcolato nell'esercizio precedente. Nella regione del traferro, dove $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, la densità di energia magnetica risulta pari a:

$$u_{m, \text{aria}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}, \quad (2)$$

essendo $B = |\mathbf{B}|$; nella regione occupata dal materiale magnetizzato, dove $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, avremo invece:

$$u_{m, \text{mat}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}. \quad (3)$$

Si rimanda al precedente esercizio per i dettagli relativi al calcolo del campo di induzione magnetica prodotto dal solenoide; riportiamo qui soltanto il risultato finale:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mathbf{0} & r < r_1, \\ \frac{\mu_0 \mu_r N i}{2\pi r + x(\mu_r - 1)} \mathbf{u}_\theta & r_1 \leq r < r_2, \\ \mathbf{0} & r \geq r_2, \end{cases} \quad (4)$$

essendo r la distanza dall'asse dell'anello, r_1 ed r_2 i raggi interno ed esterno dell'anello, \mathbf{u}_θ un versore tangente alle circonferenze centrate sull'asse dell'anello. L'energia immagazzinata nel traferro sarà pari a:

$$U_{\text{aria}} = \int_{\text{traferro}} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau; \quad (5)$$

tenuto conto che l'anello ha sezione quadrata, la (5) diviene:

$$U_{\text{aria}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} x(r_2 - r_1) dr, \quad (6)$$

essendo x la larghezza del traferro. Sostituendo nella (6) la (4), otteniamo:

$$U_{\text{aria}} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 i^2 x (r_2 - r_1)}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{[2\pi r + x(\mu_r - 1)]^2}. \quad (7)$$

Effettuando nella (7) la sostituzione $y = 2\pi r + x(\mu_r - 1)$ otteniamo:

$$U_{\text{aria}} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 i^2 x (r_2 - r_1)}{2} \int_{2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)}^{2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)} \frac{dy}{2\pi y^2}, \quad (8)$$

da cui

$$U_{\text{aria}} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 i^2 x (r_2 - r_1)^2}{2[2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)][2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)]}. \quad (9)$$

Analogamente, l'energia immagazzinata nel materiale che costituisce l'anello sarà pari a:

$$U_{\text{mat}} = \int_{\text{mat}} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} d\tau; \quad (10)$$

che diviene, tenuto conto della geometria dell'anello:

$$U_{\text{mat}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} (2\pi r - x)(r_2 - r_1) dr. \quad (11)$$

Sostituendo nella (11) la (4), otteniamo:

$$U_{\text{mat}} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 i^2 (r_2 - r_1)}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(2\pi r - x) dr}{[2\pi r + x(\mu_r - 1)]^2}. \quad (12)$$

impiegando ancora la sostituzione precedente, la (12) diviene:

$$U_{\text{mat}} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 i^2 (r_2 - r_1)}{2} \int_{2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)}^{2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)} \frac{(y - \mu_r x) dy}{2\pi y^2}, \quad (13)$$

da cui

$$\begin{aligned} U_{\text{mat}} = & \frac{\mu_0 \mu_r N^2 i^2 (r_2 - r_1)}{4\pi} \left\{ \ln \left[\frac{2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)}{2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2\pi x \mu_r (r_2 - r_1)}{[2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)][2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)]} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

S.6.8.

Assumeremo nel seguito che la corrente nel nucleo del cavo scorra verso il lettore. Data la simmetria del sistema, si può affermare che i campi \mathbf{B} , \mathbf{H} e, per la sola zona della guaina, la magnetizzazione \mathbf{M} abbiano linee di flusso circolari centrate sull'asse del cavo. Sia \mathbf{u}_θ un versore tangente a tali linee, diretto in verso antiorario. Si consideri una linea chiusa circolare γ di raggio r , il cui centro sia posto sull'asse del cavo e che sia orientata anch'essa in verso antiorario. Applicheremo la legge di Ampere per il campo \mathbf{H} lungo γ ; si noti che tale campo dipende solo dalle correnti di conduzione (che sono note) e non da quelle di magnetizzazione, che andranno calcolate in seguito. Risulterà:

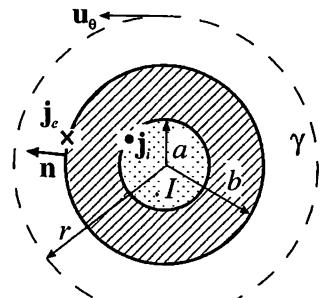
$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} H(r) \mathbf{u}_{\theta} \cdot ds \mathbf{u}_{\theta} = I_c^{\text{cond}}; \quad (1)$$

da cui si giunge alla:

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I_c^{\text{cond}}}{2\pi r} \mathbf{u}_{\theta}. \quad (2)$$

Si noti che la corrente di conduzione I_c^{cond} concatenata a γ è positiva in virtù dell'orientamento scelto per tale linea. Nell'ipotesi che la corrente sia distribuita nel nucleo del cavo in modo uniforme, l'andamento di I_c^{cond} in funzione del raggio r di γ risulterà pari a:

$$I_c^{\text{cond}} = \begin{cases} I \frac{r^2}{a^2} & r < a, \\ I & r \geq a. \end{cases} \quad (3)$$



Impiegando la (3) nella (2), otteniamo infine:

$$\mathbf{H}(r) = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{u}_{\theta} & r < a, \\ \frac{I}{2\pi r} \mathbf{u}_{\theta} & r \geq a. \end{cases} \quad (4)$$

Per calcolare le correnti di magnetizzazione, ricordiamo che il vettore \mathbf{H} è definito come:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}; \quad (5)$$

tuttavia risulta anche

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}. \quad (6)$$

Sfruttando la (6) nella relazione (5), otteniamo:

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{H}. \quad (7)$$

Ricordiamo infine che la densità di corrente superficiale di magnetizzazione è pari a:

$$\mathbf{j}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \quad (8)$$

dove \mathbf{n} è la normale uscente dalla superficie considerata. Risulta pertanto che sul lato esterno della guaina scorre una corrente

$$\mathbf{j}_e = \frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi b} \mathbf{u}_{\theta} \times \mathbf{u}_r = -\frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi b} \mathbf{u}_z, \quad (9)$$

dove \mathbf{u}_r è un versore radiale uscente dalla superficie cilindrica del cavo ed \mathbf{u}_z un versore perpendicolare al piano del foglio ed uscente da esso. Sul lato interno, all'interfaccia guaina-nucleo, avremo invece una corrente

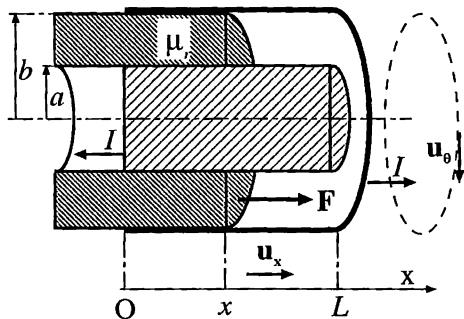
$$\mathbf{j}_i = -\frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi a} \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_r = \frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi a} \mathbf{u}_z. \quad (10)$$

Si noti infine che non ci sono correnti di magnetizzazione di volume nella guaina. Infatti $\mathbf{J}_m = \operatorname{rot} \mathbf{M} = (\mu_r - 1) \operatorname{rot} \mathbf{H}$, dato che il mezzo è omogeneo. Poiché $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_c = \mathbf{0}$ nella guaina, si ha $\mathbf{J}_m = \mathbf{0}$.

S.6.9.

Per risolvere il problema faremo uso del metodo dell'energia magnetica. La figura mostra una sezione del sistema. Supponiamo di variare la posizione del materiale magnetico unicamente lungo l'asse del sistema, mantenendo costante la corrente che scorre nei conduttori. La forza \mathbf{F} agente sul materiale sarà allora data da:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_{I=\text{cost.}} \mathbf{u}_x, \quad (1)$$



essendo U_m l'energia magnetica attribuita al sistema ed \mathbf{u}_x il versore dell'asse x , diretto lungo l'asse del cavo con verso concorde alla direzione di scorrimento della corrente nella guaina esterna. Per determinare l'energia magnetica dobbiamo calcolare il campo magnetico \mathbf{H} presente all'interno del cavo. Trascurando le dimensioni finite del cavo, assumeremo che il campo abbia simmetria cilindrica e sia esprimibile nella forma:

$$\mathbf{H} = H(r) \mathbf{u}_\theta, \quad (2)$$

essendo r la distanza dall'asse del sistema ed \mathbf{u}_θ il versore tangente alle circonferenze centrate sull'asse e giacenti in un piano perpendicolare all'asse del cavo. Tale assunzione è lecita sinché la lunghezza L del cavo è molto maggiore del suo raggio esterno b . Sceglieremo come verso di \mathbf{u}_θ quello di rotazione di una vite destrorsa che avanzi nella direzione di scorrimento della corrente nel nucleo del cavo. Scelta una linea chiusa orientata γ , coincidente con una linea di flusso del vettore \mathbf{H} , possiamo applicare la legge di Ampere nella forma:

$$\oint_\gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_\gamma H(r) \mathbf{u}_\theta \cdot ds \mathbf{u}_\theta = I_c^{\text{cond}}, \quad (3)$$

essendo I_c^{cond} la corrente di conduzione concatenata a γ ed r il raggio della linea. La (3) si riduce alla relazione:

$$H(r) = \frac{I_c^{\text{cond}}}{2\pi r}. \quad (4)$$

Si noti che l'unica regione in cui l'energia magnetica può cambiare è nell'intercapedine tra nucleo e guaina, dato che nel nucleo ed all'esterno del cavo la permeabilità magnetica relativa non cambia. Ci limitiamo pertanto al calcolo del campo nell'intercapedine; risulterà in tale regione che:

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I\mathbf{u}_\theta}{2\pi r}. \quad (5)$$

Notare che il valore di \mathbf{H} è lo stesso in aria o nel materiale, dato che dipende unicamente dalle correnti di conduzione e non da quelle di magnetizzazione. L'energia magnetica nell'intercapedine sarà poi data dalla relazione:

$$U_m = \int_{\text{aria}} \frac{\mu_0 H^2}{2} dr + \int_{\text{mater}} \frac{\mu_0 \mu_r H^2}{2} dr, \quad (6)$$

che possiamo riscrivere in virtù della simmetria cilindrica nella forma:

$$U_m = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r(L-x) dr + \int_a^b \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r x dr, \quad (7)$$

dove x è la coordinata della posizione occupata dal materiale magnetico rispetto all'ingresso del cavo. Una volta risolti gli integrali, otteniamo:

$$U_m = \frac{\mu_0 I^2 [L + x(\mu_r - 1)]}{4\pi} \ln \left[\frac{b}{a} \right]. \quad (8)$$

Sostituendo la (8) nella (1), otteniamo finalmente:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U_m}{\partial x} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 I^2 (\mu_r - 1)}{4\pi} \ln \left[\frac{b}{a} \right] \mathbf{u}_x. \quad (9)$$

Si noti che se il materiale è paramagnetico ($\mu_r > 1$), la forza è diretta come l'asse x , dunque il materiale è attratto nell'intercapedine; invece se il materiale è diamagnetico ($\mu_r < 1$), esso ne verrà respinto.

S.6.10.

Introduciamo un versore \mathbf{u}_z diretto come l'asse verticale z , verso l'alto. Il campo di induzione magnetica agente sul magnete sarà dato dall'espressione

$$\mathbf{B}(z) = \frac{a\mathbf{u}_z}{b+z}, \quad (1)$$

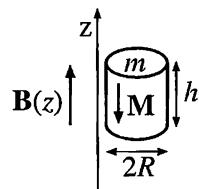
mentre la magnetizzazione nel materiale sarà esprimibile come

$$\mathbf{M} = -M\mathbf{u}_z. \quad (2)$$

Dalla (2) discende che il magnete ha un momento di dipolo magnetico pari a:

$$\mathbf{m} = -\pi R^2 h M \mathbf{u}_z, \quad (3)$$

che è semplicemente il prodotto della magnetizzazione per il volume del cilindretto. Per risolvere l'esercizio faremo uso della relazione:



$$F_z = \mathbf{m} \cdot \operatorname{grad} B_z, \quad (4)$$

essendo F_z la componente della forza agente sul magnete lungo l'asse z , B_z la componente del campo di induzione magnetica lungo lo stesso asse e

$$\operatorname{grad} B_z = \mathbf{u}_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (5)$$

Usare la precedente espressione equivale ad assumere che nella regione occupata dal magnete il campo \mathbf{B} agente su di esso possa considerarsi uniforme; ciò è lecito se il magnete è di piccole dimensioni. Sostituendo nella (4) la (1) e la (3), otteniamo:

$$F_z = -\pi R^2 h Ma \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{b+z} \right], \quad (6)$$

che diviene:

$$F_z = \frac{\pi R^2 h Ma}{(b+z)^2}. \quad (7)$$

Si noti che, essendo F_z positiva, la forza magnetica agente sul magnete è diretta verso l'alto. La forza peso è ovviamente diretta verso il basso ed è in modulo pari ad mg , essendo m la massa del cilindretto e g l'accelerazione di gravità. Affinché le due forze si bilancino imponiamo che i loro moduli siano uguali:

$$\frac{\pi R^2 h Ma}{(b+z)^2} = mg, \quad (8)$$

da cui otteniamo la posizione z in cui la forze si compensano, che risulta pari a:

$$z = \sqrt{\frac{\pi M h R^2 a}{mg}} - b. \quad (9)$$

È interessante notare che tale posizione di equilibrio è stabile. Infatti, l'energia potenziale associata alla forza magnetica ed alla forza peso vale

$$E_p = mgz + \frac{\pi R^2 h Ma}{z+b}. \quad (10)$$

Poiché la soluzione (9) corrisponde ad un minimo (e non ad un massimo) di E_p , segue che la posizione di equilibrio è stabile.

S.6.11.

La soluzione di questo esercizio procede in modo simile a quanto visto nel precedente problema; la differenza sostanziale è nella magnetizzazione presente nel cubetto, che nel precedente caso era permanente, mentre qui viene indotta dallo stesso campo \mathbf{H} agente sul cubetto. In base al legame fra campo magnetico \mathbf{H} , campo \mathbf{B} e magnetizzazione \mathbf{M} presenti nel materiale:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (1)$$

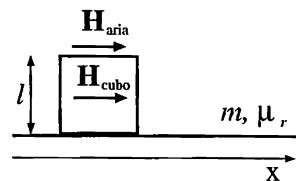
ed in base al legame diretto fra induzione magnetica e campo magnetico nel materiale:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2)$$

otteniamo che la magnetizzazione è pari a:

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{H}. \quad (3)$$

Il testo del problema ci impone di assumere che il campo magnetico \mathbf{H} non cambi nel passaggio dall'aria al materiale; tale assunzione è giustificata dalla condizione al contorno per la componente tangente di \mathbf{H} (vedi figura):



$$H_{t, \text{aria}} = H_{t, \text{cubo}} \quad (4)$$

dove $H_{t, \text{aria}}$ è la proiezione del campo \mathbf{H} dal lato dell'aria lungo la tangente alla superficie del cubetto ed $H_{t, \text{cubo}}$ è la proiezione del campo nel materiale magnetizzato. Si noti che tale assunzione non è del tutto lecita, dato che viola la condizione al contorno per la componente normale del campo induzione magnetica sulla faccia verticale del cubetto; nel seguito si ignorerà tale incongruenza. Assumendo che il cubetto sia di piccole dimensioni potremo considerare il campo \mathbf{H} come se fosse uniforme nel cubetto; detta allora x la posizione del cubetto, avremo che il suo momento di dipolo magnetico sarà pari a:

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} l^3 = l^3 (\mu_r - 1) \mathbf{H}(x), \quad (5)$$

da cui

$$\mathbf{m} = \frac{k l^3 (\mu_r - 1)}{x + 1} \mathbf{u}_x. \quad (6)$$

La componente della forza agente lungo l'asse x sarà allora pari a:

$$F_x = \mathbf{m} \cdot \text{grad } B_x, \quad (7)$$

dove $B_x = \mu_0 H_x$ è la componente lungo l'asse x del campo di induzione magnetica esterno che agisce sul cubetto. Sostituendo nella (7) la (6), otteniamo:

$$F_x = \frac{k l^3 (\mu_r - 1)}{x + 1} \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k \mu_0}{1 + x} \right], \quad (8)$$

da cui

$$F_x = \frac{\mu_0 k^2 l^3 (1 - \mu_r)}{(x + 1)^3}. \quad (9)$$

Si noti che, essendo il materiale diamagnetico e quindi $\mu_r < 1$, la forza ha componente positiva e pertanto è diretta come l'asse x . Per calcolare la velocità che il cubetto acquisirebbe sotto l'azione di tale forza, applichiamo il teorema dell'energia cinetica: la variazione di energia cinetica ΔK di un oggetto è pari al lavoro \mathcal{L} delle forze agenti su di esso. Poiché il corpo si muove nel tratto $0 \leq x \leq L$, il lavoro è pari a:

$$\mathcal{L} = \int_0^L F_x dx = \int_0^L \frac{\mu_0 k^2 l^3 (1 - \mu_r)}{(x + 1)^3} dx, \quad (10)$$

da cui:

$$\mathcal{L} = \mu_0 k^2 l^3 (\mu_r - 1) \left[\frac{1}{2(1+L)^2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\mu_0 k^2 l^3 L (1 - \mu_r) (L + 2)}{2(1+L)^2}. \quad (11)$$

Partendo l'oggetto da fermo, la variazione di energia cinetica è data da:

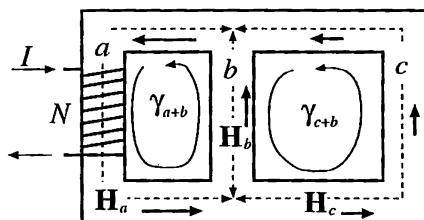
$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_{\text{fin}}^2. \quad (12)$$

Ne deriva che la velocità finale del cubetto sarà pari a:

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{L}}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_0 k^2 l^3 L (1 - \mu_r) (L + 2)}{m(1+L)^2}} \quad (13)$$

S.6.12.

Per risolvere il problema assumeremo che, data l'alta permeabilità magnetica relativa del materiale, le linee di flusso del campo magnetico seguano la forma del nucleo che costituisce il circuito magnetico (il nucleo costituisce un "tubo di flusso" per il campo magnetico). Possiamo altresì assumere, dato che la sezione del nucleo è costante ovunque, che in ognuno dei singoli rami che formano il nucleo, il modulo del campo \mathbf{H} si mantenga costante; si può dimostrare che questa proprietà deriva direttamente dalla precedente assunzione. Detti \mathbf{H}_a , \mathbf{H}_b ed \mathbf{H}_c i campi nei rispettivi rami di lunghezze a , b , c e scegliendo per questi campi dei versi arbitrari (si veda la figura a lato) potremo allora impostare il seguente sistema di equazioni nei moduli dei campi suddetti:



$$\begin{cases} aH_a + bH_b = Ni; \\ cH_c - bH_b = 0; \\ H_a = H_b + H_c. \end{cases} \quad (1)$$

La prima delle (1) è semplicemente la legge di Ampere applicata al percorso chiuso γ_{a+b} (interno al materiale); infatti la corrente concatenata a tale percorso chiuso è proprio Ni . La seconda equazione è ancora la legge di Ampere applicata al percorso chiuso γ_{c+b} (interno al materiale), che non concatena alcuna corrente; si noti il segno negativo del contributo dato da H_b , dovuto al verso di percorrenza della linea opposto a quello scelto per il campo \mathbf{H}_b . La terza delle equazioni (1) deriva dalla conservazione del flusso del campo magnetico in corrispondenza della diramazione che dal ramo a forma i rami b e c ; questa è ancora una conseguenza dell'aver assunto il nucleo del circuito come tubo di flusso del campo; si noti che tale uguaglianza è possibile solo perché la sezione del nucleo è la stessa ovunque. Risolvendo il sistema di equazioni, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[c + a \left(1 + \frac{c}{b} \right) \right] H_c = Ni; \\ H_b = \frac{c}{b} H_c; \\ H_a = \left(1 + \frac{c}{b} \right) H_c; \end{array} \right. \quad (2)$$

da cui

$$\left\{ \begin{array}{l} H_c = \frac{Nib}{ab + ac + cb}; \\ H_b = \frac{Nic}{ab + ac + cb}; \\ H_a = \frac{Ni(b + c)}{ab + ac + cb}. \end{array} \right. \quad (3)$$

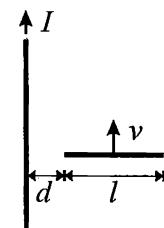
Capitolo 7

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

7.1 Problemi

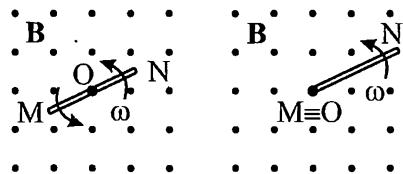
P.7.1.

Un filo rettilineo indefinito è percorso da una corrente stazionaria I . Una sbarretta metallica, ortogonale al filo, si muove con velocità uniforme $v = 20 \text{ m/s}$ parallela al filo. Sapendo che la sbarretta è lunga $l = 30 \text{ cm}$; che la sua distanza minima dal filo è $d = 1 \text{ cm}$ e che ai suoi capi è presente una differenza di potenziale pari a $\Delta V = 0.7 \text{ mV}$, si determini l'intensità della corrente che scorre nel filo.



P.7.2.

Un'asta metallica lunga $l = 20 \text{ cm}$ è posta in rotazione con velocità angolare $\omega = 50 \text{ rad/s}$ in una regione di campo magnetico B uniforme e costante ($B = 0.6 \text{ T}$). L'asse di rotazione è parallelo alla direzione del campo B . Si determini la differenza di potenziale tra gli estremi dell'asta nel caso in cui questa venga messa in rotazione rispetto al suo centro o rispetto ad un estremo.



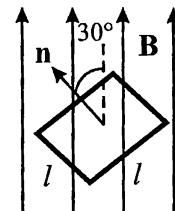
P.7.3.

Una bobina a sezione circolare è ferma in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico B uniforme che varia nel tempo secondo la legge $B = B_0 \cos \omega t$. Trascurando il fenomeno dell'autoinduzione, si discuta in quale dei seguenti casi, a parità di resistenza R , la corrente indotta nella bobina ha l'ampiezza massima:

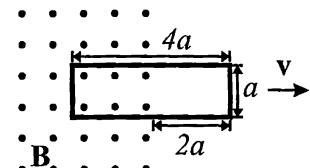
- (i) Bobina con \bar{N} spire di raggio a , il cui asse forma un angolo di 30° con la direzione del campo B .
- (ii) Bobina con $2\bar{N}$ spire di raggio $a/3$, il cui asse è parallelo alla direzione del campo B .
- (iii) Bobina con $3\bar{N}$ spire di raggio $4a$, il cui asse è ortogonale alla direzione del campo B .

P.7.4.

Una spira quadrata di lato $l = 20 \text{ cm}$ e sezione del filo $\Sigma = 1 \text{ mm}^2$ si trova in una regione di spazio con campo magnetico uniforme \mathbf{B} , inclinato di 30° rispetto alla normale alla spira. Il campo magnetico varia nel tempo come $B = B_0 \cos \omega t$, dove $B_0 = 0.4 \text{ T}$ e $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Sapendo che la resistività nella spira è pari a $\tau = 2 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, si determini la potenza dissipata per effetto Joule.

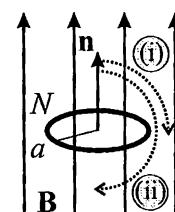
**P.7.5.**

Una spira rettangolare, di lati a e $4a$ e di resistenza R , viene estratta con velocità costante v da una regione di campo magnetico \mathbf{B} uniforme, in cui era immersa solo per metà (vedi figura). Si determini il lavoro che è necessario compiere per estrarre completamente la spira.

**P.7.6.**

Una bobina, composta da N spire circolari di raggio a , si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico \mathbf{B} uniforme e costante. La bobina è inizialmente disposta con l'asse parallelo alla direzione del campo. Sapendo che la resistenza della bobina è pari a R , si determini la carica complessiva che attraversa la bobina a fronte di una rotazione della stessa di:

- (i) 90° ;
- (ii) 180° .

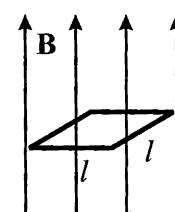
**P.7.7.**

Una spira di raggio $a = 10 \text{ cm}$ è posta con l'asse parallelo ad un campo magnetico \mathbf{B} uniforme che varia nel tempo secondo la legge $B = B_0 \cos \omega t$. La spira ha una resistenza $R = 10 \Omega$. Sapendo che $\omega = 2\pi\nu$ con $\nu = 50 \text{ Hz}$ e che la resistenza dissipa una potenza media pari a $\mathcal{P}_m = 0.19 \text{ W}$, si determini il valore dell'ampiezza B_0 .

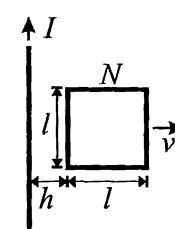
P.7.8.

Una spira quadrata di lato l è posta in un piano ortogonale ad un campo magnetico \mathbf{B} uniforme. Si determini per quale dei seguenti andamenti temporali di \mathbf{B} la forza elettromotrice indotta nella spira raggiunge i valori di picco più alti:

- (i) $B = B_0 \sin \omega t$;
- (ii) $B = B_0/2 \sin 3\omega t$.

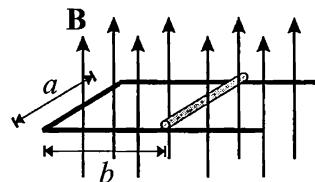
**P.7.9.**

Una bobina composta da N spire quadrate di lato l si trova ad una distanza h da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente stazionaria I . Sapendo che la resistenza nella bobina è pari a R , si determini la forza da applicare per allontanare la bobina con velocità costante v .



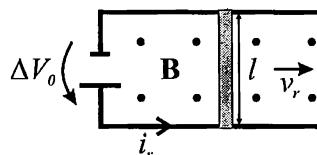
P.7.10.

Un circuito rettangolare, di lati a e b con un lato libero di scorrere, è posto in un piano ortogonale ad un campo magnetico \mathbf{B} uniforme e variabile nel tempo secondo la legge $B = kt$, dove k è una costante positiva. Si determini la forza che bisogna applicare al lato mobile per tenerlo fermo se la resistenza elettrica del circuito è pari a R .

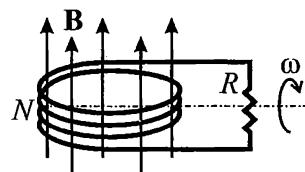
**P.7.11.**

Un'asta metallica, lunga $l = 50$ cm e di massa $m = 2$ kg, scorre su due conduttori paralleli ed orizzontali con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$. Un generatore di tensione mantiene una differenza di potenziale $\Delta V_0 = 24$ V costante tra i due conduttori e chiude il circuito. Il tutto è immerso in un campo magnetico \mathbf{B} , uniforme e costante, diretto come in figura ($B = 2$ T). Se il circuito ha una resistenza elettrica complessiva $R = 3 \Omega$, si determinino:

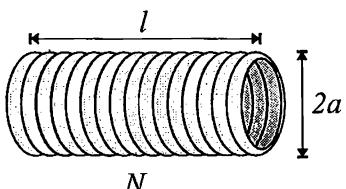
- la corrente di regime i_r nel circuito;
- la velocità di regime v_r dell'asta.

**P.7.12.**

In una centrale idroelettrica il flusso d'acqua mantiene una bobina in rotazione uniforme all'interno di un campo magnetico \mathbf{B} costante ed uniforme. La bobina in rotazione, composta da N spire circolari di raggio a , alimenta una resistenza pari a R . Sapendo che la potenza media fornita dal flusso d'acqua per mantenere la bobina in rotazione uniforme è pari a \mathcal{P}_m , si determini la velocità angolare di rotazione ω .

**P.7.13.**

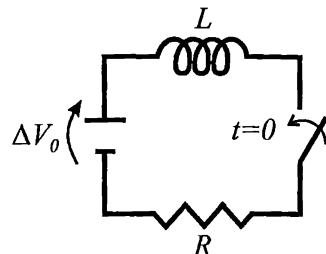
Una spira circolare di raggio a e resistenza R è posta coassialmente al centro di un solenoide lungo l e composto da N avvolgimenti con una sezione circolare di raggio b . Se la corrente nel solenoide diminuisce secondo la legge $i = i_0 e^{(-t/\tau)}$, con i_0 e τ costanti positive, si determinino la corrente indotta in funzione del tempo e l'energia dissipata nella spira dopo un tempo pari a 3τ . Si trascurino effetti di bordo e fenomeni di autoinduzione. [$N = 1000$; $a = 1$ cm; $l = 20$ cm; $i_0 = 10$ A; $\tau = 5$ s; $R = 10 \Omega$]

**P.7.14.**

Un solenoide a sezione circolare, lungo $l = 30$ cm, è costituito da un avvolgimento con $N = 1000$ spire. Sapendo che la sua induttanza è pari a $L = 3 \times 10^{-3}$ H, si determini il raggio a della sua sezione. Si trascurino effetti di bordo.

P.7.15.

- Si consideri il circuito mostrato in figura. Si determini:
- la corrente che scorre nel circuito dopo la sua chiusura;
 - l'energia immagazzinata nel solenoide quando la corrente ha raggiunto il suo valore di regime.

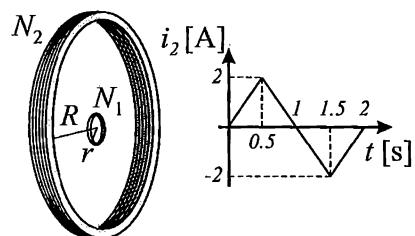
**P.7.16.**

Una bobina percorsa da una corrente $i_1 = kt$, con $k = 3 \text{ A/s}$, induce una forza elettromotrice pari a $f_2 = 15 \text{ V}$ in una spira posta in prossimità. Si determini quanto varrebbe, invece, la forza elettromotrice indotta nella bobina se una corrente $i_2 = 2kt$ venisse fatta passare nella spira. Si trascurino effetti di autoinduzione.

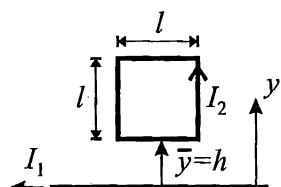
P.7.17.

Una bobina, con N_1 spire a sezione circolare di raggio r , è posta nel centro di una seconda bobina complanare, di N_2 spire con sezione circolare di raggio R . Si determini il coefficiente di mutua induzione e si calcoli la forza elettromotrice indotta nella bobina più piccola quando nella bobina più grande circola una corrente con l'andamento temporale riportato in figura.

$$[N_1 = 200; N_2 = 400; r = 1 \text{ cm}; R = 20 \text{ cm}]$$

**P.7.18.**

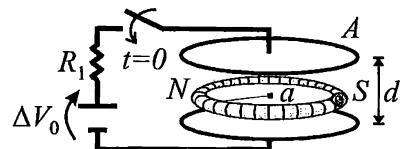
Dato un filo rettilineo indefinito, percorso da una corrente stazionaria I_1 , ed una spira quadrata di lato l , percorsa da una corrente stazionaria I_2 , si calcolino il coefficiente di mutua induzione in funzione della distanza \bar{y} e la forza che il filo esercita sulla spira quando la loro distanza è $\bar{y} = h$.

**P.7.19.**

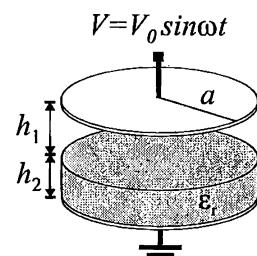
Un solenoide infinito, composto da n spire per unità di lunghezza, circolari e di raggio a , è percorso da una corrente $i = i_0 e^{-t/\tau}$. Si calcolino i campi B ed E generati in tutto lo spazio.

P.7.20.

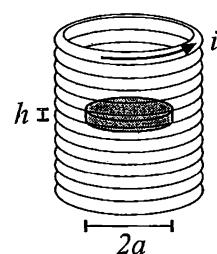
Un generatore di forza elettromotrice ΔV_0 costante, con resistenza interna R_1 , è collegato ad un condensatore piano, con armature di area A e distanti d ($d \ll \sqrt{A}$). All'interno del condensatore è disposto un solenoide toroidale di raggio a , composto da N spire di sezione S' (con $a \gg \sqrt{S'}$). All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore. Si calcoli la carica totale che attraversa il solenoide, sapendo che la sua resistenza è R_2 . Si trascuri il fenomeno dell'autoinduzione.

**P.7.21.**

Un condensatore ad armature piane e circolari di raggio a è alimentato da una tensione variabile $V = V_0 \sin \omega t$. Tra le armature è inserito un dielettrico, con costante dielettrica relativa ϵ_r , che occupa la parte inferiore del condensatore per uno spessore h_2 , lasciando il vuoto nel restante spessore h_1 ($h_1 + h_2 \ll a$). Si determinino \mathbf{E} e \mathbf{B} all'interno del condensatore.

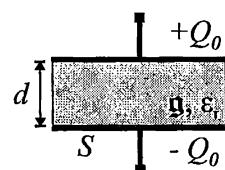
**P.7.22.**

Un disco conduttore di conducibilità g , raggio a e spessore h , è posto coassialmente all'interno di un solenoide indefinito, con n spire per unità di lunghezza. Se la corrente che scorre nel solenoide varia come $i = kt$, si determini l'espressione della potenza dissipata nel disco per effetto Joule da parte delle correnti indotte, considerando trascurabile l'effetto di queste sul campo magnetico.

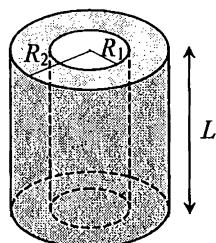
**P.7.23.**

Un condensatore piano, costituito da due armature di area S e distanti d (con $d \ll \sqrt{S}$), è totalmente riempito con un materiale dielettrico di costante ϵ_r , parzialmente conduttore con conducibilità g . All'istante iniziale sulle armature è posta una carica Q_0 . Si calcoli, durante la scarica del condensatore:

- la corrente di conduzione;
- la differenza di potenziale tra le armature in funzione del tempo;
- la corrente di spostamento .

**P.7.24.**

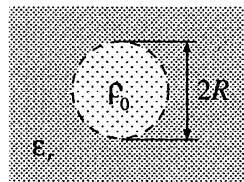
Si consideri un condensatore cilindrico con raggi R_1 e R_2 ($R_2 > R_1$), lunghezza L e carica Q_0 . Lo spazio tra le armature viene riempito con un materiale di resistività τ . Si determini il campo elettrico, il campo magnetico e la densità di corrente di spostamento durante il processo di scarica, all'interno del condensatore. (Si assuma: $R_1 \ll L$ e $R_2 \ll L$)



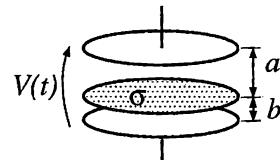
P.7.25.

In un mezzo di estensione infinita, di conducibilità σ e costante dielettrica relativa ϵ_r , è inizialmente presente della carica, con densità di volume uniforme ρ_0 , in una regione sferica di raggio R . Si calcolino in ogni punto del mezzo:

- (i) la legge di decadimento della carica;
- (ii) il campo elettrico;
- (iii) le correnti di conduzione e spostamento;
- (iv) il campo magnetico.

**P.7.26.**

Tra le armature di un condensatore piano di forma cilindrica viene applicata una differenza di potenziale che segue la legge $V = V_0 \sin(\omega t)$. All'interno del condensatore è inserito un disco isolante con una densità di carica superficiale σ , la cui distanza dalle due armature è rispettivamente pari ad a e b . Determinare i campi elettrico e magnetico nel condensatore.



7.2 Soluzioni

S.7.1.

Un filo rettilineo percorso da corrente genera nello spazio circostante un campo magnetico \mathbf{B} le cui linee di forza sono circonferenze concentriche appartenenti ad un piano ortogonale al filo e di verso determinato dalla regola della mano destra (si veda l'esercizio P.5.7). Il modulo del campo \mathbf{B} , a distanza r dal filo percorso da corrente I , è:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (1)$$

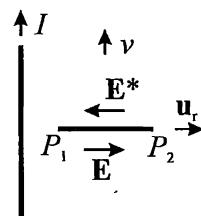
Sulle cariche del conduttore in movimento, in presenza di campo magnetico, agisce la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad , \quad (2)$$

dove q è la carica generica del conduttore, \mathbf{v} è la velocità con cui quest'ultimo si muove e \mathbf{B} è il campo magnetico generato dal filo percorso da corrente.

Questa forza è causa di un campo elettromotore che porta le cariche positive verso l'estremità della sbarretta più vicina al filo e le cariche negative all'altra estremità. Il campo elettromotore può essere espresso come:

$$\mathbf{E}^*(r) = \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB(r)\mathbf{u}_r \quad , \quad (3)$$



dove \mathbf{u}_r è il versore parallelo alla sbarretta e con verso come in figura. È importante osservare che il campo elettromotore non è costante lungo la sbarretta in quanto non lo è il campo magnetico $B(r)$.

Il campo elettromotore \mathbf{E}^* continua a separare le cariche ed a portarle verso gli estremi del conduttore finché non viene perfettamente bilanciato dal campo elettrostatico \mathbf{E} , generato dalla distribuzione di carica che si viene a formare lungo la sbarretta. A regime, quindi

$$\mathbf{E}(r) = -\mathbf{E}^*(r) = vB(r)\mathbf{u}_r \quad (4)$$

La differenza di potenziale tra gli estremi della sbarretta può essere calcolata, per definizione, come integrale del campo elettrostatico:

$$V_1 - V_2 = \int_{P_1}^{P_2} vB(r)\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_d^{d+l} vB(r) dr = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d} \quad , \quad (5)$$

da cui si ricava

$$I = \frac{2\pi \Delta V}{\mu_0 v \ln \frac{d+l}{d}} = 51 \text{ A} \quad . \quad (6)$$

Osservazioni:

- (i) Il potenziale è maggiore all'estremità (P_1) dove si sono accumulate le cariche positive;
- (ii) È possibile cambiare il segno della differenza di potenziale invertendo il verso del moto della sbarretta;
- (iii) La differenza di potenziale è calcolata correttamente solo partendo dal campo eletrostatico e non dal campo elettromotore in quanto quest'ultimo non è conservativo;
- (iv) Come discusso in questo esercizio, la forza di Lorentz può essere causa di un campo elettromotore in un conduttore. Se il conduttore forma un circuito chiuso, questo diventa sede di un forza elettromotrice che risulta essere uguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso di campo magnetico concatenato al circuito, come descritto dalla legge di Faraday.

S.7.2.

Si consideri una generica carica positiva q del conduttore posta a distanza r dal centro di rotazione. La sua velocità lineare è pari a ωr e la forza di Lorentz che agisce su di essa è pari a

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\omega r B \mathbf{u}_r \quad (1)$$

Questa forza dà luogo ad un campo elettromotore

$$\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega r B \mathbf{u}_r \quad (2)$$

che allontana le cariche positive dal centro di rotazione, mentre avvicina quelle negative. Nel caso in cui l'asta venga messa in rotazione rispetto al suo punto centrale, lo spostamento delle cariche nelle due metà dell'asta è perfettamente speculare e quindi il potenziale raggiunto ai due estremi è identico. Si può quindi concludere, senza bisogno di alcun conto, che la differenza di potenziale tra gli estremi dell'asta, in questo caso, è pari a

$$V_M - V_N = 0 \quad . \quad (3)$$

Nel secondo caso il centro di rotazione coincide con un estremo dell'asta. Il campo elettromotore sposterà le cariche finché il campo eletrostatico, generato dalla distribuzione di carica lungo l'asta, non sarà tale da bilanciarlo perfettamente. Quindi, al raggiungimento dell'equilibrio, sarà valida la seguente relazione:

$$\mathbf{E}^* + \mathbf{E} = 0 \quad , \quad (4)$$

che implica

$$\mathbf{E} = -\omega r B \mathbf{u}_r \quad . \quad (5)$$

Conseguentemente, la differenza di potenziale tra l'estremo fisso M e quello mobile N è

pari a

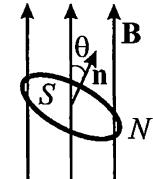
$$V_M - V_N = \int_M^N \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l -\omega r B dr = -\frac{\omega}{2} l^2 B = -0.6 \text{ V} , \quad (6)$$

dove il segno negativo indica che l'estremo mobile N si trova ad un potenziale maggiore rispetto all'estremo fisso M.

S.7.3.

La corrente che circola nella bobina può essere espressa, mediante la legge di Ohm, come

$$i = \frac{f}{R} , \quad (1)$$



dove f è la forza elettromotrice indotta nella bobina e R è la sua resistenza. La forza elettromotrice indotta nella bobina, a causa delle variazioni di flusso di campo magnetico, può essere espressa mediante la legge di Faraday

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} , \quad (2)$$

dove $\Phi(\mathbf{B})$ è il flusso del campo magnetico \mathbf{B} concatenato alla bobina. Definita con S la sezione della bobina e con \mathbf{n} il versore ad essa normale, il flusso attraverso le N spire della bobina è definito come

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = N \int_S B \cos \vartheta dS , \quad (3)$$

dove ϑ è l'angolo tra il campo \mathbf{B} ed il versore \mathbf{n} .

Essendo il campo \mathbf{B} uniforme, è possibile portarlo fuori dall'integrale ed ottenere:

$$\Phi(\mathbf{B}) = N S B \cos \vartheta = N S B_0 \cos \omega t \cos \vartheta . \quad (4)$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione (2), a sua volta inserita nell'equazione (1), si può scrivere:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} (N S B_0 \cos \omega t \cos \vartheta) = \frac{N S B_0 \cos \vartheta}{R} \omega \sin \omega t , \quad (5)$$

la cui ampiezza è

$$i_0 = \frac{N S B_0 \omega \cos \vartheta}{R} . \quad (6)$$

Consideriamo ora i tre casi proposti:

(i) Sostituendo nella (6) i corrispondenti valori si ottiene:

$$i_0 = \frac{\bar{N} \pi a^2 B_0 \omega \cos(\pi/6)}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{N} \pi a^2 B_0 \omega}{R} ; \quad (7)$$

(ii) nel secondo caso, invece, si ottiene:

$$i_0 = \frac{2\bar{N} \pi (a/3)^2 B_0 \omega}{R} = \frac{2}{9} \frac{\bar{N} \pi a^2 B_0 \omega}{R} ; \quad (8)$$

(iii) infine, nel terzo caso, si ha:

$$i_0 = 0 , \text{ perche } \vartheta = \pi/2 . \quad (9)$$

In conclusione, l'ampiezza massima si ottiene nel caso (i) perche $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{2}{9}$.

Osservazioni:

(i) In questo esercizio ci si è soffermati solo sull'ampiezza della corrente indotta. Più in generale, sarà importante determinare anche il verso con cui la corrente scorre.

A tale proposito, è importante sottolineare che il segno della corrente dipende dalla scelta del versore normale al circuito, utilizzato per il calcolo del flusso di \mathbf{B} . Infatti, per convenzione, ponendo il pollice della mano destra come il versore \mathbf{n} , le restanti dita indicano il verso in cui la corrente è positiva (vedi figura). Se la corrente determinata mediante le equazioni (1, 2) dovesse, invece, risultare negativa, questo significa che il verso della corrente è opposto a quello individuato con la mano destra.

(ii) Nella soluzione di questo esercizio si è trascurato il fenomeno dell'autoinduzione, come suggerito nel testo. La stessa ipotesi semplificativa verrà fatta anche nei prossimi esercizi, esclusi quelli in cui venga esplicitamente richiesto di considerare questo fenomeno.

S.7.4.

La potenza istantanea dissipata nella spira per effetto Joule è pari a

$$\mathcal{P} = R i^2 , \quad (1)$$

dove R è la resistenza del circuito ed i la corrente circolante nella spira. Nota la resistività τ , la lunghezza totale della spira $L = 4l$ e la sezione del filo Σ , è possibile determinare la resistenza R :

$$R = \tau \frac{L}{\Sigma} = 1.6 \times 10^{-2} \Omega \quad (2)$$

Per determinare la corrente indotta i , si segue lo stesso procedimento usato nell'esercizio precedente, arrivando quindi alla stessa formula per una sola spira:



$$i = \frac{S B_0 \omega \cos(\pi/6)}{R} \sin \omega t \quad , \quad (3)$$

che sostituita nella (1) fornisce la potenza dissipata per effetto Joule:

$$\mathcal{P} = R i^2 = \frac{l^4 B_0^2 \omega^2 \cos^2(\pi/6)}{R} \sin^2 \omega t = 1.2 \sin^2 \omega t \text{ W} \quad , \quad (4)$$

il cui valor medio in un periodo si calcola osservando che il termine variabile nel tempo $\sin^2 \omega t$ ha valor medio pari ad 1/2 e quindi

$$\mathcal{P}_{media} = 0.6 \text{ W} \quad (5)$$

S.7.5.

Prima di calcolare il lavoro compiuto per estrarre la spira, è necessario determinare le forze che agiscono su di essa.

Durante l'estrazione della spira, il flusso di \mathbf{B} concatenato varia. Infatti, se S è la superficie delimitata dalla spira, il flusso di \mathbf{B} vale:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = B S_x \quad , \quad (1)$$

dove S_x è la porzione di superficie ancora immersa nella regione in cui è presente il campo magnetico:

$$S_x = (4a - x)a \quad (2)$$

e dove \mathbf{n} è stato scelto con lo stesso verso di \mathbf{B} . Per comodità la variabile x è definita in modo tale che la sua derivata rispetto al tempo sia esattamente pari alla velocità v con cui si muove la spira.

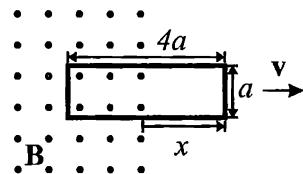
La variazione di flusso induce una forza elettromotrice f nella spira, secondo la legge di Faraday:

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}[B(4a - x)a] = B a v \quad . \quad (3)$$

Di conseguenza, nella spira circolerà una corrente secondo la legge di Ohm:

$$i = \frac{f}{R} = \frac{B a v}{R} \quad (4)$$

Si può notare che per v costante anche i è costante ed il suo verso di scorrimento, congruentemente con la scelta di \mathbf{n} (vedi Osservazione nella soluzione S.7.3), è quello riportato

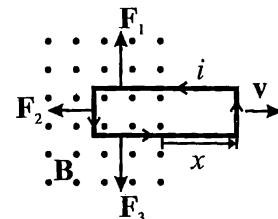


in figura. Il verso di i , inoltre, è in accordo con la legge di Lenz. Infatti, la corrente indotta i tende a generare un ulteriore contributo di campo magnetico, equiverso a quello preesistente, nel tentativo di contrastarne la diminuzione di flusso a seguito dell'estrazione della spira.

Sapendo che nella spira circola la corrente i , possiamo dedurre che i suoi lati, ancora immersi nella regione di campo magnetico, sentiranno delle forze che possono essere espresse dalla seconda legge di Laplace:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B} , \quad (5)$$

dove \mathbf{l} ha modulo e direzione pari alla lunghezza del singolo tratto rettilineo di filo e verso uguale a quello della corrente i . Le forze così determinate sono riportate in figura ed i loro moduli valgono:



$$\begin{aligned} F_1 &= i(4a - x)B ; \\ F_2 &= iaB ; \\ F_3 &= i(4a - x)B \end{aligned} \quad (6)$$

È importante osservare che $F_1 = F_3$ in ogni istante durante l'estrazione della spira e quindi, essendo il loro verso opposto, la loro risultante è sempre nulla.

Sulla spira agisce quindi la sola \mathbf{F}_2 che si oppone al moto. Per mantenere la spira in moto uniforme è necessario applicare una forza uguale e contraria $\mathbf{F}_{est} = -\mathbf{F}_2$, finché la spira non sarà completamente estratta.

Il lavoro fatto per estrarre la spira è quindi il lavoro fatto dalla forza esterna \mathbf{F}_{est} :

$$\mathcal{L} = \int_{2a}^{4a} \mathbf{F}_{est} \cdot \mathbf{u}_x dx = \int_{2a}^{4a} iaB \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x dx = iaB [x]_{2a}^{4a} = 2ia^2B . \quad (7)$$

Sostituendo l'equazione (4) nella (7) si ottiene:

$$\mathcal{L} = \frac{2B^2a^3v}{R} \quad (8)$$

Osservazione:

La forza che si oppone al moto della spira (\mathbf{F}_2) è presente solo nella regione in cui esiste un campo magnetico ed inoltre, se sostituiamo la (4) nella seconda delle (6), possiamo osservare che dipende linearmente dalla velocità della spira. Questa forza può quindi essere vista come un attrito di tipo viscoso e viene comunemente chiamata attrito elettromagnetico.

S.7.6.

Per determinare la carica complessiva che attraversa la bobina si può integrare nel tempo la corrente indotta a fronte della variazione di flusso causata dalla rotazione.

Partendo dalla legge di Faraday e dalla legge di Ohm si ricava la corrente indotta come:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} . \quad (1)$$

Chiamando t_i e t_f gli istanti iniziale e finale della rotazione della spira, possiamo calcolare la carica che ha attraversato una sezione della spira:

$$Q = \int_{t_i}^{t_f} i dt = -\frac{1}{R} \int_{t_i}^{t_f} d\Phi(\mathbf{B}) = -\frac{1}{R} [\Phi_f(\mathbf{B}) - \Phi_i(\mathbf{B})] , \quad (2)$$

dove $\Phi_f(\mathbf{B})$ è il flusso finale e $\Phi_i(\mathbf{B})$ è il flusso iniziale.

L'equazione ottenuta:

$$Q = -\frac{1}{R} [\Phi_f(\mathbf{B}) - \Phi_i(\mathbf{B})] \quad (3)$$

è anche nota come *legge di Felici* ed evidenzia come la carica totale che attraversa la bobina non dipenda dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solo dai suoi valori iniziale e finale.

Il flusso iniziale, nel presente problema, è pari a

$$\Phi_i(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = NB\pi a^2 \quad (4)$$

in quanto \mathbf{B} è uniforme ed inizialmente parallelo ed equiverso ad \mathbf{n} .

Distinguiamo ora i due casi proposti:

(i) il flusso finale è

$$\Phi_f(\mathbf{B}) = 0 \quad (5)$$

in quanto \mathbf{B} è ortogonale ad \mathbf{n} . Quindi,

$$Q = \frac{\Phi_i(\mathbf{B})}{R} = \frac{NB\pi a^2}{R} . \quad (6)$$

(ii) Il flusso finale è

$$\Phi_f(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -NB\pi a^2 \quad (7)$$

in quanto \mathbf{B} ed \mathbf{n} sono paralleli ma opposti ed il loro prodotto scalare è negativo. Di conseguenza,

$$Q = -\frac{1}{R} (-NB\pi a^2 - NB\pi a^2) = \frac{2NB\pi a^2}{R} . \quad (8)$$

Osservazione:

È interessante osservare che le formule (6) e (8) forniscono un semplice strumento per determinare l'intensità del campo magnetico B , riconducendone la misura a quella della carica che fluisce nella bobina durante il processo di rotazione.

S.7.7.

La potenza dissipata nella resistenza R è legata alla corrente che circola mediante la legge:

$$\mathcal{P} = R i^2 \quad (1)$$

Il calcolo della corrente indotta si può effettuare a partire dalla relazione:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (2)$$

Il flusso di \mathbf{B} attraverso la spira è pari a:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = B\pi a^2 = B_0 \pi a^2 \cos \omega t \quad (3)$$

e quindi

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} (B_0 \pi a^2 \cos \omega t) = \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{R} \sin \omega t \quad . \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (1) si trova

$$\mathcal{P} = \frac{B_0^2 (\pi a^2)^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t \quad , \quad (5)$$

il cui valor medio è

$$\mathcal{P}_m = \frac{B_0^2 (\pi a^2)^2 \omega^2}{2R} \quad (6)$$

da cui si ricava

$$B_0 = \frac{\sqrt{2R\mathcal{P}_m}}{2\pi^2 a^2 \nu} = 0.2 \text{ T} \quad . \quad (7)$$

S.7.8.

La forza elettromotrice f , indotta nella spira, è data dalla legge di Faraday:

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad , \quad (1)$$

dove il flusso di \mathbf{B} può essere facilmente calcolato, considerando che \mathbf{B} è uniforme, come

$$\Phi(\mathbf{B}) = B l^2 \quad (2)$$

Analizziamo, ora, i due casi proposti:

(i) La forza elettromotrice indotta f è pari a

$$f = -l^2 \frac{dB}{dt} = -l^2 B_0 \omega \cos \omega t \quad . \quad (3)$$

Quest'ultima è una funzione oscillante con valore di picco pari a

$$f_{picco} = l^2 B_0 \omega \quad . \quad (4)$$

(ii) La forza elettromotrice indotta f è pari a

$$f = -l^2 \frac{dB}{dt} = -l^2 \frac{B_0}{2} 3\omega \cos 3\omega t = -\frac{3}{2} l^2 B_0 \omega \cos 3\omega t \quad . \quad (5)$$

Il valore di picco in questo caso è

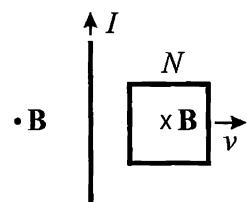
$$f_{picco} = \frac{3}{2} l^2 B_0 \omega \quad . \quad (6)$$

Quindi la forza elettromotrice indotta raggiunge valori di picco più alti nel caso (ii).

S.7.9.

Il campo magnetico \mathbf{B} generato nel piano della bobina dal filo rettilineo percorso dalla corrente I (si veda l'esercizio P.5.7) ha modulo

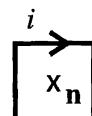
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad , \quad (1)$$



ha direzione ortogonale al piano della figura e verso entrante nella bobina.

Il flusso di \mathbf{B} attraverso la bobina è pari a

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2)$$



Prendiamo il versore \mathbf{n} , normale alla bobina, entrante nel piano del foglio. Di conseguenza, l'eventuale corrente indotta avrà segno positivo se il suo verso di scorrimento coinciderà con quello evidenziato in figura (si veda Osservazione in S.7.3).

Essendo \mathbf{n} parallelo ed equiverso a \mathbf{B} , possiamo calcolare il flusso come

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S B(r) dS = N \int_h^{h+l} B(r) l dr = \frac{\mu_0 I l N}{2\pi} \int_h^{h+l} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l N}{2\pi} \ln \frac{h+l}{h} , \quad (3)$$

dove l'elemento infinitesimo di superficie dS è stato espresso come:

$$dS = l dr \quad (4)$$

Lo spostamento della bobina con velocità v fa variare h (infatti, $v = dh/dt$) e comporta una variazione di flusso attraverso la bobina. Conseguentemente, nella bobina, si ha una corrente indotta:

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 I l N}{2\pi R} \frac{h}{h+l} \frac{vh - v(h+l)}{h^2} = \frac{\mu_0 I l^2 N v}{2\pi R h (h+l)} , \quad (5)$$

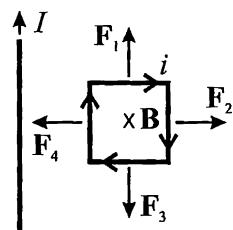
che essendo positiva ha il verso di scorrimento discusso precedentemente e riportato in figura.

Un tratto di conduttore rettilineo percorso da corrente ed inserito in un campo magnetico \mathbf{B} sente, però, una forza data dalla seconda legge di Laplace:

$$\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B} . \quad (6)$$

Per l'evidente simmetria del problema, le due forze agenti sui tratti orizzontali della bobina sono uguali ed opposte,

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_3 , \quad (7)$$



e quindi si elidono.

Le forze sui tratti verticali, invece, hanno modulo

$$F_2 = i l \frac{\mu_0 I N}{2\pi(h+l)} ; \quad (8)$$

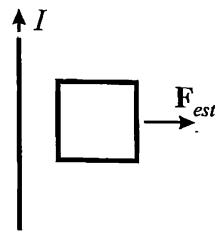
$$F_4 = i l \frac{\mu_0 I N}{2\pi h} , \quad (9)$$

dove si è tenuto conto del fatto che vi sono N avvolgimenti di filo per ogni lato della bobina. Quindi $F_4 > F_2$ e la bobina sente una forza che si oppone all'allontanamento dal filo. Questa forza ha modulo pari a

$$F_4 - F_2 = \frac{\mu_0^2 I^2 l^3 N^2 v}{(2\pi)^2 R h (h+l)} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+l} \right) = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 N^2 v}{(2\pi)^2 R h^2 (h+l)^2} \quad (10)$$

Per mantenere la bobina in moto con velocità v costante, è necessario applicare una forza \mathbf{F}_{est} uguale e contraria alla suddetta forza ($F_4 - F_2$), quindi

$$F_{est} = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 N^2 v}{(2\pi)^2 R h^2 (h + l)^2} . \quad (11)$$



Osservazione:

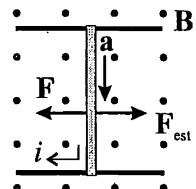
(i) Pur essendo costante la velocità v con cui la bobina si sposta, la forza da applicare non è costante, ma diminuisce all'allontanarsi della bobina dal filo, tendendo a zero per $h \rightarrow \infty$.

(ii) Si noti che la potenza meccanica \mathcal{P}_{mecc} della forza esterna, pari a $\mathcal{P}_{mecc} = F_{est}v$, egualia la potenza dissipata per effetto Joule nella bobina $\mathcal{P}_{Joule} = Ri^2$.

S.7.10.

Si osservi che l'area concatenata al circuito rimane costante, in quanto la forza che bisogna applicare ha proprio lo scopo di mantenere fermo il lato mobile del circuito. Il flusso di campo magnetico concatenato al circuito è quindi facilmente calcolabile, considerato che \mathbf{B} è uniforme, come:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = B a b = ab k t , \quad (1)$$



dove \mathbf{n} è stato scelto equiverso al campo \mathbf{B} .

La corrente indotta nel circuito è, quindi, pari a

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{abk}{R} , \quad (2)$$

dove il segno è relativo alla convenzione discussa nell'Osservazione in S.7.3 ed indica che la corrente indotta circola in senso orario guardando la figura, in accordo con la legge di Lenz.

A seguito della corrente indotta, sul lato mobile del circuito agisce una forza pari a

$$\mathbf{F} = |i| \mathbf{a} \times \mathbf{B} , \quad (3)$$

dove \mathbf{a} è un vettore di modulo a , di direzione parallela al lato mobile e di verso concorde con quello della corrente che circola nel lato stesso.

In assenza di forze esterne, il lato mobile tenderebbe a spostarsi verso sinistra, diminuendo così l'area che ha come contorno il circuito. Per tenere fermo il lato mobile è, quindi, necessario applicare una forza esterna

$$\mathbf{F}_{est} = -\mathbf{F} , \quad (4)$$

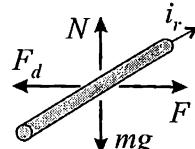
diretta come in figura e di modulo pari a

$$F_{est} = |i|abB = \frac{abk}{R}akt = \frac{a^2bk^2}{R}t . \quad (5)$$

S.7.11.

La situazione a regime si ottiene quando la forza \mathbf{F} che spinge l'asta verso destra, dovuta alla corrente che circola nel lato mobile in presenza di un campo magnetico, è esattamente bilanciata dalla forza d'attrito dinamico F_d . A regime l'asta si muove con velocità costante v_r e quindi la risultante delle forze applicate all'asta (vedi figura) deve essere nulla:

$$\begin{cases} F - F_d = 0 & F = F_d \\ N - mg = 0 & N = mg \end{cases} \quad (1)$$



dove

$$\mathbf{F} = i_r \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

che in modulo è pari a

$$F = i_r l B , \quad (3)$$

mentre

$$F_d = \mu_d N = \mu_d m g \quad (4)$$

e quindi la prima equazione diventa:

$$i_r l B = \mu_d m g \quad (5)$$

da cui si ottiene la corrente a regime

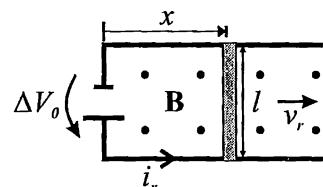
$$i_r = \frac{\mu_d m g}{l B} = 7.85 \text{ A} . \quad (6)$$

Per calcolare la velocità a regime v_r bisogna considerare la legge di Ohm generalizzata, in cui includere sia la forza elettromotrice ΔV_0 dovuta al generatore di tensione, che quella indotta f a causa del movimento dell'asta:

$$\Delta V_0 + f = R i_r \quad (7)$$

dove

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Blv_r \quad (8)$$



Nell'equazione precedente si è considerato il versore \mathbf{n} equiverso a \mathbf{B} in modo tale che il segno della corrente i_r , secondo la convenzione discussa in S.7.3, sia in accordo con il verso riportato in figura. Il segno negativo nel calcolo di f indica che la forza elettromotrice

indotta nel circuito ha verso opposto rispetto a ΔV_0 .

Sostituendo l'equazione (8) nella (7) si può calcolare la velocità di regime come:

$$v_r = \frac{\Delta V_0 - i_r R}{lB} , \quad (9)$$

dove i_r è la corrente a regime determinata nell'equazione (6). La velocità a regime diventa, quindi:

$$v_r = \frac{\Delta V_0 lB - R\mu_d mg}{(lB)^2} = 0.46 \text{ m/s} . \quad (10)$$

Osservazioni:

(i) La velocità a regime poteva anche essere determinata a partire da considerazioni energetiche. Infatti, a regime la potenza erogata dal generatore

$$\mathcal{P} = \Delta V_0 i_r \quad (11)$$

è completamente dissipata dalla resistenza R per effetto Joule e dalla forza di attrito dinamico tra l'asta mobile ed il circuito. Partendo da queste considerazioni, si può scrivere il seguente bilancio:

$$\Delta V_0 i_r = R i_r^2 + \mu_d m g v_r \quad (12)$$

da cui si ottiene

$$v_r = \frac{\Delta V_0 - R i_r}{\mu_d m g} i_r \quad (13)$$

e sostituendo la (6) si arriva alla stessa formula finale

$$v_r = \frac{\Delta V_0 lB - R\mu_d mg}{(lB)^2} ; \quad (14)$$

(ii) Il meccanismo analizzato in questo esercizio potrebbe essere utilizzato come rudimentale nastro trasportatore. È, infatti, un esempio di motore elettrico in cui l'energia erogata dal generatore viene trasformata in lavoro meccanico per spostare l'asta metallica con velocità costante contro le forze d'attrito. È interessante osservare che, a regime, la velocità varia proporzionalmente alla differenza di potenziale ΔV_0 ai capi del generatore di tensione e può essere così regolata arbitrariamente.

S.7.12.

Il flusso di \mathbf{B} attraverso la bobina varia nel tempo a causa della rotazione di quest'ultima:

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = NB \cos \vartheta \pi a^2 = NB\pi a^2 \cos \omega t , \quad (1)$$

dove $\vartheta = \omega t$ è l'angolo, variabile nel tempo, tra il campo \mathbf{B} ed il versore normale alla bobina \mathbf{n} .

Il flusso variabile nel tempo dà luogo ad una forza elettromotrice indotta f :

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = NB\pi a^2 \omega \sin \omega t \quad (2)$$

che alimenta la resistenza R con una corrente

$$i = \frac{f}{R} = \frac{NB\pi a^2 \omega}{R} \sin \omega t \quad . \quad (3)$$

La potenza elettrica fornita alla resistenza R è quindi pari a

$$\mathcal{P}^{el} = f i = R i^2 = \frac{(NB\pi a^2 \omega)^2}{R} \sin^2 \omega t \quad , \quad (4)$$

il cui valor medio è

$$\mathcal{P}_{media}^{el} = \frac{(NB\pi a^2 \omega)^2}{2R} \quad (5)$$

Per generare questa potenza elettrica media è però necessario mantenere la bobina in rotazione con velocità angolare ω costante. Questo è possibile solo grazie alla potenza meccanica fornita dal flusso d'acqua \mathcal{P}_m . Si può quindi concludere che la potenza meccanica, in assenza di attriti, si trasforma completamente in potenza elettrica, mediante il processo sopra descritto, e di conseguenza

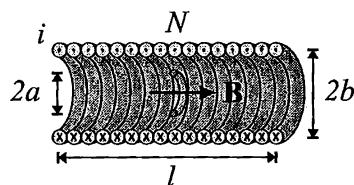
$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{media}^{el} = \frac{(NB\pi a^2 \omega)^2}{2R} \quad . \quad (6)$$

da cui si ricava

$$\omega = \frac{\sqrt{2R\mathcal{P}_m}}{NB\pi a^2} \quad (7)$$

S.7.13.

In figura è rappresentata una sezione longitudinale del solenoide con la spira al suo centro. È inoltre evidenziato il verso di percorrenza della corrente nel solenoide, uscente dalle sezioni superiori ed entrante nelle sezioni inferiori. Una corrente che circola in questo modo genera all'interno del solenoide un campo magnetico \mathbf{B} uniforme, diretto come in figura, e di modulo



$$B = \mu_0 n i \quad , \quad (1)$$

dove n è la densità di spire per unità di lunghezza del solenoide (si veda l'esercizio P.5.11). Quindi

$$n = \frac{N}{l} \quad (2)$$

e la (1) diventa

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i \quad . \quad (3)$$

Il flusso del campo \mathbf{B} concatenato con la spira all'interno del solenoide è pari a

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \frac{N}{l} i \pi a^2 \quad , \quad (4)$$

dove il versore \mathbf{n} è stato scelto equiverso a \mathbf{B} .

Il flusso calcolato nell'equazione (4) varia nel tempo, in quanto varia la corrente i . La spira sarà quindi sede di una forza elettromotrice indotta f e conseguentemente di una corrente indotta pari a

$$i_{spira} = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 N \pi a^2}{Rl} \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 N \pi a^2 i_0}{Rl\tau} e^{-t/\tau} \quad , \quad (5)$$

dove la corrente i che circola nel solenoide è stata sostituita dalla sua espressione in funzione del tempo indicata nel testo del problema.

Per calcolare l'energia dissipata dopo un tempo pari a 3τ si deve integrare la potenza dissipata in questo intervallo di tempo

$$\mathcal{P} = f i_{spira} = R i_{spira}^2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 N \pi a^2 i_0}{l\tau} \right)^2 e^{-2t/\tau} \quad , \quad (6)$$

l'energia dissipata è quindi pari a

$$\begin{aligned} U_{diss} &= \int_0^{3\tau} \mathcal{P} dt = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 N \pi a^2 i_0}{l\tau} \right)^2 \int_0^{3\tau} e^{-2t/\tau} dt = \\ &= -\frac{1}{2R\tau} \left(\frac{\mu_0 N \pi a^2 i_0}{l} \right)^2 (e^{-6} - 1) = 3.89 \text{ pJ} \end{aligned} \quad (7)$$

Osservazione:

Il campo \mathbf{B} dentro il solenoide (equazione (1)) è stato calcolato considerando il solenoide di lunghezza infinita. Pur essendo il solenoide, in questo problema, di lunghezza finita, quella fatta è un'ottima approssimazione, soprattutto al centro del solenoide dove è posizionata la spira, in quanto la lunghezza l del solenoide è molto maggiore del raggio b della

sua sezione.

S.7.14.

Il coefficiente di autoinduzione L è definito come:

$$L = \frac{\Phi(\mathbf{B})}{I} , \quad (1)$$

dove $\Phi(\mathbf{B})$ è il flusso del campo magnetico generato nel solenoide e concatenato al solenoide stesso, mentre I è la corrente che circola nel solenoide ed è causa del suddetto campo magnetico \mathbf{B} .

Per il calcolo dell'induttanza L , assumiamo che nel solenoide scorra una corrente I . Questa dà luogo ad un campo \mathbf{B} uniforme all'interno del solenoide e di modulo

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad (2)$$

Il campo \mathbf{B} è parallelo all'asse del solenoide, quindi il flusso concatenato al solenoide stesso è pari a:

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \frac{N}{l} I N \pi a^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} I \quad (3)$$

L'induttanza L è quindi:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} , \quad (4)$$

da cui si ricava il raggio a

$$a = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{Ll}{\mu_0 \pi}} = 1.5 \text{ cm} \quad (5)$$

Osservazioni:

- (i) L'induttanza L del solenoide non dipende dalla corrente che lo attraversa ma solo dai suoi parametri geometrici (vedi equazione (4)). Il valore della corrente I può quindi essere scelto arbitrariamente nel calcolo di L , pur di considerare il flusso di \mathbf{B} conseguente.
- (ii) Nel calcolo del campo magnetico all'interno del solenoide si è considerato quest'ultimo come se fosse di lunghezza infinita. Al riguardo si veda l'Osservazione fatta nell'esercizio precedente.
- (iii) Per aumentare significativamente l'induttanza di un solenoide è possibile inserire al suo interno un materiale ferromagnetico. In questo caso:

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} \pi a^2 = \mu_r L_0 , \quad (6)$$

dove μ_r è la permeabilità magnetica relativa del mezzo inserito e L_0 è l'induttanza del

solenoido vuoto. L'incremento di induttanza può essere notevole in quanto μ_r raggiunge valori fino a $10^3 \div 10^4$.

S.7.15.

All'istante $t = 0$ il circuito si chiude e comincia a circolare la corrente i . La legge di Ohm per il circuito chiuso contiene la forza elettromotrice del generatore ΔV_0 , la forza elettromotrice autoindotta in virtù dell'induttanza L e la caduta di tensione sulla resistenza R :

$$\Delta V_0 - L \frac{di}{dt} = Ri \quad . \quad (1)$$

Questa equazione differenziale può essere risolta separando le variabili

$$\frac{di}{\Delta V_0 - Ri} = \frac{dt}{L} \quad (2)$$

ed integrando

$$-\frac{1}{R} \ln(\Delta V_0 - Ri) = \frac{t}{L} + \text{costante} \quad . \quad (3)$$

Moltiplicando per $-R$ ed elevando ad esponente con base e ambo i membri si ottiene:

$$\Delta V_0 - Ri = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (4)$$

ed infine

$$i = \frac{\Delta V_0}{R} - \frac{A}{R} e^{-t/\tau} \quad , \quad (5)$$

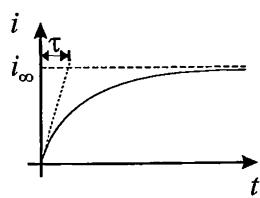
dove A è una costante che viene determinata con le condizioni iniziali, mentre τ , definita come

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (6)$$

è la costante di tempo del transitorio.

Imponendo nella (5) che al tempo $t = 0$ la corrente i sia nulla, si trova il valore di $A = \Delta V_0$. L'andamento temporale della corrente ha, quindi, l'espressione:

$$i = \frac{\Delta V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (7)$$



Il valore a regime della corrente è:

$$i_{\infty} = \frac{\Delta V_0}{R} \quad , \quad (8)$$

mentre l'energia immagazzinata nel solenoide a regime è data da:

$$U = \frac{1}{2} L i_{\infty}^2 = \frac{1}{2} L \frac{\Delta V_0^2}{R^2} \quad (9)$$

Osservazioni:

(i) Il valore della corrente a regime poteva essere calcolato direttamente a partire dall'equazione (1). A regime, infatti, le grandezze fisiche non variano più nel tempo e quindi

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad . \quad (10)$$

La (1) diventa

$$\Delta V_0 = R i_{\infty} \quad , \quad (11)$$

da cui si ricava

$$i_{\infty} = \frac{\Delta V_0}{R} \quad (12)$$

(ii) A rigore il valore a regime della corrente viene raggiunto in un tempo infinito, quindi praticamente mai. È importante notare, però, che grazie all'andamento esponenziale del transitorio, dopo un tempo $t = 5\tau$ il valore della corrente ha già raggiunto il 99% del valore a regime.

S.7.16.

La forza elettromotrice f_2 indotta nella spira a causa della corrente i_1 che circola nella bobina è un fenomeno di mutua induzione che può essere così descritto:

$$f_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad , \quad (1)$$

dove il coefficiente di mutua induzione M_{12} è definito come:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_2 dS_2}{i_1} \quad (2)$$

Inoltre, è possibile dimostrare che

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\Phi_{21}}{i_2} = M_{21} = M \quad (3)$$

Il coefficiente di mutua induzione tra due circuiti è quindi unico. Nel presente problema posso calcolare M come:

$$M = \frac{|f_2|}{\left| \frac{di_1}{dt} \right|} = \frac{|f_2|}{k} = 5 \text{ H} \quad . \quad (4)$$

Si sono considerati i moduli delle grandezze in quanto i segni sono legati alle convenzioni scelte sui due circuiti accoppiati, informazione che nel presente esercizio non è di interesse. Una corrente $i_2 = 2kt$ nella spira indurrebbe quindi nella bobina una forza elettromotrice f_1 pari a:

$$|f_1| = M \left| \frac{di_2}{dt} \right| = 2kM = 30 \text{ V} \quad (5)$$

S.7.17.

Il coefficiente di mutua induzione M è definito come:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_2} \quad (1)$$

Il flusso Φ_{21} attraverso la bobina più piccola può essere calcolato come:

$$\Phi_{21} = N_1 \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \, dS_1 = N_1 \int_{S_1} \frac{\mu_0 i_2 N_2}{2R} \, dS_1 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r^2 i_2}{2R} \quad , \quad (2)$$

dove, essendo $r \ll R$, si è considerato il campo \mathbf{B}_2 uniforme all'interno della bobina più piccola e di modulo pari al valore del campo generato nel centro della bobina più grande (si veda l'esercizio P.5.10).

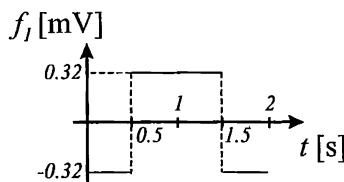
Il coefficiente di mutua induzione risulta quindi pari a :

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r^2}{2R} = 7.9 \times 10^{-5} \text{ H} \quad . \quad (3)$$

La forza elettromotrice f_1 indotta nella bobina piccola è espressa da:

$$f_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad (4)$$

e quindi



S.7.18.

Come già visto negli esercizi precedenti, il coefficiente di mutua induzione è definito come:

$$M = M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} \quad , \quad (1)$$

dove Φ_{12} è il flusso del campo magnetico \mathbf{B}_1 , generato dal filo (pedice 1), concatenato alla spira (pedice 2) e viceversa per Φ_{21} .

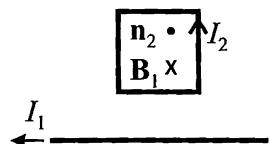
Nel presente esercizio è molto complicato calcolare Φ_{21} e quindi si preferisce determinare M a partire da Φ_{12} :

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 , \quad (2)$$

dove \mathbf{B}_1 ha modulo pari a

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} , \quad (3)$$

la sua direzione è ortogonale al foglio ed il verso entrante nella regione della spira (vedere esercizio P.5.7). Il versore \mathbf{n}_2 è stato invece scelto ortogonale alla spira e con verso uscente dal foglio per congruenza con il verso di scorrimento della corrente I_2 considerata positiva (vedere



Osservazione nella soluzione S.7.3). Di conseguenza, essendo i due vettori paralleli ma di verso opposto, il prodotto scalare nella (2) fornirà un risultato negativo. In virtù della dipendenza di \mathbf{B}_1 dalla sola variabile y , l'elemento di superficie dS_2 si può scrivere come

$$dS_2 = l dy \quad (4)$$

e la (2) diventa:

$$\Phi_{12} = - \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+l} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} l dy = - \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{\bar{y}+l}{\bar{y}} \quad (5)$$

Il coefficiente di mutua induzione M è quindi pari a

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{\bar{y}+l}{\bar{y}} \quad (6)$$

Un possibile procedimento per determinare la forza che il filo esercita sulla spira è quello di calcolare l'energia magnetica U_m del sistema, composto dai due circuiti posti ad una distanza generica \bar{y} , e di ricavare la forza mediante la relazione:

$$\mathbf{F} = \text{grad } U_m \quad (7)$$

L'energia magnetica del sistema in esame è data da:

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 , \quad (8)$$

dove L_1 ed L_2 sono, rispettivamente, il coefficiente di autoinduzione del filo rettilineo e della spira. Se le correnti I_1 ed I_2 sono costanti, cioè indipendenti dalla distanza relativa dei due circuiti, ed i circuiti sono rigidi (il che implica che anche L_1 ed L_2 siano costanti), allora l'energia magnetica dipende solo da \bar{y} tramite il coefficiente M . L'applicazione dell'operatore gradiente fornisce, quindi, la seguente relazione:

$$\mathbf{F} = \text{grad}(MI_1I_2) = \frac{d}{d\bar{y}}(MI_1I_2)\mathbf{u}_{\bar{y}} = -\frac{\mu_0lI_1I_2}{2\pi} \frac{d}{dy} \left(\ln \frac{\bar{y}+l}{\bar{y}} \right) \mathbf{u}_{\bar{y}} = \frac{\mu_0l^2I_1I_2}{2\pi\bar{y}(\bar{y}+l)} \mathbf{u}_{\bar{y}} \quad (9)$$

che calcolata per $\bar{y} = h$ fornisce:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0l^2I_1I_2}{2\pi h(h+l)} \mathbf{u}_{\bar{y}} \quad . \quad (10)$$

Osservazioni:

- (i) La forza che il filo esercita sulla spira è repulsiva. Lo stesso risultato si può ottenere, per verifica, applicando la seconda legge di Laplace ai lati della spira che si trovano paralleli al filo rettilineo. Come si potrà osservare la forza repulsiva sul lato più vicino al filo rettilineo è maggiore della forza attrattiva che il filo esercita sul lato più lontano. La loro risultante coinciderà con l'espressione ricavata nella (10).
- (ii) Il segno negativo del coefficiente di mutua induzione M è dovuto alla scelta del verso di \mathbf{n}_2 . Questa scelta è stata fatta allo scopo di poter utilizzare, nelle formule, la corrente I_2 con il segno positivo. La scelta opposta del verso di \mathbf{n}_2 avrebbe comportato un coefficiente di mutua induzione positivo, ma anche la necessità di inserire nelle formule la corrente I_2 con un segno meno davanti, portando quindi agli stessi risultati.
- (iii) È importante osservare che la formula che lega la forza all'energia magnetica del sistema (equazione (7)) non prevede il segno meno davanti all'operatore gradiente, al contrario di quanto accade nel caso dell'energia potenziale meccanica. Il motivo di questa differenza è che, nel caso dell'energia magnetica, il sistema non è isolato ma prevede anche la presenza di generatori di forza elettromotrice, necessari per mantenere le correnti costanti nei vari circuiti. Si può dimostrare che, a fronte di una perturbazione della posizione relativa dei circuiti, il lavoro fatto dai generatori per mantenere costante la corrente è opposto e pari al doppio della corrispondente variazione di energia magnetica del sistema. Di conseguenza, se consideriamo l'energia complessiva del sistema, possiamo applicare l'usuale formula

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U_{tot} = -\text{grad}(U_m + U_g) = -\text{grad } U_m - \text{grad } U_g \quad , \quad (11)$$

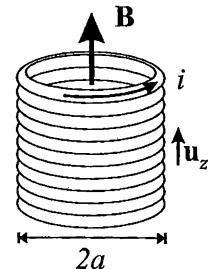
dove U_g è il lavoro elettrico fornito dai generatori. Per quanto detto precedentemente, la (11) diventa:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U_m + 2\text{grad } U_m = \text{grad } U_m \quad . \quad (12)$$

S.7.19.

Il campo magnetico in tutto lo spazio è determinato facilmente sapendo che un solenoide percorso da corrente genera un campo \mathbf{B} uniforme al suo interno e nullo all'esterno (si veda l'esercizio P.5.11) di modulo

$$B = \begin{cases} \mu_0 n i_0 e^{-t/\tau} & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a \end{cases} \quad (1)$$



e diretto come in figura.

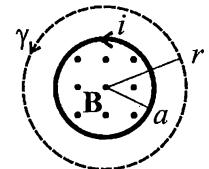
Un campo magnetico variabile nel tempo genera in tutto lo spazio un campo elettrico, a sua volta variabile nel tempo. Infatti, presa una linea chiusa γ qualsiasi, per la definizione di forza elettromotrice, la legge di Faraday si può scrivere come:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad , \quad (2)$$

dove $\Phi(\mathbf{B})$ è il flusso del campo magnetico concatenato con la linea chiusa γ . La (2) indica che un campo magnetico variabile nel tempo induce un campo elettrico la cui circuitazione lungo una linea chiusa è diversa da zero. Se lungo questa linea esiste un conduttore allora si genera anche una corrente indotta, altrimenti rimane solo un campo elettrico nello spazio.

Dalla simmetria del problema è possibile dedurre che le linee di campo di \mathbf{E} sono delle circonferenze con centro sull'asse del solenoide ed appartenenti ad un piano ortogonale all'asse stesso. Per determinare il modulo del campo elettrico indotto prendiamo come linea chiusa γ proprio una di queste circonferenze, di raggio r ed orientata in modo tale che il versore normale \mathbf{n} , determinato con la regola della mano destra, sia diretto come \mathbf{B} . In questo modo l'equazione (2) diventa:

$$E 2\pi r = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_z dS = -\bar{S} \frac{d}{dt} (\mu_0 n i_0 e^{-t/\tau}) \quad , \quad (3)$$



da cui si ottiene

$$E = \frac{\bar{S}}{2\pi r \tau} (\mu_0 n i_0 e^{-t/\tau}) \quad , \quad (4)$$

dove \bar{S} è la porzione di superficie, delimitata dalla linea γ , in cui il campo \mathbf{B} è diverso da zero:

$$\bar{S} = \begin{cases} \pi r^2 & \text{se } r < a \\ \pi a^2 & \text{se } r \geq a \end{cases} . \quad (5)$$

Il modulo del campo \mathbf{E} indotto in tutto lo spazio sarà quindi dato da:

$$E = \begin{cases} \frac{\mu_0 n i_0 e^{-t/\tau}}{2\tau} r & \text{se } r < a \\ \frac{\mu_0 a^2 n i_0 e^{-t/\tau}}{2\tau r} & \text{se } r \geq a \end{cases} . \quad (6)$$

S.7.20.

Prima di risolvere nel dettaglio l'esercizio, è utile discutere brevemente i principali fenomeni fisici che intervengono. Alla chiusura dell'interruttore il generatore di forza elettromotrice comincerà a caricare il condensatore portando cariche di segno opposto sulle due armature. All'interno del condensatore, invece, non essendoci un mezzo conduttivo, non si può avere passaggio di carica e quindi la corrente di conduzione è nulla. Per l'equazione di continuità in condizioni non stazionarie, la corrente di conduzione che fluisce nel circuito, durante la carica del condensatore, sarà uguale alla corrente di spostamento nel condensatore. La densità di corrente di spostamento nel condensatore è definita come:

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} , \quad (1)$$

ed è causa di un campo magnetico nel condensatore come previsto dal teorema della circolazione di Ampere:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} d\Sigma , \quad (2)$$

dove γ è una qualsiasi linea chiusa all'interno del condensatore e Σ è una superficie delimitata da γ . Dall'equazione (2) è possibile dedurre che se la corrente di spostamento varia nel tempo, allora anche \mathbf{B} all'interno del condensatore, e quindi nel solenoide, varia nel tempo. Un flusso variabile di \mathbf{B} concatenato al solenoide genera una corrente indotta che porta ad un passaggio di carica. A regime, il condensatore raggiunge ai suoi capi la stessa differenza di potenziale del generatore di forza elettromotrice e la corrente cessa di scorrere, sia essa di conduzione o di spostamento, e così termina anche la corrente indotta nel solenoide. Il passaggio di carica attraverso il solenoide è quindi una quantità finita. Affrontiamo ora analiticamente i diversi processi descritti, cominciando dalla carica del condensatore. La legge di Ohm, per il circuito in esame, è:

$$\Delta V_0 - \Delta V = R_1 i , \quad (3)$$

dove ΔV è la differenza di potenziale ai capi del condensatore. La corrente i che scorre nel circuito può essere espressa derivando la relazione che lega la carica sul condensatore alla differenza di potenziale ai suoi capi:

$$q = C \Delta V \Rightarrow i = C \frac{d(\Delta V)}{dt} , \quad (4)$$

dove C è la capacità del condensatore. Inserendo l'espressione della corrente nell'equazio-

ne (3) si ottiene:

$$\Delta V_0 - \Delta V = R_1 C \frac{d(\Delta V)}{dt} \quad (5)$$

La precedente equazione può essere integrata separando le variabili:

$$\frac{d(\Delta V)}{\Delta V_0 - \Delta V} = \frac{dt}{R_1 C} \Rightarrow -\ln(\Delta V_0 - \Delta V) = \frac{t}{\tau} + \text{costante} \quad , \quad (6)$$

dove $\tau = R_1 C$ è la costante di tempo del processo. Cambiando i segni ed elevando entrambi i membri con base e , si arriva infine all'espressione

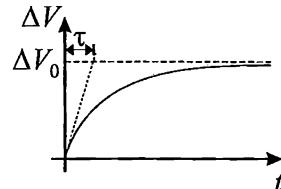
$$\Delta V = \Delta V_0 - k e^{-t/\tau} \quad , \quad (7)$$

dove k è una costante che viene determinata imponendo le condizioni iniziali:

$$\Delta V(t=0) = 0 \Rightarrow k = \Delta V_0 \quad (8)$$

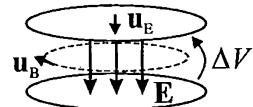
e quindi

$$\Delta V = \Delta V_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (9)$$



Conoscendo la differenza di potenziale ai capi del condensatore si è ora in grado di determinare il campo elettrico \mathbf{E} al suo interno. Se si considera il condensatore piano come se fosse ad armature infinite (approssimazione valida in quanto l'estensione delle armature è molto maggiore della loro distanza), allora il campo elettrico al suo interno è uniforme e di modulo:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \quad (10)$$



Definendo un versore \mathbf{u}_E , diretto come in figura, possiamo quindi esprimere il campo elettrico come:

$$\mathbf{E} = \frac{\Delta V_0}{d} (1 - e^{-t/\tau}) \mathbf{u}_E \quad . \quad (11)$$

La densità di corrente di spostamento all'interno del condensatore è quindi parallela ad \mathbf{E} ed ha la seguente espressione:

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\epsilon_0 \Delta V_0}{\tau d} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_E \quad (12)$$

Dalla simmetria del problema si può dedurre che le linee di campo di \mathbf{B} , generato dalla corrente di spostamento, sono circonferenze concentriche disposte su di un piano parallelo

alle armature del condensatore. Si consideri ora la linea di campo di raggio a che passa all'interno del solenoide toroidale. Applicando il teorema della circuitazione di Ampere (equazione 2) a questa linea ed introducendo il versore \mathbf{u}_B , sempre tangente e con verso riportato in figura, si ottiene:

$$B \cdot 2\pi a = \mu_0 J_s \pi a^2 \quad , \quad (13)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 a \Delta V_0}{2\tau d} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_B \quad . \quad (14)$$

Poiché la sezione del solenoide toroidale ha dimensioni molto minori del suo raggio, il campo magnetico al suo interno può essere considerato uniforme e pari al valore determinato per la linea di raggio a . Il flusso di \mathbf{B} concatenato al solenoide sarà quindi:

$$\Phi(\mathbf{B}) = B N S \quad (15)$$

La carica che attraversa il solenoide può essere determinata mediante la legge di Felici (vedere la Soluzione S.7.6):

$$Q = -\frac{1}{R_2} (\Phi_f - \Phi_i) = -\frac{NS}{R_2} [B(t_f) - B(t_i)] \quad , \quad (16)$$

dove $t_i = 0$, mentre $t_f \rightarrow +\infty$, quindi $B(t_f) = 0$ e

$$Q = \frac{\mu_0 \epsilon_0 a \Delta V_0 N S}{2R_2 \tau d} \quad . \quad (17)$$

Ricordando che la capacità di un condensatore ad armature piane infinite è

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad , \quad (18)$$

è possibile esplicitare la costante di tempo τ :

$$\tau = R_1 C = R_1 \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad , \quad (19)$$

che, sostituita nella (17), permette di arrivare al risultato finale:

$$Q = \frac{\mu_0 a \Delta V_0 N S}{2R_1 R_2 A} \quad (20)$$

Osservazione:

È importante osservare che nella risoluzione di questo esercizio, come nella maggior parte degli esercizi risolti in questo capitolo, si è implicitamente assunto che le variazioni delle

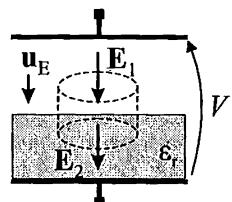
grandezze fisiche (potenziali, correnti, campi elettrici e magnetici,...) siano sufficientemente lente da produrre effetti trascurabili nel tempo impiegato dai segnali elettromagnetici per propagarsi lungo tutto il circuito. Questo significa che le grandezze fisiche si assestano su di un valore omogeneo su tutto il circuito prima che intervengano nuove variazioni apprezzabili. Questa ipotesi è detta di *quasi-stazionarietà* o di *campi lentamente variabili*. Se questa ipotesi è soddisfatta, risulta allora corretto utilizzare le relazioni tipiche del regime stazionario (legge di Ohm, potenziale elettrostatico, teorema della circuitazione di Ampere,...) pur di considerarle come relazioni istantanee.

Nel merito del presente esercizio, l'ipotesi di quasi-stazionarietà è ragionevolmente verificata in quanto una tipica costante di tempo potrebbe essere $\tau = 10^{-4}$ s (se ad esempio $R_1 = 100 \Omega$ e $C = 1 \mu\text{F}$), mentre il tempo impiegato da un segnale elettromagnetico per propagarsi alla velocità della luce lungo l'intera estensione del circuito (qualche centimetro) è dell'ordine di 10^{-10} s.

S.7.21.

Il condensatore si può considerare come se fosse ad armature infinite, infatti $h_1 + h_2 \ll a$. Il campo elettrico al suo interno è quindi ortogonale alle armature ed uniforme sia nel vuoto che nel dielettrico, pur avendo due valori diversi nelle due regioni. La relazione tra i due valori di campo elettrico si può determinare applicando opportunamente il teorema di Gauss al volume rappresentato in figura:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q_{lib} , \quad (1)$$



dove Q_{lib} è la carica libera che si trova all'interno del volume considerato, nel nostro caso pari a zero. Il flusso di \mathbf{D} ha contributo non nullo solo attraverso le basi del cilindro di area A , infatti $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ ed è parallelo all'asse del cilindro.

Il teorema di Gauss diventa quindi:

$$-\epsilon_0 E_1 A + \epsilon_0 \epsilon_r E_2 A = 0 , \quad (2)$$

da cui si ricava

$$E_1 = \epsilon_r E_2 \quad (3)$$

La differenza di potenziale V ai capi del condensatore è pari, per definizione, all'integrale del campo elettrico al suo interno. Essendo il campo elettrico uniforme sia nel dielettrico che nel vuoto il calcolo del potenziale si risolve semplicemente nell'equazione

$$V = E_1 h_1 + E_2 h_2 , \quad (4)$$

che, mediante la relazione (3), permette di ricavare

$$E_1 = \frac{\epsilon_r V}{\epsilon_r h_1 + h_2} ; \quad E_2 = \frac{V}{\epsilon_r h_1 + h_2} \quad (5)$$

Se si introduce un versore \mathbf{u}_E diretto come in figura, allora l'espressione vettoriale dei due campi elettrici sarà:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\epsilon_r V_0 \sin \omega t}{\epsilon_r h_1 + h_2} \mathbf{u}_E \quad ; \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{V_0 \sin \omega t}{\epsilon_r h_1 + h_2} \mathbf{u}_E \quad (7)$$

I due campi elettrici variabili nel tempo sono responsabili di una densità di corrente di spostamento nelle rispettive regioni:

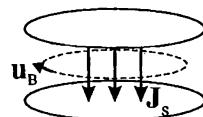
$$\mathbf{J}_{s1} = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}_1}{dt} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0 \omega \cos \omega t}{\epsilon_r h_1 + h_2} \mathbf{u}_E \quad ; \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_{s2} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{d\mathbf{E}_2}{dt} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0 \omega \cos \omega t}{\epsilon_r h_1 + h_2} \mathbf{u}_E \quad . \quad (9)$$

Si può osservare che

$$\mathbf{J}_{s1} = \mathbf{J}_{s2} = \mathbf{J}_s \quad , \quad (10)$$

in accordo con l'equazione di continuità in condizioni non stazionarie. La densità di corrente di spostamento genera un campo magnetico, le cui linee di campo, per la simmetria del problema, sono circonferenze concentriche disposte su un piano parallelo alle armature del condensatore e di verso rappresentato in figura.



Applicando il teorema della circuitazione di Ampere (eq. 2 nel precedente esercizio) ad una di queste linee di campo con raggio $r < a$ si ottiene:

$$B 2\pi r = \mu_0 J_s \pi r^2 \quad , \quad (11)$$

da cui

$$B = \frac{\mu_0 J_s r}{2} \quad (12)$$

Introducendo un opportuno versore \mathbf{u}_B sempre tangente alla linea di campo si può infine concludere che

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r \epsilon_0 \epsilon_r V_0 \omega \cos \omega t}{2(\epsilon_r h_1 + h_2)} \mathbf{u}_B \quad . \quad (13)$$

Osservazione

Come già discusso nell'Osservazione all'esercizio precedente, anche in questo caso si è fatta l'ipotesi di quasi-stazionarietà. Il calcolo del potenziale come integrale del campo elettrico è infatti possibile solo nel caso in cui quest'ultimo sia irrotazionale. Affinché questa condizione sia verificata è necessario che

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0 \quad . \quad (14)$$

Come si può facilmente verificare a partire dall'equazione (13), questa condizione non è soddisfatta e quindi l'esercizio non potrebbe essere risolto con questo procedimento. La condizione (14) risulta però ragionevolmente soddisfatta se ω è opportunamente piccolo, cioè in condizioni di campi lentamente variabili.

S.7.22.

Il campo magnetico all'interno del solenoide avrà la seguente espressione (si veda l'esercizio P.5.11):

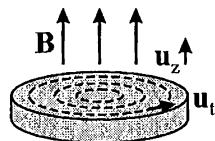
$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{u}_z = \mu_0 n k t \mathbf{u}_z \quad (1)$$

Dalla terza equazione di Maxwell:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad (2)$$

si ricava che un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico. Dalla simmetria del problema si può dedurre che le linee di flusso del campo elettrico indotto sono circonference concentriche appartenenti ad un piano ortogonale ad \mathbf{u}_z , con verso riportato in figura. Applicando la legge di Faraday ad una linea di campo γ di raggio r , si ottiene:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad \Rightarrow \quad E 2\pi r = - \frac{d}{dt} (\pi r^2 \mu_0 n k t) = - \pi r^2 \mu_0 n k \quad (3)$$



da cui si ricava il campo elettromotore

$$\mathbf{E} = - \frac{\mu_0 n k r}{2} \mathbf{u}_t \quad , \quad (4)$$

dove il segno meno indica che il campo \mathbf{E} è diretto con verso opposto rispetto a quello del versore \mathbf{u}_t , tangente in ogni punto alla linea di campo e diretto come in figura.

Un campo elettromotore all'interno di un conduttore induce una corrente, la cui densità \mathbf{J} è collegata al campo mediante la legge di Ohm in forma locale:

$$\mathbf{J} = \mathbf{g} \mathbf{E} = - \frac{\mathbf{g} \mu_0 n k r}{2} \mathbf{u}_t \quad , \quad (5)$$

dove \mathfrak{g} è la conducibilità del disco conduttore.

La potenza \wp dissipata per unità di volume per effetto Joule è pari a

$$\wp = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathfrak{g}\mu_0^2 n^2 k^2 r^2}{4} \quad (6)$$

Integrando \wp su tutto il volume del conduttore si trova la potenza totale dissipata:

$$\mathcal{P} = \int_{\tau} \wp d\tau = \int_0^a \frac{\mathfrak{g}\mu_0^2 n^2 k^2 r^2}{4} 2\pi r h dr = \frac{\mathfrak{g}\mu_0^2 n^2 k^2 \pi h}{2} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mathfrak{g}\mu_0^2 n^2 k^2 \pi h a^4}{8} \quad , \quad (7)$$

dove l'integrale di volume è stato calcolato dividendo il disco in gusci cilindrici infinitesimi di volume $d\tau = 2\pi r h dr$.

Osservazione:

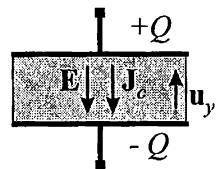
Le correnti che dissipano potenza nel conduttore secondo il meccanismo appena descritto sono dette *correnti parassite* o *di Foucault*. L'insorgere di queste correnti costituisce un problema reale in tutti quei dispositivi elettrotecnicici in cui un nucleo ferromagnetico è posto all'interno di un avvolgimento percorso da corrente variabile nel tempo. Per limitare questa causa di dissipazione si utilizzano dei nuclei metallici composti da tanti lamierini di conduttore disposti parallelamente alle linee di campo di \mathbf{B} e separati da strati di vernice isolante. In questo modo si riesce a diminuire significativamente la conducibilità del conduttore lungo le linee chiuse su cui agisce il campo elettromotore \mathbf{E} e quindi si minimizza la potenza dissipata.

Esistono però applicazioni in cui queste correnti tornano utili, come ad esempio nei fornì ad induzione. In questo caso, il riscaldamento a seguito della dissipazione di potenza per effetto Joule viene sfruttato per fondere i metalli mediante l'applicazione di campi magnetici variabili con elevata frequenza.

S.7.23.

Consideriamo il condensatore ad armature piane infinite, infatti $d \ll \sqrt{S}$, e quindi il campo elettrico al suo interno può essere espresso in ogni istante come

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{u}_y = -\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \mathbf{u}_y \quad . \quad (1)$$



La corrente di conduzione all'interno del dielettrico imperfetto può essere, quindi, determinata mediante la legge di Ohm in forma locale come

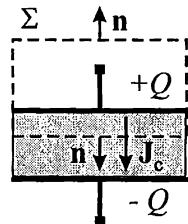
$$\mathbf{J}_c = \mathfrak{g} \mathbf{E} = -\frac{\mathfrak{g} Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \mathbf{u}_y \quad . \quad (2)$$

Per determinare l'effettiva dipendenza temporale sia di \mathbf{E} che di \mathbf{J} è necessario calcolare come varia nel tempo la carica Q sulle armature durante la scarica. A tale scopo utilizziamo l'equazione di continuità:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t} , \quad (3)$$

dove ρ è la densità volumetrica di carica libera. Se si integra la precedente equazione su di un volume \mathcal{V} , come quello riportato in figura, la cui superficie delimitante Σ contiene l'armatura superiore del condensatore, si ottiene:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n} d\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = -\frac{\partial Q}{\partial t} , \quad (4)$$



infatti l'unica carica libera contenuta nel volume \mathcal{V} è la carica Q che si trova sull'armatura. Sostituendo l'equazione (2) nella (4) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{gQ}{\epsilon_0 \epsilon_r S} S = -\frac{gQ}{\epsilon_0 \epsilon_r} , \quad (5)$$

la cui soluzione è:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} , \quad (6)$$

dove la costante di tempo τ è pari a

$$\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{g} \quad (7)$$

Sostituendo il risultato ottenuto nell'equazione (6) nelle equazioni (1) e (2) si arriva alle seguenti espressioni per il campo elettrico \mathbf{E} e per la corrente di conduzione \mathbf{J}_c :

$$\mathbf{E} = -\frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_y ; \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_c = -\frac{gQ_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_y \quad (9)$$

Essendo il campo elettrico uniforme all'interno del condensatore, la differenza di potenziale tra le sue armature è pari a:

$$\Delta V = E d = \frac{Q_0 d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} e^{-t/\tau} \quad (10)$$

La corrente di spostamento è invece data da

$$\mathbf{J}_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\tau} \frac{Q_0}{S \epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_y ; \quad (11)$$

ricordando la definizione di τ (7), si arriva a

$$\mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{g}Q_0}{S\epsilon_0\epsilon_r} e^{-tg/(\epsilon_0\epsilon_r)} \mathbf{u}_y \quad . \quad (12)$$

Osservazione:

Si noti che all'interno del condensatore

$$\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s = 0 \quad . \quad (13)$$

Questo risultato è in accordo con l'equazione di continuità per un condensatore isolato ed inoltre implica che il campo magnetico all'interno del condensatore sia nullo, nonostante la presenza di campi elettrici variabili. L'espressione del campo elettrico è quindi esatta, e cioè tutto il campo elettrico è di tipo elettrostatico nonostante il regime non stazionario: non si deve perciò introdurre in questo problema alcuna ipotesi di campi lentamente variabili.

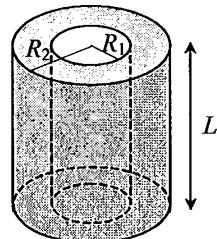
S.7.24.

Data la simmetria del problema, le linee di forza del campo elettrico \mathbf{E} sono radiali (perpendicolari all'asse del cilindro) e il campo ha lo stesso modulo su una superficie cilindrica di raggio arbitrario r coassiale con il condensatore assegnato. Assumendo come superficie di Gauss una superficie cilindrica Σ di raggio r ($R_1 < r < R_2$) e altezza L , applicando il teorema di Gauss si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 2\pi r L E = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{Q(t)}{2\pi\epsilon_0 L r} \mathbf{u}_r \quad (1)$$

essendo $Q(t)$ la carica sulle armature del condensatore all'istante t e \mathbf{u}_r il versore radiale uscente dall'asse del condensatore. Dobbiamo ora calcolare $Q(t)$ durante il processo di scarica del condensatore. Osserviamo innanzitutto che il dispositivo assegnato si può schematizzare come un condensatore di capacità C in parallelo ad un resistore di resistenza R , come mostrato in figura. Determiniamo, in base ai dati del problema, C e R . Per calcolare C valutiamo dapprima la differenza di potenziale fra le armature del condensatore:

$$\Delta V_C = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q(t)}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q(t)}{2\pi\epsilon_0 L} \log \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$



La capacità C è quindi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V_C} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log(R_2/R_1)} \quad (3)$$

Determiniamo ora la resistenza R presentata dal materiale che riempie lo spazio fra le armature del condensatore. Possiamo pensare il materiale di resistività τ come una sequenza di gusci cilindrici, ciascuno di spessore dr , collegati in serie. Tale scomposizione

ha senso perchè la densità di corrente di conduzione, \mathbf{J}_c , ha direzione radiale, ed è quindi ortogonale alle superfici di ciascuno di questi gusci cilindrici. Dato che la resistenza dR di ciascun guscio sferico è data da

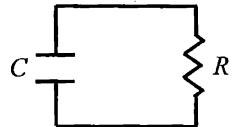
$$dR = \tau \frac{dr}{2\pi r L} \quad (4)$$

si ha:

$$R = \frac{\tau}{2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi L} \log \frac{R_2}{R_1} \quad (5)$$

Possiamo ora calcolare la carica sulle armature del condensatore durante il processo di scarica. Poichè la differenza di potenziale all'istante t ai capi del resistore è pari a $\Delta V_C(t)$, utilizzando la legge di Ohm risulta:

$$\Delta V_C(t) = R i(t) \quad (6)$$



Si ha quindi:

$$\frac{Q(t)}{C} = R i(t) \quad (7)$$

Nell'intervallo di tempo dt il resistore è attraversato dalla carica $i(t) dt$, che, per la conservazione della carica, rappresenta anche la *diminuzione* della carica $Q(t)$ sulle armature del condensatore, quindi:

$$-dQ = i(t) dt \quad \Rightarrow \quad i(t) = -\frac{dQ}{dt} \quad (8)$$

Sostituendo la (8) nella (7) si ottiene:

$$\frac{Q(t)}{C} = -R \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \quad (9)$$

L'equazione differenziale (9) si risolve in modo semplice, ricordando che, all'inizio del processo di scarica ($t = 0$), si ha $Q(0) = Q_0$:

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (10)$$

Usando le (3) e (5) si ottiene:

$$RC = \tau \epsilon_0 \quad (11)$$

Sostituendo la (10) nella (1), e tenendo conto della (11) si ha:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_0}{2\pi \epsilon_0 L r} \exp\left(-\frac{t}{\tau \epsilon_0}\right) \mathbf{u}_r \quad (12)$$

Possiamo ora determinare la densità di corrente di spostamento:

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{Q_0}{2\pi L r} \frac{1}{\tau \epsilon_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau \epsilon_0}\right) \mathbf{u}_r = -\frac{\mathbf{E}}{\tau} \quad (13)$$

Poichè la densità di corrente di conduzione è:

$$\mathbf{J}_c = \frac{\mathbf{E}}{\epsilon_r} \quad (14)$$

si ha:

$$\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s = 0 \quad (15)$$

Quindi:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s) = 0 \quad (16)$$

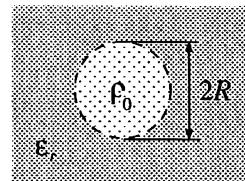
Ricordando che è anche $\text{div } \mathbf{B} = \mathbf{0}$, si ottiene che $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

S.7.25.

Per risolvere il problema faremo uso delle equazioni di Maxwell:

$$\text{div } \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$



$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_c + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s) \quad (1)$$

dove \mathbf{E} e \mathbf{B} sono rispettivamente i campi elettrico e magnetico; \mathbf{J}_c e \mathbf{J}_s rispettivamente la densità di corrente di conduzione e di spostamento; ρ la densità di volume di carica libera presente nel materiale; ϵ_r la costante dielettrica relativa del mezzo considerato. A tali equazioni aggiungiamo la *relazione costitutiva* del materiale:

$$\mathbf{J}_c = g \mathbf{E}, \quad (2)$$

essendo g la conducibilità del materiale. Dalle equazioni (1) deriva l'equazione di continuità della carica:

$$\text{div } \mathbf{J}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Sostituendo nella (3) la (2) ed assumendo che la conducibilità sia uniforme, si ottiene:

$$g \text{ div } \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad (4)$$

sostituendo nella (4) la seconda delle (1), otteniamo infine:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon_0 \epsilon_r} \rho = 0. \quad (5)$$

Si noti che nella (5) non vi è alcun riferimento esplicito alla dipendenza spaziale, benché ρ sia funzione del tempo e dello spazio. Pertanto potremo porre come soluzione della (5) la legge:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}, t) e^{-t/\tau}, \quad (6)$$

dove \mathbf{r} è il generico vettore posizione e la costante temporale ad esponente è pari a

$$\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{g}; \quad (7)$$

la densità iniziale di carica ρ_0 , presente all'istante $t = 0$, è invece pari a:

$$\rho_0(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \rho_0 & |\mathbf{r}| \leq R \\ 0 & |\mathbf{r}| > R \end{cases} \quad (8)$$

con R raggio della regione sferica considerata. Ne deriva che la carica, lì dove inizialmente era assente, continua ad essere nulla; viceversa, nella regione in cui c'era carica iniziale, ρ decade nel tempo con legge esponenziale, ma si mantiene spazialmente uniforme.

Per calcolare i campi e le correnti presenti nella regione, faremo l'ipotesi semplificativa che il campo elettrico sia ovunque irrotazionale. Per tale ipotesi, che andrà verificata al termine della soluzione, \mathbf{E} è completamente determinato dalla seconda delle (1) (ovvero dal teorema di Gauss). In virtù della simmetria sferica della distribuzione di carica, porremo $\mathbf{E} = E(r, t) \mathbf{u}_r$, ove $r = |\mathbf{r}|$ ed \mathbf{u}_r è un versore radiale diretto verso l'esterno. Applicando il teorema di Gauss, risulta che

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi r^2 E(r, t) = \frac{Q_{\Sigma}(t)}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad (9)$$

dove Σ è una superficie gaussiana di forma sferica e raggio r , centrata nel centro della distribuzione di carica; \mathbf{n} la normale uscente da tale superficie; $Q_{\Sigma}(t)$ la carica contenuta all'istante t all'interno di Σ . Risulta che:

$$Q_{\Sigma}(t) = \int_{\Sigma} \rho(r, t) d\tau = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r, t) dr, \quad (10)$$

essendo τ_{Σ} il volume racchiuso da Σ . Con l'aiuto della (8), la (10) diviene:

$$Q_{\Sigma}(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 e^{-t/\tau} & r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 e^{-t/\tau} & r > R \end{cases} \quad (11)$$

che, sostituita nella (9) e tenendo conto della simmetria sferica, ci consente di calcolare il campo elettrico:

$$\mathbf{E}(r, t) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{3\epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r \leq R \\ \frac{R^3 \rho_0}{3r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r > R \end{cases} \quad (12)$$

La corrente di conduzione, in base alla (2), sarà allora pari a:

$$\mathbf{J}_c(r, t) = g \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{r\rho_0 g}{3\epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r \leq R \\ \frac{R^3 \rho_0 g}{3r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r > R \end{cases} \quad (13)$$

mentre la corrente di spostamento \mathbf{J}_s sarà data da:

$$\mathbf{J}_s(r, t) = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{1}{\tau} \frac{r \rho_0}{3} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r \leq R \\ -\frac{1}{\tau} \frac{R^3 \rho_0}{3r^2} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r > R \end{cases} \quad (14)$$

Si noti tuttavia che, sostituendo la (7) nella (14) e confrontando quest'ultima con la (13), si verifica agevolmente la relazione

$$\mathbf{J}_c(r, t) + \mathbf{J}_s(r, t) = \mathbf{0}, \quad (15)$$

in qualunque posizione e per qualsiasi istante. Sostituendo tale relazione nella quarta delle (1), si ottiene allora:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad (16)$$

si rammenti che anche la divergenza di \mathbf{B} è nulla (per la prima delle (1)); un campo che abbia contemporaneamente divergenza e rotore nulli è nullo. Pertanto $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Sostituendo tale risultato nella terza delle (1), otteniamo anche che $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$, coerentemente con le ipotesi inizialmente poste, che dunque risultano valide.

S.7.26.

Supporremo per il momento che il campo elettrico \mathbf{E} sia conservativo; inoltre, nell'ipotesi di poter trascurare gli effetti di bordo, il campo sarà non nullo solo all'interno del condensatore. In base a tali ipotesi procediamo col calcolo di \mathbf{E} con gli stessi procedimenti adottati in elettrostatica. Chiameremo con \mathbf{E}_a ed \mathbf{E}_b i campi elettrici nelle due zone del condensatore rispettivamente di spessore a e b (si veda la figura); individuato un asse z (dotato di versore \mathbf{u}_z) perpendicolare alle armature, porremo:

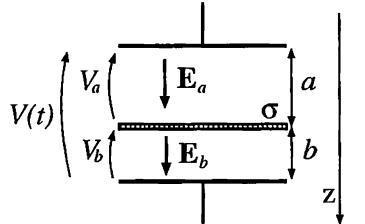
$$\mathbf{E}_a(t) = E_a(t) \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{E}_b(t) = E_b(t) \mathbf{u}_z. \quad (1)$$

In base alle condizioni al contorno per la componente normale di \mathbf{E} in prossimità del disco isolante carico, possiamo porre:

$$E_b(t) - E_a(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

essendo σ la densità di carica superficiale presente sul disco; si noti che tale condizione può anche essere ricavata applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica perpendicolare al disco, a cavallo di questi. La differenza di potenziale $V(t) = V_0 \sin \omega t$ ai capi del condensatore è pari alla somma delle differenze di potenziale V_a e V_b presenti ai capi delle due zone in cui il condensatore è diviso (si veda la figura). Possiamo quindi porre:

$$V(t) = V_a(t) + V_b(t) = aE_a(t) + bE_b(t), \quad (3)$$



dove le due differenze di potenziale sono state calcolate assumendo che il campo elettrico sia uniforme in ciascuna delle due zone. Sostituendo la (2) nella (3), si ottiene infine:

$$\mathbf{E}_a = \frac{\epsilon_0 V(t) - \sigma b}{\epsilon_0(a+b)} \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{E}_b = \frac{\epsilon_0 V(t) + \sigma a}{\epsilon_0(a+b)} \mathbf{u}_z. \quad (4)$$

Passiamo a calcolare il campo magnetico \mathbf{B} ; si rammenta che valgono le relazioni:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_c + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s) \quad (5)$$

essendo \mathbf{J}_c e \mathbf{J}_s rispettivamente la densità di corrente di conduzione e di spostamento; si noti che \mathbf{J}_c è nulla all'interno del condensatore, per cui:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6)$$

Sostituendo nella (6) una delle (4) (si noti che il risultato è lo stesso nelle due zone), si ottiene:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega V_0}{a+b} \cos \omega t \mathbf{u}_z; \quad (7)$$

applichiamo a tale equazione il teorema di Stokes:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_{\gamma}} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (8)$$

dove γ è un percorso chiuso orientato, S_{γ} la superficie racchiusa da γ ed \mathbf{n} la normale ad S_{γ} orientata nel verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di γ . Sceglieremo per comodità una linea γ circolare, centrata sull'asse del condensatore e giacente nel piano parallelo alle armature, di raggio r . In virtù della simmetria cilindrica del sistema, possiamo riscrivere il campo magnetico nella forma:

$$\mathbf{B}(t) = B(r, t) \mathbf{u}_t, \quad (9)$$

con \mathbf{u}_t versore tangente a γ , diretto nel verso di percorrenza della linea. Sostituendo la (7) e la (9) nella (8) e tenuto conto che $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_z$, si giunge a scrivere :

$$2\pi r B(r, t) = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \omega V_0}{a+b} \cos \omega t, \quad (10)$$

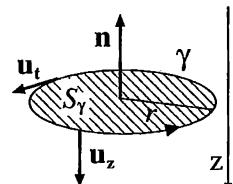
da cui:

$$\mathbf{B}(r, t) = B(r, t) \mathbf{u}_t = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 r \omega V_0}{2(a+b)} \cos \omega t \mathbf{u}_t. \quad (11)$$

Si noti tuttavia che

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (12)$$

sostituendo la (11) nella (12), otteniamo:



$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 r \omega^2 V_0}{2(a+b)} \sin \omega t \mathbf{u}_t \neq 0; \quad (13)$$

pertanto l'ipotesi iniziale di irrotazionalità del campo elettrico non risulta soddisfatta. Ciò comporta che la soluzione fin qui determinata non è esatta, ma può considerarsi accettabile solo se $\omega \rightarrow 0$, di modo che $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ divenga trascurabile.

Per giungere ad una soluzione esatta, procediamo nel seguente modo: assumiamo che il campo elettrico possa scriversi come la somma di un termine conservativo \mathbf{E}_0 (tale che $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0$ e $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 \neq 0$) più un termine non conservativo \mathbf{E}_{nc} (tale che $\operatorname{rot} \mathbf{E}_{nc} \neq 0$, ma $\operatorname{div} \mathbf{E}_{nc} = 0$). Si dimostra⁽¹⁾ che tale scomposizione è unica ed in particolare che il termine conservativo coincide con il risultato riportato nelle equazioni (4). Determiniamo ora i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} in modo iterativo. Assumiamo che essi possano scriversi come la somma di infiniti termini del tipo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{nc}, \quad (14)$$

e

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i. \quad (15)$$

Per determinare i vari termini della serie si procede nel seguente modo: calcolato il termine \mathbf{E}_0 , lo si sostituisce nella equazione (6) da cui si determina il termine \mathbf{B}_0 . Si noti che \mathbf{B}_0 è stato già calcolato (si veda l'equazione (11)). Si sostituisce poi \mathbf{B}_0 nella equazione (12), da cui si ricava il termine \mathbf{E}_1 . A tal punto si ripete il procedimento per determinare \mathbf{B}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{B}_2 e così via. In particolare, ponendo

$$A = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega V_0}{2(a+b)} \quad (16)$$

si avrà:

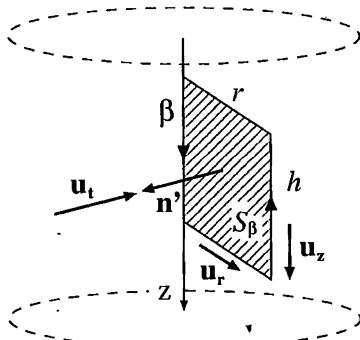
$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = -A r \omega \sin \omega t \mathbf{u}_t. \quad (17)$$

Applichiamo a questa equazione il teorema di Stokes:

$$\oint_{\beta} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_{\beta}} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}' dS, \quad (18)$$

dove β è un percorso chiuso orientato (si veda in figura), S_{β} la superficie racchiusa da β ed \mathbf{n}' la normale ad S_{β} orientata nel verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di β . Sceglieremo per comodità una linea β rettangolare, con un lato coincidente con l'asse del condensatore e lunghezza h , e l'altro lato di lunghezza r . Assumeremo che,

¹ La dimostrazione va ben al di là degli scopi di questo testo. Si noti tuttavia che il termine non conservativo ha divergenza nulla e quindi non contribuisce al flusso del campo elettrico. Pertanto tale termine non influenza il teorema di Gauss, che è stato impiegato indirettamente per determinare le (4).



per la simmetria del sistema, si possa scrivere $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{u}_z$ e che E_1 sia nullo sull'asse del condensatore; inoltre osserviamo che $\mathbf{n}' = -\mathbf{u}_t$. La (18) diviene dunque:

$$-E_1 h = A\omega \sin \omega t \int_0^r r h dr = \frac{Ar^2 h}{2} \omega \sin \omega t, \quad (19)$$

da cui

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{Ar^2}{2} \omega \sin \omega t \mathbf{u}_z. \quad (20)$$

La (20), sostituita nella (6), dà la:

$$\text{rot } \mathbf{B}_1 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = -\frac{A\mu_0 \epsilon_0 r^2 \omega^2}{2} \cos \omega t \mathbf{u}_z. \quad (21)$$

Assumendo, per la simmetrica cilindrica, di poter scrivere $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{u}_t$, applichiamo ancora una volta il teorema di Stokes alla linea γ precedentemente introdotta; si ottiene così:

$$2\pi r B_1 = \frac{A\mu_0 \epsilon_0 \omega^2}{2} \cos \omega t \int_0^r r^2 2\pi r dr = 2\pi \frac{A\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 r^4}{8} \cos \omega t, \quad (22)$$

da cui:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{A\mu_0 \epsilon_0 r^3 \omega^2}{8} \cos \omega t \mathbf{u}_t. \quad (23)$$

Si verifica che, procedendo con l'iterazione, si ottiene:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{A\mu_0 \epsilon_0 r^4 \omega^3}{32} \sin \omega t \mathbf{u}_z, \quad (24)$$

e

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{A\mu_0^2 \epsilon_0^2 r^5 \omega^4}{192} \cos \omega t \mathbf{u}_t. \quad (25)$$

Se si procedesse indefinitamente nei calcoli e si sommassero tutti i termini ottenuti, si troverebbe:

$$\mathbf{E} = \left[\frac{2Ac^2}{\omega} \sin \omega t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega r/c)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} + \mathcal{E} \right] \mathbf{u}_z, \quad (26)$$

dove $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ ed \mathcal{E} è un termine costante, che dipende dalla zona considerata del condensatore, proporzionale alla densità di carica superficiale σ presente sul disco isolante carico. La serie nell'equazione (26) rappresenta semplicemente una funzione di Bessel di ordine 0 (indicata con J_0), per cui potremo riscrivere la (26) nella forma compatta:

$$\mathbf{E} = \left[\frac{V_0 \sin \omega t}{a+b} J_0 \left(\frac{\omega r}{c} \right) + \mathcal{E} \right] \mathbf{u}_z. \quad (27)$$

dove si è tenuto conto della (16). Analogamente si troverebbe:

$$\mathbf{B} = -\frac{2cA \cos \omega t}{\omega} \left[\frac{\omega r}{2c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega r/c)^{2k}}{2^{2k}(k+1)!k!} \right] \mathbf{u}_t; \quad (28)$$

il termine in parentesi quandre rappresenta una funzione di Bessel di ordine 1 (indicata con J_1); tenuto conto della (16), potremo quindi riscrivere la (28) nella forma compatta:

$$\mathbf{B} = -\frac{V_0 \cos \omega t}{c(a+b)} J_1 \left(\frac{\omega r}{c} \right) \mathbf{u_t}. \quad (29)$$

Appendice A

Costanti ed unità di misura

Costanti fisiche

Carica elementare	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa dell'elettrone	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Costante dielettrica del vuoto	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$
Permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Velocità della luce nel vuoto	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
Raggio di Bohr	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}$
Magnetone di Bohr	$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{ J/T}$

Prefissi per le potenze di dieci

Potenza	Prefisso	Abbreviazione	Potenza	Prefisso	Abbreviazione
10^{-18}	atto	a	10^1	deca	da
10^{-15}	femto	f	10^2	etto	h
10^{-12}	pico	p	10^3	chilo	k
10^{-9}	nano	n	10^6	mega	M
10^{-6}	micro	μ	10^9	giga	G
10^{-3}	milli	m	10^{12}	tera	T
10^{-2}	centi	c	10^{15}	peta	P
10^{-1}	deci	d	10^{18}	exa	E

Grandezze ed unità di misura impiegate nel testo

Grandezze fondamentali nel Sistema Internazionale

Grandezza	Unità di misura	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Intervalli di tempo	secondo	s
Corrente elettrica	ampere	A

Grandezze derivate

Grandezza	Unità	Simbolo	Espressioni equivalenti
Velocità v	-	m/s	-
Velocità angolare ω	-	rad/s	-
Frequenza ν	hertz	Hz	1/s
Accelerazione a	-	m/s ²	-
Accelerazione angolare α	-	rad/s ²	-
Forza F	newton	N	kg m/s ² ; J/m
Pressione p	pascal	Pa	N/m ² ; kg/(m s ²)
Momento meccanico \mathfrak{M}	-	N m	kg m ² /s ²
Quantità di moto q, Q	-	kg m/s	-
Energia E, U ; lavoro \mathcal{L}	joule	J	N m; kg m ² /s ²
Potenza P	watt	W	J/s; kg m ² /s ³
Densità per unità di volume ρ	-	kg/m ³	-
Carica Q	coulomb	C	A s
Campo elettrico E	-	N/C	V/m
Potenziale elettrostatico V	volt	V	J/C; kg m ² /(A s ³)
Capacità C	farad	F	C/V; A ² s ⁴ /(kg m ²)
Campo induz. dielettrica D	-	C/m ²	A s/m ²
Momento di dipolo elettrico p	-	C m	A s m
Campo polarizzazione P	-	C/m ²	A s/m ²
Resistenza elettrica R	ohm	Ω	V/A; kg m ² /(A ² s ³)
Campo induz. magnetica B	tesla	T	Wb/m ² ; kg/(A s ²); N/(A m)
Campo magnetico H	-	A/m	C/(s m)

Grandezze derivate (continua)

Grandezza	Unità	Simbolo	Espressioni equivalenti
Densità di carica lineare λ	-	C/m	A s/m
Densità di carica superficiale σ	-	C/m ²	A s/m ²
Densità di carica di volume ρ	-	C/m ³	A s/m ³
Resistività τ	-	Ω m	V m/A
Conducibilità g	-	1/(Ω m)	A/(m V)
Densità di energia u	-	J/m ³	N/m ²
Densità di potenza \wp	-	W/m ³	N/(s m ²)
Densità di corrente \mathbf{J}	-	A/m ²	C/(s m ²)
Densità superficiale di corrente j_s	-	A/m	C/(s m)
Flusso di campo magnetico Φ	weber	Wb	V s
Induttanza L , coeff. di induz. M	henry	H	Wb/A
Vettore di Poynting \mathbf{S}	-	W/m ²	N/(s m)
Intensità I	-	W/m ²	N/(s m)
Densità di quantità di moto g	-	kg/(m ² s)	-

Appendice B

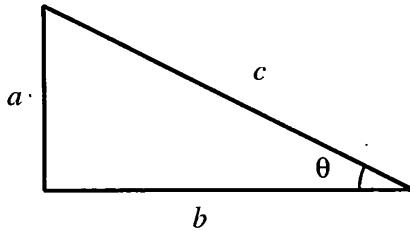
Richiami di trigonometria

Funzioni trigonometriche

Dato il triangolo rettangolo mostrato in figura di cateti a e b , ipotenusa c ed angolo θ opposto al cateto a , si definiscono:

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \qquad \cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \cotan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$



Identità trigonometriche

Risultano le seguenti relazioni:

$$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \qquad \cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\cotan \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \qquad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cotan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(1 - \cos \theta)}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

Inoltre valgono le seguenti regole di somma:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin [\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)] \cos [\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)]$$

$$\cos \alpha \pm \cos \beta = 2 \cos [\frac{1}{2}(\alpha + \beta)] \cos [\frac{1}{2}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin [\frac{1}{2}(\alpha + \beta)] \sin [\frac{1}{2}(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)$$

Nel campo complesso valgono le seguenti relazioni:

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

dette *formule di Eulero*; inoltre:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Formule notevoli per un triangolo

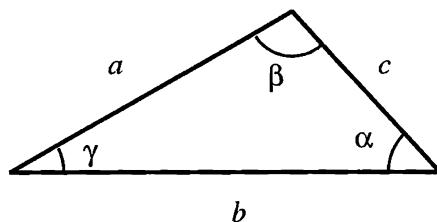
Dato il triangolo mostrato in figura di lati a, b e c ed angoli α, β e γ , valgono le seguenti relazioni:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

quest'ultima si riduce al ben noto teorema di Pitagora per $\alpha = \pi/2$.



Appendice C

Algebra dei numeri complessi

C.1 Definizioni

Un numero complesso z è una coppia ordinata di numeri reali x ed y , rappresentato generalmente nella forma:

$$z = x + iy;$$

la quantità i è detta *unità immaginaria*; essa gode della proprietà

$$i^2 = -1.$$

Si definisce *complesso coniugato* del numero z la quantità

$$z^* = x - iy.$$

Si definisce inoltre *modulo* del numero z la quantità

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

dicesi infine *fase* del numero $z = x + iy$ la quantità

$$\phi = \text{atan} \frac{y}{x}.$$

Dati due numeri complessi $h = a + ib$ e $k = c + id$, valgono poi le seguenti proprietà:

$$h \pm k = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$h \cdot k = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

da cui, in particolare, deriva che

$$h^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

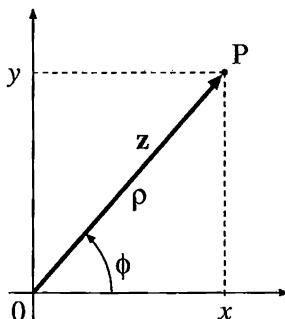
$$h \cdot h^* = a^2 + b^2 = |h|^2$$

Inoltre il reciproco di un numero complesso è definito come

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

C.2 Rappresentazione polare ed esponenziale

Un numero complesso $z = x + iy$ può essere rappresentato, attraverso la definizione data in precedenza, come posizione del un punto $P(x, y)$ nel piano complesso. In alternativa, z può essere pensato come il vettore posizione \mathbf{z} corrispondente a P .



Possiamo anche rappresentare z mediante le coordinate polari (ρ, ϕ) del punto P , dove $\rho = |z| = |\mathbf{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ è il modulo e $\phi = \text{atan}(y/x)$ la fase del numero z . Possiamo pertanto anche porre (si veda la figura):

$$z = x + iy = \rho(\cos \phi + i \sin \phi).$$

La rappresentazione in coordinate polari risulta utile nel caso di prodotto di due numeri complessi; posto infatti che $h = \rho_h(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ e $k = \rho_k(\cos \beta + i \sin \beta)$, si verifica che

$$h k = \rho_h \rho_k [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)].$$

Risulta inoltre che

$$z^n = \rho^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)];$$

infine

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right],$$

con $0 \leq k \leq (n - 1)$. Si noti che nel campo complesso la radice n -sima di un numero ammette sempre n valori complessi distinti.

Esiste una ulteriore forma di rappresentazione di un numero complesso. In virtù della relazione:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi,$$

è possibile rappresentare il numero z anche nella forma

$$z = \rho [\cos \phi + i \sin \phi] = \rho e^{i\phi}.$$

Si noti che da tali relazioni discendono le formule di Eulero già esposte nell'appendice precedente.

Appendice D

Calcolo differenziale ed integrale

D.1 Regole di derivazione di una funzione

Regole generali

Sia k una costante ed $f(x)$, $g(x)$ due funzioni continue e derivabili (per la nozione di derivabilità si rimanda ad un testo di Analisi Matematica). Indicando con $f'(x) = \frac{df}{dx}$ e $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ le derivate prime di $f(x)$ e $g(x)$, si hanno le seguenti relazioni

$$\frac{d}{dx} [k f(x)] = k f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [g(x) + f(x)] = g'(x) + f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [g(x) \cdot f(x)] = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right] = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

Se $g = g(z)$ e $z = f(x)$, la funzione $g = g[f(x)]$ si dice composta. In tal caso la derivata di $g(x)$ risulta:

$$\frac{d}{dx} g(z) = \frac{dg}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dg}{dz} \cdot \frac{df}{dx}$$

Tabella delle principali derivate

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d}{dx} k = 0 & \frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1} \\
 \frac{d}{dx} e^{kx} = k e^{kx} & \frac{d}{dx} a^{kx} = k a^{kx} \ln(a) \\
 \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) & \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \\
 \frac{d}{dx} \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} & \frac{d}{dx} \operatorname{cotg}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \\
 \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} & \frac{d}{dx} \ln[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}
 \end{array}$$

D.2 Regole di integrazione di una funzione

Regole generali

Date due funzioni $f(x)$ ed $F(x)$, diremo che F è una primitiva di f se:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La primitiva di una funzione viene anche detta integrale indefinito ed indicata con la notazione:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

In virtù delle regole di derivazione, la primitiva è sempre definita a meno di una costante arbitraria. Per il teorema del calcolo integrale, l'integrale definito di una funzione $f(x)$ valutato fra gli estremi a e b risulta pari alla differenza dei valori assunti dalla primitiva $F(x)$ nei due estremi:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vi sono due metodi importanti di risoluzione di un integrale definito:

1. *Integrazione per sostituzione.* Posto $x = y(t)$ e detta $t = g(x)$ la sua funzione inversa, risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f[y(t)] \frac{dy}{dt} dt$$

2. *Integrazione per parti.* Se in un integrale appare il prodotto di una funzione $f(x)$ per la derivata di una funzione $g(x)$, possiamo allora porre:

$$\int_a^b f(x) \frac{dg}{dx} dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b \frac{df}{dx} g(x) dx$$

Tabella dei principali integrali indefiniti

Si noti che tutti gli integrali qui riportati sono sempre assegnati a meno di una costante arbitraria C.

$$\int k dx = kx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k}$$

$$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln(a)}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)|$$

$$\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)|$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$$

D.3 Espansione in serie di una funzione

Si consideri una funzione $f(x)$ continua assieme alle sue derivate in un intorno del punto x_0 ; $f(x)$ può essere rappresentata in tale intorno mediante una serie di potenze di x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) (x - x_0)^n,$$

dove $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$; $0! = 1$ e le derivate di ordine n-simo della funzione $f(x)$ sono tutte valutate nel punto x_0 . Se la precedente sommatoria viene arrestata ai primi addendi, si ottiene una espressione che approssima la funzione $f(x)$. Di seguito si riportano le approssimazioni di alcune funzioni in un intorno di $x_0 = 0$.

Approssimazione di $f(x)$ nell'intorno di $x_0 = 0$

$$\sin(x) \approx x \quad \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\exp(x) \approx (1 + x) \quad \tan(x) \approx x$$

$$\frac{1}{1+x} \approx (1-x) \quad \frac{1}{1-x} \approx (1+x)$$

$$(1+x)^2 \approx (1+2x) \quad (1-x)^2 \approx (1-2x)$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

Finito di stampare
nel Maggio 2008 da
Global Print
Gorgonzola (Milano)

