Isolanti e conduttori

Definizione macroscopica

Conduttori

materiali che a temperatura ambiente contengono un **numero elevato di portatori di carica liberi** di muoversi (es. elettroni nei metalli)

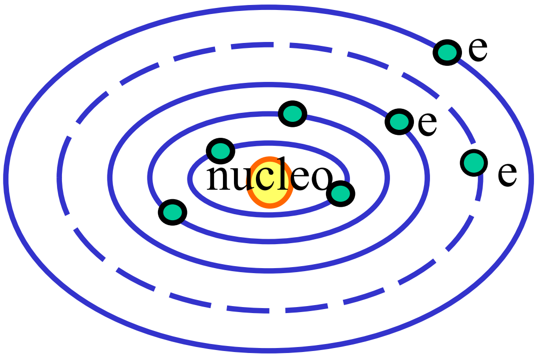
Isolanti

materiali in cui, a temperatura ambiente, il **numero di portatori liberi è trascurabile** (anche 10^{20} volte inferiore rispetto ai conduttori) (es. vetro, ceramica)

Semiconduttori

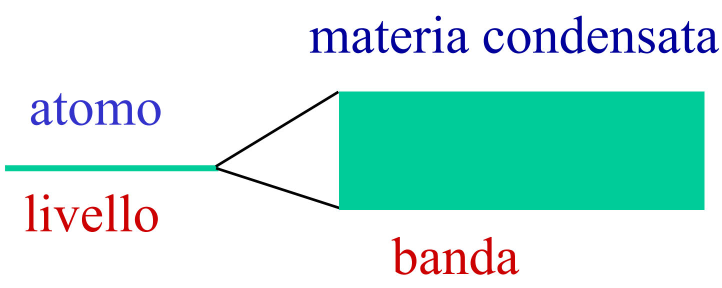
materiali intermedi con un numero di portatori piccolo ma non trascurabile (es. silicio, germanio)

Modello microscopico



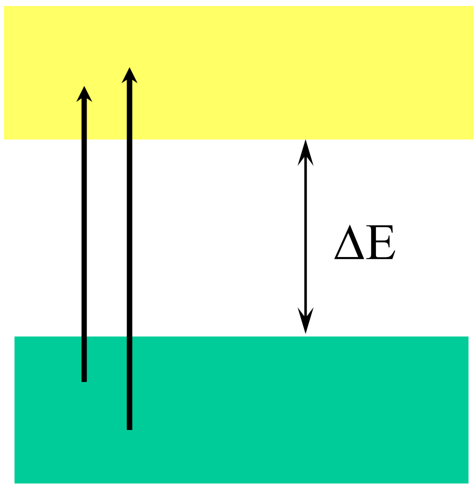
Atomo di Bohr (modello planetario): per effetto dell'interazione elettrostatica, gli elettroni sono disposti intorno al nucleo su orbite cui corrisponde diversa energia dell'elettrone.

Un elettrone può accedere ad un'orbita più esterna solo se riceve un'energia pari alla differenza di energia tra lo stato iniziale e quello finale.



Conduttori

modello a due bande per l'elettrone più esterno



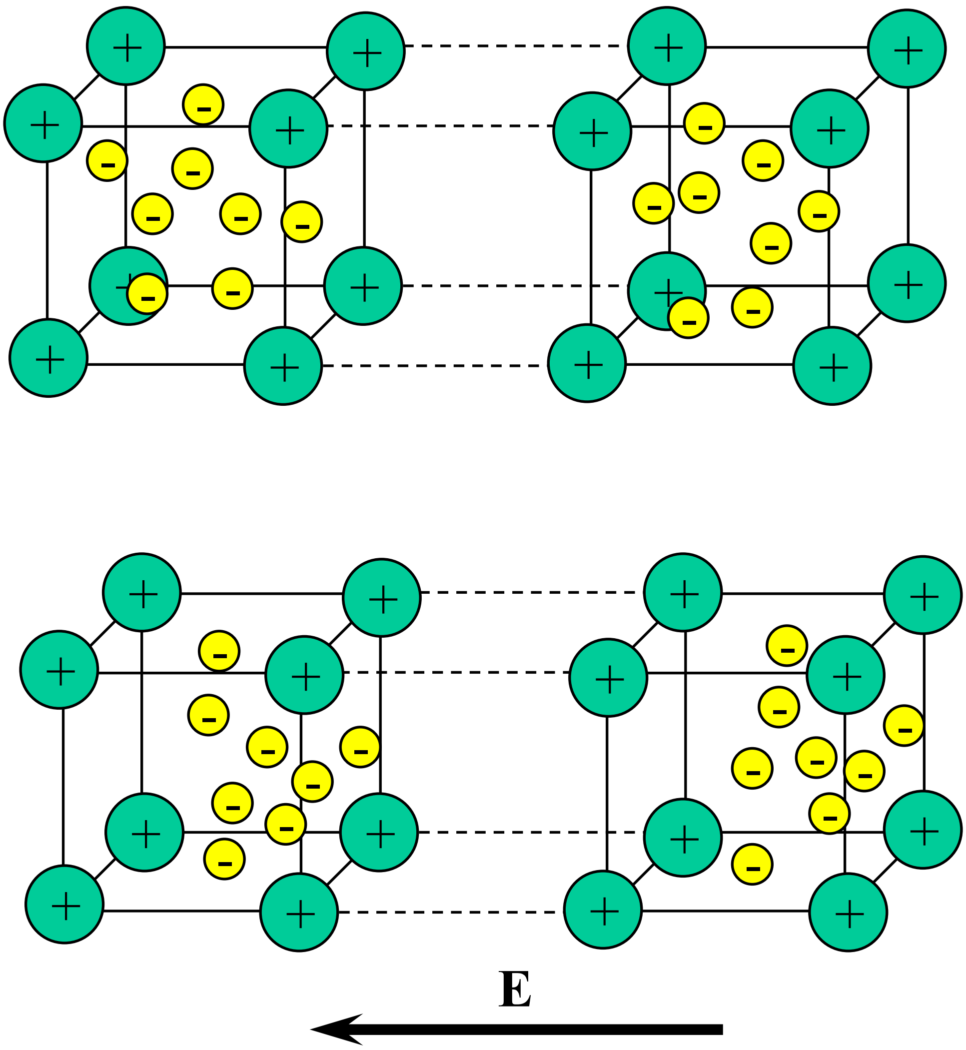
banda di conduzione
o livello eccitato

banda di valenza
o livello fondamentale

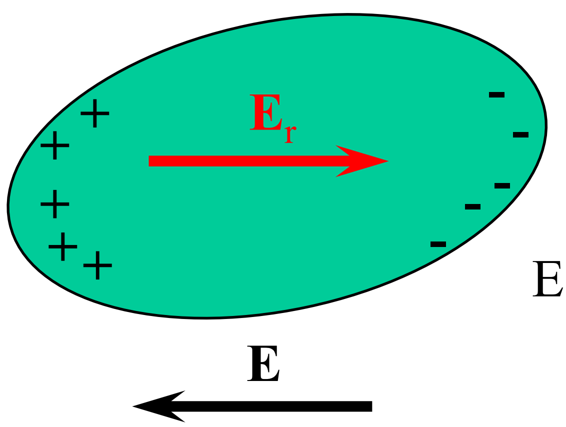
L'elettrone in banda di conduzione è libero di muoversi.

Se $\Delta E \ll kT \Rightarrow$ Elevato numero di elettroni in banda di conduzione $\Rightarrow$ **Conduttore**

Modello dei conduttori



Lo spostamento delle nubi elettroniche determina l'apparenza macroscopica di cariche positive e negative



Equilibrio quando:

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_r = 0$$

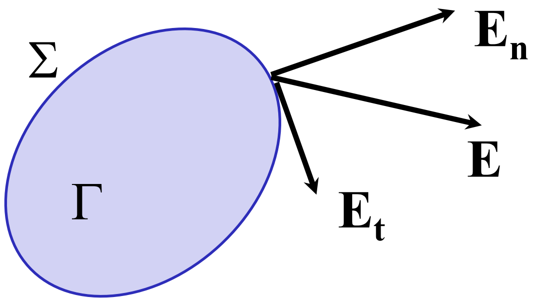
Proprietà elettrostatiche dei conduttori

Equilibrio elettrostatico: Condizione in cui non c'è moto macroscopico di carica ($v \neq 0$, $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$)

In un conduttore ci sono cariche libere di muoversi. Perchè il sistema sia in equilirio le **forze elettrostatiche** nel volume devono essere **nulle:**

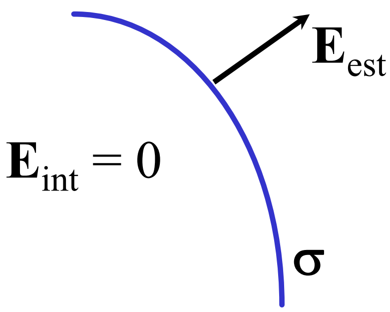
$$\boxed{\mathbf{F} = 0} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{F} = q\mathbf{E}) \\ V = cost \quad (\mathbf{E} = -\text{grad } V) \\ \rho = 0 \quad (\text{div } \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0) \end{array}}$$

- Cariche solo sulla superficie $\rho = 0$, $\sigma \neq 0$
- Superficie equipotenziale $V = \text{cost in } \Gamma \cup \Sigma$
- **E** normale alla superficie $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n \text{ su } \Sigma$



Se $\mathbf{E}_t$ 0 le cariche si spostano sulla superficie (no equilibrio)

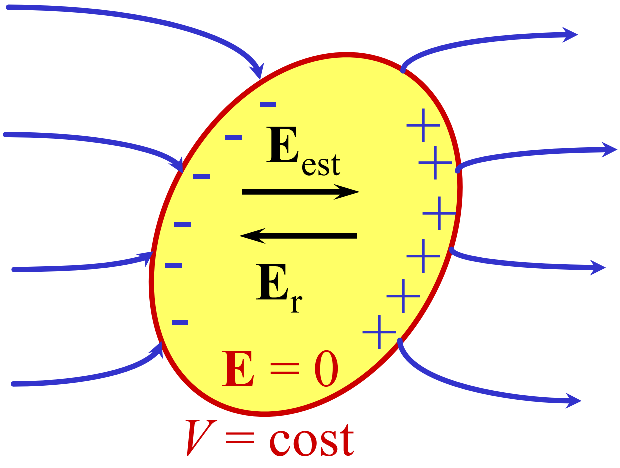
$$[E_n] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad [E_t] = 0$$



$$\boxed{\lim_{P \to P_0} \mathbf{E}(P) = \frac{\sigma(P_0)}{\varepsilon_0} \mathbf{u}_n}$$

Th. di Coulomb

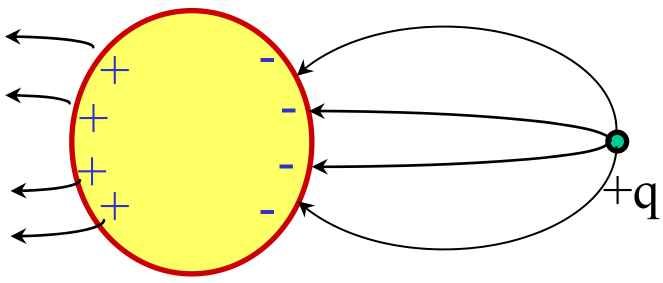
Induzione elettrostatica



Immergendo un conduttore in un campo elettrico $\mathbf{E}_{est}$ si determina uno spostamento di cariche fino alla superficie che prosegue fino a quando il "campo di reazione" $\mathbf{E}_r$ da esse creato risulta eguale e opposto al campo esterno.

Un osservatore esterno vede sulla superficie del conduttore la comparsa di cariche negative e positive (a somma nulla), che modificano l'andamento delle linee di forza del campo esterno $\mathbf{E}_{est}$. In assenza di tale campo le cariche scompaiono.

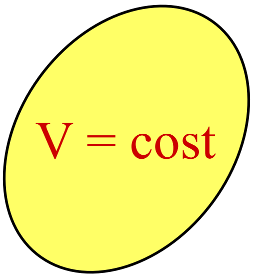
La comparsa di cariche superficiali in un conduttore in presenza di forze elettrostatiche costituisce il fenomeno della **induzione elettrostatica**.



Misura di **E** in presenza di conduttori.
Problema: La carica sonda perturba il sistema per effetto dell'induzione.

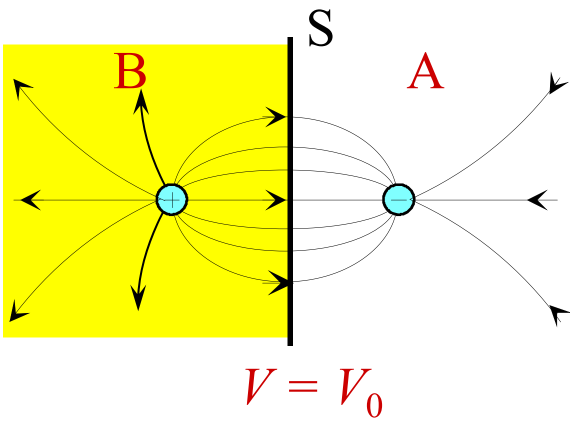
$$\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$$

q abbastanza piccola da trascurare gli effetti dell'induzione.



Un conduttore forza la regione di spazio che occupa ad essere equipotenziale. Viceversa, dato una distribuzione di campo elettrico, è possibile materializzare un conduttore su una superficie equipotenziale chiusa senza modificare il campo all'esterno.

Esempio: carica immagine



La validità della soluzione è garantita dall'unicità della soluzione dell'equazione di Poisson: Nel semispazio A la superficie piana S è equipotenziale sia nel caso delle due cariche che in quello conduttore-carica. Pertanto, poiché le condizioni al contorno sono le stesse, la soluzione nel semispazio A è la stessa.

Potere delle punte

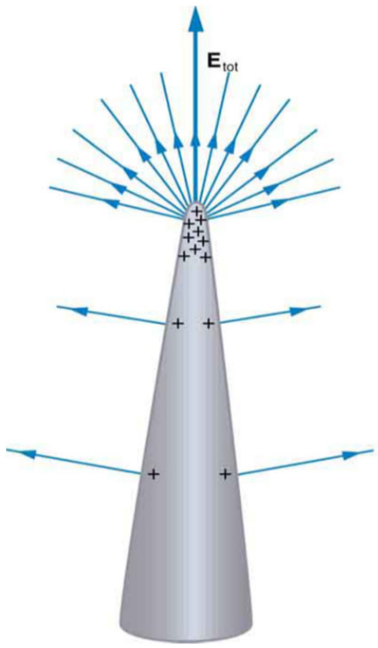
Esempio: superficie sferica conduttrice con carica Q (>0)

– Per simmetria, la carica si distribuisce uniformemente sulla superficie:

$$\sigma = Q/(4\pi R^2)$$

– Sulla *superficie esterna*: $E = \sigma/\varepsilon_o = Q/(4\pi\varepsilon_o R^2)$
Il campo è lo stesso di una carica puntiforme posta al centro.

– *All'esterno*:
$E = Q/(4\pi\varepsilon_o r^2)$, radiale (uscente, se Q > 0)
$V = Q/(4\pi\varepsilon_o r)$ [con: $V(\infty) = 0$]



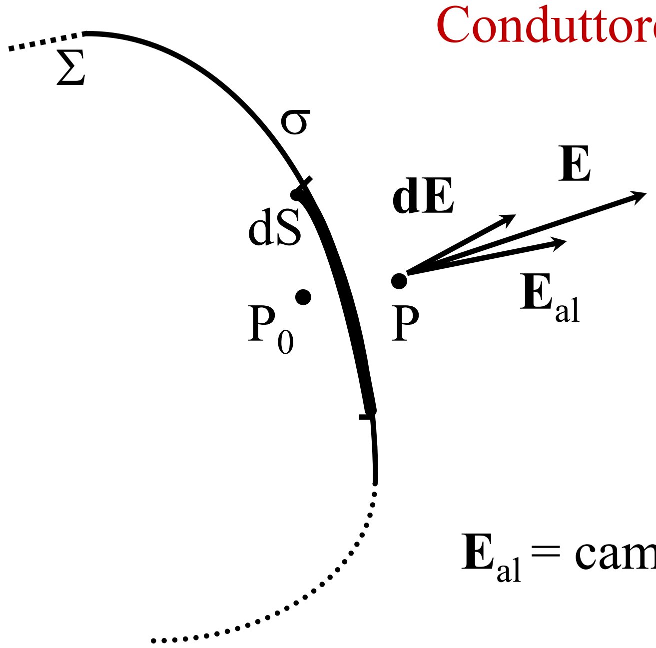
Sulla superficie di un conduttore:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \propto \frac{1}{\rho^2}$$

dove:
ρ = raggio di curvatura della superficie

Potere dispersivo delle punte: Dove ci sono punte (o lame) il campo è particolarmente intenso, tanto che ionizzano l'aria e attirano le cariche di segno opposto.
E' come se le cariche sfuggissero dal conduttore.
Applicazioni: accendini elettrici, parafulmini.

Pressione elettrostatica



Conduttore carico di superficie Σ

Su un elemento dS:

$$\mathbf{E} = d\mathbf{E} + \mathbf{E}_{al}$$

$\mathbf{E}$ = campo totale in P

$d\mathbf{E}$ = campo di σdS in P

$\mathbf{E}_{al}$ = campo delle restanti cariche in P

Essendo P_0 e P infinitamente prossimi alla superficie dS:

- $\mathbf{E}_{al}(P_0) = \mathbf{E}_{al}(P)$
- L'osservatore in tali punti vede la superficie dS come una superficie indefinita

$$\mathbf{E}(P_0) = d\mathbf{E}(P_0) + \mathbf{E}_{al}(P_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}_{al}(P_0) = -d\mathbf{E}(P_0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_n$$

strato piano indefinito

$$\mathbf{E}_{al}(P) = \mathbf{E}(P) - d\mathbf{E}(P) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_n - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_n$$

Th. di Coulomb

strato piano indefinito

Forza sulla carica $dq = \sigma dS$: $d\mathbf{F} = \sigma dS \mathbf{E}_{al} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \mathbf{u}_n$

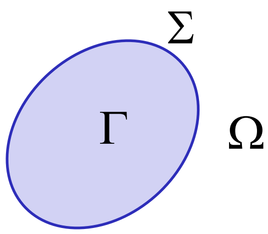
Pressione elettrostatica: $\boxed{p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

Problema generale dell'elettrostatica

Problema: Determinare **E** in presenza di distribuzioni di carica e conduttori (con Q o V assegnati)

Non è possibile applicare il principio di sovrapposizione, (induzione e.s. $\Rightarrow$ distribuzione di carica sui conduttori <u>non</u> nota a priori)

Anche in presenza di conduttori, nello spazio Ω privo di cariche, vale l'equazione di Laplace:



$$\nabla^2 V = 0 \qquad \forall\, P \in \Omega$$

Condizioni al contorno:

– V su Σ (Problema di Dirichlet)

– Q su Σ $\Leftrightarrow$ $\partial V/\partial n$ su Σ (Problema di Neumann)

$$Q = \varepsilon_o \iint_\Sigma E_n dS = -\varepsilon_o \iint_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

La funzione V deve soddisfare le seguenti condizioni:

– $V \in C^\circ(\Omega \cup \Sigma)$

V è continuo anche in presenza di distribuzioni superficiali di carica

– $V = \text{cost in } \Gamma \cup \Sigma$

Il valore della costante dipende dalla scelta dello stato di riferimento

– $Q = -\varepsilon_o \iint_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n} dS$

Th. di Gauss

– $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$

Regolarità di V all'infinito (perché la densità di carica è al finito).

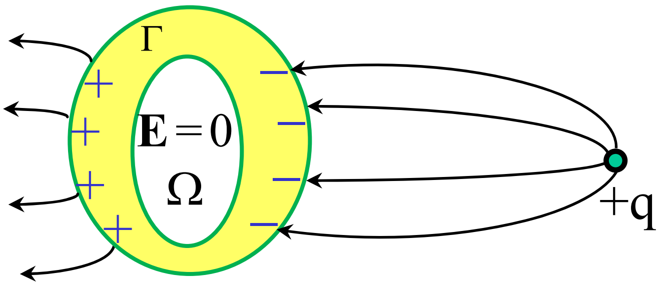
Teorema di unicità: Esiste ed è unica la funzione V in Ω, se si assegnano i suoi valori sulla superficie Σ che limita Ω.

Non esiste un metodo generale di ricerca delle soluzioni (funzioni armoniche)

- Soluzioni analitiche, solo in casi particolari
- Soluzioni numeriche, generalmente
- Misure sperimentali su modello (per analogia). Esempi: vasca elettrolitica, membrana

Schermo elettrostatico

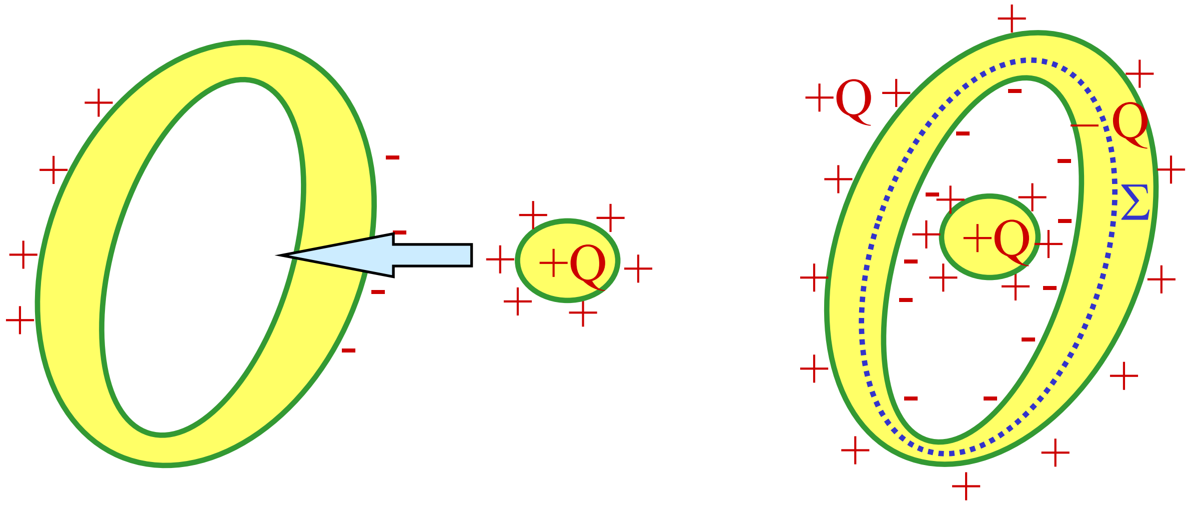
Conduttore cavo con carica esterna



Deve sempre essere:
- in Ω: $\mathbf{E} = 0$
- su Σ_{int}: $\sigma = 0$,

Le azioni elettriche esterne non influenzano l'interno della cavità.
Il conduttore cavo è uno **schermo elettrostatico**.

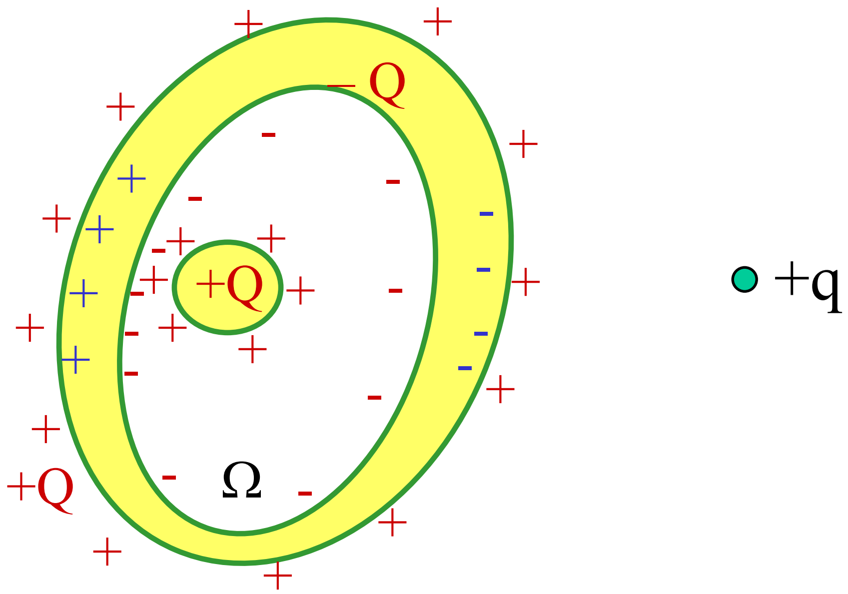
Schermo con carica nella cavità



Induzione completa: **tutte le linee di campo che escono da Q entrano nel conduttore**, sul quale si induce:
- $-Q$ su Σ_{int} (Th. di Gauss su Σ)
- $+Q$ su Σ_{est} (conservazione della carica).

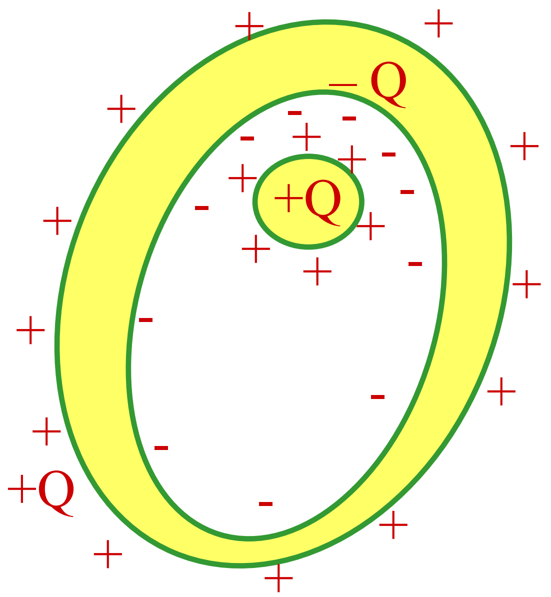
La distribuzione esterna dipende solo dalla condizione di <u>equipotenzialità</u> della superficie del conduttore (geometria).

La superficie interna è allo stesso potenziale e la distribuzione di carica dipende dalla <u>geometria e posizione del conduttore carico</u> nella cavità.



La presenza di una carica esterna modifica la distribuzione Σ_{est} per effetto della carica indotta.

Il campo **E** in Ω e densità di carica σ_{int} sono inalterati (schermo elettrostatico).



Se si sposta la carica interna, σ_{int} si modifica in modo da rendere Σ_{int} equipotenziale.

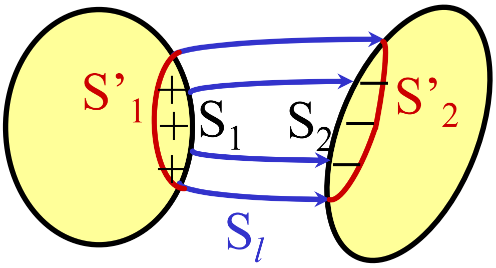
La distribuzione esterna non cambia, perché la superficie esterna è allo stesso potenziale (**E** interno nullo).

Il conduttore cavo divide lo spazio in due regioni tra di loro isolate per le azioni elettrostatiche.

Superfici corrispondenti

Due conduttori con carica di segno opposto (Q_+ e Q_-).

Superfici corrispondenti = superfici tagliate dallo stesso tubo di flusso di **E**.



$$\Phi_{S'_1} + \Phi_{S'_2} + \Phi_l = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{S_1} + Q_{S_2} = 0$$

Le cariche sulle superfici corrispondenti sono uguali e opposte.

Induzione completa: Quando tutte le linee di campo che escono da una superficie entrano nell'altra.

- Conduttore all'interno di un altro conduttore cavo
- Conduttori piani indefiniti affacciati (*approx*)
- Cilindri (anche non retti) contenuti uno nell'altro (*approx*)

Capacità di un conduttore isolato

Carica Q e potenziale V su un **conduttore <u>isolato</u>** sono proporzionali tra di loro

Q = CV C = **Capacità** del conduttore

Unità nel S.I.: **Farad** = Coulomb/Volt (F = C/V)

C dipende <u>solo</u> dalla geometria del conduttore (e dal mezzo)

Sistema di conduttori

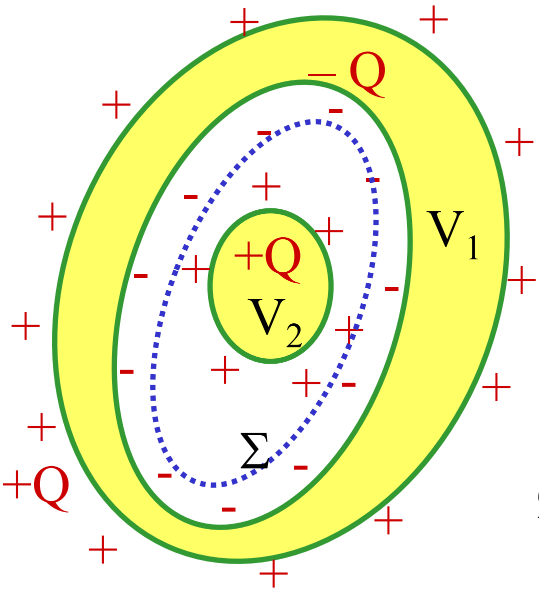
Esiste ancora un legame lineare tra V_i e Q_i (principio di sovrapposizione)

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} V_j$$

dove : c_{ij} = **coefficienti di induzione**
c_{ii} = **coefficienti di capacità**

c_{ii} e c_{ij} dipendono solo dalla geometria

Condensatore



Condensatore = Sistema di due conduttori in induzione completa

Applichiamo il Th. di Gauss ad una superficie Σ interna alla cavità :

$$Q = \varepsilon_0 \Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \iint_\Sigma grad\, V \cdot \mathbf{u_n}\, dS$$

Se la carica Q viene variata (es. $Q' = kQ$) risulta:

$$Q' = kQ = -\varepsilon_0 \int_\Sigma grad(kV) \cdot \mathbf{u_n} dS$$

Variazione della carica Q

⇒ Corrispondente variazione della carica indotta

⇒ Corrispondente variazione del potenziale.

Se V_1 e V_2 sono i valori dei potenziali dei due conduttori in induzione completa, risulta:

$$Q = C(V_1 - V_2) = C\Delta V \qquad \boxed{C = \frac{Q}{\Delta V}} \quad = \textbf{Capacità}$$

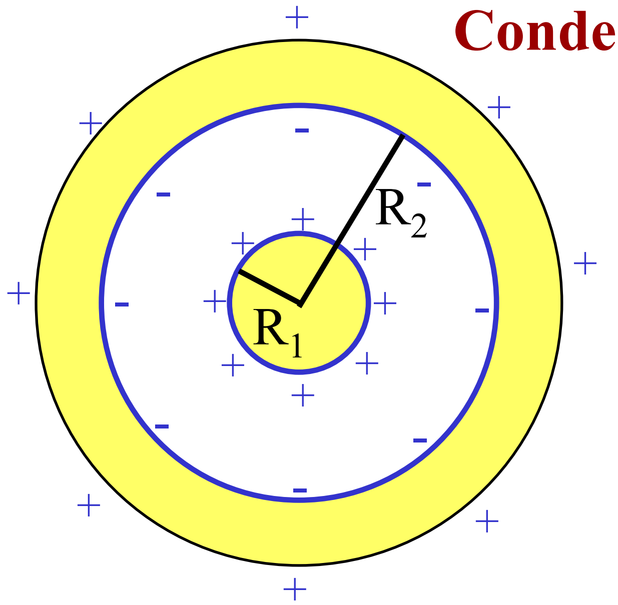
– S.I.: Farad   1F = 1 C/V

– Dipende solo dalle caratteristiche geometriche del sistema (e dal mezzo).

– Definibile <u>esclusivamente</u> in induzione completa.

Esempi

Condensatore sferico



$$R_1 < r < R_2$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{u}_r}{r^2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\left[V(\infty) = 0\right]$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

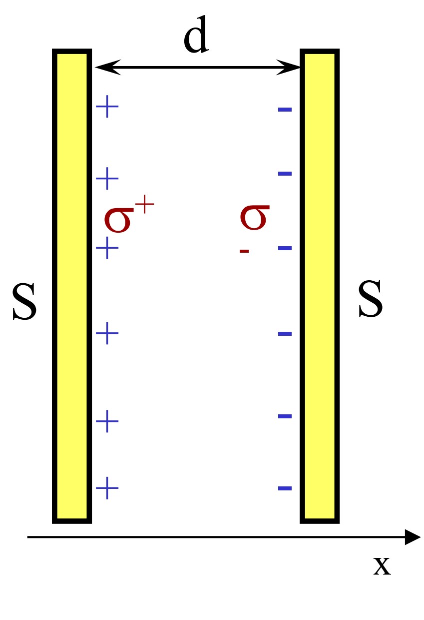
per $R_2 \to \infty \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$

N.B.: Se ad es. la sfera 2 viene messa a terra ($V_2 = 0$), cambia il potenziale della sfera 1 che diventa:

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

mentre ΔV rimane invariata.

Condensatore piano



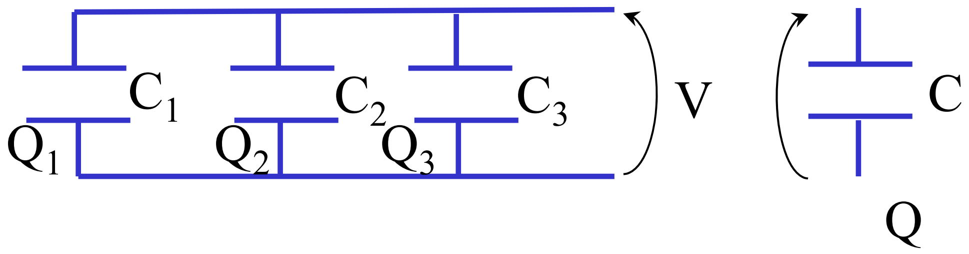
$$d \ll \sqrt{S} \qquad \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_x \qquad Q = \sigma S$$

$$\Delta V = E \cdot d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Condensatori in serie e parallelo

Parallelo

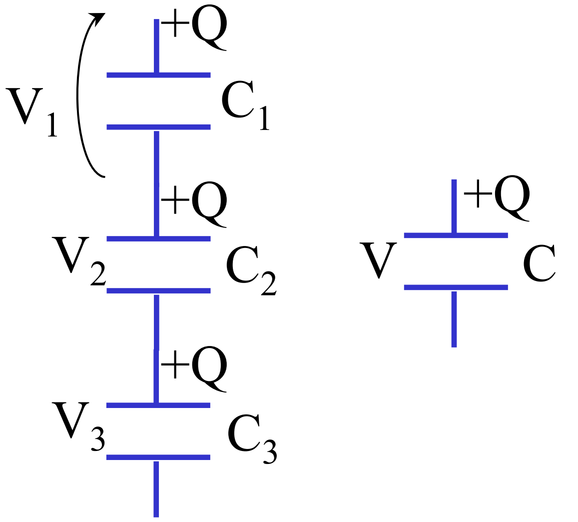


I condensatori hanno la stessa differenza di potenziale (**E** irrotazionale) e cariche diverse:

$$Q_i = C_i V_i \qquad Q = CV \qquad V = V_i$$

$$Q = \sum_i Q_i \qquad Q = \sum_i C_i V = CV \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = \sum_i C_i}$$

Serie



I condensatori hanno la stessa carica (induzione completa) e diversi Δv_i, che si sommano (**E** irrotazionale)

$$V = \sum_i V_i \qquad Q = Q_i$$

$$V_i = \frac{Q}{C_i} \qquad V = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{Q}{C} = \sum_i \frac{Q}{C_i} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Energia elettrostatica dei conduttori

❖ Per un conduttore in equilibrio, le cariche sono distribuite sulla superficie Σ

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} \sigma V \, dS = \frac{1}{2} V \iint_{\Sigma} \sigma \, dS = \frac{1}{2} QV}$$

❖ Per un sistema di conduttori:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \iint_{\Sigma_i} \sigma_i V_i \, dS$$

dove: $V_i = \text{cost su } \Sigma_i$

$$q_i = \int_{\Sigma_i} \sigma_i \, dS$$

$$\Rightarrow \; U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

❖ Per un condensatore:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} QV_1 - \frac{1}{2} QV_2 = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Per un conduttore carico isolato, valgono espressioni analoghe:
(Condensatore con un’armatura all’infinito, con $V_\infty = 0$)

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Forze tra conduttori

Sistema isolato: Cariche costanti sui conduttori

Lo spostamento di un conduttore determina una variazione delle distribuzioni di carica e di potenziale

Per uno spostamento d**r**

$$dL_m = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Essendo il sistema isolato, il lavoro è fatto a spese dell'energia elettostatica:

$$dL_m = -dU_q \qquad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU_q \qquad F_r = -\left(\frac{\partial U_q}{\partial r}\right)$$

Sistema non isolato: Potenziali costanti sui conduttori

Per spostare un conduttore mantenendo costanti i potenziali, occorre variare la quantità di carica sui conduttori e quindi la loro energia a spese del lavoro di forze esterne:

$$dU_e = dL_m + dU_V$$

Lavoro delle forze esterne:

$$dU_e = \sum_i V_i dq_i$$

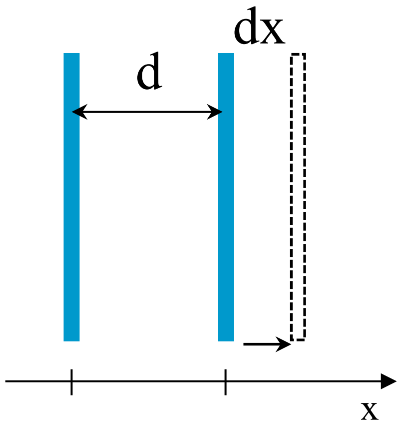
$$\text{Da :} \quad U_V = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i \quad \Rightarrow \quad dU_V = \frac{1}{2}\sum_i V_i dq_i$$

$$\text{Quindi :} \quad dU_e = 2dU_V \qquad dL_m = dU_V$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dL_m = dU_V \qquad F_r = \left(\frac{\partial U_V}{\partial r}\right)$$

Esempio: Condensatore piano

Sistema isolato: Q = costante



$$F\,dx = -dU_q$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \qquad d\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{dx}{\varepsilon_0 S}$$

$$F\,dx = -d\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\,d\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2\,dx}{2\varepsilon_0 S}$$

$$F = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S$$

$$\boxed{p = \frac{F}{S} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

Espressione che localmente vale per una generica geometria

Sistema non isolato: V = costante

$$F\,dx = dU_V = d\left(\frac{CV^2}{2}\right) = \frac{1}{2}V^2\,dC$$

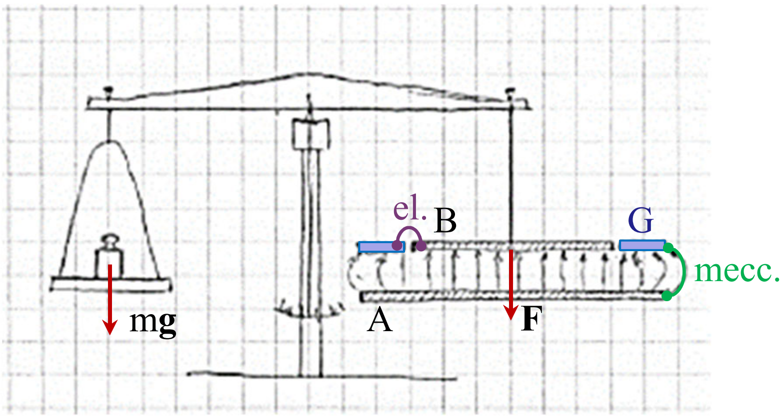
$$C = -\varepsilon_0 \frac{S}{d} \qquad \Rightarrow \qquad dC = -\varepsilon_0 S \frac{dx}{d^2}$$

$$F = -\frac{1}{2}V^2\varepsilon_0 \frac{S}{d^2} = -\frac{1}{2}V^2\left(\frac{\varepsilon_0^{\,2} S^2}{d^2}\right)\frac{1}{\varepsilon_0 S} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S$$

$$p = \frac{F}{S} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Applicazione: Elettrometro assoluto di Lord Kelvin

Misura assoluta (senza taratura) di una ddp



G = Anello di guardia, connesso meccanicamente ad A ed elettricamente a B

$$F = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o} S$$

dove: $\sigma = \varepsilon_o E$

$\Delta V = Ed$

All'equilibrio: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$

$$mg = \frac{\varepsilon_o^2 E^2 S}{2\varepsilon_o} = \frac{\varepsilon_o (\Delta V)^2 S}{2d^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\Delta V = d\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_o S}}}$$