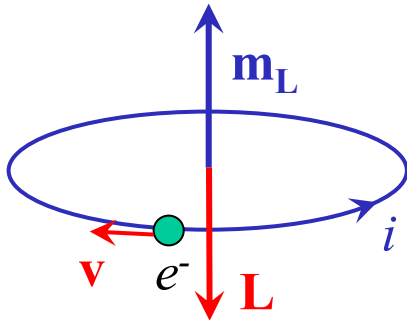


Campo magnetico nella materia

Fenomeni microscopici

- Elettroni



Moto orbitale: L'elettrone ruota sull'orbita e dà origine ad una corrente:

$$i = \frac{e}{T}$$

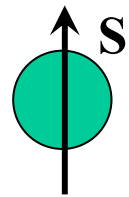
dove T è il periodo di rivoluzione

Possiamo associare all'elettrone un momento magnetico \mathbf{m}_L :

$$\mathbf{m}_L = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}$$

Magnetone di Bohr (idrogeno) $\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$

Spin: proprietà quantistica, descritta classicamente come una rotazione a cui è associato il **momento magnetico intrinseco**:



$$\mathbf{m}_S = -\frac{e}{m_e} \mathbf{S}$$

$$\mathbf{m} = -\frac{ge}{2m_e} (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \quad (1 < g < 2)$$

- Anche **protoni e neutroni** hanno spin e momento magnetico proprio ($\sim 10^{-3}$ volte quello dell'elettrone)

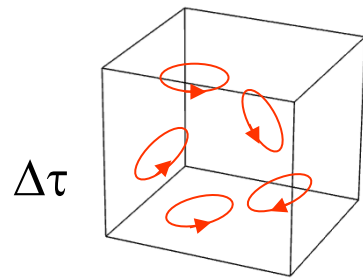
Aspetti macroscopici

La materia può essere vista come una distribuzione di **dipoli magnetici elementari**.

Definiamo:

Vettore magnetizzazione \mathbf{M} = Momento magnetico medio per unità di volume

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta\tau} = N \langle \mathbf{m} \rangle$$



S.I.: $\text{Am}^2/\text{m}^3 = \text{A/m}$

Leggi della magnetostatica nella materia: Correnti di magnetizzazione

La *trattazione quantitativa* del magnetismo nella materia implica la soluzione di tre problemi:

- Influenza di un materiale magnetizzato sul campo magnetico (**Noto \mathbf{M} , calcolare \mathbf{B}**)
- Induzione della magnetizzazione in un materiale da parte del campo magnetico (**Noto \mathbf{B} , calcolare \mathbf{M}**)
- Legame tra aspetti macroscopici e microscopici

Nel vuoto:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Nella prima legge, non compaiono sorgenti di \mathbf{B} .

\Rightarrow Non ci aspettiamo cambiamenti nella materia.

La seconda legge descrive come \mathbf{J} genera \mathbf{B} .

\Rightarrow Ci aspettiamo che sia modificata dalla presenza di \mathbf{M} .

Analogia elettrostatica:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P})/\epsilon_0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

\mathbf{P} è equivalente ad una distribuzione di carica di polarizzazione:

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad \sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n$$

$\Rightarrow \mathbf{M}$ sarà equivalente ad una distribuzione di corrente.

(Utilizzando il potenziale vettore \mathbf{A}) si dimostra che:

Un blocco di materiale con magnetizzazione \mathbf{M} è equivalente ad una distribuzione di **correnti di magnetizzazione** di volume e di superficie con:

Densità di *volume* di corrente di magnetizzazione \mathbf{J}_m

$$\mathbf{J}_m = \operatorname{rot} \mathbf{M}$$

Densità di *superficie* di corrente di magnetizzazione $\mathbf{J}_{s,m}$

$$\mathbf{J}_{s,m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n$$

Esempi

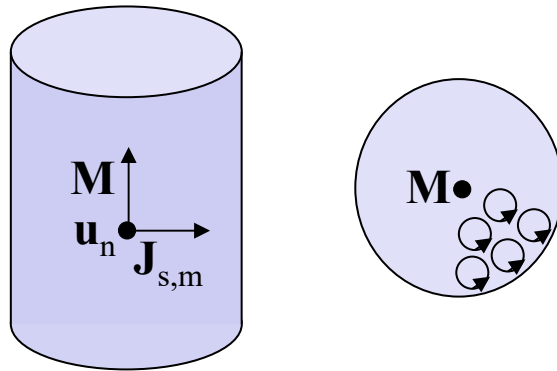
- **Cilindro con $\mathbf{M} \parallel$ asse ed uniforme**

Nel volume: \mathbf{M} uniforme $\Rightarrow \mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M} = 0$

Sulle basi: $\mathbf{M} \parallel \mathbf{u}_n \Rightarrow \mathbf{J}_{s,m} = 0$

Sulla superficie laterale: $\mathbf{J}_{s,m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n$
(si avvolge sulla superficie)

Le “correnti atomiche” si annullano nel volume, ma non sulla superficie

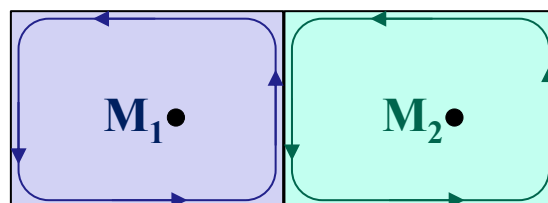


- **\mathbf{M} non uniforme**

$\mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M} \neq 0$

$\mathbf{J}_{s,m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n$

Esempio: due blocchi con magnetizzazione \mathbf{M}_1 ed \mathbf{M}_2



$\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}_2 \Rightarrow$ Corrente netta anche all'interno del volume

La I legge della magnetostatica nella materia resta:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n dS = 0$$

La II legge della magnetostatica nella materia deve tener conto dell'effetto delle correnti atomiche:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J}_{tot} = \mu_o (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) = \mu_o (\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M})$$

$$\Rightarrow \text{rot } (\mathbf{B} - \mu_o \mathbf{M}) = \mu_o \mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \text{rot } (\mathbf{B}/\mu_o - \mathbf{M}) = \mathbf{J}$$

Definiamo il vettore **campo magnetizzante** (o **intensità di campo magnetico**) \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M}$$

Nel SI: \mathbf{H} si misura in Am^{-1}

[\mathbf{B} è detto anche **induzione magnetica**]

In un mezzo materiale: $\mathbf{B} = \mu_o (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

Nel vuoto: $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$

La II legge della magnetostatica si può esprimere come:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

\mathbf{H} dipende solo dalle correnti di conduzione, come \mathbf{D} solo dalle cariche libere.

In forma integrale:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_t dl = \mu_o (I + I_m) \quad \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t dl = I$$

H non è solenoidale:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M}} \quad (\operatorname{div} \mathbf{B} = 0)$$

$\operatorname{div} \mathbf{M}$ dipende dalla geometria e dalle disuniformità del materiale.

Per calcolare **H** non basta conoscere **J**. Bisogna conoscere anche le *sorgenti* del campo.

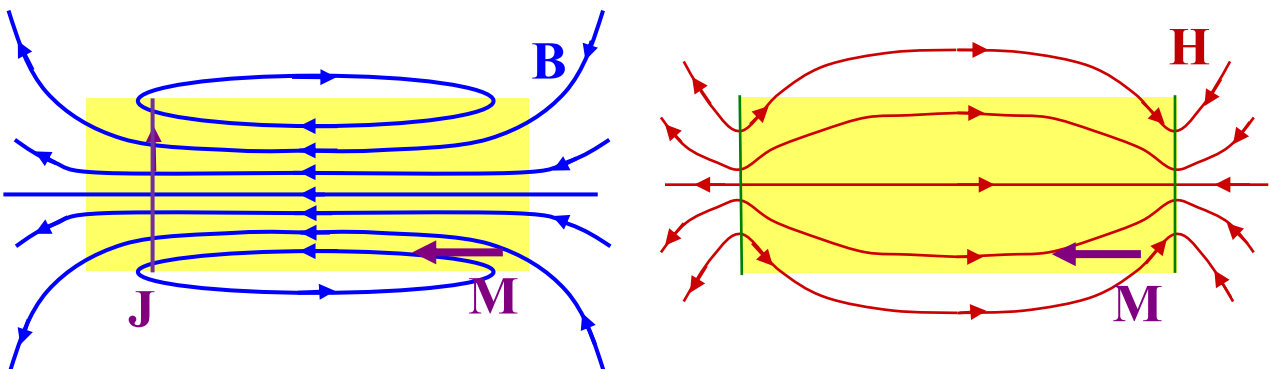
Esempio: Cilindro con **M** uniforme

Corrente superficiale di magnetizzazione: $\mathbf{J}_{s,m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n$

Per quanto riguarda il campo **B** generato, è equivalente ad un solenoide.

Nel materiale: $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$

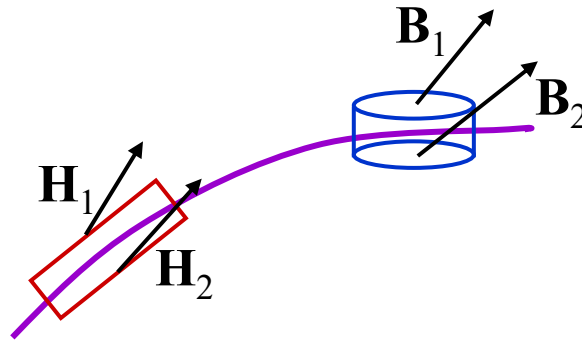
Fuori dal materiale: $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$



Condizioni al contorno

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\mathbf{B}) = 0 \Rightarrow [\mathbf{B}_n] = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t dl = I \Rightarrow [H_t] = J'_{s,cond}$$

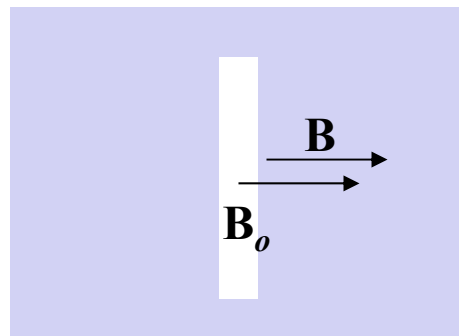
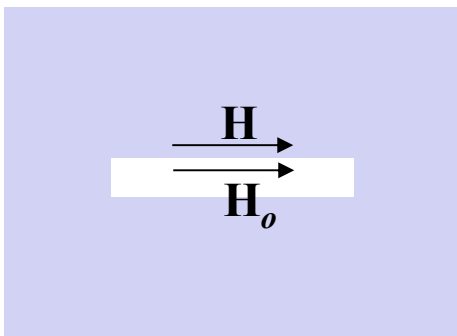


Misura del campo magnetico (\mathbf{B} e \mathbf{H})

In un materiale uniformemente magnetizzato si pratica una cavità sottile e si misura il campo nella cavità:

Cavità parallela: $H = H_t = H_{to} = H_o \Rightarrow$ Misura di \mathbf{H}

Cavità ortogonale: $B = B_n = B_{no} = B_o \Rightarrow$ Misura di \mathbf{B}



Relazione costitutiva

La **relazione costitutiva** $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ dipende dal materiale e può essere ottenuta:

- **Sperimentalmente**, misurando $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$
 - Si avvolge un blocco toroidale del materiale con un solenoide percorso da una corrente I nota e variabile
 - $H = NI/(2\pi r)$, indipendente dal materiale
 - Si misura B (in una cavità cilindrica con asse parallelo a \mathbf{B}) al variare della corrente I ($\rightarrow H$)
- **Teoricamente**, con una teoria microscopica

Tipi di materiali magnetici:

Isotropo: $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$

Anisotropo: \mathbf{M} non parallelo ad \mathbf{H} (cristalli)

Lineare: $M \propto H$ (**dia- e paramagnetici**)

Non lineare: M non proporzionale ad H (**ferromagnetici**)

A differenza dei dielettrici:

I **materiali magnetici lineari** (dia- e paramagnetici) si comportano **sostanzialmente come il vuoto** e la loro presenza viene spesso trascurata.

I **materiali non lineari (ferromagnetici)** sono estremamente **importanti** dal punto di vista pratico.

Materiali isotropi lineari

Relazione costitutiva lineare

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

dove: χ_m = **Suscettività magnetica**

$$\mathbf{B} = \mu_o(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

dove: $\mu = \mu_o\mu_r$ = **Permeabilità magnetica del mezzo**

$\mu_r = (1 + \chi_m)$ = **Permeabilità relativa del mezzo**

Si distinguono in:

Materiali diamagnetici: $\mu_r < 1$ $\chi_m < 0$

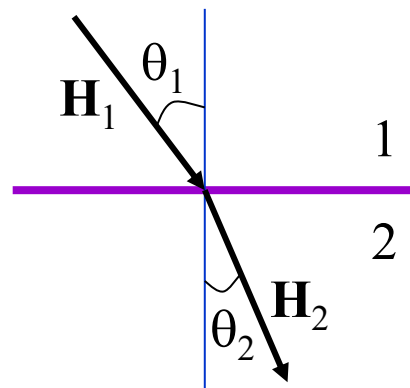
Materiali paramagnetici: $\mu_r > 1$ $\chi_m > 0$

Rifrazione delle linee di campo

$$B_{n1} = \mu_o \mu_{r1} H_{n1} = B_{n2} = \mu_o \mu_{r2} H_{n2}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

$$\frac{H_{t1}/H_{n1}}{H_{t2}/H_{n2}} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$



Materiali diamagnetici

Tutti i materiali (ma in alcuni è mascherato da altri effetti)

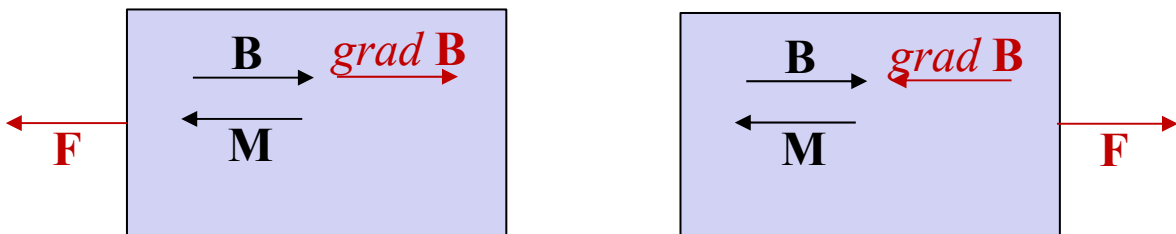
In assenza di un campo esterno, non manifestano proprietà magnetiche: se $\mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{M} = 0$

$$\mu_r = (1 + \chi_m) < 1 \Rightarrow \chi_m < 0$$

\Rightarrow \mathbf{M} ha verso opposto ad \mathbf{H} e a \mathbf{B}

\Rightarrow Il materiale viene spinto verso regioni dove \mathbf{B} è meno intenso

$$\mathbf{F} = \text{grad} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow F_x = -M_x (\partial B_x / \partial x)$$



$$\mu_r \approx 1 - 10^{-5}$$

\Rightarrow Effetto molto piccolo rispetto al comportamento nel vuoto

Materiali paramagnetici

Alcuni materiali (ad es. Al, O₂, aria, ...)

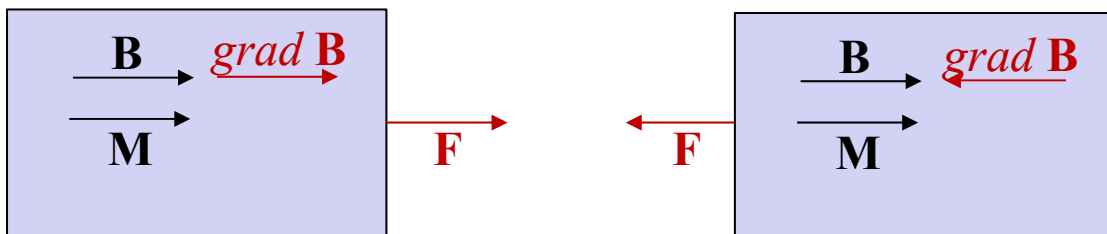
In assenza di un campo esterno, non manifestano proprietà magnetiche: se $\mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{M} = 0$

$$\mu_r = (1 + \chi_m) > 1 \Rightarrow \chi_m > 0$$

\Rightarrow \mathbf{M} ha verso uguale ad \mathbf{H} e a \mathbf{B}

\Rightarrow Il materiale viene spinto verso regioni dove \mathbf{B} è più intenso

$$\mathbf{F} = \text{grad} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow F_x = M_x (\partial B_x / \partial x)$$



$$\mu_r \approx 1 + 10^{-4}$$

\Rightarrow Effetto molto piccolo rispetto al comportamento nel vuoto, ma dominante sul diamagnetismo.

Materiali isotropi non lineari (ferromagnetici)

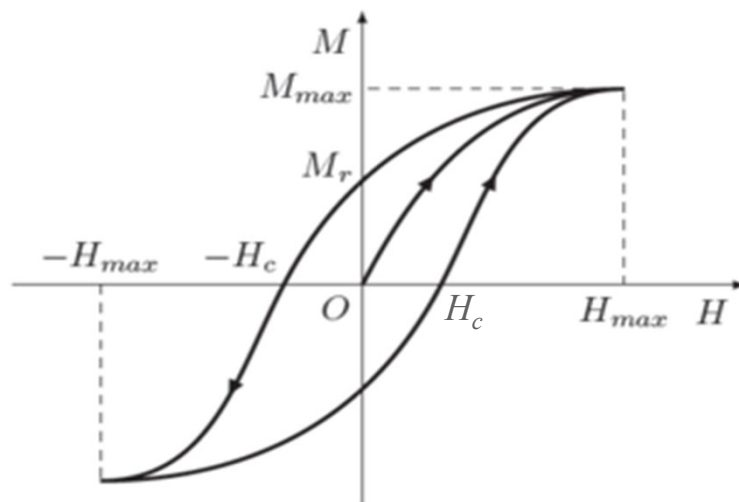
Fe, Ni, leghe di Fe

Caratteristica magnetica **fortemente non lineare**

Legame non univoco tra **B** ed **H** e tra **M** ed **H**

⇒ **Ciclo di isteresi**

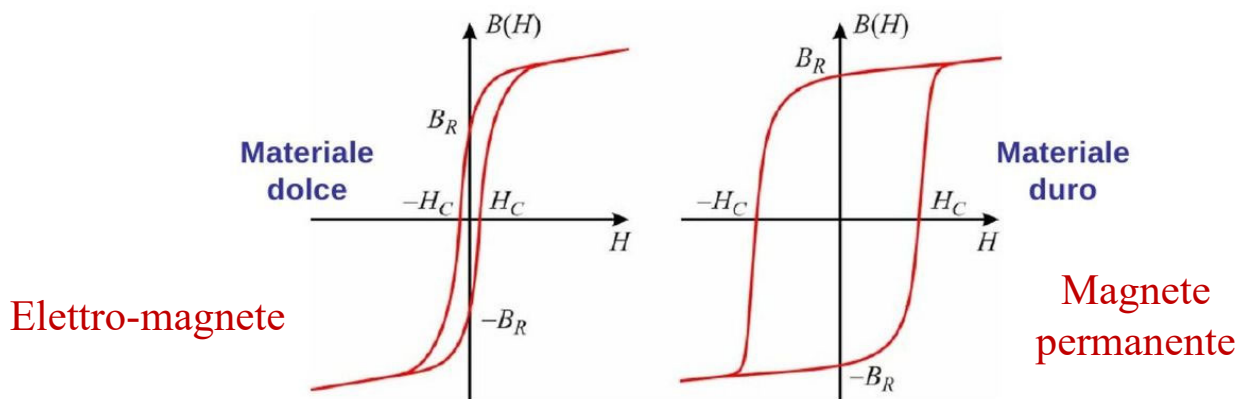
⇒ **Magnetizzazione permanente o residua $M_o = M(0) \neq 0$**



Se si “linearizza” un tratto della caratteristica (**$B = \mu_o \mu_r H$**):

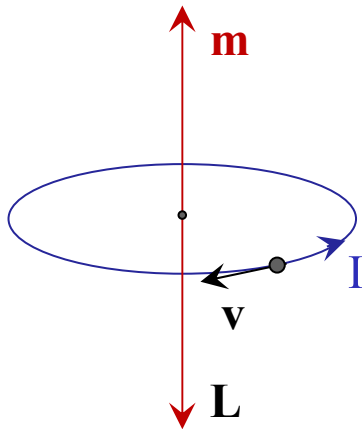
$\mu_r \approx 10^3-10^5$ (Applicazione: **schermo magnetico**)

Effetto molto marcato rispetto al comportamento nel vuoto e dominante su dia- e paramagnetismo



Interpretazione microscopica del magnetismo nella materia

Diamagnetismo



Il moto orbitale degli e^- determina un momento magnetico:

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}$$

L'orientazione di \mathbf{m} è casuale.

In presenza di un campo magnetico \mathbf{B} ,

a) Se $\mathbf{B} \nparallel \mathbf{m}$, nasce un momento meccanico: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$

che determina un moto di precessione (**precessione di Larmor**) del piano dell'orbita attorno a \mathbf{B} : \mathbf{m} ruota con inclinazione costante.

Dalla II eq. cardinale e dalla Relazione di Poisson:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}$$

dove: $\boldsymbol{\omega}_L$ = Velocità angolare di precessione di Larmor

$$\Rightarrow \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\omega}_L = \frac{e}{2m_e}\mathbf{B}$$

b) Se $\mathbf{B} \parallel \mathbf{m}$, nasce una forza di Lorentz diretta radialmente, che fa variare la velocità ω :

$$\mathbf{F}_L = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{con: } \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{R}$$

Supponendo che il raggio dell'orbita sia $R = \text{cost}$ (verificato a posteriori):

$$\mathbf{F}_c = -m_e \omega^2 \mathbf{R}$$

\mathbf{F}_L si somma a \mathbf{F}_c e la fa variare:

$$\Delta F_c = 2m_e \omega \Delta \omega R = F_L = e\omega R B$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \omega = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}$$

In ogni caso, si determina un momento $\mathbf{m}_d \parallel \mathbf{B}$:

$$\mathbf{m}_d = -\frac{eR^2}{2} \omega_L = -\frac{eR^2}{2} \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{m}_d = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{M} = N \langle \mathbf{m} \rangle = -\alpha_d \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H} - \mu_0 \alpha_d \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \alpha_d} \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

con:

$$\mu_r = \frac{1}{1 + \mu_0 \alpha_d} < 1 \quad \mu_0 \alpha_d \sim 10^{-5}$$

Paramagnetismo

Molecole con **momento magnetico proprio \mathbf{m}** .

Il momento magnetico proprio dipende dallo **spin**.

Per motivi energetici, ogni orbita elettronica è generalmente occupata da due e^- con spin opposti:

$$\mathbf{S}_{tot} = 0 \Rightarrow \mathbf{m} = 0$$

In alcuni materiali (paramagnetici), gli spin sono paralleli:

$$\mathbf{S}_{tot} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{m} \neq 0$$

Se **$\mathbf{B} = 0$** , i momenti hanno orientazione casuale:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = 0$$

Se **$\mathbf{B} \neq 0$** , nasce un momento meccanico: **$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$**
che tende ad allineare i momenti.

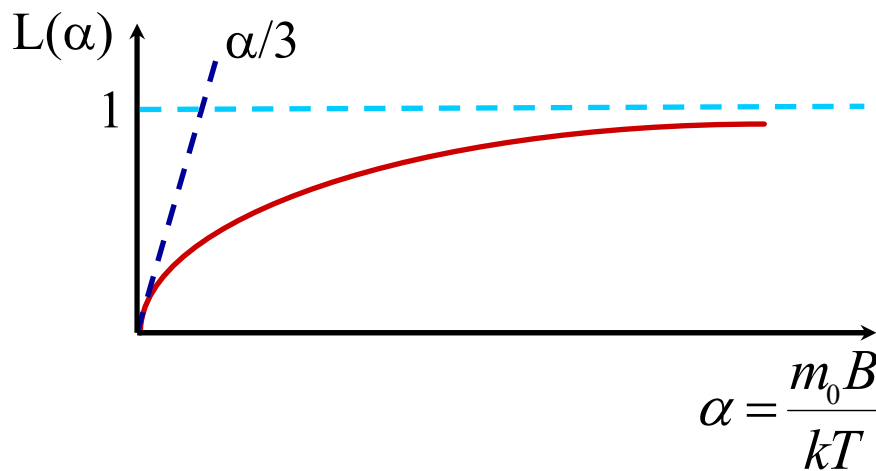
Si crea un equilibrio dinamico con l'agitazione termica, che tende a disordinarli.

$\langle \mathbf{m} \rangle$ può essere calcolato con la **teoria di Langevin**, con:

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \langle m \cos \theta \rangle = m_0 L(\alpha) = m_0 \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$$

dove: $L(\alpha)$ = Funzione di Langevin $\alpha = \frac{m_0 B}{kT}$



Per piccoli valori di \mathbf{B} , approssimando L alla tangente nell'origine:

$$M = Nm_0 L(\alpha) \cong \frac{Nm_0^2}{3kT} B = \alpha_p B \quad \mathbf{M} = \alpha_p \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0 \alpha_p} \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

con: $\mu_r = \frac{1}{1 - \mu_0 \alpha_p} > 1 \quad \mu_0 \alpha_p \sim 10^{-4}$

Nelle molecole con momento magnetico proprio, l'effetto paramagnetico si sovrappone a quello diamagnetico ed è dominante.

$$\mathbf{M} \propto \frac{\mathbf{B}}{T}$$

Equilibrio dinamico tra effetto del campo \mathbf{B} e dell'agitazione termica

NB: Nella trattazione del dia- e del paramagnetismo, si dovrebbe considerare \mathbf{B}_{eff} , ma $\mathbf{B}_{eff} \cong \mathbf{B}$, trattandosi di effetti quantitativamente molto limitati.

Ferromagnetismo

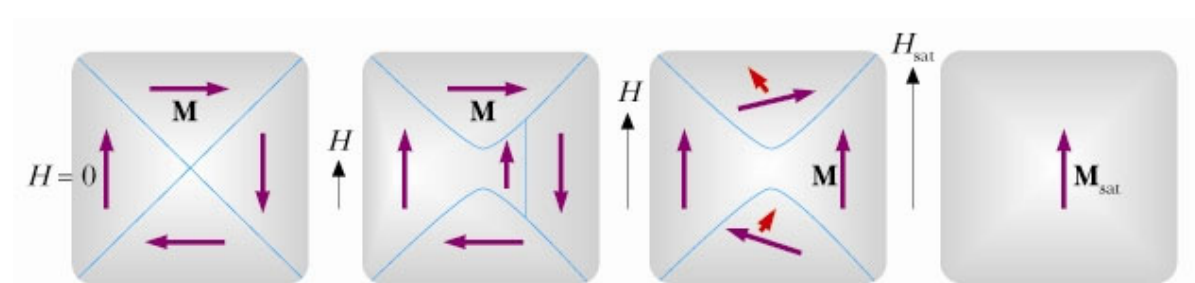
In particolari reticoli cristallini, una forte interazione tra gli spin degli e^- rende energeticamente favorita la configurazione atomica/molecolare con **spin paralleli** ($\uparrow\uparrow$) anche tra atomi diversi

\Rightarrow Magnetizzazione propria **M** molto intensa

\Rightarrow **$M \neq 0$** anche con **$B = 0$**

\Rightarrow **$M \cong M_{sat}$** (max) anche per **B** poco intensi

Domini di Weiss = Regioni (1-100 μm) nelle quali gli spin si allineano spontaneamente (anche in assenza di **B** esterno) determinando **m** permanente



Al di sopra di una temperatura critica caratteristica del materiale (**Temperatura di Curie**), il ferromagnetismo scompare ed il materiale si comporta come paramagnetico

Momento magnetico nucleare

Applicazione: Risonanza magnetica nucleare

- Spettroscopia
- Imaging medico