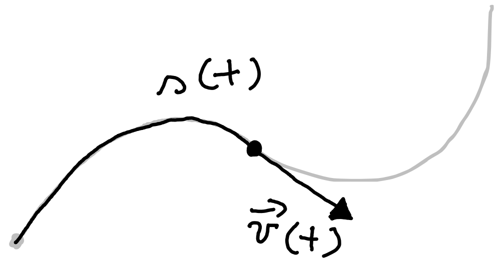
ESERCIZIO 1

$s(t) = kt^3$



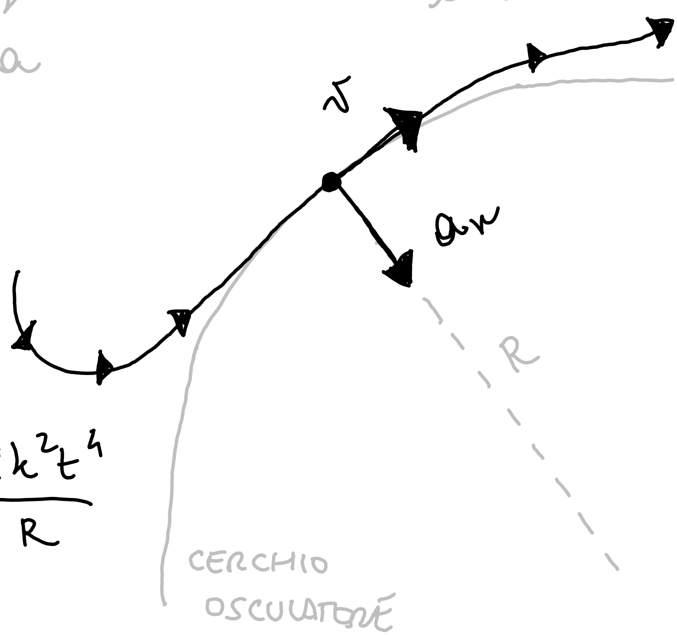
(a) v(t)

$$v(t) = \frac{d\,s(t)}{dt} = 3kt^2$$

(b) componenti a_n e a_t, ed il modulo a, in funzione del tempo e del raggio di curvatura della traiettoria

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$



$$a_n = \frac{(3kt^2)^2}{R} = \frac{9k^2t^4}{R}$$

$$a_t = 6kt$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\frac{81k^4t^8}{R^2} + 36k^2t^2}$$

$$= kt\sqrt{\frac{81k^2t^6}{R^2} + 36}$$

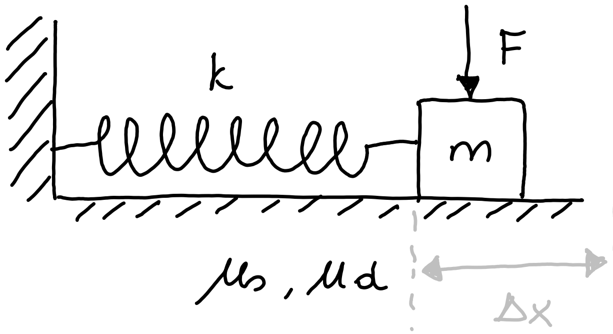
(c) sapendo che $a = \sqrt{37}\, kt$, trovare R in funzione di t e s

$$a = \sqrt{37}\, kt = kt\sqrt{\frac{81k^2t^6}{R^2} + 36}$$

$$\Rightarrow \quad 81k^2t^6 = R^2$$

$$R = 9kt^3 = 9s \qquad \boxed{R = 9s}$$

ESERCIZIO 2



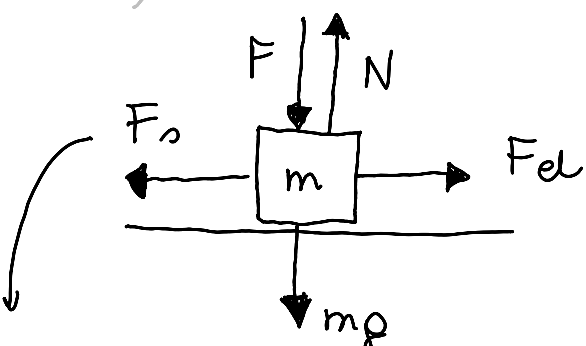
$m = 0.5\ kg$

$k = 10^3\ N/m$

$\Delta x = 1.8\ cm$

$F = 15\ N$

(a) sapendo che F è la forza minima per mantenere il corpo in quiete, ricavare μ_s



(verso destra perché la molla è compressa)

sarà verso sinistra, dato che deve opporsi alla forza elastica.

Perché il corpo resti in quiete

$$F_s \leq F_s^{MAX} = \mu_s N$$, devo trovare N

EQ. NEWTON

$$x \begin{cases} F_{el} - F_s = 0 \\ N - F - mg = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_s = F_{el} = k\Delta x \\ N = F + mg \end{cases}$$
$$y$$

$$F_s = k\Delta x \leq \mu_s N = \mu_s [F + mg]$$

Da cui ricavo

$$\mu_s F \geq k\Delta x - mg \qquad \text{ovvero}$$

$$F \geq (k\Delta x - mg)/\mu_s$$

F è la forza minima che serve per tenere ferma la massa m, allora:

$$F = (k\Delta x - mg)/\mu_s \quad , \quad \text{dunque:}$$

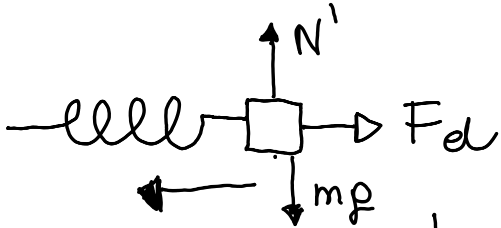
$$\boxed{\mu_s = \frac{k\Delta x - mg}{F}}$$

La soluzione numerica:

$$\mu_s = \frac{10^3 \, N/m \cdot 0.018\, m - 0.5\, kg \cdot 9{,}81\, \frac{m}{s^2}}{15\, N}$$

$$= \frac{18\, N - 4{,}905\, N}{15\, N} = 0.87 \simeq 0.9$$

(b) F viene rimossa. La massa si muove, e $\mu_d = 0.72$. Calcolare v_0 con cui il corpo si stacca dalla molla.



$F_d = \mu_d N'$

Il corpo si stacca quando la forza elastica è nulla, ovvero l'allungamento è nullo. Applicando la cons. dell'energia totale si ha:

$$E_{TOT}^{in} = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

$$E_{TOT}^{fin} = \frac{1}{2} m v_0^2 + E_{diss}$$

E_{diss} = energia dissipata $= \mu_d N' \Delta x$

$N' = mg$

$= \mu_d mg \Delta x$

$$E_{TOT}^{in} = E_{TOT}^{fin}$$

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \mu_d mg \Delta x$$

$$v_0^2 = \frac{k}{m} \Delta x^2 - 2 \mu_d g \Delta x$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \Delta x^2 - 2 \mu_d g \Delta x}}$$

SOLUZIONE NUMERICA :

$$v_0 = \sqrt{\frac{10^3 N/m}{0.5 kg} (0.018)^2 m^2 - 2 \cdot 0.72 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.018 m}$$

$$v_0 = \sqrt{0.648\,\frac{m^2}{s^2} - 0.254\,\frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{0.394}\;\frac{m}{s}$$

$$\simeq 0.63\,\frac{m}{s}$$

(c) DISTANZA PERCORSA prima di fermarsi (dopo il distacco)

Utilizzo ancora la conservazione dell'energia totale tra il momento del distacco (0) e il momento dell'arresto (1)

$$E_{TOT}^{0} = E_{TOT}^{1}$$

$$E_{TOT}^{0} = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad E_{TOT}^{1} = E_{diss} = \mu_d m g D$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = \mu_d \cancel{m} g D$$

$$\boxed{D = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}} = \frac{\left(0.63\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.72 \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2}} \simeq 2.8\ \text{cm}$$

ESERCIZIO 3

$M = 6m$

$m_1 = m$

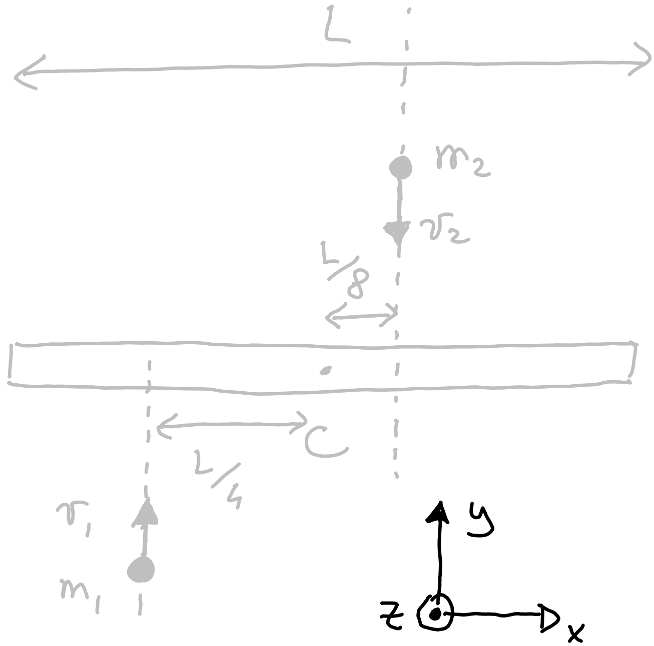
$m_2 = 2m$

$v_1 = 2v$

$v_2 = v$

$d_1 = L/4$

$d_2 = L/8$



(a) $\vec{v}_{cm}$ e $\vec{L}_c$ prima e dopo l'urto.

Non ci sono $\vec{F}_{ext}$, dunque vale la conservazione del momento e del momento angolare:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \qquad \vec{p} = \text{COSTANTE}$$

$$\vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L} = \text{COSTANTE}$$

La quantità di moto TOTALE (COSTANTE) è

$$\vec{P}_i = m_2 v_2 (-\vec{u}_y) + m_1 v_1 \vec{u}_y$$
$$= \vec{u}_y \left[m_1 v_1 - m_2 v_2 \right] =$$
$$= \vec{u}_y \left[m\, 2v - 2m\, v \right] = 0$$

La velocità del centro di massa è dunque nulla, dato che

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}_i}{M_{TOT}} = 0$$

Il momento angolare totale (costante) è:

$$\vec{L} = m_1 v_1 \frac{L}{4} (-\vec{u}_z) + m_2 v_2 \frac{L}{8} (-\vec{u}_z) =$$
$$= -\vec{u}_z \left[\frac{m \cancel{2} v L}{\cancel{4}\, 2} + \frac{\cancel{2} m v L}{\cancel{8}\, 4} \right] =$$
$$= -\vec{u}_z \frac{3}{4} m v L \quad \text{(verso entrante)}$$

(b) velocità angolare asta dopo urto.

Quando le due masse sono conficcate, l'asta continua a ruotare con lo stesso momento angolare. Posso trovare $\vec{\omega}$ dalla cons. mom. angolare prima e dopo l'urto:

$$\vec{L} = I_{TOT}\,\vec{\omega}$$

dove I_{TOT} è l'inerzia totale rispetto a C del sistema complessivo:

$$I_{TOT} = I_{m_1} + I_{m_2} + I_{asta} =$$

$$= m_1\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{8}\right)^2 + \frac{1}{12}ML^2 =$$

$$= \frac{mL^2}{16} + \frac{\cancel{2}^{\,1} mL^2}{\cancel{64}_{\,32}} + \frac{\cancel{6}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,2}} mL^2 =$$

$$= \frac{2+1+16}{32} mL^2 = \frac{19}{32} mL^2$$

Dunque:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{I_{TOT}} = -\frac{3}{4}\cancel{m}v\cancel{L}\vec{u_z} \cdot \frac{32}{19}\frac{1}{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}$$

$$= -\frac{24}{19}\frac{v}{L}\vec{u_z}$$

(c) E dissipata nell'urto.

$$E_{in} = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m v^2 + \frac{1}{\cancel{2}}m \cancel{4}^{2} v^2 = 3mv^2$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2}I_{TOT}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\cancel{19}}{32}m\cancel{L^2}\frac{v^2}{\cancel{L^2}}\frac{24^2}{19^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{\overset{\cancel{12}\,\cancel{6}\,3}{\cancel{24}}\cdot\overset{\cancel{12}\,\cancel{6}\,3}{\cancel{24}}}{\cancel{2}\cdot 19\cdot \underset{\cancel{16}\,8\,\cancel{4}\,\cancel{2}\,1}{\cancel{32}}}mv^2 = \frac{9}{19}mv^2$$

$$E_{diss} = E_{in} - E_{fin} = \left(3 - \frac{9}{19}\right)mv^2 = \frac{48}{19}mv^2$$

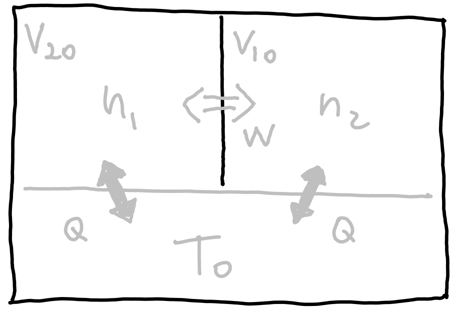
ESERCIZIO 4

$V = 10\ l$

$n_1 = 8\ mol$

$n_2 = 2\ mol$

$T_0 = 300\ K$



INIZIALMENTE $\quad V_{20} = V_{10} = \frac{V}{2}$

POI LASCIO LIBERA LA PARETE DI SCORRERE

a) $V_{1f} = ?$ $\quad V_{2f} = ?$ $\quad p_{1f} = ?$ $\quad p_{2f} = ?$

Lo stato finale è uno stato di equilibrio, in cui la pressione deve essere la stessa, per cui $p_f = p_{1f} = p_{2f}$ (altrimenti la parete si muove) e la temperatura deve essere la stessa, per effetto del termostato.

Dunque:

$$\begin{cases} p_f V_{1f} = n_1 R T_0 \quad (1) \\ p_f V_{2f} = n_2 R T_0 \\ V_{1f} + V_{2f} = V \end{cases}$$

3 equazioni in 3 incognite p_f, V_{1f}, V_{2f}

$$p_f (V - V_{2f}) = n_1 R T_0$$

$$p_f V - n_2 R T_0 = n_1 R T_0$$

$$p_f = \frac{R T_0 (n_1 + n_2)}{V} = \frac{8.314 \frac{J}{\cancel{mol}\,\cancel{K}} \cdot 300 \cancel{K} (\cancel{10}\ \cancel{mol})}{\cancel{10}\ l}$$

$$= 2494.2 \frac{J}{l}$$

$1\ l = 0.001\ m^3$

$$= 2494.2\ kPa$$

$$V_{1f} = \frac{n_1 R T_0}{p_f} = \frac{n_1 \cancel{R T_0}\, V}{\cancel{R T_0} (n_1 + n_2)} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} V$$

$$= \frac{8}{10} V = 8\ l$$

$$V_{2f} = \dots = \frac{n_2}{n_1 + n_2} V = \frac{2}{10} V = 2\ l$$

b) ΔS dei due gas e la loro somma.

Stato iniziale e finale di entrambi i gas stanno su una curva isoterma a temperatura T_0. posso calcolare dunque ΔS lungo la trasformaz. reversibile che connette lo stato iniziale allo stato finale. Allora

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T_0} = \frac{Q}{T_0}$$

per l'isoterma reversibile, $\Delta U = 0$, allora

$$Q = L = \int_{V_0}^{V_F} p\,dV = nRT_0 \ln\left(\frac{V_F}{V_0}\right)$$

dunque si ottiene

$$\Delta S_1 = n_1 RT_0 \ln\left(\frac{V_{1F}}{V/2}\right) \qquad \Delta S_2 = n_2 RT_0 \ln\left(\frac{V_{2F}}{V/2}\right)$$

$$\Delta S_1 = n_1 R T_0 \ln\left(\frac{8}{5}\right) = 31.26 \ \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_2 = n_2 R T_0 \ln\left(\frac{2}{5}\right) = -15.24 \ \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{1+2} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 16.02 \ J/K$$

(c) Q^s_{TOT} scambiato dalla sorgente

$\Delta S^{univ} = ?$

$Q^S_{TOT} = Q^S_1 + Q^S_2$, ovvero somma dei calori scambiati con i due gas

$Q_1 = -Q_1^S$ è il calore scambiato dal gas 1

$Q_2 = -Q_2^S$ è il calore scambiato dal gas 2

Per entrambi i gas deve valere:

$Q_i = L_i$, dato che $\Delta U_i = 0$

$(i = 1, 2)$

Il lavoro che il gas 1 esercita sul gas 2 (L_1) deve essere uguale e opposto al lavoro che 2 esercita su 1 (L_2), dato che i due gas non compiono né subiscono lavoro dall'esterno:

$$L_1 + L_2 = 0 \qquad L_1 = -L_2$$

Allora $Q_1 = L_1 = -L_2 = -Q_2$

Dunque $Q_1^S = -Q_1 = Q_2 = -Q_2^S$

Allora $\boxed{Q^S_{TOT} = 0}$. OVVERO

Tutta l'energia trasferita al termostato dal gas nello scomparto 1 sotto forma di calore va a finire nel gas nello scomparto 2 (attraverso il termostato che però non assorbe energia)

Allora si ha che la variazione di entropia del termostato è nulla:

$$\Delta S_{sorg} = \frac{Q^{S}_{TOT}}{T_0} = 0$$

La ΔS dell'universo è:

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{sorg} + \Delta S_{1+2} =$$

$$= \Delta S_{1+2} > 0$$

Allora $\boxed{\text{la trasformazione è IRREVERSIBILE}}$