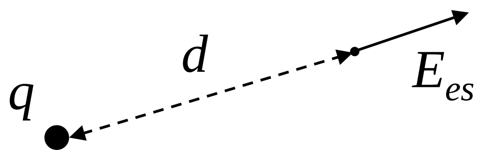
# Onde elettromagnetiche

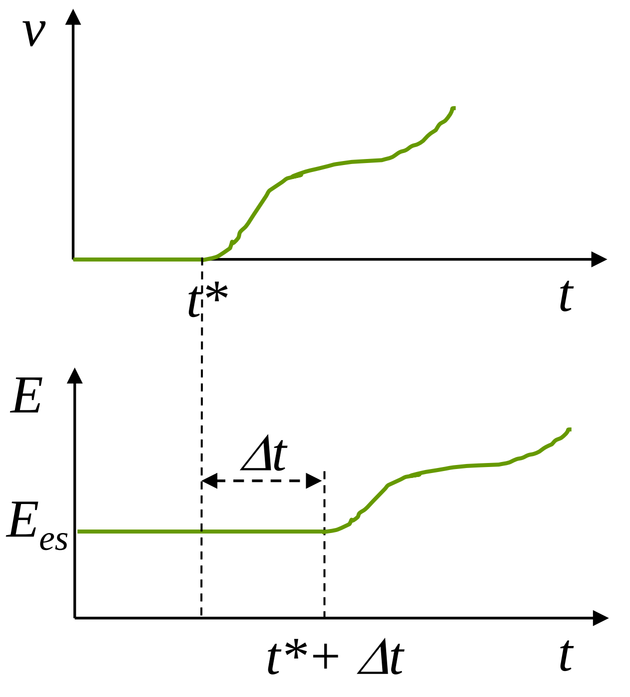
**E**(t) $\rightarrow$ **B**(t) $\rightarrow$ **E**(t) $\rightarrow$ …

**E** e **B** sono strettamente correlati, sono due aspetti di un’unica entità: il campo elettromagnetico

Le variazioni di **E** e **B** si propagano non istantaneamente, ma con **velocità finita**

**Esempio**: Una carica $q$ in moto provoca una variazione «ritardata» di **E** (e quindi di **B**)




Per $t < t^*$: $\mathbf{v} = 0$

$\Rightarrow$ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{es}$

Per $t > t^*$: $\mathbf{v} \neq 0$

$\Rightarrow$ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{es}$ fino a $t = t^* + \Delta t$, dove: $\Delta t = d/c$

Per $t > t^* + \Delta t$, **E** varia.

La perturbazione di **E** si propaga con velocità finita pari a $c$.

La perturbazione di **E** provoca una perturbazione di **B**, che si propaga anch’essa con le stesse caratteristiche.

**Onda = Perturbazione di un campo, che si propaga con velocità finita**

**Esempi**:

- onde e.m. (**E** e **B**)
- onde acustiche in un gas (pressione)
- onde superficiali su un liquido (es. mare)
- onde elastiche nei solidi (posizione, trasversali e longitudinali)

Nello studio dell'induzione, «quasi stazionario» vuol dire che deve essere trascurabile la velocità di propagazione del campo sulle dimensioni del circuito

# Onde in assenza di sorgenti

L'esistenza delle onde e.m. deriva dalle equazioni di Maxwell

Esiste una condizione per cui le equazioni per **E** ed **H** sono completamente simmetriche: supponiamo di essere nel vuoto (o in un mezzo lineare) e in assenza di sorgenti

$$\rho = 0 \qquad \mathbf{J} = 0 \qquad (\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H})$$

Le equazioni diventano:

$$\boxed{\begin{aligned} &div\,\mathbf{E} = 0 && rot\,\mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ &div\,\mathbf{H} = 0 && rot\,\mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

Da cui:

$$rot(rot\,\mathbf{E}) = -rot\left(\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\, rot\,\mathbf{H}) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$rot(rot\,\mathbf{E}) \equiv grad(div\,\mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

Quindi:
$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Ponendo: $\varepsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{c^2} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

dove: $c$ = 3 x $10^8$ m/s = velocità della luce nel vuoto

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

**Equazione delle onde**

Procedendo in modo analogo per il vettore **H**, si ottiene:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0}$$

In un mezzo lineare, le equazioni sono formalmente identiche, con *v* al posto di *c*:

$$\boxed{v^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}}$$

In generale:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

Questa equazione è detta **equazione delle onde** perchè descrive il propagarsi di una qualsiasi perturbazione (onda) non solo elettromagnetica

# Onde piane

Le **onde piane** sono un caso particolare, che a rigore non esiste, ma sono importanti perché:

- La descrizione analitica è semplice
- Sono approssimazione di molte situazioni pratiche
- Ogni onda può essere descritta come sovrapposizione di onde piane (Analisi di Fourier)

Supponiamo che sia: $\phi = \phi(x)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0}$$

**Equazione di D'Alembert**

che ammette soluzioni del tipo:

$$\boxed{\phi = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)}$$

come si può verificare per $\phi = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ $\left(\text{o per } \phi = g\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$

con la sostituzione: $\xi = t - \dfrac{x}{c}$ $\quad \left(\xi = t + \dfrac{x}{c}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial \xi} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{df}{d\xi}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

cioè la funzione $f$ soddisfa l'equazione:

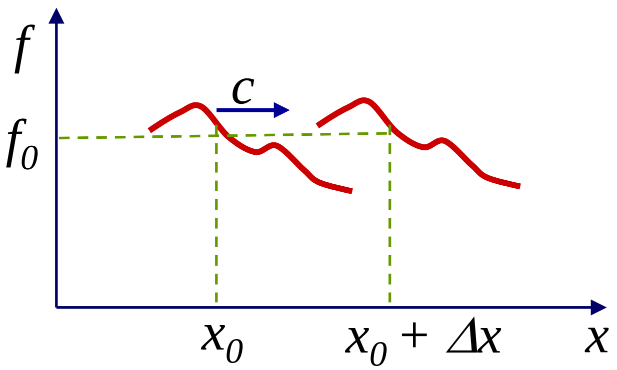
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Valutiamo $f$ in $(t_0, x_0)$ e $(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)$

$$f_0 = f\left(t_0 - \frac{x_0}{c}\right) \qquad f_1 = f\left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0}{c} - \frac{\Delta x}{c}\right)$$

Se:

$$\Delta x = c\Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t} = c}$$




$$\boxed{f_1 = f_0}$$

La funzione $f$ rimane invariata per un osservatore che si muove con velocità $c$ $\Rightarrow$ $f$ si propaga con velocità $c$.

La grandezza fisica rappresentata da funzioni con tali proprietà si definisce **onda elettromagnetica**

$f$ si muove nel verso dell'asse ed è un'**onda progressiva**.
$g$ si muove con verso opposta all'asse ed è un'**onda regressiva**.

Le soluzioni delle equazioni di Maxwell sono:

- campi statici
- onde e.m., che si propagano a velocità *c*

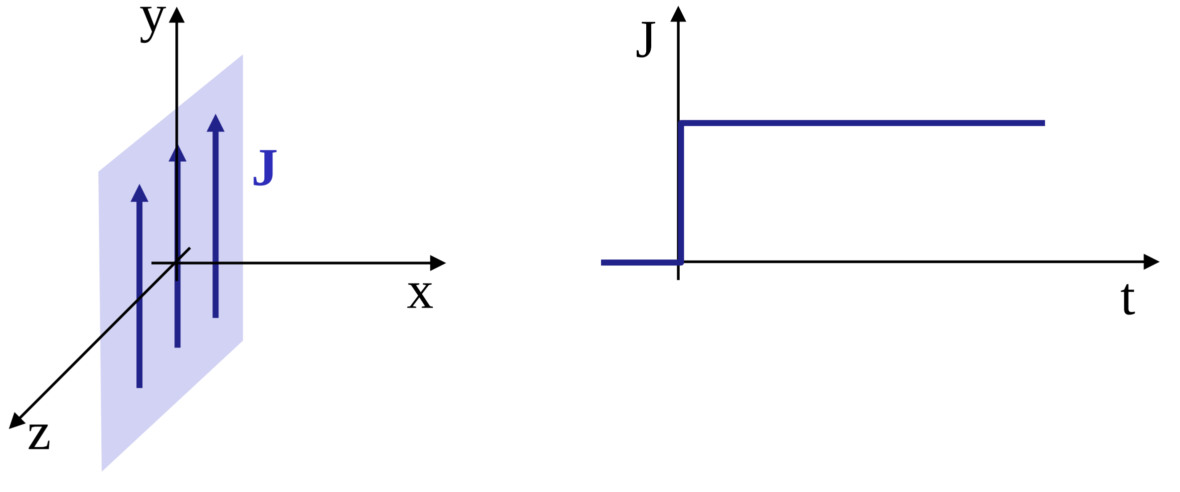
Maxwell ha previsto l'esistenza delle onde e.m.

Hertz (1888) ha verificato l'esistenza delle onde radio

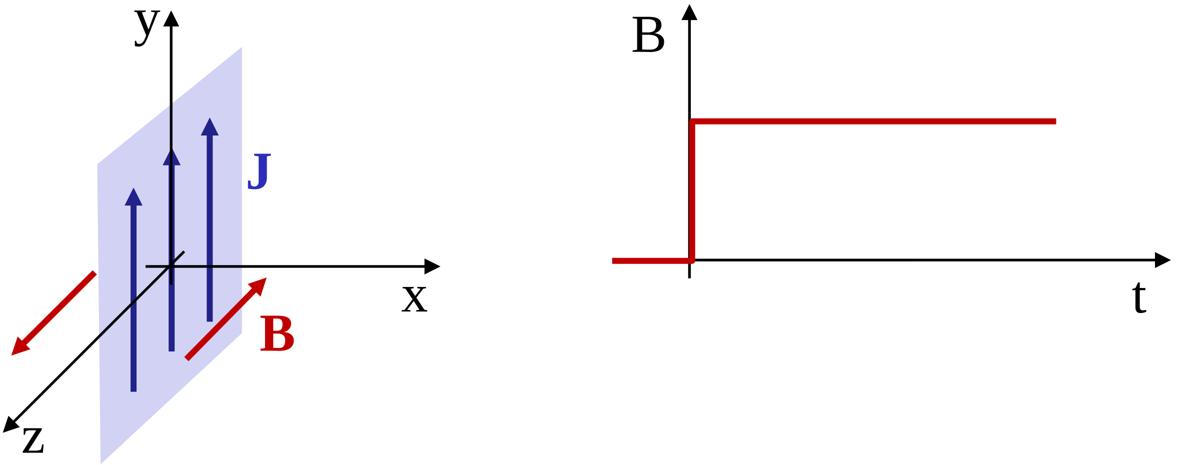
Conferma sperimentale è anche il fatto che la luce, le onde radio, i raggi x, ecc. hanno velocità *c*

**Esempio**

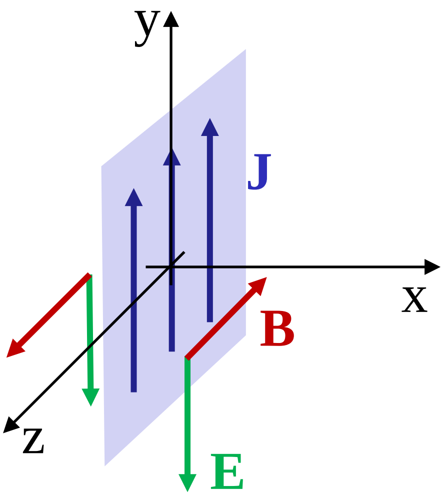
Consideriamo una lamina indefinita nel piano *yz*, percorsa dalla corrente **J** // *y* e costante $\forall t > 0$

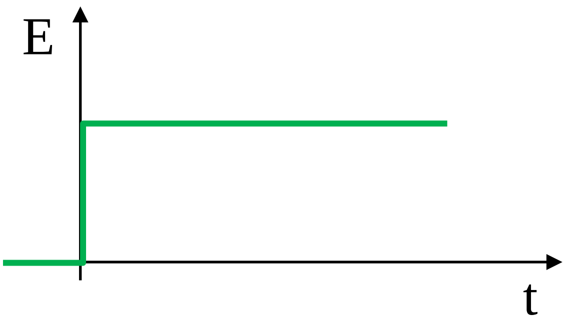



**J** genera **B** uniforme e // *z*



La variazione di **B** genera **E**




La variazione di **E** ($\varepsilon_o \partial \mathbf{E}/\partial t$) si somma a **J** per generare **B**

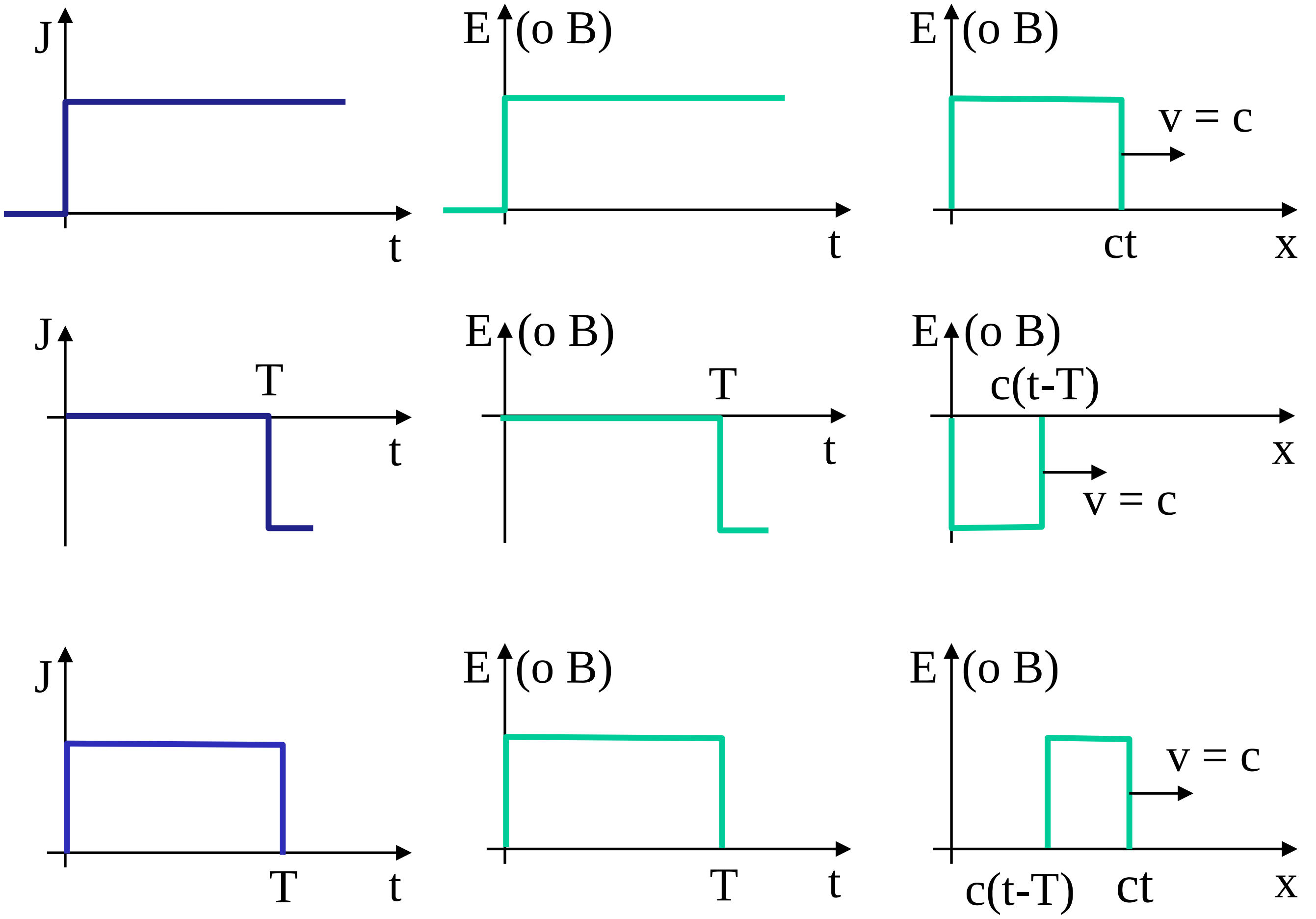
**E** e **B** si propagano con velocità *c* in direzione *x*

- Il concetto di "propagazione" è contenuto nelle equazioni di Maxwell

- La dipendenza di **J** dal tempo ed il valore a regime determinano il valore dei campi **E** e **B**

Se all'istante $t = T$ la corrente va a zero, si generano campi uguali e contrari, che annullano i precedenti

Un impulso di lunghezza *cT* si propaga con velocità *c*




Caratteristiche dell’onda sono:

- Direzione di propagazione // *x*

**- E** // *y*

**- B** // *z*

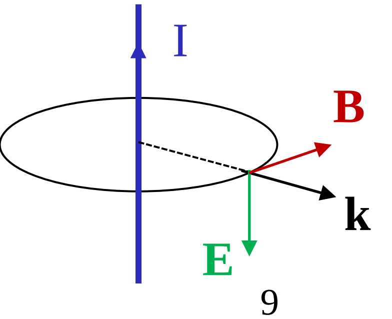
Le tre direzioni sono sempre ortogonali una all’altra.

Tutte le onde e.m. hanno le seguenti caratteristiche:

**- E**, **B** e la direzione di propagazione **k** formano una terna destra (**onde trasversali**)

- $E = cB$

Esempio: filo indefinito percorso da corrente



# Proprietà delle onde piane

Consideriamo un'onda elettromagnetica descritta dalle due equazioni:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad\qquad \nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

Se i campi **E** e **B** sono costanti su tutti i punti di un piano, ad esempio il piano *xy* in un sistema cartesiano, cioè:

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial y} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}$$

I campi dipendono solo dalla coordinata *z*.

L'onda descritta da due equazioni del tipo:

$$\boxed{\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0}$$

e che soddisfa alle condizioni sopra indicate è un'**onda piana**

Da:

$$div\,\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$div\,\mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Consegue:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

cioè le componenti $E_z$ e $B_z$ sono costanti rispetto a $z$

Da:

$$\left(rot\,\mathbf{E}\right)_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\left(rot\,\mathbf{B}\right)_z = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

consegue:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$E_z$ e $B_z$ sono costanti rispetto a $t$

Poichè $E_z$ e $B_z$ sono costanti sia rispetto a $z$ che a $t$, non contribuiscono all'onda e possiamo assumerle uguali a zero

**E** e **B** non variano in direzione $z$ e sono ortogonali alla direzione di propagazione $z$

$\Rightarrow$ **onda trasversale**

Consideriamo le altre componenti di *rot* **E** e *rot* **B**:

$$\left(rot\,\mathbf{E}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\left(rot\,\mathbf{E}\right)_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\left(rot\,\mathbf{B}\right)_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\left(rot\,\mathbf{B}\right)_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

**E e B sono sempre presenti contemporaneamente**

Sia: $$E_x = \phi_x(t - z/c) \qquad E_y = \phi_y(t - z/c)$$
$$B_x = \psi_x(t - z/c) \qquad B_y = \psi_y(t - z/c)$$

Dalle eq. per (*rot E*)$_x$ e (*rot B*)$_x$:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Posto: $\xi = t - z/c$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \phi_y}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi}$$

risulta

$$\psi_x = -\frac{1}{c}\phi_y \qquad \psi_y = \frac{1}{c}\phi_x$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = E_x B_x + E_y B_y = \phi_x\left(-\frac{1}{c}\phi_y\right) + \phi_y\left(\frac{1}{c}\phi_x\right) = 0$$

**E** e **B** sono sempre tra di loro ortogonali e alla direzione di propagazione

**E, B e k formano una terna ortogonale**

Inoltre:

$$\frac{|\mathbf{E}|^2}{|\mathbf{B}|^2} = \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2}{\frac{\phi_x^2}{c^2} + \frac{\phi_y^2}{c^2}} = c^2$$

$$\boxed{|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|}$$

Il modulo di **E** è *c* volte il modulo di **B**