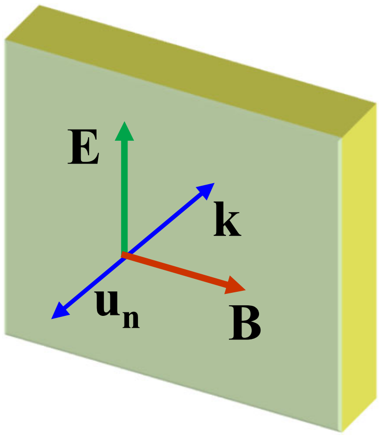
Onda piana incidente su un conduttore perfetto



Sulla superficie di separazione, valgono le condizioni al contorno per il campo e.m.

Condizioni al contorno per un'onda e.m.

$$\boxed{\begin{array}{ll} [D_n] = \sigma & [E_t] = 0 \\ [B_n] = 0 & [H_t] = J'_s \end{array}}$$

Un conduttore ideale risponde istantaneamente al campo elettrico dell'onda separando cariche in modo da annullare il campo all'interno:

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = 0$$

Inoltre, l'onda è piana:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{u_n}$$

All'interno: $\boxed{\mathbf{E}_{\mathbf{int}} = 0}$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B}_{\mathbf{int}} = 0}$$

L'onda non si propaga all'interno del conduttore.

Per la conservazione dell'energia, quindi l'onda risulta **totalmente riflessa.**

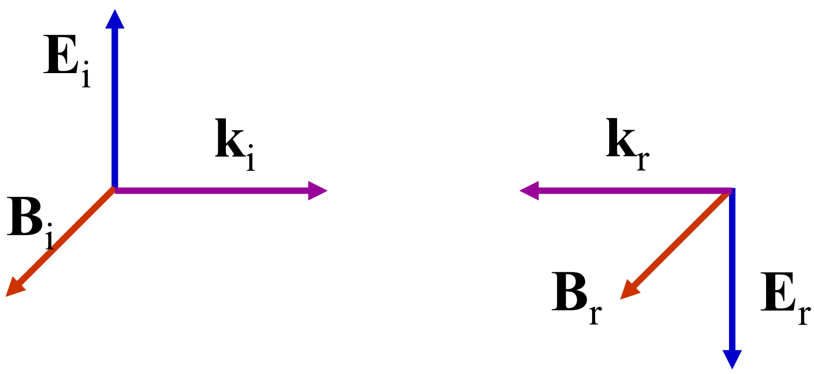
Sulla superficie:

$$[\mathrm{D}_n] = \sigma \qquad [\mathrm{E}_t] = 0$$
$$[\mathrm{B}_n] = 0 \qquad [\mathrm{H}_t] = \mathrm{J}'_s$$

dove i vettori si riferiscono al campo totale, cioè alla somma dell'onda incidente più l'onda riflessa.

Quindi sulla superficie:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E} = 0 & \mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_i \\ \mathbf{B} = 2\mathbf{B}_i & \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_i \end{array}$$



$$E_i = E_0 sin(\omega t - kz) \qquad E_r = -E_0 sin(\omega t + kz)$$

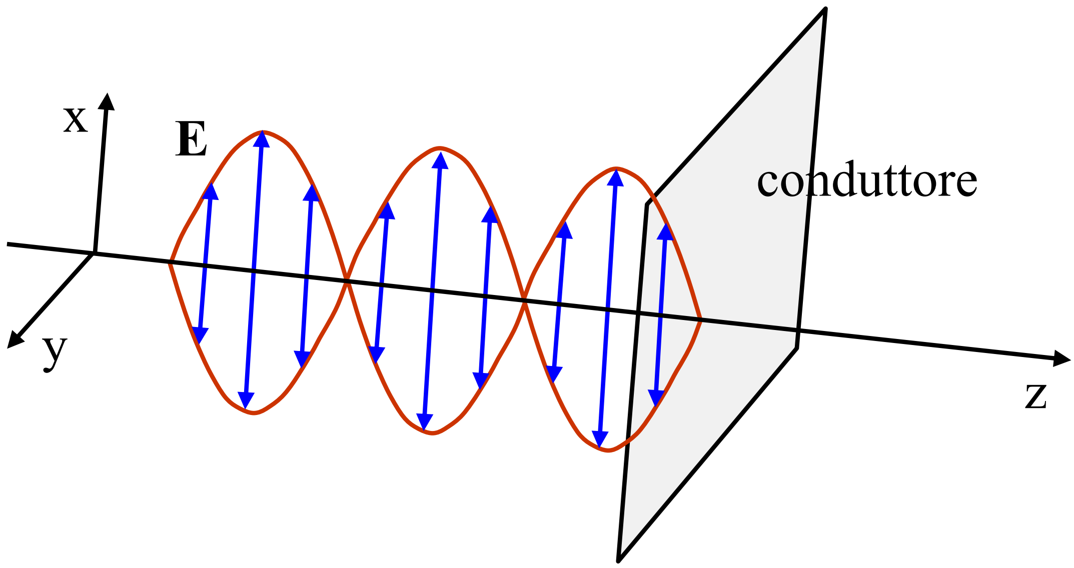
Sapendo che:

$$sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\, cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Il campo elettrico totale **E** risulta:

$$\boxed{E = E_i + E_r = -2E_0 sin(\mathrm{kz})\, cos(\omega \mathrm{t})}$$

E non dipende da ($\omega t \pm kz$) e quindi **non si propaga**.
Tutti i punti oscillano in fase con **ampiezze diverse in funzione di z**.
$\Rightarrow$ Si forma un'**onda stazionaria**



E si annulla sulla superficie (**piano nodale**).

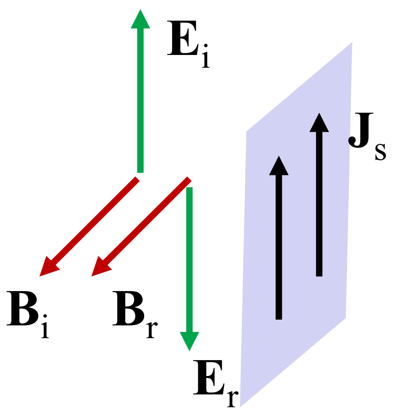
$$rot\,\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -2E_o k\, cos(\mathrm{kz})\, cos(\omega \mathrm{t})$$

$$B = 2\frac{E_o k}{\omega} cos(\mathrm{kz})\, sin(\omega \mathrm{t})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = 2B_0 cos(\mathrm{kz})\, sin(\omega \mathrm{t})}$$

Anche **B non** si propaga nel conduttore.
B ha un massimo sulla superficie (**piano ventrale**).



Sulla superficie del conduttore si genera una densità di corrente superficiale $\mathbf{J}_S$ diretta come $\mathbf{E}_i$:

$$\mathbf{J}_S \ // \ \mathbf{E}_i$$

$$J_S = \frac{[B_t]}{\mu_0} = 2\frac{B_i}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_S = \frac{2}{\mu_0}\mathbf{u}_n \times \mathbf{B}_i$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{B}_i$ esercita una forza sulla corrente.

Dalla forza di Lorentz, se il campo agisce su una distribuzione di carica superficiale:

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{v} \times \mathbf{B}_i = \sigma dS\mathbf{v} \times \mathbf{B}_i = \mathbf{J}_S \times \mathbf{B}_i dS$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{\mathbf{F}}{S} = \mathbf{J}_S \times \mathbf{B}_i = \left(\frac{2}{\mu_o}\mathbf{u}_n \times \mathbf{B}_i\right) \times \mathbf{B}_i = 2\frac{\mathbf{E}_i}{c\mu_o} \times \mathbf{B}_i = 2\frac{\boldsymbol{P}_i}{c}$$

Si ha quindi una pressione p_{em}:

$$\boxed{p_{em} = \frac{F}{S} = 2\frac{P}{c}}$$

= Pressione di radiazione

In accordo con quanto visto per un'onda piana che incide su una superficie perfettamente riflettente.

La pressione di radiazione si ottiene anche associando all'onda una densità di quantità di moto pari a:

$$\boxed{\mathbf{g} = \frac{\boldsymbol{P}}{\mathrm{c}^2}}$$

La quantità di moto su un'area *dS* del conduttore in un intervallo di tempo *dt* è quella contenuta in un volume $(c\,dt\,dS)$

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}_i\, c dt\, dS = \frac{\boldsymbol{P}_i}{c^2} c dt\, dS$$

Poichè l'onda viene totalmente riflessa si ha una variazione di quantità di moto

$$d\mathbf{G} = \frac{\boldsymbol{P}_i}{c} dt\, dS - \left(-\frac{\boldsymbol{P}_i}{c} dt\, dS \right) = 2\frac{\boldsymbol{P}_i}{c} dt\, dS$$

Inoltre

$$d\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = 2\frac{\boldsymbol{P}_i}{c} dS$$

Quindi

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = 2\frac{\boldsymbol{P}_i}{c}$$

Si dimostra quindi in modo indiretto che a un'onda elettromagnetica è associato un **trasporto di energia e di quantità di moto**.
Questa proprietà costituisce la base della teoria corpuscolare e della meccanica quantistica

A un'onda elettromagnetica è associata una

- densità di **energia** $u = \dfrac{|\boldsymbol{P}|}{c}$
- densità di **quantità di moto** $\mathbf{g} = \dfrac{\boldsymbol{P}}{c^2} \qquad |\mathbf{g}| = \dfrac{u}{c}$

La **teoria corpuscolare** interpreta le onde e.m. come costituite da un insieme di particelle uguali, i **fotoni**, ciascuna con:

- **Energia** $E = h\nu = \hbar\omega$
- **Quantità di moto** $|\mathbf{G}| = \dfrac{h\nu}{c}$

dove: h = 6.6 x 10^{-34} J s = costante di Planck

Definendo una **densità di massa elettromagnetica** *m,* tale che:

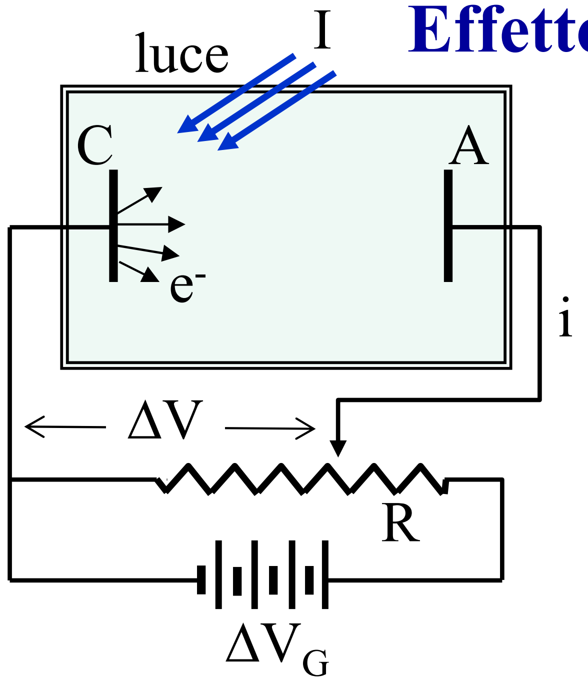
$$mc = \frac{E}{c} \qquad\qquad (G = mc)$$

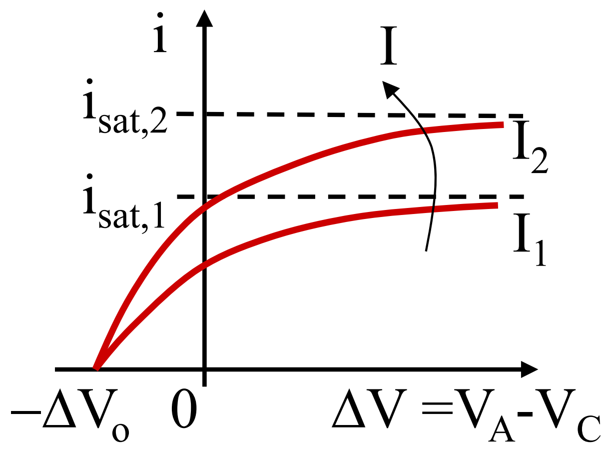
risulta:

$$\boxed{E = mc^2}$$ **Relazione di Einstein**

Einstein, spiegando l'**effetto fotoelettrico**, ha dato la conferma sperimentale della teoria corpuscolare.

Effetto fotoelettrico





Osservazioni sperimentali:

• Imponendo tra A e C una differenza di potenziale ΔV, si osserva una corrente i se C è illuminata con luce a frequenza $\nu > \nu_o$.

• Al crescere di ΔV, la corrente tende ad un valore di saturazione i_{sat} , che cresce con l'intensità I della luce.

• A pari ΔV, il valore della corrente è proporzionale all'intensità: $i \propto I$.

Cambiando segno a ΔV è possibile determinare il valore $-\Delta V_o$ per cui la corrente si annulla. Questa valore, detto <u>potenziale di arresto</u>, corrisponde all'energia cinetica massima $E_{c,max}$ degli elettroni.
La condizione $\Delta V = -\Delta V_o$ corrisponde all'emissione degli elettroni con E_c = max, che arrivano con $E_c = 0$ all'anodo.

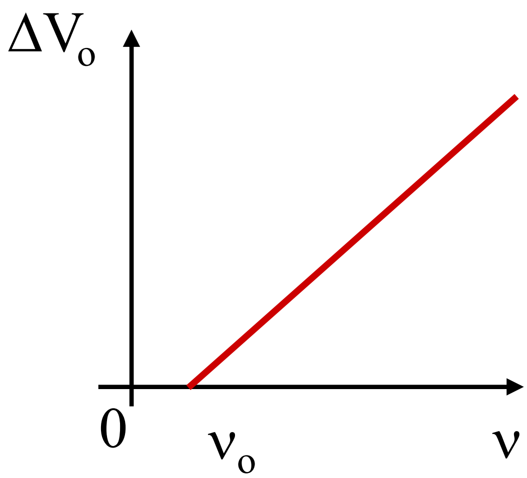
$$L = (-e)(-\Delta V) = e(V_A - V_C) = \Delta E_c = E_{c,A} - E_{c,C}$$

$$E_{c,\max} = e\Delta V_o$$

Sperimentalmente si osserva che:

- $E_{c,max}$ (quindi ΔV_o) è indipendente da I
- $E_{c,max}$ (quindi ΔV_o) cresce con la frequenza ν della luce.

Esiste un valore di soglia ν_o caratteristico del materiale.



In termini ondulatori non si spiega:

- l'esistenza di una soglia dipendente dalla frequenza e non dall'intensità.

- il fatto che ΔV_o non dipenda da I. Se è l'interazione con il campo elettrico che estrae gli elettroni, una maggiore intensità dovrebbe aumentare il potenziale di arresto.

NB: La soglia esiste perchè c'è un'*energia minima* (corrispondente al lavoro di estrazione L_e) che deve essere fornita perchè l'elettrone venga emesso.

Anche ΔV_o dipende dall'energia ceduta dall'onda e.m. al catodo (energia in eccesso rispetto ad L_e).

⇒ Nella ***descrizione ondulatoria***, l'interazione è tra onda ed elettrone e ci si aspetta una dipendenza della soglia e di ΔV_o da ***I*** (energia per unità di area e tempo).

⇒ Nella ***descrizione corpuscolare***, l'interazione è tra singolo fotone ed elettrone e la dipendenza è prevista per l'energia del singolo fotone, cioè per $\boldsymbol{\nu}$.

La spiegazione venne data da Einstein nel 1905, in termini di **comportamento corpuscolare della luce**.
E' l'interazione del singolo fotone del'onda con il singolo elettrone del catodo, che determina il fenomeno.
Dal bilancio energetico:

$$L_e + E_{c,\max} = h\nu$$

(L_e = Lavoro di estrazione)

$$\Rightarrow \quad E_{c,\max} = e\Delta V_o = h\nu - L_e$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_o = \frac{h}{e}\nu - \frac{L_e}{e}$$

Si spiega la dipendenza lineare di ΔV_o da ν.
Inoltre, si giustifica l'esistenza di una soglia di frequenza:

$$\nu_o = \frac{L_e}{h}$$

$$quando: \quad E_{c,max} = 0 \quad (\Delta Vo = 0)$$

ν_o è caratteristica del metallo del catodo:
$L_e \sim$ 2-5 eV $\Rightarrow$ $\nu_o \sim$ 0.5-1 x 10^{15} Hz ($\lambda_o \sim$ 250-680 nm).

L'effetto fotoelettrico è fondamentale per la meccanica quantistica, perchè spiegabile solo tenendo conto della natura corpuscolare della luce.