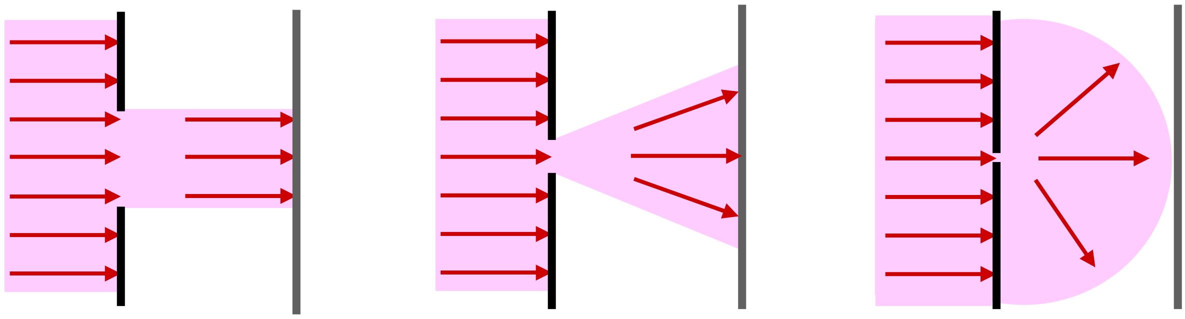
Diffrazione

Principio di Huygens-Fresnel: Ogni punto di ogni fronte d'onda si comporta come una sorgente di onde sferiche



$\lambda << d$ $\lambda \cong d$ $\lambda >> d$

Il comportamento della luce quando incontra un ostacolo (es. ***schermo opaco con una apertura*** di dimensioni *d*) dipende da *d* rispetto alla lunghezza d'onda λ:

Se **$\lambda << d$** (**Ottica Geometrica**):
- L'onda si propaga mantenendo circa inalterata la sua direzione di propagazione (**propagazione rettilinea**).
- Su uno schermo si osserva l'ombra geometrica dello schermo con l'apertura (è illuminata un'area della stessa forma e dimensioni dell'apertura).

Se **$\lambda >> d$**:
- L'apertura si comporta come una sorgente puntiforme e irraggia onde sferiche (secondo il princ. di Huygens).
- L'apertura trasforma un'onda con una sola direzione di propagazione in un onda con tutte le direzioni di propagazione.

Se **$\lambda \cong d$** (**Ottica Diffrattiva**):
- La luce devia dalla sua direzione originale e forma sullo schermo una figura caratteristica detta **figura di diffrazione**.

Diffrazione di Fraunhofer

- Supponiamo che il campo incidente sia diverso da zero solo sui punti dell'apertura (cioè <u>trascuriamo gli effetti di bordo</u>)

$\Rightarrow$ Possiamo trattare il campo solo per i suoi aspetti scalari.

$\Rightarrow$ **Teoria scalare della diffrazione**

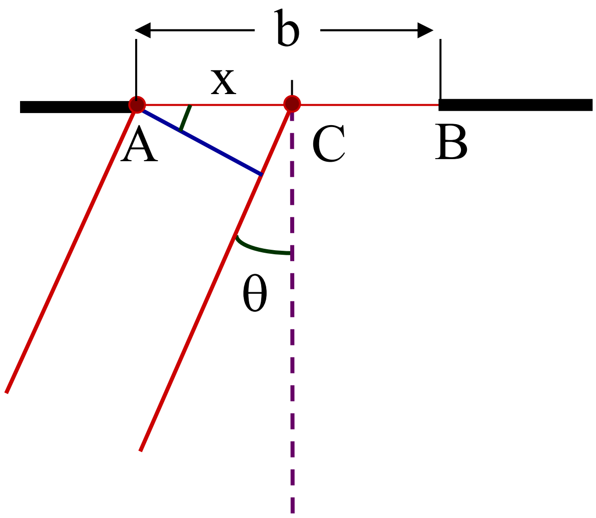
- Osserviamo l'ampiezza del campo <u>a grandi distanze</u>

$\Rightarrow$ **Approssimazione di Fraunhofer**

Per il principio di Huygens, ogni punto dell'apertura si comporta come una sorgente di onde sferiche.

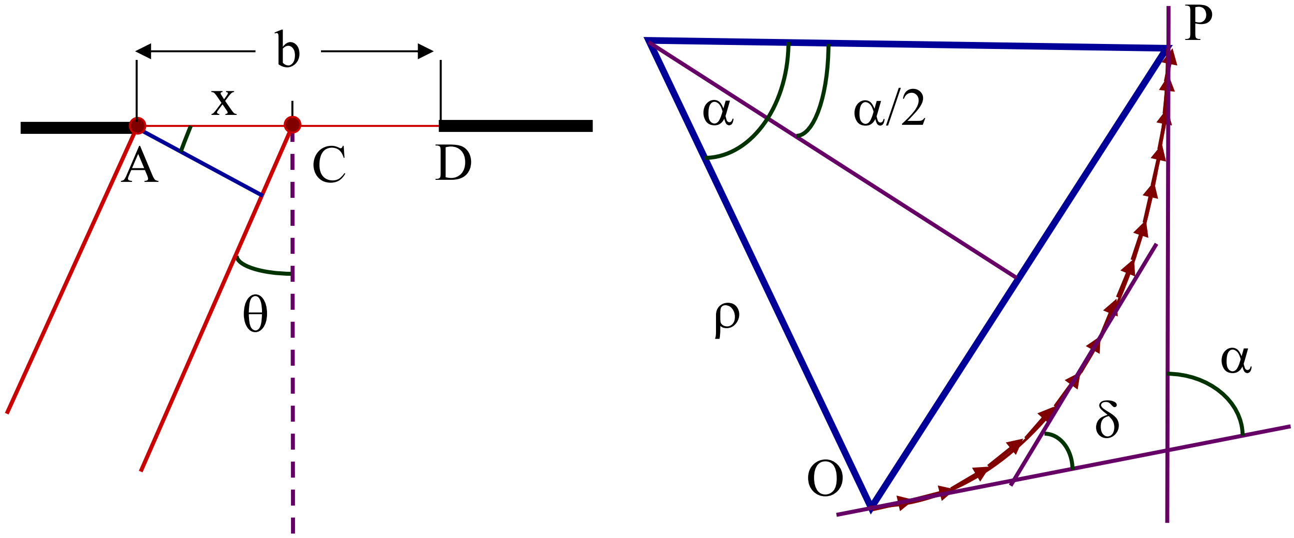
La figura di diffrazione è il risultato dell'interferenza di queste sorgenti sferiche, coerenti e di ampiezza infinitesima.

Sorgenti coerenti $\Rightarrow$ Interferenza



Differenza di fase tra A e C: $\delta = \dfrac{2\pi x \sin\theta}{\lambda}$

Differenza di fase tra A e B: $\alpha = \dfrac{2\pi b \sin\theta}{\lambda}$



Le ampiezze delle singole sorgenti sono infinitesime.
⇒ La poligonale dell'interferenza di N sorgenti diventa un arco di cerchio.
L'ampiezza del campo, data dalla corda OP, è:

$$A = OP = 2\rho \sin\frac{\alpha}{2}$$

Per $\theta = 0$, le sorgenti sono in fase e l'ampiezza è max:

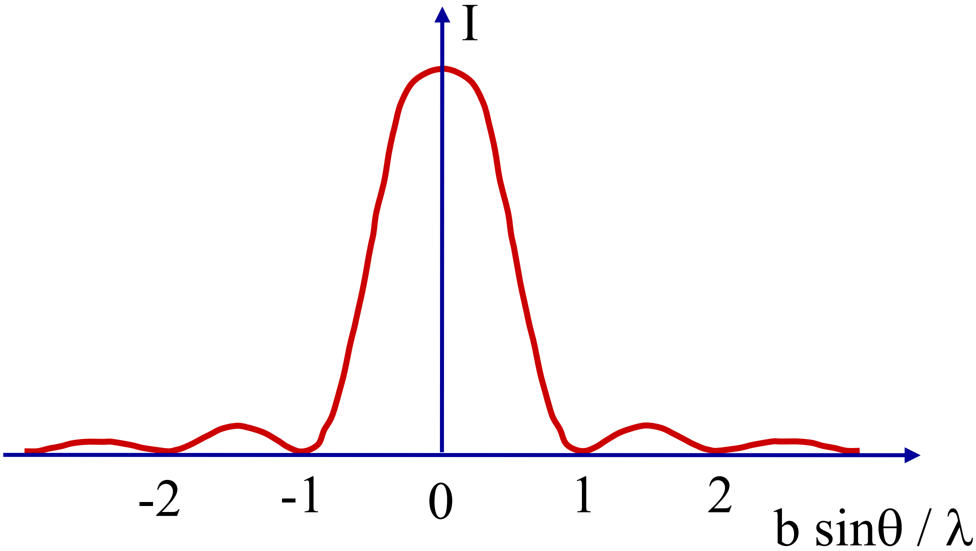
$$A(\theta = 0) = A_o = \rho\,\alpha$$ (arco della circonf. di raggio ρ)

⇒ L'ampiezza A del campo totale è:

$$A = 2\frac{A_o}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2} = A_o\frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}}$$

L'intensità è:

$$I = I_o \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}} \right]^2$$

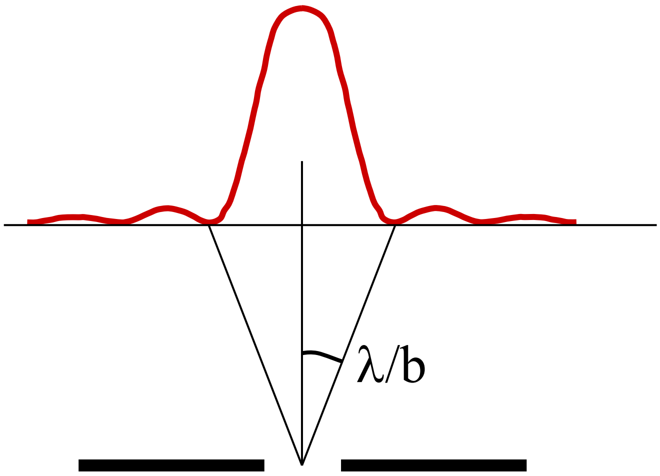


L'intensità ha un andamento oscillante decrescente.

- **$I = I_o = I_{max}$** per $\boxed{\theta = 0}$

- **I = 0 (zeri)** per:

$$\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda} = n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\theta = n\frac{\lambda}{b}}$$



I primi zeri si hanno per:

$$\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{b}$$

e individuano l'**ampiezza Δθ del massimo centrale**.

Per piccoli angoli:

$$\theta = \pm\frac{\lambda}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta\theta = 2\frac{\lambda}{b}}$$

Date due sorgenti che incidono ad angoli diversi su una apertura, il **criterio di Rayleigh** stabilisce l'angolo minimo per distinguere ("risolvere") la presenza delle due sorgenti:

Criterio di Rayleigh:
L'angolo minimo per risolvere due sorgenti è quello per cui il massimo principale di una cade sul primo zero dell'altra.

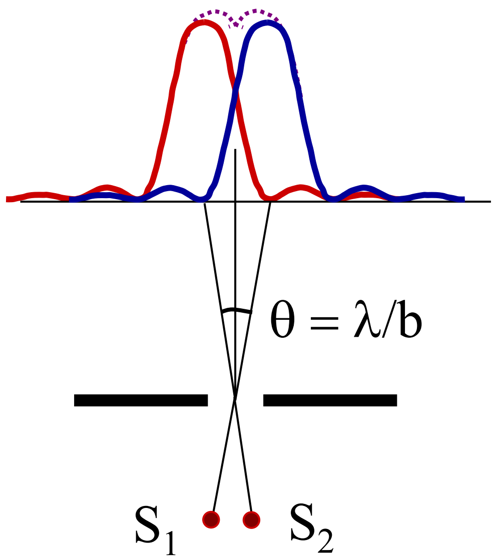
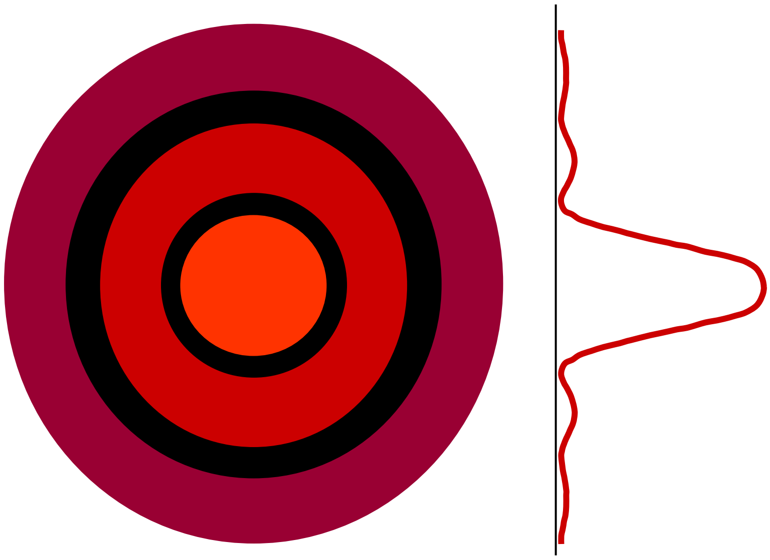


Figura di diffrazione di Fraunhofer da una *apertura circolare* di diametro D



E' simile alla figura di rotazione della funzione $[(\sin x)/x]^2$.

L'angolo tra il massimo e il primo zero è:

$$\boxed{\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D}}$$

Il **potere separatore** ρ di una apertura circolare è:

$$\rho = \frac{1}{\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

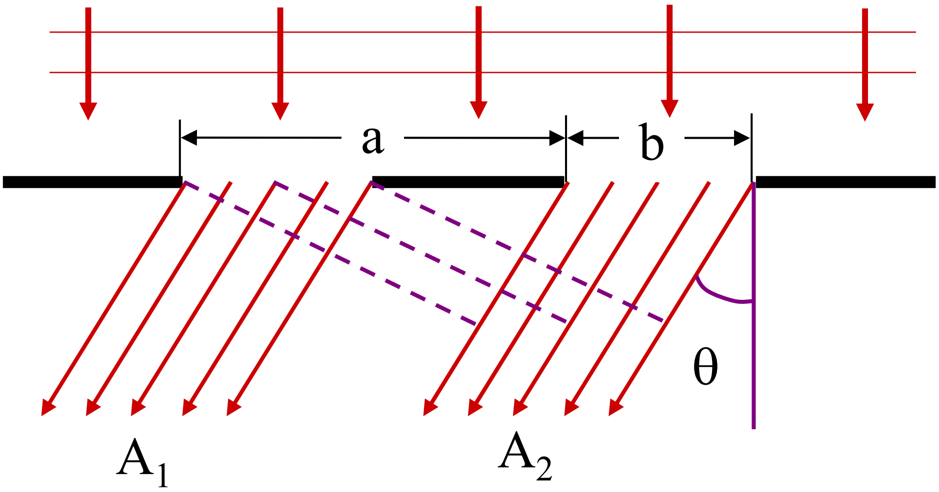
- Per una ***lente***, la capacità di discriminare le immagini di due sorgenti puntiformi cresce con la sua apertura D.

- Per l'***occhio umano***, la dimensione della pupilla varia tra D = 2-8 mm.

$$\Rightarrow \quad 0.84 \times 10^{-4}\ \text{rad} \le \theta \le 3.36 \times 10^{-4}\ \text{rad}$$

In realtà, $\theta \cong 4 \times 10^{-4}$ rad e si distinguono punti separati da circa 100 μm quando sono posti a distanza L = 25 cm.

Diffrazione da due fenditure uguali



Essendo le due fenditure uguali, l'ampiezza della figura di diffrazione di ciascuna di esse risulta:

$$A_1 = A_2 = A_0 \frac{\sin\left(\pi b \sin\frac{\theta}{\lambda}\right)}{\pi b \sin\frac{\theta}{\lambda}}$$

Ogni punto dell'apertura A_1 risulta sfasato rispetto al corrispondente punto di A_2 di:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

A_1 e A_2 danno quindi luogo a una figura di interferenza di ampiezza A:

$$A = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2\cos\beta}$$

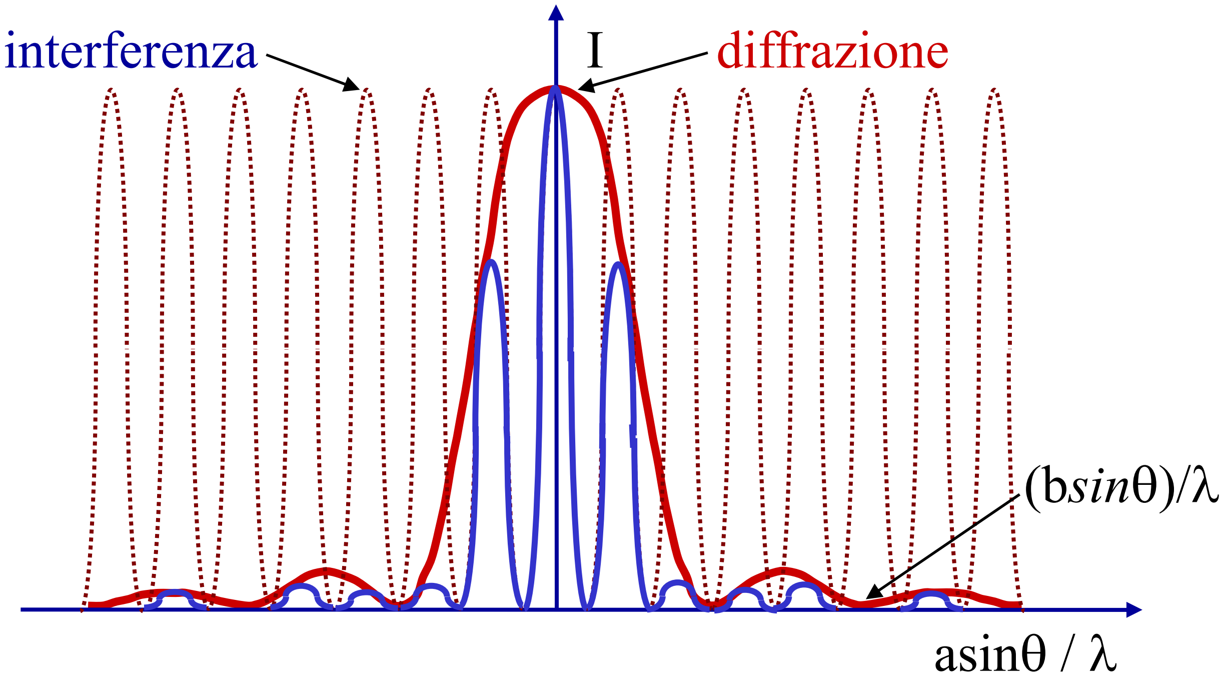
$$\Rightarrow \qquad A = A_1\sqrt{2(1+\cos\beta)} = 2A_1\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Sostituendo A_1 in A:

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta}\cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)$$

L'intensità risulta:

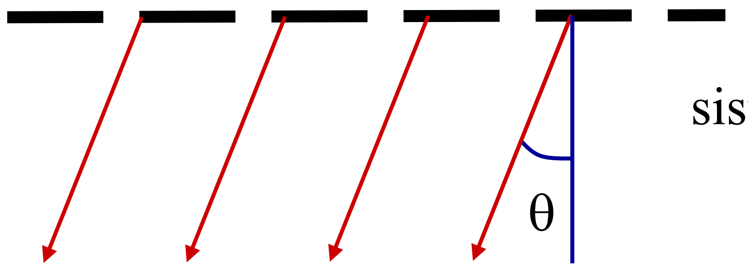
$$\boxed{I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta}\right]^2 \cos^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}$$



Il risultato è la figura di interferenza di due sorgenti modulata dalla figura di diffrazione dell'apertura.

<u>Nota</u>: Essendo a > b, la frequenza di oscillazione dell'interferenza è sempre maggiore di quella della diffrazione.

Reticolo di diffrazione



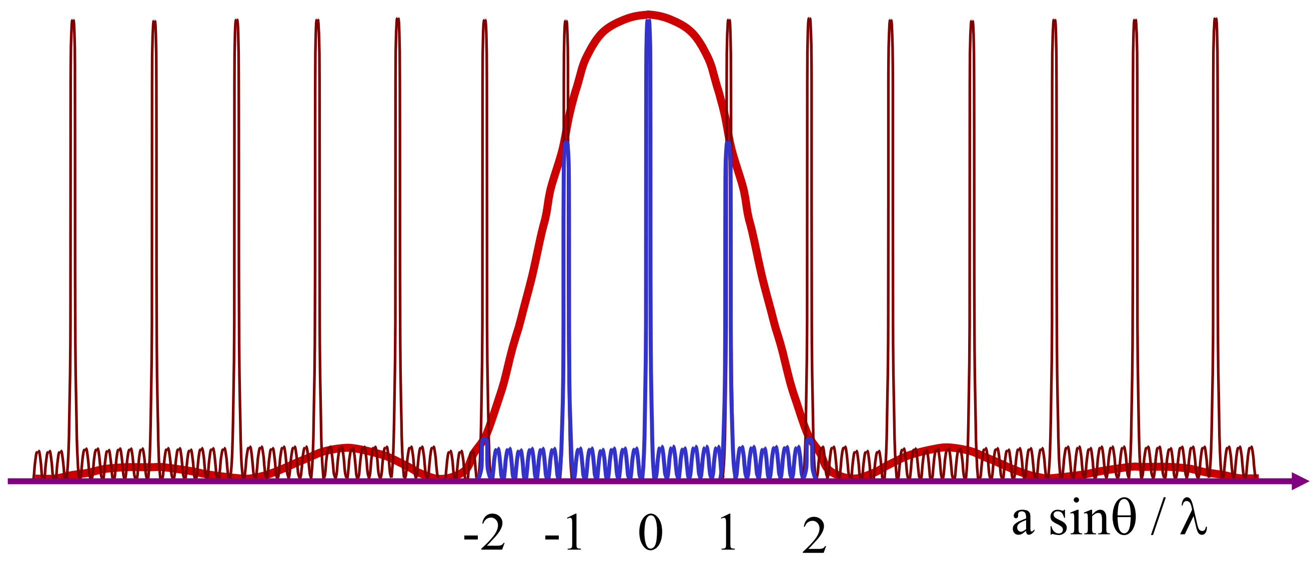
sistema di N fenditure

Seguendo quanto dimostrato nel caso di due fenditure, l'intensità dovuta all'interferenza di N sorgenti risulta:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)} \right]^2$$

Combinando l'effetto di diffrazione:

$$\boxed{I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)} \right]^2}$$



I **massimi principali** sono per :

$$\boxed{a \sin\theta = n\lambda}$$

Fissate l'ampiezza e la distanza delle fenditure, le posizioni dei massimi principali dipendono dalla lunghezza d'onda.

$$\boxed{D = \frac{d\theta}{d\lambda}}$$ = **Dispersione** del reticolo

$$\frac{d}{d\lambda}(\sin\theta) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{n\lambda}{a}\right)$$

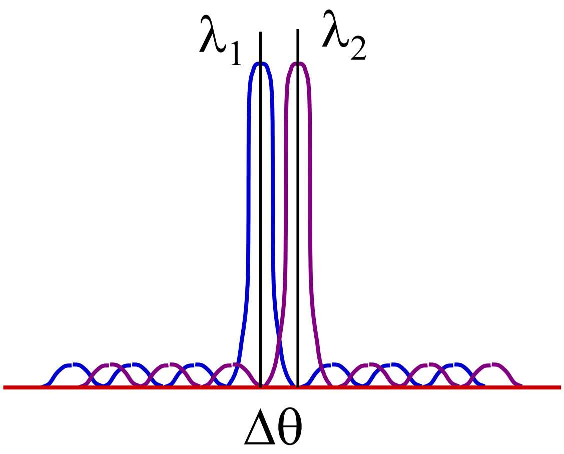
$$\cos\theta \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{a\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{n}\right)^2 - \lambda^2}}}$$

dove:
$a \sin\theta = n\lambda$

La dispersione aumenta con l'ordine n.

Per **n = 0 (ordine zero)**: D = 0.
I massimi di ordine zero sono sovrapposti indipendentemente dalla lunghezza d'onda.



$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$$

Criterio di Rayleigh: le lunghezze d'onda λ_1e λ_2 sono risolte quando il massimo di una coincide con il primo zero dell'altra.

Definiamo **potere risolvente R** del reticolo:

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{d\lambda}}$$

I massimi di ordine n si hanno quando:

$$\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = n\pi \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{n\lambda}{a}$$

Gli zeri adiacenti al massimo di ordine n si hanno quando:

$$\frac{N\pi a \sin(\theta + d\theta)}{\lambda} = m\pi \quad \text{dove}: \ m = Nn + 1$$

$$\Rightarrow \qquad \sin(\theta + d\theta) = \frac{(Nn+1)}{N}\frac{\lambda}{a}$$

$$\sin(\theta + d\theta) \cong \sin\theta + \cos\theta d\theta$$

$$\text{dove}: \ \sin\theta = \frac{n\lambda}{a}$$

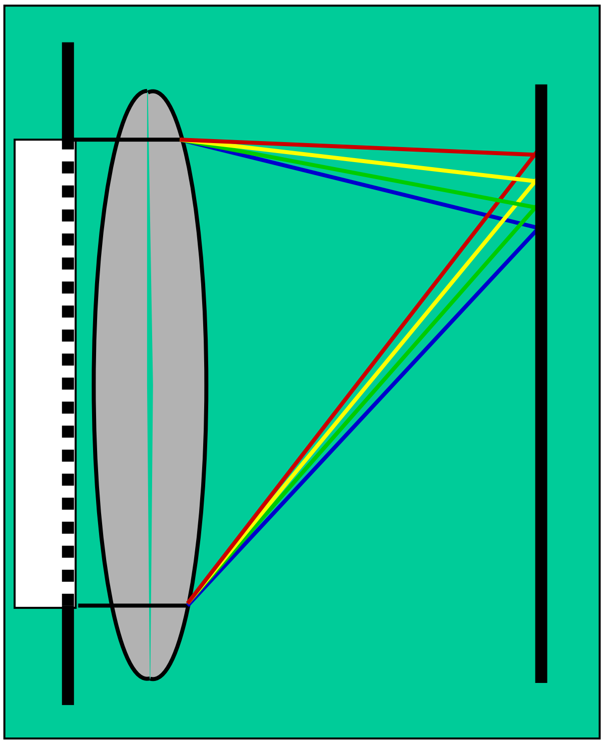
$$\frac{(Nn+1)}{N}\frac{\lambda}{a}=\frac{N\lambda}{a}+\cos\vartheta d\vartheta$$

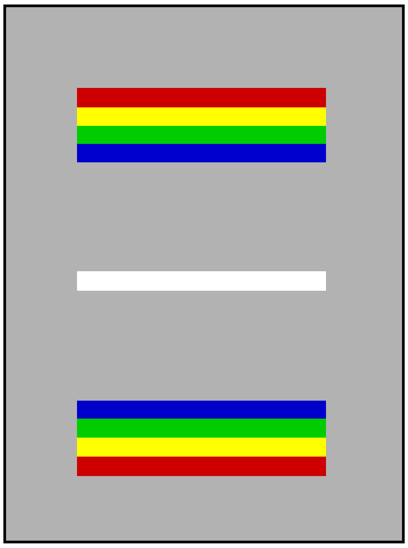
$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda}{Na}=\cos\vartheta d\vartheta$$

$$R=\frac{\lambda}{d\lambda}=\frac{\lambda}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\lambda}=(Na\cos\vartheta)\left(\frac{n}{a\cos\vartheta}\right)=nN$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R=\frac{\lambda}{d\lambda}=nN}$$

Il potere risolvente dipende da:
- Ordine del massimo
- Numero totale delle fenditure.





- Reticoli UV-VIS-NIR: incisione meccanica
- Reticoli X: cristallo