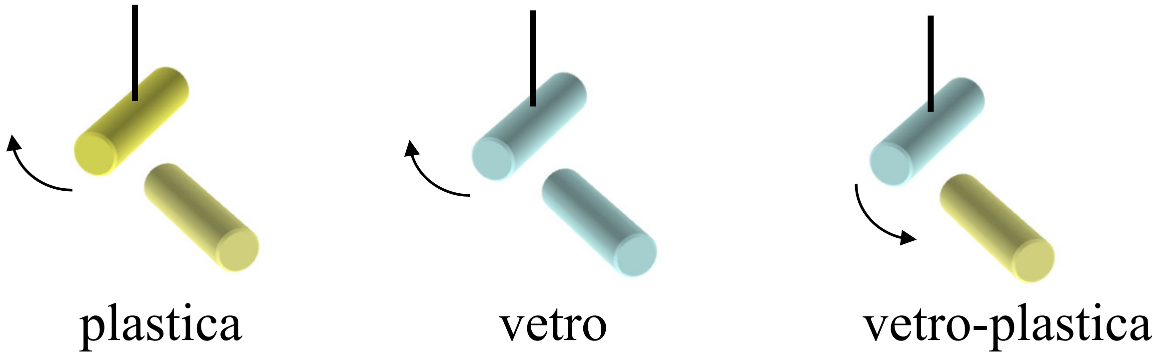
Carica Elettrica

Si osserva un fenomeno di **elettrizzazione** a seguito di strofinio di materiali quali l'ambra (plastica) o il vetro con un panno (o un pezzo di pelliccia).
Materiali come il vetro e materiali come la plastica presentano caratteristiche di elettrizzazione diverse.



L'elettrizzazione è associata all'esistenza di **cariche elettriche**.
Esse sono di due segni: **positivo e negativo** (positivo vetro, negativo plastica).
Cariche dello stesso segno si respingono.
Cariche di segno opposto si attraggono

Cariche dello **stesso segno si sommano**
Cariche di **segno opposto si sottraggono/neutralizzano**

Materiali che si caricano per strofinio: **isolanti**

Materiali che si caricano per contatto non per strofinio (non trattengono la carica): **conduttori**

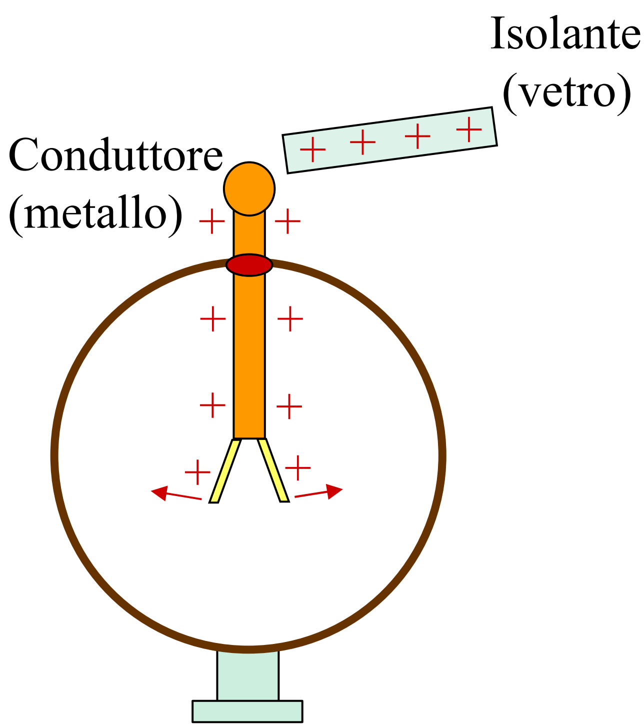
La carica elettrica è una grandezza:

- **Invariante**
- **Quantizzata**, multipla di una carica elementare (elettrone)
- **Estensiva**
- **Derivata**, Unità di misura nel SI: Coulomb (C)

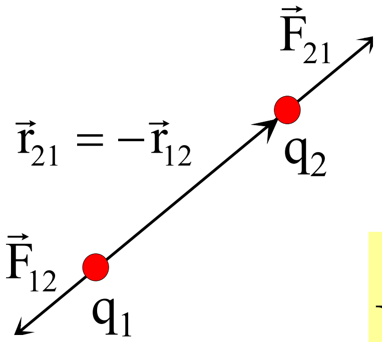
Legge di conservazione della carica: In un sistema isolato, la somma algebrica delle cariche è costante nel tempo

- Creazione di coppie
- Annichilazione e^+-e^-

Elettroscopio a foglie



Legge di Coulomb (1785)



$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \mathbf{u}_r$$

- Modulo: $F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$
- Direzione: // $\mathbf{u}_r$
- Verso: Attrattivo se $q_1 q_2 < 0$
  Repulsivo se $q_1 q_2 > 0$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Sistema MKS:
q: coulomb, F: newton, r: metri

$$k = 1/4\pi\varepsilon_0$$

ε_0 = **costante dielettrica del vuoto**
= 8.854×10^{-12} $C^2/(N\,m^2)$

Validità
- Cariche **puntiformi ferme**
- Nel **vuoto**
- Distanze: $\sim 10^{-15}$ m – 10^3 m

Principio di sovrapposizione degli effetti

La forza agente su una particella sottoposta a più interazioni simultanee è pari alla risultante delle forze dovute a ciascuna interazione

a) q_1 e q_2

$$\mathbf{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\mathbf{u}_{r21}$$

b) q_2 e q_3

$$\mathbf{F}_{23} = k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\mathbf{u}_{r23}$$

c) Sistema di 3 cariche q_1; q_2 e q_3

Forza su q_2: $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}$

d) Sistema di N cariche - Forza agente su **q**

Forza su q: $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_{ri}$

Campo Elettrico

Legge di Coulomb	Legge di gravitazione
$F \propto q$ $(q <> 0)$	$F \propto m$ $(m > 0)$

$\Rightarrow$ **Campo**

$\propto 1/r^2$	$\propto 1/r^2$

$\Rightarrow$ **Th. di Gauss**

Forza conservativa	Forza conservativa

$\Rightarrow$ **Potenziale** (scalare)

Definiamo il **campo elettrostatico E:**

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_q}{q}$$

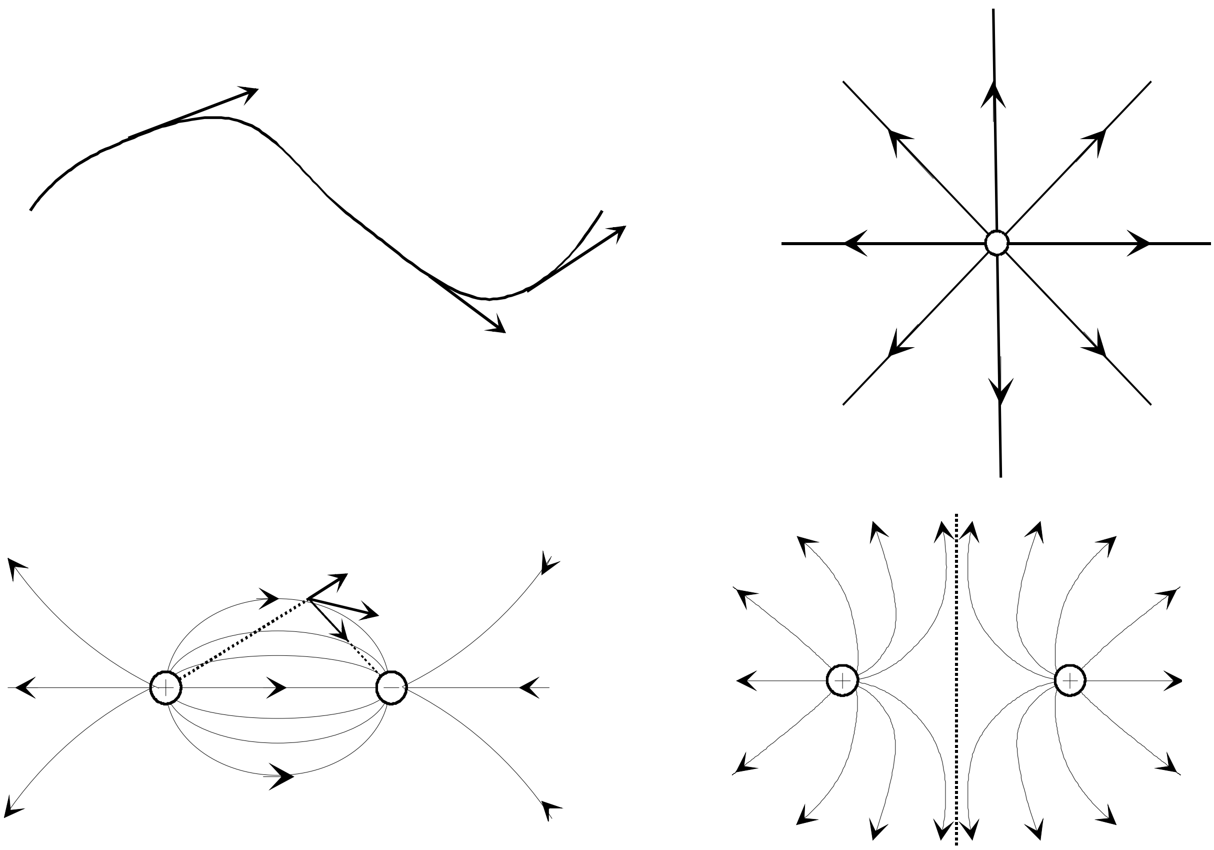
Unità SI: newton/coulomb (N/C)

Definizione operativa di E

La carica sonda **non** deve perturbare la distribuzione di carica che genera il campo

$$\boxed{\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q}}$$

Per effettuare una misura puntuale le dimensioni della carica sonda devono essere trascurabili (punto)



Linee di campo:

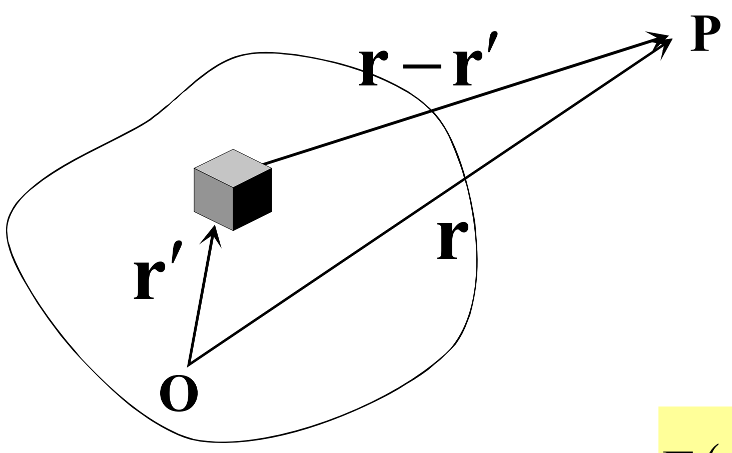
- Parallele ed equiverse al campo in ogni punto
- Densità proporzionale al modulo del campo
- Linee aperte (partono da o terminano nelle sorgenti o all’infinito)

Distribuzioni continue di carica

Campo di una carica puntiforme $$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Densità di carica di volume $$\rho = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dq}{d\tau}$$

Nel S.I.: C m^{-3}



$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\rho d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{u}_{r-r'}$$

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iiint_\tau \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{u}_{r-r'} d\tau$$

Densità superficiale $$\sigma = \frac{dq}{dS} \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iint_S \frac{\sigma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{u}_{r-r'} dS$$

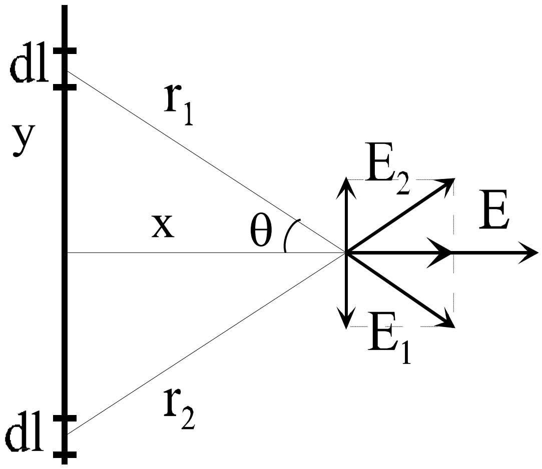
Nel S.I.: C m^{-2}

Densità lineare $$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_l \frac{\lambda}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{u}_{r-r'} dl$$

Nel S.I.: C m^{-1}

Esempio: Calcolo diretto del campo generato da un filo rettilineo indefinito uniformemente carico con densità λ

Coppie di elementi di carica $dq = \lambda dl$ in posizione simmetrica rispetto all'origine.

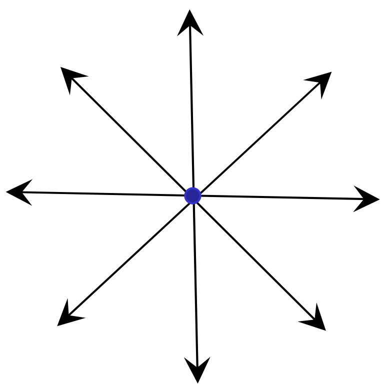


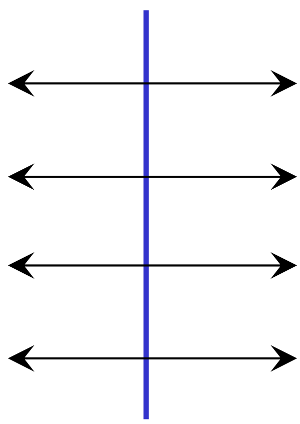
$$r = \frac{x}{\cos\vartheta}$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\vartheta \qquad dy = \frac{x\,d\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$

$$E = \int_0^\infty 2\left(\frac{\lambda\,dy}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\cos\vartheta$$

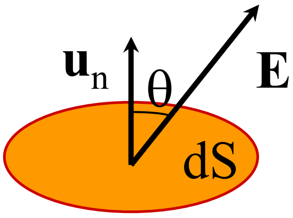
$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x}\boldsymbol{u}_r}$$





Flusso di un vettore

Definizione di **flusso**:



$$d\Phi_S(\mathbf{E}) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = E\,dS\cos\vartheta$$

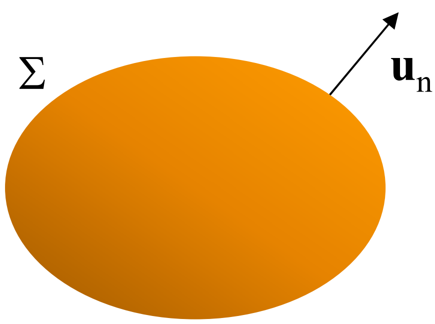
$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \iint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS$$

Numero *n* di linee di campo:

$$n \propto \Phi \propto |\mathbf{E}|S$$

La densità delle linee di campo è proporzionale al flusso e conseguentemente al modulo di **E** (a parità di orientazione).

Se la superficie è chiusa, per convenzione si sceglie $\mathbf{u}_n$ uscente.



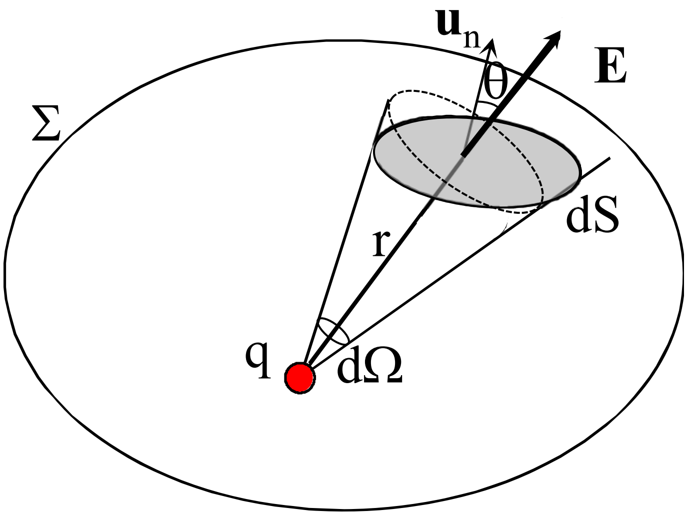
$\Rightarrow$ $\Phi > 0$ se la maggioranza delle linee di campo è uscente da Σ.

Teorema di Gauss

Flusso di **E** attraverso una superficie chiusa Σ

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \iint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS$$

Carica **interna** alla superficie chiusa Σ



$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \iint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint_\Sigma \frac{q}{r^2}\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_n dS$$

dove: $\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_n\, dS = dS\cos\theta = dS_n = r^2 d\Omega$

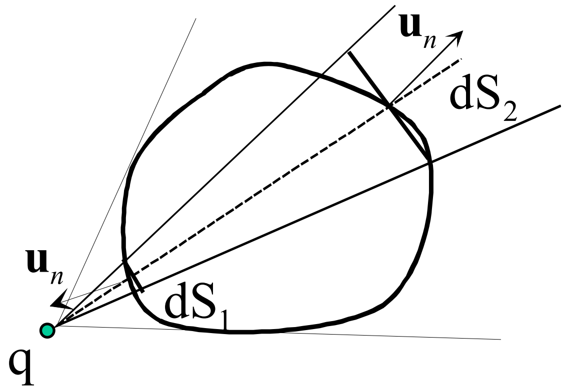
L'integrale di superficie esteso alla superficie Σ diventa un integrale sull'angolo solido Ω

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_\Sigma \frac{1}{r^2}\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_n\, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi}\frac{1}{r^2}r^2 d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

da cui l'espressione generale del **Teorema di Gauss**

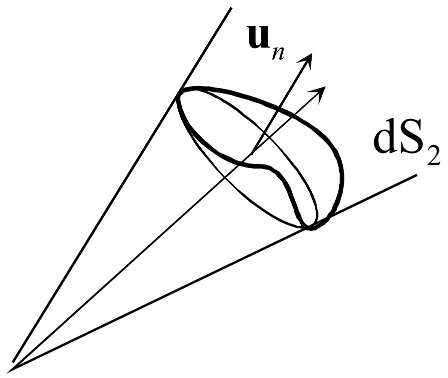
$$\boxed{\iint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Carica **esterna** alla superficie:



$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{q}{r^2}\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_n dS$$

$$dS_1(\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_{n1}) = -r_1^2 d\Omega \qquad dS_2(\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_{n2}) = r_2^2 d\Omega$$



Essendo:

$$\Phi_{S_2}(\mathbf{E}) \propto \frac{1}{r_2^2} r_2^2 d\Omega$$

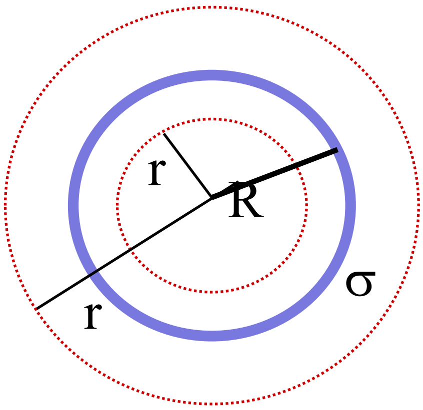
$$\Phi_1 = -\Phi_2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

ne consegue che:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \iint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = 0$$

Esempi di applicazione

Distribuzione di carica **uniforme** su una **superficie sferica**



Il campo **E** è radiale per simmetria

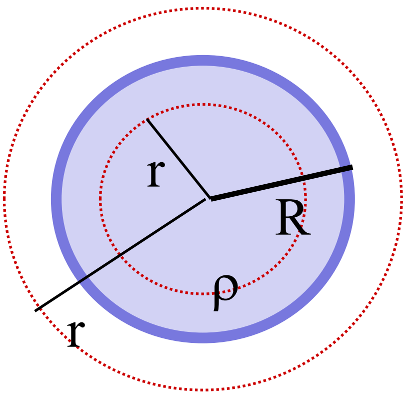
$$r < R: \quad \Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = 0$$

$$\Rightarrow \quad E = 0$$

$$r > R: \quad \Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 4\pi r^2\, E = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

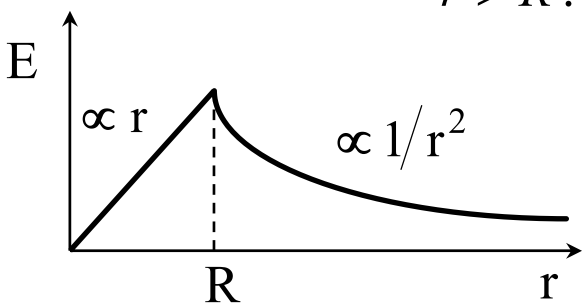
Distribuzione di carica **uniforme** in un **volume sferico**



$$r < R: \quad \Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 4\pi r^2\, E = \frac{\rho\, {}^4\!/_3\, \pi r^3}{\varepsilon_0}$$

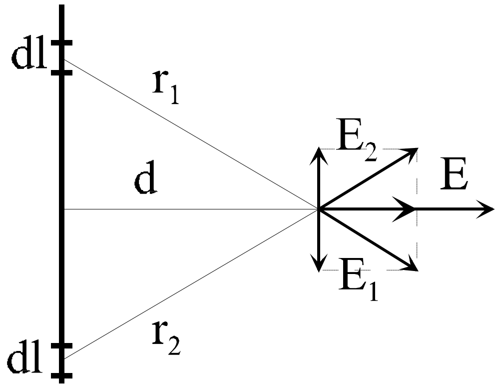
$$\Rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

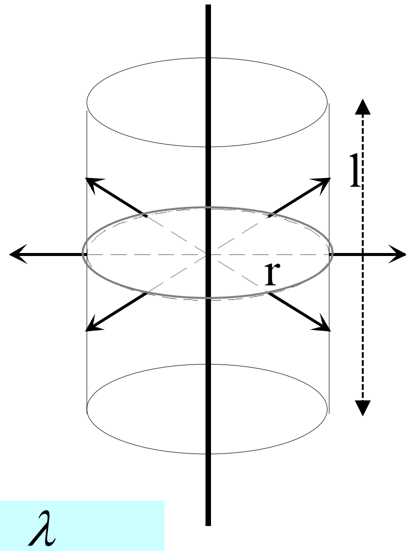
$$r > R: \quad \Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 4\pi r^2\, E = \frac{\rho\, {}^4\!/_3\, \pi R^3}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



$$\Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

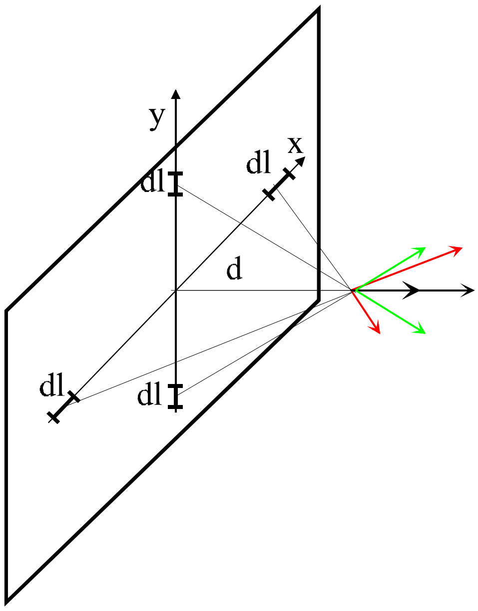
Filo **rettilineo indefinito** con densità di carica **uniforme** λ

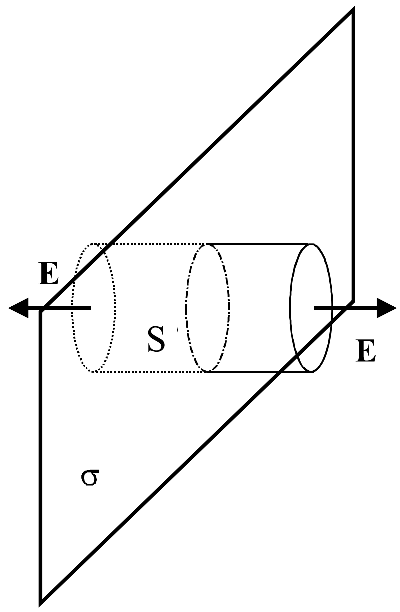




$$\Phi_{\Sigma}\left(\mathbf{E}\right)=2\pi rl\,E=\frac{\lambda l}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,r}\mathbf{u}_r$$

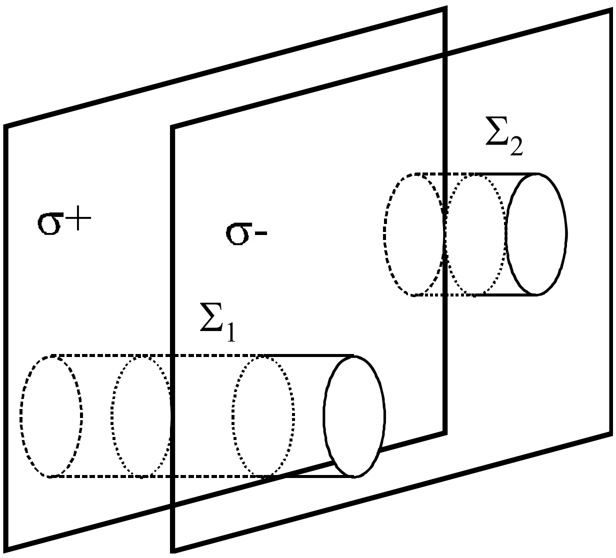
Piano indefinito con densità di carica **uniforme** σ





$$\Phi_{\Sigma}\left(\mathbf{E}\right)=2S\,E=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_n$$

Due piani indefiniti con densità di carica di superficie positiva σ^+ e negativa σ^-

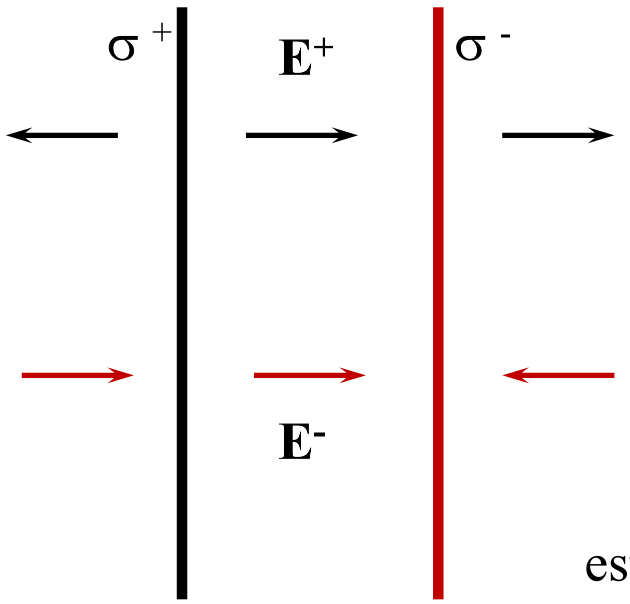


$$\Phi_{\Sigma_1} = E \cdot 2S = \frac{(\sigma^+ + \sigma^-)S}{\varepsilon_0} = 0$$

$$E_{est} = 0$$

$$\Phi_{\Sigma_2} = E_{int} \cdot S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E_{int} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

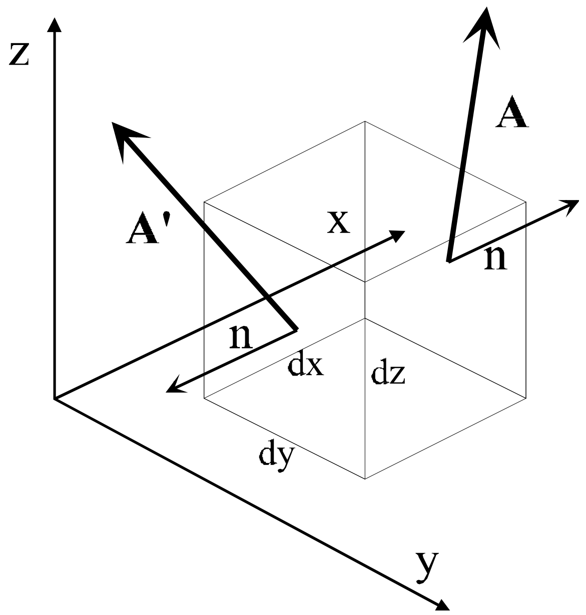


Sovrapposizione degli effetti

est: $E^+ + E^- = 0$

int: $E^+ + E^- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Teorema della divergenza



Dato un vettore A, la **divergenza** di A in coordinate cartesiane è:

$$div\,\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Vogliamo dimostrare che: $\iint_\Sigma \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n dS = \iiint_\tau div\mathbf{A}\, d\tau$

Consideriamo un volumetto infinitesimo dV = dxdydz

$$d\Phi_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n dS \qquad d\Phi_2 = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n dS = -(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x} dx)$$

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdS = \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdydz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dV$$

per l'intera superficie del cubo

$$d\Phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV = div\mathbf{A}\, dV$$

Dal Teorema di Gauss:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \iint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = \iiint_\tau div\,\mathbf{E}\,d\tau = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \iiint_\tau \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau$$

da cui:

$$\boxed{div\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

I Equazione di Maxwell

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

in coord. cartesiane

Equazione fondamentale dell'elettrostatica

Implicitamente esprime:

- Teorema di Gauss
- Legge di Coulomb

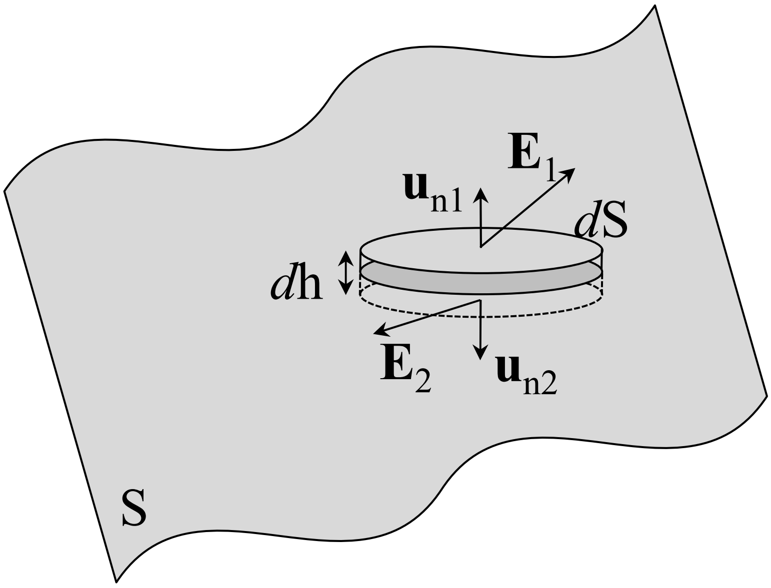
Vale per:

- Distribuzioni di carica di volume
- Anche per cariche in moto

Condizioni al contorno per E:
Componente normale

Distribuzione superficiale di carica di densità σ.

Applichiamo il Th. di Gauss ad una superficie $d\Sigma$ cilindrica infinitesima ($dh << \sqrt{dS}$) posta a cavallo della distribuzione di carica.



$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_{n1} dS + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_{n2} dS + \cdots = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[\mathrm{E}_n] = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}}$$