

**FISICA GENERALE**  
**PROBLEMI DI**  
**ELETTRONAGNETISMO E OTTICA**



**S. LONGHI, M. NISOLI, R. OSELLAME,  
S. STAGIRA**







**S. LONGHI, M. NISOLI , R. OSELLAME  
S. STAGIRA**

**FISICA GENERALE  
PROBLEMI DI  
ELETTRONAGNETISMO E OTTICA**



**ISBN 978-88-7488-374-5**

*Prima edizione: Luglio 2010*

*Ristampe: 2011 - 2012*

*Responsabile produzione: Alessandro Parenti*

*Redazione: Gabriella Gatti, Giancarla Panigali*

*Stampa e confezione: ATENET - Grisignano (VI)*

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4 della legge 22 aprile 1941, n. 633 ovvero dall'accordo stipulato tra SIAE, AIE, SNS e CNA, CONFARTIGIANATO, CASA, CLAAI, confcommercio, confesercenti il 18 dicembre 2000.

Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, Telefax 02-80.95.06, e-mail: aidro@iol.it



40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136  
**[www.editrice-esculapio.it](http://www.editrice-esculapio.it)**

# Prefazione

Questo volume contiene una raccolta di problemi di Elettricità, Magnetismo, Onde elettromagnetiche e Ottica nata da una lunga esperienza didattica maturata dagli autori nell'insegnamento dei corsi di Fisica Generale presso le Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Il volume fa parte di una collana di eserciziari scritta in supporto ai corsi di Fisica Generale svolti in Facoltà scientifiche.

Lo scopo principale di questo volume è di fornire allo studente un nuovo e valido contributo didattico mediante lo svolgimento accurato, metodico ma lineare, di numerosi problemi di difficoltà graduale. Gli esercizi sono raggruppati in capitoli organizzati per argomenti ed aree tematiche, e comprendono: elettrostatica nel vuoto e nei conduttori, elettrostatica nei mezzi dielettrici, correnti elettriche stazionarie, campi magnetici nel vuoto e nella materia, campi elettrici e magnetici variabili nel tempo, onde elettromagnetiche, ottica geometrica, ottica ondulatoria (interferenza, diffrazione, polarizzazione della luce). I problemi, di difficoltà e gradualità diverse, sono completamente e dettagliatamente risolti in maniera critica, aiutando lo studente ad acquisire la metodologia di soluzione più per comprensione che per imitazione. Alcuni argomenti o metodi di svolgimento più ostici sono talvolta discussi al termine degli esercizi per stimolare l'interesse e le conoscenze degli studenti più brillanti. Molti problemi sono tratti da esercizi assegnati in prove d'esame. Questa raccolta di problemi è rivolta in particolare a studenti impegnati ad affrontare argomenti di Elettromagnetismo ed Ottica in un corso di Fisica Generale nelle Facoltà di Ingegneria o di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Ci auguriamo che questo volume possa costituire un valido supporto alla comprensione dell'Elettromagnetismo e dell'Ottica.

Milano, luglio 2010

Gli autori



# Indice

<b>1 Elettrostatica nel vuoto</b>	<b>1</b>
1.1 Problemi . . . . .	1
1.2 Soluzioni . . . . .	7
<b>2 Elettrostatica dei conduttori</b>	<b>35</b>
2.1 Problemi . . . . .	35
2.2 Soluzioni . . . . .	41
<b>3 Elettrostatica in presenza di dielettrici</b>	<b>67</b>
3.1 Problemi . . . . .	67
3.2 Soluzioni . . . . .	73
<b>4 Correnti stazionarie</b>	<b>93</b>
4.1 Problemi . . . . .	93
4.2 Soluzioni . . . . .	99
<b>5 Magnetostatica nel vuoto</b>	<b>123</b>
5.1 Problemi . . . . .	123
5.2 Soluzioni . . . . .	129
<b>6 Magnetostatica nella materia</b>	<b>165</b>
6.1 Problemi . . . . .	165
6.2 Soluzioni . . . . .	169
<b>7 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo</b>	<b>189</b>
7.1 Problemi . . . . .	189
7.2 Soluzioni . . . . .	195
<b>8 Onde elettromagnetiche</b>	<b>235</b>
8.1 Problemi . . . . .	235
8.2 Soluzioni . . . . .	239
<b>9 Polarizzazione della luce</b>	<b>269</b>
9.1 Problemi . . . . .	269
9.2 Soluzioni . . . . .	273

<b>10 Ottica geometrica</b>	<b>285</b>
10.1 Problemi . . . . .	285
10.2 Soluzioni . . . . .	289
<b>11 Interferenza</b>	<b>315</b>
11.1 Problemi . . . . .	315
11.2 Soluzioni . . . . .	321
<b>12 Diffrazione</b>	<b>347</b>
12.1 Problemi . . . . .	347
12.2 Soluzioni . . . . .	353
<b>A Costanti ed unità di misura</b>	<b>373</b>
<b>B Richiami di trigonometria</b>	<b>377</b>
<b>C Algebra dei numeri complessi</b>	<b>381</b>
C.1 Definizioni . . . . .	381
C.2 Rappresentazione polare ed esponenziale . . . . .	382
<b>D Calcolo differenziale ed integrale</b>	<b>383</b>
D.1 Regole di derivazione di una funzione . . . . .	383
D.2 Regole di integrazione di una funzione . . . . .	384
D.3 Espansione in serie di una funzione . . . . .	385

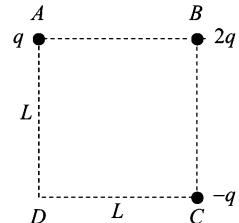
# Capitolo 1

## Elettrostatica nel vuoto

### 1.1 Problemi

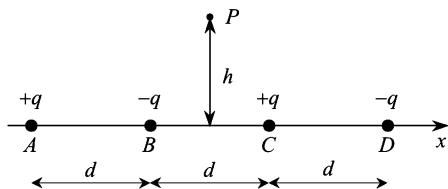
#### P.1.1.

Tre cariche puntiformi,  $q$ ,  $2q$  e  $-q$  sono poste su tre vertici di un quadrato di lato  $L$ , come mostrato in figura. Si calcolino (i) il campo elettrostatico, in modulo, direzione e verso, e il potenziale, nella posizione del quarto vertice del quadrato; (ii) la forza elettrostatica cui è sottoposta una carica puntiforme  $q_0$  posta nel quarto vertice del quadrato e la sua energia potenziale.



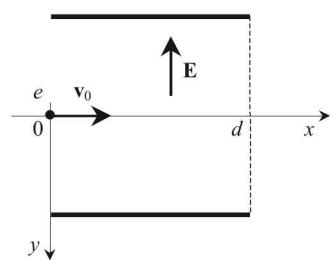
#### P.1.2.

Quattro cariche puntiformi, due positive e due negative, aventi lo stesso valore assoluto  $q = 10 \text{ nC}$ , sono allineate lungo un asse  $x$  come mostrato in figura, a distanza  $d = 2 \text{ cm}$  l'una dall'altra. Si calcoli il campo elettrico e il potenziale in un punto P dell'asse del sistema (vedi figura) posto a distanza  $h = 3 \text{ cm}$  dall'asse  $x$ .



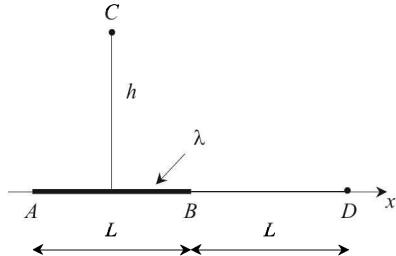
#### P.1.3.

Un elettrone (massa  $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , carica  $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) in moto con velocità  $v_0$  orizzontale e di modulo  $v_0 = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ , entra in una regione in cui è presente un campo elettristico uniforme e costante,  $\mathbf{E}$ , di modulo  $E = 500 \text{ N/C}$ , perpendicolare a  $v_0$  e diretto verso l'alto. Tale regione si estende in direzione orizzontale per un tratto  $d = 5 \text{ cm}$ , come mostrato in figura. Si calcoli la velocità dell'elettrone, in modulo, direzione e verso e lo spostamento in direzione verticale subito dall'elettrone, all'uscita dalla regione in cui è presente il campo elettrico.

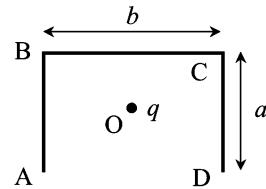


**P.1.4.**

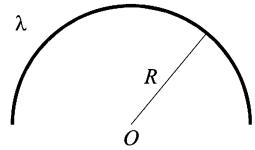
Un filo rettilineo AB di lunghezza  $L$  e sezione trascurabile, disposto lungo un asse  $x$  come mostrato in figura, è uniformemente carico con densità lineare di carica  $\lambda$ . Si calcoli il campo elettrostatico generato dal filo in un punto C posto su un asse perpendicolare al filo, a distanza  $h$  dal filo stesso e in un punto D dell'asse  $x$  posto a distanza  $L$  dall'estremo B del filo.

**P.1.5.**

Una carica positiva  $Q$  è uniformemente distribuita su tre lati di un rettangolo ABCD, con  $AB=CD=a$  e  $BC=AD=b$ . Una carica puntiforme  $q$  è posta nel centro O del rettangolo ABCD. Si determini la forza elettrostatica agente su  $q$ .

**P.1.6.**

Un filo rigido sottile, uniformemente carico con densità lineare di carica  $\lambda$ , ha la forma di una semicirconferenza di raggio  $R$ . Si calcoli il campo elettrostatico nel centro della semicirconferenza.

**P.1.7.**

Una carica positiva è uniformemente distribuita su un sottile anello circolare di raggio  $R$ , con densità lineare di carica  $\lambda$ . Si calcoli il campo elettrostatico sull'asse perpendicolare all'anello, passante per il centro dell'anello stesso. Si studi poi il moto lungo l'asse di una particella puntiforme di massa  $m$  e carica  $-Q$ , nell'ipotesi di piccoli spostamenti attorno al centro dell'anello.

**P.1.8.**

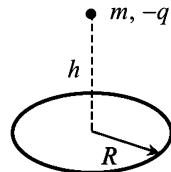
Una carica positiva è uniformemente distribuita su un sottile anello circolare di raggio  $R$ , con densità lineare di carica  $\lambda$ . Si calcoli il potenziale elettrostatico sull'asse perpendicolare all'anello, passante per il centro dell'anello stesso. Utilizzando il risultato ottenuto, si ricavi l'espressione del campo elettrostatico sull'asse dell'anello carico.

**P.1.9.**

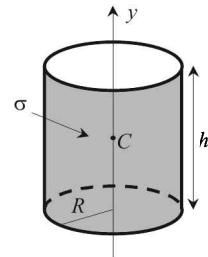
Si calcoli il campo e il potenziale elettrostatico sull'asse di un disco di raggio  $R$  su cui è uniformemente distribuita una carica  $Q$ .

**P.1.10.**

Una carica positiva  $Q$  è distribuita in modo uniforme su un disco sottile di raggio  $R$ . Una particella di massa  $m$  e carica  $-q$  è tenuta in quiete sull'asse del disco, a una distanza  $h = 3R$  dal centro del disco, come mostrato in figura. Si calcoli la velocità con cui la particella raggiunge il centro del disco una volta lasciata libera di muoversi.

**P.1.11.**

Una carica positiva è distribuita con densità superficiale uniforme,  $\sigma$ , su una superficie cilindrica di altezza  $h$  e raggio di base  $R$  e sulla superficie di base inferiore, come mostrato in figura. Si calcoli il campo elettrostatico nel centro, C, del cilindro.

**P.1.12.**

Due corpi puntiformi A e B, di massa  $m$  e  $M$  ( $M \gg m$ ) rispettivamente ed uguale carica  $q$ , si trovano inizialmente a grande distanza l'uno dall'altro. Il corpo A viene lanciato verso il secondo corpo con velocità  $v_0$ . Si calcoli a quale distanza dal corpo B la velocità di A si dimezza.

**P.1.13.**

Una carica elettrica è distribuita con densità superficiale positiva  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sui piani  $x = 0$  e  $x = d$ , rispettivamente. Si calcolino il campo elettrico e il potenziale in tutto lo spazio, assumendo che il potenziale sia nullo per  $x = 0$ .

**P.1.14.**

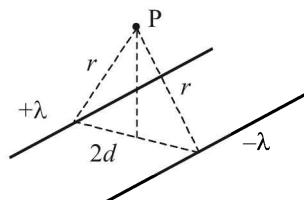
Una carica elettrica positiva è distribuita con densità volumetrica uniforme  $\rho$  all'interno di una sfera di raggio  $R$ . Si calcolino il campo elettrico e il potenziale.

**P.1.15.**

Una carica positiva è distribuita, con densità volumetrica  $\rho$  uniforme, nella regione di spazio limitata dai piani  $x = -d$  e  $x = d$ . Si calcoli il campo ed il potenziale elettrostatico, assumendo che il potenziale sia nullo sul piano  $x = 0$ .

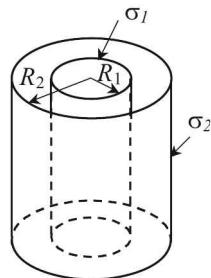
**P.1.16.**

Si considerino due fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita, uniformemente carichi con densità lineare di carica  $+\lambda$  e  $-\lambda$ , posti a distanza  $2d$  l'uno dall'altro, come mostrato in figura. Si determini il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica assegnata nel punto P posto su un piano perpendicolare ai due fili, alla stessa distanza  $r$  dai due fili (vedi figura).



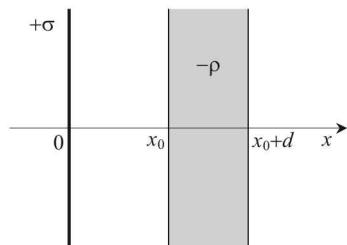
**P.1.17.**

Una carica elettrica è distribuita, con densità superficiale positiva  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , su due superfici cilindriche coassiali infinite di raggi  $R_1$  e  $R_2$  rispettivamente, come mostrato in figura. Si calcolino il campo elettrostatico e il potenziale in tutto lo spazio, assumendo nullo il potenziale sulla superficie di raggio  $R_2$ .

**P.1.18.**

Una carica elettrica positiva è distribuita con densità superficiale uniforme  $+σ$ , sul piano  $x = 0$ . Una carica elettrica negativa è distribuita, con densità volumetrica uniforme,  $-ρ$ , nella regione di spazio limitata dai piani  $x = x_0$  e  $x = x_0 + d$ . Si calcoli:

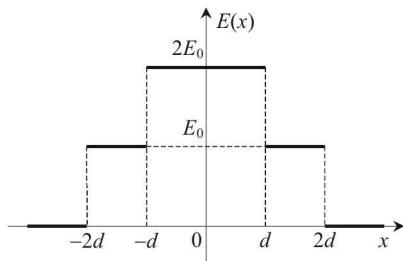
- la relazione fra  $σ$  e  $ρ$  affinché il campo elettrico sia nullo nelle regioni  $x < 0$  e  $x > x_0 + d$ ;
- l'andamento del campo elettrostatico e del potenziale, nelle condizioni di cui al punto (i), per  $0 < x < x_0 + d$ . Si assuma  $V = 0$  per  $x = x_0 + d$ . Si rappresenti graficamente tale andamento.
- La forza per unità di superficie agente sul piano  $x = 0$ .

**P.1.19.**

Una carica elettrica positiva è distribuita, con densità volumetrica uniforme  $ρ$ , all'interno di un cilindro di altezza infinita e di raggio  $R$ . Si calcoli il campo elettrostatico e il potenziale in funzione della distanza dall'asse del cilindro, assumendo che il potenziale sia nullo su tale asse.

**P.1.20.**

In una regione di spazio compresa fra i piani  $x = -2d$  e  $x = 2d$  è presente un campo elettrostatico  $E$ , diretto in direzione perpendicolare ai piani, il cui modulo varia come mostrato in figura. Si determini la distribuzione di carica che genera tale campo. Si calcoli e si rappresenti graficamente il potenziale elettrostatico in funzione di  $x$ , assumendo che il potenziale sia nullo per  $x = 0$ . Si calcoli infine la velocità, per  $x = 2d$ , di una particella puntiforme di carica  $q$  e massa  $m$ , posta con velocità nulla nel punto di coordinata  $x = 0$  e libera di muoversi.



**P.1.21.**

Una carica positiva  $Q$  è distribuita all'interno di una sfera di raggio  $R$ . La densità di carica di volume varia radialmente con la legge  $\rho = ar$  ( $0 < r < R$ ), con  $a$  costante. Si determinino:

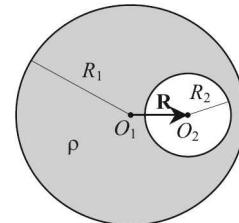
- (i) la costante  $a$ ;
- (ii) il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica in tutto lo spazio.

**P.1.22.**

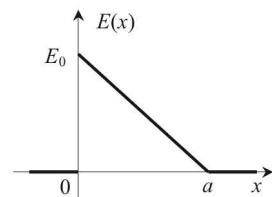
Una carica  $Q$  è uniformemente distribuita su una superficie sferica di raggio  $R$ . Si calcoli l'energia elettrostatica della distribuzione. Si calcoli inoltre l'energia cinetica complessiva che le cariche acquisterebbero portandosi a distanza  $r > R$  dal centro della sfera se fossero, tutte allo stesso istante, lasciate libere di allontanarsi dalla sfera stessa.

**P.1.23.**

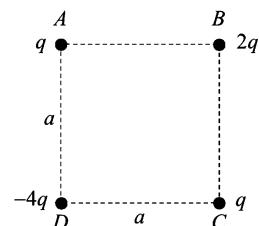
Si consideri una sfera con centro in  $O_1$  e raggio  $R_1$ , uniformemente carica con densità di carica volumetrica  $\rho$ . All'interno della sfera viene praticato un foro sferico con centro in  $O_2$  e raggio  $R_2 < R_1$ , all'interno del quale c'è il vuoto, come mostrato in figura. Sia  $R$  la distanza fra  $O_1$  e  $O_2$ . Si calcoli il campo elettrico all'interno del foro.

**P.1.24.**

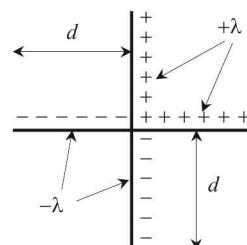
Si determini la distribuzione di carica che genera il campo elettrico unidimensionale il cui modulo è rappresentato in figura.

**P.1.25.**

Un sistema rigido di cariche è costituito da quattro cariche puntiformi, con valori  $q$ ,  $q$ ,  $2q$  e  $-4q$ , disposte ai vertici di un quadrato di lato  $a$ , come mostrato in figura. Si calcoli l'energia potenziale elettrostatica del sistema di cariche assegnato.

**P.1.26.**

Si determini il momento di dipolo della distribuzione di cariche indicata in figura. Sia  $\lambda$  la densità di carica per unità di lunghezza.



**P.1.27.**

Una particella puntiforme di carica  $q$  e massa  $m$  è posta al centro di una regione sferica di raggio  $R$ , contenente una carica  $-q$ , distribuita in modo uniforme. In tale regione viene applicato un campo elettrico  $\mathbf{E}_0$ , che provoca lo spostamento della particella dal centro della regione sferica di una quantità  $r$  ( $r < R$ ). Si determinino:

- (i) lo spostamento  $\mathbf{r}$  della particella di massa  $m$  all'equilibrio;
- (ii) il momento di dipolo elettrico associato alla distribuzione di carica;
- (iii) il moto della particella quando il campo  $\mathbf{E}_0$  viene tolto in un tempo molto breve.

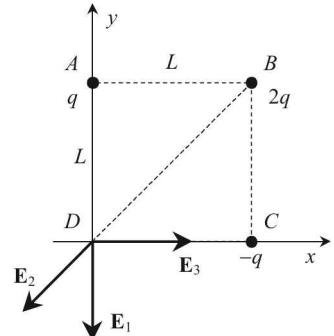
## 1.2 Soluzioni

### S.1.1.

Per determinare il campo elettrico nella posizione del quarto vertice, D, del quadrato applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti. Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $xy$ , disposto come mostrato in figura. Il campo in D è dato da:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3, \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  ed  $\mathbf{E}_3$  i campi elettrici generati in D, separatamente, dalle cariche poste in A, B e C:



$$\mathbf{E}_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \mathbf{u}_y,$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 (L\sqrt{2})^2} \mathbf{u}_{DB} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2 \sqrt{2}} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y), \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \mathbf{u}_x.$$

Si noti che, nel derivare l'espressione vettoriale di  $\mathbf{E}_2$ , si è tenuto conto che il versore  $\mathbf{u}_{DB}$  della direzione DB (bisettrice), diretto da D verso B, è  $\mathbf{u}_{DB} = (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$ , e che l'intensità del campo  $E_2$  è  $2q/[4\pi\epsilon_0(L\sqrt{2})^2] = q/(4\pi\epsilon_0 L^2)$ .

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left[ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{u}_x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{u}_y \right]. \quad (3)$$

Il modulo del campo elettrico è dato da:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 L^2}. \quad (4)$$

Il vettore  $\mathbf{E}$  forma con l'asse delle  $x$  un angolo  $\alpha$  dato da:

$$\alpha = \text{atan} \frac{E_y}{E_x} = -80.3^\circ. \quad (5)$$

Il potenziale elettrostatico in D si calcola applicando nuovamente il principio di sovrapposizione degli effetti:  $V = V_1 + V_2 + V_3$ , essendo  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  i potenziali generati in D, separatamente, dalle cariche poste in A, B e C:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L},$$

$$V_2 = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 L}, \quad (6)$$

$$V_3 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

Si ha quindi:

$$V = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 L}. \quad (7)$$

La forza elettrostatica cui è sottoposta una carica puntiforme positiva,  $q_0$ , posta in D è  $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$  e la sua energia potenziale è:  $U = q_0V$ .

### S.1.2.

Per determinare il campo elettrostatico nel punto P posto sull'asse del sistema di cariche, applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti. Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $xy$ , disposto come mostrato in figura. Il campo in P è dato da:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4, \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_3$  ed  $\mathbf{E}_4$  i campi elettrici generati in P, separatamente, dalle cariche poste in A, B, C e D. La somma vettoriale (1) si esegue in modo molto semplice osservando che i campi elettrici generati in P dalle cariche poste in A e in D hanno la stessa componente orizzontale, mentre le componenti verticali sono uguali in valore assoluto ma di segno contrario. Quindi  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4$  risulta diretto come l'asse  $x$  ed ha componente  $x$  pari alla somma delle componenti orizzontali di  $\mathbf{E}_1$  e di  $\mathbf{E}_4$ :

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4 = 2 \frac{q \cos \theta_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{u}_x, \quad (2)$$

dove:

$$r_1 = \sqrt{h^2 + \frac{9}{4}d^2} \simeq 4.24 \text{ cm}, \quad (3)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{2h}{3d} = 45^\circ. \quad (4)$$

Analogamente per la somma dei campi generati in P dalle cariche poste in B e in C:

$$\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = -2 \frac{q \cos \theta_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{u}_x, \quad (5)$$

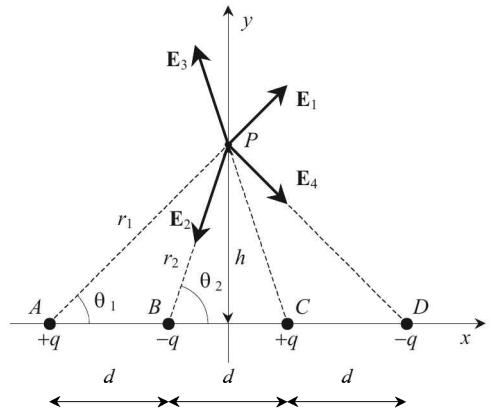
dove:

$$r_2 = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} \simeq 3.16 \text{ cm}, \quad (6)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{2h}{d} \simeq 71.56^\circ. \quad (7)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\cos \theta_1}{r_1^2} - \frac{\cos \theta_2}{r_2^2} \right) \mathbf{u}_x = 1.38 \times 10^4 \text{ u}_x \text{ N/C}. \quad (8)$$



Il potenziale elettrostatico nel punto P si calcola applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = 0 \quad (9)$$

### S.1.3.

L'elettrone è sottoposto alla forza peso,  $mg$ , e alla forza elettrostatica  $\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}$ . La forza peso può essere trascurata rispetto alla forza elettrica, infatti:

$$mg = 8.9 \times 10^{-30} N \ll |e|E = 8 \times 10^{-17} N \quad (1)$$

Per studiare il moto dell'elettrone nella regione in cui è presente il campo elettrico ( $0 \leq x \leq d$ ) applichiamo la seconda legge della dinamica:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , dove  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e = |e|E\mathbf{u}_y$ . Proiettiamo tale legge lungo gli assi  $x$  ed  $y$  otteniamo:

$$\begin{aligned} ma_x &= 0 \\ ma_y &= |e|E. \end{aligned} \quad (2)$$

Lungo l'asse  $x$  il moto dell'elettrone è rettilineo ed uniforme, mentre lungo l'asse  $y$  il moto è uniformemente accelerato. Integrando la legge di Newton possiamo determinare le componenti cartesiane della velocità:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \\ \int_0^{v_y} dv_y &= \frac{|e|E}{m} \int_0^t dt, \end{aligned} \quad (3)$$

da cui si ottiene:

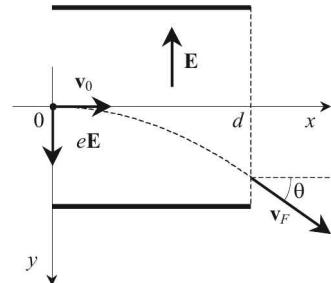
$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \\ v_y &= \frac{|e|E}{m} t, \end{aligned} \quad (4)$$

da cui, per integrazione, possiamo ottenere le equazioni parametriche del moto dell'elettrone:

$$\begin{aligned} \int_0^x dx &= \int_0^t v_0 dt \\ \int_0^y dy &= \frac{|e|E}{m} \int_0^t t dt, \end{aligned} \quad (5)$$

cioè:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{|e|E}{2m} t^2. \end{aligned} \quad (6)$$



La traiettoria seguita dall'elettrone si ottiene dalle equazioni parametriche del moto eliminando la dipendenza dal parametro  $t$ ,  $t = x/v_0$ :

$$y = \frac{|e|E}{2mv_0^2} x^2. \quad (7)$$

La traiettoria è quindi una parabola.

Possiamo calcolare l'istante  $t_F$  in cui l'elettrone esce dalla regione in cui è presente il campo elettrico imponendo  $x = d$  nella prima delle (6):  $t_F = d/v_0$ . Lo spostamento in direzione verticale subito dall'elettrone si ottiene dall'equazione (7):

$$y_F = y(t_F) = \frac{|e|Ed^2}{2mv_0^2} = 1.22 \text{ cm}. \quad (8)$$

Le componenti cartesiane della velocità di uscita dell'elettrone,  $\mathbf{v}_F$ , si ottengono dalle equazioni (4):

$$\begin{aligned} v_{Fx}(t_F) &= v_0 \\ v_{Fy}(t_F) &= \frac{|e|Ed}{mv_0} \end{aligned} \quad (9)$$

Il modulo di  $\mathbf{v}_F$  è dato da:

$$|\mathbf{v}_F| = \sqrt{v_{Fx}^2 + v_{Fy}^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eEd}{mv_0}\right)^2} = 3.34 \times 10^6 \text{ m/s}. \quad (10)$$

$\mathbf{v}_F$  forma con l'asse  $x$  un angolo  $\theta$  dato da:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{Fy}}{v_{Fx}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{|e|Ed}{mv_0^2}\right) = 26^\circ. \quad (11)$$

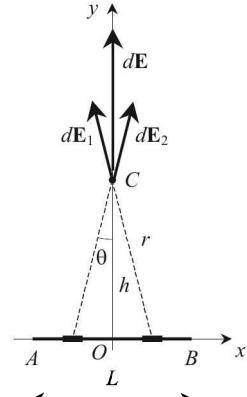
#### S.1.4.

Sceglieremo un sistema di assi cartesiani ortogonali  $xy$  disposto come mostrato in figura. In particolare, l'asse  $x$  è diretto come il filo, con origine nel punto medio di  $AB$ . Per calcolare il campo elettrico nel punto  $C$  dell'asse  $y$ , posto a distanza  $h$  dal filo, consideriamo due elementi infinitesimi del filo, di lunghezza  $dx$ , simmetrici rispetto all'asse  $y$ , la cui carica vale  $dq = \lambda dx$ . I campi elettrici,  $d\mathbf{E}_1$  e  $d\mathbf{E}_2$ , generati da tali elementi in  $C$  hanno la stessa componente  $y$  e componenti  $x$  uguali in modulo ma di segno opposto. Il campo complessivo,  $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$ , è quindi diretto come l'asse  $y$  ed ha modulo dato da:

$$|d\mathbf{E}| = 2 \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \quad (1)$$

dove  $r$  è la distanza fra l'elemento di filo  $dx$  e il punto  $C$ , e  $\theta$  è mostrato in figura. Per eseguire l'integrazione su tutto il filo, esprimiamo  $dx$  e  $r$  in funzione di  $\theta$  e della distanza  $h$ . Si ottiene:

$$r = \frac{h}{\cos\theta}; \quad (2)$$



$$x = h \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{h}{\cos^2 \theta} d\theta. \quad (3)$$

Si ottiene:

$$|\mathbf{E}| = \int_O^B |d\mathbf{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \int_0^{\theta_m} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \sin \theta_m, \quad (4)$$

dove  $\theta_m$  è l'angolo  $\theta$  corrispondente al segmento AC. Poiché:

$$\sin \theta_m = \frac{L}{\sqrt{4h^2 + L^2}}, \quad (5)$$

si ottiene:

$$\mathbf{E}(C) = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}} \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

Si noti che dall'Eq.(4) si ottiene facilmente il campo generato in C da un filo rettilineo di lunghezza infinita uniformemente carico. In tal caso  $\theta_m = \pi/2$ , quindi:

$$\mathbf{E}(C) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \mathbf{u}_y. \quad (7)$$

Calcoliamo ora il campo elettrico generato dal filo AB nel punto D posto sull'asse  $x$  a distanza  $L$  dall'estremo B. Il campo elettrico generato in D da un elemento  $dx$  del filo, di carica  $dq = \lambda dx$ , è ovviamente diretto come l'asse  $x$  ed è dato da:

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{3}{2}L - x\right)^2} \mathbf{u}_x. \quad (8)$$

Integrando su tutto il filo si ottiene:

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_x \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\left(\frac{3}{2}L - x\right)^2} = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 L} \mathbf{u}_x. \quad (9)$$

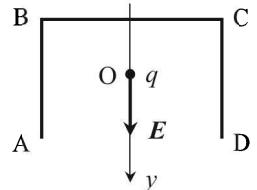
### S.1.5.

La forza elettrostatica agente sulla carica puntiforme  $q$  è data da:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1)$$

dove  $\mathbf{E}$  è il campo elettrostatico generato in O dalla carica  $Q$  distribuita sui tre lati del rettangolo ABCD. Tale campo si può calcolare facilmente applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come somma vettoriale dei campi generati, in O, dalla carica distribuita sui tre lati AB, BC e CD. Utilizzando uno dei risultati dell'esercizio precedente, si ha che il campo generato in un punto dell'asse da una carica uniformemente distribuita su un filo di lunghezza  $L$ , a distanza  $h$  dal filo stesso ha modulo dato da (vedi la (6) dell'esercizio precedente):

$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}} \quad (2)$$



ed è diretto come l'asse del filo. Nella (2)  $\lambda$  è la densità di carica lineare. Nel caso in esame i campi generati in O dalla carica distribuita sui lati AB e CD sono uguali in modulo e direzione ed opposti in verso, quindi la loro somma vettoriale è nulla. Pertanto il campo  $\mathbf{E}$  generato in O dalla distribuzione di carica assegnata dall'esercizio è dovuto esclusivamente alla carica distribuita sul lato BC. Utilizzando la (2) si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda b}{\pi \epsilon_0 a \sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{u}_y \quad (3)$$

avendo introdotto un asse  $y$  coincidente con l'asse del lato BC, come mostrato in figura. Nella (4) la densità lineare di carica,  $\lambda$ , è data da:

$$\lambda = \frac{Q}{2a + b} \quad (4)$$

Utilizzando le relazioni (1), (4) e (5), si ottiene la forza elettrostatica agente sulla carica puntiforme  $q$ :

$$\mathbf{F} = \frac{qQb}{\pi \epsilon_0 a (2a + b) \sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{u}_y. \quad (5)$$

### S.1.6.

Scegiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali  $xy$  disposto come mostrato in figura. Siano  $dl_1$  e  $dl_2$  ( $dl_1 = dl_2 = dl$ ) due elementi infinitesimi della semicirconferenza posti in posizioni simmetriche rispetto all'asse  $y$ . I campi elettrici,  $d\mathbf{E}_1$  e  $d\mathbf{E}_2$ , generati da tali elementi nel centro della semicirconferenza hanno la stessa componente  $y$  e componenti  $x$  uguali in valore assoluto ma di segno opposto. Il campo complessivo,  $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$ , è quindi diretto come l'asse  $y$  ed ha modulo dato da:

$$|d\mathbf{E}| = 2 \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta. \quad (1)$$

Il campo totale si ottiene integrando la (1), facendo variare  $\theta$  fra 0 e  $\pi/2$ , ricordando che  $dl = R d\theta$ :

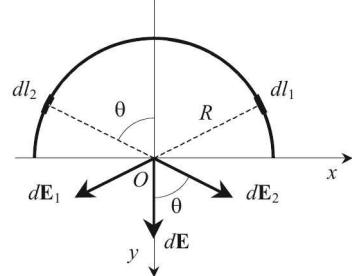
$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (2)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{u}_y. \quad (3)$$

### S.1.7.

Indichiamo con  $y$  l'asse perpendicolare all'anello. Consideriamo due elementi infinitesimi di circonferenza, di lunghezza  $dl$ , posti in posizioni diametralmente opposte sulla circonferenza, come mostrato in figura. I campi elettrici,  $d\mathbf{E}_1$  e  $d\mathbf{E}_2$ , generati da tali elementi in un punto P dell'asse  $y$ , hanno la stessa componente  $y$  e componenti normali a  $y$  uguali



in valore assoluto ma di segno opposto. Il campo complessivo,  $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$ , è quindi diretto come l'asse  $y$  ed ha modulo dato da:

$$|d\mathbf{E}| = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} dl \cos \theta. \quad (1)$$

dove:

$$r^2 = R^2 + y^2, \quad (2)$$

$$\cos \theta = \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Il campo totale si ottiene integrando la (1):

$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^2} \int dl = \frac{\lambda R \cos \theta}{2\epsilon_0 r^2}. \quad (4)$$

Si osservi che, poiché nella (1) si è considerato il contributo di *due* elementi di filo diametralmente opposti, l'integrale che compare nella (4) è stato eseguito su mezza circonferenza.

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda R y}{2\epsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y \quad (5)$$

In prossimità del centro dell'anello si ha  $y \ll R$ , quindi il campo si può approssimare come segue:

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda y}{2\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

La forza che si esercita su una carica puntiforme negativa,  $-Q$ , posta in un punto dell'asse nell'intorno del centro dell'anello è quindi data da:

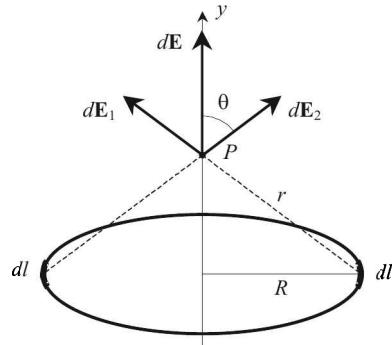
$$\mathbf{F} = -Q\mathbf{E} = -\frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 R^2} y \mathbf{u}_y. \quad (7)$$

L'equazione di moto di tale particella sarà dunque:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 R^2} y, \quad (8)$$

che rappresenta un moto armonico semplice lungo l'asse  $y$ , di pulsazione  $\omega$  data da:

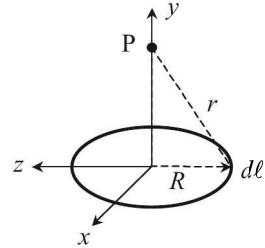
$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 m R^2}}. \quad (9)$$



**S.1.8.**

Per calcolare il potenziale elettrostatico generato dall'anello carico, in un punto P dell'asse, possiamo applicare il principio di sovrapposizione e scrivere:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\lambda d\ell}{r} \quad (1)$$



dove l'integrale è esteso a tutto l'anello di raggio  $R$ . La distanza,  $r$ , fra l'elemento di linea  $d\ell$  e il punto P in cui si vuole calcolare il potenziale non dipende dalla posizione sull'anello, quindi può uscire dal segno di integrale, come pure la densità di carica costante  $\lambda$ . Si ha quindi:

$$V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\ell} d\ell = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (2\pi R) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + y^2}} \quad (2)$$

avendo introdotto un asse  $y$  diretto come l'asse dell'anello. Per calcolare l'espressione del campo elettrico in un punto P sull'asse dell'anello, osserviamo che per simmetria esso sarà diretto lungo l'asse  $y$ , e cioè  $\mathbf{E} = E_y(y)\mathbf{u}_y$ ; la componente cartesiana  $E_y$  del campo sarà legata al potenziale dalla nota relazione:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\lambda Ry}{2\epsilon_0(R^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

dove si è usato per  $V(y)$  l'espressione (2). Si ha dunque:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda R y}{2\epsilon_0(R^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y \quad (4)$$

che coincide, ovviamente con il risultato ottenuto nell'esercizio precedente.

**S.1.9.**

Il campo elettrico generato dal disco uniformemente carico si può calcolare suddividendo il disco in un numero infinito di spire circolari di raggio  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ). Il campo elettrico generato da una spira di raggio  $r$  uniformemente carica in un punto dell'asse è dato dalla formula (5) dell'esercizio 7:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda ry}{2\epsilon_0(r^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y, \quad (1)$$

dove  $\lambda$  è la densità lineare di carica della spira. Indicando con  $q$  la carica complessiva della spira,  $q = 2\pi r \lambda$ , la (1) si può scrivere come segue:

$$\mathbf{E} = \frac{q y}{4\pi\epsilon_0(r^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y. \quad (2)$$

Nel caso in esame si ha che la carica sulla spira di raggio  $r$  e spessore  $dr$  è data da:

$$q = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2Qr}{R^2} dr, \quad (3)$$

Il campo elettrico  $d\mathbf{E}$  generato dalla spira di raggio  $r$  e spessore  $dr$  in un punto dell'asse del disco si ottiene quindi dalle (2) e (3):

$$d\mathbf{E} = \frac{Qy r dr}{2\pi\epsilon_0 R^2 (r^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y, \quad (4)$$

Il campo elettrostatico generato dalla carica distribuita sull'intero disco si calcola integrando la (4) per  $r$  variabile da 0 a  $R$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Qy \mathbf{u}_y}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + y^2)^{3/2}} dr = \frac{Qy \mathbf{u}_y}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2}} \right]_0^R = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ 1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right] \mathbf{u}_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Se indichiamo con  $\sigma$  la densità superficiale di carica,  $\sigma = Q/(\pi R^2)$ , la (5) si può scrivere come segue:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right] \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

Si noti che dalla (6) si ottiene facilmente il campo generato da un piano infinito uniformemente carico. In questo caso  $R \rightarrow \infty$  quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_y. \quad (7)$$

Per calcolare il potenziale elettrostatico in un punto dell'asse del disco applichiamo ancora il principio di sovrapposizione degli effetti. Il potenziale generato in un punto dell'asse ( $y$ ) da una spira di raggio  $r$  uniformemente carica con densità lineare di carica  $\lambda$  è dato dalla formula (2) dell'esercizio precedente:

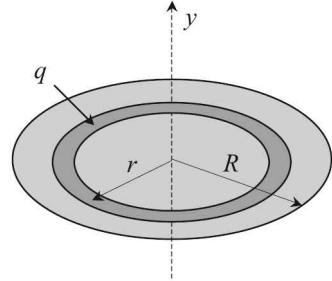
$$V = \frac{\lambda r}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + y^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + y^2}}. \quad (8)$$

Il potenziale,  $dV$ , generato dalla spira di raggio  $r$  e spessore  $dr$  in un punto dell'asse del disco si ottiene dalle (8) e (3):

$$dV = \frac{Qr}{2\pi\epsilon_0 R^2 \sqrt{r^2 + y^2}} dr. \quad (9)$$

Il potenziale elettrostatico generato dalla carica distribuita sull'intero disco si calcola integrando la (9) per  $r$  variabile da 0 a  $R$ :

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2 + y^2}} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ \sqrt{r^2 + y^2} \right]_0^R = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ \sqrt{R^2 + y^2} - y \right]. \end{aligned} \quad (10)$$



Anche in questo caso, come nell'esercizio precedente, il campo elettrostatico sull'asse del disco, diretto per simmetria lungo l'asse stesso ( $\mathbf{E} = E_y(y)\mathbf{u}_y$ ), si può calcolare con la relazione:

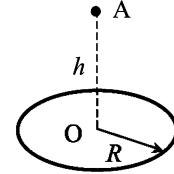
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ 1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right], \quad (11)$$

che coincide, ovviamente, con la (5).

### S.1.10.

Le forze agenti sulla particella di massa  $m$  sono la forza peso,  $mg$ , e la forza elettrostatica generata dalla carica  $Q$  distribuita sul disco di raggio  $R$ . Dal momento che le forze applicate sono conservative, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia. La forza peso può essere trascurata rispetto alla forza elettrostatica. Inizialmente la particella è in quiete, quindi l'energia è di tipo puramente potenziale:

$$\mathcal{E}(i) = -qV(A), \quad (1)$$



dove  $V(A)$  è il potenziale elettrostatico generato in  $A$  dalla carica  $Q$ . Ricordando che il potenziale generato sull'asse da una carica  $Q$  uniformemente distribuita su un disco di raggio  $R$ , a distanza  $h$  dal disco stesso è data dalla (10) dell'esercizio precedente:

$$V(h) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ \sqrt{R^2 + h^2} - h \right] \quad (2)$$

si ottiene:

$$\mathcal{E}(i) = -\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 R} (\sqrt{10} - 3). \quad (3)$$

Quando la particella, lasciata libera di muoversi, raggiunge il centro del disco, l'energia totale è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elettrostatica:

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}mv^2 - qV(O), \quad (4)$$

dove  $V(O)$  è il potenziale al centro del disco ( $h = 0$  nella (2)):

$$V(O) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (5)$$

Utilizzando le (3)-(5) e il principio di conservazione dell'energia ( $\mathcal{E}(i) = \mathcal{E}(f)$ ), si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 m R} (4 - \sqrt{10})} \quad (6)$$

### S.1.11.

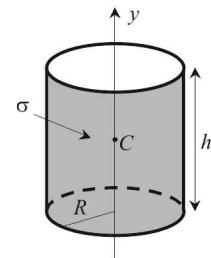
Il problema si risolve facilmente applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. La distribuzione di carica assegnata è equivalente a una carica distribuita, con densità  $\sigma$ , sulla superficie cilindrica e sulle due basi del cilindro, a cui si sovrappone una carica distribuita, con densità  $-\sigma$ , sulla base superiore del cilindro. Il campo elettrico generato

in C dalla carica distribuita sulla superficie cilindrica e sulle *due* basi è nullo per ragioni di simmetria. Infatti le cariche distribuite sulle due basi generano in C due campi elettrici diretti come l'asse del cilindro, uguali in modulo e di verso opposto (vedi il problema 9). La superficie cilindrica si può scomporre in un numero infinito di spire di raggio  $R$ . I campi elettrici generati in C dalle coppie di spire i cui centri sono posti in posizioni simmetriche rispetto a C, sono diretti come l'asse del cilindro, hanno lo stesso modulo ma hanno verso opposto (vedi il problema 7).

Il campo elettrico generato in C dalla distribuzione di carica assegnata è quindi il campo generato sull'asse da un disco di raggio  $R$ , uniformemente carico con densità di carica  $-\sigma$ , e quindi è dato da (vedi il problema 9):

$$\mathbf{E}(C) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{h}{\sqrt{4R^2 + h^2}} \right] \mathbf{u}_y, \quad (1)$$

avendo fissato un asse  $y$  coincidente con l'asse del cilindro e diretto verso l'alto, come mostrato in figura.



### S.1.12.

Dal momento che la massa  $M$  del corpo B è molto maggiore di quella del corpo A, possiamo trascurare il moto di B. L'unica forza agente su A è quella elettrostatica esercitata dal corpo B (possiamo infatti trascurare la forza peso rispetto a quella elettrostatica), quindi l'energia totale si conserva. Inizialmente i due corpi si trovano a grande distanza l'uno dall'altro, quindi l'energia di A è di tipo cinetico:

$$\mathcal{E}(\infty) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1)$$

A distanza  $r$  da B l'energia del corpo A è data dalla somma dell'energia cinetica e di quella potenziale:

$$\mathcal{E}(r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia è possibile calcolare la distanza  $r$  fra A e B in corrispondenza della quale  $v = v_0/2$ . Uguagliando le (1) e (2), con  $v = v_0/2$ , si ottiene:

$$r = \frac{2q^2}{3\pi\epsilon_0 mv_0^2}. \quad (3)$$

### S.1.13.

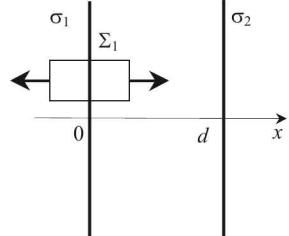
L'esercizio si risolve applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Calcoleremo il campo elettrico generato, separatamente, dalle due distribuzioni superficiali di carica. Consideriamo quindi il piano  $x = 0$  uniformemente carico, con densità di carica  $\sigma_1$ . Data la simmetria, il campo elettrico deve essere perpendicolare al piano e deve avere lo stesso modulo ma verso opposto sulle coppie di piani perpendicolari all'asse  $x$ , posti in posizioni simmetriche rispetto al piano carico. Applichiamo quindi il teorema di Gauss, considerando una superficie cilindrica perpendicolare al piano  $x = 0$ , con basi di area

A poste in posizioni simmetriche rispetto al piano (superficie  $\Sigma_1$  mostrata in figura). Si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{E}_1) = 2E_1 A = \frac{\sigma_1 A}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}. \quad (1)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x < 0 \\ \mathbf{E}_1 &= \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x > 0 \end{aligned} \quad (2)$$



Analogamente per il piano  $x = d$ . Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x < 0 \\ \mathbf{E} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & 0 < x < d \\ \mathbf{E} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x > d \end{aligned} \quad (3)$$

L'andamento del campo elettrico è riportato in figura (si è assunto  $\sigma_1 > \sigma_2$ ). Si osservi che il campo elettrico è discontinuo in corrispondenza delle due distribuzioni superficiali di carica. Calcoliamo ora il potenziale assumendo  $V = 0$  per  $x = 0$ . Dalla definizione di potenziale si ha:  $dV = -E dx$ , quindi per  $x < 0$  si ottiene:

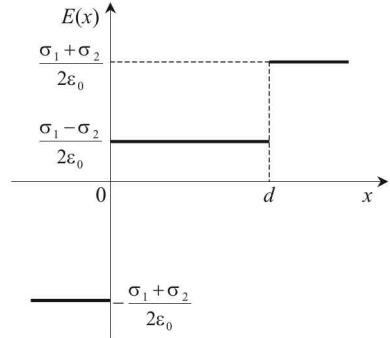
$$\begin{aligned} \int_0^{V(x)} dV &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \int_0^x dx \\ V(x) &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x \end{aligned} \quad (4)$$

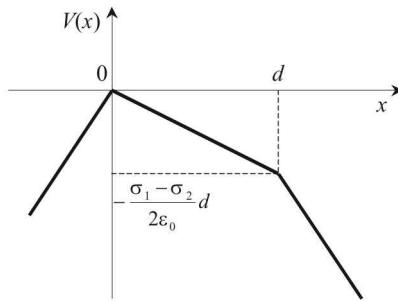
Per  $0 < x < d$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{V(x)} dV &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \int_0^x dx \\ V(x) &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} x \end{aligned} \quad (5)$$

Infine, per  $x > d$ , osservando che il potenziale è continuo in  $x = d$ , dal momento che il campo elettrico si mantiene limitato in  $x = d$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{V(d)}^{V(x)} dV &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \int_d^x dx \\ V(x) &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} d - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} (x - d) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d \end{aligned} \quad (6)$$





L'andamento del potenziale è riportato in figura.

### S.1.14.

Data la simmetria della distribuzione di carica, il campo elettrico presenta una simmetria sferica: ha direzione radiale e ha lo stesso valore su superfici sferiche,  $\Sigma$ , di raggio  $r$  arbitrario concentriche alla distribuzione di carica. Per determinare il campo elettrico applicheremo il teorema di Gauss. Il campo in un punto interno alla sfera di raggio  $R$  si calcola come segue:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (1)$$

Per  $0 < r < R$  si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} \quad (2)$$

essendo  $\mathbf{u}_r$  il versore radiale uscente dal centro della sfera.

In un punto esterno alla sfera si ha invece:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (3)$$

Per  $r > R$  si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad (4)$$

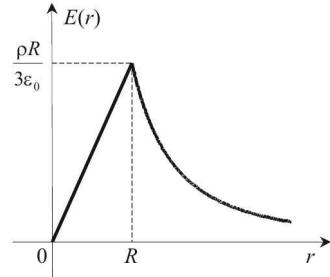
Se indichiamo con  $Q$  la carica totale posseduta dalla sfera,  $Q = 4\pi R^3 \rho / 3$ , il campo esterno si può scrivere come segue:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (5)$$

cioè una sfera con carica  $Q$  uniformemente distribuita produce nei punti esterni lo stesso campo elettrico generato da una carica puntiforme  $Q$  posta nel centro della sfera.

L'andamento del campo elettrico in funzione di  $r$  è riportato in figura. Calcoliamo ora il potenziale, assumendo  $V = 0$  all'infinito. Dalla definizione di potenziale si ha:  $dV = -E dr$ , quindi, per  $r > R$  si ottiene:

$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$



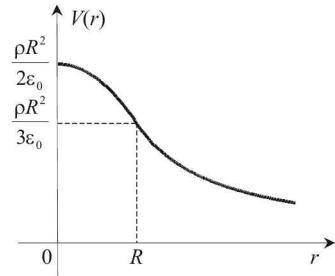
$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (6)$$

Per  $0 < r < R$ , osservando che il potenziale è continuo in  $r = R$ , possiamo scrivere:

$$\int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr$$

$$V(r) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2). \quad (7)$$

L'andamento del potenziale in funzione di  $r$  è riportato in figura.



### S.1.15.

Introduciamo un asse  $x$  perpendicolare allo strato carico, con origine nel centro dello strato, come mostrato in figura. Per calcolare il campo elettrico è opportuno applicare il teorema di Gauss. Data la simmetria della configurazione il campo elettrico è parallelo all'asse  $x$ , ha lo stesso modulo ma verso opposto sulle coppie di piani perpendicolari all'asse  $x$ , posti in posizioni simmetriche rispetto al piano  $x = 0$ . Per prima cosa calcoliamo il campo esterno. Consideriamo una superficie cilindrica con basi di area  $A$  poste in posizioni simmetriche rispetto allo strato (superficie  $\Sigma_1$  mostrata in figura).

Si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{E}) = 2EA = \frac{\rho}{\epsilon_0} A 2d. \quad (1)$$

Il campo elettrico esterno allo strato è dunque uniforme ed è dato da:

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad x < -d \quad (2)$$

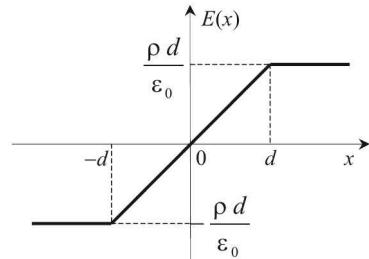
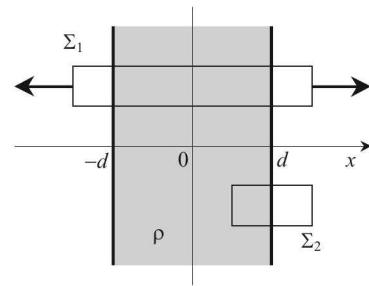
$$\mathbf{E} = \frac{\rho d}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad x > d$$

Per calcolare il campo elettrico all'interno dello strato,  $\mathbf{E} = E(x)\mathbf{u}_x$ , consideriamo una superficie cilindrica  $\Sigma_2$  posta a cavallo del piano  $x = d$ :

$$\Phi_{\Sigma_2}(\mathbf{E}) = -E(x)A + \frac{\rho d}{\epsilon_0} A = \frac{\rho A(d-x)}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

da cui si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x. \quad (4)$$



Possiamo rappresentare graficamente l'andamento del campo elettrico in funzione di  $x$ . Calcoliamo ora il potenziale generato dallo strato uniformemente carico, ricordando la definizione di potenziale:  $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ . Nel caso in esame si ottiene:  $dV = -E dx$ . Per  $-d < x < d$ , assumendo che il potenziale sia nullo per  $x = 0$ , si ottiene:

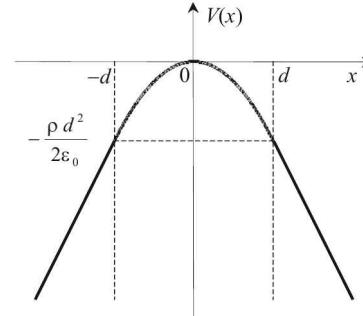
$$\int_0^{V(x)} dV = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^x x dx$$

$$V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2. \quad (5)$$

Per  $x > d$ , ricordando che il potenziale è continuo in  $x = d$ , si ha:

$$\int_{V(d)}^{V(x)} dV = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \int_d^x dx$$

$$V(x) = V(d) - \frac{\rho d}{\epsilon_0} (x - d) = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} (2x - d). \quad (6)$$



Analogamente per  $x < -d$ , ricordando che il potenziale è continuo in  $x = -d$ , si ha:

$$V(x) = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} (2x + d). \quad (7)$$

L'andamento del potenziale è mostrato in figura. Si noti che per  $x = d$  la retta che rappresenta il potenziale per  $x > d$  è tangente alla parabola. Analogamente per  $x = -d$ .

### S.1.16.

Il problema si risolve facilmente applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Il campo elettrico  $\mathbf{E}$  in P è dato dalla somma vettoriale dei campi  $\mathbf{E}_1$  ed  $\mathbf{E}_2$  generati, separatamente, dai due fili carichi. Il campo elettrico generato da un filo rettilineo indefinito uniformemente carico si calcola utilizzando il teorema di Gauss. Data la simmetria del problema, il campo elettrostatico è dotato di simmetria cilindrica: è radiale ed ha lo stesso modulo in tutti i punti di superfici cilindriche coassiali col filo. Utilizzando come superficie di Gauss una superficie cilindrica di raggio arbitrario  $r$ , di altezza arbitraria  $h$ , coassiale al filo, applicando il teorema di Gauss si ottiene:

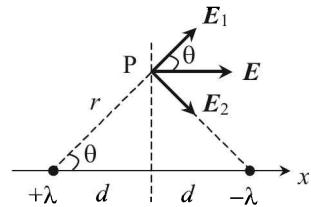
$$\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (2)$$

avendo indicato con  $\mathbf{u}_r$  il versore radiale uscente dal filo. Nel caso in esame il campo elettrostatico totale in P è dato da:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (3)$$



dove:

$$|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

Con riferimento alla figura si ha:

$$\mathbf{E} = 2|\mathbf{E}_1| \cos \theta \mathbf{u}_x \quad (5)$$

avendo introdotto un asse  $x$  perpendicolare ad entrambi i fili e l'angolo  $\theta$  tale che:

$$\cos \theta = d/r \quad (6)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda d}{\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_x \quad (7)$$

### S.1.17.

Data la simmetria della distribuzione di carica possiamo calcolare il campo elettrostatico applicando il teorema di Gauss. Il campo è radiale ed assume lo stesso modulo su superfici cilindriche coassiali con la distribuzione di carica assegnata. Assumendo come superficie di Gauss  $\Sigma$  una di tali superfici cilindriche di altezza arbitraria  $h$  e di raggio  $r$ , si ottiene che il flusso uscente del campo  $\mathbf{E}$  è dato da:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 2\pi rhE. \quad (1)$$

Per  $0 < r < R_1$ , applicando il teorema di Gauss si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 0 \quad (2)$$

dal momento che non c'è alcuna carica all'interno della superficie cilindrica di raggio  $r$ . Dalle (1) e (2) si ottiene:

$$\mathbf{E} = 0. \quad (3)$$

Procedendo allo stesso modo, per  $R_1 < r < R_2$  si ha:

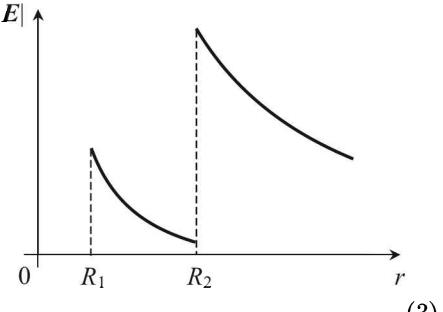
$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{\sigma_1 2\pi R_1 h}{\epsilon_0} \quad (4)$$

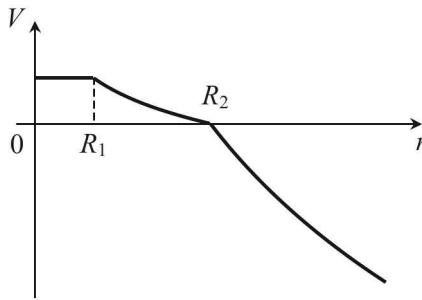
dal momento che la carica interna alla superficie  $\Sigma$  è distribuita sulla superficie cilindrica di raggio  $R_1$ . Utilizzando le (1) e (4) si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (5)$$

essendo  $\mathbf{u}_r$  il versore radiale uscente. Infine, per  $r > R_2$  si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{2\pi h(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\epsilon_0} \quad (6)$$





Dalle (1) e (6) si ha:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (7)$$

L'andamento del campo elettrico in funzione di  $r$  è mostrato in figura. Si noti che in corrispondenza delle due distribuzioni di carica superficiali il campo elettrostatico è discontinuo. Calcoliamo ora il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica, ricordando che si assume nullo il potenziale per  $r = R_2$ . Per  $r \geq R_2$  si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = - \int_{R_2}^r E dr = - \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{dr}{r} \quad (8)$$

da cui si ricava:

$$V(r) = - \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_2} \quad (9)$$

Per  $R_1 \leq r \leq R_2$  si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = - \int_{R_2}^r E dr = - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{dr}{r} \quad (10)$$

da cui:

$$V(r) = - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_2} \quad (11)$$

Infine, per  $0 \leq r \leq R_1$ , dal momento che il campo elettrostatico è nullo, il potenziale è costante. Poiché per  $r = R_1$  il potenziale deve essere continuo (il campo non diverge), si ottiene:

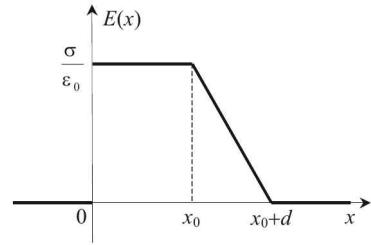
$$V(r) = V(R_1) = - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (12)$$

L'andamento del potenziale elettrostatico in funzione di  $r$  è mostrato in figura.

**S.1.18.**

L'esercizio si risolve applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Calcoleremo quindi il campo elettrostatico generato, separatamente, dalla distribuzione superficiale di carica e dallo strato piano. Il campo totale è la somma vettoriale dei due campi. Per quanto riguarda la distribuzione superficiale di carica, ricordando il risultato dell'esercizio 13, si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x < 0 \\ \mathbf{E}_1 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x > 0\end{aligned}\tag{1}$$



Per quanto riguarda la distribuzione volumetrica di carica, si procede come mostrato nel problema 15, ponendo attenzione al fatto che, nel caso in esame, la densità di carica è  $-\rho$ , lo spessore dello strato è  $d$  e il piano di simmetria dello strato è il piano  $x = x_0 + (d/2)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2 &= \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x < x_0 \\ \mathbf{E}_2 &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \left[ x - \left( x_0 + \frac{d}{2} \right) \right] \mathbf{u}_x, & x_0 < x < x_0 + d \\ \mathbf{E}_2 &= -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & x > x_0 + d\end{aligned}\tag{2}$$

Il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica assegnata è dato da:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ . Affinché il campo elettrico totale sia nullo nelle regioni  $x < 0$  e  $x > x_0 + d$  deve risultare:

$$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma = \rho d.\tag{3}$$

In tal caso il campo elettrico totale è dato da:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= 0, & x < 0, x > x_0 + d \\ \mathbf{E} &= \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \right) \mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & 0 < x < x_0 \\ \mathbf{E} &= \left\{ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \left[ x - \left( x_0 + \frac{d}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x - x_0}{d} \right) \mathbf{u}_x, & x_0 < x < x_0 + d\end{aligned}\tag{4}$$

L'andamento del campo elettrico è rappresentato in figura. Si noti che in corrispondenza della distribuzione di carica superficiale il campo elettrico è discontinuo, mentre è continuo in corrispondenza della distribuzione di carica volumetrica. Calcoliamo ora il potenziale assumendo  $V = 0$  per  $x = x_0 + d$ . Dalla definizione di potenziale si ha:  $dV = -E dx$ . Per  $x > x_0 + d$  il potenziale è costante; dal momento che il potenziale è continuo in  $x = x_0 + d$ , si ha che  $V = 0$  per  $x > x_0 + d$ . Per  $x_0 < x < x_0 + d$  si ha:

$$\int_0^{V(x)} dV = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{x_0+d}^x \left( 1 - \frac{x - x_0}{d} \right) dx$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 d} [x^2 - 2(x_0 + d)x + (x_0 + d)^2]. \quad (5)$$

Per  $0 < x < x_0$ , osservando che il potenziale è continuo in  $x = x_0$  ( $V(x_0) = \sigma d / (2\epsilon_0)$ ):

$$\begin{aligned} \int_{V(x_0)}^{V(x)} dV &= - \int_{x_0}^x \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx \\ V(x) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{d}{2} + x_0 - x \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Infine, per  $x < 0$  il potenziale è costante. Poiché il potenziale è continuo in  $x = 0$  si ottiene:

$$V(x) = V(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{d}{2} + x_0 \right). \quad (7)$$

L'andamento del potenziale è rappresentato in figura. Si noti che in  $x = x_0 + d$  la parabola che rappresenta l'andamento del potenziale per  $x_0 < x < x_0 + d$  ha tangente orizzontale, mentre in  $x = x_0$  tale parabola ha come tangente la retta che rappresenta l'andamento del potenziale per  $0 < x < x_0$ . Infatti:  $E(x_0^-) = E(x_0^+)$  e  $E[(x_0 + d)^-] = E[(x_0 + d)^+]$ . Si noti inoltre che in corrispondenza della distribuzione superficiale di carica il potenziale è continuo. Calcoliamo ora la forza per unità di superficie agente sul piano  $x = 0$ . Isoliamo su tale piano un elemento di superficie  $dS$ . Il campo elettrico  $\mathbf{E}$  in vicinanza del piano può essere decomposto nella somma di due contributi: quello prodotto da  $dS$ ,  $\mathbf{E}_{dS}$ , e quello prodotto dal resto della distribuzione di carica,  $\mathbf{E}_{tot-dS}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{dS} + \mathbf{E}_{tot-dS} \Rightarrow \mathbf{E}_{tot-dS} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{dS}. \quad (8)$$

Il campo elettrico  $\mathbf{E}$ , come abbiamo visto, vale:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad 0 < x < x_0 \quad (9)$$

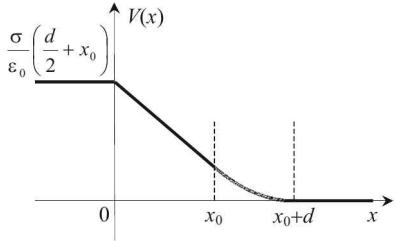
$$\mathbf{E} = 0, \quad x < 0$$

In un punto molto vicino a  $dS$  il campo elettrico  $\mathbf{E}_{dS}$  prodotto da  $dS$  stesso è uguale al campo generato da un piano carico indefinito:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{dS} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad x > 0 \\ \mathbf{E}_{dS} &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad x < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E}_{tot-dS} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x \quad x < 0 \text{ e } x > 0 \quad (11)$$



La forza elettrostatica sulla superficie  $dS$  è la forza  $d\mathbf{F}$  che si esercita su una carica  $dq = \sigma dS$  a causa della presenza del campo  $\mathbf{E}_{tot-dS}$ . Si ha quindi:

$$d\mathbf{F} = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \mathbf{u}_x, \quad (12)$$

pertanto la pressione elettrostatica è data da:

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}. \quad (13)$$

### S.1.19.

Per calcolare il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica assegnata, applichiamo il teorema di Gauss. Data la simmetria cilindrica della distribuzione, anche il campo elettrico presenta la stessa simmetria. Quindi le sue linee di forza sono radiali (perpendicolari all'asse del cilindro) e il campo elettrico ha lo stesso modulo su una superficie cilindrica di raggio generico  $r$  coassiale con la distribuzione assegnata. Assumendo come superficie di Gauss una superficie cilindrica  $\Sigma$  di raggio  $r$  ( $0 < r < R$ ) e altezza  $h$ , si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 2\pi rhE = \frac{\rho}{\epsilon_0}\pi r^2 h \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_r \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{u}_r$  il versore radiale uscente dall'asse. Per  $r > R$  si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 2\pi rhE = \frac{\rho}{\epsilon_0}\pi R^2 h \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \quad (2)$$

L'andamento del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del cilindro è mostrato in figura.

Calcoliamo ora il potenziale generato dalla distribuzione di carica, assumendo che il potenziale sia nullo per  $r = 0$ . Dalla definizione di potenziale si ha:  $dV = -E dr$ . Per  $0 < r < R$  si ottiene:

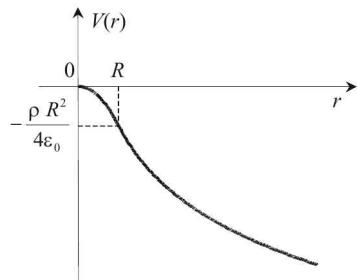
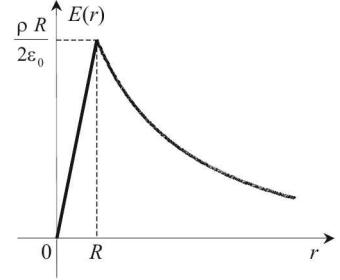
$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^r r dr$$

$$V(r) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2. \quad (3)$$

Per  $r > R$ , osservando che il potenziale è continuo in  $r = R$  ( $V(R) = -\rho R^2 / (4\epsilon_0)$ ) si ha:

$$\int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_R^r \frac{dr}{r}$$

$$V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{R} \right). \quad (4)$$



L'andamento del potenziale in funzione di  $r$  è mostrato in figura.

### S.1.20.

La configurazione di campo elettrico assegnata si può immaginare come la sovrapposizione di due campi elettrici uniformi di modulo  $E_0$ , il primo presente fra i piani  $x = \pm d$ , il secondo presente fra i piani  $x = \pm 2d$ . Un campo elettrico uniforme fra due piani è generato da due distribuzioni plane di carica, uniformi e di segno opposto. Infatti, consideriamo due piani infiniti con densità superficiali da carica  $+\sigma$  e  $-\sigma$  posti in  $x = -2d$  e  $x = 2d$ , rispettivamente. Il campo elettrico generato si può calcolare applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come mostrato nel problema 13, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 0, & x < -2d, \quad x > 2d \\ \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, & -2d < x < 2d \end{aligned} \tag{1}$$

Nel nostro caso deve essere  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_x$  per  $-2d < x < 2d$ , quindi deve risultare  $\sigma = \epsilon_0 E_0$ . Ripetendo lo stesso ragionamento nel caso del campo elettrico uniforme  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_x$  nella regione compresa fra i piani  $x = -d$  e  $x = d$ , si conclude che il campo elettrico unidimensionale assegnato dal problema è generato da quattro distribuzioni plane infinite di carica poste sui piani  $x = \pm 2d$  e  $x = \pm d$ , di valore assoluto  $\sigma = \epsilon_0 E_0$ , di segno positivo per  $x = -2d$  e  $x = -d$  e di segno negativo per  $x = d$  e  $x = 2d$ .

Calcoliamo ora il potenziale corrispondente, assumendo che il potenziale sia nullo per  $x = 0$ . Per  $-d < x < d$  si ha:

$$\int_0^{V(x)} dV = -2E_0 \int_0^x dx \Rightarrow V(x) = -2E_0 x. \tag{2}$$

Per  $d < x < 2d$ , osservando che il potenziale è continuo in  $x = d$  ( $V(d) = -2E_0 d$ ) si ha:

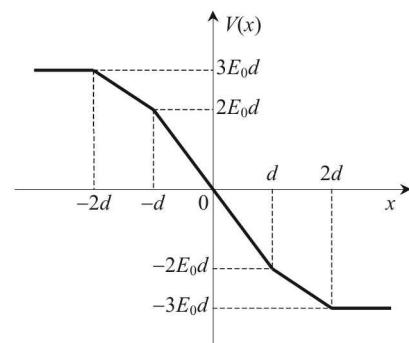
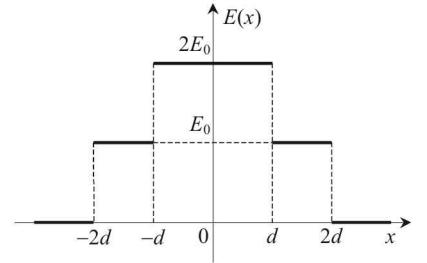
$$\int_{V(d)}^{V(x)} dV = -E_0 \int_d^x dx \Rightarrow V(x) = -E_0(x+d). \tag{3}$$

Per  $x > 2d$  il potenziale è costante e continuo in  $x = 2d$ , quindi:

$$V(x) = -3E_0 d. \tag{4}$$

Procedendo nello stesso modo si ottiene:

$$\begin{aligned} V(x) &= -E_0(x-d), & -2d < x < -d \\ V(x) &= 3E_0 d, & x < -2d \end{aligned} \tag{5}$$



L'andamento del potenziale in funzione di  $x$  è mostrato in figura. Calcoliamo infine la velocità, per  $x = 2d$ , di una particella di carica  $q$  e massa  $m$ , posta con velocità nulla in  $x = 0$ . Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_c = E_c(2d) - E_c(0) = \mathcal{L}_{campo}, \quad (6)$$

avendo indicato con  $\mathcal{L}_{campo}$  il lavoro compiuto dalle forze del campo, dato per definizione da  $\mathcal{L}_{campo} = -q \Delta V = -q[V(2d) - V(0)]$ . Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 3qE_0d, \quad (7)$$

da cui si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{6qE_0d}{m}}. \quad (8)$$

### S.1.21.

La carica totale  $Q$  distribuita all'interno della sfera di raggio  $R$  è legata alla densità di carica volumetrica dalla seguente relazione:

$$Q = \int_{\text{sfera}} \rho(r) d\tau, \quad (1)$$

dove  $d\tau$  è l'elemento di volume infinitesimo e l'integrale è esteso all'intera sfera. Nel caso in esame di simmetria sferica  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , quindi:

$$Q = \int_0^R 4\pi ar^3 dr = \pi aR^4. \quad (2)$$

Si ha quindi:

$$a = \frac{Q}{\pi R^4}. \quad (3)$$

Per calcolare il campo elettrico applichiamo il teorema di Gauss. La distribuzione di carica ha simmetria sferica, quindi scegliamo come superficie di Gauss un'arbitraria superficie sferica  $\Sigma$  di raggio  $r$  concentrica con la sfera carica. Per  $0 < r < R$  si ottiene:

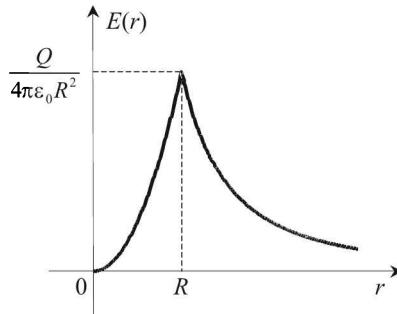
$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

dove  $Q_{\text{int}}$  è la carica contenuta all'interno della sfera di raggio  $r$ , cioè:

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^r 4\pi ar^3 dr = \pi ar^4 = Q \left( \frac{r}{R} \right)^4. \quad (5)$$

Per  $0 < r < R$  si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{r}{R} \right)^4 \mathbf{u}_r = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^4} \mathbf{u}_r. \quad (6)$$



Nei punti esterni alla sfera il campo è lo stesso che si avrebbe nel caso in cui la carica  $Q$  fosse concentrata nel centro della sfera:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r. \quad (7)$$

L'andamento del campo elettrico in funzione della distanza  $r$  dal centro della sfera è mostrato in figura.

### S.1.22.

L'energia elettrostatica della configurazione di carica assegnata si può calcolare utilizzando la formula seguente:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma V \, dS, \quad (1)$$

dove l'integrale è esteso alla superficie sferica su cui è presente la carica con densità superficiale  $\sigma$ . Per prima cosa calcoliamo il campo elettrico e il potenziale generato da una carica  $Q$  distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio  $R$ . Applichiamo il teorema di Gauss, assumendo, data la particolare simmetria della distribuzione di carica, una superficie di Gauss  $\Sigma$  sferica, di raggio generico  $r$ , concentrica a quella assegnata.

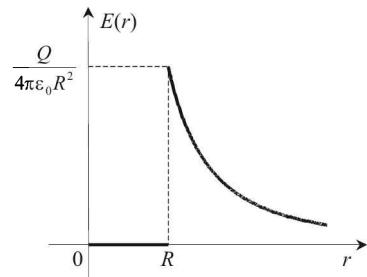
Per  $0 < r < R$  si ha:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Per  $r > R$  si ha:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (3)$$

come se la carica  $Q$  fosse concentrata nel centro della superficie sferica. Il potenziale elettrostatico si calcola facilmente. Se assumiamo che il potenziale sia nullo all'infinito si



ottiene, per  $r > R$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{V(r)} dV &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \\ V(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (4)$$

Per  $0 < r < R$  il potenziale è costante e continuo in  $r = R$ , quindi:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5)$$

Gli andamenti del campo elettrico e del potenziale in funzione di  $r$  sono mostrati in figura. Possiamo ora calcolare l'energia elettrostatica. Utilizzando la formula (1) si ottiene:

$$U = \frac{1}{2} \sigma V \int_S dS = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (6)$$

Si ottiene lo stesso risultato applicando la formula seguente:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon_0 E^2 d\tau, \quad (7)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio in cui è presente il campo elettrico. Ricordando che, data la simmetria sferica, possiamo scrivere  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , si ottiene:

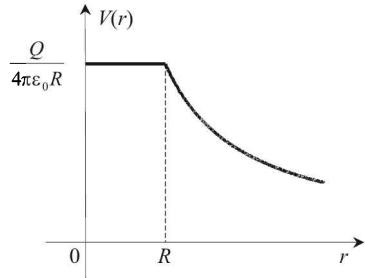
$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (8)$$

Infine, per calcolare l'energia cinetica che le cariche acquisterebbero portandosi a distanza  $r > R$  dal centro della sfera se fossero, tutte nello stesso istante, lasciate libere di allontanarsi, si applica il teorema dell'energia cinetica. Dal momento che le uniche forze presenti e che compiono lavoro sono le forze del campo, si ha:

$$\Delta E_c = E_{c,fin} - E_{c,in} = \mathcal{L}_{campo} = -\Delta U = U(R) - U(r). \quad (9)$$

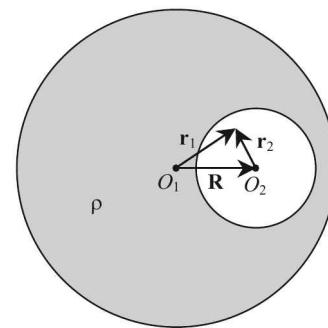
Dl momento che  $E_{c,in} = 0$  si ha:

$$E_{k,fin} = U(R) - U(r) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (10)$$



**S.1.23.**

Il problema si risolve applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. La distribuzione di carica assegnata equivale a una sfera di centro  $O_1$  e raggio  $R_1$  uniformemente carica con densità volumetrica  $\rho$  a cui si sovrappone una sfera con centro in  $O_2$  e raggio  $R_2$  uniformemente carica con densità volumetrica  $-\rho$ . Il campo elettrico generato da una carica distribuita con densità volumetrica costante in una sfera è stato calcolato nel problema 14. In un punto interno al foro si ha:



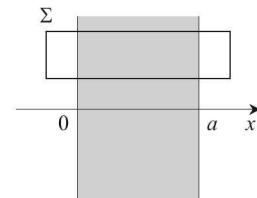
$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_1 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{R}, \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{R}$  il vettore che congiunge  $O_1$  con  $O_2$ . Si vede quindi che il campo all'interno della cavità è uniforme ed è proporzionale alla distanza fra i centri delle due sfere. Nel caso particolare in cui i due centri coincidano (guscio sferico di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ ) il campo elettrico all'interno della cavità è nullo, come risulta evidente applicando direttamente il teorema di Gauss.

**S.1.24.**

Il campo assegnato è generato da una carica distribuita nella regione di spazio compresa fra i piani  $x = 0$  e  $x = a$ . Nella regione  $0 < x < a$  il campo elettrico è dato da:

$$\mathbf{E} = \left( -\frac{E_0}{a} x + E_0 \right) \mathbf{u}_x. \quad (1)$$



Applichiamo il teorema di Gauss in forma locale:  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ . Nel caso unidimensionale in esame si ottiene:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

da cui si ha, per  $0 < x < a$ :

$$\rho = \epsilon_0 \frac{dE}{dx} = -\epsilon_0 \frac{E_0}{a}. \quad (3)$$

In  $x = 0$  il campo elettrico presenta una discontinuità, quindi in  $x = 0$  deve essere presente una distribuzione superficiale di carica  $\sigma$ , il cui valore può essere calcolato facilmente mediante la condizione di raccordo del campo elettrostatico ad una superficie piana di carica, ottenendo  $\sigma = \epsilon_0 E_0$ . Alternativamente, possiamo calcolare  $\sigma$  applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie cilindrica  $\Sigma$ , con asse parallelo all'asse  $x$ , con basi di area arbitraria  $A$  poste, come mostrato in figura, a cavallo dell'intera distribuzione di carica. Si ha:  $\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 0$ , dal momento che il campo è nullo per  $x < 0$  e  $x > a$ . Si ha quindi che la carica interna alla superficie  $\Sigma$  è nulla:

$$A(\sigma + \rho a) = 0 \Rightarrow \sigma = -\rho a = \epsilon_0 E_0. \quad (4)$$

### S.1.25.

Per calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema di cariche puntiformi in considerazione, seguiamo il processo che porta alla costruzione del sistema in esame. Per spostare una carica si agisce su di essa con una forza esterna uguale e contraria a quella dovuta al campo elettrostatico generato dalle altre cariche del sistema. In tal modo il lavoro complessivo delle due forze agenti sulla carica in esame (quella esterna e il risultante delle forze elettrostatiche dovute alle altre cariche) è nullo, la variazione di energia cinetica è di conseguenza nulla, quindi il lavoro eseguito dalla forza esterna,  $\mathcal{L}^{est}$ , si converte totalmente in energia potenziale del sistema. Assegnando, convenzionalmente, energia nulla alla configurazione in cui tutte le cariche sono a distanza infinita fra di loro, si ha:  $U = \mathcal{L}^{est}$ . Calcoliamo tale lavoro.

Il posizionamento della prima carica, per esempio la carica  $q$  in posizione A, viene effettuato compiendo lavoro nullo, poiché inizialmente, quando tutte le cariche del sistema sono a distanza infinita l'una dall'altra, non è presente alcun campo elettrostatico. Il posizionamento della seconda carica, per esempio la carica  $2q$  in posizione B, a partire dall'infinito fino alla posizione finale B, viene fatto muovendo la carica nel campo elettrostatico generato dalla prima carica in posizione A. La forza esterna che agisce su  $2q$  è data da:

$$\mathbf{F}_1^{est} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_{rA} \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{u}_{rA}$  il versore uscente da  $q$  diretto lungo la congiungente le due cariche. Si ha quindi:

$$\mathcal{L}_1^{est} = \int_{\infty}^B \mathbf{F}_1^{est} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} \int_{\infty}^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (2)$$

Per il trasporto della terza carica, ad esempio la carica  $q$  in posizione C, si procede nello stesso modo, ricordando che ora il campo elettrostatico in cui la carica si muove è generato dalle due cariche già collocate nelle rispettive posizioni finali. Possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si immagina dapprima che la carica venga spostata nel campo elettrostatico generato dalla sola carica  $q$  posta in A. In tal caso il lavoro esterno è dato da (vedi la (2)):

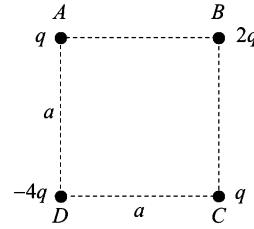
$$\mathcal{L}_{2,A}^{est} = \frac{q^2\sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 a} \quad (3)$$

Si immagina poi di spostare la carica in considerazione nel campo elettrostatico generato dalla sola carica  $2q$  posta in B. In tal caso si ottiene:

$$\mathcal{L}_{2,B}^{est} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (4)$$

Il lavoro complessivo è quindi:

$$\mathcal{L}_2^{est} = \frac{q^2\sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (5)$$



A questo punto dobbiamo posizionare l'ultima carica,  $-4q$ , in posizione D. In tal caso, seguendo lo stesso procedimento, otteniamo:

$$\mathcal{L}_3^{est} = -\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a} - \frac{q^2\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 a} - \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a} \quad (6)$$

L'energia potenziale elettrostatica del sistema di cariche è quindi data da:

$$U = \mathcal{L}_1^{est} + \mathcal{L}_2^{est} + \mathcal{L}_3^{est} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}(8 + 7\sqrt{2}) \quad (7)$$

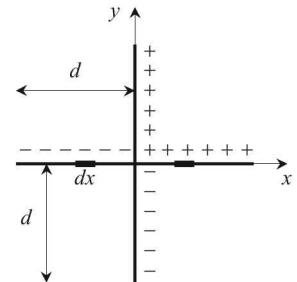
Il procedimento descritto porta ad una semplice espressione dell'energia potenziale elettrostatica per un sistema di cariche puntiformi:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (8)$$

dove  $r_{ij}$  rappresenta la distanza fra le cariche  $i$  e  $j$  ed  $N$  è il numero complessivo delle cariche che compongono il sistema in esame. L'applicazione diretta della (8) ( $N=4$ ) porta alla (7).

### S.1.26.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali  $xy$  come mostrato in figura. Consideriamo dapprima la carica distribuita lungo l'asse  $x$ , e due elementi infinitesimi  $dx$  posti in posizioni simmetriche rispetto all'origine (a distanza  $x$  dall'origine stessa). Essi costituiscono un dipolo elettrico di momento  $dp = (2x)\lambda dx \mathbf{u}_x$ . Il momento di dipolo complessivo della carica distribuita lungo l'asse  $x$  sarà dunque:



$$\mathbf{p}_1 = \lambda \mathbf{u}_x \int_0^d 2x \, dx = \lambda d^2 \mathbf{u}_x. \quad (1)$$

Allo stesso modo il momento di dipolo della carica distribuita lungo l'asse  $y$  sarà dato da:

$$\mathbf{p}_2 = \lambda \mathbf{u}_y \int_0^d 2y \, dy = \lambda d^2 \mathbf{u}_y. \quad (2)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento di dipolo elettrico complessivo è dato da:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \lambda d^2 (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y). \quad (3)$$

### S.1.27.

La particella di massa  $m$  e carica  $q$  è sottoposta all'azione di due forze: la forza  $q\mathbf{E}_0$  dovuta al campo applicato e la forza  $q\mathbf{E}$  dovuta al campo generato, nella posizione occupata dalla particella, dalla carica  $-q$  distribuita in modo uniforme nella sfera di raggio  $R$ .

Esaurito il transitorio di applicazione del campo  $\mathbf{E}_0$ , la particella raggiunge una posizione di equilibrio. Si ha quindi che il risultante delle forze ad essa applicate è nullo:

$$q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{E}_0. \quad (1)$$

Come mostrato nel problema 14, il campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica con densità volumetrica  $\rho$  in un punto interno alla sfera stessa, è dato da:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}, \quad (2)$$

essendo  $\mathbf{r}$  il vettore posizione della particella di massa  $m$ . Nel nostro caso  $\rho = -3q/(4\pi R^3)$ . Si ha quindi:

$$\frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0} = -\mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = -\frac{3\epsilon_0}{\rho} \mathbf{E}_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{q} \mathbf{E}_0. \quad (3)$$

Il momento di dipolo elettrico associato alla distribuzione di carica è dato da:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0. \quad (4)$$

Quando il campo  $\mathbf{E}_0$  viene tolto improvvisamente, la particella di massa  $m$  risulta sottoposta alla forza  $\mathbf{F}$  data da:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{q^2 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{u}_r, \quad (5)$$

essendo  $\mathbf{u}_r$  il versore radiale uscente dal centro della sfera. La legge di moto della particella è data da:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r. \quad (6)$$

Si riconosce che il moto della particella è armonico semplice, con pulsazione  $\omega$  data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}. \quad (7)$$

# Capitolo 2

## Elettrostatica dei conduttori

### 2.1 Problemi

#### P.2.1.

Si calcoli la capacità di un condensatore cilindrico, costituito da due armature metalliche coassiali di altezza  $L$ , raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ , assumendo  $L \gg R_2$ .

#### P.2.2.

Si consideri un sistema di due conduttori sferici concentrici, in cui il conduttore interno ha raggio  $R_1$ , mentre il secondo conduttore è un guscio di raggio interno  $R_2$  e raggio esterno  $R_3$ . Si calcoli la capacità di tale condensatore sferico.

#### P.2.3.

Un conduttore sferico di raggio  $R$ , isolato e posto lontano da ogni altro corpo, presenta una carica elettrica  $Q$ . Si determini il potenziale elettrostatico  $V_0$  del conduttore, assumendo nullo il potenziale all'infinito. Si calcoli inoltre la capacità del conduttore e la sua energia elettrostatica.

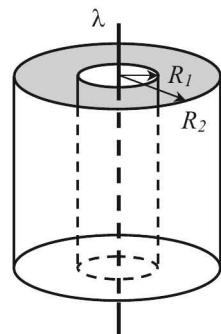
#### P.2.4.

Si consideri un sistema costituito da tre conduttori sferici concentrici. Il primo è una sfera metallica piena di raggio  $R_0$ ; il secondo è un guscio di raggio interno  $2R_0$  e spessore  $R_0/2$ ; il terzo è un guscio di raggio interno  $4R_0$  e spessore  $R_0$ . Assumendo che sulla sfera più interna sia posta una carica  $Q$ , si determini la differenza di potenziale fra la sfera ed il guscio più esterno. Si verifichi che tale risultato potrebbe essere ottenuto schematizzando il sistema come un unico condensatore, equivalente alla serie di due condensatori sferici.

**P.2.5.**

Una carica positiva è distribuita uniformemente, con densità lineare  $\lambda$ , su un filo rettilineo di lunghezza infinita. Il filo è posto sull'asse di un conduttore cilindrico cavo, di lunghezza infinita, di raggio interno  $R_1$  ed esterno  $R_2$ , isolato ed inizialmente scarico. Si calcolino:

- il campo elettrico in tutto lo spazio;
- le densità superficiali delle cariche indotte sulle superfici interna ed esterna del conduttore cilindrico.

**P.2.6.**

Due conduttori sferici di raggi  $R_1$  e  $R_2$ , posti a grande distanza uno dall'altro, sono carichi con cariche  $Q_1$  e  $Q_2$ , rispettivamente. A parità di carica totale  $Q = Q_1 + Q_2$  presente sui due conduttori, si determini per quali valori di  $Q_1$  e  $Q_2$  l'energia elettrostatica del sistema risulta minima. In tale condizione si ricavi la relazione esistente tra i potenziali elettrostatici dei due conduttori.

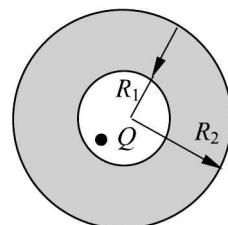
**P.2.7.**

Due conduttori sferici di raggi  $R_1$  ed  $R_2$  sono caricati con cariche elettriche  $Q_1$  e  $Q_2$ , rispettivamente, e posti a grande distanza l'uno dall'altro. I due conduttori vengono poi collegati elettricamente mediante un filo conduttore di capacità trascurabile. Si calcolino le cariche elettriche presenti su ciascuno dei due conduttori dopo il collegamento, il loro potenziale elettrostatico, e l'energia dissipata a seguito del trasferimento di carica.

**P.2.8.**

Una carica puntiforme  $Q$  viene posta all'interno di un guscio sferico metallico di raggio interno  $R_1$  ed esterno  $R_2$ , isolato ed inizialmente scarico, come mostrato in figura. Detta  $r$  la distanza dal centro del conduttore sferico si dica, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- il campo elettrico è nullo per  $r > R_1$ ;
- il campo elettrico è nullo per  $r < R_2$ ;
- la carica elettrica totale che si distribuisce sulla superficie interna, di raggio  $R_1$ , del conduttore è  $-Q$ ;
- le cariche indotte sulle due superfici, di raggi  $R_1$  ed  $R_2$  del conduttore, si distribuiscono con densità superficiale uniforme;
- il potenziale elettrostatico del conduttore è dato da  $V_0 = Q/(4\pi\epsilon_0 R_2)$ .



Nel caso particolare in cui la carica puntiforme sia posta al centro della cavità sferica, si calcoli il campo elettrico in ogni punto dello spazio.

**P.2.9.**

Si ripeta l'esercizio precedente nell'ipotesi in cui la sfera conduttrice cava sia mantenuta

a potenziale nullo.

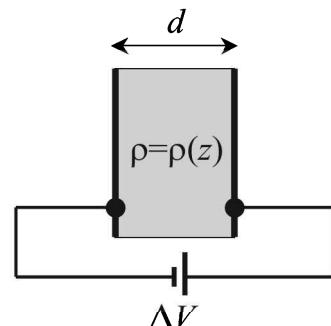
**P.2.10.**

Si consideri l'energia elettrostatica  $U = Q^2/(2C)$  racchiusa in un condensatore piano di capacità  $C$  sulle cui armature sia deposta una carica  $Q$ . Detto  $E$  il modulo del campo elettrostatico presente nel condensatore, si dimostri che  $U$  è pari all'integrale della densità di energia  $u = \epsilon_0 E^2/2$  esteso al volume racchiuso tra le due armature.

**P.2.11.**

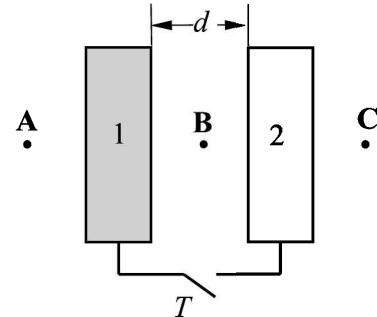
Un condensatore piano è costituito da due armature circolari di raggio  $R$  poste a distanza  $d$  ( $d \ll R$ ). Le armature sono connesse ad un generatore di differenza di potenziale  $\Delta V$ , come mostrato in figura. Nello spazio tra le due armature è presente una densità di carica volumetrica  $\rho$  che varia nella regione  $0 < z < d$  fra le due armature secondo la legge  $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/\lambda)$ , dove  $\rho_0$  e  $\lambda$  sono costanti. Si calcolino:

- l'espressione del campo elettrico tra le armature del condensatore;
- le cariche indotte sulle due armature del condensatore.



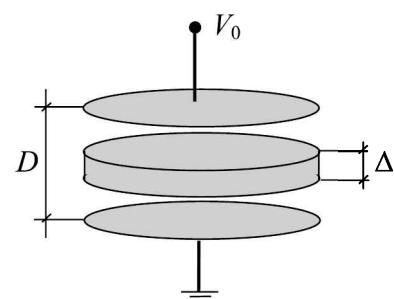
**P.2.12.**

Due piastre conduttrici uguali, di superficie  $S$ , sono disposte parallelamente a distanza  $d$  una dall'altra, come mostrato in figura. Sulla piastra 1 viene posta una carica elettrica  $Q$ . Trascurando gli effetti di bordo, si determinino le cariche elettriche che si localizzano sulle quattro superfici delle due lastre ed il campo elettrostatico nelle regioni A, B e C di figura. Successivamente l'interruttore  $T$  viene chiuso. Ad equilibrio raggiunto, si calcolino le espressioni delle cariche elettriche localizzate sulle quattro superfici nella nuova condizione e la variazione di energia elettrostatica del sistema.



**P.2.13.**

Un condensatore piano, costituito da due armature piane e parallele di area  $S$  poste a distanza  $D$  ( $D \ll \sqrt{S}$ ), è connesso ad un generatore che mantiene una differenza di potenziale  $V_0$  fra le armature. Una lastra di conduttore a facce piane e parallele, di spessore  $\Delta$  ( $\Delta < D$ ), viene inserita internamente al condensatore, come mostrato in figura. Si calcolino la densità superficiale delle cariche indotte sulla lastra e il campo elettrico nelle due zone comprese fra la lastra e le armature.



**P.2.14.**

Si consideri il problema precedente. Si calcoli la forza totale agente sulla lastra posta fra le armature del condensatore ed il lavoro esterno compiuto per inserire la lastra.

**P.2.15.**

Un condensatore sferico ha armature di raggi  $R_1 = 10$  cm ed  $R_2 = 20$  cm, fra le quali vi è il vuoto. Esso viene caricato con un generatore che fornisce una differenza di potenziale  $V_0 = 10^3$  V fra le armature. L'armatura esterna viene espansa fino a raggiungere un raggio  $R'_2 = 30$  cm mantenendo il sistema collegato al generatore. Si calcoli la variazione di energia elettrostatica conseguente all'espansione della armatura. Ad espansione avvenuta, il generatore viene sconnesso, e l'armatura esterna viene riportata al raggio iniziale  $R_2$ . Calcolare la nuova differenza di potenziale tra le armature del condensatore.

**P.2.16.**

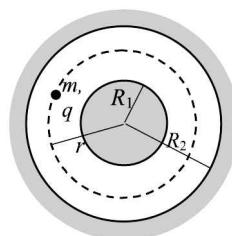
Un condensatore piano, costituito da due armature metalliche di area  $S$  poste ad una distanza  $x = d_1$ , è caricato mediante un generatore che fornisce una differenza di potenziale  $V_0$  fra le due armature. Le armature del condensatore vengono quindi allontanate fino ad una distanza  $x = d_2$ . Trascurando effetti di bordo, si calcolino la forza di attrazione fra le due armature ed il lavoro esterno compiuto per allontanare le armature assumendo che il generatore venga sconnesso dalle armature dopo che queste sono state caricate.

**P.2.17.**

Si ripeta l'esercizio precedente assumendo che il condensatore resti collegato al generatore durante lo spostamento delle armature.

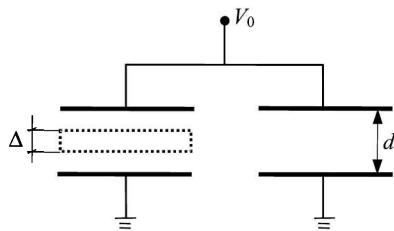
**P.2.18.**

Un condensatore sferico è costituito da due armature di raggi  $R_1 = 20$  cm e  $R_2 = 30$  cm, ed è caricato con una carica  $Q = 10^{-8}$  C. Una particella di massa  $m = 1.672 \times 10^{-27}$  kg e carica  $q = 1.6 \times 10^{-19}$  C ruota uniformemente su una orbita circolare di raggio  $r = 25$  cm, compresa fra le due armature sferiche del condensatore e concentrica ad esse (si veda la figura a lato). Si calcoli la velocità angolare di rotazione della particella nella sua orbita, precisando quale delle due armature del condensatore è a potenziale superiore.

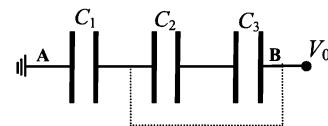


**P.2.19.**

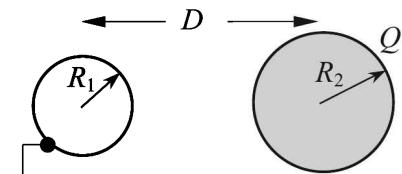
Due condensatori piani uguali, costituiti da due armature circolari di raggio  $R$  poste a distanza  $d$  in vuoto ( $d \ll R$ ), sono collegati in parallelo, come mostrato in figura, e connessi ad un generatore che stabilisce una differenza di potenziale  $V_0$  tra le armature dei condensatori. Si calcolino le espressioni delle cariche elettriche presenti sulle armature dei condensatori. Un disco conduttore, a facce piane e parallele di spessore  $\Delta < d$ , viene successivamente inserito internamente ad uno dei condensatori. Sapendo che i due condensatori restano collegati al generatore esterno, si calcolino le espressioni delle cariche elettriche indotte sulle facce della lastra conduttrice e sulle armature dei due condensatori ad equilibrio raggiunto.

**P.2.20.**

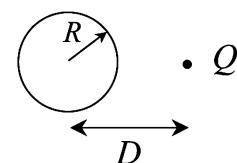
Tre condensatori in serie hanno capacità  $C_1 = 0.5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.8 \mu\text{F}$  e  $C_3 = 0.1 \mu\text{F}$ . Si calcoli la carica elettrica presente sulle armature di ciascun condensatore quando fra i morsetti A e B viene applicata una differenza di potenziale  $V_0 = 100 \text{ V}$ . Successivamente i condensatori vengono scollegati dal generatore ed il morsetto B viene collegato ad un punto del conduttore che unisce  $C_1$  e  $C_2$  (vedi figura). Si calcolino le cariche elettriche presenti sulle armature dei condensatori dopo il collegamento e l'energia dissipata in tale processo.

**P.2.21.**

Due sferette conduttrici, di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , sono poste nel vuoto a distanza  $D$  l'una dall'altra, con  $D \gg R_1, R_2$ . La sferetta di raggio  $R_1$  è collegata a massa, mentre la sferetta di raggio  $R_2$  è isolata e caricata con una carica  $Q$ . Si calcoli la carica elettrica totale  $q$  indotta sulla sferetta di raggio  $R_1$  ed il potenziale della sferetta di raggio  $R_2$ .

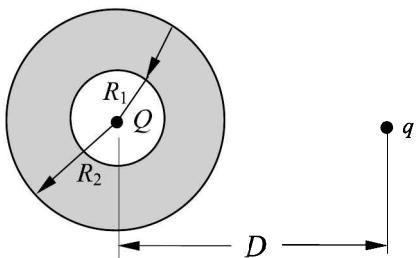
**P.2.22.**

Una sfera conduttrice di raggio  $R$ , isolata ed inizialmente scarica, viene posta in prossimità di una carica elettrica puntiforme  $Q$ , a distanza  $D > R$  dal suo centro. Descrivere qualitativamente le proprietà della distribuzione delle cariche indotte sulla superficie della sfera, e si calcoli il potenziale elettrostatico della sfera.



**P.2.23.**

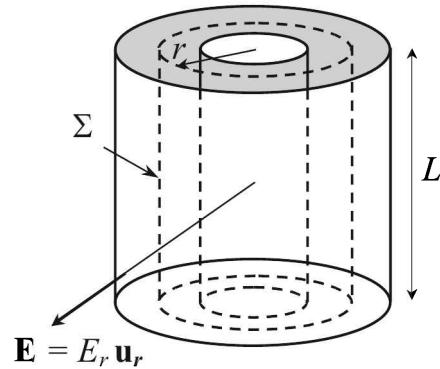
Nel centro di un conduttore sferico cavo, di raggi interno  $R_1$  ed esterno  $R_2$ , isolato e scarico, viene posta una carica elettrica  $Q$ . Una seconda carica elettrica  $q$  è posta esternamente al conduttore ad una distanza  $D > R_2$  da  $Q$ . Si calcolino l'espressione del campo elettrico ad una distanza  $r < R_2$  dalla carica  $Q$  e la distribuzione della carica indotta sulla superficie interna della cavità. Si calcoli poi il potenziale elettrostatico del conduttore.



## 2.2 Soluzioni

### S.2.1.

Per la simmetria cilindrica del problema e trascurando effetti di bordo, il campo elettrico fra le armature del condensatore ha linee di forza radiali e la sua intensità dipende solo dalla distanza  $r$  dall'asse del condensatore, cioè  $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{u}_r$ , dove  $\mathbf{u}_r$  è il versore radiale in coordinate cilindriche. Per il calcolo di  $E_r(r)$  si applichi il teorema di Gauss assumendo come superficie Gaussiana  $\Sigma$  una superficie cilindrica coassiale al condensatore, di altezza  $L$  e raggio  $r$ , con  $R_1 < r < R_2$  (vedi figura). Se  $Q$  è la carica elettrica presente sull'armatura interna ( $r = R_1$ ) del condensatore (e quindi, per induzione completa,  $-Q$  la carica presente sull'armatura esterna  $r = R_2$ ), si avrà perciò:



$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 2\pi r L E_r = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

da cui:

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}. \quad (2)$$

La differenza di potenziale  $\Delta V = V(R_1) - V(R_2)$  fra l'armatura interna ed esterna del condensatore vale dunque:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E_r(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (3)$$

La capacità del condensatore è, infine:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (4)$$

### S.2.2.

Al fine di calcolare la capacità della struttura, supponiamo che inizialmente sia la sfera che il guscio conduttori siano scarichi; successivamente poniamo di caricare la sfera più interna, di raggio  $R_1$ , con una carica  $Q$ ; per induzione elettrostatica completa, la superficie interna del guscio conduttore, di raggio  $R_2$ , si caricherà con carica  $-Q$ ; infine, data la neutralità complessiva del guscio, che inizialmente era scarico, sulla superficie esterna di raggio  $R_3$  dovrà comparire nuovamente una carica  $Q$ . Il campo elettrico generato dalla configurazione di carica così ottenuta può essere calcolato mediante il teorema di Gauss, sfruttando la simmetria sferica della configurazione. Detta  $\Sigma$  una superficie gaussiana sferica, concentrica alla struttura, di raggio variabile  $r$ , il flusso del campo elettrico  $\mathbf{E}$  attraverso  $\Sigma$  sarà pari a:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

dove  $Q_{\Sigma}$  è la quantità di carica contenuta all'interno di  $\Sigma$  ed  $\mathbf{n}$  la normale a tale superficie. Risulta che:

$$Q_{\Sigma} = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ Q, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & R_2 < r < R_3 \\ Q, & r > R_3 \end{cases} \quad (2)$$

Detto  $\mathbf{u}_r$  il versore radiale diretto dal centro della struttura verso l'esterno, a causa della simmetria del sistema dovrà risultare che  $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$ . Sostituendo tale espressione nella (1), si ottiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella precedente espressione, si ottiene l'andamento del campo elettrico:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases} \quad (4)$$

La differenza di potenziale tra i due conduttori è dunque pari a:

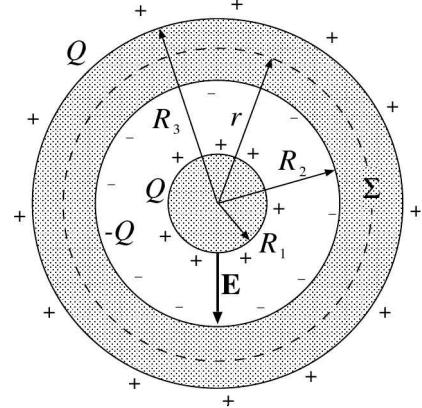
$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}. \quad (5)$$

Si noti che  $\Delta V$  non dipende da  $R_3$ ; la capacità del sistema infine è pari a:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (6)$$

### S.2.3.

La carica elettrica  $Q$  si distribuisce sulla superficie del conduttore in modo che il campo elettrico da essa generato *internamente* al conduttore sia nullo. In tal caso, il potenziale  $V_0$  del conduttore sarà uguale in tutti i suoi punti, ed il rapporto  $C = Q/V_0$ , indipendente



dalla carica  $Q$  posta sul conduttore, rappresenta la capacità del conduttore. Nel caso di conduttore sferico, la distribuzione superficiale di carica che annulla il campo entro il conduttore sarà, per la simmetria sferica del problema, *uniformemente* distribuita sulla superficie di raggio  $r = R$ , con densità  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ . Infatti, applicando il teorema di Gauss nella forma integrale ad una sfera Gaussiana concentrica al conduttore e di raggio generico  $r$ , tenendo conto che le linee di forza del campo elettrico sono radiali, è facile constatare che il campo elettrico generato da tale distribuzione di carica vale  $\mathbf{E}(r) = E_r(r)\mathbf{u}_r$ , dove  $\mathbf{u}_r$  è il versore radiale e:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R. \end{cases} \quad (1)$$

Il potenziale elettrostatico  $V_0$  della sfera, assumendo uguale a zero il potenziale all'infinito, vale perciò:

$$V_0 = \int_R^\infty E_r(r)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (2)$$

e la capacità del conduttore, di conseguenza:

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (3)$$

Per il calcolo dell'energia elettrostatica  $U$  del conduttore si può procedere sostanzialmente in due modi. Il modo più semplice è di ricordare che, per una distribuzione di carica di densità superficiale  $\sigma$  posta su di una superficie  $\Sigma$  ad un potenziale  $V$ , l'energia elettrostatica della distribuzione vale:

$$U = \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \sigma V dS; \quad (4)$$

nel caso di un conduttore la superficie su cui la carica è distribuita è equipotenziale e pertanto  $U$  assume la semplice espressione:

$$U = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (5)$$

Si noti che, in base alla definizione di capacità, l'energia può essere riscritta anche nella forma:

$$U = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2. \quad (6)$$

Un secondo metodo istruttivo ed assai generale per il calcolo dell'energia elettrostatica è quello di utilizzare la nozione di densità di energia elettrostatica  $u$ , che nel vuoto assume la forma  $u = (1/2)\epsilon_0 E^2$ ; l'energia elettrostatica  $U$  è dunque ottenuta integrando la densità di energia  $u$  su *tutto* lo spazio:

$$U = \int_{\text{tutto spazio}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau, \quad (7)$$

dove  $d\tau$  è l'elemento di volume. Nel nostro caso, conviene svolgere l'integrale che compare nella (7) in coordinate sferiche; ricordando che il volume di una corona sferica, compresa fra i raggi  $r$  ed  $r + dr$ , è  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , e che il campo elettrico, dato dalla (1), dipende solo dalla distanza  $r$ , si ha:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}, \quad (8)$$

che coincide con l'espressione (5).

#### S.2.4.

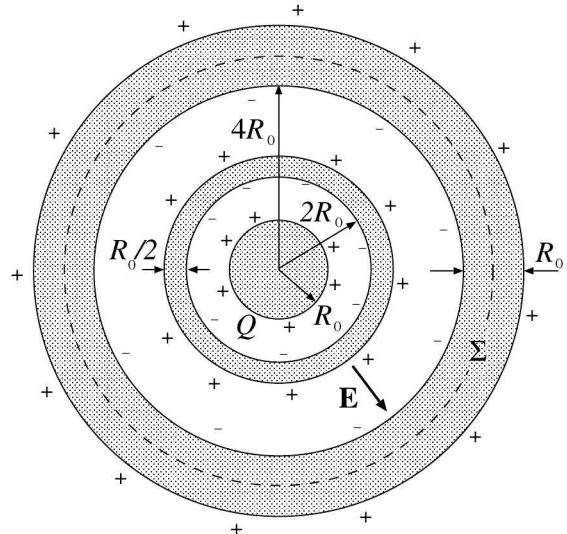
Supponiamo che inizialmente sia la sfera che i gusci conduttori siano scarichi; successivamente la sfera interna, di raggio  $R_0$ , viene caricata con una carica  $Q$ ; per induzione elettrostatica completa, la superficie interna dei due gusci conduttori si caricherà con carica  $-Q$ ; infine, data la neutralità complessiva dei due gusci, che inizialmente erano scarichi, sulla loro superficie esterna dovrà comparire nuovamente una carica  $Q$ .

Il campo elettrico generato da tale configurazione di carica può essere calcolato mediante il teorema di Gauss, sfruttando la simmetria sferica della configurazione. Detta  $\Sigma$  una superficie gaussiana sferica, concentrica alla struttura, di raggio  $r$ , il flusso del campo elettrico  $\mathbf{E}$  attraverso  $\Sigma$  sarà pari a:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \int_\Sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_\Sigma}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

dove  $Q_\Sigma$  è la quantità di carica contenuta all'interno di  $\Sigma$  ed  $\mathbf{n}$  la normale a tale superficie. Risulta che:

$$Q_\Sigma = \begin{cases} 0, & r < R_0 \\ Q, & R_0 < r < 2R_0 \\ 0, & 2R_0 < r < 5R_0/2 \\ Q, & 5R_0/2 < r < 4R_0 \\ 0, & 4R_0 < r < 5R_0 \\ Q, & r > 5R_0 \end{cases} \quad (2)$$



Detto  $\mathbf{u}_r$  il versore radiale diretto dal centro della struttura verso l'esterno, a causa della simmetria del sistema dovrà risultare che  $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$ . Sostituendo tale espressione nella (1), si ottiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_\Sigma}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella precedente espressione, si ottiene l'andamento del campo elettrico:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_0 < r < 2R_0 \\ 0 & 2R_0 < r < 5R_0/2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & 5R_0/2 < r < 4R_0 \\ 0 & 4R_0 < r < 5R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > 5R_0 \end{cases} \quad (4)$$

La differenza di potenziale tra la sfera interna ed il guscio più esterno sarà dunque pari a:

$$\Delta V = \int_{R_0}^{4R_0} E(r) dr = \int_{R_0}^{2R_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{5R_0/2}^{4R_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr, \quad (5)$$

dove si è tenuto conto della nullità di  $E(r)$  per  $2R_0 < r < 5R_0/2$ . Dalla precedente espressione si ottiene:

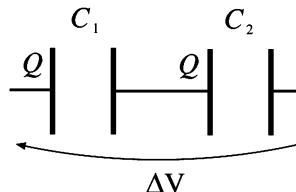
$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{2R_0} \right) + \left( \frac{2}{5R_0} - \frac{1}{4R_0} \right) \right] = \frac{13Q}{80\pi\epsilon_0 R_0}. \quad (6)$$

Il sistema di conduttori può anche essere visto come la serie di due condensatori sferici; difatti la differenza di potenziale totale  $\Delta V$  ai capi della struttura è pari a:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2, \quad (7)$$

dove  $\Delta V_1$  è la differenza di potenziale tra la sfera interna ed il guscio intermedio, mentre  $\Delta V_2$  è la differenza di potenziale tra il guscio intermedio ed il guscio esterno. Schematizzando l'insieme della sfera interna e del guscio intermedio come un condensatore di capacità  $C_1$  e considerando l'insieme del guscio intermedio e del guscio esterno come un condensatore di capacità  $C_2$ , potremo allora riscrivere la precedente relazione nella forma:

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left[ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right] = \frac{Q}{C}, \quad (8)$$



essendo

$$C = \left[ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]^{-1} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \quad (9)$$

la capacità equivalente della serie dei due condensatori. Ricordando che la capacità di un condensatore sferico di raggio interno  $R_1$  ed esterno  $R_2$  vale:

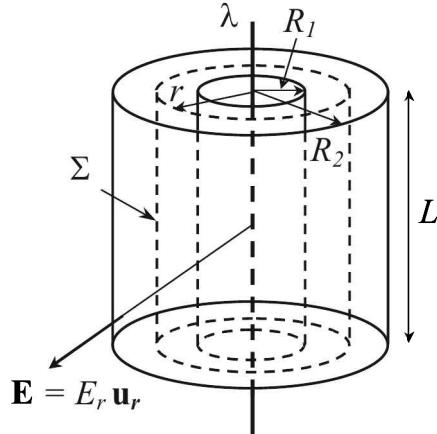
$$C_{\text{sferico}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad (10)$$

si ottiene  $C_1 = 8\pi\epsilon_0 R_0$  e  $C_2 = 80\pi\epsilon_0 R_0/3$ ; sostituendo tali valori nella espressione della capacità equivalente, otteniamo  $C = 80\pi\epsilon_0 R_0/13$ . Da tale valore, si ricava poi la differenza di potenziale complessiva ai capi della serie dei due condensatori, che risulta pari a  $\Delta V = Q/C = 13Q/80\pi\epsilon_0 R_0$ , in accordo con quanto già determinato in precedenza.

### S.2.5.

Indichiamo con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le densità delle cariche superficiali indotte sulle due superfici cilindriche, di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , rispettivamente, del conduttore cavo. Per la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico avrà linee di forza radiali, ed il modulo del campo elettrico dipenderà solamente dalla distanza  $r$  dall'asse del cilindro, cioè potremo scrivere  $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{u}_r$ , dove  $\mathbf{u}_r$  è il versore radiale in geometria cilindrica (vedi figura). Inoltre, sempre per considerazioni di simmetria sarà lecito assumere che  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  siano uniformi sulle superfici del conduttore cilindrico. Per determinare  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e l'espressione del campo elettrico  $E_r(r)$ , consideriamo una superficie Gaussiana cilindrica  $\Sigma$ , coassiale col filo cavo, di raggio  $r$  ed altezza  $L$ , come mostrato in figura. Se applichiamo il teorema di Gauss alla superficie  $\Sigma$ , riconoscendo che il flusso del campo elettrico attraverso  $\Sigma$  è pari a  $2\pi r L E_r(r)$ , potremo scrivere:

$$E_r(r) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0 2\pi L r}, \quad (1)$$



dove  $Q(\Sigma)$  è la carica elettrica totale contenuta internamente alla superficie Gaussiana  $\Sigma$ . Evidentemente, il valore di  $Q(\Sigma)$  dipenderà dal raggio  $r$  di  $\Sigma$ , e si avrà precisamente:

$$Q(\Sigma) = \begin{cases} \lambda L & r < R_1, \\ \lambda L + 2\pi R_1 L \sigma_1 & R_1 < r < R_2, \\ \lambda L + 2\pi R_1 L \sigma_1 + 2\pi R_2 L \sigma_2 & r > R_2. \end{cases} \quad (2)$$

Si noti che, dovendo essere nullo il campo elettrico internamente al conduttore, e cioè  $E_r = 0$  per  $R_1 < r < R_2$ , dalla (1) discende che deve essere  $Q(\Sigma) = 0$  per  $R_1 < r < R_2$ .

Dalla (2) si determina dunque la seguente espressione per la densità superficiale di carica  $\sigma_1$  sulla superficie interna del conduttore:

$$\sigma_1 = -\frac{\lambda}{2\pi R_1}. \quad (3)$$

Per calcolare la densità superficiale di carica  $\sigma_2$ , occorre imporre che il conduttore abbia una carica totale nulla: infatti esso è isolato ed inizialmente scarico. La carica totale, localizzata sulle superfici laterali interna ed esterna del conduttore cilindrico, deve dunque essere uguale a zero, cioè:

$$2\pi R_1 \sigma_1 + 2\pi R_2 \sigma_2 = 0. \quad (4)$$

Sostituendo l'espressione di  $\sigma_1$  data dalla (3) nella (4), si ottiene infine per  $\sigma_2$  la seguente espressione:

$$\sigma_2 = \frac{\lambda}{2\pi R_2}. \quad (5)$$

Infine, dalla (1) e (2) possiamo determinare l'espressione del campo elettrico:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & r < R_1, \\ 0 & R_1 < r < R_2, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & r > R_2. \end{cases} \quad (6)$$

### S.2.6.

Indichiamo con  $Q_1$  e con  $Q_2 = Q - Q_1$  le cariche elettriche presenti sui due conduttori sferici e con  $V_1$  e  $V_2$  i loro potenziali elettrostatici. L'energia elettrostatica  $U$  del sistema, pari alla somma delle energie dei singoli conduttori, è data da:

$$U = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2. \quad (1)$$

Se i due conduttori sono posti a grande distanza l'uno dall'altro, in modo da poter trascurare la mutua induzione elettrostatica fra essi, si avrà  $V_1 \simeq Q_1/(4\pi\epsilon_0 R_1) = Q_1/C_1$  e  $V_2 \simeq Q_2/(4\pi\epsilon_0 R_2) = Q_2/C_2$ , essendo  $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$  e  $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$  le capacità dei due singoli conduttori sferici. Sostituendo tali espressioni dei potenziali nella equazione (1), si avrà dunque:

$$U = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{(Q - Q_1)^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (2)$$

Se consideriamo la carica totale  $Q$  presente sui due conduttori costante, la (2) mostra che l'energia elettrostatica del sistema è una funzione della sola carica  $Q_1$  presente sul conduttore sferico di raggio  $R_1$ , cioè  $U = U(Q_1)$ . Il calcolo del valore di  $Q_1$  che rende minima l'energia elettrostatica del sistema equivale dunque alla determinazione del minimo della funzione  $U = U(Q_1)$ . La condizione di stazionarietà:

$$\frac{dU}{dQ_1} = 0 \quad (3)$$

fornisce la seguente equazione per  $Q_1$ :

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q - Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0, \quad (4)$$

da cui:

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q. \quad (5)$$

Si può facilmente constatare che il punto di stazionarietà, dato dalla equazione (5), corrisponde effettivamente ad un punto di minimo per la energia  $U = U(Q_1)$ . L'espressione corrispondente di  $Q_2 = Q - Q_1$  che si ottiene è formalmente uguale alla (5) pur di sostituire gli indici 1 e 2. I potenziali dei due conduttori,  $V_1 = Q_1/(4\pi\epsilon_0 R_1)$  e  $V_2 = Q_1/(4\pi\epsilon_0 R_2)$ , nella condizione di minimo di energia valgono infine:

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}. \quad (6)$$

Il risultato espresso dalla (6) merita un commento: esso mostra che, a parità di carica elettrica totale, la ripartizione di carica fra i due conduttori che rende minima l'energia elettrostatica del sistema è quella che rende uguali i potenziali dei conduttori stessi. Tale risultato è assai generale, e si può dimostrare essere valido per un sistema di  $N$  conduttori di forma arbitraria.

### S.2.7.

Indichiamo con  $Q'_1$  e  $Q'_2$  le cariche elettriche possedute dai conduttori e con  $V'_1$  e  $V'_2$  i loro potenziali elettrici dopo il collegamento elettrico; si noti che, una volta collegate, le due sfere formano un unico sistema conduttore, la cui superficie deve essere equipotenziale. Inoltre la carica complessiva del sistema deve mantenersi costante. Pertanto le condizioni da imporre per risolvere il problema sono la conservazione della carica elettrica e l'equipotenzialità dei due conduttori dopo il collegamento. Poiché il filo che collega i due conduttori sferici ha una capacità trascurabile, e quindi la carica localizzata su di esso è trascurabile, potremo scrivere:

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2. \quad (1)$$

La condizione di equipotenzialità comporta la relazione:

$$V'_1 = V'_2; \quad (2)$$

per il calcolo dei potenziali  $V'_1$  e  $V'_2$  dei due conduttori, osserviamo che, se trascuriamo la loro mutua induzione elettrostatica (ciò è lecito essendo la distanza dei conduttori grande rispetto ai loro raggi di curvatura), potremo scrivere semplicemente  $V'_1 = Q'_1/C_1$  e  $V'_2 = Q'_2/C_2$ , dove  $C_1$  e  $C_2$  sono le capacità dei due conduttori sferici, presi singolarmente. Poiché la capacità di un conduttore sferico di raggio  $R$  è  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ , si avrà:

$$\frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (3)$$

Le equazioni (1) e (3) costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite  $Q'_1$  e  $Q'_2$ , che risolto fornisce:

$$Q'_1 = \frac{R_1(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2} \quad (4)$$

$$Q'_2 = \frac{R_2(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2}. \quad (5)$$

Si noti che tale risultato coincide con quanto ottenuto nel precedente esercizio; pertanto, sulla scorta dei risultati già ottenuti, si deduce che la carica complessiva, dopo il collegamento tra i conduttori, si distribuisce in modo da minimizzare l'energia elettrostatica del sistema.

L'energia dissipata nel collegamento dei conduttori è uguale alla differenza tra l'energia elettrostatica  $U$  del sistema prima del collegamento,  $U_i$ , e dopo il collegamento,  $U_f$ . Ricordando che l'energia elettrostatica di un sistema di  $N$  conduttori, carichi con cariche elettriche  $Q_k$  e potenziali  $V_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), è  $U = (1/2) \sum_{k=1}^N V_k Q_k$  e tenuto conto della definizione di capacità, si avrà nel nostro caso:

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} \quad (6)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \frac{Q'^1_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q'^2_2^2}{C_2} = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}, \quad (7)$$

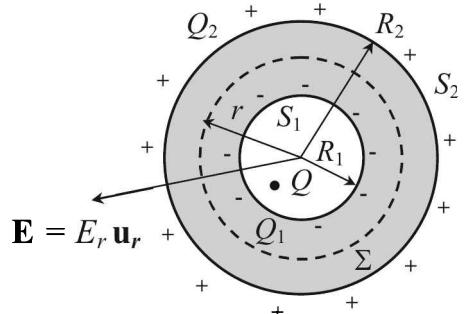
e quindi per l'energia dissipata si ha:

$$U_i - U_f = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(Q_1 R_2 - Q_2 R_1)^2}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)}. \quad (8)$$

### S.2.8.

Per rispondere alle domande del problema, occorre anzitutto determinare la distribuzione delle cariche indotte sul conduttore. La presenza della carica puntiforme  $Q$  internamente alla cavità del conduttore sferico determina, per il fenomeno dell'induzione elettrostatica, la presenza di cariche superficiali, distribuite con densità superficiali  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , sulle due superfici sferiche  $S_1$  ed  $S_2$ , interna ed esterna, rispettivamente (vedi figura). Le cariche indotte totali,  $Q_1$  e  $Q_2$ , presenti sulle due superfici del conduttore, saranno date da:

$$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 dS_1, \quad Q_2 = \int_{S_2} \sigma_2 dS_2. \quad (1)$$



Il problema del calcolo delle densità superficiali di carica,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , si può formulare nel seguente modo: le distribuzioni delle cariche indotte su  $S_1$  e  $S_2$  saranno tali che il campo

elettrico totale, generato dalle dette cariche indotte e dalla carica puntiforme  $Q$ , sia nullo internamente al conduttore o, che è lo stesso, che il potenziale elettrostatico corrispondente sia costante in tutta la regione del conduttore. E' facile mostrare che, indipendentemente dalla posizione della carica  $Q$  nella cavità del conduttore, è sempre  $Q_1 = -Q$  e  $Q_2 = Q$ . Si consideri infatti una superficie Gaussiana  $\Sigma$ , interamente contenuta dentro il conduttore, ad esempio una sfera concentrica di raggio  $r$ , con  $R_1 < r < R_2$  (vedi figura), e si applichi il teorema di Gauss in forma integrale a tale superficie. Poiché sui punti di tale superficie, interna al conduttore, il campo elettrico è zero, necessariamente discende che la carica totale  $Q(\Sigma)$  contenuta internamente alla superficie  $\Sigma$  deve essere zero. Tale carica comprende la carica puntiforme  $Q$  e l'insieme di cariche indotte sulla superficie  $S_1$ , e cioè  $Q(\Sigma) = Q + Q_1 = 0$ . Del resto, poiché il conduttore è isolato ed inizialmente scarico, la sua carica elettrica totale si deve conservare, e dunque  $Q_1 + Q_2 = 0$ , cioè  $Q_2 = -Q_1 = Q$ . Per determinare la distribuzione di carica  $\sigma_2$  sulla superficie esterna, osserviamo che, per il principio dello schermo elettrostatico, tale distribuzione è *indipendente* dalla distribuzione delle cariche elettriche presenti sulla superficie  $S_1$  e dalla posizione della carica puntiforme  $Q$ : la densità superficiale  $\sigma_2$  si distribuirà in modo che la superficie  $r = R_2$  del conduttore sia equipotenziale. Per una superficie *sferica*, ciò corrisponde ad una distribuzione uniforme di carica, e cioè:

$$\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2^2}. \quad (2)$$

Applicando il teorema di Gauss ad una sfera  $\Sigma$ , concentrica col conduttore e di raggio  $r > R_2$ , si ottiene facilmente che, per  $r > R_2$ :

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3)$$

e che il potenziale elettrostatico corrispondente del conduttore è (assumendo, come sempre, il potenziale nullo all'infinito):

$$V_0 = \int_{R_2}^{\infty} E_r(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (4)$$

Si noti che i risultati espressi dalle equazioni (2), (3) e (4) hanno validità generale, per una posizione *arbitraria* della carica puntiforme  $Q$  entro la cavità del conduttore. Veniamo ora, invece, alla determinazione della densità di carica  $\sigma_1$  sulla superficie interna del conduttore. Il problema della determinazione di  $\sigma_1$  si può formulare nel seguente modo: le cariche indotte sulla superficie  $r = R_1$  si disporranno in modo che il campo elettrico generato da dette cariche e dalla carica puntiforme  $Q$  posta nella cavità sia zero per  $r > R_1$  (azione di schermo). In generale, tale problema non è di facile soluzione, e sarebbe *sbagliato* supporre che, in generale, la carica indotta si distribuisca uniformemente su  $S_1$ , e cioè che  $\sigma_1$  sia uniforme. L'unico caso in cui ciò accade è quello in cui la carica puntiforme  $Q$  è posta esattamente al centro della cavità. In tal caso, infatti, una distribuzione uniforme per  $\sigma_1$ , con  $\sigma_1 = Q/(4\pi R_1^2)$ , scherma esattamente la carica puntiforme.

Siamo ora in grado di rispondere alle domande del problema.

- (i) L'affermazione è manifestamente falsa: il campo elettrico è nullo nella regione interna al conduttore, ma non nella regione  $r > R_2$ .
- (ii) L'affermazione è falsa: il campo elettrico è nullo nella regione interna al conduttore,

ma non nella cavità: l'effetto di schermo agisce cioè per  $r > R_1$ , non per  $r < R_1$ .

(iii) L'affermazione è sempre vera, come discusso in precedenza.

(iv) L'affermazione è falsa. Mentre è sempre vero che  $\sigma_2$  è uniforme, le cariche indotte sulla superficie interna  $S_1$  si distribuiranno con una densità  $\sigma_1$  uniforme se e solo se la carica puntiforme è posta al centro della cavità.

(v) L'affermazione è corretta.

Nel caso in cui la carica puntiforme è posta al centro della cavità, la densità di carica indotta su  $S_1$  è uniforme,  $\sigma_1 = -Q/(4\pi R_1^2)$ , e l'espressione del campo elettrico si può calcolare applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica Gaussiana di raggio  $r$  arbitrario (vedi figura), ottenendo:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < R_1, \\ 0 & R_1 < r < R_2, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_2. \end{cases} \quad (5)$$

Si osservi che il campo elettrico è discontinuo sulle superfici del conduttore  $S_1$  e  $S_2$ , e tali discontinuità sono uguali a  $\sigma_1/\epsilon_0$  e  $\sigma_2/\epsilon_0$ , rispettivamente, in accordo col teorema di Coulomb per i conduttori.

### S.2.9.

Nel caso in cui il conduttore sferico sia mantenuto a potenziale nullo, le considerazioni fatte nel problema precedente vanno modificate. In particolare, la condizione che il potenziale del conduttore sia nullo implica che, questa volta, la densità di carica superficiale  $\sigma_2$  delle cariche indotte sulla superficie esterna  $S_2$  del conduttore sia zero, e che il campo elettrico sia zero quindi non solo internamente al conduttore, cioè per  $R_1 < r < R_2$ , ma anche per  $r > R_2$ . La distribuzione di carica superficiale  $\sigma_1$  sulla superficie conduttrice interna  $S_1$  ed il campo elettrico presente internamente alla cavità *non* vengono invece modificati dalla condizione che il potenziale del conduttore sia nullo. Ciò premesso, è facile convincersi che: l'affermazione (i) è corretta; l'affermazione (ii) è errata; l'affermazione (iii) è corretta; l'affermazione (iv) è errata; l'affermazione (v) è manifestamente errata (il conduttore è ora a potenziale zero).

Nel caso particolare in cui la carica puntiforme è posta al centro della cavità,  $\sigma_1$  si distribuisce uniformemente su  $S_1$  e l'espressione del campo elettrico è:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < R_1, \\ 0 & r > R_1. \end{cases} \quad (1)$$

### S.2.10.

Se  $Q$  è la carica presente sulle armature di un condensatore di capacità  $C$ , l'energia elettrostatica che è necessario spendere per caricare il condensatore (che quindi risulta

immagazzinata nel condensatore) è pari a:

$$U = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1)$$

Nel caso di un condensatore piano, costituito da due armature piane e parallele, di area  $S$  e poste a distanza  $d$  (con  $d \ll \sqrt{S}$ ), la capacità  $C$  è data da:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}, \quad (2)$$

per cui, dalle (1) e (2), si ha per il condensatore piano:

$$U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}. \quad (3)$$

Introducendo la densità di energia  $u = (1/2)\epsilon_0 E^2$  del campo elettrico, l'energia complessiva associata al campo sarà invece:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon_0 E^2; \quad (4)$$

tal quantità rappresenta l'energia necessaria per creare la distribuzione di campo elettrostatico all'interno del condensatore. Poiché in un condensatore piano, trascurando effetti di bordo, il campo elettrico è uniforme e pari a  $E = Q/(\epsilon_0 S)$ , detto  $\tau = Sd$  il volume della regione di spazio compresa fra le armature, si ha:

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{S^2 \epsilon_0^2} Sd = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S} = U; \quad (5)$$

quindi l'energia necessaria a caricare il condensatore equivale all'energia immagazzinata nel campo elettrostatico, nella regione racchiusa dal condensatore stesso.

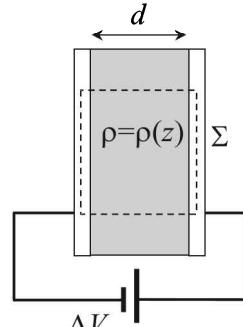
### S.2.11.

Poiché si ha una distribuzione di carica in geometria piana, il campo elettrico fra le armature del condensatore è diretto lungo l'asse  $z$  del condensatore e la sua intensità dipende, al più, dalla sola coordinata  $z$ , cioè  $\mathbf{E} = E_z(z) \mathbf{u}_z$ . Per il calcolo del campo elettrico  $E_z(z)$  nella regione fra le armature del condensatore ( $0 < z < d$ ), conviene utilizzare la forma differenziale del teorema di Gauss,  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , dove  $\rho$  è la densità volumetrica di carica presente fra le armature. Poiché nel nostro caso  $\text{div } \mathbf{E} = dE_z/dz$ , si ha con ciò:

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \exp(-z/\lambda). \quad (1)$$

Se integriamo l'equazione (1), si ottiene:

$$E_z(z) = -\frac{\lambda \rho_0}{\epsilon_0} \exp(-z/\lambda) + A, \quad (2)$$



dove  $A$  è una costante di integrazione. Per il calcolo di  $A$  osserviamo che, poiché il condensatore è connesso ad un generatore che impone ai capi del condensatore una differenza di potenziale  $\Delta V$ , deve aversi:

$$V(d) - V(0) = - \int_0^d E_z(z) dz = \Delta V. \quad (3)$$

Sostituendo l'espressione del campo elettrico, data dalla equazione (2), nella equazione (3) e svolgendo l'integrale si ottiene:

$$\frac{\rho_0 \lambda^2}{\epsilon_0} [1 - \exp(-d/\lambda)] - Ad = \Delta V, \quad (4)$$

da cui:

$$A = \frac{\rho_0 \lambda^2}{\epsilon_0 d} [1 - \exp(-d/\lambda)] - \frac{\Delta V}{d}. \quad (5)$$

Il campo elettrico fra le due armature vale, in definitiva:

$$E_z(z) = -\frac{\Delta V}{d} + \frac{\rho_0 \lambda^2}{\epsilon_0 d} [1 - \exp(-d/\lambda)] - \frac{\rho_0 \lambda}{\epsilon_0} \exp(-z/\lambda). \quad (6)$$

Le densità superficiali delle cariche elettriche indotte sulle due superfici delle armature del condensatore, poste a  $z = 0$  e  $z = d$ , sono date, per il teorema di Coulomb, da:

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_z(z = 0^+) = -\frac{\Delta V \epsilon_0}{d} + \frac{\rho_0 \lambda^2}{d} [1 - \exp(-d/\lambda)] - \rho_0 \lambda \quad (7)$$

$$\sigma_2 = -\epsilon_0 E_z(z = d^-) = \frac{\Delta V \epsilon_0}{d} - \frac{\rho_0 \lambda^2}{d} [1 - \exp(-d/\lambda)] + \rho_0 \lambda \exp(-d/\lambda), \quad (8)$$

e le cariche elettriche indotte totali, di conseguenza, sono:

$$Q_1 = \pi R^2 \sigma_1, \quad Q_2 = \pi R^2 \sigma_2. \quad (9)$$

Si noti che  $Q_1 \neq Q_2$ , cioè le due armature non sono in induzione completa. Ciò è dovuto alla presenza di carica nella regione compresa tra le due armature; si noti che, applicando il teorema di Gauss in forma integrale alla superficie cilindrica  $\Sigma$  di figura, con le basi interne ai due conduttori, si ottiene che il flusso del campo attraverso  $\Sigma$  deve risultare nullo. Infatti il campo  $\mathbf{E}$  lungo le basi di  $\Sigma$  è nullo essendo all'interno del conduttore, mentre il flusso lungo la superficie laterale si annulla essendo  $\mathbf{E}$  parallelo alla superficie stessa. Ciò comporta che la carica elettrica totale contenuta internamente a  $\Sigma$  sia nulla, e cioè che:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \int_0^d \rho(z) dz = 0 \quad (10)$$

come si può verificare considerando le espressioni (7) ed (8).

### S.2.12.

Si consideri anzitutto il sistema dei due conduttori sconnessi, e si indichino con  $\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2$  le densità delle cariche elettriche superficiali che si distribuiscono sulle quattro facce piane dei due conduttori (si veda la figura). Le densità superficiali si calcolano osservando

che:

- La carica totale sul conduttore 1 è  $Q$ , per cui:

$$\sigma_1 + \sigma'_1 = \frac{Q}{S}. \quad (1)$$

- Il conduttore 2 è scarico, e perciò:

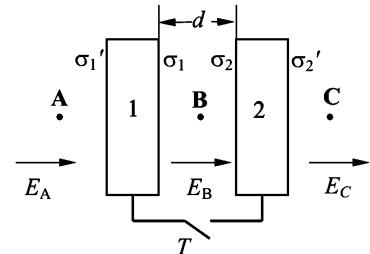
$$\sigma_2 + \sigma'_2 = 0. \quad (2)$$

- Il campo elettrico internamente al conduttore 1,  $E_1$ , è nullo, cioè:

$$E_1 = \frac{\sigma'_1 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma'_2}{2\epsilon_0} = 0, \quad (3)$$

da cui, usando la (2):

$$\sigma'_1 = \sigma_1. \quad (4)$$



Si noti che il campo  $E_1$  è stato calcolato come sovrapposizione dei campi generati dai quattro piani di carica, trascurando effetti di bordo.

- Il campo elettrico  $E_2$ , interno al conduttore 2, è nullo, e dunque:

$$E_2 = \frac{\sigma'_1 + \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma'_2}{2\epsilon_0} = 0, \quad (5)$$

che può scriversi, mediante le (2) e (4), nella forma:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0. \quad (6)$$

Le (1,2,4,6) costituiscono quattro equazioni nelle quattro incognite  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$ ,  $\sigma_2$ , e  $\sigma'_2$ , che risolte danno:

$$\sigma_1 = \sigma'_1 = \frac{Q}{2S} \quad (7)$$

$$\sigma_2 = -\sigma'_2 = -\frac{Q}{2S}. \quad (8)$$

I campi elettrici  $E_A$ ,  $E_B$  ed  $E_C$  nelle tre regioni  $A$ ,  $B$  e  $C$  di figura si calcolano mediante il principio di sovrapposizione come somma dei campi generati dai quattro piani di cariche. Si ha facilmente:

$$E_A = -\frac{\sigma_1 + \sigma'_1 + \sigma_2 + \sigma'_2}{2\epsilon_0} = -\frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \quad (9)$$

$$E_B = \frac{\sigma_1 + \sigma'_1 - \sigma_2 - \sigma'_2}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \quad (10)$$

$$E_C = \frac{\sigma_1 + \sigma'_1 + \sigma_2 + \sigma'_2}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}. \quad (11)$$

avendo assunto positivo il campo elettrico se orientato dal conduttore 1 verso il conduttore 2.

Si supponga ora di chiudere l'interruttore  $T$ , per cui i due conduttori si portano allo stesso potenziale. In tal caso il campo elettrico nella regione di spazio compresa fra i due conduttori (regione B) è nullo: se così non fosse, per simmetria esso sarebbe uniforme e diretto in direzione perpendicolare alle facce dei conduttori, per cui la differenza di potenziale tra essi, valutata come integrale di campo, sarebbe non nulla. Come conseguenza, per il teorema di Coulomb si può subito concludere che le densità superficiali delle cariche indotte  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sulle due superfici interne dei conduttori sono nulle, cioè:

$$\sigma_1 = 0 \quad , \quad \sigma_2 = 0. \quad (12)$$

Le densità di cariche indotte  $\sigma'_1$  e  $\sigma'_2$  sulle altre due facce piane dei conduttori si determinano imponendo la conservazione della carica elettrica, e cioè che  $\sigma'_1 + \sigma'_2 = Q/S$ , e che il campo elettrico generato dai due strati di carica sia nullo nella regione di spazio interna ai due conduttori, e cioè che  $\sigma'_1 = \sigma'_2$ . Si ha così:

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{Q}{2S}. \quad (13)$$

Si può ottenere lo stesso risultato osservando che, dopo la chiusura dell'interruttore, la carica  $Q$  non può che ripartirsi nello stesso modo sulle due lastre 1 e 2, cioè:

$$\sigma_1 + \sigma'_1 = \frac{Q}{2S}, \quad (14)$$

$$\sigma_2 + \sigma'_2 = \frac{Q}{2S}. \quad (15)$$

Poichè i campi all'interno dei conduttori 1 e 2 sono nulli, le relazioni (3) e (5) continuano a valere. Le relazioni (3), (5), (14) e (15) costituiscono un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma'_2$  che ha come soluzione le (12) e (13).

Si noti che la distribuzione superficiale di cariche indotte dalla chiusura dell'interruttore genera, nelle regioni A e C esterne ai due conduttori, un campo elettrico esattamente uguale a quello che si aveva prima della chiusura dell'interruttore. Dal punto di vista del campo elettrostatico, la chiusura dell'interruttore comporta quindi la scomparsa del campo elettrico nella regione B. L'energia dissipata a seguito della chiusura dell'interruttore è quindi uguale all'energia elettrostatica inizialmente presente nella regione B, e cioè:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_B^2 S d = \frac{Q^2 d}{8\epsilon_0 S}. \quad (16)$$

### S.2.13.

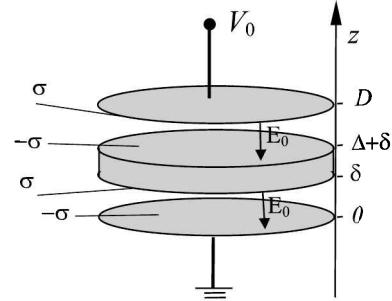
Dopo l'inserimento della lastra, per induzione elettrostatica si inducono sulle due facce della lastra delle cariche superficiali, di segno opposto a quelle presenti sulle armature del condensatore ad esse affacciate, di densità opposte,  $\sigma$  e  $-\sigma$ ,

per mantenere la neutralità della lastra. Con riferimento alla figura, il campo elettrico  $E$  nella regione del condensatore compresa tra le armature e le lastre, cioè per  $0 < z < \delta$  e per  $\delta + \Delta < z < D$ , è dato da  $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ , in accordo con il teorema di Coulomb. Il valore della densità  $\sigma$  di cariche indotte si determina perciò imponendo che la differenza di potenziale fra le armature sia uguale al valore  $V_0$  imposto dal generatore, e cioè:

$$V_0 = E_0 \delta + E_0(D - \Delta - \delta), \quad (1)$$

da cui:

$$E_0 = \frac{V_0}{D - \Delta} , \quad \sigma = \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon_0 V_0}{D - \Delta}. \quad (2)$$



### S.2.14.

Per il calcolo della forza agente sulla lastra, osserviamo che su ciascuna delle due facce si esercita una pressione elettrostatica pari a  $\sigma^2/(2\epsilon_0)$ . Quindi sulla superficie posta in  $z = \delta$  (vedi la figura dell'esercizio precedente) agisce una forza  $\mathbf{F}_1$  data da:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z, \quad (1)$$

mentre sulla superficie posta in  $z = \Delta + \delta$  agisce una forza  $\mathbf{F}_2$  data da:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z. \quad (2)$$

Quindi la forza totale agente sulla lastra,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , è nulla.

Per il calcolo del lavoro esterno  $\mathcal{L}_{ext}$  compiuto per inserire la lastra, osserviamo che, per il teorema dell'energia cinetica, supponendo all'inizio ed alla fine nulla l'energia cinetica della lastra, deve avversi:

$$\mathcal{L}_{ext} + \mathcal{L}_c = 0, \quad (3)$$

dove  $\mathcal{L}_c$  è il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico agenti sulla lastra mentre essa viene inserita. Il sistema in considerazione non è isolato, dato che un generatore di tensione è collegato al condensatore per tutta la durata del processo di inserimento della lastra. Quindi il lavoro meccanico compiuto dalle forze del campo è compiuto non solo a spese dell'energia elettrostatica del condensatore, ma anche a spese del generatore esterno. Il principio di conservazione dell'energia si scrive quindi come segue:

$$\mathcal{L}_c + \Delta U_V = \mathcal{L}_{gen}, \quad (4)$$

dove  $\Delta U_V$  rappresenta la variazione dell'energia elettrostatica del condensatore mantenuto a una differenza di potenziale  $V_0$  costante, e  $\mathcal{L}_{gen}$  è il lavoro compiuto dal generatore esterno. Calcoliamo dapprima  $\Delta U_V$ . Prima dell'inserimento della lastra l'energia elettrostatica del condensatore è data da:

$$U_{V,i} = \frac{1}{2} Q' V_0, \quad (5)$$

avendo indicato con  $Q'$  la carica presente inizialmente sulle armature del condensatore. Dopo l'inserimento della lastra si ha:

$$U_{V,f} = \frac{1}{2} Q V_0, \quad (6)$$

dove  $Q$  rappresenta la carica sulle armature del condensatore dopo l'inserimento della lastra. Si ha quindi:

$$\Delta U_V = U_{V,f} - U_{V,i} = \frac{1}{2} V_0(Q - Q'). \quad (7)$$

Calcoliamo ora il lavoro compiuto dal generatore. Dato che a seguito dell'inserimento della lastra la carica sulle armature del condensatore è variata da  $Q'$  a  $Q$ , il lavoro erogato dal generatore è dato da:

$$\mathcal{L}_{gen} = V_0(Q - Q'). \quad (8)$$

Dalle relazioni (4), (7) e (8) si ha:

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{gen} - \Delta U_V = \frac{1}{2} V_0(Q - Q') = \Delta U_V. \quad (9)$$

Quindi, dalle relazioni (3) e (9) si ricava il lavoro esterno:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = -\Delta U_V. \quad (10)$$

Calcoliamo esplicitamente  $\Delta U_V$ . La carica presente sulle armature del condensatore prima dell'inserimento della lastra è data da:

$$Q' = C' V_0 = \epsilon_0 \frac{S}{D} V_0. \quad (11)$$

Dopo l'inserimento della lastra si hanno due condensatori in serie la cui capacità totale  $C$  è data da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{D - \Delta - \delta}{\epsilon_0 S} + \frac{\delta}{\epsilon_0 S} = \frac{D - \Delta}{\epsilon_0 S}, \\ C &= \epsilon_0 \frac{S}{D - \Delta}. \end{aligned} \quad (12)$$

La carica presente sulle armature dopo l'inserimento della lastra è quindi data da:

$$Q = C V_0 = \epsilon_0 \frac{S}{D - \Delta} V_0. \quad (13)$$

La variazione dell'energia elettrostatica è quindi:

$$\Delta U_V = \frac{1}{2} V_0(Q - Q') = \frac{1}{2} V_0^2 \epsilon_0 S \left( \frac{1}{D - \Delta} - \frac{1}{D} \right). \quad (14)$$

Quindi:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\Delta U_V = -\frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2} \frac{\Delta}{D(D-\Delta)}. \quad (15)$$

Si osservi che, poiché  $\mathcal{L}_{ext}$  è negativo, la lastra è risucchiata dentro il condensatore.

### S.2.15.

Indicando con  $C_i$  e  $C_f$  le capacità del condensatore sferico nella condizione iniziale e finale, la variazione di energia elettrostatica del condensatore a seguito della espansione dell'armatura sarà data da:

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_f V_0^2 - \frac{1}{2} C_i V_0^2 = \frac{1}{2} V_0^2 \left( \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R'_2}{R'_2 - R_1} - \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \simeq -2.78 \times 10^{-6} \text{ J}, \quad (1)$$

dove abbiamo utilizzato, per la capacità di un condensatore sferico di raggi interno  $R_1$  ed esterno  $R_2$ , l'espressione  $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ .

Ad espansione avvenuta, la carica presente sulle armature del condensatore varrà:

$$Q_f = V_0 C_f = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R'_2}{R'_2 - R_1} V_0. \quad (2)$$

Se il condensatore viene scollegato al generatore e l'armatura esterna contratta nella sua posizione iniziale, la carica presente sulle armature resta invariata, e la nuova differenza di potenziale che si stabilisce fra esse varrà:

$$V'_0 = \frac{Q_f}{C_i} = V_0 \frac{C_f}{C_i} = V_0 \frac{R'_2}{R_2} \frac{R_2 - R_1}{R'_2 - R_1} = 750 \text{ V}. \quad (3)$$

### S.2.16.

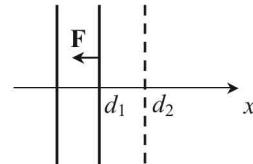
Indichiamo con  $x$  la distanza che separa le due armature del condensatore piano. Su ciascuna armatura si esercita una pressione elettrostatica  $p$  pari a  $p = \sigma^2 / (2\epsilon_0)$ , essendo  $\sigma = Q/S$  la densità superficiale delle cariche libere presenti sulle armature e  $Q$  la carica inizialmente presente su esse.

Poiché per  $x = d_1$  il condensatore è caricato con un generatore che fornisce una differenza di potenziale  $V_0$ , ricordando che la capacità di un condensatore piano è  $C(x) = \epsilon_0 S/x$ , avremo:

$$Q = C_1 V_0 = \frac{\epsilon_0 S V_0}{d_1}, \quad (1)$$

dove  $C_1$  è la capacità iniziale del condensatore, cioè per  $x = d_1$ . La forza di attrazione agente su ciascuna armatura vale perciò:

$$F = pS = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2}, \quad (2)$$



quindi si ha:

$$\mathbf{F} = -\frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2} \mathbf{u}_x, \quad (3)$$

avendo assunto un asse  $x$  come indicato in figura. Si noti che tale forza è costante, indipendente dalla distanza fra le armature, dal momento che il sistema è isolato e quindi  $Q$  è costante. Il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico quando la distanza fra le armature viene aumentata da  $x = d_1$  a  $x = d_2$  è dato da:

$$\mathcal{L}_c = -\frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2} (d_2 - d_1). \quad (4)$$

Per allontanare le armature bisogna applicare una forza esterna; affinchè il lavoro complessivo compiuto dalle forze del campo e dalla forza esterna sia nullo e non vi sia quindi variazione dell'energia cinetica del sistema, si deve avere:

$$\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{ext} = 0, \quad (5)$$

quindi:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2} (d_2 - d_1). \quad (6)$$

E' interessante osservare che si poteva giungere al risultato espresso dall'espressione precedente mediante considerazioni di carattere energetico. Dal momento che il sistema è isolato, le forze elettrostatiche compiono lavoro a spese dell'energia elettrostatica del sistema, quindi:

$$\mathcal{L}_c = -\Delta U. \quad (7)$$

Il lavoro esterno è quindi dato dalla seguente equazione:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = \Delta U = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) Q^2 = \frac{\epsilon_0 V_0^2 S}{2d_1^2} (d_2 - d_1), \quad (8)$$

essendo  $C_2 = \epsilon_0 S/d_2$  la capacità finale del condensatore.

### S.2.17.

Se nello spostamento dell'armatura il condensatore resta collegato al generatore, la carica elettrica presente sulle armature varia nello spostamento secondo la legge:

$$Q(x) = C(x)V_0 = \frac{\epsilon_0 S V_0}{x}, \quad (1)$$

dove  $x$  è la distanza corrente fra le due armature. In tal caso, la forza di attrazione fra le armature sarà:

$$F = pS = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2x^2}, \quad (2)$$

quindi:

$$\mathbf{F} = -\frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2x^2} \mathbf{u}_x, \quad (3)$$

avendo introdotto un asse  $x$  come nella figura dell'esercizio precedente. Il lavoro compiuto dalle forze del campo a seguito dell'allontanamento delle armature è quindi dato da:

$$\mathcal{L}_c = -\frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right). \quad (4)$$

Come nel caso dell'esercizio precedente si ha poi:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right). \quad (5)$$

Anche in questo caso si poteva giungere al risultato precedente mediante considerazioni energetiche, e cioè  $\mathcal{L}_e$  è uguale ed opposto al lavoro meccanico  $\mathcal{L}$  compiuto dalla forza elettrostatica di attrazione agente sull'armatura nello spostamento. Tuttavia, in questo caso sarebbe errato porre  $\mathcal{L} = -\Delta U$ , essendo  $\Delta U$  la variazione di energia elettrostatica del condensatore. Per capire ciò, occorre osservare che  $\Delta U$  è uguale, a parte un cambio di segno, al lavoro compiuto da *tutte* le forze elettrostatiche agenti sul sistema, e che, nello spostamento dell'armatura, si ha il trasferimento di una quantità di carica  $\Delta Q = Q(x = d_2) - Q(x = d_1) = Q_2 - Q_1$  da una armatura, a potenziale zero, all'altra armatura, a potenziale  $V_0$ . Tale trasferimento di carica viene compiuto dal generatore esterno, che rimane collegato al condensatore. Dato che a seguito dell'allontanamento delle armature la carica del condensatore è variata da  $Q_1$  a  $Q_2$ , il lavoro erogato dal generatore è dato da:

$$\mathcal{L}_{gen} = V_0(Q_2 - Q_1). \quad (6)$$

Dal momento che la variazione di energia elettrostatica del condensatore è data da:

$$\Delta U_V = \frac{1}{2} V_0(Q_2 - Q_1), \quad (7)$$

risulta:

$$\mathcal{L}_{gen} = 2\Delta U_V. \quad (8)$$

Per il principio di conservazione dell'energia si ha (vedi l'esercizio (2.14)):

$$\mathcal{L}_c + \Delta U_V = \mathcal{L}_{gen}, \quad (9)$$

quindi:

$$\mathcal{L}_c = -\Delta U_V + \mathcal{L}_{gen} = \Delta U_V. \quad (10)$$

Il lavoro esterno è quindi dato da:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_c = -\Delta U_V = \frac{1}{2} V_0^2 [C(x = d_1) - C(x = d_2)] = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right). \quad (11)$$

### S.2.18.

Fra le armature del condensatore si stabilisce un campo elettrico con linee di forza radiali e di modulo:

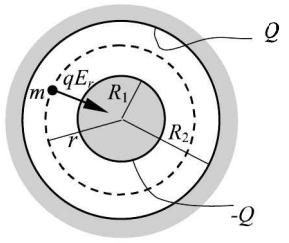
$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1)$$

dove  $Q$  è la carica elettrica presente sulle armature ed  $r$  la distanza dal centro delle armature sferiche ( $R_1 < r < R_2$ ). Se una particella di carica  $q$  e massa  $m$  ruota con velocità angolare  $\omega$  su un'orbita circolare di raggio  $r$ , la forza centripeta  $qE_r(r)$  dovuta al campo elettrostatico presente fra le armature del condensatore deve uguagliare il prodotto della massa  $m$  della particella e della sua accelerazione normale,  $\omega^2 r$ , cioè:

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\omega^2 r, \quad (2)$$

da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mr^3}} \simeq 7.42 \times 10^5 \text{ rad/s.} \quad (3)$$



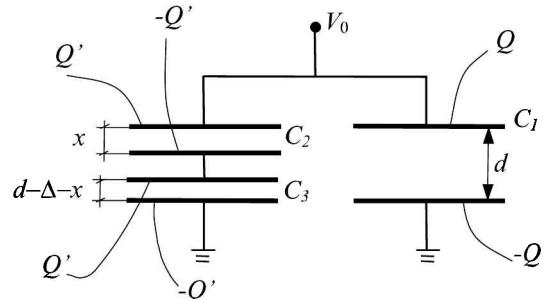
Si osservi che l'armatura esterna è carica positivamente, mentre quella interna negativamente, essendo la forza elettrostatica centripeta diretta verso il centro dell'orbita circolare di moto.

### S.2.19.

La carica presente sulle armature dei due condensatori varrà, all'inizio:

$$Q = CV_0 = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V_0}{d}, \quad (1)$$

essendo  $C = \epsilon_0 \pi R^2 / d$  la capacità di ciascuno dei due condensatori. Quando in uno dei due condensatori viene inserito un disco metallico di spessore  $\Delta < d$ , la situazione è quella indicata in figura. In tal caso, si ha un sistema di tre condensatori, di capacità  $C_1 = C$ ,  $C_2 = \epsilon_0 \pi R^2 / x$  e  $C_3 = \epsilon_0 \pi R^2 / (d - \Delta - x)$ , essendo  $x$  la distanza della superficie del disco da una delle armature del condensatore (vedi figura). Si noti che i condensatori 2 e 3 costituiscono una serie di condensatori di capacità equivalente  $C_{eq} = 1/(1/C_2 + 1/C_3) = \epsilon_0 \pi R^2 / (d - \Delta)$ . La distribuzione della carica nelle armature dei condensatori e sulle facce del disco conduttore sono quelle mostrate in figura, dove manifestamente  $Q$  è ancora dato dalla equazione (1), mentre  $Q'$  vale:

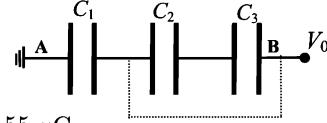


$$Q' = C_{eq}V_0 = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V_0}{d - \Delta}. \quad (2)$$

**S.2.20.**

I tre condensatori sono in serie, per cui, detta  $Q$  la carica presente sulle armature dei condensatori, deve aversi:

$$Q = V_0 C = \frac{V_0}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \simeq 7.55 \mu\text{C}, \quad (1)$$

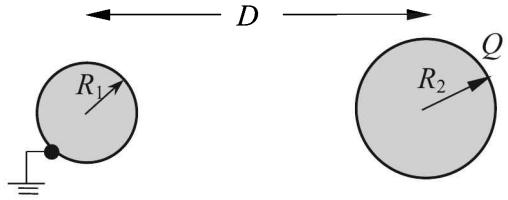


dove  $C = (1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3)^{-1} \simeq 0.0755 \mu\text{F}$  è la capacità equivalente dei tre condensatori in serie. Se i condensatori di capacità  $C_2$  e  $C_3$  vengono collegati come in figura, la carica sulle armature di essi si porterà a zero, mentre la carica presente sulle armature del condensatore di capacità  $C_1$  resterà invariata. La energia dissipata  $U_{diss}$  nel processo sarà perciò uguale all'energia inizialmente immagazzinata nei condensatori di capacità  $C_2$  e  $C_3$ , e cioè:

$$U_{diss} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_3} \simeq 320 \mu\text{J}. \quad (2)$$

**S.2.21.**

Questo problema riguarda il fenomeno di induzione elettrostatica fra due sfere conduttrici, di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , poste ad una distanza  $D$ , nelle quali la prima sfera è mantenuta a potenziale nullo mentre la seconda è isolata e presenta una carica elettrica  $Q$  (vedi figura). Osserviamo che, pur essendo il potenziale della sfera di raggio  $R_1$  nullo, sarebbe errato concludere che la carica elettrica presente su essa sia zero, a causa della presenza della seconda sfera carica. Se indichiamo con  $\sigma_1$  e con  $\sigma_2$  le densità superficiali delle cariche elettriche sulle superfici delle sfere conduttrici di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , rispettivamente, e con  $q$  la carica elettrica totale incognita presente sulla sfera a massa, si avrà evidentemente:



$$q = \int_{S_1} \sigma_1 dS_1, \quad Q = \int_{S_2} \sigma_2 dS_2, \quad (1)$$

dove gli integrali sono estesi alle superfici  $S_1$  ed  $S_2$  delle due sfere, con ovvio significato dei simboli. Si noti che le densità di carica *non* saranno uniformemente distribuite sulle due superfici sferiche  $S_1$  ed  $S_2$  a causa del fenomeno dell'induzione elettrostatica; la loro distribuzione sarà invece tale da rendere il potenziale  $V_1$  della sfera di raggio  $R_1$  uguale a zero, essendo tale conduttore collegato a massa. Ricordando l'espressione del potenziale elettrostatico generato da distribuzioni superficiali di carica, potremo cioè scrivere:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma_1}{r} dS_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma_2}{r} dS_2, \quad (2)$$

dove  $r$  è la distanza del punto corrente di integrazione dal centro della sfera  $S_1$ . Si noti ora che, nel primo integrale a secondo membro nell'equazione (2), la distanza  $r$  assume il valore costante  $R_1$  pari al raggio della sfera  $S_1$ , mentre nel secondo integrale nella equazione (2),

usando l'approssimazione  $D \gg R_1, R_2$  data nel testo dell'esercizio, potremo assumere  $r \simeq D$ . Si avrà dunque:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 D} \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 = 0. \quad (3)$$

Utilizzando le (1), la relazione (3) fornisce dunque una equazione nell'incognita  $q$ :

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D} = 0, \quad (4)$$

che dà:

$$q = -\frac{R_1}{D} Q. \quad (5)$$

Per determinare l'espressione del potenziale  $V_2$  della sfera  $S_2$ , valutiamo, come nella (2), il potenziale elettrostatico nel centro della sfera  $S_2$ ; avremo cioè:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma_1}{r'} dS_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma_2}{r'} dS_2, \quad (6)$$

dove ora  $r'$  è la distanza del punto corrente di integrazione dal centro della sfera  $S_2$ . Procedendo come sopra, notiamo che possiamo ora porre  $r' \simeq D$  nel primo integrale a secondo membro della equazione (6), e  $r' = R_2$  nel secondo integrale. Quindi si otterrà, con l'uso delle (1) e (5):

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{R_1}{D^2} \right). \quad (7)$$

### S.2.22.

La presenza della carica puntiforme  $Q$  in prossimità della sfera conduttrice, isolata ed inizialmente scarica, determinerà per il fenomeno dell'induzione elettrostatica una ridistribuzione di carica sulla superficie del conduttore in modo che il campo elettrico generato da tale distribuzione superficiale di carica sia, *internamente* alla sfera conduttrice, uguale ed opposto al campo elettrico generato dalla carica puntiforme  $Q$ . Se, ad esempio, la carica  $Q$  è positiva, ci si aspetta che la densità superficiale  $\sigma$  delle cariche indotte sia negativa nella porzione della superficie sferica affacciata alla carica e positiva dall'altro lato. Inoltre, poiché il conduttore è isolato, la carica totale sul conduttore dovrà conservarsi, e dovrà in particolare essere uguale a zero, essendo il conduttore inizialmente scarico, cioè:

$$\int_S \sigma dS = 0, \quad (1)$$

essendo  $S$  la superficie sferica del conduttore. Il problema della determinazione della distribuzione di carica indotta  $\sigma$  può essere svolto in maniera analitica mediante un metodo, detto delle cariche immagini, discusso in molti testi di elettrostatica; come complemento discuteremo tale metodo al termine dell'esercizio. Tuttavia, se, come ci chiede il problema, ci si limita al calcolo del potenziale  $V_0$  della sfera conduttrice, possiamo procedere più

semplicemente osservando che, per il principio di sovrapposizione, il potenziale elettrostatico al centro della sfera conduttrice, assumendo nullo il potenziale all'infinito, è dato da:

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r} dS, \quad (2)$$

dove  $r$  è la distanza fra il punto corrente di integrazione sulla superficie sferica  $S$  ed il centro della sfera stessa. Si noti che la scelta del calcolo del potenziale  $V_0$  nel centro della sfera, e non in un suo altro punto (si rammenti che in un conduttore il potenziale assume lo stesso valore in tutti i suoi punti), consente di svolgere in maniera semplice l'integrale che compare nella (2). Infatti, in tal caso, è  $r = R$ , e dunque:

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_S \sigma dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D}, \quad (3)$$

dove abbiamo usato la (1).

*Complemento: il metodo delle cariche immagini.*

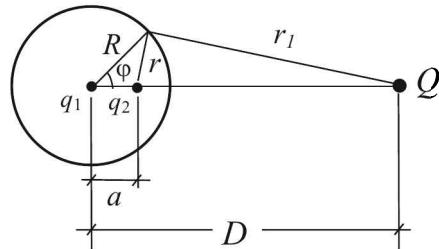
Il potenziale in un generico punto  $P$  dello spazio sarà dato, per il principio di sovrapposizione, da:

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r_2} dS, \quad (4)$$

dove  $r_1$  è la distanza di  $P$  dalla carica  $Q$  ed  $r_2$  la distanza del punto corrente di integrazione, sulla superficie conduttrice  $S$ , dal punto  $P$ . Se il punto  $P$  fosse scelto

coincidente col centro della sfera, per il calcolo del potenziale potremmo procedere come in precedenza, ottendo il risultato espresso dalla equazione (3). E' chiaro poi che, essendo il conduttore equipotenziale, il calcolo della equazione (4) dovrà dare ancora il valore  $V_0$  ogni volta che  $P$  è un punto interno (o di superficie) del conduttore. Poniamoci, ora, il problema del calcolo del potenziale  $V(P)$  in un punto  $P$  esterno alla sfera conduttrice. Per questo, si introduce *tentativamente* la seguente ipotesi di lavoro: che il potenziale elettrostatico generato dalle cariche superficiali indotte sulla sfera conduttrice sia, nei punti  $P$  esterni alla sfera conduttrice, formalmente lo stesso di quello generato da una opportuna distribuzione di cariche puntiformi, dette *cariche immagini*, poste internamente alla sfera (vedi figura). Tali cariche sono del tutto fittizie e rappresentano solamente un artificio matematico per il calcolo dell'integrale di superficie che compare nella (4). La posizione ed il valore di tali cariche immagini andrà determinato in modo che, quando  $P$  si avvicina ai punti della superficie sferica conduttrice, dovrà essere  $V(P) = V_0$  costante: è la condizione di equipotenzialità del conduttore. Nel nostro problema, sceglieremo tentativamente come cariche immagini due cariche puntiformi,  $q_1$  e  $q_2$ , il cui valore è per ora incognito, poste la prima al centro della sfera e la seconda sulla retta congiungente  $Q$  e  $q_1$ , ad una distanza, anch'essa per ora incognita,  $a$  da  $q_1$ , con  $a < R$  (vedi figura). Se  $P$  è scelto sulla superficie del conduttore, avremo quindi:

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = V_0, \quad (5)$$



dove  $r_1$  ed  $r$  sono le distanze di  $Q$  e  $q_2$  da  $P$ , rispettivamente. Introdotto l'angolo  $\varphi$  di figura ed osservando che, per il teorema del coseno:

$$r_1 = \sqrt{D^2 + R^2 - 2RD \cos \varphi}, \quad r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2Ra \cos \varphi}, \quad (6)$$

la equazione (5), ove si tenga conto dell'espressione del potenziale  $V_0$  data dalla (3), diventa:

$$\frac{Q}{\sqrt{D^2 + R^2 - 2RD \cos \varphi}} + \frac{q_2}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2Ra \cos \varphi}} = \frac{Q}{D} - \frac{q_1}{R}. \quad (7)$$

Le incognite  $a$ ,  $q_1$  e  $q_2$  vanno determinate in modo che la equazione (7) sia soddisfatta comunque si scelga il punto  $P$  sulla sfera conduttrice, e cioè per ogni valore dell'angolo  $\varphi$ . Per questo, è chiaro che l'espressione a primo membro della (7) deve essere indipendente da  $\varphi$ , e quindi la derivata rispetto a  $\varphi$  di tale espressione deve essere zero. Ciò conduce facilmente alla seguente condizione:

$$QD(a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi)^{3/2} = -q_2 a(D^2 + R^2 - 2DR \cos \varphi)^{3/2}, \quad (8)$$

e cioè, alla condizione:

$$\left( \frac{|Q|D}{|q_2|a} \right)^{2/3} (a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi) = D^2 + R^2 - 2RD \cos \varphi, \quad (9)$$

con  $q_2$  di segno opposto a  $Q$  [si veda la (8)]. Uguagliando i coefficienti dei termini costanti e moltiplicativi di  $\cos \varphi$  nella (9), si ha così:

$$q_2 = -Q \sqrt{\frac{a}{D}} \quad (10)$$

$$D(a^2 + R^2) = a(D^2 + R^2). \quad (11)$$

La (11) è una equazione di secondo grado che ammette due radici,  $a = D$  e  $a = R^2/D$ ; poiché richiediamo  $a < R$ , solo la seconda soluzione è accettabile. Dalla (10) si determina poi il valore della carica immagine  $q_2$ . Infine il valore di  $q_1$  si può ottenere dalla (7) imponendo, per esempio, che essa sia soddisfatta per  $\varphi = \pi/2$ . Si ottiene così, in conclusione:

$$a = R^2/D \quad (12)$$

$$q_2 = -Q(R/D) \quad (13)$$

$$q_1 = -q_2 = Q(R/D). \quad (14)$$

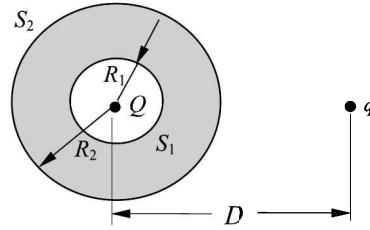
Si osservi che la somma delle cariche immagini,  $q_1 + q_2$ , è zero: ciò è dovuto al fatto che la sfera conduttrice è scarica, ed infatti si potrebbe dimostrare in generale che la somma delle cariche immagini è sempre uguale alla carica totale posseduta dal conduttore. In tal modo, il potenziale elettrostatico (e quindi anche il campo elettrico) generato dalle cariche superficiali indotte è equivalente, esternamente al conduttore, a quelle di un dipolo elettrico: ciò rende quantitativamente l'idea che la presenza della carica puntiforme  $Q$  induce sulla sfera metallica una separazione di cariche, positive e negative, sulle due regioni, quella affacciata alla carica inducente e quella nascosta, della sfera.

### S.2.23.

L'esercizio si risolve agevolmente applicando il principio dello schermo elettrostatico. Indichiamo con  $S_1$ ,  $S_2$  le superfici interna ed esterna, rispettivamente, del conduttore sferico cavo, e con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le densità superficiali indotte, su dette superfici, a causa della presenza della carica  $Q$ , posta al centro della cavità, e della carica  $q$ , posta fuori dal conduttore ad una distanza  $D > R_2$  (vedi figura).

Per il principio dello schermo elettrostatico, la distribuzione  $\sigma_1$  dipende unicamente dalla presenza della carica  $Q$ , mentre non è influenzata dalla presenza della carica esterna  $q$ ; in particolare, se fosse  $Q = 0$ , si avrebbe  $\sigma_1 = 0$ . Poiché la carica  $Q$  è posta al centro della cavità, avremo che, come già discusso nel problema 2.8, la densità  $\sigma_1$  è uniforme e pari a:

$$\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi R_1^2}. \quad (1)$$



Il campo elettrico per  $r < R_2$  assume dunque l'espressione consueta:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2. \end{cases} \quad (2)$$

La distribuzione  $\sigma_2$  delle cariche indotte su  $S_2$  è invece influenzata dalla presenza della carica esterna  $q$ , oltre che da  $Q$ ; poiché il conduttore è scarico ed isolato, dovrà avversi:

$$\int_{S_2} \sigma_2 dS_2 = Q, \quad (3)$$

ma ora  $\sigma_2$  non sarà distribuita uniformemente su  $S_2$ . Per il calcolo del potenziale elettrostatico  $V_0$  del conduttore osserviamo che, per  $r > R_2$ , il campo elettrico è generato solamente dalle cariche su  $S_2$  e da  $q$ , e cioè è lo stesso che si avrebbe se il conduttore non avesse alcuna cavità, fosse carico con carica  $Q$ , e vi fosse solo la carica esterna  $q$ . Il calcolo di  $V_0$  può quindi esservi svolto col procedimento presentato nello svolgimento del problema precedente, con la differenza che qui il conduttore sferico presenta una carica  $Q$  anziché essere scarico. Si ottiene perciò:

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (4)$$

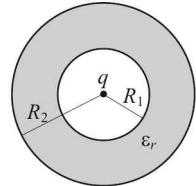
# Capitolo 3

## Elettrostatica in presenza di dielettrici

### 3.1 Problemi

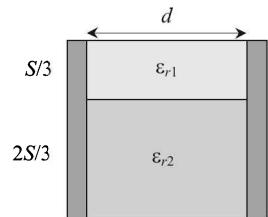
#### P.3.1.

Nel centro di una calotta sferica di materiale dielettrico omogeneo e isotropo, con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  e di raggi  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), è localizzata una carica puntiforme positiva  $q$ . Si calcolino: (i) il vettore spostamento dielettrico  $D$  e il campo elettrico  $E$  in funzione della distanza,  $r$ , dal centro della calotta; (ii) la densità di carica di polarizzazione sulle due superfici sferiche di raggio  $R_1$  e  $R_2$ .



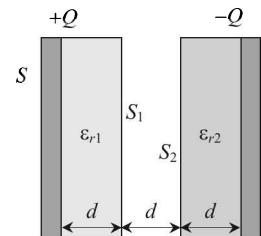
#### P.3.2.

Lo spazio fra le armature di un condensatore piano isolato è completamente riempito con due lastre dielettriche poste come mostrato in figura. Sia  $Q$  la carica del condensatore e  $d$  la distanza fra le armature di area  $S$ . La lastra con costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r1}$  copre un terzo della superficie delle armature, la seconda, con costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r2}$ , copre la parte rimanente. Si calcolino: (i) il campo elettrico nel condensatore; (ii) la capacità del condensatore; (iii) le cariche di polarizzazione.



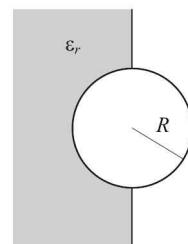
#### P.3.3.

Un condensatore piano (area delle armature  $S$ , distanza fra le stesse  $3d$ ) è parzialmente riempito, come mostrato in figura, con due dielettrici di costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r1}$  ed  $\epsilon_{r2}$ . Sulle armature, isolate, viene posta una carica  $+Q$  e  $-Q$ , rispettivamente. Si calcolino: (i) il campo elettrico all'interno del condensatore; (ii) la densità superficiale di carica di polarizzazione sulle superfici  $S_1$  e  $S_2$  dei dielettrici (vedi figura); (iii) la capacità del condensatore.

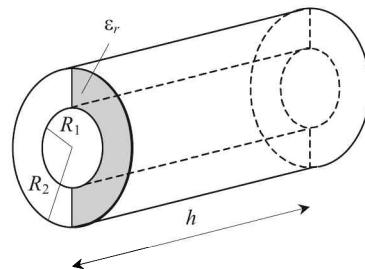


**P.3.4.**

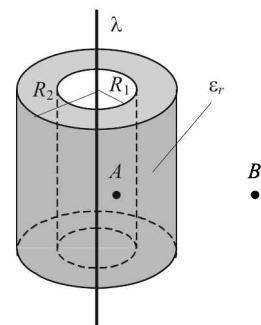
Una sfera conduttrice di raggio  $R$  è caricata con una carica totale  $Q$  e sconnessa dal generatore. Tale sfera è per metà immersa in un dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , come mostrato in figura. All'esterno c'è il vuoto. Si calcoli: (i) il potenziale della sfera; (ii) la densità superficiale di carica libera sulla sfera conduttrice; (iii) la densità superficiale di carica di polarizzazione nel dielettrico.

**P.3.5.**

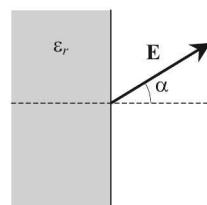
Un condensatore cilindrico di raggio interno  $R_1$ , raggio esterno  $R_2$  ed altezza  $h$ , è riempito per metà con un dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , come mostrato in figura. Sull'armatura interna del condensatore è depositata una carica  $Q$ . Si calcolino: (i) il campo elettrico nel condensatore; (ii) la capacità del condensatore; (iii) la densità di carica di polarizzazione sulle due armature; (iv) la carica libera sull'armatura interna in corrispondenza del vuoto e del dielettrico.

**P.3.6.**

Una carica positiva è disposta su un filo rettilineo indefinito con densità lineare di carica uniforme,  $\lambda$ . Un guscio cilindrico di materiale dielettrico uniforme ed isotropo, di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2 = 2R_1$  e di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  è disposto in modo coassiale rispetto al filo, come mostrato in figura. Si calcolino: (i) il campo elettrico in funzione della distanza dal filo; (ii) la differenza di potenziale fra due punti, A e B, posti a distanza  $R_1/2$  e  $2R_2$ , rispettivamente, dal filo.

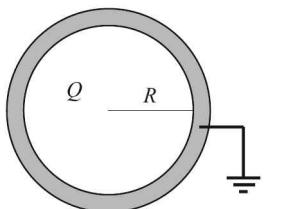
**P.3.7.**

Si consideri una lastra di materiale dielettrico, omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 2$ . All'esterno è presente un campo elettrico uniforme,  $E$ , di modulo  $E = 100 \text{ V/m}$ , le cui linee di forza formano un angolo  $\alpha = 40^\circ$  con la normale alla lastra (vedi figura). Si determinino: (i) il campo elettrico nel materiale dielettrico, in modulo, direzione e verso; (ii) la densità superficiale delle cariche di polarizzazione sulla superficie della lastra.

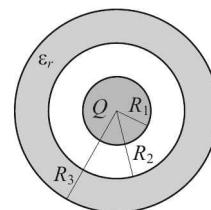


**P.3.8.**

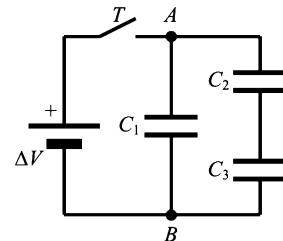
In una sfera di raggio  $R$  di materiale dielettrico (costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ ) è uniformemente distribuita una carica elettrica  $Q$ . La superficie esterna della sfera è ricoperta da un sottile strato metallico collegato a terra. Si calcolino: (i) il campo elettrico e il potenziale in funzione della distanza dal centro della sfera; (ii) la densità di cariche superficiali indotte nel metallo; (iii) le densità di carica di polarizzazione nella sfera e sulla sua superficie.

**P.3.9.**

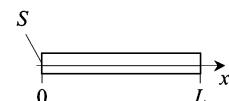
Una sfera conduttrice di raggio  $R_1 = 2$  cm e carica  $Q = 1$  mC è circondata da un guscio di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 3$ , di raggio interno  $R_2 = 4$  cm e raggio esterno  $R_3 = 8$  cm. Si calcoli l'energia elettrostatica del sistema.

**P.3.10.**

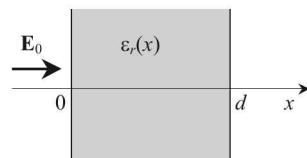
Tre condensatori, di capacità  $C_1 = 0.5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 1.5 \mu\text{F}$ , sono collegati come mostrato in figura. Inizialmente fra i morsetti A e B viene imposta una differenza di potenziale  $\Delta V = 5$  V per mezzo di un opportuno generatore. Successivamente l'interruttore T viene aperto e il sistema rimane isolato. A questo punto il condensatore  $C_2$  viene completamente riempito con una lastra di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 4$ . Si calcolino le cariche presenti sulle armature dei tre condensatori nello stato finale e la variazione di energia elettrostatica del sistema.

**P.3.11.**

Una sottile sbarra di materiale dielettrico di sezione  $S$  e di lunghezza  $L$  è polarizzata longitudinalmente con polarizzazione  $P = P_x = ax^2 + b$  ( $a, b$  costanti). Si determinino: (i) la densità di carica di polarizzazione di volume e di superficie; (ii) la carica totale nel dielettrico.

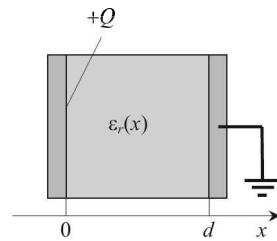
**P.3.12.**

Si consideri una lastra di materiale dielettrico di spessore  $d$  e di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 3d/(x + d)$  ( $0 < x < d$ ), essendo  $x$  la distanza da una superficie della lastra (vedi figura). La lastra è immersa in un campo elettrostatico costante  $E_0$ , perpendicolare alla lastra. Si calcolino: (i) il vettore polarizzazione; (ii) la densità di carica di polarizzazione sulle superfici della lastra; (iii) la densità volumetrica di carica di polarizzazione.



**P.3.13.**

Un condensatore piano (superficie delle armature  $S$ , distanza fra le stesse  $d$ ) è completamente riempito con un materiale dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  varia con la legge seguente:  $\epsilon_r = ax + b$  ( $0 < x < d$ ). L'armatura posta a  $x = 0$  possiede una carica  $+Q$ , la seconda è collegata a terra. Si calcolino: (i) la differenza di potenziale fra le armature; (ii) la capacità del condensatore; (iii) le densità di carica di polarizzazione di superficie e di volume.

**P.3.14.**

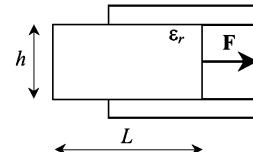
Una lastra piana di materiale dielettrico *non* omogeneo, di spessore  $d$ , viene inserita in un campo elettrico uniforme  $E_0$ , normale alla lastra stessa. Si verifica che il dielettrico si polarizza con polarizzazione  $\mathbf{P}$  parallela a  $\mathbf{E}_0$  e che si forma nel dielettrico una carica di polarizzazione distribuita con densità volumetrica  $-\rho_0$ . Sapendo che la densità superficiale di carica di polarizzazione è trascurabile sulla faccia 1 (vedi figura), si determinino: (i) la polarizzazione  $\mathbf{P}$  in funzione di  $x$ ; (ii) il campo elettrico in funzione di  $x$ ; (iii) la densità di carica di polarizzazione sulla faccia 2 della lastra.

**P.3.15.**

Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita, con densità  $\rho_{lib}$ , all'interno di una lastra piana di materiale dielettrico, omogeneo ed isotropo, di spessore  $d$ , con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , posta nel vuoto. Si calcoli il campo elettrico  $\mathbf{E}$  ed il potenziale  $V$  in funzione della posizione, all'interno e all'esterno della lastra, ponendo uguale a zero il potenziale sulla superficie di sinistra della lastra. Si tracci un diagramma qualitativo dell'andamento di queste grandezze fisiche in funzione della posizione.

**P.3.16.**

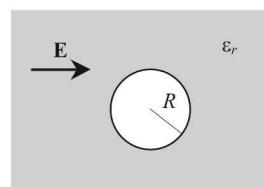
Si calcoli la forza con cui una lastrina di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , di spessore  $h$  e superficie quadrata di lato  $L$ , viene risucchiata fra le armature di un condensatore piano della stessa forma, mantenuto isolato, su cui è localizzata una carica  $Q$ .

**P.3.17.**

Si calcoli la forza con cui una lastrina di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , di spessore  $h$  e superficie quadrata di lato  $L$ , viene risucchiata fra le armature di un condensatore piano della stessa forma, collegato ad un generatore, che mantiene fra le armature una differenza di potenziale costante pari a  $V$ .

**P.3.18.**

In una sfera di materiale dielettrico con polarizzazione uniforme  $\mathbf{P}$ , il campo elettrico interno risulta essere  $\mathbf{E}_d = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$ . Si consideri un corpo di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , in cui è presente un campo elettrostatico uniforme  $\mathbf{E}$ . In tale dielettrico viene praticata una cavità sferica di raggio  $R$ . Si calcoli il campo elettrico all'interno della cavità.





## 3.2 Soluzioni

### 3.3.1.

Calcoliamo il vettore spostamento elettrico  $\mathbf{D}$ , che non è influenzato dalle cariche di polarizzazione. Per ragioni di simmetria  $\mathbf{D}$  è diretto radialmente e ha lo stesso valore in tutti i punti di una superficie sferica  $\Sigma$ , di raggio arbitrario  $r$ , concentrica al guscio sferico assegnato dal problema. Applichiamo il teorema di Gauss osservando che la sola carica libera presente è la carica puntiforme  $q$  posta nel centro del guscio dielettrico. Per  $r > 0$  si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r. \quad (1)$$

Il campo elettrico ha l'andamento seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, & 0 < r < R_1 \text{ e } r > R_2, \\ \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \mathbf{u}_r, & R_1 < r < R_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Gli andamenti di  $\mathbf{D}$  e di  $\mathbf{E}$  sono mostrati in figura.

La densità superficiale di carica di polarizzazione è data dalla formula seguente:  $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ , essendo  $\mathbf{P}$  il vettore polarizzazione e  $\mathbf{n}$  il versore normale *uscente* dalla superficie in considerazione. Calcoliamo per prima cosa il vettore polarizzazione all'interno del guscio dielettrico:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r r^2} \mathbf{u}_r. \quad (3)$$

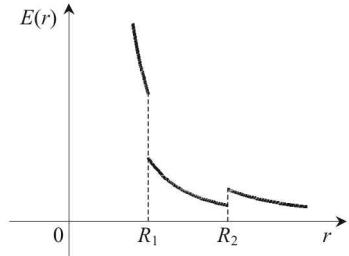
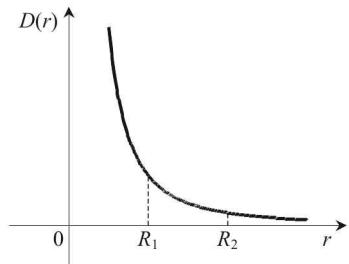
Si ha quindi che le densità superficiali di carica di polarizzazione sulle superfici sferiche di raggio  $R_1$  e  $R_2$  sono date da:

$$\sigma_P(R_1) = \mathbf{P}(R_1) \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_1^2} \mathbf{u}_r \cdot (-\mathbf{u}_r) = -\frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_1^2}, \quad (4)$$

$$\sigma_P(R_2) = \mathbf{P}(R_2) \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_2^2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_2^2}. \quad (5)$$

In corrispondenza di  $r = R_1$  e  $r = R_2$  si hanno quindi due distribuzioni superficiali di carica di polarizzazione. Per questo motivo il campo elettrico è discontinuo in  $r = R_1$  e  $r = R_2$ . Si noti che la carica superficiale di polarizzazione totale è nulla, infatti:

$$Q_s = \sigma_P(R_1) 4\pi R_1^2 + \sigma_P(R_2) 4\pi R_2^2 = 0. \quad (6)$$



### S.3.2.

(i) Il campo elettrico è ortogonale alle armature del condensatore e parallelo all'interfaccia fra i due dielettrici. Poiché si conserva la componenti tangenziale del campo elettrico in corrispondenza della superficie di separazione fra due mezzi, si ha:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}, \quad (1)$$

dove  $\mathbf{E}_1$  ed  $\mathbf{E}_2$  sono i campi elettrici nei dielettrici 1 e 2 rispettivamente. I vettori spostamento elettrico nei due dielettrici sono dati da:

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{E}. \quad (2)$$

Dal teorema di Coulomb si ha che le densità superficiali di carica libera sull'armatura di sinistra del condensatore, in corrispondenza dei due dielettrici, sono date da:

$$\sigma_{l1} = D_1 \quad \text{e} \quad \sigma_{l2} = D_2. \quad (3)$$

La carica libera totale sull'armatura del condensatore è  $Q$ , quindi:

$$\sigma_{l1} S_1 + \sigma_{l2} S_2 = Q, \quad (4)$$

da cui:

$$\epsilon_0 E \left( \epsilon_{r1} \frac{S}{3} + \epsilon_{r2} \frac{2S}{3} \right) = Q \quad \Rightarrow \quad E = \frac{3Q}{\epsilon_0 (\epsilon_{r1} + 2\epsilon_{r2}) S}. \quad (5)$$

(ii) Dal momento che il campo elettrico è uniforme all'interno del condensatore, la differenza di potenziale fra le armature è data da:

$$\Delta V = Ed = \frac{3Qd}{\epsilon_0 (\epsilon_{r1} + 2\epsilon_{r2}) S}. \quad (6)$$

La capacità è quindi data da:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{3d} + \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{2S}{3d}. \quad (7)$$

Il condensatore è equivalente a due condensatori in parallelo di capacità  $C_1$  e  $C_2$ :

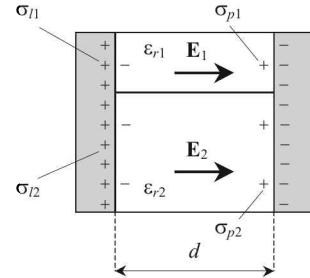
$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{3d}, \quad C_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{2S}{3d}. \quad (8)$$

La capacità totale è quindi data da  $C = C_1 + C_2$ , in accordo con quanto calcolato.

(iii) Per calcolare le cariche di polarizzazione, determiniamo dapprima la polarizzazione all'interno dei due dielettrici:

$$\mathbf{P}_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) \mathbf{E}, \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) \mathbf{E}. \quad (10)$$



Le densità di carica di polarizzazione superficiale all'interfaccia fra i dielettrici e l'armatura di sinistra del condensatore sono date da:

$$\sigma_{P1} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n} = -\epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)E, \quad (11)$$

$$\sigma_{P2} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n} = -\epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E, \quad (12)$$

avendo indicato con  $\mathbf{n}$  il versore normale uscente dai dielettrici. Si osservi che:

$$\sigma_{l1} + \sigma_{P1} = \sigma_{l2} + \sigma_{P2} = \epsilon_0 E, \quad (13)$$

come deve essere, dal momento che il campo elettrico è uniforme all'interno del condensatore. All'interfaccia fra i due dielettrici non si manifesta alcuna carica di polarizzazione dal momento che su tale superficie il vettore polarizzazione è perpendicolare al versore normale uscente. Dal momento che la polarizzazione è uniforme, la densità di carica di polarizzazione volumetrica è nulla.

### S.3.3.

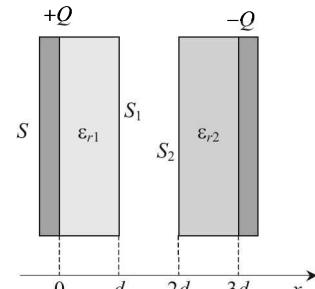
(i) Il vettore  $\mathbf{D}$  è perpendicolare alle armature del condensatore e quindi anche alle superfici  $S_1$  e  $S_2$ . Dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di  $\mathbf{D}$ , si deduce che il vettore  $\mathbf{D}$  mantiene lo stesso valore in tutto il condensatore.

Indicando con  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_0$  e  $\mathbf{D}_2$  il vettore  $\mathbf{D}$  nel dielettrico 1, nel vuoto e nel dielettrico 2, rispettivamente, possiamo scrivere:

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}. \quad (1)$$

Il valore di  $\mathbf{D}$  è determinato dalle sole cariche libere depositate sulle armature del condensatore, ed è quindi dato da:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x, \quad (2)$$



avendo introdotto un asse  $x$  perpendicolare alle armature. Ricordando il legame fra  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ , possiamo calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S} \mathbf{u}_x, \quad 0 < x < d$$

$$\mathbf{E}_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \mathbf{u}_x, \quad d < x < 2d \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S} \mathbf{u}_x, \quad 2d < x < 3d$$

(ii) Calcoliamo ora la polarizzazione all'interno dei due dielettrici:

$$\mathbf{P}_1 = \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1) \mathbf{E}_1 = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x, \quad 0 < x < d \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_2 = \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1) \mathbf{E}_2 = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x, \quad 2d < x < 3d$$

Le cariche di polarizzazione sulle superfici  $S_1$  e  $S_2$  si calcolano come segue:

$$\sigma_{P1} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_x = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{S}, \quad (5)$$

$$\sigma_{P2} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{P}_1 \cdot (-\mathbf{u}_x) = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{S}. \quad (6)$$

(iii) Per calcolare la capacità del condensatore dobbiamo prima calcolare la differenza di potenziale fra le armature. Si ottiene:

$$\Delta V = E_1 d + E_0 d + E_2 d = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \left( \frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} + 1 \right). \quad (7)$$

La capacità del condensatore è quindi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2} + \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}} \frac{S}{d}. \quad (8)$$

Si osservi che il condensatore è equivalente a tre condensatori piani in serie, di capacità  $C_1$ ,  $C_0$  e  $C_2$  date da:

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{d}, \quad C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \quad C_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{S}{d}. \quad (9)$$

Quindi la capacità  $C$  complessiva si può anche ottenere utilizzando la formula seguente:

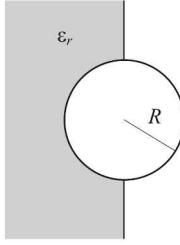
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_2}. \quad (10)$$

### S.3.4.

(i) Dal momento che si conserva la componente tangenziale del campo elettrico all'interfaccia dielettrico-vuoto e poiché il campo elettrico è radiale, si ha:

$$E_v = E_d \equiv E, \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{E}_v$  ed  $\mathbf{E}_d$  i campi elettrici nel vuoto e nel dielettrico, rispettivamente. Per il vettore  $\mathbf{D}$  si ha quindi:



$$\frac{D_v}{\epsilon_0} = \frac{D_d}{\epsilon_0 \epsilon_r}. \quad (2)$$

Applichiamo ora il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica  $\Sigma$  di raggio  $r > R$ , osservando che la sola carica libera presente è la carica  $Q$  sulla sfera conduttrice:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 2\pi r^2 (D_d + D_v) = Q. \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella (3) si ottiene, per  $r > R$ :

$$\mathbf{D}_v = \frac{Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)r^2} \mathbf{u}_r, \quad (4)$$

$$\mathbf{D}_d = \frac{\epsilon_r Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)r^2} \mathbf{u}_r. \quad (5)$$

Il campo elettrico è quindi dato, per  $r > R$ , dalla seguente espressione:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}_v}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)r^2} \mathbf{u}_r. \quad (6)$$

Il potenziale  $V$ , per  $r > R$  si calcola ricordando che  $dV = -E dr$  e ponendo uguale a zero il potenziale all'infinito. Si ottiene:

$$V(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)r}. \quad (7)$$

Il potenziale della sfera è dunque:

$$V = V(R) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)R}. \quad (8)$$

(ii) Per calcolare la densità superficiale delle cariche libere sulla sfera conduttrice, applichiamo il teorema di Coulomb. Si ha:

$$\sigma_{ld} = D_d(r = R), \quad \sigma_{lv} = D_v(r = R), \quad (9)$$

essendo  $\sigma_{ld}$  e  $\sigma_{lv}$  le densità di carica libera sulla superficie della sfera conduttrice in corrispondenza del dielettrico e del vuoto, rispettivamente. Usando le (4) e (5) si ha quindi:

$$\sigma_{ld} = \frac{\epsilon_r Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)R^2} \quad \sigma_{lv} = \frac{Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)R^2}. \quad (10)$$

(iii) Per calcolare la densità superficiale di carica di polarizzazione all'interfaccia sfera conduttrice-dielettrico calcoliamo prima il vettore polarizzazione:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{2\pi(\epsilon_r + 1)r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11)$$

Quindi:

$$\sigma_P = \mathbf{P}(R) \cdot (-\mathbf{u}_r) = -P(R) = -\frac{Q(\epsilon_r - 1)}{2\pi(\epsilon_r + 1)R^2}. \quad (12)$$

Si osservi che risulta:

$$\sigma_{ld} + \sigma_P = \sigma_{lv}, \quad (13)$$

come deve essere, dal momento che il campo elettrico all'esterno della sfera conduttrice si può calcolare applicando il teorema di Coulomb:

$$E(R) = \frac{\sigma_{ld} + \sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{lv}}{\epsilon_0}. \quad (14)$$

### S.3.5.

(i) Per ragioni di simmetria il campo elettrico all'interno del condensatore è radiale. Inoltre, poiché all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente tangente del campo

elettrico, si deduce che il campo elettrico non cambia nel passaggio fra vuoto e dielettrico. Si ha quindi:

$$E_0 = E_d \equiv E, \quad (1)$$

avendo indicato con  $E_0$  e con  $E_d$  i campi elettrici nel vuoto e nel dielettrico, rispettivamente. Ricordando la relazione fra  $E$  e  $D$ , si ottiene:

$$\frac{D_0}{\epsilon_0} = \frac{D_d}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow D_d = \epsilon_r D_0, \quad (2)$$

indicando con  $D_0$  e  $D_d$  il vettore  $D$  nel vuoto e nel dielettrico.

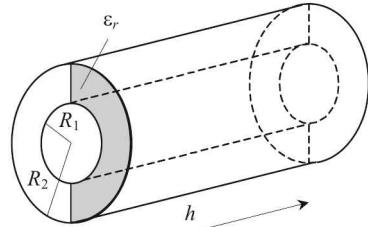
Applichiamo ora il teorema di Gauss al vettore  $D$ , considerando una superficie di Gauss  $\Sigma$  cilindrica, di raggio arbitrario  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ), coassiale con le armature del condensatore. Si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(D) = \pi r h (D_0 + D_d) = Q. \quad (3)$$

Usando la (2) nella (3) si ottiene:

$$D_0 = \frac{Q}{\pi(\epsilon_r + 1)hr} u_r, \quad (4)$$

$$D_d = \frac{\epsilon_r Q}{\pi(\epsilon_r + 1)hr} u_r. \quad (5)$$



Il campo elettrico nel condensatore è quindi dato da:

$$E = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1)hr} u_r. \quad (6)$$

(ii) Per calcolare la capacità del condensatore, calcoliamo prima la differenza di potenziale fra le armature:

$$\Delta V = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1)h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1)h} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (7)$$

La capacità del condensatore è quindi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 1)h}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (8)$$

(iii) Il vettore polarizzazione all'interno del dielettrico è dato da:

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{\pi (\epsilon_r + 1) h r} u_r. \quad (9)$$

La densità superficiale di carica di polarizzazione sul dielettrico in corrispondenza delle armature del condensatore si ricava come segue:

$$\sigma_P(R_1) = P(R_1) \cdot (-u_r) = -\frac{(\epsilon_r - 1) Q}{\pi (\epsilon_r + 1) h R_1}, \quad (10)$$

$$\sigma_P(R_2) = \mathbf{P}(R_2) \cdot \mathbf{u}_r = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{\pi(\epsilon_r + 1) h R_2}. \quad (11)$$

(iv) La densità di carica libera sulle armature si calcola applicando il teorema di Coulomb:

$$\sigma_{l0}(R_1) = D_0(R_1), \quad \sigma_{ld}(R_1) = D_d(R_1), \quad (12)$$

avendo indicato con  $\sigma_{l0}$  e  $\sigma_{ld}$  la densità superficiale di carica libera sull'armatura interna del condensatore, in corrispondenza del vuoto e del dielettrico, rispettivamente. La carica libera sull'armatura interna in corrispondenza del vuoto e del dielettrico è quindi:

$$Q_0 = \pi R_1 h \sigma_{l0}(R_1) = \frac{Q}{\epsilon_r + 1}, \quad (13)$$

$$Q_d = \pi R_1 h \sigma_{ld}(R_1) = \frac{\epsilon_r Q}{\epsilon_r + 1}. \quad (14)$$

Ovviamente  $Q_0 + Q_d = Q$ .

Si osservi che il condensatore cilindrico assegnato dal problema è equivalente a due condensatori in parallelo, con armature di forma semicilindrica, uno vuoto e il secondo completamente riempito di dielettrico, di capacità  $C_0$  e  $C_d$  date da:

$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{\pi \epsilon_0 h}{\ln R_2/R_1} \quad C_d = \frac{Q_d}{\Delta V} = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r h}{\ln R_2/R_1}. \quad (15)$$

La capacità totale  $C$  è data da  $C = C_1 + C_2$ .

### S.3.6.

(i) Data la geometria del sistema il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e il vettore  $\mathbf{D}$  sono radiali e dotati di simmetria cilindrica. Quindi  $\mathbf{D}$  risulta perpendicolare alle superfici di separazione fra il guscio dielettrico e il vuoto. Dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di  $\mathbf{D}$ , si conclude che, nel caso in esame, tale vettore non subisce alcuna variazione nel passaggio fra vuoto e dielettrico. Per calcolare  $\mathbf{D}$  applichiamo il teorema di Gauss, assumendo una superficie cilindrica  $\Sigma$  di raggio generico  $r$  e di altezza arbitraria  $h$ :

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 2\pi r h D = \lambda h. \quad (1)$$

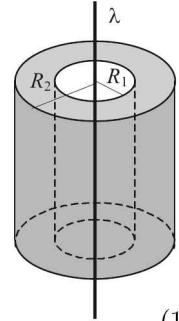
Si ha quindi:

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{u}_r. \quad (2)$$

Il campo elettrico si calcola facilmente:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r, \quad 0 < r < R_1, \quad r > R_2; \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r r} \mathbf{u}_r, \quad R_1 < r < R_2.$$



(ii) Calcoliamo ora la differenza di potenziale fra i punti A e B.

$$\int_{V(A)}^{V(B)} dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1/2}^{R_1} \frac{dr}{r} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{2R_2} \frac{dr}{r}, \quad (4)$$

da cui risulta:

$$V(B) - V(A) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( 2 \ln 2 + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) = -\frac{\lambda \ln 2}{2\pi\epsilon_0} \left( 2 + \frac{1}{\epsilon_r} \right). \quad (5)$$

### S.3.7.

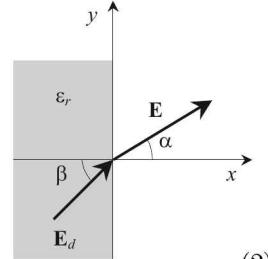
Scelgiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $xy$  in cui l'asse  $x$ , con origine sulla superficie di interfaccia fra vuoto e dielettrico, è perpendicolare alla lastra, mentre l'asse  $y$  risulta parallelo alla lastra, come mostrato in figura. Consideriamo le condizioni al contorno per i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$ .

All'interfaccia vuoto-dielettrico si conserva la componente tangente del campo elettrico, si ha quindi:

$$E_y = E_{dy} = E \sin \alpha, \quad (1)$$

avendo indicato con  $E_y$  ed  $E_{dy}$  le componenti  $y$  dei campi elettrici nel vuoto e nel dielettrico, rispettivamente. All'interfaccia vuoto-dielettrico si conserva la componente normale del vettore  $\mathbf{D}$ :

$$D_x = D_{dx} = \epsilon_0 E \cos \alpha, \quad (2)$$



con ovvio significato dei simboli. Dalla (2) si può calcolare la componente normale del campo elettrico all'interno del dielettrico:

$$E_{dx} = \frac{D_{dx}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = E \frac{\cos \alpha}{\epsilon_r}. \quad (3)$$

Il campo elettrico nel dielettrico è quindi dato da:

$$\mathbf{E}_d = E \frac{\cos \alpha}{\epsilon_r} \mathbf{u}_x + E \sin \alpha \mathbf{u}_y. \quad (4)$$

Il modulo di  $\mathbf{E}_d$  vale:

$$|\mathbf{E}_d| = \frac{E}{\epsilon_r} \sqrt{\cos^2 \alpha + \epsilon_r^2 \sin^2 \alpha} = 74.8 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (5)$$

$\mathbf{E}_d$  forma un angolo  $\beta$  con l'asse  $x$ , la cui tangente è data da:

$$\tan \beta = \frac{E_{dy}}{E_{dx}} = \epsilon_r \tan \alpha \Rightarrow \beta = 59.2^\circ. \quad (6)$$

Dal momento che la polarizzazione è data da  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}_d$ , la densità superficiale di carica di polarizzazione è data da:

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_x = P_x = \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} E \cos \alpha = 3.4 \times 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}. \quad (7)$$

**S.3.8.**

(i) Calcoliamo dapprima il vettore  $\mathbf{D}$ , che dipende solo dalle cariche libere. Data la simmetria del problema, il vettore  $\mathbf{D}$  è radiale e assume lo stesso valore sulle superfici sferiche  $\Sigma$  di raggio  $r$  arbitrario, concentriche alla sfera dielettrica. Applichiamo il teorema di Gauss.

Per  $0 < r < R$  si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q_{lib}(r), \quad (1)$$

essendo  $Q_{lib}(r)$  la carica libera interna alla superficie sferica  $\Sigma$ . Poiché la carica elettrica  $Q$  è distribuita uniformemente all'interno della sfera dielettrica di raggio  $R$ , si ha che la densità volumetrica della carica libera è data da:

$$\rho_{lib} = \frac{3Q}{4\pi R^3}. \quad (2)$$

Dalle (1) e (2) si ottiene:

$$4\pi r^2 D = \rho_{lib} \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{Qr}{4\pi R^3} \mathbf{u}_r. \quad (3)$$

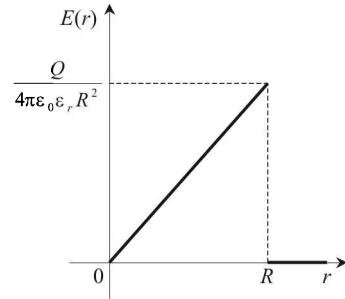
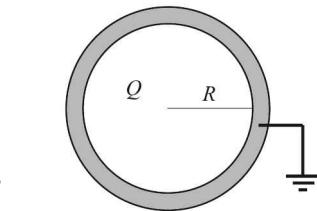
All'interno dello strato metallico che circonda la sfera dielettrica il vettore  $\mathbf{D}$  è nullo (come pure il campo elettrico). Applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica  $\Sigma$ , di raggio  $r$ , contenuta nello strato metallico, si ottiene:  $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 0 = Q_{lib}$ , essendo  $Q_{lib}$ , come al solito, la carica libera totale interna a  $\Sigma$ , data dalla somma della carica  $Q$  distribuita nel dielettrico e della carica indotta sulla superficie interna dello strato metallico. Si ha quindi che la carica indotta è data da  $Q_{indotta} = -Q$ . Il conduttore è collegato a terra, quindi la sua superficie esterna risulta scarica.

Applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica  $\Sigma$  esterna allo strato conduttore, dal momento che la carica libera totale interna a  $\Sigma$  è nulla, si conclude che  $\mathbf{D} = 0$  all'esterno dello strato metallico.

Il campo elettrico si calcola facilmente ricordando la relazione fra  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \mathbf{u}_r, \quad 0 < r < R; \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = 0, \quad r > R.$$



L'andamento del campo elettrico in funzione di  $r$  è mostrato in figura. Calcoliamo ora il potenziale, ricordando che lo strato metallico è posto a terra ( $V = 0$ ). Per  $r > R$  si ha:  $V(r) = 0$ . Per  $0 < r < R$ , ricordando che il potenziale è continuo per  $r = R$ , si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \int_R^r r dr, \quad (5)$$

da cui:

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} (R^2 - r^2). \quad (6)$$

L'andamento del potenziale in funzione di  $r$  è mostrato in figura.

(ii) Come già osservato, sulla superficie interna dello strato metallico viene indotta una carica  $-Q$ , distribuita in modo uniforme con densità superficiale  $\sigma$  data da:

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (7)$$

La superficie esterna dello strato metallico risulta invece scarica.

(iii) Determiniamo la polarizzazione all'interno della sfera dielettrica ( $0 < r < R$ ):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_r. \quad (8)$$

La densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico a contatto con il guscio metallico è data da:

$$\sigma_P = \mathbf{P}(R) \cdot \mathbf{n} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2}. \quad (9)$$

La densità volumetrica di carica di polarizzazione si calcola utilizzando la relazione  $\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ . Ricordando l'espressione dell'operatore divergenza in coordinate sferiche si ha:

$$\rho_P = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 P(r)] = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^3} r^3 \right] = -\frac{3(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^3}. \quad (10)$$

La carica di polarizzazione è quindi distribuita in modo uniforme all'interno della sfera dielettrica. Si osservi che la carica di polarizzazione totale è nulla. Infatti:

$$Q_P = \int_S \sigma_P dS + \int_\tau \rho_P d\tau = \sigma_P 4\pi R^2 + \rho_P \frac{4}{3}\pi R^3 = 0, \quad (11)$$

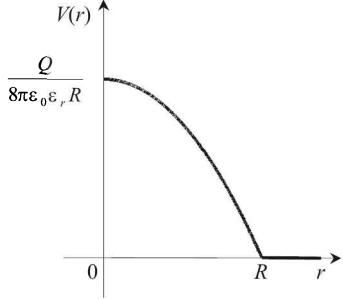
essendo  $S$  la superficie sferica di raggio  $R$  e  $\tau$  il volume della sfera. Questo è un risultato del tutto generale, come si può facilmente dimostrare. La carica di polarizzazione totale è data da:

$$Q_P = \int_S \sigma_P dS + \int_\tau \rho_P d\tau = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS - \int_\tau \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau. \quad (12)$$

Per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_\tau \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13)$$

Dalle (12) e (13) si ha quindi che  $Q_P = 0$ .



**S.3.9.**

E' opportuno calcolare prima  $\mathbf{D}$ . Data la simmetria del problema,  $\mathbf{D}$  è radiale e dotato di simmetria sferica, e dunque è ortogonale alle superfici di interfaccia fra il guscio dielettrico e il vuoto. Applichiamo il teorema di Gauss, considerando una generica superficie  $\Sigma$  concentrica alla sfera conduttrice e di raggio  $r$ . Se  $0 < r < R_1$  si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = 0. \quad (1)$$

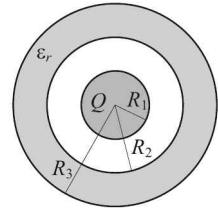
Per  $r > R_1$  si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r. \quad (2)$$

Il vettore  $\mathbf{D}$  non cambia passando dal vuoto al dielettrico dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di tale vettore.

Il campo elettrico si calcola facilmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 0, & 0 < r < R_1; \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, & R_1 < r < R_2, \quad r > R_3; \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{u}_r, & R_2 < r < R_3. \end{aligned} \quad (3)$$



La densità di energia del campo elettrostatico è data da:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (4)$$

L'energia elettrostatica totale del sistema si calcola come segue:

$$U = \int_{\tau} u \, d\tau, \quad (5)$$

essendo  $\tau$  il volume totale in cui è presente il campo e  $d\tau$  l'elemento di volume infinitesimo che, data la simmetria sferica, è dato da  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ . Nel caso in esame si ottiene:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \int_{R_2}^{R_3} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_3}^{\infty} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \dots \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\epsilon_r} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right] = 1.87 \times 10^5 \text{ J}. \end{aligned} \quad (6)$$

**S.3.10.**

Situazione iniziale: l'interruttore T è chiuso. I condensatori  $C_2$  e  $C_3$  sono collegati in serie, quindi sono equivalenti ad un condensatore di capacità  $C_{23}$  data da:

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow \quad C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 0.6 \text{ } \mu\text{F}. \quad (1)$$

Tale condensatore è collegato in parallelo con il condensatore  $C_1$ .

Il sistema di tre condensatori è quindi equivalente ad un unico condensatore di capacità  $C$  data da:

$$C = C_1 + C_{23} = 1.1 \text{ } \mu\text{F}. \quad (2)$$

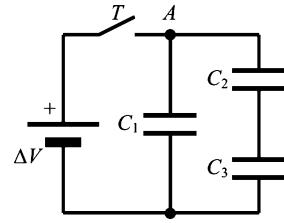
La carica totale  $Q$  presente su tale condensatore equivalente è:

$$Q = C \Delta V = 5.5 \text{ } \mu\text{C}, \quad (3)$$

e si distribuisce sulle armature superiori di  $C_1$  e di  $C_2$ . Si ha quindi:  $Q = Q_1 + Q_2$ , dove  $Q_1 = C_1 \Delta V$  e  $Q_2 = C_{23} \Delta V$ . La carica presente sull'armatura superiore di  $C_3$  è ovviamente pari a  $Q_2$ , essendo  $C_3$  in serie a  $C_2$ .

L'energia elettrostatica iniziale è data da:

$$U_i = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = 13.75 \text{ } \mu\text{J}. \quad (4)$$



L'interruttore viene successivamente aperto. Il sistema è isolato, quindi la carica totale non può cambiare. Quando il condensatore 2 viene riempito di dielettrico, la sua capacità diventa:

$$C_{2d} = \epsilon_r C_2 = 4 \text{ } \mu\text{F}. \quad (5)$$

La capacità del condensatore equivalente alla serie del condensatore 2 (riempito di dielettrico) e del condensatore 3 (vuoto) è:

$$C_{23,d} = \frac{C_{2d} C_3}{C_{2d} + C_3} = 1.1 \text{ } \mu\text{F}. \quad (6)$$

La capacità del condensatore equivalente all'intero sistema è quindi:

$$C_d = C_1 + C_{23,d} = 1.6 \text{ } \mu\text{F}. \quad (7)$$

Indicando con  $\Delta V_d$  la nuova differenza di potenziale fra i morsetti A e B, e con  $Q_{1d}$  e  $Q_{2d}$  le cariche presenti, rispettivamente, sulle armature superiori dei condensatori 1 e 2, si ottiene:

$$Q_{1d} = C_1 \Delta V_d, \quad Q_{2d} = C_{23,d} \Delta V_d. \quad (8)$$

Poiché il sistema è isolato la carica totale si conserva:

$$Q_{1d} + Q_{2d} = Q, \quad (9)$$

cioè:

$$C_d \Delta V_d = C \Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta V_d = \frac{C}{C_d} \Delta V = 3.44 \text{ V}. \quad (10)$$

Usando le (8) si possono calcolare le cariche presenti sui tre condensatori:

$$Q_{1d} = 1.72 \text{ } \mu\text{C}, \quad Q_{2d} = Q_{3d} = 3.78 \text{ } \mu\text{C}. \quad (11)$$

L'energia elettrostatica finale è data da:

$$U_f = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_d} \quad (12)$$

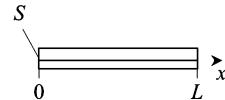
Quindi la variazione di energia elettrostatica del sistema è pari a:

$$\Delta U = U_f - U_i = -4.3 \text{ } \mu\text{J}. \quad (13)$$

### S.3.11.

Le densità superficiali di carica di polarizzazione sulle superfici della sbarra poste in  $x = 0$  e  $x = L$  sono date da:

$$\begin{aligned} \sigma_P(0) &= \mathbf{P}(0) \cdot (-\mathbf{u}_x) = -b \\ \sigma_P(L) &= \mathbf{P}(L) \cdot \mathbf{u}_x = aL^2 + b. \end{aligned} \quad (1)$$



Sulla superficie laterale della sbarra non è presente alcuna carica di polarizzazione, dal momento che  $\mathbf{P}$  è parallelo alla superficie stessa. La densità volumetrica di carica di polarizzazione si calcola come segue:

$$\rho_P(x) = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx} = -2ax. \quad (2)$$

La carica di polarizzazione di volume totale è quindi:

$$Q_{P,v} = \int_0^L \rho_P(x) S \, dx = -aSL^2. \quad (3)$$

La carica superficiale di polarizzazione totale è data da:

$$Q_{p,S} = \sigma_P(0)S + \sigma_P(L)S = aSL^2. \quad (4)$$

La carica di polarizzazione totale è quindi nulla.

### S.3.12.

Il vettore  $\mathbf{D}$ , perpendicolare alla lastra dielettrica, non cambia passando dal vuoto al dielettrico, dal momento che all'interfaccia fra due mezzi si conserva la componente normale di  $\mathbf{D}$ . Quindi  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$  in tutto lo spazio. Il campo elettrico  $\mathbf{E}$  nel dielettrico è quindi dato da ( $0 < x < d$ ):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} = \frac{x+d}{3d} \mathbf{E}_0. \quad (1)$$

Il vettore polarizzazione si calcola quindi nel modo seguente ( $0 < x < d$ ):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{2d - x}{3d} \mathbf{E}_0. \quad (2)$$

Le densità superficiali di carica di polarizzazione sulle superfici della lastra sono date da:

$$\begin{aligned}\sigma_P(0) &= \mathbf{P}(0) \cdot (-\mathbf{u}_x) = -\frac{2}{3} \epsilon_0 E_0, \\ \sigma_P(d) &= \mathbf{P}(d) \cdot \mathbf{u}_x = \frac{1}{3} \epsilon_0 E_0.\end{aligned} \quad (3)$$

La densità volumetrica di carica di polarizzazione è:

$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx} = \frac{\epsilon_0}{3d} E_0. \quad (4)$$

Si osservi che, come deve risultare, la carica di polarizzazione totale è nulla.

### S.3.13.

(i) Il vettore  $\mathbf{D}$  è perpendicolare alle armature del condensatore e dipende solo dalla carica libera  $Q$  depositata sull'armatura posta a  $x = 0$ . Si ha quindi, per  $0 < x < d$ :

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x. \quad (1)$$

Ricordando la relazione fra campo elettrico e vettore  $\mathbf{D}$ , si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0(ax + b)S} \mathbf{u}_x. \quad (2)$$

Il potenziale in un punto generico all'interno del condensatore si calcola come segue, ricordando che l'armatura posta in  $x = d$  è collegata a terra ( $V(d) = 0$ ):

$$\int_0^{V(x)} dV = - \int_d^x E dx = - \int_d^x \frac{Q}{\epsilon_0(ax + b)S} dx, \quad (3)$$

da cui:

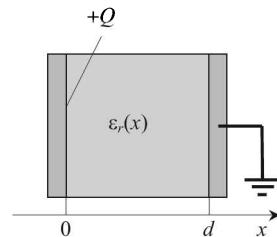
$$V(x) = \frac{Q}{\epsilon_0 a S} \ln \frac{ad + b}{ax + b}. \quad (4)$$

La differenza di potenziale fra le armature del condensatore è quindi:

$$\Delta V = \frac{Q}{\epsilon_0 a S} \ln \left( 1 + \frac{ad}{b} \right). \quad (5)$$

(ii) La capacità del condensatore si calcola facilmente:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 a S / \ln \left( 1 + \frac{ad}{b} \right). \quad (6)$$



(iii) Calcoliamo il vettore polarizzazione all'interno del dielettrico:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{ax + b}\right) \frac{Q}{S} \mathbf{u}_x. \quad (7)$$

La densità superficiale di carica di polarizzazione è data da:

$$\begin{aligned} \sigma_P(x=0) &= \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}(0) \cdot (-\mathbf{u}_x) = \left(\frac{1}{b} - 1\right) \frac{Q}{S}, \\ \sigma_P(x=d) &= \mathbf{P}(d) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}(d) \cdot \mathbf{u}_x = \left(1 - \frac{1}{ad + b}\right) \frac{Q}{S}. \end{aligned} \quad (8)$$

La densità volumetrica di carica di polarizzazione all'interno del dielettrico è data da:

$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx} = -\frac{a}{(ax + b)^2} \frac{Q}{S}. \quad (9)$$

Si osservi che, come deve risultare, la carica totale di polarizzazione è nulla:

$$Q_P = \sigma_P(0)S + \sigma_P(d)S + \int_0^d \rho_P(x) S dx = 0. \quad (10)$$

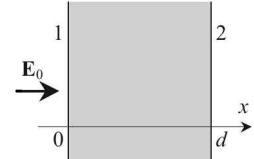
### S.3.14.

(i) Dal momento che all'interfaccia dielettrico-vuoto si conserva la componente tangente del campo elettrico, tale campo è perpendicolare alla lastra anche all'interno del dielettrico. Si ha quindi che il vettore polarizzazione è parallelo all'asse  $x$  (perpendicolare alla lastra). Il vettore  $\mathbf{P}$  si calcola ricordando la relazione fra  $\mathbf{P}$  e densità volumetrica di carica di polarizzazione,  $\rho_P$ :

$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP_x}{dx}. \quad (1)$$

Nel caso in esame si ha quindi:

$$dP = \rho_0 dx. \quad (2)$$



Per integrare l'equazione (2) dobbiamo conoscere una condizione al contorno. Dal momento che la densità superficiale di carica di polarizzazione in corrispondenza della superficie  $x=0$  è trascurabile, si ottiene:

$$\sigma_P(0) = \mathbf{P}(0) \cdot (-\mathbf{u}_x) = -P(0) = 0. \quad (3)$$

Possiamo ora integrare la (2):

$$\int_0^{P(x)} dP = \int_0^x \rho_0 dx \Rightarrow \mathbf{P} = \rho_0 x \mathbf{u}_x. \quad (4)$$

(ii) Calcoliamo prima il vettore  $\mathbf{D}$ . Osserviamo che  $\mathbf{D}$  è perpendicolare alla lastra anche all'interno del dielettrico, quindi, dal momento che all'interfaccia vuoto-dielettrico si conserva la componente normale di  $\mathbf{D}$ , si conclude che tale vettore ha la stessa espressione in

tutto lo spazio:  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ . Ricordando che  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{P}$ , si ricava che il campo elettrico all'interno della lastra è dato da:

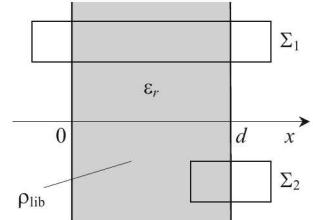
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P}) = \left( E_0 - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x \right) \mathbf{u}_x. \quad (5)$$

Infine, la densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie  $x = d$  è data da:

$$\sigma_P(d) = \mathbf{P}(d) \cdot \mathbf{u}_x = \rho_0 d. \quad (6)$$

### S.3.15.

Calcoliamo il vettore  $\mathbf{D}$  in tutto lo spazio. Data la simmetria della configurazione tale vettore è parallelo all'asse  $x$  (perpendicolare alla lastra) e ha lo stesso modulo e verso opposto sulle coppie di piani perpendicolari all'asse  $x$ , posti in posizioni simmetriche rispetto alla lastra. Possiamo applicare il teorema di Gauss. Per calcolare  $\mathbf{D}$  all'esterno della lastra consideriamo una superficie cilindrica  $\Sigma_1$  con basi di area  $A$  poste in posizioni simmetriche rispetto alla lastra come mostrato in figura:



$$\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{D}) = 2DA = \rho_{lib}Ad, \quad (1)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 &= -\frac{1}{2} \rho_{lib}d \mathbf{u}_x, & x < 0 \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}_2 &= \frac{1}{2} \rho_{lib}d \mathbf{u}_x, & x > d \end{aligned} \quad (2)$$

Per calcolare il vettore  $\mathbf{D} = D \mathbf{u}_x$  all'interno del dielettrico, consideriamo una superficie cilindrica  $\Sigma_2$  posta a cavallo del piano  $x = d$ :

$$\Phi_{\Sigma_2}(\mathbf{D}) = D_2A - DA = \rho_{lib}A(d - x), \quad (3)$$

da cui si ottiene, per  $0 < x < d$ :

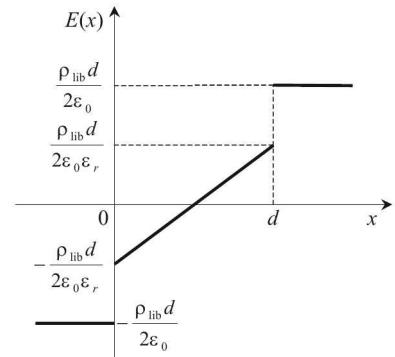
$$\mathbf{D} = \rho_{lib} \left( x - \frac{d}{2} \right) \mathbf{u}_x. \quad (4)$$

Possiamo ora determinare facilmente il campo elettrico:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_{lib}}{2\epsilon_0} d \mathbf{u}_x,$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left( x - \frac{d}{2} \right) \mathbf{u}_x, \quad 0 < x < d \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{lib}}{2\epsilon_0} d \mathbf{u}_x, \quad x > d$$



Calcoliamo ora il potenziale, assumendo  $V = 0$  per  $x = 0$ . Per  $x < 0$  si ha:

$$\int_0^{V(x)} dV = - \int_0^x E dx = \frac{\rho_{lib}d}{2\epsilon_0} \int_0^x dx, \quad (6)$$

da cui:

$$V(x) = \frac{\rho_{lib}d}{2\epsilon_0} x. \quad (7)$$

Per  $0 < x < d$  si ottiene:

$$\int_0^{V(x)} dV = - \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_0^x \left( x - \frac{d}{2} \right) dx, \quad (8)$$

da cui:

$$V(x) = - \frac{\rho_{lib}}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x^2 - xd). \quad (9)$$

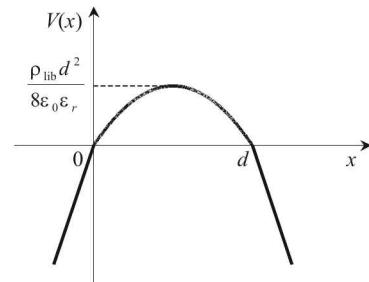
Infine, per  $x > d$ , poiché il potenziale è continuo in  $x = d$ , si ha:

$$\int_{V(d)}^{V(x)} dV = - \frac{\rho_{lib}d}{2\epsilon_0} \int_d^x dx, \quad (10)$$

da cui:

$$V(x) = - \frac{\rho_{lib}d}{2\epsilon_0} (x - d). \quad (11)$$

Gli andamenti del campo elettrico e del potenziale in funzione di  $x$  sono mostrati in figura.



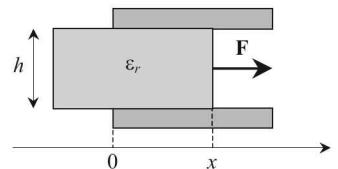
### S.3.16.

Il sistema in considerazione è *isolato*, quindi il lavoro compiuto dalle forze del campo sulla lastrina dielettrica è compiuto a spese dell'energia elettrostatica  $U$  del sistema. Per la conservazione dell'energia possiamo quindi scrivere:

$$dL_{campo} + dU = 0, \quad (1)$$

dove, indicando con  $\mathbf{F}$  la forza elettrica agente sul dielettrico, si ha:

$$dL_{campo} = \mathbf{F} \cdot dr. \quad (2)$$



Nel caso in esame, indicando con  $x$  un asse parallelo alle armature del condensatore, si ha:

$$F dx + dU = 0 \quad \Rightarrow \quad F = - \frac{dU}{dx}. \quad (3)$$

Calcoliamo quindi l'energia elettrostatica del condensatore, nella situazione in cui la lastrina dielettrica è inserita per un tratto  $x$  fra le armature. Come visto nel problema P.3.2., il

sistema è equivalente a due condensatori in parallelo, uno, di capacità  $C_1$ , completamente riempito di dielettrico, il secondo, di capacità  $C_2$ , vuoto. Si ha:

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{Lx}{h}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{L(L-x)}{h}. \quad (4)$$

La capacità complessiva è quindi data da:

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{L}{h} [L + x(\epsilon_r - 1)]. \quad (5)$$

L'energia elettrostatica totale del condensatore è data da:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{hQ^2}{2\epsilon_0 L [L + x(\epsilon_r - 1)]}. \quad (6)$$

La forza che agisce sulla lastrina dielettrica si calcola quindi nel modo seguente:

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dx} \mathbf{u}_x = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 L} \frac{\epsilon_r - 1}{[L + x(\epsilon_r - 1)]^2} \mathbf{u}_x. \quad (7)$$

Si osservi che l'energia elettrostatica diminuisce al crescere di  $x$ , cioè quando la lastrina penetra tra le armature del condensatore:

$$dU = \left( \frac{dU}{dx} \right)_Q dx = -\frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 L} \frac{\epsilon_r - 1}{[L + x(\epsilon_r - 1)]^2} dx, \quad (8)$$

quando  $dx > 0$  (dielettrico risucchiato fra le armature) si ha  $dU < 0$ : il sistema si porta quindi verso il minimo di energia elettrostatica.

### S.3.17.

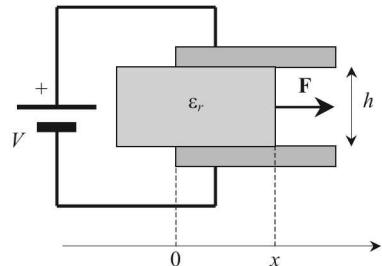
A differenza del caso presentato nell'esercizio precedente, il sistema è *non isolato*, dato che un generatore di tensione è collegato al condensatore per tutta la durata del processo. In questo caso il lavoro meccanico compiuto dalle forze del campo è compiuto non soltanto a spese dell'energia elettrostatica del condensatore, ma anche a spese del generatore esterno. Il principio di conservazione dell'energia si scrive quindi nel modo seguente:

$$dL_{campo} + dU_V = dL_{gen}, \quad (1)$$

avendo indicato con  $dL_{campo}$  il lavoro compiuto dalle forze del campo per uno spostamento infinitesimo della lastrina dielettrica;  $dU_V$  la corrispondente variazione dell'energia elettrostatica del condensatore mantenuto a una differenza di potenziale  $V$  costante;  $dL_{gen}$  è il lavoro compiuto dal generatore esterno.

Calcoliamo dapprima l'energia elettrostatica del condensatore. La capacità del condensatore è stata calcolata nell'esercizio precedente:

$$C = \epsilon_0 \frac{L}{h} [L + x(\epsilon_r - 1)]. \quad (2)$$



Si può quindi scrivere:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\epsilon_0 LV^2}{2h}[L + x(\epsilon_r - 1)]. \quad (3)$$

Se la lastrina viene risucchiata di un tratto  $dx$ , la corrispondente variazione di energia elettrostatica è data da:

$$dU_V = \left( \frac{dU}{dx} \right)_V dx = \frac{\epsilon_0 LV^2}{2h}(\epsilon_r - 1) dx. \quad (4)$$

Il corrispondente lavoro compiuto dalla forza elettrostatica è:

$$dL_{campo} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dx. \quad (5)$$

Dal momento che la variazione di capacità conseguente allo spostamento  $dx$  del dielettrico comporta anche una variazione della carica sulle armature del condensatore pari a  $dQ = V dC$ , il generatore deve compiere un lavoro  $dL_{gen}$  pari a:

$$dL_{gen} = V dQ = V^2 dC = V^2 \frac{\epsilon_0 L}{h}(\epsilon_r - 1) dx. \quad (6)$$

Utilizzando la (1) si ottiene quindi:

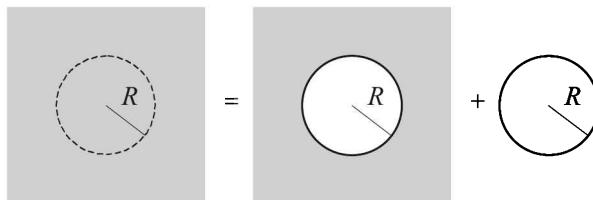
$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_0 LV^2}{2h}(\epsilon_r - 1) \mathbf{u}_x. \quad (7)$$

Si osservi che  $dL_{gen} = 2 dU_V$ , quindi:  $dL_{campo} = dL_{gen} - dU_V = dU_V$ . Si ricava che, nel caso di un sistema non isolato, la forza agente è data da:

$$F = \frac{dU}{dx}. \quad (8)$$

### S.3.18.

Per calcolare il campo elettrico all'interno della cavità utilizzeremo il principio di sovrapposizione degli effetti. La configurazione assegnata si può immaginare come ottenuta rimuovendo una sfera di materiale polarizzato, supponendo di congelare lo stato di polarizzazione presente nella sfera. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il campo



elettrico nel dielettrico prima di praticare il foro è la somma del campo generato dalle cariche esterne alla sfera e del campo generato dalle cariche interne alla sfera polarizzata. Indicando con  $\mathbf{E}$  il campo presente nel dielettrico, si ottiene:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{sf}, \quad (1)$$

dove  $\mathbf{E}_c$  è il campo nella cavità, che dobbiamo calcolare, e  $\mathbf{E}_{sf}$  è il campo nella sfera uniformemente polarizzata, dato da:

$$\mathbf{E}_{sf} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}, \quad (2)$$

dove  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$ . Si ha quindi:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{sf} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \frac{2 + \epsilon_r}{3}\mathbf{E}. \quad (3)$$

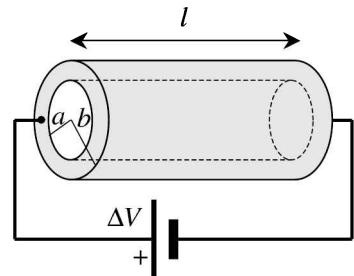
# Capitolo 4

## Correnti stazionarie

### 4.1 Problemi

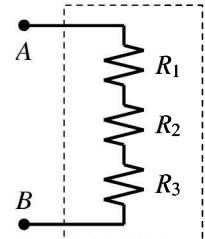
#### P.4.1.

Un generatore di differenza di potenziale  $\Delta V = 25 \text{ mV}$  è connesso agli estremi di un conduttore di alluminio a forma di cilindro cavo, di lunghezza  $l = 75 \text{ cm}$  e raggi di base interno ed esterno  $a = 0.6 \text{ mm}$  e  $b = 0.7 \text{ mm}$ , rispettivamente (vedi figura). Sapendo che la resistività dell'alluminio è  $\tau = 2.7 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$ , si calcolino l'intensità di corrente che fluisce nel conduttore e la sua resistenza elettrica  $R$ .



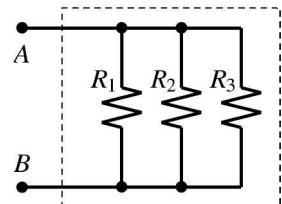
#### P.4.2.

Tre conduttori che presentano rispettivamente valori di resistenza  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  sono connessi in serie, come indicato in figura. Si calcoli il valore di resistenza equivalente della serie dei tre conduttori, cioè la resistenza di un conduttore nel quale, se sostituito alla serie dei tre conduttori, fluirebbe la stessa intensità di corrente, a parità di differenza di potenziale applicata fra i due estremi  $A$  e  $B$ .



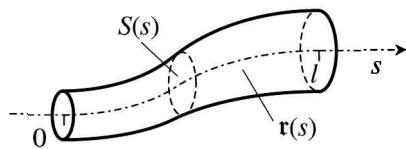
#### P.4.3.

Tre conduttori che presentano rispettivamente valori di resistenza  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  sono connessi in parallelo, come indicato in figura. Si calcoli il valore di resistenza equivalente del parallelo fra i tre conduttori, cioè la resistenza di un conduttore ai capi del quale, se sostituito al parallelo dei tre conduttori, a parità di intensità di corrente totale nei tre conduttori, si avrebbe la stessa differenza di potenziale fra i due estremi  $A$  e  $B$ .

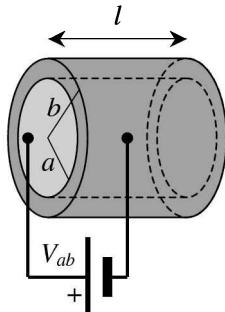


**P.4.4.**

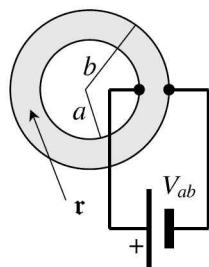
Un filo conduttore curvilineo ha lunghezza  $l$ , sezione  $S$  variabile lungo il suo asse secondo l'espressione  $S = S(s)$  (dove  $s$  rappresenta l'ascissa curvilinea) e resistività variabile secondo la legge  $\tau = \tau(s)$ , ma uniforme in ogni sezione del filo (vedi figura). Si ricavi l'espressione della resistenza elettrica di tale conduttore.

**P.4.5.**

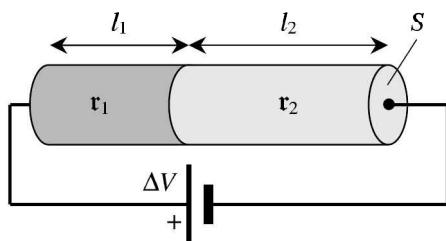
Un generatore mantiene una differenza di potenziale  $V_{ab} = 1.5$  V tra la superficie interna e quella esterna di un conduttore a forma di cilindro cavo, di lunghezza  $l = 1$  mm e raggi di base interno ed esterno  $a = 0.2$  mm e  $b = 0.8$  mm, rispettivamente (vedi figura). Sapendo che la resistività del conduttore è  $\tau = 3.5 \Omega \text{ cm}$ , si calcoli la potenza erogata dal generatore.

**P.4.6.**

Un generatore mantiene una differenza di potenziale  $V_{ab}$  tra la superficie interna e quella esterna di un guscio sferico di materiale conduttore, di raggi interno ed esterno  $a$  e  $b$ , rispettivamente, e di resistività  $\tau$  (vedi figura). Si calcoli l'intensità di corrente che fluisce nel conduttore.

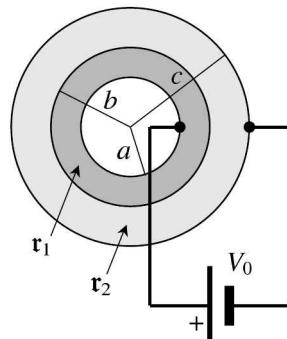
**P.4.7.**

Un generatore di differenza di potenziale  $\Delta V$  è connesso ai capi di un conduttore cilindrico di sezione  $S$ , che presenta una resistività  $\tau_1$  in un primo tratto, di lunghezza  $l_1$ , e poi una differente resistività  $\tau_2$  in un secondo tratto, di lunghezza  $l_2$  (vedi figura). Si calcolino l'intensità di corrente che fluisce nel conduttore e la densità di carica elettrica che si accumula alla superficie di discontinuità fra i due tratti di conduttore.

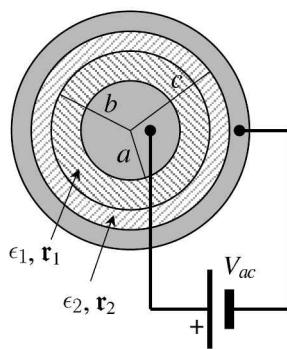


**P.4.8.**

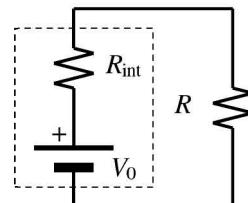
Due conduttori a forma di guscio sferico sono disposti concentricamente e connessi ad un generatore di differenza di potenziale  $V_0$ , come indicato in figura. Siano  $a$ ,  $b$  e  $c$  i loro raggi interni ed esterni,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  i rispettivi valori di resistività. Si calcolino, all'interno dei due conduttori, la densità di corrente  $\mathbf{J}$  ed il campo elettrico  $\mathbf{E}$ . Si calcoli infine la densità di carica elettrica che si accumula all'interfaccia fra i due conduttori.

**P.4.9.**

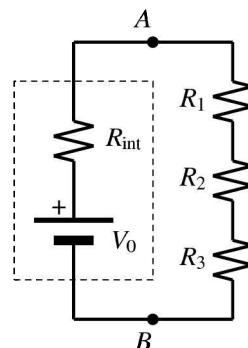
Un generatore mantiene una differenza di potenziale  $V_{ac}$  tra le armature di un condensatore cilindrico, di raggi interno ed esterno  $a$  e  $c$ , rispettivamente, e di altezza  $h \gg c$ . Lo spazio fra le armature è riempito da due diversi dielettrici, a forma di guscio cilindrico, di raggi  $(a, b)$  e  $(b, c)$ , come indicato in figura. Le costanti dielettriche assolute valgono  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$ , rispettivamente; entrambi i dielettrici sono isolanti imperfetti, cioè presentano resistività finite  $\tau_1$  e  $\tau_2$ . Si calcolino la carica immagazzinata su ciascuna delle armature e la densità di carica libera che si accumula all'interfaccia fra i due dielettrici.

**P.4.10.**

Un generatore reale che sviluppa una differenza di potenziale  $V_0$  può essere schematizzato come un generatore ideale con una resistenza interna  $R_{int}$ , di piccolo valore, collegata in serie. Il generatore viene utilizzato per alimentare un carico di resistenza  $R$ , come indicato in figura. Si calcoli la potenza trasferita dal generatore al carico e dissipata per effetto Joule nel resistore. Fissati  $V_0$  e  $R_{int}$ , per quale valore di  $R$  tale potenza è massima?

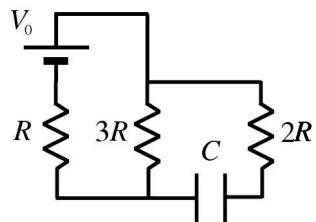
**P.4.11.**

Un generatore di differenza di potenziale  $V_0 = 12$  V con resistenza interna  $R_{int} = 0.5 \Omega$  è collegato ad una serie di tre resistori, di resistenze  $R_1 = 7.5 \Omega$ ,  $R_2 = 3.5 \Omega$  ed  $R_3 = 4.5 \Omega$ , come mostrato in figura. Si calcolino la corrente che circola nel circuito, la differenza di potenziale ai capi di ciascuno dei tre resistori e la differenza di potenziale  $V_{AB}$  ai capi del generatore reale.

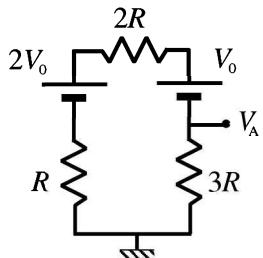


**P.4.12.**

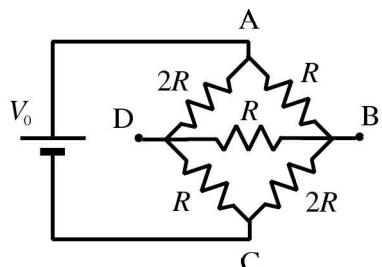
Si consideri il circuito in figura; si calcolino: (i) la corrente circolante nel circuito; (ii) la differenza di potenziale ai capi del condensatore in regime stazionario; (iii) la potenza dissipata dal generatore; (iv) l'energia immagazzinata nel condensatore. [ $R = 50 \Omega$ ;  $C = 150 \text{ nF}$ ;  $V_0 = 12 \text{ V}$ .]

**P.4.13.**

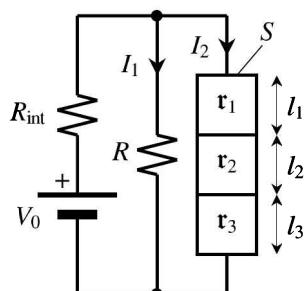
Al morsetto di uscita del circuito mostrato a lato è presente una differenza di potenziale  $V_A$  misurata rispetto alla massa. Si determini il valore di  $V_A$  in funzione delle quantità  $V_0$  ed  $R$ ; se si sostituisse la resistenza  $3R$  con una resistenza variabile  $R_{var}$ , quali sarebbero i valori di  $V_A$  che si potrebbero ottenere variando  $R_{var}$  tra zero (cortocircuito) ed infinito (circuito aperto)?

**P.4.14.**

Si consideri un circuito costituito da cinque resistori, disposti come in figura; agli estremi A e C del circuito si connette un generatore che mantiene una differenza di potenziale  $V_0$  costante; si calcolino: (i) la corrente circolante attraverso il generatore; (ii) la differenza di potenziale tra gli estremi B e D del circuito. [ $R = 100 \Omega$ ;  $V_0 = 15 \text{ V}$ ]

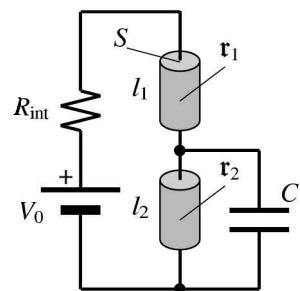
**P.4.15.**

Un generatore di differenza di potenziale  $V_0$  con resistenza interna  $R_{int}$  è collegato ad un carico di resistenza  $R$  e ad un conduttore formato da tre tratti di materiali diversi, di uguale sezione  $S$  e con resistività e lunghezze pari a  $(\tau_1, l_1)$ ,  $(\tau_2, l_2)$  e  $(\tau_3, l_3)$ , rispettivamente, come mostrato in figura. Si calcolino le correnti  $I_1$  e  $I_2$  che fuiscono nei due conduttori.

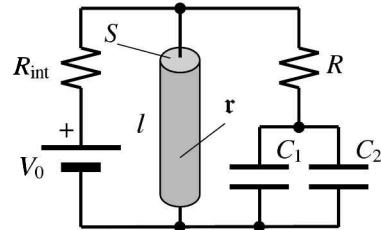


**P.4.16.**

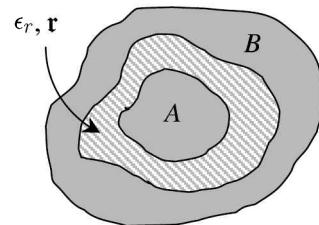
Un generatore di differenza di potenziale  $V_0 = 12$  V con resistenza interna  $R_{\text{int}} = 1 \Omega$  è collegato al circuito mostrato in figura. I due conduttori cilindrici del circuito hanno sezione  $S = 1 \text{ mm}^2$ , lunghezza  $l_1 = 1.4 \text{ cm}$  e  $l_2 = 2.5 \text{ cm}$ , e resistività  $\tau_1 = 2.5 \times 10^{-2} \Omega \text{ cm}$  e  $\tau_2 = 2.2 \times 10^{-2} \Omega \text{ cm}$ , rispettivamente; il condensatore ha capacità  $C = 100 \text{ nF}$ . Si calcolino, in condizioni stazionarie, la differenza di potenziale ai capi di ciascun resistore e la carica immagazzinata nel condensatore.

**P.4.17.**

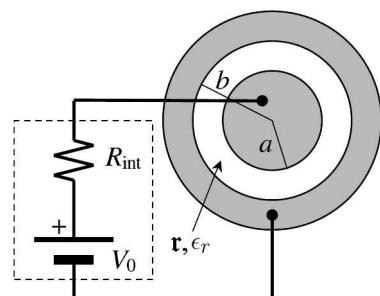
Un generatore di differenza di potenziale  $V_0$  con resistenza interna  $R_{\text{int}}$  è collegato al circuito mostrato in figura, composto da un conduttore cilindrico di lunghezza  $l$ , sezione  $S$  e resistività  $\tau$ , un resistore di resistenza  $R$  e due condensatori di capacità  $C_1$  e  $C_2$ . Si calcolino, in condizioni stazionarie, la potenza erogata dal generatore e l'energia elettrostatica immagazzinata in ciascun condensatore.

**P.4.18.**

Un conduttore  $A$  è completamente racchiuso da un conduttore cavo  $B$ ; l'intercapedine è riempita da un materiale dielettrico con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , ma non perfettamente isolante, con resistività  $\tau$  finita. La struttura costituisce quindi un condensatore con perdite. Si mostri che, qualunque siano le dimensioni e la forma del condensatore, la sua resistenza di perdita  $R_C$  e la sua capacità  $C$  sono legate dall'equazione  $R_C C = \tau \epsilon_0 \epsilon_r$ .

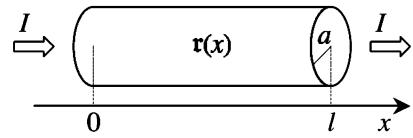
**P.4.19.**

Un condensatore cilindrico, di raggi interno ed esterno  $a$  e  $b$  e di altezza  $h \gg b$ , è riempito con un dielettrico imperfetto, di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  e di resistività  $\tau$  finita. Le due armature sono connesse ad un generatore di differenza di potenziale  $V_0$  con resistenza interna  $R_{\text{int}}$  (vedi figura). Si calcolino la potenza erogata dal generatore e l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

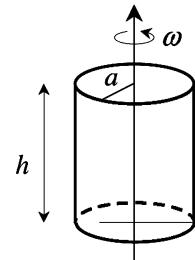


**P.4.20.**

Una corrente stazionaria  $I$  fluisce attraverso un conduttore cilindrico, di lunghezza  $l$  e raggio di base  $a$  (vedi figura). La resistività  $\tau$  varia linearmente lungo l'asse  $x$  del conduttore secondo l'espressione  $\tau(x) = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1)x/l$ , con  $0 \leq x \leq l$ . Si calcoli la distribuzione della densità volumetrica di carica  $\rho(x)$  lungo il conduttore.

**P.4.21.**

Un conduttore cilindrico di raggio  $a$  e di altezza  $h \gg a$  ruota attorno al suo asse con velocità angolare costante  $\omega$ . Indicando con  $m_e$  la massa e con  $q_e$  la carica di un elettrone, si calcolino la differenza di potenziale  $V(0) - V(a)$  fra l'asse del conduttore e la sua superficie laterale, la densità volumetrica  $\rho$  e quella superficiale  $\sigma$  delle cariche indotte nel conduttore a causa della rotazione.

**P.4.22.**

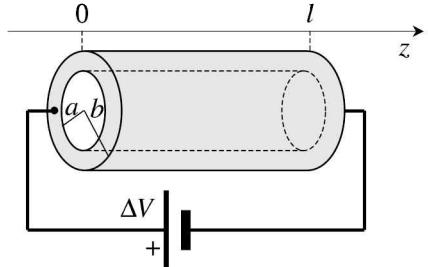
All'interno di un materiale conduttore, il libero cammino medio per gli elettroni di conduzione, cioè lo spazio percorso in media tra due urti successivi contro gli ioni del reticolo metallico, vale  $l_m = 1.5 \times 10^{-8}$  m. La densità degli elettroni di conduzione nel metallo vale  $n = 5.5 \times 10^{28}$  m $^{-3}$ . Ricordando che la massa e la carica di un elettrone valgono circa  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg e  $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$  C rispettivamente, si utilizzi un semplice modello microscopico della conduzione per ottenere una stima della resistività del conduttore alla temperatura  $T = 300$  K.

## 4.2 Soluzioni

### S.4.1.

La corrente stazionaria che fluisce nel conduttore quando una differenza di potenziale  $\Delta V$  viene applicata ai suoi estremi è distribuita uniformemente sulla sua sezione, di area  $S = \pi(b^2 - a^2)$ . La densità di corrente  $\mathbf{J}$ , quindi, è uniforme in tutti i punti del conduttore, ed è legata all'intensità di corrente  $I$  dalla seguente relazione:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S} \mathbf{u}_z, \quad (1)$$



dove  $\mathbf{u}_z$  indica il versore dell'asse  $z$ , che abbiamo preso diretto come il flusso di corrente, cioè dall'estremo del conduttore a potenziale più alto verso quello a potenziale più basso (vedi figura). Applicando la legge di Ohm in forma locale, quindi, possiamo scrivere la relazione che lega  $I$  al campo elettrico  $\mathbf{E}$  all'interno del conduttore:

$$\mathbf{E} = \tau \mathbf{J} = \frac{\tau I}{S} \mathbf{u}_z. \quad (2)$$

A questo punto, poiché il generatore mantiene una differenza di potenziale  $\Delta V$  tra i due estremi del conduttore, possiamo scrivere:

$$\Delta V = V(0) - V(l) = \int_0^l E(z) dz = \frac{\tau l}{S} I. \quad (3)$$

Da questa espressione ricaviamo subito l'intensità di corrente:

$$I = \frac{S \Delta V}{\tau l} = \frac{\pi(b^2 - a^2) \Delta V}{\tau l} \simeq 504 \text{ mA}. \quad (4)$$

Sempre dall'equazione (3), tenendo conto della legge di Ohm in forma integrale, otteniamo che la resistenza  $R$  del conduttore vale

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\tau l}{S}, \quad (5)$$

e quindi, nel nostro caso:

$$R = \frac{\tau l}{\pi(b^2 - a^2)} \simeq 49.6 \times 10^{-3} \Omega. \quad (6)$$

Osserviamo che l'equazione (5) sopra ricavata è di validità generale per tutti i conduttori omogenei di forma "cilindrica", cioè con sezione costante (non necessariamente di forma circolare) e superficie laterale ortogonale alle basi, in cui la differenza di potenziale sia applicata fra le due basi. In questo caso, infatti, la corrente stazionaria si distribuisce uniformemente sulla sezione e quindi si può applicare il ragionamento sopra descritto.

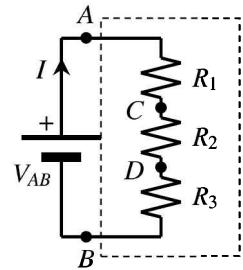
### S.4.2.

Supponiamo di connettere un generatore di differenza di potenziale  $V_{AB} = V_A - V_B$  alla serie dei tre resistori, fra i due estremi  $A$  e  $B$  (vedi figura). Nei tre conduttori fluirà una corrente stazionaria con la stessa intensità  $I$  (essendo connessi in serie), che ovviamente risulterà direttamente proporzionale a  $V_{AB}$ . Per calcolare la relazione che lega  $I$  a  $V_{AB}$  applichiamo la legge di Ohm in forma integrale a ciascuno dei conduttori:

$$V_1 = V_A - V_C = R_1 I, \quad (1)$$

$$V_2 = V_C - V_D = R_2 I, \quad (2)$$

$$V_3 = V_D - V_B = R_3 I. \quad (3)$$



Sommando membro a membro queste tre equazioni otteniamo:

$$V_A - V_C + V_C - V_D + V_D - V_B = V_A - V_B = (R_1 + R_2 + R_3) I. \quad (4)$$

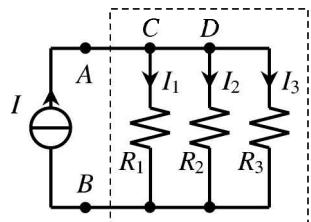
Di conseguenza possiamo calcolare la resistenza “equivalente serie”  $R_{\text{ser}}$  come il rapporto fra  $V_{AB}$  e  $I$ , cioè:

$$R_{\text{ser}} = R_1 + R_2 + R_3. \quad (5)$$

Questo risultato si generalizza in maniera ovvia al caso di un numero qualunque di resistenze connesse in serie: la resistenza equivalente è pari alla somma delle singole resistenze. Questa equivalenza è da intendersi ai fini esterni, cioè per quanto riguarda il rapporto fra la differenza di potenziale totale ai capi della serie e l'intensità di corrente che vi fluisce; naturalmente occorre invece considerare le singole resistenze (eventualmente dopo aver sfruttato l'equivalenza per calcolare la corrente che fluisce nella serie) se si vuole calcolare la differenza di potenziale ai capi di qualcuna di esse.

### S.4.3.

Supponiamo, in questo caso, di alimentare il parallelo delle tre resistenze con un generatore di corrente stazionaria  $I$  (vedi figura). Fra gli estremi  $A$  e  $B$  si svilupperà una certa differenza di potenziale  $V_{AB} = V_A - V_B$ , che sarà ovviamente la stessa ai capi di ciascuno dei tre conduttori, appunto perché sono connessi in parallelo. Possiamo allora applicare la legge di Ohm in forma integrale a ciascuno dei conduttori per calcolare l'intensità di corrente che vi fluisce:



$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1}, \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2}, \quad (2)$$

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3}. \quad (3)$$

Nel caso stazionario, essendo la divergenza del vettore densità di corrente  $\mathbf{J}$  pari a zero, l'intensità di corrente totale che entra in un nodo (o, più in generale, in una qualunque

superficie chiusa) è sempre uguale a quella che ne esce. In particolare, applicando questa legge ai nodi  $C$  e  $D$  otteniamo che la corrente totale  $I$  che fluisce nel parallelo è la somma delle tre correnti:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (4)$$

Possiamo quindi calcolare la resistenza “equivalente parallelo”  $R_{\text{par}}$  come il rapporto fra  $V_{AB}$  e  $I$ , cioè:

$$R_{\text{par}} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Questo risultato si generalizza in maniera ovvia al caso di un numero qualunque di resistenze connesse in parallelo: la resistenza equivalente è tale che il suo reciproco è pari alla somma dei reciproci delle singole resistenze. Come nel caso delle resistenze in serie, anche questa equivalenza è da intendersi ai soli fini esterni, cioè per quanto riguarda il rapporto fra la differenza di potenziale ai capi del parallelo e l'intensità di corrente totale che vi fluisce; occorre invece considerare le singole resistenze (eventualmente dopo aver sfruttato l'equivalenza per calcolare la differenza di potenziale ai capi del parallelo) se si vuole calcolare la corrente che fluisce attraverso qualcuna di esse.

#### S.4.4.

Per calcolare la resistenza elettrica  $R$  immaginiamo di applicare ai capi del conduttore una differenza di potenziale  $\Delta V = V(0) - V(l)$ , che produce un flusso di corrente stazionaria di intensità  $I$  nel verso in cui l'ascissa curvilinea  $s$  cresce. In ogni sezione del filo la densità di corrente  $J$  è tangente al filo conduttore ed uniforme, poiché il conduttore è per ipotesi filiforme e la resistività varia con  $s$  ma non sulla sezione stessa. Precisamente, avremo per il modulo  $J$  della densità di corrente:

$$J(s) = \frac{I}{S(s)}. \quad (1)$$

Applicando la legge di Ohm in forma locale otteniamo dunque che il campo elettrico vale

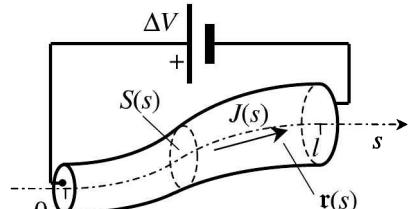
$$E(s) = \tau(s) J(s) = \tau(s) \frac{I}{S(s)}; \quad (2)$$

la differenza di potenziale ai capi del conduttore risulta perciò

$$\Delta V = V(0) - V(l) = \int_0^l E(s) ds = I \int_0^l \frac{\tau(s) ds}{S(s)}. \quad (3)$$

Infine, confrontando l'equazione (3) con la legge di Ohm in forma integrale, si ottiene l'espressione della resistenza:

$$R = \int_0^l \frac{\tau(s) ds}{S(s)}. \quad (4)$$



Come caso particolare, se la sezione  $S$  e la resistività  $\tau$  sono costanti lungo il filo, si ottiene la ben nota relazione per il calcolo della resistenza:

$$R = \frac{\tau l}{S}, \quad (5)$$

che abbiamo già ricavato nel risolvere il primo esercizio di questo capitolo. L'espressione (4) ha un'interpretazione fisica abbastanza semplice: il filo conduttore può essere pensato come una serie infinita di tratti di conduttore, di spessore infinitesimo  $ds$ , in ciascuno dei quali la resistività e la sezione sono uniformi. Ogni tratto presenta dunque una resistenza infinitesima  $dR$  che, in base all'equazione (5), vale

$$dR = \frac{\tau(s)ds}{S(s)}; \quad (6)$$

la resistenza totale è la somma di tutte queste resistenze in serie, cioè l'integrale di  $dR$ , trattandosi di infiniti termini. Ovviamente anche questo modo di procedere porta a scrivere l'equazione (4) per la resistenza di un filo conduttore con resistività e/o sezione non costante.

#### S.4.5.

Per calcolare la potenza erogata dal generatore è sufficiente calcolare l'intensità  $I$  della corrente stazionaria che fluisce dalla superficie interna verso quella esterna. Assumiamo che il generatore mantenga una differenza di potenziale  $V_{ab}$  tra la superficie interna del conduttore e quella esterna, ma che entrambe le superfici siano equipotenziali. Data la simmetria cilindrica della struttura, la densità di corrente ha certamente direzione radiale e modulo che dipende solo dalla distanza  $r$  dall'asse della struttura cilindrica:

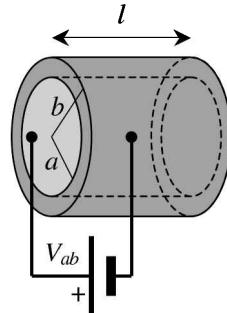
$$\mathbf{J} = J(r)\mathbf{u}_r, \quad (1)$$

dove  $\mathbf{u}_r$  indica il versore radiale uscente in un sistema di coordinate cilindriche. Se consideriamo le superfici cilindriche di raggio  $r$  e di lunghezza  $l$ , con  $a < r < b$ , coassiali con il conduttore, in condizioni stazionarie la corrente  $I$  che le attraversa è la stessa per tutte queste superfici, quindi la densità di corrente vale:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S(r)}\mathbf{u}_r = \frac{I}{2\pi rl}\mathbf{u}_r, \quad (2)$$

dove con  $S(r) = 2\pi rl$  abbiamo indicato l'area laterale della generica superficie cilindrica di raggio  $r$ . Il campo elettrico nel conduttore, perciò, vale:

$$\mathbf{E} = \tau \mathbf{J} = E(r)\mathbf{u}_r = \frac{\tau I}{2\pi rl}\mathbf{u}_r. \quad (3)$$



Possiamo ora imporre che l'integrale del campo elettrico lungo una linea radiale che va dalla superficie interna a quella esterna sia pari alla differenza di potenziale  $V_{ab}$  mantenuta dal generatore tra le due superfici:

$$V_{ab} = \int_a^b E(r)dr = \frac{\tau I}{2\pi l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\tau I}{2\pi l} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (4)$$

A questo punto siamo in grado di calcolare la corrente  $I$ , che è l'unica incognita nell'equazione (4), e quindi la potenza erogata dal generatore:

$$P = I V_{ab} = \frac{2\pi l V_{ab}^2}{\tau \ln(b/a)} \simeq 0.29 \text{ W}. \quad (5)$$

Un possibile procedimento alternativo consiste nel calcolare anzitutto la resistenza  $R$  del conduttore, e quindi la potenza erogata dal generatore. Per calcolare la resistenza  $R$  possiamo pensare il conduttore come una sequenza di gusci cilindrici, ciascuno di spessore infinitesimo  $dr$ , tutti collegati in serie. Questa scomposizione ha senso perché la densità di corrente  $\mathbf{J}$  ha direzione radiale nel conduttore e quindi è ortogonale alle superfici di ciascuno di questi gusci cilindrici. Il generico guscio di raggio  $r$  ha una superficie laterale  $S(r)$ , che costituisce la sezione del conduttore, mentre lo spessore  $dr$  fa da lunghezza del conduttore. La resistenza infinitesima del guscio cilindrico, quindi, si può calcolare applicando l'equazione (6) dell'esercizio precedente:

$$dR = \frac{\tau dr}{S(r)} = \frac{\tau dr}{2\pi rl}. \quad (6)$$

La resistenza totale del conduttore si calcola sommando tutte le resistenze dei gusci cilindrici, cioè eseguendo il seguente integrale:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\tau dr}{2\pi rl} = \frac{\tau}{2\pi l} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (7)$$

Utilizzando quindi l'espressione  $P = V_{ab}^2/R$  per la potenza erogata dal generatore si per-  
viene allo stesso risultato ottenuto in precedenza.

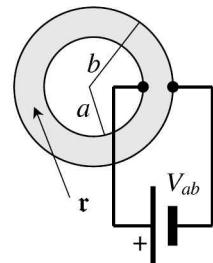
#### S.4.6.

Data la simmetria sferica del problema, la densità di corrente  $\mathbf{J}$  ed il campo elettrico  $\mathbf{E}$  hanno direzione radiale e modulo che dipende solo dalla distanza  $r$  dal centro della struttura. Ragionando come nell'esercizio precedente, in questo caso possiamo pensare il conduttore come una serie di gusci sferici di spessore infinitesimo  $dr$ . Il generico guscio sferico, di raggio  $r$ , presenta una superficie

$$S(r) = 4\pi r^2, \quad (1)$$

e quindi una resistenza infinitesima pari a:

$$dR = \frac{\tau dr}{S(r)} = \frac{\tau dr}{4\pi r^2}. \quad (2)$$



La resistenza totale è l'integrale di questa espressione:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\tau dr}{4\pi r^2} = \frac{\tau}{4\pi} \frac{b-a}{ab}. \quad (3)$$

L'intensità di corrente che fluisce nel conduttore, infine, si calcola applicando la legge di Ohm in forma integrale:

$$I = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{4\pi ab V_{ab}}{(b-a)\tau}. \quad (4)$$

### S.4.7.

La resistenza totale del conduttore si calcola sommando le resistenze dei singoli tratti, che sono connessi in serie:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}{S}. \quad (1)$$

Di conseguenza, in base alla legge di Ohm in forma integrale, l'intensità di corrente vale:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V S}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}. \quad (2)$$

Poiché i due tratti di conduttore hanno valori di resistività differente, anche il campo elettrico assume due valori diversi nelle due regioni. Infatti, per la legge di Ohm in forma locale, esso risulta pari al prodotto della resistività per la densità di corrente  $J = I/S$ , che è la stessa nei due tratti:

$$E_1 = \tau_1 \frac{I}{S} = \frac{\tau_1 \Delta V}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}, \quad (3)$$

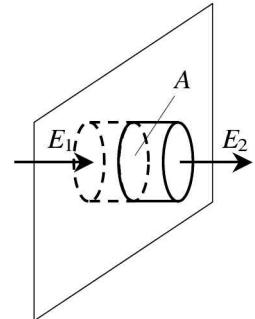
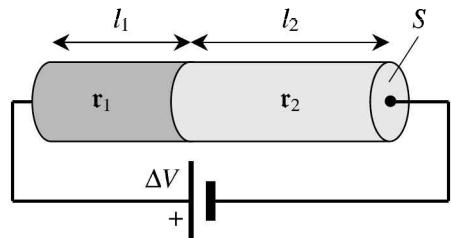
$$E_2 = \tau_2 \frac{I}{S} = \frac{\tau_2 \Delta V}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}. \quad (4)$$

Per questo motivo si accumula una carica elettrica all'interfaccia tra i due materiali, con una certa densità  $\sigma$  proporzionale alla differenza tra i valori del campo elettrico nelle due regioni. Infatti, applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di base  $A$  che si trovi a cavallo dell'interfaccia, come indicato in figura, tenendo conto delle direzioni dei campi  $E_1$  ed  $E_2$ , si ottiene:

$$\Phi_{\text{cil}}(\mathbf{E}) = \int_{\text{cil}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = (E_2 - E_1)A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

dove con  $\mathbf{n}$  abbiamo indicato il versore normale alla superficie del cilindro ed uscente da essa. In conclusione, in base a quest'ultima espressione e tenendo conto delle equazioni (3) e (4), la densità di carica accumulata all'interfaccia risulta pari a:

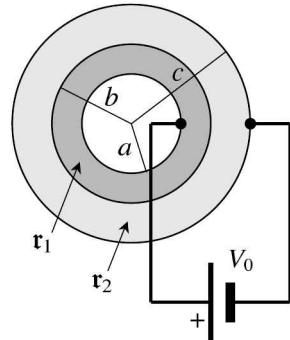
$$\sigma = \epsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\epsilon_0(\tau_2 - \tau_1)\Delta V}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}. \quad (6)$$



## S.4.8.

Osserviamo anzitutto che la densità di corrente  $\mathbf{J}$ , a causa della simmetria sferica della struttura, è diretta radialmente e dipende in modulo solo dalla distanza  $r$  dal centro. In condizioni stazionarie, la divergenza di  $\mathbf{J}$  è nulla e quindi l'intensità  $I$  della corrente che attraversa una qualunque superficie sferica di raggio  $r$  concentrica con i conduttori (con  $a < r < c$ ) è sempre la stessa. Inoltre, per ciascuna di tali superfici sferiche, la densità di corrente è legata ad  $I$  dalla seguente relazione:

$$\mathbf{J} = J(r) \mathbf{u}_r = \frac{I}{S(r)} \mathbf{u}_r = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r, \quad (1)$$



dove con  $S(r)$  abbiamo indicato l'area della superficie sferica considerata. Ora, per calcolare  $I$  è sufficiente esprimere il campo elettrico in funzione di  $I$  e poi imporre che il suo integrale lungo una linea radiale che va dalla superficie di raggio  $a$  a quella di raggio  $c$  sia pari alla differenza di potenziale  $V_0$ , mantenuta dal generatore fra le due superfici estreme. Dalla legge di Ohm in forma locale si ottiene:

$$\mathbf{E} = E(r) \mathbf{u}_r = \begin{cases} \frac{\tau_1 I}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r, & a < r < b, \\ \frac{\tau_2 I}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r, & b < r < c. \end{cases} \quad (2)$$

La differenza di potenziale vale quindi:

$$V_0 = \int_a^c E(r) dr = \int_a^b \frac{\tau_1 I}{4\pi r^2} dr + \int_b^c \frac{\tau_2 I}{4\pi r^2} dr = \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{\tau_1(b-a)}{ab} + \frac{\tau_2(c-b)}{bc} \right]. \quad (3)$$

Da questa equazione possiamo ricavare l'intensità di corrente  $I$ :

$$I = \frac{4\pi V_0 abc}{\tau_1 c(b-a) + \tau_2 a(c-b)}. \quad (4)$$

Sostituendo tale espressione nelle equazioni (1) e (2) si ottengono gli andamenti della densità di corrente e del campo elettrico nei conduttori:

$$\mathbf{J} = \frac{abc}{\tau_1 c(b-a) + \tau_2 a(c-b)} \frac{V_0}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{abc}{\tau_1 c(b-a) + \tau_2 a(c-b)} \frac{\tau_1 V_0}{r^2} \mathbf{u}_r, & a < r < b, \\ \frac{abc}{\tau_1 c(b-a) + \tau_2 a(c-b)} \frac{\tau_2 V_0}{r^2} \mathbf{u}_r, & b < r < c. \end{cases} \quad (6)$$

Per calcolare la densità di carica  $\sigma$  che si accumula fra i due conduttori consideriamo la superficie  $\Sigma$  di un guscio sferico, concentrico con la struttura, di spessore infinitesimo  $dr$  e che si trovi a cavallo della discontinuità di raggio  $b$ . Applicando il teorema di Gauss alla superficie  $\Sigma$  otteniamo:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = [E(b^+) - E(b^-)] 4\pi b^2 = \frac{\sigma 4\pi b^2}{\epsilon_0}, \quad (7)$$

dove con  $E(b^+)$  ed  $E(b^-)$  abbiamo indicato i valori del campo elettrico sulle superfici esterna ed interna di  $\Sigma$ , cioè ad una distanza dal centro, rispettivamente, superiore e inferiore di un infinitesimo a  $b$ . A questo punto, utilizzando l'equazione (6) per le espressioni del campo elettrico, si ricava:

$$\sigma = \epsilon_0 [E(b^+) - E(b^-)] = \epsilon_0 \frac{ac}{\tau_1 c(b-a) + \tau_2 a(c-b)} \frac{(\tau_2 - \tau_1)V_0}{b}. \quad (8)$$

*Nota.* E' interessante osservare che il segno della densità di carica che si accumula all'interfaccia dei due conduttori dipende dalla differenza di resistività degli stessi.

Inoltre, i due gusci sferici possono anche essere trattati come due resistenze in serie e quindi la resistenza totale vista dal generatore di tensione è pari a  $R_{tot} = R_1 + R_2$ , dove le due resistenze possono essere calcolate singolarmente utilizzando l'equazione (6) della soluzione S.4.4, applicata ad una geometria sferica. Si ottiene quindi:

$$R_{tot} = \frac{\tau_1}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{\tau_2}{4\pi} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\tau_1 c(b-a) + \tau_2 a(c-b)}{4\pi abc} \quad (9)$$

da cui si può ricavare la corrente  $I$  mediante la legge di Ohm,  $I = V_0/R_{tot}$ , ottenendo in modo alternativo l'equazione (4).

#### S.4.9.

Per calcolare la carica immagazzinata sulle armature e quella che si accumula fra i due dielettrici occorre anzitutto calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore.

Possiamo trascurare gli effetti di bordo, grazie all'ipotesi  $h \gg c$  che viene fatta nel testo. Di conseguenza, data la simmetria cilindrica del problema, la densità di corrente  $\mathbf{J}$  e il campo elettrico  $\mathbf{E}$  all'interno del condensatore hanno entrambi direzione radiale (in coordinate cilindriche) e dipendono in modulo solo dalla distanza  $r$  dall'asse di simmetria:

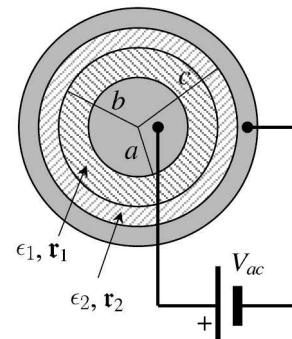
$$\mathbf{J} = J(r) \mathbf{u}_r, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \tau \mathbf{J} = E(r) \mathbf{u}_r, \quad (2)$$

dove  $\mathbf{u}_r$  indica il versore radiale uscente in un sistema di coordinate cilindriche. Inoltre, in condizioni stazionarie, l'intensità di corrente  $I$  che attraversa una qualunque superficie cilindrica di raggio  $r$ , con  $a < r < c$ , e di altezza  $h$ , coassiale con i conduttori, è sempre la stessa. Di conseguenza la densità di corrente è legata alla corrente  $I$  dalla seguente relazione:

$$J(r) = \frac{I}{S(r)} = \frac{I}{2\pi hr}, \quad (3)$$

dove  $S(r) = 2\pi rh$  indica l'area della superficie cilindrica di raggio  $r$  e di altezza  $h$ . L'andamento del campo elettrico in funzione di  $I$  si ricava applicando la legge di Ohm in forma



locale:

$$E(r) = \epsilon J(r) = \begin{cases} \frac{\epsilon_1}{2\pi hr} I, & a < r < b, \\ \frac{\epsilon_2}{2\pi hr} I, & b < r < c. \end{cases} \quad (4)$$

Per calcolare  $I$  basta integrare il campo elettrico lungo una linea radiale che va dalla superficie di raggio  $a$  a quella di raggio  $c$  ed imporre che la differenza di potenziale sia pari a quella del generatore, cioè  $V_{ac}$ :

$$V_{ac} = \int_a^c E(r) dr = \frac{I}{2\pi h} \left( \epsilon_1 \int_a^b \frac{dr}{r} + \epsilon_2 \int_b^c \frac{dr}{r} \right) = \frac{I}{2\pi h} [\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)], \quad (5)$$

da cui

$$I = \frac{2\pi h}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} V_{ac}. \quad (6)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (4) si ricava l'andamento del campo elettrico nei due dielettrici:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} \frac{V_{ac}}{r} \mathbf{u}_r, & a < r < b, \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} \frac{V_{ac}}{r} \mathbf{u}_r, & b < r < c. \end{cases} \quad (7)$$

A questo punto possiamo calcolare la carica  $Q_a$  immagazzinata sull'armatura di raggio  $a$  applicando il teorema di Gauss. Considerando infatti una superficie cilindrica  $S$  di raggio  $r$ , con  $a < r < b$ , e di altezza  $h$ , avremo:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_a}{\epsilon_1}, \quad a < r < b, \quad (8)$$

da cui si ricava  $Q_a$  sostituendo l'espressione (7) del campo elettrico:

$$Q_a = \frac{\epsilon_1 \epsilon_1}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} 2\pi h V_{ac}. \quad (9)$$

Per quanto riguarda la densità di carica libera  $\sigma$  alla discontinuità possiamo applicare la legge di Gauss alla superficie  $\Sigma$  di un guscio cilindrico di spessore infinitesimo  $dr$ , di altezza  $h$  e a cavallo dell'interfaccia di raggio  $b$  fra i due dielettrici. Poiché le costanti dielettriche dei due mezzi sono differenti applichiamo la legge di Gauss per il vettore spostamento elettrico  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ :

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = \int_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = [D(b^+) - D(b^-)] 2\pi b h = \sigma 2\pi b h, \quad (10)$$

da cui

$$\sigma = D(b^+) - D(b^-) = \epsilon_2 E(b^+) - \epsilon_1 E(b^-). \quad (11)$$

Sostituendo in questa espressione i valori del campo elettrico calcolati utilizzando l'equazione (7) si ottiene:

$$\sigma = \frac{(\epsilon_2 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_1)}{\epsilon_1 \ln(b/a) + \epsilon_2 \ln(c/b)} \frac{V_{ac}}{b}. \quad (12)$$

Resta infine da calcolare la carica  $Q_c$  depositata sull'armatura esterna, che per via della corrente di perdita non ha lo stesso modulo di  $Q_a$ , come avviene in un condensatore ideale. E' facile rendersi conto del fatto che, in questo caso, la carica indotta  $Q_c$  è uguale in modulo e opposta in segno alla somma di  $Q_a$  e della carica libera che si accumula alla superficie di discontinuità fra i due dielettrici:

$$Q_c = -(Q_a + \sigma 2\pi b h). \quad (13)$$

Se infatti consideriamo una superficie chiusa  $\Sigma'$  che si trovi interamente nel conduttore esterno, ad esempio una superficie cilindrica con raggio maggiore di  $c$ , il campo elettrico è certamente nullo in tutti i suoi punti (poiché consideriamo le armature del condensatore come conduttori ideali, cioè con resistività nulla) e quindi certamente il flusso del vettore spostamento elettrico uscente da  $\Sigma'$  si annulla. Per il teorema di Gauss, dunque, la carica libera totale all'interno di  $\Sigma'$  è zero, cioè vale l'equazione (13). Sostituendo le espressioni di  $Q_a$  [equazione (9)] e di  $\sigma$  [equazione (12)] otteniamo la seguente espressione per  $Q_c$ :

$$Q_c = -2\pi h V_{ac} \frac{\tau_2 \epsilon_2}{\tau_1 \ln(b/a) + \tau_2 \ln(c/b)}. \quad (14)$$

#### S.4.10.

L'intensità di corrente  $I$  che circola nella resistenza di carico  $R$  è la stessa che attraversa anche la resistenza interna  $R_{int}$  del generatore. Applicando la legge di Ohm separatamente alle due resistenze si ottiene che:

$$V_A - V_B = R I, \quad (1)$$

$$V_C - V_A = R_{int} I. \quad (2)$$

Poiché, inoltre, il generatore ideale mantiene una differenza di potenziale  $V_0$  tra i punti  $C$  e  $B$ , avremo che:

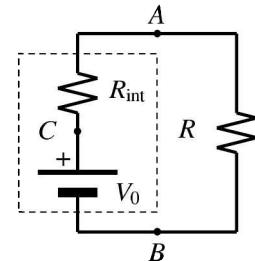
$$V_0 = V_C - V_B = (V_C - V_A) + (V_A - V_B) = (R_{int} + R)I. \quad (3)$$

La corrente che circola nei due resistori, cioè, essendo essi connessi in serie, è la stessa che attraverserebbe un unico resistore di resistenza pari alla somma  $R_{int} + R$ . Dall'equazione (3) si ricava subito  $I$  in funzione di  $V_0$ ,  $R$  e  $R_{int}$ ; la potenza trasferita dal generatore al carico, che viene dissipata per effetto Joule nel resistore, si calcola come:

$$P_{diss} = I^2 R = \frac{R}{(R_{int} + R)^2} V_0^2. \quad (4)$$

Se pensiamo di variare  $R$ , mantenendo invece fissi  $V_0$  e  $R_{int}$ , la potenza dissipata è nulla per  $R = 0$  (corto-circuito) e tende a zero per  $R \rightarrow \infty$  (circuito aperto). E' logico, quindi, che tale potenza risulti massima per  $R$  pari ad un certo valore intermedio  $R_{max}$ . Per ricavare  $R_{max}$  calcoliamo la derivata di  $P_{diss}$  rispetto ad  $R$ :

$$\frac{dP_{diss}}{dR} = \frac{(R_{int} + R)^2 - 2(R_{int} + R)R}{(R_{int} + R)^4} V_0^2 = \frac{R_{int} - R}{(R_{int} + R)^3} V_0^2. \quad (5)$$



La derivata risulta positiva (e quindi la funzione crescente) per  $R < R_{\text{int}}$ , negativa per  $R > R_{\text{int}}$ ; di conseguenza, il punto di massimo si ha proprio per

$$R = R_{\text{max}} = R_{\text{int}}. \quad (6)$$

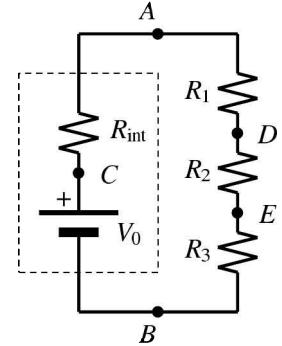
Questa situazione viene comunemente descritta dicendo che la potenza trasferita al carico è massima se la resistenza del carico è *adattata* alla resistenza interna del generatore.

#### S.4.11.

Dal momento che i quattro resistori sono connessi in serie, la corrente che circola in essi è la stessa che circolerebbe in un unico resistore di resistenza pari alla somma delle quattro resistenze, come nell'esercizio precedente:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} = 750 \text{ mA}. \quad (1)$$

Indichiamo come  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  le differenze di potenziale ai capi di  $R_1$ ,  $R_2$  ed  $R_3$ . Possiamo calcolare tali differenze di potenziale semplicemente applicando a ciascuno dei resistori la legge di Ohm:



$$V_1 = V_A - V_D = R_1 I = \frac{R_1}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} V_0 = 5.625 \text{ V}, \quad (2)$$

$$V_2 = V_D - V_E = R_2 I = \frac{R_2}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} V_0 = 2.625 \text{ V}, \quad (3)$$

$$V_3 = V_E - V_B = R_3 I = \frac{R_3}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} V_0 = 3.375 \text{ V}. \quad (4)$$

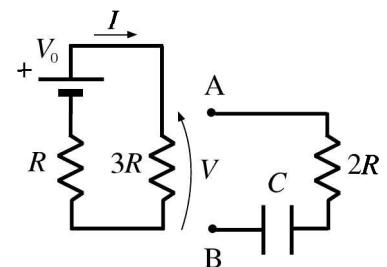
Infine, la differenza di potenziale ai capi del generatore reale si può calcolare come:

$$V_{AB} = V_A - V_B = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2 + R_3} V_0 = 11.625 \text{ V}. \quad (5)$$

Osserviamo che  $V_{AB}$  risulta leggermente inferiore a  $V_0$ ; quest'ultima viene anche chiamata differenza di potenziale *a vuoto* (cioè in assenza di carico) del generatore.

#### S.4.12.

Per risolvere il problema, notiamo che nel ramo contenente il condensatore (tratto AB in figura) non circola corrente, in quanto il condensatore stesso agisce in regime stazionario da circuito aperto; ai fini del calcolo della corrente, possiamo separare questo tratto dal resto del circuito nel modo mostrato in figura. La corrente  $I$  circolante nel sistema sarà allora pari, per la legge di Ohm, a:



$$I = \frac{V_0}{R + 3R} = \frac{V_0}{4R}. \quad (1)$$

La potenza dissipata dal generatore sarà allora pari a:

$$\mathcal{P} = V_0 I = \frac{V_0^2}{4R}. \quad (2)$$

La differenza di potenziale  $V$  ai capi della resistenza  $3R$  è pari anche alla differenza di potenziale ai capi del ramo AB del circuito (si veda la figura); poiché in questa parte del circuito non circola corrente, la differenza di potenziale ai capi della resistenza  $2R$  sarà nulla; dunque ai capi del condensatore si trova una differenza di potenziale pari proprio a  $V$ . In base al risultato dell'equazione (1) si ottiene:

$$V = 3R I = \frac{3}{4}V_0. \quad (3)$$

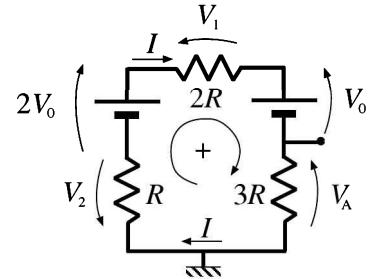
Possiamo a tal punto calcolare l'energia  $U$  immagazzinata nel condensatore mediante la ben nota espressione:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{9}{32}CV_0^2. \quad (4)$$

Sostituendo nelle precedenti espressioni i valori numerici assegnati dal testo, si ottiene  $I = 0.06$  A,  $V = 9$  V,  $\mathcal{P} = 0.72$  W ed  $U = 6.07 \mu\text{J}$ .

#### S.4.13.

Supponremo nel seguito che la corrente  $i$  circolante nel sistema fluisca in verso orario, come illustrato in figura. Per poter risolvere il problema fissiamo una convenzione di segno per le differenze di potenziale: indicheremo la differenza di potenziale ai capi di un componente del circuito mediante una freccia, la cui testa coincida con l'estremo a potenziale più alto e la cui coda con l'estremo a potenziale più basso; assumeremo poi che differenze di potenziale orientate in verso orario siano positive, mentre saranno negative se dotate di verso opposto. In base al verso assegnato alla corrente, le differenze di potenziale ai capi dei vari componenti risultano orientate come in figura (si noti che per i generatori l'estremo a potenziale maggiore è quello disegnato con il segmento più lungo e sottile; per i resistori si assume che l'estremo in cui la corrente entra è quello a potenziale maggiore). Si noti che la differenza di potenziale  $V_A$  tra il morsetto di uscita del circuito e la massa coincide con la differenza di potenziale ai capi della resistenza  $3R$ ; chiameremo inoltre con  $V_1$  e  $V_2$  le differenze di potenziale rispettivamente ai capi delle resistenze  $2R$  ed  $R$ . A tal punto possiamo applicare al circuito la conservatività del campo elettrico, che si traduce semplicemente nel fatto che la somma delle differenze di potenziale lungo un percorso chiuso è nulla; pertanto:



$$2V_0 - V_1 - V_0 - V_A - V_2 = 0; \quad (1)$$

In base alla legge di Ohm possiamo porre:

$$\begin{cases} V_1 = 2R I \\ V_2 = R I \\ V_A = 3R I \end{cases} \quad (2)$$

Sostituendo le (2) nella (1), otteniamo:

$$I = \frac{V_0}{6R}, \quad (3)$$

che, sostituita nella terza delle (2), comporta:

$$V_A = \frac{V_0}{2}. \quad (4)$$

Se la resistenza  $3R$  fosse sostituita da una resistenza variabile  $R_{var}$ , dovremmo sostituire la terza delle (2) con l'equazione:

$$V_A = R_{var} I, \quad (5)$$

da cui, dopo sostituzione nella (1), otterremmo:

$$I = \frac{V_0}{3R + R_{var}}. \quad (6)$$

Sostituendo tale espressione di nuovo nella (5), si ottiene infine:

$$V_A = V_0 \frac{R_{var}}{3R + R_{var}}; \quad (7)$$

se poniamo nella (7) che  $R_{var}$  sia nulla (corto circuito), otteniamo ovviamente:

$$V_{A, c. c.} = 0; \quad (8)$$

se imponiamo nella (7) che  $R_{var} \rightarrow \infty$  (circuito aperto) otteniamo invece:

$$V_{A, c. a.} = \lim_{R_{var} \rightarrow \infty} V_0 \frac{R_{var}}{3R + R_{var}} = V_0. \quad (9)$$

#### S.4.14.

Consideriamo al momento il circuito privo del generatore ed ipotizziamo che in ingresso (morsetto A) fluisca una corrente  $I$ . Tale corrente si ripartirà tra i due resistori superiori in due correnti  $I_1$  ed  $I_2$ ; essendo in regime stazionario, la somma delle correnti afferenti ad un nodo del circuito deve essere uguale a quella delle correnti uscenti; posto che le correnti in ingresso siano prese col segno positivo mentre quelle uscenti con segno negativo, possiamo riscrivere ciò nella forma:

$$I - I_1 - I_2 = 0, \quad (1)$$

che diviene semplicemente:

$$I = I_1 + I_2. \quad (2)$$

La corrente  $I_1$  si ripartisce nel nodo D tra una corrente  $I_3$  che scorre nel resistore centrale ed una corrente  $I_4$  che scorre nel resistore inferiore; possiamo quindi porre:

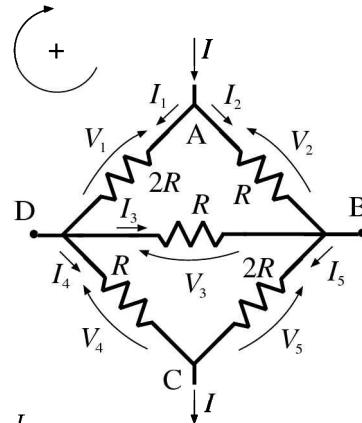
$$I_1 = I_3 + I_4; \quad (3)$$

nel nodo B avremo invece che la corrente  $I_2$  si somma alla  $I_3$ ; la somma  $I_5$  scorre poi nel resistore inferiore; pertanto:

$$I_5 = I_2 + I_3. \quad (4)$$

Infine nel nodo C le correnti  $I_4$  ed  $I_5$  si sommano per dar vita nuovamente alla corrente  $I$  (si rammenti che i nodi A e C sono fra loro connessi mediante il generatore):

$$I = I_4 + I_5 = I_1 + I_2. \quad (5)$$



Consideriamo ora le relazioni fra le differenze di potenziale ai capi dei vari componenti del circuito; si rammenta che la somma delle differenze di potenziale lungo un percorso chiuso è pari a zero. Assumeremo come positive le differenze di potenziale orientate in verso orario (si veda la figura); nella maglia superiore del circuito possiamo porre:

$$V_1 - V_2 + V_3 = 0; \quad (6)$$

nella maglia inferiore avremo:

$$V_4 - V_3 - V_5 = 0, \quad (7)$$

ricordando che i capi A e C sono collegati al generatore di differenza di potenziale  $V_0$ , possiamo porre:

$$V_1 + V_4 = V_0; \quad (8)$$

infine, considerando l'intero circuito, otterremo:

$$V_1 - V_2 - V_5 + V_4 = 0. \quad (9)$$

Si noti che le equazioni determinate precedentemente sono fra loro linearmente dipendenti; in particolare la (5) dipende dalle (2-4), mentre la (9) dipende dalle (6-8). Pertanto non tutte le equazioni determinate sono utili ai fini della soluzione del problema.

Mediante la legge di Ohm, possiamo legare poi correnti e differenze di potenziale:

$$\begin{cases} V_1 = 2R I_1; & V_2 = R I_2; \\ V_3 = R I_3; & V_4 = R I_4; \\ V_5 = 2R I_5. \end{cases} \quad (10)$$

Sostituendo le (10) nelle (6-8) otteniamo:

$$\begin{cases} 2R I_1 - R I_2 + R I_3 = 0 \\ R I_4 - R I_3 - 2R I_5 = 0 \\ 2R I_1 + R I_4 = V_0 \end{cases} \quad (11)$$

Semplificando opportunamente le precedenti equazioni ed aggiungendo le (2-4), otteniamo un sistema di sei equazioni in sei incognite:

$$\begin{cases} 2I_1 - I_2 + I_3 = 0; & I_4 - I_3 - 2I_5 = 0; \\ 2I_1 + I_4 = V_0/R; & I - I_1 - I_2 = 0; \\ I_1 - I_3 - I_4 = 0; & I_5 - I_2 - I_3 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Si noti che non è indispensabile risolvere il sistema con i metodi ordinari: difatti si può notare che il circuito non cambia se viene ruotato di  $180^\circ$ ; pertanto, per simmetria, si avrà che:

$$\begin{cases} I_1 = I_5 \\ I_2 = I_4 \end{cases} \quad (13)$$

le quali, sostituite nel sistema precedente e tenuto conto dei valori numerici assegnati dal problema, consentono di ottenere la soluzione:

$$\begin{cases} I_1 = I_5 = \frac{2V_0}{7R} = 42.8 \text{ mA} \\ I_2 = I_4 = \frac{3V_0}{7R} = 64.3 \text{ mA} \\ I_3 = -\frac{I_1}{2} = -\frac{V_0}{7R} = -21.4 \text{ mA} \end{cases} \quad (14)$$

Si noti che la corrente  $I_3$  ha verso opposto a quello ipotizzato nella figura iniziale. Dai risultati precedenti, si ottiene poi la corrente circolante attraverso il generatore  $I = I_1 + I_2 = 107.1 \text{ mA}$ . La differenza di potenziale tra i morsetti B e D è pari a  $R I_3 = V_0/7 = 2.14 \text{ V}$ .

**S.4.15.**

Anzitutto calcoliamo le resistenze dei singoli tratti di conduttore, che valgono rispettivamente:

$$R_1 = \frac{\tau_1 l_1}{S}, \quad (1)$$

$$R_2 = \frac{\tau_2 l_2}{S}, \quad (2)$$

$$R_3 = \frac{\tau_3 l_3}{S}. \quad (3)$$

Poiché i singoli tratti sono connessi in serie e quindi attraversati dalla stessa intensità di corrente, la resistenza globale è semplicemente la somma delle tre resistenze parziali:

$$R_{\text{ser}} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2 + \tau_3 l_3}{S}. \quad (4)$$

Poiché questo conduttore e la resistenza  $R$  sono connessi in parallelo, la differenza di potenziale  $V_{AB} = V_A - V_B$  ai capi di essi è la stessa. Le intensità di corrente  $I_1$  e  $I_2$  che li attraversano, in base alla legge di Ohm, si possono esprimere in funzione di  $V_{AB}$  come:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R}, \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_{\text{ser}}}. \quad (6)$$

Si tratta ora di calcolare  $V_{AB}$ . La corrente  $I$  erogata dal generatore, che attraversa la sua resistenza interna, è quella che entra nel nodo  $A$ ; poiché siamo in condizioni stazionarie, la corrente che entra in un nodo (o, più in generale, in una superficie chiusa) è sempre uguale a quella che ne esce, e quindi:

$$I = I_1 + I_2 = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\text{ser}}} \right) V_{AB}. \quad (7)$$

In altre parole, la corrente totale che circola nel parallelo delle due resistenze è la stessa che attraverserebbe, a parità di differenza di potenziale  $V_{AB}$ , un unico resistore di resistenza  $R_{\text{par}}$  tale che l'inverso di  $R_{\text{par}}$  sia pari alla somma degli inversi. Poiché questa stessa corrente attraversa anche la resistenza interna, la differenza di potenziale ai suoi capi vale:

$$V_C - V_A = R_{\text{int}} I = \frac{R_{\text{int}}(R_{\text{ser}} + R)}{R R_{\text{ser}}} V_{AB}. \quad (8)$$

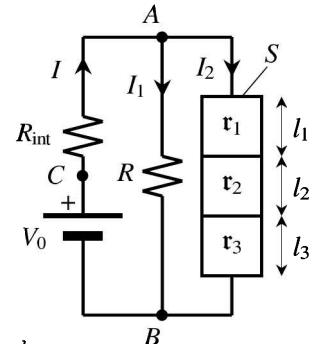
A questo punto consideriamo che il generatore mantiene una differenza di potenziale  $V_0$  fra il punto  $C$  e il punto  $B$ , quindi:

$$V_0 = V_C - V_B = V_C - V_A + V_{AB} = \frac{R_{\text{int}}(1 + R/R_{\text{ser}}) + R}{R} V_{AB}. \quad (9)$$

Da questa equazione ricaviamo ora  $V_{AB}$  in funzione di  $V_0$  e ne sostituiamo l'espressione nelle equazioni (5) e (6) per  $I_1$  e  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{V_0}{R + R_{\text{int}}(1 + R/R_{\text{ser}})}, \quad (10)$$

$$I_2 = \frac{V_0}{R_{\text{ser}} + R_{\text{int}}(1 + R_{\text{ser}}/R)}. \quad (11)$$



Sostituendo anche l'equazione (4) per  $R_{\text{ser}}$ , infine, otteniamo:

$$I_1 = \frac{V_0}{R + R_{\text{int}}[1 + R S / (\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2 + \tau_3 l_3)]}, \quad (12)$$

$$I_2 = \frac{V_0 S}{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2 + \tau_3 l_3 + R_{\text{int}}[S + (\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2 + \tau_3 l_3)/R]}. \quad (13)$$

#### S.4.16.

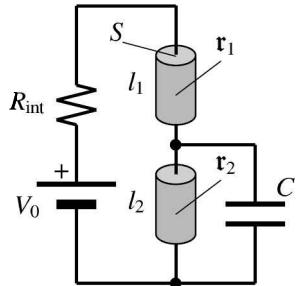
Calcoliamo anzitutto le resistenze dei due conduttori cilindrici, che valgono rispettivamente:

$$R_1 = \frac{\tau_1 l_1}{S}, \quad (1)$$

$$R_2 = \frac{\tau_2 l_2}{S}. \quad (2)$$

Osserviamo poi che, in condizioni stazionarie, non c'è corrente che attraversa il condensatore, il quale si comporta come un circuito aperto. Per questo motivo l'intensità  $I$  della corrente che fluisce nei due conduttori cilindrici è la stessa, come se fossero connessi in serie. Per calcolarla è sufficiente dividere la differenza di potenziale  $V_0$  per la resistenza totale:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_1 + R_2} = \frac{S V_0}{S R_{\text{int}} + \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}. \quad (3)$$



La differenza di potenziale ai capi di ciascuno dei due conduttori cilindrici si calcola applicando la legge di Ohm, cioè moltiplicando la corrente  $I$  per la rispettiva resistenza:

$$V_1 = R_1 I = \frac{\tau_1 l_1}{S R_{\text{int}} + \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2} V_0 = 4.2 \text{ V}, \quad (4)$$

$$V_2 = R_2 I = \frac{\tau_2 l_2}{S R_{\text{int}} + \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2} V_0 = 6.6 \text{ V}. \quad (5)$$

La differenza di potenziale  $V_2$  è la stessa che troviamo ai capi del condensatore. In base alla definizione di capacità  $C = Q/\Delta V$ , dove  $\Delta V$  indica la differenza di potenziale ai capi del condensatore, la carica immagazzinata in esso vale:

$$Q = C V_2 = \frac{\tau_2 l_2}{S R_{\text{int}} + \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2} C V_0 = 6.6 \times 10^{-7} \text{ C}. \quad (6)$$

**S.4.17.**

In condizioni stazionarie i due condensatori si comportano come circuiti aperti, cioè attraverso di essi non fluisce alcuna corrente. Per questo motivo anche la resistenza  $R$  non è attraversata da corrente, e dunque la differenza di potenziale ai suoi capi è nulla:

$$V_A = V_C. \quad (1)$$

La corrente  $I$  erogata dal generatore fluisce invece, oltre che nella resistenza interna, nel conduttore cilindrico, la cui resistenza vale:

$$R_{\text{cil}} = \frac{\tau l}{S}. \quad (2)$$

Per calcolare  $I$  dividiamo la differenza di potenziale per la resistenza totale:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_{\text{cil}}} = \frac{S V_0}{S R_{\text{int}} + \tau l}. \quad (3)$$

La potenza erogata dal generatore vale quindi:

$$P_{\text{gen}} = V_0 I = \frac{S V_0^2}{S R_{\text{int}} + \tau l}. \quad (4)$$

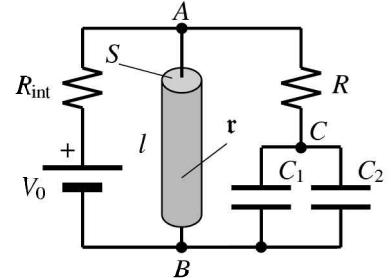
L'energia elettrostatica immagazzinata nei condensatori dipende dalla differenza di potenziale  $V_C - V_B$  ai loro capi, che in base all'equazione (1) è uguale alla differenza di potenziale  $V_A - V_B$  ai capi del resistore cilindrico. Quest'ultima si calcola semplicemente applicando la legge di Ohm:

$$V_A - V_B = R_{\text{cil}} I = \frac{\tau l}{S R_{\text{int}} + \tau l} V_0. \quad (5)$$

Ricordiamo infine che l'energia elettrostatica  $U$  immagazzinata in un condensatore di capacità  $C$  si può esprimere come  $U = C \Delta V^2 / 2$ , dove  $\Delta V$  indica la differenza di potenziale ai suoi capi. Nel nostro caso, perciò, per  $C_1$  e  $C_2$  avremo rispettivamente:

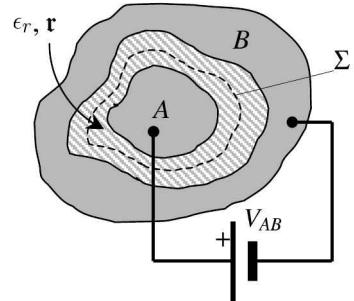
$$U_1 = \frac{C_1(V_C - V_B)^2}{2} = \frac{C_1}{2} \left( \frac{\tau l}{S R_{\text{int}} + \tau l} \right)^2 V_0^2, \quad (6)$$

$$U_2 = \frac{C_2(V_C - V_B)^2}{2} = \frac{C_2}{2} \left( \frac{\tau l}{S R_{\text{int}} + \tau l} \right)^2 V_0^2. \quad (7)$$



### S.4.18.

Sia la resistenza di perdita  $R_C$  sia la capacità  $C$  del condensatore possono essere calcolate immaginando di collegare un generatore di differenza di potenziale  $V_{AB}$  fra l'armatura interna e quella esterna, come indicato in figura. In questo caso, infatti, fra le due armature si genera una certa configurazione di campo elettrico  $\mathbf{E}$ , che dipende dalla particolare geometria del condensatore. In ogni punto, tuttavia, il campo ha intensità direttamente proporzionale a  $V_{AB}$ , poiché il suo integrale lungo una qualunque linea orientata  $\gamma$  che va dal conduttore interno a quello esterno è pari appunto alla differenza di potenziale imposta dal generatore:



$$V_{AB} = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1)$$

Al campo elettrico sono legate sia la carica immagazzinata sulle armature sia l'intensità di corrente di perdita che fluisce nel condensatore. Consideriamo infatti una superficie chiusa  $\Sigma$  che racchiuda il conduttore  $A$  ma non il conduttore  $B$ , come indicato in figura. La carica libera interna a  $\Sigma$ , cioè la carica  $Q$  immagazzinata sull'armatura interna, in base al teorema di Gauss, è pari al flusso del vettore spostamento elettrico  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$  uscente da  $\Sigma$ :

$$Q = \int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon_0 \epsilon_r \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2)$$

La capacità del condensatore, di conseguenza, si calcola come:

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{V_{AB}} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3)$$

L'intensità di corrente  $I$  che fluisce dall'armatura interna verso quella esterna, d'altra parte, è pari al flusso della densità di corrente  $\mathbf{J}$  uscente da  $\Sigma$ . Ricordando anche la legge di Ohm in forma locale  $\mathbf{E} = \tau \mathbf{J}$ , quindi, possiamo scrivere:

$$I = \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\tau} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4)$$

La resistenza di perdita  $R_C$ , in base alla legge di Ohm in forma integrale, vale:

$$R_C = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{\tau V_{AB}}{\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS}. \quad (5)$$

Se ora calcoliamo il prodotto  $R_C C$  utilizzando le equazioni (5) e (3) otteniamo che la differenza di potenziale ed il flusso del campo elettrico si semplificano, e risulta:

$$R_C C = \tau \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (6)$$

Sia la resistenza di perdita sia la capacità, ovviamente, dipendono dalla particolare geometria e dalle dimensioni del condensatore; il loro prodotto, tuttavia, non ne dipende,

come abbiamo appena dimostrato.

#### S.4.19.

Per calcolare la potenza erogata dal generatore e l'energia immagazzinata nel condensatore occorre anzitutto calcolare l'intensità  $I$  della corrente stazionaria che fluisce nel condensatore. Se indichiamo come  $R_C$  la resistenza di perdita del condensatore, la corrente vale:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_C}. \quad (1)$$

Per calcolare  $R_C$  consideriamo anzitutto la simmetria cilindrica del problema: nell'ipotesi  $h \gg b$  gli effetti di bordo sono trascurabili e quindi il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e la densità di corrente  $\mathbf{J}$  hanno direzione radiale (in un sistema di coordinate cilindriche) e modulo che dipende solo dalla distanza  $r$  dall'asse di simmetria. Sia  $V_{ab}$  la differenza di potenziale (incognita) ai capi del condensatore, che è pari all'integrale del campo elettrico:

$$V_{ab} = \int_a^b E(r) dr = \int_a^b \tau J(r) dr. \quad (2)$$

L'intensità  $I$  della corrente è legata alla densità  $J(r)$  dalla seguente relazione:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = J(r) 2\pi r h, \quad (3)$$

dove con  $S$  abbiamo indicato la generica superficie cilindrica di raggio  $r$  ( $a < r < b$ ) e di altezza  $h$ . Ricavando da questa equazione l'espressione di  $J(r)$  in funzione di  $I$  e sostituendola nell'equazione (2) otteniamo:

$$V_{ab} = \int_a^b \frac{\tau I}{2\pi r h} dr = \frac{\tau I}{2\pi h} \ln \left( \frac{b}{a} \right). \quad (4)$$

In base alla legge di Ohm in forma integrale, ciò significa che la resistenza di perdita del condensatore vale:

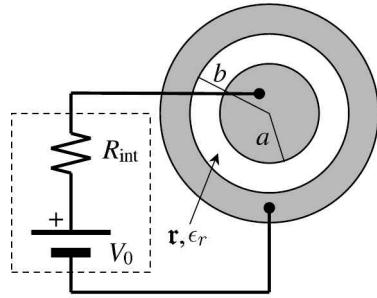
$$R_C = \frac{\tau}{2\pi h} \ln \left( \frac{b}{a} \right). \quad (5)$$

A questo punto siamo in grado di calcolare l'intensità di corrente  $I$  erogata dal generatore, semplicemente dividendo la differenza di potenziale  $V_0$  del generatore per la resistenza totale:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{int}} + R_C} = \frac{2\pi h V_0}{2\pi h R_{\text{int}} + \tau \ln(b/a)}. \quad (6)$$

La potenza erogata dal generatore, quindi, vale:

$$P_{\text{gen}} = V_0 I = \frac{2\pi h V_0^2}{2\pi h R_{\text{int}} + \tau \ln(b/a)}. \quad (7)$$



L'energia elettrostatica  $U$  immagazzinata nel condensatore vale  $U = CV_{ab}^2/2$ , dove  $C$  indica la sua capacità. La differenza di potenziale  $V_{ab}$  si calcola moltiplicando la corrente  $I$  [equazione (6)] per la resistenza di perdita  $R_C$  [equazione (5)]:

$$V_{ab} = R_C I = \frac{\tau \ln(b/a)}{2\pi h R_{\text{int}} + \tau \ln(b/a)} V_0. \quad (8)$$

Per quanto riguarda la capacità, essendo un condensatore cilindrico la sua espressione è ben nota o comunque si può ricavare facilmente applicando il teorema di Gauss. Oppure si può calcolare utilizzando l'equazione (6) dell'esercizio precedente, dal momento che abbiamo già calcolato la resistenza di perdita. Seguendo questa seconda strada possiamo scrivere che:

$$C = \frac{\tau \epsilon_0 \epsilon_r}{R_C} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r h}{\ln(b/a)}. \quad (9)$$

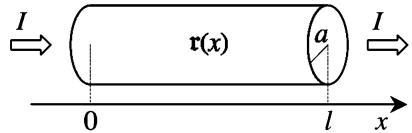
Facciamo notare per inciso che era anche possibile calcolare la capacità  $C$  con il teorema di Gauss e poi utilizzare l'equazione (6) dell'esercizio precedente per calcolare  $R_C$ . In definitiva, siamo ora in grado di calcolare l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore:

$$U = \frac{CV_{ab}^2}{2} = \frac{\tau^2 2\pi \epsilon_0 \epsilon_r h \ln(b/a)}{2[2\pi h R_{\text{int}} + \tau \ln(b/a)]^2} V_0^2. \quad (10)$$

#### S.4.20.

Poiché la resistività del conduttore varia lungo l'asse  $x$ , ma è uniforme in ogni sua sezione ortogonale all'asse stesso, la densità di corrente è uniforme in tutto il conduttore, ed ha modulo pari al rapporto fra l'intensità  $I$  della corrente e l'area  $S$  della sezione:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S} \mathbf{u}_x = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{u}_x. \quad (1)$$



Applicando la legge di Ohm in forma locale, e tenendo conto dell'espressione della resistività data nel testo, possiamo calcolare il campo elettrico all'interno del conduttore:

$$\mathbf{E} = E(x) \mathbf{u}_x = \tau(x) \mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \left[ \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \frac{x}{l} \right] \mathbf{u}_x. \quad (2)$$

A questo punto, per calcolare la densità volumetrica di carica  $\rho(x)$ , applichiamo la prima equazione di Maxwell:

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

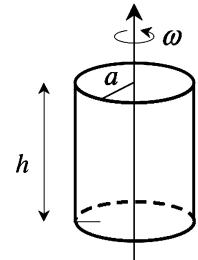
Poiché in questo caso il campo elettrico è diretto parallelamente all'asse  $x$  e dipende solo dalla coordinata  $x$ , il calcolo della divergenza si riduce ad una semplice derivata rispetto a  $x$ :

$$\rho = \epsilon_0 \frac{dE(x)}{dx} = \frac{\epsilon_0 (\tau_2 - \tau_1) I}{\pi a^2 l}. \quad (4)$$

Abbiamo ottenuto che la densità volumetrica di carica nel conduttore è uniforme quando la resistività varia linearmente lungo l'asse.

### S.4.21.

Un sistema di riferimento inerziale vede il cilindro in rotazione con velocità angolare  $\omega$ . A regime il moto degli elettroni di conduzione è solidale con quello del conduttore, quindi è circolare uniforme con la stessa velocità angolare  $\omega$ . Affinché gli elettroni di conduzione, liberi di muoversi all'interno del conduttore, seguano un moto circolare uniforme è necessario che su di essi agisca una forza centripeta. L'origine di questa forza centripeta può essere attribuita solo alla presenza di un campo elettrico che si viene ad instaurare nel conduttore e tale da indurre una forza sugli elettroni pari a



$$\mathbf{F} = -|q_e|\mathbf{E}, \quad (1)$$

dove  $q_e$  è la carica negativa dell'elettrone ed  $\mathbf{E}$  è il campo elettrico agente su di esso. Per il secondo principio della dinamica applicato al moto circolare dell'elettrone questa forza deve dar luogo ad una forza centripeta  $\mathbf{F}_{cp}$  secondo l'espressione

$$\mathbf{F} = -|q_e|\mathbf{E} = \mathbf{F}_{cp} = -m_e \omega^2 r \mathbf{u}_r, \quad (2)$$

dove  $m_e$  è la massa dell'elettrone,  $r$  la sua distanza dall'asse (con  $0 < r < a$ ) e  $\mathbf{u}_r$  è il versore radiale uscente in un sistema di coordinate cilindriche (vedi figura). Da questa espressione siamo in grado di calcolare il campo elettrico, che risulta diretto radialmente e verso l'esterno del conduttore:

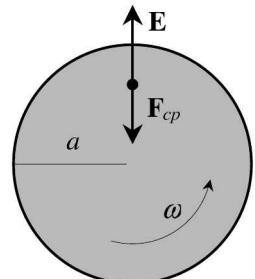
$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r = \frac{m_e \omega^2 r}{|q_e|}\mathbf{u}_r. \quad (3)$$

La differenza di potenziale fra l'asse del cilindro e la superficie laterale si calcola integrando il campo lungo una linea radiale:

$$V(0) - V(a) = \int_0^a E(r)dr = \frac{m_e \omega^2}{|q_e|} \int_0^a r dr = \frac{m_e \omega^2 a^2}{2|q_e|}. \quad (4)$$

Noto l'andamento del campo elettrico, la densità di carica  $\rho$  per unità di volume si calcola applicando la prima equazione di Maxwell, e ricordando che per un campo vettoriale diretto radialmente e con modulo che dipende solo da  $r$  la divergenza si riduce ad una derivata rispetto ad  $r$ :

$$\rho(r) = \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{dE(r)}{dr} = \frac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{|q_e|}. \quad (5)$$



La densità volumetrica di carica risulta positiva ed uniforme all'interno del cilindro. Tuttavia, poiché globalmente il conduttore è neutro, sulla superficie laterale avremo un accumulo di elettroni e cioè una densità superficiale di carica  $\sigma$  negativa. Per calcolarla imponiamo che, per neutralità, la carica totale del cilindro sia nulla:

$$Q_{\text{tot}} = \rho \pi a^2 h + \sigma 2\pi a h = 0, \quad (6)$$

da cui

$$\sigma = -\frac{\rho a}{2} = -\frac{\epsilon_0 m_e \omega^2 a}{2|q_e|}. \quad (7)$$

Un'interpretazione più intuitiva di questo risultato si ottiene risolvendo il problema in un sistema di riferimento rotante, solidale con il conduttore. In esso gli elettroni di conduzione, a transitorio esaurito, sono fermi. D'altra parte un osservatore non inerziale in rotazione vede una forza apparente centrifuga che agisce sugli elettroni di conduzione

$$\mathbf{F}_{cf} = m_e \omega^2 r \mathbf{u}_r. \quad (8)$$

Affinché gli elettroni rimangano fermi è quindi indispensabile che sia presente una forza elettrostatica a bilanciare quella centrifuga e quindi

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{cf} = -|q_e| \mathbf{E} + m_e \omega^2 r \mathbf{u}_r = 0, \quad (9)$$

da cui si ricava l'espressione del campo elettrostatico, che coincide con quella dell'equazione (3). Ricapitolando, in un sistema di riferimento non inerziale solidale con il conduttore rotante gli elettroni di conduzione sono soggetti alla forza centrifuga e a quella elettrostatica. Poiché nel sistema rotante gli elettroni sono fermi, queste due forze sono uguali in modulo e direzione, ma opposte in verso. Questo modo di vedere le cose ha il pregio di far comprendere meglio che, durante la fase transitoria, gli elettroni sono spinti dalla forza centrifuga verso la superficie laterale del cilindro, finché l'accumulo di cariche, negative sulla superficie e positive all'interno, genera una forza elettrostatica che controbilancia quella centrifuga. Per questo motivo, a transitorio esaurito, avremo sulla superficie laterale una densità superficiale di carica negativa, secondo l'equazione (7).

#### S.4.22.

Un semplice modello microscopico della conduzione nei metalli si basa sull'assunto che gli elettroni di conduzione abbiano un moto uniformemente accelerato sotto l'azione del campo elettrico, finché non urtano contro gli ioni del reticolo metallico. La durata dell'urto, cioè il tempo di interazione con gli ioni, è trascurabile rispetto all'intervallo di tempo fra un urto e il successivo. Oltre al moto uniformemente accelerato dovuto alla presenza di campo elettrico, gli elettroni di conduzione compiono un moto caotico a grande velocità per effetto dell'agitazione termica. In particolare, possiamo ottenere una stima della velocità quadratica media degli elettroni, dovuta al solo moto di agitazione termica, applicando il teorema di equipartizione dell'energia: ad ogni grado di libertà dell'elettrone corrisponde un'energia cinetica media pari a  $k_B T/2$ , dove  $k_B \simeq 1.38 \times 10^{-23}$  J/K rappresenta la costante di Boltzmann. Per un elettrone, quindi:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (1)$$

La radice quadrata della velocità quadratica media viene solitamente detta *velocità termica*  $v_T$  e dà un'indicazione del modulo della velocità con cui si muovono gli elettroni in assenza di campo elettrico:

$$v_T = \langle v^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \simeq 1.17 \times 10^5 \text{ m/s.} \quad (2)$$

Come già discusso precedentemente, tra un urto ed il successivo, l'elettrone è accelerato dal campo esterno  $\mathbf{E}$  e subisce una accelerazione pari a  $\mathbf{a} = q_e \mathbf{E} / m_e$ . La velocità termica  $v_T$  alla temperatura  $T = 300\text{K}$  è però molto maggiore della variazione di velocità indotta dal campo elettrico; il tempo medio  $\tau$  fra una collisione e la successiva è quindi determinato principalmente dalla velocità termica secondo la relazione:

$$\tau = \frac{l_m}{v_T} \simeq 1.28 \times 10^{-13} \text{ s}, \quad (3)$$

dove  $l_m$  è il libero cammino medio. Assumendo che dopo ogni urto la direzione della velocità sia diretta casualmente nello spazio, possiamo calcolare il valor medio temporale, su tempi lunghi rispetto al tempo medio collisionale  $\tau$ , della velocità dell'elettrone (velocità di deriva) come la metà della massima velocità raggiunta a causa del campo elettrico appena prima dell'urto successivo:

$$\langle \mathbf{v}_d \rangle = \frac{\mathbf{a}\tau}{2} = \frac{q_e\tau}{2m_e} \mathbf{E}. \quad (4)$$

Ricordando che la densità di corrente vale  $\mathbf{J} = q_e n \langle \mathbf{v}_d \rangle$ , dove  $n$  è la densità elettronica (numero di elettroni per unità di volume), si ha:

$$\mathbf{J} = \frac{q_e^2 n \tau}{2m_e} \mathbf{E}, \quad (5)$$

e quindi per la resistività si ottiene la seguente espressione:

$$\mathfrak{r} = \frac{2m_e}{q_e^2 n \tau} = \frac{2m_e v_T}{q_e^2 n l_m} \simeq 10^{-8} \Omega \text{ m}. \quad (6)$$

# Capitolo 5

## Magnetostatica nel vuoto

### 5.1 Problemi

#### P.5.1.

Si consideri una particella di carica positiva  $q$  e massa  $m$  in moto in una regione occupata da un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  uniforme e costante nel tempo. Detta  $\mathbf{v}_0$  la velocità della particella all'istante  $t = 0$ , si determini la sua traiettoria in funzione dell'angolo tra  $\mathbf{v}_0$  e  $\mathbf{B}$ .

#### P.5.2.

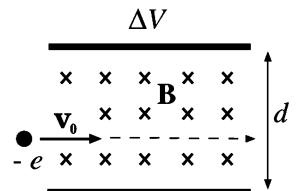
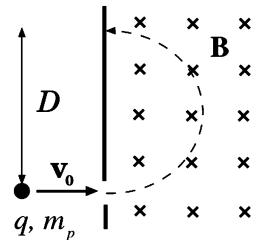
Si risolva il problema precedente nel caso in cui, oltre al campo  $\mathbf{B}$ , sia presente anche un campo elettrico  $\mathbf{E}$  uniforme e costante, diretto perpendicolarmente a  $\mathbf{B}$ . Si assuma per semplicità che la velocità iniziale sia perpendicolare ad entrambi i campi.

#### P.5.3.

Un protone, di massa  $m_p$  e carica  $q$ , penetra in una regione delimitata da un piano indefinito, in cui è presente un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  parallelo al piano di delimitazione, con verso entrante nel foglio. La velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  della particella è perpendicolare sia al piano di delimitazione che alla direzione del campo  $\mathbf{B}$ . Si stabilisca la traiettoria della particella e la massima distanza  $D$  che essa raggiunge sul piano di delimitazione rispetto al punto di ingresso. [ $|\mathbf{B}| = 0.5 \text{ T}$ ,  $|\mathbf{v}_0| = 5 \times 10^6 \text{ m/s}$ ,  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ]

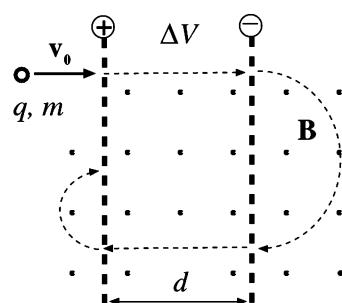
#### P.5.4.

Ad un condensatore piano, le cui armature distano  $d$ , è applicata una differenza di potenziale  $\Delta V$ . Nel condensatore è presente un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  uniforme e parallelo alle armature, come in figura. Un elettrone (carica  $-e$ ) giunge nel condensatore con velocità  $\mathbf{v}_0$  perpendicolare a  $\mathbf{B}$ . Si calcoli il valore di  $\Delta V$  per cui l'elettrone attraversa il condensatore senza deviazioni; quale delle due armature deve essere caricata positivamente? [ $d = 5 \text{ cm}$ ,  $|\mathbf{B}| = 0.3 \text{ T}$ ,  $|\mathbf{v}_0| = 2 \times 10^5 \text{ m/s}$ ,  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ]

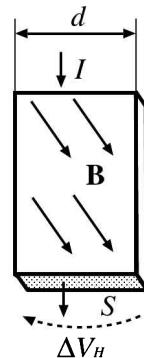


**P.5.5.**

Fra due griglie metalliche distanti  $d$  è applicata una differenza di potenziale  $\Delta V$ . Nella regione considerata è presente un campo di induzione magnetica  $B$  uniforme e diretto parallelamente alle griglie, come in figura. Una particella di carica  $q > 0$  e massa  $m$  viene lanciata, con velocità iniziale  $v_0$  perpendicolare alle griglie, all'interno del condensatore da queste formato. Trascurando gli effetti della forza di Lorentz nella regione tra le griglie, si stabilisca la traiettoria della carica e la minima distanza a cui questa giunge dal punto di partenza.

**P.5.6.**

Si consideri una lastra di argento con sezione di area  $S = 5 \text{ mm}^2$  e larghezza  $d = 5 \text{ cm}$  in cui scorra una corrente  $I = 10 \text{ A}$  in direzione longitudinale, come in figura. Sia inoltre presente un campo di induzione magnetica  $B$  uniforme e diretto perpendicolarmente alla lastra ed alla direzione di scorrimento della corrente. Il modulo del campo magnetico è di  $0.7 \text{ T}$ . Detto  $n$  il numero di portatori per unità di volume, si determini il valore della differenza di potenziale  $\Delta V_H$  che compare a regime ai capi della lastra in direzione trasversale. [Nell'argento i portatori di carica sono elettroni ed  $n = 5.86 \times 10^{28} \text{ elettroni/m}^3$ ]

**P.5.7.**

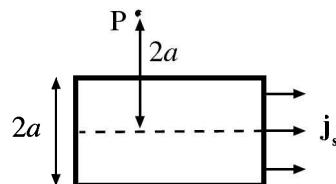
Si consideri un filo conduttore rettilineo indefinito e di sezione trascurabile, in cui scorre una corrente stazionaria  $I$ . Si calcoli il campo magnetico in tutto lo spazio impiegando il principio di sovrapposizione.

**P.5.8.**

Sono assegnati due fili conduttori rettilinei indefiniti e paralleli, posti a distanza  $2a$ , percorsi da due correnti di uguale intensità  $I$ . Si calcoli il campo di induzione magnetica generato nel piano in cui giacciono i fili; si consideri sia il caso in cui le correnti siano dirette nello stesso verso che quello in cui siano dirette in verso opposto. Si determini inoltre l'andamento qualitativo delle linee di flusso di  $B$  nel piano perpendicolare ai due fili.

**P.5.9.**

Un nastro conduttore di lunghezza infinita, larghezza  $2a$  e spessore trascurabile è percorso da una densità di corrente superficiale  $j_s$ . Sfruttando il risultato ottenuto negli esercizi precedenti, si calcoli il campo di induzione magnetica generato dal nastro nel suo stesso piano di giacenza, nel punto P ad una distanza  $r = 2a$  dal suo asse.

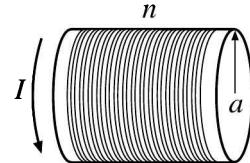


**P.5.10.**

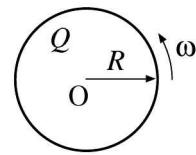
Si determini il campo di induzione magnetica generato lungo l'asse di una spira circolare di raggio  $a$  e sezione trascurabile percorsa da una corrente  $I$ .

**P.5.11.**

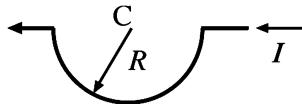
Sfruttando il risultato ottenuto nell'esercizio precedente, si calcoli il campo di induzione magnetica generato da un solenoide indefinito di sezione circolare di raggio  $a$ , con un numero  $n$  di spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente  $I$ .

**P.5.12.**

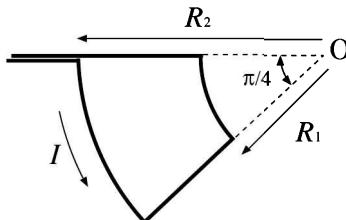
Su un disco di raggio  $R$  è deposta una carica  $Q$  con densità superficiale uniforme. Il disco viene posto in rotazione con velocità angolare  $\omega$ . Si calcoli il campo di induzione magnetica prodotto nel suo centro.

**P.5.13.**

Si consideri un filo percorso da una corrente  $I$ , formato da due tratti rettilinei ed un semicerchio di raggio  $R$ , come in figura. Il filo ha una lunghezza complessiva pari a  $6R$ . Si calcoli il campo di induzione magnetica generato nel punto C al centro del semicerchio.

**P.5.14.**

Un circuito è costituito da due archi di cerchio concentrici di raggi  $R_1$  ed  $R_2$  e da due segmenti radiali, come in figura. L'angolo sotteso ai due archi è di  $\pi/4$  radianti. Si calcoli il campo di induzione magnetica generato nel centro O degli archi.

**P.5.15.**

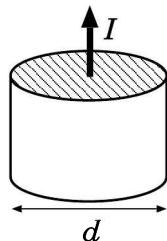
Si consideri nuovamente un filo conduttore rettilineo indefinito in cui scorre una corrente  $I$ . Si calcoli il campo di induzione magnetica in tutto lo spazio impiegando la legge di Ampere. Quali ipotesi sono necessarie per risolvere il quesito?

**P.5.16.**

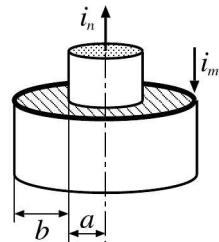
Si ripeta il calcolo del campo di induzione magnetica generato da un solenoide indefinito di raggio  $a$ , con un numero  $n$  di spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente  $I$ , impiegando unicamente la legge di Ampere. Quali ipotesi di partenza sono necessarie affinché si possa procedere alla soluzione del problema?

**P.5.17.**

Si consideri un cavo conduttore costituito da un cilindro rettilineo indefinito di diametro  $d = 5$  cm in cui scorra una corrente  $I = 5$  A. Assumendo che la densità di corrente nel conduttore sia uniforme lungo la sezione, si calcoli il campo di induzione magnetica in tutto lo spazio e se ne stabilisca il valore massimo.

**P.5.18.**

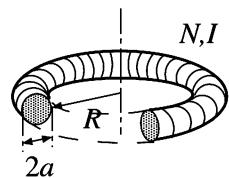
Un cavo coassiale è costituito da un nucleo di materiale conduttore di raggio  $a = 2$  mm, una guaina di plastica ed una maglia metallica esterna. La guaina isolante ha spessore  $b = 2$  mm, mentre la maglia metallica ha spessore trascurabile. Nel nucleo e nella maglia scorrono due correnti,  $i_n$  ed  $i_m$ , con versi opposti. Si stabilisca l'entità delle due correnti affinché il campo di induzione magnetica a distanza  $r_1 = 3$  mm dall'asse del cavo abbia modulo pari a  $10^{-3}$  T e sia opposto al campo a distanza  $r_2 = 6$  mm.

**P.5.19.**

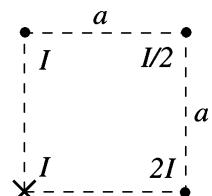
Un solenoide rettilineo indefinito è costituito da  $n = 10^3$  spire per metro di lunghezza. Al suo interno un elettrone si muove, sotto l'influenza della forza di Lorenz, con velocità  $v = 10^7$  m/s. Sapendo che il solenoide ha un raggio di 5 cm, si stabilisca la minima intensità di corrente che deve passare nelle sue spire affinché l'elettrone non urti le sue pareti. [Massa dell'elettrone  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg]

**P.5.20.**

Si calcoli il campo di induzione magnetica generato dal solenoide toroidale (di cui si mostra in figura una sezione) di raggio maggiore  $R$  e raggio interno  $a$ , dotato di  $N$  spire percorse da una corrente  $I$ .

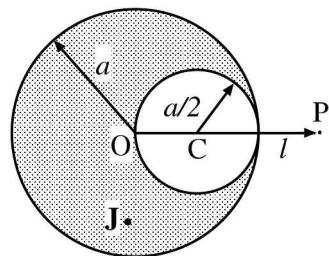
**P.5.21.**

Quattro fili indefiniti sono posti ai vertici di un quadrato di lato  $a$  e sono percorsi da corrente, come illustrato in figura. Si calcoli il campo di induzione magnetica complessivo nel centro del quadrato.

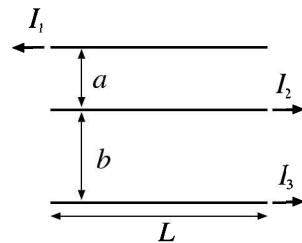


**P.5.22.**

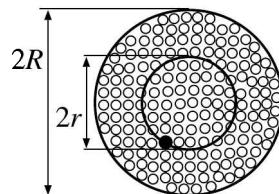
Un conduttore cilindrico indefinito di raggio  $a$  è percorso da una corrente  $I$  distribuita uniformemente sulla sua sezione. Successivamente viene praticata nel conduttore una cavità cilindrica di raggio  $a/2$  per tutta la sua lunghezza, mantenendo la stessa densità di corrente iniziale; il centro C della cavità dista  $a/2$  dal centro O del conduttore. Si calcoli il campo di induzione magnetica  $B$  generato in O, in C ed in un punto P a distanza  $l > a$  dall'asse del conduttore, posto sulla congiungente OC.

**P.5.23.**

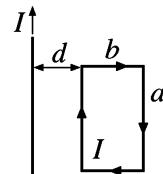
Si considerino tre fili rettilinei paralleli di lunghezza  $L$ ; la distanza tra il filo superiore e quello centrale è pari ad  $a$ , mentre tra il filo centrale e quello inferiore la distanza è pari a  $b = 3a/2$ . Dette  $I_1 = I$ ,  $I_2 = 3I$  ed  $I_3 = 2I$  le correnti che circolano rispettivamente nei fili secondo i versi indicati in figura, si calcoli la forza agente sul filo centrale. [ $L = 1.5$  m;  $a = 3$  cm;  $I = 15$  A]

**P.5.24.**

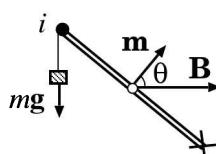
Si consideri un insieme di 100 fili rettilinei indefiniti che formano un cavo cilindrico di raggio  $R = 0.5$  cm. Ciascun filo è attraversato da una corrente  $i = 2$  A. Si determini, in modulo direzione e verso, la forza per unità di lunghezza che agisce su uno dei fili che si trova a distanza  $r = R/2$  dal centro dell'insieme.

**P.5.25.**

In un filo rettilineo indefinito scorre una corrente  $I = 50$  A. Una spira rettangolare, di lato maggiore  $a = 10$  cm e minore  $b = 5$  cm, è attraversata da una corrente  $I' = 10$  A. Si calcoli la forza agente sulla spira quando il suo lato maggiore più vicino al filo è ad esso parallelo ad una distanza  $d = 5$  cm. Si determini quale deve essere il verso di percorrenza delle correnti per avere forza di natura repulsiva.

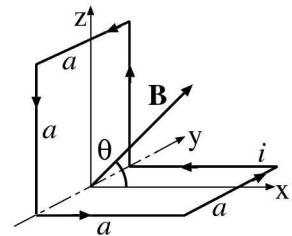
**P.5.26.**

Una spira quadrata di lato  $a$  può ruotare attorno al suo asse orizzontale ed è percorsa da una corrente  $i$ . Nella regione considerata è presente un campo di induzione magnetica  $B$  uniforme, diretto orizzontalmente e perpendicolare all'asse di rotazione. Ad un estremo della spira è appesa una massa  $m$ . Si stabilisca il massimo valore della massa che la spira può sollevare in virtù della forza magnetica. [ $a = 10$  cm,  $i = 5$  A,  $|B| = 1$  T]

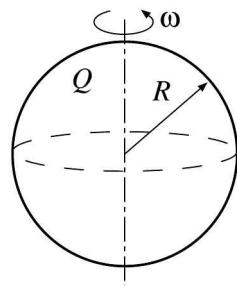


**P.5.27.**

Una spira viene piegata ad angolo retto in corrispondenza dell'asse mediano del lato più lungo, in modo da formare una L (vedi figura) costituita da due spire quadrate uguali di lato  $a$ . La spira così ottenuta può ruotare attorno a tale asse; inoltre su di essa agisce un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  costante ed uniforme, diretto perpendicolarmente all'asse stesso. Detta  $i$  la corrente che scorre nella spira, si determini in quali posizioni il momento meccanico agente su di essa risulta massimo.

**P.5.28.**

Si calcoli il momento di dipolo magnetico di una sfera di raggio  $R$  sulla cui superficie sia deposita uniformemente una carica  $Q$  e che ruoti intorno ad un asse passante per il suo centro con velocità angolare  $\omega$ .



## 5.2 Soluzioni

### S.5.1.

<sup>(1)</sup> Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, possiamo assumere senza ledere la generalità del problema che il campo  $\mathbf{B}$  sia parallelo all'asse  $z$  e che la velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  giaccia nel piano  $xy$ . Porremo inoltre che la posizione iniziale della particella  $\mathbf{r}_0$  coincida con l'origine delle coordinate. Detto  $\alpha_0$  l'angolo iniziale formato da  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{v}_0$ , avremo dunque:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = B \mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_0 = v_0 [\cos(\alpha_0) \mathbf{u}_z + \sin(\alpha_0) \mathbf{u}_y] \\ \mathbf{r}_0 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

L'unica forza agente sulla particella è la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2)$$

Si può facilmente constatare che la potenza  $\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  dissipata dalla forza durante il moto della particella è nulla, in quanto  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{v}$  sono fra loro ortogonali. Poiché la forza non compie lavoro, in virtù del teorema dell'energia cinetica il modulo della velocità della particella è costante durante il moto e quindi pari al suo valore iniziale:

$$|\mathbf{v}| = v_0. \quad (3)$$

Tale assunzione è valida sinché si trascura la dissipazione di energia per irraggiamento; per un approfondimento di tale questione si rimanda alle note di fine esercizio. Si noti inoltre che  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{B}$  sono perpendicolari fra loro; pertanto la componente della forza lungo l'asse  $z$  è nulla. In base al secondo principio della dinamica, ciò comporta che:

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0, \quad (4)$$

essendo  $a_z$  la componente dell'accelerazione della particella lungo l'asse  $z$  e  $v_z$  la corrispondente componente della velocità. Dall'equazione (4) deriva che  $v_z$  è anche essa una costante del moto ed è pari al suo valore iniziale:

$$v_z = v_0 \cos(\alpha_0). \quad (5)$$

Con l'aiuto delle equazioni (3) e (5), si verifica che il vettore  $\mathbf{v}$  forma un angolo  $\alpha$  costante con l'asse  $z$ :

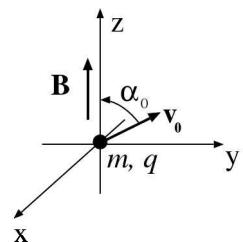
$$\alpha = \arccos \left[ \frac{v_z}{v_0} \right] = \alpha_0, \quad (6)$$

quindi la proiezione di  $\mathbf{v}$  sul piano  $xy$  è anche essa costante e pari a

$$v_{xy} = v_0 \sin(\alpha_0). \quad (7)$$

Per quanto riguarda la forza  $\mathbf{F}$ , si noti che essa giace nel piano  $xy$  ed ha modulo costante, che risulta per la (2) pari a:

<sup>1</sup>Nota introduttiva. Il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  verrà in seguito abbreviato col termine "campo magnetico", benché tale denominazione sia riservata al campo  $\mathbf{H}$ . Nel capitolo successivo, relativo alla magnetostatica nella materia si tornerà alla dizione corretta



$$|\mathbf{F}| = q B v_0 \sin(\alpha_0) = q B v_{xy}. \quad (8)$$

Distinguiamo a tal punto tre situazioni:

i. Se  $\alpha_0 = 0$  (ovvero se  $\mathbf{v}_0$  è parallelo a  $\mathbf{B}$  ed all'asse z), per la (2) la forza  $\mathbf{F}$  è nulla; pertanto il moto della particella procede lungo l'asse z a velocità costante. Tenuto conto delle condizioni iniziali (1), le equazioni parametriche del moto sono:

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_z t = v_0 t. \end{cases} \quad (9)$$

ii. Se  $\alpha_0 = \pi/2$  (ovvero se  $\mathbf{v}_0$  giace nel piano xy) in base alle (2), (7) ed (8) la forza agente sulla carica ha modulo costante, giace nel piano xy ed è sempre perpendicolare alla velocità; inoltre la velocità della carica ha modulo costante e giace sempre nel piano xy. Il moto della carica si evolve quindi nel piano xy; le caratteristiche di forza e velocità sono quelle tipiche di un moto circolare uniforme. Per determinare il raggio  $R_0$  dell'orbita circolare, imponiamo che la forza magnetica agisca da forza centripeta. Pertanto avremo:

$$|\mathbf{F}| = qv_0 B = m \frac{v_0^2}{R_0}, \quad (10)$$

da cui:

$$R_0 = \frac{mv_0}{qB}. \quad (11)$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali (si osservi in proposito la figura a lato), il moto sarà descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = R_0 [1 - \cos(\omega t)] \\ y(t) = R_0 \sin(\omega t) \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Il valore di  $\omega$  si ottiene imponendo che la velocità all'istante  $t = 0$  soddisfi le condizioni iniziali:

$$v_{x0} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0; \quad (13)$$

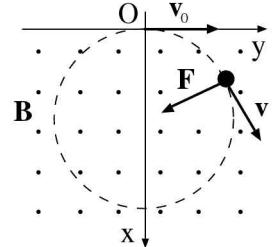
si ricava in tal modo che

$$\omega = \frac{qB}{m}. \quad (14)$$

Si noti che il periodo dell'orbita compiuta dalla particella, pari a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad (15)$$

non dipende dalla velocità della particella.



iii. Per un valore generico di  $\alpha_0$  compreso fra  $-\pi$  e  $\pi$ , il moto risulta una sovrapposizione dei due casi precedentemente esaminati. Ripetendo i ragionamenti precedenti otterremo quindi:

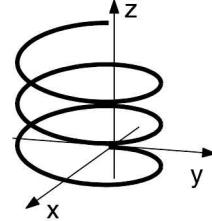
$$\begin{cases} x(t) = R [1 - \cos(\omega t)] \\ y(t) = R \sin(\omega t) \\ z(t) = v_z t \end{cases} \quad (16)$$

dove

$$v_z = v_0 \cos(\alpha_0) \quad (17)$$

ed

$$R = \frac{mv_{xy}}{qB} = \frac{mv_0 \sin(\alpha_0)}{qB}. \quad (18)$$



Tali equazioni rappresentano un moto spiraliforme, come mostrato in figura.

*Nota.* Nel risolvere l'esercizio si è assunto che l'energia cinetica della particella rimanga costante durante il moto. Questa ipotesi a rigore non vale per angoli  $\alpha_0 \neq 0$ , in quanto la carica, trovandosi in moto accelerato, perde energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Possiamo valutare l'andamento dell'energia nel tempo mediante la formula di Larmor:

$$\mathcal{P} = -\frac{dE_c}{dt} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2, \quad (19)$$

dove  $\mathcal{P}$  è la potenza dissipata per emissione di radiazione,  $E_c$  è l'energia cinetica della particella,  $c$  è la velocità della luce ed  $a$  il modulo dell'accelerazione. Limitandoci al caso di moto non relativistico (cioè per  $v \ll c$ ) nel piano  $xy$ , risulta che  $a = qvB/m$ ; usando questa relazione nell'espressione dell'energia cinetica otteniamo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^3a^2}{2q^2B^2}. \quad (20)$$

Ricavando  $E_c$  in funzione di  $a$  dalla (20) e sostituendo nella (19), otteniamo infine la relazione:

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}, \quad (21)$$

dove

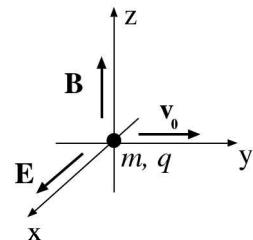
$$\tau = \frac{3\pi c m^3}{\mu_0 q^4 B^2}. \quad (22)$$

La (21) ammette soluzione del tipo  $E_c = E_{c0} e^{-t/\tau}$ , con  $E_{c0}$  energia cinetica iniziale; l'energia e di conseguenza la velocità della carica decadono esponenzialmente nel tempo. Il moto non sarà quindi uniforme, ma evolverà lungo una spirale di raggio sempre più piccolo al diminuire della velocità. Si noti che nel caso di un elettrone in moto in un campo magnetico  $B = 1$  T, la costante di decadimento è pari a  $\tau = 2.6$  s.

### S.5.2.

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ed assumiamo per semplicità che il campo  $\mathbf{B}$  sia parallelo all'asse z, che il campo  $\mathbf{E}$  sia parallelo all'asse x e che la velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  sia parallela ad y. Assumeremo inoltre che la posizione iniziale della particella  $\mathbf{r}_0$  coincida con l'origine delle coordinate. Avremo pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = B \mathbf{u}_z \\ \mathbf{E} = E \mathbf{u}_x \\ \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{u}_y \\ \mathbf{r}_0 = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$



È importante notare che in questo caso il moto della particella non è la sovrapposizione dei moti in presenza dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  presi separatamente. Contrariamente al campo magnetico, il campo elettrico compie lavoro sulla carica e quindi altera il modulo della velocità; di conseguenza anche la forza di Lorentz cambia in modulo durante il moto. La forza complessiva agente sulla carica è data in questo caso dalla relazione:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} + q \mathbf{E}. \quad (2)$$

Utilizzando il secondo principio della dinamica, otteniamo poi l'equazione di moto nella forma:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{q}{m} \mathbf{E}. \quad (3)$$

Svolgendo il prodotto vettore nella (3) otteniamo:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = B v_y \mathbf{u}_x - B v_x \mathbf{u}_y. \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) e proiettando l'equazione sui tre assi cartesiani, giungiamo poi alle equazioni di moto scalari:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y + \frac{qE}{m} \quad (5)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x \quad (6)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (7)$$

Dall'ultima equazione deriva che la componente  $v_z$  della velocità è costante durante il moto. In base alle condizioni iniziali tale componente risulta nulla; pertanto il moto si svolge nel piano xy. Ricavando  $v_y$  dalla (5) e derivandola rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{d}{dt} v_y = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{qB} \left( \frac{dv_x}{dt} - \frac{qE}{m} \right) \right] = \frac{m}{qB} \frac{d^2 v_x}{dt^2}. \quad (8)$$

Sostituendo questa espressione nella equazione (6), giungiamo poi alla relazione:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left( \frac{qB}{m} \right)^2 v_x = 0, \quad (9)$$

che ammette soluzione

$$v_x = A \sin(\omega t + \phi), \quad (10)$$

dove  $\omega = qB/m$ . Per determinare le costanti arbitrarie  $A$  e  $\phi$ , osserviamo che le condizioni iniziali impongono  $v_x(0) = 0$ , per cui deve risultare  $\phi = 0$ . Sostituendo la (10) nella (5) otteniamo poi:

$$v_y = \frac{m}{qB} A \omega \cos(\omega t) - \frac{E}{B}; \quad (11)$$

imponendo la condizione iniziale  $v_y(0) = v_0$  e sostituendo il valore di  $\omega$ , otteniamo:

$$A = v_0 + \frac{E}{B}. \quad (12)$$

Riepilogando, le componenti della velocità obbediscono alle relazioni:

$$\begin{cases} v_x(t) = (v_0 + V) \sin(\omega t) \\ v_y(t) = (v_0 + V) \cos(\omega t) - V \\ v_z(t) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

dove

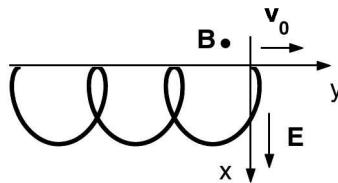
$$V = \frac{E}{B}. \quad (14)$$

Integrando le equazioni precedenti ed imponendo che in  $t = 0$  la particella si trovi nell'origine delle coordinate, si ottiene poi:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0 + V}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \\ y(t) = \frac{v_0 + V}{\omega} \sin(\omega t) - Vt \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Queste equazioni descrivono la composizione di un moto circolare uniforme nel piano xy con un moto rettilineo uniforme di velocità  $\mathbf{V} = -(E/B)\mathbf{u}_y$  in direzione opposta all'asse y (vedi figura); tale composizione prende il nome di moto cicloidale. Si noti il risultato controintuitivo: ci si aspetterebbe che la particella si allontani indefinitamente in direzione dell'asse x per l'azione del campo elettrico; la dipendenza della forza di Lorentz dalla velocità comporta tuttavia un esito differente. Si osservi altresì che la direzione in cui si sviluppa il moto cicloidale ( $-\mathbf{u}_y$ ) è indipendente dal segno della carica  $q$ : i vettori  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e

V formano sempre una terna destrorsa. Il segno della carica  $q$  determina solo il semipiano a  $x$  positive o negative in cui si svolge il moto cicloidale.



*Nota.* Anche nello svolgimento di questo esercizio non si è tenuto conto della perdita di energia per emissione di radiazione; giungere tuttavia ad un'espressione analitica per l'evoluzione dell'energia cinetica in presenza di irraggiamento elettromagnetico è in tal caso più difficile. Si noti altresì che per valori di  $V = E/B$  prossimi alla velocità della luce, la trattazione qui presentata perde valore; in questa situazione si rende necessario un approccio di tipo relativistico, che è ben al di là degli scopi di questa opera.

### S.5.3.

Il moto della particella nella regione occupata dal campo magnetico avviene sotto l'azione della forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Come precedentemente analizzato nel primo problema di questo capitolo, nel caso in cui la velocità iniziale  $v_0$  della particella ed il campo magnetico  $B$  siano perpendicolari, il moto risulta circolare uniforme. Assegnati i versi della velocità e del campo magnetico ed essendo la carica positiva, in base alla (1) deduciamo che il verso di percorrenza della traiettoria circolare debba essere antiorario (vedi figura). Imponendo che la forza magnetica operi come forza centripeta, otteniamo:

$$|\mathbf{F}| = q v_0 B = m_p \frac{v_0^2}{R}, \quad (2)$$

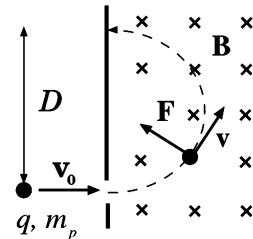
dove  $v_0$  è il modulo della velocità iniziale,  $B$  il modulo del campo magnetico ed  $R$  il raggio della traiettoria circolare. Dalla (2) si deduce che il raggio della traiettoria risulta pari a:

$$R = \frac{m_p v_0}{q B}. \quad (3)$$

Si noti che la massima distanza  $D$  che la particella raggiunge dal punto di ingresso è pari al diametro della traiettoria. Pertanto sostituendo i valori assegnati dal problema:

$$D = 2R = 0.2088 \text{ m}. \quad (4)$$

*Nota.* Il sistema analizzato in questo problema è detto spettrometro di Dempster ed è stato uno dei primi dispositivi impiegati per determinare la massa di particelle cariche (tipicamente per lo studio degli isotopi ionizzati di un elemento); per questo motivo viene anche chiamato spettrometro di massa. Gli ioni prodotti da una sorgente vengono



accelerati mediante una differenza di potenziale  $\Delta V$  fino a raggiungere l'energia cinetica  $E_c = q\Delta V$ , dove  $q$  è la carica degli ioni. La velocità con cui essi giungono nello spettrometro è quindi pari a:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}. \quad (5)$$

Le cariche vengono poi deflesse dalla forza di Lorentz e colpiscono la parete dello spettrometro in una posizione a distanza  $D$  dall'ingresso pari a:

$$D = 2 \frac{mv_0}{qB} = 2 \sqrt{\frac{2m\Delta V}{qB^2}}. \quad (6)$$

Si scopre quindi che, a parità di carica, la posizione in cui le particelle giungono dipende dalla loro massa  $m$ . Ponendo sulla parete dello spettrometro un rivelatore, è possibile ricavare un'analisi delle masse delle particelle inviate al suo interno mediante una misura della posizione in cui esse arrivano.

#### S.5.4.

Il moto della particella all'interno del condensatore è influenzato sia dal campo magnetico  $B$  che dal campo elettrico  $E$ . La forza risultante agente sull'elettrone è quindi data dalla relazione:

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B} - e\mathbf{E}. \quad (1)$$

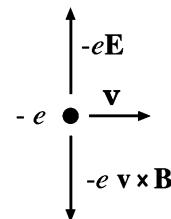
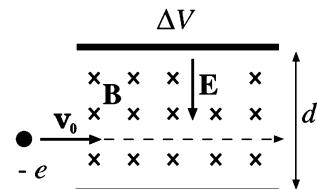
dove  $-e$  è la carica dell'elettrone. Si osservi che, essendo l'elettrone carico negativamente ed essendo il verso del campo magnetico entrante nel piano del foglio, la forza di Lorentz sarà diretta verso il basso. Affinché l'elettrone attraversi il sistema senza deviazioni, è necessario imporre che la forza risultante agente su di esso sia nulla. Pertanto è necessario polarizzare il condensatore in modo che la forza elettrica agente sull'elettrone sia diretta verso l'alto e dunque compensi quella di Lorentz.

Ciò comporta che l'armatura superiore del condensatore sia carica positivamente. Annullando la forza totale agente sulla carica, la velocità  $\mathbf{v}$  dell'elettrone rimarrà inalterata e pari al valore iniziale  $v_0$ . Bilanciando le due forze avremo:

$$e E = e v_0 B, \quad (2)$$

dove  $E$  è il modulo del campo elettrico,  $B$  il modulo del campo magnetico e  $v_0$  il modulo della velocità iniziale. Se assumiamo di trascurare gli effetti di bordo all'interno del condensatore, possiamo calcolare facilmente il campo elettrico in funzione della differenza di potenziale  $\Delta V$  tra le armature e della distanza  $d$  che le separa. Si ha infatti che:

$$E = \frac{\Delta V}{d}, \quad (3)$$



e quindi, sostituendo la (3) nella (2), otteniamo che la differenza di potenziale da applicare ai capi del condensatore vale:

$$\Delta V = v_0 d B = 3000 \text{ V}. \quad (4)$$

*Nota.* Il sistema analizzato in questo problema può essere utilizzato come selettore di velocità di una particella. Come si può notare dall'equazione (4), fissati  $\Delta V$ ,  $B$  e le dimensioni del condensatore  $d$ , la velocità che una particella deve avere per attraversare la regione senza deflessioni è data da:

$$v_0 = \frac{\Delta V}{Bd}. \quad (5)$$

Ponendo una sottile fenditura al di là del selettore, verranno selezionate e lasciate passare solo quelle particelle, non deflesse, dotate della velocità indicata nella relazione (5).

### S.5.5.

Nel seguito ipotizzeremo che la forza di Lorentz agente sulla particella all'interno del condensatore formato dalle griglie, abbia effetti trascurabili; pertanto si assumerà che la carica sia dotata in tale regione di moto rettilineo.

Trascurando gli effetti di bordo, possiamo inoltre assumere che il campo elettrico sia uniforme tra le griglie e nullo all'esterno. Per valutare la velocità in uscita dal condensatore possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\Delta E_m = 0, \quad (1)$$

dove  $E_m = E_c + qV$  è l'energia meccanica,  $E_c$  l'energia cinetica e  $qV$  l'energia potenziale della carica sottoposta al potenziale elettrostatico  $V$ . Dalla (1) deriva quindi che:

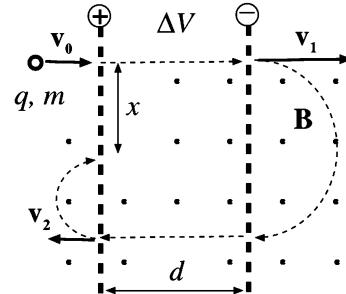
$$\left( \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 \right) - \left( \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 \right) = 0, \quad (2)$$

dove  $v_1$  è il modulo della velocità in uscita dalla griglia a potenziale  $V_1$  e  $v_0$  la velocità in ingresso alla griglia di potenziale  $V_0$ . Otteniamo pertanto:

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{2q\Delta V}{m}, \quad (3)$$

dove  $\Delta V = V_0 - V_1$  è la differenza di potenziale tra le griglie. Si noti che  $\Delta V > 0$ , la particella viene dunque accelerata nel primo passaggio. A causa del campo magnetico presente nella regione, la carica compirà una traiettoria semicircolare sotto l'azione della forza di Lorentz, mantenendo costante il modulo della velocità (vedi figura). Il raggio  $R_1$  di questa traiettoria, per quanto visto nei precedenti problemi, è dato dalla relazione:

$$R_1 = \frac{mv_1}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{v_0^2 + \frac{2q\Delta V}{m}}, \quad (4)$$



dove  $B$  è il modulo del campo magnetico. Successivamente la carica ritorna nel condensatore, dove stavolta viene decellerata. La velocità  $v_2$  in uscita dal condensatore si può calcolare applicando nuovamente il principio di conservazione dell'energia. Avremo:

$$\left( \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_0 \right) - \left( \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 \right) = 0. \quad (5)$$

Sostituendo la (3) nella (5) si ottiene  $v_2 = v_0$ . Del resto a tale risultato si poteva giungere direttamente, osservando che l'energia meccanica si conserva lungo tutta la traiettoria. La particella compie a tal punto una nuova traiettoria semicircolare, di raggio:

$$R_2 = \frac{mv_2}{qB} = \frac{mv_0}{qB}. \quad (6)$$

La minima distanza  $x$  dal punto di partenza in cui la carica verrà a trovarsi è (vedi figura):

$$x = 2R_1 - 2R_2 = \frac{2m}{qB} \left[ \sqrt{v_0^2 + \frac{2q\Delta V}{m}} - v_0 \right]. \quad (7)$$

*Nota.* Il dispositivo illustrato nell'esercizio, con poche variazioni, può essere impiegato per accelerare una carica. Per fare ciò è sufficiente invertire ogni volta la polarità delle griglie mentre la carica si trova all'esterno del condensatore; in tal modo la particella verrà ulteriormente accelerata ad ogni successivo passaggio. Un simile dispositivo prende il nome di ciclotrone. Si noti che, sinché la velocità della particella non raggiunge il regime relativistico, il tempo  $T_s$  impiegato per compiere le orbite semicircolari è indipendente dalla velocità della carica ed è pari a:

$$T_s = \frac{1}{2} \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB}. \quad (8)$$

Pertanto il ciclotrone può essere polarizzato mediante una tensione alternata di periodo  $T = 2T_s$ , in modo che ad ogni successivo passaggio della carica la polarizzazione delle griglie venga invertita.

### S.5.6.

All'istante  $t = 0$  in cui lasciamo fluire corrente nella lastra di argento, i portatori di carica sono sottoposti alla forza di Lorentz  $\mathbf{F}_L = -ev \times \mathbf{B}$ ; si noti che se la corrente  $I$  fluisce verso il basso (vedi figura) gli elettroni hanno una velocità iniziale  $v$  diretta verso l'alto.

Con i versi dei vettori assegnati nella figura, gli elettroni tenderanno dunque ad addensarsi sul lato destro della lastra; sul lato sinistro avremo un addensamento di cariche positive, dovuto alla mancata copertura degli ioni del metallo da parte degli elettroni. Lo sbilanciamento di cariche così prodotto comporta la comparsa di un campo elettrico  $\mathbf{E}_H$  diretto trasversalmente; come conseguenza comparirà anche una forza elettrica  $\mathbf{F}_E$  agente sugli elettroni. Si noti che  $\mathbf{F}_E = -e\mathbf{E}_H$  si oppone a  $\mathbf{F}_L$ ; dunque a regime, quando l'accumulo di cariche ai lati della sbarra sarà terminato, le due forze si bilanceranno esattamente. Uguagliando i moduli delle due forze, avremo pertanto che

$$eE_H = evB, \quad (1)$$

essendo  $v$  il modulo della velocità,  $B$  quello del campo magnetico ed  $E_H$  il modulo del campo elettrico. Assumendo che il campo  $\mathbf{E}_H$  sia uniforme, possiamo allora ricavare dalla (1) la differenza di potenziale  $\Delta V_H$  che si instaura in direzione trasversale ai capi della lastra:

$$\Delta V_H = dE_H = dvB. \quad (2)$$

Per calcolare il valore di  $\Delta V_H$  in funzione dei dati assegnati, osserviamo che la corrente che fluisce nella lastra può essere espressa come:

$$I = S J, \quad (3)$$

dove  $J$  è il modulo del vettore densità di corrente ed  $S$  la sezione della lastra. Dalla definizione del vettore densità di corrente  $\mathbf{J} = -e n \mathbf{v}$ , deriva dunque che:

$$v = \frac{J}{e n} = \frac{I}{e n S}. \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (2), otteniamo infine:

$$\Delta V_H = \frac{I d B}{e n S} = 7,5 \mu\text{V}. \quad (5)$$

*Nota.* La comparsa di una differenza di potenziale trasversale ai capi di una lastra conduttrice percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico viene detta effetto Hall, od anche effetto galvanomagnetico trasversale. Questo fenomeno è largamente impiegato per realizzare magnetometri, nei quali la misura di un campo magnetico avviene tramite una misura di differenza di potenziale. Dalla (5) si evince infatti che il modulo del campo magnetico è dato da:

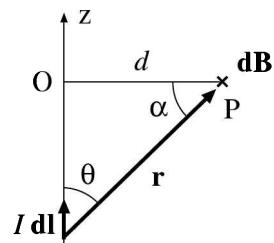
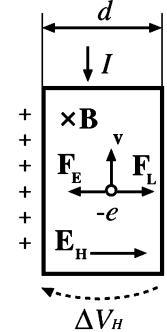
$$B = \frac{e n S \Delta V_H}{I d}, \quad (6)$$

per cui, conoscendo la geometria della sonda esposta al campo, la corrente che vi scorre e le proprietà del conduttore che la compone, si può ottenere una misura di  $B$  dalla misura di  $\Delta V_H$ .

### S.5.7.

Consideriamo un sistema di coordinate cilindriche in cui l'asse  $z$  coincida col filo ed abbia verso concorde con quello di scorrimento della corrente  $I$ ; assumeremo che il punto  $P$ , in cui intendiamo calcolare il campo magnetico, abbia coordinata  $z = 0$ . Possiamo pensare di scomporre il filo in elementi infinitesimi  $dl = dz \mathbf{u}_z$  diretti nello stesso verso della corrente. Il campo magnetico infinitesimo  $d\mathbf{B}$  generato da uno di tali elementi in un punto  $P$  a distanza  $d$  dal filo vale (vedi figura):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$



dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che spicca dalla posizione di  $d\mathbf{l}$  individua il punto P ed  $r = |\mathbf{r}|$ . Si noti che  $d\mathbf{B}$  è perpendicolare al piano contenente il filo ed il punto P; il verso di  $d\mathbf{B}$  è quello in cui ruota una vite destrorsa che avanzi nella direzione di scorrimento della corrente. Chiameremo  $\mathbf{u}_\theta$  il versore diretto come  $d\mathbf{B}$ ; si osservi che tale versore è tangente alla circonferenza centrata sul filo, passante per P e appartenente ad un piano perpendicolare al filo stesso. Pertanto, esprimendo il prodotto vettore:

$$d\mathbf{B} = dB \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} dz \sin \theta \mathbf{u}_\theta, \quad (2)$$

essendo  $\theta$  l'angolo formato da  $d\mathbf{l}$  ed  $\mathbf{r}$ . Si ossevi che tutti gli elementi infinitesimi in cui si scomponete il filo generano un campo magnetico in P diretto allo stesso modo. Avremo quindi che il campo magnetico complessivo è pari a:

$$\mathbf{B} = \int_{filo} dB \mathbf{u}_\theta = \int_{filo} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} dz \cos \alpha \mathbf{u}_\theta, \quad (3)$$

dove si è sfruttato il fatto che  $\cos \alpha = \sin \theta$ , essendo  $\alpha$  l'angolo complementare di  $\theta$  (come in figura). Possiamo riesprimere  $r$  in funzione di  $d$  secondo la relazione:

$$r = d / \cos \alpha, \quad (4)$$

e dunque

$$z = r \sin \alpha = d \tan \alpha, \quad (5)$$

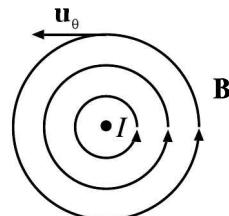
essendo  $z$  la coordinata dell'elemento di filo preso in considerazione. Differenziando l'equazione (5) otteniamo:

$$dz = |d\mathbf{l}| = \frac{d}{\cos^2 \alpha} d\alpha. \quad (6)$$

Sostituendo la (4) e la (6) nella (3), otteniamo:

$$\mathbf{B} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \cos \alpha d\alpha \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{u}_\theta. \quad (7)$$

L'equazione (7) è anche detta legge di Biot-Savart. Il tipico andamento delle linee di flusso del campo magnetico è mostrato nella figura a lato, in cui si assume che il filo rettilineo sia perpendicolare al piano del foglio e la corrente  $I$  fluisca verso il lettore.



### S.5.8.

Incominciamo col considerare il caso in cui le correnti siano equiveverse. Nella figura successiva si possono osservare i versi dei campi magnetici  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  generati singolarmente dai due fili nel piano in cui i fili stessi giacciono; i campi risultano sempre perpendicolari a tale piano. Le correnti che scorrono nei fili sono pari a  $I_1 = I_2 = I$ . Sceglieremo una terna cartesiana destra Oxyz in cui l'asse y sia parallelo ai fili, l'asse z (non mostrato) sia diretto verso il lettore e l'origine degli assi sia posizionata nel punto medio tra i fili. Il campo magnetico generato nel piano xy dal filo di sinistra sarà dato dalla relazione:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} \mathbf{u}_z, \quad (1)$$

mentre il campo generato dal filo di destra sarà:

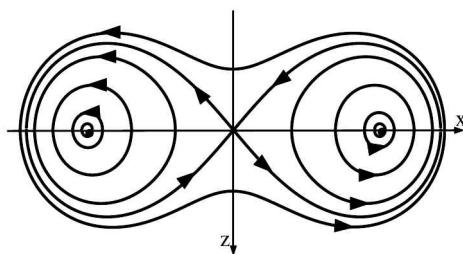
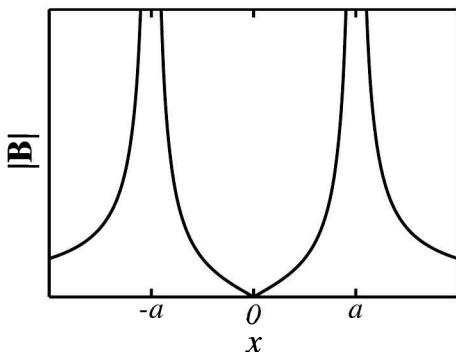
$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} \mathbf{u}_z. \quad (2)$$

Per ottenere le espressioni (1) e (2), abbiamo utilizzato la legge di Biot-Savart ricavata nell'esercizio precedente. Si noti che a denominatore di queste espressioni compare la distanza dal filo sorgente del campo; il segno negativo dipende esclusivamente dal verso scelto per l'asse  $z$ . Poiché per il campo magnetico vale il principio di sovrapposizione, il campo totale  $\mathbf{B}$  sarà la somma dei campi generati dai fili, dunque:

$$\mathbf{B} = -\left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} \right] \mathbf{u}_z, \quad (3)$$

da cui:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{x}{(x+a)(x-a)} \mathbf{u}_z. \quad (4)$$



Possiamo dunque dedurre dalla (4) che il campo complessivo si annulla lungo l'asse  $y$ ; questo si nota anche dal grafico di  $|B|$  riportato in funzione di  $x$ . Si noti come il campo tenda ad infinito in corrispondenza della posizione dei fili. In figura è stato anche riportato l'andamento delle linee di flusso del campo magnetico nel piano  $xz$ ; le correnti scorrono perpendicolarmente al piano del foglio, entrambe verso il lettore. Si noti che le linee di flusso sembrano convergere nell'origine  $O$  delle coordinate; tuttavia tale punto non rappresenta una sorgente di campo:  $B$  infatti è nullo in  $O$  e dunque in questa posizione le linee di flusso non sono definite.

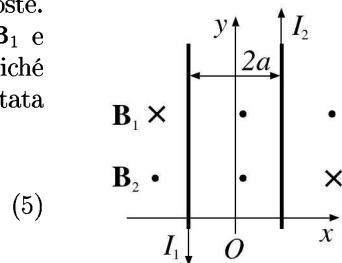
Consideriamo ora il caso in cui le correnti siano opposte. La figura a lato mostra i versi dei campi magnetici  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  generati singolarmente dai due fili nel piano  $xy$ . Poiché nel caso che ora stiamo considerando la corrente  $I_1$  è stata invertita, il campo totale nel piano  $xy$  risulterà pari a:

$$\mathbf{B} = \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} \right] \mathbf{u}_z, \quad (5)$$

da cui:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{(x+a)(x-a)} \mathbf{u}_z. \quad (6)$$

Si lascia al lettore il compito di determinare l'andamento del modulo di  $\mathbf{B}$  sul piano  $xy$  in funzione di  $x$ . L'andamento delle linee di flusso del campo sul piano  $xz$  è visibile nello schema a fianco riportato; le correnti scorrono perpendicolarmente al piano del foglio, quella di destra verso il lettore mentre quella di sinistra in verso opposto. Si osservi in questo caso che nella regione compresa tra i fili i campi sono concordi.



### S.5.9.

Il nastro conduttore può essere scomposto in infinite strisce di spessore infinitesimo  $dr$  parallele all'asse del nastro stesso. Chiamiamo  $r$  la distanza di una di queste strisce

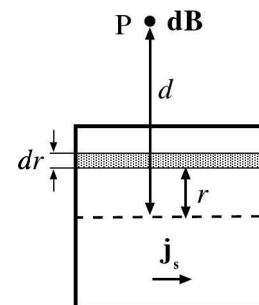
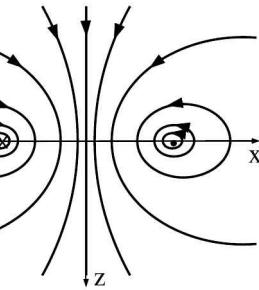
dall'asse del nastro; sia inoltre  $d$  la distanza tra l'asse ed il punto  $P$  in cui dobbiamo valutare il campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Ogni striscia può essere assimilata ad un filo rettilineo indefinito in cui scorre una corrente infinitesima  $dI = j_s dr$ ; la distanza tra la striscia e  $P$  è pari a  $d-r$  e quindi, applicando la legge di Biot-Savart, il campo magnetico generato dalla striscia in quel punto ha modulo pari a:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(d-r)}. \quad (1)$$

Si noti che ogni striscia considerata genera un campo  $\mathbf{dB}$  perpendicolare al piano del foglio; con i versi assegnati in figura, possiamo concludere che il campo complessivo in  $P$ , somma di tutti i contributi infinitesimi, sarà diretto perpendicolarmente al foglio verso il lettore. Pertanto:

$$B = \int dB = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 j_s}{2\pi(d-r)} dr, \quad (2)$$

da cui risulta



$$B(d) = \frac{\mu_0 j_s}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}. \quad (3)$$

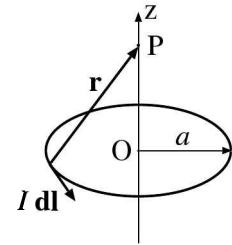
Sostituendo nella (3) la distanza  $d = 2a$  a cui il problema richiede di calcolare il campo, otteniamo:

$$B(2a) = \frac{\mu_0 j_s}{2\pi} \ln 3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln 3, \quad (4)$$

dove si è fatto riferimento alla corrente totale  $I = 2aj_s$  che scorre nel nastro, pari al prodotto della densità di corrente superficiale per la larghezza del nastro stesso.

### S.5.10.

Sceglieremo l'asse z coincidente con l'asse della spira; per comodità assumeremo che il verso dell'asse coincida con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nella direzione di circolazione della corrente nella spira. Assumeremo inoltre che l'origine delle coordinate coincida col centro O della spira. Il campo magnetico prodotto nel punto P sull'asse della spira è dato da:



$$\mathbf{B} = \int_{\text{spira}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione che, spiccato dall'elemento di circuito  $dl$  della spira, punta nella posizione di P,  $r = |\mathbf{r}|$  ed il percorso di integrazione si intende esteso all'intera spira. Poiché per simmetria la distanza  $r$  di P da  $dl$  è costante lungo la spira, l'equazione (1) può essere riscritta nella forma:

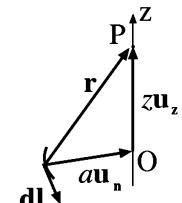
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \int_{\text{spira}} dl \times \mathbf{r}. \quad (2)$$

Al fine di risolvere agevolmente l'integrale, possiamo scomporre il vettore  $\mathbf{r}$  nella somma di uno spostamento radiale più uno spostamento lungo l'asse z secondo la relazione  $\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z + a\mathbf{u}_n$ , dove  $z$  è la coordinata di P,  $a$  il raggio della spira ed  $\mathbf{u}_n$  un versore radiale diretto dall'elementino  $dl$  verso O, come illustrato in figura. Pertanto avremo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left[ \int_{\text{spira}} dl \times z\mathbf{u}_z + \int_{\text{spira}} dl \times a\mathbf{u}_n \right], \quad (3)$$

da cui, tenuto conto che il termine  $z\mathbf{u}_z$  è costante lungo il percorso di integrazione, otteniamo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left[ \left( \int_{\text{spira}} dl \right) \times z\mathbf{u}_z + a \int_{\text{spira}} dl \times \mathbf{u}_n \right]. \quad (4)$$



Si noti che il primo integrale nella (4) è nullo, in quanto somma di spostamenti lungo un percorso chiuso, che dunque è pari ad uno spostamento di lunghezza nulla. Pertanto:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \int_{\text{spira}} dl \times \mathbf{u}_n. \quad (5)$$

Come può evincersi dalla figura, risulta  $d\mathbf{l} \times \mathbf{u}_n = dl\mathbf{u}_z$ , dove  $dl = |d\mathbf{l}|$ . Sulla scorta di ciò, otteniamo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a I}{4\pi r^3} \int_{\text{spira}} dl \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3} \mathbf{u}_z; \quad (6)$$

nel calcolare l'integrale nella (6) si è tenuto conto del fatto che la somma dei moduli degli spostamenti è pari alla circonferenza della spira. Esprimendo poi  $r$  in funzione di  $z$  ed  $a$ , otteniamo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a^2 I \mathbf{u}_z}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

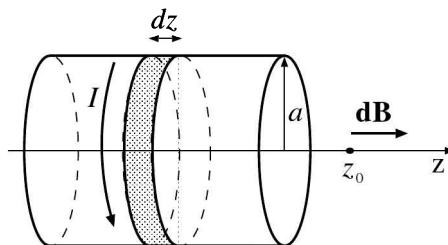
In particolare nel centro della spira il campo magnetico è pari a:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 I \mathbf{u}_z}{2a}. \quad (8)$$

Si noti che  $\mathbf{B}$  è diretto come l'asse  $z$  e quindi segue la regola del cavatappi: il verso del campo magnetico coincide con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nella direzione di circolazione della corrente nella spira.

### S.5.11.

Assumiamo per semplicità che l'asse del solenoide coincida con l'asse  $z$  delle coordinate. Porremo inoltre che la corrente fluente nelle spire del solenoide circoli nel verso in cui ruota una vite destrorsa che avanzi nella direzione dell'asse  $z$ .



Incominciamo col calcolare il campo  $\mathbf{B}$  prodotto lungo  $z$ . Una porzione infinitesima del solenoide di lunghezza  $dz$  può essere assimilata ad una spira circolare in cui fluisca la corrente infinitesima  $di = I n dz$ , essendo  $I$  la corrente che scorre nella singola spira ed  $n$  il numero di spire per unità di lunghezza. Ovviamente tale assunzione equivale a considerare la corrente come uniformemente distribuita sulla superficie del solenoide anziché essere concentrata nelle singole spire avvolte su di esso; l'approssimazione che compiamo con tale assunzione può considerarsi accettabile sinché la densità di spire è elevata od il raggio  $a$  del solenoide è molto maggiore della separazione fra le spire. Detta  $z$  la coordinata del tratto infinitesimo di solenoide considerato e  $z_0$  la posizione in cui vogliamo calcolare il campo magnetico  $d\mathbf{B}$  da esso prodotto, risulterà:

$$d\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 a^2 di \mathbf{u}_z}{2[(z - z_0)^2 + a^2]^{3/2}}. \quad (1)$$

L'equazione (1) è stata ottenuta nella soluzione del precedente esercizio. Il campo magnetico complessivo si otterrà sommando i campi prodotti dalle porzioni infinitesime in cui il solenoide è scomposto. Pertanto:

$$\mathbf{B}(z_0) = \int_{\text{solenoide}} d\mathbf{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 a^2 I n \mathbf{u}_z dz}{2[(z - z_0)^2 + a^2]^{3/2}}. \quad (2)$$

Per risolvere l'integrale nella (2), possiamo per esempio effettuare la sostituzione  $(z - z_0) = a \cotan\theta$ ; il differenziale può allora essere riscritto nella forma:

$$dz = d(z - z_0) = -\frac{a d\theta}{\sin^2 \theta}; \quad (3)$$

gli estremi di integrazione si trasformano secondo le relazioni:

$$\begin{cases} z_{\text{sup}} = \infty & \rightarrow \theta_{\text{sup}} = 0 \\ z_{\text{inf}} = -\infty & \rightarrow \theta_{\text{inf}} = \pi \end{cases}, \quad (4)$$

da cui, sostituendo nella(2), otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z_0) &= - \int_{\pi}^0 \frac{\mu_0 a^2 I n \mathbf{u}_z}{2} \frac{1}{[a^2 \cotan^2 \theta + a^2]^{3/2}} \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta} = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I n \mathbf{u}_z}{2} \frac{1}{[\cotan^2 \theta + 1]^{3/2}} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Moltiplicando per  $\sin \theta$  numeratore e denominatore dell'integrandita, tenendo conto che  $\cotan \theta = \cos \theta / \sin \theta$  e semplificando, possiamo riscrivere la (5) nella forma:

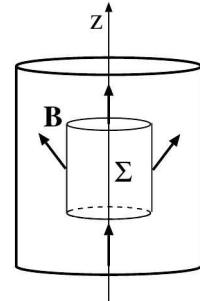
$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 I n \mathbf{u}_z}{2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \mu_0 I n \mathbf{u}_z. \quad (6)$$

Si noti che il risultato ottenuto è indipendente sia dal raggio  $a$  del solenoide che dalla posizione  $z_0$  in cui è stato calcolato il campo; quest'ultima proprietà poteva essere prevista già in partenza, poiché il solenoide è indefinito. Risulta quindi che lungo l'asse z  $\mathbf{B}$  è costante e diretto come l'asse stesso. Si noti che, data la simmetria cilindrica del solenoide, il modulo del campo magnetico nei punti lontani dall'asse z deve dipendere unicamente dalla distanza  $r$  dall'asse stesso. Per ricavare il valore di  $\mathbf{B}$  in tali punti, dobbiamo fare uso delle proprietà fondamentali del campo magnetico riassunte nelle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \\ \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_c. \end{cases} \quad (7)$$

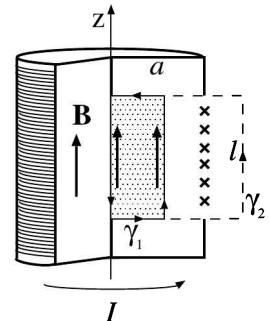
La prima delle (7) stabilisce la solenoidalità del campo: il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie chiusa  $\Sigma$  è sempre nullo. Da ciò deriva direttamente che  $\mathbf{B}$ , se diverso da zero, è sicuramente parallelo all'asse  $z$ . Consideriamo infatti una superficie cilindrica coassiale al solenoide; il campo  $\mathbf{B}$  avrà simmetria cilндrica (in quanto il solenoide è cilндrico) e non dipenderà da  $z$  (essendo il solenoide indefinito).

Pertanto la somma dei flussi di  $\mathbf{B}$  attraverso le due basi di  $\Sigma$  sarà nulla; se per assurdo il campo non fosse parallelo all'asse  $z$  (vedi figura), il flusso attraverso la superficie laterale sarebbe diverso da zero e quindi sarebbe diverso da zero il flusso totale attraverso  $\Sigma$ , il che contraddice la proprietà di solenoidalit . Il campo magnetico sarà dunque esprimibile nella forma  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_z$ , essendo  $r$  la distanza dall'asse del solenoide. A tal punto possiamo applicare la seconda delle (7), che esprime la legge di Ampere: la circuitazione di  $\mathbf{B}$  attraverso un percorso chiuso  $\gamma$  è proporzionale alla corrente  $i_c$  concatenata a  $\gamma$ . Consideriamo un percorso chiuso rettangolare  $\gamma_1$  con un lato di lunghezza  $l$  coincidente con l'asse del solenoide e l'altro lato, perpendicolare all'asse, di lunghezza  $r < a$ ; assumiamo che  $\gamma_1$  abbia verso di percorrenza antiorario. Essendo nulla la corrente concatenata a  $\gamma_1$  (vedi figura successiva), è nulla anche la circuitazione del campo magnetico. Tuttavia, calcolando l'integrale di circuitazione, avremo:



$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = lB(r) - lB(0) = 0. \quad (8)$$

Si noti che i lati perpendicolari all'asse non contribuiscono alla circuitazione (poich  lo spostamento  $d\mathbf{l}$    perpendicolare al campo  $\mathbf{B}$ ), mentre il lato coincidente con l'asse contribuisce con un termine negativo (in quanto il campo  $\mathbf{B}$  sull'asse ha verso opposto a quello di percorrenza della linea). Dalla (8) deriva che  $B(r) = B(0)$  e quindi il campo  $\mathbf{B}$  ha lo stesso modulo in ogni punto a distanza minore di  $a$  dall'asse  $z$  (ovvero per tutti i punti all'interno del solenoide). Ripetendo il calcolo della circuitazione sul percorso  $\gamma_2$  con lati di lunghezza  $l$  ed  $r > a$ , otterremo questa volta:



$$\oint_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = lB(r) - lB(0) = -\mu_0 n l I. \quad (9)$$

Si noti il segno negativo al secondo membro della (9): la corrente concatenata a  $\gamma_2$    infatti entrante nel piano del foglio e dunque va considerata con segno negativo perch  ha verso discorde da quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di percorrenza scelto per la linea  $\gamma_2$ . Ricordando che, per la (6) il modulo di  $B(0)$    pari a  $\mu_0 n I$ , ne deriva che nei punti esterni al solenoide indefinito il campo magnetico   nullo. Pertanto, riepilogando, risulta:

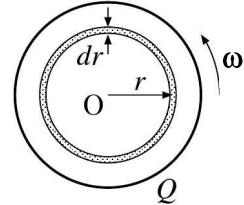
$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{u}_z & r < a, \\ 0 & r > a. \end{cases} \quad (10)$$

**S.5.12.**

Poiché la carica è distribuita uniformemente sul disco, la densità di carica superficiale presente su di esso è pari a:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}, \quad (1)$$

dove  $Q$  è la carica deposta ed  $R$  il raggio del disco. Il disco può essere scomposto in corone circolari concentriche di spessore infinitesimo  $dr$  e raggio medio  $r$ , come illustrato in figura. Ponendo il disco in rotazione attorno al suo asse, ognuno di questi elementi genera un campo magnetico  $\mathbf{dB}$  assimilabile a quello generato da una spira circolare percorsa da una corrente infinitesima di intensità:



$$dI = \frac{dq}{T}, \quad (2)$$

dove  $dq$  è la carica infinitesima presente sulla corona circolare e  $T$  il periodo di rotazione. Risulta che la carica presente sulla corona circolare è data da:

$$dq = \sigma 2\pi r dr, \quad (3)$$

mentre il periodo di rotazione è legato alla velocità angolare del disco dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4)$$

Dalle relazioni (1-4) risulta poi:

$$dI = \sigma \omega r dr = \frac{Q \omega r}{\pi R^2} dr. \quad (5)$$

In base a quanto illustrato nei precedenti esercizi, il campo magnetico generato nel centro O del disco da una delle spire elementari è dato da:

$$\mathbf{dB}(O) = \frac{\mu_0 dI \mathbf{u}_z}{2r}, \quad (6)$$

dove  $\mathbf{u}_z$  è il versore orientato nella direzione di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nello stesso verso del disco. Avendo scelto in figura un verso di rotazione antiorario, il versore  $\mathbf{u}_z$  risulta diretto perpendicolarmente al piano del foglio verso il lettore. Il campo magnetico complessivo nel centro del disco sarà allora dato dalla relazione:

$$\mathbf{B}(O) = \int_{\text{disco}} \mathbf{dB}(O) = \int_0^R \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \mathbf{u}_z dr, \quad (7)$$

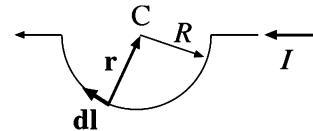
da cui deriva:

$$\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R} \mathbf{u}_z. \quad (8)$$

**S.5.13.**

Il campo magnetico prodotto dal filo nel punto C può essere calcolato mediante il principio di sovrapposizione: scomponendo il filo in elementi infinitesimi  $dl$ , il campo  $d\mathbf{B}$  prodotto da ciascuno di essi sarà dato dalla relazione:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$



dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione che, spiccato dall'elemento  $dl$ , individua il punto C ed  $r$  ne è il relativo modulo. Il

campo complessivo  $\mathbf{B}$  si otterrà come somma dei campi prodotti dai vari elementi del filo. Si noti che gli elementi disposti lungo i due tratti rettilinei del filo non contribuiscono al campo magnetico in C, in quanto i vettori  $\mathbf{r}$  e  $dl$  risultano in questi casi tra loro paralleli. L'unico contributo deriva pertanto dal tratto semicircolare:

$$\mathbf{B}(C) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{semic.}} \frac{I dl \times \mathbf{r}}{R^3}, \quad (2)$$

dove si è tenuto conto del fatto che  $r = R$  lungo il tratto semicircolare. Detto  $\mathbf{u}_z$  il versore perpendicolare al piano del foglio e da questo uscente, risulterà che  $dl \times \mathbf{r} = -dl R \mathbf{u}_z$ , essendo  $dl$  il modulo di  $dl$ . Pertanto il campo magnetico in C sarà pari a:

$$\mathbf{B}(C) = -\frac{\mu_0 I \mathbf{u}_z}{4\pi R^2} \int_{\text{semic.}} dl, \quad (3)$$

da cui, essendo l'integrale pari alla lunghezza della semicirconferenza:

$$\mathbf{B}(C) = -\frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{u}_z. \quad (4)$$

**S.5.14.**

Calcoliamo il campo magnetico generato nel punto O mediante il principio di sovrapposizione. Come già visto nel precedente esercizio, i tratti radiali del circuito non contribuiscono al campo  $\mathbf{B}(O)$ , per cui possiamo porre:

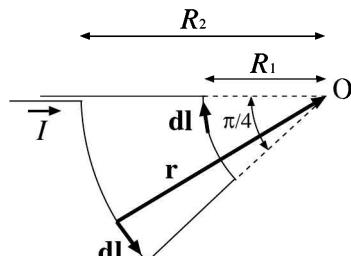
$$\mathbf{B}(O) = \int_{\text{arco } R_1} d\mathbf{B} + \int_{\text{arco } R_2} d\mathbf{B}, \quad (1)$$

dove il campo  $d\mathbf{B}$  generato da un elemento infinitesimo  $dl$  del circuito è dato ancora una volta dalla relazione:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2)$$

Dalle (1-2) si ottiene:

$$\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int_{\text{arco } R_1} \frac{dl \times \mathbf{r}}{R_1^3} + \int_{\text{arco } R_2} \frac{dl \times \mathbf{r}}{R_2^3} \right]. \quad (3)$$



Si noti che, rispetto al punto O, la corrente fluisce in senso antiorario nel tratto di raggio maggiore ed in senso orario nel tratto di raggio minore. Pertanto i due tratti del circuito contribuiranno in O con campi magnetici di segno opposto. Detto  $\mathbf{u}_z$  il versore

perpendicolare al piano del foglio e diretto verso il lettore, potremo riscrivere la (3) nella forma:

$$\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{u}_z \left[ \int_{\text{arcoR}_2} \frac{dl}{R_2^2} - \int_{\text{arcoR}_1} \frac{dl}{R_1^2} \right], \quad (4)$$

da cui otterremo poi:

$$\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{u}_z \left[ \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] = -\frac{\mu_0 I}{16R_1 R_2} (R_2 - R_1) \mathbf{u}_z. \quad (5)$$

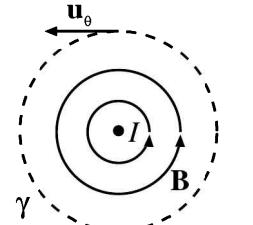
### S.5.15.

Si consideri un filo rettilineo indefinito perpendicolare al piano del foglio in cui scorra una corrente  $I$  diretta verso il lettore. In base alla geometria del sistema, si deduce che il campo magnetico generato dal filo è dotato di simmetria cilindrica. Possiamo esprimere lo stesso concetto affermando che il campo  $\mathbf{B}$  deve essere invariante per rotazioni arbitrarie attorno ad un asse coincidente col filo (dinfatti la disposizione del filo non cambia se esso ruota su se stesso). Pertanto il modulo di  $\mathbf{B}$  dipende esclusivamente dalla distanza  $r$  dal filo. Il campo magnetico obbedisce inoltre alla equazione:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}; \quad (1)$$

il significato di tale relazione è semplice: le correnti costituiscono i vortici per le linee di flusso di  $\mathbf{B}$ . In base a questa proprietà e considerata la simmetria cilindrica del campo, la forma più semplice che possiamo attribuire alle linee di flusso di  $\mathbf{B}$  è quella di circonferenze concentriche giacenti nel piano del foglio (vedi figura). Per calcolare il campo magnetico possiamo ricorrere ora alla legge di Ampere, che è semplicemente una formulazione integrale della (1):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_c, \quad (2)$$



dove  $\gamma$  è un percorso chiuso orientato,  $d\mathbf{s}$  uno spostamento infinitesimo lungo il percorso ed  $i_c$  la corrente totale ad esso concatenata; il segno di  $i_c$  viene scelto secondo la regola del cavatappi: sono positive le correnti che scorrono nel verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di percorrenza di  $\gamma$ . Per comodità sceglieremo per  $\gamma$  un orientamento antiorario, di modo che la corrente  $I$  che scorre nel filo risulti positiva. Al fine di semplificare la (2), daremo inoltre a  $\gamma$  una forma circolare, con centro coincidente col filo e raggio generico  $r$ . Detto  $\mathbf{u}_\theta$  il versore tangente a  $\gamma$  diretto in verso antiorario e tenuto conto delle proprietà di  $\mathbf{B}$ , possiamo allora riscrivere la (2) nella forma:

$$\oint_{\gamma} B(r) \mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{s} \mathbf{u}_\theta = \mu_0 I, \quad (3)$$

dove  $ds = |\mathbf{ds}|$ ; si noti che la corrente concatenata  $i_c = I$  per qualunque valore del raggio di  $\gamma$ . Tenuto conto che  $B(r)$  è costante lungo il percorso di integrazione, otteniamo poi:

$$B(r) \oint_{\gamma} ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 I, \quad (4)$$

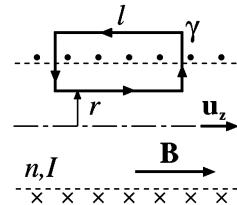
da cui:

$$\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{u}_\theta. \quad (5)$$

La (5) coincide col risultato ottenuto in precedenza calcolando il campo magnetico mediante principio di sovrapposizione.

### S.5.16.

Come già visto precedentemente, considerando il solenoide rettilineo indefinito come l'insieme di infinite spire, si giunge alla conclusione che il campo magnetico  $\mathbf{B}$  generato dal solenoide debba essere parallelo all'asse stesso e non possa variare se ci si sposta lungo il solenoide. Tale conclusione può essere ottenuta indipendentemente dal calcolo effettivo di  $\mathbf{B}$ , semplicemente sulla base della simmetria cilindrica del sistema, sul fatto che il solenoide sia di estensione infinita e sulla solenoidalità del campo magnetico (si veda in proposito la soluzione dell'esercizio 11). Detta  $r$  la distanza dall'asse del solenoide ed  $\mathbf{u}_z$  il versore parallelo a tale asse, porremo pertanto che  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_z$ . Al fine di calcolare il campo con la sola legge di Ampere è ora necessario fare un'ipotesi: assumeremo che  $\mathbf{B}$  al di fuori del solenoide sia nullo. Tale ipotesi è giustificabile solo a posteriori, sulla base del calcolo del campo mediante il principio di sovrapposizione. Osserviamo comunque, senza pretesa di legittimare l'ipotesi introdotta, che le linee di flusso del campo  $\mathbf{B}$  sono chiuse, ma in questo caso specifico esse si ricongiungono all'infinito; dunque assumere che  $\mathbf{B}$  sia nullo fuori dal solenoide non viola la proprietà di solenoidalità. Consideriamo ora un percorso chiuso orientato  $\gamma$  di forma rettangolare, parzialmente introdotto nel solenoide, con un lato parallelo a  $\mathbf{u}_z$  di lunghezza  $l$ . Nella figura è mostrata una sezione del sistema; le correnti sul bordo superiore del solenoide scorrono verso il lettore mentre quelle sul bordo inferiore sono dirette in verso opposto; notare che una vite destrorsa che ruoti nel verso delle correnti, avanza nella direzione di  $\mathbf{u}_z$ . Scegliamo per  $\gamma$  un verso antiorario; in virtù della regola del cavatappi, le correnti concatenate ad essa sono positive. Applicando la legge di Ampere, si ottiene:



$$\oint_\gamma B(r)\mathbf{u}_z \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 n l I, \quad (1)$$

dove  $n l I$  è la corrente concatenata a  $\gamma$  ed  $n$  è il numero di spire per unità di lunghezza. Si noti che il lato esterno al solenoide non contribuisce al calcolo, in quanto il campo esterno è nullo; i lati perpendicolari all'asse non danno contributi in quanto lo spostamento  $d\mathbf{s}$  lungo di essi è perpendicolare al campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Pertanto potremo riscrivere la (1) nella forma:

$$l B(r) = \mu_0 n l I, \quad (2)$$

dove  $r$  è la distanza dall'asse del solenoide a cui si trova il lato interno di  $\gamma$ . Dalla (2) otteniamo poi:

$$B(r) = \mu_0 n I. \quad (3)$$

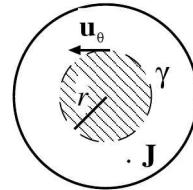
Riassumendo, risulta:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{u}_z & r < a, \\ 0 & r > a. \end{cases} \quad (4)$$

essendo  $a$  il raggio del solenoide. Dalla (4) si nota che il modulo del campo all'interno del solenoide non dipende dalla posizione in cui lo calcoliamo; il risultato ottenuto è ovviamente identico a quanto trovato determinando il campo  $\mathbf{B}$  mediante il principio di sovrapposizione.

### S.5.17.

Il cavo conduttore indefinito è dotato di simmetria cilindrica, per cui possiamo ipotizzare che il campo magnetico da esso generato goda dello stesso tipo di simmetria. Come già visto nel caso del campo  $\mathbf{B}$  generato dal filo, applicheremo la legge di Ampere lungo un percorso chiuso circolare  $\gamma$  concentrico alla sezione del conduttore, di raggio generico  $r$ . Nella figura è riportata la sezione del conduttore; il vettore densità di corrente  $\mathbf{J}$  è perpendicolare al piano del foglio, diretto verso il lettore. Sceglieremo per  $\gamma$  un verso di percorrenza antiorario, in modo che la corrente concatenata ad essa risulti positiva; il versore  $\mathbf{u}_\theta$  individua l'orientamento della linea. In virtù della simmetria del sistema, porremo allora che  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$ ; applicando la legge di Ampere lungo  $\gamma$  otterremo quindi:



$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} B(r) \mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{s} \mathbf{u}_\theta = \mu_0 i_c, \quad (1)$$

essendo  $ds$  il modulo dello spostamento  $d\mathbf{s}$  lungo  $\gamma$  ed  $i_c$  la corrente ad essa concatenata. Tenuto conto che  $B(r)$  è costante lungo  $\gamma$ , la (1) diviene:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 i_c, \quad (2)$$

da cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}. \quad (3)$$

Si noti che, nell'ipotesi che la densità di corrente  $\mathbf{J}$  sia uniforme sulla sezione del conduttore, risulterà:

$$J = \frac{I}{\pi(d/2)^2} = \frac{4I}{\pi d^2}, \quad (4)$$

essendo  $d$  il diametro del conduttore e  $J = |\mathbf{J}|$ . La corrente  $i_c$  concatenata da  $\gamma$  è data dalla relazione:

$$i_c = \int_{\Sigma_\gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA \quad (5)$$

in cui:  $\Sigma_\gamma$  è una superficie che abbia  $\gamma$  per contorno;  $\mathbf{n}$  un versore normale a tale superficie, il cui verso sia quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di

percorrenza di  $\gamma$ ;  $dA$  un elemento infinitesimo di  $\Sigma_\gamma$ . La corrente concatenata assume poi due diversi andamenti in funzione del raggio  $r$  di  $\gamma$ :

(a) per  $r < (d/2)$  risulterà:

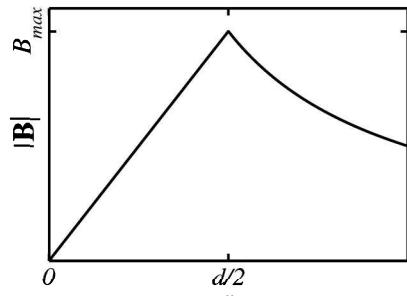
$$i_c = J\pi r^2 = \frac{4Ir^2}{d^2}; \quad (6)$$

(b) per  $r \geq (d/2)$  avremo:

$$i_c = I. \quad (7)$$

Sostituendo le (6-7) nella (3) otteniamo poi l'andamento del campo magnetico, come di seguito riassunto:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 Ir}{\pi d^2} \mathbf{u}_\theta & r < (d/2), \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & r \geq (d/2). \end{cases} \quad (8)$$



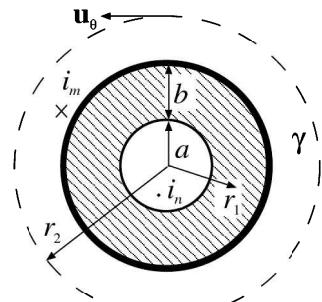
L'andamento del modulo di  $\mathbf{B}$  è mostrato nel grafico in funzione della distanza  $r$  dall'asse; si noti che sulla superficie laterale del cilindro, ovvero per  $r = (d/2)$ , il campo risulta continuo ed assume il massimo valore, pari a:

$$B_{max} = \frac{\mu_0 I}{\pi d} = 4 \times 10^{-5} \text{ T}. \quad (9)$$

### S.5.18.

Per risolvere l'esercizio si farà uso della legge di Ampere. La figura mostra una sezione del cavo coassiale; la corrente nella parte centrale (nucleo) scorre verso il lettore, mentre quella nella maglia esterna scorre verso il foglio. Vista la simmetria cilindrica del sistema, possiamo supporre che il campo magnetico generato dalle correnti sia esprimibile nella forma  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$ , essendo  $r$  la distanza dall'asse del cavo coassiale ed  $\mathbf{u}_\theta$  un versore tangente alle linee di flusso circolari del campo, centrate sull'asse del cavo. Si assumerà per  $\mathbf{u}_\theta$  un verso antiorario; si noti che tale assunzione non è vincolante, poiché se il campo magnetico risultante fosse diretto in verso orario, la quantità  $B(r)$  risulterebbe semplicemente di segno negativo. Applichiamo la legge di Ampere ad una linea chiusa circolare  $\gamma$  centrata sull'asse del cavo. Porremo che anche  $\gamma$  sia orientata in verso antiorario; con questa assunzione e sulla base della regola del cavatappi, assegneremo segno positivo alla corrente  $i_n$  emergente dal nucleo del cavo coassiale, mentre riterremo negativa la corrente  $i_m$  che scorre nella maglia. Risulta per la legge di Ampere:

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_\gamma B(r)\mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{s} \mathbf{u}_\theta = \mu_0 i_c, \quad (1)$$



essendo  $i_c$  la corrente concatenata a  $\gamma$ . Come già visto nel precedente esercizio, la (1) si riduce a:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}, \quad (2)$$

essendo  $r$  il raggio della linea  $\gamma$ . La corrente concatenata al percorso di integrazione sarà pari a

$$i_c = \int_{\Sigma_\gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3)$$

dove  $\Sigma_\gamma$  è una superficie che abbia  $\gamma$  per contorno,  $\mathbf{J}$  è la densità di corrente ed  $\mathbf{n}$  è un versore normale a tale superficie, il cui verso sia quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di percorrenza di  $\gamma$ . Nell'ipotesi che la densità di corrente  $\mathbf{J}_n$  nel conduttore centrale sia uniforme sulla sezione, risulterà:

$$J_n = \frac{i_n}{\pi a^2}, \quad (4)$$

essendo  $a$  il raggio del nucleo conduttore e  $J_n = |\mathbf{J}_n|$ . Sulla base di quanto detto, la corrente  $i_c$  concatenata da  $\gamma$  assume tre diversi andamenti in funzione del raggio  $r$  di  $\gamma$ :  
(a) per  $r < a$  risulterà:

$$i_c = J_n \pi r^2 = \frac{i_n r^2}{a^2}; \quad (5)$$

(b) per  $a \leq r < (a + b)$  avremo:

$$i_c = i_n; \quad (6)$$

(c) per  $r \geq (a + b)$  infine risulterà:

$$i_c = i_n - i_m. \quad (7)$$

Sulla base delle relazioni (2-7) possiamo allora dire che il campo prodotto dal cavo coassiale avrà la seguente struttura:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i_n r}{2\pi a^2} \mathbf{u}_\theta & r < a, \\ \frac{\mu_0 i_n}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & a \leq r < (a + b), \\ \frac{\mu_0 (i_n - i_m)}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & r \geq (a + b). \end{cases} \quad (8)$$

Si noti che  $a < r_1 < (a + b)$ , per cui il campo magnetico a questa distanza sarà:

$$\mathbf{B}(r_1) = \frac{\mu_0 i_n}{2\pi r_1} \mathbf{u}_\theta; \quad (9)$$

risulta invece che  $r_2 > (a + b)$  e quindi il campo magnetico alla distanza  $r_2$  è:

$$\mathbf{B}(r_2) = \frac{\mu_0(i_n - i_m)}{2\pi r_2} \mathbf{u}_\theta. \quad (10)$$

Imponendo quanto richiesto dal problema, otteniamo:

$$\begin{cases} \mathbf{B}(r_1) = -\mathbf{B}(r_2), \\ |\mathbf{B}(r_1)| = |\mathbf{B}(r_2)| = B, \end{cases} \quad (11)$$

essendo  $B = 10^{-3}$  T. Dalle relazioni (9-11) otteniamo poi:

$$\begin{cases} \frac{i_n}{r_1} = \frac{(i_m - i_n)}{r_2}, \\ \frac{i_n}{r_1} = \frac{2\pi B}{\mu_0}. \end{cases} \quad (12)$$

Dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$\begin{cases} i_m = \frac{2\pi B}{\mu_0}(r_1 + r_2), \\ i_n = \frac{2\pi B}{\mu_0}r_1. \end{cases} \quad (13)$$

Sostituendo nelle (13) i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo poi  $i_n = 15$  A ed  $i_m = 45$  A.

### S.5.19.

Sia  $a$  il raggio del solenoide indefinito ed  $I$  la corrente che scorre nelle sue spire. Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  generato dal solenoide avrà modulo pari a  $B = \mu_0 n I$  e sarà diretto lungo l'asse. La forza agente sull'elettrone sarà pari a:

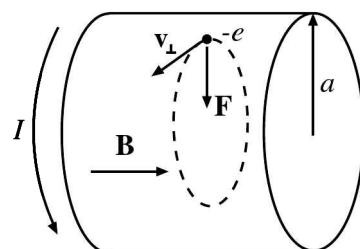
$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

con  $\mathbf{v}$  velocità dell'elettrone ed  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C carica elementare; questa forza costringerà l'elettrone ad un'orbita di tipo elicoidale lungo l'asse del solenoide. Come già visto nel primo esercizio di questo capitolo, il raggio  $R$  della traiettoria elicoidale si può calcolare dalla (1) imponendo che la forza magnetica agisca da forza centripeta:

$$|\mathbf{F}| = ev_\perp B = m_e \frac{v_\perp^2}{R}, \quad (2)$$

dove  $v_\perp = v \sin \theta$  è la proiezione della velocità della particella in direzione perpendicolare al campo magnetico,  $v$  è il modulo della velocità e  $\theta$  è l'angolo che questa forma con  $\mathbf{B}$ . Dalla (2) otteniamo:

$$R = \frac{m_e v \sin \theta}{e B}. \quad (3)$$



Dalla precedente espressione risulta che, a parità di energia cinetica e dunque di modulo della velocità degli elettroni, il massimo raggio della traiettoria si ha per  $\theta = \pi/2$ ; in questo caso il moto è circolare uniforme ed avviene nel piano perpendicolare a  $\mathbf{B}$ . Per stabilire quale valore debba assumere il campo magnetico al fine di evitare che gli elettroni collidano con le pareti del solenoide, assumiamo come caso limite quello in cui il raggio massimo della traiettoria elettronica sia pari a quello del solenoide:

$$R_{max} = \frac{m_e v}{e B} = a. \quad (4)$$

Dalla (4) otteniamo, inserendo l'espressione del campo magnetico in funzione della corrente  $I$ :

$$I = \frac{m_e v}{\mu_0 e n a}. \quad (5)$$

Utilizzando nella (5) i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo infine che la minima corrente necessaria a contenere gli elettroni nel solenoide è pari ad  $I = 0.9$  A.

### S.5.20.

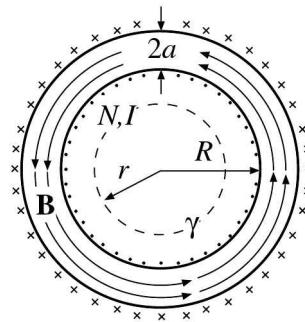
Data la struttura del solenoide toroidale, possiamo supporre che il campo magnetico abbia simmetria di rotazione attorno all'asse del solenoide stesso. Le linee di flusso del campo magnetico saranno allora descritte da circonferenze centrate sul tale asse. Nel seguito faremo riferimento alla figura a lato, in cui è mostrata una sezione della struttura. Si assumerà che la corrente nelle spire scorra verso il lettore nel lato interno del solenoide, mentre sul lato esterno scorra verso il piano del foglio. Ci aspetteremo, in virtù di quanto visto nei precedenti esercizi, che il campo  $\mathbf{B}$  sia diretto per la regola del cavatappi in verso antiorario. Detto  $\mathbf{u}_\theta$  un versore tangente alle linee di flusso circolari e diretto in verso antiorario, possiamo allora porre  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$ , essendo  $r$  la distanza dall'asse del toro. Scelta una linea chiusa circolare  $\gamma$  orientata anch'essa in verso antiorario, risulterà per la legge di Ampere:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} B(r) \mathbf{u}_\theta \cdot ds \mathbf{u}_\theta = \mu_0 i_c, \quad (1)$$

essendo  $i_c$  la corrente concatenata a  $\gamma$ . Risulterà:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}, \quad (2)$$

essendo  $r$  il raggio della linea  $\gamma$ . La corrente  $i_c$  concatenata da  $\gamma$  assume tre diversi andamenti in funzione del raggio  $r$  di  $\gamma$ : per  $r < R$  avremo che  $i_c = 0$ , in quanto la linea non concatena alcuna corrente; per  $R < r < (R + 2a)$  la corrente concatenata sarà  $i_c = N I$ , dove  $N$  è il numero di spire presenti nel solenoide. Si noti il segno positivo della corrente concatenata, ottenuto in base al verso di percorrenza scelto per  $\gamma$ . Infine per  $r > (R + 2a)$  risulterà ancora  $i_c = 0$ , in quanto la linea  $\gamma$  concatenerà due volte ogni spira, con versi opposti di scorrimento della corrente. Sostituendo questi risultati nella



(2) possiamo calcolare l'andamento del campo magnetico generato dal solenoide, che sarà pari a:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} 0 & r < R, \\ \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & R < r < (R + 2a), \\ 0 & r > (R + 2a). \end{cases} \quad (3)$$

Si noti che, nel caso in cui si abbia  $R \gg a$ , nella zona interna del solenoide possiamo porre  $r \approx R$ ; sostituendo questa relazione nella (3) otteniamo infine che nel solenoide  $\mathbf{B} = \mu_0 NI/(2\pi R) \mathbf{u}_\theta = \mu_0 n I \mathbf{u}_\theta$ , dove con  $n$  si è indicato il numero di spire per unità di lunghezza (grandezza univocamente definita nel solenoide curvo solo se  $R \gg a$ , altrimenti  $n = n(r)$ ). Per quanto concerne il modulo del campo magnetico, questo risultato assume la stessa espressione ottenuta per il solenoide rettilineo indefinito.

### S.5.21.

Al fine di esprimere in forma vettoriale il campo magnetico generato dai fili, introdurremo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali avente origine nel centro del quadrato ed i cui assi siano disposti lungo le sue diagonali.

I fili saranno numerati in senso orario da 1 a 4, come in figura. Si verifica facilmente che essi sono equidistanti dal centro del quadrato; la distanza che li separa dal centro è pari a  $d = a\sqrt{2}/2$ . In base alla legge di Biot-Savart, il modulo del campo magnetico generato dal filo  $k$ -simo nel centro è pari a:

$$B_k = \frac{\mu_0 i_k}{2\pi d} = \frac{\mu_0 i_k \sqrt{2}}{2\pi a}, \quad (1)$$

dove  $i_k$  è la corrente che scorre nel filo in questione. Sostituendo nella (1) i valori delle correnti che scorrono nei fili e tenendo conto della direzione e del verso corretti, otteniamo che il campo generato dal filo 1 sarà:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a} \mathbf{u}_x; \quad (2)$$

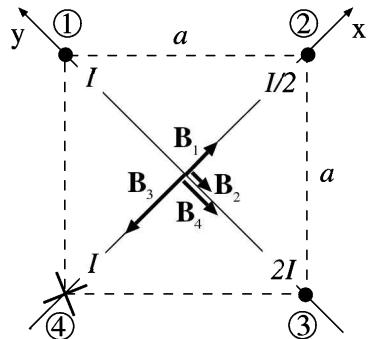
quello generato dal filo 2:

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi a} \mathbf{u}_y; \quad (3)$$

quello generato dal filo 3:

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi a} \mathbf{u}_x; \quad (4)$$

ed infine quello generato dal filo 4:



$$\mathbf{B}_4 = -\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a} \mathbf{u}_y. \quad (5)$$

Il campo complessivo, che per il principio di sovrapposizione è la somma dei campi generati dai quattro fili, sarà dato da:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4 = -\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a} \left[ \mathbf{u}_x + \frac{3}{2} \mathbf{u}_y \right]. \quad (6)$$

### S.5.22.

Si noti che la densità di corrente  $\mathbf{J}$  circolante nel cilindro prima e dopo la creazione della cavità è la stessa, possiamo pertanto risolvere il problema col principio di sovrapposizione: il campo magnetico  $\mathbf{B}$  generato dalla struttura è pari al campo  $\mathbf{B}_0$  generato dal cilindro pieno di raggio  $a$ , sottratto del campo  $\mathbf{B}_c$  generato dal cilindro di raggio

$a/2$  che è stato enucleato dal conduttore per creare la cavità. Le figure illustrano l'andamento di questi campi in un generico punto  $Q$ . Chiameremo  $r$  la distanza dal centro  $O$  del conduttore pieno ed  $r'$  la distanza dal centro  $C$  della cavità. In base ai dati del problema, la densità di corrente che fluisce nel conduttore è pari a:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{u}_z, \quad (1)$$

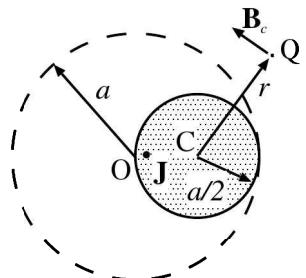
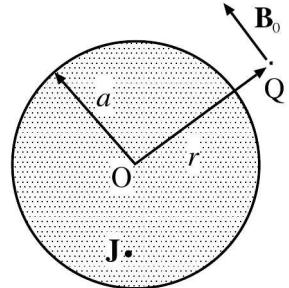
essendo  $\mathbf{u}_z$  un versore perpendicolare al piano del foglio, diretto verso il lettore. Applicando la legge di Ampere al conduttore pieno (per i dettagli sul calcolo del campo magnetico si veda ad esempio l'esercizio 17), si ottiene che il campo  $\mathbf{B}_0$  da questo generato è pari a:

$$\mathbf{B}_0(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi r^2 J}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{u}_\theta & r < a, \\ \frac{\mu_0 \pi a^2 J}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & r \geq a, \end{cases} \quad (2)$$

dove  $J = |\mathbf{J}|$  ed  $\mathbf{u}_\theta$  è un versore tangente alle linee di flusso circolari di  $\mathbf{B}_0$  centrate in  $O$  e diretto in verso antiorario. Applicando ancora la legge di Ampere al cilindro di raggio  $a/2$  enucleato dal conduttore, otteniamo che il campo  $\mathbf{B}_c$  da questo generato è:

$$\mathbf{B}_c(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi r'^2 J}{2\pi r'} \mathbf{u}_{\theta'} = \frac{\mu_0 I r'}{2\pi a^2} \mathbf{u}_{\theta'} & r' < (a/2), \\ \frac{\mu_0 \pi (a/2)^2 J}{2\pi r'} \mathbf{u}_{\theta'} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'} \mathbf{u}_{\theta'} & r' \geq (a/2), \end{cases} \quad (3)$$

dove  $\mathbf{u}_{\theta'}$  è un versore tangente alle linee di flusso circolari di  $\mathbf{B}_c$  centrate in  $C$  e diretto in verso antiorario, mentre  $I' = I/4$  è la corrente complessiva che scorre in questo secondo



conduttore. Imponendo che  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_c$  e facendo uso dei versori degli assi x ed y mostrati in figura, otteniamo per il campo in O:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(O) &= \mathbf{B}_0(O) - \mathbf{B}_c(O) = \\ &= 0 - \left[ -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y;\end{aligned}\quad (4)$$

per il campo in C otterremo invece:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(C) &= \mathbf{B}_0(C) - \mathbf{B}_c(C) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y - 0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y;\end{aligned}\quad (5)$$

ed infine per il campo nel punto P, a distanza  $l > a$  dal centro del sistema, otterremo:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(P) &= \mathbf{B}_0(P) - \mathbf{B}_c(P) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \mathbf{u}_y - \frac{\mu_0 I}{4\pi(2l-a)} \mathbf{u}_y = \frac{\mu_0 I(3l-2a)}{4\pi l(2l-a)} \mathbf{u}_y.\end{aligned}\quad (6)$$

*Nota.* Ponendo  $l = a$ , ovvero calcolando il campo nel punto P' sul bordo esterno della cavità, otterremo ancora

$$\mathbf{B}(P') = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y. \quad (7)$$

Confrontando le (4), (5) ed (7), si nota che il campo magnetico nei tre punti considerati assume lo stesso valore. Si può dimostrare, mediante l'uso della trigonometria, che in realtà il campo magnetico sul bordo ed all'interno della cavità è uniforme ed è proprio pari a

$$\mathbf{B}_{\text{cav}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{u}_y. \quad (8)$$

Si lascia al lettore il compito di dimostrare questa proprietà.

### S.5.23.

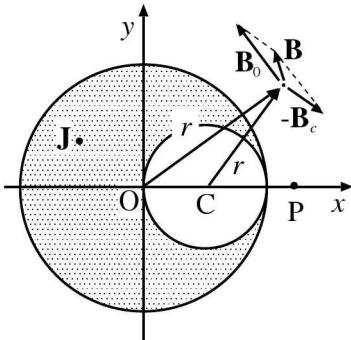
Per determinare la forza  $\mathbf{F}$  agente sul filo centrale, faremo uso della relazione:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}; \quad (1)$$

essendo  $i$  la corrente che scorre nel filo sottoposto alla forza magnetica,  $\mathbf{B}$  il campo agente sul filo,  $\mathbf{l}$  un vettore che individua lunghezza e disposizione del filo ed il cui verso corrisponde al verso di scorrimento della corrente  $i$ . Nel caso specifico in esame, porremo:

$$\mathbf{F} = I_2 L \mathbf{u}_x \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3); \quad (2)$$

dove  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_3$  sono rispettivamente i campi magnetici generati dal filo superiore e da quello inferiore nella posizione del filo centrale;  $I_2$  è la corrente che scorre in tale filo ed



$\mathbf{u}_x$  è il versore dell'asse  $x$  (mostrato in figura), che individua la direzione di scorrimento della corrente nel filo centrale. Nell'impiegare la relazione (1) si assume implicitamente che il campo magnetico complessivo agente sul filo sia uniforme; tale ipotesi è ragionevole fintanto che la distanza che separa i fili è molto piccola rispetto alla loro lunghezza, come del resto si può constatare dai dati assegnati dal problema. In tal caso infatti possiamo calcolare i campi magnetici mediante la legge di Biot-Savart, nonostante il fatto che i fili che li generano non siano indefiniti. In base ai versi delle correnti, il campo generato dal filo superiore nella posizione del filo centrale sarà:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{u}_z, \quad (3)$$

essendo  $\mathbf{u}_z$  il versore perpendicolare al piano del foglio, diretto verso il lettore. Il campo magnetico generato dal filo inferiore risulterà:

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi b} \mathbf{u}_z = \frac{2\mu_0 I}{3\pi a} \mathbf{u}_z. \quad (4)$$

Sostituendo la (3) e la (4) nella (2) otterremo:

$$\mathbf{F} = 3I L \frac{7\mu_0 I}{6\pi a} \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z. \quad (5)$$

Si noti che  $\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_y$ , per cui la (5) diviene:

$$\mathbf{F} = -\frac{7\mu_0 I^2 L}{2\pi a} \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

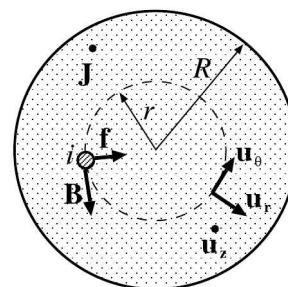
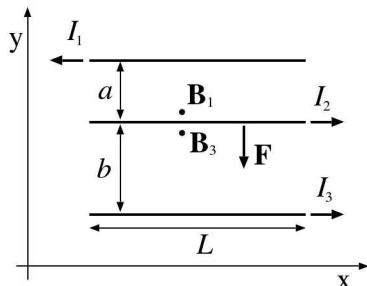
Sostituendo i valori numerici assegnati, si ottiene che il modulo della forza di interazione è  $F = |\mathbf{F}| = 0.016$  N.

#### S.5.24.

Dato l'elevato numero di fili che compongono il cavo, è lecito assumere, ai fini del calcolo del campo magnetico, che il cavo sia un conduttore cilindrico massiccio in cui la densità di corrente  $\mathbf{J}$  sia distribuita uniformemente. Porremo, come mostrato in figura, che la corrente fluisca in direzione perpendicolare al piano del foglio, verso il lettore. La densità di corrente efficace nel cavo sarà data da:

$$J = \frac{100 i}{\pi R^2}, \quad (1)$$

essendo  $J = |\mathbf{J}|$  ed  $R$  il raggio del cavo. Il calcolo del campo magnetico  $\mathbf{B}$  procederà mediante l'impiego della legge di Ampere; per i dettagli riguardanti il calcolo di  $\mathbf{B}$  si riporta alla soluzione dell'esercizio 17. Riassumeremo qui il risultato di tale procedimento; il campo magnetico sarà pari a:



$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi r^2 J}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 100i}{2\pi R^2} r \mathbf{u}_\theta & r < R, \\ \frac{\mu_0 \pi R^2 J}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 100i}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta & r \geq R, \end{cases} \quad (2)$$

essendo  $r$  la distanza dall'asse del cavo a cui valutiamo il campo ed  $\mathbf{u}_\theta$  un versore diretto in verso antiorario, tangente alle linee di flusso circolari di  $\mathbf{B}$  centrate sull'asse del cavo. Il campo magnetico alla distanza  $r = R/2$  all'interno dal cavo sarà quindi pari a:

$$\mathbf{B}(R/2) = \frac{25\mu_0 i}{\pi R} \mathbf{u}_\theta. \quad (3)$$

La forza per unità di lunghezza  $\mathbf{f}$  agente sul filo a distanza  $R/2$  dall'asse sarà dunque pari a:

$$\mathbf{f} = i \mathbf{u}_z \times \mathbf{B}(R/2) = \frac{25\mu_0 i^2}{\pi R} \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\theta, \quad (4)$$

essendo  $\mathbf{u}_z$  un versore perpendicolare al piano del foglio, diretto come la corrente (cioè verso il lettore). Si noti che  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\theta = -\mathbf{u}_r$ , dove per  $\mathbf{u}_r$  si intende un versore giacente nel piano del foglio e diretto radialmente rispetto all'asse del cavo con verso uscente da questo (come in figura). Pertanto

$$\mathbf{f} = -\frac{25\mu_0 i^2}{\pi R} \mathbf{u}_r. \quad (5)$$

A causa delle forze magnetiche, il filo risulta attratto verso il centro del cavo. Sostituendo nella precedente relazione i valori numerici assegnati, otteniamo che  $|\mathbf{f}| = 0.008$  N.

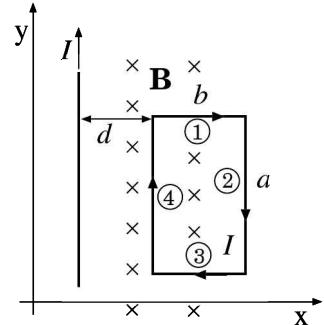
### S.5.25.

Supponiamo che il filo e la spira giacciano nel piano del foglio; introduciamo un sistema di coordinate cartesiane i cui assi  $x$  ed  $y$  giacciono nello stesso piano, mentre l'asse  $z$  sia perpendicolare al foglio e diretto verso il lettore. Sia la corrente  $I$  nel filo diretta come l'asse  $y$ , mentre supporremo che la corrente  $I'$  nella spira circoli in verso orario, come in figura. Secondo la legge di Biot-Savart il campo magnetico generato dal filo nella posizione occupata dalla spira sarà espresso dalla relazione:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{u}_z. \quad (1)$$

Possiamo calcolare la forza complessiva agente sulla spira come somma delle forze agenti sui suoi lati. Per determinare la forza  $\mathbf{F}_i$  agente sul lato  $i$ -esimo, utilizzeremo la relazione:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int I' d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$



essendo  $\mathbf{dl}$  un vettore che individua lunghezza e disposizione di un elementino infinitesimo del lato della spira ed il cui verso corrisponde al verso di scorrimento della corrente. Numerando i lati da 1 a 4 in verso orario, avremo:

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\text{lato } 1} \mathbf{dF} = \int_{\text{lato } 1} I' dx \mathbf{u}_x \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

che diviene, con l'aiuto della (1):

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\text{lato } 1} I' dx \mathbf{u}_x \times \left[ -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{u}_z \right], \quad (4)$$

da cui, tenuto conto che  $\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_y$ :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I' I \mathbf{u}_y}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{dx}{x}. \quad (5)$$

Svolgendo l'integrale nella (5) otteniamo poi:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+b}{d} \right) \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

Passando al lato 2, avremo:

$$\mathbf{F}_2 = \int_{\text{lato } 2} \mathbf{dF} = \int_{\text{lato } 2} -I' dy \mathbf{u}_y \times \mathbf{B}, \quad (7)$$

da cui otteniamo:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi} \int_{\text{lato } 2} \frac{dy}{x} \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z. \quad (8)$$

Tenuto conto che  $\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x$  e che lungo il lato 2 risulta  $x = (d+b)$ , possiamo riscrivere la forza come:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi(d+b)} \mathbf{u}_x \int_0^a dy = \frac{\mu_0 I' I a}{2\pi(d+b)} \mathbf{u}_x. \quad (9)$$

La forza agente sul lato 3, opposto al lato 1, sarà data dalla:

$$\mathbf{F}_3 = \int_{\text{lato } 3} \mathbf{dF} = \int_{\text{lato } 3} -I' dx \mathbf{u}_x \times \mathbf{B}; \quad (10)$$

confrontando la (10) con l'espressione (3) si nota che la forza risultante è l'opposto di quella agente sul lato 1, per cui possiamo scrivere direttamente:

$$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_0 I' I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+b}{d} \right) \mathbf{u}_y. \quad (11)$$

Infine la forza agente sul quarto lato sarà:

$$\mathbf{F}_4 = \int_{\text{lato } 4} \mathbf{dF} = \int_{\text{lato } 4} I' dy \mathbf{u}_y \times \mathbf{B}, \quad (12)$$

da cui otteniamo:

$$\mathbf{F}_4 = \frac{\mu_0 I' I}{2\pi} \int_{\text{lato } 4} -\frac{dy}{x} \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z. \quad (13)$$

Poiché lungo il lato 4 si ha  $x = d$ , possiamo riscrivere la forza come:

$$\mathbf{F}_4 = -\frac{\mu_0 I' I a}{2\pi d} \mathbf{u}_x \int_0^a dy = -\frac{\mu_0 I' I a}{2\pi d} \mathbf{u}_x. \quad (14)$$

Sommando le (6), (9), (11) e (14), si giunge ad ottenere la forza complessiva  $\mathbf{F}$  agente sulla spira:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4, \quad (15)$$

da cui:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I' I a}{2\pi} \left[ \frac{1}{d+b} - \frac{1}{d} \right] \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_0 I' I a b}{2\pi d(d+b)} \mathbf{u}_x. \quad (16)$$

Sostituendo nella (16) i valori assegnati dal problema, risulta che il modulo della forza è pari a  $|\mathbf{F}| = 10^{-4}$  N. Si noti che la forza è attrattiva; per ottenere una forza repulsiva dobbiamo invertire il verso di scorrimento della corrente nella spira, rendendolo antiorario.

### S.5.26.

La figura mostra la spira di lato; l'asse di rotazione è perpendicolare al piano del foglio; la corrente sul lato superiore della spira scorre verso il lettore, mentre ha verso opposto sul lato inferiore. Il momento meccanico  $\mathfrak{M}$  agente sulla spira è dato dalla relazione:

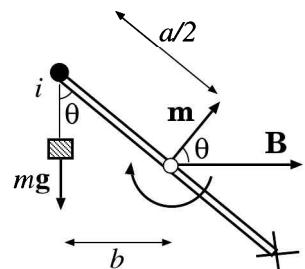
$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{m}$  il momento di dipolo magnetico della spira. Per il principio di equivalenza di Ampere, si ha:

$$\mathbf{m} = i a^2 \mathbf{n}, \quad (2)$$

dove la normale alla spira  $\mathbf{n}$  è un versore perpendicolare al piano in cui la spira giace ed il cui verso coincide con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di scorrimento della corrente nella spira. Riferendoci alla figura, il momento  $\mathfrak{M}$  impone alla spira una rotazione in verso orario, in quanto è diretto perpendicolarmente al piano del foglio in verso entrante. Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene:

$$|\mathfrak{M}| = B a^2 i \sin \theta \quad (3)$$



essendo  $\theta$  l'angolo che  $\mathbf{B}$  forma con  $\mathbf{m}$ . Per poter sollevare la massa legata all'estremo della spira, è necessario che il momento meccanico indotto dalle forze magnetiche sia pari o superiore al momento meccanico esercitato sul sistema dalla forza peso; si noti che la forza gravitazionale agente sulla massa impone al sistema un verso di rotazione antiorario. Detto  $\mathfrak{M}_p$  il momento esercitato dalla forza peso, si ha:

$$|\mathfrak{M}_p| = mgb, \quad (4)$$

dove  $b$  è il braccio della forza peso rispetto all'asse di rotazione della spira. Si noti che  $b = (a/2) \sin \theta$ , per cui imponendo

$$|\mathfrak{M}_p| \leq |\mathfrak{M}|, \quad (5)$$

otteniamo dalla (3):

$$\frac{mga}{2} \sin \theta \leq Ba^2 i \sin \theta, \quad (6)$$

da cui

$$m \leq \frac{2iBa}{g}. \quad (7)$$

Sostituendo nella (7) i valori numerici assegnati dal problema, si ottiene  $m \leq 0.10$  kg.

### S.5.27.

La spira a forma di L può essere pensata come l'insieme di due spire piane separate con un lato in comune, anche se tale lato è fisicamente mancante; difatti le correnti delle due spire che scorrono lungo questo lato (coincidente con l'asse di rotazione) sono tra loro opposte e dunque la loro somma è nulla. Riferendoci alla figura, introduremo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui gli assi  $x$  e  $z$  sono diretti lungo i lati della L, mentre l'asse  $y$  coinciderà con l'asse di rotazione del sistema. Per la spira giacente sul piano  $zy$  introdurremo una normale  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_x$ , mentre per la spira sul piano  $xy$  introdurremo la normale  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{u}_z$ . Le due normali sono state scelte mediante la regola del cavatappi sulla base del verso di scorrimento delle correnti lungo le due spire. Il momento magnetico complessivo  $\mathbf{m}$  della spira ad L è la somma dei momenti magnetici  $\mathbf{m}_1$  ed  $\mathbf{m}_2$  delle due spire piane, che scriveremo in base al principio di equivalenza di Ampere:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = a^2 i \mathbf{n}_1 + a^2 i \mathbf{n}_2, \quad (1)$$

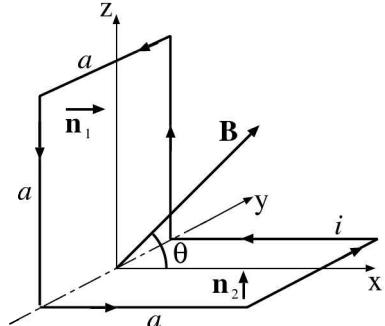
da cui otteniamo:

$$\mathbf{m} = a^2 i [\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z]. \quad (2)$$

Il momento meccanico  $\mathfrak{M}$  agente sulla spira sarà allora pari a:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

essendo il campo magnetico dato dall'espressione



$$\mathbf{B} = B[\cos \theta \mathbf{u}_x + \sin \theta \mathbf{u}_z], \quad (4)$$

dove  $\theta$  è l'angolo che  $\mathbf{B}$  forma con l'asse  $x$  e  $B$  è il suo modulo. Sostituendo la (4) e la (2) nella (3) si ottiene:

$$\mathfrak{M} = a^2 i B [\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z] \times [\cos \theta \mathbf{u}_x + \sin \theta \mathbf{u}_z]; \quad (5)$$

tenendo conto che  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y$  e che  $\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_y$ , possiamo riscrivere la precedente relazione nella forma:

$$\mathfrak{M} = a^2 i B (\cos \theta - \sin \theta) \mathbf{u}_y. \quad (6)$$

Il modulo del momento meccanico è massimo quando è massima la funzione  $|\cos \theta - \sin \theta|$ . Si può verificare facilmente che ciò accade per  $\theta_1 = -\pi/4$  e per  $\theta_2 = 3\pi/4$ .

### S.5.28.

Essendo la carica  $Q$  distribuita sulla superficie sferica in modo uniforme, la densità superficiale di carica sarà

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (1)$$

Dividiamo la superficie sferica in sottili strisce lungo i paralleli, la cui posizione rispetto all'equatore sarà individuata da un angolo  $\theta$ ; chiameremo inoltre  $d\theta$  l'angolo infinitesimo che sottende una di queste strisce. Ciascuna di queste strisce, una volta in moto, è equivalente ad una spira percorsa da corrente; il momento magnetico complessivo sarà la somma dei momenti magnetici di tutte le spire equivalenti che compongono la sfera. Detta  $dq$  la carica infinitesima presente su una di queste spire, potremo porre:

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r Rd\theta, \quad (2)$$

essendo  $r$  il raggio della striscia circolare,  $Rd\theta$  il suo spessore e  $dA$  l'area della striscia. Si noti che  $r = R \cos \theta$ . La corrente equivalente  $dI$  che scorre in una delle strisce è data da:

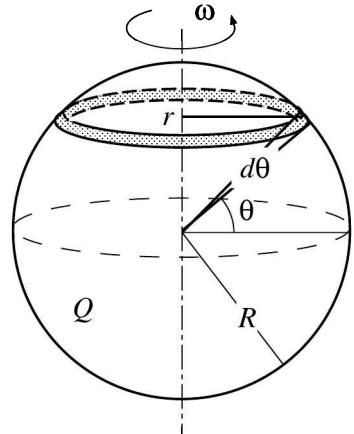
$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi}, \quad (3)$$

essendo  $T$  il periodo di rotazione ed  $\omega$  la velocità angolare della sfera. Sostituendo nella (3) la (2) e l'espressione per  $r$ , otteniamo:

$$dI = \frac{Q\omega \cos \theta d\theta}{4\pi}. \quad (4)$$

Il momento magnetico associato alla spira equivalente è pari a:

$$dm = \pi r^2 di \mathbf{u}_z = \frac{Q\omega R^2 \cos^3 \theta d\theta}{4} \mathbf{u}_z, \quad (5)$$



dove  $\mathbf{u}_z$  è un versore diretto come l'asse di rotazione ed il cui verso coincida con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nello stesso verso della sfera. Il momento magnetico complessivo  $\mathbf{m}$  sarà pari a:

$$\mathbf{m} = \int_{\text{sfera}} d\mathbf{m} = 2 \frac{Q\omega R^2}{4} \mathbf{u}_z \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta. \quad (6)$$

Si noti che  $\cos \theta \, d\theta = d[\sin \theta]$  e che  $\cos^2 \theta = [1 - \sin^2 \theta]$ ; pertanto con la sostituzione  $x = \sin \theta$ , possiamo riesprimere la (6) nella forma:

$$\mathbf{m} = \frac{Q\omega R^2}{2} \mathbf{u}_z \int_0^1 (1 - x^2) \, dx, \quad (7)$$

da cui

$$\mathbf{m} = \frac{Q\omega R^2}{3} \mathbf{u}_z. \quad (8)$$

# Capitolo 6

## Magnetostatica nella materia

### 6.1 Problemi

#### P.6.1.

Si calcoli il momento di dipolo magnetico associato ad un atomo neutro monoelettronico in cui l'elettrone descriva un'orbita circolare di raggio pari al raggio di Bohr  $a_0$ . Assumendo che un certo materiale sia composto da tale specie atomica, con una densità per unità di volume  $n$ , si calcoli la magnetizzazione al suo interno nell'ipotesi che tutti i momenti magnetici atomici siano allineati. Si trascuri nel calcolo il momento di spin elettronico. [ $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$  m, massa elettronica  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg,  $n = 2 \times 10^{24}$  atomi/cm<sup>3</sup>]

#### P.6.2.

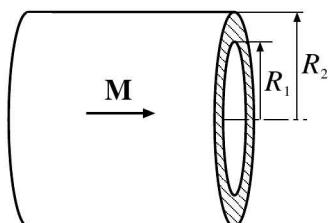
Si consideri un atomo monoelettronico. Si confronti il momento di dipolo magnetico dell'atomo imperturbato con quello che l'atomo acquisisce in presenza di un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  costante e perpendicolare al piano dell'orbita. Si supponga che l'elettrone descriva un'orbita circolare di raggio pari al raggio di Bohr  $a_0$  sia in assenza che in presenza del campo  $\mathbf{B}$ . [ $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$  m,  $|\mathbf{B}| = 0.3$  T]

#### P.6.3.

Si descriva il moto di un elettrone orbitante attorno ad un nucleo atomico, in presenza di un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  costante e di direzione generica. Si trascuri il momento di spin dell'elettrone.

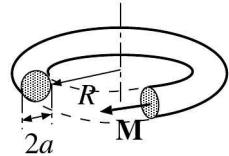
#### P.6.4.

Sia assegnato un magnete indefinito a forma di guscio cilindrico di raggio interno  $R_1$  ed esterno  $R_2$ , con magnetizzazione  $\mathbf{M}$  uniforme nel magnete e diretta secondo l'asse del cilindro. Si ricavino il campo magnetico  $\mathbf{H}$  ed il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  generati dal magnete in tutto lo spazio.

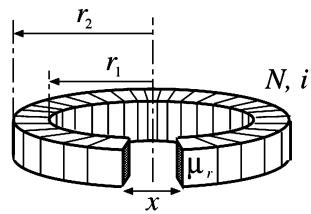


**P.6.5.**

Si consideri un toro di raggio medio  $R$  e raggio interno  $a$  formato da materiale magnetizzato con magnetizzazione  $M$  uniforme sulla sua sezione e diretta tangenzialmente (vedi figura). Si determini l'andamento dei campi  $B$  e  $H$  nel materiale. Si ricavi inoltre il valore di tali campi in presenza di un sottile taglio trasversale di spessore  $d$ .

**P.6.6.**

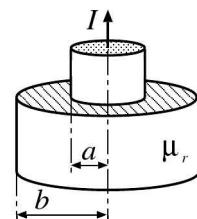
Si consideri un solenoide avvolto su un anello di sezione quadrata di raggi interno  $r_1$  ed esterno  $r_2$  costituito da materiale di permeabilità magnetica relativa  $\mu_r$ . L'avvolgimento è formato da  $N$  spire percorse da corrente  $i$  e si interrompe per un tratto di lunghezza  $x \ll r_1$ , in cui è stato praticato un taglio nell'anello. Determinare il campo  $B$  in funzione della distanza dal centro dell'anello.

**P.6.7.**

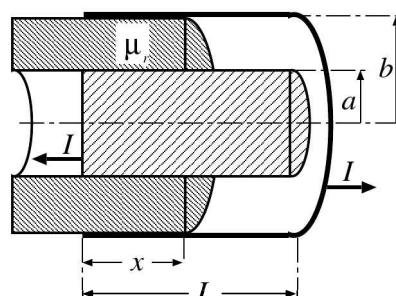
Si consideri il solenoide del problema precedente. Si calcoli l'energia magnetica immagazzinata nella regione in cui il solenoide è interrotto e l'energia immagazzinata nel resto dell'anello magnetizzato.

**P.6.8.**

Un filo cilindrico conduttore indefinito di raggio  $a$ , percorso da corrente  $I$  uniformemente distribuita sulla sua sezione, è circondato da una guaina cilindrica di materiale magnetico di permeabilità  $\mu_r$  e raggio esterno  $b$ . Calcolare il campo magnetico  $H$  in tutti i punti dello spazio e la densità di corrente superficiale di magnetizzazione che scorre sulle superfici della guaina.

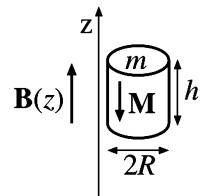
**P.6.9.**

Si consideri un cavo coassiale costituito da un nucleo cilindrico conduttore di raggio  $a$  e da una maglia metallica di spessore trascurabile e raggio  $b$ , entrambi percorsi da correnti di intensità  $I$  dotate di versi opposti. Lo spazio tra nucleo e maglia è parzialmente riempito da un materiale di permeabilità magnetica  $\mu_r$ . Sia  $L$  la lunghezza del cavo. Trascurando gli effetti di bordo, calcolare la forza con cui il materiale è risucchiato quando è inserito nel cavo per un tratto di lunghezza  $x$ .

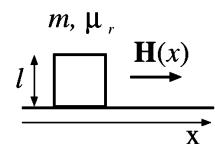


**P.6.10.**

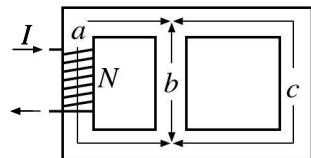
Si consideri un magnete permanente di massa  $m$  e forma cilindrica (raggio di base  $R$  ed altezza  $h$ ), libero di scorrere lungo delle guide verticali e dotato al suo interno di una magnetizzazione  $M$  diretta verso il basso. Il magnete è sottoposto ad un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  diretto verso l'alto, il cui modulo varia con la quota  $z$  secondo la legge  $B(z) = a/(b + z)$ . Si calcoli a quale quota la forza magnetica e la forza peso si bilanciano; si assuma, ai fini del calcolo, che il magnete sia di piccole dimensioni.

**P.6.11.**

Si consideri un cubetto di materiale diamagnetico con permeabilità relativa  $\mu_r$ , avente massa  $m$  e spigolo di lunghezza  $l$ , libero di scorrere su un piano orizzontale. Il cubetto è sottoposto ad un campo magnetico  $\mathbf{H}$  diretto orizzontalmente, il cui modulo varia con la posizione  $x$  secondo la legge  $H(x) = k/(x + 1)$ . Si calcoli la forza agente sul cubetto; si assuma, ai fini del calcolo, che il cubetto sia di piccole dimensioni e che il campo  $\mathbf{H}$  non vari passando dall'aria al materiale. Si determini inoltre la velocità che il cubetto raggiunge in  $x = L$ , partendo da fermo nella posizione  $x = 0$ .

**P.6.12.**

Sia assegnato il circuito magnetico mostrato in figura, il cui nucleo ha permeabilità magnetica relativa  $\mu_r \gg 1$  e sezione costante; le sue parti hanno rispettivamente lunghezze  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Sul lato di lunghezza  $a$  vi è un avvolgimento di  $N$  spire, in cui scorre una corrente  $I$  col verso indicato in figura. Si determini il campo magnetico  $\mathbf{H}$  presente nei tre rami del circuito; si trascuri il flusso disperso del campo.





## 6.2 Soluzioni

### S.6.1.

La forza elettrica agente sull'elettrone è data da:

$$\mathbf{F}_e = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \mathbf{u}_r, \quad (1)$$

con  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C carica elementare,  $a_0$  raggio dell'orbita circolare descritta dall'elettrone ed  $\mathbf{u}_r$  versore radiale diretto dal nucleo atomico verso l'esterno. La forza è di tipo centrale e possiamo dunque assimilarla ad una forza centripeta, secondo la relazione:

$$\mathbf{F}_e = -m_e \frac{v^2}{a_0} \mathbf{u}_r, \quad (2)$$

con  $m_e$  massa elettronica e  $v$  modulo della velocità. Avendo ipotizzato un'orbita circolare, il moto risulta di tipo uniforme e dunque  $v$  è costante. Usando le (1) e (2), otteniamo che

$$v = \sqrt{\frac{a_0}{m_e} F_e} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0}}. \quad (3)$$

Il periodo di rivoluzione  $T$  dell'elettrone attorno al nucleo è quindi dato da:

$$T = \frac{2\pi a_0}{v} = \sqrt{\frac{16\pi^3 \epsilon_0 m_e a_0^3}{e^2}}. \quad (4)$$

L'orbita elettronica è associabile, dal punto di vista magnetico, ad una spira circolare attraversata da una corrente  $i$  pari a:

$$i = \frac{e}{T} = \sqrt{\frac{e^4}{16\pi^3 \epsilon_0 m_e a_0^3}}. \quad (5)$$

Per il teorema di equivalenza di Ampere il momento magnetico della spira elettronica è pari a:

$$\mathbf{m} = A i \mathbf{n}, \quad (6)$$

con  $A = \pi a_0^2$  area racchiusa dall'orbita ed  $\mathbf{n}$  normale al piano orbitale, scelta in base alla regola del cavatappi (si ricordi che il verso della corrente  $i$  è opposto a quello di moto dell'elettrone). Sostituendo la (5) nella (6) si ha poi:

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \sqrt{\frac{a_0 e^4}{16\pi\epsilon_0 m_e}}. \quad (7)$$

Sostituendo i valori assegnati dal problema, otteniamo  $|\mathbf{m}| = \mu_B = 9.2 \times 10^{-24}$  A m<sup>2</sup>. Tale quantità è anche detta magnetone di Bohr. Si noti che nella teoria dell'atomo di Bohr i raggi delle orbite elettroniche sono quantizzati, per cui sono quantizzati anche i momenti magnetici atomici; il magnetone di Bohr rappresenta il quanto di momento magnetico orbitale. Per calcolare la magnetizzazione  $M$  all'interno del materiale nel caso in cui tutti

i momenti magnetici siano allineati, è sufficiente moltiplicare  $\mathbf{m}$  per il numero di atomi per unità di volume  $n$ . Otterremo pertanto:

$$\mathbf{M} = nm, \quad (8)$$

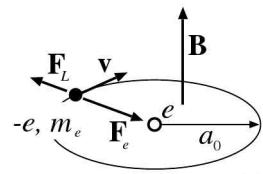
da cui, sostituendo i valori numerici, si ricava  $|\mathbf{M}| = 1.84 \times 10^7 \text{ A/m}$ .

*Nota.* Normalmente il completo allineamento dei dipoli magnetici (condizione di saturazione) può essere raggiunto nei materiali ferromagneticci mediante un campo magnetico esterno, ma è molto difficile da conseguire nei materiali paramagneticci, in cui l'agitazione termica contrasta efficacemente l'allineamento imposto dal campo inducente; difatti in questi materiali la magnetizzazione raggiunge, in condizioni ordinarie, valori inferiori di alcuni ordini di grandezza rispetto al valore di saturazione.

### S.6.2.

Applicando il principio di equivalenza di Ampere, come visto nell'esercizio precedente, il momento magnetico per l'atomo imperturbato è pari a:

$$|\mathbf{m}_0| = \sqrt{\frac{a_0 e^4}{16\pi\epsilon_0 m_e}} = \mu_B, \quad (1)$$



dove  $\mu_B = 9.2 \times 10^{-24} \text{ A m}^2$  è il magnetone di Bohr. Applicando il campo di induzione magnetica, l'elettrone sarà sottoposto alla forza di Lorentz  $\mathbf{F}_L$ , che si sommerà vettorialmente alla forza  $\mathbf{F}_e$  di attrazione coulombiana col nucleo. Entrambe saranno dirette radialmente; nell'ipotesi che l'elettrone orbiti in verso orario (vedi figura), la forza di Lorentz  $\mathbf{F}_L = -ev \times \mathbf{B}$  risulta diretta verso l'esterno. Assumendo il raggio dell'orbita pari ad  $a_0$ , imponiamo che la forza risultante funga da forza centripeta secondo la relazione:

$$|\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_e| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} - evB = m_e \frac{v^2}{a_0}. \quad (2)$$

Risolvendo la (2) rispetto a  $v$ , otteniamo che la velocità di rivoluzione elettronica attorno al nucleo è pari a:

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0} + \frac{e^2 B^2 a_0^2}{4m_e^2}} - \frac{eBa_0}{2m_e}. \quad (3)$$

Il momento magnetico della spira elettronica sarà allora dato da:

$$|\mathbf{m}| = \pi a_0^2 i = \pi a_0^2 \frac{e}{T}, \quad (4)$$

essendo  $T = 2\pi a_0/v$  il periodo di rivoluzione elettronico. Sostituendo il valore di  $v$  ottenuto nella (3), giungiamo alla relazione:

$$|\mathbf{m}| = \frac{a_0 ev}{2} = \frac{a_0 e}{2} \left[ \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0} + \frac{e^2 B^2 a_0^2}{4m_e^2}} - \frac{eBa_0}{2m_e} \right]. \quad (5)$$

Tenuto conto della disegualanza

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0} \gg \frac{e^2 B^2 a_0^2}{4m_e^2} \quad (6)$$

che vale sicuramente nel caso del campo di induzione magnetica in considerazione, otteniamo che la variazione di momento magnetico vale:

$$\Delta m = |\mathbf{m}| - |\mathbf{m}_0| = -\frac{e^2 a_0^2}{4m_e} B. \quad (7)$$

Si verifica facilmente che la relazione vettoriale per  $\mathbf{m}$  è:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 - \frac{e^2 a_0^2}{4m_e} \mathbf{B}, \quad (8)$$

per cui la variazione di momento magnetico è sempre opposta al campo magnetico induttore tale variazione. Sostituendo i valori numerici, otteniamo che tale variazione è  $\Delta m = -5.9 \times 10^{-30} \text{ A m}^2$ , dunque ben 6 ordini di grandezza più piccola rispetto al valore intrinseco di momento magnetico posseduto dall'atomo.

*Nota.* Il meccanismo qui descritto è alla base dei fenomeni magnetici nei materiali diamagnetici, ovvero in quei materiali in cui il momento magnetico intrinseco dell'atomo è nullo per compensazione interna tra le varie spire elettroniche che lo compongono. In presenza di un campo di induzione magnetica esterno, l'atomo assume un momento magnetico indotto

$$\mathbf{m}_i = -\frac{e^2 a_0^2}{4m_e} \mathbf{B}, \quad (9)$$

e di conseguenza compare una magnetizzazione indotta

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}_i = -n \frac{e^2 a_0^2}{4m_e} \mathbf{B}, \quad (10)$$

essendo  $n$  il numero di elettroni per unità di volume nel materiale. Se assumiamo, come nel precedente esercizio, una densità  $n = 2 \times 10^{24} \text{ atomi/cm}^3$ , otteniamo una magnetizzazione pari a  $11.8 \text{ A/m}$ .

### S.6.3.

Nella trattazione che segue si trascureranno le perdite di energia subite dall'elettrone orbitante a causa dell'irraggiamento elettromagnetico; si vedano in proposito le note al primo esercizio del capitolo precedente. Considereremo d'ora in poi un atomo monoellettronico neutro. In assenza di campo magnetico esterno l'elettrone si muove sotto l'azione della forza elettrica, che esprimeremo come:

$$\mathbf{F}_e = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (1)$$

essendo  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  la carica elementare,  $r$  la distanza tra nucleo atomico ed elettrone ed  $\mathbf{u}_r$  un versore radiale diretto dal nucleo verso l'esterno. Si noti il carattere di centralità di tale forza, che comporta la conservazione del momento angolare orbitale  $\mathbf{L}_{(O)} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}$  dell'elettrone calcolato rispetto al punto O in cui è posto il nucleo. Poiché il moto elettronico è assimilabile al fluire di una corrente in una spira, possiamo attribuire

all'atomo un momento di dipolo magnetico, che per il principio di equivalenza di Ampere è pari a:

$$\mathbf{m} = A \cdot i \cdot \mathbf{n}, \quad (2)$$

essendo  $A$  l'area racchiusa dall'orbita,  $i = e/T$  la corrente equivalente che scorre nella spira,  $T$  il periodo dell'orbita ed  $\mathbf{n}$  la normale al piano dell'orbita con verso scelto in base alla regola del cavatappi. Si noti che, a causa della carica negativa dell'elettrone, la corrente fluisce in verso opposto a quello di moto della carica. Si rammenta che, svolgendosi il moto in presenza di una forza centrale, l'area racchiusa dall'orbita è pari a:

$$A = \frac{|\mathbf{L}_{(O)}|T}{2m_e}, \quad (3)$$

con  $m_e$  massa elettronica. Sostituendo la (3) nella (2) e notando che  $\mathbf{L}_{(O)}$  ed  $\mathbf{m}$  sono entrambi perpendicolari al piano dell'orbita ma hanno versi opposti, otteniamo infine:

$$\mathbf{m} = -\frac{e\mathbf{L}_{(O)}}{2m_e}. \quad (4)$$

Applichiamo ora all'atomo il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B} = Bu_z$ , essendo  $u_z$  il versore dell'asse  $z$ , diretto come il campo. La spira elettronica sarà sottoposta al momento meccanico  $\mathfrak{M}$ , dato dalla relazione:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \frac{e\mathbf{L}_{(O)}}{2m_e}, \quad (5)$$

dove si è fatto uso della (4) e della anticommutatività del prodotto vettore; l'impiego della (4), a rigore valido solo in presenza di forze centrali, può ritenersi ancora giustificabile poiché la forza magnetica agente sull'elettrone è di gran lunga meno intensa di quella elettrica. Ricordiamo qui la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} = \mathfrak{M}, \quad (6)$$

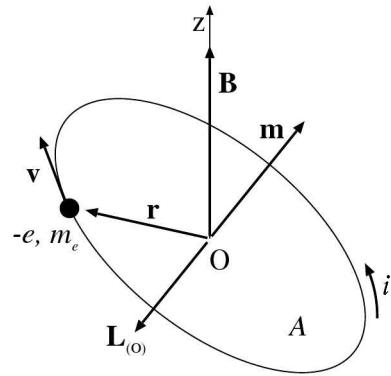
che applicata alla (5) dà la relazione:

$$\frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} = \mathbf{B} \times \frac{e\mathbf{L}_{(O)}}{2m_e}. \quad (7)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri della (7) per  $u_z$ , otteniamo:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = 0, \quad (8)$$

essendo  $L_z$  la componente di  $\mathbf{L}_{(O)}$  lungo l'asse  $z$ . Si noti che il secondo membro della (7) è perpendicolare a  $\mathbf{B}$  e dunque il prodotto scalare per  $u_z$  è nullo. La (8) comporta dunque che



$$L_z = \text{costante.} \quad (9)$$

Si noti altresì che

$$\frac{d|\mathbf{L}_{(O)}|^2}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{L}_{(O)} \cdot \mathbf{L}_{(O)}] = 2\mathbf{L}_{(O)} \cdot \frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt}; \quad (10)$$

sostituendo nella precedente relazione la (7) otteniamo poi:

$$\frac{d|\mathbf{L}_{(O)}|^2}{dt} = 2\mathbf{L}_{(O)} \cdot \left[ \mathbf{B} \times \frac{e\mathbf{L}_{(O)}}{2m_e} \right]. \quad (11)$$

Tuttavia il secondo membro della (11) è nullo, poiché  $\mathbf{L}_{(O)}$  è perpendicolare al vettore  $\mathbf{B} \times \mathbf{L}_{(O)}$ ; pertanto possiamo porre

$$|\mathbf{L}_{(O)}| = \text{costante.} \quad (12)$$

Le equazioni (9) e (12) sono già sufficienti a stabilire il tipo di moto descritto dall'elettronico: il vettore  $\mathbf{L}_{(O)}$  si mantiene costante in modulo pur cambiando direzione, mentre la sua proiezione lungo l'asse z rimane costante. Possiamo concludere che  $\mathbf{L}_{(O)}$  descrive una superficie conica avente l'asse z per asse di rotazione; questo tipo di moto prende il nome di precessione. Il piano dell'orbita, sempre perpendicolare al vettore momento angolare, segue l'andamento di  $\mathbf{L}_{(O)}$  durante il moto di precessione. Poiché per la (4) i vettori  $\mathbf{L}_{(O)}$  ed  $\mathbf{m}$  sono proporzionali, anche il vettore momento magnetico descriverà una superficie conica (vedi figura). Rimane da stabilire in che modo i vettori  $\mathbf{L}_{(O)}$  ed  $\mathbf{m}$  si muovono lungo tali superfici coniche. Possiamo in proposito riscrivere la (7) nella forma:

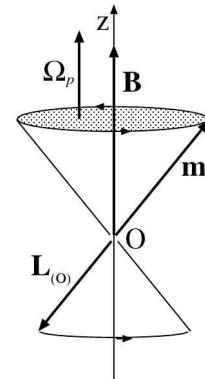
$$\frac{d\mathbf{L}_{(O)}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{L}_{(O)}, \quad (13)$$

con

$$\boldsymbol{\Omega}_p = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}. \quad (14)$$

Si noti che il vettore  $\boldsymbol{\Omega}_p$  ha le dimensioni di una velocità angolare. Difatti l'equazione (13) ha la stessa struttura dell'equazione che descrive il moto circolare uniforme di un oggetto puntiforme, pur di sostituire ad  $\mathbf{L}_{(O)}$  il vettore posizione che individua l'oggetto in moto. Pertanto il vettore  $\mathbf{L}_{(O)}$  (e dunque anche  $\mathbf{m}$ ) si muove lungo la superficie conica con velocità angolare costante  $\Omega_p = eB/(2m_e)$ . Il moto qui descritto (precessione dell'orbita elettronica in un campo magnetico esterno) è noto come precessione di Larmor.

*Nota.* Nell'esercizio precedente si è discusso della variazione di momento magnetico  $\Delta\mathbf{m}$  della spira elettronica quando ad essa viene applicato un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  perpendicolare al piano dell'orbita; il fenomeno della precessione di Larmor rappresenta la generalizzazione di tale meccanismo nel caso in cui i vari dipoli atomici siano orientati in modo casuale rispetto al campo magnetico esterno. Il fenomeno assume particolare importanza nei materiali diamagnetici; si può in questo caso dimostrare che il

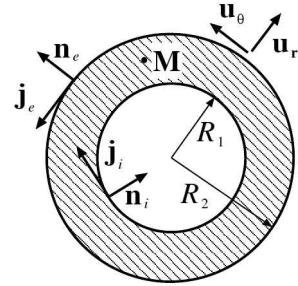


momento magnetico efficace indotto negli atomi, mediato su tutte le possibili direzioni di orientamento delle orbite elettroniche, è pari a:

$$\mathbf{m}_i = -\frac{e^2 a_0^2}{6m_e} \mathbf{B}. \quad (15)$$

#### S.6.4.

Faremo riferimento alla figura a lato, in cui il magnete è mostrato in sezione. Assumeremo che la magnetizzazione sia scrivibile come  $\mathbf{M} = M \mathbf{u}_z$ , essendo  $\mathbf{u}_z$  un versore parallelo all'asse del magnete, diretto verso il lettore. Introduciamo inoltre un versore radiale  $\mathbf{u}_r$ , diretto verso l'esterno, ed un versore  $\mathbf{u}_\theta$  tangente alla superficie cilindrica e diretto in verso antiorario. Essendo la magnetizzazione uniforme, la densità di corrente di magnetizzazione  $\mathbf{J}_m$  all'interno del materiale è nulla, in quanto



$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{J}_m = 0. \quad (1)$$

La densità di corrente superficiale di magnetizzazione  $\mathbf{j}_{sm}$  è invece data dalla relazione:

$$\mathbf{j}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (2)$$

essendo  $\mathbf{n}$  un versore normale uscente dalla superficie su cui valutiamo la corrente in questione. Riferendoci alla figura, possiamo notare che sulla superficie esterna scorrerà una densità di corrente superficiale  $\mathbf{j}_e$  pari a :

$$\mathbf{j}_e = M \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_r = M \mathbf{u}_\theta, \quad (3)$$

mentre sulla superficie interna la densità di corrente superficiale  $\mathbf{j}_i$  sarà pari a:

$$\mathbf{j}_i = -M \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_r = -M \mathbf{u}_\theta. \quad (4)$$

Si ricorda che la densità di corrente superficiale ha le dimensioni di una corrente su di una lunghezza; in altre parole la corrente che, ad esempio, scorre su un tratto di lunghezza  $l$  del magnete dal lato esterno, è pari ad  $i_e = |\mathbf{j}_e|l = Ml$ .

Ai fini del calcolo dei campi  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{H}$ , osserviamo che il magnete è equivalente a due solenoidi, rispettivamente di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , coassiali e percorsi da correnti opposte. Si rammenta che il campo  $\mathbf{B}$  prodotto da un solenoide di raggio  $a$ , su cui siano avvolte  $n$  spire per unità di lunghezza percorse da corrente  $i$ , vale:

$$|\mathbf{B}(r)| = \begin{cases} \mu_0 j_s & r < a, \\ 0 & r \geq a, \end{cases} \quad (5)$$

con  $r$  distanza dall'asse del solenoide. Si noti che la quantità  $j_s = n i$  altro non è che la quantità di corrente che scorre su un tratto di solenoide di lunghezza unitaria; pertanto si tratta di una densità di corrente superficiale. Per analogia con il caso del solenoide,

possiamo allora dire che la corrente superficiale sul lato esterno del magnete genera un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}_e$  pari a:

$$\mathbf{B}_e(r) = \begin{cases} \mu_0 j_e \mathbf{u}_z & r < R_2, \\ 0 & r \geq R_2; \end{cases} \quad (6)$$

mentre la corrente superficiale interna, che circola in verso opposto, genera un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}_i$  pari a:

$$\mathbf{B}_i(r) = \begin{cases} -\mu_0 j_i \mathbf{u}_z & r < R_1, \\ 0 & r \geq R_1. \end{cases} \quad (7)$$

Poiché per il principio di sovrapposizione il campo complessivo è pari a  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_e$  e dato che  $j_i = j_e = M$ , otteniamo:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1, \\ \mu_0 M \mathbf{u}_z = \mu_0 \mathbf{M} & R_1 \leq r < R_2, \\ 0 & r \geq R_2. \end{cases} \quad (8)$$

Per quanto concerne il campo magnetico  $\mathbf{H}$ , ricordiamo che, per definizione, risulta:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (9)$$

Impiegando la (9) nella (8), risulta evidente che il campo  $\mathbf{H}$  è nullo ovunque (ovviamente la magnetizzazione è nulla al di fuori del materiale che costituisce il magnete).

*Nota.* La ragione della nullità di  $\mathbf{H}$  diviene chiara se si osserva che le estremità del magnete sono le sorgenti di questo campo (si ricordi che le linee di flusso di  $\mathbf{H}$  sono aperte). Tuttavia il magnete qui considerato è indefinito, dunque le sue estremità sono infinitamente lontane. Essendo le sorgenti di  $\mathbf{H}$  infinitamente lontane, ne deriva che il campo non può che essere nullo.

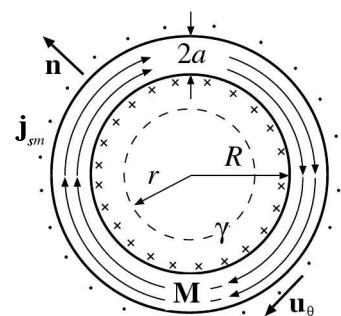
### S.6.5.

Sulla superficie del toro scorre una densità di corrente superficiale  $\mathbf{j}_{sm}$  data dalla relazione:

$$\mathbf{j}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (1)$$

con  $\mathbf{M}$  magnetizzazione nel materiale ed  $\mathbf{n}$  normale uscente dalla superficie su cui valutiamo la corrente. Faremo riferimento alla sezione del toro mostrata in figura; poiché la magnetizzazione in questo caso ha verso orario, la corrente sulla superficie esterna scorrerà verso il lettore mentre sul lato interno scorrerà verso

il piano del foglio. Si noti che  $|\mathbf{j}_{sm}| = M$ , essendo  $M$  il modulo della magnetizzazione nel materiale. Data la simmetria assiale del sistema, ci aspettiamo che i campi magnetico ed



induzione magnetica abbiano una struttura del tipo  $\mathbf{H} = H(r)\mathbf{u}_\theta$  e  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$ , essendo  $\mathbf{u}_\theta$  un versore, diretto in senso orario, tangente alle circonferenze centrate sull'asse del toro ed  $r$  la distanza da tale asse. Consideriamo ora una linea chiusa circolare  $\gamma$  di raggio  $r$ , il cui centro sia posto sull'asse del toro e che sia orientata anch'essa in verso orario. Applicando la legge di Ampere lungo tale linea, avremo:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} B(r)\mathbf{u}_\theta \cdot ds\mathbf{u}_\theta = \mu_0 i_c, \quad (2)$$

essendo  $i_c$  la corrente concatenata a  $\gamma$ . La (2) si semplifica nella relazione

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}. \quad (3)$$

Distinguiamo a tal punto tre situazioni: per  $r < R$  avremo che  $i_c = 0$ , in quanto la linea non concatena alcuna corrente; per  $R \leq r < (R + 2a)$  la corrente concatenata sarà  $i_c = 2\pi R j_{sm}$ , con  $j_{sm} = |\mathbf{j}_{sm}|$ . Si noti il segno positivo della corrente concatenata, ottenuto in base al verso di percorrenza scelto per  $\gamma$ . Infine per  $r \geq (R + 2a)$  si avrà  $i_c = 2\pi j_{sm}[R - (R + 2a)]$ , in quanto la linea  $\gamma$  concatenerà due volte le correnti superficiali, con versi opposti di scorrimento. In questo ultimo caso, qualora risulti  $a \ll R$ , potremo senz'altro assumere che la corrente concatenata complessiva sia nulla. Sostituendo i valori di  $i_c$  nella (3) e osservando che  $j_{sm} = M$ , otteniamo:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} 0 & r < R, \\ \frac{\mu_0 M R}{r} \mathbf{u}_\theta & R \leq r < (R + 2a), \\ 0 & r \geq (R + 2a). \end{cases} \quad (4)$$

Impiegando a tal punto la definizione del campo magnetico  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (5)$$

e sostituendo tale espressione nella (4), si giunge alla:

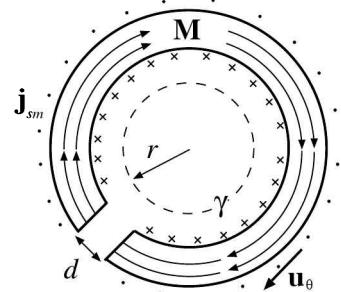
$$\mathbf{H}(r) = \begin{cases} 0 & r < R, \\ M \left[ \frac{R}{r} - 1 \right] \mathbf{u}_\theta & R \leq r < (R + 2a), \\ 0 & r \geq (R + 2a). \end{cases} \quad (6)$$

Si noti che, nella ipotesi che  $a \ll R$ , possiamo porre  $r \approx R$ , per cui la (6) si riduce semplicemente alla constatazione che il campo  $\mathbf{H}$  è nullo anche all'interno del materiale magnetizzato. Consideriamo ora la seconda parte dell'esercizio. Assumeremo che, praticando un taglio trasversale sottile nel toro, i campi siano ancora descritti da linee di flusso circolari centrate sull'asse del toro. Limiteremo la trattazione al calcolo dei campi per  $R \leq r < (R + 2a)$ . In questa nuova situazione si farà uso della condizione al contorno per la componente normale del campo  $\mathbf{B}$  all'interfaccia aria-magnete:

$$B_{n, \text{aria}} = B_{n, \text{magn}} \quad (7)$$

dove  $B_{n, \text{aria}}$  è la proiezione del campo  $\mathbf{B}$  nel traferro lungo la normale al taglio e  $B_{n, \text{magn}}$  è la proiezione su tale normale del campo nel materiale magnetizzato. Poiché il taglio praticato è perpendicolare alle linee di flusso del campo, la (7) ci dice che  $\mathbf{B}$  è continuo passando dal materiale all'aria, come se il taglio non esistesse. Considerata ancora una linea chiusa circolare  $\gamma$  di raggio  $r$  ed applicandovi la legge di Ampere, avremo pertanto:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i_c, \quad (8)$$



dove  $B(r)$  è lo stesso in aria e nel materiale. La corrente concatenata alla linea  $\gamma$  risulterà  $i_c = (2\pi R - d) j_{sm}$ , a causa del taglio praticato nel toro. Utilizzando tale risultato nella (8), ricordando che  $j_{sm} = M$  ed assumendo  $a \ll R$ , otteniamo infine:

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 (2\pi R - d) M}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta \approx \mu_0 M \left(1 - \frac{d}{2\pi R}\right) \mathbf{u}_\theta. \quad (9)$$

Il calcolo di  $\mathbf{H}$  è leggermente più complesso: in aria risulterà

$$\mathbf{H}_{\text{aria}}(r) = \frac{\mathbf{B}(r)}{\mu_0} \approx M \left(1 - \frac{d}{2\pi R}\right) \mathbf{u}_\theta, \quad (10)$$

mentre nel magnete avremo:

$$\mathbf{H}_{\text{magn}}(r) = \frac{\mathbf{B}(r)}{\mu_0} - \mathbf{M} \approx -\frac{dM}{2\pi R} \mathbf{u}_\theta. \quad (11)$$

Si noti il cambio di verso di  $\mathbf{H}$  al passaggio aria-magnete; si può agevolmente constatare che i bordi del taglio si comportano da sorgenti per il campo magnetico  $\mathbf{H}$ .

### S.6.6.

Vista la simmetria assiale ed essendo il taglio praticato nell'anello di piccolo spessore, assumeremo ancora una volta che i campi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  abbiano linee di flusso circolari centrate sull'asse dell'anello. Faremo riferimento alla figura successiva, in cui è mostrata una sezione dell'anello; supporremo che la corrente fluente nelle spire sia diretta verso il lettore sul lato esterno dell'anello, mentre sarà diretta verso il piano del foglio nel lato interno. Pertanto porremo  $\mathbf{H} = H(r)\mathbf{u}_\theta$  e  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$ , essendo  $\mathbf{u}_\theta$  un versore, diretto in senso orario, tangente alle circonferenze centrate sull'asse dell'anello ed  $r$  la distanza da tale asse. Consideriamo ora una linea chiusa circolare  $\gamma$  di raggio  $r$ , con centro sull'asse dell'anello, e che sia orientata anch'essa in verso orario. Applicheremo la legge di Ampere per il campo  $\mathbf{H}$  lungo  $\gamma$ ; si noti che tale campo dipende solo dalle correnti di conduzione (che sono note) e non da quelle di magnetizzazione, che invece non sono conosciute. Risulterà:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_c^{\text{cond}}, \quad (1)$$

dove  $I_c^{\text{cond}}$  è la corrente di conduzione concatenata a  $\gamma$ . La (1), limitatamente alla regione occupata dal materiale magnetico, può essere riscritta nella forma:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = xH_{\text{aria}}(r) + (2\pi r - x)H_{\text{magn}}(r) = I_c^{\text{cond}}, \quad (2)$$

dove  $H_{\text{aria}}(r)$  ed  $H_{\text{magn}}(r)$  sono rispettivamente i campi magnetici nel traferro e nel materiale magnetico. Per poter risolvere l'equazione (2) impieghiamo la relazione costitutiva per il materiale; risulta infatti che:

$$\begin{cases} H_{\text{aria}} = \frac{B_{\text{aria}}}{\mu_0}, \\ H_{\text{magn}} = \frac{B_{\text{magn}}}{\mu_0 \mu_r}, \end{cases} \quad (3)$$

essendo  $B_{\text{aria}}(r)$  e  $B_{\text{magn}}(r)$  rispettivamente i campi di induzione magnetica nel traferro e nel materiale magnetico. Per legare fra loro i campi  $B$  nelle due zone, si impiegherà la condizione al contorno per la componente normale del campo  $B$  all'interfaccia aria-magnete:

$$B_{n,\text{aria}} = B_{n,\text{magn}} \quad (4)$$

dove  $B_{n,\text{aria}}$  è la proiezione del campo  $\mathbf{B}$  nel traferro lungo la normale al taglio e  $B_{n,\text{magn}}$  è la proiezione su tale normale del campo nel materiale magnetizzato. Poiché il taglio praticato è perpendicolare alle linee di flusso del campo, la (4) comporta che  $\mathbf{B}$  sia continuo passando dal materiale all'aria. Pertanto, con l'aiuto delle (3) e (4), la (2) diviene:

$$xH_{\text{aria}}(r) + (2\pi r - x) \frac{H_{\text{aria}}(r)}{\mu_r} = I_c^{\text{cond}}, \quad (5)$$

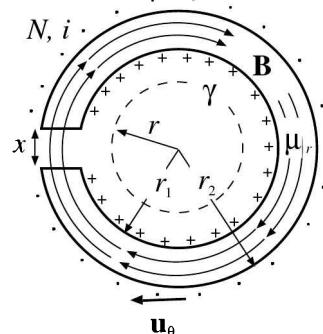
da cui deriva

$$H_{\text{aria}}(r) = \frac{\mu_r I_c^{\text{cond}}}{2\pi r + x(\mu_r - 1)}. \quad (6)$$

La (6), con l'aiuto delle (3) e (4), comporta che il campo  $\mathbf{B}$  nella regione occupata dal materiale sia pari a:

$$\mathbf{B}(r) = \mu_0 H_{\text{aria}}(r) \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 \mu_r I_c^{\text{cond}}}{2\pi r + x(\mu_r - 1)} \mathbf{u}_\theta. \quad (7)$$

Possiamo a tal punto distinguere tre situazioni in funzione del raggio  $r$  di  $\gamma$ : per  $r < r_1$  avremo che  $I_c^{\text{cond}} = 0$ , in quanto la linea non concatena alcuna corrente; per  $r_1 \leq r < r_2$  la corrente concatenata sarà  $I_c^{\text{cond}} = Ni$ . Si noti il segno positivo della corrente concatenata, ottenuto in base al verso di percorrenza scelto per  $\gamma$ . Infine per  $r \geq r_2$  risulterà ancora  $I_c^{\text{cond}} = 0$ , in quanto la linea  $\gamma$  concatenerà due volte ogni spira, con versi opposti di



scorrimento della corrente. Pertanto, applicando questo risultato alla (1) e con l'aiuto della (7), otteniamo:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} 0 & r < r_1, \\ \frac{\mu_0 \mu_r N i}{2\pi r + x(\mu_r - 1)} \mathbf{u}_\theta & r_1 \leq r < r_2, \\ 0 & r \geq r_2. \end{cases} \quad (8)$$

### S.6.7.

Si assuma che in una regione dello spazio siano presenti un campo magnetico  $\mathbf{H}$  ed un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$ . In tale regione sarà racchiusa una densità di energia per unità di volume  $u_m$  pari a:

$$u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (1)$$

Applichiamo la (1) al campo calcolato nell'esercizio precedente. Nella regione del traferro, dove  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , la densità di energia magnetica risulta pari a:

$$u_{m, \text{aria}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}, \quad (2)$$

essendo  $B = |\mathbf{B}|$ ; nella regione occupata dal materiale magnetizzato, dove  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ , avremo invece:

$$u_{m, \text{mat}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}. \quad (3)$$

Si rimanda al precedente esercizio per i dettagli relativi al calcolo del campo di induzione magnetica prodotto dal solenoide; riportiamo qui soltanto il risultato finale:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} 0 & r < r_1, \\ \frac{\mu_0 \mu_r N i}{2\pi r + x(\mu_r - 1)} \mathbf{u}_\theta & r_1 \leq r < r_2, \\ 0 & r \geq r_2, \end{cases} \quad (4)$$

essendo  $r$  la distanza dall'asse dell'anello,  $r_1$  ed  $r_2$  i raggi interno ed esterno dell'anello,  $\mathbf{u}_\theta$  un versore tangente alle circonferenze centrate sull'asse dell'anello. L'energia immagazzinata nel traferro sarà pari a:

$$U_{\text{aria}} = \int_{\text{traferro}} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau; \quad (5)$$

tenuto conto che l'anello ha sezione quadrata, la (5) diviene:

$$U_{\text{aria}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} x(r_2 - r_1) dr, \quad (6)$$

essendo  $x$  la larghezza del traferro. Sostituendo nella (6) la (4), otteniamo:

$$U_{\text{aria}} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 i^2 x (r_2 - r_1)}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{[2\pi r + x(\mu_r - 1)]^2}. \quad (7)$$

Effettuando nella (7) la sostituzione  $y = 2\pi r + x(\mu_r - 1)$  otteniamo:

$$U_{\text{aria}} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 i^2 x (r_2 - r_1)}{2} \int_{2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)}^{2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)} \frac{dy}{2\pi y^2}, \quad (8)$$

da cui

$$U_{\text{aria}} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 i^2 x (r_2 - r_1)^2}{2[2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)][2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)]}. \quad (9)$$

Analogamente, l'energia immagazzinata nel materiale che costituisce l'anello sarà pari a:

$$U_{\text{mat}} = \int_{\text{mat}} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} d\tau; \quad (10)$$

che diviene, tenuto conto della geometria dell'anello:

$$U_{\text{mat}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} (2\pi r - x)(r_2 - r_1) dr. \quad (11)$$

Sostituendo nella (11) la (4), otteniamo:

$$U_{\text{mat}} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 i^2 (r_2 - r_1)}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(2\pi r - x) dr}{[2\pi r + x(\mu_r - 1)]^2}. \quad (12)$$

impiegando ancora la sostituzione precedente, la (12) diviene:

$$U_{\text{mat}} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 i^2 (r_2 - r_1)}{2} \int_{2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)}^{2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)} \frac{(y - \mu_r x) dy}{2\pi y^2}, \quad (13)$$

da cui

$$\begin{aligned} U_{\text{mat}} = & \frac{\mu_0 \mu_r N^2 i^2 (r_2 - r_1)}{4\pi} \left\{ \ln \left[ \frac{2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)}{2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2\pi x \mu_r (r_2 - r_1)}{[2\pi r_1 + x(\mu_r - 1)][2\pi r_2 + x(\mu_r - 1)]} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

### S.6.8.

Assumeremo nel seguito che la corrente nel nucleo del cavo scorra verso il lettore. Data la simmetria del sistema, si può affermare che i campi  $B$ ,  $H$  e, per la sola zona della guaina, la magnetizzazione  $M$  abbiano linee di flusso circolari centrate sull'asse del cavo. Sia  $\mathbf{u}_\theta$  un versore tangente a tali linee, diretto in verso antiorario. Si consideri una linea chiusa circolare  $\gamma$  di raggio  $r$ , il cui centro sia posto sull'asse del cavo e che sia orientata anch'essa in verso antiorario. Applicheremo la legge di Ampere per il campo  $\mathbf{H}$  lungo  $\gamma$ ; si noti che tale campo dipende solo dalle correnti di conduzione (che sono note) e non da quelle di magnetizzazione, che andranno calcolate in seguito. Risulterà:

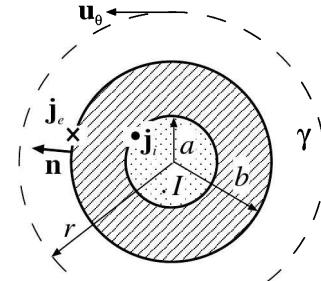
$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma} H(r) \mathbf{u}_{\theta} \cdot ds \mathbf{u}_{\theta} = I_c^{\text{cond}}; \quad (1)$$

da cui si giunge alla:

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I_c^{\text{cond}}}{2\pi r} \mathbf{u}_{\theta}. \quad (2)$$

Si noti che la corrente di conduzione  $I_c^{\text{cond}}$  concatenata a  $\gamma$  è positiva in virtù dell'orientamento scelto per tale linea. Nell'ipotesi che la corrente sia distribuita nel nucleo del cavo in modo uniforme, l'andamento di  $I_c^{\text{cond}}$  in funzione del raggio  $r$  di  $\gamma$  risulterà pari a:

$$I_c^{\text{cond}} = \begin{cases} I \frac{r^2}{a^2} & r < a, \\ I & r \geq a. \end{cases} \quad (3)$$



Impiegando la (3) nella (2), otteniamo infine:

$$\mathbf{H}(r) = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{u}_{\theta} & r < a, \\ \frac{I}{2\pi r} \mathbf{u}_{\theta} & r \geq a. \end{cases} \quad (4)$$

Per calcolare le correnti di magnetizzazione, ricordiamo che il vettore  $\mathbf{H}$  è definito come:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}; \quad (5)$$

tuttavia risulta anche

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}. \quad (6)$$

Sfruttando la (6) nella relazione (5), otteniamo:

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{H}. \quad (7)$$

Ricordiamo infine che la densità di corrente superficiale di magnetizzazione è pari a:

$$\mathbf{j}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \quad (8)$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale uscente dalla superficie considerata. Risulta pertanto che sul lato esterno della guaina scorre una corrente

$$\mathbf{j}_e = \frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi b} \mathbf{u}_{\theta} \times \mathbf{u}_r = -\frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi b} \mathbf{u}_z, \quad (9)$$

dove  $\mathbf{u}_r$  è un versore radiale uscente dalla superficie cilindrica del cavo ed  $\mathbf{u}_z$  un versore perpendicolare al piano del foglio ed uscente da esso. Sul lato interno, all'interfaccia guaina-nucleo, avremo invece una corrente

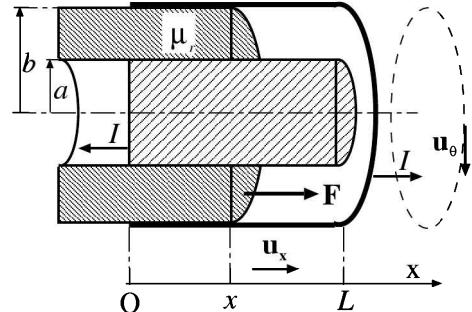
$$\mathbf{j}_i = -\frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi a} \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_r = \frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi a} \mathbf{u}_z. \quad (10)$$

Si noti infine che non ci sono correnti di magnetizzazione di volume nella guaina. Infatti  $\mathbf{J}_m = \operatorname{rot} \mathbf{M} = (\mu_r - 1) \operatorname{rot} \mathbf{H}$ , dato che il mezzo è omogeneo. Poiché  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_c = 0$  nella guaina, si ha  $\mathbf{J}_m = 0$ .

### S.6.9.

Per risolvere il problema faremo uso del metodo dell'energia magnetica. La figura mostra una sezione del sistema. Supponiamo di variare la posizione del materiale magnetico unicamente lungo l'asse del sistema, mantenendo costante la corrente che scorre nei conduttori. La forza  $\mathbf{F}$  agente sul materiale sarà allora data da:

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_{I=\text{cost.}} \mathbf{u}_x, \quad (1)$$



essendo  $U_m$  l'energia magnetica attribuita al sistema ed  $\mathbf{u}_x$  il versore dell'asse  $x$ , diretto lungo l'asse del cavo con verso concorde alla direzione di scorrimento della corrente nella guaina esterna. Per determinare l'energia magnetica dobbiamo calcolare il campo magnetico  $\mathbf{H}$  presente all'interno del cavo. Trascurando le dimensioni finite del cavo, assumeremo che il campo abbia simmetria cilindrica e sia esprimibile nella forma:

$$\mathbf{H} = H(r) \mathbf{u}_\theta, \quad (2)$$

essendo  $r$  la distanza dall'asse del sistema ed  $\mathbf{u}_\theta$  il versore tangente alle circonferenze centrate sull'asse e giacenti in un piano perpendicolare all'asse del cavo. Tale assunzione è lecita sinché la lunghezza  $L$  del cavo è molto maggiore del suo raggio esterno  $b$ . Sceglieremo come verso di  $\mathbf{u}_\theta$  quello di rotazione di una vite destrorsa che avanzi nella direzione di scorrimento della corrente nel nucleo del cavo. Scelta una linea chiusa orientata  $\gamma$ , coincidente con una linea di flusso del vettore  $\mathbf{H}$ , possiamo applicare la legge di Ampere nella forma:

$$\oint_\gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_\gamma H(r) \mathbf{u}_\theta \cdot ds \mathbf{u}_\theta = I_c^{\text{cond}}, \quad (3)$$

essendo  $I_c^{\text{cond}}$  la corrente di conduzione concatenata a  $\gamma$  ed  $r$  il raggio della linea. La (3) si riduce alla relazione:

$$H(r) = \frac{I_c^{\text{cond}}}{2\pi r}. \quad (4)$$

Si noti che l'unica regione in cui l'energia magnetica può cambiare è nell'intercapedine tra nucleo e guaina, dato che nel nucleo ed all'esterno del cavo la permeabilità magnetica relativa non cambia. Ci limitiamo pertanto al calcolo del campo nell'intercapedine; risulterà in tale regione che:

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I\mathbf{u}_\theta}{2\pi r}. \quad (5)$$

Notare che il valore di  $\mathbf{H}$  è lo stesso in aria o nel materiale, dato che dipende unicamente dalle correnti di conduzione e non da quelle di magnetizzazione. L'energia magnetica nell'intercapedine sarà poi data dalla relazione:

$$U_m = \int_{\text{aria}} \frac{\mu_0 H^2}{2} d\tau + \int_{\text{mater}} \frac{\mu_0 \mu_r H^2}{2} d\tau, \quad (6)$$

che possiamo riscrivere in virtù della simmetria cilindrica nella forma:

$$U_m = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r(L-x) dr + \int_a^b \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r x dr, \quad (7)$$

dove  $x$  è la coordinata della posizione occupata dal materiale magnetico rispetto all'ingresso del cavo. Una volta risolti gli integrali, otteniamo:

$$U_m = \frac{\mu_0 I^2 [L + x(\mu_r - 1)]}{4\pi} \ln \left[ \frac{b}{a} \right]. \quad (8)$$

Sostituendo la (8) nella (1), otteniamo finalmente:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U_m}{\partial x} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 I^2 (\mu_r - 1)}{4\pi} \ln \left[ \frac{b}{a} \right] \mathbf{u}_x. \quad (9)$$

Si noti che se il materiale è paramagnetico ( $\mu_r > 1$ ), la forza è diretta come l'asse  $x$ , dunque il materiale è attratto nell'intercapedine; invece se il materiale è diamagnetico ( $\mu_r < 1$ ), esso ne verrà respinto.

### S.6.10.

Introduciamo un versore  $\mathbf{u}_z$  diretto come l'asse verticale  $z$ , verso l'alto. Il campo di induzione magnetica agente sul magnete sarà dato dall'espressione

$$\mathbf{B}(z) = \frac{a\mathbf{u}_z}{b+z}, \quad (1)$$

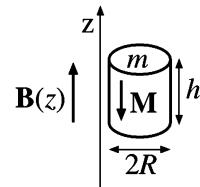
mentre la magnetizzazione nel materiale sarà esprimibile come

$$\mathbf{M} = -M\mathbf{u}_z. \quad (2)$$

Dalla (2) discende che il magnete ha un momento di dipolo magnetico pari a:

$$\mathbf{m} = -\pi R^2 h M \mathbf{u}_z, \quad (3)$$

che è semplicemente il prodotto della magnetizzazione per il volume del cilindretto. Per risolvere l'esercizio faremo uso della relazione:



$$F_z = \mathbf{m} \cdot \text{grad } B_z, \quad (4)$$

essendo  $F_z$  la componente della forza agente sul magnete lungo l'asse z,  $B_z$  la componente del campo di induzione magnetica lungo lo stesso asse e

$$\text{grad } B_z = \mathbf{u}_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (5)$$

Usare la precedente espressione equivale ad assumere che nella regione occupata dal magnete il campo  $\mathbf{B}$  agente su di esso possa considerarsi uniforme; ciò è lecito se il magnete è di piccole dimensioni. Sostituendo nella (4) la (1) e la (3), otteniamo:

$$F_z = -\pi R^2 h Ma \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{b+z} \right], \quad (6)$$

che diviene:

$$F_z = \frac{\pi R^2 h Ma}{(b+z)^2}. \quad (7)$$

Si noti che, essendo  $F_z$  positiva, la forza magnetica agente sul magnete è diretta verso l'alto. La forza peso è ovviamente diretta verso il basso ed è in modulo pari ad  $mg$ , essendo  $m$  la massa del cilindretto e  $g$  l'accelerazione di gravità. Affinché le due forze si bilancino imponiamo che i loro moduli siano uguali:

$$\frac{\pi R^2 h Ma}{(b+z)^2} = mg, \quad (8)$$

da cui otteniamo la posizione  $z$  in cui la forze si compensano, che risulta pari a:

$$z = \sqrt{\frac{\pi M h R^2 a}{mg}} - b. \quad (9)$$

È interessante notare che tale posizione di equilibrio è stabile. Infatti, l'energia potenziale associata alla forza magnetica ed alla forza peso vale

$$E_p = mgz + \frac{\pi R^2 h Ma}{z+b}. \quad (10)$$

Poiché la soluzione (9) corrisponde ad un minimo (e non ad un massimo) di  $E_p$ , segue che la posizione di equilibrio è stabile.

### S.6.11.

La soluzione di questo esercizio procede in modo simile a quanto visto nel precedente problema; la differenza sostanziale è nella magnetizzazione presente nel cubetto, che nel precedente caso era permanente, mentre qui viene indotta dallo stesso campo  $\mathbf{H}$  agente sul cubetto. In base al legame fra campo magnetico  $\mathbf{H}$ , campo  $\mathbf{B}$  e magnetizzazione  $\mathbf{M}$  presenti nel materiale:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (1)$$

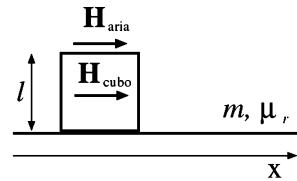
ed in base al legame diretto fra induzione magnetica e campo magnetico nel materiale:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2)$$

otteniamo che la magnetizzazione è pari a:

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{H}. \quad (3)$$

Il testo del problema ci impone di assumere che il campo magnetico  $\mathbf{H}$  non cambi nel passaggio dall'aria al materiale; tale assunzione è giustificata dalla condizione al contorno per la componente tangente di  $\mathbf{H}$  (vedi figura):



$$H_{t, \text{aria}} = H_{t, \text{cubo}} \quad (4)$$

dove  $H_{t, \text{aria}}$  è la proiezione del campo  $\mathbf{H}$  dal lato dell'aria lungo la tangente alla superficie del cubetto ed  $H_{t, \text{cubo}}$  è la proiezione del campo nel materiale magnetizzato. Si noti che tale assunzione non è del tutto lecita, dato che viola la condizione al contorno per la componente normale del campo induzione magnetica sulla faccia verticale del cubetto; nel seguito si ignorerà tale incongruenza. Assumendo che il cubetto sia di piccole dimensioni potremo considerare il campo  $\mathbf{H}$  come se fosse uniforme nel cubetto; detta allora  $x$  la posizione del cubetto, avremo che il suo momento di dipolo magnetico sarà pari a:

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} l^3 = l^3 (\mu_r - 1) \mathbf{H}(x), \quad (5)$$

da cui

$$\mathbf{m} = \frac{k l^3 (\mu_r - 1)}{x + 1} \mathbf{u}_x. \quad (6)$$

La componente della forza agente lungo l'asse  $x$  sarà allora pari a:

$$F_x = \mathbf{m} \cdot \text{grad } B_x, \quad (7)$$

dove  $B_x = \mu_0 H_x$  è la componente lungo l'asse  $x$  del campo di induzione magnetica esterno che agisce sul cubetto. Sostituendo nella (7) la (6), otteniamo:

$$F_x = \frac{k l^3 (\mu_r - 1)}{x + 1} \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{k \mu_0}{1 + x} \right], \quad (8)$$

da cui

$$F_x = \frac{\mu_0 k^2 l^3 (1 - \mu_r)}{(x + 1)^3}. \quad (9)$$

Si noti che, essendo il materiale diamagnetico e quindi  $\mu_r < 1$ , la forza ha componente positiva e pertanto è diretta come l'asse  $x$ . Per calcolare la velocità che il cubetto acquisirebbe sotto l'azione di tale forza, applichiamo il teorema dell'energia cinetica: la variazione di energia cinetica  $\Delta K$  di un oggetto è pari al lavoro  $\mathcal{L}$  delle forze agenti su di esso. Poiché il corpo si muove nel tratto  $0 \leq x \leq L$ , il lavoro è pari a:

$$\mathcal{L} = \int_0^L F_x dx = \int_0^L \frac{\mu_0 k^2 l^3 (1 - \mu_r)}{(x + 1)^3} dx, \quad (10)$$

da cui:

$$\mathcal{L} = \mu_0 k^2 l^3 (\mu_r - 1) \left[ \frac{1}{2(1+L)^2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\mu_0 k^2 l^3 L (1 - \mu_r) (L + 2)}{2(1+L)^2}. \quad (11)$$

Partendo l'oggetto da fermo, la variazione di energia cinetica è data da:

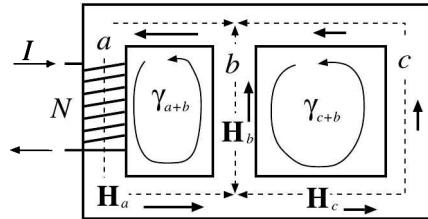
$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_{\text{fin}}^2. \quad (12)$$

Ne deriva che la velocità finale del cubetto sarà pari a:

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{L}}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_0 k^2 l^3 L (1 - \mu_r) (L + 2)}{m(1+L)^2}} \quad (13)$$

### S.6.12.

Per risolvere il problema assumeremo che, data l'alta permeabilità magnetica relativa del materiale, le linee di flusso del campo magnetico seguano la forma del nucleo che costituisce il circuito magnetico (il nucleo costituisce un “tubo di flusso” per il campo magnetico). Possiamo altresì assumere, dato che la sezione del nucleo è costante ovunque, che in ognuno dei singoli rami che formano il nucleo, il modulo del campo  $\mathbf{H}$  si mantenga costante; si può dimostrare che questa proprietà deriva direttamente dalla precedente assunzione. Detti  $\mathbf{H}_a$ ,  $\mathbf{H}_b$  ed  $\mathbf{H}_c$  i campi nei rispettivi rami di lunghezze  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e scegliendo per questi campi dei versi arbitrari (si veda la figura a lato) potremo allora impostare il seguente sistema di equazioni nei moduli dei campi suddetti:



$$\begin{cases} aH_a + bH_b = Ni; \\ cH_c - bH_b = 0; \\ H_a = H_b + H_c. \end{cases} \quad (1)$$

La prima delle (1) è semplicemente la legge di Ampere applicata al percorso chiuso  $\gamma_{a+b}$  (interno al materiale); infatti la corrente concatenata a tale percorso chiuso è proprio  $Ni$ . La seconda equazione è ancora la legge di Ampere applicata al percorso chiuso  $\gamma_{c+b}$  (interno al materiale), che non concatena alcuna corrente; si noti il segno negativo del contributo dato da  $H_b$ , dovuto al verso di percorrenza della linea opposto a quello scelto per il campo  $\mathbf{H}_b$ . La terza delle equazioni (1) deriva dalla conservazione del flusso del campo magnetico in corrispondenza della diramazione che dal ramo  $a$  forma i rami  $b$  e  $c$ ; questa è ancora una conseguenza dell'aver assunto il nucleo del circuito come tubo di flusso del campo; si noti che tale uguaglianza è possibile solo perché la sezione del nucleo è la stessa ovunque. Risolvendo il sistema di equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} \left[ c + a \left( 1 + \frac{c}{b} \right) \right] H_c = Ni; \\ H_b = \frac{c}{b} H_c; \\ H_a = \left( 1 + \frac{c}{b} \right) H_c; \end{cases} \quad (2)$$

da cui

$$\begin{cases} H_c = \frac{Ni b}{ab + ac + cb}; \\ H_b = \frac{Ni c}{ab + ac + cb}; \\ H_a = \frac{Ni(b + c)}{ab + ac + cb}. \end{cases} \quad (3)$$



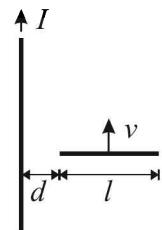
# Capitolo 7

## Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

### 7.1 Problemi

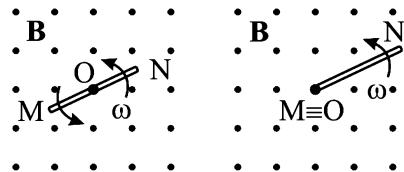
#### P.7.1.

Un filo rettilineo indefinito è percorso da una corrente stazionaria  $I$ . Una sbarretta metallica, ortogonale al filo, si muove con velocità uniforme  $v = 20 \text{ m/s}$  parallela al filo. Sapendo che la sbarretta è lunga  $l = 30 \text{ cm}$ , che la sua distanza minima dal filo è  $d = 1 \text{ cm}$  e che ai suoi capi è presente una differenza di potenziale pari a  $\Delta V = 0.7 \text{ mV}$ , si determini l'intensità della corrente che scorre nel filo.



#### P.7.2.

Un'asta metallica lunga  $l = 20 \text{ cm}$  è posta in rotazione con velocità angolare  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  in una regione di campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme e costante ( $B = 0.6 \text{ T}$ ). L'asse di rotazione è parallelo alla direzione del campo  $\mathbf{B}$ . Si determini la differenza di potenziale tra gli estremi dell'asta nel caso in cui questa venga messa in rotazione rispetto al suo centro o rispetto ad un estremo.



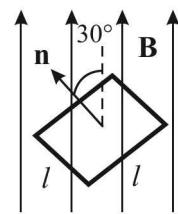
#### P.7.3.

Una bobina a sezione circolare è ferma in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme che varia nel tempo secondo la legge  $B = B_0 \cos \omega t$ . Trascurando il fenomeno dell'autoinduzione, si discuta in quale dei seguenti casi, a parità di resistenza  $R$ , la corrente indotta nella bobina ha l'ampiezza massima:

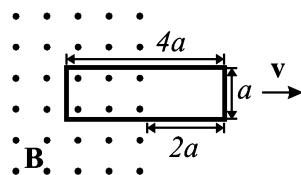
- (i) Bobina con  $\overline{N}$  spire di raggio  $a$ , il cui asse forma un angolo di  $30^\circ$  con la direzione del campo  $\mathbf{B}$ .
- (ii) Bobina con  $2\overline{N}$  spire di raggio  $a/3$ , il cui asse è parallelo alla direzione del campo  $\mathbf{B}$ .
- (iii) Bobina con  $3\overline{N}$  spire di raggio  $4a$ , il cui asse è ortogonale alla direzione del campo  $\mathbf{B}$ .

**P.7.4.**

Una spira quadrata di lato  $l = 20 \text{ cm}$  e sezione del filo  $\Sigma = 1 \text{ mm}^2$  si trova in una regione di spazio con campo magnetico uniforme  $B$ , inclinato di  $30^\circ$  rispetto alla normale alla spira. Il campo magnetico varia nel tempo come  $B = B_0 \cos \omega t$ , dove  $B_0 = 0.4 \text{ T}$  e  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ . Sapendo che la resistività nella spira è pari a  $\tau = 2 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , si determini la potenza dissipata per effetto Joule.

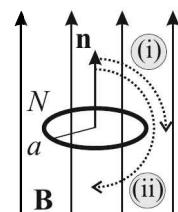
**P.7.5.**

Una spira rettangolare, di lati  $a$  e  $4a$  e di resistenza  $R$ , viene estratta con velocità costante  $v$  da una regione di campo magnetico  $B$  uniforme, in cui era immersa solo per metà (vedi figura). Si determini il lavoro che è necessario compiere per estrarre completamente la spira.

**P.7.6.**

Una bobina, composta da  $N$  spire circolari di raggio  $a$ , si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico  $B$  uniforme e costante. La bobina è inizialmente disposta con l'asse parallelo alla direzione del campo. Sapendo che la resistenza della bobina è pari a  $R$ , si determini la carica complessiva che attraversa la bobina a fronte di una rotazione della stessa di:

- (i)  $90^\circ$ ;
- (ii)  $180^\circ$ .

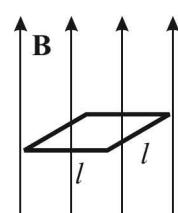
**P.7.7.**

Una spira di raggio  $a = 10 \text{ cm}$  è posta con l'asse parallelo ad un campo magnetico  $B$  uniforme che varia nel tempo secondo la legge  $B = B_0 \cos \omega t$ . La spira ha una resistenza  $R = 10 \Omega$ . Sapendo che  $\omega = 2\pi\nu$  con  $\nu = 50 \text{ Hz}$  e che la resistenza dissipa una potenza media pari a  $\mathcal{P}_m = 0.19 \text{ W}$ , si determini il valore dell'ampiezza  $B_0$ .

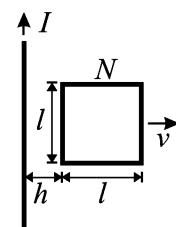
**P.7.8.**

Una spira quadrata di lato  $l$  è posta in un piano ortogonale ad un campo magnetico  $B$  uniforme. Si determini per quale dei seguenti andamenti temporali di  $B$  la forza elettromotrice indotta nella spira raggiunge i valori di picco più alti:

- (i)  $B = B_0 \sin \omega t$ ;
- (ii)  $B = B_0/2 \sin 3\omega t$ .

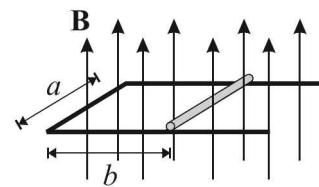
**P.7.9.**

Una bobina composta da  $N$  spire quadrate di lato  $l$  si trova ad una distanza  $h$  da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente stazionaria  $I$ . Sapendo che la resistenza nella bobina è pari a  $R$ , si determini la forza da applicare per allontanare la bobina con velocità costante  $v$ .



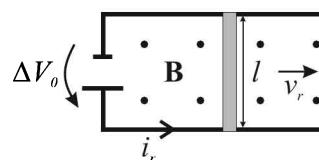
**P.7.10.**

Un circuito rettangolare, di lati  $a$  e  $b$  con un lato libero di scorrere, è posto in un piano ortogonale ad un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme e variabile nel tempo secondo la legge  $B = kt$ , dove  $k$  è una costante positiva. Si determini la forza che bisogna applicare al lato mobile per tenerlo fermo se la resistenza elettrica del circuito è pari a  $R$ .

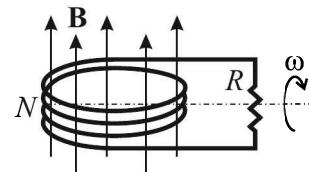
**P.7.11.**

Un'asta metallica, lunga  $l = 50$  cm e di massa  $m = 2$  kg, scorre su due conduttori paralleli ed orizzontali con coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d = 0.4$ . Un generatore di tensione mantiene una differenza di potenziale  $\Delta V_0 = 24$  V costante tra i due conduttori e chiude il circuito. Il tutto è immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ , uniforme e costante, diretto come in figura ( $B = 2$  T). Se il circuito ha una resistenza elettrica complessiva  $R = 3 \Omega$ , si determinino:

- la corrente di regime  $i_r$  nel circuito;
- la velocità di regime  $v_r$  dell'asta.

**P.7.12.**

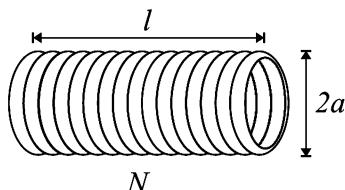
In una centrale idroelettrica il flusso d'acqua mantiene una bobina in rotazione uniforme all'interno di un campo magnetico  $\mathbf{B}$  costante ed uniforme. La bobina in rotazione, composta da  $N$  spire circolari di raggio  $a$ , alimenta una resistenza pari a  $R$ . Sapendo che la potenza media fornita dal flusso d'acqua per mantenere la bobina in rotazione uniforme è pari a  $\mathcal{P}_m$ , si determini la velocità angolare di rotazione  $\omega$ .

**P.7.13.**

Una spira circolare di raggio  $a$  e resistenza  $R$  è posta coassialmente al centro di un solenoide lungo  $l$  e composto da  $N$  avvolgimenti con una sezione circolare di raggio  $b$ . Se la corrente nel solenoide diminuisce secondo la legge  $i = i_0 e^{(-t/\tau)}$ , con  $i_0$  e  $\tau$  costanti positive, si determinino la corrente indotta in funzione del tempo e l'energia dissipata nella spira dopo un tempo pari a  $3\tau$ . Si trascurino effetti di bordo e fenomeni di autoinduzione. [ $N = 1000$ ;  $a = 1$  cm;  $l = 20$  cm;  $i_0 = 10$  A;  $\tau = 5$  s;  $R = 10 \Omega$ ]

**P.7.14.**

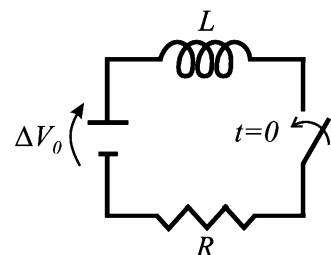
Un solenoide a sezione circolare, lungo  $l = 30$  cm, è costituito da un avvolgimento con  $N = 1000$  spire. Sapendo che la sua induttanza è pari a  $L = 3 \times 10^{-3}$  H, si determini il raggio  $a$  della sua sezione. Si trascurino effetti di bordo.



**P.7.15.**

Si consideri il circuito mostrato in figura. Si determini:

- la corrente che scorre nel circuito dopo la sua chiusura;
- l'energia immagazzinata nel solenoide quando la corrente ha raggiunto il suo valore di regime.

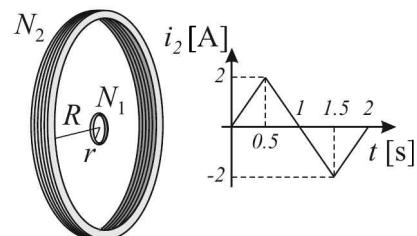
**P.7.16.**

Una bobina percorsa da una corrente  $i_1 = kt$ , con  $k = 3 \text{ A/s}$ , induce una forza elettromotrice pari a  $f_2 = 15 \text{ V}$  in una spira posta in prossimità. Si determini quanto varrebbe, invece, la forza elettromotrice indotta nella bobina se una corrente  $i_2 = 2kt$  venisse fatta passare nella spira. Si trascurino effetti di autoinduzione.

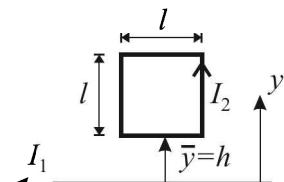
**P.7.17.**

Una bobina, con  $N_1$  spire a sezione circolare di raggio  $r$ , è posta nel centro di una seconda bobina complanare, di  $N_2$  spire con sezione circolare di raggio  $R$ . Si determini il coefficiente di mutua induzione e si calcoli la forza elettromotrice indotta nella bobina più piccola quando nella bobina più grande circola una corrente con l'andamento temporale riportato in figura.

$$[N_1 = 200; N_2 = 400; r = 1 \text{ cm}; R = 20 \text{ cm}]$$

**P.7.18.**

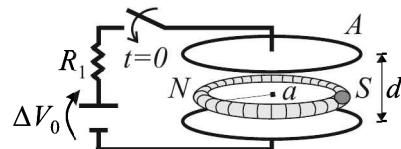
Dato un filo rettilineo indefinito, percorso da una corrente stazionaria  $I_1$ , ed una spira quadrata di lato  $l$ , percorsa da una corrente stazionaria  $I_2$ , si calcolino il coefficiente di mutua induzione in funzione della distanza  $\bar{y}$  e la forza che il filo esercita sulla spira quando la loro distanza è  $\bar{y} = h$ .

**P.7.19.**

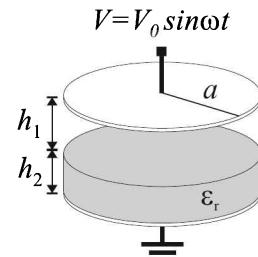
Un solenoide infinito, composto da  $n$  spire per unità di lunghezza, circolari e di raggio  $a$ , è percorso da una corrente  $i = i_0 e^{-t/\tau}$ . Si calcolino i campi  $B$  ed  $E$  generati in tutto lo spazio.

**P.7.20.**

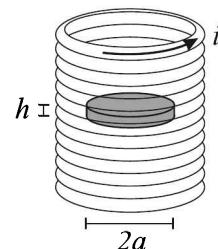
Un generatore di forza elettromotrice  $\Delta V_0$  costante, con resistenza interna  $R_1$ , è collegato ad un condensatore piano, con armature di area  $A$  e distanti  $d$  ( $d \ll \sqrt{A}$ ). All'interno del condensatore è disposto un solenoide toroidale di raggio  $a$ , composto da  $N$  spire di sezione  $S$  (con  $a \gg \sqrt{S}$ ). All'istante  $t = 0$  viene chiuso l'interruttore. Si calcoli la carica totale che attraversa il solenoide, sapendo che la sua resistenza è  $R_2$ . Si trascuri il fenomeno dell'autoinduzione.

**P.7.21.**

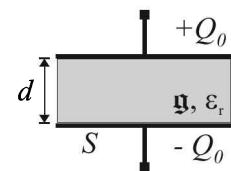
Un condensatore ad armature piane e circolari di raggio  $a$  è alimentato da una tensione variabile  $V = V_0 \sin \omega t$ . Tra le armature è inserito un dielettrico, con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , che occupa la parte inferiore del condensatore per uno spessore  $h_2$ , lasciando il vuoto nel restante spessore  $h_1$  ( $h_1 + h_2 < a$ ). Si determinino  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  all'interno del condensatore.

**P.7.22.**

Un disco conduttore di conducibilità  $\mathfrak{g}$ , raggio  $a$  e spessore  $h$ , è posto coassialmente all'interno di un solenoide indefinito, con  $n$  spire per unità di lunghezza. Se la corrente che scorre nel solenoide varia come  $i = kt$ , si determini l'espressione della potenza dissipata nel disco per effetto Joule da parte delle correnti indotte, considerando trascurabile l'effetto di queste sul campo magnetico.

**P.7.23.**

Un condensatore piano, costituito da due armature di area  $S$  e distanti  $d$  (con  $d \ll \sqrt{S}$ ), è totalmente riempito con un materiale dielettrico di costante  $\epsilon_r$ , parzialmente conduttore con conducibilità  $\mathfrak{g}$ . All'istante iniziale sulle armature è posta una carica  $Q_0$ . Si calcoli, durante la scarica del condensatore:



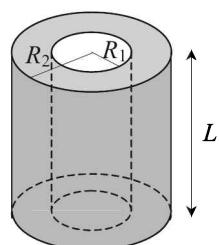
(i) la corrente di conduzione;

(ii) la differenza di potenziale tra le armature in funzione del tempo;

(iii) la corrente di spostamento .

**P.7.24.**

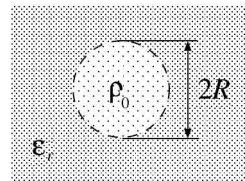
Si consideri un condensatore cilindrico con raggi  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), lunghezza  $L$  e carica  $Q_0$ . Lo spazio tra le armature viene riempito con un materiale di resistività  $\tau$ . Si determini il campo elettrico, il campo magnetico e la densità di corrente di spostamento durante il processo di scarica, all'interno del condensatore. (Si assuma:  $R_1 \ll L$  e  $R_2 \ll L$ )



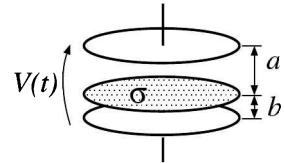
**P.7.25.**

In un mezzo di estensione infinita, di conducibilità  $\sigma$  e costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , è inizialmente presente della carica, con densità di volume uniforme  $\rho_0$ , in una regione sferica di raggio  $R$ . Si calcolino in ogni punto del mezzo:

- (i) la legge di decadimento della carica;
- (ii) il campo elettrico;
- (iii) le correnti di conduzione e spostamento;
- (iv) il campo magnetico.

**P.7.26.**

Tra le armature di un condensatore piano di forma cilindrica viene applicata una differenza di potenziale che segue la legge  $V = V_0 \sin(\omega t)$ . All'interno del condensatore è inserito un disco isolante con una densità di carica superficiale  $\sigma$ , la cui distanza dalle due armature è rispettivamente pari ad  $a$  e  $b$ . Determinare i campi elettrico e magnetico nel condensatore.



## 7.2 Soluzioni

### S.7.1.

Un filo rettilineo percorso da corrente genera nello spazio circostante un campo magnetico  $\mathbf{B}$  le cui linee di forza sono circonferenze concentriche appartenenti ad un piano ortogonale al filo e di verso determinato dalla regola della mano destra (si veda l'esercizio P.5.7). Il modulo del campo  $\mathbf{B}$ , a distanza  $r$  dal filo percorso da corrente  $I$ , è:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} . \quad (1)$$

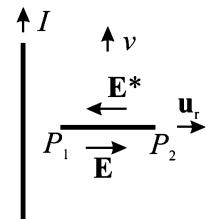
Sulle cariche del conduttore in movimento, in presenza di campo magnetico, agisce la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (2)$$

dove  $q$  è la carica generica del conduttore,  $\mathbf{v}$  è la velocità con cui quest'ultimo si muove e  $\mathbf{B}$  è il campo magnetico generato dal filo percorso da corrente.

Questa forza è causa di un campo elettromotore che porta le cariche positive verso l'estremità della sbarretta più vicina al filo e le cariche negative all'altra estremità. Il campo elettromotore può essere espresso come:

$$\mathbf{E}^*(r) = \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB(r)\mathbf{u}_r , \quad (3)$$



dove  $\mathbf{u}_r$  è il versore parallelo alla sbarretta e con verso come in figura. È importante osservare che il campo elettromotore non è costante lungo la sbarretta in quanto non lo è il campo magnetico  $B(r)$ .

Il campo elettromotore  $\mathbf{E}^*$  continua a separare le cariche ed a portarle verso gli estremi del conduttore finché non viene perfettamente bilanciato dal campo elettrostatico  $\mathbf{E}$ , generato dalla distribuzione di carica che si viene a formare lungo la sbarretta. A regime, quindi

$$\mathbf{E}(r) = -\mathbf{E}^*(r) = vB(r)\mathbf{u}_r . \quad (4)$$

La differenza di potenziale tra gli estremi della sbarretta può essere calcolata, per definizione, come integrale del campo elettrostatico:

$$V_1 - V_2 = \int_{P_1}^{P_2} vB(r)\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_d^{d+l} vB(r) dr = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d} , \quad (5)$$

da cui si ricava

$$I = \frac{2\pi \Delta V}{\mu_0 v \ln \frac{d+l}{d}} = 51 \text{ A} . \quad (6)$$

*Osservazioni:*

- (i) Il potenziale è maggiore all'estremità ( $P_1$ ) dove si sono accumulate le cariche positive;
- (ii) È possibile cambiare il segno della differenza di potenziale invertendo il verso del moto della sbarretta;
- (iii) La differenza di potenziale è calcolata correttamente solo partendo dal campo eletrostatico e non dal campo elettromotore in quanto quest'ultimo non è conservativo;
- (iv) Come discusso in questo esercizio, la forza di Lorentz può essere causa di un campo elettromotore in un conduttore. Se il conduttore forma un circuito chiuso, questo diventa sede di un forza elettromotrice che risulta essere uguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso di campo magnetico concatenato al circuito, come descritto dalla legge di Faraday.

### S.7.2.

Si consideri una generica carica positiva  $q$  del conduttore posta a distanza  $r$  dal centro di rotazione. La sua velocità lineare è pari a  $\omega r$  e la forza di Lorentz che agisce su di essa è pari a

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\omega r B \mathbf{u}_r \quad . \quad (1)$$

Questa forza dà luogo ad un campo elettromotore

$$\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega r B \mathbf{u}_r \quad (2)$$

che allontana le cariche positive dal centro di rotazione, mentre avvicina quelle negative. Nel caso in cui l'asta venga messa in rotazione rispetto al suo punto centrale, lo spostamento delle cariche nelle due metà dell'asta è perfettamente speculare e quindi il potenziale raggiunto ai due estremi è identico. Si può quindi concludere, senza bisogno di alcun conto, che la differenza di potenziale tra gli estremi dell'asta, in questo caso, è pari a

$$V_M - V_N = 0 \quad . \quad (3)$$

Nel secondo caso il centro di rotazione coincide con un estremo dell'asta. Il campo elettromotore sposterà le cariche finché il campo eletrostatico, generato dalla distribuzione di carica lungo l'asta, non sarà tale da bilanciarlo perfettamente. Quindi, al raggiungimento dell'equilibrio, sarà valida la seguente relazione:

$$\mathbf{E}^* + \mathbf{E} = 0 \quad , \quad (4)$$

che implica

$$\mathbf{E} = -\omega r B \mathbf{u}_r \quad . \quad (5)$$

Conseguentemente, la differenza di potenziale tra l'estremo fisso  $M$  e quello mobile  $N$  è

pari a

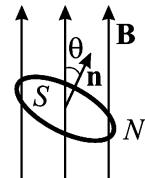
$$V_M - V_N = \int_M^N \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l -\omega r B dr = -\frac{\omega}{2} l^2 B = -0.6 \text{ V} \quad , \quad (6)$$

dove il segno negativo indica che l'estremo mobile N si trova ad un potenziale maggiore rispetto all'estremo fisso M.

### S.7.3.

La corrente che circola nella bobina può essere espressa, mediante la legge di Ohm, come

$$i = \frac{f}{R} \quad , \quad (1)$$



dove  $f$  è la forza elettromotrice indotta nella bobina e  $R$  è la sua resistenza. La forza elettromotrice indotta nella bobina, a causa delle variazioni di flusso di campo magnetico, può essere espressa mediante la legge di Faraday

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad , \quad (2)$$

dove  $\Phi(\mathbf{B})$  è il flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}$  concatenato alla bobina. Definita con  $S$  la sezione della bobina e con  $\mathbf{n}$  il versore ad essa normale, il flusso attraverso le  $N$  spire della bobina è definito come

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = N \int_S B \cos \vartheta dS \quad , \quad (3)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra il campo  $\mathbf{B}$  ed il versore  $\mathbf{n}$ .

Essendo il campo  $\mathbf{B}$  uniforme, è possibile portarlo fuori dall'integrale ed ottenere:

$$\Phi(\mathbf{B}) = N S B \cos \vartheta = N S B_0 \cos \omega t \cos \vartheta \quad . \quad (4)$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione (2), a sua volta inserita nell'equazione (1), si può scrivere:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} (N S B_0 \cos \omega t \cos \vartheta) = \frac{N S B_0 \cos \vartheta}{R} \omega \sin \omega t \quad , \quad (5)$$

la cui ampiezza è

$$i_0 = \frac{N S B_0 \omega \cos \vartheta}{R} \quad . \quad (6)$$

Consideriamo ora i tre casi proposti:

(i) Sostituendo nella (6) i corrispondenti valori si ottiene:

$$i_0 = \frac{\bar{N} \pi a^2 B_0 \omega \cos(\pi/6)}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{N} \pi a^2 B_0 \omega}{R} ; \quad (7)$$

(ii) nel secondo caso, invece, si ottiene:

$$i_0 = \frac{2\bar{N} \pi (a/3)^2 B_0 \omega}{R} = \frac{2}{9} \frac{\bar{N} \pi a^2 B_0 \omega}{R} ; \quad (8)$$

(iii) infine, nel terzo caso, si ha:

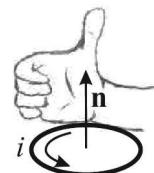
$$i_0 = 0 , \quad \text{perché } \vartheta = \pi/2 . \quad (9)$$

In conclusione, l'ampiezza massima si ottiene nel caso (i) perché  $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{2}{9}$ .

#### Osservazioni:

(i) In questo esercizio ci si è soffermati solo sull'ampiezza della corrente indotta. Più in generale, sarà importante determinare anche il verso con cui la corrente scorre.

A tale proposito, è importante sottolineare che il segno della corrente dipende dalla scelta del versore normale al circuito, utilizzato per il calcolo del flusso di  $\mathbf{B}$ . Infatti, per convenzione, ponendo il pollice della mano destra come il versore  $\mathbf{n}$ , le restanti dita indicano il verso in cui la corrente è positiva (vedi figura). Se la corrente determinata mediante le equazioni (1, 2) dovesse, invece, risultare negativa, questo significa che il verso della corrente è opposto a quello individuato con la mano destra.



(ii) Nella soluzione di questo esercizio si è trascurato il fenomeno dell'autoinduzione, come suggerito nel testo. La stessa ipotesi semplificativa verrà fatta anche nei prossimi esercizi, esclusi quelli in cui venga esplicitamente richiesto di considerare questo fenomeno.

#### S.7.4.

La potenza istantanea dissipata nella spira per effetto Joule è pari a

$$\mathcal{P} = R i^2 , \quad (1)$$

dove  $R$  è la resistenza del circuito ed  $i$  la corrente circolante nella spira. Nota la resistività  $\tau$ , la lunghezza totale della spira  $L = 4l$  e la sezione del filo  $\Sigma$ , è possibile determinare la resistenza  $R$ :

$$R = \tau \frac{L}{\Sigma} = 1.6 \times 10^{-2} \Omega . \quad (2)$$

Per determinare la corrente indotta  $i$ , si segue lo stesso procedimento usato nell'esercizio precedente, arrivando quindi alla stessa formula per una sola spira:

$$i = \frac{S B_0 \omega \cos(\pi/6)}{R} \sin \omega t \quad , \quad (3)$$

che sostituita nella (1) fornisce la potenza dissipata per effetto Joule:

$$\mathcal{P} = R i^2 = \frac{l^4 B_0^2 \omega^2 \cos^2(\pi/6)}{R} \sin^2 \omega t = 1.2 \sin^2 \omega t \quad \text{W} \quad , \quad (4)$$

il cui valor medio in un periodo si calcola osservando che il termine variabile nel tempo  $\sin^2 \omega t$  ha valor medio pari ad  $1/2$  e quindi

$$\mathcal{P}_{media} = 0.6 \quad \text{W} \quad . \quad (5)$$

### S.7.5.

Prima di calcolare il lavoro compiuto per estrarre la spira, è necessario determinare le forze che agiscono su di essa.

Durante l'estrazione della spira, il flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato varia. Infatti, se  $S$  è la superficie delimitata dalla spira, il flusso di  $\mathbf{B}$  vale:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = B S_x \quad , \quad (1)$$

dove  $S_x$  è la porzione di superficie ancora immersa nella regione in cui è presente il campo magnetico:

$$S_x = (4a - x)a \quad (2)$$

e dove  $\mathbf{n}$  è stato scelto con lo stesso verso di  $\mathbf{B}$ . Per comodità la variabile  $x$  è definita in modo tale che la sua derivata rispetto al tempo sia esattamente pari alla velocità  $v$  con cui si muove la spira.

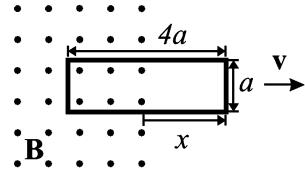
La variazione di flusso induce una forza elettromotrice  $f$  nella spira, secondo la legge di Faraday:

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}[B(4a - x)a] = B a v \quad . \quad (3)$$

Di conseguenza, nella spira circolerà una corrente secondo la legge di Ohm:

$$i = \frac{f}{R} = \frac{B a v}{R} \quad . \quad (4)$$

Si può notare che per  $v$  costante anche  $i$  è costante ed il suo verso di scorrimento, congruentemente con la scelta di  $\mathbf{n}$  (vedi Osservazione nella soluzione S.7.3), è quello riportato

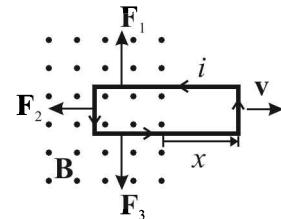


in figura. Il verso di  $i$ , inoltre, è in accordo con la legge di Lenz. Infatti, la corrente indotta  $i$  tende a generare un ulteriore contributo di campo magnetico, equiverso a quello preesistente, nel tentativo di contrastarne la diminuzione di flusso a seguito dell'estrazione della spira.

Sapendo che nella spira circola la corrente  $i$ , possiamo dedurre che i suoi lati, ancora immersi nella regione di campo magnetico, sentiranno delle forze che possono essere espresse dalla seconda legge di Laplace:

$$\mathbf{F} = il \times \mathbf{B} \quad , \quad (5)$$

dove  $l$  ha modulo e direzione pari alla lunghezza del singolo tratto rettilineo di filo e verso uguale a quello della corrente  $i$ . Le forze così determinate sono riportate in figura ed i loro moduli valgono:



$$\begin{aligned} F_1 &= i(4a - x)B \quad ; \\ F_2 &= iaB \quad ; \\ F_3 &= i(4a - x)B \quad . \end{aligned} \quad (6)$$

È importante osservare che  $F_1 = F_3$  in ogni istante durante l'estrazione della spira e quindi, essendo il loro verso opposto, la loro risultante è sempre nulla.

Sulla spira agisce quindi la sola  $\mathbf{F}_2$  che si oppone al moto. Per mantenere la spira in moto uniforme è necessario applicare una forza uguale e contraria  $\mathbf{F}_{est} = -\mathbf{F}_2$ , finché la spira non sarà completamente estratta.

Il lavoro fatto per estrarre la spira è quindi il lavoro fatto dalla forza esterna  $\mathbf{F}_{est}$ :

$$\mathcal{L} = \int_{2a}^{4a} \mathbf{F}_{est} \cdot \mathbf{u}_x dx = \int_{2a}^{4a} iaB \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x dx = iaB [x]_{2a}^{4a} = 2ia^2 B \quad . \quad (7)$$

Sostituendo l'equazione (4) nella (7) si ottiene:

$$\mathcal{L} = \frac{2B^2 a^3 v}{R} \quad . \quad (8)$$

#### Osservazione:

La forza che si oppone al moto della spira ( $\mathbf{F}_2$ ) è presente solo nella regione in cui esiste un campo magnetico ed inoltre, se sostituiamo la (4) nella seconda delle (6), possiamo osservare che dipende linearmente dalla velocità della spira. Questa forza può quindi essere vista come un attrito di tipo viscoso e viene comunemente chiamata attrito elettromagnetico.

**S.7.6.**

Per determinare la carica complessiva che attraversa la bobina si può integrare nel tempo la corrente indotta a fronte della variazione di flusso causata dalla rotazione.

Partendo dalla legge di Faraday e dalla legge di Ohm si ricava la corrente indotta come:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} . \quad (1)$$

Chiamando  $t_i$  e  $t_f$  gli istanti iniziale e finale della rotazione della spira, possiamo calcolare la carica che ha attraversato una sezione della spira:

$$Q = \int_{t_i}^{t_f} i dt = -\frac{1}{R} \int_{t_i}^{t_f} d\Phi(\mathbf{B}) = -\frac{1}{R} [\Phi_f(\mathbf{B}) - \Phi_i(\mathbf{B})] , \quad (2)$$

dove  $\Phi_f(\mathbf{B})$  è il flusso finale e  $\Phi_i(\mathbf{B})$  è il flusso iniziale.

L'equazione ottenuta:

$$Q = -\frac{1}{R} [\Phi_f(\mathbf{B}) - \Phi_i(\mathbf{B})] \quad (3)$$

è anche nota come *legge di Felici* ed evidenzia come la carica totale che attraversa la bobina non dipenda dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solo dai suoi valori iniziale e finale.

Il flusso iniziale, nel presente problema, è pari a

$$\Phi_i(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = NB\pi a^2 \quad (4)$$

in quanto  $\mathbf{B}$  è uniforme ed inizialmente parallelo ed equiverso ad  $\mathbf{n}$ .

Distinguiamo ora i due casi proposti:

(i) il flusso finale è

$$\Phi_f(\mathbf{B}) = 0 \quad (5)$$

in quanto  $\mathbf{B}$  è ortogonale ad  $\mathbf{n}$ . Quindi,

$$Q = \frac{\Phi_i(\mathbf{B})}{R} = \frac{NB\pi a^2}{R} . \quad (6)$$

(ii) Il flusso finale è

$$\Phi_f(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -NB\pi a^2 \quad (7)$$

in quanto  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{n}$  sono paralleli ma opposti ed il loro prodotto scalare è negativo. Di conseguenza,

$$Q = -\frac{1}{R} (-NB\pi a^2 - NB\pi a^2) = \frac{2NB\pi a^2}{R} . \quad (8)$$

*Osservazione:*

È interessante osservare che le formule (6) e (8) forniscono un semplice strumento per determinare l'intensità del campo magnetico  $B$ , riconducendone la misura a quella della carica che fluisce nella bobina durante il processo di rotazione.

### S.7.7.

La potenza dissipata nella resistenza  $R$  è legata alla corrente che circola mediante la legge:

$$\mathcal{P} = R i^2 \quad . \quad (1)$$

Il calcolo della corrente indotta si può effettuare a partire dalla relazione:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad . \quad (2)$$

Il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso la spira è pari a:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = B\pi a^2 = B_0\pi a^2 \cos \omega t \quad . \quad (3)$$

e quindi

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} (B_0\pi a^2 \cos \omega t) = \frac{B_0\pi a^2 \omega}{R} \sin \omega t \quad . \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (1) si trova

$$\mathcal{P} = \frac{B_0^2 (\pi a^2)^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t \quad , \quad (5)$$

il cui valor medio è

$$\mathcal{P}_m = \frac{B_0^2 (\pi a^2)^2 \omega^2}{2R} \quad . \quad (6)$$

da cui si ricava

$$B_0 = \frac{\sqrt{2R\mathcal{P}_m}}{2\pi^2 a^2 \nu} = 0.2 \text{ T} \quad . \quad (7)$$

### S.7.8.

La forza elettromotrice  $f$ , indotta nella spira, è data dalla legge di Faraday:

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad , \quad (1)$$

dove il flusso di  $\mathbf{B}$  può essere facilmente calcolato, considerando che  $\mathbf{B}$  è uniforme, come

$$\Phi(\mathbf{B}) = B l^2 \quad . \quad (2)$$

Analizziamo, ora, i due casi proposti:

(i) La forza elettromotrice indotta  $f$  è pari a

$$f = -l^2 \frac{dB}{dt} = -l^2 B_0 \omega \cos \omega t \quad . \quad (3)$$

Quest'ultima è una funzione oscillante con valore di picco pari a

$$f_{picco} = l^2 B_0 \omega \quad . \quad (4)$$

(ii) La forza elettromotrice indotta  $f$  è pari a

$$f = -l^2 \frac{dB}{dt} = -l^2 \frac{B_0}{2} 3\omega \cos 3\omega t = -\frac{3}{2} l^2 B_0 \omega \cos 3\omega t \quad . \quad (5)$$

Il valore di picco in questo caso è

$$f_{picco} = \frac{3}{2} l^2 B_0 \omega \quad . \quad (6)$$

Quindi la forza elettromotrice indotta raggiunge valori di picco più alti nel caso (ii).

### S.7.9.

Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  generato nel piano della bobina dal filo rettilineo percorso dalla corrente  $I$  (si veda l'esercizio P.5.7) ha modulo

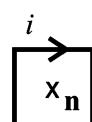
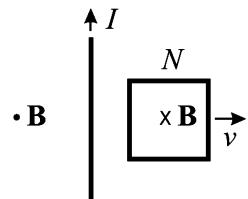
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad , \quad (1)$$

ha direzione ortogonale al piano della figura e verso entrante nella bobina.

Il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso la bobina è pari a

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad . \quad (2)$$

Prendiamo il versore  $\mathbf{n}$ , normale alla bobina, entrante nel piano del foglio. Di conseguenza, l'eventuale corrente indotta avrà segno positivo se il suo verso di scorrimento coinciderà con quello evidenziato in figura (si veda Osservazione in S.7.3).



Essendo  $\mathbf{n}$  parallelo ed equiverso a  $\mathbf{B}$ , possiamo calcolare il flusso come

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S B(r) dS = N \int_h^{h+l} B(r) l dr = \frac{\mu_0 I l N}{2\pi} \int_h^{h+l} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l N}{2\pi} \ln \frac{h+l}{h} , \quad (3)$$

dove l'elemento infinitesimo di superficie  $dS$  è stato espresso come:

$$dS = l dr . \quad (4)$$

Lo spostamento della bobina con velocità  $v$  fa variare  $h$  (infatti,  $v = dh/dt$ ) e comporta una variazione di flusso attraverso la bobina. Conseguentemente, nella bobina, si ha una corrente indotta:

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 I l N}{2\pi R} \frac{h}{h+l} \frac{vh - v(h+l)}{h^2} = \frac{\mu_0 I l^2 N v}{2\pi R h (h+l)} , \quad (5)$$

che essendo positiva ha il verso di scorrimento discusso precedentemente e riportato in figura.

Un tratto di conduttore rettilineo percorso da corrente ed inserito in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  sente, però, una forza data dalla seconda legge di Laplace:

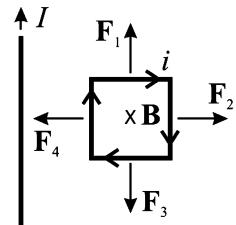
$$\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B} . \quad (6)$$

Per l'evidente simmetria del problema, le due forze agenti sui tratti orizzontali della bobina sono uguali ed opposte,

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_3 , \quad (7)$$

e quindi si elidono.

Le forze sui tratti verticali, invece, hanno modulo



$$F_2 = i l \frac{\mu_0 I N}{2\pi(h+l)} ; \quad (8)$$

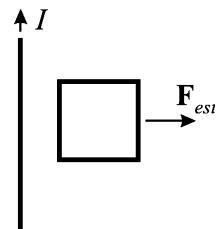
$$F_4 = i l \frac{\mu_0 I N}{2\pi h} , \quad (9)$$

dove si è tenuto conto del fatto che vi sono  $N$  avvolgimenti di filo per ogni lato della bobina. Quindi  $F_4 > F_2$  e la bobina sente una forza che si oppone all'allontanamento dal filo. Questa forza ha modulo pari a

$$F_4 - F_2 = \frac{\mu_0^2 I^2 l^3 N^2 v}{(2\pi)^2 R h (h+l)} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{h+l} \right) = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 N^2 v}{(2\pi)^2 R h^2 (h+l)^2} . \quad (10)$$

Per mantenere la bobina in moto con velocità  $v$  costante, è necessario applicare una forza  $\mathbf{F}_{est}$  uguale e contraria alla suddetta forza ( $F_4 - F_2$ ), quindi

$$F_{est} = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 N^2 v}{(2\pi)^2 R h^2 (h + l)^2} . \quad (11)$$



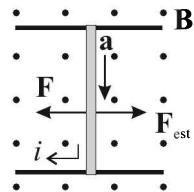
*Osservazione:*

- (i) Pur essendo costante la velocità  $v$  con cui la bobina si sposta, la forza da applicare non è costante, ma diminuisce all'allontanarsi della bobina dal filo, tendendo a zero per  $h \rightarrow \infty$ .
- (ii) Si noti che la potenza meccanica  $\mathcal{P}_{mecc}$  della forza esterna, pari a  $\mathcal{P}_{mecc} = F_{est}v$ , egualia la potenza dissipata per effetto Joule nella bobina  $\mathcal{P}_{Joule} = R i^2$ .

### S.7.10.

Si osservi che l'area concatenata al circuito rimane costante, in quanto la forza che bisogna applicare ha proprio lo scopo di mantenere fermo il lato mobile del circuito. Il flusso di campo magnetico concatenato al circuito è quindi facilmente calcolabile, considerato che  $\mathbf{B}$  è uniforme, come:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = Bab = abkt , \quad (1)$$



dove  $\mathbf{n}$  è stato scelto equiverso al campo  $\mathbf{B}$ .

La corrente indotta nel circuito è, quindi, pari a

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{abk}{R} , \quad (2)$$

dove il segno è relativo alla convenzione discussa nell'Osservazione in S.7.3 ed indica che la corrente indotta circola in senso orario guardando la figura, in accordo con la legge di Lenz.

A seguito della corrente indotta, sul lato mobile del circuito agisce una forza pari a

$$\mathbf{F} = |i| \mathbf{a} \times \mathbf{B} , \quad (3)$$

dove  $\mathbf{a}$  è un vettore di modulo  $a$ , di direzione parallela al lato mobile e di verso concorde con quello della corrente che circola nel lato stesso.

In assenza di forze esterne, il lato mobile tenderebbe a spostarsi verso sinistra, diminuendo così l'area che ha come contorno il circuito. Per tenere fermo il lato mobile è, quindi, necessario applicare una forza esterna

$$\mathbf{F}_{est} = -\mathbf{F} , \quad (4)$$

diretta come in figura e di modulo pari a

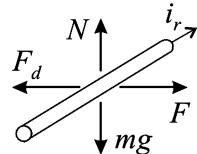
$$F_{est} = |i|aB = \frac{abk}{R}akt = \frac{a^2bk^2}{R}t \quad . \quad (5)$$

**S.7.11.**

La situazione a regime si ottiene quando la forza  $\mathbf{F}$  che spinge l'asta verso destra, dovuta alla corrente che circola nel lato mobile in presenza di un campo magnetico, è esattamente bilanciata dalla forza d'attrito dinamico  $F_d$ . A regime l'asta si muove con velocità costante  $v_r$  e quindi la risultante delle forze applicate all'asta (vedi figura) deve essere nulla:

$$\begin{cases} F - F_d = 0 & F = F_d \\ N - mg = 0 & N = mg \end{cases} \quad (1)$$

dove



$$\mathbf{F} = i_r \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

che in modulo è pari a

$$F = i_r l B \quad , \quad (3)$$

mentre

$$F_d = \mu_d N = \mu_d mg \quad (4)$$

e quindi la prima equazione diventa:

$$i_r l B = \mu_d mg \quad (5)$$

da cui si ottiene la corrente a regime

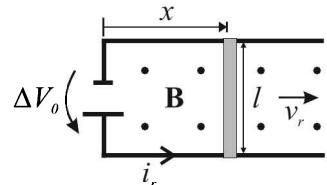
$$i_r = \frac{\mu_d mg}{l B} = 7.85 \text{ A} \quad . \quad (6)$$

Per calcolare la velocità a regime  $v_r$  bisogna considerare la legge di Ohm generalizzata, in cui includere sia la forza elettromotrice  $\Delta V_0$  dovuta al generatore di tensione, che quella indotta  $f$  a causa del movimento dell'asta:

$$\Delta V_0 + f = R i_r \quad (7)$$

dove

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Blv_r \quad . \quad (8)$$



Nell'equazione precedente si è considerato il versore  $\mathbf{n}$  equiverso a  $\mathbf{B}$  in modo tale che il segno della corrente  $i_r$ , secondo la convenzione discussa in S.7.3, sia in accordo con il verso riportato in figura. Il segno negativo nel calcolo di  $f$  indica che la forza elettromotrice

indotta nel circuito ha verso opposto rispetto a  $\Delta V_0$ .

Sostituendo l'equazione (8) nella (7) si può calcolare la velocità di regime come:

$$v_r = \frac{\Delta V_0 - i_r R}{lB} , \quad (9)$$

dove  $i_r$  è la corrente a regime determinata nell'equazione (6). La velocità a regime diventa, quindi:

$$v_r = \frac{\Delta V_0 lB - R\mu_d mg}{(lB)^2} = 0.46 \text{ m/s} . \quad (10)$$

*Osservazioni:*

- (i) La velocità a regime poteva anche essere determinata a partire da considerazioni energetiche. Infatti, a regime la potenza erogata dal generatore

$$\mathcal{P} = \Delta V_0 i_r \quad (11)$$

è completamente dissipata dalla resistenza  $R$  per effetto Joule e dalla forza di attrito dinamico tra l'asta mobile ed il circuito. Partendo da queste considerazioni, si può scrivere il seguente bilancio:

$$\Delta V_0 i_r = R i_r^2 + \mu_d mg v_r \quad (12)$$

da cui si ottiene

$$v_r = \frac{\Delta V_0 - R i_r}{\mu_d mg} i_r \quad (13)$$

e sostituendo la (6) si arriva alla stessa formula finale

$$v_r = \frac{\Delta V_0 lB - R\mu_d mg}{(lB)^2} ; \quad (14)$$

- (ii) Il meccanismo analizzato in questo esercizio potrebbe essere utilizzato come rudimentale nastro trasportatore. È, infatti, un esempio di motore elettrico in cui l'energia erogata dal generatore viene trasformata in lavoro meccanico per spostare l'asta metallica con velocità costante contro le forze d'attrito. È interessante osservare che, a regime, la velocità varia proporzionalmente alla differenza di potenziale  $\Delta V_0$  ai capi del generatore di tensione e può essere così regolata arbitrariamente.

### S.7.12.

Il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso la bobina varia nel tempo a causa della rotazione di quest'ultima:

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = NB \cos \vartheta \pi a^2 = NB\pi a^2 \cos \omega t , \quad (1)$$

dove  $\vartheta = \omega t$  è l'angolo, variabile nel tempo, tra il campo  $\mathbf{B}$  ed il versore normale alla bobina  $\mathbf{n}$ .

Il flusso variabile nel tempo dà luogo ad una forza elettromotrice indotta  $f$ :

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = NB\pi a^2 \omega \sin \omega t \quad (2)$$

che alimenta la resistenza  $R$  con una corrente

$$i = \frac{f}{R} = \frac{NB\pi a^2 \omega}{R} \sin \omega t \quad . \quad (3)$$

La potenza elettrica fornita alla resistenza  $R$  è quindi pari a

$$\mathcal{P}^{el} = f i = R i^2 = \frac{(NB\pi a^2 \omega)^2}{R} \sin^2 \omega t \quad , \quad (4)$$

il cui valor medio è

$$\mathcal{P}_{media}^{el} = \frac{(NB\pi a^2 \omega)^2}{2R} \quad . \quad (5)$$

Per generare questa potenza elettrica media è però necessario mantenere la bobina in rotazione con velocità angolare  $\omega$  costante. Questo è possibile solo grazie alla potenza meccanica fornita dal flusso d'acqua  $\mathcal{P}_m$ . Si può quindi concludere che la potenza meccanica, in assenza di attriti, si trasforma completamente in potenza elettrica, mediante il processo sopra descritto, e di conseguenza

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{media}^{el} = \frac{(NB\pi a^2 \omega)^2}{2R} \quad . \quad (6)$$

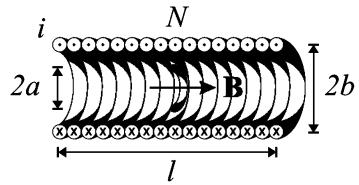
da cui si ricava

$$\omega = \frac{\sqrt{2R\mathcal{P}_m}}{NB\pi a^2} \quad . \quad (7)$$

### S.7.13.

In figura è rappresentata una sezione longitudinale del solenoide con la spira al suo centro. È inoltre evidenziato il verso di percorrenza della corrente nel solenoide, uscente dalle sezioni superiori ed entrante nelle sezioni inferiori. Una corrente che circola in questo modo genera all'interno del solenoide un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme, diretto come in figura, e di modulo

$$B = \mu_0 n i \quad , \quad (1)$$



dove  $n$  è la densità di spire per unità di lunghezza del solenoide (si veda l'esercizio P.5.11). Quindi

$$n = \frac{N}{l} \quad (2)$$

e la (1) diventa

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i \quad . \quad (3)$$

Il flusso del campo  $\mathbf{B}$  concatenato con la spira all'interno del solenoide è pari a

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \frac{N}{l} i \pi a^2 \quad , \quad (4)$$

dove il versore  $\mathbf{n}$  è stato scelto equiverso a  $\mathbf{B}$ .

Il flusso calcolato nell'equazione (4) varia nel tempo, in quanto varia la corrente  $i$ . La spira sarà quindi sede di una forza elettromotrice indotta  $f$  e conseguentemente di una corrente indotta pari a

$$i_{spira} = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 N \pi a^2}{R l} \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 N \pi a^2 i_0}{R l \tau} e^{-t/\tau} \quad , \quad (5)$$

dove la corrente  $i$  che circola nel solenoide è stata sostituita dalla sua espressione in funzione del tempo indicata nel testo del problema.

Per calcolare l'energia dissipata dopo un tempo pari a  $3\tau$  si deve integrare la potenza dissipata in questo intervallo di tempo

$$\mathcal{P} = f i_{spira} = R i_{spira}^2 = \frac{1}{R} \left( \frac{\mu_0 N \pi a^2 i_0}{l \tau} \right)^2 e^{-2t/\tau} \quad , \quad (6)$$

l'energia dissipata è quindi pari a

$$\begin{aligned} U_{diss} &= \int_0^{3\tau} \mathcal{P} dt = \frac{1}{R} \left( \frac{\mu_0 N \pi a^2 i_0}{l \tau} \right)^2 \int_0^{3\tau} e^{-2t/\tau} dt = \\ &= -\frac{1}{2R\tau} \left( \frac{\mu_0 N \pi a^2 i_0}{l} \right)^2 (e^{-6} - 1) = 3.89 \text{ pJ} \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

*Osservazione:*

Il campo  $\mathbf{B}$  dentro il solenoide (equazione (1)) è stato calcolato considerando il solenoide di lunghezza infinita. Pur essendo il solenoide, in questo problema, di lunghezza finita, quella fatta è un'ottima approssimazione, soprattutto al centro del solenoide dove è posizionata la spira, in quanto la lunghezza  $l$  del solenoide è molto maggiore del raggio  $b$  della

sua sezione.

#### S.7.14.

Il coefficiente di autoinduzione  $L$  è definito come:

$$L = \frac{\Phi(\mathbf{B})}{I} \quad , \quad (1)$$

dove  $\Phi(\mathbf{B})$  è il flusso del campo magnetico generato nel solenoide e concatenato al solenoide stesso, mentre  $I$  è la corrente che circola nel solenoide ed è causa del suddetto campo magnetico  $\mathbf{B}$ .

Per il calcolo dell'induttanza  $L$ , assumiamo che nel solenoide scorra una corrente  $I$ . Questa dà luogo ad un campo  $\mathbf{B}$  uniforme all'interno del solenoide e di modulo

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad . \quad (2)$$

Il campo  $\mathbf{B}$  è parallelo all'asse del solenoide, quindi il flusso concatenato al solenoide stesso è pari a:

$$\Phi(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \frac{N}{l} I N \pi a^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} I \quad . \quad (3)$$

L'induttanza  $L$  è quindi:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l} \quad , \quad (4)$$

da cui si ricava il raggio  $a$

$$a = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{Ll}{\mu_0 \pi}} = 1.5 \text{ cm} \quad . \quad (5)$$

*Osservazioni:*

- (i) L'induttanza  $L$  del solenoide non dipende dalla corrente che lo attraversa ma solo dai suoi parametri geometrici (vedi equazione (4)). Il valore della corrente  $I$  può quindi essere scelto arbitrariamente nel calcolo di  $L$ , pur di considerare il flusso di  $\mathbf{B}$  conseguente.
- (ii) Nel calcolo del campo magnetico all'interno del solenoide si è considerato quest'ultimo come se fosse di lunghezza infinita. Al riguardo si veda l'Osservazione fatta nell'esercizio precedente.
- (iii) Per aumentare significativamente l'induttanza di un solenoide è possibile inserire al suo interno un materiale ferromagnetico. In questo caso:

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} \pi a^2 = \mu_r L_0 \quad , \quad (6)$$

dove  $\mu_r$  è la permeabilità magnetica relativa del mezzo inserito e  $L_0$  è l'induttanza del

solenoide vuoto. L'incremento di induttanza può essere notevole in quanto  $\mu_r$  raggiunge valori fino a  $10^3 \div 10^4$ .

### S.7.15.

All'istante  $t = 0$  il circuito si chiude e comincia a circolare la corrente  $i$ . La legge di Ohm per il circuito chiuso contiene la forza elettromotrice del generatore  $\Delta V_0$ , la forza elettromotrice autoindotta in virtù dell'induttanza  $L$  e la caduta di tensione sulla resistenza  $R$ :

$$\Delta V_0 - L \frac{di}{dt} = Ri \quad . \quad (1)$$

Questa equazione differenziale può essere risolta separando le variabili

$$\frac{di}{\Delta V_0 - Ri} = \frac{dt}{L} \quad (2)$$

ed integrando

$$-\frac{1}{R} \ln(\Delta V_0 - Ri) = \frac{t}{L} + \text{costante} \quad . \quad (3)$$

Moltiplicando per  $-R$  ed elevando ad esponente con base  $e$  ambo i membri si ottiene:

$$\Delta V_0 - Ri = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (4)$$

ed infine

$$i = \frac{\Delta V_0}{R} - \frac{A}{R} e^{-t/\tau} \quad , \quad (5)$$

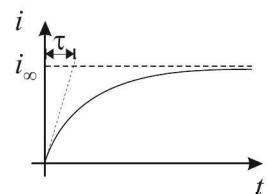
dove  $A$  è una costante che viene determinata con le condizioni iniziali, mentre  $\tau$ , definita come

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (6)$$

è la costante di tempo del transitorio.

Imponendo nella (5) che al tempo  $t = 0$  la corrente  $i$  sia nulla, si trova il valore di  $A = \Delta V_0$ . L'andamento temporale della corrente ha, quindi, l'espressione:

$$i = \frac{\Delta V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad . \quad (7)$$



Il valore a regime della corrente è:

$$i_\infty = \frac{\Delta V_0}{R} \quad , \quad (8)$$

mentre l'energia immagazzinata nel solenoide a regime è data da:

$$U = \frac{1}{2} L i_{\infty}^2 = \frac{1}{2} L \frac{\Delta V_0^2}{R^2} . \quad (9)$$

*Osservazioni:*

- (i) Il valore della corrente a regime poteva essere calcolato direttamente a partire dall'equazione (1). A regime, infatti, le grandezze fisiche non variano più nel tempo e quindi

$$\frac{di}{dt} = 0 . \quad (10)$$

La (1) diventa

$$\Delta V_0 = R i_{\infty} , \quad (11)$$

da cui si ricava

$$i_{\infty} = \frac{\Delta V_0}{R} . \quad (12)$$

- (ii) A rigore il valore a regime della corrente viene raggiunto in un tempo infinito, quindi praticamente mai. È importante notare, però, che grazie all'andamento esponenziale del transitorio, dopo un tempo  $t = 5\tau$  il valore della corrente ha già raggiunto il 99% del valore a regime.

### S.7.16.

La forza elettromotrice  $f_2$  indotta nella spira a causa della corrente  $i_1$  che circola nella bobina è un fenomeno di mutua induzione che può essere così descritto:

$$f_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} , \quad (1)$$

dove il coefficiente di mutua induzione  $M_{12}$  è definito come:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_2 dS_2}{i_1} . \quad (2)$$

Inoltre, è possibile dimostrare che

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\Phi_{21}}{i_2} = M_{21} = M . \quad (3)$$

Il coefficiente di mutua induzione tra due circuiti è quindi unico. Nel presente problema posso calcolare  $M$  come:

$$M = \frac{|f_2|}{\left| \frac{di_1}{dt} \right|} = \frac{|f_2|}{k} = 5 \text{ H} . \quad (4)$$

Si sono considerati i moduli delle grandezze in quanto i segni sono legati alle convenzioni scelte sui due circuiti accoppiati, informazione che nel presente esercizio non è di interesse. Una corrente  $i_2 = 2kt$  nella spira indurrebbe quindi nella bobina una forza elettromotrice  $f_1$  pari a:

$$|f_1| = M \left| \frac{di_2}{dt} \right| = 2kM = 30 \text{ V} . \quad (5)$$

### S.7.17.

Il coefficiente di mutua induzione  $M$  è definito come:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_2} . \quad (1)$$

Il flusso  $\Phi_{21}$  attraverso la bobina più piccola può essere calcolato come:

$$\Phi_{21} = N_1 \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 = N_1 \int_{S_1} \frac{\mu_0 i_2 N_2}{2R} dS_1 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r^2 i_2}{2R} , \quad (2)$$

dove, essendo  $r \ll R$ , si è considerato il campo  $\mathbf{B}_2$  uniforme all'interno della bobina più piccola e di modulo pari al valore del campo generato nel centro della bobina più grande (si veda l'esercizio P.5.10).

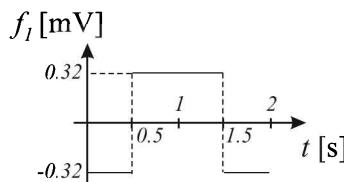
Il coefficiente di mutua induzione risulta quindi pari a :

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r^2}{2R} = 7.9 \times 10^{-5} \text{ H} . \quad (3)$$

La forza elettromotrice  $f_1$  indotta nella bobina piccola è espressa da:

$$f_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad (4)$$

e quindi



### S.7.18.

Come già visto negli esercizi precedenti, il coefficiente di mutua induzione è definito come:

$$M = M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} , \quad (1)$$

dove  $\Phi_{12}$  è il flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}_1$ , generato dal filo (pedice 1), concatenato alla spira (pedice 2) e viceversa per  $\Phi_{21}$ .

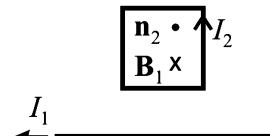
Nel presente esercizio è molto complicato calcolare  $\Phi_{21}$  e quindi si preferisce determinare  $M$  a partire da  $\Phi_{12}$ :

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \, dS_2 \quad , \quad (2)$$

dove  $\mathbf{B}_1$  ha modulo pari a

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \quad , \quad (3)$$

la sua direzione è ortogonale al foglio ed il verso entrante nella regione della spira (vedere esercizio P.5.7). Il versore  $\mathbf{n}_2$  è stato invece scelto ortogonale alla spira e con verso uscente dal foglio per congruenza con il verso di scorrimento della corrente  $I_2$  considerata positiva (vedere



Osservazione nella soluzione S.7.3). Di conseguenza, essendo i due vettori paralleli ma di verso opposto, il prodotto scalare nella (2) fornirà un risultato negativo. In virtù della dipendenza di  $\mathbf{B}_1$  dalla sola variabile  $y$ , l'elemento di superficie  $dS_2$  si può scrivere come

$$dS_2 = l \, dy \quad (4)$$

e la (2) diventa:

$$\Phi_{12} = - \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+l} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} l \, dy = - \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{\bar{y}+l}{\bar{y}} \quad . \quad (5)$$

Il coefficiente di mutua induzione  $M$  è quindi pari a

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{\bar{y}+l}{\bar{y}} \quad . \quad (6)$$

Un possibile procedimento per determinare la forza che il filo esercita sulla spira è quello di calcolare l'energia magnetica  $U_m$  del sistema, composto dai due circuiti posti ad una distanza generica  $\bar{y}$ , e di ricavare la forza mediante la relazione:

$$\mathbf{F} = \text{grad } U_m \quad . \quad (7)$$

L'energia magnetica del sistema in esame è data da:

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad , \quad (8)$$

dove  $L_1$  ed  $L_2$  sono, rispettivamente, il coefficiente di autoinduzione del filo rettilineo e della spira. Se le correnti  $I_1$  ed  $I_2$  sono costanti, cioè indipendenti dalla distanza relativa dei due circuiti, ed i circuiti sono rigidi (il che implica che anche  $L_1$  ed  $L_2$  siano costanti), allora l'energia magnetica dipende solo da  $\bar{y}$  tramite il coefficiente  $M$ . L'applicazione dell'operatore gradiente fornisce, quindi, la seguente relazione:

$$\mathbf{F} = \text{grad}(M I_1 I_2) = \frac{d}{d\bar{y}}(M I_1 I_2) \mathbf{u}_{\bar{y}} = -\frac{\mu_0 l I_1 I_2}{2\pi} \frac{d}{d\bar{y}} \left( \ln \frac{\bar{y} + l}{\bar{y}} \right) \mathbf{u}_{\bar{y}} = \frac{\mu_0 l^2 I_1 I_2}{2\pi \bar{y}(\bar{y} + l)} \mathbf{u}_{\bar{y}} \quad (9)$$

che calcolata per  $\bar{y} = h$  fornisce:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 l^2 I_1 I_2}{2\pi h(h + l)} \mathbf{u}_{\bar{y}} \quad . \quad (10)$$

#### Osservazioni:

- (i) La forza che il filo esercita sulla spira è repulsiva. Lo stesso risultato si può ottenere, per verifica, applicando la seconda legge di Laplace ai lati della spira che si trovano paralleli al filo rettilineo. Come si potrà osservare la forza repulsiva sul lato più vicino al filo rettilineo è maggiore della forza attrattiva che il filo esercita sul lato più lontano. La loro risultante coinciderà con l'espressione ricavata nella (10).
- (ii) Il segno negativo del coefficiente di mutua induzione  $M$  è dovuto alla scelta del verso di  $\mathbf{n}_2$ . Questa scelta è stata fatta allo scopo di poter utilizzare, nelle formule, la corrente  $I_2$  con il segno positivo. La scelta opposta del verso di  $\mathbf{n}_2$  avrebbe comportato un coefficiente di mutua induzione positivo, ma anche la necessità di inserire nelle formule la corrente  $I_2$  con un segno meno davanti, portando quindi agli stessi risultati.
- (iii) È importante osservare che la formula che lega la forza all'energia magnetica del sistema (equazione (7)) non prevede il segno meno davanti all'operatore gradiente, al contrario di quanto accade nel caso dell'energia potenziale meccanica. Il motivo di questa differenza è che, nel caso dell'energia magnetica, il sistema non è isolato ma prevede anche la presenza di generatori di forza elettromotrice, necessari per mantenere le correnti costanti nei vari circuiti. Si può dimostrare che, a fronte di una perturbazione della posizione relativa dei circuiti, il lavoro fatto dai generatori per mantenere costante la corrente è opposto e pari al doppio della corrispondente variazione di energia magnetica del sistema. Di conseguenza, se consideriamo l'energia complessiva del sistema, possiamo applicare l'usuale formula

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U_{tot} = -\text{grad}(U_m + U_g) = -\text{grad } U_m - \text{grad } U_g \quad , \quad (11)$$

dove  $U_g$  è il lavoro elettrico fornito dai generatori. Per quanto detto precedentemente, la (11) diventa:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U_m + 2 \text{grad } U_m = \text{grad } U_m \quad . \quad (12)$$

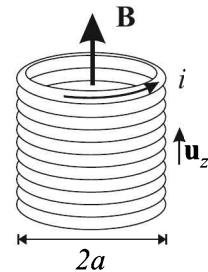
**S.7.19.**

Il campo magnetico in tutto lo spazio è determinato facilmente sapendo che un solenoide percorso da corrente genera un campo  $\mathbf{B}$  uniforme al suo interno e nullo all'esterno (si veda l'esercizio P.5.11) di modulo

$$B = \begin{cases} \mu_0 n i_0 e^{-t/\tau} & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a \end{cases} \quad (1)$$

e diretto come in figura.

Un campo magnetico variabile nel tempo genera in tutto lo spazio un campo elettrico, a sua volta variabile nel tempo. Infatti, presa una linea chiusa  $\gamma$  qualsiasi, per la definizione di forza elettromotrice, la legge di Faraday si può scrivere come:

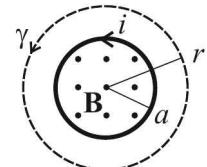


$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad , \quad (2)$$

dove  $\Phi(\mathbf{B})$  è il flusso del campo magnetico concatenato con la linea chiusa  $\gamma$ . La (2) indica che un campo magnetico variabile nel tempo induce un campo elettrico la cui circuitazione lungo una linea chiusa è diversa da zero. Se lungo questa linea esiste un conduttore allora si genera anche una corrente indotta, altrimenti rimane solo un campo elettrico nello spazio.

Dalla simmetria del problema è possibile dedurre che le linee di campo di  $\mathbf{E}$  sono delle circonferenze con centro sull'asse del solenoide ed appartenenti ad un piano ortogonale all'asse stesso. Per determinare il modulo del campo elettrico indotto prendiamo come linea chiusa  $\gamma$  proprio una di queste circonferenze, di raggio  $r$  ed orientata in modo tale che il versore normale  $\mathbf{n}$ , determinato con la regola della mano destra, sia diretto come  $\mathbf{B}$ . In questo modo l'equazione (2) diventa:

$$E 2\pi r = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_z dS = -\bar{S} \frac{d}{dt} (\mu_0 n i_0 e^{-t/\tau}) \quad , \quad (3)$$



da cui si ottiene

$$E = \frac{\bar{S}}{2\pi r \tau} (\mu_0 n i_0 e^{-t/\tau}) \quad , \quad (4)$$

dove  $\bar{S}$  è la porzione di superficie, delimitata dalla linea  $\gamma$ , in cui il campo  $\mathbf{B}$  è diverso da zero:

$$\bar{S} = \begin{cases} \pi r^2 & \text{se } r < a \\ \pi a^2 & \text{se } r \geq a \end{cases} \quad . \quad (5)$$

Il modulo del campo  $\mathbf{E}$  indotto in tutto lo spazio sarà quindi dato da:

$$E = \begin{cases} \frac{\mu_0 n i_0 e^{-t/\tau}}{2\tau} r & \text{se } r < a \\ \frac{\mu_0 a^2 n i_0 e^{-t/\tau}}{2\tau r} & \text{se } r \geq a \end{cases} . \quad (6)$$

**S.7.20.**

Prima di risolvere nel dettaglio l'esercizio, è utile discutere brevemente i principali fenomeni fisici che intervengono. Alla chiusura dell'interruttore il generatore di forza elettromotrice comincerà a caricare il condensatore portando cariche di segno opposto sulle due armature. All'interno del condensatore, invece, non essendoci un mezzo conduttivo, non si può avere passaggio di carica e quindi la corrente di conduzione è nulla. Per l'equazione di continuità in condizioni non stazionarie, la corrente di conduzione che fluisce nel circuito, durante la carica del condensatore, sarà uguale alla corrente di spostamento nel condensatore. La densità di corrente di spostamento nel condensatore è definita come:

$$\mathbf{J}_s = \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} , \quad (1)$$

ed è causa di un campo magnetico nel condensatore come previsto dal teorema della circuazione di Ampere:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} d\Sigma , \quad (2)$$

dove  $\gamma$  è una qualsiasi linea chiusa all'interno del condensatore e  $\Sigma$  è una superficie delimitata da  $\gamma$ . Dall'equazione (2) è possibile dedurre che se la corrente di spostamento varia nel tempo, allora anche  $\mathbf{B}$  all'interno del condensatore, e quindi nel solenoide, varia nel tempo. Un flusso variabile di  $\mathbf{B}$  concatenato al solenoide genera una corrente indotta che porta ad un passaggio di carica. A regime, il condensatore raggiunge ai suoi capi la stessa differenza di potenziale del generatore di forza elettromotrice e la corrente cessa di scorrere, sia essa di conduzione o di spostamento, e così termina anche la corrente indotta nel solenoide. Il passaggio di carica attraverso il solenoide è quindi una quantità finita. Affrontiamo ora analiticamente i diversi processi descritti, cominciando dalla carica del condensatore. La legge di Ohm, per il circuito in esame, è:

$$\Delta V_0 - \Delta V = R_1 i , \quad (3)$$

dove  $\Delta V$  è la differenza di potenziale ai capi del condensatore. La corrente  $i$  che scorre nel circuito può essere espressa derivando la relazione che lega la carica sul condensatore alla differenza di potenziale ai suoi capi:

$$q = C \Delta V \Rightarrow i = C \frac{d(\Delta V)}{dt} , \quad (4)$$

dove  $C$  è la capacità del condensatore. Inserendo l'espressione della corrente nell'equazio-

ne (3) si ottiene:

$$\Delta V_0 - \Delta V = R_1 C \frac{d(\Delta V)}{dt} . \quad (5)$$

La precedente equazione può essere integrata separando le variabili:

$$\frac{d(\Delta V)}{\Delta V_0 - \Delta V} = \frac{dt}{R_1 C} \Rightarrow -\ln(\Delta V_0 - \Delta V) = \frac{t}{\tau} + \text{costante} , \quad (6)$$

dove  $\tau = R_1 C$  è la costante di tempo del processo. Cambiando i segni ed elevando entrambi i membri con base  $e$ , si arriva infine all'espressione

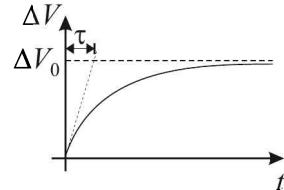
$$\Delta V = \Delta V_0 - k e^{-t/\tau} , \quad (7)$$

dove  $k$  è una costante che viene determinata imponendo le condizioni iniziali:

$$\Delta V(t=0) = 0 \Rightarrow k = \Delta V_0 \quad (8)$$

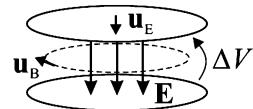
e quindi

$$\Delta V = \Delta V_0 (1 - e^{-t/\tau}) . \quad (9)$$



Conoscendo la differenza di potenziale ai capi del condensatore si è ora in grado di determinare il campo elettrico  $\mathbf{E}$  al suo interno. Se si considera il condensatore piano come se fosse ad armature infinite (approssimazione valida in quanto l'estensione delle armature è molto maggiore della loro distanza), allora il campo elettrico al suo interno è uniforme e di modulo:

$$E = \frac{\Delta V}{d} . \quad (10)$$



Definendo un versore  $\mathbf{u}_E$ , diretto come in figura, possiamo quindi esprimere il campo elettrico come:

$$\mathbf{E} = \frac{\Delta V_0}{d} (1 - e^{-t/\tau}) \mathbf{u}_E . \quad (11)$$

La densità di corrente di spostamento all'interno del condensatore è quindi parallela ad  $\mathbf{E}$  ed ha la seguente espressione:

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\epsilon_0 \Delta V_0}{\tau d} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_E . \quad (12)$$

Dalla simmetria del problema si può dedurre che le linee di campo di  $\mathbf{B}$ , generato dalla corrente di spostamento, sono circonferenze concentriche disposte su di un piano parallelo

alle armature del condensatore. Si consideri ora la linea di campo di raggio  $a$  che passa all'interno del solenoide toroidale. Applicando il teorema della circuitazione di Ampere (equazione 2) a questa linea ed introducendo il versore  $\mathbf{u}_B$ , sempre tangente e con verso riportato in figura, si ottiene:

$$B \cdot 2\pi a = \mu_0 J_s \pi a^2 \quad , \quad (13)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 a \Delta V_0}{2\tau d} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_B \quad . \quad (14)$$

Poiché la sezione del solenoide toroidale ha dimensioni molto minori del suo raggio, il campo magnetico al suo interno può essere considerato uniforme e pari al valore determinato per la linea di raggio  $a$ . Il flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato al solenoide sarà quindi:

$$\Phi(\mathbf{B}) = B \cdot N \cdot S \quad . \quad (15)$$

La carica che attraversa il solenoide può essere determinata mediante la legge di Felici (vedere la Soluzione S.7.6):

$$Q = -\frac{1}{R_2} (\Phi_f - \Phi_i) = -\frac{NS}{R_2} [B(t_f) - B(t_i)] \quad , \quad (16)$$

dove  $t_i = 0$ , mentre  $t_f \rightarrow +\infty$ , quindi  $B(t_f) = 0$  e

$$Q = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 a \Delta V_0 N S}{2 R_2 \tau d} \quad . \quad (17)$$

Ricordando che la capacità di un condensatore ad armature piane infinite è

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad , \quad (18)$$

è possibile esplicitare la costante di tempo  $\tau$ :

$$\tau = R_1 C = R_1 \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad , \quad (19)$$

che, sostituita nella (17), permette di arrivare al risultato finale:

$$Q = \frac{\mu_0 a \Delta V_0 N S}{2 R_1 R_2 A} \quad . \quad (20)$$

*Osservazione:*

È importante osservare che nella risoluzione di questo esercizio, come nella maggior parte degli esercizi risolti in questo capitolo, si è implicitamente assunto che le variazioni delle

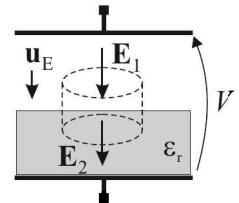
grandezze fisiche (potenziali, correnti, campi elettrici e magnetici,...) siano sufficientemente lente da produrre effetti trascurabili nel tempo impiegato dai segnali elettromagnetici per propagarsi lungo tutto il circuito. Questo significa che le grandezze fisiche si assestano su di un valore omogeneo su tutto il circuito prima che intervengano nuove variazioni apprezzabili. Questa ipotesi è detta di *quasi-stazionarietà* o di *campi lentamente variabili*. Se questa ipotesi è soddisfatta, risulta allora corretto utilizzare le relazioni tipiche del regime stazionario (legge di Ohm, potenziale elettrostatico, teorema della circuitazione di Ampere,...) pur di considerarle come relazioni istantanee.

Nel merito del presente esercizio, l'ipotesi di quasi-stazionarietà è ragionevolmente verificata in quanto una tipica costante di tempo potrebbe essere  $\tau = 10^{-4}$  s (se ad esempio  $R_1 = 100 \Omega$  e  $C = 1 \mu\text{F}$ ), mentre il tempo impiegato da un segnale elettromagnetico per propagarsi alla velocità della luce lungo l'intera estensione del circuito (qualche centimetro) è dell'ordine di  $10^{-10}$  s.

### S.7.21.

Il condensatore si può considerare come se fosse ad armature infinite, infatti  $h_1 + h_2 \ll a$ . Il campo elettrico al suo interno è quindi ortogonale alle armature ed uniforme sia nel vuoto che nel dielettrico, pur avendo due valori diversi nelle due regioni. La relazione tra i due valori di campo elettrico si può determinare applicando opportunamente il teorema di Gauss al volume rappresentato in figura:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q_{lib} \quad , \quad (1)$$



dove  $Q_{lib}$  è la carica libera che si trova all'interno del volume considerato, nel nostro caso pari a zero. Il flusso di  $\mathbf{D}$  ha contributo non nullo solo attraverso le basi del cilindro di area  $A$ , infatti  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$  ed è parallelo all'asse del cilindro.

Il teorema di Gauss diventa quindi:

$$-\epsilon_0 E_1 A + \epsilon_0 \epsilon_r E_2 A = 0 \quad , \quad (2)$$

da cui si ricava

$$E_1 = \epsilon_r E_2 \quad . \quad (3)$$

La differenza di potenziale  $V$  ai capi del condensatore è pari, per definizione, all'integrale del campo elettrico al suo interno. Essendo il campo elettrico uniforme sia nel dielettrico che nel vuoto il calcolo del potenziale si risolve semplicemente nell'equazione

$$V = E_1 h_1 + E_2 h_2 \quad , \quad (4)$$

che, mediante la relazione (3), permette di ricavare

$$E_1 = \frac{\epsilon_r V}{\epsilon_r h_1 + h_2} \quad ; \quad E_2 = \frac{V}{\epsilon_r h_1 + h_2} \quad . \quad (5)$$

Se si introduce un versore  $\mathbf{u}_E$  diretto come in figura, allora l'espressione vettoriale dei due campi elettrici sarà:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\varepsilon_r V_0 \sin \omega t}{\varepsilon_r h_1 + h_2} \mathbf{u}_E \quad ; \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{V_0 \sin \omega t}{\varepsilon_r h_1 + h_2} \mathbf{u}_E \quad . \quad (7)$$

I due campi elettrici variabili nel tempo sono responsabili di una densità di corrente di spostamento nelle rispettive regioni:

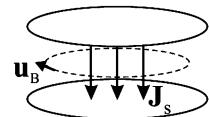
$$\mathbf{J}_{s1} = \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}_1}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V_0 \omega \cos \omega t}{\varepsilon_r h_1 + h_2} \mathbf{u}_E \quad ; \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_{s2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d\mathbf{E}_2}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V_0 \omega \cos \omega t}{\varepsilon_r h_1 + h_2} \mathbf{u}_E \quad . \quad (9)$$

Si può osservare che

$$\mathbf{J}_{s1} = \mathbf{J}_{s2} = \mathbf{J}_s \quad , \quad (10)$$

in accordo con l'equazione di continuità in condizioni non stazionarie. La densità di corrente di spostamento genera un campo magnetico, le cui linee di campo, per la simmetria del problema, sono circonferenze concentriche disposte su un piano parallelo alle armature del condensatore e di verso rappresentato in figura.



Applicando il teorema della circuitazione di Ampere (eq. 2 nel precedente esercizio) ad una di queste linee di campo con raggio  $r < a$  si ottiene:

$$B 2\pi r = \mu_0 J_s \pi r^2 \quad , \quad (11)$$

da cui

$$B = \frac{\mu_0 J_s r}{2} \quad . \quad (12)$$

Introducendo un opportuno versore  $\mathbf{u}_B$  sempre tangente alla linea di campo si può infine concludere che

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r \varepsilon_0 \varepsilon_r V_0 \omega \cos \omega t}{2(\varepsilon_r h_1 + h_2)} \mathbf{u}_B \quad . \quad (13)$$

*Osservazione*

Come già discusso nell'Osservazione all'esercizio precedente, anche in questo caso si è fatta l'ipotesi di quasi-stazionarietà. Il calcolo del potenziale come integrale del campo elettrico è infatti possibile solo nel caso in cui quest'ultimo sia irrotazionale. Affinché questa condizione sia verificata è necessario che

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0 \quad . \quad (14)$$

Come si può facilmente verificare a partire dall'equazione (13), questa condizione non è soddisfatta e quindi l'esercizio non potrebbe essere risolto con questo procedimento. La condizione (14) risulta però ragionevolmente soddisfatta se  $\omega$  è opportunamente piccolo, cioè in condizioni di campi lentamente variabili.

**S.7.22.**

Il campo magnetico all'interno del solenoide avrà la seguente espressione (si veda l'esercizio P.5.11):

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{u}_z = \mu_0 n k t \mathbf{u}_z \quad . \quad (1)$$

Dalla terza equazione di Maxwell:

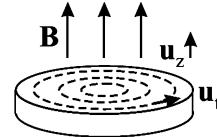
$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad (2)$$

si ricava che un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico. Dalla simmetria del problema si può dedurre che le linee di flusso del campo elettrico indotto sono circonferenze concentriche appartenenti ad un piano ortogonale ad  $\mathbf{u}_z$ , con verso riportato in figura. Applicando la legge di Faraday ad una linea di campo  $\gamma$  di raggio  $r$ , si ottiene:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad \Rightarrow \quad E 2\pi r = - \frac{d}{dt} (\pi r^2 \mu_0 n k t) = - \pi r^2 \mu_0 n k \quad (3)$$

da cui si ricava il campo elettromotore

$$\mathbf{E} = - \frac{\mu_0 n k r}{2} \mathbf{u}_t \quad , \quad (4)$$



dove il segno meno indica che il campo  $\mathbf{E}$  è diretto con verso opposto rispetto a quello del versore  $\mathbf{u}_t$ , tangente in ogni punto alla linea di campo e diretto come in figura.

Un campo elettromotore all'interno di un conduttore induce una corrente, la cui densità  $\mathbf{J}$  è collegata al campo mediante la legge di Ohm in forma locale:

$$\mathbf{J} = \mathbf{g} \mathbf{E} = - \frac{\mathbf{g} \mu_0 n k r}{2} \mathbf{u}_t \quad , \quad (5)$$

dove  $\mathfrak{g}$  è la conducibilità del disco conduttore.

La potenza  $\wp$  dissipata per unità di volume per effetto Joule è pari a

$$\wp = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathfrak{g}\mu_0^2 n^2 k^2 r^2}{4} . \quad (6)$$

Integrando  $\wp$  su tutto il volume del conduttore si trova la potenza totale dissipata:

$$\mathcal{P} = \int_{\tau} \wp d\tau = \int_0^a \frac{\mathfrak{g}\mu_0^2 n^2 k^2 r^2}{4} 2\pi r h dr = \frac{\mathfrak{g}\mu_0^2 n^2 k^2 \pi h}{2} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mathfrak{g}\mu_0^2 n^2 k^2 \pi h a^4}{8} , \quad (7)$$

dove l'integrale di volume è stato calcolato dividendo il disco in gusci cilindrici infinitesimi di volume  $d\tau = 2\pi r h dr$ .

#### Osservazione:

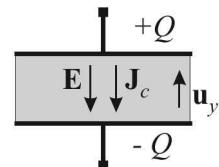
Le correnti che dissipano potenza nel conduttore secondo il meccanismo appena descritto sono dette *correnti parassite* o *di Foucault*. L'insorgere di queste correnti costituisce un problema reale in tutti quei dispositivi elettrotecnicici in cui un nucleo ferromagnetico è posto all'interno di un avvolgimento percorso da corrente variabile nel tempo. Per limitare questa causa di dissipazione si utilizzano dei nuclei metallici composti da tanti lamierini di conduttore disposti parallelamente alle linee di campo di  $\mathbf{B}$  e separati da strati di vernice isolante. In questo modo si riesce a diminuire significativamente la conducibilità del conduttore lungo le linee chiuse su cui agisce il campo elettromotore  $\mathbf{E}$  e quindi si minimizza la potenza dissipata.

Esistono però applicazioni in cui queste correnti tornano utili, come ad esempio nei fornì ad induzione. In questo caso, il riscaldamento a seguito della dissipazione di potenza per effetto Joule viene sfruttato per fondere i metalli mediante l'applicazione di campi magnetici variabili con elevata frequenza.

#### S.7.23.

Consideriamo il condensatore ad armature piane infinite, infatti  $d \ll \sqrt{S}$ , e quindi il campo elettrico al suo interno può essere espresso in ogni istante come

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \mathbf{u}_y = -\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \mathbf{u}_y . \quad (1)$$



La corrente di conduzione all'interno del dielettrico imperfetto può essere, quindi, determinata mediante la legge di Ohm in forma locale come

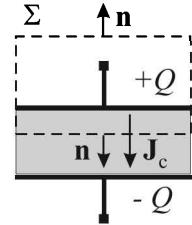
$$\mathbf{J}_c = \mathfrak{g} \mathbf{E} = -\frac{\mathfrak{g} Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \mathbf{u}_y . \quad (2)$$

Per determinare l'effettiva dipendenza temporale sia di  $\mathbf{E}$  che di  $\mathbf{J}$  è necessario calcolare come varia nel tempo la carica  $Q$  sulle armature durante la scarica. A tale scopo utilizziamo l'equazione di continuità:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad , \quad (3)$$

dove  $\rho$  è la densità volumetrica di carica libera. Se si integra la precedente equazione su di un volume  $\mathcal{V}$ , come quello riportato in figura, la cui superficie delimitante  $\Sigma$  contiene l'armatura superiore del condensatore, si ottiene:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n} d\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad , \quad (4)$$



infatti l'unica carica libera contenuta nel volume  $\mathcal{V}$  è la carica  $Q$  che si trova sull'armatura. Sostituendo l'equazione (2) nella (4) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{gQ}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} S = -\frac{gQ}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad , \quad (5)$$

la cui soluzione è:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} \quad , \quad (6)$$

dove la costante di tempo  $\tau$  è pari a

$$\tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{g} \quad . \quad (7)$$

Sostituendo il risultato ottenuto nell'equazione (6) nelle equazioni (1) e (2) si arriva alle seguenti espressioni per il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e per la corrente di conduzione  $\mathbf{J}_c$ :

$$\mathbf{E} = -\frac{Q_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_y \quad ; \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_c = -\frac{gQ_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_y \quad . \quad (9)$$

Essendo il campo elettrico uniforme all'interno del condensatore, la differenza di potenziale tra le sue armature è pari a:

$$\Delta V = E d = \frac{Q_0 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} e^{-t/\tau} \quad . \quad (10)$$

La corrente di spostamento è invece data da

$$\mathbf{J}_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\tau} \frac{Q_0}{S \varepsilon_0 \varepsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_y \quad ; \quad (11)$$

ricordando la definizione di  $\tau$  (7), si arriva a

$$\mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{g}Q_0}{S\epsilon_0\epsilon_r} e^{-t\mathbf{g}/(\epsilon_0\epsilon_r)} \mathbf{u}_y . \quad (12)$$

*Osservazione:*

Si noti che all'interno del condensatore

$$\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s = 0 . \quad (13)$$

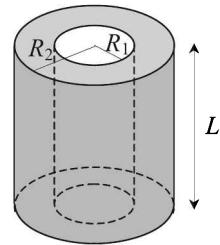
Questo risultato è in accordo con l'equazione di continuità per un condensatore isolato ed inoltre implica che il campo magnetico all'interno del condensatore sia nullo, nonostante la presenza di campi elettrici variabili. L'espressione del campo elettrico è quindi esatta, e cioè tutto il campo elettrico è di tipo elettrostatico nonostante il regime non stazionario: non si deve perciò introdurre in questo problema alcuna ipotesi di campi lentamente variabili.

#### S.7.24.

Data la simmetria del problema, le linee di forza del campo elettrico  $\mathbf{E}$  sono radiali (perpendicolari all'asse del cilindro) e il campo ha lo stesso modulo su una superficie cilindrica di raggio arbitrario  $r$  coassiale con il condensatore assegnato. Assumendo come superficie di Gauss una superficie cilindrica  $\Sigma$  di raggio  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) e altezza  $L$ , applicando il teorema di Gauss si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 2\pi r L E = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q(t)}{2\pi\epsilon_0 L r} \mathbf{u}_r , \quad (1)$$

essendo  $Q(t)$  la carica sulle armature del condensatore all'istante  $t$  e  $\mathbf{u}_r$  il versore radiale uscente dall'asse del condensatore. Dobbiamo ora calcolare  $Q(t)$  durante il processo di scarica del condensatore. Osserviamo innanzitutto che il dispositivo assegnato si può schematicizzare come un condensatore di capacità  $C$  in parallelo ad un resistore di resistenza  $R$ , come mostrato in figura. Determiniamo, in base ai dati del problema,  $C$  e  $R$ . Per calcolare  $C$  valutiamo dapprima la differenza di potenziale fra le armature del condensatore:



$$\Delta V_C = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q(t)}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q(t)}{2\pi\epsilon_0 L} \log \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

La capacità  $C$  è quindi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V_C} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log(R_2/R_1)} \quad (3)$$

Determiniamo ora la resistenza  $R$  presentata dal materiale che riempie lo spazio fra le armature del condensatore. Possiamo pensare il materiale di resistività  $\tau$  come una sequenza di gusci cilindrici, ciascuno di spessore  $dr$ , collegati in serie. Tale scomposizione

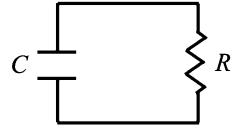
ha senso perchè la densità di corrente di conduzione,  $\mathbf{J}_c$ , ha direzione radiale, ed è quindi ortogonale alle superfici di ciascuno di questi gusci cilindrici. Dato che la resistenza  $dR$  di ciascun guscio sferico è data da

$$dR = \tau \frac{dr}{2\pi r L} \quad (4)$$

si ha:

$$R = \frac{\tau}{2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi L} \log \frac{R_2}{R_1} \quad (5)$$

Possiamo ora calcolare la carica sulle armature del condensatore durante il processo di scarica. Poichè la differenza di potenziale all'istante  $t$  ai capi del resistore è pari a  $\Delta V_C(t)$ , utilizzando la legge di Ohm risulta:



$$\Delta V_C(t) = R i(t) \quad (6)$$

Si ha quindi:

$$\frac{Q(t)}{C} = R i(t) \quad (7)$$

Nell'intervallo di tempo  $dt$  il resistore è attraversato dalla carica  $i(t) dt$ , che, per la conservazione della carica, rappresenta anche la *diminuzione* della carica  $Q(t)$  sulle armature del condensatore, quindi:

$$-dQ = i(t) dt \quad \Rightarrow \quad i(t) = -\frac{dQ}{dt} \quad (8)$$

Sostituendo la (8) nella (7) si ottiene:

$$\frac{Q(t)}{C} = -R \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \quad (9)$$

L'equazione differenziale (9) si risolve in modo semplice, ricordando che, all'inizio del processo di scarica ( $t = 0$ ), si ha  $Q(0) = Q_0$ :

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0 \exp \left( -\frac{t}{RC} \right) \quad (10)$$

Usando le (3) e (5) si ottiene:

$$RC = \tau \epsilon_0 \quad (11)$$

Sostituendo la (10) nella (1), e tenendo conto della (11) si ha:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_0}{2\pi \epsilon_0 L r} \exp \left( -\frac{t}{\tau \epsilon_0} \right) \mathbf{u}_r \quad (12)$$

Possiamo ora determinare la densità di corrente di spostamento:

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{Q_0}{2\pi L r} \frac{1}{\tau \epsilon_0} \exp \left( -\frac{t}{\tau \epsilon_0} \right) \mathbf{u}_r = -\frac{\mathbf{E}}{\tau} \quad (13)$$

Poichè la densità di corrente di conduzione è:

$$\mathbf{J}_c = \frac{\mathbf{E}}{\tau} \quad (14)$$

si ha:

$$\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s = 0 \quad (15)$$

Quindi:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s) = 0 \quad (16)$$

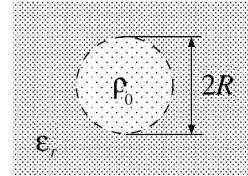
Ricordando che è anche  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , si ottiene che  $\mathbf{B} = 0$ .

### S.7.25.

Per risolvere il problema faremo uso delle equazioni di Maxwell:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$



$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J}_c + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s) \quad (1)$$

dove  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono rispettivamente i campi elettrico e magnetico;  $\mathbf{J}_c$  e  $\mathbf{J}_s$  rispettivamente la densità di corrente di conduzione e di spostamento;  $\rho$  la densità di volume di carica libera presente nel materiale;  $\epsilon_r$  la costante dielettrica relativa del mezzo considerato. A tali equazioni aggiungiamo la *relazione costitutiva* del materiale:

$$\mathbf{J}_c = g \mathbf{E}, \quad (2)$$

essendo  $g$  la conducibilità del materiale. Dalle equazioni (1) deriva l'equazione di continuità della carica:

$$\text{div } \mathbf{J}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Sostituendo nella (3) la (2) ed assumendo che la conducibilità sia uniforme, si ottiene:

$$g \text{ div } \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad (4)$$

sostituendo nella (4) la seconda delle (1), otteniamo infine:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon_0 \epsilon_r} \rho = 0. \quad (5)$$

Si noti che nella (5) non vi è alcun riferimento esplicito alla dipendenza spaziale, benché  $\rho$  sia funzione del tempo e dello spazio. Pertanto potremo porre come soluzione della (5) la legge:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}, t) e^{-t/\tau}, \quad (6)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il generico vettore posizione e la costante temporale ad esponente è pari a

$$\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mathbf{g}}; \quad (7)$$

la densità iniziale di carica  $\rho_0$ , presente all'istante  $t = 0$ , è invece pari a:

$$\rho_0(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \rho_0 & |\mathbf{r}| \leq R \\ 0 & |\mathbf{r}| > R \end{cases} \quad (8)$$

con  $R$  raggio della regione sferica considerata. Ne deriva che la carica, lì dove inizialmente era assente, continua ad essere nulla; viceversa, nella regione in cui c'era carica iniziale,  $\rho$  decade nel tempo con legge esponenziale, ma si mantiene spazialmente uniforme.

Per calcolare i campi e le correnti presenti nella regione, faremo l'ipotesi semplificativa che il campo elettrico sia ovunque irrotazionale. Per tale ipotesi, che andrà verificata al termine della soluzione,  $\mathbf{E}$  è completamente determinato dalla seconda delle (1) (ovvero dal teorema di Gauss). In virtù della simmetria sferica della distribuzione di carica, porremo  $\mathbf{E} = E(r, t) \mathbf{u}_r$ , ove  $r = |\mathbf{r}|$  ed  $\mathbf{u}_r$  è un versore radiale diretto verso l'esterno. Applicando il teorema di Gauss, risulta che

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi r^2 E(r, t) = \frac{Q_{\Sigma}(t)}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad (9)$$

dove  $\Sigma$  è una superficie gaussiana di forma sferica e raggio  $r$ , centrata nel centro della distribuzione di carica;  $\mathbf{n}$  la normale uscente da tale superficie;  $Q_{\Sigma}(t)$  la carica contenuta all'istante  $t$  all'interno di  $\Sigma$ . Risulta che:

$$Q_{\Sigma}(t) = \int_{\tau_{\Sigma}} \rho(r, t) d\tau = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r, t) dr, \quad (10)$$

essendo  $\tau_{\Sigma}$  il volume racchiuso da  $\Sigma$ . Con l'aiuto della (8), la (10) diviene:

$$Q_{\Sigma}(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 e^{-t/\tau} & r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 e^{-t/\tau} & r > R \end{cases} \quad (11)$$

che, sostituita nella (9) e tenendo conto della simmetria sferica, ci consente di calcolare il campo elettrico:

$$\mathbf{E}(r, t) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{3\epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r \leq R \\ \frac{R^3 \rho_0}{3r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r > R \end{cases} \quad (12)$$

La corrente di conduzione, in base alla (2), sarà allora pari a:

$$\mathbf{J}_c(r, t) = \mathbf{g} \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{r\rho_0 \mathbf{g}}{3\epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r \leq R \\ \frac{R^3 \rho_0 \mathbf{g}}{3r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r > R \end{cases} \quad (13)$$

mentre la corrente di spostamento  $\mathbf{J}_s$  sarà data da:

$$\mathbf{J}_s(r, t) = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{1}{\tau} \frac{r \rho_0}{3} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r \leq R \\ -\frac{1}{\tau} \frac{R^3 \rho_0}{3r^2} e^{-t/\tau} \mathbf{u}_r & r > R \end{cases} \quad (14)$$

Si noti tuttavia che, sostituendo la (7) nella (14) e confrontando quest'ultima con la (13), si verifica agevolmente la relazione

$$\mathbf{J}_c(r, t) + \mathbf{J}_s(r, t) = \mathbf{0}, \quad (15)$$

in qualunque posizione e per qualsiasi istante. Sostituendo tale relazione nella quarta delle (1), si ottiene allora:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad (16)$$

si rammenti che anche la divergenza di  $\mathbf{B}$  è nulla (per la prima delle (1)); un campo che abbia contemporaneamente divergenza e rotore nulli è nullo. Pertanto  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Sostituendo tale risultato nella terza delle (1), otteniamo anche che  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , coerentemente con le ipotesi inizialmente poste, che dunque risultano valide.

### S.7.26.

Supporremo per il momento che il campo elettrico  $\mathbf{E}$  sia conservativo; inoltre, nell'ipotesi di poter trascurare gli effetti di bordo, il campo sarà non nullo solo all'interno del condensatore. In base a tali ipotesi procediamo col calcolo di  $\mathbf{E}$  con gli stessi procedimenti adottati in elettrostatica. Chiameremo con  $\mathbf{E}_a$  ed  $\mathbf{E}_b$  i campi elettrici nelle due zone del condensatore rispettivamente di spessore  $a$  e  $b$  (si veda la figura); individuato un asse  $z$  (dotato di versore  $\mathbf{u}_z$ ) perpendicolare alle armature, porremo:

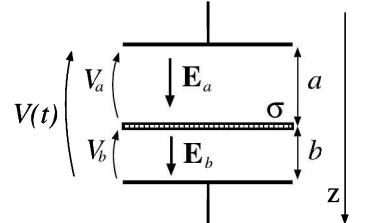
$$\mathbf{E}_a(t) = E_a(t) \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{E}_b(t) = E_b(t) \mathbf{u}_z. \quad (1)$$

In base alle condizioni al contorno per la componente normale di  $\mathbf{E}$  in prossimità del disco isolante carico, possiamo porre:

$$E_b(t) - E_a(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

essendo  $\sigma$  la densità di carica superficiale presente sul disco; si noti che tale condizione può anche essere ricavata applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica perpendicolare al disco, a cavallo di questi. La differenza di potenziale  $V(t) = V_0 \sin \omega t$  ai capi del condensatore è pari alla somma delle differenze di potenziale  $V_a$  e  $V_b$  presenti ai capi delle due zone in cui il condensatore è diviso (si veda la figura). Possiamo quindi porre:

$$V(t) = V_a(t) + V_b(t) = aE_a(t) + bE_b(t), \quad (3)$$



dove le due differenze di potenziale sono state calcolate assumendo che il campo elettrico sia uniforme in ciascuna delle due zone. Sostituendo la (2) nella (3), si ottiene infine:

$$\mathbf{E}_a = \frac{\epsilon_0 V(t) - \sigma b}{\epsilon_0(a+b)} \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{E}_b = \frac{\epsilon_0 V(t) + \sigma a}{\epsilon_0(a+b)} \mathbf{u}_z. \quad (4)$$

Passiamo a calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}$ ; si rammenta che valgono le relazioni:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J}_c + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s) \quad (5)$$

essendo  $\mathbf{J}_c$  e  $\mathbf{J}_s$  rispettivamente la densità di corrente di conduzione e di spostamento; si noti che  $\mathbf{J}_c$  è nulla all'interno del condensatore, per cui:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6)$$

Sostituendo nella (6) una delle (4) (si noti che il risultato è lo stesso nelle due zone), si ottiene:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega V_0}{a+b} \cos \omega t \mathbf{u}_z; \quad (7)$$

applichiamo a tale equazione il teorema di Stokes:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_{\gamma}} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (8)$$

dove  $\gamma$  è un percorso chiuso orientato,  $S_{\gamma}$  la superficie racchiusa da  $\gamma$  ed  $\mathbf{n}$  la normale ad  $S_{\gamma}$  orientata nel verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di  $\gamma$ . Sceglieremo per comodità una linea  $\gamma$  circolare, centrata sull'asse del condensatore e giacente nel piano parallelo alle armature, di raggio  $r$ . In virtù della simmetria cilindrica del sistema, possiamo riscrivere il campo magnetico nella forma:

$$\mathbf{B}(t) = B(r, t) \mathbf{u}_t, \quad (9)$$

con  $\mathbf{u}_t$  versore tangente a  $\gamma$ , diretto nel verso di percorrenza della linea. Sostituendo la (7) e la (9) nella (8) e tenuto conto che  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_z$ , si giunge a scrivere :

$$2\pi r B(r, t) = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \omega V_0}{a+b} \cos \omega t, \quad (10)$$

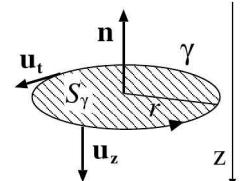
da cui:

$$\mathbf{B}(r, t) = B(r, t) \mathbf{u}_t = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 r \omega V_0}{2(a+b)} \cos \omega t \mathbf{u}_t. \quad (11)$$

Si noti tuttavia che

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (12)$$

sostituendo la (11) nella (12), otteniamo:



$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 r \omega^2 V_0}{2(a+b)} \sin \omega t \mathbf{u}_t \neq 0; \quad (13)$$

pertanto l'ipotesi iniziale di irrotationalità del campo elettrico non risulta soddisfatta. Ciò comporta che la soluzione fin qui determinata non è esatta, ma può considerarsi accettabile solo se  $\omega \rightarrow 0$ , di modo che  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  divenga trascurabile.

Per giungere ad una soluzione esatta, procediamo nel seguente modo: assumiamo che il campo elettrico possa scriversi come la somma di un termine conservativo  $\mathbf{E}_0$  (tale che  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0$  e  $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 \neq 0$ ) più un termine non conservativo  $\mathbf{E}_{nc}$  (tale che  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_{nc} \neq 0$ , ma  $\operatorname{div} \mathbf{E}_{nc} = 0$ ). Si dimostra<sup>(1)</sup> che tale scomposizione è unica ed in particolare che il termine conservativo coincide con il risultato riportato nelle equazioni (4). Determiniamo ora i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in modo iterativo. Assumiamo che essi possano scriversi come la somma di infiniti termini del tipo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{nc}, \quad (14)$$

e

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i. \quad (15)$$

Per determinare i vari termini della serie si procede nel seguente modo: calcolato il termine  $\mathbf{E}_0$ , lo si sostituisce nella equazione (6) da cui si determina il termine  $\mathbf{B}_0$ . Si noti che  $\mathbf{B}_0$  è stato già calcolato (si veda l'equazione (11)). Si sostituisce poi  $\mathbf{B}_0$  nella equazione (12), da cui si ricava il termine  $\mathbf{E}_1$ . A tal punto si ripete il procedimento per determinare  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{B}_2$  e così via. In particolare, ponendo

$$A = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega V_0}{2(a+b)} \quad (16)$$

si avrà:

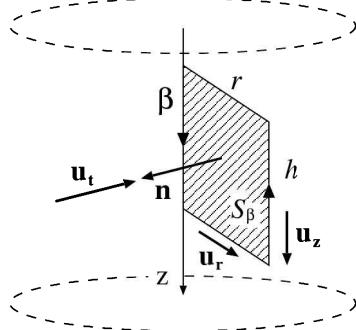
$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = -Ar\omega \sin \omega t \mathbf{u}_t. \quad (17)$$

Applichiamo a questa equazione il teorema di Stokes:

$$\oint_{\beta} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_{\beta}} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}' dS, \quad (18)$$

dove  $\beta$  è un percorso chiuso orientato (si veda in figura),  $S_{\beta}$  la superficie racchiusa da  $\beta$  ed  $\mathbf{n}'$  la normale ad  $S_{\beta}$  orientata nel verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di  $\beta$ . Sceglieremo per comodità una linea  $\beta$  rettangolare, con un lato coincidente con l'asse del condensatore e lunghezza  $h$ , e l'altro lato di lunghezza  $r$ . Assumeremo che,

<sup>1</sup>La dimostrazione va ben al di là degli scopi di questo testo. Si noti tuttavia che il termine non conservativo ha divergenza nulla e quindi non contribuisce al flusso del campo elettrico. Pertanto tale termine non influenza il teorema di Gauss, che è stato impiegato indirettamente per determinare le (4).



per la simmetria del sistema, si possa scrivere  $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{u}_z$  e che  $E_1$  sia nullo sull'asse del condensatore; inoltre osserviamo che  $\mathbf{n}' = -\mathbf{u}_t$ . La (18) diviene dunque:

$$-E_1 h = A\omega \sin \omega t \int_0^r r h dr = \frac{Ar^2 h}{2} \omega \sin \omega t, \quad (19)$$

da cui

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{Ar^2}{2} \omega \sin \omega t \mathbf{u}_z. \quad (20)$$

La (20), sostituita nella (6), dà la:

$$\text{rot } \mathbf{B}_1 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = -\frac{A\mu_0 \epsilon_0 r^2 \omega^2}{2} \cos \omega t \mathbf{u}_z. \quad (21)$$

Assumendo, per la simmetrica cilindrica, di poter scrivere  $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{u}_t$ , applichiamo ancora una volta il teorema di Stokes alla linea  $\gamma$  precedentemente introdotta; si ottiene così:

$$2\pi r B_1 = \frac{A\mu_0 \epsilon_0 \omega^2}{2} \cos \omega t \int_0^r r^2 2\pi r dr = 2\pi \frac{A\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 r^4}{8} \cos \omega t, \quad (22)$$

da cui:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{A\mu_0 \epsilon_0 r^3 \omega^2}{8} \cos \omega t \mathbf{u}_t. \quad (23)$$

Si verifica che, procedendo con l'iterazione, si ottiene:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{A\mu_0 \epsilon_0 r^4 \omega^3}{32} \sin \omega t \mathbf{u}_z, \quad (24)$$

e

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{A\mu_0^2 \epsilon_0^2 r^5 \omega^4}{192} \cos \omega t \mathbf{u}_t. \quad (25)$$

Se si procedesse indefinitamente nei calcoli e si sommassero tutti i termini ottenuti, si troverebbe:

$$\mathbf{E} = \left[ \frac{2Ac^2}{\omega} \sin \omega t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega r/c)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} + \mathcal{E} \right] \mathbf{u}_z, \quad (26)$$

dove  $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$  ed  $\mathcal{E}$  è un termine costante, che dipende dalla zona considerata del condensatore, proporzionale alla densità di carica superficiale  $\sigma$  presente sul disco isolante carico. La serie nell'equazione (26) rappresenta semplicemente una funzione di Bessel di ordine 0 (indicata con  $J_0$ ), per cui potremo riscrivere la (26) nella forma compatta:

$$\mathbf{E} = \left[ \frac{V_0 \sin \omega t}{a+b} J_0 \left( \frac{\omega r}{c} \right) + \mathcal{E} \right] \mathbf{u}_z. \quad (27)$$

dove si è tenuto conto della (16). Analogamente si troverebbe:

$$\mathbf{B} = -\frac{2cA \cos \omega t}{\omega} \left[ \frac{\omega r}{2c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega r/c)^{2k}}{2^{2k}(k+1)!k!} \right] \mathbf{u}_t; \quad (28)$$

il termine in parentesi qui rappresenta una funzione di Bessel di ordine 1 (indicata con  $J_1$ ); tenuto conto della (16), potremo quindi riscrivere la (28) nella forma compatta:

$$\mathbf{B} = -\frac{V_0 \cos \omega t}{c(a+b)} J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \mathbf{u}_t. \quad (29)$$



# Capitolo 8

## Onde elettromagnetiche

### 8.1 Problemi

#### P.8.1.

Un'onda piana monocromatica progressiva di frequenza  $\nu = 50$  MHz si propaga nel vuoto nella direzione dell'asse  $z$ . Sapendo che l'onda è linearmente polarizzata con il campo elettrico vibrante nella direzione dell'asse  $y$  ed avente ampiezza massima di oscillazione  $E_0 = 120$  V/m, si determinino:

- (i) la lunghezza d'onda  $\lambda$  dell'onda, il numero d'onda  $k$  e la frequenza angolare  $\omega$  dell'onda;
- (ii) l'espressione dei campi elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$  dell'onda;
- (iii) la densità di energia elettromagnetica trasportata dall'onda.

#### P.8.2.

Si consideri un'onda elettromagnetica piana monocromatica di frequenza  $\nu$  che si propaga nella direzione dell'asse  $x$  e linearmente polarizzata con il campo elettrico vibrante nella direzione  $y$ . Nel piano  $(x, y)$  è posta una spira quadrata di lato  $L$  e resistenza  $R$ . Sapendo che al tempo  $t = 0$  l'onda elettromagnetica presenta nell'origine degli assi un massimo del campo elettrico pari ad  $E_0$ , si calcolino:

- (i) Le espressioni dei campi elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$  dell'onda;
- (ii) La corrente indotta nella spira dal campo elettrico dell'onda, trascurando l'autoinduttanza della spira.

#### P.8.3.

In una regione dello spazio vuoto, in assenza di sorgenti, è presente un campo elettrico  $\mathbf{E}$  della forma:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = f(t - \alpha_y y - \alpha_z z) \mathbf{u}_x, \quad (1)$$

dove  $\alpha_y$  e  $\alpha_z$  sono due parametri reali ed  $f$  una funzione reale arbitraria. Utilizzando le equazioni di Maxwell, si determini:

- (i) la relazione che deve sussistere fra le due costanti  $\alpha_y$  e  $\alpha_z$  affinché  $\mathbf{E}$  rappresenti effettivamente un campo elettrico;
- (ii) l'espressione corrispondente del campo magnetico.

**P.8.4.**

Si scriva l'espressione più generale del campo elettromagnetico per un'onda piana monocromatica di frequenza angolare  $\omega$  che si propaga nella direzione  $z$  e si dimostri che lo stato di polarizzazione più generale dell'onda è ellittico. Si determinino poi le relazioni che devono sussistere affinché l'onda sia polarizzata linearmente e circolarmente.

**P.8.5.**

Si dia l'espressione più generale di un'onda elettromagnetica piana monocromatica che si propaga nel vuoto utilizzando la notazione esponenziale (o fasoriale) per i campi.

**P.8.6.**

Si consideri un'onda piana monocromatica polarizzata linearmente, di frequenza  $\omega$  e ampiezza di oscillazione  $E_0$ , che incide normalmente su di un conduttore perfetto piano indefinito. Determinare le caratteristiche dell'onda riflessa e discutere le proprietà del campo complessivo. Determinare inoltre l'espressione delle correnti indotte sulla superficie metallica.

**P.8.7.**

Determinare l'espressione delle onde piane monocromatiche piane stazionarie e le loro frequenze angolari  $\omega$  che possono sussistere nella regione di spazio vuoto compresa fra due lastre piane metalliche parallele poste a distanza  $L$  (modi risonanti).

**P.8.8.**

Si ripeta l'esercizio precedente nel caso in cui la regione compresa fra le due lastre metalliche sia riempita di materiale dielettrico avente una costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ .

**P.8.9.**

Si enunci e si dimostri il teorema di Poynting commentando il significato fisico dei vari termini. Si definisca poi l'intensità di un'onda elettromagnetica e si calcoli l'intensità media (nel tempo) nel caso di un'onda piana monocromatica.

**P.8.10.**

Che relazione esiste fra intensità, densità di energia elettromagnetica e densità di quantità di moto in un'onda piana monocromatica che si propaga in uno mezzo dielettrico elettricamente e magneticamente normale? Si derivi poi l'espressione della densità di energia e dell'intensità dell'onda in funzione della ampiezza di oscillazione del campo elettrico nel caso di onda con polarizzazione generica (ellittica).

**P.8.11.**

Con riferimento al problema P6, si calcoli la forza per unità di superficie che l'onda esercita sul metallo (pressione di radiazione).

**P.8.12.**

Si calcoli la pressione di radiazione che una radiazione con densità di energia (media)  $\langle u \rangle$  esercita incidendo su una parete perfettamente riflettente nel caso in cui: (i) l'onda è piana ed incide sulla superficie con un angolo di incidenza  $\theta$ ; (ii) la radiazione incidente è costituita dalla sovrapposizione di onde piane che si propagano con distribuzione isotropa ad angoli  $0 < \theta < \pi/2$  (radiazione isotropa).

**P.8.13.**

Come si modificherebbe il risultato del problema precedente se la superficie sulla quale incide l'onda fosse perfettamente assorbente?

**P.8.14.**

Un condensatore piano, con armature circolari di raggio  $a$  poste parallelamente alla distanza  $d$  (con  $d \ll a$ ), viene caricato mediante una corrente di carica costante  $I = I_0$ . Si calcoli il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del condensatore durante la fase di carica e si confronti l'espressione ottenuta con la variazione di energia elettrica del condensatore.

**P.8.15.**

Si calcoli il flusso del vettore di Poynting entrante dalla superficie di un cilindro conduttore non magnetico filiforme di lunghezza  $L$ , sezione circolare di raggio  $a$  ( $a \ll L$ ) e conducibilità  $g$ , percorso da una corrente stazionaria  $I$ . Verificare poi che, in accordo col teorema di Poynting, tale flusso egualia la potenza dissipata per effetto Joule nel conduttore.

**P.8.16.**

Il vettore di Poynting di un'onda elettromagnetica monocromatica piana polarizzata linermente che si propaga nel vuoto è:

$$\mathbf{S}(z, t) = S_0 \cos^2[\omega(t - z/c_0)] \mathbf{u}_z, \quad (2)$$

dove  $c_0$  è la velocità della luce nel vuoto. Si scrivano le espressioni dei campi elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$  dell'onda.

**P.8.17.**

Determinare le espressioni del campo elettrico, del campo magnetico e del vettore di Poynting di un'onda elettromagnetica stazionaria ottenuta dalla sovrapposizione di due

onde piane monocromatiche linearmente polarizzate nella medesima direzione  $y$ , di eguale ampiezza, che si propagano in versi opposti nella direzione  $z$ . Si mostri poi che il valore medio temporale del vettore di Poynting è nullo. Quale è il significato fisico di questo risultato?

**P.8.18.**

Una cella solare al silicio, la cui superficie frontale ha un'area  $A = 12 \text{ cm}^2$ , eroga una corrente  $I = 0.10 \text{ A}$  ad una tensione  $V = 0.5 \text{ V}$  quando è esposta alla piena luce solare. Supponendo di considerare la radiazione solare come un'onda piana monocromatica con ampiezza del campo elettrico  $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$ , si calcoli il rendimento della cella fotovoltaica.

**P.8.19.**

Utilizzano le condizioni al contorno per i campi elettromagnetici, si ricavino le leggi di Snell della riflessione e rifrazione relative al passaggio di un'onda piana monocromatica attraverso la superficie piana di separazione di due materiali dielettrici con costanti dielettriche relative  $\epsilon_{r1}$  ed  $\epsilon_{r2}$ .

**P.8.20.**

Un'onda elettromagnetica piana e monocromatica che si propaga nel vuoto incide normalmente sulla superficie piana che separa il vuoto da un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ . Utilizzando le condizioni al contorno del campo elettromagnetico all'interfaccia vuoto-dielettrico, si calcolino i coefficienti di riflessione e trasmissione in campo ed in intensità dell'onda.

**P.8.21.**

Si consideri la propagazione di un pacchetto d'onde in un mezzo dielettrico il cui indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda (nel vuoto) secondo una relazione nota  $n = n(\lambda)$ . Dopo aver definito la velocità di gruppo del pacchetto d'onde, se ne derivi l'espressione in funzione della velocità della luce nel vuoto  $c_0$ , di  $n(\lambda)$  e della sua derivata  $dn/d\lambda$ .

## 8.2 Soluzioni

### S.8.1.

L'espressione del campo elettromagnetico di un'onda piana monocromatica che si propaga nella direzione positiva dell'asse  $z$  linearmente polarizzata con il campo elettrico vibrante nella direzione  $y$  è:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_y \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = -(E_0/c_0) \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x, \quad (2)$$

dove  $\omega = 2\pi\nu$  è la frequenza angolare dell'onda,  $k = \omega/c_0$  il numero d'onda,  $E_0$  l'ampiezza massima di vibrazione del campo elettrico, e  $c_0 = 1/(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$  la velocità della luce nel vuoto. La lunghezza d'onda è poi data da  $\lambda = 2\pi/k = c_0/\nu$ . Si noti che  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c_0$  in ogni istante di tempo ed in ogni punto dello spazio, e che il prodotto vettoriale  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  è diretto, in direzione e verso, secondo la direzione  $z$  di propagazione dell'onda, e cioè risulta parallelo ed equiverso al vettore d'onda  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$ . Dalla teoria, è poi noto che al campo elettromagnetico è associata una energia distribuita nello spazio fisico con una densità  $u$  data da:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (3)$$

Usando le espressioni di  $E$  e  $B$  date dalle equazioni (1) e (2), si ottiene:

$$u(z, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c_0^2} \cos^2(\omega t - kz) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (4)$$

Si noti che i contributi ad  $u$  dell'energia elettrica  $[(1/2)\epsilon_0 E^2]$  e di quella magnetica  $[B^2/(2\mu_0)]$  sono uguali, e che  $u$  varia rapidamente nel tempo con periodo  $T = 2\pi/\omega$ . Spesso si è interessati al valor medio temporale di quantità rapidamente oscillanti; se introduciamo il valor medio della densità di energia così definito:

$$\langle u \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u(x, y, z, t) dt, \quad (5)$$

ed osservando che  $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = 1/2$ , si ha per l'onda piana monocromatica:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2. \quad (6)$$

Con i dati numerici forniti dal problema, si ha in conclusione:

$$\omega = 2\pi\nu = 3.142 \times 10^8 \text{ rad/s}, \quad k = \frac{\omega}{c_0} = 1.047 \text{ m}^{-1}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 6 \text{ m}, \quad \langle u \rangle = 6.375 \times 10^{-8} \text{ J/m}^3 \quad (7)$$

### S.8.2.

L'espressione dei campi elettrico e magnetico dell'onda elettromagnetica piana nel riferimento  $Oxyz$  di figura è:

$$E_y = E_0 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \right] \quad (1)$$

$$B_z = \frac{E_y}{c_0} = \frac{E_0}{c_0} \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \right] \quad (2)$$

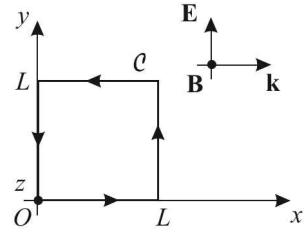
$$E_z = E_x = B_x = B_y = 0, \quad (3)$$

dove  $c_0$  è la velocità della luce nel vuoto. La corrente indotta nella spira dal campo elettrico dell'onda elettromagnetica vale, per la legge di Ohm applicata alla spira  $\mathcal{C}$ :

$$I = \frac{1}{R} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4)$$

dove  $R$  è la resistenza elettrica della spira. Per il calcolo dell'integrale di linea, e cioè della forza elettromotrice indotta, si osservi che  $\mathbf{E}$  è perpendicolare all'elemento di linea  $d\mathbf{l}$  nei due lati della spira paralleli all'asse  $x$ , per cui gli unici contributi all'integrale non nulli alla circuitazione si hanno sui due lati paralleli all'asse  $y$ , direzione di polarizzazione del campo elettrico. Perciò, scegliendo l'orientamento di percorrenza della spira (e quindi della corrente  $I$ ) come in figura, si ha:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_0^L E_y(x=0, t) dy + \int_0^L E_y(x=L, t) dy = \\ &= -E_0 L \cos(2\pi\nu t) + E_0 L \cos(2\pi\nu t - 2\pi\nu L/c_0) = \\ &= 2E_0 L \sin(2\pi\nu t - \pi\nu L/c_0) \sin(\pi\nu L/c_0) \end{aligned} \quad (5)$$



dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le formule di prostaferesi della trigonometria. La corrente indotta nella spira vale quindi (trascurando l'autoinduttanza della spira):

$$I = \frac{2E_0 L}{R} \sin \left( \frac{\pi\nu L}{c_0} \right) \sin \left( 2\pi\nu t - \frac{\pi\nu L}{c_0} \right). \quad (6)$$

Si osservi che la corrente indotta si annulla se  $\pi\nu L/c_0 = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), cioè se  $L = nc_0/\nu = n\lambda$  è un multiplo intero della lunghezza d'onda  $\lambda$ .

E' interessante osservare che per il calcolo della forza elettromotrice indotta nella spira si poteva procedere utilizzando la legge dell'induzione elettromagnetica:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (7)$$

dove  $\Phi$  è il flusso del campo magnetico dell'onda concatenato con la linea  $\mathcal{C}$  della spira, che vale:

$$\Phi = \int_0^L dx \int_0^L dy B_z. \quad (8)$$

Derivando rispetto al tempo sotto il segno di integrale ed osservando che  $\partial B_z/\partial t = -c_0 \partial B_z/\partial x$ , si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{\partial B_z}{\partial t} = c_0 \int_0^L dy \int_0^L dx \frac{\partial B_z}{\partial x} = c_0 L [B_z(x=L, t) - B_z(x=0, t)] \quad (9)$$

che coincide proprio con l'espressione della forza elettromotrice calcolata per via diretta.

### S.8.3.

Se indichiamo con  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  i campi elettrico e magnetico presenti nella regione di spazio vuoto, essi devono soddisfare le equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di sorgenti, e cioè:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

Osserviamo che l'espressione del campo elettrico indicata nel testo del problema, e cioè:

$$\mathbf{E} = f(t - \alpha_y y - \alpha_z z) \mathbf{u}_x, \quad (5)$$

soddisfa senz'altro la prima equazione di Maxwell, giacchè  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \partial f / \partial x = 0$ . Inoltre, dalla terza equazione di Maxwell si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_z \quad (6)$$

Tenendo conto che, per la dipendenza funzionale di  $f$  dalle variabili  $y$ ,  $z$  e  $t$  risulta  $\partial f / \partial y = -\alpha_y \partial f / \partial t$  e  $\partial f / \partial z = -\alpha_z \partial f / \partial t$ , l'equazione precedente implica che si abbia:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \alpha_z \frac{\partial f}{\partial t} \quad (8)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\alpha_y \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (9)$$

A meno di un campo magnetico statico, che non interessa ai fini del calcolo del campo elettromagnetico, le equazioni precedenti consentono di determinare per integrazione rispetto al tempo le componenti cartesiane del vettore campo magnetico, che sono date esplicitamente da:

$$B_x(y, z, t) = 0 \quad (10)$$

$$B_y(y, z, t) = \alpha_z f(t - \alpha_y y - \alpha_z z) \quad (11)$$

$$B_z(y, z, t) = -\alpha_y f(t - \alpha_y y - \alpha_z z) \quad (12)$$

Si noti che, dalle espressioni precedenti, segue che:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \alpha_z \frac{\partial f}{\partial y} - \alpha_y \frac{\partial f}{\partial z} = -\alpha_z \alpha_y \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha_y \alpha_z \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

cioè la seconda equazione di Maxwell è identicamente soddisfatta. Resta da imporre la validità della quarta equazione di Maxwell; per questo osserviamo che risulta:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \alpha_z f & -\alpha_y f \end{vmatrix} = - \left( \alpha_y \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x = (\alpha_y^2 + \alpha_z^2) \frac{\partial f}{\partial t} \mathbf{u}_x, \quad (14)$$

per cui, ove si tenga presente che  $\partial \mathbf{E} / \partial t = (\partial f / \partial t) \mathbf{u}_x$ , la quarta equazione di Maxwell,  $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ , implica che si abbia:

$$\alpha_y^2 + \alpha_z^2 = \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c_0^2}, \quad (15)$$

che è la condizione richiesta sui coefficienti  $\alpha_y$  ed  $\alpha_z$ . Per concludere, osserviamo che il campo elettromagnetico così ottenuto rappresenta una onda piana che si propaga nella direzione individuata dal versore  $\mathbf{n} = (0, c_0 \alpha_y, c_0 \alpha_z)$ . Infatti, osservando che  $\mathbf{n} \times \mathbf{u}_x = c_0 \alpha_z \mathbf{u}_y - c_0 \alpha_y \mathbf{u}_z$ , possiamo scrivere:

$$\mathbf{E} = f \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c_0} \right) \mathbf{u}_x, \quad (16)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c_0} f \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c_0} \right) \mathbf{n} \times \mathbf{u}_x, \quad (17)$$

dove  $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$ . Tali relazioni mostrano chiaramente che i campi si propagano nella direzione individuata dal versore  $\mathbf{n}$  con velocità  $c_0 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$ , con il campo elettrico  $\mathbf{E}$  trasversale, linermente polarizzato nella direzione  $x$ , ed il campo magnetico  $\mathbf{B}$  ortogonale sia ad  $\mathbf{E}$  che ad  $\mathbf{n}$  e tali che i vettori (nell'ordine indicato)  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{n}$  formano una terna cartesiana ortogonale destrosa (vedi figura).

#### S.8.4.

L'espressione più generale del campo elettromagnetico di un'onda piana monocromatica che si propaga nella direzione dell'asse  $z$  è data da:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y, \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y, \quad (1)$$

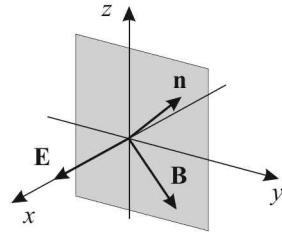
dove le componenti  $E_x$ ,  $E_y$  e  $B_x$ ,  $B_y$  dei campi elettrico e magnetico sono date da:

$$E_x(z, t) = A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \quad (2)$$

$$E_y(z, t) = A_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \quad (3)$$

$$B_x(z, t) = -\frac{1}{c_0} E_y(z, t) \quad (4)$$

$$B_y(z, t) = \frac{1}{c_0} E_x(z, t). \quad (5)$$



Nelle precedenti equazioni,  $\omega$  è la frequenza angolare dell'onda,  $k = \omega/c_0$  il numero d'onda,  $c_0$  la velocità della luce nel vuoto,  $A_x$  ed  $A_y$  sono le ampiezze (reali) di oscillazione delle componenti dell'onda polarizzata nelle direzioni trasversali  $x$  ed  $y$ , e  $\phi_x, \phi_y$  le corrispondenti fasi. Le proprietà di polarizzazione dell'onda piana monocromatica dipendono dalle particolari relazioni che esistono fra le ampiezze  $A_x, A_y$  e soprattutto dallo *sfasamento* fra le due componenti dell'onda, definito da:

$$\phi \equiv \phi_x - \phi_y. \quad (6)$$

Se fissiamo l'attenzione sul vettore campo elettrico  $\mathbf{E}$  dell'onda in un dato piano trasversale alla direzione di propagazione, ad esempio nel piano  $z = 0$ , abbiamo che esso varia nel tempo in accordo con le leggi:

$$E_x(t) = A_x \cos(\omega t + \phi_x) \quad (7)$$

$$E_y(t) = A_y \cos(\omega t + \phi_y). \quad (8)$$

Se rappresentiamo geometricamente il vettore  $\mathbf{E}(t)$  nel piano  $(x, y)$  mediante un vettore P-O, con centro O nell'origine degli assi (vedi figura), al variare del tempo l'estremo P del vettore descrive una curva (traiettoria) nel piano  $(x, y)$  che definisce lo *stato di polarizzazione dell'onda*. Come vedremo, nel caso più generale tale curva è un ellisse, per cui potremo dire che lo stato di polarizzazione più generale dell'onda piana monocromatica è *ellittico*. Se poi l'ellisse degenera in una circonferenza od in un segmento, lo stato di polarizzazione dell'onda si dirà *circolare* oppure *lineare*, rispettivamente. Mostriamo ora che la traiettoria descritta dal punto P nel piano  $(x, y)$  è un ellisse, e cioè, in pratica, che le equazioni (7) e (8) sono le equazioni parametriche di un ellisse. Per questo, introduciamo una traslazione dell'origine dei tempi mediante il cambiamento di variabile  $t' = t + \phi_y/\omega$ , per cui le equazioni (7) e (8) assumono la forma seguente:

$$E_x(t') = A_x \cos(\omega t' + \phi) = A_x \cos \phi \cos(\omega t') - A_x \sin \phi \sin(\omega t') \quad (9)$$

$$E_y(t') = A_y \cos(\omega t'). \quad (10)$$

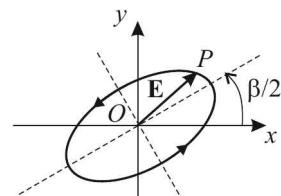
Dalla equazione (9) discende che

$$\frac{E_x}{A_x} - \cos \phi \cos(\omega t') = -\sin \phi \sin(\omega t'). \quad (11)$$

Elevando al quadrato ambo i membri della precedente equazione e tenendo conto che, per la equazione (10),  $\cos(\omega t') = E_y/A_y$ , dopo semplici passaggi algebrici si ottiene la seguente equazione:

$$\left( \frac{E_x}{A_x} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{A_y} \right)^2 - 2 \cos \phi \left( \frac{E_x}{A_x} \right) \left( \frac{E_y}{A_y} \right) - \sin^2 \phi = 0 \quad (12)$$

che è l'equazione cartesiana di un ellisse, nel piano  $(E_x, E_y)$ , con centro O nell'origine degli assi e semiasse (maggiore) inclinato rispetto all'asse  $E_x$  di un angolo  $\beta/2$  (vedi figura) tale che  $\tan \beta = 2A_x A_y \cos \phi / (A_x^2 + A_y^2)$  (la dimostrazione di questa proprietà è un bellissimo esercizio di geometria analitica, che lasciamo allo studente volenteroso!). Osserviamo che



l'ellisse di polarizzazione è riferito agli assi (cioè  $\beta = 0$ ) se  $\cos \phi = 0$ , ovvero se  $\phi = \pm\pi/2$  (a meno di multipli di  $2\pi$ ).

Come casi particolariabbiamo i seguenti due:

(i) *Polarizzazione circolare.* Se l'ellisse di polarizzazione si riduce ad una circonferenza, l'onda si dice polarizzata circolarmente. Da un'esame della equazione (12) è facile convincersi che l'ellisse degenera in una circonferenza quando  $A_x = A_y \equiv A$  e  $\cos \phi = 0$ . L'ultima condizione sullo sfasamento  $\phi = \phi_x - \phi_y$  è soddisfatta quando, a meno di multipli di  $2\pi$ , risulta  $\phi = \pi/2$  oppure  $\phi = -\pi/2$ . Nel primo caso ( $\phi = \pi/2$ ), si noti che dalle equazioni (9) e (10) si ha  $E_x(t') = -A \sin(\omega t')$  e  $E_y(t') = A \cos(\omega t')$ , per cui  $\omega t'$  è l'angolo antiorario che il vettore  $\mathbf{E} = P-O$  forma con l'asse  $E_y$  ed il punto P descrive di conseguenza la circonferenza percorrendola in verso antiorario (vedi figura). Tale polarizzazione circolare si dirà *destrorsa*. Al contrario, se  $\phi = -\pi/2$ , si ha  $E_x(t') = A \sin(\omega t')$  e  $E_y(t') = A \cos(\omega t')$ , per cui  $\omega t'$  è l'angolo orario che il vettore  $\mathbf{E} = P-O$  forma con l'asse  $E_y$  ed il punto P descrive di conseguenza la circonferenza percorrendola in verso orario (vedi figura). Tale polarizzazione circolare si dirà *sinistrorsa*.

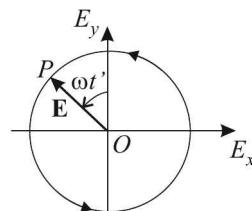
(ii) *Polarizzazione lineare.* Se l'ellisse di polarizzazione degenera in un segmento, l'onda si dirà linearmente polarizzata. Da un'esame della equazione (12) è facile convincersi che l'ellisse degenera in un segmento quando lo sfasamento  $\phi$  soddisfa la condizione  $\phi = 0$  oppure  $\phi = \pi$  (a meno di multipli di  $2\pi$ ). In tal caso, infatti, dalle equazioni (9) e (10) segue immediatamente, dopo aver diviso membro a membro le due equazioni, che:

$$\frac{E_y}{E_x} = \pm \frac{A_y}{A_x}, \quad (13)$$

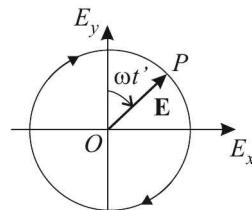
dove il segno positivo (negativo) si applica se  $\phi = 0$  ( $\phi = \pi$ ). L'equazione precedente è l'equazione di una retta passante per l'origine O e di coefficiente angolare  $\pm A_y/A_x$ .

In conclusione, possiamo dire che:

- 1) Lo stato di polarizzazione più generale di un'onda piana monocromatica è ellittico, cioè la traiettoria descritta dal vettore campo elettrico nel tempo in un piano trasversale alla direzione di propagazione è un ellise.
- 2) L'onda è polarizzata circolarmente se lo sfasamento relativo fra le due componenti cartesiane dell'onda,  $\phi = \phi_x - \phi_y$ , è pari a  $\pm\pi/2$  (a meno d multipli di  $2\pi$ ) e se le onde hanno la stessa ampiezza ( $A_x = A_y$ ). Il doppio segno per lo sfasamento comporta un diverso verso di percorrenza della circonferenza di polarizzazione da parte del vettore campo elettrico (polarizzazione circolare destrorsa e sinistrorsa).
- 3) L'onda è polarizzata linearmente quando lo sfasamento relativo  $\phi = \phi_x - \phi_y$  fra le due componenti dell'onda è nullo, a meno di multipli di  $\pi$ .



POLARIZZAZIONE CIRCOLARE  
DESTRORSA



POLARIZZAZIONE CIRCOLARE  
SINISTRORSA

Come osservazioni conclusive, vale la pena di osservare che l'analisi svolta è stata fatta assumendo un particolare piano trasversale alla direzione di polarizzazione dell'onda, precisamente il piano  $z = 0$ ; lo studente più accorto potrebbe porsi il problema se il particolare stato di polarizzazione dell'onda (e cioè il tipo di ellisse, ovvero la sua ellitticità e la sua inclinazione  $\beta$ , etc.) non varino nella propagazione, e cioè non dipendano dal particolare piano trasversale scelto. Cosa accadrebbe se, invece del piano  $z = 0$ , avessimo scelto un piano generico  $z = z_0$ ? La risposta è che lo stato di polarizzazione di un'onda non varia nella propagazione, e cioè non dipende dal piano scelto. Ci si può convincere di ciò osservando che il particolare stato di polarizzazione dell'onda dipende esclusivamente dalle ampiezze  $A_x, A_y$  delle due componenti cartesiane di campo e dalla loro *differenza di fase relativa*  $\phi = \phi_x - \phi_y$  [si veda la equazione (12)]. Se, dunque, anziché il piano  $z = 0$  avessimo scelto un piano generico  $z = z_0$ , l'analisi svolta resterebbe invariata pur di porre, nelle equazioni (9) e (10),  $t' = t + \phi_y/\omega - kz_0/\omega$  in luogo di  $t' = t + \phi_y/\omega$ . Tale proprietà (indipendenza dello stato di polarizzazione dell'onda nella propagazione) sussiste perché le due componenti cartesiane dell'onda,  $E_x(z, t)$  ed  $E_y(z, t)$ , si propagano con la medesima velocità  $c_0$ ; nel caso di propagazione delle onde in mezzi anisotropi (come nei cristalli birefringenti), che studieremo in un capitolo successivo, lo stato di polarizzazione della luce varierà invece nella propagazione. Come ultima osservazione, va detto che spesso, se si ha a che fare con onde elettromagnetiche come luce generata da sorgenti convenzionali (luce naturale), pur essendo talora soddisfatte in buona approssimazione le ipotesi di monocromaticità e di onda piana, lo stato di polarizzazione dell'onda è spesso non definito in maniera deterministica, e cioè l'ellisse di polarizzazione può statisticamente variare le sue proprietà a causa principalmente di fluttuazioni casuali delle fasi  $\phi_x$  e  $\phi_y$ . Lo studio della polarizzazione per tali onde è più complesso, perché richiede l'introduzione di parametri medi temporali (o medie statistiche d'insieme), ma ciò esula dagli scopi della nostra analisi.

### S.8.5.

E' noto dalla teoria che le equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di sorgenti ammettono soluzioni propagantesi con velocità  $c_0 = 1/(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$  ed aventi fronti d'onda piani (*onde piane*). Per un'onda monocromatica, assumendo l'asse  $z$  come direzione di propagazione dell'onda, si può scrivere:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y, \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y, \quad (1)$$

dove le componenti  $E_x, E_y$  e  $B_x, B_y$  dei campi elettrico e magnetico sono date da:

$$E_x(z, t) = A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \quad (2)$$

$$E_y(z, t) = A_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \quad (3)$$

$$B_x(z, t) = -\frac{1}{c_0} E_y(z, t) \quad (4)$$

$$B_y(z, t) = \frac{1}{c_0} E_x(z, t). \quad (5)$$

Nelle precedenti equazioni,  $\omega$  è la frequenza angolare dell'onda,  $k = \omega/c_0$  il numero d'onda,  $A_x$  ed  $A_y$  sono le ampiezze (reali) di oscillazione delle componenti dell'onda polarizzata nelle direzioni trasversali  $x$  ed  $y$ , e  $\phi_x, \phi_y$  le corrispondenti fasi. Lo studente può verificare, per sostituzione diretta, che tali espressioni sono effettivamente una soluzione delle

equazioni di Maxwell, qualunque siano i valori dei parametri  $\omega$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $\phi_x$  e  $\phi_y$ . Se introduciamo il vettore *complesso*  $\mathbf{E}_0$  così definito:

$$\mathbf{E}_0 = A_x \exp(i\phi_x) \mathbf{u}_x + A_y \exp(i\phi_y) \mathbf{u}_y, \quad (6)$$

è facile vedere che possiamo scrivere sinteticamente:

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - ikz) + c.c.], \quad (7)$$

dove *c.c.* indica il complesso coniugato del termine entro parentesi quadra. Infatti, se consideriamo le componenti cartesiane del vettore  $\mathbf{E}$  definito dalla equazione (7) e teniamo conto della posizione (6), otteniamo proprio le espressioni per le componenti cartesiane (2) e (3) del campo elettrico. Analogamente, è facile verificare (lo studente lo faccia per esercizio!) che si può scrivere, per il campo magnetico:

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{1}{c_0} \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}(z, t). \quad (8)$$

Si noti che il vettore ampiezza complessa  $\mathbf{E}_0$ , definito dall'equazione (6), soddisfa la condizione  $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{u}_z = 0$ , cioè è ortogonale alla direzione di propagazione (condizione di trasversalità del campo). Le equazioni (6), (7) e (8) definiscono la cosiddetta rappresentazione vettoriale esponenziale (o fasoriale) dell'onda piana monocromatica, che è molto utile soprattutto nello studio di problemi di riflessione o rifrazione. Osserviamo, in conclusione, che le espressioni (7) e (8) sono molto utili perché possono essere poste in forma *indipendente* dal sistema di riferimento (notazione intrinseca dell'onda elettromagnetica). Infatti, osservando che possiamo scrivere nel termine esponenziale  $kz = k\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{r}$ , dove  $\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$  è il vettore posizione, se indichiamo con  $\mathbf{n}$  una generica direzione di propagazione dell'onda rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale ed introduciamo il vettore d'onda  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  orientato, in direzione e verso, nella direzione di propagazione dell'onda, potremo scrivere con notazione intrinseca:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + c.c.] \quad (9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c_0} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (10)$$

con la condizione di trasversalità  $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ .

### S.8.6.

Prima di rispondere in maniera quantitativa e dettagliata al quesito dell'esercizio, è bene precisare ed inquadrare da un punto di vista fisico e fenomenologico il problema. Quando un'onda elettromagnetica incide sulla superficie di un metallo, essa penetra nel metallo per una piccola profondità, la cosiddetta lunghezza di penetrazione  $\delta$  (o di *skin depth*), ed induce sulla superficie del metallo una corrente superficiale oscillante nel tempo alla stessa frequenza dell'onda incidente. La teoria della propagazione delle onde nei metalli mostra che la lunghezza di penetrazione dipende dalla conducibilità  $\sigma$  del conduttore e dalla frequenza  $\omega$  dell'onda incidente secondo la relazione  $\delta = 1/(2\sigma\mu_0\omega)^{1/2}$ . Per un conduttore perfetto ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) la profondità di penetrazione tende a zero, e perciò si

può ritenere che nei punti interni al conduttore il campo elettromagnetico sia nullo. La corrente indotta sulla superficie metallica genera infatti un campo elettromagnetico che annulla quello dell'onda incidente nella regione interna del conduttore, mentre determina la nascita di un'onda riflessa nella regione di vuoto da cui proviene l'onda incidente. Se introduciamo un sistema di assi  $(x, y, z)$  come in figura, assumiamo che l'onda incidente si propaghi nella direzione dell'asse  $z$  ed incida sul metallo in  $z = 0$ , da un punto di vista formale il problema si pone nei seguenti termini: cercare una distribuzione di campo elettromagnetico ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ), soluzione delle equazioni di Maxwell, che si annulli per  $z > 0$  (cioè nei punti interni del conduttore perfetto) e che soddisfi alle condizioni al contorno (o di raccordo) dei campi sulla superficie del conduttore  $z = 0$ . Tenendo conto della linearità delle equazioni di Maxwell, possiamo cercare una soluzione di campo elettromagnetico che per  $z < 0$  sia esprimibile dalla sovrapposizione (cioè somma o interferenza) dell'onda piana incidente, linearmente polarizzata nella direzione  $x$  di frequenza  $\omega$ , con un'onda riflessa contropropagantesi, di eguale frequenza e stato di polarizzazione. Con riferimento alla figura e tenendo debitamente in conto degli orientamenti e delle relazioni fra campo elettrico e magnetico nelle onde piane, poniamo tentativamente:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{1}{2} [E_i \exp(i\omega t - ikz) + E_r \exp(i\omega t + ikz) + c.c.] \mathbf{u}_x & z < 0 \\ 0 & z > 0 \end{cases} \quad (1)$$

per il campo elettrico  $\mathbf{E}$ , di conseguenza (si veda la figura):

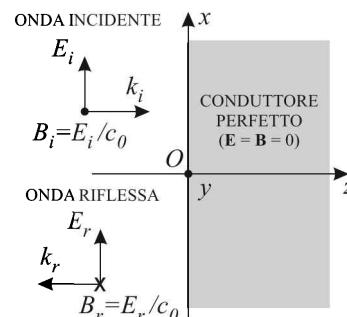
$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{E_i}{c_0} \exp(i\omega t - ikz) - \frac{E_r}{c_0} \exp(i\omega t + ikz) + c.c. \right] \mathbf{u}_y & z < 0 \\ 0 & z > 0 \end{cases} \quad (2)$$

per il campo magnetico. Nelle precedenti equazioni,  $E_i$  ed  $E_r$  sono le ampiezze complesse dell'onda incidente e di quella riflessa, rispettivamente,  $k = \omega/c_0$ , e *c.c.* indica il complesso coniugato dei termini scritti entro le parentesi (nei problemi di riflessione e rifrazione delle onde è utile infatti utilizzare la notazione complessa, o fasoriale, per le onde piane mono cromatiche). Si noti che, mentre l'ampiezza dell'onda incidente è nota ( $E_i = E_0$ ), quella dell'onda riflessa,  $E_r$ , così come la densità superficiale di corrente  $\mathbf{J}$  indotta sulla superficie del conduttore, sono incognite. Tali grandezze si determinano imponendo che siano soddisfatte le condizioni al contorno del campo elettromagnetico alla discontinuità  $z = 0$ . In particolare, richiedendo la continuità di  $E_x$  (componente tangente del campo elettrico alla discontinuità) per  $z = 0$ , e cioè, che è lo stesso, che l'equazione:

$$E_x(z = 0^-, t) = E_x(z = 0^+, t) = 0 \quad (3)$$

sia soddisfatta in ogni istante di tempo  $t$ , si ottiene facilmente dall'equazione (1) per  $E_r$  l'espressione:

$$E_r = -E_i = -E_0. \quad (4)$$



Il segno negativo in questa equazione indica che, istante per istante, il campo elettrico dell'onda rilessa sulla superficie del conduttore  $z = 0$  è uguale ed opposto a quello dell'onda incidente. La discontinuità di  $B_y$  (componente tangente del campo magnetico) alla superficie  $z = 0$  consente di calcolare quindi le correnti presenti sulla superficie del conduttore e che scorrono nella direzione dell'asse  $x$ ; precisamente la densità lineare di corrente vale:

$$J_x = \frac{1}{\mu_0} [B_y(z = 0^-, t) - B_y(z = 0^+, t)] \quad (5)$$

che, utilizzando le equazioni (2) e (4), diventa:

$$J_x = \frac{E_0}{\mu_0 c_0} \exp(i\omega t) + c.c. = \frac{2E_0}{\mu_0 c_0} \cos(\omega t), \quad (6)$$

dove, senza ledere di generalità, si è assunto  $E_0$  reale. Discutiamo infine le proprietà del campo elettromagnetico che si viene a creare nella regione  $z < 0$  dalla sovrapposizione (interferenza) dell'onda incidente (progressiva) e di quella riflessa (regressiva). Tenendo conto delle equazioni (1) e (4), il campo elettrico per  $z < 0$  è dato da:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \frac{E_0}{2} [\exp(i\omega t - ikz) - \exp(i\omega t + ikz) + c.c.] \mathbf{u}_x = \\ &= E_0 [-i \sin(kz) \exp(i\omega t) + c.c.] \mathbf{u}_x = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \mathbf{u}_x. \end{aligned} \quad (7)$$

L'equazione precedente mostra che il campo elettrico per  $z < 0$  descrive un'*onda stazionaria*, con i nodi (zeri) di campo elettrico nei piani  $z = z_n = n\pi/k = n(\lambda/2)$  ( $n = 0, -1, -2, -3, \dots$ ), cioè spaziati della semilunghezza d'onda  $\lambda/2$ . Il piano conduttore ( $z = 0$ ) è un piano nodale di campo, in accordo con le condizioni di raccordo di campo all'interfaccia vuoto-conduttore. Come osservazione finale, diciamo che il risultato ottenuto persiste rimuovendo l'ipotesi che l'onda incidente sia linearmente polarizzata, e cioè vale per uno stato di polarizzazione arbitrario (ellittico) dell'onda incidente. La riflessione di un'onda da una superficie metallica conduttrice rappresenta un semplice metodo per ottenere un'onda stazionaria. L'utilizzo di due piani conduttori paralleli affacciati è altresì un metodo efficace ed usato per confinare il campo elettromagnetico in una regione limitata dello spazio (risonatori a microonde); l'onda che si crea nella regione fra i due piani metallici è una onda stazionaria. Questo caso sarà trattato nel problema successivo.

### S.8.7.

Introduciamo un asse  $z$  ortogonale ai due piani conduttori, infiniti e paralleli, ed indichiamo con  $z = 0$  e  $z = L$  le posizioni di detti piani rispetto a tale asse, essendo  $L$  la distanza fra gli specchi (vedi figura). Per il calcolo delle distribuzioni di campo elettromagnetico (onde piane) che possono essere sostenute fra i due conduttori metallici, e cioè per  $0 < z < L$ , procediamo come nel problema precedente, cercando una soluzione di campo elettromagnetico che nella regione di vuoto fra i due conduttori sia esprimibile dalla sovrapposizione di due onde piane monocromatiche, di uguale frequenza  $\omega$  e polarizzate nel medesimo modo (ad esempio lineramente nella direzione  $x$ ). Poniamo così, per  $0 < z < L$ ,

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} [E_+ \exp(i\omega t - ikz) + E_- \exp(i\omega t + ikz) + c.c.] \mathbf{u}_x, \quad (1)$$

dove  $E_+$  ed  $E_-$  sono le ampiezze complesse delle due onde piane progressiva e regressiva, rispettivamente, e  $k = \omega/c_0$  è il numero d'onda. L'espressione del campo magnetico

si ottiene poi facilmente come sovrapposizione dei campi magnetici associati a ciascuna delle due onde interferenti (lasciamo per esercizio allo studente di scrivere esplicitamente l'espressione corrispondente del campo magnetico dell'onda nella regione  $0 < z < L$ ). Per quanto concerne il campo elettrico, le condizioni al contorno da soddisfare ai piani  $z = 0$  e  $z = L$  sono la continuità delle componenti tangenti del campo, e cioè (dato che entro i due conduttori il campo è nullo), deve avversi  $E_x(z = 0^+, t) = E_x(z = L^-, t) = 0$ , il che per l'equazione (1) implica:

$$E_+ + E_- = 0 \quad (2)$$

$$E_+ \exp(-ikL) + E_- \exp(ikL) = 0 \quad (3)$$

Le equazioni precedenti costituiscono due equazioni lineari *omogenee* nelle due incognite  $E_+$  ed  $E_-$ . Affinchè tale sistema ammetta soluzioni non nulle, e cioè che fra i due specchi sussista una distribuzione di campo elettromagnetico non nulla, il determinante del sistema deve annullarsi, e cioè:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \exp(-ikL) & \exp(ikL) \end{vmatrix} = 2i \sin(kL) = 0. \quad (4)$$

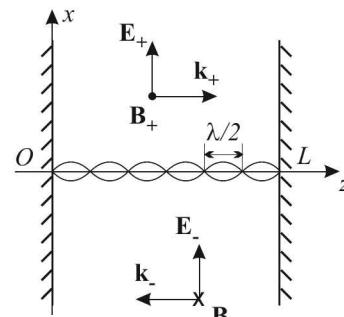
Tale condizione è soddisfatta se il numero d'onda  $k$  è multiplo intero di  $\pi/L$ , e cioè, in termini di lunghezza d'onda  $\lambda$  o di frequenza  $\omega$ , se:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad \omega = n \frac{\pi c_0}{L}, \quad (5)$$

dove  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Dunque solo per una successione discreta di frequenze, dette *frequenze di risonanza* ed equispaziate di  $\pi c_0/L$ , esistono delle distribuzioni di campo elettromagnetico che possono consistentemente sussistere fra i due piani conduttori, dette *modi risonanti*. Tali modi sono in pratica rappresentati da onde stazionarie (si veda la discussione dell'esercizio precedente) che hanno due piani nodali in corrispondenza dei due piani metallici (vedi figura). Si noti che, poichè in un'onda stazionaria i piani nodali sono separati di  $\lambda/2$  (si veda l'esercizio precedente), la condizione sulle frequenze di risonanza dell'onda, espressa dalla prima delle equazioni (5), è significativa e semplice: essa ci dice che le lunghezze d'onda consentite sono tali che la distanza  $L$  fra i due piani conduttori risulti un multiplo intero di  $\lambda/2$ . Questa è infatti la condizione necessaria e sufficiente affinchè i due piani conduttori siano piani nodali dell'onda stazionaria. Al variare dell'indice  $n$ , varia il numero di piani nodali compresi fra i due conduttori.

### S.8.8.

Nel caso in cui fra i due piani metallici vi sia un materiale dielettrico, di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ , anzichè il vuoto, l'analisi svolta per il problema precedente si può estendere al presente caso, pur di assumere per il numero d'onda  $k$  l'espressione  $k = \omega\sqrt{\epsilon_r}/c_0$ , dove  $c_0$  è la velocità della luce nel vuoto. La condizione che fornisce le frequenze di risonanza, e



cioè  $\sin(kL) = 0$ , implica perciò nella situazione presente:

$$\omega = \frac{kc_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = n \frac{\pi c_0}{\sqrt{\epsilon_r} L}. \quad (1)$$

### S.8.9.

Il teorema di Poynting esprime essenzialmente la conservazione dell'energia per un sistema di cariche e correnti in interazione col campo elettromagnetico.

Per derivare la forma differenziale del teorema di Poynting, si consideri una distribuzione continua di cariche e correnti, e sia  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  il campo elettromagnetico generato da tale distribuzione. Dalla espressione della forza di Lorentz, è facile vedere che, se  $\mathbf{J}$  è la densità di corrente, il prodotto scalare:

$$\varphi_m = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (1)$$

rappresenta la densità di potenza sviluppata dalla forza di Lorentz sulle cariche in movimento, e cioè  $\varphi_m \Delta t \Delta \tau$  è il lavoro compiuto dalla forza di Lorentz agente sulle cariche presenti nel volumetto  $\Delta \tau$  nel tempuscolo  $\Delta t$ . Mediante il teorema di Ampère-Mawxell (quarta equazione di Maxwell), è possibile esprimere la densità di potenza  $\varphi_m$  in funzione dei soli campi. Infatti, poichè:

$$\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2)$$

si ha:

$$\varphi_m = \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3)$$

Utilizzando l'identità vettoriale:

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (4)$$

ed essendo, per la legge dell'induzione elettromagnetica:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

l'equazione (3) assume la forma:

$$\varphi_m = - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (6)$$

Se assumiamo che il mezzo in cui vi sono le cariche e le correnti sia lineare (e cioè che le relazioni materiali fra  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{E}$ , e fra  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{H}$ , siano lineari), si ha:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) \quad (7)$$

e

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) \quad (8)$$

per cui l'equazione (6) assume la forma finale:

$$\varphi_m = - \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div} \mathbf{S} \quad (9)$$

dove si è posto:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (10)$$

a definizione della densità di energia del campo elettromagnetico, e

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (11)$$

a definizione del vettore di Poynting. L'equazione (9) esprime la cosiddetta forma differenziale (o locale) del teorema di Poynting. Per comprendere il significato fisico di questo teorema, conviene integrare entrambi i membri dell'equazione (9) in un volume  $\tau$  dello spazio, delimitato da una superficie  $S$ , per cui:

$$\int_{\tau} \varphi_m d\tau = -\frac{d}{dt} \int_{\tau} u d\tau - \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{S} d\tau. \quad (12)$$

L'integrale di volume a secondo membro dell'equazione precedente può trasformarsi in un integrale di superficie applicando il teorema della divergenza; si ottiene con ciò:

$$\int_{\tau} \varphi_m d\tau = -\frac{d}{dt} \int_{\tau} u d\tau - \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (13)$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale uscente alla superficie  $S$ . L'equazione (13) rappresenta la forma integrale del teorema di Poynting. Si osservi che l'integrale di volume a primo membro rappresenta la potenza meccanica sviluppata dalla forza di Lorentz agente sulle cariche contenute nel volume  $\tau$ , mentre il primo integrale a secondo membro rappresenta la diminuzione, nell'unità di tempo, dell'energia del campo elettromagnetico,  $\int_{\tau} u d\tau$ , localizzata entro il volume  $\tau$ , derivata in condizioni quasi-stazionarie. Se le correnti  $\mathbf{J}$  sono correnti di conduzione, il termine:

$$\int_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\tau \quad (14)$$

rappresenterà la potenza dissipata in calore per effetto Joule, mentre se le correnti  $\mathbf{J}$  sono correnti di convezione, tale termine rappresenterà la variazione dell'energia cinetica (nell'unità di tempo) delle cariche in moto contenute entro il volume  $\tau$ . Per comprendere il significato dell'integrale di superficie nell'equazione (13), si consideri un volume  $\tau$  dello spazio nel quale non vi siano, al suo interno, cariche elettriche, per cui l'equazione (13) si riduce a:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} u d\tau + \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (15)$$

L'equazione (15) ha la tipica forma di una equazione di continuità ed esprime quindi un principio di conservazione. In particolare essa si può interpretare dicendo che se entro il volume  $\tau$  diminuisce l'energia del campo elettromagnetico, questa è fuoriuscita dal volume attraverso la superficie  $S$ . Il termine  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS$  si può dunque interpretare come il flusso elementare di energia raggiante di campo elettromagnetico che attraversa la superficie  $dS$ , di normale  $\mathbf{n}$ , nell'unità di tempo. In conclusione, l'equazione (13) (teorema di Poynting) afferma che la diminuzione nell'unità di tempo dell'energia del campo elettromagnetico contenuta in volume  $\tau$  và, in parte, in potenza dissipata per effetto Joule dalle correnti (oppure in variazione di energia cinetica delle cariche) e, per il resto, corrisponde all'energia raggiante (cioè propagativa) fuoriuscita dal volume attraverso la superficie  $S$ .

L'intensità  $I$  di un'onda elettromagnetica è definita come l'energia del campo elettromagnetico che attraversa un suo fronte d'onda nell'unità di superficie e di tempo.  $I$  è perciò uguale al modulo del vettore di Poynting. Per un'onda piana che si propaga nel vuoto nella direzione dell'asse  $z$  si ha:

$$I = |\mathbf{S}| = \frac{EB}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2, \quad (16)$$

dove si è utilizzato il fatto che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono tra loro perpendicolari, e che  $B = E/c_0$ . Se poi l'onda è armonica

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (17)$$

ed osservando che il valor medio temporale vale:

$$\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}, \quad (18)$$

l'intensità media di un'onda armonica assume l'espressione:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2. \quad (19)$$

### S.8.10.

A partire dalle equazioni di Maxwell è noto che è possibile associare al campo elettromagnetico, descritto dai vettori campo elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$  e dai vettori spostamento dielettrico  $\mathbf{D}$  e magnetico  $\mathbf{H}$ , una densità di energia  $u$  e di quantità di moto  $\mathbf{g}$ , ed un flusso di energia raggiante, descritto dal vettore di Poynting  $\mathbf{S}$ ; tali quantità si introducono proprio allo scopo di estendere i noti principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto, validi per sistemi dinamici con forze conservative, al caso di sistemi di particelle elettricamente cariche. Le espressioni generali di tali grandezze sono:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (3)$$

In un mezzo elettricamente e magneticamente normale, la relazione materiale che lega i campi  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{H}$  ad  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  è semplicemente una legge di proporzionalità, e cioè  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , dove  $\epsilon$  e  $\mu$  sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del mezzo materiale. Inoltre, per un'onda piana monocromatica di frequenza  $\omega$  che si propaga nella direzione individuata dal versore  $\mathbf{n}$ , si ha:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - ik \cdot \mathbf{r}) + c.c.] \quad (4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione,  $\mathbf{k} = kn$  il vettore d'onda,  $k = \omega/c$  il numero d'onda nel mezzo,  $c = 1/(\epsilon\mu)^{1/2}$  la velocità della luce nel mezzo, ed  $\mathbf{E}_0$  è un vettore complesso, ortogonale a  $\mathbf{n}$ , che definisce l'ampiezza complessa del campo elettrico (si veda, per la definizione e le

proprietà dell'ampiezza complessa vettoriale, il problema P5). Le espressioni della densità di energia, densità di quantità di moto e vettore di Poynting assumono dunque la forma:

$$u = \frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \epsilon E^2 \quad (6)$$

$$\mathbf{g} = \epsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon}{c} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \frac{\epsilon E^2}{c} \mathbf{n} = \frac{u}{c} \mathbf{n} \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu c} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \frac{E^2}{\mu c} \mathbf{n} = (cu) \mathbf{n}, \quad (8)$$

per cui sussistono le seguenti relazioni fondamentali fra tali grandezze:

$$\mathbf{g} = \frac{u}{c} \mathbf{n} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (9)$$

Poichè l'intensità  $I$  dell'onda elettromagnetica è, per definizione, il modulo del vettore di Poynting, dalla equazione (8) segue dunque la seguente relazione fondamentale fra l'intensità e la densità di energia in un'onda elettromagnetica:

$$I = |\mathbf{S}| = cu. \quad (10)$$

Per concludere, calcoliamo esplicitamente l'espressione della densità di energia  $u$  in termini della ampiezza vettoriale complessa  $\mathbf{E}_0$  dell'onda piana. Sostituendo l'equazione (4) nella (6) ed osservando che  $E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ , si ottiene:

$$u = \frac{\epsilon}{4} [\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* + \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \exp(2i\omega t - 2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + c.c.]. \quad (11)$$

Si osservi che nella equazione precedente compare, oltre ad un termine costante, anche un termine rapidamente oscillante nel tempo. Spesso si è interessati a quantità medie nel tempo (si veda, ad esempio, il problema P1). Osservando che il valor medio temporale del termine esponenziale che compare nella equazione (11) si annulla [cioè  $\langle \exp(2i\omega t - 2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rangle = 0$ ] e posto  $\mathbf{E}_0 = A_x \exp(i\phi_x) \mathbf{u}_x + A_y \exp(i\phi_y) \mathbf{u}_y$  (si veda il problema P5), possiamo scrivere:

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = \frac{\epsilon}{2} (A_x^2 + A_y^2). \quad (12)$$

L'intensità media dell'onda è poi data da  $\langle I \rangle = c \langle u \rangle = (cc/2)(A_x^2 + A_y^2)$ .

### S.8.11.

Il quesito del problema riguarda il calcolo della forza per unità di superficie che un'onda piana monocromatica esercita quando incide normalmente sulla superficie di un conduttore perfetto (pressione di radiazione). Il problema della riflessione di un'onda piana da un conduttore perfetto è stato studiato in dettaglio nel problema P6, a cui rimandiamo lo studente prima dello svolgimento di questo problema. Per comprendere anzitutto da un punto di vista fisico la circostanza, probabilmente inusuale allo studente, che un'onda elettromagnetica eserciti una forza quando incide sulla superficie del conduttore, possiamo avanzare due argomentazioni, che anzi ci indicheranno due possibili procedimenti per la soluzione del problema. Anzitutto, seguendo lo svolgimento del problema P6, abbiamo visto che l'onda incidente induce sulla superficie del conduttore una corrente, che rende

conto della esistenza dell'onda riflessa e consente di annullare il campo elettromagnetico internamente al conduttore. La pressione di radiazione non è allora altro che la forza magnetica (per unità di superficie) che viene esercitata sulla superficie conduttrice, percorsa da corrente, a causa del campo magnetico dell'onda. La pressione di radiazione è quindi dovuta, microscopicamente, alla forza magnetica agente sui portatori di carica in moto sulla superficie del conduttore. Un altro modo per comprendere l'esistenza della pressione di radiazione è di ricordarsi che un'onda elettromagnetica trasporta una densità di quantità di moto  $g$ , e che la riflessione dell'onda comporta una variazione della densità di quantità di moto. In accordo col teorema dell'impulso, l'onda deve quindi esercitare sulla parete una pressione, esattamente come un gas di atomi che incide su una superficie esercita su di essa una pressione. Questa visione è specialmente efficace se si pensa all'onda elettromagnetica come costituita da uno sciamo di 'corpuscoli'. In effetti la teoria quantistica del campo elettromagnetico rende conto in certo senso di questa interpretazione introducendo il concetto di fotone, e mostra che l'energia e la quantità di moto trasportata dall'onda sono quantizzate. Ciò premesso, veniamo allo svolgimento del problema. Ricordiamo dalla teoria che su un'areola percorsa da una corrente superficiale di densità  $\mathbf{J}$  posta in un campo magnetico si esercita una pressione  $\mathbf{p}$  (forza per unità di superficie) data da:

$$\mathbf{p} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}', \quad (1)$$

dove il campo magnetico  $\mathbf{B}'$  che interviene nel calcolo della forza è il valor medio dei campi magnetici a sinistra ed a destra della discontinuità. Si osservi, infatti, che a causa della presenza della corrente superficiale, il campo magnetico *non è definito sui* punti della superficie, ma solo in vicinanza (a sinistra ed a destra) di essa, e che nel calcolo della forza magnetica agente su un'areola  $\Delta S$  sede di correnti superficiali (o, in problemi analoghi di elettrostatica, della forza elettrica agente su cariche elettriche superficiali) il campo da considerare *non deve comprendere* il campo generato dalle correnti stesse presenti su  $\Delta S$  (o dalle cariche stesse, nel caso della forza elettrica). Si può allora mostrare in maniera del tutto generale, utilizzando il principio di sovrapposizione, che il campo di interazione  $\mathbf{B}'$  è proprio dato dalla media aritmetica dei due campi che esistono in prossimità della discontinuità (si veda, ad esempio: M. Bertolaccini, S. Cova, E. Gatti, *Fondamenti di Elettromagnetismo*, vol. II, CLUP edizioni, cap. 10, pag. 7). Con riferimento alla soluzione del problema P6, abbiamo nel caso dell'onda piana monocromatica incidente normalmente sulla superficie del conduttore [si vedano le equazioni (2) e (6) di S6]:

$$\mathbf{J} = \frac{2E_0}{\mu_0 c_0} \cos(\omega t) \mathbf{u}_x \quad (2)$$

$$\mathbf{B}' = \frac{B_y(z=0^+, t) + B_y(z=0^-, t)}{2} \mathbf{u}_y = \frac{E_0}{c_0} \cos(\omega t) \mathbf{u}_y, \quad (3)$$

per cui la pressione di radiazione vale:

$$\mathbf{p} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}' = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c_0^2} \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \mathbf{u}_z. \quad (4)$$

La pressione media (nel tempo) esercitata dall'onda sulla superficie è quindi [ricordando che  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$ ]:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \mathbf{u}_z. \quad (5)$$

Si noti che risulta  $\langle p \rangle = 2\langle u \rangle$ , dove  $\langle u \rangle = (1/2)\epsilon_0 E_0^2$  è la densità dell'energia elettromagnetica (mediata nel tempo). Tale risultato è consistente col fatto che l'onda incidente trasporta una densità di quantità di moto  $\mathbf{g} = (u/c_0)\mathbf{u}_z$ , e che essa è completamente riflessa dalla superficie del conduttore. La variazione di quantità di moto nel tempuscolo  $\Delta t$  in un'areola  $\Delta S$  del fronte d'onda è pari, in modulo, a  $2g(\Delta S c_0 \Delta t) = 2u\Delta S \Delta t$ , essendo  $c_0 \Delta t$  l'avanzamento del fronte d'onda nel tempuscolo  $\Delta t$  e  $\Delta S c_0 \Delta t$  il volume del cilindro di base  $\Delta S$  ed altezza  $c_0 \Delta t$ . Per il teorema dell'impulso, tale variazione deve egualare, in media, l'impulso della forza di pressione media che l'onda esercita sull'areola  $\Delta S$  di superficie riflettente, e cioè deve essere:

$$2\langle u \rangle \Delta S \Delta t = \langle p \rangle \Delta S \Delta t, \quad (6)$$

da cui il risultato atteso  $\langle p \rangle = 2\langle u \rangle$ .

### S.8.12.

(i) Consideriamo un'onda piana che incide su una superficie piana perfettamente riflettente ad un angolo di incidenza  $\theta$ , e sia  $\langle u \rangle$  la densità di energia (media) trasportata dall'onda.

Se introduciamo un sistema di assi cartesiani  $(x, y, z)$  come in figura, il versore che individua la direzione di propagazione dell'onda incidente è evidentemente  $\mathbf{n}_i = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ . La riflessione dà origine ad un'onda riflessa che, per la legge di Snell della riflessione (si veda, in proposito, il problema P19 di questo capitolo) si propaga in una direzione individuata dal versore  $\mathbf{n}_r = (\sin \theta, 0, -\cos \theta)$ , come mostrato in figura. Per il calcolo della pressione di radiazione esercitata dall'onda incidente sulla parete, è conveniente calcolare la variazione della quantità di moto subita dall'onda nel processo di riflessione ed applicare il teorema dell'impulso, seguendo cioè il procedimento descritto al termine della soluzione del precedente problema. Per questo, fissata l'attenzione su una areola  $\Delta S$  della parete, dato che l'onda si propaga con velocità  $c_0$ , in un tempuscolo  $\Delta t$  il 'volume' dell'onda elettromagnetica incidente che subisce riflessione dall'areola  $\Delta S$  è quello contenuto nel cilindro obliqua di base  $\Delta S$  ed altezza (obliqua)  $c_0 \Delta t$ , come mostrato in figura. Poiché l'onda incidente trasporta una quantità di moto con densità  $\mathbf{g}_i = (\langle u \rangle / c_0) \mathbf{n}_i$  ed il volume del cilindro di figura è manifestamente  $\Delta \tau = \Delta S \Delta t c_0 \cos \theta$ , la quantità di moto dell'onda contenuta nel volume  $\Delta \tau$  vale:

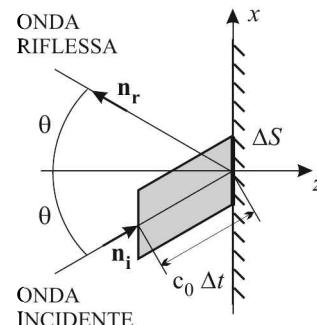
$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{g}_i \Delta \tau = \langle u \rangle \cos \theta \Delta S \Delta t \mathbf{n}_i. \quad (1)$$

Il processo di riflessione varia la quantità di moto poiché varia la direzione di propagazione dell'onda riflessa; dopo la riflessione, la quantità di moto associata al volume  $\Delta \tau$  è infatti data da:

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{g}_r \Delta \tau = \langle u \rangle \cos \theta \Delta S \Delta t \mathbf{n}_r, \quad (2)$$

dove  $\mathbf{g}_r = (\langle u \rangle / c_0) \mathbf{n}_r$  è la densità di quantità di moto dell'onda riflessa. La variazione di quantità di moto nel è dunque:

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_r - \mathbf{Q}_i = -2\langle u \rangle \Delta S \Delta t \cos^2 \theta \mathbf{u}_z. \quad (3)$$



Si noti che la riflessione varia la quantità di moto dell'onda solo nella direzione  $z$  ortogonale alla superficie riflettente, e che quindi la forza che la radiazione esercita sulla parete è diretta ortogonalmente a questa. Se indichiamo con  $\langle p \rangle$  la pressione (media) di radiazione, per il teorema dell'impulso possiamo scrivere:

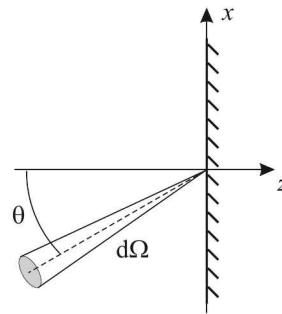
$$\langle p \rangle \Delta S \Delta t = 2\langle u \rangle \Delta S \Delta t \cos^2 \theta, \quad (4)$$

da cui:

$$\langle p \rangle = 2\langle u \rangle \cos^2 \theta. \quad (5)$$

(ii) Supponiamo ora che la radiazione incidente sulla superficie riflettente sia costituita dalla sovrapposizione (interferenza) di onde piane la cui direzione di propagazione è isotropicamente distribuita nello spazio.

Se introduciamo un sistema di coordinate polari con asse polare coincidente con l'asse  $-z$ , preso un angolo solido  $d\Omega$  che forma con l'asse  $-z$  un angolo  $\theta$  (vedi figura), la isotropia della radiazione significa che la probabilità che l'onda piana, di cui essa è composta, si propaghi con un vettore d'onda interno all'angolo solido  $d\Omega$  è proporzionale a  $d\Omega/2\pi$ , dove  $2\pi$  è l'angolo solido sotteso dal semispazio  $z < 0$ . Tenendo conto del risultato espresso dalla equazione (5) per la pressione di radiazione  $\langle p \rangle(\theta)$  di un'onda piana incidente ad un angolo  $\theta$ , potremo calcolare la pressione di radiazione nel caso di radiazione isotropa come valor medio d'insieme (statistico) di  $\langle p \rangle(\theta)$ , e cioè:



$$\overline{\langle p \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{semispazio } z<0} \langle p \rangle d\Omega, \quad (6)$$

dove la sopralineatura indica una media statistica. Tenendo conto della equazione (5) e che, in coordinate polari, l'elemento di angolo solido vale  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ , si avrà:

$$\overline{\langle p \rangle} = \frac{\langle u \rangle}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \sin \theta = 2\langle u \rangle \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \langle u \rangle. \quad (7)$$

### S.8.13.

Rispetto al problema precedente, l'incidenza dell'onda su una parete perfettamente assorbente comporta l'assenza dell'onda riflessa. Perciò, nel calcolo della variazione di quantità di moto dell'onda, sarà ora nulla la quantità di moto dell'onda riflessa e quindi, in luogo della equazione (3) del problema precedente, si avrà ora:

$$\Delta \mathbf{Q} = -\mathbf{Q}_i = -\langle u \rangle \Delta S \Delta t \cos^2 \theta \mathbf{u}_z. \quad (1)$$

Poichè la variazione di quantità di moto è ora dimezzata rispetto al caso di superficie perfettamente riflettente, per il teorema dell'impulso potremo concludere che anche la pressione  $\langle p \rangle$  sarà dimezzata. In particolare, per radiazione incidente ad un angolo  $\theta$  avremo:

$$\langle p \rangle = \langle u \rangle \cos^2 \theta, \quad (2)$$

mentre per radiazione isotropa si avrà:

$$\overline{\langle p \rangle} = \frac{1}{3} \langle u \rangle. \quad (3)$$

### S.8.14.

Indichiamo con  $Q = Q(t)$  la carica elettrica presente sull'armatura superiore del condensatore al tempo  $t$ , e quindi  $-Q$  la carica presente sull'armatura inferiore. Se  $I = I(t)$  è la corrente di carica del condensatore (vedi figura), per l'equazione di continuità possiamo scrivere:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (1)$$

e quindi, assumendo la carica sul condensatore nulla al tempo iniziale  $t = 0$ ,  $Q(t) = \int_0^t I(t') dt' = I_0 t$ . Per calcolare il flusso del vettore di Poynting uscente dalla superficie laterale del condensatore, occorre anzitutto determinare il campo elettromagnetico ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) che si stabilisce entro il condensatore durante la carica. Tale campo si ottiene risolvendo le equazioni di Maxwell con le condizioni al contorno che la carica elettrica sulla armatura superiore sia  $Q$  e su quella inferiore  $-Q$ . Ora, se il campo elettrico fosse irrotazionale (elettrostatico), sappiamo bene dalla teoria elettrostatica dei condensatori piani che, trascurando effetti di bordo, esso assumerebbe l'espressione:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \mathbf{u}_x = \frac{I_0 t}{A\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad (2)$$

dove  $A = \pi a^2$  è l'area delle armature circolari e  $\mathbf{u}_x$  il versore dell'asse  $x$  di figura. Dalla terza equazione di Maxwell,  $\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , sappiamo tuttavia che tale espressione è esatta se il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è stazionario, cioè non varia nel tempo, o comunque se esso varia lentamente nel tempo in modo da poter trascurare il termine  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  nella terza equazione di Maxwell (approssimazione di campo lentamente variabile). In tal caso, il campo magnetico entro le armature del condensatore può essere calcolato utilizzando la seconda e quarta equazione di Maxwell, e cioè:

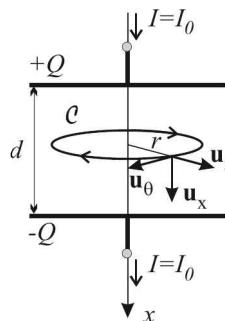
$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

Usando le equazioni (1) e (2), l'equazione (4) assume la forma:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{A} \mathbf{u}_x. \quad (5)$$

Se fissiamo la nostra attenzione sulle equazioni (3) e (5), riconosciamo che il campo magnetico è quello generato da una distribuzione di correnti (di spostamento) uniforme



dirette lungo l'asse  $x$ . Per la simmetria del problema, le linee di forza di  $\mathbf{B}$  saranno quindi circonferenze, con centro sull'asse  $x$  di simmetria del condensatore; se indichiamo con  $\mathcal{C}$  una tale generica circonferenza di raggio  $r$ , orientata in modo concorde col verso di orientazione di  $x$  (vedi figura), e con  $\mathbf{u}_\theta$  il suo versore tangente, avremo  $\mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{u}_\theta$ ; applicando la forma integrale dell'equazione (4) alla circonferenza  $\mathcal{C}$ , e cioè:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_x dS \quad (6)$$

(dove  $S$  è la superficie del cerchio di perimetro  $\mathcal{C}$ ), avremo:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{A} \int_S \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x dS \quad (7)$$

e cioè:

$$2\pi r B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{A} \pi r^2 = \mu_0 I \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad (8)$$

da cui:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}. \quad (9)$$

Si noti che, poichè nel presente problema  $I = I_0$  è costante, il campo magnetico  $\mathbf{B}$  ottenuto è effettivamente stazionario, e dunque la soluzione di campo elettromagnetico ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ), data dalle equazioni (2) e (9) è esatta. Il vettore di Poynting è dunque dato da:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 \pi \epsilon_0 a^2} \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2} \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_\theta = -\frac{I_0^2 r t}{2\pi^2 \epsilon_0 a^4} \mathbf{u}_r, \quad (10)$$

dove  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_x$  è il versore radiale (uscente) mostrato in figura. Si noti che le linee di forza del vettore di Poynting sono radiali ed entranti nel condensatore; inoltre il modulo del vettore di Poynting cresce linearmente con la distanza radiale  $r$  dall'asse  $x$  del condensatore. Il flusso del vettore di Poynting uscente dalla superficie cilindrica esterna  $\Sigma$ , di raggio  $r = a$ , del condensatore vale dunque:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_r d\Sigma = -2\pi a d \frac{I_0^2 a t}{2\pi^2 a^4 \epsilon_0} = -\frac{I_0^2 t d}{\pi a^2 \epsilon_0}. \quad (11)$$

Il segno negativo nella precedenza equazione indica che, di fatto, il flusso del vettore di Poynting è *entrante nel condensatore*. E' interessante confrontare tale flusso con la variazione, nell'unità di tempo, dell'energia elettrica  $\mathcal{U}_e$  immagazzinata nel condensatore. Questa è infatti data dal prodotto della densità di energia elettrica,  $(\epsilon_0/2)E^2$ , per il volume  $\tau$  del condensatore, e cioè:

$$\mathcal{U}_e = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{I_0^2 t^2}{A^2 \epsilon_0^2} A d = \frac{I_0^2 t^2 d}{2\epsilon_0 \pi a^2}, \quad (12)$$

dove abbiamo usato l'espressione (2) per il campo elettrico. Si osservi che, se deriviamo l'espressione di  $\mathcal{U}_e$  così ottenuta rispetto al tempo e confrontiamo il risultato con l'equazione (11), possiamo scrivere:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_r d\Sigma + \frac{d\mathcal{U}_e}{dt} = 0. \quad (13)$$

Tale risultato non esprime altro che la conservazione dell'energia, e cioè il teorema di Poynting: il flusso entrante del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del condensatore uguaglia l'incremento, nell'unità di tempo, dell'energia elettrica immagazzinata nel condensatore. Si noti, per concludere, che il campo magnetico è stazionario, per cui nella carica del condensatore non varia l'energia magnetica immagazzinata in esso.

### S.8.15.

Poichè il conduttore è filiforme, la corrente  $I$  che scorre nel cilindro si distribuirà uniformemente nella sua sezione e potremo così scrivere, per la densità di corrente  $\mathbf{J}$ ,

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S} \mathbf{u}_x, \quad (1)$$

dove  $S = \pi a^2$  è la sezione del conduttore e  $\mathbf{u}_x$  il versore diretto lungo l'asse  $x$  del conduttore filiforme (vedi figura). Il campo elettrico presente internamente al conduttore si ricava quindi dalla legge di Ohm in forma locale, e vale:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\mathfrak{g}} = \frac{I}{\mathfrak{g}S} \mathbf{u}_x. \quad (2)$$

Il calcolo del campo magnetico presente nei punti interni al cilindro conduttore (cioè per  $r < a$ , essendo  $r$  la distanza radiale dall'asse  $x$  del conduttore cilindrico) può essere svolto agevolmente applicando il teorema di Ampère (siamo in condizioni stazionarie!) in forma integrale tenendo conto che, per la simmetria cilindrica, il campo magnetico ha linee di forza circolari ed è esprimibile nella forma  $\mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{u}_\theta$ , dove  $\mathbf{u}_\theta$  è il versore tangente alla linea di forza circolare (vedi figura) orientato concordemente al versore  $\mathbf{u}_x$  dell'asse  $x$  secondo la regola del prodotto vettoriale. Per  $r < a$  si ottiene così:

$$2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 J \pi r^2 = \frac{\mu_0 I \pi r^2}{S}, \quad (3)$$

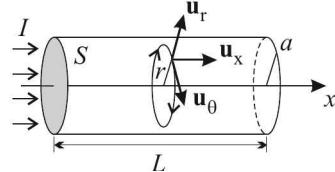
e cioè:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2S} \mathbf{u}_\theta. \quad (4)$$

Il vettore di Poynting internamente al conduttore vale perciò:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{I^2 r}{2 \mathfrak{g} S^2} \mathbf{u}_r, \quad (5)$$

essendo  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_x$  il versore radiale uscente mostrato in figura. Il flusso *entrante* del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del conduttore, di lunghezza  $L$  e raggio  $r = a$ , vale perciò  $|\mathbf{S}(r = a)|2\pi a L = LI^2/(\mathfrak{g}S)$ . Osserviamo che, poichè come noto la resistenza del conduttore filiforme di lunghezza  $L$ , conducibilità  $\mathfrak{g}$  e sezione  $S$  è  $R = L/(S\mathfrak{g})$ , il flusso entrante del vettore di Poynting è uguale a  $RI^2$ , e cioè alla potenza dissipata per effetto Joule nel conduttore. Si noti che, poichè i campi sono stazionari e non vi sono variazioni dell'energia elettrica e magnetica nel tempo, tale risultato è in



accordo con il teorema di Poynting.

### S.8.16.

Il vettore di Poynting in un'onda elettromagnetica piana è diretto nella direzione di propagazione dell'onda ed il suo modulo,  $S$ , è legato a quello del campo elettrico dalla relazione [si veda, ad esempio, l'equazione (8) del problema P10 di questo capitolo]:

$$S = \frac{E^2}{\mu_0 c_0}, \quad (1)$$

per cui, essendo dal testo del problema  $\mathbf{S}(z, t) = S_0 \cos^2[\omega(t - z/c_0)] \mathbf{u}_z$ , avremo:

$$E(z, t) = \sqrt{S \mu_0 c_0} = \sqrt{S_0 \mu_0 c_0} \cos(\omega t - kz), \quad (2)$$

dove  $k = \omega/c_0$ . Se il campo elettrico è linearmente polarizzato nella direzione  $x$ , potremo scrivere vettorialmente:

$$\mathbf{E}(z, t) = \sqrt{S_0 \mu_0 c_0} \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x. \quad (3)$$

Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è poi dato dalla relazione usuale valida per le onde piane  $\mathbf{B} = (1/c_0)\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ , essendo  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$  la direzione di propagazione dell'onda. Dunque:

$$\mathbf{B}(z, t) = \sqrt{\frac{S_0 \mu_0}{c_0}} \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_y. \quad (4)$$

Lo studente verifichi, mediante il calcolo diretto ed usando le espressioni per il campo elettrico e magnetico date dalle equazioni (3) e (4), che  $\mathbf{S} = (1/\mu_0)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

### S.8.17.

Il campo elettromagnetico per l'onda stazionaria considerata nel testo del problema è dato dalla somma dei campi  $\mathbf{E}_+$  ed  $\mathbf{E}_-$  di due onde piane monocromatiche, di uguale frequenza  $\omega$ , ampiezza  $A$  e linearmente polarizzate nella direzione  $y$ , che si propagano nella medesima direzione  $z$  ma in versi opposti. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{1}{2} [A \exp(i\omega t - ikz) + A \exp(i\omega t + ikz) + c.c.] \mathbf{u}_y = \\ &= A [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)] \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (1)$$

per il campo elettrico, e

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z, t) &= \frac{\mathbf{E}_+ \times \mathbf{u}_z}{c_0} - \frac{\mathbf{E}_- \times \mathbf{u}_z}{c_0} = \frac{A}{2c_0} [-\exp(i\omega t - ikz) + \exp(i\omega t + ikz) + \\ &+ c.c.] \mathbf{u}_x = \frac{A}{c_0} [-\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)] \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (2)$$

per il campo magnetico, dove  $k = \omega/c_0$  è il numero d'onda. Utilizzando le formule di prostaferesi, possiamo scrivere:

$$\mathbf{E}(z, t) = 2A \cos(\omega t) \cos(kz) \mathbf{u}_y \quad (3)$$

$$\mathbf{B}(z, t) = -\frac{2A}{c_0} \sin(\omega t) \sin(kz) \mathbf{u}_x. \quad (4)$$

Il vettore di Poynting vale quindi:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{4A^2}{\mu_0 c_0} \cos(\omega t) \cos(kz) \sin(\omega t) \sin(kz) \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x = \quad (5)$$

e cioè:

$$\mathbf{S} = \frac{A^2}{\mu_0 c_0} \sin(2\omega t) \sin(2kz) \mathbf{u}_z. \quad (6)$$

Si noti che il vettore di Poynting è diretto lungo l'asse  $z$  di propagazione delle due onde, ma la sua componente in tale direzione,  $S_z$ , oscilla periodicamente di verso. L'intensità media  $\langle I \rangle$  (nel tempo) trasportata dall'onda è pari al valor medio temporale di  $S_z$ , e cioè:

$$\langle I \rangle = \frac{A^2}{\mu_0 c_0} \sin(2kz) \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0, \quad (7)$$

dove abbiamo tenuto conto che:

$$\langle \sin(2\omega t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sin(2\omega t) dt = 0. \quad (8)$$

Poichè  $\langle I \rangle = 0$ , l'onda stazionaria non trasporta energia, cioè presa ad arbitrio una superficie chiusa dello spazio, il flusso di energia raggiante, entrante od uscente da detta superficie, è mediamente nullo nel tempo. Se dunque le due onde piane, progressiva e regressiva, trasportano *singolarmente* energia, la loro interferenza, che dà origine ad un'onda stazionaria, non trasporta energia elettromagnetica. Come cambierebbe il risultato del problema se le ampiezze delle due onde fossero diverse?

### S.8.18.

E' noto che, per un'onda piana monocromatica, l'intensità media trasportata dall'onda vale:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 E_0^2, \quad (1)$$

dove  $E_0$  è l'ampiezza di oscillazione del campo elettrico. La potenza media (energia per unità di tempo) che investe la cella solare è dunque:

$$\mathcal{P}_{inc} = \langle I \rangle A, \quad (2)$$

essendo  $A$  la superficie della cella solare. La potenza generata dalla cella è invece data da:

$$\mathcal{P}_{gen} = VI, \quad (3)$$

essendo  $I$  la corrente erogata e  $V$  la tensione corrispondente. Il rendimento della cella solare vale dunque:

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{gen}}{\mathcal{P}_{inc}} = \frac{2VI}{\epsilon_0 c_0 E_0^2 A} \simeq 0.029. \quad (4)$$

### S.8.19.

Si consideri un'onda elettromagnetica piana e monocromatica, di frequenza  $\omega_i$ , che si propaga in un mezzo dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r1}$  e che incide su una discontinuità piana che separa tale mezzo da un dielettrico di costante dielettrica relativa

$\epsilon_{r2}$ . Se  $\mathbf{k}_i$  è il vettore d'onda dell'onda incidente ed  $\mathbf{n}$  la normale alla discontinuità (vedi figura), l'angolo acuto  $\theta_i$ , formato fra  $\mathbf{k}_i$  ed  $\mathbf{n}$ , è detto angolo di incidenza, mentre il piano individuato dai vettori  $\mathbf{k}_i$  ed  $\mathbf{n}$  è detto piano di incidenza. A causa della discontinuità della costante dielettrica, si ha riflessione e rifrazione dell'onda incidente. Dette  $\omega_r$ ,  $\omega_t$ ,  $\mathbf{k}_r$  e  $\mathbf{k}_t$  le frequenze ed i vettori d'onda delle onde riflessa e rifratta rispettivamente, la dipendenza funzionale dei campi per le onde incidente, riflessa e rifratta coinvolge i termini  $\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}$ ,  $\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}$  e  $\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$  rispettivamente, dove  $t$  è il tempo ed  $\mathbf{r}$  il complesso delle coordinate spaziali. Le condizioni al contorno del campo elettromagnetico consentono di raccordare le soluzioni di campo alla discontinuità; in particolare esse impongono delle condizioni di continuità di alcune componenti dei campi (ad esempio della componente tangente del campo elettrico) all'interfaccia di separazione dei mezzi dielettrici, che comportano necessariamente:

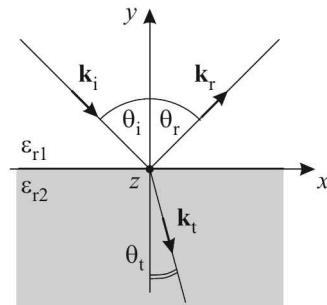
$$\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \quad (1)$$

in ogni istante di tempo  $t$  e per ogni punto  $\mathbf{r}$  sul piano della discontinuità. Se introduciamo una terna di assi cartesiani  $Oxyz$  come in figura, con  $xy$  coincidente col piano di incidenza ed  $xz$  col piano della discontinuità, le condizioni (1) equivalgono alle seguenti:

$$\omega_r = \omega_t = \omega_i \equiv \omega \quad (2)$$

$$k_{rx} = k_{tx} = k_{ix} = k \sin \theta_i \quad (3)$$

$$k_{rz} = k_{tz} = k_{iz} = 0. \quad (4)$$



L'equazione (2) dice in sostanza che le frequenze delle onde riflessa e rifratta sono uguali alla frequenza dell'onda incidente, che indichiamo dunque con  $\omega$  senza alcun pedice; l'equazione (4) indica che i vettori d'onda  $\mathbf{k}_r$  e  $\mathbf{k}_t$  dell'onda riflessa e di quella rifratta giacciono nel piano di incidenza. Infine, l'equazione (3) consente di derivare le leggi di Snell della riflessione e della rifrazione. Infatti, poiché:

$$k_{rx} = k_r \sin \theta_r, \quad k_{tx} = k_t \sin \theta_t \quad (5)$$

(dove  $\theta_r$  e  $\theta_t$  sono gli angoli di riflessione e rifrazione) e dato che:

$$k_r = |\mathbf{k}_r| = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_{r1}}, \quad k_t = |\mathbf{k}_t| = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_{r2}}, \quad k_i = |\mathbf{k}_i| = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_{r1}}, \quad (6)$$

dalla equazione (3) segue che:

$$\theta_r = \theta_i \quad (7)$$

$$\sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \theta_t = \sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \theta_i \quad (8)$$

che sono appunto le due leggi di Snell della riflessione e rifrazione.

### S.8.20.

Introduciamo una terna cartesiana  $Oxyz$  come in figura, con il piano  $(x, y)$  coincidente

con la superficie di separazione. A causa della discontinuità della costante dielettrica, l'onda incidente subisce il fenomeno della riflessione e rifrazione. Dal punto di vista elettromagnetico, si tratta di cercare una soluzione delle equazioni di Maxwell nelle due regioni  $z < 0$  (vuoto) e  $z > 0$  (dielettrico) che si raccordino, soddisfino cioè le condizioni al contorno del campo elettromagnetico, sulla superficie  $z = 0$ . Le direzioni di propagazione delle onde riflesse e rifratte (o trasmesse) sono regolate dalle leggi di Snell, derivate nell'esercizio precedente; nel nostro caso si ha evidentemente  $\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$ , cioè tutte le onde si propagano nella direzione  $z$  ortogonale al piano di discontinuità. Cerchiamo ora una soluzione di campo che, per  $z < 0$ , sia data dalla sovrapposizione di due onde piane, una progressiva (onda incidente) ed una regressiva (onda riflessa), mentre per  $z > 0$  sia esprimibile da un'unica onda progressiva (onda trasmessa); se supponiamo che l'onda incidente sia, ad esempio, linearmente polarizzata con il campo elettrico vibrante nella direzione  $x$  (si veda anche la figura per l'orientamento dei campi), poniamo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [E_i \exp(i\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + c.c.] \mathbf{u}_x + \frac{1}{2} [E_r \exp(i\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}) + c.c.] \mathbf{u}_x \quad (1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [B_i \exp(i\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + c.c.] \mathbf{u}_y - \frac{1}{2} [B_r \exp(i\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}) + c.c.] \mathbf{u}_y, \quad (2)$$

per  $z < 0$ , e:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [E_t \exp(i\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}) + c.c.] \mathbf{u}_x \quad (3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [B_t \exp(i\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}) + c.c.] \mathbf{u}_y \quad (4)$$

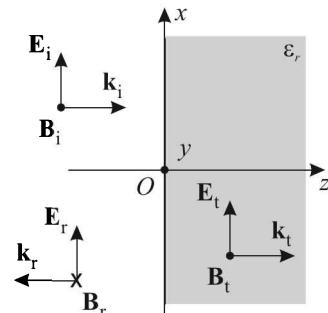
per  $z > 0$ , dove  $\omega$  è la frequenza angolare delle onde,  $\mathbf{k}_i = k_i \mathbf{u}_z = (\omega/c_0) \mathbf{u}_z$ ,  $\mathbf{k}_r = -k_r \mathbf{u}_z = -(\omega/c_0) \mathbf{u}_z$  e  $\mathbf{k}_t = k_t \mathbf{u}_z = (\sqrt{\epsilon_r} \omega/c_0) \mathbf{u}_z$  sono i vettori d'onda delle onde incidente, riflessa e trasmessa, rispettivamente;  $E_i$ ,  $E_r$  ed  $E_t$  le ampiezze (complesse) dei loro campi elettrici e  $B_i$ ,  $B_r$  e  $B_t$  dei loro campi magnetici; e  $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$  è il vettore posizione. Ricordando il legame fra ampiezze del campo elettrico e magnetico per l'onda piana, si avrà inoltre:

$$B_i = \frac{E_i}{c_0}, \quad B_r = \frac{E_r}{c_0}, \quad B_t = \sqrt{\epsilon_r} \frac{E_t}{c_0}. \quad (5)$$

Per una data ampiezza  $E_i$  del campo incidente, saranno da determinarsi dunque le ampiezze (complesse) dei campi dell'onda riflessa,  $E_r$ , e trasmessa (o rifratta),  $E_t$ . I coefficienti di riflessione ( $r$ ) e trasmissione ( $t$ ) in campo sono definiti dalle relazioni:

$$r = \frac{E_r}{E_i}, \quad t = \frac{E_t}{E_i}. \quad (6)$$

Per determinare le espressioni di  $r$  e  $t$ , occorre imporre le condizioni al contorno per il campo elettromagnetico all'interfaccia vuoto-dielettrico. Queste sono:



1) Equazione per la componente normale del vettore **D**

Poichè non c'è carica libera sulla superficie del dielettrico, si conserva la componente normale del vettore **D** all'interfaccia, e cioè

$$D_z(z = 0^-, t) = D_z(z = 0^+, t). \quad (7)$$

Poichè  $D_z(z = 0^-, t) = \epsilon_0 E_z(z = 0^-, t) = 0$  e  $D_z(z = 0^+, t) = \epsilon_0 \epsilon_r E_z(z = 0^+, t) = 0$ , tale condizione si riduce ad un'identità.

2) Equazione per la componente normale del vettore **B**

Questa condizione comporta la continuità della componente normale del vettore **B** all'interfaccia. Come nel caso precedente, si può constatare facilmente che tale condizione è soddisfatta dall'*Ansatz* assuneto.

3) Equazione per la componente tangenziale del vettore **E**

La componente del campo elettrico all'interfaccia vuoto-dielettrico deve conservarsi, e cioè:

$$E_x(z = 0^-, t) = E_x(z = 0^+, t), \quad E_y(z = 0^-, t) = E_y(z = 0^+, t). \quad (8)$$

Tenendo conto delle espressioni (1) e (3), la condizione precedente implica che:

$$E_i + E_r = E_t. \quad (9)$$

4) Equazione per la componente tangenziale del vettore **H**

Poichè sulla superficie del dielettrico non scorrono correnti libere, tale condizione comporta la continuità delle componenti tangenziali del vettore **H** sul piano  $z = 0$ , e cioè:

$$H_x(z = 0^-, t) = H_x(z = 0^+, t), \quad H_y(z = 0^-, t) = H_y(z = 0^+, t). \quad (10)$$

Assumendo il mezzo dielettrico non magnetico, per cui  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , la condizione precedente, ove si usino le espressioni (2) e (4) per il campo magnetico **B**, comporta che si abbia:

$$B_i - B_r = B_t \quad (11)$$

e cioè, per l'equazione (5)

$$E_i - E_r = \sqrt{\epsilon_r} E_t. \quad (12)$$

Se dividiamo ambo i membri delle equazioni (9) e (12) per  $E_i$  e teniamo conto delle definizioni dei coefficienti  $r$  e  $t$ , si ha:

$$1 + r = t \quad (13)$$

$$1 - r = nt, \quad (14)$$

dove abbiamo indicato con  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  l'indice di rifrazione del mezzo dielettrico. Le precedenti equazioni consentono di determinare le espressioni dei coefficienti di riflessione e trasmissione *in campo*:

$$r = \frac{1 - n}{1 + n}, \quad t = \frac{2}{n + 1}. \quad (15)$$

I coefficienti di riflessione  $R$  e trasmissione  $T$  in intensità (o potenza) sono definiti dalle relazioni:

$$R = \frac{I_r}{I_i}, \quad T = \frac{I_t}{I_i}, \quad (16)$$

dove  $I_i$ ,  $I_r$  ed  $I_t$  sono le intensità (medie nel tempo) delle onde incidente, riflessa e trasmessa, rispettivamente. Poiché:

$$I_i = \frac{1}{2\mu_0 c_0} |E_i|^2, \quad I_r = \frac{1}{2\mu_0 c_0} |E_r|^2, \quad I_t = \frac{n}{2\mu_0 c_0} |E_i|^2, \quad (17)$$

si ottine:

$$R = \left| \frac{E_r}{E_i} \right|^2 = |r|^2 = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad (18)$$

$$T = n \left| \frac{E_t}{E_i} \right|^2 = n |t|^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}. \quad (19)$$

Alcuni commenti ai risultati ottenuti sono doverosi. Anzitutto, lo studente può constatare facilmente che risulta:

$$R + T = 1 \quad (20)$$

cioè la somma dei coefficienti di riflessione e trasmissione in intensità è uguale ad uno. Questo fatto esprime sostanzialmente la conservazione dell'energia e poteva essere dedotto applicando il teorema di Poynting ad una superficie chiusa posta a cavallo della discontinuità e ricordando che l'intensità di un'onda è il modulo del vettore di Poynting: poiché, in media, non c'è variazione di energia elettromagnetica e non vi sono correnti, il flusso totale del vettore di Poynting uscente dalla superficie chiusa è nullo. Si presti infine attenzione al legame fra i coefficienti di riflessione e trasmissione in campo ed in intensità: mentre  $R = |r|^2$ , si ha  $T = n|t|^2$ . Il fatto che il coefficiente di trasmissione  $T$  non coincide con  $|t|^2$  deriva sostanzialmente dal fatto che la velocità di fase dell'onda trasmessa,  $c_0/n$ , è minore di quella dell'onda incidente, e che l'intensità di un'onda è l'energia elettromagnetica che attraversa un'unità di superficie del fronte d'onda nell'unità di tempo.

### S.8.21.

Un pacchetto d'onde è una soluzione d'onda delle equazioni di Maxwell che si propaga in un mezzo materiale ottenuta dalla sovrapposizione di onde piane monocromatiche di frequenza  $\omega$  variabile attorno ad una frequenza centrale  $\omega_0$  (detta *frequenza portante* dell'onda) con ampiezza (complessa)  $A(\omega)$  che è funzione della frequenza della componente monocromatica del pacchetto. Se consideriamo, per fissare le idee, un'onda piana linearmente polarizzata che si propaga nella direzione dell'asse  $z$  con il campo elettrico vibrante nella direzione dell'asse  $x$ , possiamo scrivere per il campo elettrico:  $\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t)\mathbf{u}_x$ , con:

$$E_x(z, t) = \frac{1}{2} \int d\omega A(\omega) \exp[i\omega t - ik(\omega)z] + c.c., \quad (1)$$

dove  $k = k(\omega)$  è il numero d'onda della componente armonica di frequenza  $\omega$  del pacchetto ed  $A(\omega)$  la sua ampiezza complessa. Per un pacchetto d'onde, la funzione  $A(\omega)$  è in pratica non nulla in un piccolo intorno, di ampiezza  $\Delta\omega$ , attorno ad  $\omega_0$ , con  $\Delta\omega \ll \omega_0$  (vedi figura). La relazione  $k = k(\omega)$  è detta *relazione di dispersione* del mezzo e, in generale,

può essere una funzione a valori complessi che dipende dalle proprietà del dielettrico nel quale l'onda si propaga. La sua forma specifica può essere derivata mediante uno studio microscopico della propagazione di un'onda piana monocromatica in un dielettrico (modello microscopico di Drude-Lorentz), e si è soliti introdurre un indice di rifrazione (in generale funzione complessa della frequenza  $\omega$ ) tale che:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c_0} n(\omega). \quad (2)$$

La parte reale dell'indice di rifrazione rende conto delle cosiddette proprietà dispersive del mezzo dielettrico, mentre la parte immaginaria dell'indice di rifrazione causa un assorbimento dell'onda nella propagazione. Qui ci limitiamo a dire che, se la frequenza dell'onda è lontana dalle frequenze di risonanza degli atomi del dielettrico, l'indice di rifrazione è una funzione reale della frequenza, e cioè

si può trascurare l'assorbimento del mezzo. Ciò detto osserviamo che, poiché nell'integrale che compare nella equazione (1) la funzione  $A(\omega)$  è non nulla solo in un piccolissimo intorno di  $\omega_0$ , possiamo approssimare la relazione di dispersione  $k = k(\omega)$  che compare nel termine esponenziale sotto il segno di integrale con il suo sviluppo in serie nell'intorno di  $\omega = \omega_0$ , cioè porre:

$$k(\omega) = k_0 + k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{k''_0}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (3)$$

dove  $k_0 = k(\omega_0)$ ,  $k'_0 = (\partial k / \partial \omega)_{\omega_0}$ , etc. Qualora sia lecito troncare lo sviluppo in serie fino al primo ordine nella potenza  $(\omega - \omega_0)$ , l'equazione (1) diviene:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \frac{1}{2} \int d\omega A(\omega) \exp[i\omega t - ik_0 z - ik'_0 z(\omega - \omega_0)] + c.c. = \\ &= \frac{1}{2} \exp(i\omega_0 t - ik_0 z) \left[ \int d\Omega A(\omega_0 + \Omega) \exp(i\Omega t - ik'_0 z\Omega) \right] + c.c. \end{aligned} \quad (4)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo svolto, per il calcolo dell'integrale, il cambiamento di variabile  $\Omega = \omega - \omega_0$ . Si noti che l'espressione così ottenuta per il campo elettrico può scriversi nella forma più significativa:

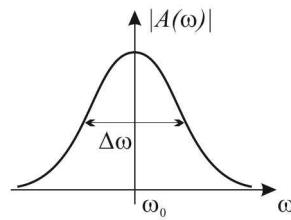
$$E_x(z, t) = \frac{1}{2} F(z - v_g t) \exp(i\omega_0 t - ik_0 z) + c.c., \quad (5)$$

dove abbiamo introdotto la funzione  $F(\xi)$ , detta *inviluppo* del pacchetto d'onde, così definita:

$$F(\xi) = \int d\Omega A(\omega_0 + \Omega) \exp(-i\Omega k'_0 \xi) \quad (6)$$

e posto:

$$v_g = \frac{1}{k'_0} = \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}^{-1} \quad (7)$$



a definizione della *velocità di gruppo* del pacchetto. L'equazione (5) esprime il pacchetto d'onde come il prodotto di una funzione inviluppo  $F$ , che si propaga indeformata nella direzione dell'asse  $z$  con una velocità pari alla *velocità di gruppo*  $v_g$ , e di un'onda armonica di frequenza  $\omega_0$ , detta portante del pacchetto, i cui fronti di fase (cioè i piani di equazione  $k_0 z - \omega_0 t = \text{cost.}$ ) si propagano con una velocità pari alla *velocità di fase*  $v_f = \omega_0/k_0$ , che in generale è distinta dalla velocità di gruppo. Se, ad esempio, l'inviluppo  $F$  è una funzione a valori reali, l'equazione (5) equivale a scrivere:

$$E_x(z, t) = F(z - v_g t) \cos [\omega_0(t - z/v_f)]. \quad (8)$$

Fissato un istante di tempo, ad esempio  $t = 0$ , un tipico grafico di  $E_x(z, 0)$  è mostrato in figura, e cioè consiste di un'onda quasi sinusoidale, di lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ , la cui ampiezza è - inviluppata dalla funzione  $F(z)$ . Poiché la banda  $\Delta\omega$  del pacchetto d'onde è molto minore della frequenza portante  $\omega_0$ , un teorema di Fourier garantisce che, sotto certe condizioni usualmente soddisfatte, l'inviluppo  $F(z)$ , dato dalla equazione (6), si annulla per  $z \rightarrow \pm\infty$ , cioè l'onda è spazialmente localizzata, e varia lentamente su una scala spaziale dell'ordine della lunghezza d'onda  $\lambda_0$  della portante, cioè internamente all'inviluppo  $F$  vi sono tante oscillazioni (vedi figura). Se ora si traccia il grafico del campo elettrico ad un tempo successivo, diciamo al tempo  $t = \Delta t$ , l'inviluppo dell'onda si sarà propagato indeformato, nel verso positivo dell'asse  $z$ , con una velocità  $v_g$ , e cioè si sarà spostato di una lunghezza pari a  $v_g \Delta t$  (vedi figura); la fase dell'onda armonica ha altresì subito uno sfasamento  $\Delta\phi = \omega_0 \Delta t$ . Se  $v_f \neq v_g$ , la sinusoide inscritta nell'inviluppo spostato può dunque risultare sfasata rispetto al tempo iniziale  $t = 0$ . Per rispondere all'esercizio, dobbiamo calcolare l'espressione della velocità di gruppo nota la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda *in vuoto*, e cioè  $n = n(\lambda)$ . Per questo osserviamo che, poiché  $\omega = (2\pi c_0/\lambda)$ , usando la regola di derivazione delle funzioni composte ed assumendo  $\lambda$  come variabile indipendente, possiamo porre l'equazione (7) nella forma:

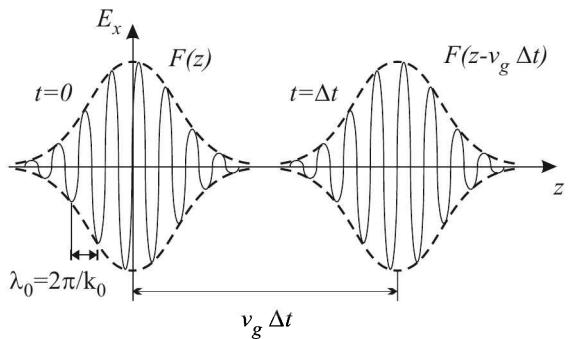
$$\frac{1}{v_g} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{\partial k}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} = \frac{\partial k}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right)^{-1} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0} \frac{\partial k}{\partial \lambda}. \quad (9)$$

Poiché  $k(\lambda) = (\omega n/c_0) = 2\pi n(\lambda)/\lambda$ , si ha:

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} n(\lambda) + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (10)$$

e quindi l'equazione (9) diviene:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c_0} - \frac{\lambda}{c_0} \frac{dn}{d\lambda}, \quad (11)$$



da cui, infine:

$$v_g = \frac{c_0}{n - \lambda(dn/d\lambda)}. \quad (12)$$

# Capitolo 9

## Polarizzazione della luce

### 9.1 Problemi

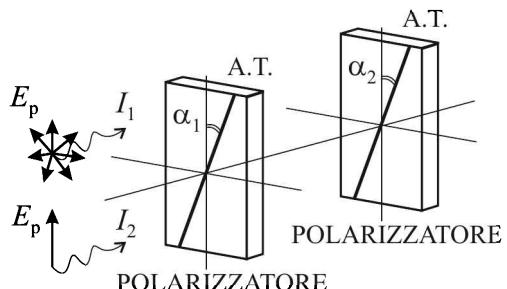
#### P.9.1.

Un'onda elettromagnetica è costituita dalla sovrapposizione di due onde piane di uguale pulsazione  $\omega$  in fase fra di loro e polarizzate linearmente che si propagano nel vuoto lungo l'asse  $z$  nel verso positivo. La prima onda ha intensità  $I_1$  ed è polarizzata lungo l'asse  $x$ , la seconda ha intensità  $I_2 = 4I_1$  ed è polarizzata lungo l'asse  $y$ . Si dimostri che l'onda complessiva è polarizzata linearmente e si calcoli l'angolo  $\alpha$  fra la direzione di polarizzazione e l'asse  $x$ . Si determini inoltre l'intensità dell'onda risultante.

#### P.9.2.

Un fascio di luce ottenuto dalla sovrapposizione di due fasci mutuamente incoerenti, il primo non polarizzato di intensità  $I_1$  ed il secondo linearmente polarizzato con intensità  $I_2$ , viene fatto passare attraverso due polaroid i cui assi sono orientati agli angoli  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , rispettivamente, rispetto alla direzione di polarizzazione del campo elettrico  $E_p$  del fascio polarizzato (si veda la figura).

Determinare l'intensità della luce trasmessa dal secondo polarizzatore.



#### P.9.3.

Un fascio di luce di intensità  $I_0$ , che si propaga nella direzione dell'asse  $z$ , incide normalmente su due lame polaroid disposte parallelamente l'una rispetto all'altra ed ortogonali all'asse  $z$ . L'asse del primo polarizzatore è orientato nella direzione dell'asse  $y$ , mentre il secondo polarizzatore ruota nel piano  $(x, y)$  con velocità angolare  $\omega$ . Si determini l'andamento nel tempo dell'intensità del fascio di luce trasmesso dal secondo polarizzatore nei tre casi seguenti:

- la luce incidente non è polarizzata (luce naturale).
- la luce incidente è linearmente polarizzata con il campo elettrico diretto in una direzione formante un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse  $y$ .

(iii) la luce incidente è polarizzata circolarmente.

#### P.9.4.

Un fascio di luce depolarizzata incide su una lamina con indice di rifrazione  $n$ . Determinare in quali condizioni la luce riflessa è polarizzata ed indicare il piano di polarizzazione.

#### P.9.5.

Si consideri un'onda piana monocromatica incidente sulla superficie piana di discontinuità che separa due mezzi dielettrici con indici di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$  ad un angolo di incidenza uguale all'angolo di Brewster. Mostrare che l'onda riflessa e quella trasmessa si propagano in direzioni fra loro ortogonali. Si dica inoltre in quale circostanza non si ha onda riflessa.

#### P.9.6.

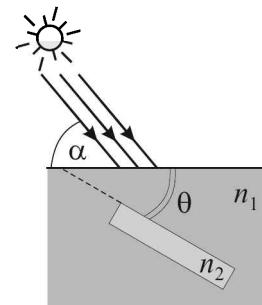
Un fascio di luce incide sopra una lastra di vetro ad un angolo di incidenza  $\theta_i = 60^\circ$ . Sapendo che il fascio riflesso risulta completamente polarizzato, si determini il valore dell'indice di rifrazione del vetro.

#### P.9.7.

Un fascio di luce linearmente polarizzato si propaga nello spazio vuoto incidendo su una lamina di vetro di indice di rifrazione  $n$  e spessore  $\delta$ . Si dica in quali condizioni il fascio viene completamente trasmesso dalla lamina e si calcoli, in tal caso, lo spostamento laterale  $d$  subito dal fascio.

#### P.9.8.

Quando il sole raggiunge un'altezza angolare  $\alpha = 37^\circ$  su una superficie di acqua calma (indice di rifrazione dell'acqua  $n_l = 4/3$ ) si immerge in essa un blocco di vetro con indice di rifrazione  $n_2 = 1.6$ , la cui superficie piana forma un angolo  $\theta$  con l'orizzontale. Determinare il valore di  $\theta$  per il quale il raggio del sole riflesso dal blocco di vetro è completamente polarizzato.



#### P.9.9.

Un prisma ha un indice di rifrazione  $n = 1.6$  ad una determinata lunghezza d'onda. Determinare l'angolo al vertice  $\alpha$  e lo stato di polarizzazione della radiazione incidente affinché in condizioni di deviazione minima non vi sia radiazione riflessa dalle superfici del prisma.

#### P.9.10.

Discutere le principali proprietà di propagazione della luce nei materiali anisotropi e si illustri l'utilizzo delle lame a quarto d'onda ed a mezz'onda per modificare lo stato di polarizzazione di un'onda elettromagnetica.

#### P.9.11.

Un'onda piana monocromatica linearmente polarizzata incide su una lamina birifrangente a mezz'onda. L'asse ottico della lamina è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda e forma un angolo  $\alpha$  con la direzione di polarizzazione del campo elettrico del-

l'onda incidente. Si dimostri che l'onda trasmessa dalla lamina è linearmente polarizzata e che la direzione di vibrazione del campo elettrico è stata ruotata di un angolo  $2\alpha$ .

**P.9.12.**

Un fascio di luce non polarizzata di intensità  $I_0$  incide su un sistema formato da due polarizzatori incrociati (assi di trasmissione fra loro perpendicolari) tra i quali è posta una lamina a mezz'onda ( $\lambda/2$ ). Esprimere in funzione di  $I_0$  l'intensità della luce emergente dal secondo polarizzatore nei due casi seguenti:

- (i) l'asse ottico della lamina è parallelo all'asse di trasmissione del primo polarizzatore;
- (ii) l'asse ottico della lamina forma un angolo  $\alpha$  con l'asse di trasmissione del primo polarizzatore.

**P.9.13.**

Determinare lo spessore minimo di una lamina birifrangente a mezz'onda progettata per radiazione elettromagnetica alla lunghezza d'onda di 730 nm con indice di rifrazione ordinario  $n_o = 1.62$  e straordinario  $n_e = 1.54$ .

**P.9.14.**

Sulla lamina a mezz'onda del problema precedente viene fatta incidere luce a 730 nm linearmente polarizzata. L'asse ottico della lamina è inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto alla direzione di polarizzazione dell'onda. La luce trasmessa dalla lamina viene fatta incidere su un polaroid il cui asse di trasmissione è perpendicolare all'asse ottico della lamina. Sapendo che la intensità dell'onda trasmessa dal polaroid è un terzo di quella dell'onda incidente, si calcoli il valore dell'angolo  $\alpha$ .

**P.9.15.**

Un'onda elettromagnetica piana monocromatica con lunghezza d'onda  $\lambda = 600$  nm e intensità  $I_0$  si propaga lungo l'asse  $z$  ed è polarizzata linearmente lungo l'asse  $x$ . L'onda incide perpendicolarmente su di una lamina di quarzo di spessore  $D = 20 \mu\text{m}$  con l'asse ottico parallelo alle facce e formante un angolo di  $45^\circ$  con la direzione dell'asse  $x$ . Gli indici di rifrazione principali del quarzo sono  $n_1 = 1.55$  e  $n_2 = 1.54$ . Il fascio emergente viene fatto passare ad incidenza normale in un polarizzatore lineare. Si determini l'intensità della luce misurata dopo il polarizzatore in funzione dell'angolo  $\alpha$  formato tra l'asse di trasmissione del polarizzatore e la direzione dell'asse  $x$ .

**P.9.16.**

Si ripeta l'esercizio precedente nel caso in cui lo spessore della lamina di quarzo sia dimezzato.

**P.9.17.**

Un'onda monocromatica di frequenza  $\omega$  ed intensità  $I_0$  incide normalmente su una lamina birifrangente di spessore  $d$ , con asse ottico nel piano della lamina, ed indici di rifrazione ordinario e straordinario  $n_o$  ed  $n_e$ , rispettivamente. L'onda è linearmente polarizzata con il campo elettrico formante un angolo  $\alpha$  con l'asse ottico della lamina. Un polarizzatore è posto dietro la lamina con asse di trasmissione perpendicolare alla direzione di polarizzazione dell'onda incidente. Si calcoli l'intensità dell'onda trasmessa dal polarizzatore in

---

funzione dei parametri del problema e si dica in quali condizioni l'onda è completamente trasmessa.

## 9.2 Soluzioni

### S.9.1.

Il campo elettrico dell'onda complessiva può scriversi come:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E_{01} \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x + E_{02} \cos(\omega t - kz + \phi) \mathbf{u}_y, \quad (1)$$

essendo  $E_{01}$  ed  $E_{02}$  le ampiezze dei campi elettrici delle due onde, polarizzate linearmente nelle direzioni  $x$  ed  $y$ , e  $\phi$  la differenza di fase fra le due onde. Poiché nel testo del problema si dice che le due onde sono in fase tra loro, possiamo porre  $\phi = 0$ . Lo stato di polarizzazione dell'onda complessiva può essere determinato costruendo il luogo geometrico dei punti descritto nel tempo dal campo elettrico  $\mathbf{E}$  in un piano di riferimento trasversale alla direzione di propagazione dell'onda, ad esempio per  $z = 0$ . Dette  $E_x$  ed  $E_y$  le componenti del campo elettrico  $\mathbf{E}$  lungo le direzioni  $x$  ed  $y$ , dalla equazione (1) si ha:

$$E_y(t) = \frac{E_{02}}{E_{01}} E_x(t) \quad (2)$$

La (2) descrive una retta di coefficiente angolare  $E_{02}/E_{01}$  nel piano  $(E_x, E_y)$ . Pertanto l'onda risultante sarà linearmente polarizzata, ed essendo  $E_{01} \propto \sqrt{I_1}$  e  $E_{02} \propto \sqrt{I_2}$ , l'angolo fra la direzione di polarizzazione e l'asse  $x$  varrà:

$$\alpha = \text{atan} \left( \frac{E_{02}}{E_{01}} \right) = \text{atan} \left( \frac{I_2}{I_1} \right)^{1/2} = \text{atan}(2) \simeq 63^\circ. \quad (3)$$

Poiché l'ampiezza complessiva del campo vale:

$$E = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2} \quad (4)$$

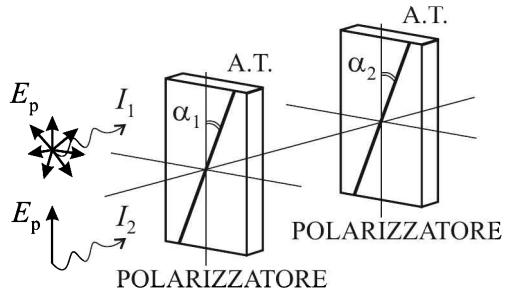
l'intensità dell'onda risultante sarà:

$$I = I_1 + I_2 = 5I_1. \quad (5)$$

### S.9.2.

Poiché i fasci sono incoerenti, la intensità trasmessa  $I_t$  dal secondo polarizzatore sarà la somma delle intensità  $I_t^{(pol)}$  e  $I_t^{(non-pol)}$  trasmesse singolarmente dai due fasci polarizzato e non polarizzato, di intensità  $I_1$  ed  $I_2$  rispettivamente. Poiché il fascio non polarizzato ha una direzione di polarizzazione casuale, metà della sua intensità viene trasmessa dal primo polarizzatore, e l'onda così trasmessa, di intensità  $I_1/2$ , risulterà

polarizzata linearmente nella direzione dell'asse di trasmissione del primo polarizzatore. Giungendo sul secondo polarizzatore, per la legge di Malus la frazione dell'intensità



dell'onda trasmessa sarà  $\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)$ , essendo  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  l'angolo che la direzione di polarizzazione dell'onda forma con l'asse di trasmissione del secondo polarizzatore (vedi figura). In definitiva, per il fascio non polarizzato possiamo scrivere:

$$I_t^{(non-pol)} = \frac{I_1}{2} \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (1)$$

Per quanto riguarda il fascio di luce polarizzato, osserviamo che esso è linearmente polarizzato ed incide sul primo polarizzatore con la direzione di vibrazione del campo elettrico formante un angolo  $\alpha_1$  con l'asse di trasmissione del polarizzatore. Per la legge di Malus l'intensità del fascio trasmesso dal primo polarizzatore, che sarà linearmente polarizzato nella direzione di trasmissione del polarizzatore, sarà  $I_1 \cos^2 \alpha_1$ . Quando questa onda incide sul secondo polarizzatore, per la legge di Malus la frazione  $\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)$  della sua intensità sarà trasmessa. In definitiva, per il fascio polarizzato possiamo scrivere:

$$I_t^{(pol)} = I_2 \cos^2 \alpha_1 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (2)$$

L'intensità totale trasmessa a valle dei due polarizzatori è dunque:

$$I_t = I_t^{(pol)} + I_t^{(non-pol)} = \left( \frac{I_1}{2} + I_2 \cos^2 \alpha_1 \right) \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (3)$$

### S.9.3.

L'onda trasmessa dal primo polarizzatore sarà linearmente polarizzata col campo elettrico diretto lungo l'asse  $y$ , e cioè nella direzione dell'asse di trasmissione del primo polarizzatore. Del resto l'asse di trasmissione del secondo polarizzatore forma con l'asse  $y$  un angolo  $\alpha = \omega t$ , essendo  $\omega$  la velocità angolare di rotazione (costante) del polaroid. Se indichiamo con  $I_1$  e  $I_t$  le intensità delle onde trasmesse dal primo polarizzatore e dal secondo polarizzatore, rispettivamente, per la legge Malus potremo scrivere:

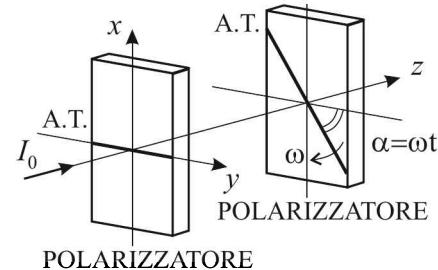
$$I_t = I_1 \cos^2(\omega t). \quad (1)$$

Per calcolare  $I_1$ , dobbiamo ora riferirci esplicitamente allo stato di polarizzazione dell'onda incidente sul primo polarizzatore, la cui intensità è  $I_0$ . Per luce incidente non polarizzata (luce naturale), si ha evidentemente

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \quad (2)$$

essendo statisticamente equiprobabile che la luce naturale abbia una componente di campo elettrico orientata nelle direzioni ortogonali  $x$  ed  $y$ . Per luce incidente linearmente polarizzata con campo elettrico orientato lungo una direzione formante un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse  $y$ , possiamo utilizzare la legge di Malus e scrivere:

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha. \quad (3)$$



Nel caso infine in cui la luce incidente sia polarizzata circolarmente, il campo incidente sul polarizzatore sarà decomponibile nella sovrapposizione di due onde linearmente polarizzate lungo le direzioni  $x$  ed  $y$ , con ampiezze di campo fra loro uguali (e cioè di uguale intensità, pari a  $I_0/2$ ) e sfasate di  $\pi/2$ . Delle due onde, quella diretta lungo l'asse  $y$  di trasmissione del polarizzatore sarà completamente trasmessa, mentre l'onda polarizzata lungo l'asse  $x$  ortogonale all'asse di trasmissione sarà completamente estinta. Anche in questo caso avremo perciò, come per la luce naturale:

$$I_1 = \frac{I_0}{2}. \quad (4)$$

#### S.9.4.

Quando un'onda piana monocromatica incide su una discontinuità che separa due dielettrici con indici di rifrazione diversi, per determinare le espressioni delle onde riflessa e trasmessa occorre decomporre l'onda incidente nella sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente, una con il campo elettrico perpendicolare al piano di incidenza (detta onda trasversale elettrica, TE), e l'altra con il campo magnetico perpendicolare al piano di incidenza (detta onda trasversale magnetica, TM) o, che è lo stesso, con il campo elettrico giacente nel piano di incidenza. Ciascuna delle due onde subirà riflessione e rifrazione in maniera diversa, secondo le leggi generali di Fresnel, e le onde riflesse e trasmesse complessivamente si otterranno dalla sovrapposizione (interferenza) delle onde riflesse e trasmesse di tipo TE e TM. Il problema chiede di stabilire in quali condizioni un'onda non polarizzata (luce naturale) incidente su una lamina con indice di rifrazione  $n$  dia origine ad una luce riflessa linearmente polarizzata. E' noto dalla teoria che esiste un particolare angolo di incidenza, detto angolo di Brewster e soddisfacente la condizione  $\tan \theta_B = n$  (per incidenza da aria a mezzo dielettrico di indice di rifrazione  $n$ ), in corrispondenza del quale un'onda incidente con polarizzazione TM viene totalmente rifratta, e cioè il coefficiente di riflessione in campo per polarizzazione TM si annulla. In tal caso, se sul mezzo dielettrico incide luce con stato di polarizzazione arbitrario, si può senz'altro dire che l'onda riflessa è *sempre* linearmente polarizzata con il campo elettrico ortogonale al piano di incidenza (onda TE). Dunque per ottenere luce polarizzata in riflessione a partire da luce depolarizzata occorre fare incidere sulla lamina il fascio depolarizzato all'angolo di Brewster  $\theta_B = \text{atan}(n)$ ; la luce riflessa sarà linearmente polarizzata con il campo elettrico diretto perpendicolarmente al piano di incidenza (onda TE).

#### S.9.5.

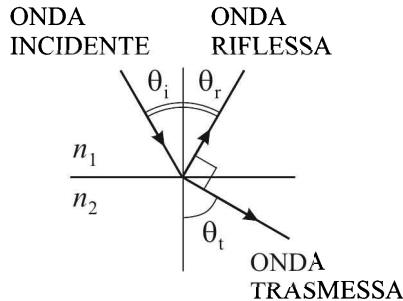
Supponiamo che l'onda piana si propaghi dal mezzo di indice di rifrazione  $n_1$  al mezzo di indice di rifrazione  $n_2$  con un angolo di incidenza  $\theta_i$ . Per le leggi di Snell, l'onda riflessa e trasmessa si propagano agli angoli  $\theta_r$  e  $\theta_t$  soddisfacenti le leggi di Snell:

$$\theta_r = \theta_i, \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t. \quad (1)$$

Se l'onda incide all'angolo di Brewster, si ha:

$$\tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2)$$

per cui possiamo scrivere:



$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i = \frac{n_1}{n_2} \tan \theta_i \cos \theta_i = \cos \theta_i \quad (3)$$

e cioè, essendo  $\theta_i = \theta_r$ ,  $\sin \theta_t = \cos \theta_r$ . Tale condizione mostra che gli angoli  $\theta_r$  e  $\theta_t$  sono fra loro complementari, e cioè che  $\theta_t + \theta_r = \pi/2$ . Ciò dimostra che l'onda riflessa e trasmessa sono fra loro ortogonali. Affinchè non vi sia onda riflessa, dalla teoria di Fresnel della riflessione e rifrazione occorre che l'onda incidente, oltre che incidere all'angolo di Brewster, sia polarizzata TM, e cioè il campo elettrico dell'onda incidente giaccia nel piano di incidenza.

### S.9.6.

Con riferimento alla soluzione del problema P4, la condizione affinchè l'onda riflessa sia polarizzata è che l'angolo di incidenza  $\theta_i$  sia uguale all'angolo di Brewster, e cioè  $\tan \theta_i = n$ , essendo  $n$  l'indice di rifrazione della lamina. Perciò:

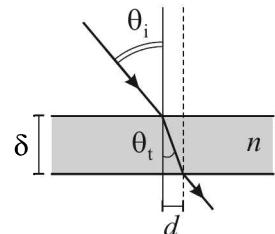
$$n = \tan \theta_i \simeq 1.73. \quad (1)$$

### S.9.7.

La condizione affinchè l'onda sia completamente trasmessa dalla lamina è che essa incida all'angolo di Brewster, e cioè che per l'angolo di incidenza  $\theta_i$  valga la relazione  $\tan \theta_i = n$ , e che l'onda sia polarizzata TM.

Osserviamo che, in tal caso, è nullo il coefficiente di riflessione per polarizzazione TM alla prima interfaccia aria-vetro, e dunque non si ha onda riflessa alla prima interfaccia. Del resto, alla seconda interfaccia l'onda, polarizzata TM, incide ad un angolo pari a  $\theta_t$  tale che  $\theta_t + \theta_i = \pi/2$  (si veda il problema P5). Poichè dunque  $\tan \theta_t = \cotan \theta_i = 1/n$ , anche alla seconda interfaccia vetro-aria è soddisfatta la condizione di incidenza all'angolo di Brewster e non si ha, dunque, onda riflessa nemmeno a tale interfaccia (si noti che ora l'onda si propaga da un mezzo di indice di rifrazione  $n_1 = n$  ad uno di indice  $n_2 = 1$  e la condizione di Brewster,  $\tan \theta = n_2/n_1$ , diviene appunto  $\tan \theta_t = 1/n$ ). Se ora abbiamo a che fare con un fascetto di luce, e non con un'onda piana infinitamente estesa, lo spostamento laterale  $d$  subito dal fascio all'uscita dalla lamina di vetro sarà (si veda la figura):

$$d = \delta \tan \theta_t = \frac{\delta}{n}, \quad (1)$$



dove abbiamo utilizzato la proprietà  $\tan \theta_t = \cotan \theta_i = 1/n$ .

### S.9.8.

La luce riflessa dal blocco di vetro risulta linearmente polarizzata, con il campo elettrico giacente in direzione perpendicolare al piano di incidenza, se l'angolo di incidenza  $\beta$  dei raggi del sole sul blocco di vetro è uguale all'angolo di Brewster per la discontinuità acqua-vetro, cioè se:

$$\tan \beta = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1)$$

L'angolo  $\theta$  di inclinazione del blocco di vetro necessario per avere incidenza all'angolo di Brewster può essere facilmente calcolato osservando che la somma degli angoli interni del triangolo ABC di figura vale  $\pi$ , e cioè:

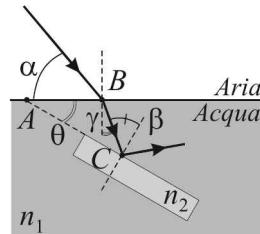
$$\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = \pi, \quad (2)$$

da cui:

$$\theta = \beta - \gamma, \quad (3)$$

dove  $\gamma$  è l'angolo di rifrazione dell'interfaccia aria-acqua (vedi figura). Per la seconda legge di Snell l'angolo  $\gamma$  soddisfa la condizione:

$$n_1 \sin \gamma = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (4)$$



cioè:

$$\gamma = \arcsin \left[ \frac{1}{n_1} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = \arcsin \left( \frac{1}{n_1} \cos \alpha \right) \quad (5)$$

per cui si ha, in definitiva:

$$\theta = \beta - \gamma = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right) - \arcsin \left( \frac{1}{n_1} \cos \alpha \right) \simeq 13,4^\circ. \quad (6)$$

### S.9.9.

Essendo il prisma isoscele, la condizione di deviazione minima si dimostra corrispondere al caso in cui il raggio rifratto nel prisma è parallelo alla base. Da semplici considerazioni sugli angoli segue che, in deviazione minima (vedi figura):

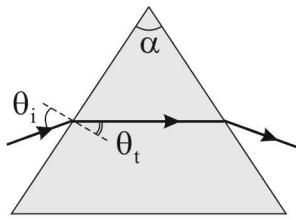
$$\alpha + 2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_t \right) = \pi \quad (1)$$

da cui:

$$\alpha = 2\theta_t. \quad (2)$$

Se in deviazione minima il fascio viene completamente trasmesso, l'angolo di incidenza deve essere pari all'angolo di Brewster e la radiazione incidente deve risultare polarizzata linearmente con direzione TM (il campo elettrico giace nel piano di incidenza). Pertanto:

$$\theta_i = \arctan n \simeq 56^\circ \quad (3)$$



Per la legge di Sell si ha poi:

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \theta_i\right) = \arcsin\left[\frac{1}{n} \sin(\arctan n)\right] \quad (4)$$

per cui, in conclusione:

$$\alpha = 2\theta_i = 2\arcsin\left[\frac{1}{n} \sin(\arctan n)\right] \simeq 64^\circ. \quad (5)$$

### S.9.10.

Nei materiali anisotropi (o birifrangenti) la velocità di propagazione di un'onda elettromagnetica dipende dallo stato di polarizzazione dell'onda stessa. Le caratteristiche di propagazione della luce in un cristallo uniassico possono descriversi mediante l'introduzione dell'ellissoide degli indici (o di Fresnel), che è un ellissoide di rotazione attorno all'asse ottico  $z$  del cristallo e di equazione cartesiana:

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_e^2} = 1, \quad (1)$$

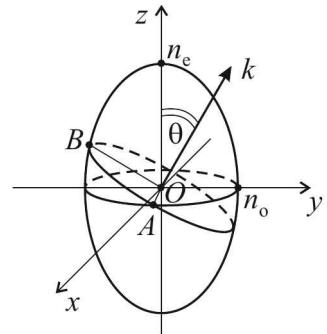
dove  $n_o$  ed  $n_e$  sono detti indici di rifrazione ordinario e straordinario del cristallo, rispettivamente. Per una data direzione di propagazione  $\mathbf{k}$  dell'onda elettromagnetica, si consideri l'ellisse che si ottiene intersecando l'ellissoide degli indici col piano perpendicolare a  $\mathbf{k}$  passante per l'origine degli assi (vedi figura), e siano  $AO$  e  $BO$  i semiassi dell'ellisse così ottenuto. Allora, dalla teoria è noto che esistono due stati di polarizzazione lineare che si possono propagare nel cristallo, corrispondenti al vettore spostamento elettrico  $\mathbf{D}$  diretto parallelamente ad  $OA$  o  $OB$ , cui competono due diverse velocità di fase date rispettivamente da:

$$v_{OA} = \frac{c}{n_{OA}}, \quad v_{OB} = \frac{c}{n_{OB}} \quad (2)$$

dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto,

$$n_{OA} = \overline{OA} = n_0 \quad (3)$$

$$n_{OB} = \overline{OB} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{n_0^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}}} \quad (4)$$



e  $\theta$  è l'angolo formato fra l'asse ottico  $z$  del cristallo ed il vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . Le onde con polarizzazione dirette secondo OA e OB sono dette rispettivamente *onda ordinaria* e *onda straordinaria*. Un caso notevole, di importanza nelle applicazioni, è quello in cui  $\mathbf{k}$  è perpendicolare all'asse ottico del cristallo ( $\theta = \pi/2$ ), e cioè l'onda elettromagnetica si propaga in direzione ortogonale all'asse ottico del cristallo. In tal caso la velocità di fase dell'onda straordinaria è uguale a  $c/n_e$ , ed essa corrisponde ad un campo elettrico polarizzato nella direzione  $z$ , cioè parallelo all'asse ottico. L'onda ordinaria, cui compete invece la velocità di fase  $c/n_0$ , corrisponde ad una direzione di polarizzazione del campo elettrico perpendicolare all'asse ottico del cristallo. Poichè alle due onde, ordinaria e straordinaria, corrispondono due velocità di fase diverse, si ha che lo stato di polarizzazione di un'onda che si propaga in un mezzo anisotropo varia durante la propagazione. Infatti, lo stato più generale di polarizzazione è ellittico e la forma dell'ellisse dipende sostanzialmente dalla differenza delle fasi fra le due onde ordinaria e straordinaria, che varia con la distanza di propagazione  $z$ . Su tale fenomeno si basano i compensatori ottici, fra cui le lame birifrangenti a quarto d'onda ( $\lambda/4$ ) e a mezz'onda ( $\lambda/2$ ). Nella lamina  $\lambda/4$ , la propagazione dell'onda nel cristallo avviene per una lunghezza  $d$  tale che lo sfasamento, dovuto alla propagazione, fra le onde ordinaria e straordinaria, dato da:

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c}(n_e - n_0)d \quad (5)$$

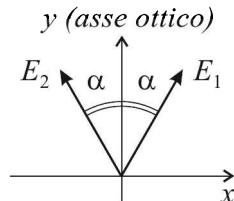
è pari (in valore assoluto, ed a meno di multipli interi di  $2\pi$ ) a  $\pi/2$ . In tal caso, un'onda linearmente polarizzata, incidente sulla lamina con direzione di polarizzazione del campo elettrico a  $45^\circ$  rispetto all'asse ottico, viene trasformata all'uscita del cristallo in un'onda circolarmente polarizzata, e viceversa. In una lamina  $\lambda/2$ , invece, lo spessore  $d$  è scelto in modo che lo sfasamento  $\Delta\phi$  sia uguale a  $\pi$  (a meno di multipli interi di  $2\pi$ ). In tal caso un'onda linearmente polarizzata, incidente sulla lamina con direzione di polarizzazione del campo elettrico formante un angolo di  $45^\circ$  rispetto all'asse ottico, viene trasformata in un'onda polarizzata ancora linearmente, ma ortogonale alla direzione di polarizzazione dell'onda incidente. Si noti che gli spessori necessari per realizzare una lamina  $\lambda/4$  o  $\lambda/2$  dipendono dalla frequenza  $\omega$  dell'onda incidente.

### S.9.11.

Consideriamo un'onda piana monocromatica, linearmente polarizzata, che si propaga nella direzione dell'asse  $z$  incidente su una lamina birifrangente  $\lambda/2$  il cui asse ottico, che indichiamo come asse  $y$ , è perpendicolare alla direzione  $z$  di propagazione dell'onda. Introdotta la terna cartesiana ortogonale  $xyz$ , con  $z$  coincidente con la direzione di propagazione dell'onda ed  $y$  con l'asse ottico della lamina, il campo elettrico  $\mathbf{E}_1$  dell'onda nel piano  $z = 0$  all'ingresso della lamina ha le componenti cartesiane:

$$E_{1x}(t) = A \sin \alpha \cos(\omega t), \quad E_{1y}(t) = A \cos \alpha \cos(\omega t), \quad (1)$$

dove  $A$  è l'ampiezza dell'onda. L'onda incidente è infatti linearmente polarizzata in direzione formante con l'asse  $y$  un angolo  $\alpha$ , per cui  $E_{1x}/E_{1y} = \tan \alpha$  in ogni istante di tempo.



In un piano generico  $z$  entro la lamina, le componenti cartesiane di campo sono:

$$E_x(z, t) = A \sin \alpha \cos[\omega(t - n_0 z/c)] , \quad E_y(z, t) = A \cos \alpha \cos[\omega(t - n_e z/c)]. \quad (2)$$

Infatti l'onda polarizzata lungo l'asse  $y$  è un'onda straordinaria, cui compete una velocità di fase  $c/n_e$ , mentre l'onda polarizzata lungo l'asse  $x$  è un'onda ordinaria, la cui velocità di fase è  $c/n_o$ . All'uscita della lamina ( $z = d$ ), il campo elettrico  $\mathbf{E}_2$  dell'onda sarà dunque:

$$E_{2x}(t) = A \sin \alpha \cos(\omega t - \phi_x) , \quad E_{2y}(t) = A \cos \alpha \cos(\omega t - \phi_y), \quad (3)$$

dove gli sfasamenti, accumulati nella propagazione, sono dati da:

$$\phi_x = \frac{\omega}{c} d n_o , \quad \phi_y = \frac{\omega}{c} d n_e. \quad (4)$$

Poichè la lamina è a mezz'onda, deve avversi  $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \pi$  (a meno di un multiplo intero di  $2\pi$ ), per cui possiamo scrivere:

$$E_{2x}(t) = A \sin \alpha \cos(\omega t - \phi_x) , \quad E_{2y}(t) = A \cos \alpha \cos(\omega t - \phi_x - \pi) = -A \cos \alpha \cos(\omega t - \phi_x). \quad (5)$$

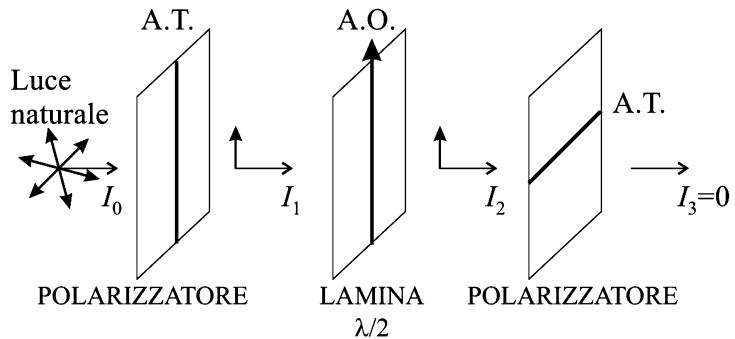
Si osservi che, dividendo membro a membro le relazioni precedenti, si ha:

$$\frac{E_{2x}(t)}{E_{2y}(t)} = -\tan \alpha. \quad (6)$$

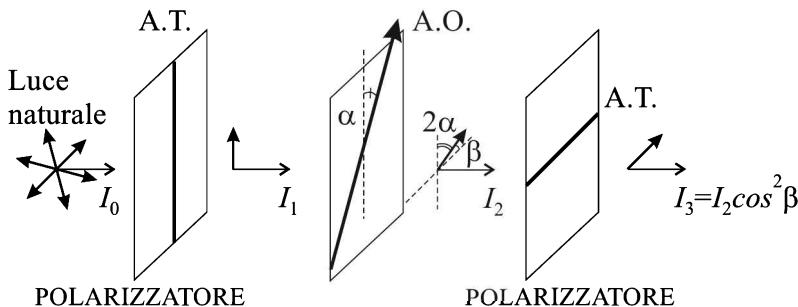
Questa equazione mostra che il campo elettrico all'uscita della lamina è ancora linearmente polarizzato (essendo il rapporto  $E_x/E_y$  indipendente dal tempo), ma la direzione di polarizzazione del campo elettrico forma ora un angolo  $-\alpha$  con l'asse ottico  $y$  della lamina (vedi figura). In conclusione, l'effetto della lamina è quello di ruotare la direzione di vibrazione del campo elettrico dell'onda incidente di un angolo  $2\alpha$ .

### S.9.12.

- (i) Il fascio di luce non polarizzata incide sul polarizzatore ed emerge con polarizzazione lineare lungo l'asse di trasmissione ed intensità  $I_1 = I_0/2$ . Successivamente incide sulla lamina a mezz'onda il cui asse ottico è parallelo alla



direzione di polarizzazione dell'onda. Il suo stato di polarizzazione non è perciò alterato, e la luce emergente è ancora linearmente polarizzata lungo l'asse ottico della lamina con intensità  $I_2 = I_1 = I_0/2$ . Infine il fascio di luce incide sul secondo polarizzatore, avente asse di trasmissione perpendicolare alla direzione di polarizzazione dell'onda. L'intensità dell'onda trasmessa sarà dunque  $I_3 = 0$  (vedi figura).



(ii) Il fascio trasmesso dal primo polarizzatore è linearmente polarizzato nella direzione dell'asse di trasmissione ed ha intensità  $I_1 = I_0/2$ . Il fascio linearmente polarizzato incide successivamente sulla lamina a mezz'onda, il cui asse ottico è diretto ad un angolo  $\alpha$  rispetto alla direzione di polarizzazione dell'onda che vi incide. Il fascio emergente, per la proprietà delle lamine a mezz'onda dimostrata nel problema precedente, è ancora linearmente polarizzato secondo una direzione formante un angolo  $2\alpha$  rispetto alla direzione di polarizzazione dell'onda incidente sulla lamina (vedi figura). Poiché la lamina non varia l'intensità dell'onda si ha  $I_2 = I_1 = I_0/2$ . Infine, il fascio linearmente polarizzato incide sul secondo polarizzatore. Poiché l'angolo  $\beta$  fra la direzione di polarizzazione dell'onda incidente e l'asse di trasmissione del polarizzatore è manifestamente  $\beta = \pi/2 - 2\alpha$ , dalla legge di Malus segue che l'intensità dell'onda trasmessa vale:

$$I_3 = I_2 \cos^2 \beta = \frac{I_0}{2} \sin^2(2\alpha). \quad (1)$$

### S.9.13.

Lo sfasamento  $\Delta\phi$  subito dalle onde ordinaria e straordinaria nella propagazione attraverso la lamina vale

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c} d(n_o - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - n_e), \quad (1)$$

dove  $\lambda = 2\pi c/\omega$  è la lunghezza d'onda *in vuoto* dell'onda elettromagnetica,  $d$  lo spessore della lamina ed  $n_o$ ,  $n_e$  i suoi indici di rifrazione ordinario e straordinario. Per avere una lamina a mezz'onda, la condizione  $\Delta\phi = \pi(2l + 1)$  deve essere soddisfatta ( $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), e cioè:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - n_e) = (2l + 1)\pi, \quad (2)$$

da cui:

$$d = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)} (2l + 1). \quad (3)$$

Lo spessore minimo della lamina si ottiene per  $l = 0$  e vale:

$$d_{min} = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)} \simeq 4562.5 \text{ nm}. \quad (4)$$

**S.9.14.**

Con riferimento alla figura, l'onda incidente sulla lamina a mezz'onda è linearmente polarizzata con il campo elettrico  $E$  formante un angolo  $\alpha$  con la direzione dell'asse ottico della lamina. Per una proprietà delle lame a mezz'onda discussa in dettaglio nel problema P11, l'onda da essa trasmessa risulterà ancora linearmente polarizzata in una direzione ruotata di un angolo  $2\alpha$  rispetto alla direzione di polarizzazione dell'onda incidente. L'intensità dell'onda, inoltre, non sarà modificata dalla propagazione nella lamina. Sul polarizzatore incide dunque un'onda polarizzata linearmente in una direzione formante un angolo  $\beta = \pi/2 - \alpha$  con l'asse di trasmissione del polarizzatore. Per la legge di Malus, il rapporto fra l'intensità  $I_t$  trasmessa dal polarizzatore e l'intensità  $I_0$  dell'onda incidente vale:

$$\frac{I_t}{I_0} = \cos^2 \beta = \sin^2 \alpha, \quad (1)$$

da cui:

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{I_t}{I_0}} = \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 35,6^\circ. \quad (2)$$

**S.9.15.**

Il campo elettrico dell'onda incidente sulla lamina può essere decomposto nella sovrapposizione di due onde piane linearmente polarizzate, una in direzione ortogonale all'asse ottico (onda ordinaria) e l'altra in direzione parallela all'asse ottico della lamina (onda straordinaria). Lo sfasamento fra tali onde all'uscita della lamina sarà:

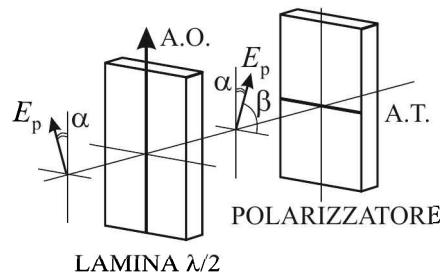
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} D(n_1 - n_2), \quad (1)$$

dove  $D$  è lo spessore della lamina ed  $n_1$  e  $n_2$  gli indici di rifrazione ordinario e straordinario. Per  $D = 30 \mu\text{m}$ , lo sfasamento vale  $\pi$  (lamina a  $\lambda/2$ ) e quindi la luce emergente sarà polarizzata linearmente ma con direzione di polarizzazione ruotata di un angolo doppio rispetto a quello compreso fra asse ottico e direzione iniziale di polarizzazione (quindi di  $90^\circ$ ). L'onda emergente sarà dunque polarizzata secondo l'asse  $y$ . L'intensità della luce emergente dal polarizzatore varrà quindi, per la legge di Malus:

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = I_0 \sin^2 \alpha. \quad (2)$$

**S.9.16.**

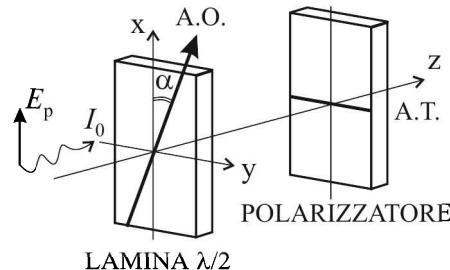
Se lo spessore  $D$  della lamina nel problema precedente è pari a  $15 \mu\text{m}$ , lo sfasamento  $\Delta\phi$  subito fra le componenti di onda ordinaria e straordinaria all'uscita della lamina vale  $\pi/2$ , si tratta cioè di una lamina a  $\lambda/4$ . Poiché l'onda incidente è polarizzata linearmente con direzione di polarizzazione formante un angolo di  $45^\circ$  con l'asse ottico della lamina, l'onda emergente dalla lamina risulta polarizzata circolarmente. Possiamo in tal caso pensare



l'onda come la sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente in due direzioni ortogonali per altro arbitrarie, di uguale intensità pari ad  $I_0/2$  e sfasate di  $\pi/2$ . Poiché il polarizzatore estingue una delle due componenti (quella diretta lungo l'asse ortogonale all'asse di trasmissione del polarizzatore), avremo che l'onda trasmessa dal polarizzatore avrà intensità  $I = I_0/2$ , indipendente dall'angolo  $\alpha$  che l'asse del polarizzatore forma con l'asse  $x$ .

### S.9.17.

Con riferimento alla figura, introduciamo un sistema di assi  $(x, y, z)$  con l'asse  $z$  orientato lungo la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica, l'asse  $x$  diretto secondo la direzione di polarizzazione del campo elettrico dell'onda incidente, e l'asse  $y$  orientato nella direzione dell'asse di trasmissione (A.T.) del polarizzatore posto dietro la lamina. L'asse ottico (A.O.) della lamina forma dunque un angolo  $\alpha$  con l'asse  $x$  (vedi figura). Il campo elettrico incidente sulla lamina vale dunque:



della lamina forma dunque un angolo  $\alpha$  con l'asse  $x$  (vedi figura). Il campo elettrico incidente sulla lamina vale dunque:

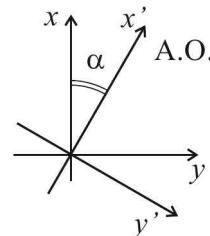
$$\mathbf{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{u}_x. \quad (1)$$

Per propagare il campo internamente alla lamina, dobbiamo decomporre l'onda incidente nelle sue componenti ordinaria e straordinaria. Per questo, introduciamo due assi ortogonali  $(x', y')$ , con l'asse  $x'$  orientato lungo l'asse ottico della lamina (polarizzazione straordinaria) ed  $y'$  perpendicolare ad esso (polarizzazione ordinaria).

Le componenti dell'onda incidente al piano di ingresso ( $z = 0$ ) della lamina, riferite dagli assi ruotati  $(x', y')$ , valgono manifestamente, ove si usi l'equazione (1):

$$E_{x'}(t) = \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{u}_{x'} = E_x(t) \cos \alpha = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t), \quad (2)$$

$$E_{y'}(t) = \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{u}_{y'} = -E_x(t) \sin \alpha = -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t). \quad (3)$$



Poiché l'onda ordinaria e straordinaria si propagano con numeri d'onda diversi, dati da  $k_0 = (\omega/c_0)n_0$  e  $k_e = (\omega/c_0)n_e$  rispettivamente, il campo elettrico in un piano di coordinata  $z$  interno alla lamina sarà dato dunque da:

$$E_{x'}(z, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - k_e z), \quad (4)$$

$$E_{y'}(z, t) = -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - k_0 z). \quad (5)$$

Il campo elettrico  $\mathbf{E}_2$  all'uscita della lamina, cioè al piano  $z = d$ , varrà di conseguenza:

$$E_{2x'}(t') = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t'), \quad (6)$$

$$E_{2y'}(t') = -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t' - \Delta\phi), \quad (7)$$

dove abbiamo posto  $t' = t - k_e d / \omega$  e

$$\Delta\phi = (k_0 - k_e)d = \frac{\omega d}{c}(n_0 - n_e). \quad (8)$$

Poichè l'asse del polarizzatore è diretto lungo l'asse  $y$ , il campo elettrico trasmesso  $\mathbf{E}_t$  dal polarizzatore sarà dato da  $\mathbf{E}_t(t') = E_t(t')\mathbf{u}_y$ , dove

$$E_t(t') = \mathbf{E}_2(t') \cdot \mathbf{u}_y = E_{2x'}(t') \sin \alpha + E_{2y'}(t') \cos \alpha. \quad (9)$$

Nel derivare l'equazione precedente, abbiamo tenuto conto che  $\mathbf{u}_y = \sin \alpha \mathbf{u}_{x'} + \cos \alpha \mathbf{u}_{y'}$ . Sostituendo le equazioni (6) e (7) nell'equazione (9), si ottiene:

$$\begin{aligned} E_t(t') &= E_0 \sin \alpha \cos \alpha [\cos(\omega t') - \cos(\omega t' - \Delta\phi)] \\ &= -2E_0 \sin \alpha \cos \alpha \sin(\omega t' + \Delta\phi/2) \sin(\Delta\phi/2), \end{aligned} \quad (10)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le formule di prostaferesi. L'intensità istantanea dell'onda trasmessa è dunque:

$$I_t \propto 4E_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin^2(\Delta\phi/2) \sin^2(\omega t' + \Delta\phi/2). \quad (11)$$

Per l'intensità media (nel tempo) trasmessa, ove si tenga conto che  $\langle \sin^2(\omega t' + \Delta\phi/2) \rangle = \langle \sin^2(\omega t') \rangle = 1/2$ , avremo in conclusione:

$$\langle I_t \rangle = 4I_0 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin^2(\Delta\phi/2) = I_0 \sin^2(2\alpha) \sin^2(\Delta\phi/2). \quad (12)$$

L'onda sarà completamente trasmessa ( $\langle I_t \rangle = I_0$ ) se la lamina è a mezz'onda per la radiazione incidente ( $\Delta\phi = \pi$ , a meno di multipli di  $2\pi$ ) e se il suo asse ottico è inclinato di un angolo  $\alpha = \pi/4$  rispetto alla direzione di polarizzazione dell'onda incidente.

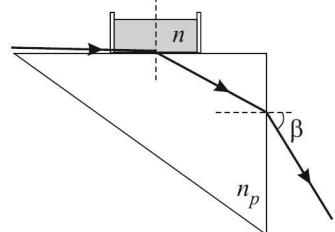
# Capitolo 10

## Ottica geometrica

### 10.1 Problemi

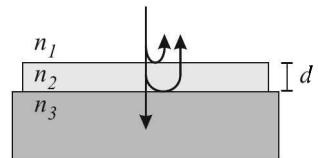
#### P.10.1.

Il dispositivo illustrato in figura, detto *rifrattometro di Pulfrich*, permette di determinare l'indice di rifrazione di liquidi trasparenti. Mediante pareti in vetro, il liquido di indice di rifrazione  $n$  viene mantenuto sulla faccia orizzontale di un prisma retto in vetro con indice di rifrazione  $n_p = 1.6$ . Un fascio collimato di luce laser viene fatto incidere praticamente radente rispetto alla superficie orizzontale del prisma e si misura l'angolo di uscita  $\beta$  del fascio dal prisma. Sapendo che nel caso in esame  $\beta = 63^\circ$ , si determini l'indice di rifrazione del liquido e si discuta il massimo indice di rifrazione di un liquido determinabile con questo prisma.



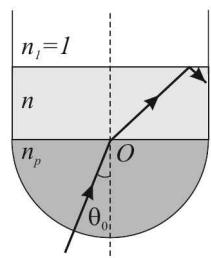
#### P.10.2.

Un sottile strato di vernice trasparente, con indice di rifrazione  $n_2 = 1.3$  e spessore  $d$ , ricopre uniformemente una lastra di vetro di indice di rifrazione  $n_3 = 1.5$ . Un fascio di luce laser alla lunghezza d'onda nel vuoto  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$  incide ortogonalmente alla superficie provenendo dall'aria  $n_1 = 1$ . Si determini il minimo spessore  $d$  di vernice da applicare per minimizzare la luce riflessa dalla lastra.



#### P.10.3.

Un recipiente, il cui fondo è costituito da un emisfero di plexiglass, è riempito di acqua ( $n=1.33$ ). Un raggio di luce viene fatto incidere dal basso attraverso il plexiglass. Si nota che facendo passare il raggio di luce per il centro O con un angolo  $\theta_0 = 37^\circ$  rispetto alla verticale si ha riflessione totale all'interfaccia acqua-aria. Si determini l'indice di rifrazione del plexiglass. Se si toglie l'acqua, si osserva luce rifratta in aria?

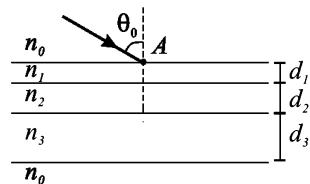


**P.10.4.**

La misura dell'angolo di deviazione minima è una delle principali tecniche per determinare l'indice di rifrazione di un prisma. Sapendo che l'angolo al vertice del prisma è pari ad  $\alpha = 30^\circ$  e che l'angolo di deviazione minima misurato è pari a  $\delta_m = 20^\circ$ , si determini l'indice di rifrazione del vetro di cui è costituito il prisma. Una volta calcolato l'indice di rifrazione del prisma, si determini il massimo valore dell'angolo al vertice  $\alpha$  che consente la misura dell'angolo di deviazione minima.

**P.10.5.**

In una regione di spazio ad indice di rifrazione  $n_0 = 1.6$  è presente una struttura multistrato composta da una successione di materiali ad indice di rifrazione decrescente,  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1.4$ ,  $n_3 = 1.3$ . Un raggio di luce incidente nel punto  $A$  con un angolo di incidenza pari a  $\theta_0 = 60^\circ$  viene rifratto all'interno della struttura. Sapendo che lo spessore degli strati è rispettivamente pari a  $d_1 = 10 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 15 \text{ mm}$  e  $d_3 = 20 \text{ mm}$ , si determini il punto in cui il raggio torna nella regione ad indice di rifrazione  $n_0$ .

**P.10.6.**

In un faro di un'automobile la lampadina è posta ad una distanza  $p = 5 \text{ cm}$  da uno specchio emisferico concavo. Determinare il raggio di curvatura dello specchio affinché il faro illumini il più lontano possibile.

**P.10.7.**

Un bambino si specchia nella parte concava di un cucchiaio metallico emisferico con un raggio di curvatura  $R = -6 \text{ cm}$ . Si determinino la posizione e l'ingrandimento trasversale dell'immagine del suo viso quando il cucchiaio si trova alle distanze  $p_1 = 20 \text{ cm}$  e  $p_2 = 2 \text{ cm}$ .

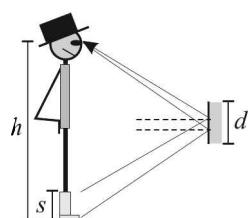
**P.10.8.**

Lo stesso bambino dell'esercizio precedente gira il cucchiaio dalla parte convessa e si specchia alle stesse distanze  $p_1 = 20 \text{ cm}$  e  $p_2 = 2 \text{ cm}$ . Si determinino nuovamente la posizione e l'ingrandimento trasversale dell'immagine del suo viso

**P.10.9.**

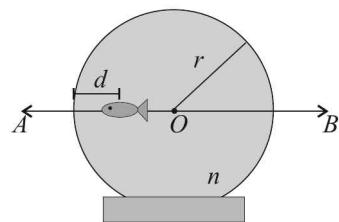
Un negoziante di scarpe deve appendere alla parete uno specchio piano quadrato di lato  $d = 40 \text{ cm}$  affinché i clienti possano vedere riflesse le scarpe che indossano. Se l'altezza degli occhi del cliente medio da terra è pari a  $h = 170 \text{ cm}$  e le scarpe più alte sono gli stivali di altezza pari a  $s = 40 \text{ cm}$ , si determinino:

- l'altezza ottimale a cui appendere lo specchio;
- la massima e minima altezza degli occhi dei clienti che riusciranno ad utilizzare lo specchio appeso nella posizione determinata al punto i).

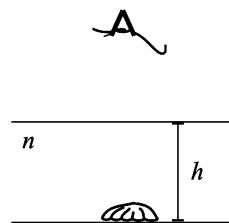


**P.10.10.**

Un pesce si trova all'interno di un vaso sferico di raggio  $r = 20$  cm pieno d'acqua ( $n = 1.33$ ). Si determini in quale direzione (A o B) l'ingrandimento trasversale del pesce è maggiore quando quest'ultimo si trova, come in figura, a distanza  $d = 5$  cm dalla superficie del vaso.

**P.10.11.**

Una conchiglia si trova ad una profondità  $h = 50$  cm dal pelo dell'acqua (indice di rifrazione dell'acqua  $n = 1.33$ ). Si determinino la profondità apparente e l'ingrandimento trasversale.

**P.10.12.**

Una sorgente luminosa puntiforme si trova alla distanza  $p = 40$  cm da uno specchio sferico concavo di raggio  $R = -10$  cm. Si determini la posizione dell'immagine creata dallo specchio quando:

- (i) tutto si trovi in aria;
- (ii) lo specchio si trovi immerso in un liquido di indice  $n = 1.4$  alla profondità  $h = 20$  cm.

**P.10.13.**

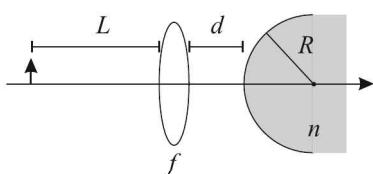
Data una lente sottile convergente di focale  $f = 30$  mm, si determini la distanza dall'oggetto a cui è necessario posizionarla per avere nel piano coniugato un'immagine con ingrandimento lineare trasversale in modulo pari a 3. Si discuta sia il caso di immagine reale che il caso di immagine virtuale.

**P.10.14.**

Una lente sottile convergente di focale  $f = 5$  cm crea tre immagini alle distanze  $q_1 = 10$  cm,  $q_2 = 15$  cm e  $q_3 = 20$  cm, tutte di altezza pari a  $y' = 6$  cm. Si determinino le dimensioni dei tre oggetti.

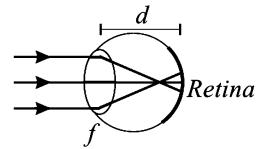
**P.10.15.**

Una lente convergente di focale  $f = 5$  cm si trova a distanza  $d = 3$  cm da un diottro sferico convesso con raggio di curvatura  $R = 4$  cm ed indice di rifrazione  $n = 1.6$ . Si determini l'ingrandimento trasversale dell'immagine di un oggetto posto sull'asse ottico ad una distanza  $L = 6$  cm a sinistra della lente.



**P.10.16.**

Nell'occhio umano la combinazione di cornea e cristallino permette la focalizzazione dell'immagine sulla retina. Se il bulbo oculare è leggermente più grande del dovuto e la retina si trova a distanza  $d = 28$  mm dal cristallino, l'occhio rilassato che osserva un'oggetto all'infinito, ne crea l'immagine prima della retina e si dice affetto da miopia. Schematizzando il sistema cornea-cristallino di un occhio rilassato come una lente sottile convergente di focale  $f = 25$  mm, si determini la focale sia della lente d'occhiale, posta a  $L = 20$  mm dalla cornea, che della lente a contatto necessaria per correggere questa miopia.

**P.10.17.**

Data una lente d'ingrandimento biconvessa simmetrica di raggio di curvatura  $R = 10$  cm e realizzata con un vetro di indice di rifrazione pari a  $n_v = 1.5$ , si determini l'ingrandimento visuale ottenibile in aria ed in acqua ( $n_a = 1.33$ ).

**P.10.18.**

Un microscopio è composto da due lenti convergenti (obiettivo ed oculare) a distanza  $D = 16$  cm tra di loro. Sapendo che l'oculare ha una focale  $f_{oc} = 2$  cm, si determini la focale dell'obiettivo affinché l'ingrandimento visuale del microscopio sia pari a 1000x.

**P.10.19.**

Un cannocchiale composto da due lenti sottili deve fornire un ingrandimento visuale in modulo pari a 20 mantenendo però delle dimensioni compatte. Si determinino le focali delle lenti da impiegare nel cannocchiale se la distanza tra queste deve essere  $d = 20$  cm.

**P.10.20.**

Un obiettivo fotografico, schematizzato come una lente sottile di focale  $f$  ed un diaframma di apertura  $D$ , focalizza un punto oggetto a distanza  $p$  in un punto immagine sulla pellicola a distanza  $q$  dietro l'obiettivo. Un secondo oggetto puntiforme, posto sull'asse ottico a distanza  $p + \Delta p$  dall'obiettivo viene focalizzato su un piano coniugato che si trova prima o dopo la pellicola, generando su di essa un *cerchio di confusione* di diametro  $d$ .

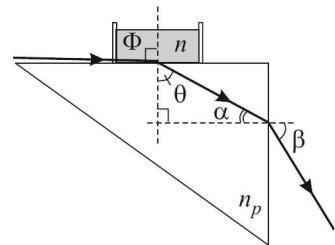
- Si determini la dipendenza del diametro  $d$  dai parametri  $D, f, p$  e  $\Delta p$  nell'ipotesi  $\Delta p \ll p$ .
- Si immagini di voler fotografare un oggetto a distanza  $p = 2$  m con un obiettivo di focale  $f = 50$  mm. Si determini la profondità di campo  $\Delta p$  nel caso di massima e minima apertura del diaframma ( $D_{max} = 11.1$  mm e  $D_{min} = 2.27$  mm) se il massimo diametro tollerabile del cerchio di confusione è  $d = 25 \mu\text{m}$ .
- Si immagini di voler fotografare lo stesso oggetto di prima, a distanza  $p = 2$  m, con due obiettivi: un grandangolo ( $f = 25$  mm) ed un teleobiettivo ( $f = 100$  mm). Si determini la profondità di campo nei due casi ipotizzando un'apertura del diaframma pari ad  $D = 5$  mm ed un diametro massimo del cerchio di confusione  $d = 25 \mu\text{m}$ .

## 10.2 Soluzioni

### S.10.1.

Il fascio laser incidente è praticamente radente alla superficie del prisma. Nel punto in cui si ha rifrazione tra liquido e prisma si può quindi scrivere la legge di Snell

$$n \sin \phi = n_p \sin \theta \Rightarrow n = n_p \sin \theta , \quad (1)$$



dove  $n$  ed  $n_p$  sono rispettivamente l'indice di rifrazione del liquido e del prisma,  $\phi \cong \pi/2$  è l'angolo di incidenza e  $\theta$  è l'angolo di rifrazione. Si consideri ora la faccia di uscita del prisma e la rifrazione che il raggio subisce anche a quella interfaccia. Scrivendo nuovamente la legge di Snell si ottiene

$$n_p \sin \alpha = \sin \beta , \quad (2)$$

dove l'indice di rifrazione dell'aria è già stato considerato pari a 1. Il legame tra le due equazioni finora scritte si ottiene osservando il triangolo rettangolo costruito in figura in cui risulta evidente che  $\theta$  e  $\alpha$  sono complementari. Di conseguenza

$$\sin \theta = \cos \alpha \quad (3)$$

e l'equazione (1) diventa

$$n = n_p \sin \theta = n_p \cos \alpha . \quad (4)$$

Esprimendo il coseno di  $\alpha$  in funzione del seno ed utilizzando l'equazione (2) si ottiene infine

$$n = n_p \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = n_p \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta}{n_p^2}} = \sqrt{n_p^2 - \sin^2 \beta} = 1.329 . \quad (5)$$

Per avere la rifrazione tra liquido e prisma è necessario che

$$\sin \theta \leq 1 \quad (6)$$

e quindi, dall'equazione (1), si ottiene la condizione

$$n \leq n_p , \quad (7)$$

che individua il massimo indice di rifrazione di un liquido misurabile con questo prisma.  
*Osservazione:*

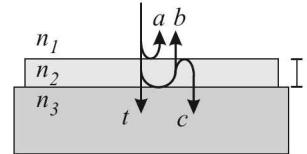
Esiste in realtà anche un valore minimo di indice di rifrazione di un liquido misurabile

con questo prisma. Se si considera la relazione ricavata nell'equazione (5) e si tiene conto del fatto che  $\sin \beta \leq 1$  si arriva alla relazione

$$n \geq \sqrt{n_p^2 - 1} = 1.249. \quad (8)$$

### S.10.2.

Si consideri un raggio di luce incidente ortogonalmente alle superfici. Questo raggio viene parzialmente riflesso alla prima interfaccia (tra il mezzo 1 ed il mezzo 2) e parzialmente alla seconda (tra il mezzo 2 ed il mezzo 3). I due raggi riflessi, una volta tornati nel mezzo 1 interferiscono e danno luogo alla riflessione complessiva del sistema (a rigore sono presenti ulteriori riflessioni multiple all'interno dello strato di vernice, ma per bassi valori di riflettività, come nel presente problema, il loro contributo può essere trascurato). Affinché la luce riflessa sia minima, i due raggi riflessi devono interferire distruttivamente e questo avviene se i diversi sfasamenti acquisiti dai due raggi nel loro cammino ottico differiscono per multipli dispari di  $\pi$ :



$$\Delta\phi = \phi_b - \phi_a = (2m + 1)\pi \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Nel calcolo dello sfasamento acquisito dai due raggi è importante ricordare che tutte le volte che si ha riflessione con incidenza ortogonale da un mezzo ad indice più basso ad un mezzo ad indice più alto l'onda riflessa acquisisce uno sfasamento di  $\pi$  all'interfaccia, mentre ciò non avviene quando il raggio proviene da un mezzo ad indice più alto e viene riflesso da un mezzo ad indice più basso. Lo sfasamento acquisito dal raggio  $a$  è quindi pari al solo contributo della riflessione all'interfaccia 1-2 ( $n_1 < n_2$ ):

$$\phi_a = \pi, \quad (2)$$

mentre lo sfasamento acquisito dal raggio  $b$  è costituito dal contributo dovuto alla riflessione all'interfaccia 2-3 ( $n_2 < n_3$ ) e dallo sfasamento acquisito nel doppio passaggio nello strato di vernice:

$$\phi_b = \pi + 2k_0 n_2 d. \quad (3)$$

Imponendo quindi che la differenza di sfasamento tra i due raggi riflessi sia pari ad un multiplo dispari di  $\pi$ , si ottengono i possibili valori di  $d$  per cui la luce riflessa è minima:

$$\Delta\phi = 2k_0 n_2 d = (2m + 1)\pi \Rightarrow d = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{4n_2} \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Il minimo spessore di vernice si ottiene per  $m = 0$  e quindi  $d_{min} = 96$  nm.

*Osservazioni:*

i) E' interessante notare che la condizione di minima luce riflessa coincide anche con la

condizione di massima luce trasmessa, infatti la differenza di sfasamento acquisita dai due raggi  $t$  e  $c$  appena entrati nella regione 3 è pari a:

$$\Delta\phi' = \pi + 2k_0 n_2 d, \quad (5)$$

ricordando però la condizione ottenuta nell'eq. (4) per la minima riflessione, si ha:

$$\Delta\phi' = \pi + (2m + 1)\pi = 2(m + 1)\pi \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

La differenza di sfasamento in trasmissione è quindi un multiplo pari di  $\pi$  corrispondente ad interferenza costruttiva. La condizione di minima luce riflessa implica quindi la massima luce trasmessa e questo è ragionevole dovendo conservarsi l'energia complessiva.

ii) Il fenomeno di interferenza distruttiva non implica necessariamente riflessione nulla, infatti oltre alla condizione discussa nello svolgimento del problema è necessario anche che i campi elettrici delle onde riflesse abbiano la stessa ampiezza. Per ottenere questa ulteriore condizione bisogna scegliere opportunamente l'indice di rifrazione dello strato di vernice in modo tale che i coefficienti di riflessione alle interfacce 1-2 e 2-3 siano circa uguali. Questa condizione, per bassi coefficienti di riflessione, permette di ottenere campi riflessi di pari ampiezza e quindi riflessione nulla in caso di interferenza distruttiva. Calcolando i coefficienti di riflessione nel presente problema si ottiene:

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1.7\% \\ R_{23} &= \frac{(n_2 - n_3)^2}{(n_2 + n_3)^2} = 0.5\% \end{aligned} \quad (7)$$

Quindi la scelta dell'indice di rifrazione della vernice deve essere ulteriormente ottimizzata per annullare la riflessione. Le lenti anti-riflesso degli occhiali da vista vengono realizzate utilizzando questi principi.

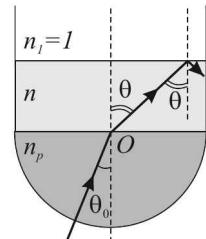
### S.10.3.

La condizione di riflessione totale all'interfaccia aria-acqua indica che l'angolo di incidenza  $\theta$  è uguale a

$$\sin \theta = \frac{1}{n} \quad (1)$$

dove  $n$  è l'indice di rifrazione dell'acqua e si è posto uguale a 1 l'indice di rifrazione dell'aria.

Applicando nuovamente la legge di Snell all'interfaccia acqua-plexiglass, si ha



$$n_p \sin \theta_0 = n \sin \theta \quad (2)$$

dove  $n_p$  è l'indice di rifrazione del plexiglass e  $\theta_0 = 37^\circ$ .

Sostituendo la (1) nella (2) si ottiene

$$n_p = \frac{1}{\sin \theta_0} \simeq 1.66. \quad (3)$$

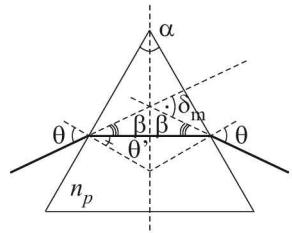
Qualora venga tolta l'acqua, l'angolo di rifrazione  $\theta'$  del raggio luminoso in aria soddisfa la legge di Snell:

$$n_p \sin \theta_0 = \sin \theta' \quad (4)$$

e quindi, per la (3),  $\sin \theta' = 1$  e  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ . Ciò significa che, anche togliendo l'acqua, si è in condizioni di riflessione totale con incidenza all'angolo limite.

#### S.10.4.

La condizione di deviazione minima si ottiene quando il raggio rifratto nel prisma si propaga ortogonalmente alla bisettrice dell'angolo al vertice (vedi figura). In queste condizioni di simmetria è facile trovare delle relazioni geometriche che legano i vari angoli. L'angolo di deviazione minima  $\delta_m$  è supplementare ad un angolo che a sua volta è supplementare alla somma dei due angoli  $\beta$ , quindi



$$\pi - \delta_m = \pi - 2\beta \Rightarrow \delta_m = 2\beta, \quad (1)$$

mentre l'angolo di rifrazione nel prisma  $\theta'$  è pari alla semiangolo al vertice in quanto i due angoli sono delimitati da lati tra loro ortogonali

$$\theta' = \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

L'angolo di incidenza  $\theta$  è quindi dato da

$$\theta = \theta' + \beta = \frac{\alpha + \delta_m}{2} \quad (3)$$

ed il suo seno è pari a

$$\sin \theta = \sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}. \quad (4)$$

D'altra parte, per la legge di Snell

$$\sin \theta = n_p \sin \theta' = n_p \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (5)$$

dove si è utilizzata la relazione (2). Unendo le ultime due equazioni si arriva infine alla

relazione

$$\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2} = n_p \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow n_p = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (6)$$

che consente di determinare l'indice di rifrazione del prisma a partire dalla misura dell'angolo di deviazione minima, noto l'angolo al vertice. Sostituendo i dati si ottiene

$$n_p = \frac{\sin 25^\circ}{\sin 15^\circ} = 1.6329. \quad (7)$$

Dato, viceversa, un prisma con l'indice di rifrazione  $n_p$  appena determinato, esiste un valore massimo per l'angolo al vertice affinché sia possibile misurare la deviazione minima. Riscrivendo la legge di Snell espressa nell'equazione (5) si ottiene infatti

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \theta}{n_p} \leq \frac{1}{n_p}, \quad (8)$$

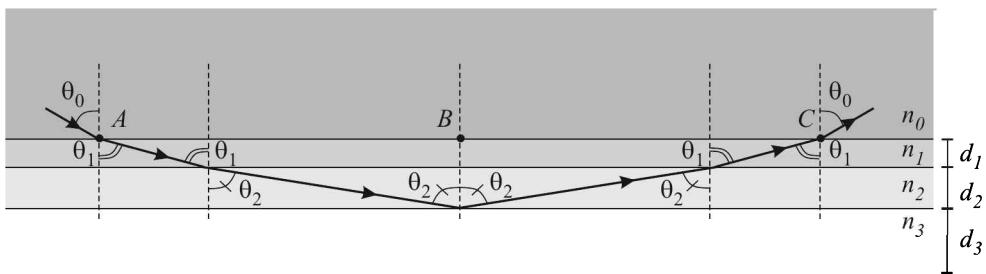
dove si è imposta la condizione  $\sin \theta \leq 1$ . La precedente equazione diventa quindi la seguente limitazione sull'angolo al vertice  $\alpha$

$$\alpha \leq 2 \arcsin \frac{1}{n_p} = 37.76^\circ. \quad (9)$$

### S.10.5.

Applicando la legge di Snell alle varie interfacce è possibile determinare gli angoli di rifrazione e la traiettoria del raggio nel multistrato. Si cominci applicando la legge di Snell nel punto A

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \arcsin \left( \frac{n_0}{n_1} \sin \theta_0 \right) = 67.5^\circ. \quad (1)$$



Osservando la figura è semplice dedurre che anche l'angolo di incidenza del raggio alla superficie 1-2 è pari a  $\theta_1$ , infatti i due angoli sono alterni interni. Quindi posso applicare nuovamente la legge di Snell a questa interfaccia, ottenendo

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right) = 81.8^\circ. \quad (2)$$

Essendo gli angoli alterni interni il raggio inciderà all'interfaccia 2-3 con lo stesso angolo  $\theta_2$  e quindi scrivendo di nuovo la legge di Snell a questa interfaccia si ottiene

$$n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 \Rightarrow \sin \theta_3 = \frac{n_2}{n_3} \sin \theta_2 = 1.07 > 1. \quad (3)$$

L'impossibilità di determinare l'angolo  $\theta_3$  dalla legge di Snell sta ad indicare che all'interfaccia 2-3 non c'è rifrazione, bensì riflessione totale. Successivamente, quindi, il raggio risale gli strati fino a tornare nella zona ad indice  $n_0$  nel punto C. Il cammino percorso dal raggio prima e dopo la riflessione totale è perfettamente simmetrico rispetto all'asse del segmento AC, in quanto le leggi di Snell alle interfacce attraversate sono esattamente le stesse. Indicando con B la proiezione sul segmento AC del punto in cui si ha riflessione totale, si può quindi concludere che il segmento AC è lungo il doppio rispetto al segmento AB. Quindi

$$AC = 2AB = 2(d_1 \tan \theta_1 + d_2 \tan \theta_2) = 256.5 \text{ mm}. \quad (4)$$

Il raggio luminoso, quindi, non attraversa completamente la struttura multistrato, ma ritorna nel mezzo ad indice di rifrazione  $n_0$  nel punto C, all'interfaccia superiore tra il mezzo 0 ed il mezzo 1 e ad una distanza AC dal punto iniziale A.

#### Osservazione:

La curvatura dei raggi luminosi a causa della rifrazione in mezzi ad indice di rifrazione crescente o decrescente è la spiegazione che sta alla base dei miraggi più comuni. L'aria più calda è più rarefatta e quindi ha un indice di rifrazione più basso, viceversa dove l'aria è più fredda l'indice di rifrazione è più alto. A seconda delle condizioni climatiche l'aria può essere più calda o più fredda in prossimità del terreno rispetto alle zone soprastanti. Nel primo caso si ottengono miraggi inferiori, nel secondo caso miraggi superiori. Se ad esempio ci si trova in un deserto oppure si sta camminando sull'asfalto in una giornata di sole, può accadere di vedere una pozza d'acqua davanti a noi, che però risulta irraggiungibile. In effetti, quella che sembra una pozza d'acqua non è altro che un miraggio inferiore del cielo di fronte a noi. In questi due casi l'aria è più calda in prossimità del terreno e quindi i raggi luminosi provenienti dal cielo che giungono radenti al terreno curvano e arrivano ai nostri occhi (in modo analogo a quanto discusso nel presente problema). L'immagine del cielo che arriva al nostro occhio mediante questo continuo processo di rifrazione è però analoga a quella che osserveremmo se sul terreno fosse presente una superficie riflettente quale ad esempio una pozza d'acqua. Un altro esempio di miraggio inferiore si ottiene osservando il tramonto sul mare quando l'acqua è ancora calda e riesce quindi a scaldare gli strati d'aria più bassi (vedi l'immagine di copertina di questo eserciziario). In questo caso inferiormente all'immagine del sole si può notare un miraggio del sole stesso, capovolto e schiacciato. Un'altra tipologia di miraggio è il miraggio superiore che avviene invece

quando gli strati d'aria inferiori sono più freddi. Ad esempio in primavera nei mari del nord, quando l'acqua è ancora fredda per il recente disgelo ed il sole riscalda gli strati d'aria superiori, è possibile osservare una nave all'orizzonte con un miraggio superiore della nave stessa, ma capovolta.

### S.10.6.

Trattando con specchi e diottri la complicazione maggiore risiede nel memorizzare le convenzioni indispensabili per utilizzare correttamente le formule. Per questo motivo ricordiamo qui le principali convenzioni per una superficie di discontinuità, sia essa quella di uno specchio o di un diottro. Detto  $V$  il vertice della superficie, ossia il punto di intersezione della superficie con l'asse ottico o di simmetria, si ha per convenzione che:

- 1) La luce incidente proviene da sinistra;
- 2) La distanza  $p$  di un oggetto dal vertice  $V$  è positiva se l'oggetto si trova a sinistra di  $V$ , mentre è negativa se l'oggetto si trova a destra;
- 3) La distanza  $q$  dell'immagine dal vertice  $V$  è positiva se l'immagine si trova a destra di  $V$  mentre è negativa se l'immagine si trova a sinistra;
- 4) Il raggio di curvatura  $R$  di una superficie sferica è positivo se il centro di curvatura si trova a destra del vertice  $V$  (superficie sferica convessa), mentre è negativo se il centro di curvatura si trova a sinistra di  $V$  (superficie sferica concava).
- 5) Per oggetti estesi la distanza  $y$  di un punto dall'asse ottico è positiva se il punto è situato in alto rispetto all'asse, è negativa se il punto è situato in basso rispetto all'asse. Per un'immagine estesa la distanza  $y'$  di un punto rispetto all'asse è positiva se il punto si trova in basso mentre è negativa se il punto è in alto.

Nel problema in questione il raggio di curvatura  $R$  dello specchio sferico è negativo in quanto lo specchio è concavo ed il suo centro di curvatura si trova a sinistra del vertice  $V$ . Tenendo in mente le convenzioni appena richiamate e ponendoci in approssimazione parassiale, cioè con raggi a piccola inclinazione rispetto all'asse ottico, possiamo scrivere l'equazione dello specchio sferico come:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}, \quad (1)$$

dove  $p$  è la distanza della lampadina dallo specchio e  $q$  è la distanza a cui verranno focalizzati i raggi uscenti dalla lampadina e riflessi nello specchio. Per illuminare il più lontano possibile poniamo  $q \rightarrow -\infty$ , per cui si ricava

$$\frac{1}{p} = -\frac{2}{R} \Rightarrow R = -2p = -10 \text{ cm}. \quad (2)$$

#### Osservazione:

Due punti si dicono *coniugati* rispetto allo specchio sferico quando le loro distanze dal vertice,  $p$  e  $q$  rispettivamente, soddisfano l'equazione (1). La distanza dal vertice di un punto coniugato con un punto all'infinito si chiama *distanza focale*  $f$  e nel caso di specchio sferico concavo individua un punto alla sinistra del vertice, detto *fuoco*, tale per cui lo specchio collima i raggi uscenti da esso e vi focalizza i raggi collimati provenienti dall'infinito. Per uno specchio sferico la distanza focale è pari alla metà del suo raggio di curvatura  $f = R/2$  ed ha quindi valore positivo per specchi convessi e negativo per specchi

concavi.

### S.10.7.

Il cucchiaio può essere trattato come uno specchio sferico. Ricordando le convezioni richiamate nella soluzione dell'esercizio precedente e ponendoci in approssimazione parassiale, si può applicare al cucchiaio l'equazione dello specchio sferico:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}, \quad (1)$$

dove  $p$  e  $q$  sono le distanze rispettivamente dell'oggetto e dell'immagine dal vertice dello specchio, mentre  $R$  è il raggio di curvatura dello specchio. Dall'equazione precedente posso esprimere la distanza immagine come

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{2}{R} \Rightarrow q = \frac{pR}{R + 2p}. \quad (2)$$

Se il viso del bambino si trova a distanza  $p_1 = 20$  cm dal cucchiaio, la sua immagine si forma alla distanza

$$q_1 = \frac{-120 \text{ cm}^2}{34 \text{ cm}} = -3.5 \text{ cm}, \quad (3)$$

dove il segno negativo indica che l'immagine si forma a sinistra dello specchio ed è reale in quanto frutto dell'incontro di raggi convergenti come rappresentato in figura.

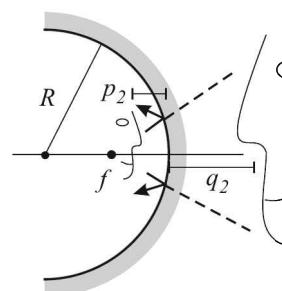
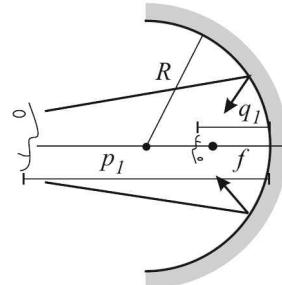
Se invece il viso del bambino si trova a distanza  $p_2 = 2$  cm dal cucchiaio, la sua immagine si formerà alla distanza

$$q_2 = \frac{-12 \text{ cm}^2}{-2 \text{ cm}} = 6 \text{ cm}, \quad (4)$$

dove il segno positivo indica che l'immagine si forma a destra dello specchio ed è quindi virtuale, cioè frutto dell'incontro di prolungamenti di raggi divergenti. L'ingrandimento trasversale  $I$  causato dallo specchio è definito come il rapporto tra la dimensione trasversale dell'immagine  $y'$  fratto la dimensione trasversale dell'oggetto  $y$ . Da considerazioni geometriche si ricava inoltre che:

$$I = \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}. \quad (5)$$

Nel caso in cui la distanza del viso dal cucchiaio sia  $p_1$ , si ottiene un ingrandimento pari



a

$$I_1 = -\frac{q_1}{p_1} = \frac{3.5 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 0.175. \quad (6)$$

L'immagine sarà quindi rimpicciolita e capovolta. Ricordando infatti la convenzione per i segni delle dimensioni di oggetto e immagine (punto 5 nella soluzione dell'esercizio precedente) è possibile dedurre che un ingrandimento positivo comporta un'immagine ribaltata mentre un ingrandimento negativo comporta un'immagine diritta.

Nel caso in cui la distanza del viso dal cucchiaio sia  $p_2$ , si ottiene invece un ingrandimento pari a

$$I_2 = -\frac{q_2}{p_2} = \frac{-6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = -3. \quad (7)$$

L'immagine sarà quindi diritta ed ingrandita di un fattore 3.

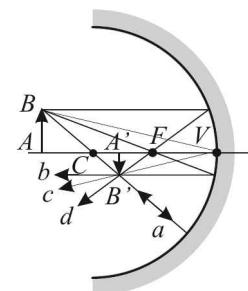
*Osservazioni:*

i) Con uno specchio sferico concavo si possono ottenere due tipi di immagine, una reale e rimpicciolita ed una virtuale ingrandita. Le due situazioni si ottengono rispettivamente quando la distanza oggetto è maggiore del modulo della distanza focale  $p > |f| = |R|/2$  e quando la distanza oggetto è minore del modulo della distanza focale  $p < |f| = |R|/2$ .

Nel presente problema il raggio di curvatura della parte concava del cucchiaio è pari a  $R = -6 \text{ cm}$  e quindi la distanza focale è uguale a  $f = -3 \text{ cm}$  che individua la posizione del fuoco dello specchio alla sinistra del vertice.

ii) Nelle figure precedenti si è costruita graficamente l'immagine a partire dall'oggetto. Questo procedimento è estremamente utile e permette di capire graficamente la posizione e l'ingrandimento dell'immagine. Per spiegare operativamente come procedere consideriamo l'oggetto disegnato in figura la cui estensione trasversale va da un punto  $A$  ad un punto  $B$ . Per determinarne l'immagine consideriamo il punto  $B$  e facciamo partire da esso almeno due dei seguenti quattro raggi notevoli:

- a) raggio uscente da  $B$  e passante per il centro di curvatura  $C$ : questo raggio viene riflesso su se stesso;
- b) raggio uscente da  $B$  e passante per il fuoco  $F$ : questo raggio viene riflesso parallelamente all'asse ottico;
- c) raggio uscente da  $B$  ed incidente sul vertice  $V$ : questo raggio viene riflesso specularmente rispetto all'asse ottico;
- d) raggio uscente da  $B$  e parallelo all'asse ottico: questo raggio viene riflesso in modo da passare per il fuoco  $F$ .



L'intersezione di almeno due di questi raggi individua il punto estremo dell'immagine  $B'$ . Il punto  $A'$  coniugato ad  $A$  si trova proiettando ortogonalmente il punto  $B'$  sull'asse ottico. Questa costruzione geometrica, qui rappresentata per semplicità in un solo caso può essere utilizzata in generale per tutti i problemi che coinvolgono gli specchi sferici e con opportune variazioni può essere estesa in modo semplice anche ai diottri ed alle lenti.

**S.10.8.**

In questo caso il cucchiaio può essere assimilato ad uno specchio convesso con raggio di curvatura  $R = 6$  cm. L'equazione dello specchio sferico è la stessa utilizzata precedentemente:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}, \quad (1)$$

ma questa volta il raggio di curvatura è positivo ed il fuoco si trova alla destra del vertice  $V$ . La distanza a cui di formano le immagini può essere espressa, a partire dalla (1), come

$$q = \frac{pR}{R + 2p}. \quad (2)$$

Nel caso in cui il viso del bambino sia a distanza  $p_1 = 20$  cm dal cucchiaio si ottiene

$$q_1 = \frac{120 \text{ cm}^2}{46 \text{ cm}} = 2.6 \text{ cm}, \quad (3)$$

che rappresenta un'immagine virtuale in quanto frutto dell'intersezione di raggi divergenti.

Nel caso in cui il viso del bambino sia a distanza  $p_2 = 2$  cm dal cucchiaio si ottiene

$$q_2 = \frac{12 \text{ cm}^2}{10 \text{ cm}} = 1.2 \text{ cm}, \quad (4)$$

a sua volta virtuale.

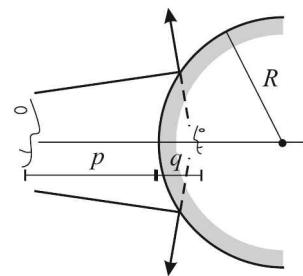
Gli ingrandimenti sono dati da

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{2.6 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = -0.13 \\ I_2 &= -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{1.2 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = -0.6 \end{aligned} \quad (5)$$

In entrambi i casi l'immagine è diritta e rimpiccioluta.

*Osservazione:*

Nel caso di specchio convesso l'immagine è sempre virtuale, diritta e rimpiccioluta, con un ingrandimento che aumenta in modulo man mano che l'oggetto si avvicina allo specchio. Un esemplificazione di questi effetti può essere osservata negli specchi convessi posti in prossimità degli incroci a visibilità ridotta.

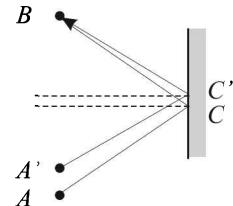


**S.10.9.**

i) Uno specchio piano riflette i raggi in modo che l'angolo di riflessione sia uguale all'angolo di incidenza. Per questo motivo un raggio che esce dal punto A e finisce nel punto B, non può che incidere sullo specchio in un punto C che si trova sull'asse del segmento AB. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per un punto A', come mostrato in figura.

Utilizzando queste considerazioni è possibile dire che, affinché i raggi luminosi provenienti dalle suole degli stivali finiscano negli occhi del cliente, è necessario che la superficie dello specchio sia presente ad un'altezza  $z_s$  corrispondente al punto medio tra le suole e gli occhi:

$$z_s = \frac{h}{2} = 85 \text{ cm}. \quad (1)$$



Se si vuole, d'altra parte, che anche i raggi luminosi provenienti dalla cima degli stivali finiscano negli occhi del cliente, la superficie riflettente dovrà anche essere presente ad un'altezza  $z_c$  corrispondente al punto medio tra la cima degli stivali e gli occhi:

$$z_c = \frac{h+s}{2} = 105 \text{ cm}. \quad (2)$$

Tutti i raggi luminosi provenienti dagli altri punti degli stivali finiranno negli occhi del cliente riflettendosi sullo specchio ad altezze comprese tra  $z_s$  e  $z_c$ . L'altezza ottimale a cui appendere lo specchio di lato  $d = 40 \text{ cm}$  è quindi quella in cui il centro dello specchio si trovi all'altezza intermedia tra  $z_s$  e  $z_c$  e quindi lo specchio andrà da un'altezza minima

$$z_{min} = \frac{z_s + z_c}{2} - \frac{d}{2} = 75 \text{ cm}, \quad (3)$$

ad un'altezza massima pari a

$$z_{max} = \frac{z_s + z_c}{2} + \frac{d}{2} = 115 \text{ cm}. \quad (4)$$

ii) Un volta fissato lo specchio ci proponiamo di determinare l'intervallo di altezza degli occhi per cui sia possibile che i clienti del negozio riescano ad osservare gli stivali che indossano. Si consideri un generico cliente i cui occhi si trovino ad un'altezza  $h'$  da terra. Affinché i raggi provenienti dalle suole e dalla cima degli stivali finiscano comunque negli occhi del cliente è necessario che i punti ad altezza  $z'_s$  e  $z'_c$  siano ancora sullo specchio, e quindi che

$$\begin{aligned} z_{min} &\leq z'_s = \frac{h'}{2} \leq z_{max} & 150 \text{ cm} \leq h' \leq 230 \text{ cm} \\ z_{min} &\leq z'_c = \frac{h'+s}{2} \leq z_{max} & 110 \text{ cm} \leq h' \leq 190 \text{ cm} \end{aligned} \quad (5)$$

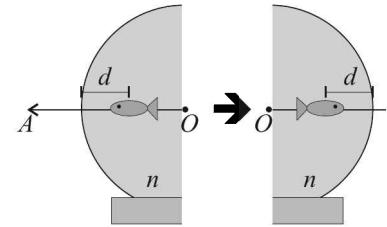
Per vedere lo stivale completo, l'altezza degli occhi  $h'$  deve quindi essere compresa nell'intersezione dei due intervalli e cioè

$$150 \text{ cm} \leq h' \leq 190 \text{ cm}. \quad (6)$$

E' interessante osservare che tutte le considerazioni fatte prescindono dalla distanza dallo specchio a cui si trova il cliente. Per questo motivo, se lo specchio è ben posizionato, è possibile avvicinarsi ed allontanarsi dallo specchio continuando ad osservare gli stivali.

### S.10.10.

Analizziamo separatamente le due direzioni, cominciando da quella indicata con  $A$ . Il vaso pieno d'acqua può essere considerato come un diottro sferico in cui però i raggi incidenti sulla superficie e provenienti dal pesce arrivano da destra. Ricordando il primo punto delle convenzioni richiamate nella soluzione S.4.6, i raggi incidenti sulla superficie del diottro devono provenire da sinistra. E' quindi necessario ribaltare il disegno in modo che il pesce si trovi comunque a sinistra della superficie diottrica. In approssimazione parassiale, possiamo quindi applicare l'equazione del diottro sferico



$$\frac{n_1}{p_A} + \frac{n_2}{q_A} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (1)$$

dove  $n_1$  ed  $n_2$  sono rispettivamente l'indice di rifrazione dell'acqua e dell'aria,  $p_A = d$  è la distanza del pesce dalla superficie diottrica,  $q_A$  è la distanza a cui si forma l'immagine e  $R = -r$  è il raggio di curvatura del diottro, negativo poiché il diottro è concavo.

Sostituendo i corrispondenti valori nell'equazione del diottro si ottiene

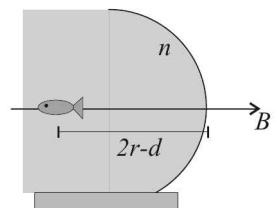
$$\frac{1.33}{5 \text{ cm}} + \frac{1}{q_A} = \frac{1 - 1.33}{-20 \text{ cm}} \Rightarrow q_A = -4 \text{ cm} \quad (2)$$

e quindi l'ingrandimento trasversale è pari a

$$I_A = \frac{n_1 q_A}{n_2 p_A} = -1.06. \quad (3)$$

L'immagine risulta quindi virtuale in quanto si forma dallo stesso lato dell'oggetto, diritta in quanto l'ingrandimento trasversale è negativo (vedere le convenzioni di segno richiamate in S.4.6), più vicina all'osservatore di quanto lo sia l'oggetto e leggermente più grande.

Analizziamo ora la direzione  $B$ . Considerando ancora il vaso come un diottro, si può notare che i raggi incidenti sulla superficie provengono già da sinistra senza bisogno di ribaltare il disegno. Si può quindi applicare direttamente l'equazione del diottro sferico



$$\frac{n_1}{p_B} + \frac{n_2}{q_B} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (4)$$

dove  $n_1$  ed  $n_2$  sono rispettivamente l'indice di rifrazione dell'acqua e dell'aria,  $p_B = 2r - d$  è la distanza del pesce dalla superficie diottrica,  $q_B$  è la distanza a cui si forma l'immagine

e  $R = -r$  è il raggio di curvatura del diottro, negativo poiché il diottro è concavo. Sostituendo i valori nell'equazione si ottiene

$$\frac{1.33}{35 \text{ cm}} + \frac{1}{q_B} = \frac{1 - 1.33}{-20 \text{ cm}} \Rightarrow q = -46 \text{ cm} \quad (5)$$

e quindi l'ingrandimento trasversale è pari a

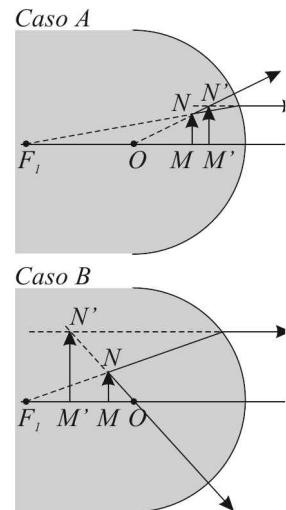
$$I_B = \frac{n_1 q_B}{n_2 p_B} = -1.75. \quad (6)$$

L'immagine risulta quindi virtuale, diritta, più lontana dall'osservatore di quanto lo sia l'oggetto e significativamente più grande.

Quindi il pesce risulterà più grande se osservato in direzione  $B$  piuttosto che in direzione  $A$ .

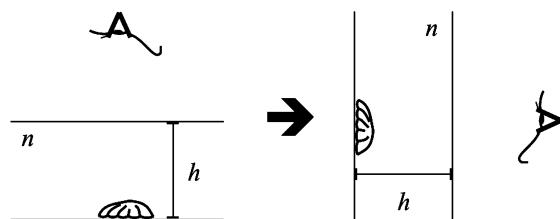
#### Osservazione:

Per avere una comprensione più intuitiva dei risultati dell'esercizio è utile effettuare la costruzione geometrica dell'immagine. Per semplicità si rappresentino le dimensioni trasversali dell'oggetto con un segmento  $MN$  e quelle dell'immagine con un segmento  $M'N'$ . In figura (non in scala) è indicato il punto di fuoco del diottro  $F_1$ , oltre al centro di curvatura  $O$ . La costruzione dell'immagine a partire dall'oggetto si effettua tracciando due raggi passanti per il punto  $N$ , uno tale da passare per il centro di curvatura  $O$  e che quindi si propaghi radialmente senza venire deviato dalla superficie diottica, l'altro passante per il fuoco  $F_1$  e che quindi verrà deviato in direzione parallela all'asse ottico dalla superficie diottica. I prolungamenti dei raggi che si trovano alla destra del diottro si intersecheranno nel punto immagine  $N'$ . Il punto immagine  $M'$  si trova quindi proiettando il punto  $N'$  sull'asse ottico. Effettuando questa costruzione geometrica sia per il caso  $A$  che per il caso  $B$  è possibile riscontrare graficamente tutti i risultati ottenuti nello svolgimento dell'esercizio.



#### S.10.11.

La superficie piana di separazione tra aria e acqua può essere considerata come una superficie diottica con raggio di curvatura infinito. Per rispettare il punto 1) delle convenzioni richiamate nella soluzione S.4.6, ruotiamo il disegno di  $90^\circ$  in modo che i raggi provenienti dalla conchiglia incidano sulla superficie diottica da sinistra (pur perdendo in questo modo la fedeltà alla situazione reale.) L'equazione del diottro sferico



provenienti dalla conchiglia incidano sulla superficie diottica da sinistra (pur perdendo in questo modo la fedeltà alla situazione reale.) L'equazione del diottro sferico

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (1)$$

considerando un raggio di curvatura infinito, diventa

$$q = -\frac{n_2}{n_1}p, \quad (2)$$

dove  $n_1$  e  $n_2$  sono rispettivamente l'indice di rifrazione dell'acqua e dell'aria e  $p = h$  e  $q$  sono rispettivamente la distanza della conchiglia e della sua immagine dal pelo dell'acqua. Si può immediatamente osservare che nel caso di diottro piano l'immagine che si forma è sempre virtuale in quanto, essendo sempre  $q < 0$ , l'immagine si forma dalla stessa parte dell'oggetto. Inoltre, sostituendo l'equazione (2) nella definizione di ingrandimento trasversale

$$I = \frac{n_1 q}{n_2 p} = -1, \quad (3)$$

si ottiene un ingrandimento sempre unitario in modulo e di segno negativo, ad indicare che l'immagine virtuale è diritta.

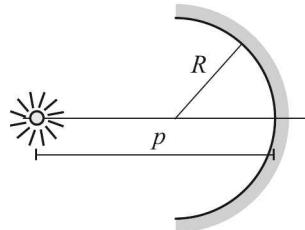
L'immagine della conchiglia nel problema in esame sarà quindi virtuale e diritta, delle stesse dimensioni e ad una profondità apparente di

$$h' = -q = 37.6 \text{ cm}. \quad (4)$$

### S.10.12.

(i) Si consideri inizialmente il caso in cui sia la sorgente che lo specchio si trovino in aria. Si può allora scrivere direttamente l'equazione dello specchio sferico

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \Rightarrow q = \frac{pR}{p+2R} = -5.71 \text{ cm}, \quad (1)$$



dove  $p = 40 \text{ cm}$  è la distanza tra la sorgente luminosa e lo specchio,  $q$  è la distanza dallo specchio a cui si forma l'immagine (negativa in quanto l'immagine si forma a sinistra dello specchio) e  $R = -10 \text{ cm}$  è il raggio di curvatura dello specchio concavo.

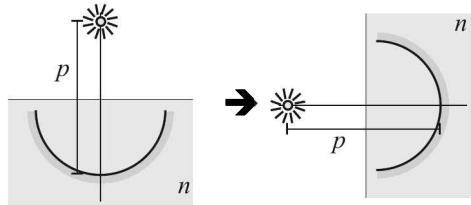
(ii) Si consideri ora il caso in cui lo specchio sia immerso in un liquido ad indice di rifrazione  $n = 1.4$  ad una profondità  $h = 20 \text{ cm}$ . Ruotiamo la figura in modo da avere i raggi incidenti da sinistra, in accordo con le convenzioni richiamate in S.4.6. La superficie di separazione tra liquido e aria può essere trattata come un diottro piano e quindi il sistema risulta composto dalla successione di un diottro e di uno specchio.

Si cominci determinando la posizione dell'immagine generata dal diottro. Per un diottro piano vale la seguente relazione

$$q_d = -\frac{n_2}{n_1}p_d, \quad (2)$$

dove  $n_2 = n$  è l'indice di rifrazione del liquido,  $n_1 = 1$  è l'indice di rifrazione dell'aria e  $p_d = p - h = 20 \text{ cm}$  è la distanza della sorgente luminosa dal diottro. Dalla precedente equazione si ottiene

$$q_d = -n(p - h) = -28 \text{ cm}. \quad (3)$$



Il diottro piano, quindi, genera un'immagine virtuale a distanza  $q_d$  dalla superficie del liquido, quindi ancora più lontana dallo specchio di quanto non sia la sorgente luminosa. L'immagine virtuale generata dal diottro diventa ora l'oggetto per lo specchio, da cui si trova ad una distanza pari a

$$p_s = h - q_d = 48 \text{ cm}. \quad (4)$$

Scrivendo nuovamente l'equazione dello specchio sferico si ottiene

$$\frac{1}{p_s} - \frac{1}{q_s} = -\frac{2}{R} \Rightarrow q_s = \frac{p_s R}{p_s + 2R} = -5.58 \text{ cm}. \quad (5)$$

Nel secondo caso, quindi, l'immagine della sorgente luminosa generata dallo specchio si troverà più vicina al fuoco dello specchio ( $f = R/2 = -5 \text{ cm}$ ), in quanto la sorgente apparirà più distante dallo specchio a causa dell'effetto diottrico del liquido.

### S.10.13.

I punti coniugati della lente in esame soddisfano l'equazione della lente sottile

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad (1)$$

dove  $p$  e  $q$  sono le distanze rispettivamente dell'oggetto e dell'immagine dal centro della lente e  $f$  è la sua focale, positiva in quanto la lente è convergente.

Dall'equazione delle lenti si può ricavare la posizione dell'immagine  $q$  in funzione di  $p$  ed  $f$

$$q = \frac{pf}{p-f}. \quad (2)$$

Siccome sia  $p$  che  $q$  non sono noti, è necessaria un'altra equazione. L'altro dato che viene fornito dal problema riguarda l'ingrandimento trasversale

$$I = \frac{q}{p} = \frac{f}{p-f}, \quad (3)$$

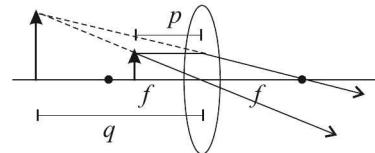
in cui si è sostituita l'equazione (2).

Il segno dell'ingrandimento trasversale però varia a seconda che l'immagine sia virtuale o reale, nel primo caso l'ingrandimento è negativo in quanto l'immagine risulta diritta, nel secondo caso l'ingrandimento è positivo in quanto l'immagine è ribaltata (per le convenzioni sui segni a cui si fa riferimento si veda la soluzione S.4.6). Si considerino quindi i due casi separatamente, cominciando dall'immagine virtuale.

L'ingrandimento trasversale sarà pari a

$$I_1 = \frac{q_1}{p_1} = \frac{f}{p_1 - f} = -3, \quad (4)$$

da cui si ricava

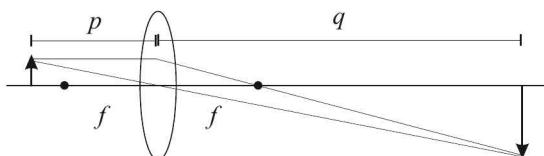


$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{3}f = 20 \text{ mm} \\ q_1 &= I_1 p_1 = -60 \text{ mm} \end{aligned} \quad (5)$$

Si può notare come l'immagine virtuale si ottenga quando l'oggetto si trovi ad una distanza dalla lente inferiore alla distanza focale. Si consideri ora il caso di immagine reale.

L'ingrandimento trasversale avrà segno positivo e quindi

$$I_2 = \frac{q_2}{p_2} = \frac{f}{p_2 - f} = 3, \quad (6)$$



da cui si ricava

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{4}{3}f = 40 \text{ mm} \\ q_2 &= I_2 p_2 = 120 \text{ mm} \end{aligned} \quad (7)$$

Si può notare come l'immagine reale si ottenga quando la distanza dell'oggetto dalla lente sia superiore alla distanza focale.

#### S.10.14.

L'altezza  $y$  di un oggetto che genera un'immagine alta  $y'$  dopo la lente può essere ricavata dalla definizione di ingrandimento trasversale

$$I = \frac{y'}{y} = \frac{q}{p} \Rightarrow y = \frac{p}{q} y', \quad (1)$$

dove la distanza  $p$ , a cui si trova l'oggetto, può essere determinata mediante l'equazione della lente sottile in funzione di  $q$ , nota  $f$ :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow p = \frac{qf}{q-f}. \quad (2)$$

Sostituendo l'espressione appena ricavata nella (1) si ottiene

$$y = y' \frac{f}{q-f}. \quad (3)$$

Nei tre casi proposti avremo quindi tre oggetti di dimensioni rispettivamente pari a

$$\begin{aligned} y_1 &= y' \frac{f}{q_1 - f} = 6 \text{ cm} \\ y_2 &= y' \frac{f}{q_2 - f} = 3 \text{ cm} \\ y_3 &= y' \frac{f}{q_3 - f} = 2 \text{ cm} \end{aligned} \quad (4)$$

### S.10.15.

Si determini inizialmente l'immagine generata dalla lente sottile. Dall'equazione delle lenti

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

e ponendo  $p = L$ , si ricava

$$q = \frac{fL}{L-f} = 30 \text{ cm}. \quad (2)$$

L'immagine formata dalla lente diventa quindi l'oggetto del diottro, la cui equazione è

$$\frac{n_1}{p'} + \frac{n_2}{q'} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (3)$$

dove  $n_1 = 1$  è l'indice di rifrazione dell'aria,  $n_2 = n$  è l'indice di rifrazione del diottro e  $p' = d - q = -27 \text{ cm}$  è la distanza oggetto, negativa in quanto la lente forma la sua immagine a destra del diottro. Sostituendo questi dati nell'equazione precedente si ottiene

$$\frac{1}{d-q} + \frac{n}{q'} = \frac{n-1}{R} \Rightarrow q' = \frac{nR(d-q)}{(n-1)(d-q)-R} = 8.55 \text{ cm}. \quad (4)$$

L'ingrandimento trasversale del sistema è pari al prodotto degli ingrandimenti trasversali dei due componenti ottici cambiato di segno. In generale, se il sistema ottico è composto da  $m$  componenti l'ingrandimento totale sarà pari a

$$I = (-1)^{m-1} \prod_{i=1}^m I_i, \quad (5)$$

dove  $I_i$  è l'ingrandimento dovuto al componente  $i$ -esimo e  $\prod$  indica il prodotto di tutti gli ingrandimenti, dal primo al  $m$ -esimo. Nel presente caso

$$I = -I_{\text{lente}} I_{\text{diottro}} = -\frac{q}{p} \frac{n_1 q'}{n_2 p'} = -\frac{qq'}{nL(d-q)} = 0.99. \quad (6)$$

Il fatto che l'ingrandimento totale sia positivo e pressoché unitario indica che l'immagine

è ribaltata e di altezza circa uguale a quella dell'oggetto originario.

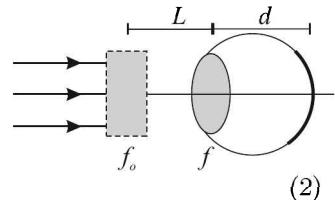
### S.10.16.

Un punto a distanza infinita viene focalizzato dal sistema cornea-cristallino esattamente alla distanza focale  $f = 25$  mm e quindi risulterà sfocato sulla cornea che si trova a distanza  $d = 28$  mm. Per correggere questa miopia si ipotizzi di indossare un paio di occhiali, le cui lenti si trovino a distanza  $L = 20$  mm dagli occhi. Non sapendo a priori quale tipo di lente, convergente o divergente, possa compensare la miopia, si consideri la lente dell'occhiale come una lente sottile di focale  $f_o \leq 0$ . Applicando l'equazione delle lenti sottili alla lente d'occhiale si ottiene

$$\frac{1}{p_o} + \frac{1}{q_o} = \frac{1}{f_o} \quad (1)$$

ed essendo l'oggetto all'infinito,  $p_o \rightarrow \infty$ ,

$$q_o = f_o. \quad (2)$$



Di conseguenza l'immagine della lente d'occhiale si formerà a sinistra della lente stessa se  $f_o < 0$  (immagine virtuale), mentre si formerà a destra della lente d'occhiale se  $f_o > 0$ . In entrambi i casi, l'immagine della lente d'occhiale diventa l'oggetto del sistema cornea-cristallino, ad una distanza da quest'ultimo pari a

$$p = L - q_o = L - f_o. \quad (3)$$

Considerando ora l'equazione delle lenti per il sistema cornea-cristallino di focale  $f$ , si ottiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad (4)$$

dove  $p$  è la distanza oggetto prima determinata e  $q$  è la distanza a cui si forma l'immagine. Imponendo che l'immagine si formi sulla retina e cioè che  $q = d$ , si ottiene

$$\frac{1}{L - f_o} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \Rightarrow f_o = L - \frac{fd}{d - f} = -213.3 \text{ mm}. \quad (5)$$

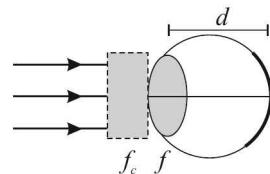
La lente d'occhiale deve quindi essere una lente divergente con focale  $f_o$ .

Si consideri ora il caso di lente a contatto. Ancora una volta, immaginiamo di non conoscere a priori se la lente a contatto debba essere convergente o divergente per correggere la miopia, quindi la rappresentiamo come una lente sottile con focale  $f_c \leq 0$ . Due lenti addossate, come la lente a contatto e la lente relativa al sistema cornea-cristallino, sono equivalenti ad un'unica lente sottile di focale  $f_{eq}$  tale da soddisfare la seguente relazione

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_c} + \frac{1}{f}. \quad (6)$$

Se si vuole che l'immagine all'infinito venga focalizzata da questa lente equivalente esattamente sulla retina, è necessario imporre che  $f_{eq} = d$ , per cui

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{f_c} + \frac{1}{f} \Rightarrow f_c = \frac{fd}{f-d} = -233.3 \text{ mm}. \quad (7)$$



Quindi anche la lente a contatto sarà una lente divergente, di focale leggermente più lunga.

*Osservazioni:*

- i) Sia la lente d'occhiale che la lente a contatto formano un'immagine virtuale in un punto a distanza  $p = 233.3$  mm dal sistema cornea-cristallino. Questo è infatti il piano coniugato al piano della retina mediante la lente di focale  $f = 25$  mm.
- ii) Entrambe le lenti formano un'immagine virtuale dell'oggetto all'infinito. Per quanto visto nelle soluzioni degli esercizi precedenti, l'immagine virtuale di una lente sottile è sempre un'immagine diritta, per questo motivo l'uso di occhiali o lenti a contatto non capovolge la visione.
- iii) La misura della miopia in diottrie indica il potere diottrico della lente necessaria per compensare il difetto. Infatti la diottria è definita come il reciproco della focale della lente degli occhiali espressa in metri. Nel presente problema la correzione della miopia richiedeva una lente d'occhiale di focale  $f_o = -0.213$  m, corrispondente quindi a -4.7 diottrie.

### S.10.17.

Per una lente biconvessa simmetrica, la distanza focale si calcola come

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R}{2}, \quad (1)$$

dove  $n_1$  è l'indice di rifrazione del mezzo in cui si trova la lente (aria o acqua nel presente caso),  $n_2$  è l'indice di rifrazione del materiale con cui è fatta la lente e  $R$  è il raggio di curvatura delle superfici della lente. In caso di lente biconvessa  $R > 0$ .

Si cominci calcolando la focale della lente nelle due condizioni:

a) lente in aria:  $n_1 = 1$  e la focale è pari a

$$f_a = \frac{1}{0.5} \frac{R}{2} = 10 \text{ cm}; \quad (2)$$

b) lente in acqua:  $n_1 = 1.33$  e la focale è pari a

$$f_b = \frac{1.33}{0.17} \frac{R}{2} = 39 \text{ cm}. \quad (3)$$

Discutiamo ora la definizione di ingrandimento visuale  $V$ , da non confondersi con l'ingrandimento trasversale  $I$  finora trattato. Mentre la definizione di ingrandimento trasversale è il rapporto tra la dimensione dell'immagine e quella dell'oggetto, indipendentemente

dallo strumento di visione con cui si acquisisce l'immagine, l'ingrandimento visuale è un concetto strettamente legato al nostro occhio.

Il nostro occhio, infatti, consente normalmente la migliore visione alla distanza  $\delta = 25$  cm dall'oggetto. A distanze superiori l'immagine sulla retina è più piccola e quindi, coinvolgendo un minor numero di coni e bastoncelli, meno definita. A distanze inferiori l'occhio non riesce a mettere a fuoco nitidamente l'immagine sulla retina. L'ingrandimento

visuale si ottiene quindi realizzando un'immagine sulla retina di dimensioni maggiori di quelle che si otterrebbero osservando l'oggetto alla distanza  $\delta$ . Chiamando  $\alpha$  l'angolo sotto il quale è osservato un oggetto di altezza  $y$  a distanza  $\delta$ , è sicuramente vera la relazione

$$\tan \alpha = \frac{y}{\delta}. \quad (4)$$

L'immagine sulla retina avrà la corrispondente estensione trasversale  $y'$  rappresentata in figura. L'ingrandimento visuale si verifica quando l'immagine sulla retina ha dimensioni maggiori di  $y'$  e quindi quando l'oggetto riesce ad essere visto sotto un angolo  $\beta > \alpha$ . Si definisce quindi ingrandimento visuale il rapporto

$$V = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}. \quad (5)$$

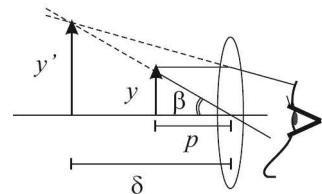
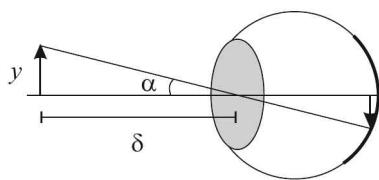
Lo strumento più semplice che permette un ingrandimento visuale è la lente di ingrandimento. Posizionando la lente d'ingrandimento ad una distanza dall'oggetto inferiore alla distanza focale, si ottiene un'immagine virtuale ingrandita che viene vista dall'occhio sotto un angolo maggiore. L'ingrandimento visuale massimo si ottiene ponendo la lente ad una distanza dall'oggetto tale da formare un'immagine virtuale esattamente alla distanza  $q = -\delta = -25$  cm. In questo caso la distanza  $p$  dell'oggetto dalla lente dovrà essere

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-\delta} = \frac{1}{f} \Rightarrow p = \frac{\delta f}{\delta + f}. \quad (6)$$

Osservando la figura si deduce inoltre che

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{y}{\delta} \\ \tan \beta &= \frac{y'}{\delta} = \frac{y}{p} \end{aligned} \quad (7)$$

per cui l'ingrandimento visuale massimo è pari a



$$V_{max} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = 1 + \frac{\delta}{f}. \quad (8)$$

Per una visione invece con occhio rilassato, anche se con minore ingrandimento visuale, si può porre la lente a distanza  $p \cong f$  dall'oggetto, in modo che l'immagine virtuale si formi all'infinito ed il muscolo ciliare non debba contrarsi per mettere a fuoco l'immagine. In questo caso, l'ingrandimento visuale sarà pari a

$$V = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{y/f}{y/\delta} = \frac{\delta}{f}. \quad (9)$$

Nel problema in esame, la lente in aria (a) ed in acqua (b) fornirà i seguenti ingrandimenti visuali massimi:

$$\begin{aligned} V_{max}^a &= 3.5 \\ V_{max}^b &= 1.6 \end{aligned} \quad (10)$$

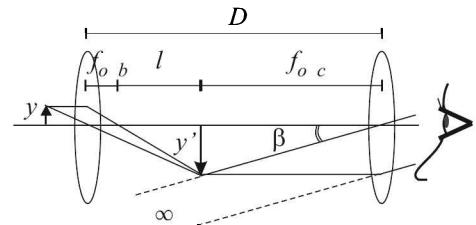
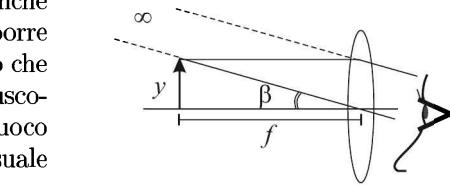
ed i seguenti ingrandimenti con occhio rilassato:

$$\begin{aligned} V^a &= 2.5 \\ V^b &= 0.6 \end{aligned} \quad (11)$$

Si può notare come questa lente in acqua non fornisca un ingrandimento visuale a occhio rilassato.

### S.10.18.

Un microscopio è composto da due lenti convergenti. L'obiettivo, a focale corta, crea un'immagine dell'oggetto, molto ingrandita, in corrispondenza del fuoco della seconda lente, detta oculare. L'oculare quindi crea un'immagine virtuale all'infinito che l'occhio rilassato percepisce come ulteriormente ingrandita. L'immagine finale osservata dall'utente sarà quindi ribaltata e avrà un'ingrandimento visuale dato da



$$V = -I_{ob}V_{oc}, \quad (1)$$

dove  $I_{ob}$  è l'ingrandimento trasversale dovuto all'obiettivo e  $V_{oc}$  è l'ingrandimento visuale dovuto all'oculare. Osservando la figura si può esprimere l'ingrandimento trasversale dell'obiettivo come

$$I_{ob} = \frac{y'}{y} = \frac{l}{f_{ob}}, \quad (2)$$

dove  $l = D - f_{ob} - f_{oc}$ . Per l'ingrandimento visuale dell'oculare si può invece fare riferimento alle formule ricavate nella soluzione S.4.6 per la lente d'ingrandimento

$$V_{oc} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\delta}{f_{oc}}, \quad (3)$$

dove  $\delta = 25$  cm è la distanza di visione distinta per l'occhio normale. L'ingrandimento visuale del microscopio sarà quindi espresso da

$$V = -\frac{(D - f_{oc} - f_{ob})\delta}{f_{ob}f_{oc}} \Rightarrow |V| = \frac{(D - f_{oc} - f_{ob})\delta}{f_{ob}f_{oc}}. \quad (4)$$

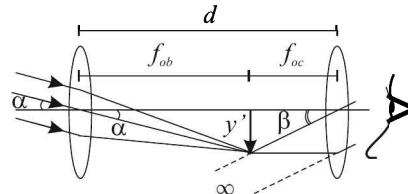
Imponendo quindi che  $|V| = 1000$ , si ottiene

$$f_{ob} = \frac{(D - f_{oc})\delta}{|V|f_{oc} + \delta} = 0.173 \text{ cm} = 1.73 \text{ mm}. \quad (5)$$

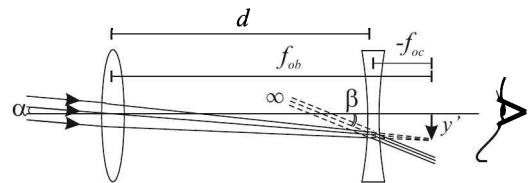
### S.10.19.

Un cannocchiale è uno strumento che permette di vedere oggetti molto distanti con un certo ingrandimento. Se si osserva un oggetto esteso a grande distanza, i raggi provenienti da un punto estremo dell'oggetto arrivano sul cannocchiale paralleli tra loro ed individuano un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse ottico. Il cannocchiale genera un'immagine virtuale all'infinito che possa quindi essere osservata con occhio rilassato, ma sotto un angolo  $\beta > \alpha$ . Il cannocchiale è composto da due lenti, quella più esterna è detta obiettivo ed ha una focale più lunga, quella più vicina all'occhio è detta oculare ed ha

una focale più corta. Esistono due possibili configurazioni per realizzare un cannocchiale. La prima, seguendo l'idea di Keplero, è quella di utilizzare due lenti convergenti; la seconda, seguendo invece l'idea di Galileo, consiste nell'utilizzare come obiettivo una lente convergente e come oculare una lente divergente. Affinché queste due lenti generino un'immagine virtuale all'infinito è necessario che l'immagine reale creata dall'obiettivo si formi in corrispondenza del fuoco dell'oculare. Essendo i raggi incidenti sull'obiettivo paralleli tra loro, la precedente condizione implica che



Cannocchiale di Keplero



Cannocchiale di Galileo

$$d = f_{ob} + f_{oc}, \quad (1)$$

dove  $d$  è la distanza tra le due lenti e  $f_{ob}$  e  $f_{oc}$  sono rispettivamente le focali dell'obiettivo e dell'oculare.

Osservando, inoltre, le due figure e ricordando che per una lente divergente  $f < 0$ , è possibile dedurre che per entrambe le configurazioni

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{y'}{f_{ob}} \\ \tan \beta &= -\frac{y'}{f_{oc}}\end{aligned}\quad (2)$$

per cui l'ingrandimento visuale del cannocchiale è pari a

$$V = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}}, \quad (3)$$

che ha segno negativo per il cannocchiale di Keplero ( $f_{ob} > 0, f_{oc} > 0$ ) e quindi l'immagine risulterà ribaltata, mentre ha segno positivo per il cannocchiale di Galileo ( $f_{ob} > 0, f_{oc} < 0$ ) e l'immagine risulterà diritta.

Per dimensionare le focali delle lenti da utilizzare nel cannocchiale, fissata la distanza delle lenti ed il modulo dell'ingrandimento visuale si possono mettere a sistema le equazioni (1) e (3) in cui le uniche incognite saranno proprio le focali delle due lenti:

$$\begin{aligned}d &= f_{ob} + f_{oc} & f_{ob} &= d - f_{oc} \\ V &= -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} & V &= -\frac{d - f_{oc}}{f_{oc}}\end{aligned}\quad (4)$$

A questo punto, però, è necessario specificare quale configurazione si preferisce adottare per decidere quale segno dare all'ingrandimento visuale, di cui si conosce solo il modulo. Infatti, come precedentemente discusso, nel caso di cannocchiale di Keplero (a) l'ingrandimento sarà negativo e pari a  $V_a = -20$ , mentre nel caso di cannocchiale di Galileo (b) l'ingrandimento sarà positivo e pari a  $V_b = 20$ . Analizziamo inizialmente il caso (a):

$$\begin{aligned}f_{ob}^a &= d - f_{oc}^a & f_{ob}^a &= 19.05 \text{ cm} \\ V_a &= -\frac{d - f_{oc}^a}{f_{oc}^a} = -20 & f_{oc}^a &= 0.95 \text{ cm}\end{aligned}\quad (5)$$

Mentre per il caso (b) si ottiene

$$\begin{aligned}f_{ob}^b &= d - f_{oc}^b & f_{ob}^b &= 21.05 \text{ cm} \\ V_b &= -\frac{d - f_{oc}^b}{f_{oc}^b} = 20 & f_{oc}^b &= -1.05 \text{ cm}\end{aligned}\quad (6)$$

### S.10.20.

- i) Il punto a distanza  $p$  dall'obiettivo è coniugato con il punto sulla pellicola a distanza  $q$ . Per la legge delle lenti

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = \frac{fp}{p-f}, \quad (1)$$

dove si è espressa la distanza  $q$  in funzione di  $p$  e  $f$ . Un secondo punto oggetto sull'asse ottico a distanza  $\Delta p$  dal precedente verrà focalizzato in un piano diverso a distanza  $\Delta q$  da quello della pellicola e genererà su di essa un cerchio di confusione. Il legame tra  $\Delta q$  e  $\Delta p$  è non lineare, ma per  $\Delta p \ll p$  si può approssimare con la seguente relazione lineare

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial p} \Delta p = -\frac{f^2}{(p-f)^2} \Delta p. \quad (2)$$

Il segno di  $\Delta q$  è opposto a quello di  $\Delta p$  in accordo con la legge delle lenti. Punti più distanti dall'obiettivo ( $\Delta p > 0$ ) vengono focalizzati prima della pellicola ( $\Delta q < 0$ ) e viceversa. Dalla figura si può inoltre dedurre che il raggio del cerchio di confusione  $d/2$  è dato da

$$\frac{d}{2} = \tan \theta |\Delta q| = \frac{D/2}{q} |\Delta q| = \frac{Df}{2p(p-f)} \Delta p, \quad (3)$$

dove si è approssimato  $q + \Delta q \simeq q$  nel calcolo della tangente, infatti se  $\Delta p \ll p$  allora anche  $\Delta q \ll q$ . Quindi

$$d = \frac{Df}{p(p-f)} \Delta p \quad (4)$$

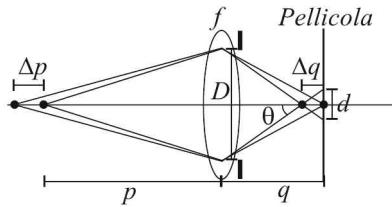
ii) Dall'equazione (4) si può ricavare l'espressione della profondità di campo

$$\Delta p = \frac{pd}{D} \left( \frac{p}{f} - 1 \right). \quad (5)$$

Fissata la focale dell'obiettivo  $f$ , la posizione dell'oggetto  $p$  ed il diametro tollerabile del cerchio di confusione  $d$ , la profondità di campo dipende in modo inversamente proporzionale dall'apertura dell'obiettivo  $D$ . Il parametro normalmente utilizzato in fotografia per indicare l'apertura dell'obiettivo è il parametro adimensionale  $\bar{f} = \frac{f}{D}$ , da non confondersi con la focale  $f$ . I due valori di diametro, dati dal testo, corrispondono alla massima e minima apertura di un tipico obiettivo con focale 50 mm e corrispondono rispettivamente a (a)  $\bar{f} = 4.5$  e (b)  $\bar{f} = 22$ . Mediante l'equazione (5) ed esprimendo tutte le grandezze in mm, si ricava nei due casi

$$\begin{aligned} \Delta p_a &= 176 \text{ mm} = 17.6 \text{ cm} \\ \Delta p_b &= 860 \text{ mm} = 86 \text{ cm} \end{aligned} \quad (6)$$

iii) Si consideri ora un obiettivo grandangolare ( $f = 25$  mm) ed un teleobiettivo ( $f = 100$  mm) con pari apertura ( $D = 5$  mm). Utilizzando ancora l'equazione (5) ed esprimendo tutte le grandezze in mm si ottiene



$$\begin{aligned}\Delta p_{ga} &= 790 \text{ mm} = 79 \text{ cm} \\ \Delta p_{to} &= 190 \text{ mm} = 19 \text{ cm}\end{aligned}\tag{7}$$

Si può quindi concludere che a parità di condizioni, il grandangolo ha una profondità di campo maggiore del teleobiettivo.



# Capitolo 11

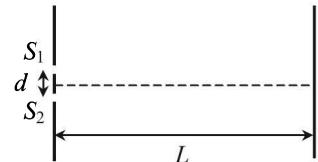
## Interferenza

### 11.1 Problemi

#### P.11.1.

Nel dispositivo di Young mostrato in figura, la distanza fra le fenditure è  $d = 0.8 \text{ mm}$  e lo schermo è posto ad una distanza  $L = 1 \text{ m}$  dal piano delle fenditure. Sapendo che la lunghezza d'onda della luce incidente è  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , si determini la posizione sullo schermo dei massimi e dei minimi di interferenza.

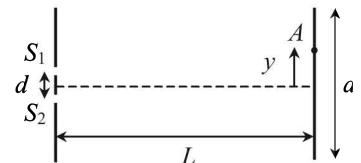
Si dica poi, giustificando la risposta, cosa succede se il dispositivo viene immerso in acqua (indice di rifrazione dell'acqua  $n = 1.33$ ).



#### P.11.2.

Un fascio di luce, di lunghezza d'onda  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , incide in direzione normale su uno schermo in cui sono praticate due fenditure poste ad una distanza  $d = 0.4 \text{ mm}$  l'una dall'altra e forma una figura d'interferenza su uno schermo quadrato di lato  $a = 0.2 \text{ m}$ , posto ad una distanza  $L = 2 \text{ m}$  dal piano delle fenditure, come mostrato in figura. Si determinino:

- L'ordine  $m$  della frangia di interferenza di ordine più elevato visibile sullo schermo, precisando se si tratta di una frangia chiara o scura;
- La distanza sullo schermo fra la seconda e la quinta frangia scura.



#### P.11.3.

Un fascio di luce, di lunghezza d'onda  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , incide in direzione normale su uno schermo in cui sono praticate due fenditure poste ad una distanza  $d = 0.4 \text{ mm}$  l'una dall'altra e forma una figura d'interferenza su uno schermo posto ad una distanza  $L = 2 \text{ m}$  dal piano delle fenditure. Se una delle due fenditure viene chiusa, l'intensità della luce sullo schermo è  $I_0$ . Si determini l'intensità risultante in un punto A dello schermo posto ad una distanza  $y = 5.4 \text{ mm}$  dal suo centro, come mostrato nella figura dell'esercizio

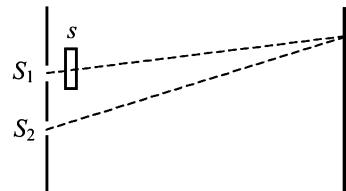
precedente.

#### P.11.4.

In un dispositivo di Young la distanza fra le fenditure è  $d = 0.1$  mm e lo schermo è posto ad una distanza  $L = 3$  m. Sullo schermo si osservano due figure di interferenza, la prima prodotta da luce di lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 520$  nm e la seconda prodotta da luce di lunghezza d'onda  $\lambda_2 = 720$  nm. Si determini di quanto distano fra loro sullo schermo i massimi di interferenza del terzo ordine delle due distribuzioni di intensità. Si determini inoltre quali sono i due massimi di interferenza di ordine minimo delle due distribuzioni di intensità che risultano sovrapposti.

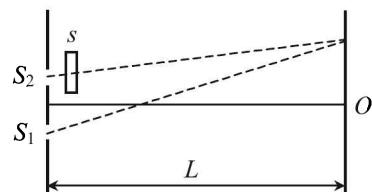
#### P.11.5.

Si considerino due sorgenti coerenti puntiformi,  $S_1$  e  $S_2$ , di luce monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 500$  nm. Su uno schermo posto a grande distanza dal piano delle sorgenti si osservano frange di interferenza. Se sul cammino del fascio di luce che proviene da  $S_1$  si interpone una laminetta di vetro di spessore  $s$  ed indice di rifrazione  $n = 1.5$ , la frangia chiara centrale viene a trovarsi dove era la frangia chiara di ordine  $m = 100$  in assenza della laminetta. Si determini lo spessore della laminetta di vetro.



#### P.11.6.

Due sorgenti coerenti puntiformi,  $S_1$  e  $S_2$ , di luce monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$ , poste a distanza  $d$ , interferiscono su uno schermo posto a grande distanza  $L$ . Le ampiezze dei campi elettrici sono rispettivamente  $A_1$  ed  $A_2 = eA_1$  (dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali). Una laminetta di vetro assorbente, con indice di rifrazione  $n = n_r + in_i$ , viene interposta sul cammino della radiazione proveniente da  $S_2$ . Si determini lo spessore della laminetta per cui i minimi di interferenza abbiano intensità nulla. Si determini inoltre la posizione del massimo di ordine zero rispetto al punto O indicato in figura.

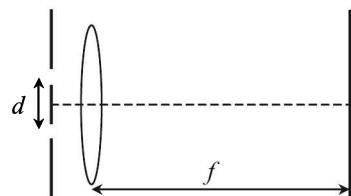


#### P.11.7.

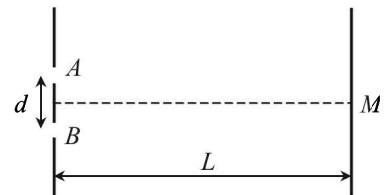
Si considerino due sorgenti puntiformi monocromatiche e coerenti, linearmente polarizzate. Si assuma che l'angolo fra le direzioni dei rispettivi campi elettrici, di uguale ampiezza  $E_0$ , sia  $\alpha$ . Si discuta l'andamento della figura di interferenza che si osserva su uno schermo posto a grande distanza dalle sorgenti, al variare dell'angolo  $\alpha$ .

**P.11.8.**

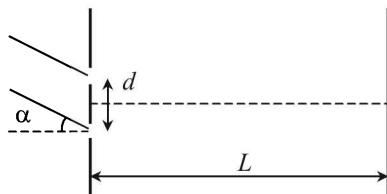
Luce monocromatica polarizzata linearmente di lunghezza d'onda  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , viene fatta incidere su due fenditure uguali, poste a distanza  $d = 0.2 \text{ mm}$  l'una dall'altra. Una lente convergente sottile, di lunghezza focale  $f = 60 \text{ cm}$ , viene posta dietro il piano delle fenditure, come mostrato in figura. La figura di interferenza fra le due sorgenti viene osservata su uno schermo posto ad una distanza dalla lente pari alla lunghezza focale  $f$ . Si determini la distanza fra la seconda e la settima frangia chiara sullo schermo.

**P.11.9.**

Luce monocromatica, polarizzata linearmente, di lunghezza d'onda  $\lambda$ , viene fatta incidere su due fenditure uguali, A e B, poste a una distanza  $d$  l'una dall'altra. La figura di interferenza viene osservata su uno schermo posto a distanza  $L$  ( $L \gg d$ ) dal piano delle fenditure. Nel punto M dello schermo, posto sull'asse di simmetria del dispositivo (vedi figura), si osserva una frangia chiara di intensità  $I_0$ . Si determini l'intensità delle due sorgenti e si calcoli la distanza  $y_1$  del primo minimo ed il valore dell'intensità in tale punto. Davanti alla fenditura A viene poi inserito un polarizzatore con asse di trasmissione a  $45^\circ$  rispetto alla direzione di polarizzazione della luce incidente. Si determini il valore dell'intensità in corrispondenza del massimo e del minimo di interferenza di ordine zero.

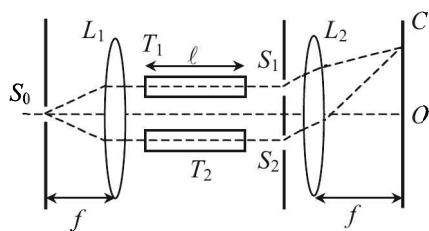
**P.11.10.**

Un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide con un angolo  $\alpha$  (piccolo) su due fenditure praticate in uno schermo opaco separate da una distanza  $d$ . Si determini la distribuzione di intensità e la posizione del massimo di interferenza di ordine zero su di un piano posto a grande distanza  $L$  dallo schermo. Supponendo di inserire davanti ad una delle due fenditure una lamina sottile di materiale trasparente di indice di rifrazione  $n$ , si determini lo spessore minimo  $s$  della lamina per riportare il massimo di interferenza di ordine zero al centro.

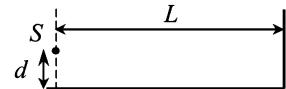


**P.11.11.**

Si consideri l'apparato sperimentale mostrato in figura. Due fasci di luce paralleli provenienti dalla sorgente luminosa monocromatica  $S_0$ , di lunghezza d'onda  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , passano in due tubi uguali, inizialmente vuoti, di lunghezza  $\ell = 20 \text{ cm}$ . Sullo schermo C si osservano frange di interferenza. Successivamente uno dei tubi viene riempito di gas. Si osserva che la frangia luminosa centrale si sposta e va ad occupare la posizione precedentemente occupata dalla sessantesima frangia. Si determini l'indice di rifrazione del gas all'interno del tubo.

**P.11.12.**

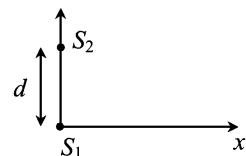
Una sorgente luminosa S, che emette luce monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$ , linearmente polarizzata, è posta a distanza  $d$  da una lastra di vetro. Su uno schermo perpendicolare alla lastra, posto a grande distanza  $L$  da S (con  $L \gg d$ ), si osservano frange di interferenza tra la luce proveniente direttamente da S e quella riflessa dalla lastra di vetro. Si determini la posizione dei massimi e minimi di interferenza sullo schermo.

**P.11.13.**

Siano  $S_1$  e  $S_2$  due sorgenti puntiformi coerenti di onde elettromagnetiche sferiche di lunghezza d'onda  $\lambda$ , con la stessa polarizzazione. L'intensità di  $S_1$  misurata ad una distanza  $d$  da  $S_1$  è pari a  $I_1$ , mentre quella di  $S_2$ , misurata alla stessa distanza  $d$  da  $S_2$ , è pari a  $I_2$  (con  $I_1 > I_2$ ). Si determinino i punti P in corrispondenza dei quali si misura una intensità totale nulla, esprimendo le coordinate dei punti P in funzione delle distanze  $r_1$  e  $r_2$  dalle due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ , rispettivamente. Si determini inoltre di quanto si devono sfasare le due sorgenti perché nei punti P prima determinati l'intensità totale risulti massima.

**P.11.14.**

Si considerino due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  di onde sferiche di frequenza  $\nu = 30 \text{ GHz}$ , alimentate dallo stesso oscillatore, poste ad una distanza  $d = 8.4 \text{ cm}$  l'una dall'altra. Tali sorgenti emettono in modo isotropo la stessa potenza.



(i) Si determini la posizione del massimo di interferenza più vicino a  $S_1$  lungo l'asse  $x$ .

(ii) Si determini la posizione del minimo di interferenza più vicino a  $S_1$  lungo l'asse  $x$ , e si dica, giustificando la risposta, se in tale punto l'intensità è zero.

**P.11.15.**

Siano assegnate  $N$  sorgenti coerenti di onde sferiche monocromatiche di uguale ampiezza disposte su una retta ed equidistanziate di un tratto  $d$ . Le sorgenti sono fra loro in fase, ed emettono luce di lunghezza d'onda  $\lambda$ . Si determini la massima distanza fra le sorgenti

al di sotto della quale a grande distanza si osserva un solo massimo principale di intensità. Si dimostri inoltre che tale massimo si osserva nella direzione ortogonale alla retta lungo la quale sono disposte le sorgenti.

**P.11.16.**

Siano assegnate quattro sorgenti coerenti di onde sferiche monocromatiche di uguale potenza, disposte su una retta ed equidistanti di mezza lunghezza d'onda. Le sorgenti sono tra loro in fase. Si determinino le direzioni cui corrispondono i massimi principali di intensità e gli zeri. Si tracci qualitativamente la distribuzione angolare di intensità. (Si assuma di osservare la radiazione a distanza grande rispetto alla separazione fra le sorgenti).

**P.11.17.**

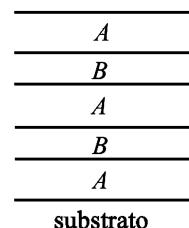
Un certo numero di sorgenti coerenti e quiescenti possono trasmettere segnali sia a frequenza  $\nu_1 = 30$  GHz che a frequenza  $\nu_2 = 24$  GHz. Nella figura di interferenza si osserva che il secondo minimo a partire dal massimo principale di ordine  $m = 1$  per la frequenza  $\nu_1$  cade allo stesso angolo del massimo principale di ordine  $m = 1$  per la frequenza  $\nu_2$ . Si determini il numero  $N$  di sorgenti.

**P.11.18.**

Un fascio di luce incide normalmente su una lamina di vetro di spessore  $d = 0.6 \mu\text{m}$ , con indice di rifrazione  $n = 1.5$ . Nel fascio incidente sono presenti tutte le lunghezze d'onda comprese fra  $\lambda_1 = 450 \text{ nm}$  e  $\lambda_2 = 750 \text{ nm}$ . Si determinino le lunghezze d'onda intensificate nel fascio riflesso.

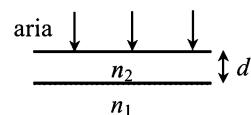
**P.11.19.**

Per ottenere uno specchio ad elevata riflettività nell'intorno di una data lunghezza d'onda, si riveste un substrato di vetro con un certo numero di strati dielettrici trasparenti (vedi figura) con indici di rifrazione alternativamente alto,  $n_A$ , e basso,  $n_B$  e di spessori  $d_A$  e  $d_B$  tali che  $n_A d_A = n_B d_B = \lambda/4$ , essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda (in vuoto) di un fascio di luce che incide in direzione perpendicolare allo specchio. Si dimostri che i campi elettrici riflessi alle varie interfacce fra gli strati dielettrici si sommano sempre in fase.



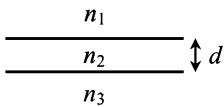
**P.11.20.**

Una lastra di vetro con indice di rifrazione  $n_1 = 1.76$ , viene ricoperta con un film sottile trasparente di spessore  $d$  ed indice di rifrazione  $n_2 = \sqrt{n_1}$ . Un fascio di luce bianca incide normalmente sulla lastra, come mostrato in figura. Si osserva che la lastra è perfettamente trasparente alla lunghezza d'onda  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . Si determini lo spessore minimo  $d$  del film che ricopre la lastra di vetro.



**P.11.21.**

Una lastra di vetro con indice di rifrazione  $n_3$  viene rivestita con un film sottile trasparente di indice di rifrazione  $n_2$  ( $n_2 < n_3$ ), e spessore  $d = \lambda/(4n_2)$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della luce che incide, in direzione normale, sulla lastra di vetro. La lastra di vetro è posta in aria (indice di rifrazione  $n_1 < n_2$ ). Si dimostri che, affinché la luce incidente sia completamente trasmessa (riflessione nulla), deve risultare  $r_{12} = r_{23}$ , avendo indicato con  $r_{12}$  il coefficiente di riflessione (in campo) all'interfaccia fra il mezzo 1 e il mezzo 2, e con  $r_{23}$  il coefficiente di riflessione (in campo) all'interfaccia fra il mezzo 2 e il mezzo 3.



## 11.2 Soluzioni

### S.11.1.

Nel dispositivo di Young in considerazione, le due fenditure  $S_1$  e  $S_2$  illuminate dalla radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda$ , agiscono come due sorgenti coerenti. Le due fenditure sono illuminate in modo tale che la fase iniziale della radiazione emessa dalle due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  è la stessa. La condizione per avere interferenza costruttiva in un punto  $P$  dello schermo è che la differenza di fase  $\Delta\phi$  fra le due onde provenienti da  $S_1$  e  $S_2$  sia un multiplo intero di  $2\pi$ , cioè:

$$\Delta\phi = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

Nel caso in esame tale differenza di fase è dovuta esclusivamente ai diversi cammini ottici  $\overline{S_1 P} = r_1$  e  $\overline{S_2 P} = r_2$ . Si ha quindi:

$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad (2)$$

Dal momento che lo schermo è posto a grande distanza dalle fenditure, la differenza di percorso  $(r_2 - r_1)$  si può bene approssimare come segue (vedi figura):

$$r_2 - r_1 \simeq d \sin \theta \quad (3)$$

Utilizzando le relazioni (1-3) si ottengono le posizioni angolari dei massimi di interferenza:

$$\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

Introducendo un asse  $y$  in corrispondenza dello schermo, come indicato in figura, con origine sull'asse di simmetria delle due fenditure  $S_1$  e  $S_2$ , la posizione dei massimi di interferenza si calcola facilmente. Poiché lo schermo è posto a grande distanza dal piano delle fenditure ( $L \gg d$ ) si ha:

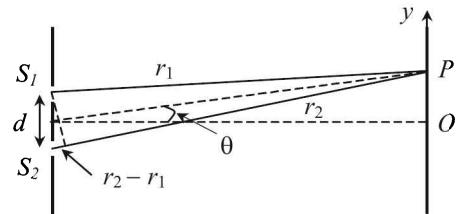
$$\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{y}{L} \quad (5)$$

Utilizzando le (4) e (5) si ottengono le posizioni sullo schermo dei massimi di interferenza:

$$y_{\max} = m \frac{\lambda L}{d} = m 0.625 \text{ mm} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6)$$

La condizione per avere interferenza distruttiva in un punto  $P$  dello schermo è che la differenza di fase  $\Delta\phi$  sia un multiplo dispari di  $\pi$ , in modo tale che le due onde siano in opposizione di fase. Utilizzando le (2) e (3) si ottiene che le posizioni angolari dei minimi di interferenza sono date da:

$$\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta = (2m + 1)\pi \quad (7)$$



Si ha quindi:

$$\sin \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8)$$

Utilizzando le (5) e (8) si ottengono le posizioni sullo schermo dei minimi di interferenza.

$$y_{\min} = (2m + 1) \frac{\lambda L}{2d} = (2m + 1) 0.312 \text{ mm} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9)$$

Se l'intero dispositivo viene immerso in acqua, lo sfasamento fra le due onde che interferiscono sullo schermo è dato da:

$$\Delta\phi = k_n(r_2 - r_1) = \frac{2\pi n}{\lambda}(r_2 - r_1) \simeq \frac{2\pi n}{\lambda} d \sin \theta \quad (10)$$

dove  $k_n$  indica la costante di propagazione nel mezzo con indice di rifrazione  $n$ . Le condizioni per l'interferenza costruttiva e distruttiva si scrivono quindi nel modo seguente:

(a) *interferenza costruttiva*:

$$\frac{2\pi n}{\lambda} d \sin \theta = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{nd} \quad (11)$$

per quanto riguarda la posizione dei massimi sullo schermo si ha quindi:

$$y_{\max} = m \frac{\lambda L}{nd} = m 0.47 \text{ mm} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (12)$$

(b) *interferenza distruttiva*:

$$\frac{2\pi n}{\lambda} d \sin \theta = (2m + 1)\pi \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2nd} \quad (13)$$

le posizioni dei minimi sullo schermo sono date da:

$$y_{\min} = (2m + 1) \frac{\lambda L}{2nd} = (2m + 1) 0.234 \text{ mm} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (14)$$

### S.11.2.

(i) Determiniamo innanzitutto le posizioni dei massimi e dei minimi di interferenza sullo schermo, seguendo lo stesso procedimento utilizzato nell'esercizio precedente. La condizione per avere interferenza costruttiva in un punto dello schermo è la seguente:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2m\pi \quad (1)$$

dove, dal momento che  $L \gg d$ :

$$r_2 - r_1 \simeq d \sin \theta \quad (2)$$

Dalle (1) e (2) si ottiene:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad (3)$$

Date le dimensioni dello schermo, il valore massimo dell'angolo  $\theta$  è dato da:

$$|\sin \theta_{\max}| \simeq |\tan \theta_{\max}| = \frac{a}{2L} \quad (4)$$

Dalle (3) e (4) si ricava:

$$|m| \frac{\lambda}{d} \leq \frac{a}{2L} \Rightarrow |m| \leq \frac{ad}{2\lambda L} = 33.3 \quad (5)$$

Quindi la frangia di interferenza costruttiva di ordine più elevato è la trentatreesima. La posizione angolare di tale massimo è data da:

$$\sin \theta = 33 \frac{\lambda}{d} = 0.0495 \quad (6)$$

Consideriamo ora i minimi di interferenza. Procedendo come nell'esercizio precedente si trova che le posizioni angolari dei minimi sono date dalla seguente espressione:

$$\sin \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2d} \quad (7)$$

Dalle (4) e (7) si ricava:

$$|2m + 1| \frac{\lambda}{2d} \leq \frac{a}{2L} \quad |2m + 1| \leq \frac{ad}{\lambda L} = 66.6 \Rightarrow -33 \leq m \leq 32 \quad (8)$$

La frangia scura di ordine più elevato,  $|2m + 1| = 65$ , corrisponde alla seguente posizione angolare:

$$\sin \theta = 65 \frac{\lambda}{2d} = 0.0487 \quad (9)$$

Confrontando le (6) e (9) si ottiene che la frangia di ordine più elevato visibile sullo schermo è la frangia chiara di ordine  $m = 33$ .

(ii) Poichè lo schermo è posto a grande distanza dal piano delle fenditure si ha:

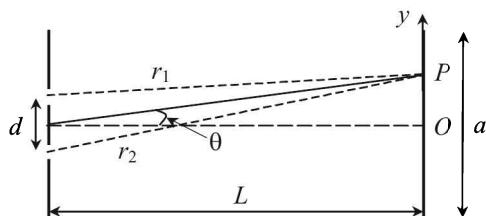
$$\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{y}{L} \quad (10)$$

avendo indicato con  $y$  la corrispondente posizione sullo schermo (vedi figura). Dalle relazioni (7) e (10) si ricava che le posizioni sullo schermo dei minimi di interferenza sono date dalla seguente espressione:

$$y_{\min} = (2m + 1) \frac{\lambda L}{2d} \quad (11)$$

Quindi la distanza sullo schermo fra la seconda e la quinta frangia scura è data da:

$$\Delta y_{25} = y_5 - y_2 = (11 - 5) \frac{\lambda L}{2d} = 3 \frac{\lambda L}{d} = 9 \text{ mm} \quad (12)$$



**S.11.3.**

La distribuzione di intensità sullo schermo è data dalla formula seguente:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi \quad (1)$$

dove  $I_1$  e  $I_2$  sono le intensità delle onde provenienti dalle due fenditure e  $\Delta\phi$  è la differenza di fase fra le due onde sullo schermo su cui si osserva la figura di interferenza. Nel caso in esame  $I_1 = I_2 = I_0$ , quindi la (1) diventa:

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} \quad (2)$$

La differenza di fase  $\Delta\phi$  è dovuta esclusivamente ai diversi cammini ottici fra le due sorgenti e un punto dello schermo, quindi:

$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \simeq \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (3)$$

Utilizzando le relazioni (2) e (3) si ottiene che la distribuzione di intensità sullo schermo è data da:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \right) \quad (4)$$

Dal momento che lo schermo è posto a grande distanza dal piano delle fenditure, e quindi l'angolo  $\theta$  è piccolo, risulta:

$$\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{y}{L} \quad (5)$$

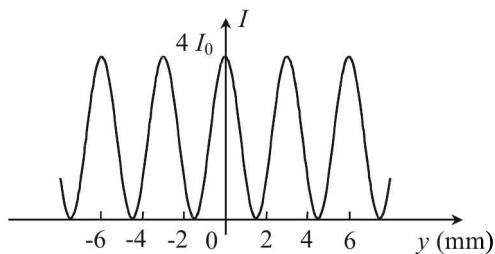
avendo introdotto un asse  $y$  in corrispondenza dello schermo, come mostrato nella figura relativa all'esercizio precedente, con origine sull'asse di simmetria delle due fenditure. Dalle (4) e (5) si ottiene:

$$I(y) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda L} y \right) \quad (6)$$

Quindi nel punto  $A$  dello schermo, posto a distanza  $y = 5.4$  mm dal suo centro, l'intensità risultante è data da:

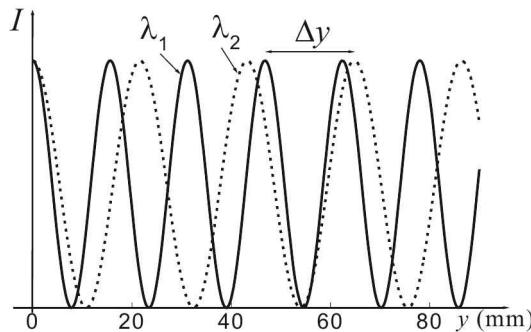
$$I(A) = 2.62 I_0 \quad (7)$$

In figura è mostrata la distribuzione di intensità su una porzione dello schermo.

**S.11.4.**

Le posizioni angolari dei massimi di interferenza sono date dalla seguente espressione:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$



Introducendo, come negli esercizi precedenti, un asse  $y$  sullo schermo, con origine sull'asse di simmetria delle fenditure, la posizione sullo schermo dei massimi di interferenza è data da:

$$y = m \frac{\lambda L}{d} \quad (2)$$

La distanza fra i massimi di interferenza del terzo ordine ( $m = 3$ ) delle distribuzioni di intensità relative alle due lunghezze d'onda  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  si ottiene dalla (2):

$$\Delta y = m \frac{L}{d} (\lambda_2 - \lambda_1) = 18 \text{ mm} \quad (3)$$

come mostrato nella figura, che riporta le distribuzioni di intensità sullo schermo per le due lunghezze d'onda. Determiniamo ora quali sono i primi massimi di interferenza delle due distribuzioni di intensità che risultano sovrapposti. Dalla (2) si ottiene:

$$m_1 \frac{\lambda_1 L}{d} = m_2 \frac{\lambda_2 L}{d} \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (4)$$

dove  $m_1$  e  $m_2$  sono numeri interi. Utilizzando la (4) si trova che ponendo  $m_2 = 13$  si ottiene  $m_1 = 18$ . Quindi il 18° massimo della distribuzione di intensità relativa alla lunghezza d'onda  $\lambda_1$  si trova sovrapposto al 13° massimo della distribuzione di intensità relativa alla lunghezza d'onda  $\lambda_2$ .

### S.11.5.

Il cammino ottico  $S_1P$  in cui è inserita la laminetta di vetro di spessore  $s$  si calcola nel modo seguente:

$$\ell_1 = (r_1 - s) + ns = r_1 + (n - 1)s \quad (1)$$

dove  $r_1$  è la lunghezza del cammino geometrico  $S_1P$ . Infatti il cammino  $S_1P$  è costituito da un tratto di propagazione in vuoto, di lunghezza  $(r_1 - s)$ , e da un tratto di propagazione nella laminetta di spessore  $s$  ed indice di rifrazione  $n$ , a cui corrisponde un cammino ottico pari a  $ns$  (dove  $n$  è la parte reale dell'indice di rifrazione). Lo sfasamento subito dall'onda

che proviene da  $S_1$  è quindi:

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \ell_1 = \frac{2\pi}{\lambda} [r_1 + (n - 1)s] \quad (2)$$

La fase  $\phi_1$  accumulata dall'onda proveniente da  $S_1$  si può anche calcolare come segue:

$$\phi_1 = k_0(r_1 - s) + k_n s = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - s) + \frac{2\pi n}{\lambda}s \quad (3)$$

avendo indicato con  $k_0 = 2\pi/\lambda$  la costante di propagazione nel vuoto e con  $k_n = 2\pi n/\lambda$  la costante di propagazione nel mezzo con indice di rifrazione  $n$ .

Il corrispondente sfasamento subito dall'onda che proviene da  $S_2$  è dato da:

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} r_2 \quad (4)$$

Quindi la differenza di fase fra le due onde che interferiscono nel punto  $P$  (assumendo che le fasi iniziali siano uguali) è data da:

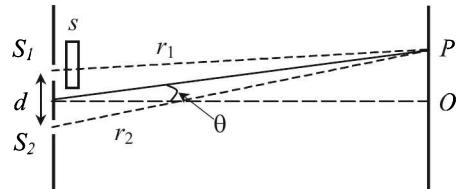
$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} [r_2 - r_1 - (n - 1)s] \quad (5)$$

Dato che lo schermo è posto a grande distanza dalle sorgenti, possiamo utilizzare la solita approssimazione:

$$r_2 - r_1 \simeq d \sin \theta \quad (6)$$

Sostituendo la (6) nella (5) si ricava:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} [d \sin \theta - (n - 1)s] \quad (7)$$



Le posizioni dei massimi di interferenza si ottengono imponendo che  $\Delta\phi$  sia un multiplo intero di  $2\pi$ :

$$\frac{2\pi}{\lambda} [d \sin \theta - (n - 1)s] = 2\pi m \quad (8)$$

La posizione angolare,  $\theta_0$ , della frangia centrale si ottiene dalla (8) ponendo  $m = 0$ :

$$\sin \theta_0 = (n - 1) \frac{s}{d} \quad (9)$$

Le posizioni angolari dei massimi di interferenza in assenza della laminetta sono fissate dalla seguente relazione (come mostrato negli esercizi precedenti):

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad (10)$$

quindi la posizione della frangia chiara di ordine 100 si ottiene dalla (10) ponendo  $m = 100$ :

$$\sin \theta_{100} = 100 \frac{\lambda}{d} \quad (11)$$

Dal momento che, inserendo la laminetta, la frangia chiara centrale viene a trovarsi dove era la centesima frangia chiara in assenza della laminetta, lo spessore della laminetta si calcola imponendo  $\theta_0 = \theta_{100}$ . Quindi, utilizzando le (9) e (11), si ricava:

$$s = 100 \frac{\lambda}{n - 1} = 100 \text{ } \mu\text{m}. \quad (12)$$

### S.11.6.

Affinchè i minimi di interferenza siano nulli, occorre che, sullo schermo, i campi elettrici delle due onde che interferiscono abbiano la stessa ampiezza. Calcoliamo quindi l'ampiezza del campo elettrico dell'onda proveniente da  $S_2$  dopo il passaggio nella laminetta di vetro assorbente. Indicando con  $A_2$  l'ampiezza del campo elettrico prima della lamina, il campo elettrico all'uscita dalla lamina ha la seguente espressione:

$$E_2 = A_2 \exp[i(k_n s - \omega t)] + \text{c.c.} \quad (1)$$

dove  $k_n$  indica la costante di propagazione nella laminetta con indice di rifrazione  $n = n_r + i n_i$ , cioè:

$$k_n = \frac{2\pi n}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_r + i n_i) \quad (2)$$

Nella (1) non si è considerato, per semplicità di scrittura, il termine di fase dovuto alla propagazione fra la sorgente e la laminetta. Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

$$E_2 = A_2 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} n_i s\right) \exp\left[i\left(\frac{2\pi s}{\lambda} n_r - \omega t\right)\right] + \text{c.c.} \quad (3)$$

L'ampiezza del campo dopo la laminetta (quindi anche sullo schermo su cui si osserva la figura di interferenza) è data dalla seguente espressione:

$$A_{2s} = A_2 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} n_i s\right) \quad (4)$$

Affinchè i minimi di interferenza siano nulli deve risultare:

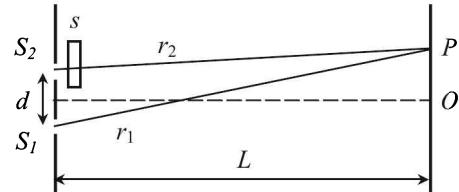
$$A_1 = A_{2s} \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} n_i s\right) \quad (5)$$

Poichè  $A_2 = eA_1$ , dalla (5) si ricava lo spessore della laminetta:

$$s = \frac{\lambda}{2\pi n_i} \quad (6)$$

Determiniamo ora le posizioni dei massimi di interferenza. Si procede come spiegato nell'esercizio precedente. Lo sfasamento subito dall'onda che proviene da  $S_1$  è dato da:

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \quad (7)$$



mentre lo sfasamento subito dall'onda che passa nella laminetta è dato da (vedi Eq. (2) dell'esercizio precedente):

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} [r_2 + (n_r - 1)s] \quad (8)$$

Infatti il cammino ottico  $S_2P$  si calcola come segue:

$$\ell_2 = (r_2 - s) + n_r s = r_2 + (n_r - 1)s \quad (9)$$

Si noti che lo sfasamento dipende da  $n_r$ , come mostrato chiaramente dal termine di fase che compare nell'espressione (3) del campo elettrico all'uscita dalla laminetta. La condizione per l'interferenza costruttiva è la seguente:

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} [r_1 - r_2 - (n_r - 1)s] = 2m\pi \quad (10)$$

dove, come al solito

$$r_1 - r_2 \simeq d \sin \theta \quad (11)$$

La posizione angolare,  $\theta_0$ , del massimo centrale si ottiene dalla (10) ponendo  $m = 0$ . Si ha quindi:

$$\sin \theta_0 = \frac{n_r - 1}{d} s \quad (12)$$

Poichè lo schermo è posto a grande distanza dalle sorgenti si può scrivere:

$$\sin \theta_0 \simeq \tan \theta_0 = \frac{y_0}{L} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{n_r - 1}{d} s L \quad (13)$$

Avendo indicato con  $y_0$  la posizione del massimo centrale rispetto al punto  $O$ .

### S.11.7.

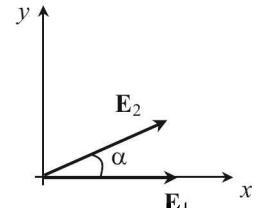
Sia  $x$  la direzione di polarizzazione del campo elettrico della sorgente  $S_1$ . Introducendo un asse  $y$  perpendicolare all'asse  $x$ , i campi elettrici delle due sorgenti in un punto  $P$  dello schermo si possono scrivere nel modo seguente:

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \cos(kr_1 - \omega t) \mathbf{u}_x \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0 \cos \alpha \cos(kr_2 - \omega t) \mathbf{u}_x + E_0 \sin \alpha \cos(kr_2 - \omega t) \mathbf{u}_y \quad (2)$$

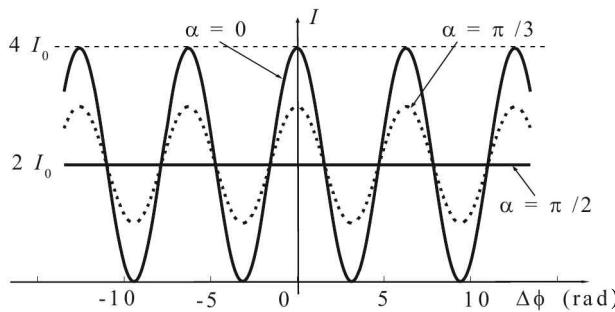
avendo indicato, come al solito, con  $k$  la costante di propagazione e con  $r_1$  e  $r_2$  le distanze fra le due sorgenti e il punto  $P$  dello schermo;  $\alpha$  è invece l'angolo compreso fra le direzioni dei due campi elettrici (vedi figura). Il campo elettrico totale nel punto  $P$  è dato dalla somma vettoriale dei campi  $\mathbf{E}_1$  ed  $\mathbf{E}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & [E_0 \cos(kr_1 - \omega t) + E_0 \cos \alpha \cos(kr_2 - \omega t)] \mathbf{u}_x + \\ & + E_0 \sin \alpha \cos(kr_2 - \omega t) \mathbf{u}_y = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (3)$$



Il modulo quadro del campo elettrico totale si calcola facilmente a partire dall'espressione (3):

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 = & E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 [\cos^2(kr_1 - \omega t) + \cos^2 \alpha \cos^2(kr_2 - \omega t) + \\ & + 2 \cos \alpha \cos(kr_1 - \omega t) \cos(kr_2 - \omega t)] \end{aligned} \quad (4)$$



Il terzo termine che compare nell'espressione (4) si scrive come segue:

$$\begin{aligned} & 2E_0^2 \cos \alpha \cos(kr_1 - \omega t) \cos(kr_2 - \omega t) = \\ & E_0^2 \cos \alpha [\cos(kr_1 + kr_2 - 2\omega t) + \cos(kr_2 - kr_1)] \end{aligned} \quad (5)$$

L'intensità risultante sullo schermo è proporzionale alla media temporale di  $|\mathbf{E}|^2$ :

$$I = \epsilon_0 c \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = \epsilon_0 c \frac{1}{t} \int_0^t |\mathbf{E}(t')|^2 dt' \quad (6)$$

dove il tempo  $t$  corrisponde a un numero molto elevato di periodi dell'onda. Dalle (4)-(6) si ottiene:

$$I = \epsilon_0 c E_0^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos \alpha \cos[k(r_2 - r_1)] \right\} \quad (7)$$

Infatti si ha:

$$\langle \cos^2(kr_1 - \omega t) \rangle = \langle \cos^2(kr_2 - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad (8)$$

$$\langle \cos(kr_1 + kr_2 - 2\omega t) \rangle = 0 \quad (9)$$

Dal momento che l'intensità di  $S_1$  (uguale all'intensità di  $S_2$ ) è data da:

$$I_0 = \epsilon_0 c \langle |\mathbf{E}_1|^2 \rangle = \epsilon_0 c E_0^2 \langle \cos^2(kr_1 - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \quad (10)$$

la relazione (7) si può scrivere nel modo seguente, che costituisce il risultato finale:

$$I = 2I_0(1 + \cos \alpha \cos \Delta\phi) \quad (11)$$

avendo indicato con  $\Delta\phi$  lo sfasamento fra le due onde sullo schermo:

$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) \quad (12)$$

Nel caso in cui le due sorgenti abbiano polarizzazioni parallele ( $\alpha = 0$ ) la (10) si riduce alla solita relazione:

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} \quad (13)$$

Siamo in condizioni di interferenza completa. Nei punti di interferenza costruttiva l'intensità è pari a  $I_{\max} = 4I_0$ , mentre nei punti di interferenza distruttiva l'intensità risultante è nulla. Se le direzioni di polarizzazione sono fra loro ortogonali ( $\alpha = \pi/2$ ) non c'è interferenza. L'intensità risultante sullo schermo è costante e pari alla somma delle intensità delle due sorgenti ( $I = 2I_0$ ). Per valori intermedi di  $\alpha$  le due onde interferiscono. In questo caso i valori massimo e minimo di intensità sullo schermo sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= 2I_0(1 + \cos \alpha) \\ I_{\min} &= 2I_0(1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

Come si vede dalle (14), e come è chiaramente evidenziato dalla figura, non si ha mai  $I = 0$ : l'interferenza viene detta parziale.

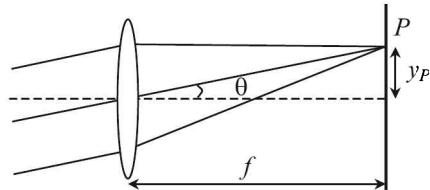
*Nota:* Nel caso le due sorgenti non abbiano la stessa intensità, utilizzando lo stesso procedimento descritto sopra, si ricava che la distribuzione di intensità sullo schermo è data dalla seguente espressione:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha \cos \Delta\phi \quad (15)$$

### S.11.8.

La lente convergente viene utilizzata nell'apparato di Young perché consente di osservare la figura di interferenza fra le due sorgenti senza dover mettere lo schermo molto lontano dal piano delle fenditure. Si deve osservare che i raggi uscenti dalle due sorgenti inclinati di un angolo  $\theta$ , che hanno quindi una differenza di cammino pari a  $d \sin \theta$ , convergono, senza variazione della loro differenza di fase, in un punto  $P$  dello schermo posto sul piano focale della lente, come mostrato in figura. Dal momento che il raggio passante dal centro della lente non subisce alcuna deviazione, la posizione del punto  $P$  sullo schermo si calcola facilmente:

$$y_P = f \tan \theta \quad (1)$$



Fatte queste premesse, l'esercizio si risolve facilmente. La condizione per l'interferenza costruttiva è la seguente:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2\pi m \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad (2)$$

Nel caso di angoli  $\theta$  piccoli si ha  $\tan \theta \approx \sin \theta$ , quindi, utilizzando le relazioni (1) e (2) si ottengono le posizioni sullo schermo dei massimi di interferenza:

$$y_{\max} = m \frac{\lambda f}{d} \quad (3)$$

La distanza fra la seconda e la settima frangia chiara è quindi:

$$y_7 - y_2 = 5 \frac{\lambda f}{d} = 9 \text{ mm} \quad (4)$$

### S.11.9.

La distribuzione di intensità sullo schermo è data da:

$$I = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos \Delta\phi \quad (1)$$

dove  $I_A$  e  $I_B$  sono le intensità delle onde provenienti dalle due fenditure e  $\Delta\phi$  è la differenza di fase fra le due onde sullo schermo su cui si osserva la figura di interferenza. Nel caso in esame  $I_A = I_B$ , quindi la (1) diventa:

$$I = 2I_A(1 + \cos \Delta\phi) = 4I_A \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} \quad (2)$$

Nel punto  $M$  in cui si osserva il massimo di interferenza di ordine zero ( $\Delta\phi = 0$ ) risulta:

$$I(M) = 4I_A = I_0 \quad \Rightarrow \quad I_A = I_B = \frac{I_0}{4} \quad (3)$$

Il primo minimo di interferenza si ottiene dalla (2) ponendo  $\Delta\phi = \pi$ :

$$I_{\min} = 0 \quad (4)$$

La posizione del primo minimo è data da:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{\lambda}{2d} \quad (5)$$

Poichè lo schermo è posto a grande distanza dal piano delle fenditure si ha:

$$\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{y}{L} \quad (6)$$

avendo indicato con  $y$  la corrispondente posizione sullo schermo, misurata rispetto al punto  $M$ . Utilizzando le relazioni (5) e (6) si ricava la distanza  $y_1$  del primo minimo:

$$y_1 = \frac{\lambda L}{2d} \quad (7)$$

Supponiamo ora di inserire un polarizzatore davanti alla fenditura A. Detta  $I$  l'intensità di un'onda polarizzata linearmente, che incide su un polarizzatore con asse di trasmissione che forma un angolo  $\alpha$  con la direzione di polarizzazione della luce incidente, l'intensità  $I'$  dell'onda uscente, polarizzata lungo l'asse di trasmissione del polarizzatore, è data dalla legge di Malus:

$$I' = I \cos^2 \alpha \quad (8)$$

Quindi l'intensità dell'onda che emerge dalla fenditura A è data da:

$$I'_A = I_A \cos^2 \alpha = I_A \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{I_A}{2} = \frac{I_0}{8} \quad (9)$$

La distribuzione di intensità sullo schermo si esprime come segue (vedi nota dell'esercizio 7 di questo capitolo):

$$I = I'_A + I_B + 2\sqrt{I'_A I_B} \cos \alpha \cos \Delta\phi \quad (10)$$

L'intensità in corrispondenza del massimo di ordine zero si ottiene dalla (10) ponendo  $\Delta\phi = 0$ :

$$I_{\max} = I'_A + I_B + 2\sqrt{I'_A I_B} \cos \alpha = \frac{5}{8} I_0 \quad (11)$$

mentre l'intensità in corrispondenza del primo minimo si ottiene ponendo  $\Delta\phi = \pi$  nella (10):

$$I_{\max} = I'_A + I_B - 2\sqrt{I'_A I_B} \cos \alpha = \frac{I_0}{8} \quad (12)$$

### S.11.10.

La distribuzione di intensità che si osserva sullo schermo è data dalla seguente espressione:

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi) \quad (1)$$

dove  $I_0$  è l'intensità che si misurerrebbe sullo schermo se una delle due fenditure fosse chiusa, e  $\Delta\phi$  è la differenza di fase fra le due

onde che interferiscono. Per il calcolo di  $\Delta\phi$  si deve osservare che, considerato un fronte d'onda  $AC$  dell'onda incidente (cioè un piano su cui la fase del campo incidente sulle due fenditure è costante) ed un punto  $P$  dello schermo, la differenza di fase delle onde che interferiscono è dovuta ai diversi cammini  $AP$  e  $CBP$  e vale dunque:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{CB} + \overline{BP} - \overline{AP}) \quad (2)$$

Poiché  $\overline{CB} = d \sin \alpha$  e, per uno schermo lontano dal piano delle fenditure,  $\overline{BP} - \overline{AP} = d \sin \theta$ , si ottiene:

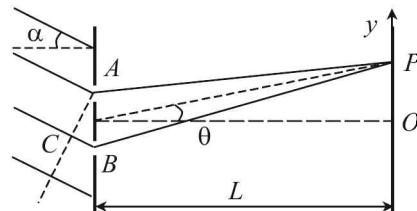
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d (\sin \alpha + \sin \theta) \quad (3)$$

Le posizioni dei massimi sono quindi date da:

$$\Delta\phi = 2\pi m \Rightarrow \sin \theta = m \frac{\lambda}{d} - \sin \alpha \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

Introducendo un asse  $y$  sullo schermo, con origine sull'asse di simmetria delle fenditure, la posizione sullo schermo dei massimi è data da:

$$y_{\max} = m \frac{\lambda L}{d} - L \sin \alpha \quad (5)$$



In particolare, il massimo di ordine zero si trova nel punto di coordinata

$$y = -L \sin \alpha \quad (6)$$

Per riportare il massimo di interferenza di ordine zero al centro dello schermo ( $y = 0$ ) bisogna inserire davanti alla fenditura A una lamina trasparente di spessore  $s$  tale che lo sfasamento aggiuntivo introdotto dalla propagazione in essa sia uguale allo sfasamento prodotto dalla propagazione  $\overline{CB} = d \sin \alpha$ . Lo sfasamento introdotto dalla propagazione nella laminetta è dato da:

$$\phi_n = k_n s = \frac{2\pi n}{\lambda} s \quad (7)$$

mentre lo sfasamento introdotto dalla propagazione in uno strato d'aria di spessore  $s$  è dato da:

$$\phi_0 = ks = \frac{2\pi}{\lambda} s \quad (8)$$

Quindi lo sfasamento aggiuntivo dovuto alla presenza della laminetta è:

$$\phi_s = \phi_n - \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1)s \quad (9)$$

Deve quindi risultare:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n - 1)s = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad s = \frac{d \sin \alpha}{n - 1} \quad (10)$$

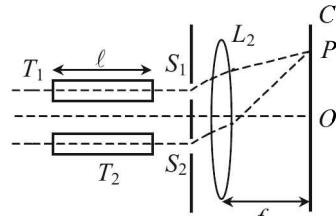
### S.11.11.

Inizialmente i due tubi sono vuoti. Sullo schermo si forma una figura di interferenza in cui il massimo di ordine zero si trova nel punto  $O$ , posto sull'asse di simmetria del dispositivo. Le posizioni dei massimi di interferenza sono date dalla solita espressione:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

dove  $r_1 = \overline{S_1 P}$  e  $r_2 = \overline{S_2 P}$ . Le fasi iniziali delle onde provenienti da  $S_1$  e  $S_2$  sono infatti uguali, e la differenza di fase fra le due onde che interferiscono è dovuta esclusivamente alla differenza di cammino dopo le fenditure. Successivamente il tubo  $T_1$  viene riempito di gas ad una pressione tale che l'indice di rifrazione sia  $n$  (da calcolare). In questo caso le onde che provengono dalle due fenditure non hanno più la stessa fase iniziale, dal momento che i cammini ottici nei due tubi sono diversi. La differenza,  $\Delta\phi_0$  fra le fasi iniziali delle onde provenienti dalle due fenditure si calcola facilmente ricordando che le fasi accumulate dalle due onde durante la propagazione nei tubi sono date da:

$$\phi_{T_1} = k_n \ell = \frac{2\pi}{\lambda} n \ell \quad \phi_{T_2} = k \ell = \frac{2\pi}{\lambda} \ell \quad (2)$$



quindi:

$$\Delta\phi_0 = \phi_{T_1} - \phi_{T_2} = \frac{2\pi\ell}{\lambda} (n - 1) \quad (3)$$

La differenza di fase,  $\Delta\phi$ , fra le due onde che interferiscono sullo schermo è data dalla seguente espressione:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \frac{2\pi\ell}{\lambda} (n - 1) \quad (4)$$

Le posizioni dei massimi di interferenza si ottengono dalla (4) ponendo  $\Delta\phi = 2m\pi$ :

$$(r_1 - r_2) + \ell(n - 1) = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

Il massimo centrale di ordine zero ( $m = 0$ ) si ha nel punto  $P$  in cui

$$r_1 - r_2 = \ell(1 - n) \quad (6)$$

Poichè  $n > 1$ , risulta  $r_1 < r_2$ , quindi il massimo di ordine zero risulta spostato verso l'alto (vedi figura) rispetto al caso in cui entrambi i tubi siano vuoti. Con i tubi vuoti la posizione della sessantesima frangia chiara (con  $r_1 < r_2$ ) si trova utilizzando la relazione (1) ponendo  $m = -60$ :

$$(r_1 - r_2)_{60} = -60 \lambda \quad (7)$$

Uguagliando le (6) e (7) si ottiene:

$$\ell(1 - n) = -60 \lambda \quad \Rightarrow \quad n = 1 + 60 \frac{\lambda}{\ell} = 1.00018 \quad (8)$$

### S.11.12.

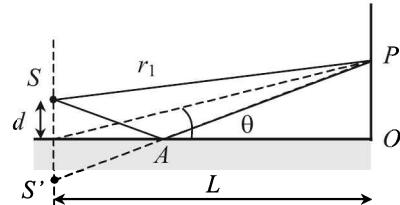
Sullo schermo si osserva la figura di interferenza tra la luce che proviene direttamente dalla sorgente  $S$  e quella riflessa dallo specchio. Determiniamo dapprima gli sfasamenti subiti dai due raggi  $SP$  (raggio diretto) e  $SAP$  (raggio riflesso):

$$\phi_{SP} = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{SP} \quad (1)$$

$$\phi_{SAP} = \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{SA} + \overline{AP}) + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{S'P} + \pi \quad (2)$$

Nella (2) si è tenuto conto del fatto che la riflessione sulla lastra di vetro introduce uno sfasamento pari a  $\pi$  (il raggio incidente proviene infatti da un mezzo, il vuoto, con indice di rifrazione inferiore a quello della lastra). Il punto  $S'$  è il simmetrico della sorgente  $S$  rispetto alla superficie della lastra di vetro, quindi  $\overline{S'A} = \overline{SA}$ . La differenza di fase fra le due onde che interferiscono in  $P$  è data da:

$$\Delta\phi = \phi_{SAP} - \phi_{SP} = \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{S'P} - \overline{SP}) + \pi \quad (3)$$



Dal momento che  $L \gg d$  si può utilizzare la solita approssimazione:

$$\overline{S'P} - \overline{SP} \simeq 2d \sin \theta \quad (4)$$

Utilizzando le relazioni (3) e (4) si ottiene:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda} d \sin \theta + \pi \quad (5)$$

Si ha interferenza costruttiva quando  $\Delta\phi$  è un multiplo intero di  $2\pi$ , quindi:

$$\frac{4\pi}{\lambda} d \sin \theta + \pi = 2m\pi \quad (6)$$

da cui si ricava:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{4d} (2m - 1) \quad (7)$$

Nella (7)  $m = 1, 2, 3, \dots$ , dal momento che deve risultare  $\theta \geq 0$ . Le posizioni sullo schermo dei massimi di interferenza sono:

$$y = \frac{\lambda L}{4d} (2m - 1) \quad (8)$$

Si ha interferenza distruttiva nei casi seguenti:

$$\Delta\phi = (2m + 1)\pi \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{2d} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

Si osservi che la frangia centrale, che si forma in  $O$  (vedi figura), è scura. Le posizioni sullo schermo dei minimi di interferenza sono:

$$y = m \frac{\lambda L}{2d} \quad (10)$$

### S.11.13.

$S_1$  e  $S_2$  sono due sorgenti di onde elettromagnetiche sferiche. I campi elettrici corrispondenti hanno la seguente espressione:

$$E_1 = \frac{E_{01}}{r_1} \cos(kr_1 - \omega t) \quad (1)$$

$$E_2 = \frac{E_{02}}{r_2} \cos(kr_2 - \omega t) \quad (2)$$

dove  $r_1$  e  $r_2$  rappresentano le distanze di un punto dello spazio da  $S_1$  e  $S_2$ , rispettivamente, e  $k = 2\pi/\lambda$  è la costante di propagazione. L'intensità dell'onda sferica emessa da  $S_1$ , misurata in un punto posto a distanza  $d$  dalla sorgente stessa è quindi data da:

$$I_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \frac{E_{01}^2}{d^2} \quad (3)$$

Analogamente per la sorgente  $S_2$ :

$$I_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \frac{E_{02}^2}{d^2} \quad (4)$$

Dalle (3) e (4) si ricava:

$$E_{01} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 c}} I_1 d \quad (5)$$

$$E_{02} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 c}} I_2 d \quad (6)$$

I punti  $P$  in cui si misura una intensità totale nulla, corrispondono a punti di interferenza distruttiva in cui i campi elettrici delle due onde che interferiscono hanno la stessa ampiezza. Esprimendo le coordinate dei punti  $P$  in funzione delle distanze  $r_1$  e  $r_2$  dalle due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ , rispettivamente, deve risultare:

$$\frac{E_{01}}{r_1} = \frac{E_{02}}{r_2} \quad (7)$$

$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2m + 1)\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8)$$

avendo indicato con  $\Delta\phi$  lo sfasamento fra le due onde che interferiscono in  $P$ . Sostituendo le (5) e (6) nella (7) si ottiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \quad (9)$$

Poichè  $I_1 > I_2$ , risulta  $r_1 > r_2$ , quindi nella (8) deve risultare  $2m + 1 < 0$ , cioè  $m = -1, -2, -3, \dots$ . Utilizzando le (8) e (9) si ottiene:

$$r_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{I_2/I_1} - 1} \left( m + \frac{1}{2} \right) \quad (10)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \frac{\lambda}{\sqrt{I_2/I_1} - 1} \left( m + \frac{1}{2} \right) \quad (11)$$

Affinchè nei punti appena determinati si osservino massimi di interferenza, basta che una delle due sorgenti venga sfasata di  $\pi$  rispetto all'altra. Infatti, in tal caso la differenza di fase complessiva nei punti determinati è un multiplo intero di  $2\pi$ :

$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) + \pi = 2(m + 1)\pi \quad (12)$$

avendo utilizzato la relazione (8).

#### S.11.14.

Vogliamo determinare le posizioni dei massimi di interferenza posti sull'asse  $x$  (vedi figura). Indichiamo con  $r_1$  e  $r_2$  le distanze di un punto  $P$  dell'asse  $x$  dalle sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ , rispettivamente. Si ha ovviamente:

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + d^2} \quad (1)$$

La differenza di fase fra le due onde che interferiscono in  $P$ , sapendo che la fase iniziale delle due sorgenti è la stessa, è data da:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad (2)$$

Le posizioni dei massimi di interferenza si calcolano ponendo

$$\Delta\phi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad r_2 = r_1 + m\lambda \quad (3)$$

Poichè  $r_2 > r_1$  per costruzione, nella (3) deve essere  $m > 0$ , cioè  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Sostituendo la (3) nella (1) si ottiene:

$$r_1 = \frac{d^2 - m^2\lambda^2}{2m\lambda} \quad (4)$$

Quindi la posizione del massimo di interferenza più vicino a  $S_1$  si ottiene sostituendo nella (4) il massimo valore possibile per l'indice  $m$ . Dal momento che  $r_1 > 0$ , dalla (4) si ricava:

$$m < \frac{d}{\lambda} \quad (5)$$

Utilizzando i valori numerici riportati nel testo del problema si ottiene:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m < 8.4 \quad (6)$$

Il massimo valore di  $m$  è quindi  $m = 8$ . Sostituendo tale valore nella (4) si ottiene la posizione del massimo di interferenza più vicino a  $S_1$ :

$$r_1 = \frac{d^2 - 64\lambda^2}{16\lambda} = 4.1 \text{ mm} \quad (7)$$

Le posizioni dei minimi di interferenza si calcolano ponendo:

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad r_2 = r_1 + (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (8)$$

Come già osservato, dovendo risultare  $r_2 > r_1$ , deve essere  $m \geq 0$ . Sostituendo la (8) nella (1) si ottiene:

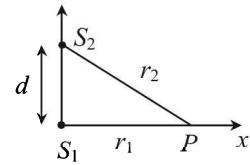
$$r_1 = \frac{d^2 - [(2m+1)\lambda/2]^2}{(2m+1)\lambda} \quad (9)$$

Poichè  $r_1 > 0$ , dalla (9) si ricava:

$$m < \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} = 7.9 \quad \Rightarrow \quad m_{\max} = 7 \quad (10)$$

La posizione del minimo più vicino a  $S_1$  si ottiene dalla (9) ponendo  $m = 7$ :

$$r_1 = \frac{1}{15\lambda} \left[ d^2 - \left( \frac{15}{2}\lambda \right)^2 \right] = 9.54 \text{ mm} \quad (11)$$



La distanza di tale punto da  $S_2$  è data da

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + d^2} = 8.45 \text{ cm} \quad (12)$$

Dal momento che le due sorgenti emettono la stessa potenza, le intensità di  $S_1$  e  $S_2$  misurate nella posizione del minimo prima calcolato sono:

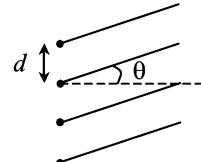
$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \quad I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2} \quad (13)$$

poichè  $r_1 \neq r_2$ , le due intensità, e quindi i due campi elettrici, sono diversi nei punti in questione. L'intensità risultante non è nulla.

### S.11.15.

Consideriamo  $N$  sorgenti uguali di onde sferiche in fase, coerenti, disposte lungo una retta ed equispaziate di un tratto  $d$ . L'intensità dell'onda risultante in un punto  $P$  posto a grande distanza dalle sorgenti è data dalla seguente espressione:

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right)^2 \quad (1)$$



avendo indicato con  $I_0$  l'intensità prodotta in  $P$  da una singola sorgente, e con  $\delta$  la differenza di fase tra le onde emesse da due sorgenti consecutive

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (2)$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato tra la direzione di osservazione e la normale alla linea su cui sono distribuite le sorgenti, come mostrato in figura.

I massimi principali di interferenza si ottengono in corrispondenza degli angoli  $\theta$  che annullano il denominatore della (1), quindi:

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = m\pi \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Dall'espressione (3) si vede che se  $d < \lambda$  si ha un unico massimo principale per  $m = 0$ . Infatti per  $|m| \geq 1$  risulterebbe  $|\sin \theta| \geq 1$ , ciò che è impossibile. Si noti inoltre che l'unico massimo si osserva nella direzione perpendicolare alla retta lungo cui sono disposte le sorgenti. Infatti, se  $m = 0$  si ha  $\sin \theta = 0$ , quindi  $\theta = 0$  (o  $\pi$ ).

### S.11.16.

Nell'esercizio precedente si è visto che, nel caso di  $N$  sorgenti coerenti in fase, disposte lungo una retta ed equispaziate di un tratto  $d$ , l'intensità risultante in un punto  $P$  posto a grande distanza dalle sorgenti è data dalla seguente espressione:

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin N\pi d \sin \theta / \lambda}{\sin \pi d \sin \theta / \lambda} \right)^2 \quad (1)$$

Nel caso di quattro sorgenti ( $N = 4$ ) equispaziate di un tratto  $d = \lambda/2$ , l'espressione (1) diventa:

$$I(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin(2\pi \sin \theta)}{\sin(\pi \sin \theta/2)} \right]^2 \quad (2)$$

Le posizioni dei massimi principali si ricavano annullando il denominatore della (2):

$$\frac{\pi}{2} \sin \theta = m\pi \quad \sin \theta = 2m \quad (3)$$

Come già dimostrato nel precedente esercizio, nel caso in considerazione si ha un solo massimo principale, in corrispondenza di  $m = 0$ :

$$\sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \pi \quad (4)$$

L'intensità massima si calcola usando l'espressione (2). Si osservi che, quando  $\sin \theta = 0$ , anche il numeratore della (2) si annulla. Ponendo  $x = \frac{\pi}{2} \sin \theta$  si ha, utilizzando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\cos 4x}{\cos x} = 4 \quad (5)$$

Quindi:

$$I_{\max} = 16 I_0 = N^2 I_0 \quad (6)$$

I minimi di interferenza (con intensità nulla) si ottengono in corrispondenza degli angoli che annullano il numeratore della (2), escludendo quelli che annullano anche il denominatore (e che corrispondono quindi a massimi principali):

$$2\pi \sin \theta = m'\pi \quad \sin \theta = \frac{m'}{2} \quad (7)$$

Nella (7) il caso  $m' = 0$  si deve escludere perché corrisponde al massimo principale di interferenza; il primo minimo si ha per  $m' = \pm 1$ :

$$\sin \theta = \pm \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm \frac{\pi}{6}; \pm \frac{5}{6}\pi \quad (8)$$

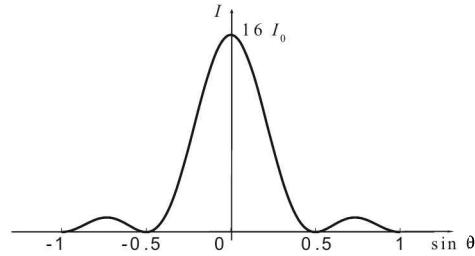
Il secondo minimo si ha per  $m' = \pm 2$ :

$$\sin \theta = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

Non ci sono altri minimi ( $|\sin \theta| \leq 1$ ).

I massimi secondari si ricavano dalla (2) imponendo che il numeratore sia massimo ( $\sin^2(2\pi \sin \theta) = 1$ ). Si ha:

$$2\pi \sin \theta = (2m'' + 1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{1}{4}(2m'' + 1) \quad (10)$$



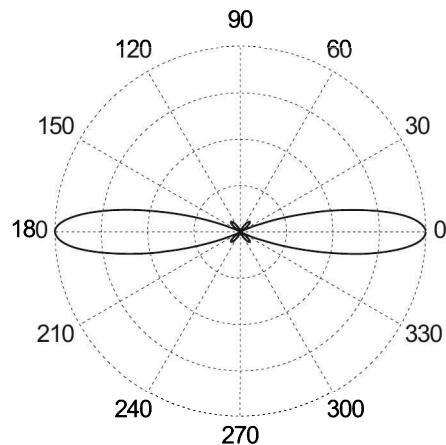


Figura 11.1: Diagramma polare dell'intensità risultante.

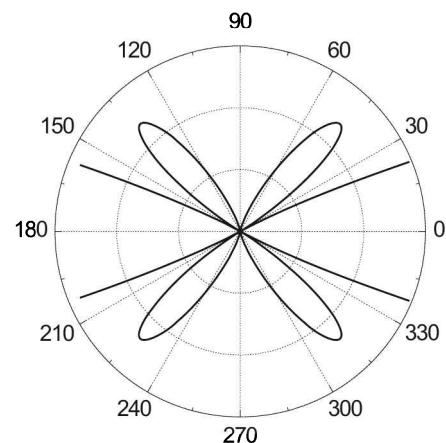


Figura 11.2: Ingrandimento del diagramma polare dell'intensità risultante, che evidenzia i massimi secondari.

Si noti che un massimo secondario deve essere compreso fra due minimi di interferenza. I possibili valori di  $m''$  sono i seguenti:

$$m'' = 0, -1 \quad \sin \theta = \pm \frac{1}{4} \quad (11)$$

$$m'' = 1, -2 \quad \sin \theta = \pm \frac{3}{4} \quad (12)$$

Le posizioni angolari date dalla (11) sono comprese fra il massimo principale e un minimo, quindi non sono accettabili. Le posizioni corrette dei massimi secondari sono date dalla (12), quindi:

$$\theta = \pm 48.59^\circ, \pm 131.41^\circ \quad (13)$$

L'intensità dei massimi secondari è data da:

$$I = \frac{I_0}{\sin^2(3\pi/8)} = \frac{I_{\max}}{16 \sin^2(3\pi/8)} \quad (14)$$

Le tre figure mostrano l'andamento dell'intensità risultante (a grande distanza dalle sorgenti) in funzione di  $\sin \theta$  e due diagrammi polari dell'intensità risultante (la terza figura è un ingrandimento della seconda, ed evidenzia la presenza dei massimi secondari).

### S.11.17.

Siano assegnate  $N$  sorgenti coerenti in fase, equispaziate di un tratto  $d$ . Come visto nei due esercizi precedenti, le posizioni angolari dei massimi principali sono date dalla seguente espressione:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} = m \frac{c}{\nu d} \quad (1)$$

Nella (1) si è utilizzata la formula  $\lambda\nu = c$ , dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto. Le posizioni dei minimi di interferenza sono

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{Nd} = m \frac{c}{N\nu d} \quad (2)$$

La posizione del massimo principale di ordine  $m = 1$  per la frequenza  $\nu_2$  è quindi:

$$\sin \theta_1 = \frac{c}{\nu_2 d} \quad (3)$$

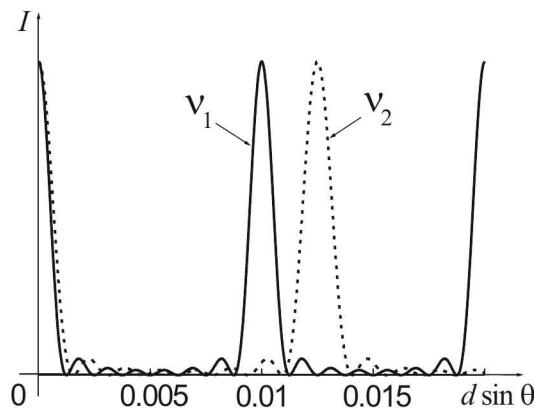
La posizione del secondo minimo a partire dal massimo principale di ordine  $m = 1$  per la frequenza  $\nu_1$  si ricava dalla (2) ponendo  $m = N + 2$ :

$$\sin \theta_2 = (N + 2) \frac{c}{N\nu_1 d} \quad (4)$$

Dovendo risultare  $\theta_1 = \theta_2$ , dalle (3) e (4) si ricava:

$$N = \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} = 8 \quad (5)$$

Le due figure di interferenza sono mostrate in figura.



### S.11.18.

Indichiamo con 1 il fascio riflesso alla prima interfaccia vuoto-vetro, e con 2 il fascio che attraversa la lamina, viene riflesso all'interfaccia vetro-vuoto e rattraversa la lamina, come indicato in figura. A seguito della riflessione sulla lamina, il fascio 1 subisce uno sfasamento  $\phi_1 = \pi$ . Il fascio 2 subisce uno sfasamento dovuto alla doppia propagazione (andata e ritorno) nella laminetta; non c'è alcuno sfasamento aggiuntivo in corrispondenza della riflessione di Fresnel all'interfaccia vetro-vuoto e della trasmissione alla prima interfaccia vuoto-vetro. Si ha quindi:

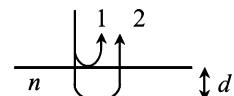
$$\phi_2 = \frac{2\pi n}{\lambda} 2d \quad (1)$$

La differenza di fase fra i due fasci è quindi data da

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{4\pi nd}{\lambda} - \pi \quad (2)$$

Si ha interferenza costruttiva quando

$$\Delta\phi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4nd}{2m+1} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$



Se  $m = 0$ ,  $\lambda = 3.6 \mu\text{m}$ , se  $m = 1$ ,  $\lambda = 1.2 \mu\text{m}$ : tali lunghezze d'onda (nell'infrarosso) non sono presenti nel fascio incidente.

Per  $m = 2$  si ha  $\lambda = 720 \text{ nm}$ , e per  $m = 3$   $\lambda = 514.29 \text{ nm}$ , tali lunghezze d'onda, che sono presenti nel fascio incidente, vengono quindi intensificate. Per  $m \geq 4$  le lunghezze d'onda in corrispondenza delle quali si ha interferenza costruttiva non sono presenti nel fascio incidente.

**S.11.19.**

Consideriamo dapprima la riflessione all'interfaccia fra uno strato a basso indice di rifrazione e uno strato ad alto indice, come mostrato nella prima figura. Indichiamo con 1 il raggio riflesso all'interfaccia in considerazione, e con 2 il raggio che attraversa due volte lo strato con indice di rifrazione  $n_A$ , dopo essere stato riflesso alla seconda interfaccia. Il fascio 1 subisce uno sfasamento  $\phi_1 = \pi$ , a causa della riflessione di Fresnel (proviene infatti dal mezzo con indice di rifrazione inferiore). Il fascio 2 subisce uno sfasamento dovuto al doppio passaggio nello strato di spessore  $d_A$ . Non subisce invece sfasamento in corrispondenza della riflessione (proviene infatti dal mezzo con indice di rifrazione maggiore). Si ha quindi:

$$\phi_2 = 2k_A d_A = 2 \frac{2\pi n_A}{\lambda} d_A = \frac{4\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \pi \quad (1)$$

Si ha quindi che i due fasci si sommano in fase.

Consideriamo ora la riflessione all'interfaccia fra uno strato ad alto indice di rifrazione e uno strato a basso indice, come mostrato nella seconda figura. Indichiamo con 1 e 2 i due raggi indicati in figura. Questa volta il raggio 1 non subisce alcuno sfasamento in corrispondenza della riflessione. Il fascio 2 subisce uno sfasamento dovuto al doppio passaggio nello strato di spessore  $d_B$  e uno sfasamento aggiuntivo pari a  $\pi$  in corrispondenza della riflessione. Si ha quindi:

$$\phi_2 = 2k_B d_B + \pi = 2 \frac{2\pi n_B}{\lambda} d_B + \pi = \frac{4\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4} + \pi = 2\pi \quad (2)$$

Anche in questo caso i due fasci si sommano in fase.

*Nota:* Utilizzando un certo numero di strati dielettrici si può ottenere una riflettività molto elevata. Si può dimostrare che se il primo e l'ultimo strato sono ad alto indice di rifrazione, così che si abbia un numero dispari,  $N$ , di strati, la riflettività dello specchio è data da:

$$R = \left( \frac{n_A^{N+1} - n_B^{N-1} n_s}{n_A^{N+1} + n_B^{N-1} n_s} \right)^2 \quad (3)$$

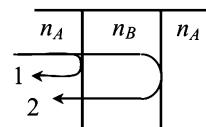
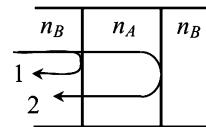
avendo indicato con  $n_s$  l'indice di rifrazione del substrato. Si consideri ad esempio uno specchio dielettrico con substrato di vetro BK7 ( $n_s = 1.54$  a  $1.064 \mu\text{m}$ ) rivestito con  $\text{TiO}_2$  ( $n_A = 2.28$  a  $1.064 \mu\text{m}$ ) e  $\text{SiO}_2$  ( $n_B = 1.45$  a  $1.064 \mu\text{m}$ ), tale che il primo e l'ultimo strato siano di  $\text{TiO}_2$ . Lo spessore degli strati si ricava come visto nell'esercizio appena svolto:

$$n_{\text{TiO}_2} d_{\text{TiO}_2} = n_{\text{SiO}_2} d_{\text{SiO}_2} = \frac{\lambda}{4} \quad \lambda = 1.064 \mu\text{m} \quad (4)$$

quindi:

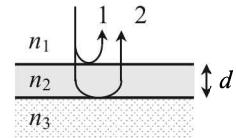
$$d_{\text{TiO}_2} = 116.6 \text{ nm}, \quad d_{\text{SiO}_2} = 183.4 \text{ nm} \quad (5)$$

Nel caso di  $N = 15$  strati, applicando la (3) si ottiene  $R = 0.998$ .



**S.11.20.**

Dal momento che la lastra ricoperta è perfettamente trasparente alla lunghezza d'onda  $\lambda = 633$  nm, si conclude che il film sottile che ricopre la lastra agisce da strato antiriflesso. Indicando, come mostrato in figura, con 1 il fascio riflesso all'interfaccia aria-film e con 2 il fascio che propaga due volte nel film, dopo essere stato riflesso all'interfaccia film-lastra di vetro, si ha:



$$\phi_1 = \pi \quad (1)$$

dove  $\phi_1$  è lo sfasamento subito dal fascio 1 a seguito della riflessione aria-film ( $n_1 = 1 < n_2$ ).

$$\phi_2 = k_2 2d + \pi = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d + \pi \quad (2)$$

dove  $\phi_2$  è lo sfasamento subito dal fascio 2. La differenza di fase fra le due onde è quindi:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d \quad (3)$$

La condizione per l'interferenza distruttiva è la seguente:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi n_2 d}{\lambda} = (2m + 1)\pi \quad (4)$$

quindi

$$d = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n_2} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Lo spessore minimo del film è quindi:

$$d = \frac{\lambda}{4n_2} = 119.3 \text{ nm} \quad (6)$$

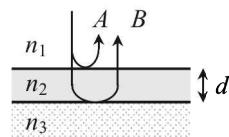
**S.11.21.**

Con riferimento alla figura, indichiamo con A il fascio riflesso all'interfaccia 1-2 e con B il raggio che attraversa due volte il mezzo 2, dopo essere stato riflesso all'interfaccia 2-3. Il fascio A subisce uno sfasamento  $\phi_A = \pi$  in corrispondenza della riflessione ( $n_1 < n_2$ ). Il fascio B subisce uno sfasamento dovuto alla propagazione nel mezzo 2 e uno sfasamento aggiuntivo di  $\pi$  in corrispondenza della riflessione all'interfaccia 2-3 ( $n_2 < n_3$ ):

$$\phi_B = 2k_2 d + \pi = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d + \pi \quad (1)$$

La differenza di fase fra i due fasci A e B è dunque:

$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d = \frac{4\pi n_2}{\lambda} \frac{\lambda}{4n_2} = \pi \quad (2)$$



Siamo quindi in condizione di interferenza distruttiva. Il campo riflesso è nullo se le ampiezze dei campi A e B, che indicheremo con  $E_A$  ed  $E_B$  rispettivamente, sono uguali. Sia  $E_0$  l'ampiezza del campo incidente. Il campo  $E_A$  è quindi:

$$E_A = r_{12} E_0 \quad (3)$$

dove

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (4)$$

Per quanto riguarda il campo  $E_B$  si ha invece:

$$E_B = t_{12} r_{23} t_{21} E_0 \exp(ik_2 2d) = t_{12} r_{23} t_{21} E_0 \exp(i\pi) = -r_{23} t_{12} t_{21} E_0 \quad (5)$$

dove:

$$r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}, \quad t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad t_{21} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \quad (6)$$

essendo  $t_{12}$  il coefficiente di trasmissione (in campo) all'interfaccia 1-2, e  $t_{21}$  il coefficiente di trasmissione (in campo) all'interfaccia 2-1. Nella (5) si è tenuto conto dello sfasamento di  $\pi$  prodotto dalla doppia propagazione nello strato 2. Osserviamo che

$$t_{12} t_{21} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - r_{12}^2 \quad (7)$$

Risulta quindi:

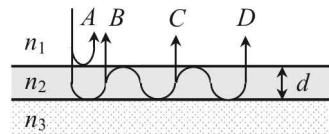
$$E_B = -r_{23}(1 - r_{12}^2)E_0 \simeq -r_{23}E_0 \quad (8)$$

Nella (8) si è assunto  $r_{12} \ll 1$ , cioè si è trascurato la riflessione all'interfaccia 1-2. Considerando le relazioni (3) e (8) si conclude che si ha interferenza distruttiva completa, cioè risulta  $E_A + E_B = 0$ , se:

$$r_{12} = r_{23} \quad (9)$$

*Nota:* Si osservi che, se si considerano anche le riflessioni multiple, si può dimostrare in modo rigoroso che la condizione per l'interferenza distruttiva completa è effettivamente  $r_{12} = r_{23}$  (senza dover ricorrere ad alcuna approssimazione). In questo caso, oltre ai fasci A e B considerati precedentemente, dobbiamo considerare anche i termini successivi mostrati in figura. Il fascio C, per esempio, deriva dal fascio incidente dopo quattro propagazioni nello strato 2, due riflessioni all'interfaccia 2-3 e una riflessione all'interfaccia 2-1. Il campo  $E_C$  è quindi dato da:

$$\begin{aligned} E_C &= t_{12} r_{23} r_{21} r_{23} t_{21} \exp(ik_2 4d) E_0 = \\ &(r_{23} t_{12} t_{21} E_0) r_{21} r_{23} \exp(i2\pi) = (r_{23} t_{12} t_{21} E_0) r_{21} r_{23} \end{aligned} \quad (10)$$



Confrontando la (5) e la (11) possiamo scrivere:

$$E_C = -r_{21} r_{23} E_B \quad (11)$$

Procedendo nello stesso modo si ottiene:

$$E_D = -r_{21} r_{23} E_C = (r_{21} r_{23})^2 E_B \quad (12)$$

e così via. Se sommiamo  $E_B + E_C + E_D + \dots$  si ottiene:

$$\begin{aligned} E_B + E_C + E_D + \dots &= E_B[1 - r_{21} r_{23} + (r_{21} r_{23})^2 - (r_{21} r_{23})^3 + \dots] = \\ &= E_B \sum_{m=0}^{\infty} (-r_{21} r_{23})^m \end{aligned} \quad (13)$$

La (13) costituisce una serie geometrica, di cui si conosce il valore. Ricordando che

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q} \quad (14)$$

si ottiene:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-r_{21} r_{23})^m = \frac{1}{1 + r_{21} r_{23}} \quad (15)$$

Utilizzando le (5), (13) e (15) si ottiene:

$$E_B + E_C + E_D + \dots = -\frac{r_{23} t_{12} t_{21}}{1 + r_{21} r_{23}} E_0 = -\frac{r_{23}(1 - r_{12}^2)}{1 - r_{12} r_{23}} E_0 \quad (16)$$

Nella (16) si è utilizzata la (7) e si è usata l'ovvia relazione  $r_{21} = -r_{12}$ . Il campo riflesso totale all'interfaccia 1-2 si ottiene sommando tutti i campi riflessi:  $E = E_A + E_B + E_C + \dots$ . Dalle (3) e (16) si ottiene:

$$E = \left[ r_{12} - \frac{r_{23}(1 - r_{12}^2)}{1 - r_{12} r_{23}} \right] E_0 = \frac{r_{12} - r_{23}}{1 - r_{12} r_{23}} E_0 \quad (17)$$

La condizione per avere interferenza distruttiva completa ( $E = 0$ ) è quindi:

$$r_{12} = r_{23} \quad (18)$$

Il coefficiente di riflessione è:

$$r = \frac{r_{12} - r_{23}}{1 - r_{12} r_{23}} = \frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2} \quad (19)$$

e la corrispondente riflettanza ha la seguente espressione:

$$R = r^2 = \left( \frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2} \right)^2 \quad (20)$$

La condizione di interferenza distruttiva completa ( $R = 0$ ) implica che fra gli indici di rifrazione  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  esista la seguente relazione:

$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \quad (21)$$

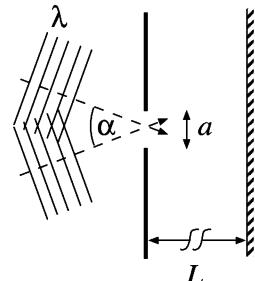
# Capitolo 12

## Difrazione

### 12.1 Problemi

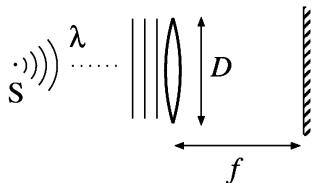
#### P.12.1.

Si consideri una fenditura rettangolare di estensione infinita in una dimensione e larghezza  $a$  nell'altra, praticata in uno schermo opaco. Sulla fenditura incidono due onde piane monocromatiche di lunghezza d'onda  $\lambda$  le cui direzioni di propagazione formano un angolo  $\alpha$  come in figura. Su di uno schermo a distanza  $L$ , posto al di là della fenditura, si osservano le figure di diffrazione generate dalle due onde. Si stabilisca il minimo angolo  $\alpha$  al quale le due figure di diffrazione siano ancora distinguibili e la distanza tra i massimi assoluti di tali figure sullo schermo; si ripeta inoltre l'esercizio nel caso in cui la fenditura abbia forma circolare e raggio pari ad  $a/2$ . [ $a = 15 \mu\text{m}$ ;  $\lambda = 632 \text{ nm}$ ;  $L = 1.2 \text{ m}$ ]



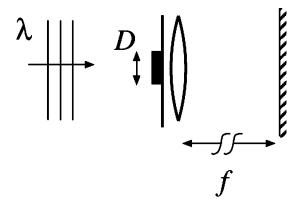
#### P.12.2.

L'obiettivo di una macchina fotografica di diametro  $D$  e distanza focale  $f$  è illuminato da una sorgente puntiforme  $S$  posta a grande distanza, che emette radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda  $\lambda$ . Si calcolino le dimensioni dell'immagine di  $S$  sul piano focale dell'obiettivo. [ $D = 2.5 \text{ cm}$ ;  $f = 5 \text{ cm}$ ;  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ ]



#### P.12.3.

Su di un vetrino, illuminato con luce rossa di lunghezza d'onda  $\lambda$ , è deposto un granello di polvere di forma circolare; al di là del vetrino è posta una lente di focale  $f$ . Sul piano focale della lente si osserva un disco rosso di diametro  $d$ . Si stimi il diametro  $D$  del granello di polvere. [ $\lambda = 0.632 \mu\text{m}$ ;  $f = 2 \text{ m}$ ;  $d = 15.4 \text{ cm}$ ]



**P.12.4.**

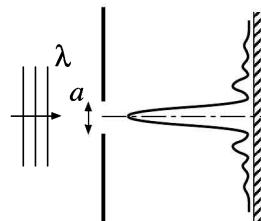
Una navicella spaziale raggiunge una stazione orbitante posta a 5000 km dal suolo terrestre; l'operazione viene seguita da due osservatori; il primo è provvisto di telescopio (apertura  $d_t = 0.5$  m) mentre l'altro osserva l'attracco ad occhio nudo (apertura della pupilla oculare  $d_p = 2$  mm). Assumendo che la luce solare riflessa dai due oggetti sia sufficientemente intensa da renderli visibili, che abbia lunghezza d'onda  $\lambda = 500$  nm e trascurando le aberrazioni indotte dall'atmosfera, si stabilisca qual è la minima distanza tra la stazione e la navicella alla quale i due oggetti appaiono distinti per il primo e per il secondo osservatore.

**P.12.5.**

Due corpi celesti emettono radiazione nel visibile ( $\lambda_v = 400$  nm) e nel campo delle onde radio millimetriche ( $\lambda_m = 2$  mm). Sapendo che i due oggetti, osservati da un telescopio con apertura  $a = 1$  m alla lunghezza d'onda  $\lambda_v$ , appaiono appena separati, si dia una stima del diametro che dovrebbe avere un radiotelescopio per poterli distinguere nel campo delle onde radio, alla lunghezza d'onda  $\lambda_m$ .

**P.12.6.**

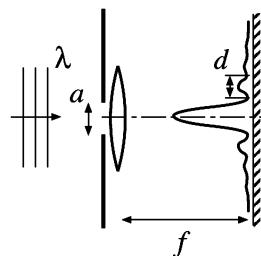
Si consideri un'onda monocromatica piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  incidente su una fenditura rettangolare di estensione infinita in una dimensione e larghezza  $a$  nell'altra, praticata in uno schermo opaco. La figura di diffrazione osservata presenta complessivamente sei minimi. Si dia una stima del valore di  $a$ . [ $\lambda = 632$  nm]

**P.12.7.**

Un radar, costituito da un'antenna circolare di raggio  $R = 1.5$  m che emette un fascio di onde elettromagnetiche alla frequenza di 15 GHz, viene utilizzato per il controllo del traffico aereo. Due aerei si trovano ad una distanza dal radar di 20 km; si stabilisca la minima distanza che debba separare i due aerei affinché questi risultino distinguibili dal radar.

**P.12.8.**

Si consideri un'onda monocromatica piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  incidente su una fenditura rettangolare di larghezza  $a$ ; al di là della fenditura si trova una lente di lunghezza focale  $f$ . La figura di diffrazione della fenditura viene osservata sul piano focale della lente; si verifica che la distanza tra il primo ed il secondo minimo della figura è pari a  $d$ . Si determini il valore del rapporto  $\lambda/a$ . [ $f = 20$  cm;  $d = 1.5$  cm]

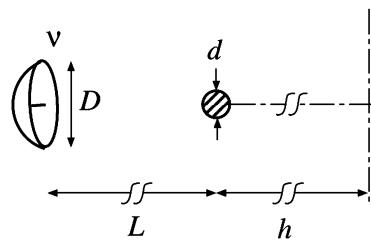


**P.12.9.**

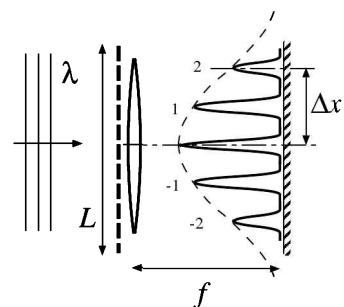
Una sonda spaziale viene inviata in prossimità di Nettuno per osservarne la superficie; i dati vengono inviati verso la Terra mediante trasmissione radio usando un'antenna di diametro  $d$  orientata costantemente verso il Sole. Si determini la massima frequenza di trasmissione  $\nu$  che conviene impiegare, di modo che le trasmissioni giungano sulla Terra qualunque sia la posizione del nostro pianeta lungo l'orbita attorno al Sole. [ $d = 1$  m; distanza media Sole-Nettuno  $R_N = 4.5 \times 10^{12}$  m; distanza media Sole-Terra  $R_T = 1.5 \times 10^{11}$  m]

**P.12.10.**

Un'antenna di diametro  $D$  emette un fascio di microonde alla frequenza  $\nu$ . Le onde radio, considerabili come piane, incidono perpendicolarmente su di un traliccio completamente assorbente, posto a distanza  $L$  dall'antenna ed avente diametro  $d$ . Si stimi la larghezza dell'area, ad una distanza  $h$  al di là del traliccio, in cui il segnale radio è percepibile in presenza ed in assenza del traliccio. [ $\nu = 10$  GHz;  $D = 1$  m;  $L = 300$  m;  $d = 10$  cm;  $h = 300$  m]

**P.12.11.**

Un reticolo di diffrazione, di lunghezza  $L$ , viene investito da luce monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$ ; la luce diffratta viene raccolta da una lente di focale  $f$  posta al di là del reticolo. Sul piano focale della lente il massimo di interferenza del secondo ordine viene osservato in una posizione a distanza  $\Delta x$  dall'asse della lente. Si determini il numero di fenditure presenti sul reticolo. [ $L = 3$  cm;  $\lambda = 700$  nm;  $f = 2$  m;  $\Delta x = 10$  cm]

**P.12.12.**

Un reticolo di diffrazione, composto da fenditure distanti tra loro  $d$ , viene investito da radiazione il cui spettro è centrato attorno alla lunghezza d'onda  $\lambda_0$ . Si calcoli la massima larghezza  $\Delta\lambda$  dello spettro per la quale non si osserva sovrapposizione tra gli ordini di interferenza del reticolo.

**P.12.13.**

Un'onda monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 490$  nm incide su un reticolo di diffrazione; si osserva il massimo di interferenza del primo ordine ad un angolo  $\theta$  tale che  $\sin \theta = 0.2$ ; inoltre il massimo di ordine  $m = 3$  manca. Si calcolino il passo del reticolo e la larghezza delle fenditure.

**P.12.14.**

Si vuole progettare un reticolo di diffrazione che: *a)* manchi del secondo ordine di interferenza; *b)* sia in grado di risolvere al primo ordine di interferenza due righe spettrali distanti  $\Delta\lambda = 1.5 \text{ nm}$  in tutto il visibile ( $450 \text{ nm} \leq \lambda \leq 750 \text{ nm}$ ); *c)* sia utilizzabile su fasci luminosi del diametro minimo di 1 mm. Si calcolino il passo del reticolo e la larghezza delle fenditure.

**P.12.15.**

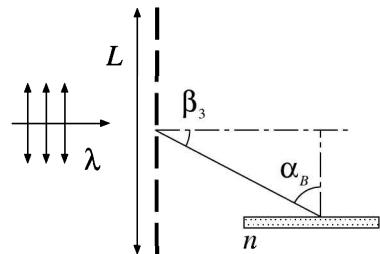
Una sorgente di luce emette onde elettromagnetiche alle lunghezze d'onda  $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$  e  $\lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$ . La radiazione incide su di un reticolo di diffrazione, oltre il quale è posto a grande distanza uno schermo di osservazione. Sapendo che, in corrispondenza del secondo ordine di interferenza, il massimo di intensità per  $\lambda_1$  si trova a  $\theta = 6^\circ$ , si determini il passo  $d$  del reticolo di diffrazione. Si calcoli inoltre il minimo numero di fenditure del reticolo che debbono essere illuminate, affinché i massimi di intensità per le due lunghezze d'onda siano risolvibili al secondo ed al terzo ordine di interferenza.

**P.12.16.**

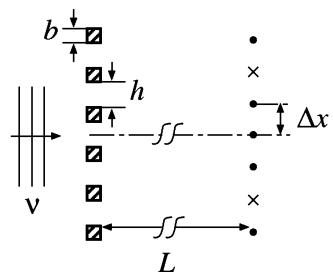
Siano date due fenditure uguali di ampiezza  $a$ , poste a distanza  $d$ , praticate in uno schermo opaco. Si determini il valore del rapporto  $d/a$  affinché il lobo centrale dell'inviluppo della figura di interferenza contenga esattamente 11 frange.

**P.12.17.**

Un reticolo di diffrazione lungo  $L = 1 \text{ cm}$  ha 2500 fenditure. Esso è illuminato da un'onda elettromagnetica monocromatica piana, polarizzata nel piano della figura. La luce trasmessa dal reticolo in corrispondenza del massimo principale di interferenza del terzo ordine all'angolo  $\beta_3$ , incide all'angolo di Brewster  $\alpha_B$  su una lastra di indice di rifrazione  $n = 1.732$ . Si determini  $\lambda$  e si descriva brevemente cosa succede al fascio incidente sulla lastra.

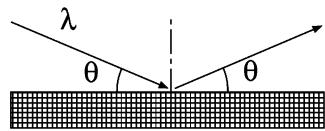
**P.12.18.**

Una grata molto estesa è costituita da sbarre verticali assorbenti ed equidistanti di spessore  $b$ ; la grata è investita da un'onda radio piana e monocromatica di frequenza  $\nu$ . Ad una distanza  $L$  al di là della grata, l'onda è percepibile da una opportuna apparecchiatura solo in alcune posizioni equidistanti tra loro di una quantità  $\Delta x$  (indicate con dei punti in figura). Si verifica inoltre che vi sono due posizioni (indicate con delle croci in figura) in cui non si riceve il segnale. Si stabilisca lo spessore  $b$  e la larghezza  $h$  del varco fra le sbarre della grata. [ $\nu = 40 \text{ GHz}$ ,  $L = 200 \text{ m}$ ,  $\Delta x = 15 \text{ m}$ ]

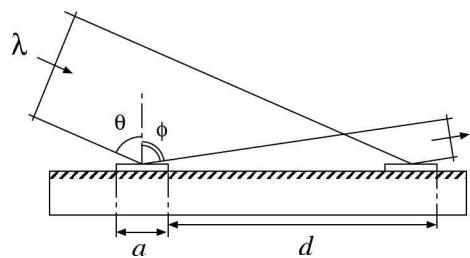


**P.12.19.**

In un esperimento di diffrazione alla Bragg un fascio monocromatico di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.13 \text{ nm}$  incide su di un cristallo. Il fascio presenta un massimo di diffrazione al primo ordine per un angolo di radenza  $\theta = 10^\circ$  rispetto alla faccia del cristallo. Si calcoli la distanza tra i piani cristallini.

**P.12.20.**

Un reticolo di diffrazione *in riflessione* è costituito da una successione di strisce metalliche rettilinee e parallele, distanti tra loro  $d$  e di larghezza  $a$ , realizzate su di un supporto piano che assorbe la radiazione incidente. Un fascio luminoso monocromatico di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide sul reticolo ad un angolo  $\theta$  con la normale alla superficie. Si determini la legge che lega l'angolo di incidenza agli angoli  $\phi$  che sottendono i vari ordini di interferenza emessi dal reticolo. Nel caso in cui  $\theta = 0$ , si stabilisca il numero di ordini di interferenza che possono risultare visibili; infine, sempre per  $\theta = 0$ , si determini il legame tra  $a$  e  $d$  affinché il massimo del secondo ordine non appaia.





## 12.2 Soluzioni

### S.12.1.

(1) Per determinare il minimo angolo  $\alpha$  al quale le due figure di diffrazione risultano ancora distinguibili, impiegheremo il criterio di Rayleigh. Secondo tale criterio le due figure sono distinguibili se la posizione del massimo principale di una delle due figure coincide con la posizione del primo minimo dell'altra. L'intensità della figura di diffrazione di una fenditura rettangolare di larghezza  $a$  ed estensione infinita, investita da un'onda elettromagnetica piana, è data dall'espressione:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}, \quad (1)$$

dove la quantità  $\beta$  è data da:

$$\beta = \frac{1}{2} ka \sin \theta. \quad (2)$$

Nelle precedenti espressioni  $a$  è la larghezza della fenditura;  $\theta$  è l'angolo che sottende il punto in cui si considera la figura di diffrazione, misurato rispetto al centro della figura stessa;  $k = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onda corrispondente alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione incidente sulla fenditura;  $I_0$  è la massima intensità della figura di diffrazione, osservata in corrispondenza del centro della figura stessa. In base alla (1), i minimi di diffrazione si osservano quando il termine  $\sin \beta$  si annulla; ciò si ottiene per:

$$\beta_n = n\pi, \quad (3)$$

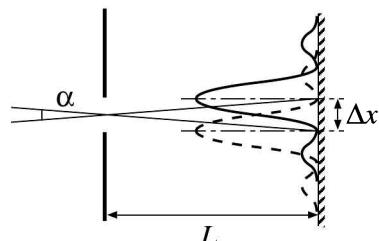
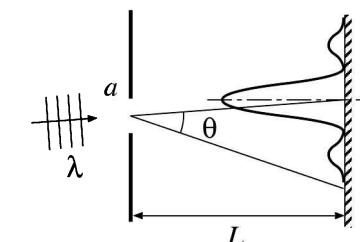
con  $n$  numero intero. Il primo minimo della figura si ottiene per  $n = 1$ ; in base alla (2) tale condizione comporta che:

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}; \quad (4)$$

nell'approssimazione di piccoli angoli, che risulta verificata nel nostro caso, possiamo riscrivere la precedente relazione come:

$$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}. \quad (5)$$

Si noti che  $\theta_1$  è l'angolo compreso tra il massimo principale ed il primo minimo della figura di diffrazione; di conseguenza tale angolo coincide anche col minimo angolo  $\alpha$  che deve separare le due figure di diffrazione affinché queste siano ancora distinguibili in base al criterio di Rayleigh. Detta  $L$  la distanza tra la fenditura e lo schermo di osservazione, la separazione tra le due figure di diffrazione sarà pari a:



<sup>1</sup>Nota introduttiva. Tutti gli esercizi proposti ricadono nel caso di diffrazione alla Fraunhofer; in tale situazione la sorgente che illumina l'ostacolo e lo schermo su cui si osserva la corrispondente figura di diffrazione sono entrambi a grande distanza dall'ostacolo stesso.

$$\Delta x \approx L \tan \alpha \approx L \tan \frac{\lambda}{a}; \quad (6)$$

tenuto conto ancora dell'approssimazione per piccoli angoli, tale espressione diviene:

$$\Delta x \approx \frac{L\lambda}{a}. \quad (7)$$

Sostituendo i valori numerici assegnati dal problema, si ottiene che  $\alpha = 0.042$  rad (corrispondente a  $2.41^\circ$ ) ed  $L = 5$  cm.

Nel caso di una fenditura circolare di diametro  $a$ , la figura di diffrazione è data dall'espressione:

$$I(\theta) = I_0 \frac{J_1^2(\delta)}{\delta^2}, \quad (8)$$

dove  $J_1$  è la funzione di Bessel del primo ordine e la quantità  $\delta$ , in approssimazione di piccoli angoli, è data da:

$$\delta = \frac{1}{2}ka\theta. \quad (9)$$

L'espressione riportata in (8) è anche detta funzione di Airy. L'analisi numerica di tale espressione in funzione di  $\theta$ , rivela che essa ha un andamento simile a quello dell'espressione (1); il primo minimo della figura di diffrazione compare però per un angolo

$$\theta_{1,circ} \approx 1.22 \frac{\lambda}{a}. \quad (10)$$

Ripetendo i ragionamenti precedenti ed impiegando la (10), si ottiene che il minimo angolo  $\alpha$  che deve separare le direzioni di propagazione delle due onde, affinché le figure di diffrazione siano ancora distinguibili, è pari ad

$$\alpha_{circ} = 1.22 \frac{\lambda}{a}; \quad (11)$$

sostituendo i valori numerici assegnati, si ottiene  $\alpha_{circ} = 0.051$  rad (corrispondente a  $2.93^\circ$ ), mentre la separazione tra le figure sul piano di osservazione sarà pari ad  $L_{circ} = 6.1$  cm.

*Nota.* Il risultato appena ottenuto riveste grande importanza per la valutazione del potere di risoluzione angolare di uno strumento ottico; infatti, in base alla (11), la capacità di separare le immagini di due oggetti puntiformi fra loro molto vicini migliora all'aumentare dell'apertura dello strumento stesso o diminuendo la lunghezza d'onda alla quale si effettua l'osservazione. Per questo motivo i telescopi moderni hanno diametri di alcuni metri.

### S.12.2.

Se l'obiettivo fosse ideale (dunque trascurando gli effetti diffrattivi, come avviene in ottica geometrica) l'immagine della sorgente S sul piano focale avrebbe dimensioni nulle, cioè si ridurrebbe ad un punto geometrico. Introducendo gli effetti diffrattivi, dobbiamo tener conto delle dimensioni finite  $D$  dell'obiettivo. Possiamo far ciò assumendo che l'obiettivo

reale si possa scomporre nella sequenza di una fenditura circolare di diametro  $D$  seguita da un obiettivo ideale (ovvero di apertura infinita). Per semplicità assumeremo che le dimensioni dell'immagine di  $S$  siano pari alle dimensioni  $d$  del lobo principale della figura di diffrazione della fenditura, osservata sul piano focale dell'obiettivo; tale quantità verrà definita come la distanza tra i due primi minimi di diffrazione adiacenti al lobo principale (si faccia riferimento al disegno). Si assumerà inoltre di poter rappresentare l'obiettivo con una semplice lente di medesima distanza focale. Come già visto nel precedente esercizio, l'angolo a cui si osserva il primo minimo di diffrazione è pari a:

$$\theta_1 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (1)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione emessa da  $S$ ; si noti che  $\theta$  è misurato rispetto all'asse ottico dell'obiettivo e che nella (1) si è assunto implicitamente che l'approssimazione di piccoli angoli sia valida. L'angolo  $\alpha$  che sottende l'intero lobo principale della figura di diffrazione sarà dunque:

$$\alpha = 2\theta_1 \approx 2.44 \frac{\lambda}{D}. \quad (2)$$

Di conseguenza le dimensioni della figura di diffrazione sono pari a:

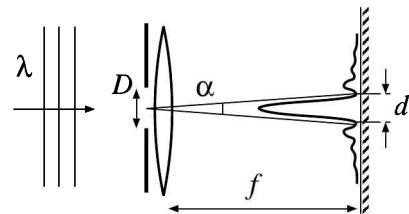
$$d \approx f\alpha = 2.44 \frac{\lambda f}{D}. \quad (3)$$

Sostituendo nella (3) i valori numerici assegnati dal problema, si ottiene infine  $d = 2.68 \mu\text{m}$ .

*Nota.* L'esercizio è stato risolto nell'ipotesi implicita di poter utilizzare la teoria della diffrazione nell'approssimazione di Fraunhofer; tale assunzione richiede che la sorgente luminosa e lo schermo su cui si osserva la figura di diffrazione siano entrambi a grande distanza dalla fenditura. La seconda condizione apparentemente non è soddisfatta; tuttavia l'obiettivo ha semplicemente la funzione di focalizzare in un determinato punto del piano focale solo quelle onde elettromagnetiche piane che giungono su di esso con una certa direzione di propagazione. In altre parole l'obiettivo mette in corrispondenza ogni angolo  $\theta$  con un punto del piano focale, ma non deforma la figura di diffrazione, che è del tutto identica (ma più piccola) di quella che si osserverebbe, senza l'obiettivo, a grande distanza.

### S.12.3.

Secondo il principio di Babinet, la figura di diffrazione di un disco opaco di diametro  $D$  illuminato da un'onda elettromagnetica monocromatica piana, è *quasi* identica a quella di una fenditura circolare dello stesso diametro praticata in una schermatura; l'unica differenza consiste nella presenza di un punto luminoso nel centro della figura, detto *punto luminoso di Poisson*. Possiamo pertanto applicare gli stessi risultati ottenuti nei precedenti esercizi; in particolare assumeremo che le dimensioni del disco osservato sul piano siano pari alle dimensioni  $d$  del lobo principale della figura di diffrazione del granello di polvere; tale quantità verrà definita come la distanza tra i due primi minimi di diffrazione adiacenti al



l'angolo  $\alpha$  che sottende l'intero lobo principale della figura di diffrazione sarà:

$$\alpha \approx 2.44 \frac{\lambda}{D}, \quad (1)$$

con  $D$  diametro del granello di polvere e  $\lambda$  lunghezza d'onda della radiazione che lo illumina. Di conseguenza le dimensioni della figura di diffrazione sono pari a:

$$d \approx f\alpha = 2.44 \frac{\lambda f}{D}, \quad (2)$$

con  $f$  distanza focale della lente. Invertendo la (2), si ottiene:

$$D = 2.44 \frac{\lambda f}{d}, \quad (3)$$

da cui, sostituendo i dati numerici assegnati dal problema, otteniamo  $D = 20 \mu\text{m}$ .

*Nota.* Il principio di Babinet può essere facilmente ricavato attraverso il seguente ragionamento: consideriamo il campo elettrico  $\mathbf{E}_d$  dell'onda elettromagnetica piana diffratta dal disco sul piano focale della lente; per il principio di sovrapposizione, esso sarà pari a:

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_f, \quad (4)$$

dove  $\mathbf{E}_0$  è il campo dell'onda piana libera di propagarsi in assenza del disco, mentre  $\mathbf{E}_f$  è il campo che si osserverebbe se la diffrazione avvenisse da una *fenditura* complementare al disco (ovvero della stessa forma e diametro). Si noti tuttavia che un'onda piana viene focalizzata da una lente in un unico punto (il fuoco), per cui in tutto il resto del piano focale, al di fuori del fuoco,  $\mathbf{E}_0 = 0$ . Pertanto, al di fuori del fuoco, risulterà  $\mathbf{E}_d = -\mathbf{E}_f$ ; dette  $I_d$  ed  $I_f$  le intensità delle figure di diffrazione del disco e della fenditura, si otterrà:

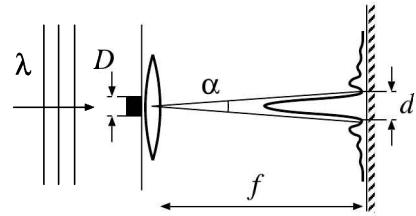
$$I_d = \frac{1}{2}c\varepsilon_0|\mathbf{E}_d|^2 = \frac{1}{2}c\varepsilon_0|\mathbf{E}_f|^2 = I_f \quad (5)$$

da cui si evince che, eccezion fatta per il punto focale, le due figure di diffrazione sono identiche.

#### S.12.4.

Assumeremo che i due oggetti siano talmente lontani da poterli considerare come puntiformi per entrambi gli osservatori. Nell'interazione con l'apertura finita del telescopio (o della pupilla oculare), la radiazione proveniente dai due oggetti subirà diffrazione. Per ricavare la minima distanza di separazione per la quale gli oggetti sono distinguibili, applicheremo ancora una volta il criterio di Rayleigh; secondo tale principio, il minimo angolo  $\alpha$  che deve separare le direzioni di propagazione delle onde elettromagnetiche provenienti da i due oggetti affinché essi appaiano distinguibili, è pari a (si veda in proposito il problema 1):

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{d}; \quad (1)$$



dove  $d$  è l'apertura su cui la luce di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide. Nell'ipotesi che valga l'approssimazione di piccolo angolo, la separazione  $D$  tra i due oggetti è legata ad  $\alpha$  dalla relazione:

$$D \approx L\alpha = 1.22 \frac{\lambda L}{d}, \quad (2)$$

essendo  $L$  la distanza tra l'osservatore ed i due oggetti. Sostituendo nella (2) i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo che nel caso dell'osservatore dotato di telescopio, i due oggetti saranno distinguibili se sono separati da una distanza superiore a  $D_t = 6.1$  m. Nel caso dell'osservatore che guarda i due oggetti ad occhio nudo, la minima distanza sale a  $D_p = 1.525$  km.

### S.12.5.

Supponiamo che la separazione angolare  $\alpha$  tra i due oggetti sulla volta celeste sia la minima possibile affinché essi siano visibili impiegando il telescopio ottico; supporremo inoltre che per  $\alpha$  si possa applicare l'approssimazione di piccolo angolo. In base a quanto già esposto nei precedenti esercizi, possiamo usare il criterio di Rayleigh per determinare  $\alpha$ :

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda_v}{a}, \quad (1)$$

essendo  $a$  l'apertura (diametro) del telescopio e  $\lambda_v$  la lunghezza d'onda nel campo del visibile a cui si effettua l'osservazione. Possiamo assumere che un'espressione analoga debba valere anche nel caso di un radiotelescopio ideale di diametro  $D$  che osservi i due corpi celesti alla lunghezza d'onda  $\lambda_m$  nel campo delle onde millimetriche:

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda_m}{D}. \quad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene:

$$D = a \frac{\lambda_m}{\lambda_v}. \quad (3)$$

Sostituendo infine nella (3) i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo che i due corpi celesti sarebbero separabili anche nel campo delle microonde se il radiotelescopio avesse un diametro superiore o uguale a  $D = 5$  km.

*Nota.* Il risultato di questo problema pone in evidenza la differenza tra le osservazioni astronomiche compiute con dispositivi ottici e quelle ottenute nel campo delle onde radio: per ottenere buone risoluzioni nel campo delle onde radio sarebbe necessario realizzare antenne di diametro enorme. Realizzando tuttavia un *sistema di antenne* disposte opportunamente ed elaborando al calcolatore i dati da esse raccolto, si può simulare l'effetto di un'unica antenna di diametro molto più ampio, in modo da aggirare il problema.

### S.12.6.

Le posizioni dei minimi della figura di diffrazione si ottengono imponendo che l'intensità  $I(\theta)$  di tale figura:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}, \quad (1)$$

si annulli; tale condizione corrisponde ad imporre:

$$\sin \beta(\theta) = 0, \quad (2)$$

dove la quantità  $\beta$  è data da:

$$\beta = \frac{1}{2}ka \sin \theta. \quad (3)$$

Nelle precedenti espressioni  $a$  è la larghezza della fenditura;  $\theta$  è l'angolo che sottende il punto in cui si considera la figura di diffrazione, misurato rispetto all'asse della fenditura;  $k = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onda corrispondente alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione incidente sulla fenditura. Dalle (2) e (3), si ottiene che la posizione dei minimi è data dalla relazione:

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{a}, \quad (4)$$

dove  $n$  è un numero intero non nullo. Affinché ci siano sei minimi (tre a destra e tre a sinistra del massimo assoluto centrale posto a  $\theta = 0$ ), occorre che l'equazione (4) ammetta soluzioni reali per  $1 \leq |n| \leq 3$ , ma non ammetta soluzioni reali per  $|n| \geq 4$ . Dato che il seno di un numero reale è sempre in modulo inferiore od uguale ad uno, tali condizioni si possono tradurre nelle espressioni:

$$\begin{cases} 3 \frac{\lambda}{a} \leq 1, \\ 4 \frac{\lambda}{a} \geq 1. \end{cases} \quad (5)$$

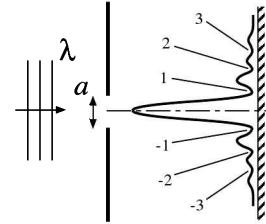
Le precedenti relazioni si traducono nelle condizioni:

$$\begin{cases} a \geq 3\lambda, \\ a \leq 4\lambda, \end{cases} \quad (6)$$

che si riassumono nell'espressione  $3\lambda \leq a \leq 4\lambda$ . Sostituendo il valore numerico della lunghezza d'onda, si ottiene che la larghezza della fenditura è compresa tra  $1.90 \mu\text{m}$  e  $2.53 \mu\text{m}$ .

### S.12.7.

Dal punto di vista della propagazione delle onde elettromagnetiche, possiamo immaginare l'antenna radar come una fenditura equivalente di forma circolare e medesimo diametro, investita da un'onda monocromatica piana; l'antenna emetterà un fascio di microonde direzionale, ma con un angolo di apertura  $\alpha$  che corrisponde all'angolo contenente il lobo principale della figura di diffrazione della fenditura equivalente (si veda la figura). In base a questa assunzione e nell'approssimazione di piccoli angoli, l'angolo  $\alpha$  può essere calcolato mediante l'espressione:



$$\alpha = 2\theta_1 \approx 2.44 \frac{\lambda}{2R}, \quad (1)$$

dove  $R$  è il raggio dell'antenna;  $\lambda = c/\nu$  la lunghezza d'onda della radiazione corrispondente alla frequenza  $\nu$ ;  $c$  è la velocità della luce e  $\theta_1$  l'angolo che sottende il primo minimo della figura di diffrazione della fenditura equivalente all'antenna. Per individuare gli aerei, l'antenna radar viene ruotata di continuo, in modo da "illuminare" i bersagli e riceverne una eco. Il radar sarà in grado di distinguere i due aerei solo se il fascio di microonde non è molto ampio, così da investire un solo aereo per volta e non tutti e due contemporaneamente; infatti solo in questo caso per ogni aereo investito dall'onda radio vi sarà una eco distinta che ritorna al radar. Detta allora  $L$  la distanza dei due aerei dal radar, la minima distanza  $D$  che deve separare gli aerei affinché siano distinguibili è pari a:

$$D \approx \alpha L = 1.22 \frac{L\lambda}{R} = 1.22 \frac{Lc}{R\nu}. \quad (2)$$

Sostituendo nella precedente equazione i valori assegnati dal problema e ricordando che  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s, si ottiene  $D = 325$  m.

*Nota.* Si osservi, in base alla (1), che la risoluzione del radar, intesa come capacità di distinguere due oggetti vicini tra loro, è tanto migliore quanto più grande è il diametro dell'antenna o quanto più piccola è la lunghezza d'onda impiegata. Nonostante il diverso principio di funzionamento, valgono quindi considerazioni del tutto analoghe a quelle già esposte per strumenti di tipo ottico o per radiotelescopi (si veda l'esercizio 5).

### S.12.8.

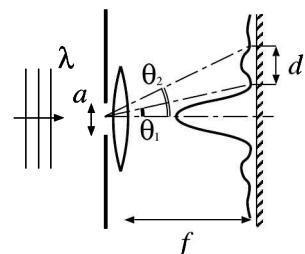
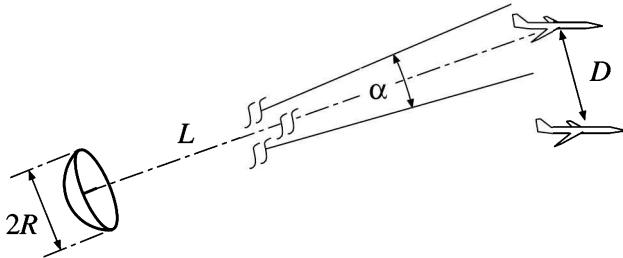
La posizione dei minimi della figura di diffrazione è data dall'espressione:

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{a}, \quad (1)$$

dove  $\theta$  è l'angolo che individua la posizione del minimo rispetto all'asse della fenditura;  $n$  è un numero intero non nullo;  $\lambda$  la lunghezza d'onda della radiazione incidente sulla fenditura ed  $a$  l'apertura della fenditura stessa. Si noti che in approssimazione di piccoli angoli, la (1) si riduce all'equazione:

$$\theta_n \approx n \frac{\lambda}{a}. \quad (2)$$

E' bene notare che la validità di tale approssimazione andrà verificata al termine della risoluzione del problema. In base alla (2), l'angolo compreso tra il primo ed il secondo minimo di diffrazione è pari a:



$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}; \quad (3)$$

detta  $f$  la distanza tra la lente ed il piano focale, potremo stimare la distanza  $d$  tra i due minimi sul piano secondo la relazione:

$$d \approx f\Delta\theta = \frac{f\lambda}{a}, \quad (4)$$

dove è ancora stata impiegata l'approssimazione di piccoli angoli. Risulta pertanto dalla precedente espressione che:

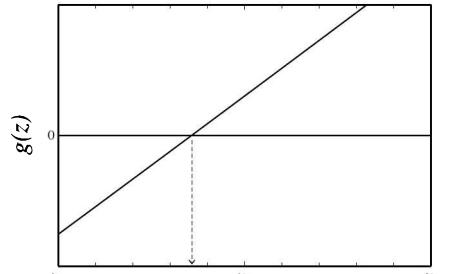
$$\frac{\lambda}{a} \approx \frac{d}{f}. \quad (5)$$

Sostituendo nella (5) i valori numerici assegnati dal problema, si ottiene che  $\lambda/a = 0.075$ . Si noti che l'approssimazione di piccoli angoli ri:

*Nota.* Qualora l'ipotesi di piccoli angoli non fosse applicabile, è necessario procedere nel seguente modo: tenuto conto della relazione trigonometrica

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}, \quad (6)$$

e dato che possiamo riscrivere la distanza tra i due minimi nella forma:



$$d = f(\tan\theta_2 - \tan\theta_1), \quad (7)$$

otterremo:

$$d = f \left( \frac{\sin\theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_2}} - \frac{\sin\theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_1}} \right). \quad (8)$$

Sostituendo la (1) nella (8), si giunge all'equazione:

$$z \left( \frac{2}{\sqrt{1 - 4z^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \right) - \frac{d}{f} = 0, \quad (9)$$

essendo  $z = \lambda/a$  l'incognita da determinare. La (9) può essere risolta in forma numerica o grafica; la figura mostra l'andamento della funzione  $g(z)$ , che compare al primo membro dell'equazione (9), in funzione di  $z$ . Come si può notare, il punto di intersezione del grafico con l'asse delle ascisse, corrispondente alla soluzione della (9), è molto vicino alla soluzione approssimata che abbiamo determinato precedentemente.

### S.12.9.

Nel seguito faremo riferimento alla figura (non in scala), in cui i punti S, T ed N rappresentano rispettivamente il Sole, la Terra e Nettuno; P è la posizione in cui si trova la sonda spaziale;  $R_T$  ed  $R_N$  sono rispettivamente le distanze medie dal Sole della Terra e di Nettuno. Per poter intercettare la Terra di continuo, la sonda deve emettere un

fascio di onde elettromagnetiche che circoscriva l'orbita terrestre; l'angolo di emissione  $\alpha$  dell'antenna si può dunque calcolare come:

$$\alpha \approx 2 \frac{R_T}{R_N}, \quad (1)$$

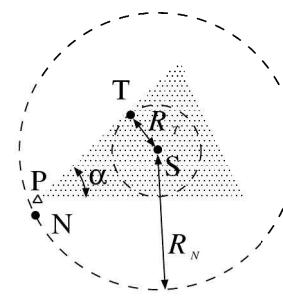
dove si è assunto che la sonda sia in prossimità di Netuno. L'angolo di emissione è legato al diametro  $d$  dell'antenna dalla relazione:

$$\alpha \approx 2.44 \frac{\lambda}{d} = 2.44 \frac{c}{\nu d}, \quad (2)$$

dove  $c$  è la velocità della luce,  $\lambda$  la lunghezza d'onda e  $\nu$  la frequenza della radiazione emessa dall'antenna. Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene:

$$\nu = 1.22 \frac{c R_N}{d R_T}; \quad (3)$$

sostituendo i dati assegnati dal problema, otteniamo  $\nu = 10.98$  GHz, corrispondente ad una lunghezza d'onda  $\lambda = 2.73$  cm.



#### S.12.10.

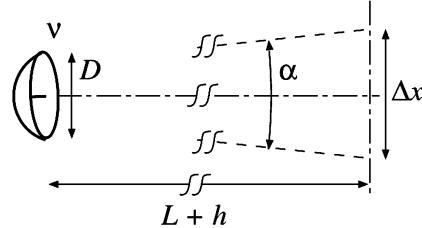
In assenza del traliccio, il fascio di microonde propagherebbe indisturbato in aria; in tal caso, come già visto nella soluzione del problema 7, l'antenna radar è equivalente ad una fenditura di forma circolare e diametro  $D$ , investita da un'onda monocromatica piana; l'antenna emetterà un fascio

di microonde direzionale, ma con un angolo di apertura  $\alpha$  che corrisponde all'angolo contenente il lobo principale della figura di diffrazione della fenditura equivalente. In base a questa assunzione e nell'approssimazione di piccoli angoli, l'angolo  $\alpha$  può essere calcolato mediante l'espressione:

$$\alpha = 2\theta_1 \approx 2.44 \frac{\lambda}{D}, \quad (1)$$

dove  $\lambda = c/\nu$  è la lunghezza d'onda della radiazione corrispondente alla frequenza  $\nu$ ;  $c$  è la velocità della luce e  $\theta_1$  l'angolo che sottende il primo minimo della figura di diffrazione della fenditura equivalente all'antenna. Sul piano di osservazione, a distanza pari a  $L + h$  dall'antenna, la zona in cui il segnale radio sarebbe percepito avrebbe ampiezza  $\Delta x$  pari a:

$$\Delta x \approx \alpha(L + h) = 2.44 \frac{c(L + h)}{D\nu}. \quad (2)$$



Secondo i dati assegnati dal problema, tale regione avrebbe un'ampiezza  $\Delta x \approx 44$  m. Consideriamo ora la presenza del traliccio; come già evidenziato nella soluzione del problema 3, in base al principio di Babinet un ostacolo illuminato dal fascio di microonde produrrà una figura di diffrazione simile a quella generata dalla fenditura complementare

all'ostacolo. Assumeremo che la regione in cui il segnale radio è percepibile corrisponda al lobo centrale di tale figura. Sulla base del precedente ragionamento ed assumendo che il fascio di onde radio incidente sul traliccio abbia fronte piano, l'angolo  $\beta$  che sottende il lobo di diffrazione del traliccio sarà dato da:

$$\beta \approx 2 \frac{\lambda}{d}, \quad (3)$$

dove  $d$  è la larghezza (diametro) del traliccio; si noti che in questo caso il traliccio è assimilabile ad una striscia rettangolare, perpendicolare al fascio di microonde; pertanto non compare il termine 1.22 nella formula (3). Sul piano di osservazione, a distanza pari ad  $h$  dal traliccio, la zona in cui il segnale radio sarebbe percepito avrebbe ampiezza  $\Delta x'$  pari a:

$$\Delta x' \approx \beta h = 2 \frac{ch}{d\nu}. \quad (4)$$

Sostituendo i dati assegnati dal problema, si ottiene  $\Delta x' = 180$  m; pertanto la regione interessata dal fascio di microonde sarà più estesa rispetto al caso precedente.

### S.12.11.

Sia  $d$  il passo del reticolo, inteso come distanza tra due fenditure successive. La posizione dei massimi di interferenza di ordine  $m$  sul piano focale della lente è data dalla relazione:

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad (1)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda che investe il reticolo e  $\theta_m$  l'angolo che individua la posizione del massimo considerato rispetto all'asse del sistema. Possiamo legare  $\theta_m$  alla posizione sul piano focale mediante la relazione:

$$\Delta x = f \tan \theta_m, \quad (2)$$

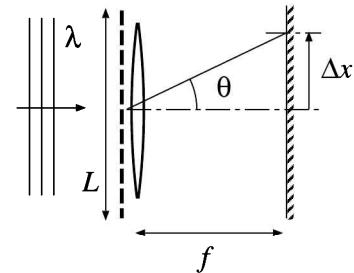
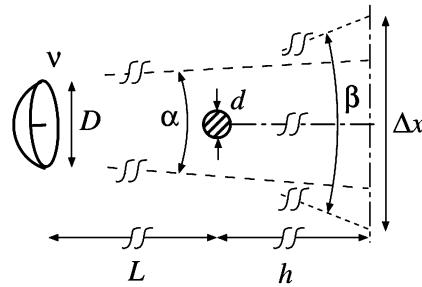
essendo  $f$  la focale della lente e  $\Delta x$  la posizione del punto considerato rispetto all'asse del sistema. Tenuto conto delle relazioni che legano le funzioni trigonometriche, possiamo porre:

$$\tan \theta_m = \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m} = \frac{\sin \theta_m}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_m}}; \quad (3)$$

inserendo la (1) nella (3), si ottiene:

$$\tan \theta_m = \frac{m\lambda}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}. \quad (4)$$

Sostituendo la (2) nella precedente espressione ed elevando al quadrato, si ottiene:



$$\Delta x^2 = \frac{m^2 f^2 \lambda^2}{d^2 - m^2 \lambda^2}, \quad (5)$$

da cui si ricava:

$$d = m \frac{\lambda}{\Delta x} \sqrt{\Delta x^2 + f^2}. \quad (6)$$

Ponendo nella precedente espressione  $m = 2$  e sostituendo i valori assegnati dal problema, si ottiene  $d = 28 \mu\text{m}$ . Infine, detto  $N$  il numero di fenditure del reticolo ed  $L$  la sua lunghezza, possiamo porre:

$$N \approx \frac{L}{d}, \quad (7)$$

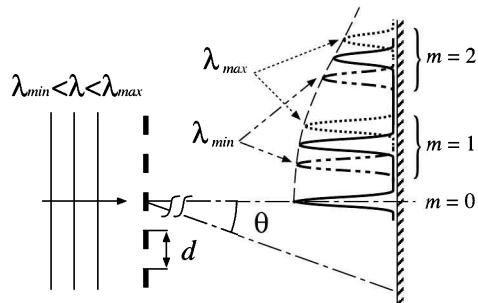
da cui risulta  $N \approx 1070$ .

*Nota.* Nella precedente risoluzione non si è fatto uso dell'approssimazione di piccolo angolo, che tuttavia può essere applicata in quanto  $\lambda/d = 0.025 \ll 1$ ; in tal caso  $\tan \theta_m \approx \theta_m \approx \sin \theta_m$  e  $\Delta x \approx f \theta_m$ , da cui si otterebbe  $d \approx m \lambda f / \Delta x$ . Un altro modo, equivalente al precedente, per approssimare l'espressione (6) consiste nell'osservare che nella radice quadrata si può porre  $\Delta x^2 + f^2 \approx f^2$  in quanto  $\Delta x \ll f$ .

### S.12.12.

Supponremo che la radiazione incidente sul reticolo si possa decomporre in onde piane monocromatiche di lunghezza d'onda  $\lambda$  compresa nell'intervallo  $\lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max}$ , essendo rispettivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{min} = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \lambda_{max} = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$



Nelle precedenti espressioni  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda centrale e  $\Delta\lambda$  l'intervallo di lunghezze d'onda presenti nello spettro della radiazione. La posizione dei massimi di interferenza di ordine  $m$  alla generica lunghezza d'onda  $\lambda$  è data dalla relazione:

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad (2)$$

dove  $d$  è la distanza tra due fenditure del reticolo e  $\theta_m$  l'angolo che individua il massimo rispetto all'asse del sistema. Come si evince dalla figura, i massimi per le lunghezze d'onda minori sono più vicini all'asse del sistema. Al fine di evitare sovrapposizioni tra massimi di ordini adiacenti, imporremo che il massimo di ordine  $m$  alla lunghezza d'onda  $\lambda_{max}$  sia distinto dal massimo di ordine  $m+1$  alla lunghezza d'onda  $\lambda_{min}$ . Ciò equivale ad imporre:

$$\sin \theta_m(\lambda_{max}) < \sin \theta_{m+1}(\lambda_{min}), \quad (3)$$

che, in base alla (2) diviene:

$$m \frac{\lambda_{max}}{d} < (m+1) \frac{\lambda_{min}}{d}. \quad (4)$$

Sostituendo la (1) nella precedente diseguaglianza, otteniamo:

$$\Delta\lambda < \frac{2\lambda_0}{2m+1}. \quad (5)$$

Il risultato ottenuto non dipende dal passo  $d$  del reticolo, ma dipende dall'ordine dei massimi di interferenza che stiamo considerando: all'aumentare di  $m$ , la larghezza spettrale  $\Delta\lambda$  per cui non si osserva sovrapposizione tra gli ordini del reticolo diminuisce sempre più.

*Nota.* La (5) è stata ottenuta impiegando la condizione (3), che tuttavia è valida solo in prima approssimazione; infatti affinché due due ordini di interferenza siano distinguibili, è necessario che soddisfino il criterio di Rayleigh: il massimo di ordine  $m$  a  $\lambda_{max}$  deve al più coincidere col primo zero adiacente al massimo di ordine  $m+1$  a  $\lambda_{min}$ . Detto  $N$  il numero di fenditure illuminate del reticolo, la posizione del primo zero della figura di interferenza adiacente al massimo di ordine  $m+1$  è pari a:

$$\sin \theta_{m'}^{(z)} = m' \frac{\lambda}{Nd}, \quad (6)$$

dove l'ordine  $m'$  dello zero è

$$m' = N(m+1) - 1. \quad (7)$$

Modificando la (3) in

$$\sin \theta_m(\lambda_{max}) < \sin \theta_{m'}^{(z)}(\lambda_{min}), \quad (8)$$

si ottiene:

$$m \frac{\lambda_{max}}{d} < \left[ (m+1) - \frac{1}{N} \right] \frac{\lambda_{min}}{d}. \quad (9)$$

Si noti tuttavia che in genere  $N$  è un numero molto elevato, per cui si può assumere che  $[(m+1) - 1/N] \approx (m+1)$ ; pertanto la (9) si riduce, per  $N$  grandi, alla (4).

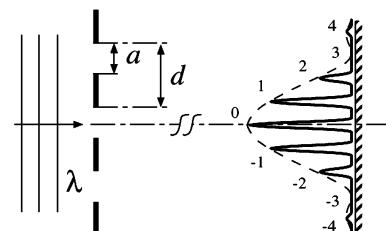
### S.12.13.

In base ai dati assegnati dal problema, sappiamo che l'angolo  $\theta_1$  che individua la posizione del primo massimo di interferenza del reticolo, deve soddisfare la relazione:

$$\sin \theta_1 = 0.2; \quad (1)$$

la posizione del massimo di interferenza di ordine  $m$  è anche espressa dalla relazione:

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad (2)$$



dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione incidente sul reticolo e  $d$  la distanza tra due fenditure contigue. Ponendo nella (2)  $m = 1$  e sostituendola nella (1), si ottiene:

$$\frac{\lambda}{d} = 0.2, \quad (3)$$

da cui si ricava  $d = 5\lambda = 2.45 \mu\text{m}$ . Dato che il massimo di interferenza del terzo ordine non è visibile, ne deduciamo che la sua posizione deve coincidere con quella del primo minimo della figura di diffrazione di una delle fenditure, che costituisce l'inviluppo della distribuzione di intensità osservata a grande distanza (si veda in proposito la figura). La posizione del minimo di diffrazione di ordine  $n$  è data dall'espressione:

$$\sin \theta_n^{(d)} = n \frac{\lambda}{a}, \quad (4)$$

dove  $a$  è la larghezza della fenditura. Imponendo, per quanto detto in precedenza, che  $\theta_3 = \theta_1^{(d)}$  ed impiegando le (2) e (4), otteniamo:

$$3 \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}, \quad (5)$$

da cui si ricava  $a = d/3 = 0.82 \mu\text{m}$ .

#### S.12.14.

Ricordiamo ancora una volta che la posizione dei massimi di interferenza del reticolo è data dalla relazione:

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad (1)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione incidente sul reticolo,  $m$  un numero intero che individua l'ordine del massimo e  $d$  la distanza tra le fenditure; la posizione dei minimi della figura di diffrazione delle fenditure (che costituisce l'inviluppo della distribuzione di intensità al di là del reticolo, si veda la figura) è invece data dall'equazione:

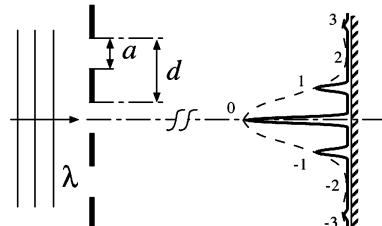
$$\sin \theta_n^{(d)} = n \frac{\lambda}{a}, \quad (2)$$

dove  $n$  è un numero intero che individua l'ordine del minimo ed  $a$  l'ampiezza delle fenditure. In base al primo punto richiesto dal problema, al di là del reticolo il secondo ordine di interferenza non è visibile; possiamo quindi dedurre che questo coincide col primo minimo dell'inviluppo di diffrazione. Porremo pertanto  $\theta_2 = \theta_1^{(d)}$ , da cui si ricava, mediante le (1) e (2), che:

$$2 \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}; \quad (3)$$

da tale relazione si ottiene che  $a = d/2$ . Per assecondare il secondo punto richiesto, dobbiamo impiegare la definizione di potere risolvente del reticolo  $R$ :

$$R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta \lambda_{min}} = Nm, \quad (4)$$



dove  $N$  è il numero di fenditure illuminate e  $\Delta\lambda_{min}$  la minima separazione spettrale risolvibile dal reticolo tra due righe alle lunghezze d'onda  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\lambda} + \Delta\lambda_{min}$  che appaiano in corrispondenza del massimo di interferenza di ordine  $m$ . Si noti che, fissato  $R$ , la minima distanza spettrale risolvibile dal reticolo cresce all'aumentare di  $\bar{\lambda}$ . Pertanto, per soddisfare la condizione richiesta in tutto l'intervallo spettrale del visibile, è sufficiente che essa valga alla lunghezza d'onda maggiore. Porremo quindi nella (4)  $m = 1$ , ottenendo:

$$R = N = \frac{\lambda_{max}}{\Delta\lambda}. \quad (5)$$

Secondo i dati assegnati,  $\lambda_{max} = 750$  nm e  $\Delta\lambda = 1.5$  nm; pertanto, in base alla (5), il numero di fenditure che è necessario illuminare sul reticolo per avere sufficiente risoluzione spettrale è  $N = 500$ . Infine, in base al terzo punto richiesto, la regione del reticolo illuminata dalla radiazione ha una lunghezza  $L \geq 1$  mm; possiamo pertanto ricavare la minima distanza  $d$  richiesta tra due fenditure adiacenti come:

$$d \approx \frac{L}{N}, \quad (6)$$

da cui si ricava  $d = 2 \mu\text{m}$ ; pertanto l'apertura delle fenditure sarà pari ad  $a = d/2 = 1 \mu\text{m}$ .

*Nota.* La distanza  $d$  appena calcolata potrà apparire al lettore poco realistica; in realtà reticolni dotati di 500 fenditure per millimetro sono assai diffusi negli strumenti dedicati all'analisi spettroscopica della luce; in talune applicazioni vengono impiegati anche reticolni con migliaia di fenditure per millimetro. Si noti che generalmente i reticolni di diffrazione impiegati nelle apparecchiature spettroscopiche sono del tipo *in riflessione*; si rimanda all'ultimo esercizio del capitolo per maggiori dettagli sul funzionamento di questi reticolni.

### S.12.15.

I massimi di interferenza del reticolo si osservano in corrispondenza degli angoli  $\theta_m$  tali che:

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad (1)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione che incide sul reticolo,  $m$  è un intero che individua l'ordine del massimo e  $d$  è il passo del reticolo, ovvero la distanza tra due fenditure adiacenti. Ne consegue che, conoscendo il valore di  $\theta_m$ , il passo  $d$  sarà dato dalla relazione:

$$d = m \frac{\lambda}{\sin \theta_m}. \quad (2)$$

sostituendo nella (2) i valori numerici assegnati dal problema e ponendo  $m = 2$ , si ottiene  $d = 11.3 \mu\text{m}$ .

Per determinare il minimo numero di fenditure illuminate necessario per distinguere le due righe spettrali, ricorriamo alla definizione di potere risolvente del reticolo  $R$ :

$$R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda} = Nm, \quad (3)$$

dove  $N$  è il numero di fenditure illuminate,  $\bar{\lambda}$  il valore medio tra le due lunghezze d'onda considerate,  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  la differenza tra le lunghezze d'onda ed  $m$  l'ordine di interferenza su cui stiamo effettuando l'osservazione. In base alla (3) si ricava che

$$N = \frac{\bar{\lambda}}{m\Delta\lambda} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2m(\lambda_2 - \lambda_1)}; \quad (4)$$

se sostituiamo nella precedente relazione i valori assegnati dal problema, otteniamo che per distinguere le due righe spettrali sono necessarie  $N_2 = 491$  fenditure se si opera sul secondo ordine di interferenza e  $N_3 = 327$  fenditure se si opera sul terzo ordine.

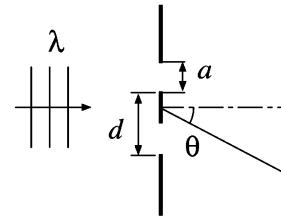
### S.12.16.

L'intensità della figura di diffrazione che si ottiene quando un'onda monocromatica piana incide sul sistema di due fenditure si può esprimere nella forma:

$$I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \gamma, \quad (1)$$

dove le quantità  $\beta$  e  $\gamma$  sono date da:

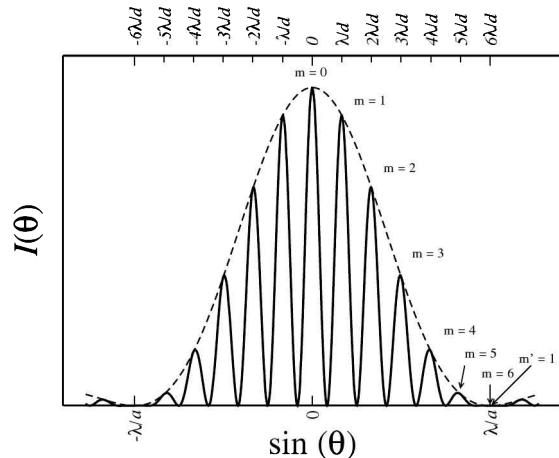
$$\beta = \frac{1}{2}ka \sin \theta \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{2}kd \sin \theta. \quad (2)$$



Nelle precedenti espressioni  $a$  e  $d$  sono rispettivamente la larghezza delle due fenditure e la loro distanza, come mostrato in figura;  $\theta$  è l'angolo che sottende il punto in cui si considera la figura di diffrazione, misurato rispetto all'asse del sistema di fenditure;  $k = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onda corrispondente alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione incidente sulle fenditure; infine  $I_0$  è la massima intensità che si misurerrebbe se fosse presente solo una delle due fenditure.

L'espressione (1) si può interpretare come la figura di interferenza di due sorgenti puntiformi poste a distanza  $d$  (proporzionale a  $\cos^2 \gamma$ ), modulata dalla figura di diffrazione di una fenditura di larghezza  $a$  (proporzionale a  $\sin^2 \beta / \beta^2$ ); tale comportamento è riportato nella figura successiva. Affinché nel lobo principale della figura compaiano 11 frange, è necessario che i massimi di interferenza di ordine  $m = 6$  ed  $m = -6$  coincidano con i minimi di diffrazione di ordine  $m' = 1$  ed  $m' = -1$  rispettivamente, in modo da non risultare visibili. In base alla (1), i minimi di diffrazione si osservano quando il termine  $\sin \beta$  si annulla; ciò si ottiene per:

$$\beta_{m'} = m'\pi, \quad (3)$$



ovvero, tenuto conto della prima delle (2), per

$$\sin \theta_{m'}^{(d)} = m' \frac{\lambda}{a}. \quad (4)$$

Sempre in base alla (1), i massimi di interferenza si osservano quando il termine  $\cos \gamma$  ha il massimo modulo; ciò si ottiene per:

$$\gamma_m = m\pi, \quad (5)$$

ovvero, tenuto conto della seconda delle (2), per

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}. \quad (6)$$

Ovviamente nelle precedenti espressioni  $m$  ed  $m'$  sono numeri interi. Affinché si osservino 11 frange nel lobo centrale dell'inviluppo della figura di interferenza, dovremo quindi porre:

$$\sin \theta_6 = \sin \theta_1^{(d)}, \quad (7)$$

che corrisponde a porre:

$$6 \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}, \quad (8)$$

condizione soddisfatta dalla relazione  $d/a = 6$ .

### S.12.17.

In base ai dati assegnati, possiamo calcolare la distanza  $d$  tra due fenditure successive, pari a:

$$d \approx \frac{L}{N}, \quad (1)$$

essendo  $L$  la lunghezza del reticolo ed  $N$  il numero di fenditure. Risulterà che i massimi di interferenza di ordine  $m$  soddisferanno la relazione:

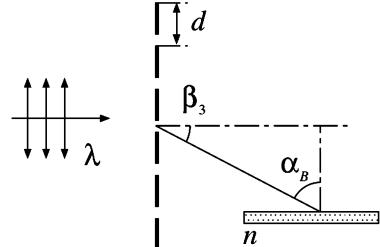
$$\sin \beta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad (2)$$

dove  $\beta_m$  è l'angolo che sottende il massimo considerato rispetto all'asse del reticolo e  $\lambda$  la lunghezza d'onda della radiazione incidente su di esso. In base alla (1), la (2) diviene:

$$\sin \beta_m \approx m \frac{N\lambda}{L}. \quad (3)$$

Sappiamo che la radiazione trasmessa dal reticolo al terzo ordine di interferenza incide all'angolo di Brewster  $\alpha_B$  su una lastra di indice di rifrazione  $n$ ; si ricorda che tale angolo soddisfa la relazione:

$$\tan \alpha_B = n. \quad (4)$$



L'angolo che la radiazione emessa dal reticolo forma con l'asse ( $\beta_3$  in figura) è complementare ad  $\alpha_B$ , per cui vale la relazione:

$$\sin \beta_3 = \cos \alpha_B; \quad (5)$$

ponendo nella (3)  $m = 3$  ed impiegando la (5), si giunge alla relazione:

$$\cos \alpha_B = 3 \frac{N\lambda}{L}. \quad (6)$$

Tenuto conto della relazione trigonometrica

$$\tan \alpha_B = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_B}}{\cos \alpha_B}, \quad (7)$$

e sostituendovi le relazioni (4) e (6), si ottiene:

$$n = \frac{\sqrt{1 - 9N^2\lambda^2/L^2}}{3N\lambda/L} = \frac{\sqrt{L^2 - 9N^2\lambda^2}}{3N\lambda}. \quad (8)$$

Elevando nella precedente relazione entrambi i membri al quadrato ed estraendo la lunghezza d'onda, si ottiene infine:

$$\lambda = \frac{L}{3N\sqrt{1 + n^2}}. \quad (9)$$

Sostituendo nella precedente relazione i dati assegnati dal problema, si giunge a calcolare la lunghezza d'onda  $\lambda = 667$  nm.

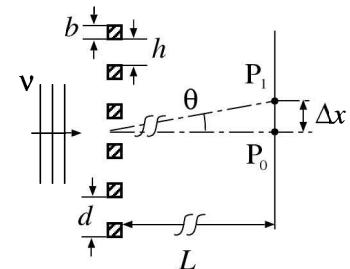
Il fascio incidente sulla lastra all'angolo di Brewster sarà ancora polarizzato nel piano di incidenza e quindi verrà completamente trasmesso attraverso la lastra, senza subire riflessione.

### S.12.18.

Prima di svolgere il problema, si noti che la grata equivale ad un reticolo di diffrazione; l'apertura delle fenditure del reticolo è pari a  $h$ , mentre la distanza tra due fenditure adiacenti deve essere calcolata come  $d = b + h$ , essendo  $b$  lo spessore delle sbarre ed  $h$  la distanza tra le facce interne di due sbarre adiacenti (si veda la figura). Nell'approssimazione di piccolo angolo, le posizioni in cui si individua il segnale radio (massimi di interferenza) sono date dalle relazioni:

$$\theta_m \approx m \frac{\lambda}{d} = m \frac{c}{\nu(b+h)}, \quad (1)$$

dove  $\theta_m$  è l'angolo che individua la posizione del massimo di interferenza di ordine  $m$  rispetto all'asse del sistema,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda e  $\nu$  la frequenza dell'onda radio ed infine  $c$  è la velocità della luce. La distanza  $\Delta x$  tra due massimi adiacenti osservati a distanza  $L$  dalla grata, sarà data da:



$$\Delta x \approx L(\theta_{m+1} - \theta_m) = \frac{Lc}{\nu(b+h)}. \quad (2)$$

Il fatto che in due posizioni (simmetriche rispetto all'asse del sistema) non si riceva il segnale radio, è indizio della presenza in quei punti dei minimi dell'inviluppo di diffrazione. Dalla figura si evince che i massimi di interferenza mancati sono quelli di ordine  $m = 2$  ed  $m = -2$ ; nell'ipotesi che essi coincidano con i minimi di diffrazione di ordine  $n = 1$  ed  $n = -1$ , possiamo porre:

$$\theta_2 = \theta_1^{(d)}, \quad (3)$$

dove l'angolo

$$\theta_1^{(d)} \approx \frac{\lambda}{h} = \frac{c}{\nu h} \quad (4)$$

individua la posizione del primo minimo di diffrazione. Sostituendo la (1) e la (4) nella (3), si ottiene:

$$b + h = 2h, \quad (5)$$

da cui  $b = h$ . Tale risultato, sostituito nella (2), comporta che

$$h = \frac{Lc}{2\nu\Delta x}; \quad (6)$$

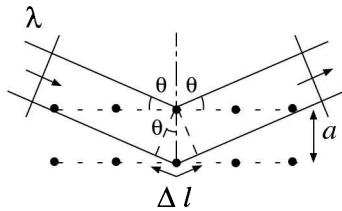
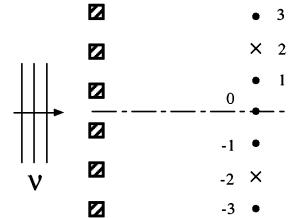
sostituendo nella (6) i dati assegnati, si ottiene  $h = b = 5$  cm.

### S.12.19.

In un esperimento di diffrazione alla Bragg, il fascio diffratto viene osservato "in riflessione", nella direzione che forma un angolo con la superficie pari all'angolo di radenza  $\theta$ . Come si evince dalla figura, l'onda incidente verrà diffratta dai vari piani cristallini; onde emergenti da piani differenti sono fra loro sfasate a causa del diverso cammino ottico percorso. Consideriamo ora due piani adiacenti; la differenza di percorso ottico  $\Delta l$  fra le due onde diffratte sarà pari a:

$$\Delta l = 2a \sin \theta, \quad (1)$$

dove  $a$  è la distanza tra due piani cristallini adiacenti; si noti che  $\Delta l$  è stato calcolato considerando il maggior cammino che il raggio luminoso inferiore compie rispetto al raggio superiore, a partire dal fronte d'onda in ingresso. Affinché i due fasci diffratti si sommino costruttivamente, è necessario che lo sfasamento  $\Delta\phi$  tra di essi sia un multiplo di  $2\pi$ . In base alla (1), porremo quindi:



$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l = 2m\pi, \quad (2)$$

essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda della radiazione incidente sul cristallo. La relazione (2) è equivalente alla:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{2a}, \quad (3)$$

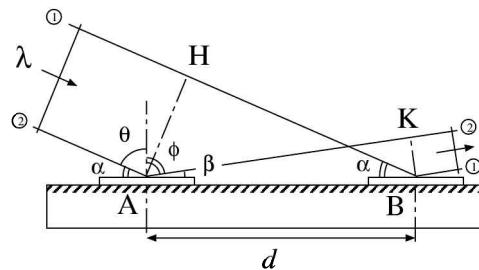
che indica per quali angoli  $\theta$  si osserverà un massimo di intensità per la radiazione diffratta. Possiamo anche riscrivere la (3) nella forma:

$$a = m \frac{\lambda}{2 \sin \theta}, \quad (4)$$

che esprime la distanza dei piani cristallini in funzione delle altre quantità. In base ai dati assegnati dal problema, ponendo nella (4)  $m = 1$ , si ottiene  $a = 0.37$  nm.

### S.12.20.

Trascureremo per il momento la larghezza finita delle strisce metalliche e ci concentreremo sulla legge che individua i massimi di interferenza emessi dal reticolo. Faremo riferimento alla figura, che mostra una sezione del reticolo in direzione perpendicolare alle strisce; in essa  $\theta$  è l'angolo di incidenza,  $\phi$  l'angolo di emissione,  $\lambda$  la lunghezza d'onda della radiazione incidente,  $d$  la distanza tra due strisce metalliche consecutive. Si noti che ciascuna di tali strisce, una volta illuminata, equivale ad una sorgente di onde luminose, che supporremo in fase col fascio incidente. Consideriamo la differenza di percorso ottico  $\Delta l$  fra due raggi luminosi paralleli che investono due strisce adiacenti del reticolo (poste in A e B); come si evince dalla figura,  $\Delta l = AK - HB$ , dove H è la proiezione di A sul fascio 1 e K la proiezione di B sul fascio 2. Risulta poi:



$$AK = AB \cos \beta = d \sin \phi, \quad (1)$$

essendo  $\phi = \pi/2 - \beta$ . Analogamente

$$HB = AB \cos \alpha = d \sin \theta, \quad (2)$$

essendo  $\theta = \pi/2 - \alpha$ . Sostituendo nell'espressione per  $\Delta l$ , si ottiene:

$$\Delta l = d(\sin \phi - \sin \theta); \quad (3)$$

affinché vi sia un massimo di interferenza nel fascio emesso dal reticolo, è necessario che lo sfasamento  $\Delta\psi$  fra i due percorsi sia un multiplo di  $2\pi$ ; si noti che in tal caso tutti i fasci diffratti dal reticolo nella direzione considerata subiranno interferenza costruttiva. In base a tale considerazione, otteniamo:

$$\Delta\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l = 2m\pi, \quad (4)$$

con  $m$  numero intero. Sostituendo nella (4) la (3), si ottiene infine:

$$\sin\phi = \sin\theta + m\frac{\lambda}{d}. \quad (5)$$

Nel caso in cui  $\theta = 0$ , il numero di ordini di interferenza visibili può essere ricavato dalla (5); in linea di principio,  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ , per cui possiamo porre  $0 \leq |\sin\phi| \leq 1$ . La (5) può essere riscritta nella forma:

$$m = \frac{d}{\lambda} \sin\phi; \quad (6)$$

risulterà per la (6) che:

$$|m| = \frac{d}{\lambda} |\sin\phi| \leq \frac{d}{\lambda}; \quad (7)$$

pertanto il massimo ordine di interferenza visibile ha indice  $m_{max} \leq d/\lambda$ . Tenuto conto dell'ordine zero (che corrisponde ad avere  $\phi = 0$ ) e del fatto che vi sono altrettanti ordini di indice negativo (che corrispondono ad avere  $\phi < 0$ ), risulterà che in totale il numero  $N_0$  di ordini di interferenza visibili è

$$N_0 = 1 + 2m_{max} \leq 1 + 2\frac{d}{\lambda}. \quad (8)$$

Per quanto concerne l'ultimo punto del quesito, si noti che valgono le stesse considerazioni espresse nel caso di reticolati di fenditure: la distribuzione di intensità emessa dal reticolo è il prodotto della figura di interferenza per la figura di diffrazione di una singola striscia. Al fine di eliminare il secondo ordine di interferenza, è sufficiente che questo coincida con il primo minimo della figura di diffrazione. Dovremo pertanto porre

$$\sin\phi_2 = \sin\theta_1^{(d)}, \quad (9)$$

dove  $\theta_1^{(d)}$  individua appunto la posizione del minimo di diffrazione. Dato che

$$\sin\theta_1^{(d)} = \frac{\lambda}{a}, \quad (10)$$

dove  $a$  è la larghezza di una delle strisce metalliche del reticolo, sostituendo la (10) nella (9) e tenendo conto della (5), otterremo:

$$\frac{\lambda}{a} = 2\frac{\lambda}{d}, \quad (11)$$

da cui risulta che  $a = d/2$ .

# Appendice A

## Costanti ed unità di misura

### Costanti fisiche

Carica elementare	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa dell'elettrone	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Costante dielettrica del vuoto	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$
Permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Velocità della luce nel vuoto	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
Raggio di Bohr	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}$
Magnetone di Bohr	$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{ J/T}$

### Prefissi per le potenze di dieci

Potenza	Prefisso	Abbreviazione	Potenza	Prefisso	Abbreviazione
$10^{-18}$	atto	a	$10^1$	deca	da
$10^{-15}$	femto	f	$10^2$	etto	h
$10^{-12}$	pico	p	$10^3$	chilo	k
$10^{-9}$	nano	n	$10^6$	mega	M
$10^{-6}$	micro	$\mu$	$10^9$	giga	G
$10^{-3}$	milli	m	$10^{12}$	tera	T
$10^{-2}$	centi	c	$10^{15}$	peta	P
$10^{-1}$	deci	d	$10^{18}$	exa	E

## Grandezze ed unità di misura impiegate nel testo

### Grandezze fondamentali nel Sistema Internazionale

Grandezza	Unità di misura	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Intervalli di tempo	secondo	s
Corrente elettrica	ampere	A

### Grandezze derivate

Grandezza	Unità	Simbolo	Espressioni equivalenti
Velocità $v$	-	m/s	-
Velocità angolare $\omega$	-	rad/s	-
Frequenza $\nu$	hertz	Hz	1/s
Accelerazione $a$	-	m/s <sup>2</sup>	-
Accelerazione angolare $\alpha$	-	rad/s <sup>2</sup>	-
Forza $F$	newton	N	kg m/s <sup>2</sup> ; J/m
Pressione $p$	pascal	Pa	N/m <sup>2</sup> ; kg/(m s <sup>2</sup> )
Momento meccanico $\mathfrak{M}$	-	N m	kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Quantità di moto $q$ , $Q$	-	kg m/s	-
Energia $E$ , $\mathcal{U}$ ; lavoro $\mathcal{L}$	joule	J	N m; kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Potenza $P$	watt	W	J/s; kg m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
Densità per unità di volume $\rho$	-	kg/m <sup>3</sup>	-
Carica $Q$	coulomb	C	A s
Campo elettrico $E$	-	N/C	V/m
Potenziale elettrostatico $V$	volt	V	J/C; kg m <sup>2</sup> /(A s <sup>3</sup> )
Capacità $C$	farad	F	C/V; A <sup>2</sup> s <sup>4</sup> /(kg m <sup>2</sup> )
Campo induz. dielettrica $D$	-	C/m <sup>2</sup>	A s/m <sup>2</sup>
Momento di dipolo elettrico $p$	-	C m	A s m
Campo polarizzazione $P$	-	C/m <sup>2</sup>	A s/m <sup>2</sup>
Resistenza elettrica $R$	ohm	$\Omega$	V/A; kg m <sup>2</sup> /(A <sup>2</sup> s <sup>3</sup> )
Campo induz. magnetica $B$	tesla	T	Wb/m <sup>2</sup> ; kg/(A s <sup>2</sup> ); N/(A m)
Campo magnetico $H$	-	A/m	C/(s m)

### Grandezze derivate (continua)

Grandezza	Unità	Simbolo	Espressioni equivalenti
Densità di carica lineare $\lambda$	-	C/m	A s/m
Densità di carica superficiale $\sigma$	-	C/m <sup>2</sup>	A s/m <sup>2</sup>
Densità di carica di volume $\rho$	-	C/m <sup>3</sup>	A s/m <sup>3</sup>
Resistività $\tau$	-	$\Omega$ m	V m/A
Conducibilità $\mathfrak{g}$	-	1/( $\Omega$ m)	A/(m V)
Densità di energia $u$	-	J/m <sup>3</sup>	N/m <sup>2</sup>
Densità di potenza $\wp$	-	W/m <sup>3</sup>	N/(s m <sup>2</sup> )
Densità di corrente $\mathbf{J}$	-	A/m <sup>2</sup>	C/(s m <sup>2</sup> )
Densità superficiale di corrente $\mathbf{j}_s$	-	A/m	C/(s m)
Flusso di campo magnetico $\Phi$	weber	Wb	V s
Induttanza $L$ , coeff. di induz. $M$	henry	H	Wb/A
Vettore di Poynting $\mathbf{S}$	-	W/m <sup>2</sup>	N/(s m)
Intensità $I$	-	W/m <sup>2</sup>	N/(s m)
Densità di quantità di moto $g$	-	kg/(m <sup>2</sup> s)	-



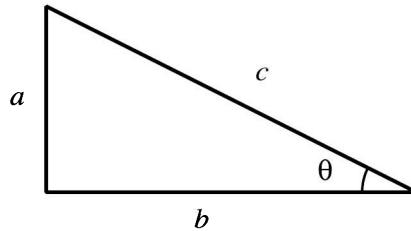
## Appendice B

### Richiami di trigonometria

#### Funzioni trigonometriche

Dato il triangolo rettangolo mostrato in figura di cateti  $a$  e  $b$ , ipotenusa  $c$  ed angolo  $\theta$  opposto al cateto  $a$ , si definiscono:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{a}{c} & \cos \theta &= \frac{b}{c} \\ \tan \theta &= \frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \cotan \theta &= \frac{b}{a} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$



#### Identità trigonometriche

Risultano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) & \cos \theta &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \cotan \theta &= \tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1\end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cotan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(1 - \cos \theta)}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

Inoltre valgono le seguenti regole di somma:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin [\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)] \cos [\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)]$$

$$\cos \alpha \pm \cos \beta = 2 \cos [\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)] \cos [\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin [\frac{1}{2}(\alpha + \beta)] \sin [\frac{1}{2}(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)$$

Nel campo complesso valgono le seguenti relazioni:

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

dette *formule di Eulero*; inoltre:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

## Formule notevoli per un triangolo

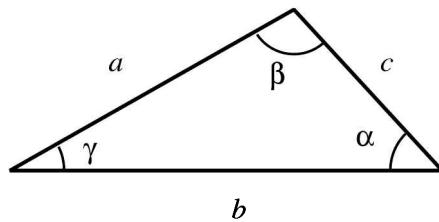
Dato il triangolo mostrato in figura di lati  $a, b$  e  $c$  ed angoli  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , valgono le seguenti relazioni:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

quest'ultima si riduce al ben noto teorema di Pitagora per  $\alpha = \pi/2$ .





# Appendice C

## Algebra dei numeri complessi

### C.1 Definizioni

Un numero complesso  $z$  è una coppia ordinata di numeri reali  $x$  ed  $y$ , rappresentato generalmente nella forma:

$$z = x + iy;$$

la quantità  $i$  è detta *unità immaginaria*; essa gode della proprietà

$$i^2 = -1.$$

Si definisce *compleSSo coniugato* del numero  $z$  la quantità

$$z^* = x - iy.$$

Si definisce inoltre *modulo* del numero  $z$  la quantità

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

dicesi infine *fase* del numero  $z = x + iy$  la quantità

$$\phi = \text{atan} \frac{y}{x}.$$

Dati due numeri complessi  $h = a + ib$  e  $k = c + id$ , valgono poi le seguenti proprietà:

$$h \pm k = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$h k = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

da cui, in particolare, deriva che

$$h^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

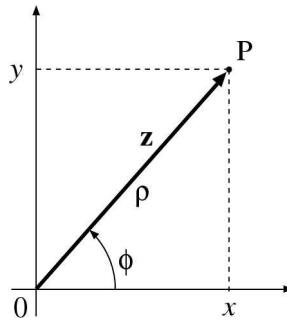
$$h h^* = a^2 + b^2 = |h|^2$$

Inoltre il reciproco di un numero complesso è definito come

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

## C.2 Rappresentazione polare ed esponenziale

Un numero complesso  $z = x + iy$  può essere rappresentato, attraverso la definizione data in precedenza, come posizione del un punto  $P(x, y)$  nel piano complesso. In alternativa,  $z$  può essere pensato come il vettore posizione  $\mathbf{z}$  corrispondente a  $P$ .



Possiamo anche rappresentare  $z$  mediante le coordinate polari  $(\rho, \phi)$  del punto  $P$ , dove  $\rho = |z| = |\mathbf{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$  è il modulo e  $\phi = \text{atan}(y/x)$  la fase del numero  $z$ . Possiamo pertanto anche porre (si veda la figura):

$$z = x + iy = \rho(\cos \phi + i \sin \phi).$$

La rappresentazione in coordinate polari risulta utile nel caso di prodotto di due numeri complessi; posto infatti che  $h = \rho_h(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  e  $k = \rho_k(\cos \beta + i \sin \beta)$ , si verifica che

$$h \cdot k = \rho_h \rho_k [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)].$$

Risulta inoltre che

$$z^n = \rho^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)];$$

infine

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right],$$

con  $0 \leq k \leq (n - 1)$ . Si noti che nel campo complesso la radice  $n$ -sima di un numero ammette sempre  $n$  valori complessi distinti.

Esiste una ulteriore forma di rappresentazione di un numero complesso. In virtù della relazione:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi,$$

è possibile rappresentare il numero  $z$  anche nella forma

$$z = \rho[\cos \phi + i \sin \phi] = \rho e^{i\phi}.$$

Si noti che da tali relazioni discendono le formule di Eulero già esposte nell'appendice precedente.

# Appendice D

## Calcolo differenziale ed integrale

### D.1 Regole di derivazione di una funzione

#### Regole generali

Sia  $k$  una costante ed  $f(x)$ ,  $g(x)$  due funzioni continue e derivabili (per la nozione di derivabilità si rimanda ad un testo di Analisi Matematica). Indicando con  $f'(x) = \frac{df}{dx}$  e  $g'(x) = \frac{dg}{dx}$  le derivate prime di  $f(x)$  e  $g(x)$ , si hanno le seguenti relazioni

$$\frac{d}{dx} [k f(x)] = k f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [g(x) + f(x)] = g'(x) + f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [g(x) \cdot f(x)] = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{g(x)}{f(x)} \right] = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

Se  $g = g(z)$  e  $z = f(x)$ , la funzione  $g = g[f(x)]$  si dice composta. In tal caso la derivata di  $g(x)$  risulta:

$$\frac{d}{dx} g(z) = \frac{dg}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dg}{dz} \cdot \frac{df}{dx}$$

## Tabella delle principali derivate

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d}{dx} k = 0 & \frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1} \\
 \frac{d}{dx} e^{kx} = k e^{kx} & \frac{d}{dx} a^{kx} = k a^{kx} \ln(a) \\
 \frac{d}{dx} \operatorname{sen}(x) = \cos(x) & \frac{d}{dx} \cos(x) = -\operatorname{sen}(x) \\
 \frac{d}{dx} \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} & \frac{d}{dx} \operatorname{cotg}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \\
 \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} & \frac{d}{dx} \ln[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}
 \end{array}$$

## D.2 Regole di integrazione di una funzione

### Regole generali

Date due funzioni  $f(x)$  ed  $F(x)$ , diremo che  $F$  è una primitiva di  $f$  se:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La primitiva di una funzione viene anche detta integrale indefinito ed indicata con la notazione:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

In virtù delle regole di derivazione, la primitiva è sempre definita a meno di una costante arbitraria. Per il teorema del calcolo integrale, l'integrale definito di una funzione  $f(x)$  valutato fra gli estremi  $a$  e  $b$  risulta pari alla differenza dei valori assunti dalla primitiva  $F(x)$  nei due estremi:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vi sono due metodi importanti di risoluzione di un integrale definito:

1. *Integrazione per sostituzione.* Posto  $x = y(t)$  e detta  $t = g(x)$  la sua funzione inversa, risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f[y(t)] \frac{dy}{dt} dt$$

2. *Integrazione per parti.* Se in un integrale appare il prodotto di una funzione  $f(x)$  per la derivata di una funzione  $g(x)$ , possiamo allora porre:

$$\int_a^b f(x) \frac{dg}{dx} dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b \frac{df}{dx} g(x) dx$$

### Tabella dei principali integrali indefiniti

Si noti che tutti gli integrali qui riportati sono sempre assegnati a meno di una costante arbitraria C.

$$\begin{array}{ll} \int k \, dx = kx & \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ \int e^{kx} \, dx = \frac{e^{kx}}{k} & \int a^{kx} \, dx = \frac{a^{kx}}{k \ln(a)} \\ \int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) & \int \cos(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) \\ \int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln[\cos(x)] & \int \operatorname{cotg}(x) \, dx = \ln[\operatorname{sen}(x)] \\ \int \frac{1}{x} \, dx = \ln(x) & \int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x \end{array}$$

## D.3 Espansione in serie di una funzione

Si consideri una funzione  $f(x)$  continua assieme alle sue derivate in un intorno del punto  $x_0$ ;  $f(x)$  può essere rappresentata in tale intorno mediante una serie di potenze di  $x$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) (x - x_0)^n,$$

dove  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ;  $0! = 1$  e le derivate di ordine n-simo della funzione  $f(x)$  sono tutte valutate nel punto  $x_0$ . Se la precedente sommatoria viene arrestata ai primi addendi, si ottiene una espressione che approssima la funzione  $f(x)$ . Di seguito si riportano le approssimazioni di alcune funzioni in un intorno di  $x_0 = 0$ .

**Approssimazione di  $f(x)$  nell'intorno di  $x_0 = 0$**

$$\sin(x) \approx x \quad \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\exp(x) \approx (1 + x) \quad \tan(x) \approx x$$

$$\frac{1}{1+x} \approx (1-x) \quad \frac{1}{1-x} \approx (1+x)$$

$$(1+x)^2 \approx (1+2x) \quad (1-x)^2 \approx (1-2x)$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

$$\ln(1+x) \approx x$$











Finito di stampare nel  
Settembre 2012 da  
ATENET - Grisignano (VI)