Corrente elettrica

In un conduttore ci sono portatori di carica che si possono muovere liberamente:
- Metalli: e^-
- Soluzioni elettrolitiche: ioni + e -
- Plasmi: ioni ed e^-

In condizioni di equilibrio e.s.:

Gli e^- in un metallo si muovono per effetto dell'**agitazione termica**

Gli e^- sono soggetti a fortissime interazioni e.s. con gli ioni e gli altri e^-, ma mediamente **la risultante è nulla**

- La velocità è molto elevata: $v \approx 10^5$ m/s
- A causa degli urti con gli ioni, la direzione del moto cambia continuamente: $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$

In condizioni statiche, i portatori mediamente non si muovono.

In condizioni dinamiche:

La posizione media degli e^- può cambiare con **velocità di trascinamento** $v_t \leq$ mm/s

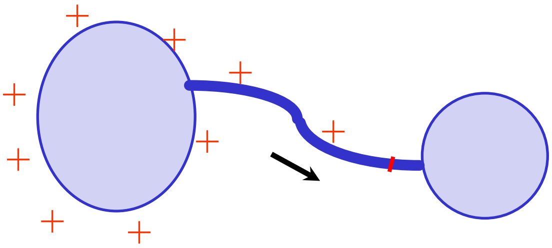
Corrente elettrica = flusso di cariche

Corrente di conduzione: moto collettivo dei portatori di carica
senza trasporto di massa
senza carica netta nel conduttore

Corrente di convezione: moto di masse di materia, nella quale ci sono dei portatori di carica

Corrente di spostamento: senza moto di cariche
dovuta a campi elettrici variabili

Colleghiamo un conduttore carico a uno scarico.

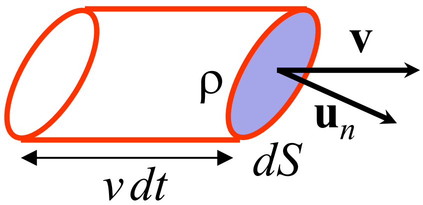


Attraverso una sezione S del filo passa una carica Δq in un tempo Δt

Intensità di corrente media $$i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Intensità di corrente istantanea $$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

S.I.: Ampere A   1 A = 1 C/s   Unità fondamentale



ρ = Densità della carica in moto con velocità **v**.
Nel tempo dt passano attraverso la superficie dS le cariche contenute nel volume: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n\ dt\ dS$

$$\Rightarrow \quad dq = \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n\ dS\ dt$$

Definiamo: $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ **Densità di corrente** S.I.: A/m^2

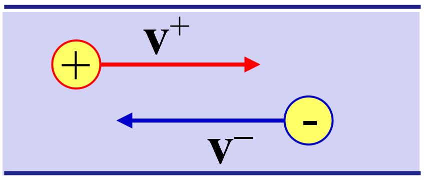
$$dq = \mathbf{J}\cdot\mathbf{u}_n\, dS\, dt$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \iint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{u}_n\ dS$$

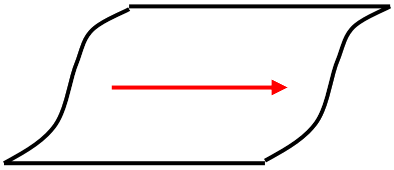
La corrente i attraverso una sezione S è uguale al flusso del vettore densità di corrente **J** attraverso S

Dalla definizione di **J**:

$$\mathbf{J} = \rho^{+}\mathbf{v}^{+} + \rho^{-}\mathbf{v}^{-}$$



Cariche di segno opposto e velocità opposte contribuiscono alla stessa corrente *i*



Su una lamina conduttrice sottile:
$\mathbf{J}_s$ = Densità di corrente superficiale

$$\mathbf{J}_s = \sigma\,\mathbf{v} \qquad \text{S.I.: A/m}$$

La quantità di carica che attraversa una superficie chiusa nel tempo *dt* corrisponde alla variazione nel tempo della carica nel volume cambiata di segno (se **J** e $\mathbf{u}_n$ sono concordi, la carica è uscente e quella nel volume diminuisce)

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J}\cdot\mathbf{u}_n\,dS = -\frac{dQ}{dt}$$

da cui:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J}\cdot\mathbf{u}_n\,dS = \iiint_{\tau} div\mathbf{J}\,d\tau = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_{\tau}\rho\,d\tau = -\iiint_{\tau}\frac{d\rho}{dt}\,d\tau$$

$$\boxed{div\,\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

Equazione di continuità della corrente
(Princ. di conservazione della carica)

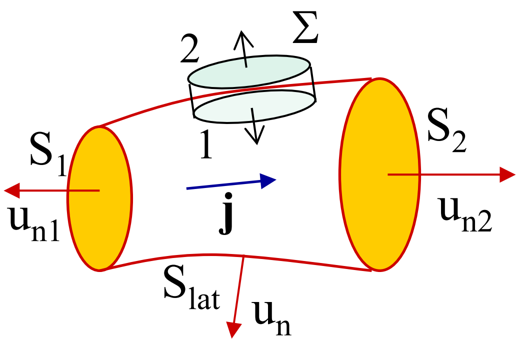
Correnti stazionarie

Una proprietà è stazionaria quando è indipendente dal tempo in ogni punto del sistema

Corrente stazionaria I = Corrente con ρ e **J** stazionarie

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad div\,\mathbf{J} = 0}$$

$$\iint_\Sigma \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n dS = 0 \qquad \textbf{J} \text{ solenoidale}$$



Per un tratto del **conduttore** delimitato dalle sezioni S_1 e S_2:

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n \, dS + \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n \, dS + \int_{Slat} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n \, dS = 0$$

Calcoliamo il flusso attraverso un cilindretto Σ posto a cavallo della **superficie laterale** del conduttore:

$$J_{n1} dS_1 - J_{n2} dS_2 \simeq 0$$

$$\mathbf{J}_{est} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{n2} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{n1} dS_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{n1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{J} \perp \mathbf{u}_n}$$

In regime stazionario, la superficie di un conduttore è un tubo di flusso di **J**

$$\int_{Slat} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n \, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n \, dS = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n \, dS}$$

Il flusso di **J** è costante attraverso una qualunque sezione.

⇒ L'intensità di corrente è la stessa in ogni sezione.

Relazione costitutiva

In generale:

$$\mathbf{J} = f(\mathbf{E}) \quad [\text{oppure } \mathbf{E} = f(\mathbf{J})]$$

Nei casi più comuni (**materiali isotropi**):

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad [\text{oppure } \mathbf{E} = \rho\mathbf{J}]$$

ρ = **Resistività elettrica** (in VmA^{-1})

$\sigma = 1/\rho$ = **Conducibilità elettrica** (in $AV^{-1}m^{-1}$)

In alcuni cristalli **anisotropi**: - **E** non è parallelo a **J** e
- ρ è un tensore

$$E_x = \rho_{xx}J_x + \rho_{xy}J_y + \rho_{xz}J_z \qquad E_y = \dots \qquad E_z = \dots$$

ρ è funzione di *T*, *p* e stato di aggregazione.

- Nei *metalli*, ρ aumenta con T, perché aumentano gli urti con il reticolo
- Nei *semiconduttori*, ρ diminuisce con T, perché aumenta il n°. dei portatori
- Nei *superconduttori*, sotto una certa T, $\rho = 0$ (effetto quantistico)

ρ può dipendere da **E** (**materiali non lineari**, es.: semi-conduttori e gas ionizzati)

Se ρ non dipende da **E**, il **materiale è lineare o ohmico**

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{opp.} \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$ **Legge di Ohm locale**

con σ e ρ indipendenti dalle condizioni elettriche

- Con ottima approssimazione, metalli e leghe metalliche
- Con approssimazione meno buona, soluz. elettrolitiche
- In ristretti intervalli di **E** ed **J**, la maggior parte dei materiali, anche isolanti

Esempi: $\rho_{Cu} \approx 10^{-8}$ VmA^{-1}, $\rho_{Qz} \approx 10^{17}$ VmA^{-1}

Se **E** = cost:

- Nel vuoto: **a** = cost $\Rightarrow$ moto uniformemente accelerato

- In un conduttore: **v** = cost $\Rightarrow$ moto orientato uniforme

Resistenza

Consideriamo un conduttore lineare ed isotropo di forma qualsiasi in regime stazionario
Se ai capi del conduttore è applicata una ddp ΔV, esso è percorso da corrente e si verifica sperimentalmente che:

$$\Delta V = RI \qquad \textbf{Legge di Ohm}$$

dove: R = **Resistenza elettrica**

Nel S.I.: **Ohm Ω**: $1\ \Omega = 1$ V/A

Simbolo: 

Analogamente:

$$I = G\Delta V \qquad \textbf{Legge di Ohm}$$

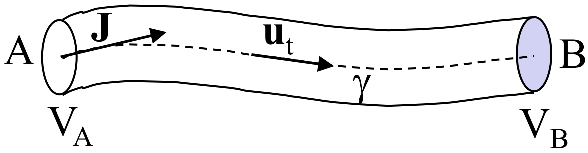
dove: G = **Conduttanza elettrica**

Nel S.I.: **Siemens S**: $1\ \mathrm{S} = 1\ \Omega^{-1} = 1$ A/V

La relazione tra R e ρ in generale è complessa.

Dato un **conduttore filiforme** di lunghezza l, tale che:

- **J** ed **E** siano uniformi in ogni sezione S
- S = cost



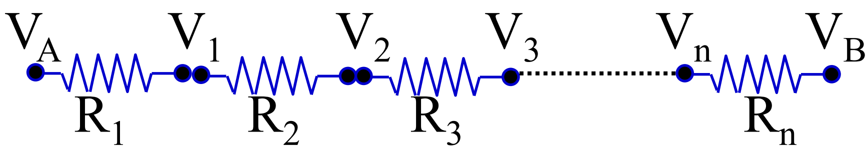
$$\Delta V = V_A - V_B = \int_{A\gamma B} \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_t dl = \int_{A\gamma B} \rho\mathbf{J}\cdot\mathbf{u}_t dl = I\int_{A\gamma B} \frac{\rho}{S} dl = RI$$

essendo: $J = I/S = \text{cost}$
$\mathbf{J} \,//\, \mathbf{u}_t$

$$\boxed{\text{Se } \rho = cost \;\Rightarrow\; R = \int_{A\gamma B} \frac{\rho}{S} dl = \rho\frac{l}{S}}$$

Collegamento in serie e parallelo

Serie



$$I = I_k$$

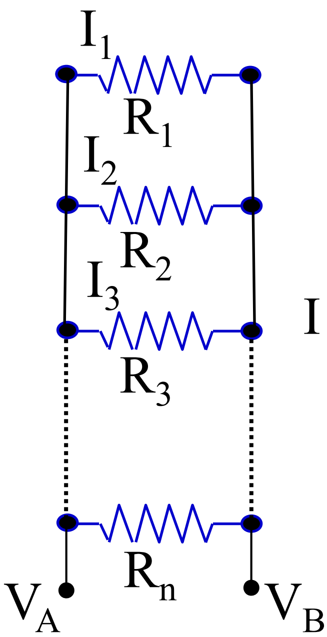
$$\Delta V = V_A - V_B = (V_A - V_1) + (V_1 - V_2) + \ldots + (V_n - V_B)$$

$$\Delta V = V_A - V_B = RI \qquad \Delta V_k = R_k I$$

$$RI = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) I$$

$$R = \sum_{k=1}^{N} R_k \qquad \boxed{R > R_k \ \ \forall k}$$

Parallelo



$$I = \frac{V_A - V_B}{R} \qquad I_k = \frac{V_A - V_B}{R_k}$$

$$I = \sum_{k=1}^{N} I_k$$

$$\Delta V = \Delta V_k$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k} \qquad \boxed{R < R_k \ \ \forall k}$$

Effetto Joule

Il lavoro del campo **E** per spostare le cariche elettriche in un conduttore (corrente) viene trasformato in calore (urti contro il reticolo) $\Rightarrow$ **Effetto Joule**

Consideriamo un tubo di flusso di **J** in un tratto *dl* di conduttore di sezione *dS*.
La carica *dq* che attraversa *dS* in *dt* è:

$$dq = \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n \, dS \, dt$$

Il lavoro del campo **E** per spostare *dq* lungo *dl* è:

$$dL = dq \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl \, \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n \, dS \, dt = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J})(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_n) dS \, dl \, dt$$

Densità di potenza (Potenza specifica) dissipata

$$P_\tau = \frac{dP}{d\tau} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

Per un conduttore ohmico:

$$P_\tau = EJ = \rho J^2 = \sigma E^2$$

Per un conduttore ohmico filiforme:

$$P = \iiint_\tau P_\tau d\tau = \int_\ell \rho J^2 S \, dl = (JS)^2 \int_\ell \rho \frac{dl}{S}$$

$$\Rightarrow \quad P = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Forza Elettromotrice

Essendo **J** solenoidale la corrente può circolare solo in un circuito chiuso.
Per l'effetto Joule, è necessario compiere lavoro per fare circolare la corrente.

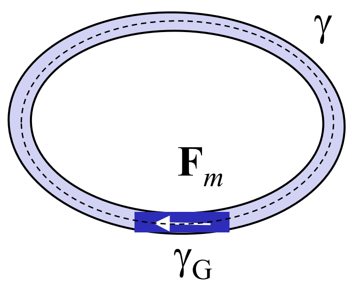
Essendo: $\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I = 0$

Il campo e.s. **non** può mantenere un corrente in un circuito chiuso:

Affinchè I ≠ 0 deve esistere un campo $\mathbf{F}_\mathrm{m}$ di **forze non conservative** (dette **forze motrici**) tali che:

$$\oint_\gamma \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u}_t dl \neq 0$$

Campo elettromotore $\boxed{\mathbf{E}_m = \frac{F_m}{q}}$



$$\Rightarrow \quad \oint_\gamma \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{u}_t dl \neq 0$$

In generale: $\mathbf{E}_m = \mathbf{f}(q)$.

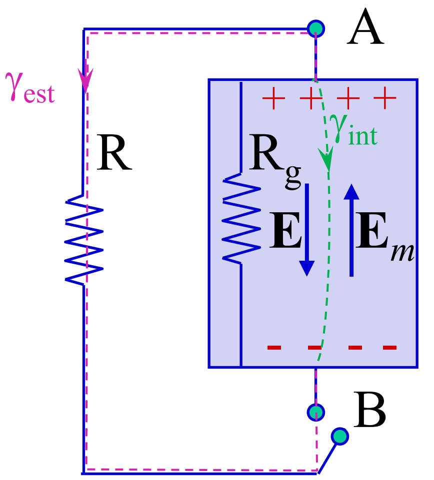
Forza elettromotrice $\boxed{fem = \int_{\gamma_G} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{u}_t dl}$ [S.I.: Volt]

Generatore: regione dello spazio in cui è presente $\mathbf{E}_m$.

Consideriamo materiali lineari e isotropi ($\mathbf{E}_m$, **E** e **J** sono paralleli e proporzionali).

La forza agente su un portatore di carica risulta:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m\right)$$



Circuito aperto

$\mathbf{J} = 0$

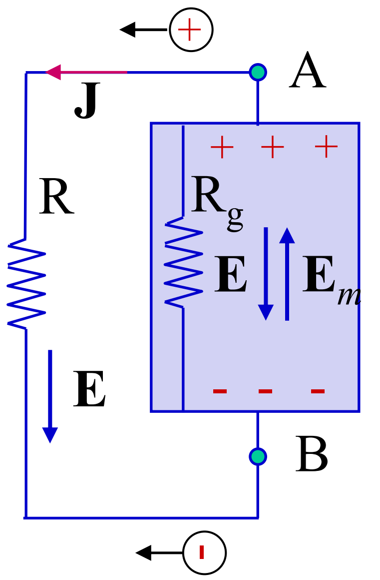
$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) = 0$

$\Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{E}_m$

$$\Delta V^o_{AB} = V_A - V_B = \int_{\gamma^{int}_{AB}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = -\int_{\gamma^{int}_{AB}} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{u}_t dl = \oint_\gamma \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{u}_t dl$$

essendo: $\gamma = \left(\gamma^{est}_{AB}\right) \cup \left(-\gamma^{int}_{AB}\right)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta V^o_{AB} = fem}$$



Circuito chiuso

$\mathbf{J} \neq 0$

$\Rightarrow \quad \mathbf{E} \neq \mathbf{E}_m$

Legge di Ohm generalizzata

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) = \rho \mathbf{J} \qquad \boxed{fem = \Delta V_{AB} + R_g I}$$

$$\Delta V_{AB} = fem - R_g I < \Delta V^0_{AB}$$

Quando I ≠ 0, non si può definire la fem (l'integrale dipende dalla linea)

Bilancio energetico

Il lavoro del generatore per spostare una carica risulta:

$$dL = f\, dq = f\, I\, dt$$

Per la legge di Ohm generalizzata:

$$f = \Delta V + R_g I$$

da cui:

$$dL = f\, I\, dt = \Delta V\, I\, dt + R_g\, I^2 dt$$

Bilancio di potenza:

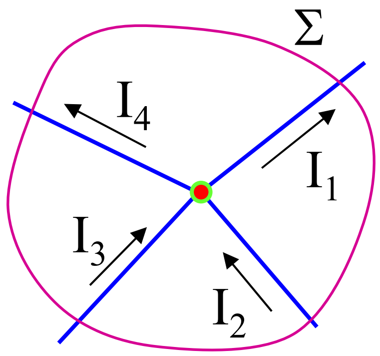
$$\boxed{f\, I = \Delta V\, I + R_g\, I^2}$$

$f\, I$ = Potenza fornita dal *generatore*

$\Delta V\, I$ = Potenza dissipata nel *conduttore* per Effetto Joule

$R_g\, I^2$ = Potenza dissipata nel *generatore*

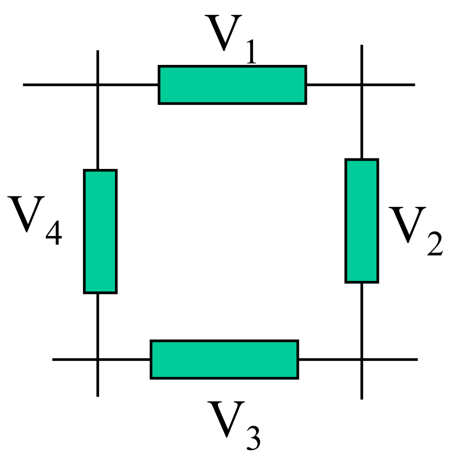
Sistema di conduttori a parametri concentrati



Nodo = Punto cui concorrono *n* terminali (*n* > 2)

$$div\,\mathbf{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0}$$

Legge dei nodi
(I legge di Kirchhoff)



Maglia = Linea chiusa costituita da *n* lati

$$rot\,\mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} V_k = 0}$$

Legge delle maglie
(II legge di Kirchhoff)

Equazioni per un conduttore in regime stazionario

$$rot\,\mathbf{E} = 0 \qquad\qquad \mathbf{E} = -grad\,V$$
$$div\,\mathbf{J} = 0 \qquad\qquad \mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m\right)$$

da cui:

$$div\,\mathbf{E} = -div\,\mathbf{E}_m$$
$$\nabla^2 V = div\,\mathbf{E}_m$$

Condizioni al contorno

Dall'interno verso la superficie del conduttore:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n = 0$$

$\Rightarrow$ **Alla superficie** del conduttore:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}_n} = -\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{u}_n$$

La derivata del potenziale non è continua alla superficie del conduttore per la presenza di possibili cariche statiche

All'esterno la funzione potenziale soluzione della eq. di Laplace:

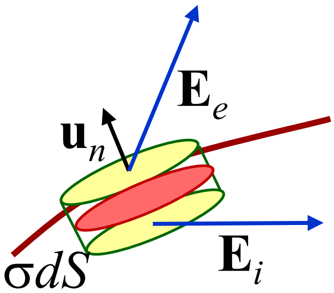
$$\nabla^2 V = 0$$

si raccorda con la soluzione dell'equazione valida nel conduttore:

$$\nabla^2 V = div\,\mathbf{E}_m$$

All'interno del conduttore **E** dipende dalla geometria del conduttore e dal campo elettromotore. Non è influenzato da cariche elettrostatiche esterne.

$$\boxed{div\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -div\,\mathbf{E}_m}$$



Alla superficie del conduttore:

$$\sigma\, dS = \varepsilon_0 \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{u}_n\, dS - \varepsilon_0 \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_n dS$$

Da:

$$\mathbf{E}_i = \rho \mathbf{J} - \mathbf{E}_m \qquad\qquad \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_n = 0$$

risulta:

$$\boxed{\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{u}_n + \varepsilon_0 \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{u}_n}$$

Tra due mezzi conduttori con conducibilità σ_1 e σ_2:

$$div\,\mathbf{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{n1} = J_{n2}$$

$$rot\,\mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{t1} = E_{t2} = \rho_1 J_{t1} = \rho_2 J_{t2}$$

$$\frac{J_{n1}}{\rho_1 J_{t1}} = \frac{J_{n2}}{\rho_2 J_{t2}}$$

$$\boxed{\frac{tg\,\theta_1}{tg\,\theta_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

Rifrazione delle linee di campo di **J**

Modello di Drude - Lorentz

Modello di conduzione per **conduttori ohmici in regime stazionario**.

$$\mathbf{J} = \rho\,\mathbf{v} \qquad \mathbf{v} = \text{cost} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} + q\mathbf{E} = m\mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{J} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{E} \propto \mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -\gamma\,\mathbf{v}$$

Forza di tipo viscoso dovuta a urti con il reticolo o con altri portatori.

I portatori di carica sono in moto sia per effetto dell'agitazione termica che per effetto del campo elettrico.

E accelera i portatori, che perdono energia negli urti con il reticolo:

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v}_t = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \text{cost}$$

L'energia ceduta dai portatori al reticolo dà origine all'effetto Joule (aumento del moto di vibrazione del reticolo, cioè aumento della temperatura del conduttore).

Se **E** = 0: $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = 0$

Con $\mathbf{E} = 0$, se $\mathbf{u}$ è la velocità di un generico portatore a $t = 0$, dopo n urti la sua velocità è indipendente da $\mathbf{u}$.

$\Rightarrow$ Dopo n urti il portatore perde memoria della sua velocità iniziale.

τ = Tempo caratteristico = Tempo medio necessario perché il portatore perde memoria della sua velocità iniziale.
Per semplicità supponiamo: τ = Tempo medio tra due urti (cioè $n = 1$)

Se $\mathbf{E} \neq 0$, dopo un tempo t la quantità di moto $\mathbf{p}$ è:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} + q\mathbf{E}t$$

Per un volumetto contenente n portatori, indicando con t_i il tempo dall'ultimo urto:

$$m\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(m\mathbf{u}_i + q\mathbf{E}t_i\right)$$

Per valori di $\mathbf{E}$ non elevati, dopo ogni urto la velocità del portatore è scorrelata da quella che aveva prima dell'urto, quindi le quantità di moto non si sommano.

Poichè le $\mathbf{u}_i$ sono scorrelate:

$$\sum_{i=1}^{n} m\mathbf{u}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad m\overline{\mathbf{v}} = q\mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

Posto: $$\tau = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\Rightarrow \qquad m\overline{\mathbf{v}} = q\mathbf{E}\,\tau$$

$$\mathbf{F} = -q\mathbf{E} = -\frac{m\overline{\mathbf{v}}}{\tau} = -\gamma\,\overline{\mathbf{v}}$$

La velocità media è proporzionale a **E**
$\Rightarrow$ La forza **F** è proporzionale alla velocità media o **velocità di trascinamento (deriva)**.

$$\mathbf{J} = Nq\overline{\mathbf{v}} = \frac{Nq^2\tau}{m}\mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \text{con:} \quad \sigma = \frac{Nq^2\tau}{m}$$

Limiti nell'applicazione del modello (e nella validità della legge di Ohm)

- Per campi intensi, perché τ non è più indipendente dall'intensità di **E**:

$$\tau = \tau(E) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sigma(E) \neq cost$$

- Nei gas ionizzati, perché i cammini tra gli urti sono lunghi (non è più: $v_t << u$)