

Problemi di Fisica

Meccanica e termodinamica

Dario Daghero

Rita Claudia Iotti

Pietro Mandracci

Matteo Luca Ruggiero



MyLab

Codice per accedere
alla piattaforma

Problemi di Fisica

meccanica e termodinamica

Problemi di Fisica

Meccanica e termodinamica

Dario Daghero
Rita Claudia Iotti
Pietro Mandracci
Matteo Luca Ruggiero



Pearson

©2019 Pearson Italia – Milano, Torino

Le informazioni contenute in questo libro sono state verificate e documentate con la massima cura possibile. Nessuna responsabilità derivante dal loro utilizzo potrà venire imputata agli Autori, a Pearson Italia S.p.A. o a ogni persona e società coinvolta nella creazione, produzione e distribuzione di questo libro.

Per i passi antologici, per le citazioni, per le riproduzioni grafiche, cartografiche e fotografiche appartenenti alla proprietà di terzi, inseriti in quest'opera, l'editore è a disposizione degli aventi diritto non potuti reperire nonché per eventuali non volute omissioni e/o errori di attribuzione nei riferimenti.

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le fotocopie effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da CLEAREDì, Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali, Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano, e-mail autorizzazioni@clearedi.org e sito web www.clearedi.org.

Redazione e impaginazione: CompoMat s.r.l.

Grafica di copertina: Giulia Boffi

Immagine di copertina: Carlo Fornasiero

Stampa: Tip.Le.Co. – San Bonico (PC)

Tutti i marchi citati nel testo sono di proprietà dei loro detentori.

9788891904959

Printed in Italy

1^a edizione: marzo 2019

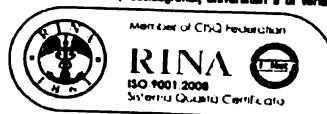
Ristampa

00 01 02 03 04

Anno

19 20 21 212 23

LIBRI DI TESTO E SUPPORTI DIDATTICI
Il sistema di gestione per la qualità della casa Editrice è certificato
in conformità alla norma UNI EN ISO 9001:2008 per l'attività di
progettazione, realizzazione e commercializzazione di prodotti
editoriali scolastici, lessicografici, universitari e di testo.



Sommario

Prefazione	vii
Pearson MyLab	ix
Introduzione	1
Capire per risolvere	1
Capitolo 1 Cinematica del punto materiale	11
Richiami di teoria	11
Problemi	19
Svolgimenti	23
Capitolo 2 Dinamica del punto materiale	41
Richiami di teoria	41
Problemi	45
Svolgimenti	49
Capitolo 3 Meccanica dei sistemi I	65
Richiami di teoria	65
Problemi	72
Svolgimenti	76
Capitolo 4 Meccanica dei sistemi II: corpi rigidi	93
Richiami di teoria	93
Problemi	98
Svolgimenti	103

Capitolo 5 Forze centrali	125
Richiami di teoria	125
Problemi	130
Svolgimenti	133
Capitolo 6 Meccanica dei fluidi	151
Richiami di teoria	151
Problemi	156
Svolgimenti	160
Capitolo 7 Termologia e calorimetria	171
Richiami di teoria	171
Problemi	175
Svolgimenti	179
Capitolo 8 Termodinamica: primo principio	191
Richiami di teoria	191
Problemi	195
Svolgimenti	199
Capitolo 9 Termodinamica: secondo principio	215
Richiami di teoria	215
Problemi	219
Svolgimenti	223
Capitolo 10 Temi d'esame	237
Svolgimenti	247
Appendice A Richiami di calcolo vettoriale	255

Prefazione

Non si impara a giocare a calcio guardando la finale di Champions League in TV, così come non si impara a suonare il pianoforte ascoltando Glenn Gould che interpreta le variazioni Goldberg. I calciatori si allenano, faticano. I pianisti studiano, si esercitano, faticano. Gli studenti dei corsi di Fisica risolvono problemi o tentano di farlo: cimentandosi con problemi reali, o quanto meno verosimili, mettendo alla prova la loro comprensione della materia, delle leggi che la regolano e dei loro limiti di applicazione. La pura conoscenza delle nozioni di Fisica, da quelle più basilari a quelle più complesse, non è sufficiente a fornire una comprensione dei fenomeni naturali: sono necessarie competenze che consentano di modellizzare situazioni reali, in un processo nel quale vengono formulati problemi la cui complessità aumenta man mano che i modelli diventano più verosimili. Da qui la convinzione di quanto sia necessario *capire* la Fisica per affrontare consapevolmente la soluzione dei problemi; d'altra parte il processo di apprendimento della Fisica non può prescindere dalla capacità di cimentarsi, sperabilmente con profitto, nel *risolvere* esercizi di diverse tipologie.

Nella formulazione degli esercizi di questo libro abbiamo cercato di proporre alcune situazioni realistiche, anche se, inevitabilmente, un livello di semplificazione si è reso necessario per rendere gli esercizi proposti affrontabili con le competenze attese dagli studenti di un corso di Fisica generale. Problemi e quesiti nascono dalla nostra pluriennale esperienza di insegnamento al Politecnico di Torino e sono sovente tratti dai testi delle esercitazioni e delle prove d'esame. Gli argomenti trattati (meccanica, meccanica dei fluidi, forze centrali e termodinamica) fanno parte del programma dei corsi di Fisica generale per i corsi di laurea in Ingegneria e Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Pertanto, questo libro è naturalmente, ma non esclusivamente, pensato per gli studenti di queste discipline.

Abbiamo pensato di cominciare il libro con un capitolo che, mediante consigli e suggerimenti, vuole indurre il lettore a creare una propria strategia di *problem solving*, orientata allo svolgimento degli esercizi proposti. Nella convinzione dell'esistenza di uno stretto legame fra la comprensione della teoria e la sua applicazione nell'affrontare gli esercizi, ogni capitolo è preceduto da fondamenti teorici utili per contestualizzare i problemi proposti e agevolarne la soluzione. I richiami teorici devono essere presi come tali e non vogliono né possono essere considerati come una sintesi della materia: per una esposizione organica ed esauriente degli argomenti oggetto del programma del corso, rimandiamo gli studenti ai numerosi testi e manuali disponibili (in particolare quelli indicati dal proprio docente!). I richiami teorici sono seguiti da alcuni test concettuali che mirano a verificare la comprensione dei concetti chiave esposti. Abbiamo, inoltre, inserito un'appendice con richiami di calcolo vettoriale perché, alla luce della nostra esperienza, pensiamo possa essere utile per gli studenti; anche in questo caso, demandiamo ad altri testi la formulazione rigorosa, propria, per esempio, dei corsi di Geometria e Algebra lineare.

I problemi sono stati scelti con un preciso criterio di efficacia didattica, partendo dal presupposto che gli studenti abbiano già acquisito la capacità di risolvere e comprendere

problemi o esempi elementari (già proposti, peraltro, in tutti i libri di testo). In particolare, per ogni capitolo abbiamo deciso di presentare una serie di esercizi paradigmatici, di vario livello di difficoltà, in modo da consentire agli studenti di acquisire familiarità con varie strategie risolutive. Invitiamo gli studenti a cercare di svolgere autonomamente i problemi proposti e a consultare le soluzioni solo in un secondo momento, per la verifica dei risultati ottenuti o per indicazioni sul metodo da adottare. Peraltro, sottolineiamo che la soluzione da noi proposta ai vari problemi non è necessariamente l'unica, ma è scelta in modo da essere funzionale agli argomenti del capitolo in cui è inserita, sulla base degli strumenti forniti agli studenti. Il libro si conclude con una serie di temi d'esame, selezionati fra le prove somministrate negli anni scorsi agli studenti del corso di Fisica 1 al Politecnico di Torino.

Questa nuova edizione del libro, oltre a presentarsi in una versione notevolmente ampliata rispetto alla precedente, pubblicata con una diversa casa editrice, presenta un'importante novità, costituita dall'offerta di una piattaforma digitale che arricchisce e completa la versione cartacea. Sulla piattaforma, oltre alla versione digitale del libro e ad altre risorse fra cui le soluzioni dettagliate dei temi d'esame, sono disponibili quesiti a risposta multipla: questi ultimi sono anch'essi un utile strumento di autovalutazione dell'apprendimento durante lo studio della materia e forniscono un'ulteriore opportunità per la preparazione in vista all'esame, dato che le prove scritte proposte in numerosi atenei prevedono anche questa modalità.

A che cosa deve servire questo libro? La nostra speranza è che gli studenti, *provando e riprovando*, cimentandosi con problemi e quesiti, lo trovino utile per lo studio della Fisica generale, a prescindere dalle motivazioni che li animano: da quelle più nobili, legate alla comprensione dei fenomeni naturali, a quelle più pragmatiche e contingenti, peraltro rispettabili, legate al superamento degli esami.

Abbiamo impiegato particolare cura nella formulazione dei problemi, nell'esposizione delle soluzioni e nella realizzazione delle figure, con l'intento di conseguire la maggiore chiarezza possibile, visto il taglio didattico del testo. Inoltre, abbiamo revisionato con cura il materiale della precedente edizione, tenendo conto delle segnalazioni che ci sono pervenute da studenti e colleghi, che cogliamo l'occasione per ringraziare. Ciononostante, possono essere rimasti altri passaggi poco chiari, imprecisioni o inesattezze: ce ne scusiamo fin da ora e ringraziamo nuovamente studenti e colleghi che ci vorranno far pervenire segnalazioni in tal senso, unitamente ai loro commenti e alle loro osservazioni.

Torino, 31 Gennaio 2019

*Dario Daghero, Rita Claudia Iotti
Pietro Mandracci, Matteo Luca Ruggiero*

Introduzione

Capire per risolvere

Tutto fa paura se non lo si conosce

Nella nostra esperienza di docenti di Fisica in corsi di laurea tecnico-scientifici, ci capita di incontrare studenti che si dichiarano poco interessati alla materia e la percepiscono come un insormontabile scoglio nel loro percorso di studi. Talvolta, tale atteggiamento sembra essere il risultato di una scarsa conoscenza e comprensione della Fisica affrontata nel percorso pre-universitario; altre volte, invece, esso è frutto della malposta convinzione che quanto appreso alle superiori sia esaustivo, mentre gli approfondimenti previsti dai programmi universitari siano solo inutili complicazioni. Troppo spesso succede che lo studio della Fisica venga ricondotto all'acritica e astratta memorizzazione di definizioni, equazioni e concetti, che verranno prontamente dimenticati appena superato l'esame. Tutto questo ha, a monte, un denominatore comune: la mancanza di un metodo di studio personale e consapevole. In questo senso, l'apprendimento della Fisica è paradigmatico: affrontarlo seriamente porta a sviluppare metodo, attenzione, creatività, senso critico, autonomia di giudizio, capacità di analisi, di sintesi e di *problem solving*: tutto questo concorre a formare quelle competenze che sono fondamentali nel mondo del lavoro, e non solo.

Spesso gli studenti pensano che la Fisica non sia per tutti e che, per superare anche solo gli esami di Fisica generale, siano necessarie doti intellettuali o predisposizioni particolari. Secondo la nostra esperienza, questo non è vero. È vero invece che sono necessari allenamento e disciplina. L'impressione di difficoltà e la paura di non farcela nascono spesso dal fatto che, all'inizio, non si sa bene in che modo prepararsi e allenarsi. Anche scalare una parete di roccia ci appare (ed è!) al di là delle nostre forze, se al massimo abbiamo fatto qualche trekking e siamo privi dell'attrezzatura adatta. Per farcela è necessario imparare le tecniche, prepararsi con un allenamento adeguato e munirsi dell'attrezzatura idonea. La preparazione – e il superamento consapevole – dell'esame sono alla portata di tutti gli studenti iscritti a un corso di studi tecnico-scientifico. È richiesto però del tempo, questo sì. Affrontare l'esame avendo studiato per una settimana è come pretendere di arrivare sulla vetta del Cervino senza allenamento e con le scarpe da tennis.

Dalla teoria alla pratica

A differenza dei simboli e concetti matematici, i simboli e concetti fisici hanno a che fare con il mondo che ci circonda (o, per meglio dire, con la descrizione che ne diamo). Quindi, di fronte a un concetto nuovo, non è sufficiente impararne a memoria la definizione, ma occorre cercare di capire che cosa *davvero* essa significhi. La definizione è la formulazione rigorosa, ma la comprensione del significato di un concetto può passare anche attraverso intuizioni, collegamenti qualitativi, formulazioni discorsive. Per esempio, la massa di un corpo è definita come la costante di proporzionalità tra la risultante delle forze agenti su di esso e la sua accelerazione. Ma la massa di un corpo è qualcosa di *reale*, che si deve poter misurare, come tutte le grandezze fisiche. E allora, per poterla quantificare, occorre chiedersi, per esempio: la possiamo percepire con i nostri sensi o con qualche strumento? In quale modo? Quali proprietà o comportamenti di un corpo dipendono dalla sua massa? Con quali esperimenti possiamo determinarne il valore?

Questo processo basato sul “rendere reale” (per quanto possibile) il concetto è utile per affrontare con disinvoltura i problemi, perché questi ultimi non sono altro che esperimenti (immaginati) in cui si misurano alcune grandezze (le quantità note) e se ne devono invece determinare altre (le incognite), mediante calcoli. Il problema riguarda un’asta che può ruotare in un piano verticale attorno a una sua estremità? Si immagini di prendere un righello e di appenderlo a un chiodo. Il problema tratta di un corpo in rotolamento? Si immagini una boccia da bowling lanciata verso i birilli. Un gas viene compresso? Si immagini l’aria nella pompa della bicicletta... E allora poco alla volta ci si renderà conto che ciò che la Fisica descrive è tutt’intorno a noi: una pentola a pressione è “un contenitore a pareti rigide” e l’acqua del tè che bolle è “una sostanza in transizione di fase”; la goccia di pioggia che cade è “un corpo in moto in un fluido viscoso”; il pallone da calcio che rimbalza contro la traversa della porta è “un corpo che urta contro un vincolo rigido” e la ruota posteriore della bicicletta è un “corpo rigido in rotolamento sotto l’effetto di un momento motore”. Se si capisce davvero il linguaggio della Fisica, si comprendono anche le ragioni per cui esso dev’essere necessariamente rigoroso, a costo di apparire talvolta un po’ artificioso. Se si capisce la Fisica, si riesce a interpretare la natura che ci circonda, un po’ come Neo (il protagonista del film *Matrix*) riesce a scorgere il codice binario del programma che simula la realtà. E come per Neo questa nuova consapevolezza rende improvvisamente banale combattere gli agenti-virus, così per chi ha capito la Fisica diventa semplice affrontare i problemi.

Realtà e modello

Sembra un paradosso, ma la Fisica, per descrivere quantitativamente la realtà, deve necessariamente costruirne un modello approssimato. La pentola a pressione di cui parlavamo sopra non è davvero a volume costante perché, quando si scalda, si dilata. E tuttavia possiamo, per molti scopi, trattarla come se lo fosse. La Terra, anche assumendone la superficie liscia, non è sferica, perché ha un raggio polare (misurato lungo la retta che congiunge i poli) minore del raggio equatoriale: in molti casi però questo aspetto può essere trascurato, trattandola come una sfera. La Luna non è certo apparsa puntiforme a Neil Armstrong quando vi ha camminato sopra; tuttavia il suo diametro è così piccolo rispetto alla sua distanza media dalla Terra che, al fine di determinarne l’orbita, la si può trattare come se lo fosse.

In altre parole, possiamo sempre – mediante un’opportuna semplificazione – approssimare un sistema reale con un modello fisicamente soddisfacente e che sia matematicamente trattabile. Tale passo richiede sempre un processo di astrazione, o di idealizzazione, in cui bisogna però fare molta attenzione a cosa si “tiene” e a cosa si “butta via”. Se, ragionando con il nostro modello e applicando a quest’ultimo le leggi della Fisica, otteniamo qualche risultato che non è in accordo con l’esperimento, potrebbe voler dire che abbiamo trascurato qualcosa che non avremmo invece dovuto trascurare: il modello scelto non è quindi adatto e va ripensato. Occorre pertanto sempre avere ben presente l’approssimazione da cui si è partiti. Se nel modello si è deciso di trascurare l’attrito volvente tra la boccia da bowling e la pista, non ci si deve stupire se la boccia reale rallenta mentre nel modello essa continua a muoversi a velocità costante. Se in un problema si decide di trattare l’elio come un gas ideale, bisogna essere consci del fatto che le equazioni non potranno in alcun modo prevedere che a 4.2 K esso diventa liquido. Pertanto, il primo scoglio da affrontare nella risoluzione di un problema è l’individuazione di un modello che possa avvicinarsi quanto basta al sistema reale.

Alcune leggi sono fondamentali, altre no

Una volta scelto il modello, dobbiamo decidere quali leggi della Fisica sono rilevanti per descriverlo e quali equazioni legano fra loro le grandezze fisiche in gioco. Anche in questa fase occorre prestare attenzione ed essere coerenti con le scelte fatte nel momento in cui abbiamo definito il modello. In altre parole, le equazioni che si usano devono essere valide nelle condizioni del problema e per il modello scelto.

Per esempio, non si possono usare le equazioni per il moto rettilineo accelerato per descrivere il moto di caduta di un goccia di pioggia, perché la forza di attrito con l’aria dipende dalla velocità e quindi non è costante (e pertanto non è costante neanche l’accelerazione). E allora cosa si fa? Semplicemente, occorre ricordare che il moto rettilineo uniformemente accelerato è un caso particolare di moto e le relative equazioni cinematiche sono state ottenute (assumendo l’accelerazione costante) da equazioni più generali. Nel dubbio, è bene partire dalle definizioni e dalle *leggi fondamentali*: le Leggi di Newton, le equazioni cardinali, i principi della termodinamica. Nel caso della goccia, per esempio, si può scrivere la II legge di Newton applicata alla goccia, ricordare che sulla goccia stessa agiscono la forza di attrito e la forza peso, e scrivere l’accelerazione come derivata della velocità, facendo uso della sua definizione. In questo modo si ottiene un’equazione differenziale che, una volta risolta, fornisce la velocità in funzione del tempo e, a seguire, la posizione in funzione del tempo.

Spesso è molto comodo usare le leggi di conservazione dell’energia meccanica, della quantità di moto e del momento angolare – ma occorre essere certi che esse valgano. Per controllarlo, bisogna avere ben compreso in quali condizioni queste grandezze sono costanti e verificare che tali condizioni siano *tutte* verificate nel problema in esame.

La matematica e le ciaspole

Fare una camminata in montagna dopo una nevicata può essere molto bello, ma ci vuole l’attrezzatura giusta. Finché la neve è poca basta un paio di scarponcini da trekking – e pazienza se un po’ di neve ci bagna le caviglie. Se la neve è tanta sarà meglio avere scarponi più adatti e usare le ghette da neve, e si arrangerà un po’ sprofondando fino al ginocchio

a ogni passo. Se la neve è davvero tanta, non si può rinunciare alle ciaspole, a meno di non voler sprofondare fino alla vita. Nel risolvere gli esercizi di Fisica, le conoscenze di matematica sono l'attrezzatura necessaria. Per gli esercizi molto semplici bastano le quattro operazioni; ma, appena la difficoltà aumenta, serve saper maneggiare le funzioni trascendenti (logaritmiche, esponenziali, trigonometriche), risolvere sistemi di equazioni, calcolare derivate e integrali, e risolvere equazioni differenziali. Senza le adeguate conoscenze matematiche si può arrivare, bagnandosi i calzini (ossia facendo errori più o meno grossolani) fino a un certo punto, ma non oltre. Una buona conoscenza della matematica avanzata, inoltre, permette di intravedere strategie di soluzione interessanti che, molto spesso, semplificano l'approccio. Se l'alpinista ha con sé anche i ramponi potrà attraversare un tratto ghiacciato senza doverci girare attorno, accorciando il proprio percorso e arrivando prima alla metà. Se uno studente sa maneggiare bene il calcolo integrale e differenziale, potrà essere in grado di arrivare alla risposta in tempi molto brevi. È sempre utile ricordare che Newton (in contemporanea con Leibniz) dovette inventare il calcolo integrale e differenziale, una nuova branca della matematica, proprio per formulare le leggi della dinamica che ancora oggi usiamo: quindi, senza questi "attrezzi", non saremmo neanche in grado di comprendere e applicare i principi della dinamica.

Le parole sono importanti

Se un linguaggio approssimativo o impreciso non aiuta la comunicazione neanche nella vita di tutti i giorni, in Fisica può provocare disastri. Per esempio, il Secondo Principio della termodinamica, nell'enunciato di Kelvin-Planck, asserisce che

non è possibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia la completa trasformazione in lavoro del calore scambiato con una sola sorgente a temperatura uniforme.

Se si toglie la parola "unico", l'enunciato è *falso*. Non accorgersene significa averlo studiato a memoria senza capire che cosa significa.

Mentre nella vita di tutti i giorni può capitare di sentire frasi come "ci sono trenta gradi di calore", "chiudi la finestra che entra il freddo", "il pacco pesa 4 chili" esse non sono accettabili in un esame di Fisica. Se nell'immaginario new-age si parla di "energie" (o "vibrazioni") positive e negative per indicare un non meglio identificato influsso benefico o malefico, e di "forze emanate" da qualche oggetto (cristalli, per esempio), niente del genere ha a che fare con la Fisica. Per evitare abusi di linguaggio e ambiguità, le grandezze fisiche sono definite in modo operativo, ossia attraverso le operazioni necessarie per misurarle. Quindi, in Fisica, il linguaggio deve essere usato con attenzione: ogni cosa ha un nome e quel nome si riferisce solo a quella cosa. Per esempio, la *forza* non è un impulso, né un'energia, né una pressione; la *massa* non è il peso, né la quantità di sostanza; il *calore* non è la temperatura, e così via.

Occhio ai simboli

Anche i simboli sono importanti e devono essere usati con la dovuta attenzione. Può capitare di leggere, nel testo di un esercizio:

Un'automobile si muove lungo una pista circolare con velocità costante $v = 50 \text{ km/h}$...

oppure:

La velocità v di un elettrone forma un angolo di 30 gradi con il vettore che indica la sua posizione \mathbf{r} rispetto a un punto O . Calcolare il momento angolare dell'elettrone rispetto a O ...

In queste due frasi, il termine velocità è usato con due significati diversi: infatti i due simboli v e \mathbf{v} indicano entrambi una velocità, ma il primo è un numero (o meglio, uno scalare) e il secondo un vettore. In particolare, v è il modulo del vettore \mathbf{v} , ma quando scriviamo \mathbf{v} stiamo ricordando al lettore che quella velocità non ha solo un valore numerico, ma anche una direzione e un verso, che sono informazioni fondamentali per sapere come avviene il moto. In particolare, nel primo caso il valore numerico del vettore velocità non cambia, ma cambiano la sua direzione e il verso, dato che la velocità è tangente alla traiettoria. Nel secondo caso è fondamentale conoscere l'angolo fra il vettore velocità e vettore posizione, visto che da tale angolo dipende il momento angolare dell'elettrone rispetto a O .

Vi sono equazioni tra vettori, come la celeberrima II Legge di Newton: $\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$. Qui il simbolo \sum_i esprime il fatto che è la *somma vettoriale* (o *risultante*) di tutte le forze applicate a un corpo a essere uguale alla massa m per l'accelerazione \mathbf{a} , e non le singole forze. Scrivere $\sum_i F_i = ma$ è *sbagliato* perché il primo membro è la somma dei *moduli* delle forze applicate al corpo, che in genere non è affatto proporzionale al modulo dell'accelerazione. Quindi, se un'equazione è scritta usando i vettori, *un motivo c'è* e non la si può riscrivere semplicemente sostituendo i vettori con i loro moduli. Piuttosto, scomponendo i vettori lungo un opportuno sistema di assi coordinati, la si può esprimere come un *sistema* di equazioni scalari che legano fra loro le componenti dei vettori che vi compaiono.

Vi sono, per contro, equazioni che legano tra loro i moduli di due vettori, ma che non hanno senso se vengono scritte usando i vettori. Per esempio, la relazione $f_d = \mu_d N$ dice che il modulo della forza di attrito, f_d , è proporzionale al modulo della reazione vincolare normale, N . Però le due forze sono ortogonali, per cui se scrivessimo $\mathbf{f}_d = \mu_d \mathbf{N}$ diremmo il falso, visto che due vettori possono essere proporzionali solo se sono paralleli.

I simboli sono importanti anche nelle operazioni che si possono fare con i vettori. Per esempio, nel testo seguente sono menzionati due diversi tipi di prodotto fra vettori:

Su una particella agisce una forza costante \mathbf{F} ; all'istante t_0 la sua posizione, rispetto all'origine O di un sistema di riferimento, è individuata dal vettore \mathbf{r}_0 ; all'istante t_f la posizione della particella è definita dal vettore \mathbf{r}_f . Il momento della forza rispetto a O è dato, nell'istante t_0 , dal vettore $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{F}$. Il lavoro della forza in corrispondenza dello spostamento da \mathbf{r}_0 a \mathbf{r}_f è dato da $L = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_0)$.

Il prodotto di vettori indicato con il simbolo “ \wedge ” fornisce come risultato il momento della forza, ossia un vettore, e si chiama pertanto prodotto vettoriale, mentre il prodotto indicato con il simbolo “ \cdot ” fornisce come risultato il lavoro, ossia uno scalare, e si chiama pertanto prodotto scalare. È quindi importante usare la corretta notazione proprio per distinguere grandezze fisiche con caratteristiche diverse.

Un altro esempio notevole dell'importanza dell'uso dei simboli è il Primo Principio della termodinamica, che in forma differenziale si scrive $dU = \delta Q - \delta L$. I diversi simboli δ e d contengono gran parte del significato del Principio perché indicano che, mentre il calore Q scambiato da un sistema e il lavoro L da esso compiuto lungo una trasformazione infinitesima dipendono da come è fatta la trasformazione, la variazione di energia interna

\mathcal{U} non ne dipende. Il funzionamento delle macchine termiche esemplifica tutto questo. Per esempio, si consideri il seguente incipit di un problema:

In un ciclo, una macchina di Carnot assorbe un calore $Q_2 = 2000 \text{ J}$ e cede un calore $Q_1 = -1500 \text{ J}$. Il lavoro compiuto vale $L = Q_2 - |Q_1| = 500 \text{ J}$.

Alla fine di un ciclo, una macchina termica torna nello stesso stato termodinamico. Sebbene il calore totale scambiato lungo il ciclo non sia zero, e non sia zero neanche il lavoro compiuto, la variazione di energia interna \mathcal{U} è nulla – il che significa che l'energia interna al termine del ciclo è uguale a quella iniziale visto che il sistema torna allo stesso stato termodinamico.

I numeri, dopotutto

I simboli, intesi come lettere che rappresentano le grandezze fisiche, sono importanti anche da un punto di vista più squisitamente pratico, nella soluzione dei problemi. Infatti, è sempre bene risolvere i problemi il più possibile in modo puramente simbolico e inserire i valori numerici delle varie grandezze *solo alla fine*. Questo modo di procedere ha diversi vantaggi. Il primo è che è molto più facile sbagliare, per distrazione, calcoli numerici che non calcoli letterali o simbolici: quante volte un numero come 0.003 una volta ricopiatò in bella diventa 0.03? Il secondo è che scrivendo le equazioni e risolvendole in maniera simbolica si possono spesso operare semplificazioni drastiche che non sarebbero visibili mettendo da subito i valori numerici. Il terzo è che, se il procedimento di soluzione è corretto ma si commette solo un errore numerico alla fine, il docente che corregge il compito può tenerne conto; invece, se i calcoli sono svolti già da subito in modo numerico, non è neanche detto che sia possibile capire se il procedimento è corretto oppure no, e certamente è più difficile capire l'origine (e la gravità) di un certo errore.

Ogni grandezza fisica è espressa da un numero, seguito da un'unità di misura. Il numero da solo non ha nessun significato. Per esempio, dire che un oggetto è lungo 5 non ha senso: 5 cosa? cubiti, yarde, piedi, metri, millimetri. Senza specificare l'unità di misura, non abbiamo la minima idea della grandezza dell'oggetto. Esistono molti sistemi di unità di misura: in questo testo, come in buona parte dei testi di Fisica Generale, si usa il Sistema Internazionale (SI). Di recente (novembre 2018) la Conferenza Internazionale dei Pesi e delle Misure ha ridefinito le unità di misura delle sette grandezze fondamentali del SI (si veda la Tabella 1) in funzione di costanti fondamentali. Le unità di misura di grandezze che non compaiono nell'elenco possono essere definite a partire da quelle fondamentali: per esempio, la velocità si misura in m/s, l'accelerazione in m/s², la forza in newton (1 N = 1 kg m/s²) e così via.

Le equazioni legano fra loro grandezze diverse, ognuna con le sue unità di misura. Per esempio, nella frase seguente:

Un corpo cade da un'altezza $h = 5 \text{ m}$ sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. La velocità con cui arriva al suolo è $v = \sqrt{2gh} \dots$

l'equazione $v = \sqrt{2gh}$ implica che, se v è una velocità (le cui unità di misura sono i metri al secondo, m/s) lo stesso deve essere anche l'espressione a secondo membro. Da qui

¹ I simboli delle unità di misura sono scritti con lettere minuscole; fanno eccezione quelli derivanti da un nome che, però, sono tutti in minuscolo quando scritti per esteso (per esempio, A per ampere, K per kelvin, J per joule).

Tabella 1 Grandezze fondamentali nel Sistema Internazionale, con le loro unità e la definizione in vigore a partire dal 20 maggio 2019¹.

Grandezza	Unità	simbolo	definita in funzione di:
Massa	chilogrammo	kg	costante di Planck, h
Lunghezza	metro	m	velocità della luce, c
Tempo	secondo	s	frequenza della transizione iperfine del cesio 133, $\Delta\nu_{\text{Cs}}$
Intensità di corrente	ampere	A	carica dell'elettrone, e
Temperatura assoluta	kelvin	K	costante di Boltzmann, k_B
Intensità luminosa	candela	cd	efficacia luminosa, K_{cd}
Quantità di sostanza	mole	mol	costante di Avogadro, N_A

discende un'utile pratica nel risolvere i problemi: il controllo dimensionale. Una volta svolti i calcoli in forma simbolica, è utile inserire nell'espressione finale non solo i valori numerici, ma anche le unità di misura delle grandezze, al fine di verificare la coerenza delle unità. Nel caso in esempio, usando i dati $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ e $h = 5 \text{ m}$, si scriverà

$$v = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 5 \text{ m}} = \sqrt{98.1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 9.90 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Se le unità di misura del risultato sono diverse da quelle attese, significa che vi è certamente stato qualche errore. Il fatto che un'equazione sia dimensionalmente corretta è quindi condizione necessaria perché essa sia valida. Sfortunatamente, non è però condizione sufficiente: in altre parole, se le unità sono quelle attese, non vi è garanzia che l'equazione sia corretta. Per esempio, se si dimenticasse il fattore numerico 2 nell'equazione precedente, scrivendo $v = \sqrt{gh}$, le unità sarebbero coerenti, ma la formula non esprimerebbe correttamente la relazione fra le grandezze in gioco.

A costo di essere pedanti, ricordiamo anche che possiamo sommare solo grandezze omogenee, ossia dello stesso tipo: per esempio, ha senso scrivere $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, che rappresenta la legge oraria di un moto uniformemente accelerato, perché tutti e tre gli addendi hanno le dimensioni di una lunghezza (ossia si misurano in metri), mentre non ha senso scrivere $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t$, perché l'ultimo termine ha le dimensioni di una velocità (ossia si misura in m/s).

Anche se, come si è già detto, è buona pratica risolvere i problemi in modo simbolico e inserire solo alla fine i valori numerici, il controllo dimensionale si può effettuare a ogni passaggio, seguendo un ragionamento simile a quello appena descritto. Ciò garantisce che ogni equazione ricavata – e quindi anche il risultato finale – sia coerente dal punto di vista delle unità di misura.

Pratico non è conveniente

Spesso capita di trovare qualche dato espresso in *unità pratiche* che non fanno parte del Sistema Internazionale: le atmosfere per le pressioni, i litri per i volumi, i gradi Celsius per le temperature, e così via. In questi casi la cosa migliore da fare è esprimere *da subito* le grandezze in questione nel Sistema Internazionale. Non è per adeguarsi a un vezzo dei docenti di Fisica: alcune equazioni hanno una certa forma solo se le grandezze che vi compaiono sono espresse nel SI. Per esempio, tutti conoscono l'equazione di stato dei gas perfetti (o “legge dei gas perfetti”) che lega la pressione p , il volume V e la temperatura

T di un gas ideale in equilibrio termodinamico e che si scrive $pV = nRT$. Ebbene, questa legge non è vera se la temperatura non è misurata in kelvin; e la costante dei gas perfetti R assume valori diversi se la pressione e il volume sono, o non sono, espressi nelle unità del SI. Occorre prestare attenzione anche quando, più banalmente, i dati sono espressi in unità che sono multipli o sottomultipli dell'unità del SI: centimetri, millimetri, chilometri, tonnellate, grammi, gigapascal eccetera. In questi casi occorre usare le cosiddette *equivalenze*, che si imparano nella scuola primaria: a quanti metri cubi corrisponde un decimetro cubo? A quanti chilogrammi corrispondono 10 quintali? E così via. Per risolverle, è necessario ricordare molto bene il significato dei prefissi che esprimono i multipli e i sottomultipli delle unità del SI (riassunti in Tabella 2), e conviene utilizzare la *notazione scientifica*.

Tabella 2 Significato dei prefissi utilizzati per esprimere multipli e sottomultipli delle unità del SI. Si noti che, per le masse, l'unità è il chilogrammo e non il grammo; i suoi multipli di uso pratico sono il miragrammo (10 kg), il quintale (100 kg) e la tonnellata (1000 kg)².

Fattore	Prefisso (nome)	Prefisso (simbolo)
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^{+1}	deca	da
10^{+2}	etto	h
10^{+3}	chilo	k
10^{+6}	mega	M
10^{+9}	giga	G
10^{+12}	tera	T

Quest'ultima è un modo compatto per esprimere numeri molto grandi o molto piccoli, riducendo la probabilità di compiere errori nel conteggio degli zeri. Per esempio, una lunghezza di $5.65\ \mu\text{m}$ equivale a 0.00000565 m , ma è molto più comodo scriverla nella forma $5.65 \times 10^{-6}\text{ m}$ (il segno di moltiplicazione viene sovente omesso e sostituito da un semplice spazio: $5.65\ 10^{-6}\text{ m}$). Una quantità espressa in notazione scientifica ha sempre la forma $\pm x 10^y$ dove x è un numero reale positivo tale che $1 \leq x < 10$ e y un numero intero ($y \in \mathbb{Z}$), che è anche detto *ordine di grandezza* della quantità in esame: se due quantità differiscono di due ordini di grandezza, significa che una delle due è *circa* 100 volte l'altra.

² I prefissi devono essere utilizzati facendo attenzione al carattere maiuscolo/minuscolo. Per esempio: km e non Km.

Come affrontare e risolvere un esercizio di Fisica

Non esiste *un modo* o *un metodo* per la soluzione dei problemi di Fisica; molto spesso, anzi, un problema può essere risolto usando approcci diversi. Tipicamente, molti esercizi di dinamica dei sistemi possono essere risolti per via dinamica e cinematica, oppure usando considerazioni energetiche: queste ultime sono particolarmente utili negli esercizi che non richiedono di determinare la legge oraria degli elementi del sistema ma, semplicemente, chiedono di determinare lo *stato finale di un sistema* (posizione e velocità) a partire dalla conoscenza dello *stato iniziale*. In generale, per una comprensione approfondita della situazione fisica presa in considerazione, è sempre utile valutare quali leggi di conservazione sono valide.

In ogni caso, è possibile delineare una strategia generale per affrontare i problemi, i cui passi sono elencati e brevemente descritti di seguito, con particolare riguardo agli esercizi di meccanica e termodinamica, trattati in questo libro.

0. Studio della teoria

Dovrebbe essere ovvio, ma ribadiamolo: affrontare i problemi di un capitolo senza averne prima studiata la parte teorica non ha alcun senso!

1. Comprensione del testo

Leggere *attentamente* e *interamente* il testo. Porre attenzione al modo in cui le frasi sono scritte, ai dettagli, e alle parole-chiave che possono, tipicamente, guidare nell'individuazione del modello fisico da usare per la soluzione. Per esempio, se il testo dice che una fune è ideale, significa che la tensione è uguale ai capi di ogni suo tratto; se un corpo rotola senza strisciare, significa che la velocità e l'accelerazione del suo centro di massa sono proporzionali, rispettivamente, alla sua velocità angolare e alla sua accelerazione angolare.

2. Schematizzazione grafica

Guardare con attenzione le figure (se ci sono) e capirne il significato; se non vi sono figure, costruire uno schizzo del sistema fisico descritto nel testo, indicando con gli opportuni simboli le quantità note. Cercare di immaginare un sistema fisico reale che corrisponda a quanto raffigurato, per capire quale comportamento ci si aspetta (e per poter poi confrontare il risultato dei calcoli con tale previsione).

3. Elenco dei dati e delle incognite

Costruire una lista dei dati e delle incognite. Se i dati sono numerici, indicarne i valori e le unità di misura. Se necessario, usare equivalenze e conversioni di unità per esprimere tutte le grandezze nelle unità del Sistema Internazionale. Può essere anche utile scrivere le costanti che si presume di dover usare (per esempio, la costante dei gas perfetti, la costante di gravitazione universale, ecc.) con le rispettive unità di misura.

4. Diagrammi e grafici

Nei problemi di meccanica, disegnare il diagramma delle forze (o diagramma di corpo libero) per ognuno dei corpi che costituiscono il sistema descritto nel testo. In particolare, è importante applicare le forze in gioco nei punti corretti, visto che per i corpi estesi gli effetti delle forze dipendono dal punto di applicazione! Nei problemi di termodinamica, ove possibile, disegnare le trasformazioni del sistema in un diagramma (p, V), avendo cura di dare una descrizione grafica che rispetti, seppur qualitativamente, le differenze sostanziali fra le trasformazioni in gioco.

5. Identificazione del modello da usare

Determinare, sulla base delle figure e del testo, quali teorie o principi fisici è possibile

applicare e quali assunzioni o semplificazioni è lecito fare per ricondursi a modelli fisici noti. Per esempio: esistono simmetrie nel sistema descritto? Si può applicare qualche legge di conservazione? Un dato corpo può essere trattato come puntiforme? Le trasformazioni termodinamiche descritte sono quasi-statiche?

6. Strategia di soluzione

In questa fase si analizza il problema, chiedendosi quali teorie o principi fisici sia possibile applicare e quali siano le assunzioni o le semplificazioni da fare per utilizzare modelli fisici noti. È questa la fase cruciale dello svolgimento del problema, quella della strategia in senso stretto: ci si chiede che cosa è necessario sapere per pervenire al risultato e come si possono determinare le grandezze fisiche che non sono fornite dalla traccia. Più o meno consapevolmente, è questo il momento in cui ci si rende conto se il problema è analogo ad altri già svolti (sperabilmente con successo!), per cui si può utilizzare la stessa tecnica di soluzione. Può essere un utile esercizio descrivere verbalmente o per iscritto una *sintesi* dei passaggi che si intendono intraprendere per arrivare alla soluzione: così facendo ci si rende conto delle eventuali pecche del ragionamento e lo si può correggere prima di andare a scrivere e tentare di risolvere delle equazioni. Equivalentemente, può essere utile costruire un diagramma di flusso con i passaggi che si prevede di compiere per arrivare al risultato.

7. Soluzione

Mettere in pratica la strategia risolutiva approntata in precedenza, scrivendo e risolvendo le equazioni. Prima di procedere è utile verificare che il problema sia ben posto dal punto di vista matematico, per esempio: se si tratta di un sistema di equazioni algebriche, il numero di equazioni è pari al numero delle incognite? Se si tratta di equazioni differenziali, non bisogna dimenticare di definire le condizioni iniziali. È poi importante tenere sotto controllo, passo dopo passo, la correttezza formale e la coerenza dimensionale delle espressioni che si scrivono e risolvere tutto in modo simbolico fino a pervenire a una espressione risolutiva; solo a questo punto inserire i valori numerici e le unità di misura delle grandezze note. Controllare la coerenza delle unità di misura del risultato.

8. Analisi del risultato

Il risultato ottenuto è sensato? Per capirlo, si possono effettuare alcuni controlli: il segno è quello che ci si aspetta? L'ordine di grandezza del valore numerico è ragionevole? Se la grandezza da determinare deve ricadere in un dato intervallo di valori, verificare che sia così. Controllare se ci sono casi limite (ossia, situazioni che si possono ottenere facendo tendere le variabili verso opportuni valori), che realizzano situazioni fisiche nelle quali ci aspettiamo risultati ben definiti, e controllare che il risultato sia coerente con essi. Dato che non esiste un'unica strategia di soluzione, un ulteriore controllo può essere effettuato risolvendo il problema con un'altra strategia di soluzione: posto che le strategie siano entrambe valide, il risultato deve ovviamente essere lo stesso.



Richiami di teoria

Grandezze cinematiche

Un oggetto puntiforme (o *punto materiale*) P viene detto in moto quando, rispetto a un riferimento fisico, la sua posizione varia nel tempo. Se O è un punto appartenente al *sistema di riferimento* scelto, il vettore $\mathbf{r}(t) = \vec{OP}(t)$ individua, in ogni istante t la posizione del punto materiale P rispetto a O (Figura 1.1). La curva γ luogo geometrico delle posizioni successivamente occupate da P nel tempo è la *traiettoria* del punto materiale; la funzione vettoriale¹ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ rappresenta la *legge del moto*.

Lo *spostamento* compiuto dal punto materiale in un intervallo di tempo finito Δt è dato dal vettore $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$. Il vettore $\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ è detto *velocità media* nell'intervallo temporale considerato. La variazione nel tempo del vettore posizione è descritta dal seguente *vettore velocità* (istantanea):

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad (1.1)$$

tal definizione porta a considerare la funzione vettoriale $\mathbf{v}(t)$ come la derivata temporale della legge del moto² $\mathbf{r}(t)$, cioè del vettore tempo-dipendente \mathbf{r} .

Il vettore velocità \mathbf{v} è sempre tangente alla traiettoria γ e ha verso concorde con quello del moto. In generale, anche la velocità varia nel tempo; se è nota la funzione vettoriale

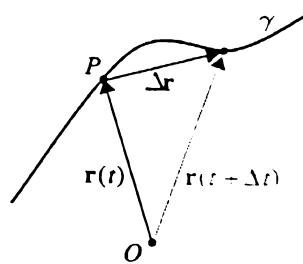


Figura 1.1

¹ La funzione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ è una funzione che fa corrispondere a ogni istante t una terna di numeri reali, cioè le tre componenti del vettore posizione \mathbf{r} nello spazio euclideo tridimensionale. Se il punto materiale è in moto, tali componenti sono, a loro volta, funzioni del tempo.

² Operativamente, tali derivate possono essere calcolate come derivate ordinarie di funzioni scalari, una volta scelta la rappresentazione, cioè il sistema di coordinate. Lo stesso vale per gli integrali delle successive equazioni nel testo.

$\mathbf{v}(t)$, è possibile determinare la legge del moto mediante integrazione:³

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' , \quad (1.2)$$

dove $\mathbf{r}(t_0)$ è la posizione occupata dal punto materiale all'istante iniziale.

La variazione della velocità del punto materiale in un intervallo di tempo finito Δt è data dal vettore $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$. Il vettore $\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ è detto accelerazione media nell'intervallo temporale considerato. La variazione nel tempo del vettore velocità è descritta dal vettore accelerazione:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} ; \quad (1.3)$$

tale definizione porta a considerare la funzione vettoriale $\mathbf{a}(t)$ come la derivata temporale di $\mathbf{v}(t)$. In generale, l'accelerazione varia nel tempo; supponendo di conoscere la funzione $\mathbf{a}(t)$, è possibile determinare $\mathbf{v}(t)$ mediante integrazione:⁴

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt' . \quad (1.4)$$

A volte, invece della dipendenza dal tempo, potrebbe essere nota la dipendenza della velocità dalla posizione occupata dal punto materiale, oppure la dipendenza dell'accelerazione dalla sua posizione e/o velocità. In tali casi le definizioni (1.1) e (1.3) vanno intese applicando la regola della derivazione delle funzioni composte. Per esempio, se è nota $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, si ha:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \mathbf{v} \quad (1.5)$$

da cui

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{v}(\mathbf{r}) , \quad (1.6)$$

integrando la quale si ottiene:⁵

$$v^2(\mathbf{r}) = v^2(\mathbf{r}_0) + 2 \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (1.7)$$

dove $v^2(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$ e $v^2(\mathbf{r}_0) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$.

Una classificazione dei moti può essere fatta basandosi sulla forma della traiettoria, oppure sulla conoscenza dell'accelerazione: i moti con $\mathbf{a} = 0$ sono detti *uniformi*, quelli con \mathbf{a} costante sono detti *uniformemente accelerati*, quelli con \mathbf{a} dipendente dal tempo sono detti *vari*.⁶

³ Si è indicata con t' la variabile temporale di integrazione per non confonderla con l'estremo superiore di integrazione.

⁴ Si veda la nota precedente.

⁵ Si è indicata con r' la variabile di integrazione per non confonderla con l'estremo superiore di integrazione.

⁶ Quest'ultimo caso comprende naturalmente anche i moti in cui l'accelerazione è funzione della posizione e/o della velocità del punto materiale. Un esempio è dato dal moto armonico, altri verranno proposti nei problemi successivi.

Grandezze cinematiche in coordinate cartesiane

Scelta una terna di assi cartesiani x , y , z con origine in un punto O ,⁷ il vettore posizione \mathbf{r} di un punto materiale P nello spazio ha componenti (x, y, z) rispetto ai versori $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ (si veda l'appendice A), ossia $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$. Di conseguenza, la legge del moto è completamente definita dalla conoscenza delle tre funzioni $x(t), y(t), z(t)$ che descrivono l'andamento delle componenti di \mathbf{r} in funzione del tempo:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{u}_x + y(t) \mathbf{u}_y + z(t) \mathbf{u}_z. \quad (1.8)$$

In questo sistema di coordinate i versori della base sono fissi, ossia non dipendono dal tempo; il vettore velocità si può pertanto scrivere

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z = v_x(t) \mathbf{u}_x + v_y(t) \mathbf{u}_y + v_z(t) \mathbf{u}_z \quad (1.9)$$

dove $v_x(t)$, $v_y(t)$ e $v_z(t)$ sono le sue tre componenti cartesiane. Quindi, in coordinate cartesiane e ponendo $\mathbf{r}(t_0) \equiv (x_0, y_0, z_0)$, l'Equazione vettoriale 1.2 equivale alle tre equazioni scalari

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t') dt', \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t') dt', \quad z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t v_z(t') dt'. \quad (1.10)$$

A partire dal vettore velocità si ricava per derivazione il vettore accelerazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{dv_x}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{u}_z \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z = a_x(t) \mathbf{u}_x + a_y(t) \mathbf{u}_y + a_z(t) \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (1.11)$$

quindi, ponendo $\mathbf{v}(t_0) \equiv (v_{x,0}, v_{y,0}, v_{z,0})$, l'Equazione 1.4 equivale a:

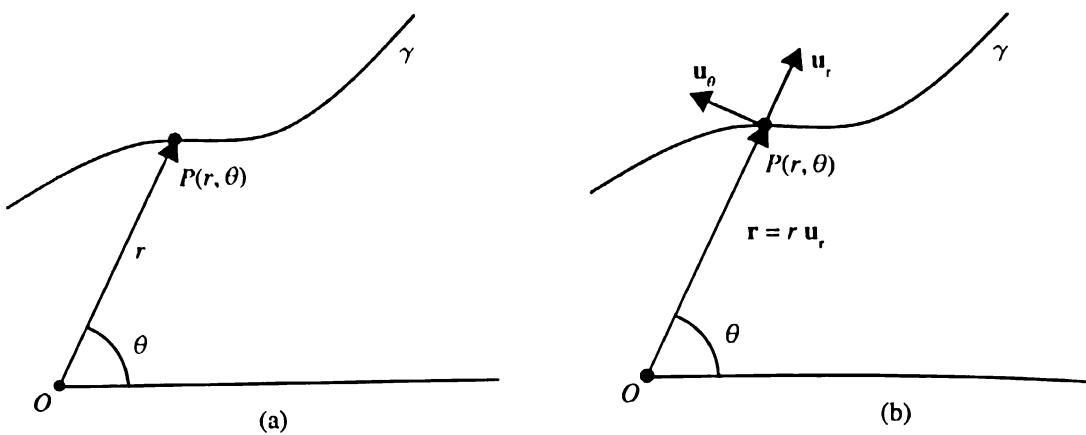
$$v_x(t) = v_{x,0} + \int_{t_0}^t a_x(t') dt', \quad v_y(t) = v_{y,0} + \int_{t_0}^t a_y(t') dt', \quad v_z(t) = v_{z,0} + \int_{t_0}^t a_z(t') dt'. \quad (1.12)$$

Le relazioni precedenti si applicano anche al moto bidimensionale (in un piano) e unidimensionale (lungo una retta), limitandole naturalmente alle sole componenti utili.

Grandezze cinematiche in coordinate polari (nel piano)

Nel caso del moto in un piano, un'alternativa alle coordinate cartesiane è quella delle *coordinate polari piane*: scelta un'origine O , la posizione del punto materiale P è individuata in ogni istante dalle coordinate (r, θ) , avendo indicato con r la lunghezza del segmento \overline{OP} e con θ l'angolo che esso forma con una semiretta fissa passante per O (Figura 1.2a). Si noti che, se tale semiretta coincide con la parte positiva dell'asse x di un sistema di riferimento cartesiano piano Oxy , si può passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari piane mediante le relazioni $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$, e da quelle polari a quelle cartesiane usando le relazioni $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

⁷ Tale sistema di coordinate viene talvolta per brevità indicato con $Oxyz$.

**Figura 1.2**

Il vettore posizione \mathbf{r} rispetto alla *base polare* costituita dai versori $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta\}$ (Figura 1.2b) è espresso da $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$, dove \mathbf{u}_r è diretto come \mathbf{r} , mentre \mathbf{u}_θ è perpendicolare a \mathbf{u}_r e orientato nel senso di θ crescente. Il vettore velocità si ottiene come derivata temporale del vettore $\mathbf{r}(t)$. In questo sistema di coordinate, però, anche i versori sono funzioni del tempo perché cambiano direzione al variare della posizione di P sulla traiettoria.

Pertanto si ha:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta. \quad (1.13)$$

In questa espressione, il primo termine si chiama *velocità radiale* e il secondo *velocità trasversa*. Il vettore accelerazione, ottenuto per ulteriore derivazione rispetto al tempo, risulta infine essere:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{u}_\theta. \quad (1.14)$$

Nel caso particolare in cui il modulo del vettore \mathbf{r} non varia nel tempo, il moto si dice *circolare* perché tale è la forma della traiettoria; la velocità si riduce allora a $\mathbf{v} = r\omega \mathbf{u}_\theta$, dove la quantità (scalare) $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ prende il nome di *velocità angolare*.

Grandezze cinematiche in coordinate cilindriche

Una possibile generalizzazione delle coordinate polari sopra descritte al caso in cui la traiettoria sia una curva nello spazio tridimensionale è costituita dalle *coordinate cilindriche*.⁸ Una base cilindrica è individuata dai versori della base polare nel piano, \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ , ai quali si aggiunge un versore \mathbf{u}_z ortogonale al piano.

Conseguentemente il vettore posizione ha componenti $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r + z \mathbf{u}_z$ e le componenti di velocità e accelerazione si ottengono aggiungendo $\frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z$ e $\frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z$ alle espressioni 1.13 e 1.14, rispettivamente.

⁸ Un'ulteriore generalizzazione è costituita dalle coordinate polari sferiche.

Ascissa curvilinea e base intrinseca

Sia γ la traiettoria di un punto materiale. Ad ogni punto Ω di tale curva, dopo aver fissato arbitrariamente su di essa un'origine Ω_0 e un'orientazione, si può associare un numero reale, detto *ascissa curvilinea*, che corrisponde alla lunghezza (orientata) del cammino percorso dall'origine Ω_0 a Ω , una volta scelta un'opportuna unità di misura delle lunghezze (Figura 1.3a).

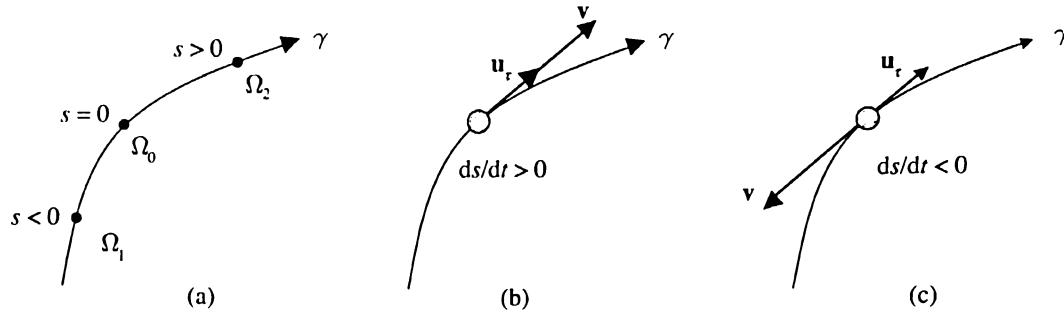


Figura 1.3 (a): sulla curva γ scegiamo l'origine nel punto Ω_0 e l'orientazione definita dalla freccia: la posizione Ω_1 ha allora ascissa curvilinea $s_1 < 0$, mentre la posizione Ω_2 ha ascissa curvilinea $s_2 > 0$. (b): quando il moto avviene nel verso positivo dell'ascissa curvilinea ($ds/dt > 0$) i vettori \mathbf{u}_τ e \mathbf{v} sono concordi. (c): quando il moto avviene nel verso negativo dell'ascissa curvilinea ($ds/dt < 0$) i vettori \mathbf{u}_τ e \mathbf{v} sono discordi.

Indicando con s l'ascissa curvilinea della posizione *istantaneamente* occupata dal punto materiale P sulla traiettoria, si avrà in generale $s = s(t)$. Il moto può essere descritto conoscendo le funzioni

$$\mathbf{r}(s), \quad s(t), \quad (1.15)$$

dove $\mathbf{r}(s)$ rappresenta l'equazione parametrica della traiettoria, mentre $s(t)$ è la *legge oraria*.

L'equazione del moto in forma vettoriale è quindi $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}[s(t)]$. Il vettore velocità assume la forma

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_\tau = v_s \mathbf{u}_\tau \quad (1.16)$$

dove

$$\mathbf{u}_\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

è il versore *tangente* alla traiettoria nel generico punto Ω , avente verso concorde all'orientazione della curva γ (Figura 1.3) e

$$v_s = \frac{ds}{dt}$$

è la *velocità scalare*.⁹ Il verso del vettore velocità coincide con quello di \mathbf{u}_τ o è ad esso opposto, a seconda che, nell'istante in cui si trova a passare per Ω , il punto materiale si muova nel verso positivo dell'ascissa curvilinea, $\frac{ds}{dt} > 0$ (Figura 1.3b) o nel verso negativo,

⁹ Così definita la velocità scalare può essere positiva o negativa. Non va quindi confusa con il modulo della velocità (vettoriale), che è naturalmente sempre positivo.

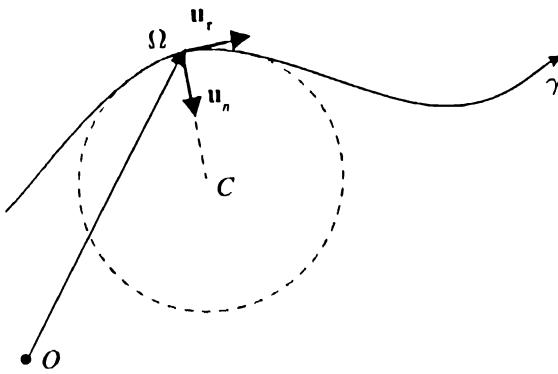


Figura 1.4 Versori della base intrinseca $\{\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_n\}$ e circonferenza osculatrice nel punto generico Ω della curva orientata γ .

$\frac{ds}{dt} < 0$ (Figura 1.3c). Il vettore accelerazione si ottiene per derivazione della velocità rispetto al tempo:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \mathbf{u}_\tau) = \frac{dv_s}{dt} \mathbf{u}_\tau + v_s \frac{d\mathbf{u}_\tau}{dt} = \frac{dv_s}{dt} \mathbf{u}_\tau + \frac{v_s^2}{R} \mathbf{u}_n. \quad (1.17)$$

In questa espressione, \mathbf{u}_n è il versore *normale* alla traiettoria nel punto Ω ; tale versore è diretto verso il centro della *circonferenza osculatrice* ossia della circonferenza che localmente approssima la traiettoria γ e il cui raggio $R = \overline{C\Omega}$ è univocamente determinato dalla forma della traiettoria nell'intorno di Ω (Figura 1.4).¹⁰

Il primo termine nell'espressione 1.17 prende il nome di *accelerazione tangenziale*

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dv_s}{dt} \mathbf{u}_\tau,$$

ed è legato alla variazione del modulo della velocità, mentre il secondo termine prende il nome di *accelerazione normale* o *centripeta*

$$\mathbf{a}_n = \frac{v_s^2}{R} \mathbf{u}_n,$$

perché è sempre diretto perpendicolarmente alla traiettoria ed è orientato verso il centro della circonferenza osculatrice.

Cinematica relativa: leggi di trasformazione classiche di velocità e accelerazione

Siano dati due sistemi di riferimento, S e S' , in moto relativo uno rispetto all'altro e, in ciascuno di essi, si consideri un sistema di coordinate cartesiane, con origine, rispettivamente, O e O' . Nel sistema S , il vettore posizione di un punto materiale P è a ogni istante, espresso da

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{u}_x + y(t) \mathbf{u}_y + z(t) \mathbf{u}_z. \quad (1.18)$$

¹⁰ Per una definizione più rigorosa di circonferenza osculatrice si rimanda ai testi di geometria.

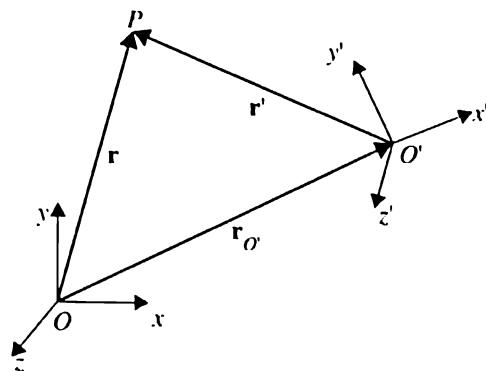


Figura 1.5 I due sistemi di riferimento S (con origine in O) e S' (con origine in O') sono in moto uno rispetto all'altro; il vettore $\mathbf{r}_{O'}$ rappresenta, al variare del tempo, la posizione dell'origine O' rispetto all'origine O . All'istante t , la posizione del corpo puntiforme P è individuata dal vettore posizione \mathbf{r} nel sistema S e dal vettore posizione \mathbf{r}' nel sistema S' .

Analogamente, nel sistema S' , il vettore posizione del medesimo punto P , nel medesimo istante t , è dato da

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{u}_{x'} + y'(t)\mathbf{u}_{y'} + z'(t)\mathbf{u}_{z'} . \quad (1.19)$$

Facendo riferimento alla Figura 1.5, si vede che

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{O'}(t) + \mathbf{r}'(t) . \quad (1.20)$$

Se \mathbf{v} rappresenta la velocità del punto materiale in movimento misurata nel sistema S e \mathbf{v}' quella misurata nel sistema S' , sussiste la seguente relazione

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_T + \mathbf{v}' \quad (1.21)$$

dove \mathbf{v}_T , detta *velocità di trascinamento* è espressa da

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' , \quad (1.22)$$

essendo $\mathbf{v}_{O'}$ la velocità dell'origine O' misurata nel sistema S e $\boldsymbol{\omega}$ è lo pseudovettore *velocità angolare*¹¹ che caratterizza la rotazione istantanea del sistema di riferimento S' rispetto a S . La velocità di trascinamento rappresenta la velocità con cui si muove rispetto al sistema S il punto solidale al sistema S' che, nell'istante considerato, è coincidente con la posizione occupata dal corpo puntiforme P .

Se \mathbf{a} rappresenta l'accelerazione del punto mobile misurata nel sistema S e \mathbf{a}' quella misurata nel sistema S' , sussiste la seguente relazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_{Co} + \mathbf{a}' . \quad (1.23)$$

In particolare,

$$\mathbf{a}_{Co} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' \quad (1.24)$$

¹¹ Per la definizione di pseudovettore e per la giustificazione dettagliata dell'Equazione 1.22 e delle successive, si rimanda al libro di testo. Può essere comunque utile anticipare ora che il concetto di rotazione della terna cartesiana è assimilabile alla rotazione di un corpo rigido che verrà trattata nel Capitolo 4.

è l'*accelerazione di Coriolis*, mentre \mathbf{a}_T è l'*accelerazione di trascinamento*, ossia l'accelerazione con cui si muove, rispetto a S , il punto del sistema S' che coincide, all'istante considerato, con la posizione occupata dal corpo puntiforme P . La sua espressione esplicita è

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') , \quad (1.25)$$

essendo $\mathbf{a}_{O'}$ l'accelerazione dell'origine O' misurata nel sistema S e $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ l'accelerazione angolare del sistema S' misurata nel sistema S .

Supponiamo che il sistema S' sia in moto, rispetto a S , con velocità $\mathbf{v}_{O'}$ costante e velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ nulla, ossia che il moto relativo dei due sistemi sia *rettilineo e uniforme*. Se all'istante $t = 0$ le origini dei due sistemi coincidono, si ottiene la relazione

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_{O'} t + \mathbf{r}', \quad (1.26)$$

che rappresenta le *equazioni di trasformazione di Galileo*. Per la velocità si ottiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}', \quad (1.27)$$

mentre per l'accelerazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (1.28)$$

La 1.27 rappresenta la legge di composizione classica delle velocità, mentre dalla 1.28 si deduce l'invarianza dell'accelerazione fra sistemi in moto relativo rettilineo uniforme.

TEST DI COMPRENSIONE

1. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A Il modulo di un vettore non può essere negativo, mentre possono esserlo le sue componenti;
- B Né il modulo, né le componenti di un vettore possono essere negativi;
- C Sia il modulo, sia le componenti di un vettore possono essere negativi;
- D Il modulo di un vettore può essere positivo o negativo, a seconda del segno delle sue componenti.

2. Un punto materiale si sposta di un metro verso nord in linea retta. Il vettore spostamento è un versore?

- A Sì perché ha modulo pari a 1 m;
- B Sì perché ha modulo pari ad 1 m ed è rivolto verso nord;
- C No, perché non è adimensionale;
- D Sì ma solo se l'asse y del sistema di riferimento è stato scelto nella direzione sud-nord.

3. Se un corpo è in moto con *velocità scalare* costante, la sua accelerazione:

- A è sempre nulla;
- B può essere diversa da zero;
- C non è mai nulla;
- D è sempre parallela alla velocità.

4. Un corpo puntiforme si muove lungo una traiettoria curvilinea. È possibile che la sua accelerazione sia nulla?
- Sì, ma solo se la sua velocità scalare è costante;
 - Sì, ma solo se la sua velocità vettoriale è costante;
 - No, perché c'è sempre almeno l'accelerazione centripeta;
 - No, perché c'è sempre almeno l'accelerazione tangenziale.
5. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
- L'accelerazione di un punto materiale è sempre parallela e concorde alla sua velocità;
 - L'accelerazione di un punto materiale è sempre parallela e opposta alla sua velocità;
 - L'accelerazione di un punto materiale è sempre perpendicolare alla sua velocità;
 - L'accelerazione di un punto materiale può essere perpendicolare alla sua velocità.

Problemi

Problema 1.1

L'ascensore di un grattacielo ha una corsa totale di lunghezza s . Esso parte dal pianterreno con accelerazione costante di modulo a ; una volta raggiunta la velocità massima v_{\max} procede di moto rettilineo uniforme, dopodiché decelera (sempre con accelerazione di modulo a) fino a fermarsi all'ultimo piano.

- Quanto tempo occorre affinché l'ascensore raggiunga la velocità massima? Quale distanza percorre in tale tempo?
- Quanto tempo dura la corsa completa, tenendo conto delle fasi di accelerazione e rallentamento?

Problema 1.2

Durante la posa di un traliccio dell'alta tensione, un bullone mal fissato cade da un'altezza h rispetto al suolo. Sapendo che nell'ultimo secondo del suo moto, prima di toccare terra, esso percorre una altezza pari a $h/2$, determinare il valore di h .

Problema 1.3

Durante una partita di golf, un giocatore si trova a dover lanciare la pallina verso la sommità di un pendio regolare, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Il giocatore colpisce la pallina con la mazza e le imprime una velocità di modulo v_0 a un angolo ϕ con il terreno.

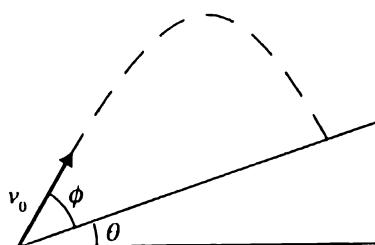


Figura 1.6

- Calcolare la distanza (misurata lungo il pendio) a cui arriva la pallina, esprimendola in funzione di quantità note.
- Quale valore dell'angolo ϕ permette di far giungere la pallina alla massima distanza (misurata lungo il pendio)?

Problema 1.4

Un uomo è nell'ascensore di un centro commerciale. L'ascensore, con pareti di vetro, sta salendo con un'accelerazione (verso l'alto) di 1.0 m/s^2 . Quando la sua velocità è uguale a 2.0 m/s l'uomo lascia cadere un mazzo di chiavi che teneva in mano, a un'altezza di 1.00 m rispetto al pavimento dell'ascensore. Calcolare:

- il tempo che il mazzo di chiavi impiega per toccare il pavimento dell'ascensore;
- lo spostamento del mazzo di chiavi nello stesso intervallo di tempo, misurato da un altro uomo che osserva la scena mentre sta fermo sulle scale.

Problema 1.5

Un intenso campo magnetico uniforme è diretto lungo l'asse z di una terna di assi cartesiani. Un elettrone si muove nel campo secondo le seguenti leggi orarie:

$$x(t) = R \cos(\omega t) \quad y(t) = R \sin(\omega t) \quad z(t) = v_0 t$$

- determinare la forma della traiettoria dell'elettrone e il verso in cui è percorsa;
- calcolare le componenti cartesiane e il modulo della velocità dell'elettrone;
- scrivere l'equazione del moto in coordinate cilindriche;
- determinare le componenti dell'accelerazione in coordinate cilindriche;
- trovare la velocità scalare dell'elettrone in coordinate intrinseche.

Problema 1.6

Un corpo puntiforme viene lanciato con velocità iniziale di modulo $v_0 = 2.0 \text{ m s}^{-1}$ lungo la parete interna di un tubo orizzontale pieno di olio. Per effetto dell'attrito viscoso con l'olio (tralasciando l'attrito radente con le pareti del tubo), l'accelerazione del corpo risulta dipendere linearmente dalla velocità, ossia $a = -bv$ dove $b = 0.8 \text{ s}^{-1}$. Scegliendo come asse x la retta orizzontale lungo cui avviene il moto, e ponendo l'origine nel punto di partenza, si determini:

- dopo quanto tempo il corpo si ferma;
- quale distanza percorre prima di fermarsi;
- l'espressione della sua velocità in funzione della coordinata x .

Problema 1.7

Un punto materiale si muove di moto rettilineo lungo l'asse x . Al tempo $t_0 = 0$ parte dal punto di ascissa $x_0 = 5 \text{ m}$ con velocità iniziale nulla e accelerazione $a_x^A = 2 \text{ m s}^{-2}$, che rimane costante fino all'istante $t_1 = 3 \text{ s}$. A questo punto la sua accelerazione si annulla ed esso procede con velocità costante fino all'istante $t_2 = 4 \text{ s}$, dopodiché acquista un'accelerazione $a_x^B = -6 \text{ m s}^{-2}$ e procede con moto uniformemente accelerato. Determinare l'istante in cui il punto passa per l'origine.

Problema 1.8

Un'automobile parte da ferma con accelerazione costante: essa passa davanti a due sensori posti rispettivamente a distanze $x_1 = 9 \text{ m}$ e $x_2 = 16 \text{ m}$ dal punto di partenza. Sapendo che il tempo impiegato per percorrere la distanza tra i due sensori è pari a $\Delta t = 2 \text{ s}$, determinare l'accelerazione dell'auto.

Problema 1.9

Una molla è vincolata con uno dei suoi estremi all'origine O di un sistema di riferimento. Essa ruota intorno a O in senso antiorario con velocità angolare costante ω e, contemporaneamente, oscilla lungo il proprio asse con pulsazione Ω e ampiezza A intorno alla sua lunghezza di equilibrio l . All'istante $t = 0$ l'estremo libero P della molla si trova nella posizione $x_0 = l$, $y_0 = 0$ rispetto a un opportuno sistema di assi cartesiani Oxy nel piano.

- Scrivere le equazioni del moto dell'estremo libero della molla in coordinate polari e cartesiane nel piano del moto.
- Determinare quale condizione deve soddisfare il rapporto Ω/ω perché, dopo una rotazione completa, l'estremo libero della molla ritorni alla posizione di partenza.
- Scrivere l'espressione dell'accelerazione dell'estremo libero della molla.

Problema 1.10

Un canale di larghezza l è percorso da una corrente d'acqua la cui velocità varia in modulo con la distanza dalla sponda secondo la legge

$$v_a(y) = A(ly - y^2)$$

dove y è la distanza dalla sponda e A è una costante. Una barchetta a motore parte dal punto O sulla riva del canale e deve raggiungere il punto P , posto sulla riva opposta a una distanza d da O lungo la direzione della corrente. Supponendo che la barca si muova, rispetto alla corrente del fiume, con velocità costante, di modulo v_b , direzione ortogonale alla corrente e verso che va dalla sponda dove giace O a quella dove giace P , determinare quale deve essere il valore del modulo della velocità v_b affinché la barca approdi esattamente in P .

Problema 1.11

Si consideri un punto materiale vincolato a muoversi lungo un asse x dato. Il punto si trova inizialmente nel semiasse negativo, con velocità scalare v_0 positiva. L'accelerazione a dipende dalla posizione x del punto materiale secondo la legge: $a(x) = 0$ per $x < 0$, $a(x) = -\alpha x + \beta$ per $x \geq 0$, con α e β costanti reali positive. Determinare la posizione x_{arresto} in cui il punto materiale si ferma.

Problema 1.12

Un corpo puntiforme è lasciato cadere da un'altezza $h = 39$ m rispetto al suolo, mentre soffia un vento che produce su di esso un'accelerazione orizzontale costante di modulo $a = 1.2 \text{ m s}^{-2}$. Mostrare che la traiettoria del corpo, dal punto di lancio fino a terra, è un segmento di retta e determinare l'equazione cartesiana in un opportuno riferimento. Determinare inoltre la durata del volo e la velocità con cui il corpo arriva al suolo.

Problema 1.13

Le lancette dell'orologio sono sovrapposte a mezzogiorno. Dopo quanti minuti l'angolo formato fra la lancetta delle ore e quella dei minuti sarà, per la prima volta, pari a π ?

Problema 1.14

Un'automobile da corsa si muove in un tratto rettilineo di pista con velocità di modulo v_0 . All'istante $t = 0$ inizia a frenare, arrestandosi completamente dopo aver percorso una distanza l . Si supponga

che la frenata avvenga con accelerazione variabile nel tempo secondo la legge $a_x(t) = \alpha t$, con $\alpha < 0$ (parametro incognito). Si calcolino il tempo di frenata e l'accelerazione media.

Problema 1.15

Un pallone viene lanciato dalla cima di un edificio di altezza h rispetto al suolo, con velocità parallela al suolo avente modulo v_0 . Sapendo che esso è soggetto a un'accelerazione $\mathbf{a} = (0, -g)$, relativamente a un sistema di riferimento cartesiano con assi x e y diretti come in Figura 1.7:

- Si determini la legge oraria.
- Si trovi l'equazione della traiettoria e si calcoli il modulo della velocità del pallone nell'istante in cui esso tocca terra.
- Si calcolino le componenti dell'accelerazione normale e tangenziale in un punto generico della traiettoria.
- Si calcolino le componenti del vettore velocità nel punto di impatto al suolo.

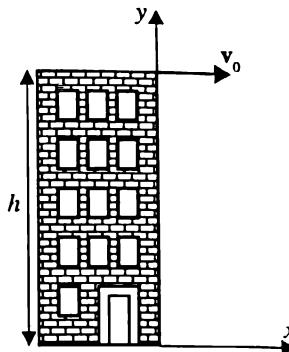


Figura 1.7

Problema 1.16

Due automobili si muovono lungo una pista circolare, avente raggio R , e si trovano in un dato istante nella situazione descritta in Figura 1.8. Sapendo che l'automobile 1 si muove con velocità costante in modulo pari a v_1 e che la velocità dell'automobile 2, nell'istante dato, ha modulo $v_{2,0}$, quale accelerazione tangenziale costante deve avere quest'ultima, per raggiungere l'altra prima del traguardo? Si ricavi il risultato numerico nel caso in cui $v_1 = 30$ m/s, $v_{2,0} = 60$ m/s, $R = 100$ m.

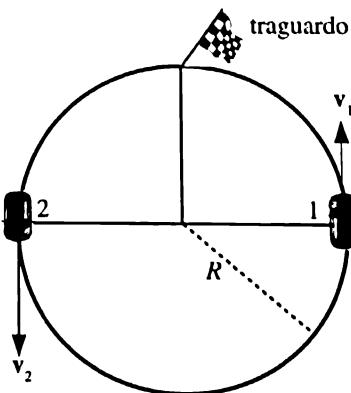


Figura 1.8

Problema 1.17

Un punto materiale è in moto unidimensionale secondo la legge

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \ell$$

dove $\omega = 2\pi \times 10^{-1}$ rad/s, $\ell = 1$ m e A e φ sono costanti da determinare. All'istante $t = 0$ esso occupa la posizione $x_0 = 1.5$ m e ha velocità $v_0 = 0$ m/s. Calcolare

- il valore delle costanti A e φ ;
- il massimo del modulo della velocità e l'istante in cui viene raggiunto per la prima volta;
- il massimo del modulo dell'accelerazione e l'istante in cui viene raggiunto per la prima volta.

Svolgimenti

Problema 1.1

Svolgimento

► Sia $t_0 = 0$ l'istante in cui l'ascensore parte da fermo, e z l'asse verticale orientato verso l'alto, tale che $z(t_0) = 0$, $v_z(t_0) = 0$.

- a) Il moto nella prima fase avviene con accelerazione $\mathbf{a} = +a\mathbf{u}_z$ perciò dalle Equazioni 1.12 e 1.10, per le condizioni iniziali date, si ha

$$v_z(t) = v_z(t_0) + a(t - t_0) \quad \longrightarrow \quad v_z(t) = at$$
$$z(t) = z(t_0) + v_z(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad \longrightarrow \quad z(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

Detto t_1 l'istante in cui l'ascensore raggiunge la velocità massima, $v_z(t_1) = v_{\max}$ = $a t_1$ e quindi

$$t_1 = \frac{v_{\max}}{a}.$$

Lo spazio percorso durante la fase di accelerazione è invece

$$s_1 = z(t_1) - z(t_0) = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{v_{\max}^2}{2a}.$$

- b) Si indichi con T la durata della corsa completa. L'ascensore accelera per un intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t_0$, poi viaggia a velocità v_{\max} per un intervallo di tempo che chiameremo $\Delta t'$, poi rallenta con accelerazione $-a\mathbf{u}_z$ per un intervallo di tempo che per simmetria non può che essere uguale a Δt . Perciò la corsa totale s e la sua durata complessiva T possono essere scritte

$$s = 2s_1 + s_2 = 2\frac{v_{\max}^2}{2a} + v_{\max}\Delta t' \quad (1.29)$$

$$T = 2\Delta t + \Delta t'. \quad (1.30)$$

Dalla prima si ottiene $\Delta t' = \frac{s}{v_{\max}} - \frac{v_{\max}}{a}$ che, sostituita nella seconda, permette di trovare

$$T = \frac{v_{\max}}{a} + \frac{s}{v_{\max}}.$$

Problema 1.2

Svolgimento

► Sia z l'asse verticale rivolto verso l'alto, con origine al suolo, e $t_0 = 0$ l'istante in cui il pallone si stacca, in modo che $z(t_0) = h$, $v_z(t_0) = 0$. Sia t_1 l'istante in cui il pallone si trova a $h/2$ dal suolo e t_2 l'istante in cui tocca il suolo: si sa che $t_2 - t_1 = \Delta t = 1$ s. Poiché il moto di caduta è uniformemente accelerato ($a_z = -g$) si ha che:

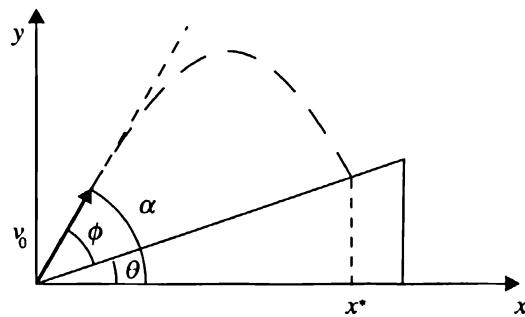
$$z(t_1) = \frac{h}{2} = h - \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \longrightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$$
$$z(t_2) = 0 = h - \frac{1}{2}gt_2^2 \quad \longrightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

da cui si ottiene che $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}}$ e quindi, elevando al quadrato e risolvendo per h ,

$$h = \frac{g(\Delta t)^2}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{9.81 \text{ ms}^{-2} 1 \text{ s}^2}{0.171} \simeq 57.18 \text{ m.}$$

Problema 1.3**Svolgimento**

► Si usi un sistema di assi cartesiani, con origine nel punto iniziale del moto, asse x orizzontale (verso destra) e asse y verticale (verso l'alto). Si definisca inoltre $\alpha = \theta + \phi$. Sia $t_0 = 0$ l'istante in cui la pallina è colpita dalla mazza.

**Figura 1.9**

a) Le componenti dell'accelerazione sono $a_x = 0$ e $a_y = -g$ per cui:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t \quad y(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2.$$

La traiettoria, ottenuta eliminando il tempo dalle equazioni precedenti, è

$$y = \tan(\alpha) x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2.$$

L'ascissa x^* del punto in cui la pallina da golf tocca il terreno si ottiene intersecando la traiettoria con l'equazione (del pendio): $y = \tan(\theta) x$. Le soluzioni sono $x = 0$ e

$$x = x^* = \frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} [\tan(\alpha) - \tan(\theta)]$$

che, esplicitando le tangenti e usando la formula di sottrazione per il seno, diventa

$$x^* = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha)}{g \cos(\theta)} \sin(\phi).$$

La distanza d tra il punto di partenza e il punto di impatto, misurata lungo il pendio, è data semplicemente da $d = x^*/\cos(\theta)$ per cui, ricordando che $\alpha = \theta + \phi$, si ha

$$d = \frac{2v_0^2 \cos(\theta + \phi)}{g \cos^2(\theta)} \sin(\phi). \quad (1.31)$$

- b) Per calcolare l'angolo ϕ che corrisponde al valore massimo della distanza lungo il pendio, occorre svolgere la derivata rispetto a ϕ dell'espressione 1.31 e porla uguale a zero:

$$\frac{d}{d\phi} [\cos(\theta + \phi) \sin(\phi)] = 0$$

ottenendo la condizione: $\cos(\theta + \phi) \cos(\phi) - \sin(\theta + \phi) \sin(\phi) = \cos(\theta + 2\phi) = 0$.

Quindi $\theta + 2\phi = (2n+1)\pi/2$ che, tenendo conto dei limiti fisici ai valori degli angoli, porta alla soluzione

$$\phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.$$

Per esempio, se fosse $\theta = \frac{\pi}{3}$, risulterebbe $\phi = \frac{\pi}{12} = 15^\circ$; si noti che nel caso $\theta = 0$ si ritroverebbe la condizione $\phi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

Problema 1.4

SOLVIMENTO

- Si definiscano due sistemi di riferimento Oxy e $O'x'y'$ solidali, rispettivamente, con le scale e l'ascensore come in Figura 1.10.

Sia $t_0 = 0$ l'istante in cui il mazzo di chiavi sfugge alle mani dell'uomo e sia $h = 1.00$ m la sua quota iniziale $y'(t_0)$. L'ascensore si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato verso l'alto, per cui l'accelerazione di trascinamento (cfr. Equazione 1.23) è uguale a $\mathbf{a}_T = a_{O'} \mathbf{u}_y$ dove $a_{O'} = 1.0$ m/s². L'accelerazione delle chiavi rispetto a O' è quindi $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T = -(g + a_{O'}) \mathbf{u}_y$. Il moto avviene solo lungo la direzione verticale, pertanto l'equazione oraria del moto rispetto a O' è

$$x'(t) = x'(t_0) \quad y'(t) = h + \frac{1}{2} a_y' t^2 = h - \frac{1}{2} (g + a_{O'}) t^2.$$

- a) Le chiavi toccano il pavimento dell'ascensore al tempo t_1 tale che $y'(t_1) = 0$ per cui

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_{O'} + g}} = 0.43 \text{ s.}$$

- b) Dal punto di vista di O , le chiavi hanno una velocità iniziale (di trascinamento) $\mathbf{v}(t_0) = v_{0y}(t_0) \mathbf{u}_y$ dove $v_{0y}(t_0) = 2.0$ m/s. Pertanto le equazioni del moto rispetto a O sono:

$$x(t) = x(t_0) \quad y(t) = y(t_0) + v_{0y}(t_0)t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

dove $a_y = -g$. Lo spostamento delle chiavi nell'intervallo di tempo tra t_0 e t_1 è quindi

$$\Delta x = 0 \quad \Delta y = v_{0y}(t_0)t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = -0.047 \text{ m.}$$

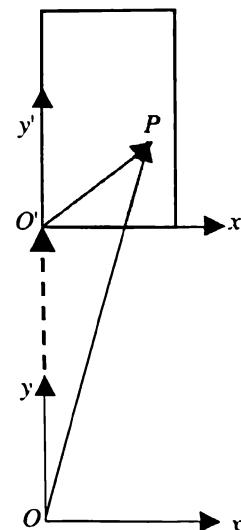


Figura 1.10

Problema 1.5

SOLVIMENTO

- Il testo fornisce le leggi orarie del moto in coordinate cartesiane. Da esse è immediato ricavare la traiettoria e la velocità, ed è possibile ottenere la rappresentazione del moto in coordinate cilindriche e intrinseche.

- a) Le equazioni del moto indicano che l'elettrone descrive una traiettoria data dalla composizione di due moti. Il primo è un moto circolare uniforme (ω è costante) di raggio R , nel piano xy ; esso avviene in verso antiorario se visto all'alto, come si verifica facilmente calcolando x e y a due istanti successivi, per esempio $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$. Il secondo è un moto rettilineo in cui la quota z dell'elettrone aumenta linearmente nel tempo. La traiettoria è quindi un'elica circolare (si veda la Figura 1.11).

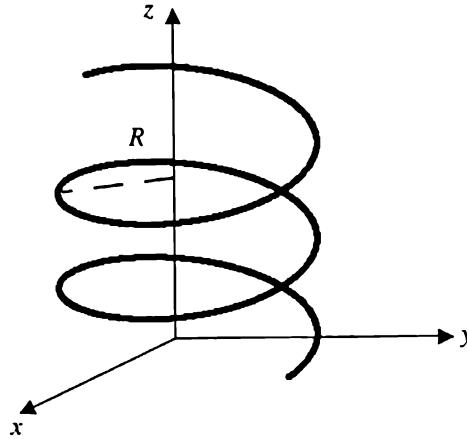


Figura 1.11

- b) Le componenti cartesiane della velocità si ottengono derivando le leggi del moto:

$$\begin{aligned}v_x(t) &= -R\omega \sin(\omega t) \\v_y(t) &= R\omega \cos(\omega t) \\v_z(t) &= v_0\end{aligned}$$

per cui il modulo è $v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_0^2}$. Come si vede, la velocità è costante in modulo.

- c) In coordinate cilindriche il moto è rappresentato dalle equazioni

$$\begin{aligned}r(t) &= R \\ \theta(t) &= \omega t \\ z(t) &= v_0 t.\end{aligned}\tag{1.32}$$

- d) Le componenti dell'accelerazione si ottengono derivando due volte rispetto al tempo la legge del moto. Si ricordi che in coordinate cilindriche la velocità si scrive

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z.$$

Nel caso in esame $r = R$ per cui la velocità radiale è nulla e si ottiene

$$\mathbf{v} = R\omega \mathbf{u}_\theta + v_0 \mathbf{u}_z.$$

L'accelerazione $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ risulta quindi (si ricordi che v_0 è costante e che \mathbf{u}_z è un versore fisso)

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} (\omega R \mathbf{u}_\theta) = \omega R \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\omega^2 R \mathbf{u}_r$$

avendo usato il fatto che

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{u}_r.$$

Quindi l'accelerazione è solo centripeta e sempre ortogonale all'asse z .

- e) In coordinate intrinseche, l'equazione oraria è semplicemente $s(t) = s(t_0) + v_s(t - t_0)$. Se si sceglie il verso positivo della coordinata curvilinea s nel verso del moto e si pone $t_0 = 0$ e $s(t_0) = 0$, si ottiene $s(t) = v_s t$ dove v_s coincide con il modulo della velocità: $v = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_0^2}$.

Problema 1.6**SVOLGIMENTO**

► Il corpo descrive un moto vario in una dimensione, che va sotto il nome di moto rettilineo esponenzialmente smorzato.

- a) La condizione affinché il corpo si ferma è che la sua velocità sia nulla. Per via della scelta del sistema di riferimento, risulta necessariamente $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{u}_x$, e sussiste la seguente relazione tra le componenti x dell'accelerazione e della velocità

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} .$$

Per effetto dell'attrito viscoso, si ha che $a_x(t) = -bv_x(t)$, da cui l'equazione precedente diventa:

$$-bv_x(t) = \frac{dv_x}{dt} ,$$

cioè un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili la cui soluzione analitica è, imponendo la condizione al contorno $v_x(t=0) = v_0$,

$$v_x(t) = v_0 e^{-bt} .$$

La velocità ha pertanto un andamento esponenziale decrescente nel tempo e si annulla solo per $t \rightarrow \infty$.

- b) Per trovare la distanza percorsa dal corpo, occorre partire dalla relazione tra velocità e posizione:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

che si può scrivere nella forma

$$dx = v_x(t) dt = v_0 e^{-bt} dt .$$

Integrando tra l'istante $t = 0$ e l'istante t generico e ricordando che $x(t=0) = 0$, si ottiene

$$x(t) = \frac{v_0}{b} \left(1 - e^{-bt} \right) .$$

Tale equazione mostra che per $t \rightarrow \infty$ (condizione di arresto) si ha

$$x_{\max} = \frac{v_0}{b} = \frac{2.0 \text{ m s}^{-1}}{0.8 \text{ s}^{-1}} = 2.5 \text{ m} .$$

Quindi il corpo percorre una distanza finita in un tempo infinito.

- c) Per trovare la velocità in funzione della posizione occorre ripartire dalla relazione $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ e immaginare che v_x dipenda dal tempo attraverso la posizione, ossia che si possa scrivere $v_x = v_x[x(t)]$. In tal modo la derivata rispetto al tempo diventa

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = -bv_x ,$$

dove l'ultima uguaglianza esprime il fatto che $a_x = -bv_x$. Poiché $\frac{dx}{dt} = v_x$ per definizione, ed escludendo l'istante $t = \infty$ in cui la velocità è nulla, si può semplificare v_x ottenendo

$$\frac{dv_x}{dx} = -b \quad \rightarrow \quad dv_x = -b dx$$

la cui soluzione è ovviamente ottenibile integrando tra $x = 0$ e un x generico:

$$v_x(x) - v_x(0) = -bx.$$

Usando la condizione iniziale $v_x(0) = v_0$ si ottiene che la velocità decresce linearmente con la posizione x :

$$v_x(x) = v_0 - bx.$$

Naturalmente se si pone $x = x_{\max}$ si ottiene nuovamente che $v_x(x_{\max}) = 0$.

Problema 1.7

Svolgimento

► Tra l'istante t_0 e l'istante t_2 il corpo si muove nel verso positivo dell'asse x , dapprima con accelerazione a_x^A e poi a velocità costante. Pertanto tra t_0 e t_2 esso non può passare per l'origine essendo già partito da $x_0 > 0$. Quindi, il corpo si troverà nell'origine a un istante t^* successivo a t_2 . Per trovare tale istante occorre scrivere la legge del moto del punto materiale per i diversi intervalli di tempo.

- Da t_0 a t_1 il moto è uniformemente accelerato con accelerazione a_x^A per cui la posizione del corpo e la sua velocità all'istante t_1 sono:

$$x(t_1) = x_0 + \frac{1}{2} a_x^A t_1^2 \quad (1.33)$$

$$v_x(t_1) = a_x^A t_1 \quad (1.34)$$

avendo sfruttato il fatto che $t_0 = 0$.

- Da t_1 a t_2 il moto è uniforme per cui all'istante t_2 la posizione e la velocità del corpo sono

$$x(t_2) = x(t_1) + v_x(t_1)(t_2 - t_1) \quad (1.35)$$

$$v_x(t_2) = v_x(t_1) \quad (1.36)$$

- Da t_2 in poi il moto è uniformemente accelerato con accelerazione a_x^B per cui la posizione del corpo e la sua velocità all'istante $t > t_2$ generico sono:

$$x(t) = x(t_2) + v_x(t_2)(t - t_2) + \frac{1}{2} a_x^B (t - t_2)^2 \quad (1.37)$$

$$v_x(t) = v_x(t_2) + a_x^B (t - t_2). \quad (1.38)$$

Per determinare l'istante t^* in cui il punto passa per l'origine, occorre considerare la legge del moto (Equazione 1.37) e impostare che $x(t^*) = 0$. Così facendo si trova

$$x(t_2) + v_x(t_2)(t^* - t_2) + \frac{1}{2} a_x^B (t^* - t_2)^2 = 0.$$

Sostituendo a $x(t_2)$ l'espressione 1.35, e ricordando che $v_x(t_2)$ è uguale a $v_x(t_1)$ si ottiene

$$[x(t_1) + v_x(t_1)(t_2 - t_1)] + v_x(t_1)(t^* - t_2) + \frac{1}{2} a_x^B (t^* - t_2)^2 = 0. \quad (1.39)$$

Infine, sostituendo a $v_x(t_1)$ la sua espressione 1.34 e a $x(t_1)$ la sua espressione 1.33 si ha

$$x_0 + \frac{1}{2} a_x^A t_1^2 + a_x^A t_1(t_2 - t_1) + a_x^A t_1(t^* - t_2) + \frac{1}{2} a_x^B (t^* - t_2)^2 = 0. \quad (1.40)$$

Si ricordi che $(t_2 - t_1) = 1$ s e che l'incognita da trovare è t^* . Visto che nell'equazione precedente compare sempre $(t^* - t_2)$ chiamiamo questa variabile ξ e risolviamo l'equazione

$$\left(\frac{1}{2} a_x^B \right) \xi^2 + \left(a_x^A t_1 \right) \xi + \left[x_0 + \frac{1}{2} a_x^A t_1^2 + a_x^A t_1(t_2 - t_1) \right] = 0. \quad (1.41)$$

Essa è un'equazione di secondo grado del tipo $A \xi^2 + B \xi + C = 0$, dove

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} a_x^B = -\frac{1}{2} 6 \text{ m s}^{-2} = -3 \text{ m s}^{-2} \\ B &= a_x^A t_1 = 2 \text{ m s}^{-2} \cdot 3 \text{ s} = 6 \text{ m s}^{-1} \\ C &= x_0 + a_x^A t_1 \left(t_2 - \frac{t_1}{2} \right) = 5 \text{ m} + 2 \text{ m s}^{-2} (3 \text{ s}) (2.5 \text{ s}) = 20 \text{ m}. \end{aligned}$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$\xi_{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

per cui

$$\xi_{\pm} = \frac{-6 \text{ m s}^{-1} \pm \sqrt{276 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}}}{2(-3 \text{ m s}^{-2})} = \frac{-6 \text{ m s}^{-1} \pm 16.6 \text{ m s}^{-1}}{-6 \text{ m s}^{-2}}.$$

Le due soluzioni matematiche sono pertanto

$$\begin{aligned} \xi_+ &= \frac{-6 \text{ m s}^{-1} + 16.6 \text{ m s}^{-1}}{-6 \text{ m s}^{-2}} = -1.77 \text{ s} \\ \xi_- &= \frac{-6 \text{ m s}^{-1} - 16.6 \text{ m s}^{-1}}{-6 \text{ m s}^{-2}} = 3.77 \text{ s} \end{aligned} \quad (1.42)$$

tra le quali ξ_- è l'unica che, avendo segno positivo, fornisce una risposta avente significato fisico. In conclusione, avendo posto $\xi = (t^* - t_2)$, il corpo passa per l'origine all'istante $t^* = \xi_- + t_2 = 7.77$ s.

Problema 1.8

Svolgimento

► Scriviamo le distanze dei due sensori dal punto di partenza dell'auto utilizzando le leggi del moto uniformemente accelerato:

$$x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2, \quad x_2 = \frac{1}{2} a t_2^2$$

dove t_1 e t_2 sono gli istanti in cui la macchina passa davanti ai sensori posti in x_1 e in x_2 rispettivamente. Siccome non conosciamo i tempi t_1 e t_2 , ma solo la loro differenza $\Delta t = t_2 - t_1$, non possiamo ricavare l'accelerazione direttamente da una delle due espressioni, ma dobbiamo comporre in modo tale da trovare un'espressione che contenga tale differenza. Se prendiamo la radice quadrata di entrambi i membri delle due equazioni e quindi le sottraiamo membro a membro otteniamo:

$$(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) = \sqrt{\frac{a}{2}} (t_2 - t_1)$$

da cui, quadrando entrambi i membri, possiamo ottenere la seguente espressione per l'accelerazione:

$$a = 2 \left(\frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{\Delta t} \right)^2.$$

Sostituendo i dati del problema otteniamo

$$a = 2 \left(\frac{\sqrt{16 \text{ m}} - \sqrt{9 \text{ m}}}{2 \text{ s}} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1 \text{ m}}{4 \text{ s}^2} = 0.5 \text{ m s}^{-2}.$$

Problema 1.9

SVOLGIMENTO

► Sceglieremo innanzitutto come semiretta per definire l'angolo θ delle coordinate polari il semiasse x positivo. Consideriamo l'angolo θ come crescente (e quindi la velocità angolare ω positiva) se il punto P ruota in senso antiorario.

- a) Scrivere la legge del moto in coordinate polari significa indicare come variano r e θ in funzione del tempo. Considerando che all'istante iniziale $r = l$ e $\theta = 0$, si ha

$$\begin{aligned} r(t) &= l + A \sin(\Omega t) \\ \theta(t) &= \omega t. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Per scrivere l'equazione del moto in coordinate cartesiane, si può sfruttare il fatto che $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$ e $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$, per cui si ottiene

$$\begin{aligned} x(t) &= [l + A \sin(\Omega t)] \cos(\omega t) \\ y(t) &= [l + A \sin(\Omega t)] \sin(\omega t). \end{aligned}$$

- b) Una rotazione completa della molla si svolge nel periodo $T = 2\pi/\omega$. Affinché l'estremo libero torni al punto di partenza dopo questo tempo, occorre che sia soddisfatta la condizione $r(T) = r(0)$, ossia

$$l + A \sin\left(\Omega \frac{2\pi}{\omega}\right) = l$$

da cui

$$A \sin\left(\Omega \frac{2\pi}{\omega}\right) = 0$$

ed essendo $A \neq 0$

$$\sin\left(\Omega \frac{2\pi}{\omega}\right) = 0$$

che è soddisfatta se l'argomento della funzione seno è un multiplo intero di π , per cui la condizione diventa

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{n}{2}$$

con n intero qualsiasi.

- c) Per determinare l'accelerazione si può fare uso dell'espressione 1.14:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta \\ &= \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

dove $r(t)$ e $\theta(t)$ sono date dalle equazioni del moto determinate nel punto (a) e, di conseguenza,

$$\frac{dr}{dt} = A\Omega \cos(\Omega t) \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -A\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.$$

Sostituendo nell'espressione per l'accelerazione si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\{A\Omega^2 \sin(\Omega t) + \omega^2 [l + A \sin(\Omega t)]\} \mathbf{u}_r + [2A\omega\Omega \cos(\Omega t)] \mathbf{u}_\theta = \\ &= -[\omega^2 l + A(\Omega^2 + \omega^2) \sin(\Omega t)] \mathbf{u}_r + 2A\omega\Omega \cos(\Omega t) \mathbf{u}_\theta \end{aligned} \quad (1.44)$$

Il modulo dell'accelerazione risulta quindi essere $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$ ossia

$$a = \sqrt{[\omega^2 l + A \sin(\Omega t)(\Omega^2 + \omega^2)]^2 + [2A\omega\Omega \cos(\Omega t)]^2}.$$

Problema 1.10

SVOLGIMENTO

► Introduciamo un sistema di riferimento S solidale alla riva, avente origine in O , asse x parallelo alla direzione della corrente e verso concorde con essa, asse y ortogonale alla corrente e verso orientato dalla sponda dove giace O a quella dove giace P . In questo sistema di riferimento le coordinate dei punti di partenza e approdo sono rispettivamente $O(0,0)$ e $P(d,l)$, come si vede in Figura 1.12. Inoltre la componente x della velocità della barca coincide con la velocità della corrente, da cui essa è trascinata, mentre la componente y è costante e pari a v_b , in quanto lungo la direzione y la velocità della corrente ha componente nulla. Possiamo quindi scrivere le seguenti espressioni per le componenti x e y della velocità della barca:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_a[y(t)] = A[l y(t) - y(t)^2] \\ v_y(t) &= v_b \end{aligned}$$

dove $y(t)$ rappresenta la posizione della barca lungo l'asse y in funzione del tempo. Questa può essere facilmente determinata, in quanto dipende soltanto dalla componente y della velocità della barca, che è costante:

$$y(t) = v_b t.$$

Pertanto la componente x della velocità della barca diventa

$$v_x(t) = A[l v_b t - v_b^2 t^2]$$

e la coordinata x della barca in ogni istante può essere trovata integrando questa espressione tra l'istante iniziale $t = 0$ e l'istante generico t :

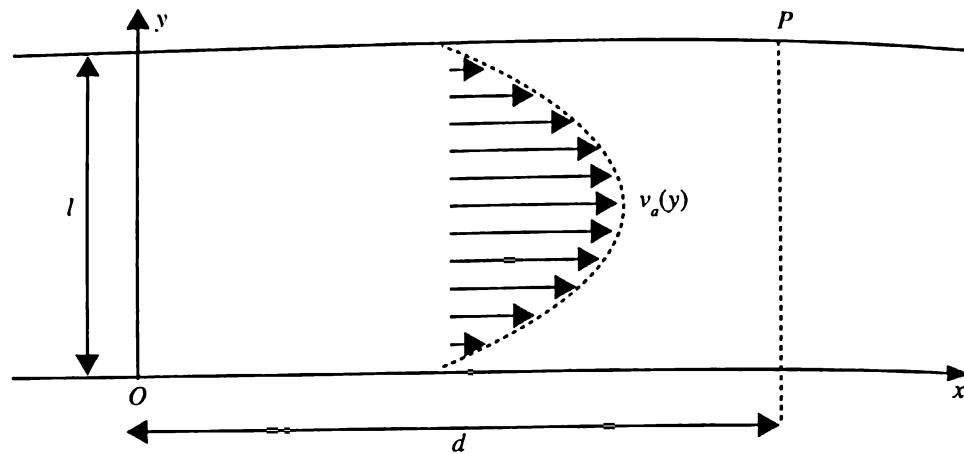
$$x(t) = x(0) + \int_0^t A[l v_b t' - v_b^2 t'^2] dt'.$$

Poiché la barca parte da O , $x(0) = 0$ per cui si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{2} A l v_b t^2 - \frac{1}{3} A v_b^2 t^3.$$

La legge del moto completa è data pertanto dalle due espressioni

$$\begin{aligned} x(t) &= A v_b t^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{v_b}{3} t \right) \\ y(t) &= v_b t \end{aligned}$$

**Figura 1.12**

da cui, ricavando dalla seconda espressione t in funzione di y e sostituendolo nella prima, otteniamo l'equazione della traiettoria della barca

$$x(y) = \frac{A}{v_b} y^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{y}{3} \right).$$

Per rispondere al quesito del problema, non ci resta che imporre la condizione che la barca si trovi in $x = d$ quando $y = l$, ossia che $x(l) = d$:

$$d = x(l) = \frac{A}{v_b} l^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right) = \frac{1}{6} \frac{A}{v_b} l^3$$

da cui si ricava la soluzione

$$v_b = \frac{Al^3}{6d}.$$

Problema 1.11 SVOLGIMENTO

► Dato che l'accelerazione dipende dalla posizione, è possibile usare la relazione 1.7:

$$\int_{x_0}^x a(x') dx' = \frac{1}{2} v^2(x) - \frac{1}{2} v^2(x_0) \quad (1.45)$$

che, in generale, permette di calcolare la velocità del punto materiale per ogni valore della coordinata x . In questo caso, considerando che il moto nel semiasse negativo è rettilineo uniforme e che quindi il punto materiale arriva nell'origine con velocità v_0 , si ha

$$v^2(x) = v_0^2 + 2 \int_0^x (-\alpha x' + \beta) dx' = -\alpha x^2 + 2\beta x + v_0^2. \quad (1.46)$$

Si noti che questa espressione deve essere positiva e ciò definisce automaticamente l'intervallo dell'asse x in cui il moto è permesso. La posizione in cui il punto materiale si ferma si ottiene imponendo la condizione che in essa sia $v = 0$ e quindi risolvendo l'equazione algebrica di secondo grado

$$-\alpha x^2 + 2\beta x + v_0^2 = 0; \quad (1.47)$$

delle due soluzioni, solo una cade nel semiasse positivo delle coordinate ed è dunque accettabile:

$$x_{\text{arresto}} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha v_0^2}}{\alpha}. \quad (1.48)$$

Problema 1.12

SVOLGIMENTO

► Il moto di caduta del corpo avviene in un piano e quindi può essere studiato in un sistema bidimensionale di coordinate. In particolare conviene scegliere due assi cartesiani, di cui uno, x , orizzontale nel verso del vento, e l'altro, y , verticale, orientato verso l'alto, passante per la posizione iniziale del corpo e avente lo zero (origine) a terra.

Il moto del corpo è uniformemente accelerato, con accelerazione

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x - g \mathbf{u}_y \quad (1.49)$$

dove $a_x = 1.2 \text{ m s}^{-2}$ è l'intensità dell'accelerazione prodotta dal vento e $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ quella di gravità. Supponendo che il corpo venga lasciato cadere all'istante $t = 0$, la legge vettoriale del moto è

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 \quad (1.50)$$

dove la posizione iniziale è $\mathbf{r}(0) = h \mathbf{u}_y$, con $h = 39 \text{ m}$. La 1.50 è l'equazione parametrica di una semiretta che parte dal punto $\mathbf{r}(0)$ ed è diretta lungo il vettore \mathbf{a} ; come traiettoria, essa ha significato fisico solo fino al punto di impatto con il terreno. Per determinarne l'equazione cartesiana nel piano (x, y) , si deve scomporre il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ nelle sue componenti lungo gli assi. Formalmente, questo equivale a moltiplicare scalamente $\mathbf{r}(t)$ per i versori degli assi, cioè:

$$x(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}_x = \frac{1}{2} a_x t^2, \quad (1.51)$$

$$y(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}_y = h - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.52)$$

Ricavando il parametro (tempo) t dall'Equazione 1.51 e sostituendolo nella 1.52, si ottiene

$$y = h - \frac{g}{a_x} x \quad (1.53)$$

che è proprio l'equazione di una retta con coefficiente angolare pari a $-\frac{g}{a_x} = -8.2$ e passante per il punto $(0, h) = (0, 39) \text{ m}$. Il tempo t_{volo} che il corpo impiega ad arrivare a terra è definito dalla condizione $y(t_{\text{volo}}) = 0$, da cui, attraverso la 1.52, si ricava facilmente

$$t_{\text{volo}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2.8 \text{ s}. \quad (1.54)$$

Si noti che la durata del volo non dipende dall'accelerazione dovuta al vento ed è quindi uguale a quella che si avrebbe per un oggetto in caduta libera. Per quanto riguarda la velocità, a un generico istante si ha $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a} t$. All'istante di arrivo, quindi, risulta

$$\mathbf{v}(t_{\text{volo}}) = \mathbf{a} t_{\text{volo}} = a_x \sqrt{\frac{2h}{g}} \mathbf{u}_x - \sqrt{2gh} \mathbf{u}_y = (3.38 \mathbf{u}_x - 27.65 \mathbf{u}_y) \text{ m s}^{-1}, \quad (1.55)$$

da cui

$$v(t_{\text{volo}}) = |\mathbf{v}(t_{\text{volo}})| = \sqrt{2gh \left[1 + \left(\frac{a_x}{g} \right)^2 \right]} = 27.8 \text{ m s}^{-1}, \quad (1.56)$$

che è la velocità che si avrebbe per un corpo in caduta libera, $\sqrt{2gh}$, aumentata di un fattore che dipende dall'accelerazione causata dal vento.

Problema 1.13

Svolgimento

► Le lancette delle ore e dei minuti si muovono uniformemente: questo vuol dire che le loro estremità descrivono un moto circolare uniforme, ossia un moto circolare con velocità di modulo costante.

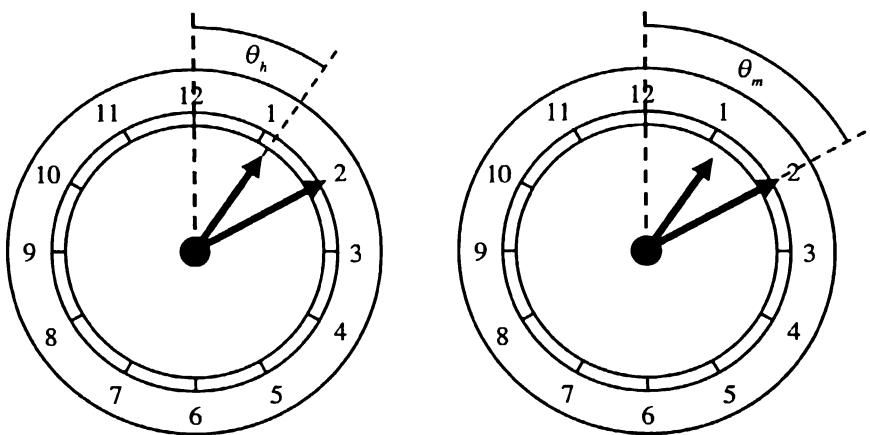


Figura 1.13 Gli angoli descritti dalle lancette delle ore e dei minuti a partire dalla posizione occupata a mezzogiorno sono, rispettivamente, θ_h e θ_m .

Indicando con $\theta(t)$ l'angolo al centro (misurato in radianti, a partire dalla posizione che individua mezzogiorno) e introducendo la velocità angolare $\omega = d\theta/dt$ (costante per entrambe le lancette), la posizione angolare di ogni lancetta assume l'espressione $\theta(t) = \omega t$; se $T = 2\pi/\omega$ indica il periodo del moto circolare uniforme, cioè il tempo impiegato a percorrere l'intera circonferenza, si può scrivere $\theta(t) = \frac{2\pi}{T}t$.

In particolare, indicando con $T_h = 12$ ore il periodo della lancetta delle ore, e con $T_m = 1$ ora il periodo della lancetta dei minuti, l'angolo descritto a partire dalla posizione iniziale, quando si trovano sovrapposte a mezzogiorno, risulta (Figura 1.13)

$$\theta_h(t) = \frac{2\pi}{T_h}t, \quad \theta_m(t) = \frac{2\pi}{T_m}t. \quad (1.57)$$

Di conseguenza, gli angoli differiscono di un angolo pari a π nell'istante t^* per cui

$$\theta_m(t^*) - \theta_h(t^*) = \pi. \quad (1.58)$$

Si ottiene, tenendo presente l'Equazione 1.57,

$$t^* = \frac{1}{2} \frac{T_m T_h}{T_h - T_m} = \frac{6}{11} \text{ ore} \quad (1.59)$$

ovvero $\frac{6}{11} \times 60 \text{ min} \simeq 33 \text{ min}$.

Problema 1.14**SVOLGIMENTO**

► Si tratta di un moto unidimensionale, per cui sceglieremo un sistema di riferimento e un asse cartesiano avente origine nella posizione occupata dall'auto quando inizia la frenata, e orientato nel verso del moto. Sia $x(t)$ la posizione dell'auto, $v_x = \frac{dx}{dt}$ la sua velocità¹² e $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ la sua accelerazione. Durante la frenata, l'accelerazione è variabile, secondo la legge $a_x(t) = \alpha t$. Per determinare la funzione $v_x(t)$, facciamo uso dell'Equazione 1.12 applicata al moto unidimensionale:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t') dt'$$

da cui si ottiene:

$$v_x(t) = v_0 + \alpha \frac{t^2}{2}. \quad (1.60)$$

Analogamente, per determinare la funzione $x(t)$ facciamo uso dell'Equazione 1.10 applicata al moto unidimensionale:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t') dt'$$

da cui si ottiene, essendo $x(t_0) = 0$:

$$x(t) = v_0 t + \alpha \frac{t^3}{6}. \quad (1.61)$$

Per determinare lo spazio di frenata, calcoliamo prima il tempo di frenata t_f imponendo $v_x(t_f) = 0$ nell'Equazione 1.60:

$$t_f = \sqrt{-\frac{2v_0}{\alpha}}. \quad (1.62)$$

Notiamo che la radice è ben definita, perché $\alpha < 0$. Lo spazio di frenata corrispondente si ottiene andando a sostituire il valore ottenuto nella legge oraria 1.61:

$$x(t_f) = v_0 \sqrt{-\frac{2v_0}{\alpha}} + \frac{1}{6} \alpha \left(\sqrt{-\frac{2v_0}{\alpha}} \right)^3 = \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{2v_0^3}{\alpha}}, \quad (1.63)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\alpha < 0$ per cui $\alpha = -\sqrt{\alpha^2}$. Imponendo quindi $x(t_f) = l$, si ottiene

$$\alpha = -\frac{8}{9} \frac{v_0^3}{l^2}, \quad (1.64)$$

e andando a sostituire nella 1.62

$$t_f = \frac{3}{2} \frac{l}{v_0}. \quad (1.65)$$

Per ottenere l'accelerazione media (o meglio la sua componente x) scriviamo

$$a_{x,m} = \frac{v_{x,f} - v_{x,0}}{t_f - t_0} = \frac{-v_0}{t_f} = -\frac{2}{3} \frac{v_0^2}{l}. \quad (1.66)$$

¹² Trattandosi di un problema unidimensionale si potrebbe trascurare il pedice x , ma qui lo si mantiene per rendere evidente il fatto che la quantità dx/dt può essere anche negativa e quindi essa *non* è il modulo della velocità. La stessa cosa vale per l'accelerazione definita più avanti.

Problema 1.15**SVOLGIMENTO**

► La situazione iniziale è rappresentata in Figura 1.7; il pallone parte con velocità orizzontale di modulo v_0 nel punto di coordinate $(0, h)$.

- a) Per ricavare la legge oraria, partiamo dall'accelerazione e procediamo per integrazione. Data l'espressione del vettore accelerazione, si può scrivere

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (1.67)$$

Le soluzioni delle equazioni differenziali 1.67, con le condizioni iniziali $x(t=0) = 0$, $v_x(t=0) = v_0$, $y(t=0) = h$, $v_y(t=0) = 0$, sono

$$x(t) = v_0 t, \quad (1.68)$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1.69)$$

e le corrispondenti equazioni per le componenti del vettore velocità $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ risultano

$$v_x(t) = v_0, \quad (1.70)$$

$$v_y(t) = -gt. \quad (1.71)$$

Le due Equazioni 1.68 e 1.69 rappresentano la legge del moto.

- b) Ricavando t dalla 1.68 e sostituendo nella 1.69 si ottiene l'equazione della traiettoria

$$y(x) = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}, \quad (1.72)$$

che rappresenta una parabola il cui vertice coincide con la posizione iniziale $(0, h)$. Osserviamo che possiamo ricavare il tempo di caduta t^* imponendo $y(t^*) = 0$ nell'Equazione 1.69:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1.73)$$

Ricavando t questa volta dalla 1.69 e andando a sostituire nella 1.71 si ottiene

$$v_y(t) = -\sqrt{2g(h-y)}, \quad (1.74)$$

nella quale la componente y del vettore velocità è convenientemente espressa in funzione della stessa coordinata y . Notiamo, in particolare, che per $y = h$ (che corrisponde alla posizione iniziale) $v_y = 0$. Nell'istante in cui il pallone tocca terra si ha $y = 0$ e la velocità risulta essere $v(t^*) = +v_0 u_x - V \sqrt{2gh} u_y$: il suo modulo è pertanto $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

- c) A partire dal vettore $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{u}_x - \sqrt{2g(h-y)} \mathbf{u}_y$, che rappresenta la velocità a una generica quota y , possiamo calcolare il versore tangente $\mathbf{u}_\tau = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, espresso nella base cartesiana $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y\}$:

$$\mathbf{u}_\tau = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}} \mathbf{u}_x + \frac{-\sqrt{2g(h-y)}}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}} \mathbf{u}_y. \quad (1.75)$$

Dalla Figura 1.14, tenendo presente che $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_\tau = 0$, ossia che i due vettori normale e tangente sono ortogonali fra loro, si ricava che

$$\mathbf{u}_n = \frac{-\sqrt{2g(h-y)}}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}} \mathbf{u}_x + \frac{-v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}} \mathbf{u}_y. \quad (1.76)$$

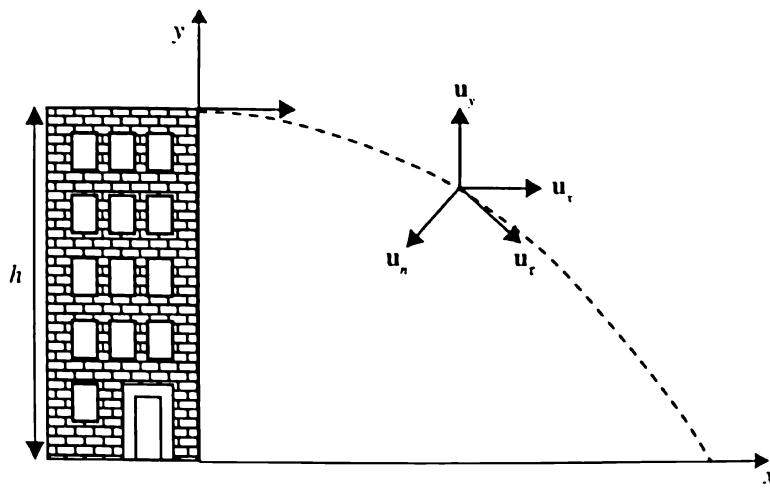


Figura 1.14 Versori \mathbf{u}_τ , \mathbf{u}_n , e \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y .

Allora le componenti del vettore accelerazione $\mathbf{a} = (0, -g)$ lungo le direzioni individuate da \mathbf{u}_τ e \mathbf{u}_n sono, rispettivamente, $a_\tau = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_\tau$ e $a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n$, ossia

$$a_\tau = g \frac{\sqrt{2g(h-y)}}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}}, \quad (1.77)$$

$$a_n = g \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}}, \quad (1.78)$$

- c) Per ricavare le componenti del vettore velocità nel punto di impatto al suolo, basta sostituire il tempo di caduta t^* dato dall'Equazione 1.73 nelle Equazioni 1.70 e 1.71, ottenendo

$$\begin{aligned} v_x(t^*) &= v_0 \\ v_y(t^*) &= -\sqrt{2gh}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Problema 1.16

SVOLGIMENTO

- L'automobile 1 si muove lungo la pista descrivendo un moto circolare uniforme, mentre l'automobile 2 descrive un moto circolare con accelerazione tangenziale costante. Usiamo un'ascissa

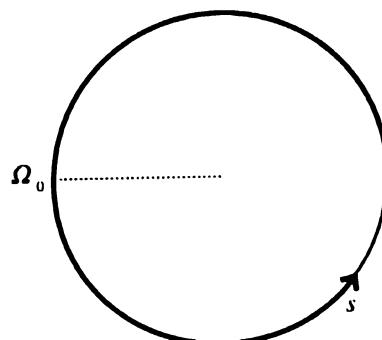


Figura 1.15

curvilinea con origine nel punto Ω_0 in cui si trova l'automobile 2 nell'istante iniziale (Figura 1.15). La velocità scalare dell'automobile 1 sarà $v_{s,1} = v_1$ (costante nel tempo). Di conseguenza, la posizione dell'automobile 1 in un generico istante t è individuata da

$$s_1(t) = \pi R + v_1 t \quad (1.80)$$

L'automobile 2 è soggetta a un'accelerazione tangenziale costante a_τ . La sua velocità scalare $v_{s,2}$ in un generico istante t si ottiene partendo dalla relazione

$$a_\tau = \frac{dv_{s,2}}{dt}$$

e integrando:

$$v_{s,2}(t) = v_{2,0} + \int_0^t a_\tau dt' = v_{2,0} + a_\tau t.$$

La legge oraria dell'automobile 2 si ottiene ricordando che $v_{s,2}(t) = ds_2/dt$ e integrando tra l'istante iniziale e un istante generico t :

$$s_2(t) = v_{2,0}t + \frac{1}{2}a_\tau t^2. \quad (1.81)$$

Quando l'auto 1 arriva al traguardo, la sua coordinata curvilinea è uguale a $\frac{3}{2}\pi R$. Detto t^* il tempo che l'automobile 1 impiega a raggiungere il traguardo, dalla 1.80 si ha

$$s_1(t^*) = \frac{3}{2}\pi R$$

da cui si ottiene

$$t^* = \frac{\pi}{2} \frac{R}{v_1}.$$

La condizione da imporre se si vuole che l'automobile 1 venga raggiunta dall'automobile 2 è

$$s_2(t^*) \geq s_1(t^*) \quad (1.82)$$

ossia

$$v_{2,0}t^* + \frac{1}{2}a_\tau(t^*)^2 \geq \frac{3}{2}\pi R. \quad (1.83)$$

Inserendo il valore trovato per t^* questa diventa

$$v_{2,0} \frac{\pi}{2} \frac{R}{v_1} + \frac{1}{2}a_\tau \left(\frac{\pi}{2} \frac{R}{v_1} \right)^2 \geq \frac{3}{2}\pi R. \quad (1.84)$$

Da qui si ottiene che l'accelerazione deve soddisfare la condizione

$$a_\tau \geq \frac{12v_1^2 - 4v_1 v_{2,0}}{\pi R} \quad (1.85)$$

Andando a sostituire i valori numerici, si ottiene $a_\tau = 11.46 \text{ m/s}^2$.

Problema 1.17  **SVOLGIMENTO**

► Osserviamo innanzitutto che si tratta di un moto armonico, con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 10 \text{ s.}$$

La componente della velocità nella direzione del moto è data dalla derivata della legge oraria, ossia $v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$.

- a) Per determinare le costanti A e φ imponiamo le condizioni iniziali ovvero $x(t = 0) = x_0$ e $v_x(t = 0) = 0$. Otteniamo quindi il seguente sistema di due equazioni

$$x_0 = A \cos \varphi + \ell \quad (1.86)$$

$$0 = -\omega A \sin \varphi. \quad (1.87)$$

Dalla 1.87 deduciamo che $\varphi = 0$ ($A = 0$ non è fisicamente accettabile, perché corrisponderebbe al caso in cui il punto materiale resta fermo). Andando a sostituire nella 1.86 otteniamo $A = x_0 - \ell = 0.5 \text{ m}$.

- b) Poiché $\varphi = 0$, la componente x della velocità è data da $v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t)$. Quindi anch'essa ha un andamento periodico; il suo valore assoluto è massimo per la prima volta quando $\omega t = \pi/2$, ossia quando

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4} = 2.5 \text{ s.}$$

Il massimo del valore assoluto è dato da $|v_x|_{\max} = \omega A = 0.314 \text{ m/s}$.

- c) La componente x dell'accelerazione è data dalla derivata di $v_x(t)$ rispetto al tempo, ossia da $a_x(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t)$. Osserviamo che il massimo del suo valore assoluto $|a_x|_{\max} = \omega^2 A = 0.197 \text{ m/s}^2$ è raggiunto per la prima volta a $t = 0$.



Richiami di teoria

Le leggi di Newton

La I Legge di Newton definisce un *sistema di riferimento inerziale (SRI)* come quel sistema di riferimento rispetto al quale un corpo puntiforme, sottoposto a N forze di *risultante* $\mathbf{R} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j$ nulla o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. Definito tale sistema, tutti quelli in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso sono parimenti inerziali per l'invarianza delle accelerazioni già menzionata nel Capitolo 1. In un SRI valgono le leggi seguenti

- II Legge di Newton: la risultante delle forze applicate al corpo puntiforme è proporzionale alla sua accelerazione \mathbf{a} ; la costante di proporzionalità, m , è detta *massa inerziale*¹:

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a} \quad (2.1)$$

- III Legge di Newton: dati due corpi puntiformi A e B, se A esercita su B una forza \mathbf{F}_{AB} , allora B esercita su A una forza $\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}$ e le due forze hanno la stessa retta d'azione.

La relazione tra forza e accelerazione permette di definire l'unità di misura dell'intensità delle forze, che nel Sistema Internazionale è il newton: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$.

La II legge può anche essere scritta

$$\mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.2)$$

La grandezza $\mathbf{p} = mv$ si chiama quantità di moto. Dall'Equazione 2.2 segue che, per qualunque coppia di istanti t_1 e t_2 , vale il seguente *teorema dell'impulso*

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R} dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta \mathbf{p} \quad (2.3)$$

che deve il nome al fatto che la quantità al primo membro, spesso indicata con \mathbf{J} , si chiama *impulso* della forza risultante \mathbf{R} .

¹ Per semplicità d'ora in poi verrà chiamata semplicemente *massa*; rimandiamo a quanto riportato nei libri di testo per la distinzione fra i concetti di massa *inerziale* e massa *gravitazionale*.

Sistemi di riferimento non inerziali

Un sistema di riferimento S' in moto *non* rettilineo uniforme rispetto a un SRI si dice non inerziale (SRNI). In esso $\sum_j \mathbf{F}_j \neq m\mathbf{a}'$. Infatti, mentre le forze sono *le stesse* in qualunque sistema di riferimento, l'accelerazione non lo è. Con riferimento a quanto richiamato nel Capitolo 1 relativamente alla trasformazione delle accelerazioni nel caso generale in cui sia presente un'accelerazione di trascinamento \mathbf{a}_T e un'accelerazione di Coriolis \mathbf{a}_{Co} , si sa che $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T - \mathbf{a}_{Co}$. In questi casi, per trovare una relazione tra le forze e l'accelerazione \mathbf{a}' misurata da S' si può scegliere una delle seguenti alternative, perfettamente equivalenti tra loro:

- partire dalla II Legge di Newton per il SRI, $\sum_j \mathbf{F}_j = m\mathbf{a}$ e usare la trasformazione per le accelerazioni, ottenendo

$$\sum_j \mathbf{F}_j = m\mathbf{a}' + m\mathbf{a}_T + m\mathbf{a}_{Co}; \quad (2.4)$$

- descrivere il moto nel SRNI usando una notazione simile a quella della II Legge, a patto di inserire a primo membro oltre alle forze vere \mathbf{F}_j anche le forze *fittizie*² $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}_T$ e $\mathbf{F}_{Co} = -m\mathbf{a}_{Co}$, scrivendo cioè:

$$\sum_j \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_{Co} = m\mathbf{a}'. \quad (2.5)$$

Tipi di forze

Dal punto di vista fisico fondamentale tutte le forze presenti nei problemi di meccanica derivano in ultima analisi da interazioni di tipo elettrodebole e gravitazionale. Per convenienza però è d'uso suddividere le forze in diverse classi fenomenologiche.

- **Forze (o reazioni) vincolari.** Sono dovute a vincoli (piani, rotaie, funi, ecc.) che limitano i gradi di libertà spaziali di un corpo. Le forze vincolari non hanno valore definito a priori, ma devono essere determinate analizzando le condizioni fisiche del sistema.

Per esempio, corpi appoggiati o in moto su una superficie sono sempre sottoposti a una *forza normale* \mathbf{N} perpendicolare alla superficie stessa. Per una superficie *liscia* la forza normale è l'unica reazione vincolare. Una superficie *scabra*, invece, oltre alla forza normale \mathbf{N} , può applicare sul corpo anche una forza parallela alla superficie stessa, detta forza di attrito radente. In particolare:

- 1) la forza di *attrito radente statico* \mathbf{f}_s è la forza che la superficie è in grado di applicare su un corpo appoggiato su di essa per mantenerlo in quiete. \mathbf{f}_s è quindi determinata dalla condizione di equilibrio per il corpo, $\sum_j \mathbf{F}_j = \mathbf{0}$, ma il suo modulo f_s ha un valore *massimo* che dipende dal modulo di \mathbf{N} attraverso la relazione $f_s^{\max} = \mu_s N$ dove μ_s è il coefficiente di attrito statico (adimensionale);
- 2) la forza di *attrito radente dinamico* o cinematico \mathbf{f}_d è la forza che una superficie scabra esercita su un corpo che scivola su di essa. Il suo modulo è legato al modulo di \mathbf{N} dalla relazione³ $f_d = \mu_d N$ e il suo verso è opposto a quello del moto.

² Tali forze vengono anche dette *forze apparenti* (pur avendo effetti reali) o *pseudoforze* (in quanto hanno un'origine puramente cinematica e pertanto, non descrivendo una vera interazione, non obbediscono alla III legge) in quanto hanno un'origine puramente cinematica e, pertanto, non descrivendo una vera interazione, non obbediscono alla III legge.

³ Si ricordi che questo modello per gli attriti radenti, ancorché efficace per molti casi di interesse, non è esaustivo: per trattazioni più adeguate alla complessità del fenomeno si rimanda a testi specialistici.

- Forza di attrito viscoso. È la forza \mathbf{f}_v esercitata da un fluido su un corpo in moto al suo interno. Essa è sempre opposta alla velocità relativa del corpo rispetto al fluido, e dipende dal suo modulo v . Per un corpo in moto lento rispetto al fluido si può ben approssimare con $\mathbf{f}_v = -b\mathbf{v}$ con b costante.
- Tensione delle funi. La tensione di una fune, T , è la forza che ogni tratto della fune esercita sul tratto adiacente. Tale forza è quindi in ogni punto parallela alla fune stessa. Se la fune è *ideale*, ossia omogenea, non estensibile e di massa trascurabile, la tensione è uniforme su tutta la sua lunghezza ed è uguale, in modulo, alla forza che la fune esercita a *ognuna* delle sue estremità.
- La forza elastica \mathbf{F}_{el} è la forza che una molla ideale, deformata di un tratto $\Delta\ell$ rispetto alla sua lunghezza a riposo, esercita a ognuna delle sue estremità. Si osserva che il modulo della forza elastica è $F_{el} = k |\Delta\ell|$ (legge di Hooke) dove k è la costante elastica della molla. Direzione e verso di \mathbf{F}_{el} sono determinati dal fatto che essa tende sempre a ripristinare la lunghezza a riposo della molla (ossia è una forza di richiamo).
- In genere con *forza peso* si intende la forza con cui la Terra attira un corpo in prossimità della sua superficie. Essa può essere espressa come $\mathbf{W} = mg$ dove g è l'accelerazione di gravità, acquistata da un corpo lasciato libero di cadere (se si trascura la resistenza dell'aria).

Lavoro ed energia cinetica

Il lavoro elementare di una forza \mathbf{F} applicata a un punto materiale che compie uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ è uguale a $\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Pertanto per uno spostamento finito lungo il percorso γ da un punto A dello spazio, individuato dal vettore \mathbf{r}_A , a un punto B, individuato dal vettore \mathbf{r}_B , si ha che

$$L_{AB}^{\gamma} = \int_{A\gamma}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Nel Sistema Internazionale il lavoro di una forza si misura in joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$).

Nel caso particolare in cui la forza è costante (vettorialmente) e la traiettoria del corpo è rettilinea, l'Equazione 2.6 si semplifica in $L_{AB}^{\gamma} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F\Delta r \cos\theta$, essendo θ l'angolo tra la forza \mathbf{F} e lo spostamento $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$.

Se la forza di cui si calcola il lavoro è la risultante di tutte le forze applicate al corpo, vale il *teorema dell'energia cinetica*, ossia

$$L_{AB}^{\gamma} = \int_{A\gamma}^B m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B m\mathbf{a}_T ds = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A, \quad (2.7)$$

dove la quantità $K = \frac{1}{2}mv^2$ si chiama *energia cinetica* del corpo.

In genere il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} dipende dal percorso γ . Per alcuni tipi di forze, però, il lavoro *non* dipende dal percorso, ma solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo, ossia, per qualunque coppia di percorsi γ e γ' che collegano i punti A e B si ha

$$L_{AB}^{\gamma} = \int_{A\gamma}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A\gamma'}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = L_{AB}^{\gamma'}; \quad (2.8)$$

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.9)$$

Forze di questo tipo sono dette *conservative*. Il motivo di questa denominazione verrà chiarito nel Capitolo 3.

Se la forza compie il lavoro L in un intervallo di tempo Δt , si definisce *potenza media* rapporto $P_m = \frac{L}{\Delta t}$ e *potenza istantanea* la quantità

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L}{\Delta t} = \frac{\delta L}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.10)$$

a potenza, nel Sistema Internazionale, si misura in watt ($1 \text{ W} = 1 \text{ J}/\text{s}$).

TEST DI COMPRENSIONE

1. Una bambina è seduta su una giostra che ruota con velocità angolare costante rispetto a un SRI. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - A Nel sistema di riferimento della giostra, la bambina è soggetta a una forza risultante centrifuga;
 - B Nel SRI la bambina è soggetta a una forza risultante centrifuga;
 - C Nel sistema di riferimento della giostra, la bambina è soggetta a una forza risultante nulla;
 - D Nel SRI la bambina è soggetta a una forza risultante nulla.
2. Un uomo spinge un mobile con forza crescente, fino a che raggiunge la forza necessaria perché il mobile inizi a scivolare sul pavimento. Prima che il mobile inizi a muoversi, la forza di attrito statico tra pavimento e mobile:
 - A è nulla;
 - B è diretta in direzione ortogonale al piano del pavimento;
 - C cresce in intensità man mano che cresce la forza esercitata dall'uomo sul mobile;
 - D è proporzionale alla massa del mobile.
3. Un corpo puntiforme, in moto con velocità \mathbf{v} , è soggetto a una forza $\mathbf{F} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{v}$, dove \mathbf{b} è un vettore costante. In tali condizioni il lavoro della forza \mathbf{F} è:
 - A nullo solo se il corpo si muove in linea retta;
 - B sempre diverso da zero;
 - C nullo solo se il corpo si muove di moto circolare;
 - D sempre nullo.
4. La forza esercitata da una superficie su un corpo in moto su di essa è:
 - A sempre perpendicolare alla superficie;
 - B sempre parallela alla superficie;
 - C perpendicolare alla superficie solo se questa è liscia;
 - D nulla.

5. Una sferetta di ferro urta contro una pallina di polistirolo. Durante la collisione

- la forza che la sferetta di ferro esercita sulla pallina di polistirolo ha modulo maggiore di quella che la pallina di polistirolo esercita sulla sferetta di ferro;
- la forza che la sferetta di ferro esercita sulla pallina di polistirolo ha modulo minore di quella che la pallina di polistirolo esercita sulla sferetta di ferro;
- la forza che la sferetta di ferro esercita sulla pallina di polistirolo ha modulo uguale a quella che la pallina di polistirolo esercita sulla sferetta di ferro;
- le forze in gioco dipendono dal prodotto delle masse dei due oggetti.

Problemi

Problema 2.1

Un blocco di massa $m = 5 \text{ kg}$ è a riposo su un piano orizzontale ed è tirato orizzontalmente da una forza la cui intensità F aumenta linearmente nel tempo. Si trova che il blocco comincia a muoversi quando l'intensità della forza è pari a $F^* = 20 \text{ N}$ e che, se a questo punto si mantiene la forza costante, esso acquista un'accelerazione di 3 m/s^2 .

- Determinare i coefficienti di attrito statico e dinamico tra il blocco e il piano.
- Determinare l'angolo tra la verticale e la forza totale applicata dal piano al blocco, sia quando il corpo è fermo, sia quando si muove.

Problema 2.2

Un camion sta salendo, con accelerazione costante a , lungo una strada rettilinea inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale.

Al suo interno è appeso un pendolo semplice formato da una massa m attaccata a un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L . Si osserva che il pendolo è in equilibrio quando il filo forma un angolo θ' con la direzione della normale alla strada (linea tratteggiata in Figura 2.1). Si trovi l'angolo θ' in funzione delle grandezze note.

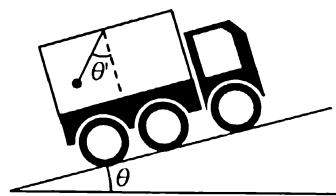


Figura 2.1

Problema 2.3

Un corpo puntiforme di massa $m = 1 \text{ kg}$, inizialmente fermo su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale, viene lanciato verso l'alto lungo il piano da un colpo di martello, che esercita su di esso un impulso $J = 2 \text{ Ns}$. Si assuma che il contatto tra martello e corpo sia brevissimo e che lo spostamento del corpo in tale intervallo di tempo sia trascurabile. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra il corpo e la superficie del piano sono rispettivamente $\mu_s = 0.6$ e $\mu_d = 0.2$.

- Calcolare la lunghezza s del tratto che il corpo percorre sul piano inclinato prima di fermarsi.
- Determinare se, dopo aver raggiunto la massima quota, il corpo ricade verso il basso oppure rimane fermo.

Problema 2.4

Un punto materiale di massa $m = 1 \text{ g}$ si muove in un SRI in direzione parallela all'asse x e nel verso delle x crescenti, essendo soggetto a una forza frenante che dipende dalla velocità secondo la legge

$\mathbf{F}(v) = -k v^2 \mathbf{u}_x$ dove $k = 2 \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2}$. Sapendo che esso passa per l'origine con velocità di modulo $v_0 = 100 \text{ m s}^{-1}$ all'istante $t_0 = m/(k v_0)$, determinare:

- le espressioni della velocità e della posizione del corpo in funzione del tempo;
- a che distanza dall'origine il modulo della velocità si è ridotto allo 0.1% del valore v_0 .

Problema 2.5

Un'automobile, assimilabile a un corpo puntiforme, ha massa $m = 3000 \text{ kg}$. Il suo motore è in grado di erogare una potenza massima $P_{\max} = 60 \text{ kW}$. Mentre viaggia, l'auto è soggetta a una forza \mathbf{F}_r dovuta alla resistenza dell'aria, che è diretta in verso opposto alla velocità e ha modulo $F_r = k v$, dove $k = 40 \text{ N s m}^{-1}$ e v è il modulo della velocità. Calcolare:

- la massima velocità che l'auto può raggiungere a piena potenza;
- il tempo che l'auto impiegherebbe a percorrere la distanza $d = 100 \text{ km}$ se si muovesse sempre alla massima velocità possibile;
- il lavoro compiuto dal motore per percorrere la distanza d nelle stesse condizioni.

Problema 2.6

Un alpinista di massa $m = 80 \text{ kg}$ vuole assicurarsi a una parete verticale di roccia utilizzando due funi ideali inestensibili di pari lunghezza. Per farlo, lega un capo di ciascuna fune alla sua imbracatura e fissa gli altri due capi a due sostegni allineati orizzontalmente. In questo modo egli resta sospeso al vertice di un triangolo isoscele rovesciato e le due funi formano un angolo θ tra di loro.

- Esprimere la tensione di ciascuna fune in funzione dell'angolo θ .
- Determinare l'angolo θ in modo che tale tensione sia minore di una certa tensione di sicurezza T_{\max} tale che $T_{\max}/g = 80 \text{ kg}$.

Problema 2.7

Il paranco ideale consiste in un sistema di carrucole, fisse e mobili, e funi ideali come quello disegnato in Figura 2.2a.

- Se m è la massa del carico appeso, con quale forza bisogna tirare la corda per tenerlo in equilibrio (o, equivalentemente, per sollevarlo con velocità costante?).
- Quanto vale la suddetta forza se il sistema utilizzato è quello in Figura 2.2b?

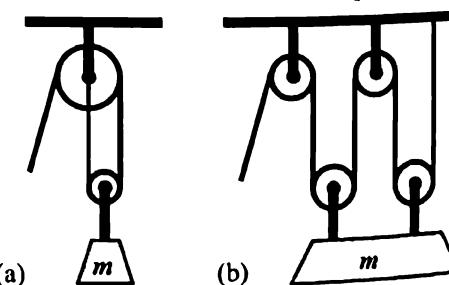


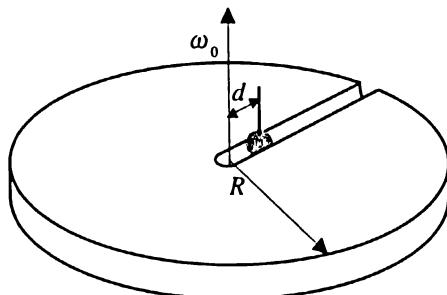
Figura 2.2

Problema 2.8

Due automobilisti decidono di fare una gara sul molo di un porto. Tale gara consiste nel lanciare l'auto a tutta velocità verso il mare e frenare il più tardi possibile senza cadere in acqua. Le auto hanno massa $m_A = 900 \text{ kg}$ e $m_B = 1200 \text{ kg}$, la loro accelerazione massima vale $a_{\max} = 0.2 \text{ g}$ e il coefficiente di attrito dinamico tra pneumatici e terreno è $\mu_d = 0.6$. Le auto partono da ferme a una distanza di 100 m dal bordo del molo, accelerano costantemente per un certo tratto e poi frenano bruscamente bloccando le ruote. Determinare a quale distanza minima dal mare dovranno iniziare la frenata per non cadere in acqua.

Problema 2.9

Una piattaforma a forma di disco di raggio R ruota in senso antiorario attorno al suo asse verticale con velocità angolare costante di modulo ω_0 . Lungo un raggio del disco è praticata una scanalatura in cui una pallina inizialmente trattenuta a distanza d dal centro può scivolare senza attrito. Studiare il moto della pallina sul disco a partire dal momento in cui viene lasciata libera, ricavando in particolare la reazione vincolare risultante a cui essa è soggetta e la velocità con cui esce dal disco.

**Figura 2.3****Problema 2.10**

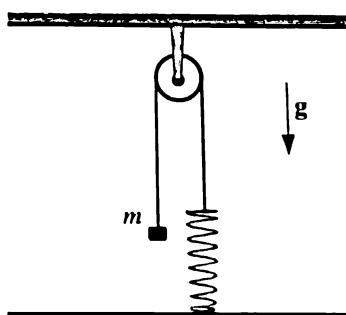
Si consideri un corpo puntiforme di massa M , appoggiato su un piano orizzontale liscio, e collegato a una estremità di una fune inestensibile, di massa m non trascurabile e lunghezza L . All'altro estremo della fune viene applicata una forza f . Sia $\lambda = dm/dl =$ costante la densità di massa lineare della fune⁴.

- Calcolare la forza cui è soggetto il corpo di massa M .
- Calcolare la tensione nella fune.

Problema 2.11

Un corpo di massa m è collegato a una fune ideale, che si avvolge su una puleggia di massa trascurabile; l'altro estremo della fune è fissato a una molla ideale, di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k .

- Calcolare la posizione di equilibrio e, in questa posizione, calcolare la tensione nella fune e la reazione del gancio che regge la puleggia.
- Supponendo di spostare il corpo m verso il basso di un tratto l rispetto alla posizione di equilibrio, e poi di rilasciarlo, studiare il moto del sistema.

**Figura 2.4****Problema 2.12**

Un oggetto (puntiforme) di massa m si muove lungo un asse orizzontale liscio ed è collegato tramite due molle a due punti A e B posti a distanza d l'uno dall'altro. Le due molle hanno medesima lunghezza a riposo l_0 , e costanti elastiche k_A e k_B , rispettivamente.

- Calcolare la posizione di equilibrio.

⁴ Il concetto di densità sarà definito in dettaglio nel Capitolo 4.

L'oggetto viene spostato di un tratto l verso destra rispetto alla posizione di equilibrio e lasciato libero di muoversi, partendo con velocità nulla.

- Studiare il moto dell'oggetto.
- Calcolarne la velocità quando passa per la prima volta per la posizione di equilibrio.

Problema 2.13

Un'automobile di massa $m = 10^3 \text{ kg}$, inizialmente ferma, viene accelerata lungo un tratto di strada rettilineo avente lunghezza $l = 100 \text{ m}$, in modo tale da mantenere la potenza erogata dal motore costante e pari a $P = 50 \text{ kW}$. Supponendo trascurabile la resistenza dell'aria, calcolare la velocità finale v_f raggiunta dall'automobile alla fine del tratto di strada.

Problema 2.14

Un corpo di massa $m = 50 \text{ g}$ viene lanciato lungo un piano liscio, al termine del quale parte una guida semicircolare liscia di raggio $R = 1 \text{ m}$, come mostrato in Figura 2.5. Calcolare:

- il valore minimo v_A^{\min} del modulo della velocità v_A che il corpo deve avere nel punto A , alla fine della guida, per restare sempre in contatto con essa;
- il modulo della reazione normale esercitata dalla guida sul corpo, quando questo si trova nel punto B , caratterizzato da un valore dell'angolo $\theta_B = \frac{3}{4}\pi$, se la sua velocità in quel punto è $v_B = \sqrt{2gR}$.

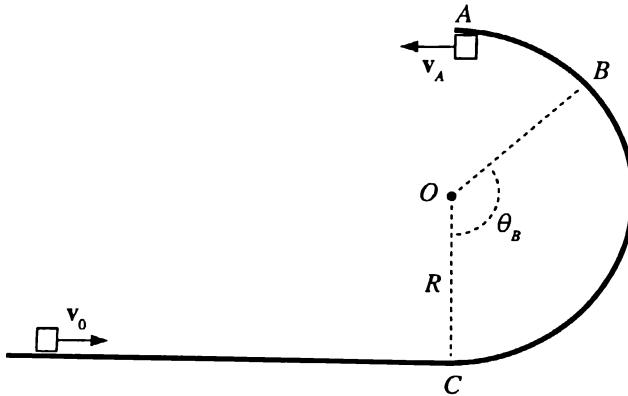


Figura 2.5

Problema 2.15

Una molla di costante elastica k è appoggiata su un piano orizzontale, con un estremo fissato ad un vincolo rigido come in Figura 2.6. Il tratto di piano che precede la molla, quando questa è a riposo, ha lunghezza d ed è caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico μ_d , mentre il tratto di piano che si trova sotto di essa è privo di attrito. Un corpo avente massa m parte dall'estremo del piano opposto alla molla, con una velocità iniziale v_0 parallela al piano e diretta verso la molla.

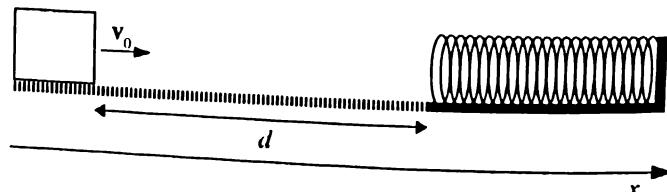


Figura 2.6

- Calcolare il valore minimo v_0^{\min} della velocità iniziale del corpo che consente ad esso di arrivare a contatto con la molla.
- Se la velocità iniziale è pari a $v_0 = \sqrt{2}v_0^{\min}$, il corpo colpisce la molla e la comprime di un tratto Δx . Calcolare il valore di Δx .
- In seguito la molla si distende, spingendo nuovamente il corpo verso la sua posizione iniziale. Calcolare a quale distanza d_1 , dall'estremo della molla distesa, arriva il corpo.

Svolgimenti

Problema 2.1

SVOLGIMENTO

► Per risolvere il problema, è necessario applicare la II legge di Newton, facendo attenzione a quali forze sono presenti nelle diverse situazioni descritte nel testo.

- Finché il blocco è fermo, su di esso agiscono le seguenti forze: la forza \mathbf{F} , la reazione vincolare normale \mathbf{N} , la forza di attrito radente statico \mathbf{f}_s e la forza peso mg . La II legge di Newton si scrive quindi:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{f}_s + mg = 0.$$

Scegliendo un sistema di assi cartesiani con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale, come in Figura 2.7, e scomponendo le forze lungo tali assi, si ottiene il seguente sistema di due equazioni:

$$\begin{aligned} +F - f_s &= 0 \quad (\text{componenti } x) \\ +N - mg &= 0 \quad (\text{componenti } y), \end{aligned}$$

risulta in particolare $f_s = F$. Quando F cresce nel tempo, anche f_s cresce fino a che non diventa uguale alla massima intensità possibile per la forza di attrito statico, $f_s \leq f_s^{\max} = \mu_s N$. Quando il corpo inizia a muoversi si ha $F^* = f_s^{\max} = \mu_s N$ da cui, siccome $N = mg$, si trova:

$$\mu_s = \frac{F^*}{mg} = \frac{20 \text{ N}}{5 \text{ kg} \times 9.81 \text{ ms}^{-2}} = 0.408.$$

Dal momento in cui il blocco comincia a muoversi, su di esso agisce la forza di attrito dinamico: la II Legge diventa quindi

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{f}_d + mg = ma$$

che, scomposta lungo gli assi, dà

$$+F - f_d = ma_x \quad (\text{componenti } x) \quad (2.11)$$

$$+N - mg = 0 \quad (\text{componenti } y). \quad (2.12)$$

Si sa inoltre che $f_d = \mu_d N$ (attenzione, è una relazione tra moduli!) per cui $f_d = \mu_d mg$ che, sostituita nella 2.11 porta a $+F - \mu_d mg = ma_x$ da cui, infine (ricordando che dopo il distacco è sempre $F = F^*$)

$$\mu_d = \frac{F^* - ma_x}{mg} = \frac{20 \text{ N} - 5 \text{ kg} \times 3 \text{ ms}^{-2}}{5 \text{ kg} \times 9.81 \text{ ms}^{-2}} = 0.102.$$

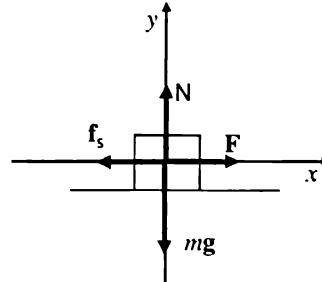


Figura 2.7

- b) Quando il corpo è fermo, la risultante delle forze applicate su di esso dal piano è $\mathbf{R}_s = \mathbf{N} + \mathbf{f}_s$ (si veda la Figura 2.8); essa forma un angolo θ_s con la verticale. È chiaro che $R_s \sin \theta_s = f_s$ e che $R_s \cos \theta_s = N$. Pertanto, dividendo membro a membro, si ha

$$\tan(\theta_s) = \frac{f_s}{N} = \frac{F}{mg}.$$

Poiché F cresce linearmente nel tempo, anche l'angolo cresce (finché non avviene il distacco). Tuttavia, non sapendo il valore di F in ogni istante, non è possibile calcolare la dipendenza di θ_s dal tempo. Nel momento del distacco, però, $F = F^*$ e $f_s = f_s^{\max} = \mu_s N$. In tale istante, quindi, θ_s assume il suo valore massimo:

$$\tan(\theta_s^{\max}) = \frac{f_s^{\max}}{N} = \mu_s$$

da cui $\theta_s^{\max} \approx 22^\circ 12'$.

Quando il corpo è in moto la situazione è simile a quella mostrata in Figura 2.8 ma al posto di \mathbf{f}_s , \mathbf{R}_s e θ_s occorre considerare \mathbf{f}_d , \mathbf{R}_d e θ_d . L'angolo θ_d sarà dato da

$$\tan(\theta_d) = \frac{f_d}{N} = \mu_d$$

visto che $f_d = \mu_d N$. Pertanto in questo caso $\theta_d \approx 5^\circ 50'$.

Problema 2.2

Svolgimento

► Il problema può essere risolto dal punto di vista di un SRI solidale al suolo o dal punto di vista di un SRNI solidale al camion.

Primo metodo. Rispetto a un SRI solidale al suolo, le forze applicate alla massa puntiforme m sono solo la tensione del filo \mathbf{T} e la forza peso mg . Si scelga per convenienza un sistema di assi cartesiani come in Figura 2.9. La II legge di Newton dice quindi che $\mathbf{T} + mg = ma$. Scomponendo le forze lungo gli assi scelti si trova

$$\begin{aligned} +T \sin \theta' - mg \sin \theta &= ma \quad (\text{componenti } x) \\ +T \cos \theta' - mg \cos \theta &= 0 \quad (\text{componenti } y) \end{aligned}$$

dove ovviamente a è l'accelerazione del camion, che coincide con l'accelerazione della massa m poiché quest'ultima è in quiete rispetto al camion. Dalla seconda equazione si può ricavare $T = mg \cos \theta / \cos \theta'$ che, inserita nella prima, dà

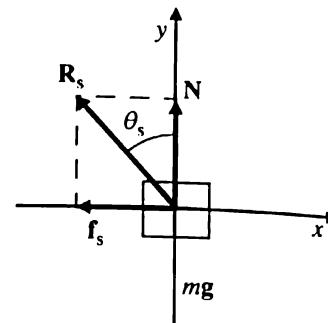


Figura 2.8

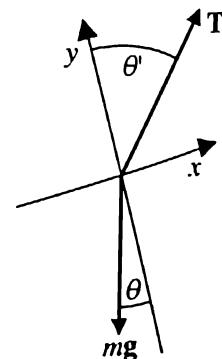


Figura 2.9

$$\tan \theta' = \frac{a}{g \cos \theta} + \tan \theta.$$

Si noti che nel caso $\theta = 0$ (ossia strada orizzontale) si ottiene il risultato facilmente verificabile che $\tan \theta' = a/g$.

Secondo metodo. Rispetto a un SRNI solidale con il camion, la massa m è in equilibrio sotto l'effetto delle forze vere \mathbf{T} e mg e della forza apparente $-ma_T$ essendo a_T l'accelerazione di trascinamento, che nel caso in esame è l'accelerazione del camion. Pertanto, usando gli stessi assi della Figura 2.9,

un osservatore del SRNI direbbe che $\mathbf{T} + mg - ma = 0$. È chiaro che questa equazione porta agli stessi risultati ottenuti dal SRI.

Problema 2.3

SOLVIMENTO

► Dal teorema dell'impulso si sa che $\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p}$. Nel caso in esame la quantità di moto iniziale del corpo è zero, per cui l'applicazione dell'impulso da parte del martello serve per fornire al corpo una quantità di moto $\mathbf{p}_0 = \mathbf{J}$ ossia una velocità $\mathbf{v}_0 = \mathbf{J}/m$, ovviamente parallela al piano inclinato.

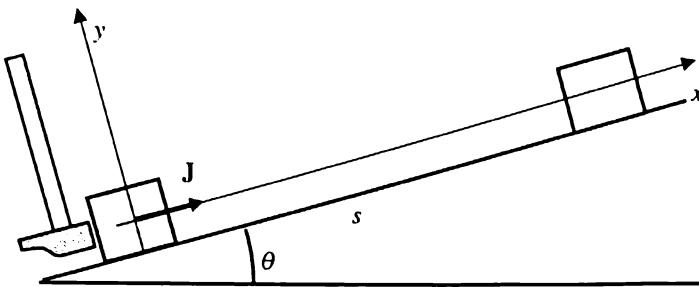


Figura 2.10

- a) Una volta lanciato, il corpo rallenta a causa della forza peso e dell'attrito radente dinamico, finché, dopo aver percorso un tratto s , si ferma. Occorre dunque trovare l'accelerazione del corpo. Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x parallelo al piano e diretto nel verso del moto, l'asse y perpendicolare al piano e diretto verso l'alto, e poniamo l'origine nel punto occupato inizialmente dal corpo (in modo che $x(t=0)=0$), come in Figura 2.10. La II legge di Newton $m\mathbf{g} + \mathbf{f}_d = m\mathbf{a}$ si scomponete nelle seguenti equazioni scalari:

$$-mg \sin \theta - f_d = ma_x \quad (\text{componenti } x) \quad (2.13)$$

$$+N - mg \cos \theta = 0 \quad (\text{componenti } y). \quad (2.14)$$

Dalla seconda equazione si ottiene $N = mg \cos \theta$ e siccome $f_d = \mu_d N$, si trova $f_d = \mu_d mg \cos \theta$, che inserita nella prima porta a $a_x = -g(\sin \theta + \mu_d \cos \theta)$. A questo punto per trovare lo spazio percorso basta usare la relazione che lega la velocità del corpo alla sua posizione (Equazione 1.7). Nel caso in esame, essa diviene $v^2(x) = v_0^2 + 2a_x x$ visto che il corpo si trova inizialmente nell'origine degli assi. Quando $x = s$ il corpo si ferma, ossia $v^2(s) = 0$; pertanto si trova che

$$s = -\frac{v_0^2}{2a_x} = \frac{J^2}{2m^2 g(\sin \theta + \mu_d \cos \theta)} = \frac{4 \text{ N}^2 \text{ s}^2}{2 \text{ kg}^2 \times 9.81 \text{ ms}^{-2} (0.5 + 0.2 \times 0.866)} = 0.30 \text{ m.}$$

- b) Una volta fermatosi, il corpo è soggetto alla forza di attrito statico, che è parallela al piano inclinato e rivolta verso l'alto. La II Legge di Newton dice che $\mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{f}_s = 0$ e, scomposta lungo gli assi già usati in precedenza, dà

$$-mg \sin \theta + f_s = 0 \quad (\text{componenti } x) \quad (2.15)$$

$$+N - mg \cos \theta = 0 \quad (\text{componenti } y). \quad (2.16)$$

Dalla prima equazione segue che $f_s = mg \sin \theta$. Il corpo resta in equilibrio se $f_s \leq f_s^{\max}$ dove $f_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$, ossia se

$$mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \rightarrow \tan \theta \leq \mu_s.$$

Nel caso in esame la condizione è soddisfatta perché $\tan \theta \simeq 0.577$ mentre $\mu_s = 0.6$, quindi il corpo, dopo essersi fermato, non ricade lungo il piano inclinato.

Problema 2.4**SVOLGIMENTO**

► Poiché la forza applicata al corpo non è costante, ma dipende dalla velocità, non si tratta di un moto uniformemente accelerato, ma di un moto vario, la cui legge del moto deve essere ottenuta integrando la legge di Newton.

- a) L'accelerazione nella direzione parallela all'asse x sarà

$$a(t) = \frac{F(t)}{m} = -\frac{k}{m} v^2(t)$$

da cui otteniamo la seguente equazione differenziale per la velocità

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = 0.$$

Separando le variabili si ottiene

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt$$

e integrando tra l'istante t_0 e l'istante t generico si ha

$$\left[-\frac{1}{v} \right]_{v_0}^v = -\frac{k}{m} (t - t_0).$$

Quest'ultima equazione equivale a

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = +\frac{k}{m} t_0 - \frac{k}{m} t.$$

Usando il fatto che $t_0 = m/(kv_0)$ si ottiene infine

$$\frac{1}{v} = \frac{k}{m} t \quad \longrightarrow \quad v(t) = \frac{m}{kt} \quad (2.17)$$

Si noti che la velocità è sempre positiva (ossia, il corpo non inverte mai il suo moto) e si annulla solo per $t \rightarrow \infty$.

Poiché $v(t) = dx/dt$, la legge oraria si ottiene integrando la 2.17 tra t_0 e t :

$$x(t) = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{t}{t_0} \right).$$

Si noti che la coordinata x è positiva per $t > t_0$, negativa per $t < t_0$ e nulla a $t = t_0$, come ci si aspetta che sia. Essa non ha un valore massimo perché la velocità non si annulla mai (se non a $t \rightarrow \infty$).

- b) L'istante t_1 in cui si ha $v(t_1) = v_0/1000$ si calcola imponendo

$$\frac{m}{k} \frac{1}{t_1} = \frac{v_0}{1000} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1000 \frac{m}{k v_0} = 1000 t_0.$$

La distanza dall'origine a cui si troverà il punto materiale in tale istante è quindi

$$x_1 = x(t_1) = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{t_1}{t_0} \right) = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{2 \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2}} \ln(1000) \cong 3.45 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Problema 2.5**SVOLGIMENTO**

► Chiamiamo \mathbf{F}_m la forza, diretta nel verso del moto, che viene esercitata sull'auto grazie al motore. Se l'auto viaggia a velocità costante, la sua accelerazione è zero e la forza \mathbf{F}_m deve essere uguale in modulo e opposta in verso alla forza di attrito \mathbf{F}_r . Pertanto, usando l'Equazione 2.10, la potenza sviluppata dalla forza \mathbf{F}_m si può scrivere nel modo seguente:

$$P = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} = -(-F_r v) = +kv^2.$$

a) La massima velocità dell'auto corrisponde quindi alla massima potenza del motore:

$$P_{\max} = k(v_{\max})^2,$$

da cui si ottiene

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{k}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^4 \text{ W}}{40 \text{ N s m}^{-1}}} \cong 38.7 \text{ m s}^{-1} \cong 140 \text{ km h}^{-1}.$$

b) l'intervallo di tempo impiegato per percorrere la distanza d è

$$\Delta t = \frac{d}{v_{\max}} \cong 2582 \text{ s} \cong 43 \text{ min.}$$

c) Il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F}_m durante il tragitto è dato da

$$L = P_{\max} \Delta t = k v_{\max} d \cong 1.55 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Problema 2.6**SVOLGIMENTO**

► L'alpinista si trova appeso alle funi e in equilibrio, la II legge di Newton assume quindi la forma

$$\sum_j \mathbf{F}_j = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

dove $\sum_j \mathbf{F}_j$ è la forza risultante data dalla somma delle due tensioni, T_1 e T_2 , e della forza di gravità mg . La simmetria del problema suggerisce di usare un sistema di riferimento cartesiano con asse x in direzione orizzontale e asse y in direzione verticale, orientato verso l'alto. In questo sistema, ciascuna delle due funi forma un angolo $\theta/2$ con l'asse y . La condizione vettoriale di equilibrio 2.18, scritta in componenti, si traduce allora nel seguente sistema di equazioni scalari

$$\begin{cases} -mg + T_1 \cos \frac{\theta}{2} + T_2 \cos \frac{\theta}{2} = 0 \\ T_1 \sin \frac{\theta}{2} - T_2 \sin \frac{\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

a) Dalla seconda equazione del sistema, si trova che le due tensioni devono essere uguali in modulo, ossia $T_1 = T_2 = T$ (relazione che comunque poteva essere dedotta dalla simmetria del problema); sostituendo questo risultato nella prima equazione, si conclude che

$$T = \frac{mg}{2 \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (2.19)$$

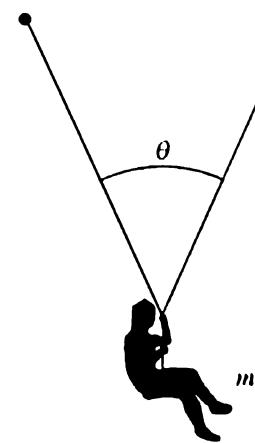


Figura 2.11

- b) Affinché la tensione sia minore del valore dato come limite di sicurezza, deve essere

$$T = \frac{mg}{2 \cos \frac{\theta}{2}} < T_{\max}, \quad (2.20)$$

che comporta la condizione

$$\cos \frac{\theta}{2} > \frac{mg}{2T_{\max}}. \quad (2.21)$$

Si noti che, poiché la funzione coseno è decrescente tra $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, tale condizione equivale a chiedere che l'angolo θ sia *minore* di un certo angolo massimo, ossia:

$$\theta < 2 \arccos \frac{mg}{2T_{\max}} = 120^\circ. \quad (2.22)$$

Se l'angolo tra le funi è maggiore di 120° , queste saranno sottoposte a una tensione maggiore di quella di sicurezza e quindi avranno maggiore probabilità di spezzarsi.

Problema 2.7

Svolgimento

- Per risolvere questo esercizio, è necessario ricordare le caratteristiche che definiscono una fune ideale.

- a) Con riferimento alla Figura 2.2a, sia T la tensione della fune. Essa è uniforme lungo tutta la fune perché quest'ultima è ideale e quindi di massa trascurabile. Il carico è sottoposto alla forza peso, mg , diretta verso il basso, e a una forza verso l'alto di intensità pari a $2T$. Per capirlo, basta considerare come punto materiale di massa m l'insieme costituito dal carico, dalla puleggia mobile e dal tratto di fune avvolto attorno alla puleggia stessa. Dato che questo sistema è in condizioni di equilibrio, la II legge di Newton ci dice che la risultante delle forze ad esso applicate deve essere zero: $\sum_j \mathbf{F}_j = 0$. Proiettando tale equazione su un asse verticale (l'unico lungo cui le forze hanno componenti non nulle), si ottiene

$$mg - 2T = 0, \quad (2.23)$$

da cui

$$T = \frac{mg}{2}. \quad (2.24)$$

- b) Nel caso della Figura 2.2b, si può fare un ragionamento analogo, deducendo che, per mantenere il carico sospeso, è necessario tirare la corda con una forza di intensità pari a un quarto del suo peso.

Problema 2.8

Svolgimento

- Il moto delle auto avviene lungo una traiettoria rettilinea e può essere diviso in due fasi. Nella prima, il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione in modulo pari a $a_1 = 0.2 g$. Nella seconda è uniformemente decelerato, con accelerazione dettata dall'attrito radente dinamico; in particolare, la forza frenante ha modulo $f_{d,A} = \mu_d N_A$ e $f_{d,B} = \mu_d N_B$ essendo N_A ed N_B le componenti normali delle forze esercitate dal terreno sulle due auto.

La II legge di Newton, proiettata sull'asse verticale, assume per le due auto la forma $N_A = m_A g$ e $N_B = m_B g$, per cui

$$f_{d,A} = \mu_d m_A g$$

$$f_{d,B} = \mu_d m_B g;$$

la sua proiezione lungo l'asse orizzontale (orientato nel verso del moto) ci dice che $f_{d,A} = m_A a_A$ e $f_{d,B} = m_B a_B$ per cui le accelerazioni delle due auto nella fase di frenata sono uguali e hanno modulo:

$$a_A = a_B = \mu_d g = 0.6 g.$$

Chiameremo a_2 tale accelerazione, intendendo che essa è relativa alla seconda fase del moto (la frenata). Chiaramente, siccome a_2 è uguale per entrambe le auto e anche l'accelerazione massima lo è, ci aspettiamo che il risultato non dipenda dall'auto che si considera, nonostante le masse siano diverse. Dato l'obiettivo di non cadere in acqua, il meglio che ogni automobilista può fare è fermarsi esattamente sul bordo del molo. Questo corrisponde a imporre due condizioni. La prima è che la somma della distanza d_1 , percorsa durante l'accelerazione, e della distanza d_2 , percorsa durante la frenata, sia uguale a $d = 100$ m. La seconda è che la variazione di velocità nella fase di accelerazione sia, in modulo, uguale a quella nella fase di frenata (si veda l'Equazione 1.7). In pratica, si tratta di risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = d \\ \sqrt{2a_1 d_1} = \sqrt{2a_2 d_2} \end{cases}$$

trovando che la distanza minima dal mare, a cui è necessario iniziare la fase di frenata, è pari a

$$d_1 = \frac{d}{1 + \frac{a_2}{a_1}} = \frac{d}{1 + \frac{\mu_d g}{a_1}} = \frac{d}{4} = 25 \text{ m}. \quad (2.25)$$

Problema 2.9

SVOLGIMENTO

► *Punto di vista dell'osservatore non inerziale.* Il moto della pallina può essere studiato relativamente a un sistema di riferimento solidale con la piattaforma, cioè rotante insieme a essa. Tale sistema non è inerziale, pertanto la pallina è soggetta sia all'azione di forze vere sia a quella di forze apparenti. Scegliamo un sistema di coordinate cilindriche, con origine al centro del disco e rappresentato da un versore radiale \mathbf{u}_r' , un versore trasverso $\mathbf{u}_{\theta'}$ e un versore perpendicolare \mathbf{u}_z' , diretto lungo l'asse di rotazione e orientato verso l'alto. Sia Φ la risultante delle forze vincolari (esercitate dal fondo e dalle pareti della scanalatura) agenti sulla pallina. L'equazione della dinamica, scritta per la pallina, risulta essere:

$$\Phi + mg + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{Co} = m\mathbf{a}' . \quad (2.26)$$

Oltre alle forze vere (la reazione vincolare e la forza peso) in tale equazione compaiono anche le forze apparenti $\mathbf{F}_c = -m\omega_0 \wedge \omega_0 \wedge \mathbf{r}'$ (centrifuga) e $\mathbf{F}_{Co} = -2m\omega_0 \wedge \mathbf{v}'$ (di Coriolis). Tenendo conto che $\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_z'$ e $\omega_0 = \omega_0 \mathbf{u}_z'$, l'equazione precedente diventa:

$$\Phi - mg\mathbf{u}_z' - m\omega_0 \mathbf{u}_z' \wedge \omega_0 \mathbf{u}_z' \wedge \mathbf{r}' - 2m\omega_0 \mathbf{u}_z' \wedge \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = m\mathbf{a}' . \quad (2.27)$$

Considerando che la pallina rimane sempre sul disco (\mathbf{u}_z' e \mathbf{u}_r' sono ortogonali) e che essa è vincolata a muoversi lungo la scanalatura ($\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ è parallelo a \mathbf{u}_r'), l'equazione vettoriale 2.27 diventa

$$\Phi - mg\mathbf{u}_z' + m\omega_0^2 r' \mathbf{u}_r' - 2m\omega_0 \frac{dr'}{dt} \mathbf{u}_{\theta'} = m\mathbf{a}' . \quad (2.28)$$

L'accelerazione è anch'essa solo radiale, per cui $\mathbf{a}' = (d^2 r'/dt^2) \mathbf{u}_r'$; invece Φ non ha componenti radiali perché non vi è attrito. Pertanto, proiettando l'equazione precedente sugli assi coordinati, si ottiene il seguente sistema di equazioni scalari

$$\begin{cases} m \frac{d^2 r'}{dt^2} = m\omega_0^2 r' & \text{(componente radiale)} \\ 0 = \Phi_\theta - 2m\omega_0 \frac{dr'}{dt} & \text{(componente trasversa)} \\ 0 = \Phi_z - mg & \text{(componente verticale)} \end{cases} \quad (2.29)$$

In questo sistema di riferimento il moto è rettilineo vario: si svolge lungo la scanalatura e dalla prima equazione si deduce che l'accelerazione dipende dalla posizione secondo la legge

$$a'(r') = \omega_0^2 r'. \quad (2.30)$$

L'Equazione generale 1.7, che permette di ricavare la velocità in funzione della posizione, si scrive in questo caso

$$v'(r')^2 - v'(d)^2 = 2 \int_d^{r'} a'(\xi) d\xi. \quad (2.31)$$

La velocità richiesta si ottiene ponendo $r' = R$ e ricordando che $v'(d) = 0$:

$$v'(R) = \omega_0 \sqrt{R^2 - d^2}. \quad (2.32)$$

Punto di vista dell'osservatore inerziale. Si consideri il moto dal punto di vista di un osservatore in un sistema di riferimento inerziale esterno. Le forze che agiscono sulla pallina in questo caso sono solo quelle reali e cioè la reazione vincolare Φ e la forza peso mg , quindi l'equazione vettoriale del moto risulta

$$\Phi + mg = ma \quad (2.33)$$

più semplice della 2.27 perché non ci sono forze apparenti. In questo sistema la traiettoria della pallina sarà però più complicata perché la si vede girare attorno all'asse di rotazione e contemporaneamente allontanarsi da esso lungo la scanalatura. Come nel caso precedente, per descrivere il moto è conveniente scegliere un sistema di coordinate polari cilindriche (r, θ, z) avente origine nel centro del disco. È però importante sottolineare che, a differenza del caso descritto dal punto di vista dell'osservatore non inerziale, tale sistema di coordinate è fisso rispetto a un sistema di riferimento inerziale e quindi *non* ruota con la piattaforma. In questo sistema, l'accelerazione della pallina a ogni istante di tempo è definita dalla relazione

$$\mathbf{a}(t) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \mathbf{u}_\theta. \quad (2.34)$$

A causa del vincolo rappresentato dalla scanalatura,

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0; \quad (2.35)$$

sostituendo allora questa condizione nell'Equazione 2.34, l'equazione del moto 2.33 diventa

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega_0^2 \right) \mathbf{u}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \omega_0 \right) \mathbf{u}_\theta = \Phi - mg \mathbf{u}_z \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega_0. \end{cases} \quad (2.36)$$

La sua proiezione lungo gli assi,

$$\begin{cases} m \frac{d^2r}{dt^2} - mr\omega_0^2 = 0 & \text{(componente radiale)} \\ 2m \frac{dr}{dt} \omega_0 = \Phi_\theta & \text{(componente trasversa)} \\ 0 = \Phi_z - mg & \text{(componente verticale)} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \end{cases} \quad (2.37)$$

è identica alla 2.29, ottenuta nel sistema non inerziale: l'unica cosa che cambia è la posizione dei vari termini rispetto al segno di uguale, dovuta al fatto che le accelerazioni che determinano la curvatura della traiettoria sono considerate, nel primo caso, come dovute a forze apparenti e, ora,

come accelerazioni intrinseche. La prima e l'ultima⁵ equazione del sistema 2.37 riguardano il moto della pallina; esse sono disaccoppiate e la loro soluzione, tenendo conto delle condizioni iniziali: $r(0) = d$, $\frac{dr}{dt}|_{t=0} = 0$, e infine scegliendo $\theta_0 = 0$, è

$$\begin{cases} r(t) = \frac{d}{2}(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = d \cosh(\omega_0 t) \\ \theta(t) = \omega_0 t ; \end{cases} \quad (2.38)$$

le rimanenti due equazioni del sistema forniscono le due componenti non nulle della reazione vincolare

$$\begin{cases} \Phi_\theta = dm\omega_0^2(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}) = 2dm\omega_0^2 \sinh(\omega_0 t) \\ \Phi_z = mg . \end{cases} \quad (2.39)$$

In questo sistema di riferimento, quindi, la pallina gira attorno all'asse di rotazione e contemporaneamente si allontana dalla posizione iniziale; la traiettoria è una spirale. Per calcolare la velocità di uscita della pallina dalla piattaforma si dovrebbe nuovamente sfruttare la conoscenza dell'accelerazione in funzione della posizione sulla traiettoria. Questa volta, però, la traiettoria non è più rettilinea e l'integrale, in questo sistema di riferimento, diventa più complicato da calcolare di quanto non fosse nel riferimento mobile.

Problema 2.10

SVOLGIMENTO

► Dato che la fune è inestensibile, si può considerare il sistema massa + fune come un unico corpo, di massa $M + m$, cui è applicata la forza \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = (M + m)\mathbf{a} \rightarrow a = \frac{f}{M + m}. \quad (2.40)$$

- a) Anche il corpo di massa M ha accelerazione \mathbf{a} ed è soggetto a tre forze: la forza peso mg , la reazione vincolare del piano (liscio) \mathbf{N} e la forza \mathbf{F} che la fune esercita su di esso (Figura 2.12). Pertanto per tale corpo la II legge di Newton risulta $\mathbf{F} + mg + \mathbf{N} = M\mathbf{a}$. Poiché sia \mathbf{N} sia mg sono ortogonali al piano, proiettando tale equazione nella direzione del moto si ottiene:

$$F = Ma = f \frac{M}{M + m} < f .$$

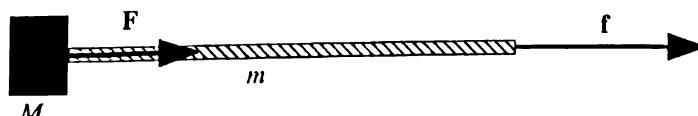


Figura 2.12 Fune massiva

- b) Dato che la fune ha una densità di massa lineare costante, si può ricavare $\lambda = m/L$. Si consideri un asse x orizzontale, orientato nel verso del moto e con origine nell'estremo sinistro della fune. Un elemento di fune di massa $\Delta m = \lambda(L - x)$, avente un'estremità a distanza x dall'origine e l'altra coincidente con l'estremità della fune a cui è applicata la forza \mathbf{f} (Figura 2.13), si muove anch'esso con accelerazione \mathbf{a} . Le forze con componente nella direzione del moto agenti su tale elemento sono la forza \mathbf{f} e la tensione \mathbf{T} dovuta alla parte restante della fune. Considerando le

⁵ La quarta equazione del sistema 2.37 rende conto del fatto che la pallina gira attorno all'asse di rotazione della piattaforma; essa non era presente nella 2.29 perché nel sistema di riferimento solidale con la piattaforma la pallina non gira.

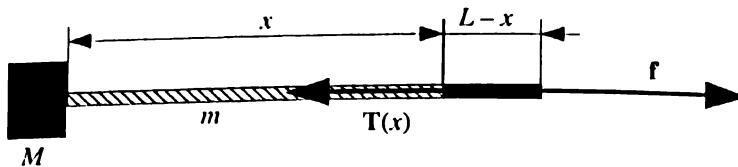


Figura 2.13 Elemento di massa Δm

componenti di queste forze lungo l'asse x , la II Legge di Newton per tale elemento di fune risulta:

$$+f - T = \frac{m}{L}(L-x)a. \quad (2.41)$$

Sostituendo l'espressione di f (Equazione 2.40) e ricordando che $\lambda = m/L$, si ricava infine la tensione della fune in funzione della posizione x :

$$T(x) = \left(M + m \frac{x}{L} \right) a; \quad (2.42)$$

in particolare, $T(0) = F$ e $T(L) = f$.

Si noti che nel caso in cui la massa della fune sia trascurabile, dalla 2.41 si ottiene che il modulo della tensione T nella fune è uguale alla forza f : ripetendo questo ragionamento per un generico elemento infinitesimo della fune, si deduce che la fune trasmette la tensione inalterata lungo la sua lunghezza. Di conseguenza, $F = T = f$.

Problema 2.11

SVOLGIMENTO

► In Figura 2.14 è rappresentato il diagramma delle forze agenti. In particolare, sul corpo di massa m agiscono la forza peso, mg , e la tensione T_1 della fune; sull'estremo P della fune a contatto con la molla agiscono la tensione T_2 e la forza elastica F_{el} ; sulla carrucola agiscono le forze $-T_1$, $-T_2$ e la forza Φ esercitata dal gancio.

Sceglieremo un sistema di riferimento inerziale con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale e orientato verso l'alto, con origine nell'estremità fissa della molla. Scriviamo le equazioni di Newton nel caso generale (e non direttamente nella condizione di equilibrio) perché saranno utili per la soluzione del punto (b). Esse risultano:

$$\begin{cases} mg + T_1 = ma & \text{(corpo } m\text{)} \\ T_2 + F_{el} = 0 & \text{(punto } P\text{)} \\ \Phi - T_1 - T_2 = 0 & \text{(puleggia).} \end{cases} \quad (2.43)$$

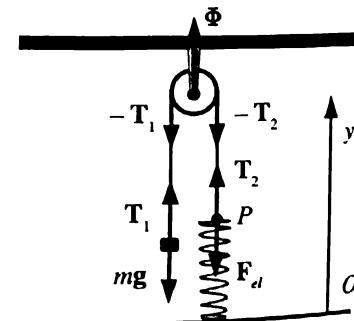


Figura 2.14

Nella seconda equazione, il secondo membro è zero perché il punto P è privo di massa. Tale equazione ci dice semplicemente che è sempre $T_2 = F_{el}$. Inoltre, visto che la carrucola ha massa trascurabile⁶, il suo unico effetto è quello di far variare la direzione della fune e, quindi, della tensione da

⁶ L'effetto di carrucole aventi massa non trascurabile (e quindi non ideali) comporta delle conseguenze che verranno discusse nel Capitolo 4.

essa esercitata. Pertanto $T_1 = T_2$ e quindi da ora in poi indicheremo entrambe queste quantità con T . Proiettando le Equazioni 2.43 lungo l'asse y , otteniamo quindi

$$\begin{cases} -mg + T = ma \\ +T - F_{el} = 0 \\ +\Phi - 2T = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Indicando con y_P la coordinata del punto P , la forza elastica ha modulo $F_{el} = ky_P$, visto che la molla ha lunghezza a riposo trascurabile. Pertanto, dalla seconda equazione risulta che $T = F_{el} = ky_P$.

Esplicitando anche l'espressione dell'accelerazione $a = \frac{d^2y}{dt^2}$ nella prima equazione, otteniamo

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg + ky_P. \quad (2.45)$$

- a) Si ha l'equilibrio quando $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ o, equivalentemente, $ky_P = mg$. Di conseguenza, si ricava la posizione di equilibrio dell'estremo libero della molla: $y_{P,eq} = mg/k$. In tali condizioni risulta che $F_{el} = T = mg$. Inoltre, si ottiene che il modulo della reazione vincolare che il gancio esercita sulla carrucola all'equilibrio è $\Phi = 2mg$.
- b) Per determinare il moto del sistema in una posizione generica (quindi fuori dall'equilibrio), si consideri la prima delle Equazioni 2.44. Tenendo conto della posizione di equilibrio appena determinata, tale equazione si può scrivere nella forma:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = k(y_P - y_{P,eq}) \rightarrow m \frac{d^2y}{dt^2} = k\Delta y_P. \quad (2.46)$$

Nell'ultimo passaggio si è indicato con Δy_P lo spostamento del punto P dalla posizione di equilibrio. Si osservi che se l'estremo P si sposta dall'equilibrio di un tratto Δy_P , la massa m si sposta di un tratto $\Delta y = y - y_{eq} = -\Delta y_P$. Quindi, ponendo $y - y_{eq} = \xi$, l'Equazione 2.46 per il moto della massa m diventa

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi \quad (2.47)$$

che rappresenta l'equazione di un moto armonico, con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$. La soluzione generale è del tipo

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.48)$$

Le costanti arbitrarie A e φ si determinano imponendo le condizioni iniziali. Secondo il testo del problema, all'istante $t = 0$ la massa m è spostata di un tratto l dalla posizione di equilibrio verso il basso, ed è ferma. Per cui $\xi(t = 0) = -l$, $\frac{d\xi}{dt}(t = 0) = 0$. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} -l &= A \cos \varphi \\ 0 &= -\omega A \sin \varphi \end{aligned}$$

da cui si trova $A = -l$ e $\varphi = 0$. L'equazione oraria è quindi $\xi(t) = y(t) - y_{eq} = -l \cos \omega t$. Pertanto, l'intero sistema si muove di moto armonico, intorno alla posizione di equilibrio, con pulsazione ω . In particolare, dalla prima equazione del sistema 2.44 si ottiene per la tensione nella fune l'espressione

$$T = mg + m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - \omega^2 l \cos \omega t.$$

Si osservi che solo all'equilibrio $T = mg$, mentre in generale T è una funzione del tempo, così come $\Phi = 2T$.

Problema 2.12

Svolgimento

- Sull'oggetto agiscono le forze descritte in Figura 2.15, ossia la forza peso mg , la reazione vincolare del piano N , e le due forze elastiche F_1 ed F_2 .

Si può pertanto scrivere la II legge di Newton per il corpo:

$$mg + N + F_1 + F_2 = ma. \quad (2.49)$$

Si scelga un sistema di riferimento cartesiano come in Figura 2.16, con l'asse x orizzontale e orientato verso destra, l'asse y verticale e orientato verso l'alto. Si ponga l'origine nel punto A. Poiché lungo l'asse y non vi è moto, la componente dell'Equazione 2.49 lungo tale asse diventa

$$0 = N - mg \quad (2.50)$$

da cui si deduce che $N = mg$.

Proiettando l'Equazione 2.49 lungo l'asse x si ottiene

$$F_{2,x} + F_{1,x} = ma_x.$$

Occorre quindi scrivere le componenti orizzontali delle forze elastiche. Si noti che se la posizione della massa m è individuata dalla coordinata x , la molla di sinistra, avente costante elastica k_1 , eserciterà una forza $F_1 = -k_1(x - l_0)\mathbf{u}_x$.

Per calcolare la forza esercitata dalla molla di destra, si osservi che quando essa ha lunghezza $d - x$, la sua deformazione è $d - x - l_0$ e quindi essa esercita una forza $F_2 = k_2(d - x - l_0)\mathbf{u}_x$. Pertanto, la II legge di Newton proiettata nella direzione del moto corrisponde alla seguente equazione differenziale:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1(x - l_0) + k_2(d - x - l_0). \quad (2.51)$$

- a) Per ottenere la posizione di equilibrio basta impostare $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, da cui si ricava

$$x_{eq} = \frac{k_1 l_0 + k_2 (d - l_0)}{k_1 + k_2}. \quad (2.52)$$

- b) Si noti che l'equazione del moto 2.51 si può scrivere:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x = k_1 l_0 + k_2(d - l_0); \quad (2.53)$$

il termine a secondo membro è il numeratore del secondo membro dell'Equazione 2.52 per cui, sostituendo, si ottiene

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)(x - x_{eq}). \quad (2.54)$$

Ponendo $\xi = x - x_{eq}$ e chiamando $k = k_1 + k_2$ la costante elastica efficace del sistema, tale equazione assume la forma dell'equazione differenziale del moto armonico semplice:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} + k\xi = 0. \quad (2.55)$$

La soluzione risulta

$$\xi(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow x(t) = x_{eq} + A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.56)$$

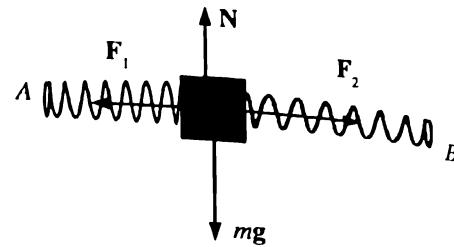


Figura 2.15

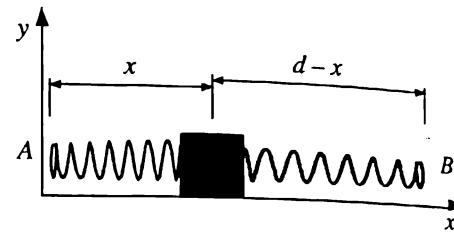


Figura 2.16

con $\omega = \sqrt{k/m}$. Per la velocità del corpo si ottiene:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.57)$$

Le costanti A e φ devono essere determinate usando le condizioni iniziali, ossia

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_{eq} + l \\ v_x(t=0) &= 0. \end{aligned}$$

Il risultato è $A = l$ e $\varphi = \pi/2$. La legge oraria del moto è pertanto

$$\xi(t) = l \sin(\omega t + \pi/2) \quad \rightarrow \quad x(t) = x_{eq} + l \sin(\omega t + \pi/2) \quad (2.58)$$

mentre la velocità ha l'espressione

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = l\omega \cos(\omega t + \pi/2). \quad (2.59)$$

- c) Nella posizione di equilibrio, si ha $\xi = x - x_{eq} = 0$: la prima volta che l'argomento della funzione seno in 2.58 si annulla è quando $\omega t + \pi/2 = \pi$. Andando a sostituire nell'espressione della velocità 2.59, si ha infine $\frac{dx}{dt} = -l\omega$.

Problema 2.13 SVOLGIMENTO

► L'automobile può essere descritta come un corpo accelerato da una forza \mathbf{F} , che si mantiene costante in direzione e verso e il cui modulo varia in modo tale che la potenza rimanga costante. Si può scegliere l'asse x orientato parallelamente alla direzione del moto dell'automobile e con origine nel punto di partenza. La potenza istantanea, erogata dalla forza \mathbf{F} agente sull'auto in moto con velocità \mathbf{v} , è allora data da $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x$. Da questa espressione possiamo vedere come l'intensità della forza applicata sull'auto non sia costante, ma inversamente proporzionale alla velocità: $F_x = P/v_x$. Di conseguenza, anche l'accelerazione non sarà costante, ma dipenderà dalla velocità: *non si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato bensì di un moto vario*. La II legge di Newton assume infatti la seguente forma, considerando solo le componenti lungo la direzione x :

$$\frac{P}{v_x} = m \frac{dv_x}{dt}. \quad (2.60)$$

Siccome il problema richiede di calcolare la velocità dell'auto quando ha percorso un tratto l , occorre ricavare l'espressione di v_x in funzione di x . Per fare questo possiamo effettuare un cambiamento di variabile nella Equazione 2.60, esprimendo $v_x(t)$ come $v_x[x(t)]$ e applicando la nota formula per la derivazione di una funzione di funzione:

$$\frac{d}{dt} v_x[x(t)] = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} v_x.$$

Con questa sostituzione l'equazione (2.60) assume la forma:

$$\frac{P}{v_x} = m \frac{dv_x}{dx} v_x$$

ossia

$$\frac{P}{m} = v_x^2 \frac{dv_x}{dx}, \quad (2.61)$$

che, separando le variabili, diventa

$$\frac{P}{m} dx = v_x^2 dv_x. \quad (2.62)$$

Integrando i due membri dell'equazione (2.62) e utilizzando la condizione iniziale $v_x(0) = 0$ possiamo arrivare all'espressione della velocità v_x in funzione dello spazio percorso x :

$$v_x = \sqrt[3]{\frac{3P}{m}} x.$$

La velocità finale dell'automobile è quindi:

$$v_f = v_x(l) = \sqrt[3]{\frac{3P}{m}} l \simeq 24.7 \text{ m s}^{-1} \simeq 88.8 \text{ km h}^{-1}.$$

Problema 2.14

Svolgimento

► La richiesta che il corpo rimanga aderente alla guida per tutto il percorso equivale alla condizione che il vettore velocità si mantenga tangente ad essa durante tutta la durata del moto e, in particolare, quando il corpo si trova alla fine della guida. La II legge di Newton in ogni istante del moto sulla guida è data da

$$mg + N = ma \quad (2.63)$$

Per risolvere il problema conviene utilizzare le coordinate intrinseche e proiettare l'equazione 2.63 lungo le direzioni individuate dai corrispondenti versori \mathbf{u}_n e \mathbf{u}_τ , dove il verso di quest'ultimo è concorde al moto.

- a) Nel punto A la reazione normale e la forza peso sono parallele e concordi al versore \mathbf{u}_n , pertanto l'accelerazione (che in coordinate intrinseche ha l'espressione 1.17) è solo centripeta e l'equazione 2.63 si riduce a

$$mg + N_A = m \frac{v_A^2}{R}. \quad (2.64)$$

Il modulo della velocità nel punto A è quindi dato dall'espressione

$$v_A = \sqrt{R \left(g + \frac{N_A}{m} \right)},$$

il cui valore minimo si ottiene per $N_A = 0$:

$$v_A^{\min} = \sqrt{Rg} \simeq 3.13 \text{ m s}^{-1}; \quad (2.65)$$

In questo caso il corpo è mantenuto in traiettoria dalla sola forza di gravità, mentre per velocità superiori è necessario che la guida intervenga esercitando una forza diretta verso il basso per evitare che il corpo vada verso l'alto.

- b) Nella Figura 2.17 sono rappresentate le direzioni dei versori intrinseci e del vettore \mathbf{g} quando il corpo si trova nel punto B . Introducendo per comodità di notazione l'angolo $\alpha = \theta_B - \frac{\pi}{2}$, la II legge di Newton (Equazione 2.63) assume la forma:

$$\begin{aligned} mg [\sin(\alpha) \mathbf{u}_n - \cos(\alpha) \mathbf{u}_\tau] + N_B \mathbf{u}_n &= \\ &= m \left(\frac{v_B^2}{R} \mathbf{u}_n + \left. \frac{dv_s}{dt} \right|_B \mathbf{u}_\tau \right). \end{aligned}$$

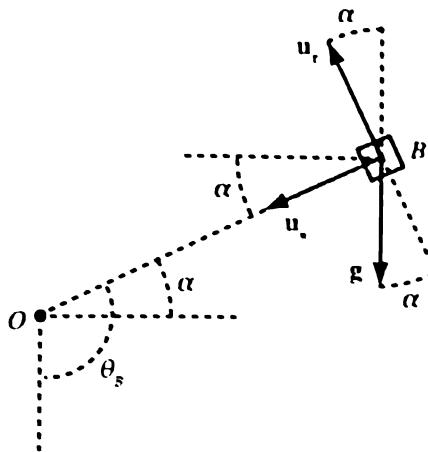


Figura 2.17

Essa equivale alle relazioni scalari

$$\frac{dv_s}{dt} \Big|_B = -g \cos(\alpha) \quad (2.66)$$

$$g \sin(\alpha) + \frac{N_B}{m} = \frac{v_B^2}{R}; \quad (2.67)$$

risolvendo la seconda per N_B otteniamo

$$N_B = m \left[\frac{v_B^2}{R} - g \sin(\alpha) \right]. \quad (2.68)$$

Sostituendo nella 2.68 il valore $v_B = \sqrt{2gR}$ e ricordando che $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$ e quindi per $\theta = \frac{3}{4}\pi$ si ha $\alpha = \frac{\pi}{4}$, si ottiene:

$$N_B = mg [2 - \sin(\alpha)] \simeq 0.634 \text{ N}.$$

Problema 2.15 SVOLGIMENTO

► Per risolvere il problema useremo sistematicamente il teorema dell'energia cinetica, ma è anche possibile usare un approccio cinematico poiché il moto del sulla superficie scabra è uniformemente accelerato ed il moto a contatto con la molla è armonico semplice (anche se il corpo non è attaccato alla molla ed esegue solo mezza oscillazione).

- a) Durante il moto sulla superficie scabra, sul corpo agiscono la forza peso mg , la reazione normale del piano N e la forza di attrito dinamico f_d esercitata dalla superficie; tuttavia le prime due non compiono lavoro, in quanto sempre ortogonali alla velocità. Introduciamo l'asse x parallelo al piano, concorde alla velocità iniziale del corpo, e con origine nel punto di partenza. Durante il moto tra $x = 0$ e $x = d$ la forza di attrito ha espressione

$$f_d = -\mu_d |N| u_x = -\mu_d mg u_x.$$

ed il suo lavoro, durante lo spostamento del corpo del tratto d , vale $L_d = -\mu_d mg d$. L'energia cinetica nel punto finale è nulla, per cui vale la relazione

$$-\mu_d mg d = 0 - \frac{1}{2} m (v_0^{\min})^2, \quad (2.69)$$

da cui si ricava la velocità minima richiesta

$$v_0^{\min} = \sqrt{2\mu_d g d}.$$

- b) Poiché la velocità iniziale è maggiore di v_0^{\min} , il corpo arriva a contatto con la molla con energia cinetica K_d non nulla, che può essere determinata utilizzando il teorema dell'energia cinetica:

$$K_d = K_0 - L_d = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu_d mgd. \quad (2.70)$$

Durante la compressione della molla di un tratto Δx , questa compie un lavoro negativo

$$L_m = -\frac{1}{2}k(\Delta x)^2, \quad (2.71)$$

pertanto, applicando nuovamente il teorema dell'energia cinetica durante la fase di compressione, si ottiene $L_m = 0 - K_d$ ossia

$$-\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = -K_d = -\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu_d mgd\right).$$

Ricordando che $v_0 = \sqrt{2v_0^{\min}} = 2\sqrt{\mu_d g d}$ si ricava

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2\mu_d mgd}{k}}. \quad (2.72)$$

- c) Nella fase di compressione e successiva riestensione della molla agisce unicamente la forza elastica, che compie, durante le due fasi, lavori uguali in modulo ma opposti in segno, in modo che il lavoro complessivo risulta nullo. Di conseguenza, per il teorema dell'energia cinetica, la variazione di energia cinetica deve risultare nulla, ossia il corpo lascia la molla con la stessa energia cinetica K_d che aveva nel momento del contatto. Durante il successivo moto sulla parte scabra di piano, il corpo viene frenato dalla forza di attrito. Il tratto d_1 che percorre prima di fermarsi può essere trovato con il teorema dell'energia cinetica. Tenendo presente che $K_d = -L_m$, si ha

$$0 - \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = -\mu_m g d_1.$$

Sostituendo a Δx il suo valore dato nell'equazione 2.72, si ottiene $d_1 = d$. Il corpo si ferma quindi nello stesso punto da cui era partito inizialmente.



Richiami di teoria

Centro di massa di un sistema

Considerata una *distribuzione discreta*¹ di N masse puntiformi m_1, m_2, \dots, m_N , le cui posizioni rispetto a un sistema di riferimento di origine O sono definite dai vettori $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, si chiama *centro di massa* del sistema² il punto CM la cui posizione relativa a O è definita dal vettore

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i. \quad (3.1)$$

Scelto un sistema di riferimento cartesiano con origine in O , le coordinate del centro di massa risultano

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m}, \quad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m}. \quad (3.2)$$

Derivando successivamente rispetto al tempo l'Equazione 3.1 si ottengono dapprima la velocità e poi l'accelerazione del centro di massa, che risultano essere:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{m} \quad \mathbf{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i}{m}. \quad (3.3)$$

Momento d'inerzia di un sistema

Data una distribuzione discreta di masse, si chiama *momento d'inerzia* della distribuzione *rispetto a una retta* la quantità scalare:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \quad (3.4)$$

¹ Il caso della distribuzione continua verrà trattato nel capitolo successivo.

² Da non confondere con il *baricentro*, che è concettualmente diverso anche se i due punti possono in alcuni casi coincidere.

data dalla somma dei prodotti delle singole masse m_i per i quadrati delle rispettive distanze R_i dalla retta.

Vale il seguente *teorema di Huygens-Steiner*: il momento d'inerzia I_r di un sistema di masse rispetto a una generica retta r è uguale al momento d'inerzia I_{CM} del sistema rispetto alla retta parallela a r e passante per il centro di massa CM , più il prodotto tra la massa totale m del sistema e il quadrato della distanza d tra le due rette:

$$I_r = I_{CM} + md^2. \quad (3.5)$$

Quantità di moto e momento angolare

Si supponga ora che le N masse puntiformi m_1, m_2, \dots, m_N siano in moto, con velocità $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ rispetto al sistema di riferimento. La quantità di moto dell' i -esima massa puntiforme m_i è ovviamente $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$. La *quantità di moto del sistema* di masse considerato è il vettore

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i. \quad (3.6)$$

Usando l'Equazione 3.3 per la velocità del centro di massa, si trova che

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM} \quad (3.7)$$

ossia la quantità di moto del sistema è uguale alla sua massa totale moltiplicata per la velocità del suo centro di massa.

Scelto un punto arbitrario O' , detto *polo* (che in genere non coincide con l'origine O del sistema di riferimento, né è fermo rispetto ad essa) si dice *momento angolare* della massa m_i rispetto al polo O' il momento della quantità di moto calcolato rispetto a O' , ossia il vettore (si veda la Figura 3.1):

$$\mathbf{L}_{i,O'} = \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{p}_i = \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_i \quad (3.8)$$

dove ovviamente $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \overrightarrow{OO'}$. Il momento angolare totale del sistema rispetto al polo O' è quindi il vettore

$$\mathbf{L}_{O'} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{i,O'} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_i. \quad (3.9)$$

Il *teorema di König per il momento angolare* asserisce che il momento angolare di un sistema, calcolato rispetto a un generico polo O' , può essere scritto nella forma seguente

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{r}'_{CM} \wedge \mathbf{P} + \mathbf{L}_{CM}. \quad (3.10)$$

In quest'ultima equazione, il primo termine a secondo membro è il momento angolare, rispetto al polo O' , del centro di massa, pensato come punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema. Il secondo termine è il momento angolare del sistema calcolato assumendo come polo il centro di massa CM ; tale momento angolare può essere valutato indifferentemente nel sistema inerziale di origine O , o nel sistema (in generale non inerziale) avente origine nel CM e assi fissi, detto anche *sistema di riferimento del centro di massa*.

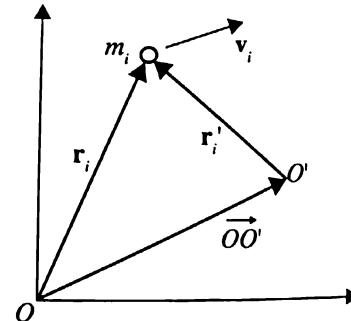


Figura 3.1

Sistemi di forze e momenti

Il corpo puntiforme di massa m_i appartenente al sistema è in genere soggetto a forze sia *interne* (dovute ad altri corpi del sistema), sia *esterne* (dovute a corpi esterni al sistema), di risultante $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^{\text{int}} + \mathbf{R}_i^{\text{ext}}$. La *risultante* delle forze applicate sul sistema è il vettore \mathbf{R} dato dalla somma di tutte le forze applicate sui singoli punti materiali; nella somma tutte le forze interne si elidono per cui

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^{\text{ext}} = \mathbf{R}^{\text{ext}} \quad (3.11)$$

cioè la risultante delle forze è uguale alla risultante delle sole forze esterne.

Si considerino ora anche i *punti di applicazione* delle forze che agiscono sul sistema. Le forze a cui è soggetto l' i -esimo punto materiale, e dunque anche la loro risultante \mathbf{R}_i , sono punto materiale i -esimo, e dunque anche la loro risultante \mathbf{R}_i , sono naturalmente applicate nella posizione occupata dal punto stesso, individuata dal vettore \mathbf{r}_i rispetto al sistema di riferimento. Scelto un polo O' si dice *momento* di \mathbf{R}_i rispetto a O' il vettore *libero*

$$\mathbf{M}_{i,O'} = \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{R}_i \quad (3.12)$$

dove, come già definito in precedenza, $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \overrightarrow{OO'}$. Il momento risultante delle forze applicate a tutto il sistema è la somma dei momenti; in questa somma i *momenti* delle forze interne si elidono per cui si ottiene

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i,O'} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{R}_i^{\text{ext}} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} \quad (3.13)$$

ossia, il momento totale coincide con il risultante dei soli momenti esterni.

Equazioni cardinali

La risultante delle forze applicate al sistema (Equazione 3.11) e la quantità di moto totale del sistema (Equazione 3.6) sono legate dalla *prima equazione cardinale della dinamica*:

$$\mathbf{R}^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (3.14)$$

che fornisce informazioni su come si svolge la *dinamica traslazionale* di un sistema: essa è un'equazione vettoriale che consta di tre equazioni scalari. Usando il teorema della quantità di moto ($\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$) e nel caso in cui la massa del sistema sia costante, l'Equazione 3.14 può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{R}^{\text{ext}} = m\mathbf{a}_{CM} \quad (3.15)$$

analoga alla II legge di Newton per un corpo puntiforme.

L'equazione

$$\frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} + \mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} \quad (3.16)$$

rappresenta la *seconda equazione cardinale* della dinamica, dove il vettore $\mathbf{v}_{O'}$ è la velocità del polo O' rispetto al sistema di riferimento scelto.

Il termine $\mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{P}$ è nullo se:

- i) O' è fisso rispetto al sistema di riferimento scelto, oppure
- ii) O' coincide col centro di massa, oppure
- iii) la velocità di O' è parallela a \mathbf{P} , cioè a \mathbf{v}_{CM} .

In questi casi l'Equazione 3.16 diventa

$$\frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}}. \quad (3.17)$$

La seconda equazione cardinale fornisce informazioni su come si svolge la *dinamica rotazionale* di un sistema: essa è un'equazione vettoriale che consta di tre equazioni scalari.

Energia cinetica di un sistema

Per il singolo corpo puntiforme di massa m_i e velocità \mathbf{v}_i è possibile definire l'energia cinetica (introdotta nel Capitolo 2) $K_i = (1/2)m_i v_i^2$. Grazie al teorema dell'energia cinetica, si può dire che

$$\Delta K_i = K_{i,B} - K_{i,A} = L_{AB}^{\gamma} = \int_{A\gamma}^B \mathbf{R}_i \cdot d\mathbf{r}_i.$$

ossia la variazione di energia cinetica del corpo i -esimo è uguale al lavoro compiuto dalla risultante delle forze agenti su tale corpo. L'energia totale del sistema è semplicemente

$$K = \sum_{i=1}^N K_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

e la sua variazione è uguale al lavoro compiuto da *tutte* le forze, sia interne sia esterne:

$$\Delta K = \sum_{i=1}^N \Delta K_i = L^{\text{int}} + L^{\text{ext}}. \quad (3.18)$$

L'energia cinetica totale dipende naturalmente dalla scelta del sistema di riferimento. Il *teorema di König* ad essa relativo asserisce che l'energia cinetica totale rispetto a un sistema di riferimento di origine O può essere scritta

$$K = K' + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \quad (3.19)$$

dove il primo termine a secondo membro è l'energia cinetica totale rispetto al *sistema di riferimento del centro di massa*, il secondo è l'energia cinetica associata al moto del centro di massa rispetto al sistema di riferimento di origine O .

Energia potenziale

Se le forze *interne* al sistema sono conservative, il loro lavoro dipende solo dalla variazione della configurazione del sistema, ossia delle posizioni relative tra i corpi che lo compongono. Un sistema di questo tipo si chiama *conservativo*.

Per esempio, per il sistema più semplice costituito da *soli* due corpi m_1 e m_2 di posizioni \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 rispetto a un dato sistema di riferimento, il lavoro della forza \mathbf{F}_{12} che m_1 esercita su m_2 è dato in generale dall'integrale di linea lungo la curva γ (percorsa dalla massa m_2):

$$L_{AB}^{\gamma} = \int_{A\gamma}^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

avendo chiamato \mathbf{r}_{12} la posizione di m_2 rispetto a m_1 , ossia $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Se \mathbf{F}_{12} è conservativa, il lavoro non dipende da γ e può essere espresso attraverso la variazione ΔU di una funzione scalare della posizione relativa dei due corpi U , detta *energia potenziale*:

$$L_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = U(\mathbf{r}_{12}^A) - U(\mathbf{r}_{12}^B) = U(A) - U(B) = -\Delta U. \quad (3.20)$$

Poiché la quantità misurabile è il lavoro, e quindi $-\Delta U$, l'energia potenziale associata a una data configurazione del sistema è definita a meno di una costante additiva, viene fissata assegnando il valore $U = 0$ a una configurazione di riferimento. Dall'Equazione 3.20 discende ovviamente l'Equazione 2.9, cioè

$$\oint \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = 0. \quad (3.21)$$

L'Equazione 3.20 corrisponde ad affermare che

$$dL = \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = -dU$$

o, equivalentemente, che

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla U(\mathbf{r}_{12}). \quad (3.22)$$

Se, per semplicità, si assume che m_1 sia posto nell'origine, si ha che $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}$ e si può scrivere $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$. In componenti cartesiane, l'Equazione 3.22 significa che

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (3.23)$$

ossia $F_{12,x} = -\partial U / \partial x$ e analoghe relazioni per le altre componenti.

Se una forza è espressa come funzione del punto (ossia attraverso la funzione vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$), è possibile capire se essa è conservativa, senza dover calcolare il suo lavoro su un generico percorso chiuso. Basta infatti sfruttare il fatto che una forza conservativa è necessariamente *irrotazionale*, ossia ha rotore nullo:

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = 0. \quad (3.24)$$

In coordinate cartesiane (si veda l'Appendice A), l'equazione precedente equivale a:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Si ricordi però che la condizione $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$ è necessaria, ma non sufficiente per la conservatività a meno che il dominio su cui è definita la forza non sia semplicemente connesso.

Per un sistema di N punti materiali che interagiscono tra loro mediante forze conservative, l'energia potenziale totale è data dalla somma dell'energia potenziale associata a ogni coppia di punti (ogni coppia contata una sola volta)

$$U = U(\mathbf{r}_{12}) + U(\mathbf{r}_{13}) + \dots + U(\mathbf{r}_{23}) + \dots = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\mathbf{r}_{ij}). \quad (3.25)$$

Energia meccanica

Un sistema in cui *solo le forze conservative (interne) compiono lavoro* durante una variazione di configurazione del sistema da uno stato A a uno stato B si dice *conservativo*. Esso ha l'importante proprietà che il lavoro della risultante delle forze è contemporaneamente uguale a ΔK (per l'Equazione 3.18) e $-\Delta U$ (per l'Equazione 3.20) per cui

$$K_B - K_A = U_A - U_B \rightarrow E = K + U = \text{costante.}$$

La quantità E è detta *energia meccanica del sistema*, ed è quindi una costante del moto, ovvero è conservata.

Se invece nel sistema vi sono anche forze *non conservative* che compiono lavoro, l'energia meccanica non è costante e la sua variazione è pari al lavoro fatto dalle forze non conservative (lavoro che dipende dalle traiettorie percorse dai corpi a cui sono applicate le forze, durante il passaggio da una configurazione del sistema all'altra):

$$E_B - E_A = L_{AB}^{\text{nc}}. \quad (3.26)$$

Leggi di conservazione

Dalla prima equazione cardinale 3.14 segue che se $\mathbf{R}^{\text{ext}} = 0$, ossia se la risultante delle forze esterne è zero, la quantità di moto del sistema si conserva

$$\mathbf{R}^{\text{ext}} = 0 \rightarrow \mathbf{P} = \text{costante.} \quad (3.27)$$

Se il vettore \mathbf{R}^{ext} non ha componenti lungo una data direzione, si conserva la componente della quantità di moto *in quella direzione*.

Dalla seconda equazione cardinale 3.17 segue analogamente che se $\mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} = 0$, cioè il momento risultante rispetto a un dato polo O' è uguale a zero, si conserva il momento angolare del sistema rispetto a tale polo:

$$\mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} = 0 \rightarrow \mathbf{L}_{O'} = \text{costante.} \quad (3.28)$$

Se il vettore $\mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}}$ non ha componenti lungo una data direzione, si conserva la componente del momento angolare (calcolato rispetto al polo O') *in quella direzione*.

Se un sistema è *isolato*, ossia non soggetto a forze esterne si conservano sia la quantità di moto sia il momento angolare, indipendentemente dal polo rispetto a cui esso è calcolato. Inoltre, per tale sistema l'energia meccanica si conserva *solo* se le forze interne sono conservative.

Urti

Si chiama *urto* tra due punti materiali un'interazione reciproca che avviene in un intervallo di tempo molto breve rispetto alla scala temporale che caratterizza il resto della dinamica. La brevità dell'intervallo di tempo permette di assumere che, durante l'urto, la posizione dei corpi coinvolti resti praticamente invariata. Durante l'urto, i due corpi esercitano l'uno sull'altro forze *impulsive*, ossia forze così intense che, nonostante la loro durata sia molto breve, hanno impulso finito.

Il fenomeno si può trattare considerando i due punti come un sistema. In tal modo, le forze di interazione mutua risultano essere forze *interne*. L'effetto di eventuali forze dovute all'interazione con corpi esterni al sistema può essere in molti casi trascurabile rispetto all'interazione reciproca. Ciò è vero se le forze esterne non sono a loro volta impulsive; in tali casi, il sistema può considerarsi isolato e, nell'urto, la quantità di moto totale è conservata. Se i corpi che urtano sono puntiformi, la conservazione del momento angolare non aggiunge nessuna informazione.

'energia cinetica del sistema *si conserva* se le forze interne sono conservative. In tal caso l'urto è detto *elastico*. L'urto tra due corpi che alla fine rimangono attaccati l'uno all'altro è detto *completamente anelastico*: in esso viene completamente dissipata l'energia cinetica del sistema di riferimento del centro di massa, K' (si veda l'Equazione 3.19). Nei casi intermedi, l'energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa è dissipata solo parzialmente.

TEST DI COMPRENSIONE

1. Un bambino è seduto su una giostra che ruota con velocità angolare costante. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - La risultante delle forze agenti sul bambino è nulla;
 - Le forze agenti sul bambino compiono un lavoro nullo;
 - La quantità di moto del bambino si conserva;
 - Il momento angolare rispetto al centro della giostra non si conserva.
2. Si consideri un sistema di particelle, sul quale non agiscono forze esterne. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - Il vettore velocità del centro di massa del sistema è necessariamente nullo;
 - Il vettore quantità di moto del sistema è necessariamente nullo;
 - Il vettore velocità del centro di massa è costante;
 - Il vettore momento angolare del sistema rispetto al centro di massa è necessariamente nullo.
3. Si consideri un urto fra particelle puntiformi. Dopo l'urto:
 - se l'urto è anelastico, resta invariata l'energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa;
 - se l'urto è elastico diminuisce l'energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa;
 - se l'urto è elastico aumenta l'energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa;
 - se l'urto è anelastico, diminuisce l'energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa.
4. Si consideri un sistema conservativo; quando tale sistema passa da uno stato A a uno stato B , la variazione di energia potenziale è pari a 120 J. Quale delle seguenti affermazioni, relativa al cambiamento di configurazione considerato, è corretta?
 - La variazione di energia cinetica è pari a 120 J;
 - Il lavoro delle forze è pari a -120 J;
 - Il lavoro delle forze è pari a 120 J;
 - La variazione dell'energia cinetica è pari a 240 J.
5. Si consideri un insieme di particelle allineate lungo l'asse x di un riferimento cartesiano Oxy . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - Il centro di massa del sistema coincide necessariamente con la posizione occupata da una delle particelle;
 - Il centro di massa può avere coordinate $x_{CM} \neq 0, y_{CM} \neq 0$;
 - Il centro di massa può avere coordinate $x_{CM} = 0, y_{CM} \neq 0$;
 - Il centro di massa può avere coordinate $x_{CM} = 0, y_{CM} = 0$.

Problemi

Problema 3.1

Un proiettile di massa m viene sparato dentro un blocco di legno di massa M inizialmente fermo sul bordo di un tavolo (supposto senza attrito) a un'altezza H dal pavimento, come mostrato in Figura 3.2. Dopo l'urto, il proiettile rimane conficcato nel blocco, che cade a terra a una distanza ℓ dal punto di impatto.

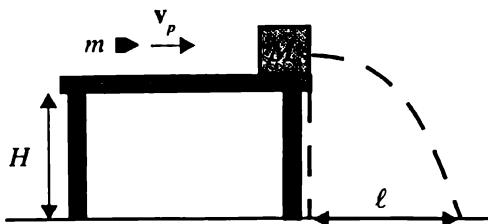


Figura 3.2

- Quali quantità si conservano durante l'urto?
- Determinare la velocità iniziale del proiettile.
- Si supponga ora che, dopo aver toccato il terreno, il blocco continui a strisciare per una lunghezza L , rallentando e poi fermandosi per effetto dell'attrito. Trovare il coefficiente di attrito radente dinamico in funzione delle quantità note.

Problema 3.2

Un blocco di massa $M = 0.5 \text{ kg}$ è posto su un piano orizzontale liscio, ed è connesso a una parete verticale rigida attraverso una molla ideale di costante elastica $k = 450 \text{ N/m}$. Il blocco inizialmente oscilla descrivendo un moto armonico semplice di ampiezza $A = 20 \text{ cm}$. Nell'istante in cui la molla ha la massima estensione, una massa $m = 0.1 \text{ kg}$ colpisce il blocco alla velocità $v = 18 \text{ m/s}$. Dopo la collisione le due masse rimangono attaccate l'una all'altra.

Calcolare:

- la velocità del sistema costituito dalle due masse subito dopo l'urto;
- la nuova ampiezza A' dell'oscillazione del sistema dopo l'urto.

Problema 3.3

Un gatto di massa $m = 5 \text{ kg}$ è inizialmente fermo all'estremità di una zattera quadrata, di massa $M = 20 \text{ kg}$ e lato $L = 2 \text{ m}$ che galleggia sull'acqua di un lago, vicino a un molo di attracco. A un certo istante t_0 il gatto inizia a camminare verso l'estremità opposta della zattera, parallelamente a un lato, alla velocità (supposta costante) di 5 m/s , e si ferma una volta giunto al capo opposto della zattera, nell'istante t_1 . Trascurando l'attrito tra la zattera e l'acqua, determinare di quanto si è spostata la zattera rispetto al molo tra t_0 e t_1 .

Problema 3.4

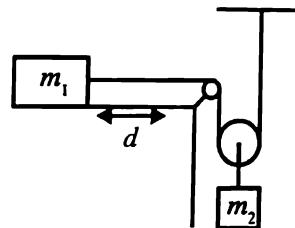
Nel reparto di confezionamento di una fabbrica un carrello piatto di massa $M = 80 \text{ kg}$ viaggia su rotaie (con attrito trascurabile) con velocità pari a 1 m/s quando un braccio meccanico (fermo rispetto al suolo) lascia cadere su di esso, da una altezza di pochi millimetri, un pacco di massa $m = 20 \text{ kg}$ che rimane sul piano del carrello mentre quest'ultimo prosegue la sua corsa sulla rotaia.

- Spiegare cosa cambia nel moto del carrello dopo che il pacco è posto su di esso.
- Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra pacco e carrello è $\mu_d = 0.1$, determinare dopo quanto tempo, a partire dall'istante in cui il pacco tocca la superficie del carrello, i due corpi acquistano una velocità comune.
- Calcolare la variazione di energia cinetica del sistema pacco + carrello e indicare qual è la forza che compie il lavoro responsabile di tale variazione.

Problema 3.5

Un blocchetto di massa m_1 appoggiato su un piano orizzontale, sul quale scorre con attrito dinamico μ , viene tirato da una fune ideale, che ha l'altro estremo fissato a un sostegno ed è mantenuta in tensione da una cartuccia di massa trascurabile, alla quale è appeso un oggetto di massa m_2 . Il sistema è schematizzato in Figura 3.3.

Determinare la velocità che raggiunge il corpo di massa m_1 , inizialmente fermo, dopo avere percorso una distanza d sul piano sotto la trazione della fune.

**Figura 3.3****Problema 3.6**

Un proiettile di massa $m = 1 \text{ g}$ viene sparato con velocità $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$ contro un blocco di plastica di massa $M = 50 \text{ g}$ che appoggia su un piano orizzontale, sul quale può scorrere con attrito dinamico μ_d . In seguito all'urto, il proiettile si conficca nel blocco e questo incomincia a muoversi, spostandosi sul piano di un tratto $d = 60 \text{ cm}$ prima di fermarsi. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico μ_d .

Problema 3.7

Un treno, che si muove su un binario rettilineo, è costituito da tre vagoni A, B e C, aventi masse m_A , m_B e m_C , legati tra loro con delle funi ideali inestensibili. Il vagone A è trainato dalla motrice con una forza F costante. Mediante un dinamometro viene misurata la tensione T_{BC} della fune che connette i vagoni B e C. Trovare l'espressione dell'intensità della forza F esercitata dalla motrice sul primo vagone.

Problema 3.8

Una forza \mathbf{F} dipende solo dalla posizione secondo la legge $\mathbf{F} = axy\mathbf{u}_x + 3b\mathbf{u}_y$, con a e b costanti note. La forza agisce su un punto materiale che si sposta dall'origine O alla posizione finale $B = (3, 6, 0)$ lungo due percorsi diversi: il primo, γ_1 , è il segmento che congiunge direttamente O con B , mentre il secondo, γ_2 , è la spezzata che congiunge dapprima O con il punto intermedio $A = (3, 0, 0)$ e poi A con B . Calcolare il lavoro fatto dalla forza nei due percorsi e dire se tale forza è conservativa oppure no. Verificare il risultato ottenuto calcolandone il rotore.

Problema 3.9

Trovare il centro di massa dei seguenti sistemi di punti materiali:

- due masse m distanti L ;
- due masse diverse, distanti L , una di valore m e l'altra λm ;
- quattro masse m disposte ai vertici di un quadrato di lato L ;
- tre masse poste ai vertici di un triangolo isoscele di altezza h , come in Figura 3.4(d) (ognuna delle due masse alla base vale m , l'altra λm).

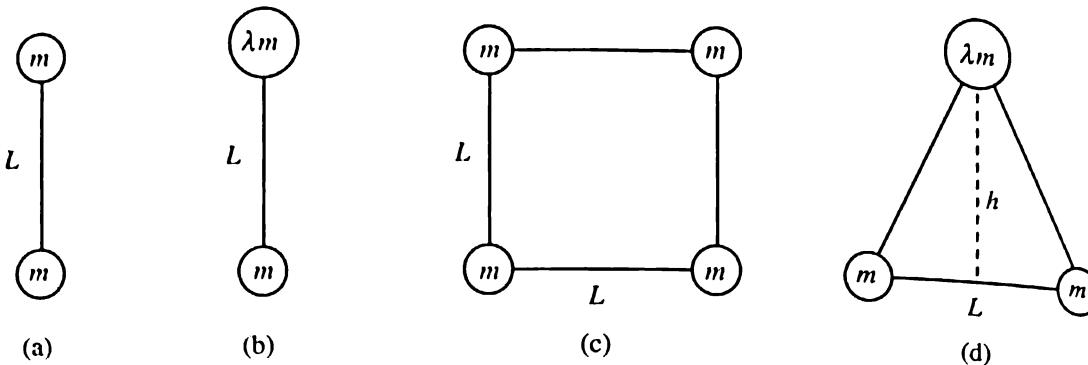


Figura 3.4

Problema 3.10

Un sistema S è costituito da due masse puntiformi, m_1 ed m_2 , unite mediante una molla ideale completamente compressa, di costante elastica k e di lunghezza a riposo λ_0 . All'istante iniziale $t = 0$ il sistema viene lanciato orizzontalmente con velocità v_0 lungo un piano orizzontale scabro di lunghezza ℓ , posto a un'altezza h rispetto al suolo, come mostrato in Figura 3.5. Il coefficiente di attrito dinamico con il piano, μ_d , varia con la distanza x dal punto di lancio secondo la legge: $\mu_d(x) = \mu_{d0} + \alpha x$. La molla tra m_1 ed m_2 resta bloccata nella configurazione di compressione totale per tutto il tempo in cui il sistema si trova sul piano. Si trascuri la resistenza dell'aria.

- Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza di attrito radente quando il sistema si è allontanato di una distanza x dal punto di lancio?
- Qual è lunghezza minima ℓ_{\min} che il piano deve avere affinché il sistema non cada?
- Se $\ell < \ell_{\min}$, il sistema prosegue il suo moto cadendo oltre lo spigolo del piano. A un certo istante, durante la caduta, il sistema esplode: la molla si sblocca improvvisamente e le due masse si staccano venendo proiettate orizzontalmente in versi opposti. Quali sono le componenti orizzontali delle loro velocità, $v_{1,x}$ e $v_{2,x}$, immediatamente dopo la separazione, rispetto al sistema di riferimento indicato in Figura 3.5? [Considerare la forza elastica come impulsiva e assumere che la molla trasferisca tutta la sua energia alle particelle].
- In quale posizione (x_{CM}, y_{CM}) si trova il centro di massa del sistema al termine della caduta, supponendo che entrambi i punti del sistema arrivino al suolo senza incontrare ostacoli, rispetto al riferimento cartesiano in Figura 3.5?

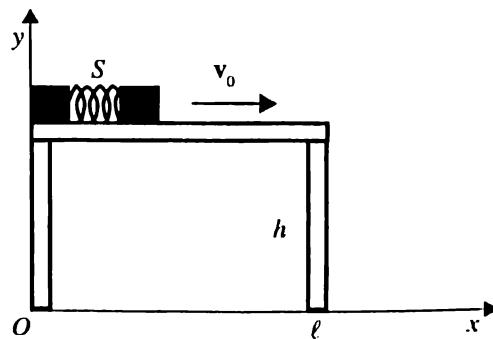


Figura 3.5

Problema 3.11

Un ragazzo su uno skateboard è in un halfpipe, avente profilo semicircolare di raggio R . Si consideri l'insieme del ragazzo con lo skateboard come un corpo puntiforme di massa m . Si consideri

l'halfpipe completamente liscio e si supponga che il ragazzo inizi a muoversi, partendo da fermo, quando si trova a un'altezza h_0 rispetto alla base.

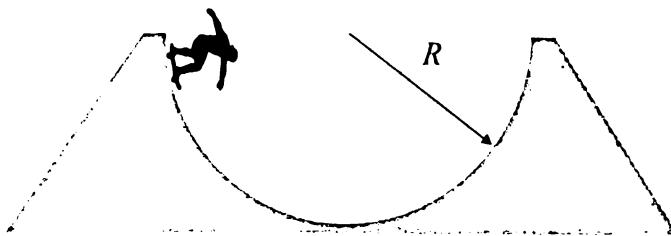


Figura 3.6

- Calcolare la reazione che la pista esercita sullo skateboard quando questo si trova a una altezza $h < h_0$.
- Supponendo infine che $h_0 \ll R$, si studi il moto del ragazzo sullo skateboard.

Problema 3.12

Un corpo di massa m si trova sulla cima di un cuneo di massa M , libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale come in Figura 3.7; l'angolo che la superficie inclinata del cuneo forma con la direzione orizzontale è α e la sua lunghezza è L .

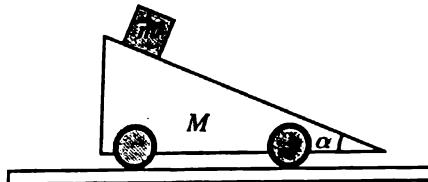


Figura 3.7

- Calcolare le accelerazioni rispetto al suolo possedute dai due corpi durante la fase di discesa del corpo di massa m .
- Calcolare la velocità, relativa al cuneo, che il corpo di massa m possiede quando arriva alla base del piano inclinato.

Problema 3.13

Un'insalatiera semisferica di raggio R viene posta, rovesciata, sulla superficie di un tavolo in modo che non scivoli. Un cubetto di ghiaccio di massa m viene quindi collocato sulla sua sommità, come in Figura 3.8. Una volta rilasciato, il cubetto inizia a scivolare – partendo praticamente da fermo – lungo la superficie dell'insalatiera. L'attrito è trascurabile. Si determini la posizione in cui il blocchetto di ghiaccio si distacca dalla superficie dell'insalatiera.

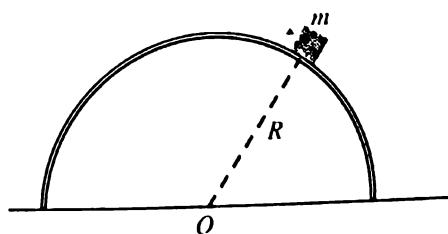


Figura 3.8

Problema 3.14

Una molla ideale di lunghezza a riposo $l_0 = 10$ cm appoggia su un piano con il suo asse orientato verticalmente. Inizialmente sulla estremità libera viene appoggiato un oggetto avente massa $m_A = 2$ kg: si osserva che la lunghezza della molla si riduce a $l_A = 8$ cm. Successivamente viene rimosso

l'oggetto dall'estremo libero della molla e viene sostituito con un altro, avente massa $m_B = 1 \text{ kg}$: conseguentemente la lunghezza della molla diventa l_B . A questo punto la molla viene compressa di un'ulteriore quantità $\Delta l = 3 \text{ cm}$ rispetto a l_B e viene quindi rilasciata.

Determinare, trascurando l'effetto dell'attrito dell'aria:

- la forza esercitata dalla molla sull'oggetto di massa m_B nell'istante in cui viene rilasciata;
- la velocità della massa m_B quando la molla ritorna ad avere la sua lunghezza l_0 ;
- la massima altezza z_{\max} che raggiunge il corpo di massa m_B dopo essersi staccato dalla molla.

Problema 3.15

Un corpo puntiforme di massa m inizia a muoversi, partendo da fermo, dal punto più alto di un piano inclinato (altezza h e inclinazione β). Nel tratto orizzontale alla base del piano inclinato si trova un altro corpo puntiforme di massa $M = 5 \text{ m}$, in quiete. Il tratto orizzontale si congiunge con un altro piano inclinato, simmetrico rispetto al primo (Figura 3.9). Non ci sono attriti. Determinare:

- l'altezza massima raggiunta dai due corpi nell'ipotesi di urto completamente anelastico;
- l'altezza massima raggiunta dal corpo di massa M nell'ipotesi di urto elastico.

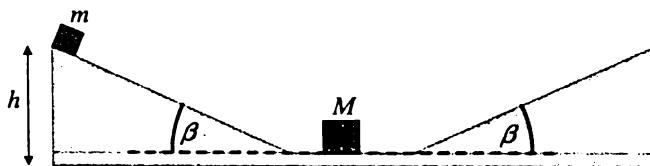


Figura 3.9

Svolgimenti

Problema 3.1

SVOLGIMENTO

► Si consideri un sistema di assi cartesiani con l'asse x orizzontale (orientato verso destra) e l'asse y verticale (orientato verso l'alto).

- Il sistema proiettile + blocco è sottoposto alle seguenti forze esterne: il peso del blocco Mg , la reazione normale N dovuta al piano del tavolo, e il peso del proiettile mg . Tutte le forze sono verticali per cui $\sum F_x = dP_x/dt = 0$ e quindi P_x certamente si conserva. Anche P_y è costante perché quando il proiettile inizia a penetrare nel blocco, il suo peso è bilanciato da un piccolo aumento della reazione vincolare N e quindi la risultante delle forze lungo la direzione y resta nulla. L'energia cinetica invece non si conserva perché l'urto è completamente anelastico.
- Immediatamente prima dell'urto, $P_x^i = mv_p$ avendo chiamato v_p la velocità del proiettile; dopo l'urto, il blocco (con dentro il proiettile) ha una velocità v_0 per cui $P_x^f = (m+M)v_0$. Perciò

$$P_x^i = P_x^f \rightarrow mv_p = (m+M)v_0. \quad (3.29)$$

Questa relazione permette di calcolare v_p solo se si conosce v_0 , che però si ottiene dal moto parabolico del sistema blocco + proiettile mentre cade a terra. Posta l'origine degli assi nel punto ove avviene l'urto e posto $t = 0$ l'istante in cui inizia il moto, le equazioni orarie sono:

$$x(t) = v_0 t \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2.$$

All'istante t_1 in cui il blocco tocca terra, si ha $x(t_1) = \ell$ e $y(t_1) = -H$. Da quest'ultima si ricava $t_1 = \sqrt{2H/g}$ che, sostituita nella precedente, dà $v_0 = \sqrt{(g\ell^2)/(2H)}$. Usando la relazione 3.29 si ottiene infine

$$v_p = \frac{m+M}{m} \sqrt{\frac{g\ell^2}{2H}}.$$

- c) Nel momento in cui il blocco (trattato come puntiforme) tocca il suolo, è soggetto a una forza impulsiva dovuta al pavimento che annulla la componente verticale della sua quantità di moto. È lecito invece assumere che la quantità di moto lungo l'asse orizzontale si conservi, il che significa che:
- i) la forza impulsiva esercitata dal pavimento è praticamente verticale;
 - ii) il moto di strisciamento inizia con una velocità orizzontale pari a v_0 . L'accelerazione del corpo durante lo strisciamento si ottiene dalla relazione $v^2 = v_0^2 + 2a_x(x - x_0)$ imponendo che sia $v = 0$ quando $(x - x_0) = L$.
- Si trova quindi $a_x = -v_0^2/(2L)$. Durante lo strisciamento la II legge di Newton dice inoltre che $-f_d = (m+M)a_x$ e che $N = (m+M)g$. Essendo $f_d = \mu_d N$ si ottiene che

$$\mu_d = \frac{v_0^2}{2gL} = \frac{\ell^2}{4HL}.$$

Problema 3.2 S VOLGIMENTO

► Durante l'urto si conserva la quantità di moto del sistema blocco + proiettile; sebbene esso sia soggetto a una forza esterna (quella elastica), il carattere impulsivo delle forze interne agenti durante l'urto permette di trascurare l'impulso di quest'ultima.

- a) Scelto l'asse x come in Figura 3.10, in particolare, si può affermare che P_x è costante, per cui: $P_x^i = P_x^f \rightarrow -mv = (m+M)v_{0,x}$, avendo chiamato $v_{0,x}$ la componente x della velocità del sistema blocco+proiettile subito dopo l'urto. Da qui si ricava

$$v_{0,x} = -\frac{m}{m+M}v = -\frac{0.1 \text{ kg}}{0.6 \text{ kg}} 18 \text{ m/s} = -3.0 \text{ m/s.}$$

- b) Dopo l'urto, il sistema descrive un moto armonico di ampiezza A' e pulsazione $\omega' = \sqrt{k/(m+M)}$. Sia $t = 0$ l'istante dell'urto, e si supponga di descrivere il moto con la legge oraria $x(t) = A'\cos(\omega't + \phi_0)$. La velocità in ogni istante sarà $v_x(t) = A'\omega' \sin(\omega't + \phi_0)$ e quindi in ogni istante vale la relazione

$$x^2(t)\omega'^2 + v_x^2(t) = A'^2\omega'^2.$$

Ora, subito dopo l'urto $x(t=0) = A$ e $v(t=0) = v_{0,x}$ per cui si ricava

$$A' = \sqrt{A^2 + \frac{v_{0,x}^2}{\omega'^2}} = \sqrt{0.04 \text{ m}^2 + \frac{9 \text{ m}^2\text{s}^{-2}}{750 \text{ s}^{-2}}} = 0.228 \text{ m.}$$

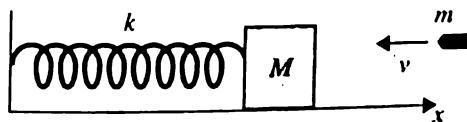


Figura 3.10

Problema 3.3**SVOLGIMENTO**

► La quantità di moto del sistema gatto+zattera si conserva e, rispetto a un sistema di riferimento solidale con il molo, è sempre nulla; perciò il centro di massa del sistema non si sposta (Attenzione! non si confonda il centro di massa *del sistema* con il centro di massa della zattera!). Lo spostamento della zattera rispetto al molo coincide dunque con il suo spostamento rispetto al *CM*.

Considerando il sistema di riferimento del centro di massa (SRCM) e il sistema di riferimento di origine O' (posta sul bordo destro della zattera, come in Figura 3.11), la posizione del gatto è definita dalla sua coordinata x rispetto al *CM* e dalla sua coordinata x' rispetto a O' , tali che

$$x = x' + x_{O'},$$

essendo $x_{O'}$ l'ascissa di O' rispetto al SRCM. Derivando l'equazione precedente rispetto al tempo, si trova la relazione tra le velocità $v_x = v'_x + v_{O',x}$ dove $v'_x = -5 \text{ m/s}$. Si noti che $x(t_0) = d$ (si veda la Figura 3.11) e $x'(t_0) = 0$.

Tra t_0 e t_1 il gatto si muove, rispetto alla zattera, di moto rettilineo uniforme verso sinistra. Quindi rispetto a O' la sua posizione in un generico istante $t > t_0$ è espressa dall'ascissa

$$x'(t) = x'(t_0) + (t - t_0)v'_x = (t - t_0)v'_x;$$

al tempo t_1 si ha quindi $x'(t_1) = (t_1 - t_0)v'_x = -L$, da cui $t_1 - t_0 = -L/v'_x$; nello stesso istante, lo spostamento della zattera risulta uguale a $\Delta x_{O'} = x_{O'}(t_1) - x_{O'}(t_0) = (t_1 - t_0)v_{O',x} = -Lv_{O',x}/v'_x$. La velocità $v_{O',x}$ della zattera non è nota ma si può ottenere in funzione di v'_x considerando che, rispetto al SRCM, $P_x(t_0) = P_x(t) = 0$ per ogni istante $t_0 < t < t_1$, cioè

$$0 = Mv_{O',x} + mv_x = Mv_{O',x} + m(v'_x + v_{O',x})$$

da cui si ottiene infine

$$v_{O',x} = -\frac{m}{m+M}v'_x = \frac{5 \text{ kg}}{25 \text{ kg}}5 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}.$$

Pertanto lo spostamento della zattera tra t_0 e t_1 è

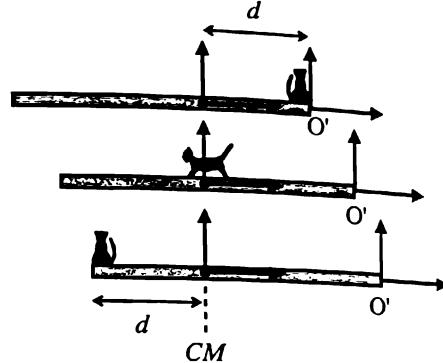
$$\Delta x_O' = -Lv_{O',x}/v'_x = \frac{m}{m+M}v'_x \frac{L}{v'_x} = \frac{m}{m+M}L = \frac{L}{5} = 0.4 \text{ m}.$$

Allo stesso risultato si può arrivare considerando che, siccome il *CM* è fermo, la configurazione iniziale delle masse (quando il gatto è a una estremità) non può che essere simmetrica rispetto alla configurazione finale (quando il gatto è all'altra estremità). Detta d la distanza iniziale tra il gatto e il centro di massa, lo spostamento totale della zattera deve essere uguale a $L - 2d$. Tuttavia $d = |x'_{CM}(t_0)|$ (si veda la Figura 3.11); se la zattera è omogenea, il suo centro di massa si trova nel suo centro geometrico e quindi

$$d = \left| \frac{M(-L/2) + 0}{m+M} \right| = \frac{ML}{2(m+M)}$$

da cui

$$\Delta x_O' = (L - 2d) = L \left(1 - \frac{M}{m+M} \right) = \frac{m}{m+M}L.$$

**Figura 3.11**

Problema 3.4**SVOLGIMENTO**

► Per affrontare il problema si può interpretare quanto descritto nel testo come un fenomeno di urto completamente anelastico tra carrello e pacco, oppure come una variazione di massa del carrello.

a) Sia x l'asse orizzontale (orientato nella direzione del moto del carrello) e y l'asse verticale. La componente orizzontale della quantità di moto del sistema carrello + pacco è certamente conservata poiché $\sum F_x^{\text{ext}} = 0$. Pertanto l'improvviso aumento della massa sul carrello fa sì che la velocità del carrello stesso diminuisca bruscamente. Sia $v_{x,i} = +1 \text{ m/s}$ la componente x della velocità iniziale del carrello (vuoto) e $v_{x,f}$ la corrispondente quantità per il carrello carico. La relazione $P_{x,i} = P_{x,f}$ si scrive quindi $Mv_{x,i} = (m+M)v_{x,f}$ da cui si ottiene

$$v_{x,f} = \frac{M}{m+M} v_{x,i} = \frac{80}{100} 1 \text{ m/s} = 0.8 \text{ m/s}.$$

b) Sia t_0 l'istante in cui i due corpi vengono a contatto. Nei primi istanti dopo t_0 , sul pacco agisce una forza di attrito dinamico f_d che lo *accelera* e sul carrello una forza di attrito $-f_d$ che lo *rallenta*. Sia t_1 l'istante in cui i due corpi si muovono alla stessa velocità finale $v_{x,f}$ e l'attrito diviene statico. Dal teorema dell'impulso applicato al pacco si ha che $f_d(t_1 - t_0) = mv_{x,f} - 0$ ed essendo $f_d = \mu_d mg$ si ottiene alla fine che

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{v_{x,f}}{\mu_d g} \simeq 0.8 \text{ s}.$$

c) L'energia cinetica del sistema non si conserva perché l'urto è completamente anelastico. Si ha infatti

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(M+m)v_{x,f}^2 - \frac{1}{2}Mv_{x,i}^2 = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{M}{m+M}v_{x,i}\right)^2 - \frac{1}{2}Mv_{x,i}^2,$$

che porta a

$$K_f - K_i = -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v_{x,i}^2 = -8.0 \text{ J}.$$

Tale variazione è la somma della variazione (positiva) dell'energia cinetica del pacco e di quella (negativa) dell'energia cinetica del carrello, entrambe dovute al lavoro compiuto dalla forza d'attrito:

$$\Delta K_m = +\frac{1}{2}mv_{x,f}^2 = +6.4 \text{ J}$$

$$\Delta K_M = \frac{1}{2}M(v_{x,f}^2 - v_{x,i}^2) = -14.4 \text{ J}.$$

Problema 3.5**SVOLGIMENTO**

► Scriviamo la II equazione di Newton per la massa m_1 , scomponendo le forze lungo gli assi di un sistema cartesiano in cui l'asse x è orizzontale e orientato verso destra, e l'asse z è verticale e orientato verso il basso:

$$(asse x) \quad T_1 - f_d = m_1 a_1 \quad (3.30)$$

$$(asse z) \quad m_1 g - N = 0 \quad (3.31)$$

dove f_d è la forza di attrito radente dinamico e T_1 la tensione della fune collegata a m_1 . Poiché $f_d = \mu_d N$, usando la seconda equazione si trova $f_d = \mu_d m_1 g$ per cui la prima diventa

$$T_1 - \mu_d m_1 g = m_1 a_1. \quad (3.32)$$

Il blocchetto si muove quindi di moto uniformemente accelerato, con accelerazione a_1 : per determinarla è necessario ottenere un'espressione per la tensione T_1 della fune ideale.

Scriviamo ora la II legge di Newton per la massa m_2 (limitandoci alle componenti lungo l'asse z):

$$+m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad (3.33)$$

dove T_2 è la tensione della fune che collega la massa m_2 alla carrucola mobile (si veda la Figura 3.12). Le Equazioni 3.32 e 3.33 formano un sistema a 4 incognite, per cui occorre trovare ulteriori relazioni tra le due tensioni e le due accelerazioni. Il legame tra T_1 e T_2 si ottiene applicando la II legge di Newton alla carrucola mobile, che ha massa trascurabile. Usando l'asse z già introdotto, si ha infatti che:

$$+T_2 - 2T_1 = 0 \quad (3.34)$$

da cui è evidente che $T_2 = 2T_1$.

Anche le accelerazioni a_1 e a_2 sono legate l'una all'altra. Infatti, quando la carrucola (e quindi anche la massa m_2) scende di un tratto dz_2 , i tratti di corda a sinistra e a destra di essa devono entrambi allungarsi della stessa quantità dz_2 (si veda la Figura 3.12). Ora, l'estremo destro della fune connessa a m_1 è fisso e la lunghezza totale di tale fune deve rimanere costante (essendo essa inestensibile). Quindi il tratto di fune orizzontale (tra la carrucola fissa e m_1) deve accorciarsi della quantità $2 dz_2$. In altre parole, la massa m_1 si deve spostare verso destra di un tratto $dx_1 = 2 dz_2$. Poiché $dx_1 = v_1 dt$ e $dz_2 = v_2 dt$, si ottiene la relazione tra le velocità di m_1 ed m_2 :

$$v_1 = 2v_2.$$

Infine, derivando rispetto al tempo, si ottiene la seguente relazione tra le accelerazioni:

$$a_1 = 2a_2.$$

Le Equazioni 3.32 e 3.33 diventano pertanto:

$$\begin{aligned} T_1 - \mu_d m_1 g &= m_1 a_1 \\ +m_2 g - 2T_1 &= m_2 \frac{a_1}{2}. \end{aligned}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$a_1 = 2 \frac{(m_2 - 2\mu_d m_1)}{4m_1 + m_2} g.$$

La velocità raggiunta dal blocchetto m_1 dopo che ha percorso una distanza d sul piano orizzontale risulta pertanto

$$v_1(d) = \sqrt{2a_1 d} = \sqrt{\frac{4g d (m_2 - 2\mu_d m_1)}{4m_1 + m_2}}.$$

Problema 3.6

Svolgimento

► Scegliamo un sistema di assi cartesiani con l'asse x parallelo al piano e rivolto nel verso del moto, e l'asse y verticale e rivolto verso l'alto. Applichiamo il teorema di conservazione della quantità di moto al sistema proiettile-blocco. In particolare, osserviamo che P_x è costante e prima dell'urto essa è semplicemente quella del proiettile:

$$P_{0,x} = m v_0$$

mentre dopo l'urto è pari alla quantità di moto del blocco con il proiettile incastrato al proprio interno:

$$P_{1,x} = (m + M) V_1$$

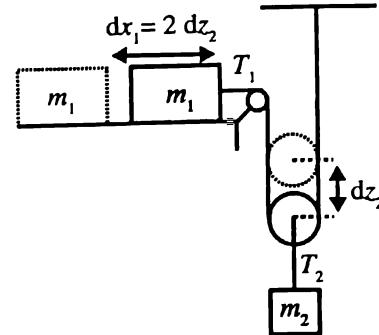


Figura 3.12

dove V_1 è il modulo della velocità del sistema blocco-proiettile subito dopo l'urto (che coincide con la sua componente x per come si è scelto l'asse). V_1 può essere calcolata imponendo $P_{0,x} = P_{1,x}$:

$$V_1 = \frac{m}{(m+M)} v_0.$$

In seguito all'urto, il sistema blocco-proiettile possiede l'energia cinetica

$$K_1 = \frac{1}{2}(m+M)V_1^2 = \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)}$$

che si riduce a zero dopo che ha percorso il tratto d . Il lavoro compiuto dalla forza di attrito tra l'istante iniziale (subito dopo l'urto) e l'istante finale (quando il sistema si ferma) è dato da:

$$L_{att} = -F_{att} d = -\mu_d (m+M) g d$$

e, in accordo con il teorema dell'energia cinetica (Equazione 2.7), è uguale alla variazione di energia cinetica, ossia $\Delta K = K_2 - K_1 = -K_1$. Pertanto

$$\mu_d (m+M) g d = \frac{m^2 (v_0)^2}{2(m+M)}.$$

Da qui si ricava il coefficiente d'attrito:

$$\begin{aligned} \mu_d &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 \frac{(v_0)^2}{gd} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 \text{ g}}{51 \text{ g}} \right)^2 \frac{(100 \text{ ms}^{-1})^2}{9.8 \text{ ms}^{-2} 0.6 \text{ m}} \cong 0.327. \end{aligned}$$

Problema 3.7

Svolgimento

► Il problema è unidimensionale e la schematizzazione del sistema è mostrata in Figura 3.13. L'equazione del moto per il vagone C ha la forma scalare seguente:

$$T_{BC} = m_C a$$

da cui si ottiene l'accelerazione: $a = \frac{T_{BC}}{m_C}$. L'equazione del moto per il vagone B è invece

$$T_{AB} - T_{BC} = m_B a = \frac{m_B}{m_C} T_{BC}$$

da cui si ottiene

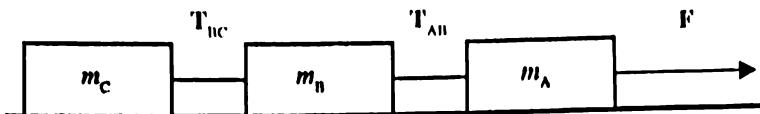
$$T_{AB} = \frac{m_B + m_C}{m_C} T_{BC}.$$

Infine, l'equazione del moto per il vagone A è: $F - T_{AB} = m_A a$, ossia

$$F - \frac{m_B + m_C}{m_C} T_{BC} = \frac{m_A}{m_C} T_{BC}$$

da cui si ottiene l'espressione cercata

$$F = \frac{m_A + m_B + m_C}{m_C} T_{BC}.$$

**Figura 3.13**

Si noti che l'equazione precedente equivale a $F = (m_A + m_B + m_C)a$: il moto del centro di massa del sistema costituito dai tre vagoni è cioè determinato dalla sola forza esterna F .

Problema 3.8**SVOLGIMENTO**

- Il lavoro $L_{OB}^{\gamma_1}$ fatto dalla forza F lungo il cammino γ_1 è dato dall'integrale seguente

$$\begin{aligned} L_{OB}^{\gamma_1} &= \int_{O\gamma_1}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_O}^{x_B} F_x dx + \int_{y_O}^{y_B} F_y dy = \\ &= \int_0^3 axy dx + \int_0^6 3b dy. \end{aligned}$$

Ora, nel primo integrale a secondo membro, occorre esprimere y in funzione di x . Per fare ciò, basta osservare che la retta che unisce O a B ha equazione $y = 2x$. Pertanto si ottiene:

$$L_{OB}^{\gamma_1} = \int_0^3 ax(2x) dx + \int_0^6 3b dy = 18(a+b). \quad (3.35)$$

Il lavoro lungo il percorso γ_2 , $L_{OB}^{\gamma_2}$, può essere calcolato come somma di due integrali, $L_{OA}^{\gamma_2}$ e $L_{AB}^{\gamma_2}$, ciascuno relativo a uno dei segmenti che compongono la spezzata,

$$\begin{aligned} L_{OB}^{\gamma_2} &= L_{OA}^{\gamma_2} + L_{AB}^{\gamma_2} = \\ &= \left(\int_{x_O}^{x_A} F_x dx + \int_{y_O}^{y_A} F_y dy \right) + \left(\int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy \right) = \\ &= \int_0^3 axy dx + \int_0^0 3b dy + \int_3^6 axy dx + \int_0^6 3b dy. \end{aligned}$$

Il primo integrale è zero perché nel tratto tra O e A si ha identicamente $y = 0$; il secondo e il terzo sono nulli perché gli estremi di integrazione sono uguali. Pertanto si trova:

$$L_{OB}^{\gamma_2} = 0 + 0 + 0 + 18b = 18b. \quad (3.36)$$

Il lavoro della forza \mathbf{F} è diverso lungo i due percorsi e dunque la forza non è conservativa. Un modo alternativo per verificare la non conservatività di \mathbf{F} è attraverso il calcolo del suo rotore, che risulta diverso da zero:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial z} 3b \right) \mathbf{u}_x - \left(\frac{\partial}{\partial z} axy \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} 3b - \frac{\partial}{\partial y} axy \right) \mathbf{u}_z = -ax \mathbf{u}_z.$$

Problema 3.9**SVOLGIMENTO**

- Per risolvere questo problema conviene fare uso del fatto che, se una distribuzione di masse possiede assi e/o piani di simmetria, il suo centro di massa è sempre posto su di essi.

- a) In questo caso il segmento che congiunge le due masse identiche è un asse di simmetria, come lo è anche la retta ad esso perpendicolare e che passa per il suo punto medio. Quindi il centro di massa deve trovarsi all'intersezione dei due assi, ossia a metà del segmento che congiunge le due masse.
- b) In questo caso il segmento che congiunge le masse è ancora un asse di simmetria, quindi il centro di massa sarà un punto di questo segmento. A causa della differenza di massa dei due punti materiali che costituiscono il sistema, però, ora non si ha più simmetria per riflessione rispetto a un piano perpendicolare a questo asse, come era nel caso precedente. Pertanto si deve risolvere l'equazione che permette di determinare la posizione del centro di massa, scegliendo, per comodità, come asse x l'asse che congiunge le masse puntiformi. Ponendo l'origine dell'asse nella posizione x_1 , occupata dalla massa m , la massa λm si trova in posizione $x_2 = L$ per cui:

$$x_{CM} = \frac{x_1 m + x_2 \lambda m}{m + \lambda m} = L \frac{\lambda}{1 + \lambda}. \quad (3.37)$$

Se $\lambda = 0$, uno dei due punti ha massa nulla e il centro di massa coincide con l'unico punto dotato di massa; all'aumentare di λ aumenta la massa dell'altro punto e il centro di massa si sposta verso di esso. Quando $\lambda = 1$ le due masse sono identiche e si riottiene il caso (a). Quando $\lambda \rightarrow \infty$ il centro di massa va a coincidere con la posizione della massa λm .

- c) Il sistema ha diversi assi di simmetria (le due diagonali del quadrato, per esempio) che si intersecano nel centro: tale punto coincide pertanto con la posizione del centro di massa. Lo si può verificare matematicamente scrivendo le due equazioni per le posizioni x e y del centro di massa prendendo come assi x e y due lati del quadrato e come origine un vertice:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i x_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i = \frac{1}{4} (0 + 0 + L + L) = \frac{L}{2}, \quad (3.38)$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i y_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i = \frac{1}{4} (0 + 0 + L + L) = \frac{L}{2}. \quad (3.39)$$

- d) Il sistema ha un asse di simmetria, che coincide con la retta su cui giace l'altezza h ; quindi il centro di massa è certamente su tale retta. La posizione del centro di massa si può calcolare come al punto precedente, scegliendo un opportuno sistema di assi e definendo in tal modo la posizione delle varie masse del sistema. Mostriamo qui un altro approccio, del tutto equivalente. Si può scomporre il sistema in due sottosistemi: uno costituito dalla massa λm e uno composto dalle due masse m . Il centro di massa del primo sottosistema coincide ovviamente con la posizione dell'unica massa presente, ossia λm . Il centro di massa del secondo sottosistema, per quanto visto al punto (a), si trova a metà della base del triangolo. Ai fini del calcolo del centro di massa, il sistema può essere pensato come l'insieme di una particella puntiforme di massa λm , posta al vertice superiore del triangolo, e di una particella di massa $2m$, posta nel punto medio della base del triangolo. Il problema iniziale è quindi ricondotto a un caso particolare di quanto visto in (b): un punto di massa λm e uno di massa $2m$ posti a distanza h . Il centro di massa del sistema si troverà allora a una distanza $d = h \frac{\lambda}{2+\lambda}$ dalla base del triangolo. Nel caso in cui $\lambda = 1$ le tre masse sono identiche e il centro di massa si trova a $\frac{1}{3}$ dell'altezza del triangolo.

Utilizzando lo stesso ragionamento è possibile trovare il centro di massa di una distribuzione triangolare generica di masse m identiche: le masse poste in due vertici consecutivi compongono un sottosistema di massa $2m$ il cui centro di massa si trova a metà del lato che li unisce. Il centro di massa della distribuzione triangolare si trova quindi sulla mediana relativa a tale lato; ripetendo il ragionamento per tutti i lati, si deduce che il centro di massa si trova nel punto di intersezione delle mediane.

Problema 3.10

SVOLGIMENTO

- Per la soluzione dei punti (a) e (b) si consideri che, prima che la molla si sblocchi, il sistema è assimilabile ad un punto materiale, di massa $m = m_1 + m_2$, in moto rettilineo su un piano scabro.

- a) Il lavoro compiuto dalla forza di attrito radente nel tratto $[0, x]$ è chiaramente funzione di x e si valuta applicando la definizione:

$$\begin{aligned} L_{att}(x) &= \int_0^x F_{att}(x') dx' = \int_0^x [-\mu_d(x') mg] dx' = \\ &= -mg \int_0^x (\mu_{d0} + \alpha x') dx' = -mg \left(\mu_{d0}x + \frac{1}{2}\alpha x^2 \right). \end{aligned}$$

- b) Il sistema cade oltre il piano quando arriva alla fine di esso con velocità diversa da zero. La componente orizzontale v_x della velocità del sistema, in funzione della distanza x dal punto di lancio, si trova applicando il teorema dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2}m[v_x^2(x) - v_0^2] = L_{att}(x). \quad (3.40)$$

Segue, quindi,

$$v_x(x) = \sqrt{v_0^2 - 2g \left(\mu_{d0}x + \frac{1}{2}\alpha x^2 \right)}. \quad (3.41)$$

Per calcolare la lunghezza minima del piano, osserviamo che, per non cadere, il corpo deve fermarsi in un punto di ascissa $x^* \leq \ell$. L'ascissa x^* del punto di arresto si ottiene imponendo la condizione $v_x(x^*) = 0$, che equivale a:

$$v_0^2 = 2g \left(\mu_{d0}x^* + \frac{1}{2}\alpha(x^*)^2 \right). \quad (3.42)$$

Tale equazione ammette una unica soluzione accettabile:

$$x^* = \frac{1}{\alpha} \left(-\mu_{d0} + \sqrt{\mu_{d0}^2 + v_0^2 \frac{\alpha}{g}} \right). \quad (3.43)$$

Il corpo non cade se $\ell \geq x^* = \ell_{\min}$.

- c) Nell'istante in cui si verifica l'esplosione, si conserva la quantità di moto del sistema. Non si conserva invece l'energia cinetica. Nel sistema di riferimento del centro di massa, tutta l'energia potenziale elastica viene convertita in energia cinetica delle due masse. Indicando con $v'_{1,x}$ e $v'_{2,x}$ le componenti orizzontali (le uniche non nulle) delle velocità dei due punti materiali rispetto al loro centro di massa immediatamente dopo l'esplosione, le considerazioni precedenti equivalgono a imporre che:

$$\begin{cases} m_1 v'_{1,x} = -m_2 v'_{2,x} \\ \frac{1}{2}(m_1 v'_{1,x}^2 + m_2 v'_{2,x}^2) = \frac{1}{2}k \lambda_0^2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$v'_{1,x} = \pm \sqrt{k \lambda_0^2 \frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)}} \quad (3.44)$$

$$v'_{2,x} = \mp \sqrt{k \lambda_0^2 \frac{m_1}{m_2(m_1 + m_2)}}. \quad (3.45)$$

Rispetto al sistema di riferimento cartesiano di origine O indicato in Figura 3.5, si ha:

$$v_{1,x} = v_x(L) \pm \sqrt{k \lambda_0^2 \frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)}} \quad (3.46)$$

$$v_{2,x} = v_x(L) \mp \sqrt{k \lambda_0^2 \frac{m_1}{m_2(m_1 + m_2)}}. \quad (3.47)$$

Problema 3.11

Svolgimento

► In Figura 3.14 sono riportate le forze agenti sul sistema costituito dallo skateboard e dal ragazzo, che d'ora in avanti considereremo come un corpo puntiforme di massa m : oltre alla forza peso mg , agisce la reazione vincolare N , perpendicolare alla pista.

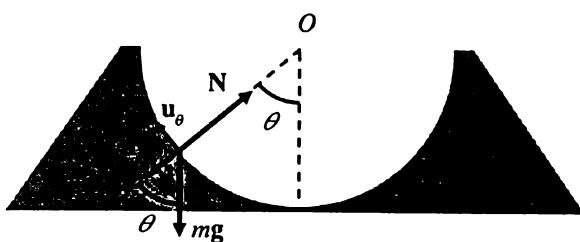


Figura 3.14 Diagramma delle forze agenti in un punto P arbitrario.

- a) Scelto un riferimento solidale alla pista, la seconda legge di Newton assume la forma

$$mg + N = ma \quad (3.50)$$

Scegliamo un sistema di coordinate polari, con origine in O e asse polare diretto verticalmente come in Figura 3.14: la posizione di un punto arbitrario P è identificata dalla coordinata angolare θ , visto che $r = R = \text{costante}$ lungo tutto l'halfpipe.

Proiettando l'equazione di Newton 3.50 lungo le direzioni individuate dai versori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ , e tenendo presente le Equazioni 1.14, si ha

$$-mR \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -N + mg \cos \theta \quad (\text{lungo } \mathbf{u}_r) \quad (3.51)$$

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (\text{lungo } \mathbf{u}_\theta) \quad (3.52)$$

La forza N non compie lavoro, mentre la forza peso è conservativa, quindi si conserva l'energia meccanica. Questo vuol dire che, dati due punti P_0 e P lungo la pista, $E(P_0) = E(P)$, ossia

$$U(P_0) + K(P_0) = U(P) + K(P) \quad (3.53)$$

In particolare, visto che il ragazzo parte da fermo in P_0 , $K(P_0) = 0$. Inoltre, dalla Figura 3.15 si vede che l'altezza rispetto alla base dell'halfpipe vale $h_0 = R(1 - \cos \theta_0)$ nel punto P_0 , e $h = R(1 - \cos \theta)$ nel punto P . Di conseguenza, scegliendo come livello zero dell'energia potenziale

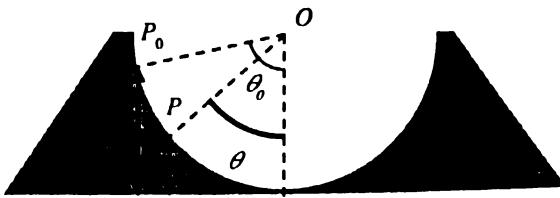


Figura 3.15 In P_0 e P l'altezza relativa alla base dell'halfpipe è, rispettivamente, h_0 e h .

la base dell'halfpipe, l'Equazione 3.53 si scrive nella forma $mgh_0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$, o, facendo riferimento alla Figura 3.15, nella forma

$$-mgR\cos\theta_0 = -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.54)$$

avendo indicato con v il modulo della velocità nel punto P . Tenendo presente l'espressione 1.13 della velocità in coordinate polari, si può scrivere

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = R^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (3.55)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $r = R$. Dall'Equazione 3.51 ricaviamo quindi l'espressione della reazione normale nel punto P :

$$N = mg\cos\theta + mR \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (3.56)$$

e, facendo uso della legge di conservazione dell'energia 3.54 e dell'espressione del quadrato del modulo della velocità 3.55, otteniamo

$$N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0). \quad (3.57)$$

Osserviamo in particolare che per qualunque $\theta_0 \neq 0$, $N(0) \neq mg$.

- b) Tenendo presente che $h_0 = R(1 - \cos\theta_0)$, sviluppando il coseno intorno a θ_0 , si ottiene $h_0 \approx R\frac{1}{2}\theta_0^2$, per cui $h_0 \ll R \Rightarrow \theta_0 \rightarrow 0$. Di conseguenza, se parte da un angolo θ_0 "piccolo", il corpo m descriverà piccoli angoli intorno alla posizione $\theta = 0$. Questo vuol dire che se consideriamo l'equazione di Newton 3.52, possiamo scrivere $\sin\theta \approx \theta$:

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta. \quad (3.58)$$

Quindi si ottiene un'equazione differenziale del tipo: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0$, che descrive un moto armonico di pulsazione $\Omega = \sqrt{g/R}$. In particolare, la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $\theta(t=0) = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0$ è

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\Omega t.$$

Problema 3.12

Svolgimento

- Il moto del blocco può essere descritto rispetto a un sistema di riferimento (inerziale) solidale al suolo (Figura 3.16), oppure rispetto a un sistema di riferimento (non inerziale) solidale al piano inclinato (Figura 3.17).

- a) Le forze agenti sono descritte in Figura 3.16. In particolare sul corpo di massa m agiscono: la forza peso mg e la reazione vincolare del piano inclinato N . Invece sul cuneo di massa M agiscono: la forza peso Mg , la forza $-N$ applicata dal corpo di massa m e la reazione del piano di appoggio R . Notiamo che, qualitativamente, se il corpo m viene lasciato libero di cadere, ci aspettiamo che il cuneo si muova verso sinistra, con una accelerazione A . Questa è una conseguenza della conservazione delle quantità di moto. Osserviamo infatti che sul sistema così descritto non agiscono forze esterne lungo la direzione x , quindi si conserva la componente della quantità di moto in tale direzione: in particolare, questo vuol dire che il centro di massa del sistema, fermo inizialmente, continua a stare fermo. Quindi, se il corpo scivola verso destra, il cuneo si muove verso sinistra.

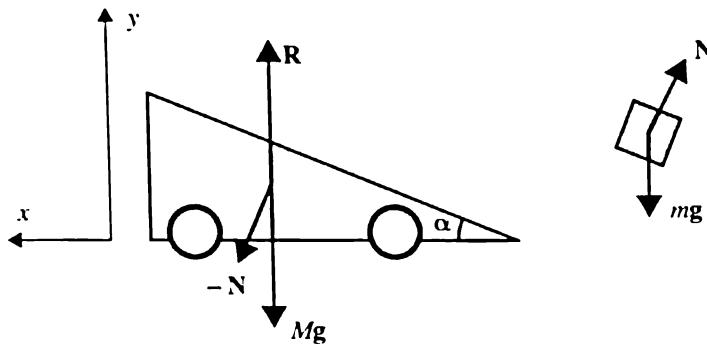


Figura 3.16 Diagramma delle forze nel sistema di riferimento inerziale di assi x e y .

Possiamo scrivere le equazioni del moto del corpo m nel sistema di riferimento non inerziale solidale al piano inclinato (si veda la Figura 3.17):

$$mg + N - mA = ma' \quad (3.59)$$

avendo indicato con a' l'accelerazione relativa al sistema di riferimento non inerziale e con $-mA$ la forza apparente di trascinamento.

Facendo riferimento agli assi cartesiani di Figura 3.17, si noti che le componenti delle forze agenti lungo la direzione y' devono avere risultante nulla, perché non ci può essere moto relativo al piano in tale direzione. Pertanto, proiettando l'Equazione 3.59 nella direzione y' , si ha

$$+N - mg \cos \alpha + mA \sin \alpha = 0 \quad (3.60)$$

usando la quale si può esprimere il modulo della forza N in funzione di A (che è un'incognita del problema!)

$$N = mg \cos \alpha - mA \sin \alpha. \quad (3.61)$$

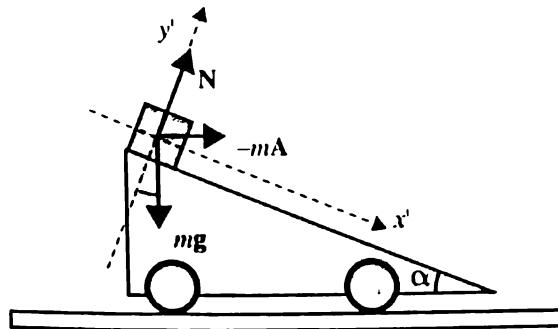


Figura 3.17 Forze agenti sul corpo di massa m nel sistema di riferimento non inerziale di assi x' e y' .

Proiettando l'Equazione 3.59 lungo la direzione x' , otteniamo

$$ma'_{x'} = mg \sin \alpha + mA \cos \alpha \quad (3.62)$$

A questo punto possiamo scrivere le equazioni del moto dei due corpi, nel sistema di riferimento inerziale, utilizzando gli assi x e y di Figura 3.16. Per il corpo di massa m scriviamo: $ma = mg + N$, da cui, proiettando lungo gli assi otteniamo

$$ma_x = -N \sin \alpha \quad (3.63)$$

$$ma_y = -mg + N \cos \alpha \quad (3.64)$$

Per il cuneo di massa M scriviamo la prima equazione cardinale: $MA = Mg + (-N) + R$, da cui, proiettando lungo gli assi si ottiene:

$$MA_x = N \sin \alpha \quad (3.65)$$

$$MA_y = -Mg + R - N \cos \alpha. \quad (3.66)$$

Essendo $A_x = A$ e $A_y = 0$,

$$MA = N \sin \alpha \quad (3.67)$$

$$R = Mg + N \cos \alpha. \quad (3.68)$$

Sostituendo l'espressione di N ricavata dalla 3.61 nella 3.67 si ha

$$MA = (mg \cos \alpha - mA \sin \alpha) \sin \alpha, \quad (3.69)$$

da cui si ricava esplicitamente A

$$A = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g. \quad (3.70)$$

Usando le Equazioni 3.63 e 3.65, si ottiene

$$a_x = -\frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g. \quad (3.71)$$

Infine, dalle Equazioni 3.64, 3.65 e 3.70 si ricava

$$a_y = -\frac{(M+m) \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g. \quad (3.72)$$

- b) Per determinare l'accelerazione del corpo relativa al cuneo, si sostituisce il valore di A dato dalla 3.70 nell'espressione 3.62 ottenendo

$$a'_{x'} = \frac{M+m}{M + m \sin^2 \alpha} g \sin \alpha. \quad (3.73)$$

Relativamente al cuneo, quindi, il corpo di massa m si muove con accelerazione costante $a'_{x'}$; pertanto, facendo uso della relazione 1.7, possiamo determinare la velocità che esso ha alla fine del piano inclinato, quando ha percorso un tratto L : $v'_{x'} = \sqrt{2a'_{x'} L}$. Questo valore coincide con il modulo della velocità del corpo m rispetto al cuneo.

Problema 3.13**SVOLGIMENTO**

► L'insalatiera è assimilabile a una calotta sferica liscia e il cubetto a un punto materiale. Scegliamo un sistema di riferimento solidale alla calotta e, in esso, un sistema di coordinate polari, avente origine O nel centro della calotta. La posizione del cubetto in un generico punto Q sulla calotta è individuata dalle coordinate r (che è costante e uguale a R) e θ , che definiamo come l'angolo che il vettore posizione \mathbf{r} forma con la semiretta su cui giace OP (si veda la Figura 3.18). L'equazione di Newton risulta

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} \quad (3.74)$$

dove \mathbf{N} è la reazione vincolare che la calotta esercita sul cubetto. Pertanto, quando il cubetto si trova in un punto Q la proiezione dell'equazione di Newton lungo i versori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ (vedere Figura 3.18) determina le seguenti equazioni:

$$m \left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = N - mg \cos \theta \quad (3.75)$$

$$m \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) = mg \sin \theta, \quad (3.76)$$

avendo fatto uso dell'espressione 1.14 per l'accelerazione in coordinate polari.

In particolare, tenendo conto del fatto che $r = R = \text{costante}$, dalla 3.75 otteniamo:

$$N = mg \cos \theta - mR \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (3.77)$$

La conservazione dell'energia meccanica ci porta a scrivere che $E(P) = E(Q)$, ossia

$$U(P) + K(P) = U(Q) + K(Q) \quad (3.78)$$

In particolare, fissando lo zero dell'energia potenziale alla base della calotta, tenendo conto che $K(P) = 0$ e indicando con v il modulo della velocità in Q , si ottiene

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta. \quad (3.79)$$

Tenendo presente l'espressione 1.13 della velocità in coordinate polari, e considerando che fintanto che il cubetto di ghiaccio si trova sulla calotta $r = R = \text{cost}$, si può scrivere

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = R^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (3.80)$$

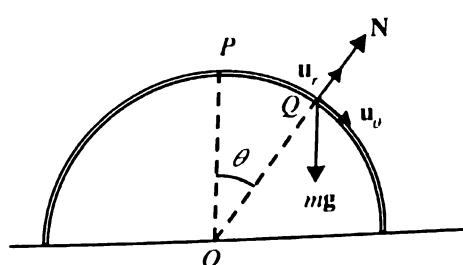


Figura 3.18 Diagramma delle forze.

Quindi, tenendo presente la 3.79 e andando a sostituire nella 3.77, si ottiene l'espressione della reazione vincolare N

$$N = mg(3\cos\theta - 2). \quad (3.81)$$

Dal punto di vista dinamico, nel momento del distacco il cubetto di ghiaccio non è più soggetto alla reazione vincolare: quindi, in questo istante, $N = 0$. Imponendo ciò si ricava l'angolo di distacco θ^* definito dalla condizione

$$\cos\theta^* = \frac{2}{3}. \quad (3.82)$$

Pertanto, la posizione in cui avviene il distacco è individuata dall'angolo

$$\theta^* = \arccos\frac{2}{3}. \quad (3.83)$$

Problema 3.14 SVOLGIMENTO

► Il punto (a) del problema si affronta per via puramente dinamica, mentre per i punti successivi occorre usare la conservazione dell'energia meccanica del sistema.

- a) Si determini la costante elastica k della molla: quando questa viene compressa dal peso della massa m_A , all'equilibrio la forza elastica $F_A = k(l_0 - l_A) = k\Delta l_A$ dovrà essere di intensità pari al peso $m_A g$:

$$k\Delta l_A = m_A g$$

per cui

$$k = \frac{m_A g}{\Delta l_A}.$$

Ora si determini la compressione $\Delta l_B = l_0 - l_B$ a cui è soggetta la molla quando viene posta su di essa la massa m_B , imponendo l'uguaglianza, all'equilibrio, tra le intensità della forza elastica e della forza peso: $k\Delta l_B = m_B g$ da cui

$$\Delta l_B = \frac{m_B g}{k} = \frac{m_B g}{m_A g} \Delta l_A = \frac{m_B}{m_A} \Delta l_A = \frac{1 \text{ kg}}{2 \text{ kg}} 2 \text{ cm} = 1 \text{ cm}.$$

La forza esercitata dalla molla sulla massa m_B dopo la ulteriore compressione Δl sarà data pertanto da

$$\begin{aligned} F &= k(\Delta l_B + \Delta l) = \frac{m_A g}{\Delta l_A} \left(\frac{m_B}{m_A} \Delta l_A + \Delta l \right) = m_B g + \frac{\Delta l}{\Delta l_A} m_A g = \\ &= \left(m_B + \frac{\Delta l}{\Delta l_A} m_A \right) g = \left(1 \text{ kg} + \frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} 2 \text{ kg} \right) \cdot 9.8 \text{ m s}^{-2} = 39.2 \text{ N}. \end{aligned}$$

- b) Dal momento in cui la molla viene lasciata libera di espandersi, sulla massa agiscono soltanto forze conservative (forza elastica e forza peso) pertanto si può imporre l'uguaglianza dell'energia meccanica del sistema tra l'istante in cui la molla viene rilasciata e l'istante in cui essa ritorna alla lunghezza l_0 .

Al momento del rilascio della molla, l'energia meccanica è data dalla somma dell'energia potenziale elastica e dell'energia potenziale gravitazionale. La massa si trova a una quota $z_0 = l_0 - \Delta l_B - \Delta l = l_0 - \Delta l'$, rispetto al piano (si è posto per comodità $\Delta l' = \Delta l_B + \Delta l$). Pertanto l'energia meccanica in tale istante si scrive:

$$E_0 = m g (l_0 - \Delta l') + \frac{1}{2} k (\Delta l')^2.$$

Al momento in cui la molla ha lunghezza l_0 , la massa si trova a una quota $z_1 = l_0$ e l'energia potenziale elastica si annulla, mentre compare l'energia cinetica cosicché l'energia meccanica si scrive:

$$E_1 = mg l_0 + \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica ($E_0 = E_1$) si ottiene:

$$mg(l_0 - \Delta l') + \frac{1}{2} k (\Delta l')^2 = mg l_0 + \frac{1}{2} m v_1^2$$

da cui

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{k(\Delta l')^2}{m_B} - 2g\Delta l'} = \sqrt{\left(\frac{m_A}{m_B} \frac{\Delta l'}{\Delta l_A} - 2\right) g \Delta l'} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \text{ kg}}{1 \text{ kg}} \frac{4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} - 2\right) \cdot 9,8 \text{ m s}^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cong 0,88 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

avendo sostituito $k = (m_A g)/(\Delta l_A)$.

- c) Quando la massa raggiunge la massima quota, l'energia del sistema sarà puramente energia potenziale gravitazionale:

$$E_2 = mg z_{\max}.$$

Si può ora impostare l'uguaglianza dell'energia meccanica tra l'istante in cui la massa si distacca dalla molla e l'istante in cui la massa arriva alla massima quota. La massa si distacca dalla molla quando quest'ultima torna alla sua lunghezza a riposo l_0 , per cui la condizione da porre è $E_1 = E_2$. Essa equivale a

$$mg l_0 + \frac{1}{2} m v_1^2 = mg z_{\max},$$

da cui

$$z_{\max} = l_0 + \frac{v_1^2}{2g} \cong 14 \text{ cm}.$$

Problema 3.15

SVOLGIMENTO

- Per determinare il modulo della velocità del corpo di massa m alla base del piano inclinato, v_0 , usiamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (3.84)$$

e otteniamo $v_0 = \sqrt{2gh}$. La velocità rimane costante nel tratto orizzontale, in quanto privo di attrito.

- a) Se l'urto è completamente anelastico, si conserva solo la quantità di moto; in particolare, ci interessa il fatto che si conserva la sua componente orizzontale. Scegliendo un asse orizzontale x orientato verso destra, la componente orizzontale della velocità del sistema dopo l'urto coincide con il suo modulo che indichiamo con V . Pertanto la conservazione della quantità di moto lungo l'asse x si scrive

$$mv_0 = (m+M)V \quad (3.85)$$

da cui

$$V = \frac{m}{m+M} v_0 = \frac{1}{6} v_0.$$

92 Capitolo 3 – Meccanica dei sistemi I

Nel moto successivo all'urto si conserva l'energia meccanica: l'altezza massima h_{\max} viene raggiunta prima di invertire il moto lungo il secondo piano inclinato, ossia quando la velocità dei due corpi è nulla. Dalla conservazione dell'energia meccanica, dopo l'urto si ha:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh_{\max} \quad (3.86)$$

da cui si ricava

$$h_{\max} = \frac{m^2}{(m+M)^2} h = \frac{1}{36} h. \quad (3.87)$$

- b) Nell'urto elastico si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica. Indicando con v e V , rispettivamente, i moduli delle velocità dei corpi di massa m e M dopo l'urto, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} mv_0 &= mv + MV \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo le soluzioni fisicamente significative

$$v = -\frac{2}{3}v_0, \quad V = \frac{1}{3}v_0. \quad (3.88)$$

Dopo l'urto, si conserva l'energia meccanica. Il corpo di massa M sale lungo il piano inclinato e l'altezza massima che esso raggiunge si ottiene imponendo che si annulli la sua velocità:

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh_{\max}^*, \quad (3.89)$$

da cui si ottiene

$$h_{\max}^* = \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2g} \frac{v_0^2}{9} = \frac{h}{9}. \quad (3.90)$$

Meccanica dei sistemi II: corpi rigidi

Richiami di teoria

Si definisce *corpo rigido* un sistema materiale assolutamente indeformabile, ossia tale che la distanza fra due suoi elementi qualsiasi rimanga inalterata indipendentemente dalle azioni esterne esercitate sul corpo. In particolare, il *centro di massa* ha posizione fissa rispetto a tutti i punti del corpo. Spesso non è praticabile la schematizzazione di un corpo rigido in termini discreti, ossia come sistema di N punti materiali. Occorre allora trattarlo con il modello di *corpo continuo*, di volume V e massa totale M , per il quale, scelto un SRI S di origine O e indicata con \mathbf{r} la posizione del generico elemento infinitesimo di volume dV di massa dm :

- si definisce *densità* la quantità $\rho = \rho(\mathbf{r}) = dm/dV$, tale che $M = \int_V \rho dV$. Un corpo si dice *omogeneo* se la densità è uniforme. In tal caso $M = \rho V$.¹
- la posizione del centro di massa è definita dall'equazione

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \rho dV.$$

La posizione di un corpo rigido rispetto a S può essere completamente determinata dalla posizione $\mathbf{r}_{O'}$ di un suo punto qualsiasi, O' , e dall'orientazione di tre assi cartesiani con origine in O' e solidali al corpo (ossia "fissati" ad esso). Sia S' il sistema di riferimento così definito.

Poiché la velocità \mathbf{v}' di un qualunque punto P del corpo rispetto a S' è zero, dall'Equazione 1.22 segue che la velocità di P rispetto a S è data dalla sola velocità di trascinamento \mathbf{v}_T :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_T = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'}) \quad (4.1)$$

dove $\mathbf{v}_{O'}$ è la velocità di O' rispetto a O , e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di rotazione istantanea del corpo rigido.

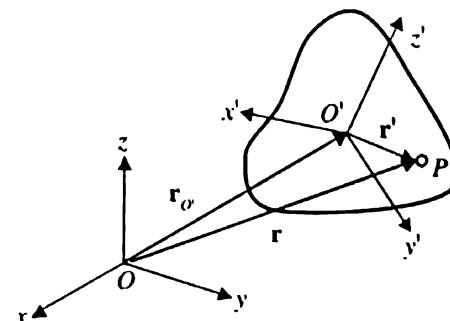


Figura 4.1

¹ È possibile anche definire, quando la distribuzione di massa del corpo lo consente, la densità superficiale $\sigma = dm/dS$ o lineare $\lambda = dm/dl$, dove dS e dl sono, rispettivamente, elementi infinitesimi di superficie e di linea.

Il moto più generale di un corpo rigido è quindi una combinazione di traslazione e rotazione, detta anche *rototraslazione*. La descrizione del moto di rototraslazione *non* è univoca, in quanto la scelta del punto O' è arbitraria. In particolare, se si sceglie O' coincidente con il centro di massa del corpo, l'Equazione 4.1 diventa

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{CM}). \quad (4.2)$$

Quest'ultimo modo di descrivere il moto del corpo è collegato in maniera naturale ai teoremi di König (si veda il Capitolo 3).

Moto di pura traslazione

Se il corpo rigido trasla soltanto, le traiettorie di tutti i suoi punti sono parallele. Il moto è perciò interamente determinato dal moto del centro di massa; la quantità di moto si può esprimere come $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}$. Il momento angolare del corpo rispetto al centro di massa (ossia calcolato usando il centro di massa come polo) è zero: $\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{L}'_{CM} = 0$. Dalle Equazioni 3.19 e 3.10 si ottiene che

$$K = K_{CM} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

e

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_{CM} \wedge \mathbf{P}$$

(si noti che qui, come nel seguito, per brevità è omessa l'indicazione esplicita del polo rispetto al quale valutare sia il momento delle forze che il momento angolare). Ne deriva che \mathbf{P} ed \mathbf{L} non sono indipendenti. Di conseguenza la dinamica del corpo può essere completamente espressa dalla sola equazione

$$\mathbf{R}^{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{a}_{CM},$$

dove \mathbf{R}^{ext} è la risultante delle forze esterne mentre l'Equazione 3.17, $\mathbf{M}_{O'}^{ext} = d\mathbf{L}_{O'}/dt$, non fornisce alcuna informazione aggiuntiva.

Moto di rotazione attorno a un asse fisso

Con riferimento alla Figura 4.2, il corpo ruota attorno all'asse fisso z ; per comodità l'asse z' è scelto coincidente con z . Si può sempre scegliere l'origine O' coincidente con O , ed entrambe sono sull'asse di rotazione. Poiché $\mathbf{v}_{O'} = 0$, tutti i punti del corpo descrivono traiettorie circolari con centro sull'asse, con velocità tangenziale (rispetto a S) $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i$, di modulo $v_i = \omega r_i \sin \theta_i = \omega R_i$. Lo pseudovettore $\boldsymbol{\omega}$ ha modulo $\omega = d\varphi/dt$, direzione perpendicolare ai piani (tra loro paralleli) in cui giacciono le circonferenze descritte dai punti del corpo in rotazione, e verso scelto in modo tale che, viste dalla sua punta, le traiettorie circolari appaiano percorse in senso antiorario. Poiché l'asse è fisso, $\boldsymbol{\omega}$ può solo cambiare modulo e verso, ma non direzione. In questo caso quindi l'accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$ è anch'essa diretta lungo l'asse di rotazione.

La dinamica del sistema è interamente determinata dall'equazione cardinale $d\mathbf{L}_{O'}/dt = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}}$; per non appesantire la notazione, d'ora in poi l'indicazione del polo sarà omessa, sottintendendo che si tratti sempre di O' . Osserviamo che:

- in generale, \mathbf{L} non è parallelo all'asse di rotazione, ma può naturalmente sempre essere scomposto in un componente parallelo all'asse, $\mathbf{L}_z = L_z \mathbf{u}_z$ e in un componente perpendicolare all'asse, \mathbf{L}_{\perp} .
- La componente parallela all'asse, L_z , è sempre proporzionale al modulo ω della velocità angolare, ossia $L_z = I_z \omega$, indipendentemente dalla scelta del polo (purché giacente sull'asse). La grandezza scalare I_z è detta *momento d'inerzia* del corpo rispetto all'asse z. Se per semplicità si tratta il corpo rigido come se fosse un sistema discreto di N punti materiali, l'espressione di I_z è:

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2. \quad (4.3)$$

Nel caso di un corpo continuo invece I_z deve essere calcolato mediante l'integrale

$$I_z = \int_M R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV \quad (4.4)$$

in cui R è il raggio della traiettoria circolare descritta dall'elemento di massa dm attorno all'asse di rotazione. Poiché $L_z = I_z \omega$, l'equazione cardinale proiettata sull'asse di rotazione diventa

$$M_z^{\text{ext}} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha. \quad (4.5)$$

- Il componente perpendicolare all'asse, \mathbf{L}_{\perp} , dipende dalla posizione del polo O' rispetto a cui è calcolato il momento angolare. Per un dato polo, e se si tratta per semplicità il corpo come un sistema discreto, esso è dato da $\mathbf{L}_{\perp} = \sum m_i \mathbf{r}_i R_i \cos(\theta_i) \omega$ (Figura 4.2) ed è quindi proporzionale a ω . Il componente \mathbf{L}_{\perp} può pertanto variare in modulo, se ω varia, ma in ogni caso è solidale al corpo e ruota insieme ad esso con velocità angolare ω .
- Se ω è costante, \mathbf{L}_z è costante e \mathbf{L}_{\perp} ruota attorno all'asse con velocità costante, senza variare in modulo. Pertanto anche il vettore $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_{\perp}$ ruota attorno all'asse, rimanendo costante in modulo. Tale moto si chiama *precessione uniforme* e si osserva che

$$\mathbf{M}^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}. \quad (4.6)$$

- Nei casi particolari in cui l'asse di rotazione coincide con uno degli assi principali d'inerzia, $\mathbf{L}_{\perp} = 0$ e $\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$, ossia è parallelo all'asse. Quindi

$$\mathbf{M}^{\text{ext}} = I_z \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.7)$$

In particolare, sono assi principali d'inerzia gli eventuali assi di simmetria di un corpo omogeneo.

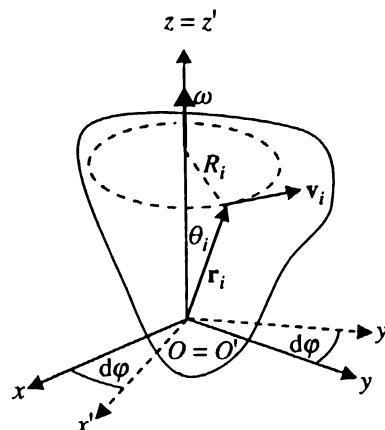


Figura 4.2

- Nel caso di pura rotazione, l'energia cinetica può essere scritta

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{L_z^2}{2I_z}$$

e il lavoro fatto da un momento esterno durante un intervallo infinitesimo dt è

$$\delta L = dK = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = M_z^{\text{ext}} d\theta.$$

- Il momento d'inerzia I_z rispetto a un generico asse z , può essere calcolato grazie al *teorema degli assi paralleli* o di Huygens-Steiner, se si conoscono il momento d'inerzia I_{CM} rispetto a un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa del corpo, e la distanza d tra i due assi:

$$I_z = I_{\text{CM}} + Md^2.$$

Moto di rotazione rispetto a un asse non fisso

In molti casi l'asse di rotazione può a sua volta traslare o ruotare rispetto a un SRI. Nel caso, per esempio, del moto di rotolamento di un corpo sferico o cilindrico, di raggio R , l'asse passante per il CM trasla con velocità v_{CM} e il corpo ruota attorno ad esso con velocità angolare ω . Se non c'è strisciamento, $v_{\text{CM}} = \omega R$. Pertanto $a_{\text{CM}} = \alpha R$. Il moto è descritto dal sistema delle equazioni $M_z^{\text{ext}} = I_{\text{CM}}\alpha$ e $\mathbf{R}^{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{CM}}$.

Se il corpo è in moto di rotolamento con velocità costante, non è necessaria alcuna forza né alcun momento per mantenerlo in moto. Non c'è moto relativo, né effettivo né potenziale, tra superficie del corpo e piano, per cui non c'è attrito radente. Se invece il corpo accelera, vi è una forza di attrito radente *statico*, che entra sia nell'equazione dei momenti sia in quella delle forze. Tuttavia l'attrito non compie lavoro perché il suo punto di applicazione (cioè il punto di contatto tra il piano e il corpo) è istantaneamente fermo. Pertanto, se le altre forze che agiscono sul corpo sono conservative, l'energia meccanica si conserva.

Un altro esempio è il moto di precessione giroscopica, in cui il corpo ruota a velocità angolare ω costante attorno a un asse principale d'inerzia e quindi $\mathbf{L} = I\omega$. Però l'asse, e quindi \mathbf{L} , descrive un moto di precessione rispetto a un asse fisso rispetto al SRI, con una velocità angolare di precessione ω_p tale che $\mathbf{M}^{\text{ext}} = \omega_p \wedge \mathbf{L}$. Una situazione tipica in cui si realizza questo tipo di moto è quella della trottola, della trottola, quando il suo asse è inclinato. Il momento esterno rispetto al punto fisso dell'asse (la punta della trottola) è in questo caso dovuto alla forza peso applicata nel centro di massa.

Statica

La statica è la parte della meccanica che studia le condizioni di equilibrio statico di un corpo materiale, cioè le condizioni necessarie affinché un corpo resti in quiete anche se soggetto all'azione di forze esterne. Poiché un corpo rigido può traslare e ruotare, esso si trova in equilibrio statico soltanto quando sono vere *entrambe* le relazioni

$$\mathbf{R}^{\text{ext}} = 0 \quad \mathbf{M}^{\text{ext}} = 0.$$

I problemi di statica devono quindi essere risolti imponendo che i vettori risultante dei momenti esterni e risultante delle forze esterne siano entrambi nulli. In essi l'attrito, se presente, è ovviamente sempre statico.

È possibile dimostrare che, quando la risultante delle forze esterne è nulla, i momenti di tali forze sono indipendenti dalla scelta del polo. Quindi, nei problemi di statica, il vettore risultante dei momenti esterni può sempre essere calcolato utilizzando il polo più conveniente per semplificare i calcoli.

Urti tra corpi estesi

Come già visto nel caso dei sistemi di punti materiali, nell'urto tra corpi estesi e/o tra un corpo esteso e un corpo puntiforme:

- la quantità di moto si conserva quando la risultante delle forze esterne è zero, ossia $\mathbf{R}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$, o se tali forze non sono impulsive. Se la risultante delle forze esterne ha componente nulla lungo una certa direzione, si conserva la componente della quantità di moto lungo quella direzione.
- Il momento angolare si conserva rispetto a qualunque polo se la risultante dei momenti delle forze esterne è zero, ossia $\mathbf{M}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$, oppure se tali forze non sono impulsive. Se vi sono forze esterne impulsive, il momento angolare si conserva se si sceglie come polo il punto di applicazione di tali forze². Se la risultante dei momenti delle forze esterne ha componente nulla lungo una certa direzione, si conserva la componente del momento angolare lungo quella direzione.
- L'energia cinetica si conserva solo se l'urto è elastico.

TEST DI COMPRENSIONE

1. Affinché un corpo rigido sia in equilibrio statico:
 - è sufficiente che il momento risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa sia nullo;
 - è necessario che la risultante delle forze esterne sia nulla;
 - è sufficiente che la risultante delle forze esterne sia nulla;
 - basta che non sia soggetto ad alcuna forza esterna.
2. Il momento d'inerzia di un corpo rigido rotante attorno a un asse fisso:
 - aumenta all'aumentare della velocità angolare;
 - aumenta al diminuire della velocità angolare;
 - aumenta all'aumentare dell'accelerazione angolare;
 - rimane invariato al variare di velocità e/o accelerazione angolare.
3. Si consideri un corpo rigido di forma arbitraria, avente massa distribuita omogeneamente nel suo volume. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
 - La posizione del centro di massa non dipende dalla densità del corpo;
 - Se la densità raddoppia, la posizione del centro di massa resta invariata;
 - La posizione del centro di massa non dipende dalla forza peso che agisce sul corpo;
 - La posizione del centro di massa è necessariamente all'interno del corpo.

² Occorre prestare attenzione al fatto che se un corpo rigido è vincolato di solito le forze vincolari sono impulsive, ossia il loro impulso non è trascurabile.

4. Si consideri un corpo rigido e due assi paralleli distinti, uno dei quali passa per il suo centro di massa. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- A Il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa è sempre maggiore rispetto a quello calcolato rispetto all'altro asse;
 - B Il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa è sempre minore rispetto a quello calcolato rispetto all'altro asse;
 - C I momenti di inerzia calcolati rispetto ai due assi possono essere uguali;
 - D I momenti di inerzia calcolati rispetto ai due assi sono sempre uguali.
5. Un corpo rigido può ruotare intorno a un asse fisso. Una forza applicata a un punto del corpo a distanza ℓ dall'asse, determina un'accelerazione angolare di modulo α . Se la stessa forza viene applicata a punto a distanza 2ℓ dall'asse:
- A l'accelerazione angolare ha modulo 2α ;
 - B l'accelerazione angolare ha modulo $\alpha/2$;
 - C l'accelerazione angolare ha modulo $\alpha/4$;
 - D l'accelerazione angolare resta invariata, perché il momento d'inerzia non cambia.

Problemi

Problema 4.1

Un giocatore di bowling lancia una boccia regolamentare (di massa M e raggio R) in avanti, con velocità di traslazione v_{CM}^0 , imprimendole però anche una velocità angolare iniziale ω_0 in senso contrario (Figura 4.3). Inizialmente la boccia striscia sul parquet della pista, ma a un certo punto comincia a rotolare senza più strisciare. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra boccia e pista è μ_d :

- determinare le accelerazioni lineare e angolare della boccia prima che inizi a rotolare.
- Determinare l'istante in cui la boccia comincia a rotolare.

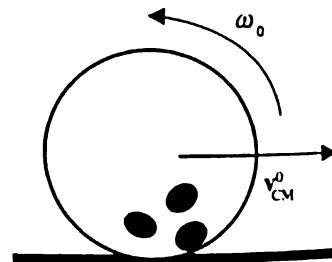


Figura 4.3

Problema 4.2

Un pallone di massa m e raggio R , finito accidentalmente sul tetto, rimane in equilibrio precario, bloccato da una foglia a un'altezza $H = 7.5$ m dal suolo, come in Figura 4.4. Quando quest'ultima viene spostata da un refolo di vento, il pallone comincia a rotolare lungo la falda del tetto per poi finire a terra.

- Trattando il pallone come un guscio sferico e assumendo che il tetto non presenti asperità, calcolare le componenti orizzontale e verticale della velocità del pallone nel momento in cui arriva alla fine del tetto, che si trova a quota $h = 4.5$ m dal suolo. Sia $\theta = 45^\circ$.
- Calcolare a quale distanza orizzontale d dalla fine della falda del tetto il pallone tocca terra.

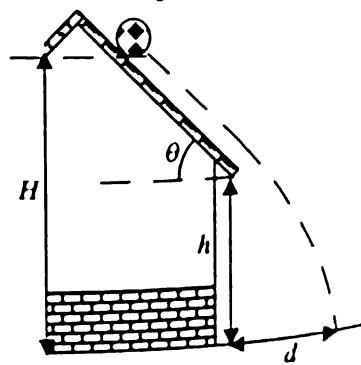


Figura 4.4

Problema 4.3

Un ragazzo sta girando in tondo in bicicletta su un terreno pianeggiante. Egli descrive una circonferenza di raggio r con velocità $v = 4.0 \text{ m/s}$. Per fare ciò deve stare inclinato di un angolo θ rispetto alla verticale.

- Se il coefficiente di attrito statico tra gli pneumatici e il terreno è $\mu_s = 0.408$, qual è il minimo valore possibile per il raggio della circonferenza descritta dalla bici?
- Usando il centro di massa come polo per calcolare i momenti, dimostrare che l'angolo massimo θ^* di cui il ragazzo si può inclinare senza cadere è tale che $\mu_s = \tan \theta^*$.

**Figura 4.5****Problema 4.4**

Un'automobile a trazione integrale si muove a velocità costante, essendo sottoposta a una forza di resistenza aerodinamica di intensità $F_A = k v^2$ con $k = 10 \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2}$. Tramite dei sensori, viene misurata la coppia esercitata dall'albero di trasmissione su ciascuna delle quattro ruote motrici, aventi raggio $r = 20 \text{ cm}$, che risulta pari a $M = 50 \text{ N m}$. Calcolare la velocità dell'auto.

Problema 4.5

Un'asta cilindrica sottile di lunghezza $l = 1 \text{ m}$, raggio trascurabile e massa $m_A = 100 \text{ g}$ è appoggiata su un piano orizzontale liscio, con uno dei suoi estremi vincolato, mentre l'altro è libero di muoversi. Essa può ruotare intorno all'estremo vincolato O , senza attrito nel punto di vincolo né con il piano di appoggio. L'asta è inizialmente ferma, quando un proiettile di massa $m = 1 \text{ g}$ viene sparato con velocità di modulo $v_p = 100 \text{ m s}^{-1}$ e direzione parallela al piano d'appoggio e ortogonale all'asse dell'asta. Il proiettile colpisce l'asta, nella quale si incastra, in un punto a una distanza $d = 70 \text{ cm}$ dall'estremo vincolato. In seguito all'urto, l'asta si mette in rotazione: determinare la velocità angolare di tale rotazione.

Problema 4.6

Un cilindro avente massa $m = 100 \text{ g}$ e raggio $r = 5 \text{ cm}$ rotola lungo un piano inclinato. Esso parte dalla sommità del piano, che si trova a un'altezza $h = 10 \text{ cm}$ rispetto al piano orizzontale, e impiega un tempo $t^* = 2 \text{ s}$ per arrivare alla base del piano, percorrendone tutta la lunghezza $l = 1 \text{ m}$. Determinare il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo asse di simmetria, sapendo che esso non è omogeneo e che la distribuzione di massa al suo interno ha simmetria radiale.

Problema 4.7

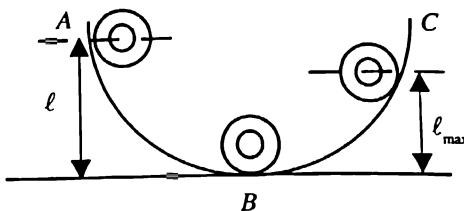
Trovare il centro di massa dei seguenti corpi continui:

- un'asta sottile omogenea lunga L ;
- un'asta sottile lunga L con densità lineare di massa pari a $\lambda = \lambda_0(1 + \alpha \frac{x}{L})$, dove x è una coordinata lungo l'asta, misurata a partire da un suo estremo, mentre λ_0 e α sono costanti;
- una lamina quadrata omogenea;
- una lamina omogenea a forma di triangolo isoscele di base b e altezza h .

Problema 4.8

Un corpo rigido D, inizialmente trattenuto nella posizione A lungo la guida semicilindrica mostrata in Figura 4.6, viene lasciato libero. Nel tratto AB la guida presenta un coefficiente di attrito statico sufficientemente elevato da garantirne un moto di puro rotolamento, mentre nel tratto BC essa è liscia. Sapendo che il corpo D è un disco forato omogeneo di raggio interno r , raggio esterno R e massa M , calcolare:

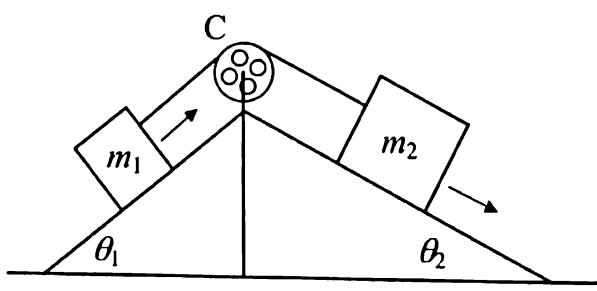
- il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione;
- la velocità del suo centro di massa quando si trova nel punto B;
- la reazione normale della guida quando si trova in B;
- l'altezza massima raggiunta dal suo centro di massa durante la risalita.

**Figura 4.6****Problema 4.9**

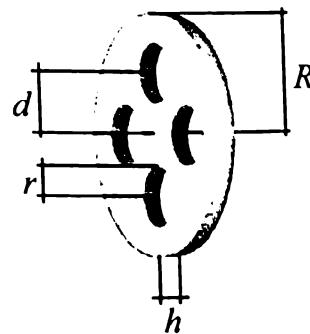
Due piani inclinati, che formano gli angoli θ_1 e θ_2 con l'orizzontale, sono solidali con il terreno e disposti come in Figura 4.7a. Due blocchi di massa m_1 e m_2 , collegati tramite una fune ideale che passa per una cartucola C, si muovono sui piani inclinati nei versi indicati dalle frecce (il blocco di destra scende, quello di sinistra sale). La cartucola C è vincolata a ruotare senza attrito attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro. Essa è costituita da un cilindro di raggio R e altezza h , che presenta quattro fori circolari identici, di raggio r e centro a una distanza d dall'asse di rotazione (Figura 4.7b). La cartucola è omogenea e ha massa totale M_C . L'attrito tra i piani inclinati e i blocchi è trascurabile, così come la resistenza dell'aria, mentre esiste un attrito tra fune e cartucola, di modo che la fune non striscia rispetto alla cartucola.

Determinare:

- il momento d'inerzia I_C della cartucola rispetto all'asse di rotazione;
- il modulo a dell'accelerazione dei blocchi;
- l'intensità della tensione della fune nei tratti a destra e a sinistra della cartucola;
- la condizione sul rapporto m_2/m_1 affinché, per dati valori di θ_1 e θ_2 , il moto dei due blocchi avvenga con velocità costante.



(a)



(b)

Figura 4.7**Problema 4.10**

Sia dato il sistema disegnato in Figura 4.8, costituito da un argano (a sinistra) attorno cui si avvolge una fune ideale che, a sua volta, passando per la gola di una puleggia con perno fissato (a destra), è attaccata a un grave di massa $m = 100 \text{ kg}$. Il grave è assimilabile a un punto materiale, la puleggia

a un cilindro di raggio $r_1 = 10 \text{ cm}$ e massa $m_1 = 10 \text{ kg}$, e l'argano a un cilindro centrale, di raggio $r_2 = 20 \text{ cm}$, con quattro barre sottili sporgenti, identiche e ciascuna di massa $m_3 = 1 \text{ kg}$, le cui estremità esterne distano $r_3 = 50 \text{ cm}$ dall'asse di rotazione. Il momento d'inerzia dell'argano è pari a $I_2 = 2 \text{ kg m}^2$.

Una forza esterna di modulo costante spinge l'argano agendo sull'estremità di una delle quattro barre, mantenendosi ad essa ortogonale durante la rotazione. Come conseguenza, il grave sale con accelerazione $a = 1 \text{ m s}^{-2}$. Si può supporre che la fune non strisci sulla puleggia e che il tratto di fune che collega argano e puleggia sia orizzontale.

Determinare:

- la tensione della fune nel tratto orizzontale;
- il modulo F della forza che spinge l'argano;
- le due componenti Φ_x (orizzontale) e Φ_y (verticale) della reazione vincolare del perno della puleggia;
- la massa m_2 del cilindro che costituisce la parte centrale dell'argano.

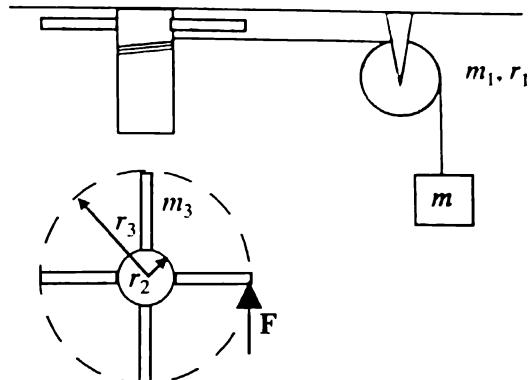


Figura 4.8

Problema 4.9

Una molla ideale di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$ è fissa nel punto A , su un piano orizzontale. La molla è compressa di un tratto $\Delta x = 20 \text{ cm}$ (rispetto alla sua lunghezza a riposo) e alle sue estremità ci sono due palline identiche (disposte simmetricamente rispetto ad A) di dimensioni trascurabili e massa $m = 2 \text{ kg}$: il sistema è inizialmente bloccato in questa posizione (Figura 4.9). All'istante $t = 0$ i vincoli che tengono ferme le palline vengono rimossi: la molla torna alla sua lunghezza a riposo e le palline vengono lanciate lungo il piano, in versi opposti. La pallina che va verso destra urta elasticamente, nel punto C , contro l'estremo libero di una sbarretta omogenea di lunghezza $\overline{OC} = \ell = 2 \text{ m}$ e massa $M = 3m$, appesa nell'altro estremo O a un perno attorno al quale può ruotare senza attrito. (Si usi per l'accelerazione di gravità il valore $g = 10 \text{ m/s}^2$). Calcolare:

- la velocità della pallina e la velocità angolare della sbarretta dopo l'urto;
- l'altezza massima raggiunta dal centro di massa della sbarretta;
- il valore minimo della velocità della pallina incidente necessario per far compiere un giro completo alla sbarretta.

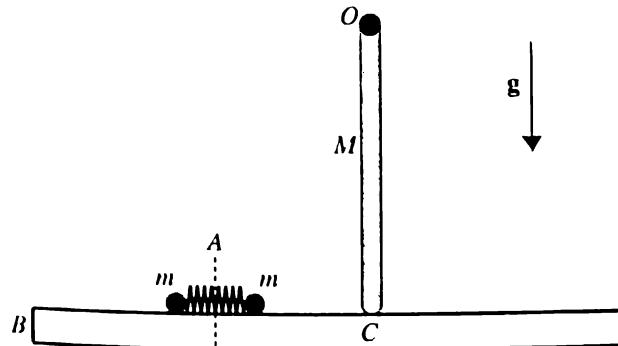


Figura 4.9 Il sistema a $t = 0$

Problema 4.10

Un corpo rigido è formato da due dischi concentrici, solidali l'uno con l'altro, di massa m_1 e m_2 e raggio r_1 e r_2 , con $r_2 > r_1$ (Figura 4.10). Una fune ideale è avvolta sul cilindro di raggio minore,

passa su una cartuccia di massa trascurabile ed è infine collegata a una massa puntiforme m . Quando la massa m viene rilasciata, il corpo rotola senza strisciare sul piano orizzontale su cui poggia.

- Si calcoli: l'accelerazione della massa m e la tensione della fune;
- Si calcoli: la risultante delle forze che il piano esercita sul corpo rigido;
- Si calcoli: il valore minimo che il coefficiente di attrito statico fra il piano e il corpo rigido deve avere per garantire che quest'ultimo rotoli senza strisciare.

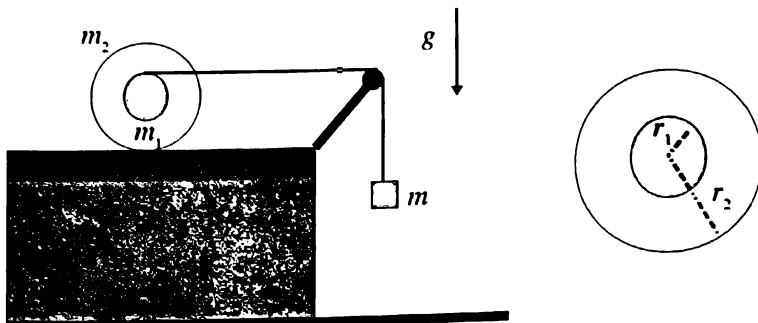


Figura 4.10

Problema 4.13

Un manubrio è formato da due corpi puntiformi di massa m fissati agli estremi di una sbarretta rigida, di massa trascurabile, e lunghezza d . Il manubrio, nel suo centro di massa, è fissato a un asse verticale, intorno al quale ruota con velocità angolare ω . Si indichi con θ l'angolo formato dalla sbarretta con l'asse di rotazione (Figura 4.11).

- Calcolare il momento angolare del sistema usando come polo il suo centro di massa.
- Calcolare l'energia cinetica del sistema.
- Successivamente, l'asse di rotazione viene frenato e si osserva che il sistema si arresta dopo un intervallo di tempo T . Calcolare il momento frenante, supposto costante, applicato all'asse di rotazione.

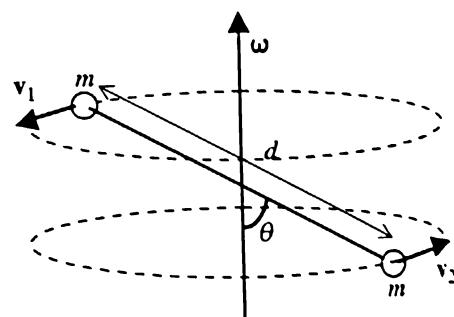


Figura 4.11

Problema 4.14

Se un filo viene vincolato ad un estremo, mentre l'altro estremo viene ruotato di un angolo θ , esso esercita un momento torcente la cui intensità può essere considerata approssimativamente proporzionale all'angolo, se questo non è troppo grande, secondo la legge $M = c\theta$, dove la costante di proporzionalità c è detta *costante elastica di torsione*. Un pendolo di torsione è costituito da un piatto circolare di raggio R e massa M , sul quale sono fissati quattro cilindri, ciascuno di raggio r e massa m , collocati tutti alla stessa distanza d dal centro C del piatto e in modo tale che le distanze reciproche siano uguali, come mostrato in Figura 4.12. Nel centro del piatto è fissato un filo ideale, avente costante elastica di torsione pari a c , al quale il piatto è appeso, mentre l'altro estremo del filo è vincolato a un

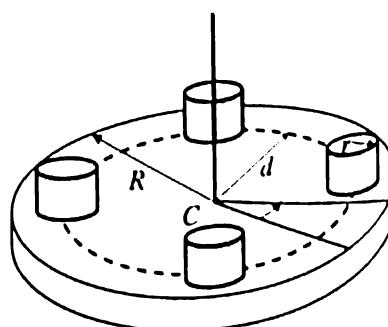


Figura 4.12

supporto rigido. Se il piatto viene ruotato di un angolo iniziale θ_0 e poi rilasciato, assume un moto rotazionale oscillatorio con periodo pari a T . Supponendo noto il periodo, si calcoli il valore di c .

Problema 4.15

Si consideri una trave omogenea di lunghezza ℓ e di massa m . Essa è mantenuta orizzontale da un cavo fissato a una sua estremità e che forma un angolo $\theta = \pi/6$ con la trave stessa; all'altra estremità la trave è appoggiata contro un muro scabro, di coefficiente di attrito statico μ_s , come mostrato nella Figura 4.13a.

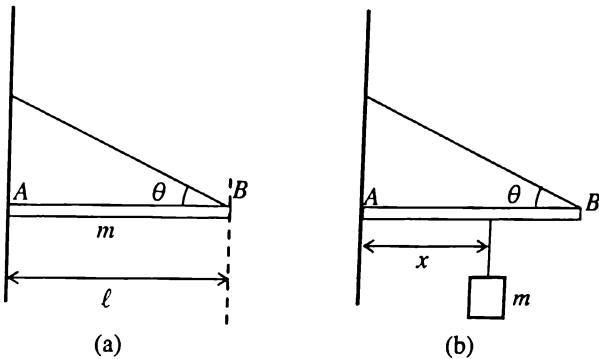


Figura 4.13

- Determinare le componenti orizzontale e verticale della forza che il muro applica sulla trave.
- Si supponga ora di attaccare alla trave, a distanza x dal muro, un oggetto di massa m (la stessa della trave), come in Figura 4.13b. Si trovi qual è la minima distanza x a cui si può attaccare l'oggetto senza far cadere la trave.
- Si supponga ora di appendere alla trave *due* corpi identici, entrambi di massa m , a distanza x e $\ell - x$ dal muro. Si determini in quali condizioni la trave resta in equilibrio.

Svolgimenti

Problema 4.1

SVOLGIMENTO

► Durante la fase iniziale, il moto della boccia è una rototraslazione: infatti il suo centro di massa trasla e, nel frattempo, essa ruota attorno a un asse passante per il centro di massa (che è un asse principale d'inerzia). Tuttavia tale moto *non* è di rotolamento perché il punto di contatto tra boccia e parquet non è istantaneamente fermo. Questo in particolare significa che non vi è relazione tra le grandezze cinematiche lineari v_{CM} e a_{CM} e le grandezze angolari ω e α .

- Si scrivano la prima e la seconda equazione cardinale, scomponendo forze e momenti lungo gli assi. Sceglieremo l'asse x orizzontale verso destra, l'asse y verticale orientato verso il basso, e l'asse z entrante. Sceglieremo inoltre il centro di massa della boccia come polo per il calcolo dei momenti. Le equazioni cardinali $\mathbf{R}^{\text{ext}} = m\mathbf{a}_{CM}$ e $\mathbf{M}^{\text{ext}} = I_{CM}\boldsymbol{\alpha}$ danno origine al seguente sistema:

$$\begin{cases} -f_d = ma_{CM} & (\text{asse } x) \\ -N + mg = 0 & (\text{asse } y) \\ +f_d R = \frac{2}{5}m R^2 \alpha & (\text{asse } z) \end{cases} \quad (4.8)$$

avendo indicato con a_{CM} , per brevità, la componente lungo l'asse x dell'accelerazione del centro di massa.

Dalla seconda equazione si ricava $N = mg$. Questa informazione serve per esprimere la forza di attrito dinamico: $f_d = \mu_d N = \mu_d mg$. La prima e la terza equazione permettono quindi di ottenere l'accelerazione lineare e quella angolare nella fase di strisciamento:

$$a_{CM} = -\mu_d g \quad \alpha = \frac{5\mu_d g}{2R}.$$

- b) Il moto di rotolamento senza strisciamento comincia quando la velocità angolare della boccia diventa uguale a v_{CM}/R . A questo punto non c'è più moto relativo tra la superficie della boccia e il parquet per cui l'attrito diventa statico e non compie più lavoro. Si scrivano dunque le equazioni che esprimono la dipendenza dal tempo della velocità del centro di massa (componente x) e della velocità angolare (componente z) [Attenzione ai segni! Quando il corpo rotola, il vettore ω ha verso entrante nel piano del foglio.]:

$$v_{CM}(t) = v_{CM}^0 - \mu_d g t \quad \omega(t) = -\omega_0 + \frac{5\mu_d g}{2R} t.$$

L'istante t^* richiesto dal problema si ottiene ponendo $v_{CM}(t^*) = \omega(t^*)R$ e risulta essere

$$t^* = \frac{2}{7} \frac{(v_{CM}^0 + \omega_0 R)}{\mu_d g}.$$

Problema 4.2

Svolgimento

► Trattare il pallone come un guscio sferico omogeneo vuol dire supporre che il suo momento d'inerzia rispetto a un qualunque asse passante per il suo centro sia uguale a $(2/3)mR^2$.

- a) Durante il moto di rotolamento (senza strisciamento) sul pallone agiscono: la forza peso mg , la reazione vincolare normale N e la forza di attrito statico f_s nel punto Ω di contatto con la falda del tetto.

La prima equazione cardinale applicata al pallone ci dice che $\mathbf{R}^{ext} = m\mathbf{a}_{CM}$. Scegliendo l'asse x parallelo al tetto e orientato nel verso del moto, l'asse y ad esso perpendicolare e orientato verso l'alto, e l'asse z uscente, questa equazione si scomponete nel sistema delle due equazioni seguenti

$$\begin{aligned} +mg \sin \theta - f_s &= ma_{CM} \\ +N - mg \cos \theta &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Queste equazioni non sono sufficienti a risolvere il problema perché sia a_{CM} sia f_s sono incognite. L'equazione mancante è fornita dalla seconda equazione cardinale; per calcolare i momenti si può scegliere come polo, per esempio, il centro di massa del pallone. In tal modo l'asse di rotazione istantaneo è asse principale d'inerzia e quindi si può usare l'Equazione 4.7 dove $\mathbf{M}^{ext} = -(f_s R) \mathbf{u}_z$ e $I\alpha = -(I_{CM} a_{CM}/R) \mathbf{u}_z$; inoltre per un guscio sferico $I_{CM} = (2/3)mR^2$. Pertanto

$$+f_s R = \frac{2}{3} m R^2 \frac{a_{CM}}{R} \tag{4.10}$$

da cui $f_s = (2/3)ma_{CM}$. Sostituendo nell'Equazione 4.9 si arriva a $a_{CM} = (3/5)g \sin \theta$. Con questa accelerazione è possibile calcolare la velocità del pallone quando arriva al fondo del tetto, usando l'equazione per il moto rettilineo uniformemente accelerato (Equazione 1.7) che, proiettata lungo l'asse x , si scrive: $v_x(x)^2 = v_x(0)^2 + 2a_x(x - x_0)$. Nel caso in esame la velocità iniziale è nulla ($v_x(0) = 0$) e $x - x_0$ è la lunghezza della falda del tetto, L . Quindi la velocità richiesta è

$$v = \sqrt{2a_{CM}L} = \sqrt{2 \cdot \frac{3}{5} g L \sin \theta} = \sqrt{\frac{6}{5} g (H - h)} \simeq 5.94 \text{ m/s.}$$

Si noti che allo stesso risultato si arriva imponendo la conservazione dell'energia meccanica, visto che l'unica forza che compie lavoro durante il rotolamento del pallone è la forza peso. Quella calcolata ora è la componente della velocità del centro di massa lungo l'asse x scelto, e coincide anche con il *modulo* della velocità. Il problema ne chiede però le componenti verticali e orizzontali. Definendo allora un altro sistema di assi con x' (orizzontale, verso destra) e y' (verticale, verso l'alto) e l'origine al fondo del tetto, si ottiene che

$$v_{x'} = +v \cos \theta = 4.20 \text{ m/s} \quad v_{y'} = -v \sin \theta = -4.20 \text{ m/s.}$$

- b) La seconda parte del problema è puramente cinematica. Durante il moto di caduta, il pallone continua a ruotare su se stesso con la velocità angolare acquisita durante il moto di rotolamento lungo il tetto. Infatti, esso è sottoposto solo alla forza peso, che ha momento nullo rispetto a un asse passante per il centro di massa.

Il moto che ci interessa è invece quello del centro di massa, che parte da una quota R rispetto all'origine del sistema di riferimento $Ox'y'$ e arriva a una quota $(-h + R)$ quando tocca il terreno. Si chiami $t_0 = 0$ l'istante in cui il pallone lascia il tetto e si scrivano le equazioni orarie per il centro di massa lungo gli assi x' e y' :

$$x'(t) = v \cos \theta t \quad y'(t) = R - v \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Si imponga quindi che al tempo t_1 in cui il pallone tocca terra sia $x'(t_1) = d$ e $y'(t_1) = -h + R$. Tenendo conto del fatto che $\sin \theta = \cos \theta = \sqrt{2}/2$, ne risulta la seguente equazione per d :

$$-h = -d - \frac{g}{v^2} d^2$$

che, risolta, dà due valori di d di cui uno solo è positivo:

$$d = \frac{v^2}{2g} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4gh}{v^2}} \right) \simeq 2.61 \text{ m.}$$

Problema 4.3

S VOLGIMENTO

► Data la simmetria del problema è opportuno usare la terna di versori delle coordinate cilindriche, con origine sul terreno e nel centro della circonferenza descritta dal ragazzo (Figura 4.14).

- a) La prima equazione cardinale applicata al sistema formato da ragazzo + bicicletta si scrive $\mathbf{R}^{\text{ext}} = \mathbf{N} + \mathbf{mg} + \mathbf{f}_s = m\mathbf{a}$ e, proiettandola lungo le direzioni definite da \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_z da essa si ottiene il seguente sistema di due equazioni

$$-f_s = -m \frac{v^2}{r} \quad +N - mg = 0.$$

Da queste relazioni appare chiaro che tanto minore è il raggio della traiettoria, tanto maggiore è la forza di attrito statico necessaria per evitare che la bicicletta scivoli. Però $f_s \leq f_s^{\max} = \mu_s N$ e quindi nel caso in esame

$$f_s = m \frac{v^2}{r} \leq \mu_s mg \rightarrow r \geq \frac{v^2}{\mu_s g} \simeq 4.00 \text{ m.}$$

- b) Se si considera il CM come polo, la condizione che il ragazzo non cada equivale a dire che il punto di contatto tra la bici e il suolo non ruoti rispetto al CM stesso, cioè sia in equilibrio rotazionale (Figura 4.14). Detto \mathbf{r} il vettore che va dal centro di massa al punto Ω di contatto tra

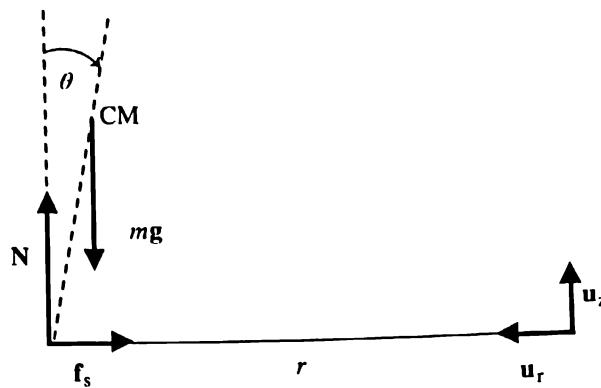


Figura 4.14

la ruota e il suolo, si può quindi scrivere: $\mathbf{r} \wedge \mathbf{N} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{f}_s = 0$. Prendendo come positivo il verso uscente dal foglio si ottiene:

$$rf_s \cos \theta - rN \sin \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \tan \theta = \frac{f_s}{N} \leq \mu_s.$$

Pertanto il massimo angolo di inclinazione θ^* è dato dalla relazione $\tan \theta^* = \mu_s$ come si voleva dimostrare.

Problema 4.4

Svolgimento

► Poiché l'auto si muove con velocità costante, la risultante di tutte le forze applicate ad essa dovrà essere nulla. Tali forze sono costituite dalle quattro forze di attrito statico di intensità f_s , agenti tra ciascuna ruota motrice e l'asfalto e dirette nel senso del moto, e la forza di resistenza aerodinamica di intensità F_A , diretta in verso opposto al moto. Pertanto la condizione di risultante nulla, espressa usando le componenti delle forze nella direzione del moto, è

$$4f_s - F_A = 0$$

ossia

$$4f_s = k v^2$$

da cui si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{4f_s}{k}}$$

Poiché l'automobile si muove a velocità costante, le ruote si muovono con velocità angolare costante: il momento totale delle forze esercitate su esse dovrà quindi essere nullo

$$\mathbf{M}_{\text{TOT}} = 0$$

Su ciascuna ruota agiscono il momento della coppia esercitata dall'albero motore M e il momento esercitato dalla forza f_s . Scegliendo l'asse z parallelo all'asse della ruota e con verso concorde al momento della forza d'attrito, si ha

$$M_{\text{TOT},z} = r f_s - M = 0,$$

pertanto

$$f_s = \frac{M}{r}.$$

La velocità dell'auto sarà quindi:

$$v = \sqrt{\frac{4M}{rk}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 50 \text{ N m}}{20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2}}} = 10 \text{ m s}^{-1}$$

Problema 4.5

SVOLGIMENTO

► Il sistema formato da proiettile e asta è soggetto alle forze interne dovute all'interazione tra i due corpi e a forze esterne. Di queste, tutte le forze perpendicolari al piano (ossia il peso dell'asta e del proiettile e la reazione vincolare normale del piano) non giocano alcun ruolo nel problema. La forza esercitata dal vincolo nel punto O , invece, è nulla prima dell'urto, ma diversa da zero dopo, perché deve permettere all'asta di ruotare senza traslare. Peraltra, essa può essere impulsiva *durante* l'urto. Pertanto non è lecito assumere che la quantità di moto del sistema sia conservata. Tuttavia, se si sceglie come polo per il calcolo dei momenti il punto O , è chiaro che tale forza ha momento nullo. Pertanto, dalla II equazione cardinale $\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = d\mathbf{L}_O/dt$ discende che il momento angolare del sistema si conserva rispetto al polo O . Chiamando \mathbf{L}_O^i il momento angolare prima dell'urto e \mathbf{L}_O^f quello dopo l'urto, si ha quindi

$$\mathbf{L}_O^i = \mathbf{L}_O^f \quad \rightarrow \quad \mathbf{L}_{O,z}^i = \mathbf{L}_{O,z}^f.$$

Nel secondo passaggio si è esplicitato il fatto che il momento angolare del sistema è parallelo all'asse z (Figura 4.15). Appena prima dell'urto l'asta è ferma, per cui al momento angolare del sistema contribuisce soltanto il momento angolare del proiettile. Detto \mathbf{r} il vettore posizione del proiettile rispetto al polo O , la componente z di tale momento angolare si scrive:

$$L_{O,z}^i = (\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}_p)_z = +m v_p d$$

Dopo l'urto, l'asta ruota con velocità angolare ω attorno a O , e il proiettile (incastrato in essa nel punto d'impatto) descrive una circonferenza di raggio d e centro O , con velocità angolare ω . Pertanto il momento angolare del sistema sarà dato dalla somma dei due contributi:

$$L_{O,z}^f = +I_z \omega + md^2 \omega$$

dove con I_z si è designato il momento d'inerzia dell'asta rispetto al punto O . Il valore del momento d'inerzia di una sbarra sottile rispetto a un asse passante per il suo estremo (e ortogonale all'asta) si trova tabulato su molti testi. In alternativa si può ricavare usando il teorema di Huygens-Steiner a partire dal momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse a essa ortogonale e passante per il suo centro di massa:

$$I_z = I_{\text{CM}} + m_A \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m_A l^2 + \frac{1}{4} m_A l^2 = \frac{1}{3} m_A l^2.$$

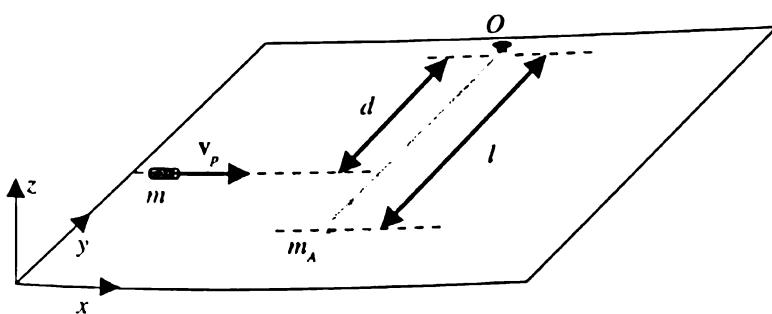


Figura 4.15

Quindi, il momento angolare del sistema dopo l'urto risulta essere

$$L_{O,z}^f = \left(\frac{1}{3}m_A l^2 + md^2 \right) \omega$$

La conservazione del momento angolare $L_{O,z}^i = L_{O,z}^f$ si scrive dunque

$$+mv_p d = \left(\frac{1}{3}m_A l^2 + md^2 \right) \omega$$

da cui si ricava la velocità angolare finale:

$$\omega = \frac{mv_p d}{\frac{1}{3}m_A l^2 + md^2} = \frac{3mv_p d}{m_A l^2 + 3md^2} \simeq 2 \text{ rad s}^{-1}.$$

Problema 4.6

Svolgimento

► Dal diagramma di corpo libero risulta che le forze agenti sul cilindro sono: la forza peso mg (verticale) e la forza di attrito statico f_s applicata nel punto di contatto; quest'ultima è parallela al piano e rivolta verso l'alto. Si scelga ora l'asse x parallelo alla direzione del piano inclinato e orientato nel verso del moto: la I equazione cardinale proiettata lungo tale asse si scrive

$$\sum F_x = m a_{CM}$$

dove $\sum F_x$ è la somma di tutte le componenti lungo l'asse x delle forze agenti sul cilindro, e a_{CM} è l'accelerazione del centro di massa. Pertanto

$$\sum F_x = mg \sin \theta - f_s = ma_{CM}.$$

Si è chiamato θ l'angolo di inclinazione del piano, che non è noto. Tuttavia, visto che $h = l \sin \theta$, risulta che $\sin \theta = h/l$. Pertanto la I equazione cardinale, proiettata lungo l'asse x , si scrive

$$mgh/l - f_s = ma_{CM}.$$

Scriviamo ora la II equazione cardinale. Sia z l'asse di simmetria del cilindro, con verso concorde a quello della sua velocità angolare. Poiché la distribuzione di massa nel cilindro ha simmetria radiale, tale asse passa per il centro di massa ed è anche un asse principale d'inerzia. Sappiamo quindi che il momento angolare del cilindro, calcolato rispetto a qualunque polo che giaccia sull'asse, è sempre parallelo alla velocità angolare: $L = I_{CM}\omega$ dove I_{CM} è il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo asse. Scrivendo la II equazione cardinale proiettata sull'asse z , si ha quindi:

$$\sum M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_{CM} \alpha$$

dove M_z è la componente assiale del momento complessivo delle forze agenti sul cilindro e α è la componente z dell'accelerazione angolare (che coincide con il suo modulo grazie al verso scelto per l'asse z). Poiché si tratta di un moto di rotolamento, sappiamo che $\alpha = a_{CM}/r$. Il momento assiale totale è dato da

$$M_z = r f_s;$$

la forza peso non compare perché è applicata nel centro di massa.
Mettendo a sistema la I e la II equazione cardinale otteniamo:

$$\begin{cases} mgh/l - f_s = ma_{CM} \\ r f_s = I_{CM} \frac{a_{CM}}{r} \end{cases} \quad (4.11)$$

Sostituendo l'espressione di f_s ricavata dalla seconda equazione nella prima, si ottiene l'accelerazione del centro di massa:

$$a_{CM} = \frac{mg\frac{h}{l}}{m + \frac{l_{CM}}{r^2}}. \quad (4.12)$$

La stessa accelerazione può però essere ricavata per via cinematica usando il fatto che il centro di massa del cilindro percorre un tratto l in un tempo t^* :

$$l = \frac{1}{2}a_{CM}t^{*2}. \quad (4.13)$$

Confrontando le due diverse espressioni ricavate per a_{CM} (Equazioni 4.12 e 4.13) si può ricavare il momento d'inerzia I_{CM} in funzione delle grandezze note:

$$\begin{aligned} I_{CM} &= m r^2 \frac{g h t^2 - 2 l^2}{2 l^2} = \\ &= 10^{-1} \text{ kg} \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \frac{9.8 \text{ m s}^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot (2 \text{ s})^2 - 2(1 \text{ m})^2}{2(1 \text{ m})^2} \simeq \\ &\simeq 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2. \end{aligned}$$

Problema 4.7

S VOLGIMENTO

► Per calcolare il centro di massa dei corpi in questione useremo sempre la sua definizione nel caso un corpo continuo, la cui espressione matematica sarà tuttavia differente a seconda delle diverse geometrie.

- a) Essendo l'asta di sezione trascurabile, conviene usare un sistema di riferimento cartesiano unidimensionale, con origine in un estremo dell'asta e asse x lungo essa. La coordinata di posizione del centro di massa è data dall'espressione

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda(x) dx = \frac{\lambda}{M} \int_0^L x dx, \quad (4.14)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che l'asta è omogenea e quindi la densità (lineare) λ non dipende dalla posizione e ha il valore costante $\frac{M}{L}$. Il calcolo dell'integrale 4.14 è immediato e dà

$$x_{CM} = \frac{L}{2}. \quad (4.15)$$

Il centro di massa di un'asta sottile omogenea si trova dunque a metà della sua lunghezza.

- b) Anche in questo caso, avendo una sezione trascurabile e una densità lineare di massa $\lambda(x)$, il corpo può essere considerato unidimensionale. Si può quindi scrivere

$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x \lambda(x) dx}{\int_0^L \lambda(x) dx} = \frac{\int_0^L x \lambda_0 (1 + \alpha \frac{x}{L}) dx}{\int_0^L \lambda_0 (1 + \alpha \frac{x}{L}) dx}. \quad (4.16)$$

L'integrale a denominatore vale

$$\int_0^L \lambda_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right) dx = \lambda_0 L \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right), \quad (4.17)$$

l'integrale a numeratore invece

$$\int_0^L x \lambda_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right) dx = \lambda_0 L^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{3}\right), \quad (4.18)$$

quindi il centro di massa si trova nella posizione

$$x_{CM} = \frac{L}{2} \frac{1 + \frac{2}{3}\alpha}{1 + \frac{\alpha}{2}} . \quad (4.19)$$

Ora, a differenza del caso a), il centro di massa non è più nel centro geometrico dell'asta, ma si trova spostato verso la sua estremità più massiva. Il caso a) naturalmente si può riottenere dall'espressione 4.19 in corrispondenza a un valore nullo del parametro α .

- c) Il corpo, di spessore trascurabile, ha due assi di simmetria geometrica (le due diagonali, per esempio, oppure le mediane dei lati). Essendo inoltre omogeneo, il suo centro di massa si deve trovare nell'intersezione tra i suddetti assi, ossia al centro del quadrato.
- d) Il sistema ha un asse di simmetria, la bisettrice dell'angolo diverso dagli altri, che conviene prendere come asse x , con origine nel vertice del triangolo opposto alla base. L'equazione formale per la coordinata x del centro di massa è la seguente

$$x_{CM} = \frac{\int_M x dm}{\int_M dm} , \quad (4.20)$$

in cui M è la massa del corpo. Per valutare l'integrale, conviene scomporre il triangolo in strisce rettangolari perpendicolari all'asse x , come mostrato in Figura 4.16, di altezza infinitesima dx , base $\frac{h}{h}x$ (per le proprietà dei triangoli simili) e massa

$$dm = \sigma \frac{b}{h} x dx , \quad (4.21)$$

dove σ è la densità superficiale di massa della lamina. In questo modo la 4.20 può essere riscritta come

$$x_{CM} = \frac{\int_0^h \rho \frac{b}{h} x^2 dx}{\int_0^h \rho \frac{b}{h} x dx} = \frac{\int_0^h x^2 dx}{\int_0^h x dx} = \frac{2}{3}h . \quad (4.22)$$

Il centro di massa quindi si trova a $\frac{1}{3}h$ dalla base del triangolo, lungo la corrispondente altezza.

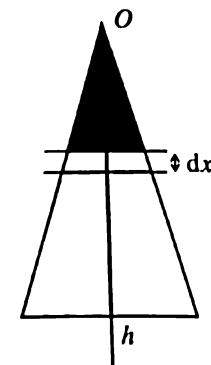


Figura 4.16

Problema 4.8 Svolgimento

► Nel tratto AB il corpo rotola senza strisciare, per cui arriva in B con una velocità di traslazione del CM ed una velocità angolare di rotazione attorno al CM. Nel tratto BC, privo di attrito, la velocità angolare non varia, mentre quella di traslazione diminuisce fino ad annullarsi alla massima quota raggiunta.

- a) Il momento d'inerzia I_D richiesto si può calcolare semplicemente applicando la definizione. Un modo alternativo è quello di procedere per sottrazione. Indicando con $m_{cilindro}$ ed m_{foro} , rispettivamente, le masse che avrebbero un cilindro pieno di raggio R e un cilindretto di raggio r , aventi la stessa altezza di D e fatti dello stesso materiale, si ha

$$I_D = \frac{1}{2}m_{cilindro}R^2 - \frac{1}{2}m_{foro}r^2 \quad (4.23)$$

Indicando con h l'altezza (non nota) del corpo D, il suo volume V_D è dato da

$$V_D = \pi h (R^2 - r^2) , \quad (4.24)$$

e dunque la sua densità ρ è pari a

$$\rho = \frac{M}{V_D} = \frac{M}{\pi h (R^2 - r^2)} . \quad (4.25)$$

Le masse m_{cilindro} e m_{foro} sono quindi

$$m_{\text{cilindro}} = \rho V_{\text{cilindro}} = \rho \pi R^2 h = \frac{M}{R^2 - r^2} R^2 \quad (4.26)$$

$$m_{\text{foro}} = \rho V_{\text{foro}} = \rho \pi r^2 h = \frac{M}{R^2 - r^2} r^2. \quad (4.27)$$

Combinando queste ultime due equazioni con la 4.23, si ottiene infine

$$I_D = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2). \quad (4.28)$$

- b) Le forze che agiscono sul corpo D nel tratto AB sono la forza peso, la reazione normale della guida e l'attrito statico; l'unica che compie lavoro è la forza peso. Essa è conservativa, quindi l'energia meccanica del sistema è costante durante il moto e, in particolare, assume lo stesso valore nei due punti A e B :

$$Mg(\ell - R) = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} I_D \omega^2 \quad (4.29)$$

dove v_B è il modulo della velocità del centro di massa del corpo nel punto B , ω è la velocità angolare del corpo rispetto all'asse di rotazione e $(\ell - R)$ è la variazione di quota del centro di massa. La condizione di rotolamento puro comporta che sia, a ogni istante,

$$\omega = v_B/R. \quad (4.30)$$

La 4.29 quindi diventa

$$\frac{1}{2} \left(M + \frac{I_D}{R^2} \right) v_B^2 = Mg(\ell - R), \quad (4.31)$$

da cui

$$v_B = \sqrt{\frac{2g(\ell - R)}{1 + \frac{I_D}{MR^2}}}. \quad (4.32)$$

- c) Si consideri la legge del moto del centro di massa nel punto B . Le forze agenti sul corpo sono il peso e la reazione normale N della guida, mentre l'accelerazione è quella centripeta (il centro di massa percorre un arco di circonferenza). Si ha dunque la seguente equazione scalare

$$N - Mg = M \frac{v_B^2}{\ell - R}, \quad (4.33)$$

da cui

$$N = M \left(g + \frac{v_B^2}{\ell - R} \right) = M \left[g + \frac{2g}{1 + \frac{I_D}{MR^2}} \right] = Mg \frac{3 + \frac{I_D}{MR^2}}{1 + \frac{I_D}{MR^2}}. \quad (4.34)$$

- d) Nel tratto BC non c'è attrito e le forze agenti sul corpo (peso e reazione normale) hanno momento nullo. Il momento angolare e la velocità angolare del corpo D si conservano. Nel punto di quota massima, ℓ_{\max} , si annulla la velocità del centro di massa del corpo (ma non la sua velocità angolare!); la conservazione dell'energia meccanica si scrive allora così:

$$\frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} I_D \omega^2 = \frac{1}{2} I_D \omega^2 + Mg(\ell_{\max} - R) \quad (4.35)$$

da cui segue che

$$\ell_{\max} = R + \frac{v_B^2}{2g} = R + \frac{\ell - R}{1 + \frac{I_D}{MR^2}}. \quad (4.36)$$

Problema 4.9**Svolgimento**

► Nella soluzione di questo esercizio occorre prestare attenzione al fatto che la carrucola non è ideale, ma è dotata di un proprio momento d'inerzia, pertanto le tensioni della fune a destra e a sinistra di essa presentano intensità diverse.

- a) Il momento d'inerzia I_C della carrucola (cilindro forato) rispetto all'asse di rotazione si può calcolare per sottrazione, tenendo conto del teorema di Huygens-Steiner. In particolare esso si può scrivere come

$$I_C = I_R - 4I_r \quad (4.37)$$

dove I_R è il momento d'inerzia di un cilindro *pieno* di raggio pari al raggio R della carrucola, e I_r è il momento d'inerzia di un cilindro di raggio r uguale a quello di ciascuno dei quattro fori identici nella carrucola. I momenti d'inerzia I_R e I_r vanno calcolati rispetto all'asse di rotazione della carrucola, quindi

$$I_R = \frac{1}{2}M_R R^2, \quad I_r = m_r \left(\frac{1}{2}r^2 + d^2 \right). \quad (4.38)$$

Il testo del problema fornisce il valore della massa totale della carrucola, specificando che essa è omogenea. Le masse del cilindro pieno, M_R , e di ciascuno dei quattro cilindri interni, m_r , possono essere determinate calcolando la densità ρ

$$\rho = \frac{M_C}{V_C} = \frac{M_C}{h(\pi R^2 - 4\pi r^2)} \quad (4.39)$$

dove V_C è il volume della carrucola C. Segue quindi che

$$M_R = \rho V_R = \frac{M_C}{\pi h(R^2 - 4r^2)} \pi R^2 h, \quad m_r = \rho V_r = \frac{M_C}{\pi h(R^2 - 4r^2)} \pi r^2 h \quad (4.40)$$

e dunque, sostituendo nelle Equazioni 4.37 e 4.38,

$$I_C = \left[\frac{1}{2}R^4 - 4 \left(\frac{1}{2}r^2 + d^2 \right) r^2 \right] \frac{M_C}{(R^2 - 4r^2)}. \quad (4.41)$$

- b, c) Si disegni il diagramma di corpo libero per le due masse m_1 ed m_2 . Le forze agenti su m_1 sono: il peso $m_1 g$ e la tensione della porzione di fune a sinistra della carrucola, che indicheremo con T_1 . Sulla massa m_2 agiscono la forza peso $m_2 g$ e la tensione T_2 .

Per scrivere le equazioni della dinamica occorre scomporre le forze; per il corpo 1, conviene scegliere un sistema di assi cartesiani con l'asse x parallelo al piano su cui esso poggia, e orientato nel verso del moto. Lo stesso vale per il corpo 2. Per la carrucola, conviene scegliere come asse rispetto al quale calcolare i momenti (assiali) l'asse z passante per il suo centro e orientato come il vettore velocità angolare (cioè entrante). In questo modo ci si assicura che i segni delle accelerazioni delle due masse e dell'accelerazione angolare della carrucola siano coerenti. Si noti che la carrucola non è ideale e che la fune non striscia lungo il suo bordo. Le equazioni sono dunque le seguenti:

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g \sin \theta_1 = m_1 a & \text{corpo 1, asse } x \\ m_2 g \sin \theta_2 - T_2 = m_2 a & \text{corpo 2, asse } x \\ (T_2 - T_1)R = I_C \ddot{\theta} & \text{carrucola, asse } z \\ N_1 - m_1 g \cos \theta_1 = 0 & \text{corpo 1, asse } y \\ N_2 - m_2 g \cos \theta_2 = 0 & \text{corpo 2, asse } y \end{cases}$$

Risolvendo il sistema dato dalle prime tre, si ottiene

$$a = \frac{m_2 \sin \theta_2 - m_1 \sin \theta_1}{m_1 + m_2 + \frac{I_C}{R^2}} g, \quad (4.42)$$

c

$$T_1 = m_1 g \frac{m_2 \sin \theta_1 + m_2 \sin \theta_2 + \frac{I_C}{R^2} \sin \theta_1}{m_1 + m_2 + \frac{I_C}{R^2}}, \quad (4.43)$$

$$T_2 = m_2 g \frac{m_1 \sin \theta_2 + m_1 \sin \theta_1 + \frac{I_C}{R^2} \sin \theta_2}{m_1 + m_2 + \frac{I_C}{R^2}}. \quad (4.44)$$

d) Per avere velocità dei blocchi costante, occorre che sia $a = 0$ e cioè che

$$m_2 \sin \theta_2 = m_1 \sin \theta_1, \quad (4.45)$$

da cui

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}. \quad (4.46)$$

Problema 4.10

SVOLGIMENTO

► Nella soluzione di questo esercizio occorre prestare attenzione al fatto che la carrucola non è ideale, ma è dotata di un proprio momento d'inerzia, pertanto le tensioni della fune nel tratto orizzontale e in quello verticale presentano intensità diverse.

a) Si inizi considerando l'equazione del moto della massa m . Detta T_1 la componente lungo la verticale della tensione della fune, rivolta verso l'alto, si ha $T_1 - mg = ma$, da cui

$$T_1 = m(g + a). \quad (4.47)$$

Il moto della puleggia può essere studiato mediante la seconda equazione cardinale, prendendo come verso di rotazione positivo convenzionale quello antiorario. Tenendo conto che la fune non striscia, l'accelerazione angolare α_1 della puleggia è pari ad a/r_1 , per cui si può scrivere

$$r_1 T_2 - r_1 T_1 = I_1 \alpha_1 = I_1 \frac{a}{r_1}. \quad (4.48)$$

Quest'ultima equazione permette di determinare la tensione T_2 della fune nel tratto orizzontale, che risulta

$$T_2 = T_1 + \frac{I_1}{r_1^2} a = mg + \left(m + \frac{I_1}{r_1^2} \right) a = mg + \left(m + \frac{m_1}{2} \right) a \approx 1086 \text{ N}, \quad (4.49)$$

dove si è tenuto conto dell'Equazione 4.47 per la tensione T_1 e del fatto che la puleggia è assimilabile a un cilindro, per cui il suo momento d'inerzia vale $I_1 = m_1 r_1^2 / 2$.

b) Per calcolare la forza F è ora sufficiente scrivere l'equazione dei momenti per l'argano, che con l'usuale condizione cinematica sull'accelerazione angolare, che si può indicare con α_2 , risulta

$$r_3 F - r_2 T_2 = I_2 \alpha_2 = I_2 \frac{a}{r_2}. \quad (4.50)$$

Risolvendo rispetto a F e utilizzando la precedente espressione di T_2 , si ottiene

$$F = \frac{r_2}{r_3} \left(T_2 + \frac{I_2}{r_2^2} a \right) = \frac{r_2}{r_3} \left[mg + \left(m + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2} \right) a \right] \approx 454 \text{ N}. \quad (4.51)$$

- c) La reazione vincolare del perno della pulleggia si ottiene imponendo che la risultante delle forze agenti sulla pulleggia stessa sia nulla. Lungo l'orizzontale l'unica altra forza agente è la tensione T_2 , che agisce verso sinistra, per cui si ha

$$\Phi_x = T_2 \approx 1086 \text{ N}, \quad (4.52)$$

agente ovviamente verso destra. Lungo la verticale invece agiscono sia la tensione T_1 sia la forza peso, entrambe dirette verso il basso, per cui si ha

$$\Phi_y = T_1 + m_1 g \approx 1179 \text{ N}, \quad (4.53)$$

diretta ovviamente verso l'alto, con T_1 ricavata dall'espressione 4.47.

- d) Definendo $l \equiv r_3 - r_2$, si può scrivere la seguente espressione per il momento d'inerzia dell'argano:

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2 r_2^2 + 4 \left[\frac{1}{12}m_3 l^2 + m_3 \left(r_2 + \frac{l}{2} \right)^2 \right], \quad (4.54)$$

dove il primo termine è il momento d'inerzia del cilindro, mentre il termine fra parentesi quadre è costituito dalla somma del momento d'inerzia di una barra, calcolato rispetto all'asse (ortogonale) passante per il suo centro di massa, e di un termine di Huygens-Steiner, che tiene conto del fatto che l'asse di rotazione dista $r_2 + l/2$ dal centro di massa di ciascuna barra. Nella precedente equazione, l'unica incognita è appunto la massa m_2 , che si può quindi calcolare come

$$m_2 = 2 \left\{ \frac{I_2}{r_2^2} - 4m_3 \left[1 + \frac{l}{r_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{l}{r_2} \right)^2 \right] \right\} = 74 \text{ kg}. \quad (4.55)$$

Problema 4.11

SVOLGIMENTO

► La soluzione di questo problema richiede di imporre, in momenti diversi, la conservazione di quantità di moto, momento angolare ed energia meccanica.

- a) Calcoliamo innanzitutto la velocità della pallina quando urta la sbarretta. Consideriamo il sistema costituito dalle due palline e dalla molla (che è ideale, quindi priva di massa). Tale sistema è conservativo perché l'unica forza che compie lavoro è quella elastica. Quando la molla è compressa l'energia meccanica è puramente energia potenziale elastica; quando la molla è tornata alla sua lunghezza di riposo, l'energia meccanica coincide con l'energia cinetica delle due palline. Queste ultime sono identiche e quindi le loro velocità sono uguali in modulo e opposte in verso. Ciò è evidente per ragioni di simmetria ma può anche essere ricavato in modo rigoroso imponendo la conservazione della quantità di moto del sistema nella fase di espansione della molla. Scegliendo un asse x orizzontale, parallelo alla direzione del moto e orientato verso destra, e chiamando v_1 (v_2) la velocità della pallina che va verso destra (sinistra), si ha che

$$P_x^i = P_x^f \quad \rightarrow \quad 0 = +mv_1 - mv_2$$

da cui evidentemente $v_1 = v_2 = v$. Pertanto la conservazione dell'energia meccanica si scrive:

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = 2 \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.56)$$

e da qui si ottiene la velocità

$$v = \sqrt{\frac{k}{2m}} \Delta x = 1 \text{ ms}^{-1}. \quad (4.57)$$

Per analizzare l'urto tra la pallina e la sbarretta, consideriamo il sistema composto da questi due corpi. L'urto tra la pallina e la sbarretta è elastico; quindi, per definizione, si conserva l'energia cinetica del sistema. In tale urto *non* si conserva la quantità di moto del sistema, perché la forza vincolare in O è una forza esterna impulsiva. Tuttavia, se si sceglie O come polo, tale forza ha momento nullo. Le altre forze esterne (ossia le forze peso) hanno momento nullo nell'istante dell'urto, quando la barretta è verticale (e in ogni caso non sono impulsive). Pertanto nell'urto si conserva il momento angolare rispetto a O .

Il momento angolare prima dell'urto è dovuto solo al moto della pallina. Chiamando P il punto occupato dalla pallina e scegliendo l'asse z passante per O e uscente dal piano della Figura 4.17, si ha:

$$L_{O,z}^i = (\overrightarrow{OP} \wedge mv)_z = +mv\ell \quad (4.58)$$

Dopo l'urto, supponendo che la pallina torni indietro con velocità v' , e indicando con I_z il momento d'inerzia della sbarretta rispetto all'asse z , il momento angolare risulta

$$L_{O,z}^f = (\overrightarrow{OP} \wedge mv')_z + I_z\omega = (-mv'\ell + I_z\omega) \quad (4.59)$$

La conservazione del momento angolare è quindi espressa dall'equazione

$$L_{O,z}^i = L_{O,z}^f \longrightarrow mv\ell = -mv'\ell + I_z\omega \quad (4.60)$$

La conservazione dell'energia cinetica si scrive invece

$$K^i = K^f \longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 \quad (4.61)$$

Il sistema formato dalle Equazioni 5.72 e 4.61 può essere riscritto nella forma

$$m(v^2 - v'^2) = I_z\omega^2 \quad (4.62)$$

$$m(v + v') = \frac{I_z}{\ell}\omega \quad (4.63)$$

Si può ottenere rapidamente una soluzione dividendo membro a membro e mettendo a sistema l'equazione risultante con la 4.63. In sostanza il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} v + v' = \frac{I_z\omega}{m\ell} \\ v - v' = \omega\ell. \end{cases} \quad (4.64)$$

Si ottengono le soluzioni

$$v' = \left(\frac{I - m\ell^2}{I + m\ell^2} \right) v, \quad \omega = \frac{2m\ell}{I + m\ell^2} v \quad (4.65)$$

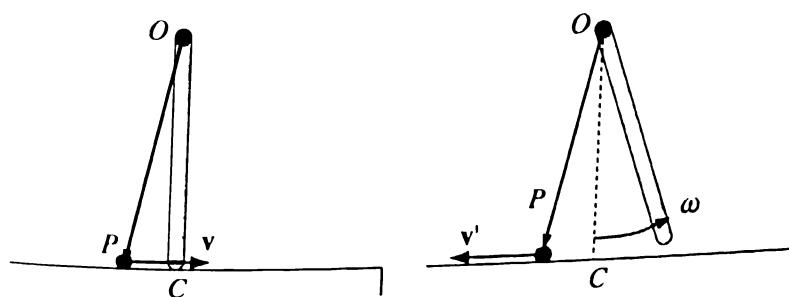


Figura 4.17 Prima (a sinistra) e dopo (a destra) l'urto elastico in C

Essendo $I_z = \frac{1}{3}M\ell^2$ e tenendo conto che $M = 3m$, si ottiene infine $v' = 0$ (che significa che dopo l'urto la pallina resta ferma) e

$$\omega = v/\ell = 0.5 \text{ rad/s.} \quad (4.66)$$

- b) Per calcolare l'altezza massima raggiunta dal centro di massa della sbarretta, analizziamo il moto di rotazione di quest'ultima dopo l'urto. Esso avviene in assenza di attrito: la sbarretta è soggetta alla forza applicata dal vincolo, che però non compie lavoro, e alla forza peso, che è conservativa. Si conserva quindi l'energia meccanica³. Sia y un asse verticale, orientato verso l'alto e con origine nel punto C . Assumiamo che a $y = 0$ corrisponda energia potenziale gravitazionale nulla. Subito dopo l'urto, il centro di massa si trova a una quota $y_{CM}^i = \ell/2$. Pertanto la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e l'istante in cui la sbarretta inverte il suo moto si scrive:

$$Mg y_{CM}^i + \frac{1}{2}I_z\omega^2 = Mg y_{CM}^{\max} \quad (4.67)$$

Pertanto la variazione di quota del centro di massa è

$$\Delta y_{CM} = y_{CM}^{\max} - y_{CM}^i = \frac{\frac{1}{2}I_z\omega^2}{Mg} = \frac{1}{6} \frac{\ell^2\omega^2}{g} = \frac{1}{60} \text{ m} \quad (4.68)$$

avendo tenuto conto dell'espressione di I_z .

- c) La condizione limite da imporre affinché la sbarretta descriva un giro completo è che essa raggiunga la posizione verticale (dopo una rotazione di 180 gradi) con velocità nulla. La variazione di quota del centro di massa rispetto alla condizione iniziale della sbarretta è $\Delta y_{CM} = \ell$. Chiamiamo ω^* la velocità angolare iniziale minima richiesta. Dall'Equazione 4.68 si trova che:

$$\ell = \frac{1}{6} \frac{\ell^2(\omega^*)^2}{g}, \quad (4.69)$$

da cui si ottiene:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{6g}{\ell}}.$$

Ricordando l'Equazione 4.66 si trova immediatamente che tale condizione si verifica se la pallina urta la sbarretta con una velocità pari a

$$v^* = \omega^* \ell = \sqrt{6g\ell} \simeq 10.9 \text{ m/s.}$$

Problema 4.12

Svolgimento

- In Figura 4.18 sono riportate le forze agenti sulla massa m e sul corpo costituito dai due dischi.
- a) Scriviamo tutte le equazioni che servono per descrivere la dinamica del sistema, ossia la II legge di Newton per la massa m e le due equazioni cardinali per il corpo rigido.
La II legge di Newton per il corpo di massa m risulta essere:

$$mg + T_1 = ma \quad (4.70)$$

Tutte le forze a primo membro sono parallele all'asse y mostrato in Figura 4.18; proiettando l'equazione precedente su tale asse si ottiene

$$+mg - T_1 = ma. \quad (4.71)$$

³ Notiamo che non si conservano né la quantità di moto, né il momento angolare perché il sistema è soggetto a forze e momenti esterni.

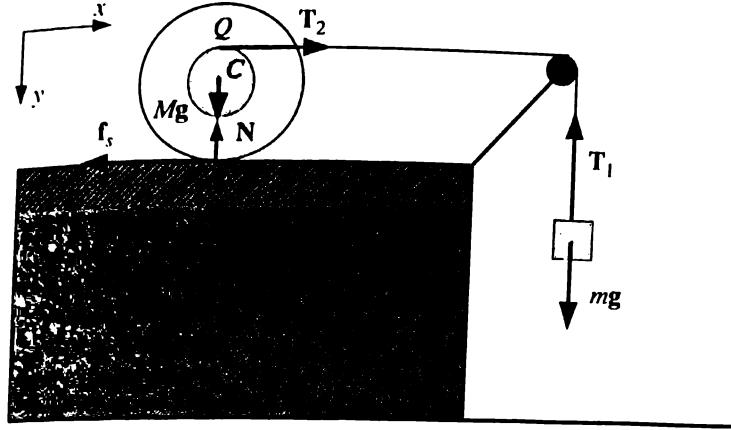


Figura 4.18 Diagramma delle forze.

Scriviamo ora la I equazione cardinale per il corpo rigido, indicando con $M = m_1 + m_2$ la massa totale del corpo:

$$Mg + T_2 + f_s + N = MA, \quad (4.72)$$

dove abbiamo indicato con A l'accelerazione del centro di massa del corpo rigido, con f_s la forza di attrito statico e con N la reazione vincolare normale. Notiamo che il centro di massa del corpo rigido, per ragioni di simmetria, si trova nel suo centro geometrico C . Proiettando tale equazione lungo gli assi x e y della Figura 4.18 si trova:

$$\begin{cases} +T_2 - f_s = MA & (\text{asse } x) \\ +Mg - N = 0 & (\text{asse } y) \end{cases} \quad (4.73)$$

Per scrivere la II equazione cardinale, scegliamo come polo il punto P di contatto tra il corpo rigido e il piano, allineato con C e Q (Figura 4.18). L'unica forza ad avere momento non nullo rispetto a P è la tensione della fune T_2 , applicata in Q . Pertanto possiamo scrivere

$$\overrightarrow{PQ} \wedge T_2 = \frac{d\mathbf{L}_P}{dt} \quad (4.74)$$

Notiamo che $|\overrightarrow{PQ}| = r_1 + r_2$. Scegliamo l'asse z passante per P , ortogonale al piano della figura e con verso entrante. Proiettando l'equazione precedente lungo tale asse si ottiene

$$+T_2(r_1 + r_2) = I_P \alpha. \quad (4.75)$$

dove I_P è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z scelto e α l'accelerazione angolare del corpo rigido. Per calcolare I_P ricordiamo che il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto al suo asse di simmetria (passante per il centro di massa e quindi per il punto C) è uguale alla somma dei singoli momenti d'inerzia dei due dischi rispetto allo stesso asse:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}m_1r_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2. \quad (4.76)$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z passante per P si ottiene con il teorema di Huygens-Steiner. La distanza tra C e P è $\overline{PC} = r_2$, per cui

$$I_P = I_{CM} + Mr_2^2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)r_2^2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2 + m_1r_2^2 + \frac{3}{2}m_2r_2^2. \quad (4.77)$$

A questo punto, il sistema da risolvere per trovare le grandezze richieste dal punto (a) del problema è:

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma \\ +T_2 - f_s = MA \\ +Mg - N = 0 \\ +T_2(r_1 + r_2) = I_P \alpha . \end{cases} \quad (4.78)$$

Poiché la fune è ideale, e inoltre la carrucola ha massa trascurabile, i moduli delle tensioni ai due capi della fune sono uguali, ossia $T_1 = T_2$, e li indicheremo entrambi con T . Per risolvere il sistema occorrono comunque informazioni aggiuntive. Pertanto, cerchiamo le relazioni che legano tra loro A , α e a . Il corpo costituito dai due dischi ruota rigidamente intorno all'asse di rotazione istantanea che passa per il punto di contatto P ; di conseguenza, i punti C e Q descrivono, instantaneamente, circonferenze centrate in P e aventi raggi $\overline{PC} = r_2$ e $\overline{PQ} = r_1 + r_2$. Pertanto, le loro velocità (tangenziali) risultano essere, in modulo,

$$v_C = \omega r_2, \quad v_Q = \omega(r_1 + r_2) . \quad (4.79)$$

Si ricordi che v_C è la velocità del centro di massa, e si noti che v_Q è anche la velocità del corpo puntiforme m , perché la fune è inestensibile. Pertanto, derivando le Equazioni 4.79, si trova:

$$A = \frac{dv_C}{dt} = \alpha r_2, \quad a = \frac{dv_Q}{dt} = \alpha(r_1 + r_2) . \quad (4.80)$$

Poiché il problema chiede di determinare l'accelerazione della massa m , occorre sostituire nel sistema 5.28 le relazioni:

$$\alpha = \frac{a}{r_1 + r_2} \quad A = \frac{r_2}{r_1 + r_2} a .$$

Di conseguenza, il sistema 5.28 si riduce a:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - f_s = M \frac{r_2}{r_1 + r_2} a \\ T(r_1 + r_2) = I_P \frac{a}{(r_1 + r_2)} \end{cases} \quad (4.81)$$

avendo considerato solo le equazioni che contengono le incognite di interesse a e T . Risolvendo si ottiene

$$a = \frac{m}{\frac{I_P}{(r_1 + r_2)^2} + m} g \quad (4.82)$$

$$T = \frac{I_P}{I_P + m(r_1 + r_2)^2} mg \quad (4.83)$$

- b) La risultante Φ delle forze applicate dal piano al corpo rigido è la somma della reazione vincolare normale N e della forza di attrito radente statico f_s . Considerando gli assi utilizzati finora, possiamo scrivere che

$$\Phi = -f_s \mathbf{u}_x - N \mathbf{u}_y .$$

Dal sistema 5.28 si ottiene immediatamente $N = Mg$. Il valore di f_s si ricava invece sostituendo le espressioni di T e a (Equazioni 4.82 e 4.83) nella seconda equazione del sistema 4.81. Il risultato è:

$$f_s = \frac{m}{\frac{I_P}{(r_1 + r_2)^2} + m(r_1 + r_2)} g \left[\frac{I_P}{(r_1 + r_2)} - Mr_2 \right] . \quad (4.84)$$

- c) Affinché il corpo rigido rotoli senza strisciare, è necessario che il punto di contatto P sia istantaneamente fermo, il che, come si è visto, implica che l'attrito radente sia di tipo statico. Tuttavia, sappiamo che il modulo della forza di attrito statico non può superare un valore massimo pari a $\mu_s N$. Poiché, come si è visto, in questo caso $N = Mg$, si conclude che, per avere rotolamento senza strisciamento, deve essere soddisfatta la condizione

$$f_s \leq \mu_s Mg. \quad (4.85)$$

Nel caso in esame, essendo f_s ed Mg univocamente determinati, essa va letta come una condizione su μ_s :

$$\mu_s \geq \frac{f_s}{Mg}.$$

Pertanto il *minimo* valore ammissibile per il coefficiente di attrito statico nel caso in esame risulta essere

$$\mu_{\min} = \frac{f_s}{Mg}. \quad (4.86)$$

Usando l'espressione 4.84 per f_s , si ottiene

$$\frac{f_s}{Mg} = \frac{1}{M} \frac{m}{\frac{I_p}{(r_1+r_2)} + m(r_1+r_2)} \left[\frac{I_p}{(r_1+r_2)} - Mr_2 \right]. \quad (4.87)$$

Problema 4.13 S VOLGIMENTO

► Siano P_1 e P_2 i punti occupati dai due corpi in un dato istante. Sia z l'asse di rotazione, orientato concordemente al vettore ω , e x l'asse ad esso ortogonale e giacente nel piano che contiene z e la sbarretta. Pertanto, in ogni istante, la sbarretta giace nel piano x, z (Figura 4.19). Il centro di massa del sistema si trova necessariamente nel punto medio della sbarretta, ossia sull'asse di rotazione. Chiamiamo \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 i vettori posizione dei due corpi con origine nel centro di massa del sistema, CM . Chiaramente, i loro moduli sono uguali fra loro e pari a $d/2$. Il raggio della circonferenza descritta da ognuno dei corpi durante la rotazione attorno all'asse z vale quindi $(d/2)\sin\theta$. Le velocità dei due corpi risultano essere:

$$\mathbf{v}_1 = \omega \wedge \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{v}_2 = \omega \wedge \mathbf{r}_2$$

e hanno modulo

$$v_1 = v_2 = \omega \frac{d}{2} \sin\theta.$$

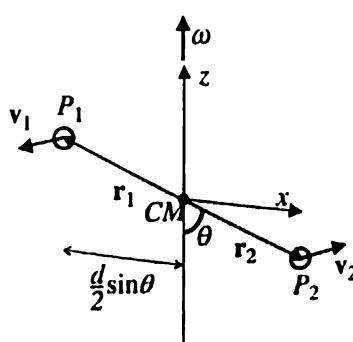


Figura 4.19

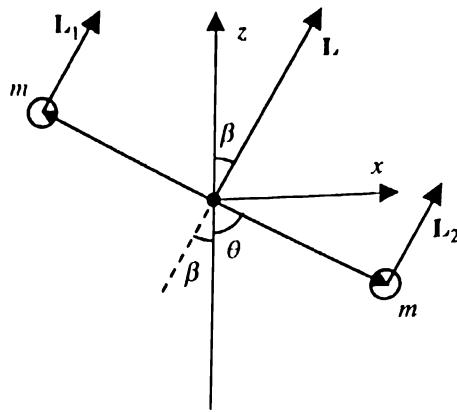


Figura 4.20

- a) Il momento angolare totale del sistema, calcolato usando come polo il centro di massa, è la somma dei momenti angolari dei due corpi, calcolati ognuno rispetto allo stesso polo, ossia:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_1 \wedge m\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge m\mathbf{v}_2 \quad (4.88)$$

avendo tralasciato per semplicità di scrittura il pedice che indica il polo.

I vettori \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 risultano entrambi ortogonali alla sbarretta, concordi fra loro e formanti un angolo $\beta = (\pi/2 - \theta)$ con il vettore ω . I loro moduli sono anch'essi uguali e valgono

$$L_1 = L_2 = m\omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sin \theta. \quad (4.89)$$

Pertanto la loro somma \mathbf{L} ha la stessa direzione, lo stesso verso e modulo pari a:

$$L = 2m\omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sin \theta. \quad (4.90)$$

La componente z del momento angolare totale risulta pertanto essere uguale a:

$$L_z = L \cos \beta = L \sin \theta = 2m\omega \left(\frac{d}{2} \sin \theta\right)^2. \quad (4.91)$$

La componente di \mathbf{L} lungo l'asse x (ossia la componente ortogonale all'asse) risulta essere

$$\begin{aligned} L_x &= L \sin \beta = L \cos \theta = \\ &= 2m\omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.92)$$

In altre parole, si ottiene

$$\mathbf{L} = \frac{m\omega d^2}{2} \sin \theta \cos \theta \mathbf{u}_x + \frac{m\omega d^2}{2} \sin^2 \theta \mathbf{u}_z. \quad (4.93)$$

- b) L'energia cinetica del sistema è dovuta esclusivamente alle due sferette, visto che la sbarretta ha massa trascurabile. Quindi possiamo scrivere

$$K = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = 2 \frac{1}{2}m \left(\omega \frac{d}{2} \sin \theta\right)^2 = \frac{m\omega^2 d^2}{4} \sin^2 \theta. \quad (4.94)$$

- c) Per calcolare il momento frenante consideriamo la II equazione cardinale, proiettata lungo l'asse di rotazione. L'unico momento agente sul sistema è il momento frenante \mathbf{M} , che è necessariamente diretto parallelamente all'asse, ma ha verso opposto a quello di ω . Pertanto:

$$-M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} \quad (4.95)$$

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione vale

$$I_z = 2m \left(\frac{d}{2} \sin \theta \right)^2$$

La soluzione dell'Equazione differenziale 4.95 è

$$\omega(t) = \omega - \frac{M_z}{I_z} t \quad (4.96)$$

avendo indicato con ω la velocità angolare iniziale. Allora, ponendo $\omega(t = T) = 0$, si ottiene

$$M_z = \frac{\omega I_z}{T} \quad (4.97)$$

Il momento frenante agisce fino a fermare completamente il sistema: quindi, dissipà completamente tutta l'energia cinetica (Equazione 4.94).

Problema 4.14

SVOLGIMENTO

- Quando il piatto viene ruotato di un generico angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio, il filo reagisce esercitando un momento diretto in modo tale da opporsi alla rotazione. Sia z l'asse parallelo al filo e orientato verso l'alto. Se definiamo l'angolo θ come positivo quando il piatto è ruotato in senso antiorario, come mostrato in figura, il momento esercitato dal filo potrà essere espresso come

$$\mathbf{M} = -c\theta \mathbf{u}_z . \quad (4.98)$$

Siccome la distribuzione delle masse del sistema è simmetrica rispetto all'asse z , esso è un asse principale d'inerzia per cui la II equazione cardinale, applicata al sistema, assume la forma seguente:

$$\mathbf{M} = I_{\text{tot}} \alpha \mathbf{u}_z , \quad (4.99)$$

dove I_{tot} è il momento d'inerzia complessivo (rispetto all'asse z) del sistema costituito dal piatto e dai quattro cilindretti, mentre α è l'accelerazione angolare. Sostituendo l'Equazione 4.98 nella 4.99 si ottiene quindi:

$$-c\theta \mathbf{u}_z = I_{\text{tot}} \alpha \mathbf{u}_z ,$$

da cui si ottiene subito la relazione scalare

$$I_{\text{tot}} \alpha + c\theta = 0$$

che può essere anche espressa, esplicitando l'accelerazione angolare come derivata seconda dell'angolo θ , come

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{I_{\text{tot}}} \theta = 0 . \quad (4.100)$$

La soluzione dell'Equazione 4.100 è la legge oraria di un moto armonico con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{tot}}}{c}} .$$

Nel caso in esame, la grandezza da determinare è la costante elastica di torsione, che risulta espressa da:

$$c = 4\pi^2 \frac{I_{\text{tot}}}{T^2}. \quad (4.101)$$

Dato che il periodo è noto, dobbiamo ora calcolare il momento d'inerzia del sistema complessivo, che è dato dalla somma dei momenti d'inerzia del piatto e di ognuno dei cilindretti, tutti calcolati rispetto all'asse z . Osserviamo che z passa per il centro di massa del piatto, per cui il momento d'inerzia di quest'ultimo è pari a

$$I_p = \frac{1}{2} MR^2.$$

Invece, ciascuno dei cilindretti ruota intorno a un asse che è parallelo al proprio asse di simmetria, ma posto a distanza d da esso; pertanto, il suo momento d'inerzia può essere ottenuto tramite il teorema di Huygens-Stainer

$$I_c = \frac{1}{2} mr^2 + md^2 = m \left(\frac{r^2}{2} + d^2 \right).$$

Il momento d'inerzia totale sarà pertanto

$$I_{\text{tot}} = I_p + 4I_c = \frac{1}{2} MR^2 + 4m \left(\frac{r^2}{2} + d^2 \right) = \frac{1}{2} MR^2 + 2m (r^2 + 2d^2)$$

e quindi l'Equazione 4.101 diventa:

$$c = 2\pi^2 \frac{MR^2 + 4m(r^2 + 2d^2)}{T^2}.$$

Problema 4.15

Svolgimento

► Trattandosi di un problema di statica, la soluzione richiede di impostare che la trave si trovi in condizioni di equilibrio traslazionale e rotazionale.

- a) In Figura 4.21 sono indicate le forze agenti, ossia la reazione vincolare normale N (che è la componente orizzontale della forza esercitata dal muro), la forza di attrito statico f_s (che è la componente verticale), la forza peso mg e la tensione T della fune.

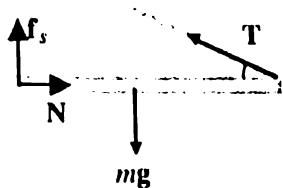


Figura 4.21

Affinché la trave sia in equilibrio, la somma delle forze ad essa applicate e la somma dei momenti di tali forze devono essere entrambe nulle: $\mathbf{R}^{\text{ext}} = 0$ e $\mathbf{M}^{\text{ext}} = 0$. Scriviamo la 1 equazione cardinale scomposta lungo l'asse x (orizzontale e rivolto verso destra) e l'asse y (verticale e rivolto verso il basso):

$$+N - T \cos \theta = 0 \quad (4.102)$$

$$-f_s + mg - T \sin \theta = 0. \quad (4.103)$$

Queste equazioni contengono 3 incognite per cui, per risolvere il problema, occorre aggiungere la 2ª equazione cardinale che scriviamo scegliendo come polo il punto A e come asse z l'asse entrante nel foglio e passante per A . Dato che tutti i momenti sono paralleli a tale asse, possiamo limitarci alle componenti lungo z :

$$+mg \frac{\ell}{2} - T \ell \sin \theta = 0. \quad (4.104)$$

Ricavando T dalla 4.104 e sostituendo nella 4.102 si ottiene

$$N = \frac{1}{2}mg \cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}mg. \quad (4.105)$$

Sostituendo invece nella 4.103 si ottiene f_s (che non è uguale a $\mu_s N$):

$$f_s = \frac{1}{2}mg. \quad (4.106)$$

- b) Riscriviamo le equazioni cardinali per la trave considerando la presenza dell'oggetto di massa m , appeso a distanza x dall'estremo A :

$$+N - T \cos \theta = 0 \quad (4.107)$$

$$-f_s + 2mg - T \sin \theta = 0 \quad (4.108)$$

$$-T \ell \sin \theta + mg \frac{\ell}{2} + mgx = 0 \quad (4.109)$$

Dalla 4.109 si ottiene

$$T = \frac{mg}{\sin \theta} \left[\frac{x}{\ell} + \frac{1}{2} \right],$$

che sostituita nella 4.107 dà

$$N = T \cos \theta = mg \cot \theta \left[\frac{x}{\ell} + \frac{1}{2} \right],$$

e sostituita nella 4.108 porta a

$$f_s = 2mg - T \sin \theta = mg \left[\frac{3}{2} - \frac{x}{\ell} \right].$$

La condizione affinché la trave non cada è che la forza d'attrito sia minore del suo valore massimo, ossia che valga la relazione $f_s \leq \mu_s N$, che significa:

$$mg \left[\frac{3}{2} - \frac{x}{\ell} \right] \leq \mu_s mg \cot \theta \left[\frac{x}{\ell} + \frac{1}{2} \right]$$

da cui si ottiene:

$$x \geq \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \mu_s \cot \theta}{1 + \mu_s \cot \theta} \ell.$$

Ricordando che $\theta = \pi/6$ e quindi $\cot \theta = \sqrt{3}$, si ha infine

$$x \geq \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_s}{1 + \sqrt{3} \mu_s} \ell.$$

- c) Poiché i due oggetti appesi sono a uguale distanza dal centro geometrico della trave, il centro di massa del sistema da essi formato si trova a distanza $x = \ell/2$ dal punto A. Pertanto, questo caso è riconducibile al caso (a) a patto di sostituire alla massa della trave una massa equivalente pari a $3m$. In queste condizioni, si trova che la forza di attrito vale (si veda l'Equazione 4.106)

$$f_s = \frac{3}{2}mg$$

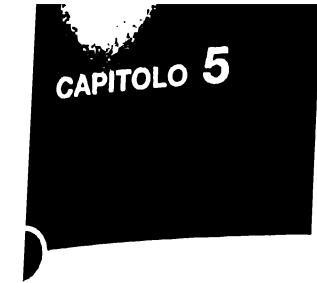
mentre la reazione vincolare normale vale (si veda l'Equazione 4.105)

$$N = \frac{1}{2}(3m)g \cot\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg.$$

Pertanto la trave rimane in equilibrio se $f_s \leq \mu_s N$ che significa:

$$\frac{3}{2}mg \leq \mu_s \frac{3\sqrt{3}}{2}mg \quad \rightarrow \mu_s \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Come si vede, la condizione di equilibrio non dipende da x .



Richiami di teoria

Definizione e proprietà

Una forza \mathbf{F} si dice centrale quando, in qualsiasi posizione si trovi il suo punto di applicazione P , la sua *direzione* passa sempre per un punto fisso O , detto *centro di forza* e la sua *intensità* dipende solo dalla distanza r tra O e P . Per la descrizione di tali forze è comodo usare una rappresentazione in termini di coordinate polari sferiche (r, θ, ϕ) , con origine in O . Così facendo, l'unica componente di \mathbf{F} è quella radiale, ed essa dipende solo dalla distanza r . Indicando con $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ il vettore posizione di P rispetto ad O , una forza centrale ha dunque una forma del tipo

$$\mathbf{F} = F_r(r)\mathbf{u}_r \quad (5.1)$$

Tutte le forze del tipo 5.1 sono *conservative*. Infatti, il lavoro da esse compiuto durante uno spostamento dalla posizione A alla posizione B del corpo cui sono applicate è sempre esprimibile attraverso la variazione di un'energia potenziale del sistema, U , funzione anch'essa della sola variabile r :

$$L_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} F_r(r) dr = U(r_A) - U(r_B). \quad (5.2)$$

Scelto quindi un valore di riferimento r_0 , per il quale si assume $U(r_0) = 0$, l'energia potenziale quando il sistema è nella configurazione in cui il corpo soggetto alla forza si trova a distanza r da O , assume la forma generale

$$U(r) = - \int_{r_0}^r F_r(r') dr'. \quad (5.3)$$

Per una forza del tipo 5.1, il momento rispetto a O è dato da

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{r} \wedge F_r(r)\mathbf{u}_r = \mathbf{0}.$$

Di conseguenza, dalla seconda equazione cardinale $d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{M}_O$ si ricava direttamente

$$\mathbf{L}_O = \text{costante}; \quad (5.4)$$

ossia, il momento angolare di una particella di massa m soggetta a una forza centrale, calcolato rispetto a O , è una costante durante il moto. Una conseguenza immediata consiste

nel fatto che, in ogni istante, il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ giace in un piano perpendicolare a \mathbf{L}_O : quindi, *il moto sotto l'azione di una forza centrale avviene in un piano*. Introducendo coordinate polari (r, ϑ) nel piano del moto, si può scrivere il modulo del vettore \mathbf{L}_O , che risulta costante durante il moto:

$$|\mathbf{L}_O| = mr^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{costante.} \quad (5.5)$$

Esempi di forze centrali

- Un punto materiale di massa M , fisso in O , esercita su una particella puntiforme di massa m che si trova nel punto $P = (r, \theta, \phi)$ una forza gravitazionale che ha la forma $\mathbf{F} = F_r(r)\mathbf{u}_r$, con

$$F_r(r) = -G \frac{mM}{r^2}, \quad (5.6)$$

dove G è la *costante gravitazionale universale*, che vale $6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{kg}^{-2}$.

- Una carica elettrica puntiforme Q , fissa in O , esercita su una carica puntiforme q che si trova nel punto $P = (r, \theta, \phi)$ una forza elettrostatica che ha la forma $\mathbf{F} = F_r(r)\mathbf{u}_r$, con

$$F_r(r) = K \frac{qQ}{r^2}, \quad (5.7)$$

dove k_e è la *costante elettrostatica di Coulomb*¹ che vale $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}$. Si noti che la forza è attrattiva [$F_r(r) < 0$] se le cariche hanno segni opposti, repulsiva [$F_r(r) > 0$] in caso contrario.

Campo gravitazionale ed elettrostatico

Una massa puntiforme M genera, in un generico punto P dello spazio a distanza r da essa, un dato da:

$$\mathcal{G} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (5.8)$$

Questo vuol dire che una particella puntiforme di massa m , posta in P , è soggetta a una forza $\mathbf{F} = m\mathcal{G}$. L'energia potenziale gravitazionale del sistema delle due masse, M ed m , è

$$U(r) = -G \frac{mM}{r} \quad (5.9)$$

avendo assunto come riferimento, in cui l'energia potenziale è nulla, la configurazione in cui le masse si trovano a distanza r_0 infinita.

Se vi sono N masse puntiformi M_1, M_2, \dots, M_N le cui posizioni rispetto a un sistema di riferimento di origine O sono definite dai vettori $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, il campo generato da *tutte* le N masse nel generico punto P , individuato dal vettore \mathbf{r} , può essere scritto, grazie al *principio di sovrapposizione*, nella forma

$$\mathcal{G} = \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_j = \sum_{j=1}^N -G \frac{M_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \mathbf{u}_j \quad (5.10)$$

¹ Nel Sistema Internazionale $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, dove $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

essendo $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ il vettore posizione di P rispetto alla j -esima massa M e $\mathbf{u}_j = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$ il corrispondente versore (si noti che tale campo, risultante di campi centrali, *non* è in generale centrale). Come conseguenza, una particella puntiforme di massa m , posta in P , è soggetta a una forza $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$.

Talvolta conviene descrivere la distribuzione di masse sorgenti del campo gravitazionale mediante un modello continuo, attraverso la funzione densità ρ , definita nei punti di un volume V . Ogni elemento infinitesimo di massa $dm = \rho dV$ della distribuzione (la cui posizione rispetto all'origine è definita dal vettore \mathbf{r}') genera un campo $d\mathbf{G}$ nel punto P individuato dal vettore \mathbf{r} (si veda la Figura 5.1). Il campo totale è quindi dato da

$$\mathbf{G} = \int d\mathbf{G} = \int_V -G \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV. \quad (5.11)$$

La somiglianza fra la forza di gravitazione universale e la forza di Coulomb permette di riprodurre le relazioni analoghe (con l'ovvia differenza del carattere attrattivo e repulsivo che l'interazione elettrostatica può assumere) partendo dalla definizione di campo elettrostatico generato nel punto P da una sola carica puntiforme Q posta nell'origine:

$$\mathbf{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (5.12)$$

per cui una carica puntiforme q posta nel punto P a distanza r da Q è soggetta a una forza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. L'energia potenziale elettrostatica del sistema delle due cariche è

$$U(r) = K \frac{qQ}{r}$$

avendo posto uguale a zero l'energia potenziale quando le due cariche sono a distanza infinita. Si noti che $U(r) > 0$ se le cariche q e Q sono concordi in segno, mentre $U(r) < 0$ se le cariche hanno segni opposti. Per il principio di sovrapposizione, il campo elettrostatico creato nel punto P da N cariche puntiformi Q_1, Q_2, \dots, Q_N aventi posizioni $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ rispetto a un sistema di riferimento di origine O , ha la forma

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_j = \sum_{j=1}^N K \frac{Q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \mathbf{u}_j.$$

Quando la carica sorgente può essere considerata distribuita con continuità in un volume finito V , con densità ρ_Q , il campo elettrostatico nel punto P si può scrivere

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int_V K \frac{\rho_Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (5.13)$$

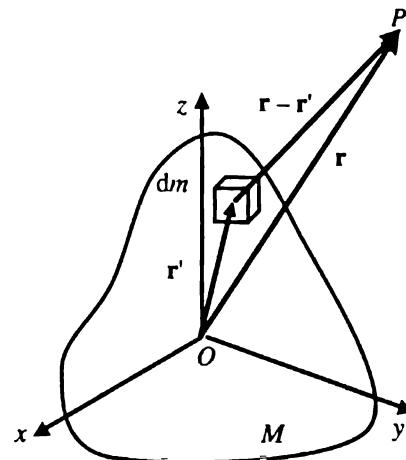


Figura 5.1

Il teorema di Gauss

Per entrambe le interazioni, gravitazionale ed elettrostatica, vale il *teorema di Gauss*. In particolare, per il campo gravitazionale, risulta

$$\oint_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_n dS = -4\pi G \int_{V_S} \rho dV \quad (5.14)$$

ossia, il flusso del campo gravitazionale $\Phi(\mathbf{G})_S = \int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_n dS$ attraverso una generica superficie chiusa S è direttamente proporzionale alla massa $M = \int_{V_S} \rho dV$ contenuta nel volume V_S delimitato da S ; si ricordi che il versore \mathbf{u}_n , normale all'elemento di superficie infinitesimo dS , viene convenzionalmente scelto con verso uscente da S .

Con ovvio significato di simboli, per il campo elettrostatico si può scrivere

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = 4\pi k_e \int_{V_S} \rho_Q dV \quad (5.15)$$

dove $Q = \int_{V_S} \rho_Q dV$ è la carica totale nel volume V_S interno a S .

Il teorema di Gauss è estremamente utile per calcolare il campo gravitazionale (o elettrostatico) creato da distribuzioni simmetriche di massa (o di carica).

Un caso interessante, pur se molto particolare, è quello in cui una massa M (o carica Q) è *uniformemente* distribuita all'interno di una regione sferica di raggio R : il campo risultante in un punto P , a distanza $r > R$ dal centro della sfera, risulta avere la stessa Equazione 5.8 (o 5.12) del campo prodotto da una massa puntiforme M (o da una carica puntiforme Q). In altre parole, all'*esterno* della sfera, tutto avviene *come se* tutta la massa (o la carica) fosse concentrata nel suo centro.

Le leggi di Keplero

Le leggi di Keplero descrivono il moto dei pianeti soggetti alla forza gravitazionale del Sole: si possono ricavare partendo dallo studio del problema di due corpi soggetti alla reciproca interazione gravitazionale, nel caso in cui uno abbia massa molto maggiore dell'altro.

– **Prima legge (legge delle orbite).** *Ogni pianeta si muove lungo un'orbita ellittica, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.* Utilizzando coordinate polari nel piano del moto, con l'origine nel fuoco occupato dal Sole, la traiettoria di un pianeta è descritta dall'ellisse:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad (5.16)$$

dove i due parametri a ed e denotano, rispettivamente, il semiasse maggiore e l'eccentricità. La distanza r tra il pianeta e il Sole ha un minimo per $\theta = 0$ (perielio) e un massimo per $\theta = \pi$ (afelio).

– **Seconda legge (legge delle aree).** *La retta che congiunge il Sole col pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.* Tale legge esprime il fatto che la velocità areolare cioè la velocità con cui varia l'area A , è costante:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante.} \quad (5.17)$$

Tenendo presente l'Equazione 5.5, la 5.17 è una conseguenza della conservazione del momento angolare del pianeta, nel suo moto intorno al Sole.

- Terza legge (legge dei periodi). I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite. Questo vuol dire che se due pianeti hanno periodi di rivoluzione T_1 e T_2 e semiassi maggiori a_1 e a_2 , deve risultare

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{ossia} \quad \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}, \quad (5.18)$$

essendo M_S la massa del Sole.

TEST DI COMPRENSIONE

1. Una particella è in moto sotto l'azione della sola forza centrale $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, dove k è una costante positiva. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
 - Il moto della particella si svolge in un piano;
 - L'energia meccanica della particella è costante;
 - Il momento angolare della particella rispetto all'origine è costante;
 - Il moto della particella avviene con velocità di modulo costante.
2. Il campo elettrostatico generato in un punto P da una certa distribuzione di carica è:
 - uguale alla forza \mathbf{F} che agirebbe su una carica puntiforme q , posta in P ;
 - uguale al rapporto tra la forza \mathbf{F} che agirebbe su una carica puntiforme q , posta in P , e la carica stessa q ;
 - uguale al prodotto tra la forza \mathbf{F} che agirebbe su una carica puntiforme q , posta in P , e la carica stessa q ;
 - uguale al rapporto tra la forza \mathbf{F} che agirebbe su una carica puntiforme q , posta in P , e il valore assoluto della carica stessa q .
3. Tre cariche puntiformi identiche q sono fisse ai vertici di un triangolo equilatero. Nel piano del triangolo, equidistante dai tre vertici, è posta una carica puntiforme negativa $-q$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
 - L'energia potenziale elettrostatica è nulla;
 - L'energia potenziale elettrostatica è positiva;
 - La forza elettrostatica risultante agente sulla carica $-q$ è diversa da zero;
 - La forza elettrostatica risultante agente sulla carica $-q$ è nulla.
4. Si osserva che il flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie di un parallelepipedo è nullo. Si può affermare che
 - il campo elettrostatico è necessariamente nullo all'esterno del parallelepipedo;
 - il campo elettrostatico è necessariamente nullo all'interno del parallelepipedo;
 - è possibile che all'interno del parallelepipedo ci siano cariche elettriche;
 - sicuramente il parallelepipedo non contiene cariche elettriche.
5. Un pianeta descrive un'orbita ellittica attorno alla sua stella. Sia $\omega = d\theta/dt$ la sua velocità angolare e r la sua distanza dal centro della stella in un dato istante. Quale delle seguenti relazioni è corretta?
 - $\frac{\omega}{r} = \text{costante};$
 - $\frac{\omega}{r^2} = \text{costante};$
 - $\omega r^2 = \text{costante};$
 - $\omega r = \text{costante}.$

Problemi

Problema 5.1

La densità media degli asteroidi è spesso assunta pari a 2500 kg/m^3 . Si supponga che un astronauta riesca ad arrivare sulla superficie di un asteroide sferico, di raggio R . Qual è il massimo valore di R che gli permetterebbe di sfuggire al campo gravitazionale dell'asteroide semplicemente saltando? (Si assuma per confronto che sulla Terra l'astronauta riesca a saltare, quando indossa la tuta spaziale, a un'altezza di 60 cm.)

Problema 5.2

Si immagini un sistema planetario in cui tre pianeti di uguale massa m descrivono la stessa orbita circolare di raggio r attorno a una stella di massa M . I tre pianeti hanno la stessa velocità e restano sempre equidistanti fra loro. Le dimensioni della stella e dei pianeti sono trascurabili rispetto alle loro distanze reciproche.

- Si determini il periodo del moto di rivoluzione dei tre pianeti.
- Si determini l'energia meccanica totale del sistema.

Problema 5.3

Un satellite di massa m segue un'orbita circolare attorno a un pianeta di massa incognita. L'orbita ha raggio r_1 e il periodo di rivoluzione del satellite è $T_1 = 12 \text{ h}$. Un secondo satellite, anch'esso di massa m , segue un'orbita circolare di raggio $r_2 = 50000 \text{ km}$ e ha un periodo di rivoluzione $T_2 = 24 \text{ h}$.

- Determinare il valore di r_1 .
- Determinare le velocità dei due satelliti.
- Calcolare la massa del pianeta.
- Confrontare le energie potenziali e cinetiche dei due satelliti (trascurando l'interazione fra essi).

Problema 5.4

Una pallina di vetro di massa $m = 10 \text{ g}$ e raggio trascurabile è appesa a un filo di massa trascurabile e lunghezza $\ell = 30 \text{ cm}$, all'estremità è fissata a un supporto rigido, come in Figura 5.2. La pallina reca una carica $q = 1 \mu\text{C}$ ed è immersa nel campo eletrostatico creato da un foglio di plastica verticale, molto esteso, che è stato elettrizzato per strofinio e reca quindi una carica negativa, uniformemente distribuita con densità superficiale incognita σ . All'equilibrio, il filo forma un angolo $\theta_{\text{eq}} = 14^\circ$ con la verticale.

- Determinare la direzione e il verso del campo elettrico \mathbf{E} creato dal piano carico, nel punto occupato dalla pallina quando si trova in equilibrio;
- trovare l'espressione del campo elettrico, nel punto occupato dalla pallina all'equilibrio, in funzione di σ ;
- determinare il valore di σ ;
- si immagini ora di spostare la pallina dall'equilibrio e di rilasciarla da ferma quando il filo forma un angolo θ_0 (poco più grande di θ_{eq}) con la verticale. Determinare l'equazione del moto della pallina quando viene rilasciata.

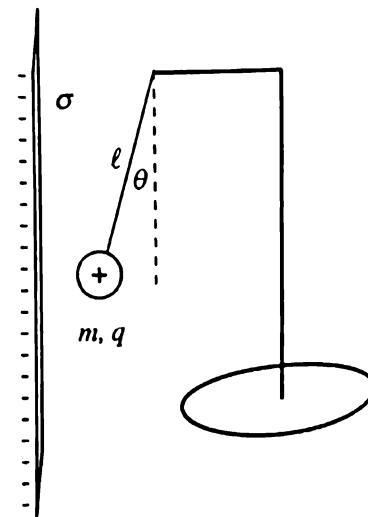


Figura 5.2

Problema 5.5

Tre cariche puntiformi: $+q$, $+2q$ e $-q$ sono poste ai vertici di un quadrato di lato L , come in Figura 5.3. Nel vertice A è posta una carica $+q$, nel vertice B una carica $+2q$ e nel vertice C una carica $-q$. Si calcolino:

- il campo elettrostatico E , in modulo direzione e verso, nel punto D (ossia nel quarto vertice del quadrato);
- la forza elettrostatica \mathbf{f} cui è sottoposta una carica puntiforme $+q_0$ posta in D ;
- Il lavoro compiuto dall'esterno per posizionare le tre cariche nella configurazione data.

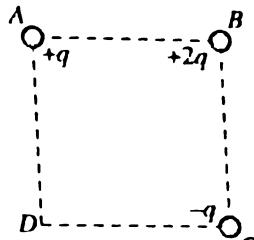


Figura 5.3

Problema 5.6

Tre elettroni sono posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato $d = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

- Supponendo che le cariche vengano rilasciate una alla volta, calcolare l'energia cinetica che avranno gli elettroni una volta sfuggiti completamente all'interazione.
- Calcolare l'energia cinetica dei tre elettroni se venissero rilasciati contemporaneamente.

Problema 5.7

Un pianeta si muove intorno al Sole su un'orbita ellittica e la sua traiettoria è individuata, in coordinate polari (ρ, θ) riferite al fuoco dell'ellisse, dalla relazione

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

essendo a il semiasse maggiore dell'ellisse ed e l'eccentricità. Sapendo che, durante il moto, $r^2 \frac{d\theta}{dt} = l$, essendo l una costante, esprimere le componenti polari della velocità in funzione dell'angolo θ .

Problema 5.8

Un'orbita circolare ed equatoriale, tale che il periodo di rivoluzione di un satellite che la percorre coincide con il periodo di rotazione della Terra, T , viene detta geostazionaria. Sapendo che T vale 23 h 56 min 4 s, che il raggio equatoriale della Terra vale $R_T = 6378 \text{ km}$ e ricordando che l'accelerazione gravitazionale sulla superficie della Terra vale $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, determinare:

- la quota, rispetto alla superficie terrestre, di un'orbita geostazionaria;
- il modulo della velocità con cui essa viene percorsa.

Problema 5.9

Si consideri la Terra una sfera omogenea, di massa $M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, e di raggio $R = 6357 \text{ km}$, pari al raggio polare, e si supponga di poter scavare un traforo rettilineo che la attraversa dal polo Nord al polo Sud. Se un corpo di massa m venisse lasciato cadere, partendo da fermo, nel traforo, calcolare:

- il tempo impiegato dal corpo per arrivare al centro della Terra;
- la sua velocità in tale punto.

Problema 5.10

Un veicolo spaziale deve raggiungere un'orbita geostazionaria, partendo da un'orbita circolare di raggio $r_1 = 7000 \text{ km}$. Per questo, il pilota accende i razzi del veicolo e si immette in un'orbita ellittica, di perigeo r_1 e apogeo r_2 pari al raggio dell'orbita geostazionaria, quindi usa nuovamente i

razzi per entrare sull'orbita desiderata. Si considerino instantanee tutte le operazioni di accensione dei razzi. Ricordando che la massa della Terra è $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg, calcolare:

- il modulo della velocità del veicolo sull'orbita circolare iniziale;
- il modulo della velocità all'apogeo dell'orbita ellittica;
- l'energia, per unità di massa del veicolo, spesa per passare dall'orbita ellittica all'orbita geostazionaria.

Problema 5.11

Un satellite artificiale di massa m è in moto intorno alla Terra, su un'orbita circolare di raggio R_0 . Il satellite è composto di due parti: una sonda di massa m_1 e un modulo principale di massa m_2 , tali che $m = m_1 + m_2$. Il programma di volo prevede che, a un certo istante, la sonda si stacchi dal modulo. Il distacco avviene bruscamente e si osserva che, indicando con v_0 la velocità del satellite subito prima del distacco, la sonda ha velocità v_1 , di verso opposto a v_0 e intensità pari a $\sqrt{8}$ volte la velocità di fuga dall'orbita (si veda la Figura 5.4). Si vuole che, dopo il distacco, il modulo residuo rimanga legato alla Terra.

- Quanto deve valere il rapporto m_1/m_2 affinché ciò avvenga?
- Quale tipo di orbita descriverà il modulo, dopo il distacco? Quali sono i parametri di tale orbita?

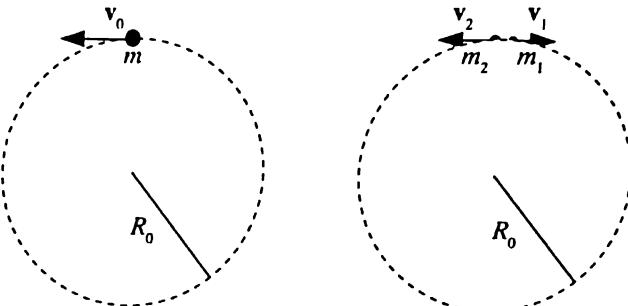


Figura 5.4 A sinistra, il satellite prima del distacco della sonda; a destra, la sonda di massa m_1 e il modulo di massa m_2 dopo il distacco, con le relative velocità v_1 e v_2 .

Problema 5.12

Una sfera metallica di raggio R reca sulla sua superficie una carica positiva q uniformemente distribuita

- Calcolare il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze della sua superficie;
- che velocità deve avere una particella di massa m e carica $-q$ per muoversi lungo una circonferenza di raggio $r = 2R$ intorno alla sfera?

Problema 5.13

Il primo avvistamento di un asteroide avviene quando esso si trova a un milione di chilometri di distanza, dal centro della Terra; i dati segnalano, con un ampio margine di errore, che esso è diretto verso la Terra, con una velocità praticamente radiale, pari a 2.5 km/s. Si trascuri il moto della Terra.

- Supponendo che l'asteroide proceda lungo una traiettoria rettilinea, si stimi la velocità di impatto, trascurando ogni forma di attrito, ricordando che il raggio della Terra è $R_T = 6378$ km e che $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità in prossimità della superficie terrestre.
- Osservazioni più accurate, condotte successivamente, quando l'asteroide si trova alla distanza di 250 000 km dalla Terra, rilevano che la sua velocità è di 3 km/s e che si sta muovendo su un'orbita che non intercerterà la Terra, ma passerà a una distanza minima di 9000 km. Quanto vale la velocità dell'asteroide nel punto di massimo avvicinamento alla Terra?
- Cosa si può dire sul tipo di orbita descritta dall'asteroide?

Problema 5.14

Uno dei satelliti medicei di Giove, Io, descrive un'orbita praticamente circolare, il cui raggio è pari a sei volte il raggio di Giove. Sapendo che la velocità orbitale di Io è di $v = 17334 \text{ m/s}$ e che la densità media di Giove è di $\rho = 1.326 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, si calcoli:

- il periodo orbitale di Io;
- il raggio della sua orbita e il raggio di Giove.

Problema 5.15

L'orbita del satellite GAIA (*Global Astrometric Interferometer for Astrophysics*) è tale che esso si trova sempre allineato con Sole e Terra, ma dal lato opposto al Sole rispetto alla Terra. La sua distanza dalla Terra è molto più piccola di quella rispetto al Sole e l'orbita è determinata dall'attrazione gravitazionale congiunta della Terra e del Sole. Sapendo che la distanza Terra-Sole è praticamente costante e pari a 1 Unità Astronomica ($1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$) e che la massa del Sole è circa 330 000 volte quella della Terra, determinare il periodo di rivoluzione di GAIA e la sua distanza dalla Terra.

Svolgimenti

Problema 5.1

SVOLGIMENTO

► Sia m la massa dell'astronauta e M la massa dell'asteroide. L'astronauta sfugge al campo gravitazionale dell'asteroide se la sua velocità è uguale alla *velocità di fuga* v_f , ossia alla minima velocità che gli consentirebbe di arrivare a distanza infinita dall'asteroide. Tale velocità si determina applicando la conservazione dell'energia meccanica per il sistema astronauta-asteroide e imponendo che l'energia cinetica a distanza infinita sia zero. Poiché il campo gravitazionale creato da una distribuzione di massa sferica al suo esterno ha la stessa forma (Equazione 5.8) del campo creato da una uguale massa puntiforme posta nel suo centro, anche l'energia potenziale del sistema astronauta-asteroide ha la forma 5.9. Pertanto la conservazione dell'energia meccanica si scrive:

$$E(R) = E(\infty) \rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Se l'asteroide è sferico, omogeneo e ha densità $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ si può scrivere $M = \rho V = (4/3)\pi R^3 \rho$ col che

$$v_f = \sqrt{\frac{2G}{R} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi GR^2 \rho}.$$

Ora, la velocità iniziale che l'astronauta è in grado di darsi saltando può essere ottenuta, similmente, dalla conservazione dell'energia meccanica sulla superficie della Terra:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

dove ovviamente $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ e $h = 0.6 \text{ m}$. Imponendo che $v_0 = v_f$ si trova

$$R = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{gh}{\pi G \rho}} = 2.903 \cdot 10^3 \text{ m.}$$

Problema 5.2**SVOLGIMENTO**

► Poiché le dimensioni della stella e dei pianeti possono essere trascurate rispetto alle reciproche distanze, il sistema planetario può essere trattato come un sistema di punti materiali.

- a) Se i tre pianeti sono sempre equidistanti, devono necessariamente essere posti ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nell'orbita. Sia ℓ il lato di tale triangolo. Da considerazioni geometriche banali si trova che $\ell = r\sqrt{3}$ (si veda la Figura 5.5). Su ognuno di essi agisce una forza dovuta alla stella di massa M ma anche due forze dovute agli altri due pianeti. Con riferimento alla figura, sulla massa m_1 agiscono le forze \mathbf{F}_{21} e \mathbf{F}_{31} di modulo $F_{21} = F_{31} = Gm^2/\ell^2 = Gm^2/(3r^2)$, oltre alla forza \mathbf{F}_{M1} . Le prime due formano un angolo di $\pi/3$; la loro risultante è diretta verso il centro dell'orbita e ha modulo

$$|\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}| = G \frac{m^2}{3r^2} \sqrt{3}.$$

Pertanto la risultante \mathbf{R}_1 delle forze applicate al pianeta 1 è diretta verso il centro e ha intensità

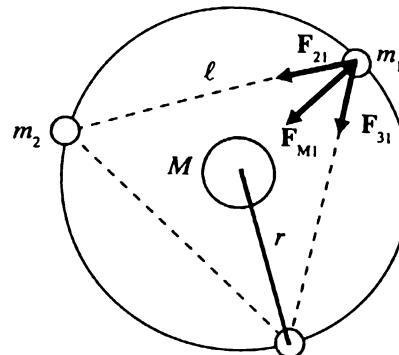


Figura 5.5

$$R_1 = G \frac{m^2}{3r^2} \sqrt{3} + G \frac{mM}{r^2}. \quad (5.19)$$

Dalla seconda equazione di Newton, applicata al corpo di massa m_1 e proiettata nella direzione radiale, si ottiene che

$$R_1 = mv^2/r. \quad (5.20)$$

Tenendo conto del fatto che tutti i pianeti hanno la stessa velocità, dal confronto delle Equazioni 5.19 e 5.20 si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{G}{r} \left(M + \frac{m}{\sqrt{3}} \right)}.$$

Il periodo di rivoluzione risulta pertanto

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(M + m/\sqrt{3})}}.$$

- b) Nel sistema di riferimento del centro di massa, l'energia meccanica totale del sistema, E , è la somma dell'energia cinetica totale $K = K_1 + K_2 + K_3 = (3/2)mv^2$ e dell'energia gravitazionale. Per calcolare l'energia potenziale totale è bene ricordare che l'energia potenziale di un sistema di due masse è uguale al lavoro compiuto dalla forza gravitazionale per portare le due masse a distanza infinita. Infatti

$$\int_r^\infty \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(r) - U(\infty) = U(r)$$

a patto di scegliere $U(\infty) = 0$ come si fa di solito. Nel caso di questo problema, l'energia potenziale totale è uguale al lavoro fatto dalle forze gravitazionali per portare le masse a distanza infinita le une dalle altre. Quando si sposta la massa m_1 , le forze che compiono lavoro sono \mathbf{F}_{21} , \mathbf{F}_{31} e \mathbf{F}_{M1} per cui il loro lavoro globale è

$$\int_{r_1}^\infty \mathbf{R}_1 \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{m_1 m_2}{\ell} - G \frac{m_1 m_3}{\ell} - G \frac{m_1 M}{r}$$

ma quando si sposta la massa m_2 le forze che compiono lavoro sono soltanto le rimanenti forze agenti su m_2 , ossia \mathbf{F}_{32} e \mathbf{F}_{M2} (perché m_1 è a distanza infinita!); infine, quando si sposta la massa m_3 l'unica forza rimasta è \mathbf{F}_{M3} . In conclusione, l'energia potenziale del sistema di masse si può scrivere:

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{\ell} - G \frac{m_1 m_3}{\ell} - G \frac{m_2 m_3}{\ell} - G \frac{m_1 M}{r} - G \frac{m_2 M}{r} - G \frac{m_3 M}{r}$$

ossia, tenendo conto che le masse dei pianeti sono uguali,

$$U = -3G \frac{m^2}{\ell} - 3G \frac{mM}{r} = -G \frac{m}{r} (\sqrt{3}m + 3M)$$

e quindi l'energia totale risulta essere

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{2}mv^2 - G \frac{m}{r} (\sqrt{3}m + 3M) = \frac{3}{2} \frac{mG}{r} \left(M + \frac{m}{\sqrt{3}} \right) - G \frac{m}{r} (\sqrt{3}m + 3M) = \\ &= -\frac{Gm}{2r} (3M + \sqrt{3}m). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Problema 5.3

Svolgimento

► Per ognuno dei due satelliti vale la terza legge di Keplero (Equazione 5.18); poiché le orbite sono circolari, i semiassi maggiori sono semplicemente uguali ai raggi.

a) Essendo $T_1 = 0.5 T_2$, dalla terza legge di Keplero consegue che

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} \rightarrow r_1 = r_2 \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ e quindi } r_1 \simeq 31500 \text{ km.}$$

b) La velocità del satellite 1 è legata in modo univoco al raggio r_1 della sua orbita:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = 4.518 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$$

Analogamente, la velocità del satellite 2 risulta essere

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2} = 3.636 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$$

c) La massa del pianeta si ottiene dalla terza legge di Keplero (Equazione 5.18):

$$\frac{r_2^3}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \rightarrow M = 9.913 \cdot 10^{24} \text{ kg.}$$

d) Le energie potenziali dei satelliti nel campo gravitazionale terrestre sono date da

$$U_1 = -G \frac{mM}{r_1} \quad U_2 = -G \frac{mM}{r_2} \rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{r_2}{r_1} = 1.587.$$

Tenendo conto che $U < 0$, questo significa che il sistema pianeta – satellite 1, ha un'energia potenziale minore del sistema pianeta – satellite 2. Le energie cinetiche sono date da

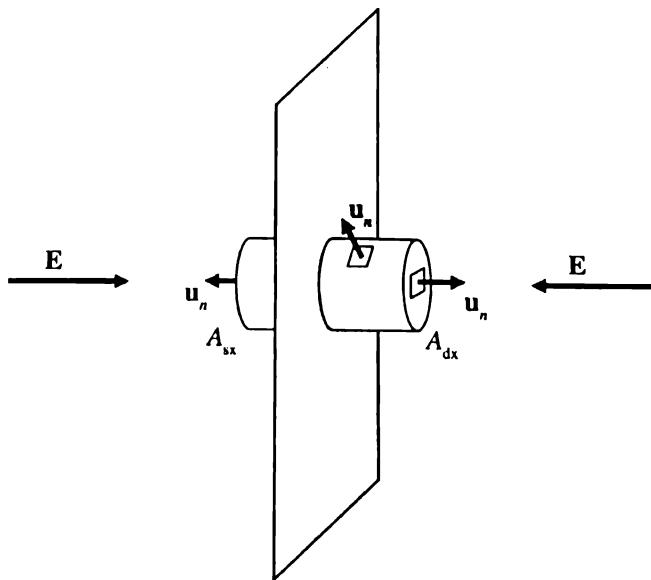
$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 = 1.543$$

ossia, il satellite 1 ha un'energia cinetica maggiore rispetto al satellite 2.

Problema 5.4**SVOLGIMENTO**

► La pallina è sottoposta a tre forze: la forza peso mg , la tensione del filo T e la forza elettrostatica F . Considerando il segno delle cariche in gioco, F è attrattiva; essa è proporzionale al campo elettristatico E creato dal piano carico nel punto occupato dalla pallina: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Poiché $q > 0$, la direzione e il verso di F coincidono con quelli del campo E .

- Per capire quale sia la direzione e il verso di E usiamo considerazioni geometriche e di simmetria. Poiché il piano è molto esteso, si possono trascurare gli effetti di bordo e considerarlo infinito. Pertanto il campo elettrico non può che essere normale al piano stesso; infatti, se esso avesse una componente parallela al piano, ci sarebbe una direzione privilegiata nel piano, il che non è possibile perché ogni punto è a distanza infinita dai bordi del piano stesso. Semplificando, non c'è alcun motivo per cui il campo elettrico debba, per esempio, essere rivolto verso l'alto piuttosto che verso il basso.
Quindi, E è *ortogonale al piano carico* ed è rivolto sempre verso il piano stesso. Ciò è vero in ogni punto dello spazio e non solo nel punto occupato dalla pallina quando si trova in equilibrio. Inoltre, la sua intensità E può dipendere soltanto dalla distanza dal piano carico.
- Sia P il punto occupato dalla pallina all'equilibrio e d la sua distanza dal piano carico. Per calcolare il campo elettrico creato a distanza d dal piano si può sfruttare il principio di sovrapposizione suddividendo il piano carico in tanti elementi di superficie infinitesimi, calcolando il campo che ognuno di essi crea nel punto P e poi integrando tutti questi contributi elementari. Un approccio molto più comodo consiste nell'usare il teorema di Gauss (Equazione 5.22). Come superficie S attraverso la quale calcolare il flusso di E conviene scegliere una superficie cilindrica avente il piano come asse di simmetria, basi di area A parallele al piano (come in Figura 5.6) e altezza $2d$ in modo che il punto P si trovi su una delle due basi.

**Figura 5.6**

Il campo elettrico è quindi ortogonale alle basi del cilindro e parallelo alla sua superficie laterale. Il flusso del campo elettrico si può quindi calcolare come somma di tre integrali di superficie, uno sulla superficie laterale e gli altri sulle basi:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \int_{A_{\text{lat}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS + \int_{A_{\text{sx}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS + \int_{A_{\text{dx}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS \quad (5.22)$$

dove il primo termine è nullo visto che su tutta la superficie laterale è $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n = 0$. Il secondo e il terzo termine si calcolano facilmente se si considera che, in ogni punto delle basi del cilindro, il

campo ha la stessa intensità $E(d)$ e inoltre $\mathbf{E}(d) \cdot \mathbf{u}_n = -E(d)$. Pertanto si arriva a:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = -2E(d)A. \quad (5.23)$$

Il teorema di Gauss afferma però che tale flusso deve essere proporzionale alla carica *totale* contenuta all'interno della superficie. Nel nostro caso, la carica è quella giacente su un'area A del piano e vale σA , dove σ è negativa. Pertanto

$$-2E(d)A = 4\pi K\sigma A, \quad (5.24)$$

dalla quale si ottiene che

$$E(d) = -2\pi K\sigma. \quad (5.25)$$

Come si vede, il modulo del campo non dipende in alcun modo da d per cui il campo elettrostatico è *uniforme* e non è necessario specificare a quale distanza dal piano è stato calcolato.

- c) Per determinare il valore di σ si deve scrivere la condizione di equilibrio per la pallina di vetro. Quest'ultima è trattabile come un corpo puntiforme per cui la condizione di equilibrio è semplicemente: $mg - F + T = 0$. Scomponiamo le forze lungo le direzioni dei versori polari \mathbf{u}_r (radiale, parallelo al filo) e \mathbf{u}_θ (ortogonale al filo e orientato nel verso di θ crescente), mostrati in Figura 5.7. Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -T + mg \cos \theta_{eq} + qE \sin \theta_{eq} = 0 & \text{lungo } \mathbf{u}_r \\ -mg \sin \theta_{eq} + qE \cos \theta_{eq} = 0 & \text{lungo } \mathbf{u}_\theta. \end{cases} \quad (5.26)$$

Dalla seconda si ottiene

$$E = \frac{mg}{q} \tan \theta_{eq};$$

tenendo conto del risultato 5.25 e inserendo i valori numerici $m = 0.01 \text{ kg}$, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$, $q = 10^{-6} \text{ C}$, si ottiene infine

$$\sigma = -\frac{mg \tan \theta}{2\pi Kq} = -4.33 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}. \quad (5.27)$$

- d) Per un generico valore di θ diverso da θ_{eq} , la seconda legge di Newton applicata alla pallina risulta essere $F + mg + T = ma$. Scomponendo nelle due direzioni definite dai versori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} -T + mg \cos \theta + qE \sin \theta = m\ell \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 & \text{lungo } \mathbf{u}_r \\ -mg \sin \theta + qE \cos \theta = m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} & \text{lungo } \mathbf{u}_\theta. \end{cases} \quad (5.28)$$

L'equazione che ci interessa è la seconda; chiamiamo $\theta' = \theta - \theta_{eq}$ l'angolo di spostamento dall'equilibrio. Poiché tale angolo è piccolo, come ci dice il testo, se scriviamo un'equazione in cui compaia θ' potremo sfruttare l'approssimazione di piccole oscillazioni. A questo scopo nella seconda equazione del sistema sostituiamo a θ l'espressione $\theta' + \theta_{eq}$ ottenendo:

$$-mg \sin(\theta' + \theta_{eq}) + qE \cos(\theta' + \theta_{eq}) = m\ell \frac{d^2(\theta' + \theta_{eq})}{dt^2}. \quad (5.29)$$

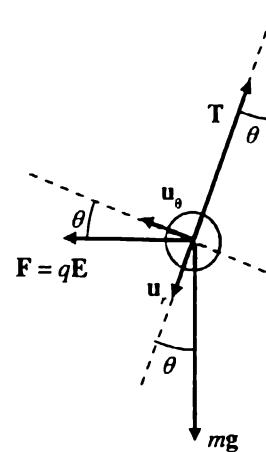


Figura 5.7

Usando le formule trigonometriche di somma, si ottiene

$$-(mg \cos \theta_{\text{eq}} + qE \sin \theta_{\text{eq}}) \sin \theta' + (-mg \sin \theta_{\text{eq}} + qE \cos \theta_{\text{eq}}) \cos \theta' = m\ell \frac{d^2\theta'}{dt^2};$$

il coefficiente di $\cos \theta'$ è nullo in virtù della seconda equazione del sistema 5.26. Grazie alla stessa equazione, si può riscrivere il coefficiente di $\sin \theta'$ ottenendo infine l'equazione

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{g}{\ell \cos \theta_{\text{eq}}} \sin \theta' = 0. \quad (5.30)$$

A questo punto, nell'approssimazione di piccole oscillazioni, $\sin \theta' \simeq \theta'$ e si ottiene l'equazione del moto armonico semplice:

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{g}{\ell \cos \theta_{\text{eq}}} \theta' = 0$$

la cui soluzione è $\theta'(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ con

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \theta_{\text{eq}}}}.$$

Imponendo le condizioni al contorno $\theta'(0) = \theta_0 - \theta_{\text{eq}}$ e $\frac{d\theta'}{dt}(0) = 0$ si trova $\phi = 0$ e $A = \theta_0 - \theta_{\text{eq}}$ col che l'equazione del moto risulta

$$\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{\text{eq}}) \cos(\omega t) + \theta_{\text{eq}}.$$

Problema 5.5

Svolgimento

► Definiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in D e con gli assi x e y coincidenti con i lati DC e DA del quadrato.

- a) Il campo elettrostatico nella posizione del quarto vertice D (ossia nell'origine del sistema di riferimento) si calcola, grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, come somma dei campi generati nel punto D dalle singole cariche poste nei vertici A , B e C .

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B + \mathbf{E}_C. \quad (5.31)$$

Ognuno di questi campi ha la forma 5.12 perché è generato da una carica puntiforme; in questo caso, il versore che esprime la direzione del campo è quello corrispondente alla retta che unisce la carica sorgente del campo con il punto D . Usando i versori degli assi, \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y , le espressioni dei campi elettrici risultano:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A &= -K \frac{q}{L^2} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{E}_B &= K \frac{2q}{(L\sqrt{2})^2} \mathbf{u}_{BD} = -K \frac{q}{L^2 \sqrt{2}} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \\ \mathbf{E}_C &= K \frac{q}{L^2} \mathbf{u}_x. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Per ricavare l'espressione di \mathbf{E}_B si è tenuto conto che il versore \mathbf{u}_{BD} , diretto da B verso D , è:

$$\mathbf{u}_{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y). \quad (5.33)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B + \mathbf{E}_C = \\ &= K \frac{q}{L^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{u}_x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{u}_y \right].\end{aligned}\quad (5.34)$$

Il modulo del campo elettrostatico è dato da:

$$E = |\mathbf{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = K \frac{q \sqrt{3}}{L^2}. \quad (5.35)$$

Il vettore campo elettrostatico \mathbf{E} forma con l'asse delle x un angolo θ dato da:

$$\theta = \arctan \frac{E_y}{E_x} = -80.3^\circ. \quad (5.36)$$

b) La forza elettrostatica \mathbf{F} a cui è sottoposta una carica puntiforme $+q_0$ posta in D è:

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}. \quad (5.37)$$

c) Il lavoro che un agente esterno deve spendere per posizionare le cariche ai vertici del quadrato, partendo da una situazione in cui le tre cariche sono poste a distanza infinita, è necessariamente uguale in valore assoluto ma opposto in segno al lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche. Data la relazione tra forza (conservativa) ed energia potenziale, sappiamo che il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche è uguale alla variazione di energia potenziale (elettrica) cambiata di segno, ossia $L = -\Delta U$. Ora, l'energia potenziale iniziale U^i (quando le cariche sono infinitamente distanti) può essere posta uguale a zero. L'energia potenziale finale, per analogia con quanto visto nel problema 1.2, risulta invece essere

$$\begin{aligned}U^f &= U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = \\ &= K \frac{q(2q)}{L} + K \frac{q(-q)}{L\sqrt{2}} + K \frac{(2q)(-q)}{L} \\ &= -K \frac{q^2}{L\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (5.38)$$

Quindi il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche è uguale a

$$L = U^i - U^f = +K \frac{q^2}{L\sqrt{2}}$$

mentre il lavoro che deve essere compiuto dall'esterno è

$$L^{\text{ext}} = -K \frac{q^2}{L\sqrt{2}}. \quad (5.39)$$

Problema 5.6

Svolgimento

► Inizialmente il sistema è dotato di energia potenziale pari a

$$U = 3K \frac{e^2}{d} = 3U_0.$$

- a) Quando il primo elettrone è sfuggito all'interazione (ossia si trova a distanza infinita) l'energia potenziale sarà solo U_0 ; l'energia mancante è stata convertita in energia cinetica, per cui

$$K_1 = K \frac{2e^2}{d}.$$

Quando si allontana il secondo elettrone, l'energia potenziale convertita in cinetica è quindi solo U_0 :

$$K_2 = K \frac{e^2}{d}.$$

- Infine l'ultimo elettrone non ha più energia potenziale da convertire in cinetica, per cui $K_3 = 0$.
b) Se i tre elettroni venissero lasciati liberi di muoversi contemporaneamente, per simmetria ognuno di essi acquisterebbe la stessa energia cinetica pari a U_0 :

$$K = K \frac{e^2}{d}.$$

Problema 5.7

Svolgimento

- Osserviamo innanzitutto che la condizione $r^2 \frac{d\theta}{dt} = l$ deriva dalla conservazione del momento angolare del pianeta, calcolato rispetto al Sole; in particolare, con riferimento all'Equazione 5.5, risulta che $l = |\mathbf{L}_O|/m$ avendo indicato con m la massa del pianeta.

In componenti polari, il vettore velocità ha la forma (si veda il Capitolo 1):

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta. \quad (5.40)$$

Durante il moto, le coordinate polari variano nel tempo secondo espressioni ben definite $r(t), \theta(t)$, tuttavia la condizione $r^2 \frac{d\theta}{dt} = l$ implica che, in ogni istante, sia

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r}. \quad (5.41)$$

Allora, tenendo presente che nell'espressione della traiettoria

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad (5.42)$$

la coordinata radiale dipende dal tempo implicitamente attraverso $\theta = \theta(t)$, derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{ea(1-e^2)\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{1+e\cos\theta} r \sin\theta \frac{d\theta}{dt}. \quad (5.43)$$

Di conseguenza, facendo uso della relazione 5.41 l'espressione del vettore velocità risulta

$$\mathbf{v}(\theta) = \frac{e}{1+e\cos\theta} r \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta = \frac{l}{r(\theta)} \left[\frac{e \sin\theta}{1+e\cos\theta} \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_\theta \right]. \quad (5.44)$$

Osserviamo che al perielio ($\theta = 0$) e all'afelio ($\theta = \pi$) la velocità non ha componenti radiali, il che vuol dire che è diretta perpendicolarmente al vettore posizione.

Problema 5.8

Svolgimento

- Scelto un riferimento inerziale, solidale per esempio al centro della Terra, per un satellite di massa m in orbita geostazionaria, la seconda equazione di Newton si scrive nella forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, dove \mathbf{F} è la forza gravitazionale dovuta all'interazione con la Terra.

- a) Sia r il raggio dell'orbita e M_T la massa della Terra. La seconda Legge di Newton applicata al satellite, e proiettata in direzione radiale, dà

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{m M_T}{r^2}, \quad (5.45)$$

da cui

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M_T}{r^2}. \quad (5.46)$$

Poiché $v = 2\pi r/T$, dalla 5.45 si ottiene

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{GM_T}{r^3} \rightarrow r^3 = \frac{GM_T T^2}{(2\pi)^2}. \quad (5.47)$$

Osserviamo che, in prossimità della superficie terrestre, il modulo della forza gravitazionale agente su una massa m ha l'espressione

$$F = G \frac{m M_T}{R_T^2}$$

ma coincide anche con la forza peso: $F = mg$. Pertanto, l'accelerazione di gravità è

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}.$$

Di conseguenza, noto il valore di g e il raggio terrestre R_T , si ricava che $GM_T = g R_T^2$. Quindi, andando a sostituire nella 5.47:

$$r^3 = \frac{g R_T^2 T^2}{(2\pi)^2}. \quad (5.48)$$

Andando a sostituire i valori numerici si ottiene $r = 42\,195$ km, da cui l'altezza rispetto alla superficie terrestre risulta $h = r - R_T = 35817$ km.

- b) Noti r e T , il modulo della velocità è dato dalla relazione $v = 2\pi r/T$. Inserendo i valori numerici si ottiene $v = 3.08 \cdot 10^3$ m/s.

Problema 5.9

S VOLGIMENTO

► Per prima cosa, bisogna valutare il campo gravitazionale cui è soggetto il corpo all'interno della Terra. Supponendo che la presenza del traforo non lo alteri, per il calcolo del campo gravitazionale, utilizziamo il teorema di Gauss. Scegliamo come superficie gaussiana S una sfera concentrica di raggio $r < R$ (Figura 5.8): il flusso del campo gravitazionale attraverso S risulta essere

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_n dS = -G \int_S dS = -G 4\pi r^2. \quad (5.49)$$

Questo perché:

- i) il versore \mathbf{u}_n è diretto radialmente, con verso uscente da S ;
- ii) per simmetria, il campo è sempre diretto radialmente, ma in verso entrante (quindi $\mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_n = -G$);
- iii) sempre per simmetria, il campo gravitazionale ha lo stesso modulo su tutti i punti della superficie gaussiana.

La massa contenuta all'interno della superficie gaussiana è $\int_V \rho dV = M' = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$; dato che la densità ρ è costante e uguale a

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \quad (5.50)$$

si può scrivere

$$M' = M \frac{r^3}{R^3}. \quad (5.51)$$

Andando a sostituire le relazioni 5.49 e 5.51 nell'espressione del teorema di Gauss

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_n dS = -4\pi GM' \quad (5.52)$$

si ottiene infine il modulo del campo gravitazionale a distanza $r < R$:

$$-G4\pi r^2 = -4\pi GM \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow G = G \frac{M}{R^3} r. \quad (5.53)$$

Facendo uso di un sistema di coordinate polari, con origine O nel centro della Terra, dato che il campo \mathbf{G} è sempre diretto verso O , la massa m è sottoposta a una forza (si veda la Figura 5.9):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G} = -G \frac{mM}{R^3} r \mathbf{u}_r = -G \frac{mM}{R^3} \mathbf{r} \quad (5.54)$$

o anche

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \quad (5.55)$$

dove abbiamo introdotto la costante $k = G \frac{mM}{R^3} > 0$.

- a) La forza gravitazionale è quindi proporzionale al vettore posizione, ma diretta sempre in verso opposto: la massa nel traforo è sottoposta quindi a una forza di richiamo, simile alla forza elastica. Andando a scrivere l'equazione del moto e proiettandola nella direzione radiale si ottiene

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \rightarrow m \frac{d^2r}{dt^2} + kr = 0 \quad (5.56)$$

In altri termini, la massa descrive un moto armonico, con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$; essendo il periodo $T = 2\pi/\omega$, otteniamo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.57)$$

ossia, andando a sostituire il valore di k

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \quad (5.58)$$

Allora, il tempo impiegato a raggiungere il centro della Terra, partendo dal bordo, corrisponde a $T/4$: si ricava

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 1261 \text{ s.} \quad (5.59)$$

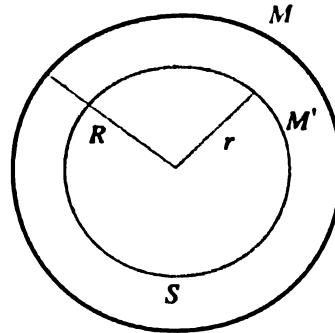


Figura 5.8 La superficie gaussiana S è una sfera concentrica alla superficie terrestre, di raggio $r < R$.

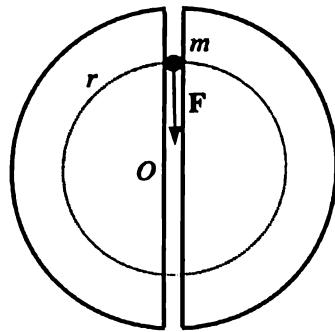


Figura 5.9 La forza \mathbf{F} è sempre diretta verso il centro della Terra O .

- b) Per calcolare la velocità con cui il corpo arriva al centro della Terra, applichiamo la conservazione dell'energia meccanica. Una forza centrale del tipo 5.55 ammette un'energia potenziale della forma

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 \quad (5.60)$$

avendo assunto $U = 0$ per $r = 0$, ovvero nel centro della Terra. Allora, per la conservazione dell'energia meccanica

$$E_i = E_f \quad (5.61)$$

dove l'energia iniziale è valutata quando il corpo si trova sul bordo della superficie terrestre, mentre quella finale è valutata quando si trova al centro della Terra. Risulta, visto che parte da fermo,

$$E_i = U_i + K_i = U(r=R) = G \frac{mM}{2R}. \quad (5.62)$$

Inoltre

$$E_f = U_f + K_f = K_f = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.63)$$

da cui,

$$G \frac{mM}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 7923 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (5.64)$$

Problema 5.10

SVOLGIMENTO

- Ricordiamo che un'orbita geostazionaria è un'orbita circolare, percorsa in un tempo uguale al periodo di rotazione terrestre, ossia un giorno.

In Figura 5.10 sono descritte le varie orbite del veicolo:

- i) quella circolare di raggio r_1 , percorsa inizialmente con velocità di modulo v_0 ;
- ii) quella ellittica di perigeo r_1 e apogeo r_2 , con rispettive velocità di modulo v_1 e v_2 ;
- iii) quella geostazionaria, di raggio r_2 , percorsa con velocità di modulo v_3 .

- a) Dalla seconda legge di Newton applicata al veicolo (di massa m) quando si trova su un'orbita circolare generica di raggio r , si ottiene

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM_T}{r^2} \quad (5.65)$$

da cui si può ricavare il modulo (costante) della velocità con cui è percorsa l'orbita circolare:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}. \quad (5.66)$$

- b) Sostituendo il raggio dell'orbita circolare iniziale nella 5.66 si ottiene $v_0 = 7.5 \text{ km/s}$. Determiniamo innanzitutto il raggio dell'orbita geostazionaria usando la terza Legge di Keplero. Per un'orbita circolare di raggio r generico si ha:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2},$$

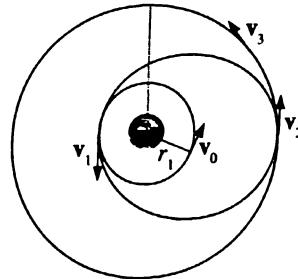


Figura 5.10 Le orbite del veicolo intorno alla Terra.

e poiché nel caso dell'orbita stazionaria si ha $T = 86400$ s, si ottiene

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{4\pi^2}} T^2 = 42.2 \cdot 10^3 \text{ km}. \quad (5.67)$$

Sostituendo questo valore nell'Equazione 5.66 si ricava anche la velocità del veicolo sull'orbita geostazionaria:

$$v_3 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = 3.1 \text{ km/s}. \quad (5.68)$$

Per determinare i moduli delle velocità al perigeo e apogeo, v_1 e v_2 , facciamo uso della conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare: infatti, subito prima e subito dopo l'accensione dei razzi, il veicolo è soggetto alla sola forza gravitazionale che è conservativa e centrale. L'energia meccanica assume la forma

$$E = -\frac{GM_T m}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.69)$$

dove r è la distanza dal centro della Terra e v il modulo della velocità. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra perigeo e apogeo, si ottiene

$$-\frac{GM_T m}{r_1} + \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{GM_T m}{r_2} + \frac{1}{2}mv_2^2. \quad (5.70)$$

Il momento angolare rispetto al centro della Terra ha l'espressione

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}. \quad (5.71)$$

In particolare, al perigeo e all'apogeo il vettore posizione e il vettore velocità sono tra loro perpendicolari, quindi il modulo del momento angolare assume la forma $L = mrv$. Pertanto, uguagliando il momento angolare al perigeo e all'apogeo si ha

$$mr_1v_1 = mr_2v_2. \quad (5.72)$$

Mettendo a sistema le relazioni 5.70 e 5.72 e risolvendo per v_1 e v_2 si ottiene

$$v_1 = \sqrt{2GM_T \frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}} \quad (5.73)$$

$$v_2 = \sqrt{2GM_T \frac{r_1}{r_2(r_1+r_2)}}. \quad (5.74)$$

Andando a sostituire i valori di r_1 e r_2 , si ottiene $v_1 = 9.9 \text{ km/s}$, $v_2 = 1.6 \text{ km/s}$.

Osservazione. Notiamo che risulta $r_1 + r_2 = 2a$, dove a è il semiasse maggiore dell'orbita ellittica. Allora, valutando l'energia meccanica al perigeo (ossia ponendo $r = r_1$ e $v = v_1$ nell'Equazione 5.69) si ottiene

$$E = -\frac{GM_T m}{2a}. \quad (5.75)$$

L'espressione ottenuta corrisponde all'energia meccanica di un sistema costituito da un corpo di massa M_T fisso e da un corpo di massa m che si muove intorno ad esso su un'orbita ellittica di semiasse maggiore a .

- c) L'energia per unità di massa del veicolo, necessaria a farlo passare dall'orbita ellittica a quella geostazionaria, quando si trova all'apogeo, è uguale alla variazione di energia cinetica per unità di massa, cioè

$$\frac{\Delta K}{m} = \frac{1}{2}v_3^2 - \frac{1}{2}v_2^2 = 3.3 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}. \quad (5.76)$$

Problema 5.11

SVOLGIMENTO

► Il satellite è inizialmente in moto nel campo gravitazionale della Terra, ad una distanza fissa R_0 dal suo centro. L'energia meccanica iniziale del sistema satellite-Terra è pertanto data da

$$E(R_0) = -\frac{GmM_T}{R_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (5.77)$$

dove M_T è la massa della Terra e si è esplicitata la dipendenza dell'energia dal raggio dell'orbita. Applicando la seconda legge di Newton al satellite, che è in moto circolare, e proiettandola sulla direzione radiale, si ottiene

$$m\frac{v_0^2}{R_0} = G\frac{mM_T}{R_0^2}, \quad (5.78)$$

da cui si ricava

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_0}}. \quad (5.79)$$

La velocità di fuga v_f dall'orbita circolare di raggio R_0 si ricava imponendo che l'energia meccanica del sistema satellite-Terra sia nulla quando il satellite è a distanza infinita, ossia $E(\infty) = 0$. Poiché il sistema è conservativo, deve essere $E(R_0) = E(\infty) = 0$ da cui

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_0}} = \sqrt{2}v_0. \quad (5.80)$$

- a) Consideriamo il sistema sonda + modulo. Nel distacco, si conserva la quantità di moto, che è tangenziale all'orbita, perché tutte le forze esterne agenti sul sistema sono radiali. La quantità di moto vale, prima dell'urto,

$$\mathbf{P}_i = m\mathbf{v}_0, \quad (5.81)$$

e dopo l'urto

$$\mathbf{P}_f = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2. \quad (5.82)$$

Essendo $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ e scegliendo come positivo il verso concorde con \mathbf{v}_0 , otteniamo

$$m\mathbf{v}_0 = m_2\mathbf{v}_2 - m_1\mathbf{v}_1 \quad (5.83)$$

da cui, essendo $m = m_1 + m_2$, si ricava

$$\mathbf{v}_2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) \mathbf{v}_0 + \frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1. \quad (5.84)$$

Ricordando che $\mathbf{v}_1 = \sqrt{8}\mathbf{v}_f$ e che $\mathbf{v}_f = \sqrt{2}\mathbf{v}_0$, si trova

$$\mathbf{v}_2 = \left(1 + 5\frac{m_1}{m_2} \right) \mathbf{v}_0. \quad (5.85)$$

Il modulo resta legato alla Terra se $\mathbf{v}_2 < \mathbf{v}_f$, per cui si ricava

$$\frac{m_1}{m_2} < \frac{\sqrt{2} - 1}{5}.$$

- b) Nelle condizioni trovate al punto (a) il modulo rimane legato alla Terra, quindi deve necessariamente descrivere un'orbita chiusa. Tuttavia, l'Equazione 5.85 ci dice che v_2 è maggiore della velocità v_0 associata a un'orbita circolare di raggio R_0 . Pertanto, l'orbita non può che essere ellittica².

Per determinare il semiasse maggiore dell'ellisse, ricordiamo (per quanto visto nel problema precedente, Equazione 5.75) che per un corpo di massa m_2 in orbita intorno alla Terra sussiste la relazione

$$|E| = \frac{GM_T m_2}{2a} \quad (5.86)$$

fra il valore assoluto dell'energia meccanica $|E|$ e il semiasse maggiore a . Bisogna quindi valutare l'energia meccanica del modulo dopo il distacco della sonda. Essa risulta data da

$$E = -\frac{GM_T m_2}{R_0} + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \quad (5.87)$$

e quindi, ricordando che E è negativa,

$$|E| = \frac{GM_T m_2}{R_0} - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{GM_T m_2}{R_0} - \frac{1}{2}m_2 \left(1 + 5\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \frac{GM_T}{R_0}. \quad (5.88)$$

Il semiasse maggiore si ricava uguagliando le due Espressioni 5.86 e 5.88:

$$\frac{GM_T m_2}{2a} = \frac{GM_T m_2}{R_0} - \frac{1}{2}m_2 \left(1 + 5\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \frac{GM_T}{R_0} \quad (5.89)$$

da cui

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{R_0} \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + 5\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]. \quad (5.90)$$

Problema 5.12

SVOLGIMENTO

► Usiamo il teorema di Gauss per calcolare il campo elettrostatico della sfera carica al suo esterno.

- a) Scegliamo come superficie gaussiana S una sfera concentrica alla sfera carica e di raggio $r > R$ (Figura 5.11). Per ragioni di simmetria, il campo è diretto radialmente e ha modulo costante sulla superficie gaussiana scelta; in particolare, il campo è uscente da S visto che la carica che lo genera è positiva. Inoltre, nel calcolo del flusso elettrostatico, il versore \mathbf{u}_n normale alla porzione infinitesima dS di superficie gaussiana è anch'esso diretto radialmente, con verso uscente. Di conseguenza, il flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie gaussiana scelta risulta essere

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = E \int_S dS = E 4\pi r^2. \quad (5.91)$$

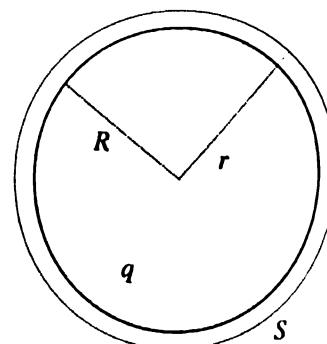


Figura 5.11 La superficie gaussiana S è una sfera concentrica a quella carica, di raggio $r > R$.

² In alternativa, si può ragionare considerando che l'energia meccanica è minima per un'orbita circolare; siccome $v_2 > v_0$ e l'energia potenziale del modulo rimane la stessa, l'energia meccanica è maggiore di quella che avrebbe se la sua orbita fosse circolare.

La carica contenuta all'interno della superficie gaussiana è q . Andando a sostituire nell'espressione del teorema di Gauss

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = 4\pi Kq \quad (5.92)$$

si ottiene infine il modulo del campo elettrostatico a distanza $r > R$:

$$4\pi r^2 E = 4\pi Kq \quad \text{da cui} \quad E = K \frac{q}{r^2}. \quad (5.93)$$

Il vettore campo elettrostatico risulta quindi

$$\mathbf{E} = K \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (5.94)$$

dove \mathbf{u}_r è il versore radiale. Il campo elettrostatico 5.94 è quello che si avrebbe se l'intera carica fosse concentrata nel centro della sfera. In particolare, per $r \rightarrow R$, il suo modulo risulta³

$$E = K \frac{q}{R^2}. \quad (5.95)$$

- b) Su una carica $-q$ il campo \mathbf{E} genera una forza attrattiva, $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$; se la carica è in moto lungo una traiettoria circolare di raggio r , essa è soggetta all'accelerazione centripeta $\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\mathbf{u}_r$. Quindi, possiamo scrivere la seconda legge di Newton nella forma

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \longrightarrow -m \frac{v^2}{r} \mathbf{u}_r = -qK \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (5.96)$$

da cui si ottiene $v = \sqrt{\frac{Kq^2}{mr}}$ e, infine, ponendo $r = 2R$: $v = \sqrt{\frac{Kq^2}{2mR}}$.

Problema 5.13

SVOLGIMENTO

► Si indichi con m la massa, non nota, dell'asteroide, e lo si consideri come un corpo puntiforme.

- a) In base ai dati del primo avvistamento, indicando con r_0 la distanza e con v_0 il modulo della velocità l'energia meccanica del sistema Terra-asteroide è

$$E(r_0) = -\frac{GM_T m}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (5.97)$$

dove m è la massa dell'asteroide e M_T quella della Terra. Al momento dell'impatto, l'energia meccanica risulta essere

$$E(R_T) = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (5.98)$$

dove v_i indica il modulo della velocità di impatto. Poiché l'energia meccanica si conserva, deve essere $E(r_0) = E(R_T)$; da questa uguaglianza si ottiene infine

$$v_i = \sqrt{v_0^2 + 2GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_0} \right)}. \quad (5.99)$$

Tenendo presente che

$$g = GM_T / R_T^2 \rightarrow GM_T = gR_T^2 \quad (5.100)$$

e andando a sostituire i dati a disposizione, si ottiene $v_i = 11.3$ km/s.

³ Osserviamo che $\frac{q}{R^2} = 4\pi\sigma$, essendo σ la densità di carica superficiale: quindi si può anche scrivere $E = 4K\pi\sigma$.

- b) Le successive stime dell'orbita dell'asteroide suggeriscono che, indicando con r_1 la distanza di 250 000 km e con v_1 la corrispondente velocità, l'energia dell'asteroide nel campo gravitazionale terrestre risulta

$$E(r_1) = -\frac{GM_T m}{r_1} + \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (5.101)$$

La corrispondente quantità valutata al punto di massimo avvicinamento, ossia al perigeo, risulta

$$E(r_2) = -\frac{GM_T m}{r_2} + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (5.102)$$

avendo indicato con r_2 la distanza di massimo avvicinamento, pari a 9000 km, e con v_2 il modulo della velocità da determinare. Eguagliando le due espressioni 5.101 e 5.102, si trova

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2GM_T \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}. \quad (5.103)$$

Andando a sostituire i valori numerici, si ha $v_2 = 9.7$ km/s.

- c) Il tipo di orbita dipende dal segno dell'energia meccanica. Non essendo nota la massa dell'asteroide, occorre valutare l'energia meccanica per unità di massa, che risulta positiva: $E(r_1)/m = 4.6 \cdot 10^7$ J/kg. Di conseguenza l'orbita non è chiusa e, in particolare, si tratta di un'iperbole.

Problema 5.14

Svolgimento

► Si indichino con a ed R , rispettivamente, i raggi (incogniti) di Io e di Giove, e con M la massa di quest'ultimo.

- a) Indichiamo con a il raggio dell'orbita di Io, con T il periodo orbitale, con M , R e ρ la massa, il raggio e la densità media di Giove. Possiamo quindi scrivere la terza legge di Keplero nella forma

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \quad (5.104)$$

D'altra parte, tenendo conto che $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, dalla 5.104 si ottiene

$$T = \sqrt{\frac{3\pi\xi^3}{G\rho}}, \quad (5.105)$$

dove abbiamo posto $\xi = a/R$. Usando i dati numerici si ottiene $T = 151714$ s ossia circa 1.75 giorni terrestri.

- b) Il moto orbitale è circolare uniforme, pertanto il modulo della velocità è dato da

$$v = \frac{2\pi a}{T} \quad (5.106)$$

da cui si ottiene

$$a = \frac{vT}{2\pi} = 418547 \text{ km}. \quad (5.107)$$

Conseguentemente $R = a/6 = 69758$ km.

Problema 5.15

Svolgimento

► Se il satellite si trova sempre lungo la congiungente Sole-Terra, è evidente che il suo periodo è pari a un anno terrestre. Inoltre, la velocità angolare ω con cui percorre l'orbita intorno al Sole è

necessariamente costante e uguale a quella terrestre. Questo implica che tale orbita sia circolare. Per stimare la distanza del satellite è necessario comprenderne la dinamica. Indichiamo con d_S la distanza dal Sole e con d_T quella dalla Terra, con M_S la massa del Sole e con M_T la massa della Terra. Indicando con $a = 1.49 \cdot 10^{11}$ m la distanza Terra-Sole, risulta evidentemente $d_S = a + d_T$ e sappiamo anche che $d_T \ll d_S$.

Il satellite si muove di moto circolare uniforme, sotto l'effetto delle forze gravitazionali esercitate dai due corpi celesti. Scelto un sistema di riferimento inerziale con origine nel Sole e indicando con m la massa del satellite, la seconda legge di Newton nella direzione radiale risulta

$$-m\omega^2 d_S \mathbf{u}_r = -\frac{GmM_S}{d_S^2} \mathbf{u}_r - \frac{GmM_T}{d_T^2} \mathbf{u}_r \quad (5.108)$$

ossia

$$\omega^2 d_S = \frac{GM_S}{d_S^2} + \frac{GM_T}{d_T^2}. \quad (5.109)$$

Sappiamo che le orbite circolari intorno al Sole hanno periodi che aumentano allontanandosi da esso, ossia velocità angolari che diminuiscono. L'Equazione 5.109 ci spiega come sia possibile che il satellite, posto a distanza $d_S > d_T$ abbia *la stessa* velocità angolare della Terra: il diminuire della forza di attrazione gravitazionale del Sole è infatti compensato dalla presenza dell'attrazione gravitazionale terrestre.

Per stimare la distanza dal satellite osserviamo innanzitutto che, per il moto di rivoluzione terrestre possiamo scrivere la componente radiale della seconda legge di Newton nella forma

$$M_T \omega^2 a = \frac{GM_S M_T}{a^2}. \quad (5.110)$$

Riscriviamo ora l'Equazione 5.109 utilizzando le relazioni

$$GM_S = \omega^2 a^3 \quad (5.111)$$

(ricavata dalla 5.110) e $d_S = a + d_T$:

$$\omega^2 (a + d_T) = \frac{\omega^2 a^3}{(a + d_T)^2} + \frac{GM_T}{d_T^2}. \quad (5.112)$$

L'Equazione 5.112 nella variabile d_T è di quinto grado; possiamo risolverla nell'approssimazione considerata, secondo cui $d_T \ll d_S$ o, equivalentemente, $d_T \ll a$. È pertanto lecito, al denominatore del secondo membro dell'equazione, trascurare d_T rispetto ad a : così facendo, otteniamo

$$\omega^2 d_T^3 = GM_T. \quad (5.113)$$

Ricavando l'espressione di ω^2 dall'Equazione 5.111 e sostituendola nella 5.113, otteniamo:

$$GM_S \frac{d_T^3}{a^3} = GM_T. \quad (5.114)$$

Si ricava infine

$$d_T = a \sqrt[3]{\frac{M_T}{M_S}}. \quad (5.115)$$

Essendo $M_S/M_T \approx 330000$, si ottiene $d_T \approx a \cdot 10^{-2} = 1.49 \cdot 10^9$ m.



Richiami di teoria

Statica dei fluidi

I *fluidi* sono sistemi fisici privi di una propria forma definita e tendono ad assumere la forma del recipiente entro il quale sono contenuti. In particolare, un fluido è detto *liquido* se ha un volume proprio e *aeriforme* se non ha volume proprio e tende a occupare l'intero volume a sua disposizione.

Mentre, nel caso di un corpo solido, le forze tangenti alla superficie provocano una deformazione che, a sua volta porta, al raggiungimento di una situazione di equilibrio, in un fluido le forze tangenziali (ossia parallele alla superficie che delimita il fluido) provocano sempre un moto di “scorrimento” di uno strato sull’altro, senza che si pervenga mai a una situazione di equilibrio. Pertanto *in un fluido in quiete non possono esserci forze tangenti alla superficie che lo delimita*.

Un fluido viene detto *comprimibile* se è possibile ridurne il volume (ossia aumentarne la densità) esercitando delle forze (normali) sulla superficie che lo delimita. In altre parole, la densità di un fluido compressibile non è, in generale, costante né uniforme. Se il fluido è *incompressibile*, invece, la sua densità è costante e uniforme. Gli aeriformi sono tutti facilmente compressibili, mentre i liquidi hanno un piccolo grado di compressibilità (molto spesso così piccolo da poter essere trascurato).¹

Si consideri un punto P all’interno di un fluido *in quiete* e un volumetto infinitesimo che lo circonda. Il fluido nel volumetto è in equilibrio sotto l’effetto di forze, applicate sulla superficie che lo delimita, dovute al fluido circostante. Sia dF_p la forza agente sull’elemento di superficie dS . Per quanto detto sopra, dF_p è necessariamente *normale* a dS . Si definisce *pressione* il rapporto

$$p = \frac{dF_p}{dS}. \quad (6.1)$$

La pressione è una grandezza scalare ed è priva di caratteristiche direzionali, ossia non dipende dall’orientazione della superficie sulla quale viene misurata (*legge di Pascal*). L’unità di misura della pressione nel Sistema Internazionale è il pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ Nm}^{-2}$) ma esistono varie unità pratiche, tra le quali è particolarmente usata l’atmosfera ($1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) così detta perché il suo valore unitario corrisponde alla pressione atmosferica

¹ Negli esercizi di questo capitolo saranno considerati solo liquidi incompressibili.

media in condizioni standard. All'interno di un fluido che si trovi in quiete, in un SRI e sia soggetto al campo della forza peso, la variazione della pressione con la posizione è data da

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (6.2)$$

dove ∇ è l'operatore nabla (si veda Appendice A) e ρ è la *densità* del fluido.

Per un liquido incompressibile, come già detto, ρ è indipendente dalla pressione; in questo caso, chiamando z l'asse verticale parallelo a \mathbf{g} e diretto in verso opposto ad essa, l'Equazione 6.2 diventa

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (6.3)$$

Integrando tra due punti di quota z_0 e z , si ottiene

$$p(z) = p(z_0) - \rho g(z - z_0). \quad (6.4)$$

Se z_0 è la quota della superficie libera (o pelo) del liquido, z è la quota di un punto che si trova a profondità $h = z_0 - z$; ponendo per brevità $p(z_0) = p_0$ l'Equazione 6.4 assume la forma nota come *legge di Stevino*:

$$p(h) = p_0 + \rho g h. \quad (6.5)$$

Nel caso di un aeriforme, la densità ρ è funzione della pressione e quindi nell'Equazione 6.3 essa è anche funzione di z . Se la temperatura è approssimativamente costante al variare della quota, $\rho(z) \propto p(z)$ e la soluzione dell'Equazione 6.3 è la cosiddetta *formula ipsometrica*:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{g\rho_0}{p_0}z\right) \quad (6.6)$$

dove p_0 e ρ_0 sono, rispettivamente, la pressione e la densità misurate alla quota $z = 0$.

Legge di Archimede e galleggiamento

Si consideri un corpo solido omogeneo di volume V e densità ρ_s costante, immerso in un fluido in equilibrio, avente densità ρ_f costante. Sia V_{imm} il volume del fluido spostato dal corpo. Sul centro di massa del corpo agisce la forza peso $\mathbf{W} = \rho_s V \mathbf{g}$, però sulla parte immersa agiscono anche le forze di pressione, la cui risultante è *parallela e opposta* al peso, ha espressione $\mathbf{F}_A = -\rho_f V_{imm} \mathbf{g}$ e viene spesso chiamata *spinta di Archimede*. Il suo modulo corrisponde al peso che avrebbe un volume V_{imm} di fluido. La risultante delle forze applicate al solido sarà quindi:

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_A = \rho_s V \mathbf{g} - \rho_f V_{imm} \mathbf{g} = (\rho_s V - \rho_f V_{imm}) \mathbf{g}. \quad (6.7)$$

Se il corpo è completamente immerso ($V_{imm} = V$):

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_A = (\rho_s - \rho_f) V \mathbf{g}.$$

La forza risultante è diretta verso il basso (concorde a \mathbf{g}) se $\rho_s > \rho_f$, ossia se la densità del corpo è maggiore di quella del fluido. In tal caso, il corpo affonda. Se invece $\rho_s < \rho_f$, la forza risultante è parallela a \mathbf{g} , ma è rivolta verso l'alto. In questo caso, il corpo tende a

emergere; dall'Equazione 6.7 discende che l'equilibrio si raggiunge quando è soddisfatta la condizione

$$\rho_s V - \rho_f V_{imm} = 0,$$

che significa

$$V_{imm} = \frac{\rho_s}{\rho_f} V < V;$$

ossia, se il corpo galleggia sul fluido restando solo parzialmente immerso. È immediata la generalizzazione al caso di corpi cavi e/o non omogenei.

Dinamica dei fluidi

Il moto di un fluido può essere interamente descritto dal $\mathbf{v}(P,t)$, cioè dalla funzione vettoriale che associa ad ogni punto P (posizione) dello spazio e a ogni istante di tempo t , il vettore velocità dell'elemento di volume del fluido che passa per quel punto in quell'istante (descrizione euleriana).

- Un fluido scorre in se, in ogni punto, la velocità è un vettore costante nel tempo. In tal caso, il campo di velocità $\mathbf{v}(P)$ è indipendente dal tempo.
- Si chiama *la traiettoria lungo cui si muove un elemento di volume del fluido; per definizione, la velocità è tangente a tale linea in ogni suo punto. Le linee di flusso non si possono intersecare, perché a ogni punto P deve corrispondere uno e un solo vettore \mathbf{v} .*
- Si chiama *la superficie formata da tutte le linee di flusso che passano per ogni punto di una curva chiusa Γ . Dalla definizione di linea di flusso, in condizioni di moto stazionario nessun elemento di fluido può attraversare le pareti laterali del tubo di flusso.*
- Si consideri una qualunque superficie finita di area S all'interno di un fluido in moto stazionario, delimitata da una curva chiusa Γ che definisce un tubo di flusso. La Q attraverso la superficie è data dal flusso del campo di velocità \mathbf{v} attraverso la superficie,² ossia dall'integrale:

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n \, dS,$$

dove \mathbf{u}_n è, come sempre, il versore normale a dS . Dalla definizione, appare evidente che, nel Sistema Internazionale, la portata si misura in m^3/s . In generale, la velocità o l'angolo che essa forma con \mathbf{u}_n possono variare da punto a punto sulla superficie S . Nel caso più semplice, in cui le linee di flusso sono parallele tra loro e la superficie S è piana e ad esse ortogonale, si può scrivere $Q = \bar{v} S$, dove

$$\bar{v} = \frac{1}{S} \int_S v \, dS$$

è la ³ del fluido sulla superficie S .

² Il concetto di flusso di un campo vettoriale è stato introdotto nel Capitolo 5, a proposito del teorema di Gauss.

³ Nella soluzione dei problemi che richiedono l'uso della legge di Leonardo ci porremo sempre in questo caso semplice e, per comodità, indicheremo la velocità media con v .

- La portata di un tubo (o di un tubo di flusso) in cui scorre un fluido incompressibile in regime stazionario è costante lungo il tubo (*legge di Leonardo*): $Q = \bar{v} S = \text{costante}$. Se si considerano due sezioni del tubo, di aree S_1 e S_2 , si osserva cioè che:

$$\bar{v}_1 S_1 = \bar{v}_2 S_2.$$

- Si consideri ora un *fluido ideale*, ossia incompressibile e privo di attrito interno, in regime di flusso stazionario. Sia z un asse verticale e orientato verso l'alto. Il *teorema di Bernoulli* afferma che lungo ogni linea di flusso è costante la quantità

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2,$$

dove p è la pressione del fluido, ρ la sua densità, z la quota e v il modulo della sua velocità.

- Se consideriamo una vasca riempita con un liquido ideale fino a un livello h rispetto al fondo e supponiamo che sulla parete venga praticato un foro a un'altezza z rispetto al fondo, il *teorema di Torricelli* afferma che il fluido uscirà dal foro con una velocità pari a

$$v_z = \sqrt{2g(h-z)}.$$

- In un fluido *reale* esistono forze di attrito che si oppongono al moto di un elemento di fluido rispetto a un altro. La *viscosità* η è un parametro caratteristico del fluido (ma che in generale dipende anche dalla temperatura) che permette di quantificare tali attriti; nel Sistema Internazionale essa si misura in Pa s. Un fluido molto viscoso (ossia con grande viscosità η) scorre con difficoltà. Si noti che per fluidi viscosi *non* vale il teorema di Bernoulli.⁴

Resistenza di un fluido

Un corpo solido che si muova all'interno di un *fluido reale* è soggetto a forze che tendono a ostacolarne il moto: per descrivere la resistenza esercitata dal fluido si introduce la forza di attrito \mathbf{f}_r , che dipende (tra le altre cose) dalla velocità relativa v_r del corpo rispetto al fluido. Se v_r è sufficientemente piccola, il flusso del fluido sulla superficie del solido può essere considerato stazionario e la forza di attrito ha modulo proporzionale alla velocità e approssimativamente indipendente dalla densità del fluido:

$$|\mathbf{f}_r| = k \eta L v_r, \quad (6.8)$$

dove k è un coefficiente numerico che dipende dalle caratteristiche geometriche del corpo, L è la dimensione trasversale del corpo, η è la viscosità del fluido.⁵ Nel semplice caso di un corpo sferico è possibile applicare la *formula di Stokes*:

$$|\mathbf{f}_r| = 6\pi R \eta v_r, \quad (6.9)$$

dove R è il raggio della sfera. Se il corpo si muove nel fluido a velocità abbastanza elevata, il flusso del fluido nelle immediate vicinanze della sua superficie non è più stazionario e

⁴ Non tratteremo oltre il concetto di viscosità; per una definizione rigorosa e una trattazione completa si rimanda ai testi di Fisica.

⁵ Si noti che, in tali condizioni, tale forza corrisponde alla forza di *attrito viscoso*, già introdotta nel Capitolo 2.

si ha la formazione di vortici sulla "scia": in questo regime, detto *aerodinamico*, la forma più adatta per esprimere la resistenza del mezzo è

$$|\mathbf{f}_r| = \frac{1}{2} \rho S v_r^2 c_x \quad (6.10)$$

ove S è la sezione del corpo nella direzione ortogonale al moto e c_x è una costante unidimensionale (che dipende dalla forma del corpo e dalla viscosità del fluido) chiamata *coefficiente di penetrazione aerodinamica*.

TEST DI COMPRENSIONE

1. In una vasca è contenuto un liquido ideale. La pressione a una profondità h vale p . Quale delle seguenti affermazioni è vera?
 - A La pressione a una profondità $2h$ vale $2p$;
 - B La pressione a una profondità $2h$ vale $p/2$;
 - C La pressione non dipende dalla profondità;
 - D Non è possibile determinare la pressione a una profondità $2h$ senza ulteriori informazioni.
2. Si consideri un cubo di acciaio posto sul fondo di una piscina. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - A L'acqua esercita una pressione soltanto sulla faccia superiore del cubo;
 - B La pressione esercitata dall'acqua sulle facce laterali è la metà di quella sulla faccia superiore;
 - C L'acqua esercita una pressione uguale su tutte le facce del cubo;
 - D L'acqua esercita una pressione solo sulle facce laterali del cubo.
3. In una nave che galleggia:
 - A la forza peso e la spinta di Archimede sono applicate necessariamente nello stesso punto;
 - B la spinta di Archimede ha intensità maggiore della forza peso;
 - C la spinta di Archimede ha la stessa intensità della forza peso;
 - D la spinta di Archimede è applicata in un punto esterno al pelo dell'acqua.
4. Un fluido ideale è in moto in un tubo, in regime stazionario. Siano S_1 e S_2 le aree di due sezioni trasversali del tubo, con $S_2 > S_1$. Possiamo affermare che:
 - A la portata sulla sezione di area S_2 è maggiore di quella sulla sezione di area S_1 ;
 - B la portata sulla sezione di area S_2 è minore di quella sulla sezione di area S_1 ;
 - C la velocità media sulla sezione di area S_2 è maggiore di quella sulla sezione di area S_1 ;
 - D la velocità media sulla sezione di area S_2 è minore di quella sulla sezione di area S_1 .
5. Si consideri un fluido ideale, che scorre in regime stazionario, in un tubo orizzontale. Siano S_1, S_2 le aree di due sezioni del condotto, con $S_2 > S_1$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
 - A La pressione sulla sezione di area S_2 è maggiore di quella sulla sezione di area S_1 ;
 - B La pressione sulla sezione di area S_2 è minore di quella sulla sezione di area S_1 ;
 - C La pressione sulla sezione di area S_2 è uguale a quella sulla sezione di area S_1 ;
 - D Non è possibile valutare la relazione fra le pressioni sulle due sezioni, senza ulteriori informazioni.

Problemi

Problema 6.1

Un cubo di plastica galleggia in una bacinella d'acqua (densità $\rho_a = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$). Sapendo che il cubo sporge dal pelo dell'acqua per il 10% della lunghezza del suo spigolo, calcolare la densità ρ della plastica di cui è composto.

Problema 6.2

Una mongolfiera è riempita di un gas avente densità ρ e trasporta un carico di massa M , dal quale si esclude la massa del gas stesso. Qual è la minima massa di gas necessaria per mantenere in volo la mongolfiera?

Problema 6.3

In un tubo orizzontale scorre del liquido ideale di densità $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ con velocità $v_1 = 3 \text{ cm s}^{-1}$. A un certo punto la sezione del tubo si dimezza: calcolare di quanto viene ridotta la pressione nel tratto a valle della variazione di sezione.

Problema 6.4

La sezione del getto d'acqua che esce verticalmente da un rubinetto è pari ad A . Supponendo che il fluido si muova in regime stazionario, calcolare di quanto varia la sezione, in funzione della distanza h , misurata verso il basso a partire dal rubinetto.

Problema 6.5

Una bilancia ha due bracci disuguali, di lunghezza rispettivamente $\ell_1 = 10 \text{ cm}$ e $\ell_2 = 30 \text{ cm}$. Al braccio più corto è agganciato un piatto di ottone, di massa $m_p = 150 \text{ g}$, inizialmente vuoto, mentre all'estremità del braccio più lungo è appeso, mediante un filo di massa trascurabile, un corpo di massa M . Si trova che per ottenere l'equilibrio è necessario mettere sul piatto una massa $m = 650 \text{ g}$.

- Si determini la massa M del corpo.
- Si immagini di ripetere la pesata con il corpo immerso in acqua distillata (vedi Figura 6.1). Sapendo che il suo volume è di 0.05 dm^3 , determinare la massa che è necessario togliere dal piatto per ottenere l'equilibrio.
- Si ripeta il calcolo nell'ipotesi che l'esperimento del punto (b) sia condotto sulla Luna ($g_{\text{Luna}} \approx g/6$). Commentare il risultato.

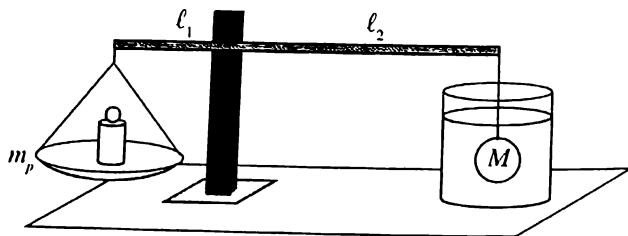


Figura 6.1

Problema 6.6

Un tubo di vetro piegato a U e aperto a entrambe le estremità contiene mercurio. Una piccola quantità di acqua viene versata nel lato sinistro del tubo finché l'altezza della colonna di ac-

qua diviene uguale a 15.0 cm (si veda la Figura 6.2). La pressione dell'aria nella stanza in cui si trova il tubo è pari a 1 atm, e la densità del mercurio è $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Calcolare:

- La pressione all'interfaccia acqua-mercurio.
- La differenza di quota h tra il pelo libero del mercurio nel lato destro e il pelo libero dell'acqua nel lato sinistro. Si usi la densità del mercurio.

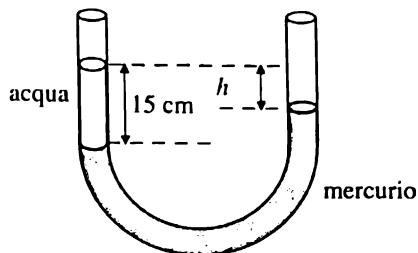


Figura 6.2

Problema 6.7

Un possibile dispositivo per la misura della velocità di un gas (simile al tubo di Pitot) è costituito da un tubo a sezione quadrata (di area S) sagomato come in Figura 6.3; entrambe le estremità sono aperte e nel tratto verticale a destra vi è un pistoncino a tenuta stagna, di massa m , sorretto da una molla di costante elastica k . Quando il dispositivo è in aria in quiete, la molla è compressa di un tratto x per effetto del peso del pistone. Quando il dispositivo è investito da un flusso di aria (da sinistra verso destra) con velocità uniforme v , si osserva che il pistoncino risale allungando la molla. Tutte le differenze di quota tra le parti del dispositivo sono trascurabili.

- Si spieghi il motivo per cui il pistone risale.
- Si calcoli quale deve essere la velocità dell'aria per far sì che la molla torni alla sua lunghezza propria (cioè sia $x = 0$).
- Si supponga di voler tarare lo strumento per misurare la velocità dell'aria osservando la posizione del pistoncino, costruendo una scala sulla quale, in corrispondenza di ogni posizione y del pistone, sia possibile leggere automaticamente il corrispondente valore di velocità. Sia $y = 0$ la posizione del pistone quando l'aria è in quiete. Si determini qual è la relazione tra la posizione y del pistone e la velocità dell'aria.

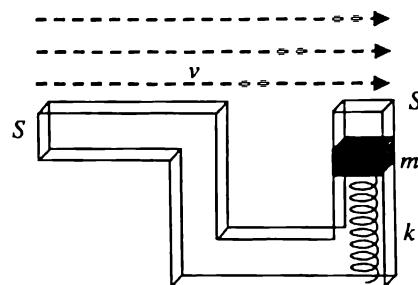


Figura 6.3

Problema 6.8

Un cubetto di ottone di lato $\ell = 10 \text{ cm}$ e massa $m = 8.5 \text{ kg}$ viene immerso in una vaschetta contenente mercurio (densità $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$) e acqua distillata (Figura 6.4). Una volta raggiunto l'equilibrio, qual è la distanza x tra la faccia inferiore del cubo e l'interfaccia mercurio/acqua?

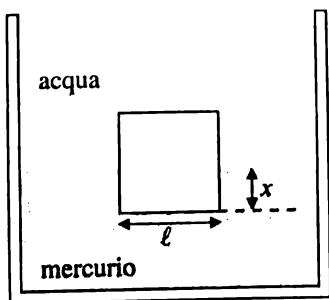


Figura 6.4

Problema 6.9

Una vasca di lunghezza $L = 5 \text{ m}$ è suddivisa in due parti di larghezza $w_d = 2 \text{ m}$ e $w_s = 1 \text{ m}$ tramite una parete verticale che non arriva fino al fondo, come mostrato in Figura 6.5. La vasca è riempita

parzialmente di acqua (densità $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) e poi, nella parte più stretta, viene aggiunto dell'olio (densità $\rho_o = 0.84 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). All'equilibrio, l'acqua arriva a una quota $H_d = 4 \text{ m}$ nella parte destra, più larga e a una quota $H_s = 3 \text{ m}$ nella parte a sinistra, più stretta. Tutto il sistema è in aria, alla pressione $p_0 = 1 \text{ atm}$. Sia h l'altezza della colonna d'olio sopra l'acqua.

- Calcolare il valore di h .
- Se ora si mette un blocco di legno di peso $W = 1000 \text{ N}$ a galleggiare sull'olio, di quanto si sposta il pelo libero dell'acqua nella parte più larga della vasca?

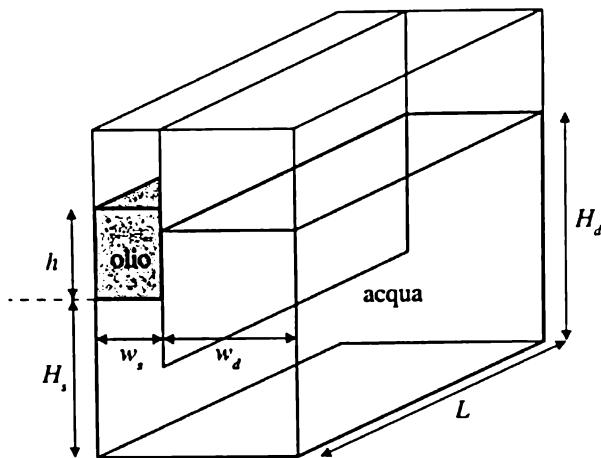


Figura 6.5

Problema 6.10

In una macchina per la lavorazione dell'acciaio un tubo cilindrico, rigido e a sezione costante, di raggio $R = 10 \text{ mm}$, è usato per trasportare l'acqua di raffreddamento e spruzzarla, dal basso verso l'alto, sull'oggetto in lavorazione per evitarne il surriscaldamento. Nell'ultimo tratto, il tubo è verticale e termina con un ugello formato da una strozzatura di raggio $r = 5 \text{ mm}$. Un manometro, posto sul tubo a distanza $\ell = 50 \text{ cm}$ dall'ugello, misura la pressione dell'acqua, che risulta essere $p_A = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (si veda la Figura 6.6). Si tratti l'acqua come un liquido ideale.

- A quale altezza h potrebbe arrivare il getto d'acqua spruzzato dall'ugello se non incontrasse ostacoli?
- Qual è la portata del tubo?

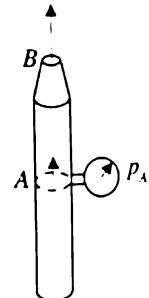


Figura 6.6

Problema 6.11

Un'impresa deve progettare e realizzare una diga che permetta di creare un bacino idroelettrico in una piccola valle di montagna. Nel punto in cui la diga deve essere costruita, il fondovalle è pianeggiante e largo $\ell = 30 \text{ m}$, ma i fianchi delle montagne, che sono molto ripidi, formano un angolo $\theta = 30^\circ$ con la verticale. Pertanto, la diga dovrà avere la forma di trapezio isoscele, con base minore di lunghezza ℓ e altezza $h = 10 \text{ m}$, come mostrato in Figura 6.7.

Assumendo per semplicità che la diga sia un muro verticale, piano, di spessore costante, calcolare quale sarà la forza netta cui sarà soggetta quando il bacino idroelettrico sarà completamente pieno.

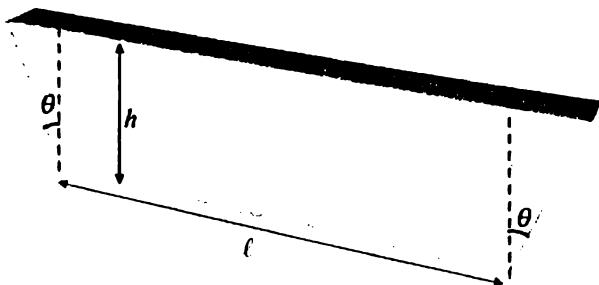


Figura 6.7

Problema 6.12

Una vasca cilindrica piena d'acqua, di altezza $h = 1 \text{ m}$ e sezione $S_0 = 10 \text{ m}^2$ ha una botola sul fondo, per consentirne lo svuotamento. Quando la botola viene aperta, il livello della superficie dell'acqua scende a una velocità costante di 5 cm s^{-1} . Determinare, senza supporre trascurabile la velocità di discesa del livello della superficie:

- la sezione della botola;
- la velocità di uscita dell'acqua dalla botola;
- l'entità dell'errore che si commetterebbe applicando la legge di Torricelli per il calcolo della velocità di uscita dell'acqua.

Problema 6.13

Una goccia di forma sferica e raggio $r = 3 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$, di un fluido avente densità $\rho_a = 7 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$, cade in un gas di densità $\rho_g = 1 \text{ kg m}^{-3}$ con velocità costante $v = 10 \text{ m s}^{-1}$. Determinare la viscosità del gas.

Problema 6.14

Una sferetta di ghiaccio (densità $\rho_g = 0.917 \text{ g/cm}^3$) viene posta in un bicchiere pieno d'acqua (densità $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$). Il bicchiere ha la forma di un cilindro, con sezione di base S ; quando la sferetta di ghiaccio galleggia sull'acqua, il pelo libero dell'acqua arriva a un'altezza h rispetto al fondo.

- Calcolare la frazione di volume della sferetta che emerge dall'acqua.
- Calcolare l'altezza h' raggiunta dall'acqua nel bicchiere, dopo che il ghiaccio si è completamente fuso.

Problema 6.15

Una grande cisterna cilindrica (Figura 6.8) di diametro $D = 4 \text{ m}$ è montata su un traliccio ed è dotata di un'apertura sul fondo, di diametro $d = 0.2 \text{ m}$, munita di una valvola che la può aprire o chiudere.

All'apertura è connesso un tubo di lunghezza $\ell = 5 \text{ m}$ e diametro costante d .

Inizialmente la cisterna è piena d'acqua fino a una quota $h = 4 \text{ m}$, dopodiché la valvola viene aperta e l'acqua inizia a defluire lungo il tubo. Grazie a una presa d'aria nella parte superiore della cisterna, la pressione al di sopra del pelo libero è sempre uguale a quella esterna, p_0 . Si tratti l'acqua come un liquido ideale in moto stazionario e si trascuri la velocità del pelo libero.

- Trovare la velocità con cui l'acqua esce dal tubo.
- Determinare la pressione all'imbocco del tubo.
- Calcolare dopo quanto tempo la cisterna si svuota completamente.
- Se il tubo non ci fosse, quanto tempo occorrerebbe per svuotare la cisterna?

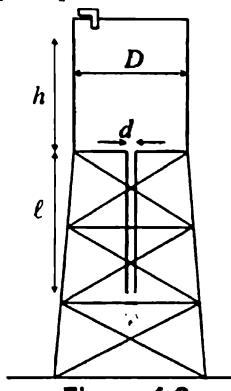


Figura 6.8

Svolgimenti

Problema 6.1

SVOLGIMENTO

- Per la legge di Archimede, l'acqua esercita sul cubo una forza di intensità pari al peso di un volume d'acqua uguale al volume della parte del cubo immersa

$$F_A = \rho_a V_{\text{imm}} g$$

dato che il cubo è in galleggiamento, tale forza deve bilanciare il suo peso

$$W = \rho V g$$

pertanto possiamo impostare l'uguaglianza

$$\rho V g = \rho_a V_{\text{imm}} g$$

da cui otteniamo

$$\rho = \rho_a \frac{V_{\text{imm}}}{V}.$$

Se d è lo spigolo del cubo avremo poi che $V = d^3$ e $V_{\text{imm}} = 0.9 d d^2 = 0.9 d^3$, pertanto

$$\rho = \rho_a \frac{0.9 d^3}{d^3} = 0.9 \cdot \rho_a = 9 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}.$$

Problema 6.2

SVOLGIMENTO

- Consideriamo il sistema costituito dalla mongolfiera e dal suo carico e chiamiamo m la massa del gas che riempie la mongolfiera. Le forze esterne agenti sul sistema sono: la forza peso del carico, la forza peso del gas e la spinta di Archimede dovuta all'aria. Tutte queste forze sono verticali per cui, scegliendo l'asse z verticale e rivolto verso l'alto, la prima equazione cardinale si può scrivere, in componenti:

$$-mg - Mg + F_A = (m + M)a_z.$$

La mongolfiera si mantiene in volo se $a_z \geq 0$; la condizione limite è che sia $a_z = 0$, ossia che la mongolfiera sia in equilibrio:

$$(M + m)g = F_A. \quad (6.11)$$

In particolare, se ρ_{aria} è la densità dell'aria e V il volume di gas contenuto nella mongolfiera, $F_A = \rho_{\text{aria}} V g$ (si è trascurato il volume del carico). Inoltre, $m = \rho V$. Andando a sostituire nella 6.11, si ottiene

$$M + \rho V = \rho_{\text{aria}} V \Rightarrow V = \frac{M}{\rho_{\text{aria}} - \rho}. \quad (6.12)$$

Di conseguenza, la massa di gas richiesta è pari a $m = \rho V = \frac{M \rho}{\rho_{\text{aria}} - \rho}$.

Problema 6.3

SVOLGIMENTO

- Per la legge di Leonardo, la portata $Q = S v$ dovrà restare costante in tutto il percorso. Pertanto, se S_1 e S_2 sono le sezioni dei due tratti di tubo e v_1 e v_2 le velocità dell'acqua nei tratti corrispondenti, avremo:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

per cui

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1.$$

Per il Teorema di Bernoulli, essendo costante la quota z , dovrà essere valida l'uguaglianza

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

per cui la caduta di pressione sarà

$$\begin{aligned} \Delta p = p_1 - p_2 &= \frac{1}{2} \rho [v_2^2 - v_1^2] = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} 10^3 \text{ kg m}^{-3} (3 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1})^2 (2^2 - 1) \cong 1.35 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Problema 6.4

Svolgimento

► Consideriamo due punti nel fluido: uno all'uscita del rubinetto e uno situato a una distanza h verso il basso. Sia A la sezione del getto d'acqua e v la sua velocità (media) all'uscita del rubinetto, e siano A' e v' la sezione e la velocità nel punto a distanza h . Se il regime del fluido è stazionario, deve valere la legge di Leonardo

$$vA = v'A'. \quad (6.13)$$

Applichiamo ora il teorema di Bernoulli tra gli stessi due punti. Scegliamo l'asse z verticale, orientato verso l'alto e con l'origine all'uscita del rubinetto in modo che le quote dei due punti siano rispettivamente $z = 0$ e $z' = -h$:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p' - \rho gh + \frac{1}{2} \rho (v')^2. \quad (6.14)$$

Il getto d'acqua è a contatto con l'aria, per cui la pressione risulta sempre quella atmosferica: se il dislivello h non è troppo grande, quindi, possiamo porre $p = p'$. Dall'Equazione 6.14 si ottiene quindi

$$v' = \sqrt{v^2 + 2gh}. \quad (6.15)$$

Andando quindi a sostituire nella 6.13 si ottiene la sezione del getto a una distanza h dall'uscita del rubinetto:

$$A' = \frac{v}{\sqrt{2gh + v^2}} A. \quad (6.16)$$

Quindi, la sezione del getto diminuisce man mano che diminuisce la quota.

Problema 6.5

Svolgimento

► Il problema si affronta imponendo che l'asta della bilancia sia in equilibrio. Chiamiamo O il punto in cui l'asta poggia sul perno. La condizione di equilibrio "traslazionale" $\sum F = 0$ dice semplicemente che la forza F_O esercitata dal perno sull'asta è sempre tale da compensare tutte le altre forze applicate all'asta stessa. Più utile è invece la condizione di equilibrio "rotazionale" $\sum M_O = 0$, in cui si è scelto O come polo.

- a) Considerando come positivo il verso dei momenti che risultano orientati lungo l'asse ortogonale all'asta ed entrante nel piano della figura, la condizione $\sum M_O = 0$ si può scrivere

$$+Mg \ell_2 - (m + m_p)g\ell_1 = 0,$$

da cui $M = (m + m_p)\ell_1/\ell_2 = (0.8 \text{ kg}) \times 0.1 / 0.3 = 0.2667 \text{ kg}$ ossia $M = 266.7 \text{ g}$.

- b) Quando il corpo M è immerso nell'acqua, su di esso agisce anche la spinta di Archimede che vale, in modulo, $F_A = \rho V g$ (dove $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ è la densità dell'acqua distillata) essendo il corpo completamente immerso. Poiché F_A è rivolta verso l'alto, la condizione di equilibrio $\sum M_O = 0$ per l'asta della bilancia stavolta si scrive

$$+Mg\ell_2 - \rho V g \ell_2 - (m - \Delta m + m_p)g\ell_1 = 0. \quad (6.17)$$

dove si è indicata con Δm la massa che è necessario togliere dal piatto. Risolvendo per Δm si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta m &= (m + m_p) - (M - \rho V) \frac{\ell_2}{\ell_1} = \\ &= 0.8 \text{ kg} - (0.2667 \text{ kg} - 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3) \frac{0.3}{0.1} = 0.150 \text{ kg}, \end{aligned}$$

perciò occorre togliere dal piatto una massa di 150 g.

- c) Se l'esperimento del punto (b) è compiuto sulla Luna, occorre riscrivere la condizione di equilibrio (Equazione 6.17) usando l'accelerazione di gravità g_{Luna} . È chiaro tuttavia che siccome g_{Luna} compare in tutti i termini a primo e secondo membro, il risultato non cambia, ossia occorre sempre togliere una massa pari a 150 g dal piatto. Tale risultato è dovuto al fatto che oltre alla forza peso, anche la spinta di Archimede è proporzionale all'accelerazione di gravità. In altre parole, quindi, la bilancia a due bracci permette di confrontare direttamente le *masse* (gravitazionali) e non i pesi; poiché la massa è una proprietà intrinseca di tutti i corpi, è ovvio che tale confronto è indipendente dall'accelerazione di gravità del luogo in cui viene condotto l'esperimento.

Problema 6.6

Svolgimento

► Osserviamo, innanzi tutto, che le pressioni esercitate sulla superficie superiore dell'acqua e del mercurio sono uguali, essendo entrambe le superfici esposte alla pressione atmosferica p_0 .

- a) La pressione p_1 all'interfaccia acqua-mercurio si può ottenere dalla legge di Stevino (Equazione 6.5). Rispetto al pelo libero dell'acqua, l'interfaccia col mercurio è a una profondità $H = 0.15 \text{ m}$ e quindi

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \rho_{\text{acqua}} g H = \\ &= 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 0.15 \text{ m} = 102771.5 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Per avere un'idea di quanto questa pressione differisca dalla pressione atmosferica, la si può esprimere in atmosfere ricordando che $1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Risulta essere $p(H) = 1.0145 \text{ atm}$.

- b) La pressione all'interfaccia acqua-mercurio deve necessariamente essere uguale alla pressione che, alla stessa quota, si misura nel lato destro del tubo a U, perché il fluido è in quiete. Per la legge di Stevino tale pressione deve essere anche uguale al peso di una colonna di mercurio di altezza $(H - h)$, cioè dev'essere

$$p_1 = p_0 + \rho_{\text{Hg}} g (H - h). \quad (6.19)$$

Confrontando le Equazioni 6.18 e 6.19 si ottiene quindi che

$$h = H \left(1 - \frac{\rho_{\text{acqua}}}{\rho_{\text{Hg}}} \right) = 0.15 \text{ m} \left(1 - \frac{1}{13.6} \right) = 0.139 \text{ m} = 13.9 \text{ cm}.$$

Problema 6.7**SVOLGIMENTO**

► Il dispositivo in questione sfrutta il fatto che, come descritto dal teorema di Bernoulli, la pressione di un gas che si muove è, a parità di altre condizioni, inferiore a quella dello stesso gas in condizioni statiche.

- Il pistone risale perché si genera una differenza di pressione tra la sua faccia inferiore e la sua faccia superiore. In particolare, quando il pistone è in equilibrio, l'aria sotto di esso è ferma e a una pressione p_{inf} che, se si trascura la differenza di quota, è uguale alla pressione dell'aria all'imboccatura sinistra del tubo; sulla faccia superiore agisce invece una pressione p_{sup} che è uguale alla pressione dell'aria all'imboccatura destra del tubo. Usando il teorema di Bernoulli si può scrivere: $p_{\text{sup}} + 1/2\rho v^2 = p_{\text{inf}}$ dove ovviamente ρ è la densità dell'aria e v la sua velocità. Quindi $p_{\text{inf}} > p_{\text{sup}}$ per cui si crea una forza $F_p = (p_{\text{inf}} - p_{\text{sup}})S$ verso l'alto.
- Sia x un asse verticale, orientato verso l'alto, e con l'origine nel punto in cui la molla è a riposo, ossia la sua deformazione è zero. In tal modo la coordinata x del pistone equivale alla deformazione della molla (con segno). Quando $x = 0$ la forza elastica è zero per cui il pistone è in equilibrio solo sotto l'effetto del suo peso e della forza di pressione, cioè: $+(p_{\text{inf}} - p_{\text{sup}})S - mg = 0$ e quindi

$$\frac{1}{2}\rho v^2 - mg = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}.$$

- Si determini innanzitutto il valore di x per ogni valore di velocità. In generale il pistone è soggetto alla forza peso, alla forza elastica e alla forza di pressione per cui la condizione di equilibrio $\sum F = 0$ si scrive, usando le componenti lungo l'asse x : $-mg - kx + (p_{\text{inf}} - p_{\text{sup}})S = 0$ da cui si ottiene che

$$x = -\frac{mg}{k} + \frac{1}{2} \frac{\rho v^2 S}{k}.$$

Le etichette della scala dello strumento devono riportare la coordinata y che vale zero quando $v = 0$. È evidente quindi che l'origine dell'asse y deve essere traslata verso il basso di un tratto mg/k rispetto a quella dell'asse x . Pertanto su tale scala la relazione tra la posizione y del pistone e la velocità dell'aria è

$$y = \frac{1}{2} \frac{\rho v^2 S}{k}.$$

Problema 6.8**SVOLGIMENTO**

- Innanzitutto si trovi la densità dell'ottone. Tenendo conto che $\ell = 0.1$ m, si trova

$$\rho_{\text{ott}} = \frac{m}{\ell^3} = 8.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Si chiami inoltre ρ_a la densità dell'acqua distillata ($\rho_a = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$). All'equilibrio, il cubo di ottone è sottoposto a forze di risultante nulla. Tutte queste forze sono verticali e sono, rispettivamente:

- la forza peso: $\mathbf{W} = mg = \rho_{\text{ott}} \ell^3 \mathbf{g}$;
- la spinta di Archimede dovuta al mercurio: $\mathbf{F}_A^{\text{Hg}} = -\rho_{\text{Hg}} \ell^2 x \mathbf{g}$, dove $\ell^2 x$ è il volume della parte del cubetto immersa nel mercurio;
- la spinta di Archimede dovuta all'acqua: $\mathbf{F}_A^a = -\rho_a \ell^2 (\ell - x) \mathbf{g}$, dove $\ell^2 (\ell - x)$ è il volume della parte del cubetto immersa nell'acqua.

Chiamando z l'asse verticale, rivolto verso l'alto, la II legge di Newton per il cubo si scrive:

$$-\rho_{\text{ott}} g \ell^3 + \rho_{\text{Hg}} g \ell^2 x + \rho_a g \ell^2 (\ell - x) = 0$$

da cui si ottiene

$$x(\rho_{\text{Hg}} - \rho_a) = (\rho_{\text{ott}} - \rho_a)\ell \quad \rightarrow \quad x = \frac{\rho_{\text{ott}} - \rho_a}{\rho_{\text{Hg}} - \rho_a} \ell = 0.0595 \text{ m};$$

pertanto, la faccia inferiore del cubetto si trova a circa 6 cm al di sotto dell'interfaccia mercurio/acqua. Di conseguenza, la faccia superiore è circa 4 cm al di sopra di tale interfaccia.

Problema 6.9

Svolgimento.

► La soluzione del problema richiede l'uso della legge di Stevino e delle leggi del galleggiamento.

- a) In condizioni di equilibrio, sotto l'effetto della forza peso, le superfici equipotenziali in un fluido sono anche superfici isobare. In particolare, considerata la superficie orizzontale che contiene l'interfaccia acqua/olio, la pressione dell'acqua deve essere uguale in ogni suo punto. Sia A un punto su tale superficie, situato nella parte più stretta ossia all'interfaccia acqua/olio e B un punto alla stessa quota ma nella parte più larga. Usando la legge di Stevino si trova che $p_A = p_0 + \rho_0 gh$ e $p_B = p_0 + \rho g(H_d - H_s)$. Imponendo $p_A = p_B$ si ottiene

$$h = \frac{\rho}{\rho_o}(H_d - H_s) = 1.19 \text{ m}. \quad (6.20)$$

- b) Quando il blocco di legno viene posto sull'olio, vi si immerge parzialmente spostando un certo volume di liquido e cambiando quindi l'altezza della colonna di olio al di sopra dell'acqua. Inoltre, l'interfaccia acqua/olio nella parte più stretta della vasca si abbassa e il pelo libero dell'acqua nella parte più larga si innalza. Determiniamo innanzitutto qual è il volume della parte immersa del blocco di legno. Imponendo la condizione di equilibrio sul blocco, ossia imponendo che la risultante delle forze sia uguale a zero, e proiettandola lungo l'asse z (verticale e rivolto verso l'alto) si ottiene:

$$-W + \rho_o V_i g = 0 \quad \rightarrow \quad V_i = \frac{W}{\rho_o g} = 0.121 \text{ m}^3.$$

A questo punto, sia h' l'altezza della colonna d'olio quando il blocco di legno vi galleggia sopra. Poiché tra la situazione iniziale (senza il blocco) e quella finale (con il blocco in equilibrio) il volume dell'olio è rimasto invariato, deve essere necessariamente

$$h L w_s = h' L w_s - V_i$$

da cui si ricava

$$h' = h + \frac{V_i}{L w_s} = (1.190 + 0.024) \text{ m} = 1.214 \text{ m}. \quad (6.21)$$

Ora, sia H'_s il nuovo livello dell'acqua nella parte sinistra della vasca: sarà necessariamente $H'_s = H_s - \delta_s$ dove $\delta_s > 0$. Il livello dell'acqua nella parte destra della vasca sarà anch'esso diverso rispetto alla situazione iniziale senza il blocco: $H'_d = H_d + \delta_d$. Poiché il volume d'acqua è rimasto lo stesso, e considerando che $w_d = 2w_s$, si avrà $\delta_d = \delta_s/2$. Per trovare δ_d , imponiamo che la pressione in due punti sul fondo del recipiente, uno a sinistra e uno a destra della parete, sia uguale:

$$p_0 + \rho_o g h' + \rho g H'_s = p_0 + \rho g H'_d$$

che, scrivendo $H'_s = H_s - 2\delta_d$ e $H'_d = H_d + \delta_d$, diventa

$$p_0 + \rho_o g h' + \rho g (H_s - 2\delta_d) = p_0 + \rho g (H_d + \delta_d).$$

Da qui si trova

$$\delta_d = \frac{\rho_o h' - \rho (H_d - H_s)}{3\rho} = 6.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}. \quad (6.22)$$

Pertanto, il livello dell'acqua nella parte destra della vasca sale di 6.6 mm.

Problema 6.10**SVOLGIMENTO**

► Poiché possiamo trattare l'acqua come se fosse un liquido ideale, ossia trascurandone la viscosità e la comprimibilità, il problema si può risolvere utilizzando la legge di Leonardo e il teorema di Bernoulli.

- a) Sia A il punto del tubo in cui si trova il manometro, B il punto corrispondente all'ugello e C il punto in cui il getto d'acqua arriverebbe se non incontrasse ostacoli. Sappiamo che in A il tubo ha raggio $r_A = R$ e la pressione è p_A ; in B il raggio è $r_B = r$ e la pressione è $p_B = p_0$ (avendo chiamato p_0 la pressione atmosferica); infine, in C la pressione è $p_C = p_0$ e la velocità del fluido è nulla. Applicando il teorema di Bernoulli tra B e C si ottiene innanzitutto

$$p_0 + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_0 + \rho g z_C$$

da cui

$$v_B = \sqrt{2g(z_C - z_B)} = \sqrt{2gh}. \quad (6.23)$$

Ora, applicando l'equazione di continuità tra A e B si trova che

$$v_A \pi R^2 = v_B \pi r^2 \rightarrow v_A = \left(\frac{r}{R}\right)^2 v_B = \frac{1}{4} v_B = \frac{1}{4} \sqrt{2gh}. \quad (6.24)$$

Per legare v_A all'altro dato noto, ossia p_A , e quindi ottenere un'equazione in h , occorre applicare nuovamente il teorema di Bernoulli ai punti A e C :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_0 + \rho g z_C.$$

Tenendo conto dell'Equazione 6.24 e del fatto che $(z_C - z_A) = h + \ell$, si trova infine

$$\frac{1}{2} \rho \frac{2gh}{16} = (p_0 - p_A) + \rho g(h + \ell)$$

e risolvendo per h si trova

$$h = \frac{(p_0 - p_A) + \rho g \ell}{\rho g (\frac{1}{16} - 1)} = 5.85 \text{ m.} \quad (6.25)$$

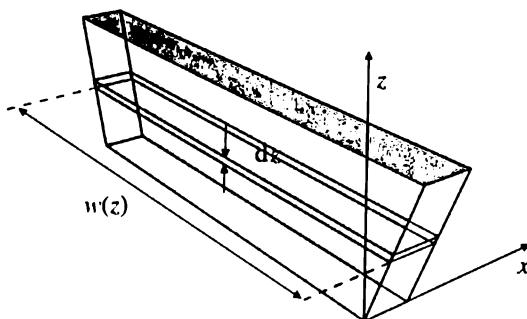
- b) La portata del tubo è data da $Q = vS$ dove v è la velocità e S l'area della sezione del tubo. Nel punto A la velocità è già stata calcolata (Equazione 6.24) e vale $v_A = 2.68 \text{ m/s}$ per cui

$$Q = \pi R^2 v_A = 8.41 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s.}$$

Problema 6.11**SVOLGIMENTO**

► Poiché la pressione dell'acqua dipende dalla profondità rispetto al pelo libero, per calcolare la forza totale che l'acqua esercita sulla diga occorre suddividere la sua superficie in "strisce" orizzontali di altezza infinitesima, in modo che all'interno di ogni striscia la pressione sia uniforme. Nel fare questo, però, notiamo che la larghezza delle strisce non è costante ma, a causa della forma trapezoidale della diga, dipende dalla quota. Sia z l'asse verticale, orientato verso l'alto e con origine alla base della diga; sia inoltre x l'asse ortogonale alla diga, diretto dalla faccia interna verso la faccia esterna (Figura 6.9). Si consideri una generica striscia orizzontale di altezza infinitesima dz , tra z e $z + dz$. Poiché si conosce l'angolo θ di cui sono inclinati i lati del trapezio (si veda la Figura 6.7), la larghezza w di tale striscia può essere facilmente espressa in funzione di z nella forma:

$$w(z) = \ell + 2z \tan \theta.$$

**Figura 6.9**

Alla quota z (con $0 \leq z \leq h$) la pressione dell'acqua è $p(z) = p_0 + \rho g(h - z)$ dove p_0 è la pressione atmosferica. Pertanto la forza esercitata dall'acqua sulla superficie *interna* della striscia considerata è diretta lungo l'asse x e la sua componente (lungo tale asse) è

$$dF_x^{\text{int}}(z) = +p(z)dS = p(z)w(z)dz.$$

Tuttavia, sulla faccia *esterna* della medesima striscia agisce anche la forza dovuta alla pressione atmosferica, che è opposta alla forza esercitata dall'acqua:

$$dF_x^{\text{est}}(z) = -p_0 dS = -p_0 w(z)dz.$$

La forza netta esercitata sulla striscia è quindi diretta lungo l'asse x , nello stesso verso di tale asse, e ha componente

$$dF_x(z) = [p(z) - p_0]dS = [p(z) - p_0]w(z)dz = \rho g(h - z)(\ell + 2z \tan \theta)dz.$$

La forza netta agente su tutta la diga è

$$F_x = \int_0^h \rho g(h - z)(\ell + 2z \tan \theta)dz. \quad (6.26)$$

Svolgendo i calcoli si trova infine che

$$F_x = \frac{1}{2} \rho g \ell h^2 + \frac{1}{3} \tan \theta \rho g h^3. \quad (6.27)$$

Usando i valori numerici a disposizione si ottiene

$$F_x = 1.66 \cdot 10^7 \text{ N.}$$

Problema 6.12**SVOLGIMENTO**

► In questo esercizio vedremo come il teorema di Torricelli corrisponde a un caso particolare della legge di Bernoulli, nel quale si considera trascurabile la velocità del liquido in un punto del tubo di flusso.

- a) Per la legge di Leonardo, la portata del flusso d'acqua $Q = S v$ dovrà essere uguale alla superficie dell'acqua e in corrispondenza della botola, per cui, se S_1 è la sezione della botola e v_1 è la velocità di uscita dell'acqua, si ha

$$S_0 v_0 = S_1 v_1$$

da cui

$$v_1 = \frac{S_0}{S_1} v_0. \quad (6.28)$$

Applicando il teorema di Bernoulli (e ponendo per comodità la quota $z = 0$ all'altezza del fondo della vasca) si ottiene:

$$p_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2;$$

osservando poi che l'acqua che esce dalla botola è soggetta alla stessa pressione atmosferica dell'acqua alla superficie, per cui $p_0 = p_1$, usando l'Espressione 6.28 per v_1 , si trova

$$\rho g h + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_0}{S_1} \right)^2 v_0^2$$

da cui si ricava

$$\left(\frac{S_0}{S_1} \right) = \sqrt{1 + \frac{2 g h}{v_0^2}} \quad (6.29)$$

e infine

$$S_1 = \frac{S_0}{\sqrt{1 + \frac{2 g h}{v_0^2}}} \simeq 1.13 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2 \quad (6.30)$$

b) Per determinare v_1 è sufficiente usare le Equazioni 6.28 e 6.29:

$$v_1 = \left(\sqrt{1 + \frac{2 g h}{(v_0)^2}} \right) v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2 g h} \simeq 4.43 \text{ ms}^{-1}.$$

Si noti che questa espressione si riduce a quella prevista dal teorema di Torricelli, che indicheremo nel seguito con v_1^T , se la velocità di discesa del livello del liquido è trascurabile

$$\lim_{v_0 \rightarrow 0} \sqrt{v_0^2 + 2 g h} = \sqrt{2 g h} = v_1^T.$$

c) Se per valutare v_1 si usasse il teorema di Torricelli, si commetterebbe un errore relativo pari a

$$\epsilon = \frac{v_1 - v_1^T}{v_1^T} = \frac{v_1}{v_1^T} - 1 = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2 g h}{2 g h}} - 1 \simeq 6.4 \cdot 10^{-5}; \quad (6.31)$$

ossia dell'ordine di 64 parti per milione.

Problema 6.13

Svolgimento

► Poiché la goccia cade con velocità costante, la somma vettoriale della forza peso \mathbf{W} , della spinta di Archimede \mathbf{F}_A e della resistenza del fluido \mathbf{f}_r dovrà essere nulla:

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_A + \mathbf{f}_r = 0.$$

Scegliendo l'asse z verticale e rivolto verso l'alto, si può scrivere che:

$$\mathbf{W} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g \mathbf{u}_z,$$

$$\mathbf{F}_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g \mathbf{u}_z,$$

$$\mathbf{f}_r = 6\pi r \eta v \mathbf{u}_z,$$

avendo usato la formula di Stokes e avendo indicato con η la viscosità del fluido.

La condizione di risultante nulla, proiettata sull'asse z , diventa quindi

$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g + 6\pi r \eta v = 0,$$

da cui si ottiene, risolvendo per η ,

$$\eta = \frac{2r^2(\rho_a - \rho_g)g}{9v} \simeq 1.37 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}.$$

Si noti che l'unità di misura equivale a quella della viscosità:

$$1 \text{ Pa s} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{m}^2} \text{s} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}.$$

Problema 6.14

SVOLGIMENTO

► La sferetta è inizialmente in equilibrio sotto l'effetto della forza peso e della spinta di Archimede.

- a) Indichiamo con V il volume totale della sferetta, con V_{imm} quello della parte immersa e con V_{em} quello della parte emersa. Dalla condizione di equilibrio otteniamo $\rho V_{\text{imm}} = \rho_g V$, da cui si ricava

$$V_{\text{imm}} = \frac{\rho_g}{\rho} V. \quad (6.32)$$

Risulta evidentemente $V_{\text{em}} = V - V_{\text{imm}}$, ossia

$$V_{\text{em}} = V - \frac{\rho_g}{\rho} V = \frac{\rho - \rho_g}{\rho} V. \quad (6.33)$$

Di conseguenza, la frazione di volume emerso corrisponde a $\frac{V_{\text{em}}}{V} = \frac{\rho - \rho_g}{\rho} = 0.083$, ossia l'8.3% del volume totale.

- b) Indichiamo con V_0 il volume d'acqua inizialmente presente nel bicchiere; quando la sferetta galleggia sull'acqua, il volume del bicchiere sotto la linea di galleggiamento è hS , ma è anche uguale a $V_0 + V_{\text{imm}}$, pertanto

$$h = \frac{V_0 + V_{\text{imm}}}{S}. \quad (6.34)$$

Sia m la massa iniziale del ghiaccio; il volume della sferetta è

$$V = \frac{m}{\rho_g}. \quad (6.35)$$

Quando il ghiaccio si è completamente fuso, la stessa massa occupa un volume $V' = m/\rho$ ossia, andando a sostituire il valore di m ricavato dall'Equazione 6.35

$$V' = \frac{\rho_g}{\rho} V. \quad (6.36)$$

Dal confronto con l'Equazione 6.32 osserviamo che $V' = V_{\text{imm}}$: conseguentemente, l'altezza dell'acqua dopo la fusione del ghiaccio risulta

$$h' = \frac{V_0 + V'}{S} = \frac{V_0 + V_{\text{imm}}}{S} = h \quad (6.37)$$

ossia resta invariata.

Problema 6.15**SVOLGIMENTO**

► Il testo del problema ci autorizza a trattare l'acqua come un liquido ideale in moto stazionario (il che equivale a trascurare i primi istanti dopo l'apertura della valvola, quando il flusso è certamente non stazionario). Pertanto possiamo utilizzare il teorema di Bernoulli. Sia z l'asse verticale, rivolto verso l'alto e con origine sul terreno. Sia A un punto sul pelo libero dell'acqua, B un punto all'imboccatura superiore del tubo e C un punto all'uscita del tubo.

- a) Applichiamo il teorema di Bernoulli tra i punti A e C :

$$p_A + \rho g z_A = p_C + \rho g z_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2; \quad (6.38)$$

considerando che $p_A = p_C = p_0$ e che $z_A - z_C = h + \ell$, si ottiene la velocità con cui l'acqua esce dal tubo:

$$v_C = \sqrt{2g(h + \ell)} = 13.3 \text{ m/s}. \quad (6.39)$$

- b) Per determinare la pressione all'imbocco del tubo, applichiamo il teorema di Bernoulli tra i punti A e B :

$$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2. \quad (6.40)$$

La velocità v_B si ottiene imponendo che la portata del tubo sia costante e in particolare sia uguale nei punti B e C (legge di Leonardo): però, siccome il tubo ha sezione costante, tale condizione si riduce semplicemente a $v_B = v_C$. Sostituendo l'espressione 6.39 nell'equazione precedente e ricordando che $p_A = p_0$, si trova

$$p_B = p_0 + \rho g h - \frac{1}{2} \rho 2g(h + \ell) = p_0 - \rho g \ell = 5.23 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

che è *minore* di p_0 ed equivale a circa 0.52 atmosfere. Si noti che, se il fluido fosse in quiete, la pressione sarebbe data dalla legge di Stevino e sarebbe *maggior*e di p_0 .

- c) Per calcolare in quanto tempo si svuota la cisterna, occorre prima trovare la portata del tubo:

$$Q = v_C \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 0.42 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}. \quad (6.41)$$

Si ricordi che Q rappresenta il volume di acqua che esce dal tubo nell'unità di tempo. Chiamando $V(t)$ il volume di acqua nella cisterna all'istante generico t , si ha quindi che nell'intervallo infinitesimo dt tale volume varia di

$$dV = -Q dt. \quad (6.42)$$

Il volume di acqua inizialmente presente nella cisterna è

$$V(t=0) = V_0 = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h = 50.26 \text{ m}^3$$

e quindi il tempo T necessario per svuotare la cisterna si trova integrando l'Equazione 6.42:

$$\int_{V_0}^0 dV = -Q \int_0^T dt$$

da cui

$$T = \frac{V_0}{Q} = 120.4 \text{ s}$$

ossia circa 2 minuti.

170 Capitolo 6 – Meccanica dei fluidi

- d) Se il tubo non ci fosse, la velocità di efflusso dell'acqua al punto *B* sarebbe data dal teorema di Torricelli: $v'_B = \sqrt{2gh}$ e sarebbe quindi *minore* di quella che si ha quando c'è il tubo. La portata dell'apertura sarebbe

$$Q' = v'_B \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 0.28 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

e il tempo necessario per svuotare la cisterna sarebbe

$$T' = \frac{V_0}{Q'} = 180.7 \text{ s}$$

ossia circa 3 minuti.



Richiami di teoria

Equilibrio termico e temperatura

Un sistema termodinamico è in *equilibrio termodinamico* quando le variabili (o coordinate) termodinamiche, che ne descrivono lo stato, non variano nel tempo, fissate le condizioni dell'*ambiente*.

Se due sistemi termodinamici A e B, inizialmente separati e in equilibrio, sono posti in contatto mediante una parete *adiabatica* o *isolante*, essi permangono nei rispettivi stati di equilibrio iniziali. Se invece sono posti in contatto attraverso una parete *diatermica* o *conduttrice*, essi raggiungono uno stato di equilibrio comune, in generale diverso da quelli iniziali. In queste condizioni si dice che A e B sono in *equilibrio termico* e hanno la stessa *temperatura*.¹ Il *Principio Zero della termodinamica* asserisce che, se due sistemi termodinamici A e B sono separatamente in equilibrio termico con un terzo sistema C, allora lo sono anche fra loro.

Sulla base del Principio Zero, è possibile dare una definizione operativa di temperatura, utilizzando un sistema campione che presenti variazioni rilevanti di una sua proprietà fisica X quando venga messo – separatamente – in contatto termico con sistemi che possiedono temperature θ diverse. La funzione $\theta(X)$ è detta *funzione termometrica*. Per ragioni di comodità, essa viene in genere assunta come relazione lineare (come nel caso del termometro a liquido),² se non di semplice proporzionalità (come nel caso del termometro a gas a pressione o volume costante); i parametri che la caratterizzano sono determinati attraverso un procedimento di taratura, che richiede l'individuazione di uno o più punti fissi.

Dilatazione termica

Il termometro a liquido si basa sul fenomeno della dilatazione termica: il volume di un corpo, solido o liquido, a pressione p costante, varia con la sua temperatura. Se il corpo ha una sola dimensione apprezzabile, di valore ℓ a una data temperatura T , la sua variazione

¹ Invece le altre variabili termodinamiche possono assumere valori diversi in A e B anche se essi sono in equilibrio termico.

² Il mercurio, che rappresenta l'esempio classico, è ora sostituito da sostanze alternative di minore tossicità per l'uomo e l'ambiente.

$d\ell$ per una variazione infinitesima di temperatura dT è data da

$$d\ell = \lambda \ell dT , \quad (7.1)$$

dove λ è detto *coefficiente di dilatazione lineare*; esso è caratteristico del materiale di cui è composto il corpo e può, a sua volta, dipendere dalla temperatura. Se per una variazione finita di temperatura ΔT la grandezza ℓ passa da un valore iniziale ℓ_i a un valore finale ℓ_f , integrando l'Equazione 7.1 si ha:

$$\int_{\ell_i}^{\ell_f} \frac{d\ell}{\ell} = \int_T^{T+\Delta T} \lambda(T') dT' . \quad (7.2)$$

Nel caso in cui λ non dipenda dalla temperatura nell'intervallo ΔT considerato, tale equazione diventa

$$\ell_f = \ell_i e^{\lambda \Delta T} \simeq \ell_i (1 + \lambda \Delta T) , \quad (7.3)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato nel limite di piccoli valori di $\lambda \Delta T$.

Per corpi isotropi³ le cui dimensioni significative sono due o tre, il discorso viene generalizzato definendo, rispettivamente, un coefficiente di dilatazione superficiale σ e un coefficiente di dilatazione cubica (o di volume) α . Per piccole variazioni di temperatura, si può assumere che valgano le relazioni approssimate $\sigma = 2\lambda$ e $\alpha = 3\lambda$.

Calore specifico e capacità termica

La temperatura di un corpo omogeneo di massa m può variare quando esso scambia con l'ambiente energia sotto forma di calore Q . Considerando uno scambio infinitesimo dQ , la corrispondente variazione di temperatura dT del corpo può essere espressa come:⁴

$$dQ = C(T) dT = m c(T) dT \quad (7.4)$$

in termini, cioè, della sua *capacità termica* C o del suo *calore specifico* c . Entrambe queste grandezze dipendono, oltre che dalla sostanza, dalla temperatura e dal tipo di trasformazione attraverso cui avviene lo scambio di calore. Il calore Q complessivamente scambiato in corrispondenza di una variazione finita di temperatura $\Delta T \equiv T_f - T_i$, è allora dato da

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c(T) dT , \quad (7.5)$$

che si riduce alla più semplice formula $Q = m c \Delta T$ nel caso in cui c non dipenda dalla temperatura o comunque si consideri un calore specifico *medio* relativamente all'intervallo di temperatura considerato. Come si vede, se la temperatura del corpo aumenta il calore scambiato è positivo (calore *assorbito*), mentre se la temperatura diminuisce il calore è negativo (calore *ceduto*).

Nelle transizioni di fase, il sistema scambia una quantità di calore Q con l'ambiente, ma non cambia la sua temperatura; processi di questo tipo vengono descritti attraverso il calore latente, trattato in seguito.

³ Per la trattazione dei corpi anisotropi si rimanda a testi specialistici.

⁴ L'uso dei due simboli, d e δ , corrisponde alla natura diversa, rispettivamente di differenziale esatto e non esatto, delle grandezze indicate. Si veda anche la nota 1 del successivo Capitolo 8.

Si chiama *sorgente* (o serbatoio) ideale di calore ideale un sistema capace di assorbire o cedere qualunque quantità di calore senza che la sua temperatura cambi. Sistemi in transizione di fase o sistemi con elevata capacità termica possono comportarsi come sorgenti ideali se gli scambi di calore non sono troppo grandi.

Due corpi, di masse m_1 e m_2 , inizialmente separati e all'equilibrio alle rispettive temperature T_1 e T_2 , possono essere messi in contatto termico all'interno di un contenitore adiabatico, in modo che gli scambi di calore possano avvenire solo fra i due corpi e non con l'esterno. Quando sono trascurabili le variazioni di volume dovute alla dilatazione termica,⁵ il sistema dei due corpi raggiunge una temperatura di equilibrio, T_e , compresa tra T_1 e T_2 e questo avviene mediante scambio di energia solo sotto forma di calore. La temperatura di equilibrio si può determinare imponendo che la somma algebrica dei calori scambiati dai due corpi per raggiungere l'equilibrio sia zero: $Q_1 + Q_2 = 0$. Nel caso in cui le rispettive capacità termiche, o i calori specifici, possano essere assunti costanti nell'intervallo di temperature considerato, si ha

$$T_e = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}. \quad (7.6)$$

In alcune situazioni è più comodo far riferimento al calore scambiato da un certo numero n di moli di una sostanza, piuttosto che dalla sua massa. Si introduce allora il *calore specifico molare*, secondo la definizione seguente

$$c(T) = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT}. \quad (7.7)$$

Le dimensioni fisiche di tale grandezza sono quindi diverse da quelle del calore specifico dell'Equazione 7.4 (il quale è detto anche *massico*); nel sistema internazionale, i due calori specifici, molare e massico, si misurano, rispettivamente, in $\text{J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ e in $\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Calore latente

Quando una sostanza passa, a pressione costante, da uno *stato di aggregazione* (solido, liquido, aeriforme) a un altro, la sua temperatura non cambia fino a che tutta la transizione di fase non è completa. Tuttavia perché la trasformazione avvenga è necessario lo scambio di energia, sotto forma di calore assorbito/ceduto, tra il sistema e l'ambiente; tale calore serve per rompere/formare i legami tra atomi o molecole, che come è noto hanno intensità diversa nei diversi stati della materia. Il calore Q che una massa m di una certa sostanza scambia con l'ambiente durante un cambiamento di fase è dato da

$$Q = \pm mL$$

dove il segno deve essere scelto in base al verso della trasformazione, e L è il *calore latente* del cambiamento di fase. Esso è specifico per ogni sostanza e per ogni passaggio di stato (vaporizzazione/liquefazione, fusione/solidificazione ecc...) e nel Sistema Internazionale si misura in J kg^{-1} .

⁵ Il caso in cui gli effetti della dilatazione termica non siano trascurabili comporta la possibilità di scambio di energia tra i corpi e/o tra essi e l'ambiente attraverso il lavoro; ciò richiede una descrizione più completa, in termini del Primo Principio della Termodinamica, che è oggetto del capitolo seguente.

Conduzione termica

Lo scambio di calore può avvenire mediante:

- *irraggiamento*, ossia assorbimento ed emissione di radiazione elettromagnetica;
- *convezione*, ossia scambio di calore associato al moto di un fluido da una regione all'altra dello spazio;
- *conduzione*, ossia scambio di calore diretto attraverso un materiale (detto conduttore) che non comporta alcun moto macroscopico di materia.

Qui saranno richiamate soltanto le nozioni fondamentali relative alla conduzione.

Si consideri un materiale conduttore, e una porzione infinitesima dS di superficie isoterma al suo interno. Sia \mathbf{u}_n il versore normale a dS . La *legge di Fourier per la conduzione* afferma che il calore che fluisce per conduzione attraverso la superficie dS nell'unità di tempo è uguale a

$$\frac{\delta Q}{dt} = -k dS \nabla T \cdot \mathbf{u}_n \quad (7.8)$$

ove ∇T è il gradiente della temperatura e k è una caratteristica del materiale che si chiama *conducibilità termica*. Se ∇T è parallelo (antiparallelo) a \mathbf{u}_n significa che \mathbf{u}_n è nella direzione in cui la temperatura aumenta (diminuisce), e pertanto il flusso di calore è negativo (positivo) ossia avviene in verso opposto a \mathbf{u}_n (nello stesso verso di \mathbf{u}_n). L'Equazione 7.8 è valida solo quando il flusso di calore è stazionario.

Nel caso di un problema unidimensionale, in cui la temperatura varia solo lungo l'asse x , l'Equazione 7.8 si riduce a

$$\frac{\delta Q}{dt} = -k dS \frac{dT}{dx}. \quad (7.9)$$

Nel caso di una parete omogenea di area A e spessore ℓ , che separa due regioni dello spazio a diversa temperatura, per esempio T_L a sinistra e T_R a destra, si può mostrare che la temperatura varia linearmente lungo lo spessore della parete, ossia (scelto l'asse x ortogonale alla parete e diretto verso destra) è in ogni punto $dT/dx = (T_R - T_L)/\ell$ e quindi il calore che fluisce nell'unità di tempo attraverso la parete nel verso dell'asse x è

$$\frac{\delta Q}{dt} = -k \frac{A}{\ell} (T_R - T_L). \quad (7.10)$$

TEST DI CO-APPRENSIONE

1. Un'asta di sezione trascurabile e lunghezza ℓ_i viene riscaldata. In corrispondenza di una variazione di temperatura ΔT la lunghezza finale dell'asta risulta $\ell_f = \ell_i + \Delta\ell$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

- se raddoppia ΔT , raddoppia anche il rapporto ℓ_f/ℓ_i ;
- se raddoppia ΔT , raddoppia anche il rapporto $\Delta\ell/\ell_i$;
- se raddoppia ΔT , raddoppia anche il rapporto $\Delta\ell/\ell_f$;
- se raddoppia ΔT , raddoppia anche il rapporto ℓ_i/ℓ_f .

Si considerino due corpi di massa m_1 ed m_2 , con $m_2 > m_1$, e aventi la stessa capacità termica. Quando scambiano con l'ambiente la stessa quantità di calore Q , essi subiscono le variazioni di temperatura ΔT_1 e ΔT_2 . Si può affermare che

- A $\Delta T_1 > \Delta T_2$;
- B $\Delta T_1 < \Delta T_2$;
- C $\Delta T_1 = \Delta T_2$;
- D per confrontare ΔT_1 e ΔT_2 è necessario conoscere il calore specifico dei due corpi.

Due corpi, inizialmente separati, hanno temperature T_1 e T_2 e capacità termiche C_1 e C_2 , con $C_1 > C_2$; successivamente essi sono messi a contatto in un contenitore adiabatico. Indicate con ΔT_1 e ΔT_2 le rispettive variazioni di temperatura, una volta raggiunto l'equilibrio termico, quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A $\Delta T_1 > \Delta T_2$;
- B $\Delta T_1 < \Delta T_2$;
- C $\Delta T_1 = \Delta T_2$;
- D per confrontare ΔT_1 e ΔT_2 è necessario conoscere le masse dei due corpi.

Si considerino due cubetti di ghiaccio, di massa m_1 e m_2 , con $m_2 > m_1$ alla temperatura di fusione. Indichiamo con Q_1 e Q_2 , rispettivamente, il calore che devono assorbire dall'ambiente per fondere completamente. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A $Q_1 < Q_2$;
- B Il calore latente del cubetto di massa m_1 è minore di quello del corpo di massa m_2 ;
- C Il calore latente del cubetto di massa m_1 è uguale al quello del corpo di massa m_2 ;
- D $Q_1 = Q_2$.

Secondo il modello di conduzione descritto dalla legge di Fourier, se consideriamo una parete omogenea che separa due zone a temperatura diversa e costante, il calore che fluisce nell'unità di tempo dalla zona a temperatura maggiore verso quella a temperatura minore risulta

- A direttamente proporzionale allo spessore della pareti;
- B inversamente proporzionale all'area della parete;
- C inversamente proporzionale alla differenza di temperatura fra le due zone;
- D direttamente proporzionale alla differenza di temperatura fra le due zone.

Problemi

Problema 7.1

Misurare il calore specifico c di un corpo di massa m viene utilizzato un calorimetro a ghiaccio, a temperatura nota T_0 , viene immerso in una miscela di acqua e ghiaccio alla temperatura T , l'immersione causa la fusione di una massa di ghiaccio m_0 , che comporta una variazione ΔV del volume della miscela. Si indichino con ρ e ρ_0 , rispettivamente, la densità di acqua e del ghiaccio e con L il calore latente di fusione.

Indicare se la variazione di volume ΔV è positiva o negativa. Misurare il calore specifico c in funzione dei parametri noti ρ, ρ_0, T_0, L e delle quantità misurate.

Problema 7.2

In una giornata d'inverno, una famiglia si reca presso la propria casa di montagna, da lungo tempo disabitata. La casa è fatta in pietra, ha una massa m e calore specifico c , e al suo interno la temperatura è esattamente uguale a quella esterna, T_e . Il proprietario vuole aumentare la temperatura interna e accende un impianto di riscaldamento che eroga una potenza costante P . Purtroppo la casa non è ben coibentata e vi è quindi una perdita di calore verso l'esterno, principalmente dovuta a conduzione attraverso i muri esterni che hanno una superficie S , spessore ℓ e conducibilità termica efficace k . Trascurando la capacità termica dell'aria dentro la casa, determinare:

- l'andamento nel tempo della temperatura interna;
- il massimo valore raggiungibile dalla temperatura interna.

Problema 7.3

Un blocco di ghiaccio di massa $M = 10 \text{ kg}$, alla temperatura $T_1 = -4^\circ\text{C}$, è posto in un recipiente a pareti adiabatiche contenente una massa $M' = 70 \text{ kg}$ di acqua alla temperatura $T_2 = 20^\circ\text{C}$.

- Calcolare il calore assorbito dal ghiaccio per portarsi alla temperatura di 0°C .
- Determinare la temperatura di equilibrio del sistema.
- Calcolare la temperatura di equilibrio e la composizione della miscela se la massa iniziale del ghiaccio è $M = 30 \text{ kg}$.

[Per il calore specifico del ghiaccio si usi il valore $c_g = 2100 \text{ J}/(\text{kg K})$, per quello dell'acqua il valore $c_a = 4190 \text{ J}/(\text{kg K})$ e, per il calore latente di fusione, il valore $L_f = 3.33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$].

Problema 7.4

Una pentola contenente una massa M di acqua (nota) e una massa m di ghiaccio (incognita), in equilibrio termico, è posta all'istante $t = 0$ su un fornelletto che fornisce una potenza piccola e costante. Si osserva che la temperatura della miscela rimane costante per un tempo t_1 , dopodiché aumenta linearmente nel tempo, in modo che all'istante $t_2 > t_1$ raggiunge il valore T_2 . Trascurando la capacità termica della pentola, si determini la massa iniziale di ghiaccio m in funzione delle quantità note. Si faccia quindi il calcolo esplicito con i valori numerici: $M = 10.0 \text{ kg}$, $t_1 = 3600 \text{ s}$, $t_2 = 5400 \text{ s}$, $T_2 = 4^\circ\text{C}$.

[Si usi per il calore specifico dell'acqua il valore $c_a = 4190 \text{ J}/(\text{kg K})$ e per il calore latente di fusione il valore $L_f = 3.33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$].

Problema 7.5

Un antico orologio meccanico ha un pendolo di ottone costituito da una barra sottile con un disco all'estremità inferiore, assimilabile a un pendolo semplice che può oscillare senza attrito. La posizione del disco può essere variata in modo da regolare il periodo dell'oscillazione e fare in modo che l'orologio sia il più possibile preciso. Si supponga che l'orologio sia stato regolato nei mesi invernali in modo che, quando la temperatura è pari a 15°C , il periodo di oscillazione sia esattamente pari a 1.00000 s . Supponendo che durante i mesi estivi la temperatura sia costante e uguale a 35°C , assumendo che $g = 9.81000 \text{ ms}^{-2}$ e sapendo che il coefficiente di dilatazione lineare per l'ottone vale $\lambda = 1.90 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, determinare:

- la variazione del periodo di oscillazione rispetto all'inverno;
- di quanto sbaglia l'orologio dopo una settimana.

Problema 7.6

Uno studente ha a disposizione due sbarrette omogenee di uguale lunghezza $l = 10 \text{ cm}$ e diametro $d = 2 \text{ cm}$, ma di materiali diversi. Una è fatta di alluminio e ha conducibilità termica

$k_{\text{Al}} = 238 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, e l'altra di rame, con conducibilità termica $k_{\text{Cu}} = 397 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$. Lo studente vuole usare le sbarrette per connettere due regioni a temperatura diversa (e costante nel tempo) $T_1 = 200^{\circ}\text{C}$ e $T_2 = 0^{\circ}\text{C}$, in modo tale che l'energia si trasferisca tra l'una e l'altra sotto forma di calore.

- Si calcoli la quantità di calore trasferita in 1 min attraverso le due sbarrette in parallelo (Figura 7.1a).
- Si calcoli il calore trasferito in 1 minuto attraverso le sbarrette in serie (Figura 7.1b) e la temperatura T^* del punto di giunzione.
- In quale delle due configurazioni il trasferimento di calore è maggiore?

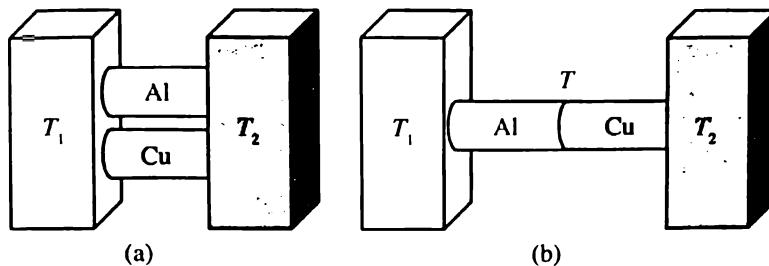


Figura 7.1

Problema 7.7

L'interno del cilindro cavo mostrato in Figura 7.2 è mantenuto alla temperatura T_a , mentre l'esterno è alla temperatura $T_b > T_a$. La conducibilità termica del materiale di cui è fatto il cilindro è k . Si ricavi la potenza che fluisce per conduzione attraverso la parete del cilindro nello stato stazionario, ignorando effetti di bordo (legati al fatto che il cilindro non ha lunghezza infinita).

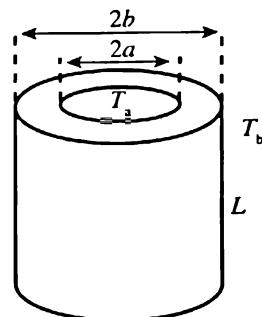


Figura 7.2

Problema 7.8

Due contenitori identici, a pareti adiabatiche, contengono uguali masse $m = 1 \text{ kg}$ di acqua, a due temperature diverse: $T_1 = 100^{\circ}\text{C}$ e $T_2 = 20^{\circ}\text{C}$. All'istante $t = 0$ una sbarretta di alluminio di sezione $A = 1 \text{ cm}^2$ e lunghezza $\ell = 10 \text{ cm}$ viene posta tra i due contenitori, in modo da permettere il passaggio di calore tra le due masse d'acqua. Ricordando che la conducibilità termica dell'alluminio è $k = 240 \text{ W/(m K)}$ e che il calore specifico dell'acqua (supposto indipendente dalla temperatura) è $c = 4186 \text{ J/(kg K)}$, determinare qual è la differenza di temperatura tra l'acqua contenuta nei due recipienti al tempo $t^* = 1000 \text{ s}$. Si trascuri la capacità termica della sbarretta.

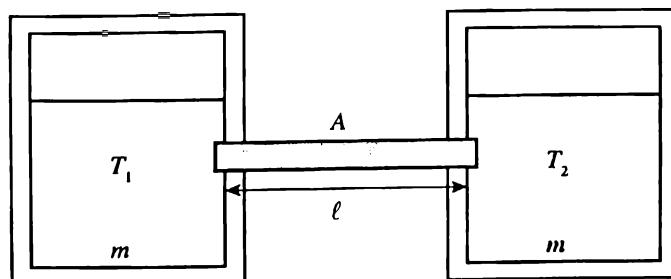
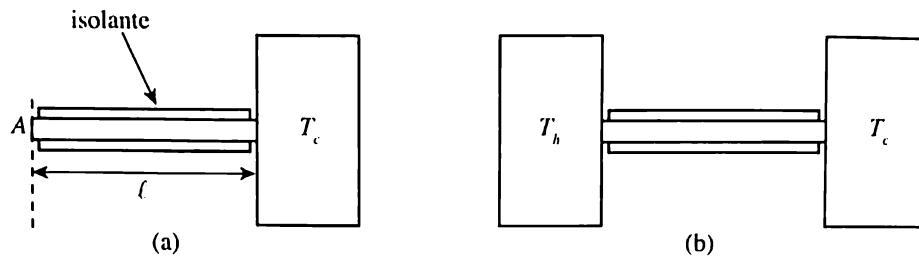


Figura 7.3

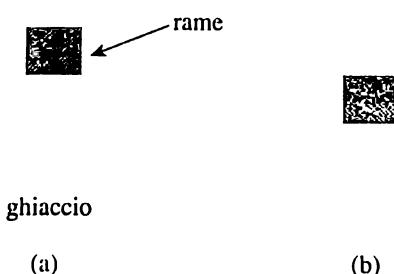
Problema 7.9

Una barra conduttrice omogenea di sezione S e lunghezza ℓ è rivestita di materiale isolante tranne che alle estremità. Essa è fatta di un materiale avente densità ρ , calore specifico c e conducibilità termica k . Inizialmente essa è posta con una delle estremità a contatto con una sorgente a temperatura T_c , ed è in equilibrio termico con tale sorgente (Figura 7.4a). A un certo istante, l'altra estremità viene posta in contatto con una sorgente a temperatura $T_h > T_c$ (Figura 7.4b). Negli istanti che seguono, la sbarra assorbe calore dalla sorgente calda e lo usa per portarsi in uno stato stazionario in cui la temperatura di ogni suo punto non varia più nel tempo; in queste condizioni, essa non assorbe più calore ma lo trasmette interamente per conduzione dalla sorgente calda a quella fredda.

- Detto x l'asse orizzontale parallelo alla sbarra, orientato verso destra e con origine nell'estremità sinistra, determinare la temperatura all'interno della sbarra in funzione di x , ossia la funzione $T(x)$ quando si è raggiunto lo stato stazionario.
- Determinare quanto calore viene assorbito dalla sbarra per portarsi nello stato stazionario.

**Figura 7.4****Problema 7.10**

Un cubetto di rame (densità $\rho_r = 8.92 \text{ g/cm}^3$, calore specifico $c_r = 0.385 \text{ J/(g K)}$) a temperatura T viene posto su blocco di ghiaccio (densità $\rho_g = 0.917 \text{ g/cm}^3$, calore latente di fusione $L_f = 333.5 \text{ J/g}$), come in Figura 7.5a. Esso si raffredda fino a $T_0 = 0^\circ \text{ C}$ fondendo del ghiaccio e affondandovi completamente, come in Figura 7.5b. Supponendo di poter trascurare gli scambi di calore con l'ambiente, si calcoli la temperatura T del cubetto di rame.

**Figura 7.5****Problema 7.11**

Un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$, che si trova inizialmente alla temperatura $T_C^0 = 300 \text{ K}$, viene investito per un tempo $\Delta t = 30 \text{ s}$ da un flusso di gas ideale di intensità $\phi = 0.03 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Il gas si trova alla temperatura $T_G^0 = 200 \text{ K}$ e alla pressione $p = 10^5 \text{ Pa}$. Dopo avere investito il corpo, il flusso di gas aumenta la propria temperatura al valore $T_G^1 = 250 \text{ K}$, mentre la pressione rimane costante. Calcolare:

- quale sarà la temperatura T_C^1 del corpo dopo l'interazione con il gas, sapendo che il calore specifico molare a pressione costante del gas è $c_p = 10 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e il calore specifico del corpo è $c = 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$;

- b) quanto vale il coefficiente di dilatazione volumica del gas, supposto costante nell'intervallo di temperatura considerato.

Problema 7.12

In una vasca, contenente una massa $m_A = 1 \text{ kg}$ di acqua a temperatura ambiente, viene inserito un cubo di ghiaccio di massa $m_G^0 = 10 \text{ g}$. Dopo un certo tempo, si osserva che il volume della parte del cubo di ghiaccio emersa dall'acqua si è ridotto del 50%: di quanto si è ridotta la temperatura dell'acqua nella vasca?

[Per il calore latente di fusione del ghiaccio e per il calore specifico dell'acqua si usino rispettivamente i valori $L_f = 3.33 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}$ e $c_A = 4190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$]

Problema 7.13

Una vaschetta di vetro di massa $m_V = 100 \text{ g}$ contiene una massa d'acqua $m_A = 200 \text{ g}$ e si trova in equilibrio termico con essa alla temperatura $T_{VA}^0 = 295 \text{ K}$. Nella vaschetta viene inserito un oggetto di rame di massa $m_R = 50 \text{ g}$ e, quando il sistema ha raggiunto l'equilibrio termico, si misura una temperatura finale $T_f = 300 \text{ K}$. Determinare la temperatura iniziale del corpo di rame, T_R^0 , supponendo che il sistema costituito dalla vaschetta, dall'acqua e dall'oggetto di rame sia termicamente isolato.

[Per i calori specifici di acqua, vetro e rame usare rispettivamente i valori: $c_A = 4190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c_V = 800 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c_R = 390 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$]

Problema 7.14

Un recipiente di vetro cilindrico, di volume $V_0 = 80 \text{ cm}^3$, contiene del liquido, che lo riempie completamente, in equilibrio termico con esso alla temperatura $T_0 = 310 \text{ K}$. Il sistema viene riscaldato molto lentamente, in modo da mantenersi sempre vicino all'equilibrio termico, fino alla temperatura $T_1 = 350 \text{ K}$: quanto liquido uscirà dal recipiente?

[Sia $\lambda = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ il coefficiente di dilatazione termica lineare del vetro e $\alpha = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ il coefficiente di dilatazione cubica del liquido]

Problema 7.15

Il calore specifico molare di una sostanza, espresso in $\text{J}/(\text{mol K})$ e misurato alla pressione atmosferica, nell'intervallo di temperatura fra T_1 e T_2 (espresso in K) varia secondo l'equazione empirica $c_p = -\alpha T^2 + \beta T - \gamma$, dove α , β e γ sono coefficienti (positivi) determinati sperimentalmente. Calcolare la quantità di calore Q necessaria per portare n moli della sostanza dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2 .

Svolgimenti

Problema 7.1

SVOLGIMENTO

► Indichiamo con V_i il volume della massa m_0 allo stato solido e con V_f quello allo stato liquido; evidentemente risulta $V_i = m_0/\rho_0$ e $V_f = m_0/\rho$. Di conseguenza la variazione di volume è

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{m_0}{\rho} - \frac{m_0}{\rho_0} = m_0 \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \rho} \right). \quad (7.11)$$

- a) Essendo, come noto, $\rho > \rho_0$, la variazione di volume è negativa. Dall'espressione precedente è possibile ottenere la massa incognita di ghiaccio fuso m_0 in funzione della quantità misurabile ΔV e dei parametri noti di densità:

$$m_0 = \Delta V \frac{\rho_0 \rho}{\rho_0 - \rho}. \quad (7.12)$$

- b) Il corpo alla temperatura iniziale T si raffredda fino alla temperatura T_0 , a contatto con la miscela calorimetrica; il calore ceduto fa fondere la massa m_0 di ghiaccio. Trascurando ogni dispersione, possiamo scrivere

$$cm(T_0 - T) + m_0 L = 0, \quad (7.13)$$

da cui si ricava

$$c = \frac{m_0 L}{m(T - T_0)}. \quad (7.14)$$

L'espressione del calore specifico, andando a sostituire il valore di m_0 ricavato nell'Equazione 7.12, risulta essere

$$c = \Delta V \frac{\rho_0 \rho}{\rho_0 - \rho} \frac{L}{m(T - T_0)}. \quad (7.15)$$

Quindi, misurando $m, T, \Delta V$ e usando i valori noti per densità, calore latente e temperatura di fusione, è possibile calcolare il calore specifico del corpo.

Problema 7.2

Svolgimento

- La potenza erogata dall'impianto di riscaldamento serve per aumentare la temperatura interna T , ma appena questa diventa maggiore di quella esterna nasce anche un flusso di calore verso l'esterno. Pertanto il bilancio energetico richiede che, in un tempo dt , il calore fornito dal riscaldamento sia uguale al calore assorbito dai muri, più il calore che fluisce verso l'esterno. In formula,

$$P = mc dt T + \frac{k S}{\ell} (T - T_e), \quad (7.16)$$

da cui si ottiene

$$mc dt T + \frac{k S}{\ell} T = P + \frac{k S}{\ell} T_e.$$

Dividendo tutto per mc si ottiene l'equazione differenziale di primo ordine a coefficienti costanti:

$$dt T + \frac{k S}{mc \ell} T = \frac{P}{mc} + \frac{k S}{mc \ell} T_e. \quad (7.17)$$

- a) La soluzione dell'Equazione 7.17 è la somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa. L'omogenea associata

$$dt T + \frac{k S}{\ell} T = 0$$

ammette come soluzione la funzione

$$T(t) = T_0 e^{-\lambda t} \quad \text{dove } \lambda = \frac{k S}{mc \ell}. \quad (7.18)$$

Come soluzione particolare dell'equazione completa si può scegliere una costante, in modo che la derivata prima sia zero; si ottiene pertanto

$$T^* = T_e + \frac{P \ell}{k S}. \quad (7.19)$$

La soluzione generale è quindi

$$T(t) = T_0 e^{-\lambda t} + T_e + \frac{P \ell}{k S}$$

e la costante T_0 si determina imponendo la condizione che $T(0) = T_e$, ottenendo $T_0 = -(P \ell)/(k S)$. Pertanto l'andamento nel tempo della temperatura interna alla casa è espresso dalla funzione

$$T(t) = T_e + \frac{P \ell}{k S} (1 - e^{-\gamma t}).$$

- b) L'equazione dice che la temperatura aumenta nel tempo con una legge esponenziale e, per $t \rightarrow \infty$ tende al valore di saturazione

$$T_{\text{sat}} = T_e + \frac{P \ell}{k S}$$

che corrisponde alla situazione in cui tutta la potenza erogata dall'impianto di riscaldamento è dissipata per conduzione verso l'esterno e la temperatura interna è stazionaria. Infatti

$$P = \frac{k S}{\ell} (T - T_e) \longrightarrow T = T_e + \frac{P \ell}{k S} = T_{\text{sat}}$$

Problema 7.3

S VOLGIMENTO

► Il blocco di ghiaccio assorberà calore dall'acqua, aumentando la propria temperatura fino a 0°C , dopodiché inizierà il processo di fusione, a temperatura costante, che continuerà fino a che tutto il ghiaccio sarà stato fuso, oppure l'acqua avrà raggiunto la temperatura del ghiaccio fondente.

- a) Sia $T^* = 0^\circ\text{C}$; il calore assorbito dal ghiaccio per portarsi a T^* è dato da

$$Q_1 = M c_g (T^* - T_1) = 10 \text{ kg} \times 2100 \text{ J}/(\text{kg K}) \times 4 \text{ K} = 84000 \text{ J}.$$

- b) Sia $M' = 70 \text{ kg}$ la massa dell'acqua inizialmente a T_2 . Per trovare la temperatura di equilibrio occorre impostare che la somma (algebrica) di tutti i calori scambiati sia zero. I calori da considerare sono: $Q_1 = M c_g (T^* - T_1)$ (positivo), $Q_2 = M L_f$ (positivo: calore di fusione), $Q_3 = M c_a (T_{\text{eq}} - T^*)$ (positivo: calore assorbito dall'acqua a 0°C per portarsi a T_{eq}), e $Q_4 = M' c_a (T_{\text{eq}} - T_2)$ (negativo: calore ceduto dall'acqua a 20°C per raffreddarsi fino a T_{eq}). Quindi

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 \rightarrow T_{\text{eq}} = \frac{M' c_a T_2 + M c_a T^* - M L_f - M c_g (T^* - T_1)}{(M + M') c_a}.$$

Poiché nell'espressione dei calori compaiono solo *differenze* tra temperature, il calcolo può essere fatto usando sia i gradi Celsius sia i kelvin come unità per le temperature. Siccome però questo non è sempre vero, è buona norma usare sempre la scala assoluta in kelvin e poi eventualmente riconvertire il risultato in gradi Celsius. Il risultato è $T_{\text{eq}} = 280.46 \text{ K} = 7.31^\circ\text{C}$.

- c) Se $M = 30 \text{ kg}$ l'equazione precedente (che è basata sull'assunto che tutto il ghiaccio fonda) dà $T_{\text{eq}} = 162.70 \text{ K} = -10.44^\circ\text{C}$, il che è chiaramente impossibile. Quindi è ovvio che il calore fornito dalla massa M' di acqua che si raffredda non è sufficiente per far fondere tutto il ghiaccio. Questo fatto ha due conseguenze:
- (i) la miscela finale è composta di ghiaccio e acqua in equilibrio alla temperatura $T^* = 0^\circ\text{C}$;
 - (ii) l'incognita è ora la massa $m < M$ di ghiaccio che fonde.

Pertanto i calori scambiati risultano i seguenti: $Q_1 = Mc_g(T^* - T_1)$ (positivo), $Q'_2 = mL_f$ (positivo), e $Q'_4 = M'c_a(T^* - T_2)$ (negativo). Non esiste l'analogo del calore Q_3 del punto (b) perché l'acqua di fusione resta a T^* e non si riscalda. Imponendo $Q_1 + Q'_2 + Q'_4 = 0$ si ottiene

$$m = \frac{M'c_aT_2 + Mc_gT_1 - (M'c_a + Mc_g)T^*}{L_f} = 16.86 \text{ kg}$$

Quindi la miscela è composta da una massa di acqua pari a $M' + m = 86.86 \text{ kg}$ in equilibrio a $T^* = 0^\circ\text{C}$ con una massa $M - m = 13.14 \text{ kg}$ di ghiaccio.

Problema 7.4

Svolgimento

► Poiché inizialmente l'acqua e il ghiaccio sono in equilibrio, la temperatura della miscela è $T_1 = 0^\circ\text{C}$; dato che durante il tempo t_1 tale temperatura non cambia, tutto il calore erogato dal fornello nel tempo t_1 serve per provocare il cambiamento di fase (fusione) della massa m di ghiaccio. Poiché la potenza è per definizione $P = \frac{dQ}{dt}$, si ha che

$$Q_1 = \int_0^{t_1} P dt = Pt_1 = mL_f.$$

Una volta che il ghiaccio è completamente fuso, il calore fornito dal fornello serve per aumentare la temperatura della massa totale ($m + M$) di acqua, pertanto

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} P dt = P(t_2 - t_1) = (m + M)c_a[T_2 - T_1].$$

Si ponga per brevità $\Delta T = T_2 - T_1$. Ricavando P dalla prima equazione e sostituendola nella seconda si ottiene

$$m = \frac{Mc_a\Delta T}{L_f \frac{t_2 - t_1}{t_1} - c_a\Delta T}.$$

Inserendo i valori numerici si ottiene $m = 1.12 \text{ kg}$.

Problema 7.5

Svolgimento

► Il pendolo può essere trattato come un pendolo semplice privo di attrito. È quindi possibile calcolare la sua lunghezza dato il periodo τ poiché $\tau = 2\pi \sqrt{L/g}$. Nei mesi invernali la lunghezza del pendolo è quindi $L_i = g\tau_i^2/(4\pi^2) = 0.248490 \text{ m}$.

- a) Sia T_i la temperatura invernale e T_e quella estiva. La variazione di temperatura rispetto alle condizioni in cui il pendolo è tarato ($T_e - T_i = 20^\circ\text{C}$) provoca ovviamente un allungamento del pendolo, la cui lunghezza nei mesi estivi, L_e , sarà data dall'Equazione 7.3. Pertanto:

$$L_e = L_i[1 + \lambda(T_e - T_i)] = [0.248490 \text{ m} \times (1 + 1.90 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \times 20 \text{ K})] = 0.248585 \text{ m}.$$

Di conseguenza, il periodo durante i mesi estivi è

$$\tau_e = 2\pi \sqrt{\frac{L_e}{g}} = 1.00019 \text{ s}.$$

La variazione del periodo rispetto al valore che esso assume nei mesi invernali è dunque

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_i} = \frac{\tau_e - \tau_i}{\tau_i} = 0.00019,$$

ossia pari allo 0.019%.

- b) Una settimana equivale a un tempo $t = 86400 \times 7 = 604800$ s. In tale tempo però il pendolo compie un numero di oscillazioni pari a $N = t/\tau_c = 604800/1.00019 = 604685.11$; questo è anche il numero di secondi segnati dall'orologio, che pertanto dopo una settimana di funzionamento sarà indietro, rispetto all'ora esatta, di $604800.00 - 604685.11 = 114.89$ s (ossia poco meno di 2 minuti).

Problema 7.6**SVOLGIMENTO**

► Per affrontare questo problema dobbiamo utilizzare la legge di Fourier per la conduzione termica.

- a) Quando le sbarrette sono in parallelo, ai capi di ciascuna vi è la stessa differenza di temperatura $T_1 - T_2$, per cui per ognuna di esse si può scrivere l'Equazione 7.10. Dato che le lunghezze e i diametri delle sbarrette sono uguali, l'unica cosa che cambia tra una sbarretta e l'altra è il valore della conducibilità termica. La quantità di calore che fluisce attraverso il parallelo è la somma dei contributi delle due sbarrette:

$$\begin{aligned}\frac{\delta Q^{\text{par}}}{dt} &= (k_{\text{Al}} + k_{\text{Cu}}) \frac{\pi(d/2)^2}{l} (T_1 - T_2) = \\ &= (238 + 397) \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} \cdot 3.14 \cdot \frac{10^{-4} \text{ m}^2}{10^{-1} \text{ m}} 200^\circ\text{C} \simeq \\ &\simeq 399.0 \text{ W}\end{aligned}\quad (7.20)$$

Il risultato dell'Equazione 7.20 significa che il parallelo delle due sbarrette equivale a una singola sbarretta di lunghezza l e diametro d ma con capacità termica

$$k_{\text{par}} = k_{\text{Al}} + k_{\text{Cu}} = 635 \text{ W/m}^\circ\text{C}.$$

Il calore trasferito nel tempo $t^* = 1$ min attraverso il parallelo delle due sbarrette è dunque

$$Q^{\text{par}} = \int_0^{t^*} \frac{\delta Q^{\text{par}}}{dt'} dt' = \frac{\delta Q^{\text{par}}}{dt} t^* = 60 \text{ s} \times 399.0 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 23940 \text{ J}.$$

- b) Quando le sbarrette sono in serie, e una volta raggiunto il regime stazionario, il flusso di calore attraverso la prima deve essere uguale al flusso di calore attraverso la seconda. Se T^* è la temperatura del punto di giunzione, si ha quindi:

$$\frac{\delta Q^{\text{ser}}}{dt} = k_{\text{Al}} \frac{\pi(d/2)^2}{l} (T^* - T_1) = k_{\text{Cu}} \frac{\pi(d/2)^2}{l} (T_2 - T^*) \quad (7.21)$$

da cui si ricava

$$T^* = \frac{k_{\text{Al}} T_1 + k_{\text{Cu}} T_2}{k_{\text{Al}} + k_{\text{Cu}}} \simeq 75.0^\circ \quad (7.22)$$

che quindi è la media pesata delle due temperature, ove i pesi sono le conducibilità termiche delle sbarrette. Sostituendo l'espressione 7.22 per T^* nell'Equazione 7.21 si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\delta Q^{\text{ser}}}{dt} &= k_{\text{Al}} \frac{\pi(d/2)^2}{l} \left(\frac{k_{\text{Al}} T_1 + k_{\text{Cu}} T_2}{k_{\text{Al}} + k_{\text{Cu}}} - T_1 \right) = \\ &= \frac{k_{\text{Al}} k_{\text{Cu}}}{k_{\text{Al}} + k_{\text{Cu}}} \frac{\pi(d/2)^2}{l} (T_2 - T_1) \simeq 93.5 \text{ W}.\end{aligned}\quad (7.23)$$

Questo risultato significa che la serie delle due sbarrette equivale a una singola sbarretta di lunghezza l e diametro d ma con capacità termica

$$k_{\text{ser}} = \frac{k_{\text{Al}} k_{\text{Cu}}}{k_{\text{Al}} + k_{\text{Cu}}} = 148.8 \text{ W/m}^\circ\text{C}.$$

In conclusione, nel tempo $t^* = 1 \text{ min}$ attraverso la serie delle due sbarrette fluisce una quantità di calore

$$Q^{\text{scr}} = \int_0^{t^*} \frac{\delta Q}{dt'} dt' = \frac{\delta Q}{dt} t^* = 60 \text{ s} \times 93.4 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 5604 \text{ J}.$$

- c) Dai calcoli precedenti risulta chiaramente che lo scambio di calore è maggiore nel caso di figura 7.1a, ossia quando le due sbarrette sono poste in parallelo, perché in tal caso vi sono due canali indipendenti per il trasferimento di calore.

Problema 7.7

Svolgimento

► Si consideri una superficie cilindrica (isoterma) di raggio r ($a < r < b$) e altezza L , all'interno della parete del cilindro. Sia dS un elemento di tale superficie; il versore normale a dS è $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_r$ dove \mathbf{u}_r è uno dei versori (quello radiale) della base cilindrica. Secondo la legge di Fourier, il calore che fluisce attraverso dS nell'unità di tempo è pari a

$$\left(\frac{\delta Q}{dt} \right)_{dS} = -k dS \nabla T \cdot \mathbf{u}_n = -k dS \frac{dT}{dr} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = -k dS \frac{dT}{dr}$$

dove si è sfruttato il fatto che il gradiente di temperatura è diretto radialmente ed è orientato verso l'esterno perché $T_b > T_a$, e quindi

$$\nabla T = \frac{dT}{dr} \mathbf{u}_r.$$

Integrando su tutta la superficie del cilindro si ottiene

$$\left(\frac{\delta Q}{dt} \right)_S = -k S \frac{dT}{dr} = -2\pi r L k \frac{dT}{dr} \quad (7.24)$$

Ora, il cilindro a parete spessa (di raggio interno a e raggio esterno b) può essere immaginato come una serie di infiniti cilindri concentrici di raggio r e spessore dr . La potenza che fluisce attraverso ognuno di tali cilindri deve essere sempre la stessa, perché assumiamo di essere nello stato stazionario in cui la parete del cilindro ha una temperatura costante nel tempo e quindi non assorbe calore, ma lo trasmette soltanto. Pertanto $(\delta Q/dt)_S$ deve essere indipendente da r . In altre parole

$$r \frac{dT}{dr} = c \quad \text{ossia} \quad dT = \frac{c}{r} dr \quad (7.25)$$

con $c = \text{costante}$. Dalla 7.25 si ottiene l'equazione differenziale da cui si può ottenere la dipendenza di T da r ossia la funzione che descrive come varia la temperatura in funzione del raggio. Integrando sul raggio da a a b si ottiene intanto:

$$\int_{T_a}^{T_b} dT = \int_a^b \frac{c}{r'} dr' \quad \rightarrow \quad (T_b - T_a) = c \ln \left(\frac{b}{a} \right), \quad (7.26)$$

da cui

$$c = \frac{(T_b - T_a)}{\ln(b/a)} \quad \text{e quindi} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} \frac{(T_b - T_a)}{\ln(b/a)}.$$

La potenza che fluisce attraverso il cilindro allora è data dalla 7.24, nella quale si può a questo punto sostituire a dT/dr la sua espressione appena trovata. Si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta Q}{dt} \right| &= 2\pi r L k \frac{1}{r} \frac{(T_b - T_a)}{\ln(b/a)} = \\ &= 2\pi L k \frac{(T_b - T_a)}{\ln(b/a)}. \end{aligned}$$

Problema 7.8**SVOLGIMENTO**

► Dall'istante in cui le due masse d'acqua sono poste in contatto attraverso il ponticello di alluminio, avviene un trasferimento di calore, per conduzione, dall'acqua più calda verso quella più fredda. A causa di tale trasferimento di calore, le temperature delle due masse d'acqua cambiano nel tempo. Siano $T_h(t)$ la temperatura dell'acqua più calda, che dipende dal tempo e all'istante $t = 0$ vale T_1 , e $T_c(t)$ la temperatura dell'acqua più fredda, tale che $T_c(t = 0) = T_2$. Nelle ipotesi del problema possiamo trascurare l'assorbimento di calore da parte della barretta. Pertanto, in un certo istante t , il calore assorbito nell'unità di tempo dall'acqua a T_c deve essere uguale al calore trasportato per conduzione attraverso la sbarretta, e anche (in valore assoluto) al calore ceduto dall'acqua a T_h . Pertanto scriviamo le seguenti equazioni:

$$m c dt T_c = k \frac{A}{\ell} (T_h - T_c) \quad (7.27)$$

$$m c dt T_h = -k \frac{A}{\ell} (T_h - T_c) . \quad (7.28)$$

Per risolvere il problema occorre determinare la dipendenza dal tempo della differenza di temperatura $T_h - T_c$. Sottraendo le due equazioni membro a membro, si ottiene

$$m c dt (T_h - T_c) = -2k \frac{A}{\ell} (T_h - T_c), \quad (7.29)$$

che è un'equazione differenziale nella grandezza $T_h - T_c$. Ponendo per semplicità di notazione $\xi = (T_h - T_c)$ e

$$\gamma = 2 \frac{kA}{mc\ell} = 1.14 \cdot 10^{-4} s^{-1}, \quad (7.30)$$

essa assume la forma

$$dt \xi = -\gamma \xi . \quad (7.31)$$

La soluzione generale, che si può ottenere separando le variabili, è

$$\xi(t) = \xi_0 e^{-\gamma t} . \quad (7.32)$$

Il valore della costante ξ_0 è determinato imponendo la condizione iniziale $\xi(t = 0) = T_1 - T_2$, che implica ovviamente $\xi_0 = (T_1 - T_2)$. Quindi per $t = t^*$ si ottiene la differenza di temperatura richiesta:

$$\xi(t^*) = (T_1 - T_2) e^{-\gamma t^*} \simeq 71.4^\circ C .$$

Problema 7.9**SVOLGIMENTO**

► Nello stato stazionario, la sbarra trasferisce calore per conduzione, ma non ne assorbe più per scaldarsi. Inoltre, grazie al rivestimento isolante, non trasferisce calore all'ambiente circostante ma solo da una sorgente all'altra. Pertanto vale la legge di Fourier per la conduzione.

- a) Poiché il problema è unidimensionale, possiamo scrivere l'equazione nella forma 7.9, integrando sull'area della sezione, grazie al fatto che la sbarra è omogenea e ha sezione costante:

$$\frac{\delta Q}{dt} = -k S \frac{dT}{dx} . \quad (7.33)$$

Si ricordi che $\delta Q/dt$ è il calore che fluisce attraverso la generica sezione S della sbarra, indipendentemente dal punto in cui tale sezione si trova, ossia indipendentemente da x . Pertanto,

la quantità $\delta Q/dx$ non dipende da x . In virtù dell'uguaglianza 7.33, anche dT/dx non deve dipendere da x . Questo significa che la temperatura è necessariamente una funzione lineare di x :

$$\frac{dT}{dx} = C \quad \longrightarrow T(x) = cx + d$$

Le costanti c e d si determinano imponendo che $T(0) = T_h$ e $T(\ell) = T_c$, da cui segue che

$$T(x) = T_h - \frac{T_h - T_c}{\ell} x. \quad (7.34)$$

- b) Inizialmente, la temperatura in ogni punto della sbarra è T_c . Nello stato finale, la temperatura della sbarra dipende da x ed è data dalla 7.34. Pertanto, l'elemento di massa $dm = \rho S dx$ che si trova tra x e $x + dx$ deve assorbire un calore

$$\delta Q(x) = dm c \int_{T_c}^{T(x)} dT = \rho S c [T(x) - T_c] dx. \quad (7.35)$$

Il calore totale che la sbarra deve assorbire è l'integrale di $\delta Q(x)$ su tutta la lunghezza della sbarra stessa, cioè:

$$Q = \rho S c \int_0^\ell [T(x) - T_c] dx = \rho S c \int_0^\ell \left[T_h - \frac{T_h - T_c}{\ell} x - T_c \right] dx. \quad (7.36)$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\begin{aligned} Q &= \rho S c [T_h - T_c] \ell - \frac{T_h - T_c}{\ell} \int_0^\ell x dx = \\ &= \rho S c [T_h - T_c] \ell - \frac{T_h - T_c}{\ell} \frac{\ell^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \rho S c [T_h - T_c] \ell = \\ &= \frac{1}{2} m c [T_h - T_c]. \end{aligned}$$

Problema 7.10

SVOLGIMENTO

► Il calore fornito dal cubetto di rame viene speso per fondere un uguale volume di ghiaccio; pertanto, indicando con V tale volume, la massa del cubetto di rame è $m_r = \rho_r V$ e quella del ghiaccio che viene fuso è $m_g = \rho_g V$. Il calore ceduto dal cubetto di rame, che si raffredda dalla temperatura T a T_0 , è dato da

$$Q_r = m_r c_r (T_0 - T) = \rho_r V c_r (T_0 - T). \quad (7.37)$$

Il calore necessario per fondere una massa m_g di ghiaccio è

$$Q_g = m_g L_f = \rho_g V L_f. \quad (7.38)$$

Potendo trascurare gli scambi di calore con l'ambiente, risulta $Q_r + Q_g = 0$; da cui, tenendo conto delle Equazioni 7.37 e 7.38 si ricava l'espressione della temperatura T :

$$T = T_0 + \frac{\rho_g L_f}{\rho_r c_r}. \quad (7.39)$$

Andando a sostituire i valori numerici, si trova $T = 89^\circ$.

Problema 7.11**SVOLGIMENTO**

► Il gas, fluendo sulla superficie del corpo, assorbe calore da esso, aumentando la propria temperatura.

- a) Sia Q_C il calore scambiato dal corpo, quando la sua temperatura diminuisce da T_C^0 a T_C^1 , e Q_G il calore scambiato dal gas, quando la sua temperatura aumenta da T_G^0 a T_G^1 . Assumendo che il sistema formato dal corpo e dal gas sia termicamente isolato, deve essere

$$Q_C + Q_G = 0. \quad (7.40)$$

Poiché si conosce il calore specifico (per unità di massa) del corpo, Q_C può essere espresso da

$$Q_C = m c (T_C^1 - T_C^0) < 0$$

mentre il calore scambiato dal gas deve essere espresso usando il calore specifico molare a pressione costante, c_p , ossia:

$$Q_G = n c_p (T_G^1 - T_G^0) > 0.$$

Qui, n è il numero di moli di gas che interagiscono con il corpo. Questa grandezza è incognita, però è facile calcolare il corrispondente volume:

$$V_G^0 = \phi \Delta t,$$

e da questo risalire al numero di moli facendo uso dell'equazione di stato dei gas ideali, che lega fra loro la pressione, il volume e la temperatura di un gas in uno stato di equilibrio: $pV = nRT$, con $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol K})$. Nel caso in esame, utilizzando il volume del gas e la sua temperatura *prima* dell'interazione con il corpo, si ottiene:

$$n = \frac{p V_G^0}{R T_G^0} = \frac{p \phi \Delta t}{R T_G^0}. \quad (7.41)$$

Il calore scambiato dal gas risulta pertanto

$$Q_G = \frac{p \phi \Delta t}{R T_G^0} c_p (T_G^1 - T_G^0).$$

L'equazione del bilancio energetico 7.40 si scrive quindi

$$m c (T_C^1 - T_C^0) + \frac{p \phi \Delta t}{R T_G^0} c_p (T_G^1 - T_G^0) = 0,$$

da cui possiamo ricavare T_C^1 :

$$\begin{aligned} T_C^1 &= T_C^0 - \frac{p \phi \Delta t}{m c} \frac{c_p}{R} \frac{T_G^1 - T_G^0}{T_G^0} = \\ &= 300 \text{ K} - \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \cdot 30 \text{ s}}{1 \text{ kg} \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \frac{10 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}}{8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}} \frac{250 \text{ K} - 200 \text{ K}}{200 \text{ K}} \cong \\ &\cong 300 \text{ K} - 27.1 \text{ K} = \\ &= 272.9 \text{ K}. \end{aligned}$$

- b) Per determinare il coefficiente di dilatazione volumica del gas, occorre prima trovare il volume del gas quando esso si trova alla temperatura T_G^1 . Per fare ciò, si può scrivere nuovamente l'equazione di stato dei gas ideali, usando però la temperatura finale:

$$pV_G^1 = nRT_G^1$$

e sostituendo a n la sua espressione 7.41. Ricordando che $\phi t = V_G^0$, si ottiene

$$V_G^1 = \frac{p \phi \Delta t}{R T_G^0} \frac{R}{p} T_G^1 = \frac{T_G^1}{T_G^0} V_G^0 = \frac{250}{200} V_G^0 = 1.25 V_G^0. \quad (7.42)$$

Scriviamo ora la legge della dilatazione volumica:

$$V_G^1 = V_G^0(1 + \alpha \Delta T), \quad (7.43)$$

dove abbiamo chiamato α il coefficiente da determinare. Dal confronto fra le Equazioni 7.42 e 7.43 si vede che

$$1 + \alpha \Delta T = 1.25,$$

da cui $\alpha \Delta T = 0.25$ e quindi

$$\alpha = 0.005 \text{ K}^{-1}.$$

Problema 7.12 SVOLGIMENTO

► Quando il cubo di ghiaccio viene immerso, l'acqua incomincia a cedere ad esso calore, che viene utilizzato per fondere parte del ghiaccio. La quantità di ghiaccio che è stata fusa può essere ricavata dalla riduzione della parte emersa; infatti il volume emerso è una frazione costante del volume totale, come si può verificare considerando la condizione di equilibrio statico tra la forza peso e la spinta di Archimede:

$$\rho_G V_G g = \rho_A V_G^{\text{imm}} g,$$

dove ρ_G e ρ_A sono le densità di ghiaccio e acqua rispettivamente, e V^{imm} il volume della parte immersa. Da qui si ottiene

$$\frac{\rho_G}{\rho_A} = \frac{V_G^{\text{imm}}}{V_G}. \quad (7.44)$$

Dall'Equazione 7.44 si evince che la frazione di volume immerso nell'acqua (e quindi anche quella di volume emerso) dipende solo dal rapporto tra le densità di acqua e ghiaccio. Se il volume emerso si è ridotto del 50%, anche il volume totale del cubetto si deve essere ridotto del 50% e lo stesso discorso vale per la massa di ghiaccio.

Pertanto, il calore assorbito durante la fusione di una massa $m_G^0/2$ di ghiaccio è dato dall'espressione:

$$Q_G^{\text{ass}} = \frac{1}{2} m_G^0 L_f. \quad (7.45)$$

D'altra parte, il calore ceduto dalla massa d'acqua è pari a

$$Q_A^{\text{ced}} = m_A c_A \Delta T_A, \quad (7.46)$$

dove ΔT_A è la variazione di temperatura dell'acqua, ovviamente negativa, che si può quindi ottenere imponendo $Q_G^{\text{ass}} + Q_A^{\text{ced}} = 0$:

$$\Delta T_A = -\frac{m_G^0 L_f}{2 m_A c_A} = -\frac{10^{-2} \text{ kg} \cdot 3.33 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}}{2 \cdot 4190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 1 \text{ kg}} \simeq -0.4 \text{ K}.$$

Problema 7.13**SVOLGIMENTO**

► Il calore scambiato dal corpo di rame, tra il momento in cui viene inserito nella vaschetta e quello in cui raggiunge l'equilibrio termico, è dato da:

$$Q_R = m_R c_R \left(T_f - T_R^0 \right),$$

(negativo in quanto si tratta di calore ceduto). Le due quantità di calore scambiate dall'acqua e dalla vaschetta nello stesso intervallo di tempo sono:

$$Q_A = m_A c_A \left(T_f - T_{VA}^0 \right)$$

e

$$Q_V = m_V c_V \left(T_f - T_{VA}^0 \right).$$

Poiché il sistema è isolato, dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$Q_A + Q_V + Q_R = 0,$$

ossia

$$m_A c_A \left(T_f - T_{VA}^0 \right) + m_V c_V \left(T_f - T_{VA}^0 \right) + m_R c_R \left(T_f - T_R^0 \right) = 0,$$

che si può anche scrivere come

$$(m_A c_A + m_V c_V + m_R c_R) T_f - (m_A c_A + m_V c_V) T_{VA}^0 = m_R c_R T_R^0$$

da cui si ricava la temperatura iniziale del corpo in rame

$$T_R^0 = \frac{(m_A c_A + m_V c_V + m_R c_R) T_f - (m_A c_A + m_V c_V) T_{VA}^0}{m_R c_R} \simeq 535 \text{ K}.$$

Problema 7.14**SVOLGIMENTO**

► All'inizio del riscaldamento, secondo la descrizione fornita dal testo, il liquido riempie completamente il cilindro di vetro; pertanto il suo volume è pari al volume interno del contenitore V_0 . Durante il riscaldamento del sistema, sia il liquido che il recipiente si espandono, aumentando i rispettivi volumi; tuttavia l'aumento di volume del liquido è maggiore dell'aumento di volume interno del contenitore. La quantità di liquido fuoriuscito alla fine del riscaldamento potrà essere considerata pari alla differenza tra i volumi finali del liquido e del recipiente.

Per prima cosa calcoliamo il volume finale del liquido, V_L , utilizzando la legge della dilatazione volumica:

$$V_L = V_0 (1 + \alpha \Delta T), \quad (7.47)$$

dove $\Delta T = T_1 - T_0$ è la variazione di temperatura durante il processo di riscaldamento.

Per quanto riguarda il recipiente cilindrico, occorre determinare la variazione del volume interno. Siano R_0 e h_0 i valori iniziali del raggio e dell'altezza del volume interno. Dopo il riscaldamento, entrambe queste lunghezze saranno aumentate assumendo i valori finali:

$$R_1 = R_0 (1 + \lambda \Delta T),$$

$$h_1 = h_0 (1 + \lambda \Delta T).$$

Il volume interno finale del cilindro sarà pari a

$$V_C = \pi(R_1)^2 h_1 = \pi(R_0)^2 h_0 (1 + \lambda \Delta T)^3 = V_0 (1 + \lambda \Delta T)^3. \quad (7.48)$$

Poiché $\lambda \Delta T$ è molto minore dell'unità, è possibile espandere il cubo del binomio in serie di potenze, approssimando il risultato al primo ordine in $\lambda \Delta T$:

$$V_C \simeq V_0 (1 + 3 \lambda \Delta T). \quad (7.49)$$

Il volume di liquido fuoriuscito si può ora ottenere dalla differenza tra i volumi finali del liquido e del recipiente, dati rispettivamente dalle Equazioni 7.47 e 7.49:

$$\Delta V \simeq V_L - V_C = V_0 (\alpha - 3 \lambda) \Delta T \simeq 3 \text{ cm}^3.$$

Problema 7.15

Svolgimento

- La quantità di calore Q assorbita da n moli di una sostanza, quando la sua temperatura varia da T_1 a T_2 a pressione costante, è data dalla formula:

$$Q = n \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT. \quad (7.50)$$

Nel caso in esame,

$$Q = n \int_{T_1}^{T_2} (-\alpha T^2 + \beta T - \gamma) dT = n \left[-\frac{\alpha}{3} (T_2^3 - T_1^3) + \frac{\beta}{2} (T_2^2 - T_1^2) - \gamma (T_2 - T_1) \right].$$

Termodinamica: primo principio

Richiami di teoria

Variabili termodinamiche ed equazione di stato

Lo stato di un *sistema termodinamico* è descritto da un insieme di grandezze fisiche, dette *variabili termodinamiche*. Nel caso più semplice dei *sistemi idrostatici* – gli unici considerati in questo capitolo – le grandezze utili per essere usate come variabili termodinamiche sono la *pressione* (p), il *volume* (V) e la *temperatura assoluta* (T). Se il sistema è in equilibrio termodinamico queste tre grandezze sono costanti nel tempo e sono legate tra loro da una relazione del tipo $f(p, V, T) = 0$, che prende il nome di *equazione di stato*; pertanto solo due di esse sono indipendenti.

Ogni stato di *equilibrio* di un sistema idrostatico può essere quindi, per esempio, rappresentato da una coppia di valori (pressione, volume) – cioè da un punto nello spazio termodinamico bidimensionale (p, V), detto *piano di Watt-Clapeyron* – mentre il corrispondente valore della temperatura può essere determinato dall'equazione di stato. Il sistema idrostatico più semplice è il *gas perfetto*, o *ideale*; la sua equazione di stato, detta *equazione dei gas perfetti*, è

$$pV - nRT = 0$$

dove n è il numero di moli di gas e R è una costante, detta *costante dei gas perfetti*, il cui valore è $R = 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Trasformazioni termodinamiche

Per effetto dell'interazione con l'*ambiente*, un sistema inizialmente in uno stato di equilibrio può passare da tale stato a un altro attraverso una *trasformazione termodinamica*. In particolare, se la trasformazione è *quasi-statica*, ossia è costituita da una sequenza di stati di equilibrio, può essere rappresentata come una linea continua nel piano di Watt-Clapeyron. Esistono alcuni tipi di trasformazioni particolarmente importanti, nelle quali rimane costante una delle tre variabili (p, V, T): esse sono chiamate *isocore* se V è costante, *isobare* se p è costante e *isoterme* se T è costante.

Un *ciclo termodinamico* è costituito da una successione di trasformazioni, alla fine delle quali il sistema si trova nello stesso stato (e quindi nello stesso punto del piano di Watt-Clapeyron) da cui era partito.

Primo principio della termodinamica

Durante una trasformazione termodinamica, un sistema può scambiare energia sotto forma di calore o sotto forma di lavoro. Si ricordi che, per convenzione, il calore è con-

siderato positivo se è assorbito dal sistema (ossia se equivale a energia entrante nel sistema) e negativo se è ceduto dal sistema all'ambiente. Per un'analogia convenzione, il lavoro si considera positivo se è compiuto dal sistema sull'ambiente (ossia se equivale a un'energia uscente dal sistema), e negativo se è compiuto dall'ambiente sul sistema.

Se in una trasformazione termodinamica il sistema assorbe più energia di quanta ne ceda all'ambiente, significa che una parte dell'energia assorbita resta immagazzinata nel sistema stesso (tipicamente, sotto forma di energia cinetica dei costituenti ed energia potenziale delle interazioni tra essi). Tale energia "immagazzinata" nel sistema prende il nome di *energia interna* U .

Il *Primo Principio della Termodinamica* nella sua forma *differenziale* afferma che, considerata una trasformazione infinitesima del sistema, la differenza tra il calore scambiato (δQ) e il lavoro compiuto (δL) è uguale alla variazione dell'energia interna U del sistema:

$$dU = \delta Q - \delta L, \quad (8.1)$$

dove δQ è il calore infinitesimo scambiato dal sistema e δL è il lavoro infinitesimo trasferito tra sistema e ambiente.¹ Nel caso di un sistema idrostatico, il lavoro è positivo se le forze di pressione compiono un lavoro positivo, ossia se il volume del sistema aumenta (ed è negativo se il volume diminuisce). Per una variazione infinitesima dV del volume del sistema, il lavoro si può sempre scrivere

$$\delta L = p_{\text{ext}} dV, \quad (8.2)$$

dove p_{ext} è la pressione dell'ambiente; nel caso delle trasformazioni quasi-statiche, la pressione esterna è sempre uguale alla pressione del sistema ($p = p_{\text{ext}}$), per cui il lavoro elementare si può scrivere $\delta L = pdV$.

Per una trasformazione finita tra uno stato iniziale A di coordinate termodinamiche (p_A, V_A, T_A) e uno stato finale B di coordinate (p_B, V_B, T_B), l'Equazione 8.1 diventa

$$\Delta U = U_B - U_A = Q - L, \quad (8.3)$$

dove Q e L rappresentano rispettivamente il calore e il lavoro complessivamente scambiati tra sistema e ambiente durante tutta la trasformazione. Questa è la forma *integrale* del primo principio della termodinamica.

Relazioni notevoli per i gas perfetti

I gas perfetti sono costituiti da molecole non interagenti, per cui l'energia interna U è uguale alla somma delle energie cinetiche delle molecole e dipende soltanto dalla temperatura: $U = U(T)$. La variazione infinitesima di energia interna durante una qualsiasi trasformazione quasi-statica può essere espressa come

$$dU = n c_V dT$$

¹ Si ricordi che dU è un differenziale esatto: la variazione ΔU di energia interna che si ha durante una trasformazione finita tra due stati A e B dipende soltanto dai valori delle variabili termodinamiche in questi due stati. Al contrario, δQ e δL non sono differenziali esatti: il calore e il lavoro trasferiti tra sistema e ambiente durante una trasformazione termodinamica, infatti, non dipendono soltanto dagli stati iniziale e finale, ma in generale anche da quale percorso la trasformazione ha seguito per congiungerli nello spazio termodinamico.

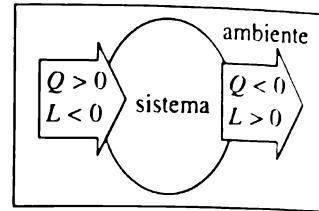


Figura 8.1

dove c_V rappresenta il calore specifico *molare* a volume costante del gas. Pertanto, per un gas perfetto che descrive una trasformazione quasi-statica, le Equazioni 8.1 e 8.3 diventano, rispettivamente,

$$n c_V dT = \delta Q - p dV, \quad (8.4)$$

$$n c_V (T_B - T_A) = Q - \int_{V_A}^{V_B} p(V, T) dV. \quad (8.5)$$

È importante notare che le espressioni esplicite di δQ e Q non possono essere scritte in modo generale, poiché dipendono dal tipo di trasformazione eseguita. Per i gas ideali vale inoltre la *relazione di Mayer* tra il calore specifico molare a pressione costante (c_p), quello a volume costante (c_V) e la costante R :

$$c_p - c_V = R. \quad (8.6)$$

In particolare:

- per gas perfetti monoatomici: $c_V = \frac{3}{2}R$, $c_p = \frac{5}{2}R$, $\gamma \equiv \frac{c_p}{c_V} = 1.66$;
- per gas perfetti biatomici: $c_V = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$, $\gamma = 1.4$.

Negli esercizi si incontrano spesso trasformazioni particolari dei gas perfetti in cui le espressioni generali per il lavoro (Equazione 8.2) e il calore (e quindi anche l'espressione del primo principio) assumono forme specifiche:

Isobare. In una trasformazione isobara si ha $p = \text{costante}$, da cui segue la relazione: $T/V = \text{costante}$. Nel piano (p, V) l'isobara è rappresentata da un tratto di retta orizzontale.

- Per una isobara infinitesima: $dU = n c_V dT$, $\delta L = p dV$, $\delta Q = n c_p dT$;
 - per una isobara finita da A a B: $\Delta U = n c_V (T_B - T_A)$, $L = p (V_B - V_A)$,
- $$Q = n c_p (T_B - T_A) = \frac{c_p}{R} p (V_B - V_A).$$

Isocore. Per una trasformazione isocora si ha $V = \text{costante}$, da cui segue la relazione: $p/T = \text{costante}$. Nel piano (p, V) l'isocora è un tratto di retta verticale.

- Per una isocora infinitesima: $dU = n c_V dT$, $\delta L = 0$, $\delta Q = n c_V dT = dU$;
 - per una trasformazione finita da A a B: $\Delta U = n c_V (T_B - T_A)$, $L = 0$,
- $$Q = \Delta U = n c_V (T_B - T_A).$$

Isoterme. Per una trasformazione isoterma si ha $T = \text{costante}$. Se la trasformazione è anche quasi-statica, ciò equivale a dire che $pV = \text{costante}$ (legge di Boyle). Nel piano (p, V) tale isoterma è rappresentata da un ramo di iperbole equilatera.

- Per una isoterma infinitesima: $dU = 0$;
se è quasi-statica, $\delta L = \delta Q = nRT \frac{dV}{V}$;
- per una trasformazione finita da A a B: $\Delta U = 0$;
se è quasi-statica, $L = Q = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$.

Adiabatiche. Per una trasformazione adiabatica ($\delta Q = 0$) che sia quasi-statica, valgono le seguenti *relazioni di Poisson*:

$$pV^\gamma = \text{costante}; \quad TV^{\gamma-1} = \text{costante}; \quad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante}.$$

- Per una adiabatica infinitesima: $dU = nc_V dT = -\delta L$,
- per una trasformazione finita da A a B: $\Delta U = nc_V(T_B - T_A) = -L$.
- Il lavoro può anche essere scritto nella forma: $L = \frac{1}{\gamma - 1} (p_A V_A - p_B V_B)$.

TEST DI COMPRENSIONE

1. Un gas perfetto effettua una trasformazione quasi-statica, dallo stato iniziale A allo stato finale B, caratterizzati dalla medesima temperatura. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
 - La trasformazione è necessariamente isoterma;
 - Se il gas aumenta il suo volume esso cede calore all'ambiente;
 - Se il gas diminuisce il suo volume esso cede calore all'ambiente;
 - Sicuramente in questa trasformazione lo scambio di calore con l'ambiente è nullo.
2. Un gas perfetto effettua una trasformazione isobara; si indichi con ΔT la differenza di temperatura fra lo stato iniziale e quello finale e con n il numero di moli. Quale delle seguenti relazioni esprime la variazione di energia interna?
 - $\Delta U = c_V \Delta T$;
 - $\Delta U = nc_V \Delta T$;
 - $\Delta U = c_p \Delta T$;
 - $\Delta U = nc_p \Delta T$.
3. Si osserva che in una trasformazione un sistema termodinamico aumenta la sua energia interna U . Quali delle seguenti condizioni sul calore scambiato (Q) e sul lavoro compiuto (L), è sicuramente compatibile con l'aumento di energia interna, indipendentemente dai valori assoluti di Q e L ?
 - $Q < 0, L < 0$;
 - $Q > 0, L < 0$;
 - $Q < 0, L > 0$;
 - $Q > 0, L > 0$.
4. n moli di un gas perfetto descrivono una trasformazione isobara da uno stato A a uno stato B. Quale delle seguenti relazioni è vera?
 - $Q = nc_V (T_B - T_A)$;
 - $Q = nc_p (T_B - T_A)$;
 - $Q = \Delta U$;
 - $\Delta U = -L$.
5. n moli di un gas perfetto descrivono una trasformazione adiabatica da uno stato A a uno stato B. Quale delle seguenti relazioni è vera?
 - $p_A V_A^{\gamma-1} = p_B V_B^{\gamma-1}$;
 - $L = -nc_V (T_B - T_A)$;
 - $L = nc_V (T_B - T_A)$;
 - $\Delta U = 0$.

Problemi

Problema 8.1

Uno pneumatico, che si trova inizialmente alla temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$, viene gonfiato fino a una pressione pari al triplo di quella iniziale. Supponendo che il processo di pompaggio sia adiabatico e quasi-statico, determinare la temperatura finale a cui si troverà l'aria nello pneumatico gonfio. (Considerare l'aria come un gas perfetto biatomico, per cui $\gamma = c_p/c_V = 1.4$.)

Problema 8.2

Una mole di gas perfetto è confinata all'interno di un contenitore a pareti rigide, di volume V_A . Inizialmente il gas è alla pressione p_1 e alla temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$, dopodiché viene scaldato fino alla temperatura $T_2 = 400 \text{ K}$. Una volta raggiunta tale temperatura, viene aperta una valvola, tramite la quale il gas si espande lentamente e in modo isotermo, gonfiando un palloncino connesso alla valvola fino a quando quest'ultimo raggiunge un volume V_B . Sapendo che la pressione finale nel sistema costituito dal contenitore e dal palloncino gonfio è $p_3 = p_1/3$, calcolare il lavoro compiuto dal gas durante l'espansione isoterna.

Problema 8.3

Una certa quantità di gas si trova inizialmente alla temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$, racchiuso in un recipiente di volume $V_0 = 100 \text{ l}$ a una pressione $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Nel recipiente si trova un riscaldatore, che viene mantenuto alla temperatura costante $T_1 = 500 \text{ K}$. Dopo un tempo $\Delta t = 10 \text{ min}$, il gas raggiunge la temperatura T_1 . Calcolare la potenza P che è necessario fornire al riscaldatore per mantenere costante la sua temperatura mentre il gas si riscalda, sapendo che il calore specifico molare del gas è $c_V = 20 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Problema 8.4

Un contenitore ha pareti rigide e adiabatiche ed è chiuso da un pistone, anch'esso rigido e adiabatico, di massa trascurabile e superficie A , libero di scorrere senza attrito. Inizialmente esso contiene solo aria a temperatura ambiente; il sistema è all'equilibrio.

A un certo istante, all'interno del contenitore viene posto (con una procedura rapida che non compromette l'adiabaticità) un cubetto di massa m e volume trascurabile, inizialmente alla temperatura T_1 . Il cubetto è fatto di un materiale avente calore specifico c . Il sistema costituito dal cubetto e dall'aria raggiunge quindi l'equilibrio termico alla temperatura T_2 ; nel frattempo si osserva che il pistone si è alzato di h rispetto alla precedente condizione di equilibrio. La pressione atmosferica esterna mantiene sempre lo stesso valore p_{ext} durante l'intero processo. Calcolare il lavoro compiuto dall'aria durante l'espansione e la variazione di energia interna dell'aria.

Problema 8.5

Un gas perfetto monoatomico esegue il ciclo ABC in Figura 8.2, dove il processo AB è una trasformazione isoterna quasi-statica. Calcolare:

- il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione AB ;
- il calore assorbito dal gas durante il ciclo;
- il calore ceduto dal gas durante il ciclo e il rapporto tra il lavoro compiuto dal gas e il valore assoluto del calore assorbito durante un ciclo.

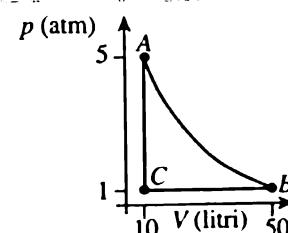


Figura 8.2

Problema 8.6

Un recipiente cilindrico, disposto verticalmente e avente sezione S , è chiuso nella sua parte superiore da un pistone di massa m , che può scorrere senza attrito. Il recipiente ha pareti perfettamente diatermiche ed è posto a contatto con una sorgente a temperatura costante T ; al suo interno si trovano n moli di gas perfetto monoatomico. La pressione esterna assume il valore p_0 , costante, e tutto è soggetto alla forza peso. Inizialmente il gas è in equilibrio; successivamente vengono aggiunti dei pesini al pistone, lentamente, in modo da triplicarne la massa.

- Determinare di quanto si abbassa il pistone, dopo che ha raggiunto un nuovo stato di equilibrio, con l'aggiunta dei pesini.
- Calcolare il calore scambiato dal gas, considerando reversibile la trasformazione descritta.

Problema 8.7

Due moli di un gas perfetto monoatomico effettuano una trasformazione termodinamica (quasi-statica) descritta dalla legge $p = cV$, dove c è una costante. La temperatura iniziale del gas è nota e pari a T_i , mentre il volume finale è un terzo di quello iniziale.

- Qual è il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione?
- Quanto vale il calore specifico molare del gas per questa trasformazione?

Problema 8.8

Un recipiente, adiabaticamente isolato dall'ambiente, è chiuso in alto da un pistone mobile, anch'esso isolante, che può scorrere senza attrito con le pareti. Nel recipiente vi sono n moli di un gas ideale e un corpo di volume costante, in contatto termico con il gas e la cui capacità termica è C . Il gas descrive una trasformazione quasi-statica in cui il suo volume varia.

- Si determini l'equazione della curva che, nel piano di Watt-Clapeyron, descrive la trasformazione.
- Si supponga che il gas sia monoatomico, che $n = 1$ e che la temperatura iniziale sia $T_i = 300$ K. Si calcoli la capacità termica C se, in seguito a una espansione che raddoppia il volume del gas, la temperatura diminuisce di 10 K.

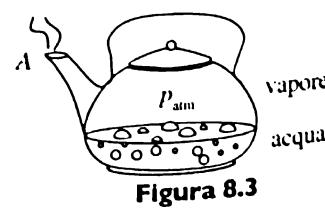
Problema 8.9

Due contenitori di volume $V_1 = 200 \text{ cm}^3$ e $V_2 = 100 \text{ cm}^3$ sono connessi da un corto tubo che, nel suo centro, ha un setto di materiale poroso che fa sì che le pressioni nei due contenitori siano uguali, ma rende trascurabile lo scambio di calore tra essi (ossia, permette l'esistenza di temperature diverse dai due lati). Inizialmente, il sistema contiene ossigeno in equilibrio a $T_0 = 300$ K e a pressione atmosferica. Successivamente, il contenitore più piccolo è posto in contatto con ghiaccio fondente a $T_2 = 273$ K e quello più grande con acqua bollente a $T_1 = 373$ K.

- Qual è la pressione finale nel sistema?
- Quanti grammi di O_2 vi saranno, all'equilibrio, nel contenitore più piccolo?

Problema 8.10

L'acqua contenuta in un bollitore elettrico sta bollendo (Figura 8.3). La potenza assorbita dall'acqua è pari a 1.00 kW. Si assuma che la pressione del vapore all'interno del bollitore sia uguale a quella atmosferica, e che il vapore si possa (in prima approssimazione) trattare come un gas ideale.

**Figura 8.3**

Sapendo che il calore di vaporizzazione dell'acqua è pari a $22.6 \cdot 10^5 \text{ J}/(\text{kg K})$ e che il beccuccio del bollitore ha una sezione $A = 2.00 \text{ cm}^2$, calcolare la velocità con cui il vapore fuoriesce dal beccuccio stesso.

Problema 8.11

Un contenitore cilindrico di sezione di base $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ e a pareti adiabatiche è chiuso in alto da un pistone di rame di massa $m = 300 \text{ g}$ e calore specifico $c = 385 \text{ J}/(\text{kg K})$, libero di scorrere senza attrito, sormontato da uno strato isolante di massa trascurabile (si veda la Figura 8.4). Nel contenitore vi è un gas ideale monoatomico, alla temperatura $T_i = 300 \text{ K}$, in equilibrio termico con il pistone, la cui superficie inferiore si trova a una quota $z_i = 20 \text{ cm}$ rispetto al fondo del contenitore.

All'istante $t = 0$ una resistenza elettrica posta nel contenitore inizia a cedere una potenza piccola e costante $P = 20 \text{ W}$ al sistema. Sapendo che la pressione atmosferica al di sopra del pistone è $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, determinare:

- la pressione iniziale nel gas;
- la rapidità con cui aumenta la temperatura del sistema, assumendo che il pistone sia sempre in equilibrio termico con il gas;
- la velocità con cui sale il pistone.

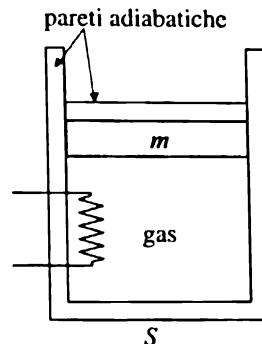


Figura 8.4

Problema 8.12

Un gas ideale monoatomico si trova in un contenitore a pareti rigide e termicamente conduttrive, chiuso in alto da un pistone isolante di sezione $S = 10^{-2} \text{ m}^2$, massa trascurabile e libero di scorrere senza attrito con le pareti. Sul pistone sono poste tante piccole sfere di ottone, ognuna da 10 g, in modo che il gas sia in equilibrio nello stato A caratterizzato da pressione $p_A = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, temperatura $T_A = 293 \text{ K}$ (uguale a quella dell'ambiente) e volume $V_A = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

A questo punto si riduce lentamente la massa sul pistone rimuovendo un certo numero di sferette, una alla volta, fino a quando il volume del gas raddoppia (stato B). A questo punto, tutte le sfere che sono state tolte vengono rimesse, tutte insieme, sul pistone; il gas si comprime rapidamente e in modo approssimativamente adiabatico fino a tornare al volume iniziale (stato C). A questo punto, il pistone viene bloccato. Dopo un certo tempo, il gas torna allo stato iniziale A scambiando un calore $Q_{CA} = -360 \text{ J}$ con l'ambiente.

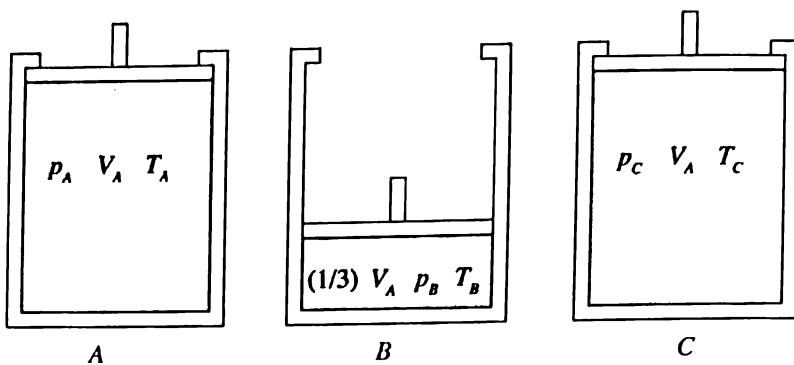
- Calcolare la temperatura e la pressione del gas nello stato C.
- Determinare quante sferette sono state rimosse per arrivare nello stato B.
- Verificare che la compressione adiabatica BC non è quasi-statica.
- Se la compressione adiabatica BC fosse quasi-statica, quanto varrebbe il calore Q_{CA} ?

Problema 8.13

Una certa quantità di gas ideale monoatomico è contenuta in un cilindro di volume interno V , a pareti rigide e lisce, chiuso in alto da un pistone rigido di massa trascurabile. Il pistone può scorrere senza attrito con le pareti, ma la sua corsa è limitata superiormente (si veda la Figura 8.5). Sia le pareti del cilindro sia il pistone sono termicamente isolanti. Sia p_0 la pressione nella stanza in cui si trova il cilindro.

Inizialmente il cilindro è alla massima altezza consentita e il gas si trova in uno stato di equilibrio (A) in cui il suo volume è V_A , la pressione è p_A e la sua temperatura è T_A . Quindi il gas viene lentamente compresso premendo sul pistone, fino a quando il suo volume si riduce a un terzo di quello iniziale (stato B). A questo punto, il pistone viene rilasciato di colpo e si sposta rapidamente fino al fondo della sua corsa, in modo che il gas torna a occupare tutto il volume V_A (stato C).

- Determinare la pressione e la temperatura nello stato B, in funzione dei dati noti (p_A , V_A , T_A e p_0).

**Figura 8.5**

- b) Trovare la temperatura del gas nello stato C e mostrare che è sempre $T_C \geq T_A$.
 c) Mostrare che $T_C = T_B$ soltanto se il gas si espande in vuoto, ossia se $p_0 = 0$.

Problema 8.14

La variazione del volume di un gas associata a una variazione di temperatura dT si può scrivere nella forma $dV = \alpha V dT$ (simile all'Equazione 1.7), ossia utilizzando il coefficiente di dilatazione volumica α che, in realtà, dipende dal tipo di trasformazione. Partendo dal primo principio della termodinamica, calcolare l'espressione di α per un gas biatomico che descrive una trasformazione quasi-statica:

- a) adiabatica;
 b) isobara;
 c) isocora.

Problema 8.15

Un gas perfetto biatomico è contenuto in un recipiente diviso in due parti, A e B , separate da una parete diatermica fissa. Inizialmente il gas contenuto nella parte A ha un volume V_A , una pressione p_A e una temperatura T_A , mentre il gas contenuto nella parte B ha un volume V_B , una pressione p_B e una temperatura T_B . Todo il recipiente è isolato adiabaticamente dall'ambiente esterno.

- a) Calcolare la temperatura del gas quando l'equilibrio termico è stato raggiunto.
 b) Calcolare le pressioni del gas in A e B all'equilibrio.
 c) Che cosa succederebbe se la parete che separa A e B fosse mobile? Si determinino la temperatura finale e la pressione finale del gas.

Problema 8.16

In un tubo orizzontale a sezione costante $S = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ fluisce dell'azoto gassoso (massa molare $M = 14 \text{ g mol}^{-1}$) a pressione $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ e temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$. In un certo punto del tubo si trova una resistenza che riscalda il gas, fornendogli una potenza termica costante $P = 100 \text{ W}$. Il flusso del gas è ovunque stazionario e la sua velocità nel tratto precedente la resistenza è $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$. Trattando l'azoto come un gas perfetto, supponendo che tutta la potenza venga utilizzata per scaldarlo e assumendo che la pressione rimanga approssimativamente costante in tutto il tubo, calcolare:

- a) la temperatura T_1 del gas nel tratto di tubo a valle della resistenza;
 b) la velocità v_1 del gas a valle della resistenza.

Svolgimenti

Problema 8.1

SVOLGIMENTO

► Trattandosi di un processo adiabatico e quasi-statico, è possibile utilizzare una delle relazioni di Poisson, in particolare quella che lega fra loro la temperatura e la pressione:

$$T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante}.$$

Imponendo che tale quantità sia uguale nello stato iniziale (in cui lo pneumatico è alla pressione p_0) e in quello finale (in cui è alla pressione $p_1 = 3p_0$), si ottiene

$$T_0 p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

da cui

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 300 \text{ K} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1-1.4}{1.4}} = 300 \text{ K} \cdot 1.37 \cong 411 \text{ K}.$$

Problema 8.2

SVOLGIMENTO

► Il riscaldamento del gas dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2 avviene a volume costante, ossia è un processo isocoro. Chiamando p_2 la pressione nel gas dopo il riscaldamento (ma prima dell'apertura della valvola) possiamo scrivere l'equazione dei gas perfetti per il gas nello stato 1 (p_1, V_A, T_1) e nello stato 2 (p_2, V_A, T_2):

$$p_1 V_A = n R T_1, \quad p_2 V_A = n R T_2 \quad (8.7)$$

dove n è il numero di moli di gas, R la costante dei gas perfetti. Dividendo membro a membro le due Equazioni 8.7 otteniamo

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1.$$

L'espansione del gas successiva all'apertura della valvola è un processo isotermo per il quale vale la legge di Boyle $pV = \text{costante}$; in particolare, considerando lo stato 2 (in cui il gas occupa il volume V_A) e lo stato 3 (in cui il gas si è espanso gonfiando il palloncino fino a occupare il volume $V_A + V_B$), si ottiene:

$$p_2 V_A = p_3 (V_A + V_B), \quad (8.8)$$

da cui segue ovviamente che

$$V_B = \left(\frac{p_2}{p_3} - 1 \right) V_A = \left(\frac{T_2}{T_1} \frac{p_1}{p_3} - 1 \right) V_A.$$

Possiamo ora calcolare il lavoro compiuto dal gas durante l'espansione isotermica:

$$\begin{aligned} L &= n R T_2 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = n R T_A \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \frac{p_1}{p_3} - 1 \right) = \\ &= 1 \text{ mol} \cdot 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 400 \text{ K} \cdot \ln \left(3 \frac{400 \text{ K}}{300 \text{ K}} - 1 \right) \cong 3561 \text{ J}. \end{aligned}$$

Problema 8.3**SVOLGIMENTO**

► Poiché il riscaldamento del gas avviene a volume costante, il calore che è necessario fornire al gas nell'intervallo di tempo dt per aumentare la sua temperatura di dT è dato da $\delta Q = dU = nc_V dT$. Poiché tale energia viene fornita dal riscaldatore, occorrerà fornire a quest'ultimo la stessa quantità di energia dall'esterno, per mantenerne costante la temperatura. In altre parole, la potenza fornita al riscaldatore dall'esterno deve essere uguale alla potenza assorbita dal gas:

$$P = \frac{\delta Q}{dt} = nc_V \frac{dT}{dt}. \quad (8.9)$$

Si noti che, poiché δQ non dipende dalla temperatura a cui si trova il gas, la potenza necessaria è costante per tutto l'intervallo di tempo Δt . Pertanto, integrando l'Equazione 8.9 nel tempo, si trova:

$$\int_0^{\Delta t} P dt = P \Delta t = \int_{T_0}^{T_1} nc_V dT = nc_V (T_1 - T_0).$$

Il numero di moli di gas n può essere ottenuto dalla legge dei gas perfetti

$$p_0 V_0 = n R T_0 \quad \rightarrow \quad n = \frac{p_0 V_0}{R T_0}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} P &= \frac{p_0 V_0}{\Delta t} \frac{c_V}{R} \frac{(T_1 - T_0)}{T_0} = \\ &= \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-1} \text{ m}^3}{6 \cdot 10^2 \text{ s}} \frac{20 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}}{8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}} \frac{(500 \text{ K} - 300 \text{ K})}{300 \text{ K}} \approx 26.7 \text{ W}. \end{aligned}$$

Problema 8.4**SVOLGIMENTO**

► Il cubetto di rame posto all'interno del recipiente si raffredda, mentre l'aria in esso contenuta si riscalda. Il calore ceduto dal cubetto all'aria è pari a

$$Q_{\text{cubetto}} = mc \Delta T = mc (T_2 - T_1), \quad (8.10)$$

il calore assorbito dall'aria è

$$Q_{\text{aria}} = -Q_{\text{cubetto}}. \quad (8.11)$$

Nel frattempo il pistone si alza del tratto h e pertanto l'aria si espande e compie un lavoro positivo. La variazione di volume dell'aria è

$$\Delta V = Ah; \quad (8.12)$$

l'espansione non è quasi-statica perché, a causa della differenza di temperatura tra l'aria e il cubetto, nessuno degli stati intermedi può essere considerato uno stato di equilibrio. Tale espansione avviene a pressione costante, quindi il lavoro si calcola partendo dalla definizione, in termini della pressione esterna:

$$L_{\text{aria}} = p_{\text{ext}} \Delta V = p_{\text{ext}} Ah. \quad (8.13)$$

La variazione di energia interna dell'aria si calcola applicando il primo principio della termodinamica

$$\Delta U_{\text{aria}} = Q_{\text{aria}} - L_{\text{aria}} = -mc (T_2 - T_1) - p_{\text{ext}} Ah. \quad (8.14)$$

► Poiché tutte le trasformazioni del ciclo sono rappresentate da una linea continua nel diagramma di Watt-Clapeyron, esse sono tutte quasi-statiche. È quindi possibile utilizzare tutte le relazioni per le trasformazioni notevoli dei gas perfetti che sono state richiamate nella parte di teoria.

- a) Il lavoro compiuto durante l'espansione isoterma AB è dato da $L_{AB} = nRT_A \ln(V_B/V_A)$ (in realtà usare T_A o T_B è indifferente!). Il numero di moli di gas non è noto, però partendo dall'equazione di stato si può ricavare $T_A = p_A V_A / nR$ e quindi

$$L_{AB} = nRT_A \ln(V_B/V_A) = p_A V_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 8151.8 \text{ J}, \quad (8.15)$$

avendo usato le seguenti conversioni di unità di misura: $1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e $1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$.

- b) Il gas assorbe calore durante l'espansione isoterma AB e durante il riscaldamento isocoro CA . Infatti, durante l'isoterma, il gas compie lavoro, ma la sua energia interna resta invariata, quindi deve necessariamente assorbire energia sotto forma di calore: $\Delta U_{AB} = 0 \rightarrow Q_{AB} = L_{AB} > 0$. Durante il riscaldamento isocoro il lavoro è nullo, però l'energia interna aumenta, perché aumenta la temperatura, e quindi $\Delta U_{CA} = Q_{CA} > 0$. Invece, nella compressione isobara BC , il gas cede calore, perché $\Delta U_{BC} < 0$ (il gas si raffredda) e $L_{BC} < 0$ e quindi dal primo principio $Q_{BC} = \Delta U_{BC} + L_{BC} < 0$. Il calore assorbito durante un ciclo è quindi $Q_{\text{ass}} = Q_{AB} + Q_{CA}$. Mentre $Q_{AB} = L_{AB}$ ed è quindi già noto, occorre calcolare Q_{CA} . Usando l'equazione di stato e la relazione di Mayer $c_p - c_v = R$ si ha:

$$Q_{CA} = nc_v(T_A - T_C) = c_v \left(\frac{p_A V_A}{R} - \frac{p_C V_C}{R} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_A - p_C) V_A = 6139.4 \text{ J}, \quad (8.16)$$

avendo usato il fatto che, siccome il gas è monoatomico, $\gamma = 5/3 = 1.66$. Usando il valore di Q_{CA} dato dall'Equazione 9.39 e il valore di $Q_{AB} = L_{AB}$ dato dall'Equazione 8.15, si ottiene infine

$$Q_{\text{ass}} = Q_{CA} + Q_{AB} = 14291.2 \text{ J}. \quad (8.17)$$

- c) Il calore ceduto dal gas è

$$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) = nc_p \left(\frac{p_C V_C}{nR} - \frac{p_B V_B}{nR} \right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_C (V_C - V_B) = -10191.4 \text{ J}.$$

Il lavoro totale L_{tot} compiuto durante il ciclo può essere calcolato come $L = L_{AB} + L_{BC}$ dove $L_{BC} = p_B(V_C - V_B) < 0$, oppure ragionando sul ciclo completo per il quale $\Delta U = 0$ e quindi $L_{\text{tot}} = Q_{\text{tot}} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = (8151.8 - 10191.4 + 6139.4) \text{ J} = 4099.8 \text{ J}$.

A questo punto il rapporto tra il lavoro totale e il valore assoluto del calore assorbito (che come si vedrà nel prossimo capitolo è detto *rendimento* del ciclo) è dato da

$$\eta = \frac{L_{\text{tot}}}{|Q_{\text{ass}}|} = \frac{4099.8}{14291.2} = 0.287.$$

Problema 8.6

Svolgimento

► Poiché i pesini vengono aggiunti al pistone "lentamente" (ossia dando ogni volta al sistema il tempo per raggiungere l'equilibrio), la trasformazione tra lo stato iniziale e quello finale è quasi-statica. Inoltre, poiché le pareti sono conduttrive e il contenitore è sempre a contatto con la sorgente a temperatura T , tale trasformazione è un'isoterma.

- a) Nella configurazione iniziale, il pistone di massa m è in equilibrio, per effetto della forza peso e delle forze dovute alle pressioni che si esercitano sulle sue superfici a contatto con l'aria e con

il gas. Chiamando p_i la pressione iniziale del gas, deve essere

$$p_i = p_0 + \frac{mg}{S}. \quad (8.18)$$

Il volume inizialmente occupato dal gas si può ricavare usando l'equazione di stato $p_i V_i = nRT$, dove T è la temperatura della sorgente, visto che il recipiente è trasparente al calore. Si ottiene quindi:

$$V_i = \frac{nRT}{p_i} = \frac{nRT}{p_0 + \frac{mg}{S}}. \quad (8.19)$$

Quando la massa del pistone triplica, il gas arriva a un nuovo stato di equilibrio in cui la pressione è data da:

$$p_f = p_0 S + \frac{3mg}{S} \quad (8.20)$$

e il volume si ricava utilizzando l'equazione di stato, analogamente a quanto fatto sopra. Anche in questo caso la temperatura è quella della sorgente, ossia T :

$$V_f = \frac{nRT}{p_0 + 3\frac{mg}{S}}. \quad (8.21)$$

Indicando con Δh l'abbassamento del pistone, deve essere $\Delta h = (V_i - V_f)/S$; con qualche passaggio algebrico si trova infine

$$\Delta h = nRT \frac{2mg}{(p_0 S + mg)(p_0 S + 3mg)}. \quad (8.22)$$

Un rapido controllo dimensionale ci dice che nRT è un'energia (o un lavoro), mentre la frazione ha le dimensioni dell'inverso di una forza. Pertanto Δh ha, correttamente, le dimensioni di una lunghezza.

- b) La trasformazione tra lo stato iniziale e quello finale è un'isoterma, per cui $\Delta U = 0$. Dal primo principio risulta, quindi, che $Q = L$, ossia il calore scambiato è uguale al lavoro compiuto. Poiché la trasformazione è quasi-statica, il lavoro è dato da:

$$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = nRT \ln \frac{p_i}{p_f} = nRT \ln \left(\frac{p_0 S + mg}{p_0 S + 3mg} \right).$$

Poiché l'argomento del logaritmo è minore di 1, il lavoro risulta essere negativo, ossia ceduto all'ambiente (il che è corretto visto che la trasformazione è una compressione isoterma).

Problema 8.7

Svolgimento

► La trasformazione in questione *non* è una delle trasformazioni notevoli dei gas perfetti. Nel diagramma (p, V) essa è rappresentata da un segmento di retta passante per l'origine. In particolare, nello stato iniziale il gas ha volume V_i e pressione $p_i = cV_i$; nello stato finale ha volume $V_f = V_i/3$ e pressione $p_f = cV_f = p_i/3$.

- a) Il lavoro compiuto si ottiene dall'integrale $L = \int_{V_i}^{V_f} p \, dV$. In questo caso, essendo $p = cV$, si ottiene

$$L = c \int_{V_i}^{V_f} V \, dV = -\frac{4}{9} c V_i^2.$$

Il volume iniziale, però, non è un dato del problema. Tenendo conto che $cV_i = p_i$, si può scrivere il lavoro nella forma seguente:

$$L = -\frac{4}{9}(cV_i)V_i = -\frac{4}{9}p_iV_i = -\frac{4}{9}nRT_i,$$

avendo usato, nell'ultimo passaggio, l'equazione di stato $p_iV_i = nRT_i$.

b) Ricordiamo che la definizione di calore specifico molare per una data trasformazione è

$$c = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT}.$$

Pertanto, per determinare il calore specifico c relativo alla trasformazione descritta nel problema, dobbiamo scrivere il calore infinitesimo scambiato dal gas nella forma $\delta Q = ncdT$. Osserviamo innanzitutto che, grazie al primo principio,

$$\delta Q = nc_V dT + pdV. \quad (8.23)$$

Il secondo termine deve essere scritto in modo che vi compaia dT . Partiamo dall'equazione di stato nella forma $pV = nRT$; ricordiamo che $p = cV$ per cui $cV^2 = nRT$ e differenziamo:

$$2(cV)dV = 2pdV = nRdT \quad \rightarrow \quad pdV = \frac{1}{2}nRdT. \quad (8.24)$$

Andando a sostituire nella 8.23, si ottiene

$$\delta Q = nc_V dT + \frac{1}{2}nRdT \quad (8.25)$$

da cui si ricava il calore specifico molare

$$\frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} = c_V + \frac{1}{2}R. \quad (8.26)$$

Problema 8.8

Svolgimento

► Il sistema costituito dal gas e dal corpo è termicamente isolato, per cui descrive necessariamente una trasformazione adiabatica (quasi-statica). Pertanto, indicando con δQ_g il calore scambiato dal gas e con δQ_c quello scambiato dal corpo in una trasformazione infinitesima, deve essere

$$\delta Q_g + \delta Q_c = 0. \quad (8.27)$$

- a) Applichiamo il primo principio alla trasformazione infinitesima del gas: $\delta Q_g = nc_V dT + pdV$. Inoltre, ricordiamo che $\delta Q_c = CdT$. Sostituendo queste relazioni nella 8.27 si ottiene

$$nc_V dT + pdV + CdT = 0 \rightarrow (nc_V + C)dT = -pdV. \quad (8.28)$$

Utilizzando l'equazione di stato del gas $pV = nRT$, per esprimere p otteniamo

$$(nc_V + C)dT = -nRT \frac{dV}{V}$$

ossia, facendo uso della relazione di Mayer $R = c_p - c_V$:

$$\frac{dT}{T} = - \left(\frac{c_p - c_V}{c_V + \frac{C}{n}} \right) \frac{dV}{V}. \quad (8.29)$$

Questa equazione differenziale è facilmente risolubile. Chiamando α il coefficiente tra parentesi, e integrando tra uno stato iniziale A e uno stato finale B , si ottiene

$$T_A V_A^\alpha = T_B V_B^\alpha, \quad (8.30)$$

o, esprimendo lo stesso concetto in altro modo, $TV^\alpha = \text{cost}$. Questa equazione è molto simile alla relazione di Poisson che vale per le trasformazioni adiabatiche quasi-statiche: $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$. È pertanto più comodo porre $\alpha = \Gamma - 1$, in modo che la soluzione possa esprimersi nella forma

$$TV^{\Gamma-1} = \text{cost}, \quad (8.31)$$

dove

$$\Gamma = \frac{nc_p + C}{nc_v + C}. \quad (8.32)$$

Dall'Equazione 8.31 seguono altresì le relazioni

$$pV^\Gamma = \text{cost} \quad (8.33)$$

$$Tp^{(\frac{1-\Gamma}{\Gamma})} = \text{cost}, \quad (8.34)$$

del tutto analoghe alle relazioni di Poisson per le adiabatiche quasi-statiche.

Le trasformazioni che obbediscono alle relazioni 8.31, 8.33 e 8.34 vengono dette *politropiche*. È interessante osservare che:

- se il corpo a contatto con il gas ha una capacità termica molto elevata, ossia si comporta come una sorgente ideale di calore, la trasformazione del gas si riduce a una isoterna. Infatti

$$\lim_{C/c_v \rightarrow \infty} \Gamma = 1$$

e l'Equazione 8.33 diventa $pV = \text{cost}$ (legge di Boyle);

- se il corpo ha capacità termica trascurabile, la trasformazione del gas si riduce a una adiabatica. Infatti

$$\lim_{C/c_v \rightarrow 0} \Gamma = \gamma$$

e l'Equazione 8.33 diventa $pV^\gamma = \text{cost}$, che è una delle relazioni di Poisson.

Fissato un punto nel piano di Watt-Clapeyron, pertanto, le politropiche che passano per tale punto hanno equazione $pV^\Gamma = \text{cost}$ e giacciono fra l'adiabatica (per la quale $\Gamma = \gamma$) e l'isoterna (per la quale $\Gamma = 1$) passanti per tale punto, ossia sono comprese nella zona tratteggiata in Figura 8.6.

- b) Indicando con $T_i = 300$ K e V_i le variabili nello stato iniziale e con $T_f = 290$ K e $V_f = 2V_i$ quelle nello stato finale, dall'equazione della trasformazione otteniamo

$$T_i V_i^{\Gamma-1} = T_f V_f^{\Gamma-1}, \quad (8.35)$$

ossia $\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\Gamma-1}$. Si ottiene quindi

$$\Gamma - 1 = \frac{\ln \frac{T_f}{T_i}}{\ln \frac{V_i}{V_f}} = 0.049 \quad (8.36)$$

Dalla 8.32 si ricava la capacità termica C :

$$C = \frac{n(c_p - c_v)}{\Gamma - 1} - nc_v = \frac{nR}{\Gamma - 1} - nc_v = 157.13 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (8.37)$$

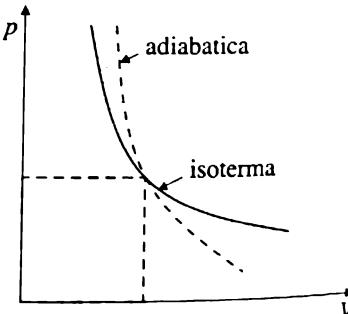


Figura 8.6

Problema 8.9**SVOLGIMENTO**

► Per risolvere questo problema bisogna tenere conto del fatto che il gas può spostarsi attraverso il materiale poroso. Il numero di moli di O₂ in ognuno dei due contenitori (n_1 e n_2) perciò non è fisso. Nelle condizioni iniziali, quando la temperatura è ovunque T_0 , l'equazione di stato dei gas perfetti applicata a tutto il gas dà

$$p_0(V_1 + V_2) = nRT_0 \rightarrow n = \frac{p_0(V_1 + V_2)}{RT_0} = 0.0122 \text{ mol.}$$

- a) Quando le temperature dei due contenitori sono diverse, il gas si ridistribuisce in modo da mantenere uniforme la pressione. In queste condizioni valgono le tre equazioni:

$$\begin{cases} pV_1 = n_1 RT_1 \\ pV_2 = n_2 RT_2 \\ n_1 + n_2 = n. \end{cases} \quad (8.38)$$

Dividendo membro a membro le due equazioni di stato si ottiene $n_1 = n_2(T_2V_1)/(T_1V_2)$ che sostituita nella terza equazione permette di trovare

$$n_1 = n \left(\frac{V_1 T_2}{T_1 V_2 + T_2 V_1} \right) = 7.25 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \quad (8.39)$$

$$n_2 = n \left(\frac{T_1 V_2}{T_1 V_2 + T_2 V_1} \right) = 4.95 \cdot 10^{-3} \text{ mol.} \quad (8.40)$$

Infine, la pressione si può calcolare inserendo queste espressioni nelle equazioni di stato. Per esempio inserendo n_1 in $pV_1 = n_1 RT_1$ si ottiene

$$p = \frac{n_1 RT_1}{V_1} \simeq 1.122 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.109 \text{ atm.}$$

La pressione praticamente non cambia rispetto alla situazione iniziale. Variazioni significative si avrebbero se le due temperature T_1 e T_2 fossero più lontane dalla temperatura iniziale T_0 .

- b) Nel contenitore più piccolo (che è il numero 2) vi è, all'equilibrio, un numero di moli di ossigeno dato dall'Equazione 8.40. La massa di O₂ si ottiene moltiplicando n_2 per la massa molare dell'ossigeno, che è uguale a $M = 32 \text{ g/mol}$:

$$m = n_2 M = 0.158 \text{ g.}$$

Problema 8.10**SVOLGIMENTO**

► La potenza assorbita dall'acqua serve per provocare la vaporizzazione dell'acqua stessa. Per definizione, $P = \delta Q/dt$; in questo caso si può esprimere δQ nella forma $\delta Q = dmL_v$, dove L_v è il calore di vaporizzazione dell'acqua e dm è la massa infinitesima di acqua che evapora nel tempo dt . Pertanto

$$P = \frac{dm}{dt} L_v \rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{P}{L_v}.$$

Poiché all'interno del bollitore la pressione, la temperatura e il volume del vapore sono stazionari (ossia costanti nel tempo) è chiaro che una massa dm di vapore deve fuoriuscire dal beccuccio nel tempo dt . Pertanto la portata di massa del beccuccio è $Q_m = \frac{dm}{dt}$. Per trovare la velocità di efflusso, però, occorre trovare la portata (di volume) del beccuccio, ossia $Q = Av = \frac{dV}{dt}$. Quest'ultima si può

ottenere derivando rispetto al tempo l'equazione di stato scritta nella forma $pV = \frac{m}{M}RT$ dove M è la massa molare del vapore d'acqua ($M = 18$ g/mol), ricordando che sia T sia p sono costanti:

$$\frac{d(pV)}{dt} = p \frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dm}{dt} RT \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dm}{dt} \frac{RT}{p}.$$

Pertanto

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dm}{dt} \frac{RT}{pA} = \frac{1}{M} \frac{RTP}{pAL_v}.$$

Inserendo i valori numerici si trova

$$v = \frac{1}{18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} \times \frac{8.31 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \times 373 \text{ K} \times 1.00 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{s}}}{1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \times 2.00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \times 22.6 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}} \simeq 3.76 \text{ m/s.}$$

Problema 8.11

Svolgimento

► Il sistema gas + pistone è isolato dall'aria circostante, ma riceve calore dalla resistenza. Tale calore (entrante nel sistema) è assorbito in parte dal pistone, che si riscalda, e in parte dal gas, che si riscalda e si espande compiendo lavoro. Si noti che, poiché il pistone è sempre in equilibrio termico con il gas, le temperature dei due sottosistemi sono sempre uguali fra loro. Poiché la potenza erogata dalla resistenza è piccola e costante, è lecito assumere che la trasformazione sia quasi-statica.

- a) Per trovare la pressione iniziale p è sufficiente notare che il gas è premuto dal pistone e quest'ultimo è soggetto alla pressione atmosferica. Se si scrive la II legge di Newton per il pistone, imponendo che esso sia in equilibrio, e la si proietta lungo l'asse z (verticale, rivolto verso l'alto e con origine al fondo del recipiente) si trova:

$$+pS - p_0S - mg = 0. \quad (8.41)$$

Poiché la trasformazione è quasi-statica, il pistone si può ritenere in equilibrio in ogni istante e non solo nella configurazione iniziale; pertanto l'Equazione 8.41 è sempre vera nel corso della trasformazione. Ne discende che la pressione nel gas è sempre data da

$$p = p_0 + \frac{mg}{S} \quad (8.42)$$

ed è quindi *costante*. La trasformazione del gas è pertanto isobara.

- b) Consideriamo un intervallo di tempo infinitesimo dt . In tale intervallo di tempo, il calore che la resistenza cede al sistema è $\delta Q = Pdt$. Ora, consideriamo separatamente il pistone e il gas. Il pistone è fatto di rame per cui tutto il calore che esso assorbe va ad aumentarne la temperatura: $\delta Q_p = mcdT$. Invece, il gas si espande per cui

$$\delta Q_g = dU_g + \delta W. \quad (8.43)$$

Considerando che $dU_g = nc_VdT$ e che $\delta Q = \delta Q_p + \delta Q_g$, si ha:

$$Pdt = mcdT + nc_VdT + pdV. \quad (8.44)$$

Il lavoro elementare si ricava ricordando che la trasformazione è un'isobara quasi-statica, per tanto

$$pdV = d(pV) = nRdT,$$

e quindi l'Equazione 8.44 diventa

$$Pdt = mcdT + nc_VdT + nRdT, \quad (8.45)$$

da cui si ottiene

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P}{mc + n(c_V + R)} = \frac{P}{mc + nc_p}. \quad (8.46)$$

Allo stesso risultato si arriva scrivendo da subito (Equazione 8.43) $\delta Q_g = nc_p dT$, il che è vero per una trasformazione isobara.

Il numero di moli del gas, che compare nell'Equazione 8.46, non è noto. Per trovarlo, basta usare l'equazione di stato dei gas ideali, applicandola allo stato iniziale e ricordando che il volume iniziale è $V_i = Sz_i$:

$$pSz_i = nRT_i \quad \rightarrow \quad n = \frac{(p_0 + \frac{mg}{S})Sz_i}{RT_i} = 0.08 \text{ mol.}$$

Inserendo questo valore nell'Equazione 8.46 si trova che

$$\frac{dT}{dt} = 0.171 \frac{\text{K}}{\text{s}}.$$

- c) Per trovare la velocità con cui si sposta il pistone, basta ricordare che $V = Sz$ dove z è la quota della faccia inferiore del pistone, che inizialmente vale z_i . Perciò

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dV}{dt}. \quad (8.47)$$

Usando l'equazione di stato dei gas ideali e tenendo conto che p è costante si ottiene però la relazione

$$\frac{dV}{dt} = \frac{nR}{p} \frac{dT}{dt}$$

che, sostituita nell'Equazione 8.47, porta a

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{S} \frac{nR}{p} \frac{dT}{dt} = 1.14 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Quindi, il pistone sale soltanto di circa 0.11 mm/s.

Problema 8.12

SVOLGIMENTO

- Il gas descrive il ciclo in Figura 8.7. Si noti che la trasformazione BC è indicata con un tratteggio, perché ci si aspetta che non sia quasi-statica. I valori noti sono: p_A, V_A, T_A, Q_{CA} . Sappiamo inoltre che $V_B = 2V_A$ e che il gas è monoatomico, per cui $c_V = 3R/2$ e $\gamma = 5/3$. Il numero di moli non è noto, ma si può esprimere facilmente in funzione delle coordinate termodinamiche dello stato A:

$$n = \frac{p_A V_A}{R T_A} = 0.148 \text{ mol.}$$

- a) Innanzitutto, considerando che AB è un'isoterma, si ha $p_A V_A = p_B V_B$ e quindi $p_B = p_A/2$. Pertanto, anche dello stato B sono note tutte le variabili termodinamiche. Il fatto che BC sia un'adiabatica non quasi-statica ha l'importante conseguenza che, per determinare la temperatura e la pressione dello stato C non si possono usare le relazioni di Poisson ($pV^\gamma = \text{costante}$ o le altre due che da questa si ottengono facendo uso dell'equazione di stato dei gas ideali). Come vedremo, infatti, C non giace

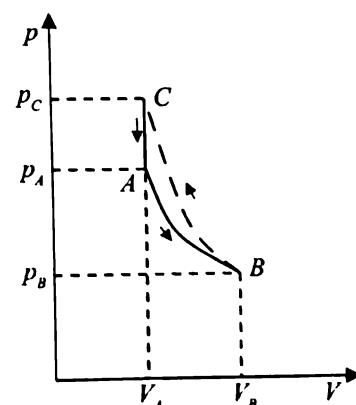


Figura 8.7

sull'adiabatica quasi-statica passante per B . Un modo per calcolare le variabili termodinamiche dello stato C è basarsi sulla trasformazione CA , che è isocora. Lungo tale trasformazione, il calore scambiato dal gas è esprimibile nella forma $Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C)$ e quindi

$$T_C = T_A - \frac{Q_{CA}}{nc_V} = T_A \left(1 - \frac{2Q_{CA}}{3p_A V_A} \right) = 488.3 \text{ K}. \quad (8.48)$$

Per calcolare p_C si può procedere in diversi modi; il più diretto è ricordare che in una trasformazione isocora il rapporto p/T deve rimanere costante, per cui

$$p_C = p_A \frac{T_C}{T_A} = p_A \left(1 - \frac{2Q_{CA}}{3p_A V_A} \right) = 2.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (8.49)$$

- b) Per determinare il numero N di sferette che è stato necessario rimuovere per arrivare dallo stato A allo stato B , basta ricordare che la differenza di pressione tra gli stati A e B è uguale al peso delle sferette che sono state rimosse, diviso per l'area del pistone S :

$$p_A - p_B = \frac{Nmg}{S},$$

dove si è indicata con m la massa di ogni sferetta. Da qui si ricava, ricordando che $p_B = p_A/2$:

$$N = \frac{p_A S}{2mg} = 6116.$$

- c) Per verificare che la trasformazione BC non è quasi-statica vi sono molti modi (quelli che coinvolgono l'entropia saranno affrontati nel prossimo capitolo), ma il più semplice consiste nel verificare che *non vale* l'uguaglianza $p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$, che sarebbe vera per un'adiabatica quasi-statica. Infatti si trova che

$$\begin{aligned} p_B V_B^\gamma &= \frac{p_A}{2} (2V_A)^\gamma = 2^{\gamma-1} p_A V_A^\gamma \\ p_C V_C^\gamma &= \left(1 - \frac{2Q_{CA}}{3p_A V_A} \right) p_A V_A^\gamma \end{aligned}$$

dove, nella seconda equazione, si è fatto uso del risultato 8.49. Basta quindi verificare che siano diversi i coefficienti che moltiplicano il fattore $p_A V_A^\gamma$:

$$1 - \frac{2Q_{CA}}{3p_A V_A} = 1.667 \quad (8.50)$$

$$2^{\gamma-1} = 1.587. \quad (8.51)$$

- d) Se la trasformazione BC fosse quasi-statica, i due coefficienti appena calcolati sarebbero uguali. Uguagliando i primi membri delle Equazioni 8.50 e 8.51 si ottiene che il calore scambiato dal gas, per tornare allo stato A dallo stato C , sarebbe

$$Q_{CA} = \frac{3}{2} p_A V_A \left(1 - 2^{\gamma-1} \right) = -317.2 \text{ J},$$

che è, in valore assoluto, minore di quello misurato. Se BC fosse quasi-statica, quindi, il punto C sarebbe *più in basso*: è facile verificare che la temperatura T_C sarebbe pari a 465.1 K anziché 488.3 K e la pressione p_C sarebbe uguale a $1.905 \cdot 10^5$ Pa anziché a $2.00 \cdot 10^5$ Pa.

Problema 8.13**SVOLGIMENTO**

► Il gas esegue due trasformazioni successive di cui la prima (AB) è una compressione adiabatica quasi-statica e la seconda (BC) è un'espansione adiabatica non quasi-statica. Quindi, le relazioni di Poisson (che si ricavano solo nell'ipotesi di trasformazione adiabatica quasi-statica) sono valide per AB , ma non per BC .

- a) Per trovare la pressione nello stato B , si può usare la relazione di Poisson $pV^\gamma = \text{costante}$ tra gli stati A e B ricordando che il volume nello stato A è V_A e nello stato B è $V_A/3$:

$$p_A V_A^\gamma = p_B \left(\frac{V_A}{3} \right)^\gamma$$

da cui, considerando che $\gamma = 5/3$, si ha

$$p_B = p_A 3^{\gamma-1} \simeq 6.24 p_A. \quad (8.52)$$

Per quanto riguarda la temperatura, si può usare la relazione $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$ tra gli stessi due stati A e B , ottenendo

$$T_B = T_A 3^{\gamma-1} \simeq 2.08 T_A. \quad (8.53)$$

- b) Per trovare la temperatura nello stato C , occorre sfruttare il primo principio della termodinamica. Nella trasformazione (non quasi-statica) BC si ha che $\Delta U_{BC} = Q_{BC} - L_{BC}$, ma $Q_{BC} = 0$ perché si tratta di un'adiabatica; inoltre, sappiamo che per un gas ideale $\Delta U_{BC} = nc_V(T_C - T_B)$ (indipendentemente dal fatto che i due stati siano connessi da una trasformazione quasi-statica oppure no). Infine, il lavoro deve essere calcolato usando la pressione esterna p_{ext} che, nella trasformazione BC , è uguale alla pressione atmosferica p_0 , visto che il pistone ha massa trascurabile.² Pertanto il primo principio della termodinamica assume la forma:

$$nc_V(T_C - T_B) = -p_0(V_C - V_B). \quad (8.54)$$

Poiché $V_B = V_A/3$ e $V_C = V_A$, da qui si ottiene

$$T_C = T_B - \frac{2p_0 V_A}{3nc_V}. \quad (8.55)$$

Il numero di moli n non è noto, ma si può esprimere in funzione di p_A , V_A e T_A grazie all'equazione di stato $p_A V_A = nRT_A$. Facendo uso della 8.53 e ricordando che $c_V = 3R/2$ si trova:

$$T_C = 2.08T_A - \frac{2p_0 V_A R}{3p_A V_A c_V} T_A = \left[2.08 - \frac{4p_0}{9p_A} \right] T_A. \quad (8.56)$$

Si tratta ora di dimostrare che T_C è sempre maggiore di T_A . Per fare ciò occorre dimostrare che il termine tra parentesi è sempre necessariamente maggiore di 1, ossia che

$$2.08 - \frac{4p_0}{9p_A} > 1 \quad \rightarrow \quad p_A > 0.411p_0. \quad (8.57)$$

L'ultima relazione è certamente vera. Infatti, nello stato A il pistone è in equilibrio alla massima altezza consentita, ossia a contatto con il bordo superiore del cilindro. Quest'ultimo esercita una qualche forza N (diretta verso il basso) sul pistone, per cui deve sicuramente essere $p_A = p_0 + N/S$, avendo chiamato S l'area del pistone. Poiché $N \geq 0$, è necessariamente $p_A \geq p_0$ e quindi la condizione 8.57 è certamente soddisfatta. In conclusione, dopo l'espansione rapida il

² Si noti che, quando il pistone arriva a contatto con il bordo superiore del cilindro, viene tenuto fermo da quest'ultimo e la pressione esterna potrebbe non essere più uguale a p_0 ; ma, dal momento che il pistone è ormai fermo, non vi è più alcun lavoro.

gas si trova allo stesso volume dello stato A, ma *a pressione e temperatura più alte*, come mostrato nella Figura 8.8.

- c) In base all'Equazione 9.30, la temperatura T_C può essere uguale a T_B solo se

$$\frac{2p_0 V_A}{3n c_V} = 0,$$

il che è possibile solo se $p_0 = 0$, ossia se l'espansione del gas avviene in vuoto. In tal caso, il lavoro compiuto dal gas è nullo e quindi anche la variazione di energia interna è zero. In altre parole, la temperatura del gas non cambia. Si noti che in questo caso molto particolare (noto come *espansione libera di Joule*) l'adiabatica (non-quasi-statica) è anche isoterma – cosa invece impossibile per le adiabatiche quasi-statiche che comportano sempre una variazione di temperatura.

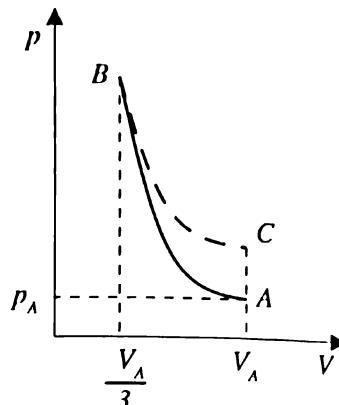


Figura 8.8

Problema 8.14**SVOLGIMENTO**

- Dalla relazione $dV = \alpha V dT$ segue che la definizione di α è

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}.$$

Si tratta quindi di calcolare questa espressione per le diverse trasformazioni.

- a) In una trasformazione adiabatica il primo principio ci dice che $dU = -\delta L$; sappiamo inoltre che è sempre $dU = nc_V dT$ e che, poiché la trasformazione è quasi-statica, il lavoro elementare si può scrivere $\delta L = pdV$. Pertanto

$$nc_V dT = -pdV,$$

e, usando l'equazione di stato dei gas perfetti per esprimere p , si ottiene

$$nc_V dT = -nRT \frac{dV}{V}.$$

Ricordando che $c_V = 5R/2$ e semplificando n e R si trova

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = -\frac{5}{2} \frac{1}{T},$$

per cui

$$\alpha_{\text{adiab}} = -2.5 \frac{1}{T}.$$

Si noti che il segno negativo esprime, correttamente, il fatto che un'espansione adiabatica quasi-statica comporta sempre un raffreddamento.

- b) Per una trasformazione isobara, il primo principio si scrive $dU = \delta Q - \delta L = 0$ dove $dU = nc_V dT$, $\delta Q = nc_p dT$ e, per una trasformazione quasi-statica, $\delta L = pdV$. Esprimendo p in funzione di V e T mediante l'equazione di stato si ottiene:

$$nc_V dT = nc_p dT - nRT \frac{1}{V} dV;$$

semplificando n e ricordando la relazione di Mayer $c_p - c_V = R$ si ottiene

$$dT = \frac{T}{V} dV.$$

Pertanto,

$$\alpha_{\text{isob}} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = \frac{1}{T}.$$

Il segno positivo indica che, a pressione costante, un aumento di temperatura causa un aumento di volume; ciò è ovvio, se si pensa che lungo un'isobara si ha $V/T = \text{costante}$. In effetti, l'espressione di α_{isob} si può ottenere direttamente differenziando questa relazione, ossia imponendo che sia $d(V/T) = 0$.

- c) Per una trasformazione isocora, essendo sempre $dV = 0$, il coefficiente di espansione volumica è ovviamente zero.

Problema 8.15

SVOLGIMENTO

► Poiché la parete interna che divide il recipiente è termicamente conduttrice, i gas che si trovano in A e in B raggiungeranno l'equilibrio termico grazie a uno scambio di calore. Se tale parete è fissa [quesiti (a) e (b)], non vi sono variazioni di volume e quindi per ognuno dei due gas risulta $\Delta U = Q$; in tal caso la temperatura finale è comune, ma le pressioni e i volumi in A e B in generale restano diversi. Se invece la parete è mobile [quesito (c)] i gas possono compiere lavoro per cui $\Delta U = Q - L$ e, nello stato finale, essi avranno non solo la stessa temperatura, ma anche la stessa pressione.

- a) Innanzitutto occorre determinare il numero di moli di gas nelle due parti del recipiente. Utilizzando l'equazione di stato $pV = nRT$, si ottiene

$$n_A = \frac{p_A V_A}{R T_A}, \quad n_B = \frac{p_B V_B}{R T_B}. \quad (8.58)$$

Il sistema formato dal gas in A e in B è termicamente isolato dall'esterno, per cui indicando con Q_A e Q_B le quantità di calore scambiate rispettivamente dal gas in A e in B , deve risultare $Q_A + Q_B = 0$. Come già detto, i volumi non cambiano, per cui gli scambi di calore avvengono a volume costante:

$$n_A c_V (T_f - T_A) + n_B c_V (T_f - T_B) = 0. \quad (8.59)$$

Da qui si ricava la temperatura finale:

$$T_f = \frac{n_A T_A + n_B T_B}{n_A + n_B}. \quad (8.60)$$

- b) Dalla 8.60, utilizzando l'equazione di stato, è possibile determinare le pressioni finali dei due gas:

$$p_{A,f} = \frac{n_A R T_f}{V_A}, \quad p_{B,f} = \frac{n_B R T_f}{V_B}. \quad (8.61)$$

- c) Se la parete è mobile, i gas contenuti in A e B possono compiere lavoro e lo stato di equilibrio finale è completamente diverso. In particolare, tale stato finale è caratterizzato non solo da uguali temperature, ma anche da uguali pressioni per il gas in A e in B . La condizione da porre per determinare la temperatura finale è, come sempre, $Q_A + Q_B = 0$; solo che questa volta non sappiamo come scrivere i calori scambiati perché la trasformazione eseguita dal gas in A (o in B) non è né a volume costante, né a pressione costante, né a temperatura costante. Sappiamo però, grazie al primo principio, che dev'essere

$$\begin{aligned} \Delta U_A &= Q_A - L_A & \rightarrow Q_A &= \Delta U_A + L_A \\ \Delta U_B &= Q_B - L_B & \rightarrow Q_B &= \Delta U_B + L_B \end{aligned}$$

dove L_A e L_B sono i lavori compiuti dal gas in A e in B , rispettivamente. La condizione $Q_A + Q_B = 0$ quindi si scrive

$$\Delta U_A + L_A + \Delta U_B + L_B = 0. \quad (8.62)$$

Ora si noti che, per la III legge di Newton, i due lavori L_A e L_B devono necessariamente essere uguali in valore assoluto e opposti in segno. Pertanto $L_A + L_B = 0$ e la condizione 8.62 diventa semplicemente $\Delta U_A + \Delta U_B = 0$ ossia

$$n_A c_V (T_f - T_A) + n_B c_V (T_f - T_B) = 0, \quad (8.63)$$

che è identica all'Equazione 8.59. Pertanto la temperatura finale che il sistema raggiunge è data dall'Equazione 8.60, *indipendentemente* dal fatto che la parete interna sia fissa oppure mobile. Per trovare la pressione finale non possiamo usare l'equazione di stato per il gas in A o in B perché non conosciamo i volumi finali. Però possiamo usare l'equazione di stato per *tutto* il gas, perché nello stato finale è tutto in equilibrio alla stessa pressione e temperatura. Il volume *totale* del gas è quello del contenitore, che possiamo scrivere, usando i volumi iniziali, come $V_A + V_B$. Pertanto

$$p_f (V_A + V_B) = (n_A + n_B) R T_f$$

da cui si ricava, facendo uso del risultato 8.60,

$$p_f = \frac{(n_A + n_B)}{(V_A + V_B)} R \frac{(n_A T_A + n_B T_B)}{(n_A + n_B)} = R \frac{n_A T_A + n_B T_B}{(V_A + V_B)}.$$

Problema 8.16 SVOLGIMENTO

► Il problema deve essere risolto considerando il flusso del gas (che è un fluido *comprimibile*) lungo il tubo e trattando il gas stesso come un gas perfetto. A causa della comprimibilità del fluido, la densità non è costante e la legge di Leonardo (si veda il Capitolo 6) non vale; tuttavia, in condizioni stazionarie non vi può essere accumulo di massa in qualche parte del tubo, per cui la massa di azoto che attraversa in un certo tempo una qualunque sezione del tubo è sempre la stessa. Il procedimento di soluzione si basa sul fatto che il calore fornito dalla resistenza serve per riscaldare (a pressione costante) il gas, che conseguentemente si espande; pertanto, la stessa massa di gas, una volta oltrepassata la resistenza, occupa un volume maggiore e deve fluire attraverso il tubo a una velocità maggiore, per assicurare che non vi siano accumuli di massa.

- a) Consideriamo due sezioni trasversali del tubo S_0 e S_1 , poste rispettivamente a monte e a valle della resistenza. Poiché il tubo è cilindrico, l'area di queste due sezioni è uguale e vale S . Il fluido che attraversa S_0 si muove tutto alla velocità v_0 per cui il volume di azoto che attraversa S_0 in un tempo dt è $dV_0 = v_0 S dt$ (si veda la Figura 8.9).

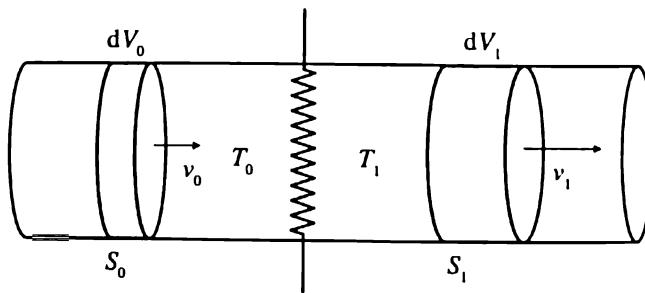


Figura 8.9

La massa di fluido contenuta in tale volume è

$$dm_0 = \rho_0 dV_0 = \rho_0 v_0 S dt. \quad (8.64)$$

Lo stesso si può dire considerando S_1 : la massa che la attraversa in un tempo dt è uguale a

$$dm_1 = \rho_1 dV_1 = \rho_1 v_1 S dt. \quad (8.65)$$

Poiché il flusso è stazionario, dev'essere $dm_0 = dm_1$ ossia

$$\rho_0 v_0 = \rho_1 v_1. \quad (8.66)$$

Fin qui abbiamo fatto uso solo di concetti di fluidodinamica. A questo punto, scriviamo l'equazione di stato per la massa dm di gas, sia a monte sia a valle della resistenza:

$$p_0 dV_0 = \frac{dm}{M} RT_0 \quad \rightarrow \quad \frac{dm}{dV_0} = \rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} \quad (8.67)$$

$$p_0 dV_1 = \frac{dm}{M} RT_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dm}{dV_1} = \rho_1 = \frac{p_0 M}{RT_1}; \quad (8.68)$$

in questo modo abbiamo espresso la densità del gas direttamente in funzione della sua temperatura. Per trovare la temperatura T_1 del gas dopo che è stato scaldato dalla resistenza, consideriamo che tale riscaldamento avviene a pressione costante. La massa dm equivale a un numero di moli $dn = dm/M$ per cui il calore che essa assorbe dalla resistenza nel tempo dt è:

$$\delta Q = P dt = \frac{dm}{M} c_p (T_1 - T_0); \quad (8.69)$$

dividendo per dt si ha

$$P = \frac{1}{M} \frac{dm}{dt} c_p (T_1 - T_0) = \frac{1}{M} \rho_0 v_0 S c_p (T_1 - T_0), \quad (8.70)$$

dove si è fatto uso della 8.64 per esprimere dm . Sostituendo ulteriormente l'espressione di ρ_0 (Equazione 8.67) e ricordando che l'azoto è batomico, per cui $c_p = 7R/2$, si trova

$$P = \frac{1}{M} \frac{p_0 M}{RT_0} v_0 S \frac{7}{2} R (T_1 - T_0) \quad (8.71)$$

da cui finalmente si ricava

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{2P}{7p_0 v_0 S} \right) = 328.6 \text{ K}. \quad (8.72)$$

- b) Per trovare la velocità del gas a valle della resistenza, sostituiamo le espressioni per ρ_0 e ρ_1 (Equazioni 8.67 e 8.68) nell'Equazione 8.66. In tal modo otteniamo

$$\frac{p_0 M}{RT_0} v_0 = \frac{p_0 M}{RT_1} v_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = v_0 \frac{T_1}{T_0} = 10.95 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (8.73)$$

Termodinamica: secondo principio



Richiami di teoria

Macchine termiche

Si dice *macchina termica* qualunque dispositivo che opera ciclicamente e trasforma in lavoro meccanico L il calore *netto* assorbito da un certo numero di sorgenti di calore. Una macchina termica funziona grazie a un *fluido lavorante* che può essere un gas o un vapore. Detti Q_{ass} e Q_{ced} il calore assorbito (positivo) e ceduto (negativo) dal fluido lavorante in un ciclo, si ha che $L = Q_{\text{ass}} + Q_{\text{ced}}$. Si dice *rendimento* della macchina il rapporto:

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}} = \frac{Q_{\text{ass}} + Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = 1 + \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{Q_{\text{ass}}}. \quad (9.1)$$

Macchine frigorifere

Si dice *macchina frigorifera* un dispositivo che opera ciclicamente e che, assorbendo un lavoro meccanico L , trasferisce calore da una o più sorgenti “ fredde ” a una o più sorgenti “ calde ”. Nel caso più semplice, la macchina assorbe in ogni ciclo un calore Q_{ass} (positivo) da una sorgente a temperatura T_1 e cede un calore Q_{ced} (negativo) a una sorgente a $T_2 > T_1$. Per fare ciò, essa richiede un lavoro meccanico L . Si chiama coefficiente di prestazione¹ il rapporto tra il calore estratto dalla sorgente fredda e il lavoro richiesto:

$$K = \frac{Q_{\text{ass}}}{|L|} = \frac{Q_{\text{ass}}}{|Q_{\text{ced}} + Q_{\text{ass}}|} = \frac{Q_{\text{ass}}}{|Q_{\text{ced}}| - |Q_{\text{ass}}|}. \quad (9.2)$$

Secondo principio della termodinamica

Il *Secondo Principio della Termodinamica* può essere enunciato in due modi diversi ma del tutto equivalenti:

1. Enunciato di Kelvin-Planck: è impossibile realizzare una trasformazione il cui *unico risultato sia la completa trasformazione del calore assorbito da un'unica sorgente in lavoro.*

¹ Spesso chiamato C.O.P., “coefficient of performance”.

2. Enunciato di Clausius: è impossibile realizzare una trasformazione il cui *unico* risultato sia il trasferimento di calore da un corpo a temperatura T_1 a un corpo a temperatura $T_2 > T_1$ (ossia più caldo).

Si noti che:

- Una trasformazione *aperta* (ossia da uno stato A a uno stato B diverso da A) può avvenire con una completa trasformazione di calore in lavoro (ne è un esempio l'espansione isoterma di una gas perfetto), perché in tal caso questo non è l'unico risultato (l'altro è il cambiamento di stato da A a B).
- Come conseguenza del secondo principio, una macchina termica ciclica deve avere almeno *due* sorgenti, una "calda" (a temperatura T_2) da cui assorbe un calore $Q_2 > 0$ e una "fredda" a T_1 a cui cede un calore $Q_1 < 0$ dopo aver compiuto un lavoro meccanico $L < Q_2$. Pertanto nell'Equazione 9.1, $Q_{\text{ced}} \neq 0$ e quindi il rendimento di una macchina termica è sempre strettamente minore di 1.

Trasformazioni reversibili

Una trasformazione termodinamica da uno stato A a uno stato B si dice *reversibile* se può essere invertita facendo sì che il sistema e l'ambiente ripassino, all'indietro, per gli stessi stati termodinamici. Perché questo accada, la trasformazione deve essere quasi-statica e non devono esservi effetti dissipativi (attriti).

Una macchina termica si dice reversibile se il ciclo termodinamico descritto dal fluido lavorante è composto di trasformazioni reversibili.

Per quanto detto sopra, la più semplice macchina termica ha solo 2 sorgenti. Se essa opera reversibilmente viene detta *macchina di Carnot* e il suo ciclo non può che essere costituito da due isoterme (alle temperature T_1 e T_2 delle sorgenti) connesse da due adiabatiche. Tale ciclo è il *ciclo di Carnot*.

Il teorema di Carnot

Il teorema di Carnot asserisce che, date due sorgenti di calore a temperature T_1 e $T_2 > T_1$, qualunque macchina che opera tra queste sorgenti ha un rendimento minore o al massimo uguale a quello di una macchina di Carnot che opera tra le stesse sorgenti: $\eta \leq \eta_C$. Il segno di uguaglianza vale solo se la macchina in questione è reversibile (ovvero è a sua volta una macchina di Carnot). Pertanto:

- Tutti i cicli di Carnot operanti tra le stesse due temperature hanno lo stesso rendimento, *indipendentemente* dal tipo di fluido lavorante. È quindi lecito calcolarlo per una macchina a gas perfetto. Il risultato è che

$$\eta_C = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}. \quad (9.3)$$

- Per le macchine frigorifere operanti attraverso un ciclo di Carnot, il coefficiente di prestazione risulta

$$K_C = \frac{T_1}{T_2 - T_1}. \quad (9.4)$$

- Dall'Equazione 9.3 e dal fatto che $\eta \leq \eta_C$ segue che, per ogni macchina termica che lavori tra T_1 e T_2 si ha

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (9.5)$$

dove il segno di uguaglianza vale se il ciclo è reversibile.

- Nel caso in cui la macchina operi tra più di due sorgenti, il risultato 9.5 si può generalizzare (teorema di Clausius) e diventa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} &\leq 0 && \text{per } n \text{ sorgenti} \\ \oint \frac{\delta Q}{T} &\leq 0 && \text{per infinite sorgenti.} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Entropia e irreversibilità

Dall'Equazione 9.6 discende che la quantità $\frac{\delta Q}{T}$ ha integrale nullo lungo qualunque trasformazione chiusa reversibile. Quindi la quantità

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} \quad (9.7)$$

è un differenziale esatto e, per qualunque trasformazione *reversibile* aperta da A a B , l'integrale $\int_A^B dS$ è uguale alla variazione della funzione di stato *entropia*:

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = S_B - S_A = \Delta S. \quad (9.8)$$

Si noti che:

- se un sistema passa da uno stato A a uno stato B , la variazione di entropia, che dipende solo da A e B , ha lo stesso valore indipendentemente dal fatto che la trasformazione AB sia reversibile o irreversibile;
- se un sistema segue una trasformazione chiusa tornando allo stato di partenza, $\Delta S = 0$;
- data una trasformazione qualsiasi tra uno stato A e uno stato B , vale la relazione

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \leq S_B - S_A \quad (9.9)$$

in cui il segno di uguaglianza vale solo se la trasformazione è reversibile. Se la trasformazione è irreversibile, il primo membro della 9.9 è calcolato lungo la trasformazione reale ed è strettamente minore della differenza di entropia $S_B - S_A$. Quest'ultima è calcolata (usando l'Equazione 9.8) lungo una qualunque trasformazione reversibile che connette gli stati A e B . La scelta della trasformazione reversibile da usare per il calcolo è completamente libera poiché l'entropia è una funzione di stato e ΔS dipende solo da A e B ;

- l'entropia è additiva: se un sistema è composto da parti distinte, l'entropia del sistema è la somma delle entropie delle parti;
- se un sistema è isolato, l'Equazione 9.9 implica che, per qualunque processo aperto, $\Delta S \geq 0$. L'uguaglianza vale se il processo è reversibile. Quindi, se un sistema descrive una trasformazione adiabatica reversibile, $\Delta S = 0$; se invece l'adiabatica non è reversibile, $\Delta S > 0$. Pertanto le *adiabatiche reversibili sono isoentropiche* mentre le adiabatiche irreversibili comportano sempre un aumento di entropia del sistema;
- l'universo termodinamico (che è l'insieme formato dal sistema e dall'ambiente) per definizione è isolato, per cui $\Delta S_U = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{amb}} \geq 0$;

- se un gas perfetto passa da uno stato A a uno stato B, la sua variazione di entropia può sempre essere scritta nella forma

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (9.10)$$

o nelle forme ad essa equivalenti, ottenibili usando l'equazione di stato.

Energia inutilizzabile

In una trasformazione ciclica irreversibile, sebbene l'entropia del sistema torni al suo valore iniziale una volta completato il ciclo, deve essere $\Delta S_U > 0$ e quindi l'entropia dell'ambiente deve aumentare: $\Delta S_U = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{amb}} > 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{amb}} > 0$.

A causa dell'irreversibilità del processo, il lavoro meccanico che si ottiene dal ciclo, L_{irr} , è minore di quello che si otterebbe se il processo fosse reversibile, L_{rev} . La differenza $\Delta L = L_{\text{rev}} - L_{\text{irr}}$ è nota come energia “inutilizzabile” ed è data da

$$\Delta L = T_{\min} \Delta S_U \quad (9.11)$$

dove T_{\min} è la temperatura della sorgente più fredda.

TEST DI COMPRENSIONE

- Una macchina termica lavora con tre sorgenti scambiando con esse le quantità di calore Q_1, Q_2, Q_3 . Sapendo che $Q_{\text{ced}} = Q_1 + Q_3$, quale delle seguenti espressioni esprime il rendimento della macchina?
 - $\eta = 1 + \frac{|Q_1 + Q_3|}{Q_2};$
 - $\eta = 1 - \frac{|Q_1 + Q_3|}{Q_2};$
 - $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1 + Q_3};$
 - $\eta = 1 - \frac{Q_2}{|Q_1 + Q_3|}.$
- Una macchina di Carnot opera fra due sorgenti aventi temperature tali che $T_2 = 4T_1$. Se la macchina assorbe 500 J dalla sorgente calda, essa cede alla sorgente fredda:
 - 2000 J;
 - 250 J;
 - 500 J;
 - 125 J.
- Una macchina termica a gas perfetto descrive un ciclo costituito da: un'espansione isoterma reversibile, un'isocora reversibile, una compressione isoterma *irreversibile*, un'isocora reversibile. In un ciclo:
 - la variazione di entropia del gas è nulla;
 - la variazione di entropia del gas è positiva;
 - la variazione di entropia dell'universo termodinamico è nulla;
 - la variazione di entropia dell'universo termodinamico è negativa.

4. In una trasformazione, si osserva che un gas perfetto raddoppia il suo volume. Pertanto:
- A la sua variazione di entropia è sicuramente positiva;
 - B la sua variazione di entropia è sicuramente negativa;
 - C la sua variazione di entropia è positiva se anche la temperatura aumenta;
 - D la sua variazione di entropia può essere negativa se anche la temperatura aumenta.
5. Una macchina termica opera con tre sorgenti; si indichino con T_1, T_2, T_3 le temperature delle sorgenti e con Q_1, Q_2, Q_3 le quantità che la macchina scambia con ciascuna di esse. Se il ciclo della macchina è irreversibile:
- A $\frac{|Q_1|}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} + \frac{|Q_3|}{T_3} = 0$;
 - B $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} < 0$;
 - C $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} > 0$;
 - D $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$.

Problemi

Problema 9.1

Una mole di gas perfetto monoatomico descrive il ciclo reversibile in Figura 9.1. Nel punto A la pressione, il volume e la temperatura sono noti e valgono p_i, V_i e T_i . Calcolare:

- il calore assorbito e il lavoro compiuto durante il ciclo, esprimendoli solo in funzione di T_i ;
- il rendimento della macchina termica che lavora secondo il ciclo indicato;
- le variazioni di entropia del gas per tutte le trasformazioni del ciclo.
Verificare che la loro somma è zero.

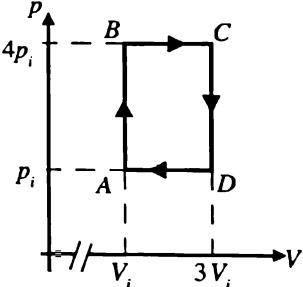


Figura 9.1

Problema 9.2

Un motore termico opera tra due sorgenti a temperature $T_2 = 600$ K e $T_1 = 350$ K. In ogni ciclo, esso assorbe 1000 J di calore e compie 250 J di lavoro.

- Trovare il rendimento del motore.
- Trovare la variazione di entropia dell'Universo, ΔS_U , durante ogni ciclo del motore.
- Sulla base dei due risultati precedenti, si mostri che il ciclo è irreversibile. Si trovi quindi il lavoro che si otterrebbe da una macchina reversibile operante tra le stesse due temperature e si mostri che la differenza tra i due lavori è uguale a $T_1 \Delta S_U$.

Problema 9.3

Un liquefattore di elio è una macchina frigorifera in grado di produrre elio liquido sottraendo calore a vapori di elio (precedentemente raffreddati alla temperatura di liquefazione, ossia 4.2 K) e cedendo

calore all'ambiente. Supponendo che il liquefattore si trovi in un laboratorio a 296 K, si determini la minima quantità di energia che esso cede al laboratorio in un ciclo, sapendo che il calore ceduto dall'olio quando condensa è pari a 150 mJ per ciclo.

Problema 9.4

Uno studente fornisce calore a 350 g di ghiaccio, alla temperatura di 0°C, mettendolo in contatto con una sorgente di calore alla temperatura di 25°C, finché il ghiaccio non fonde completamente.

- Qual è la variazione di entropia dell'acqua?
- Qual è la variazione di entropia della sorgente di calore?
- Qual è la variazione di entropia dell'universo?

Problema 9.5

Un contenitore adiabatico a pareti rigide è suddiviso in due parti di uguale volume V . In una delle due parti vi sono n moli di gas perfetto monoatomico, in equilibrio alla pressione p_i e alla temperatura T_i . Nell'altra parte viene fatto il vuoto. A un certo punto la parete che divide i due settori si rompe e il gas si espande riempiendo tutto il contenitore, fino a quando raggiunge un nuovo stato di equilibrio in cui il volume è $2V$. Determinare:

- la pressione p_f e la temperatura T_f dello stato finale;
- la variazione di entropia dell'universo tra lo stato iniziale e quello finale.

Problema 9.6

Si consideri un gas ideale monoatomico inizialmente in equilibrio in uno stato A caratterizzato da pressione p_A , volume V_A e temperatura T_A . Si supponga di poter portare il gas a uno stato finale in cui il suo volume è $2V_A$ scegliendo tra diverse trasformazioni reversibili: un'isobara, un'isoterma o un'adiabatica. Calcolare la variazione di entropia del gas in ognuna delle tre trasformazioni e determinare in quale caso la variazione di entropia è minima.

Problema 9.7

Un gas monoatomico descrive il ciclo frigorifero in Figura 9.2, che è lo stesso del Problema 8.12. Nello stato A , le variabili termodinamiche sono:

$$\begin{aligned} p_A &= 1.20 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \\ T_A &= 293.0 \text{ K}, \\ V_A &= 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3. \end{aligned}$$

La trasformazione AB è un'isoterma reversibile, mentre BC è un'adiabatica irreversibile e CA un'isocora reversibile. Si sa infine che $V_B = 2V_A$ e che $p_C = 2.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

- Quante sono le sorgenti con cui il gas scambia calore durante un ciclo?
- Calcolare il coefficiente di prestazione del ciclo.
- Calcolare la variazione di entropia del gas in ogni trasformazione e in un ciclo completo.
- Calcolare la variazione di entropia dell'universo durante un ciclo.

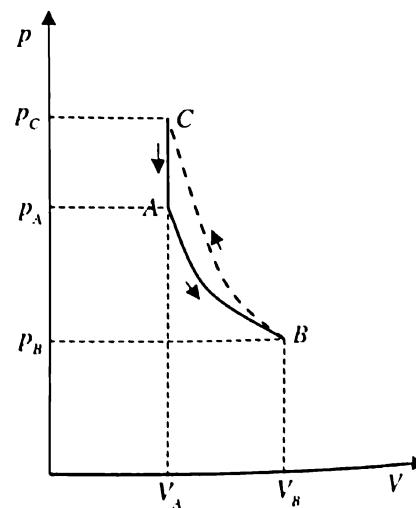


Figura 9.2

Problema 9.8

Si vuole determinare il calore specifico del rame usando un calorimetro delle mescolanze. Tale strumento è costituito da un contenitore di metallo, reso adiabatico mediante strati multipli di materiale isolante, inizialmente riempito con una massa nota di acqua m_a a temperatura nota, T_a . Esso ha un coperchio isolante, apribile, ed è munito di un termometro che misura costantemente la temperatura dell'acqua. Sia $m_a = 1.00 \text{ kg}$ e $T_a = 293.0 \text{ K}$. A questo punto una massa $m_r = 1.00 \text{ kg}$ di rame, precedentemente riscaldato fino alla temperatura $T_r = 393.0 \text{ K}$, viene immersa nel calorimetro, che viene prontamente richiuso. La temperatura dell'acqua aumenta rapidamente e infine si stabilizza a un valore di equilibrio $T_e = 301.4 \text{ K}$. Trascurando la capacità termica delle pareti del calorimetro, determinare:

- il calore specifico del rame, c_r ;
- la variazione di entropia dell'universo dal momento in cui la massa di rame viene immersa nell'acqua fino al raggiungimento dell'equilibrio termico finale.

Problema 9.9

Una macchina termica reversibile funzionante a gas ideale assorbe un calore Q_1 (noto) da una sorgente a temperatura T_1 , cede un calore Q_2 (incognito) a una sorgente a temperatura $T_2 = T_1/2$ e un calore $Q_3 = Q_2$ a una terza sorgente a temperatura $T_3 = T_1/4$.

- Disegnare qualitativamente il ciclo in un diagramma (p, V).
- Trovare il valore di Q_2 in funzione di Q_1 .
- Trovare il lavoro totale compiuto durante un ciclo e il rendimento.
- Calcolare la variazione di entropia di ciascuna sorgente e la variazione di entropia dell'universo.

Problema 9.10

Una macchina di Carnot (che indicheremo con C) lavora tra due sorgenti, aventi temperature T_1 e T_2 , con $T_2 > T_1$; essa ha un rendimento $\eta_C = 0.6$ e una potenza $P = 1500 \text{ W}$. Per ogni ciclo, assorbe il calore $Q_2 = 5000 \text{ J}$ dalla sorgente calda. Un'altra macchina termica, irreversibile (che indicheremo con I) lavora tra le due stesse sorgenti a T_1 e T_2 e, in particolare, assorbe dalla sorgente calda la stessa quantità di calore Q_2 assorbita dalla macchina C. Il rendimento della macchina irreversibile è $\eta_I = 0.2$.

- Calcolare il lavoro prodotto in un ciclo da ognuna delle due macchine.
- Calcolare quanto tempo impiega la macchina reversibile C a compiere un ciclo.
- Calcolare quanti cicli al secondo dovrebbe compiere la macchina irreversibile per erogare la stessa potenza P .
- Sapendo che la variazione di entropia dell'universo per ogni ciclo della macchina I vale $\Delta S_U = 4 \text{ J/K}$, trovare le due temperature T_1 e T_2 .

Problema 9.11

Una macchina termica opera tra due sorgenti alle temperature T_1 e $T_2 = 2T_1$, scambiando con la sorgente più calda T_2 una quantità di calore $Q_2 = 800 \text{ J}$. Sapendo che il rendimento di tale macchina è pari al 75% del rendimento di una macchina di Carnot che opera tra le stesse sorgenti, determinare la quantità di calore Q_1 scambiata con la sorgente più fredda.

Problema 9.12

Si consideri un ciclo di Carnot che avviene tra due sorgenti tra le quali è nota la differenza di temperatura $\Delta T = T_2 - T_1 = 200 \text{ K}$. Sapendo che il lavoro compiuto durante il ciclo è pari a $L = 1000 \text{ J}$, determinare la variazione di entropia del fluido lavorante lungo l'isoterma a temperatura più alta T_2 .

Problema 9.13

Si supponga che, per un gas, la relazione di dipendenza dalla temperatura del calore specifico a pressione costante $c_p(T)$ possa essere approssimata, per intervalli di temperatura non troppo estesi, da una relazione lineare del tipo $c_p = a + bT$. Si determinino i coefficienti a e b supponendo che, per una mole di gas riscaldato isobaricamente dalla temperatura $T_1 = 100$ K alla temperatura $T_2 = 200$ K, la quantità di calore assorbita sia $Q = 4.7 \cdot 10^4$ J e la variazione di entropia del gas sia $\Delta S = 314 \text{ J K}^{-1}$.

Problema 9.14

Il ciclo di un motore Diesel può esserci schematizzato come in Figura 9.3, ed è costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili: un'isobara AB , un'adiabatica BC , un'isocora CD e, infine, un'altra adiabatica, DA . Si consideri ora un motore Diesel funzionante con $n = 1$ moli di gas perfetto monoatomico. Sia, inoltre, $V_A = 0.010 \text{ m}^3$, $V_B = \frac{3}{2}V_A$, $V_C = 2V_A$ e $T_A = 300 \text{ K}$.

- Calcolare il lavoro fatto dal gas in un ciclo.
- Calcolare il rendimento del ciclo e paragonarlo al ciclo di Carnot di una macchina che opera fra due sorgenti aventi temperatura uguale a T_B (temperatura nello stato B) e T_D (temperatura nello stato D).
- Calcolare la variazione di entropia corrispondente a ciascuna trasformazione.

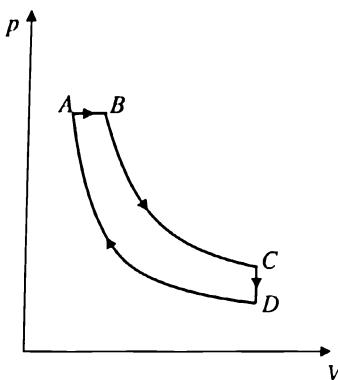


Figura 9.3

Problema 9.15

Una mole di gas perfetto monoatomico effettua il ciclo reversibile descritto in Figura 9.4. Nello stato A la pressione del gas è p_A e il suo volume è V_A ; nello stato B la pressione è $p_B = p_A/2$ e il volume è $V_B = 2V_A$.

- Calcolare il rendimento del ciclo.
- Calcolare la variazione di entropia nella trasformazione AB .

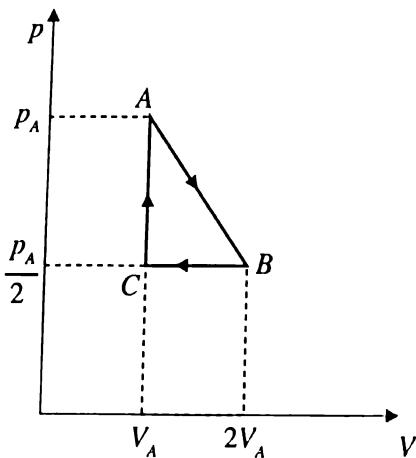


Figura 9.4

Problema 9.16

Una macchina termica scambia calore con un termostato (ossia un sistema artificialmente mantenuto a temperatura costante), che si comporta come una sorgente ideale alla temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$, e con

una vasca contenente 1000 l d'acqua (calore specifico $c = 4186 \text{ J}/(\text{kg K})$, densità $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$), inizialmente alla temperatura $T_2 = 370 \text{ K}$. La macchina assorbe calore dall'acqua e cede calore al termostato e il suo funzionamento è possibile finché la temperatura dell'acqua non sia pari a T_1 . Il sistema così costituito è isolato termicamente.

Si calcoli il lavoro massimo che si può ottenere dalla macchina e, in corrispondenza di tale valore, si valuti il rendimento e lo si confronti con quello della macchina di Carnot operante fra T_1 e T_2 .

Svolgimenti

Problema 9.1

SOLVIMENTO

► Usando sistematicamente l'equazione di stato dei gas perfetti per gli stati A, B, C e D si trovano le corrispondenti temperature:

$$T_A = \frac{p_i V_i}{nR} = T_i; \quad T_B = \frac{4p_i V_i}{nR} = 4T_i; \quad T_C = 12T_i; \quad T_D = 3T_i.$$

- a) A questo punto, il calore scambiato lungo le quattro trasformazioni può essere calcolato agevolmente:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nc_V(T_B - T_A) = n\frac{3}{2}R(4T_i - T_i) = \frac{9}{2}nRT_i \\ Q_{BC} &= nc_p(T_C - T_B) = n\frac{5}{2}R(12T_i - 4T_i) = 20nRT_i \\ Q_{CD} &= nc_V(T_D - T_C) = n\frac{3}{2}R(3T_i - 12T_i) = -\frac{27}{2}nRT_i \\ Q_{DA} &= nc_p(T_A - T_D) = n\frac{5}{2}R(T_i - 3T_i) = -5nRT_i. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Il calore assorbito è la somma dei due calori positivi, cioè $Q_{\text{ass}} = Q_{AB} + Q_{BC} = 24.5nRT_i$. Il lavoro compiuto dal gas durante il ciclo è uguale alla somma dei lavori compiuti lungo le quattro trasformazioni. Poiché $L_{AB} = L_{CD} = 0$, si ottiene

$$L = L_{BC} + L_{DA} = +(4p_i)(2V_i) - (p_i)(2V_i) = 6nRT_i.$$

Si noti che L è anche uguale alla somma di tutti i calori scambiati.

- b) Il rendimento della macchina termica è quindi dato da

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}} = \frac{6nRT_i}{24.5nRT_i} = 0.2449.$$

- c) Le quattro trasformazioni sono reversibili; pertanto la variazione di entropia lungo ognuna di esse può essere calcolata lungo la trasformazione effettivamente compiuta dal gas;

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = nc_V \int_A^B \frac{dT}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = \frac{3}{2}nR \ln 4 \\ \Delta S_{BC} &= \int_B^C \frac{\delta Q}{T} = nc_p \int_B^C \frac{dT}{T} = nc_p \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = \frac{5}{2}nR \ln 3 \\ \Delta S_{CD} &= \int_C^D \frac{\delta Q}{T} = nc_V \int_C^D \frac{dT}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_D}{T_C}\right) = \frac{3}{2}nR \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ \Delta S_{DA} &= \int_D^A \frac{\delta Q}{T} = nc_p \int_D^A \frac{dT}{T} = nc_p \ln\left(\frac{T_A}{T_D}\right) = \frac{5}{2}nR \ln\left(\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

È evidente che la somma di tutte le variazioni di entropia è zero come ci si aspetta per un ciclo.

Problema 9.2

Svolgimento

► Sia $Q_2 = +1000 \text{ J}$ il calore che il gas assorbe dalla sorgente a temperatura T_2 , Q_1 il calore che cede alla temperatura T_1 , e $L = +250 \text{ J}$ il lavoro compiuto in un ciclo. Alla fine di un ciclo l'energia interna del gas torna al valore iniziale, perciò $\Delta U = 0$ e quindi $Q_1 + Q_2 - L = 0$ da cui $Q_1 = L - Q_2 = -750 \text{ J}$ (negativo perché ceduto dal gas).

- a) Il rendimento del ciclo è

$$\eta = \frac{L}{Q_2} = 0.25.$$

- b) Alla fine del ciclo, il gas torna nello stato iniziale e quindi anche la sua entropia (che è una funzione di stato) torna al valore iniziale, per cui $\Delta S_{\text{sist}} = 0$ (intendendo con “sistema” il gas). La variazione di entropia dell'universo (termodinamico) è data da

$$\Delta S_U = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{amb}} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

ossia è uguale alla somma delle variazioni di entropia delle due sorgenti. Queste ultime si possono calcolare immaginando uno scambio di calore reversibile isotermo, ossia

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_2}{T_2} = -1.667 \text{ J/K} \quad \Delta S_1 = -\frac{Q_1}{T_1} = +2.143 \text{ J/K},$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che un calore positivo (assorbito) dal punto di vista del gas è negativo (ceduto) dal punto di vista della sorgente. Infine, si ottiene $\Delta S_U = +0.476 \text{ J/K}$.

- c) Il fatto che l'entropia dell'universo aumenti durante un ciclo è sufficiente a provare che tale ciclo è irreversibile. Si può però anche ragionare sul rendimento: infatti una macchina di Carnot operante tra le stesse due temperature avrebbe un rendimento

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.416$$

mentre per il ciclo descritto dal problema si ha $\eta = 0.25 < \eta_C$. A parità di calore assorbito Q_2 , tale macchina di Carnot produrrebbe un lavoro pari a $L_{\text{rev}} = \eta_C Q_2 = 416 \text{ J}$. La differenza tra i due lavori è $L_{\text{rev}} - L = 166 \text{ J}$. D'altra parte $T_1 \Delta S_U = 166 \text{ J}$, come si voleva verificare.

Problema 9.3

Svolgimento

► Si chiami $T_2 = 296.0 \text{ K}$ la temperatura ambiente e $T_1 = 4.2 \text{ K}$ la temperatura di liquefazione dell'olio. Una macchina frigorifera reale ha un coefficiente di prestazione

$$K = |Q_{\text{ass}}| / (|Q_{\text{ced}}| - |Q_{\text{ass}}|);$$

tale valore è sempre minore del coefficiente di prestazione di una macchina ideale (reversibile) che lavori tra le stesse temperature, che sarebbe (si veda la 9.4): $K_C = T_1 / (T_2 - T_1)$. Pertanto

$$\frac{|Q_{\text{ass}}|}{|Q_{\text{ced}}| - |Q_{\text{ass}}|} \leq \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

da cui si ottiene che

$$\frac{|Q_{\text{ced}}|}{|Q_{\text{ass}}|} \geq \frac{T_2}{T_1} \rightarrow |Q_{\text{ced}}| \geq \frac{T_2}{T_1} |Q_{\text{ass}}| = 10.57 \text{ J}.$$

Quindi se la macchina è reversibile, essa cede all'ambiente un calore pari a 10.57 J per ciclo; se è irreversibile, invece, cede un calore maggiore.

Problema 9.4**SVOLGIMENTO**

► Sia $m = 0.350 \text{ kg}$, $T_1 = 0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K}$, $T_2 = 25^\circ\text{C} = 298.15 \text{ K}$. Il calore latente di fusione dell'acqua è $L_f = 3.335 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$.

- a) Sia Q il calore totale assorbito dall'acqua durante il cambiamento di fase. La variazione di entropia dell'acqua va calcolata lungo una trasformazione ipotetica, reversibile, in cui essa assorbe la stessa quantità di calore. La più semplice trasformazione è una isotermia reversibile, per la quale

$$\Delta S_{\text{acqua}} = \frac{Q}{T_1} = \frac{mL_f}{T_1} = 427.33 \text{ J/K.}$$

- b) La variazione di entropia della sorgente di calore è analogamente:

$$\Delta S_{\text{sorg}} = \frac{-Q}{T_2} = -\frac{mL_f}{T_2} = -391.50 \text{ J/K.}$$

- c) La variazione di entropia dell'universo risulta infine essere

$$\Delta S_U = \Delta S_{\text{acqua}} + \Delta S_{\text{sorg}} = +35.83 \text{ J/K.}$$

Problema 9.5**SVOLGIMENTO**

► Poiché il contenitore è adiabatico, il sistema è isolato e coincide con l'universo termodinamico; pertanto $\Delta S_U = \Delta S_{\text{sist}}$. Inoltre, la trasformazione descritta nel testo è chiaramente irreversibile perché non è quasi-statica (gli stati intermedi non sono di equilibrio) e non è possibile invertirla facendo sì che il sistema ripassi per gli stessi stati. Tale trasformazione, in cui il gas si espande in vuoto, è detta *espansione libera di Joule*. Sia $V_i = V$ il volume iniziale e $V_f = 2V$ il volume finale.

- a) Per determinare la temperatura finale, partiamo dal primo principio:

$$\Delta U = Q - L;$$

in questo caso si ha $Q = 0$ perché il contenitore è adiabatico, e $L = 0$ perché il gas si espande senza compiere lavoro. Pertanto $\Delta U = 0$ e conseguentemente $\Delta T = 0$. Quindi la temperatura finale è uguale a quella iniziale: $T_f = T_i$.

Sebbene la trasformazione sia irreversibile, e quindi non possa essere disegnata in un diagramma di Watt-Clapeyron, i due stati iniziale e finale hanno uguale temperatura e, applicando l'equazione di stato dei gas ideali, la condizione $T_i = T_f$ si traduce in $p_i V_i = p_f V_f$.² Usando i valori dei volumi, si ha quindi $p_i V = p_f (2V)$, da cui $p_f = p_i / 2$.

- b) Come già detto, $\Delta S_U = \Delta S_{\text{sist}}$. La variazione di entropia richiesta si può quindi calcolare lungo una qualunque trasformazione reversibile che connetta lo stato iniziale allo stato finale. Poiché tali stati hanno uguale temperatura, la cosa più ovvia è usare un'isoterma reversibile, lungo la quale $dU = 0$ e quindi

$$\delta Q = \delta L = pdV = nRT \frac{dV}{V}.$$

La variazione di entropia è quindi

$$\Delta S_U = \Delta S_{\text{sist}} = \int_i^f \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = nR \int_i^f \frac{dV}{V} = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = nR \ln 2.$$

² Questa è identica alla legge di Boyle, che però non vale per gli stati intermedi (che non sono di equilibrio) ma solo per i due stati iniziale e finale, che infatti giacciono sulla stessa isoterma reversibile.

Problema 9.6**SVOLGIMENTO**

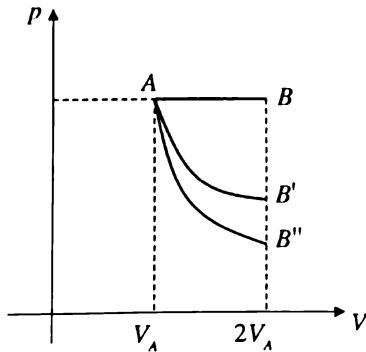
► Le tre trasformazioni sono disegnate in Figura 9.5. Siano B , B' e B'' gli stati finali dell'isobara, dell'isoterma e dell'adiabatica, rispettivamente.

Nel caso dell'isobara, lo stato finale è caratterizzato dal volume $V_B = 2V_A$ e dalla pressione $p_B = p_A$. La temperatura si può ottenere ricordando che, in un'isobara, T e V sono proporzionali, ossia che

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B}$$

da cui $T_B = 2T_A$. Il calore infinitesimo scambiato nell'isobara è $\delta Q_{\text{isob}} = nc_p dT$ per cui la variazione di entropia è

$$\Delta S_{\text{isob}} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{isob}} = nc_p \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) = \frac{5}{2} nR \ln 2. \quad (9.13)$$

**Figura 9.5**

Nel caso dell'isoterma, lo stato finale B' è caratterizzato dal volume $V_{B'} = 2V_A$ e dalla temperatura $T_{B'} = T_A$. Il calore infinitesimo scambiato nell'isoterma è

$$\delta Q_{\text{isot}} = \delta L = pdV = nRT \frac{dV}{V}$$

per cui la variazione di entropia è

$$\Delta S_{\text{isot}} = \int_A^{B'} \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{isot}} = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = nR \ln 2, \quad (9.14)$$

ossia 2.5 volte più piccola che nel caso dell'isobara.

Nel caso dell'adiabatica, il calore scambiato è nullo: $\delta Q = 0$ e quindi $\Delta S_{\text{adiab}} = 0$. Pertanto, la minima variazione possibile di entropia è zero e si ottiene nel caso di un'adiabatica reversibile.

Problema 9.7**SVOLGIMENTO**

► Si tratta di un ciclo frigorifero in cui il gas assorbe calore lungo l'isoterma AB , e cede calore lungo l'isocora CA . Il ciclo è irreversibile perché la trasformazione BC è irreversibile. Pertanto ci aspettiamo che la variazione di entropia del sistema lungo un ciclo sia zero, ma la variazione di entropia dell'universo sia maggiore di zero: $\Delta S_U = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{amb}} = \Delta S_{\text{amb}} > 0$. Il numero di moli del gas non è noto ma si può ricavare dall'equazione di stato: $p_A V_A = nRT_A$ da cui

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 0.148 \text{ mol.}$$

- Lungo l'isoterma AB il gas scambia calore con una sola sorgente a temperatura T_A ; lungo l'adiabatica BC non c'è scambio di calore per cui non vi sono sorgenti coinvolte. Lungo l'isocora CA il gas cede calore reversibilmente; ciò significa che la trasformazione è quasi-statica e quindi, in ogni istante, il gas deve essere in equilibrio termico con la sorgente. Poiché il tratto CA interseca infinite isoterme, dobbiamo immaginare una successione di infinite sorgenti a temperature via via decrescenti, che differiscono l'una dall'altra di una quantità infinitesima dT . Quindi questo ciclo ha in realtà un numero infinito di sorgenti.
- Per calcolare il coefficiente di prestazione ci serve prima trovare il calore assorbito dalla sorgente fredda (in questo caso Q_{AB}) e il lavoro necessario per far avvenire il ciclo. Poiché AB è un'isoterma reversibile,

$$Q_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = nRT_A \ln 2 = 249.5 \text{ J.} \quad (9.15)$$

Il lavoro totale L non può essere calcolato direttamente, perché lungo l'adiabatica BC non sappiamo come scriverlo: non abbiamo infatti indicazioni sulla pressione esterna e sappiamo che la pressione del gas non è ben definita perché la trasformazione non è quasi-statica. Tuttavia, sappiamo che in un ciclo dev'essere $\Delta U = 0$ e quindi, dal primo principio, ricaviamo che $Q = L$ avendo indicato con Q il calore totale scambiato lungo il ciclo. Quindi $L = Q_{AB} + Q_{CA}$. Il calore Q_{CA} può essere facilmente calcolato come $Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C)$ ma serve trovare prima T_C . Poiché nell'isocora CA la temperatura e la pressione sono direttamente proporzionali, si ha

$$\frac{T_C}{p_C} = \frac{T_A}{p_A} \quad \rightarrow \quad T_C = T_A \frac{p_C}{p_A} = 488.3 \text{ K}. \quad (9.16)$$

Usando questo risultato si trova $Q_{CA} = -360 \text{ J}$ e quindi $L = Q_{AB} + Q_{CA} = -110.5 \text{ J}$. Il coefficiente di prestazione è pertanto

$$K = \frac{Q_{\text{ass}}}{|L|} = \frac{Q_{AB}}{|L|} = 2.26.$$

- c) Consideriamo l'isoterma reversibile AB . La variazione di entropia del sistema, che indicheremo con $\Delta S_{AB}^{\text{sist}}$, è

$$\Delta S_{AB}^{\text{sist}} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{pdV}{T} = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = nR \ln 2 = 0.852 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (9.17)$$

Per quanto riguarda l'adiabatica irreversibile BC , la variazione di entropia deve essere calcolata immaginando una trasformazione *reversibile* che connetta B e C e che *non* può essere un'adiabatica³. In alternativa, si può far uso dell'equazione 9.10 che esprime la variazione di entropia di un gas ideale tra due stati qualsiasi:

$$\Delta S_{BC}^{\text{sist}} = nc_V \ln \frac{T_C}{T_B} + nR \ln \frac{V_C}{V_B}. \quad (9.18)$$

Sappiamo che $V_B = 2V_C$ e che $T_B = T_A$. Per quanto visto sopra (Equazione 9.16), si ha inoltre

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{T_C}{T_A} = \frac{p_C}{p_A},$$

pertanto dall'Equazione 9.18 si ottiene

$$\Delta S_{BC}^{\text{sist}} = n \frac{3}{2} R \ln \left(\frac{2.00}{1.20} \right) - nR \ln 2 = 0.089 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (9.19)$$

Infine, lungo la trasformazione CA , che è isocora,

$$\Delta S_{CA}^{\text{sist}} = \int_C^A \frac{\delta Q}{T} = nc_V \ln \left(\frac{T_A}{T_C} \right) = n \frac{3}{2} R \ln \left(\frac{1.20}{2.00} \right) = -0.941 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (9.20)$$

Confrontando le espressioni 9.17, 9.19 e 9.20, è evidente che la variazione di entropia del sistema lungo un ciclo è zero. Un controllo numerico mostra infatti che

$$\Delta S^{\text{sist}} = \Delta S_{AB}^{\text{sist}} + \Delta S_{BC}^{\text{sist}} + \Delta S_{CA}^{\text{sist}} = (0.852 + 0.089 - 0.941) \frac{\text{J}}{\text{K}} = 0.$$

³ Infatti, l'adiabatica reversibile è isoentropica mentre gli stati A e B hanno entropia diversa.

- d) Per calcolare la variazione di entropia dell'universo durante un ciclo conviene ricordare che, in ogni trasformazione *reversibile* aperta, la variazione di entropia dell'universo è zero. Pertanto

$$\Delta S_{AB}^U = 0; \quad \Delta S_{CA}^U = 0. \quad (9.21)$$

Invece la variazione di entropia dell'universo lungo la trasformazione *BC* è diversa da zero. Però, siccome si tratta di un'adiabatica, il sistema è isolato e coincide con l'universo termodinamico, per cui

$$\Delta S^U = \Delta S_{BC}^U = \Delta S_{BC}^{\text{sist}} = 0.089 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (9.22)$$

Problema 9.8

Svolgimento

► Consideriamo come istante iniziale quello in cui la massa di rame viene immersa nell'acqua. A partire da tale istante, vi è uno scambio di calore tra rame e acqua che porta al raggiungimento dell'equilibrio termico. Poiché il contenitore è adiabatico e il testo dice di trascurare la capacità termica delle pareti del calorimetro, non vi sono altri corpi coinvolti negli scambi termici.

- a) Da quanto detto sopra segue che la somma algebrica dei calori scambiati dall'acqua e dal rame deve essere zero: $Q_a + Q_r = 0$ ossia

$$m_a c_a (T_e - T_a) + m_r c_r (T_e - T_r) = 0$$

da cui, ricordando che $c_a = 4186 \text{ J}/(\text{kg K})$, si ricava

$$c_r = -\frac{m_a c_a (T_e - T_a)}{m_r (T_e - T_r)} \simeq 383.9 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

- b) Grazie al fatto che il contenitore è adiabatico, l'universo termodinamico è costituito soltanto dall'acqua e dalla massa di rame. Per calcolarne la variazione di entropia occorre calcolare separatamente le variazioni di entropia dei due componenti. Per l'acqua:

$$\Delta S_a = \int \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = \int_{T_a}^{T_e} \frac{m_a c_a dT}{T} = m_a c_a \ln \left(\frac{T_e}{T_a} \right) = 118.3 \frac{\text{J}}{\text{K}};$$

mentre per la massa di rame:

$$\Delta S_r = \int \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = \int_{T_r}^{T_e} \frac{m_r c_r dT}{T} = m_r c_r \ln \left(\frac{T_e}{T_r} \right) = -101.9 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Globalmente, quindi,

$$\Delta S_U = \Delta S_r + \Delta S_a = (-101.9 + 118.3) \frac{\text{J}}{\text{K}} = 16.4 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Problema 9.9

Svolgimento

► La macchina termica descritta ha soltanto tre sorgenti. Quando il gas è a contatto con una sorgente, la sua temperatura è costante e quindi l'unica trasformazione che esso può descrivere è un'isoterma (reversibile). Mentre si sposta da una sorgente all'altra, il gas non deve scambiare calore perché altrimenti ci sarebbero altre sorgenti in gioco; dunque, le tre isoterme devono essere connesse da tratti di adiabatica. Dal fatto che Q_1 è assorbito mentre Q_2 e Q_3 sono ceduti, si capisce

che il gas si espande quando è a contatto con la sorgente a T_1 e invece si comprime quando è a contatto con le sorgenti a T_2 e T_3 .

- a) Un possibile ciclo che soddisfa questi requisiti è rappresentato (qualitativamente) nella Figura 9.6, dove

$AB =$ isoterma a T_1
 $BC =$ adiabatica
 $CD =$ isoterma a T_3
 $DE =$ adiabatica
 $EF =$ isoterma a T_2
 $FA =$ adiabatica.

- b) Per calcolare il calore Q_2 (uguale a Q_3) si può usare il fatto che in un ciclo reversibile con n sorgenti il teorema di Clausius ci assicura che

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0.$$

In questo caso, tale espressione si riduce a

$$\sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0;$$

tenendo conto che $Q_2 = Q_3$, che $T_2 = T_1/2$ e che $T_3 = T_1/4$, da qui si ottiene

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{2Q_2}{T_1} + \frac{4Q_2}{T_1} = 0 \quad \rightarrow Q_2 = -\frac{1}{6}Q_1.$$

Ovviamente, $Q_3 = Q_2 = -Q_1/6$.

Se non si ricorda il teorema di Clausius, alla stessa identica conclusione si arriva imponendo che, siccome il gas descrive un ciclo, la variazione della sua entropia lungo il ciclo sia zero. Questa condizione è infatti identica alla relazione $\sum_i (Q_i/T_i) = 0$ menzionata sopra.

- c) Grazie al primo principio della termodinamica, il lavoro totale compiuto durante il ciclo deve necessariamente essere uguale al calore totale scambiato. Pertanto

$$L = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}Q_1.$$

Il rendimento della macchina termica si calcola come:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{\frac{2}{3}Q_1}{Q_1} = \frac{2}{3}.$$

- d) La variazione di entropia di ogni sorgente è uguale al calore da essa scambiato, diviso per la temperatura della sorgente stessa. Attenzione al fatto che stavolta i calori devono essere scritti dal punto di vista delle sorgenti. Per esempio, la sorgente a T_1 cede al gas un calore $-Q_1$, e così via. Pertanto

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \frac{-Q_1}{T_1} = -\frac{Q_1}{T_1} \\ \Delta S_2 &= \frac{-Q_2}{T_2} = \frac{1}{3} \frac{Q_1}{T_1} \\ \Delta S_3 &= \frac{-Q_3}{T_3} = \frac{2}{3} \frac{Q_1}{T_1}. \end{aligned}$$

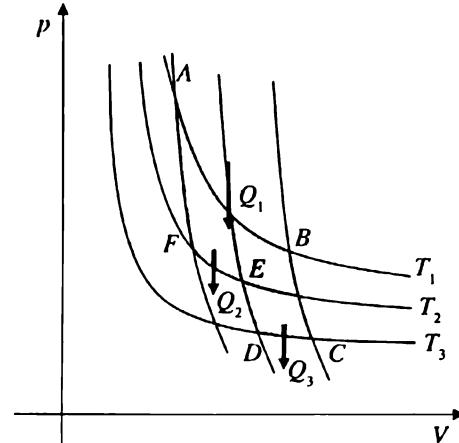


Figura 9.6

Appare evidente che la somma delle tre variazioni di entropia è zero. Tale somma coincide con la variazione di entropia dell'universo perché il sistema compie un ciclo e $\Delta S_{\text{sist}} = 0$. Ne risulta che $\Delta S_U = 0$, il che è corretto visto che il ciclo è reversibile.

Problema 9.10**SVOLGIMENTO**

► Sia per la macchina reversibile sia per quella irreversibile, conosciamo il calore assorbito dalla sorgente a temperatura più alta e il rendimento, per cui il calcolo del lavoro (punto a) è banale. Una volta trovato il lavoro, e poiché si conosce la potenza della macchina C, è facile trovare il tempo necessario a compiere un ciclo (punto b). Analogamente semplice è trovare la potenza della macchina I richiesta al punto (c). Per quanto riguarda il punto (d), occorre usare il concetto di energia inutilizzabile.

a) Poiché il rendimento è il rapporto tra il lavoro compiuto e il calore assorbito, si ha che

$$L_C = \eta_C Q_2 = 3000 \text{ J}$$

e

$$L_I = \eta_I Q_2 = 1000 \text{ J}.$$

b) Poiché la potenza è il lavoro compiuto nell'unità di tempo, la macchina C compie un lavoro di 1500 J per ogni secondo; però, abbiamo appena trovato che in un ciclo compie un lavoro pari a 3000 J. Quindi in un solo ciclo la macchina eroga un lavoro pari al doppio del lavoro che deve erogare in un secondo. Pertanto, la macchina reversibile impiega un tempo $t_C = 2 \text{ s}$ per compiere un ciclo. Detto in altro modo: poiché $P = L_C/t_C$, si ha che

$$t_C = \frac{L_C}{P} = \frac{3000 \text{ J}}{1500 \text{ W}} = 2 \text{ s}.$$

c) Il lavoro erogato dalla macchina irreversibile in un ciclo è pari a $L_I = 1000 \text{ J}$. Per avere una potenza di 1500 W, la macchina dovrebbe quindi compiere un ciclo e mezzo ogni secondo. Pertanto il tempo necessario per compiere un ciclo risulta $t_I = 1/1.5 \simeq 0.67 \text{ s}$. Detto in altro modo: poiché $P = L_I/t_I$, si ha che

$$t_I = \frac{L_I}{P} = \frac{1000 \text{ J}}{1500 \text{ W}} = \frac{2}{3} \text{ s}.$$

La frequenza con cui opera la macchina (numero di cicli al secondo) è quindi

$$\eta_I = \frac{1}{t_I} = 1.5 \text{ s}^{-1}.$$

d) Dall'espressione del rendimento per una macchina di Carnot sappiamo che

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.6$$

ossia

$$\frac{T_1}{T_2} = 0.4,$$

da cui $T_1 = 0.4 T_2$. Ci serve però un'altra equazione per ricavare le due incognite. L'informazione che ci viene data nel testo della domanda è la variazione di entropia dell'universo durante un ciclo della macchina irreversibile. Ricordiamo il legame tra variazione di entropia dell'universo ed energia inutilizzabile,

$$L_C - L_I = T_{\min} \Delta S_U,$$

Nel nostro caso $T_{\min} = T_1$ e i lavori erogati dalle due macchine sono stati già calcolati: $L_C = 3000 \text{ J}$ e $L_I = 1000 \text{ J}$. Pertanto

$$T_1 = \frac{L_C - L_I}{\Delta S_U} = \frac{2000}{4} \text{ K} = 500 \text{ K}.$$

Usando l'informazione che $T_1 = 0.4T_2$ si ottiene poi che $T_2 = 2.5T_1 = 1250 \text{ K}$.

Problema 9.11

SVOLGIMENTO

- Il rendimento della macchina termica è pari a

$$\eta = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2}$$

mentre il rendimento di una macchina di Carnot che opera tra le stesse sorgenti è dato da

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Imponendo che il rendimento della macchina sia il 75% di quello della macchina di Carnot otteniamo

$$1 + \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{3}{4} \eta_C = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right)$$

da cui

$$Q_1 = \left[\frac{3}{4} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) - 1 \right] Q_2 = \left[\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \right) - 1 \right] 800 \text{ J} = -\frac{5}{8} 800 \text{ J} = -500 \text{ J}.$$

Il calore Q_1 risulta (correttamente) negativo, in quanto ceduto dalla macchina alla sorgente fredda.

Problema 9.12

SVOLGIMENTO

- La variazione di entropia del fluido lavorante lungo l'isoterma T_2 è

$$\Delta S_2 = \int \frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{1}{T_2} \int \delta Q_2 = \frac{Q_2}{T_2}$$

analogamente la variazione di entropia lungo l'isoterma T_1 è

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1}.$$

Il lavoro eseguito durante il ciclo è dato da

$$L = Q_2 + Q_1 = Q_2 - |Q_1|$$

che può essere espresso in funzione delle due variazioni di entropia utilizzando le equazioni precedenti

$$L = \Delta S_2 T_2 + \Delta S_1 T_1.$$

Lungo le trasformazioni adiabatiche del ciclo non vi è variazione di entropia, mentre la variazione totale di entropia durante tutto il ciclo deve essere nulla, per cui

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$$

da cui

$$\Delta S_1 = -\Delta S_2.$$

L'espressione ottenuta per il lavoro diventa pertanto

$$L = \Delta S_2 T_2 - \Delta S_2 T_1 = \Delta S_2 (T_2 - T_1) = \Delta S_2 \Delta T$$

da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$\Delta S_2 = \frac{L}{\Delta T} = \frac{1000 \text{ J}}{200 \text{ K}} = 5 \text{ J K}^{-1}.$$

Problema 9.13

SVOLGIMENTO

► Per risolvere il problema occorre scrivere sia Q sia ΔS in funzione dei parametri a e b . Si noti che, poiché c_p dipende dalla temperatura, il gas in questione *non* è un gas perfetto. La quantità di calore scambiata durante una variazione infinitesima di temperatura a pressione costante è

$$\delta Q = n c_p dT = n(a + bT) dT$$

pertanto, nel caso della trasformazione finita da T_1 a T_2

$$Q = n \int_{T_1}^{T_2} (a + bT) dT = na(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}nb \left[(T_2)^2 - (T_1)^2 \right]. \quad (9.23)$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia si ha invece

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n \frac{a + bT}{T} dT = n \left(\frac{a}{T} + b \right) dT$$

e quindi, per la trasformazione finita da T_1 a T_2 ,

$$\Delta S = n \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{a}{T} + b \right) dT = na \ln \frac{T_2}{T_1} + nb(T_2 - T_1). \quad (9.24)$$

Possiamo mettere a sistema le Equazioni 9.23 e 9.24 per Q e per ΔS per ricavare a e b . Per comodità di scrittura è opportuno introdurre le seguenti definizioni

$$A = n(T_2 - T_1); \quad B = n \frac{1}{2} \left[(T_2)^2 - (T_1)^2 \right]; \quad C = n \ln \frac{T_2}{T_1}; \quad (9.25)$$

utilizzando le quali il sistema può essere scritto nella semplice forma seguente:

$$\begin{cases} Aa + Bb = Q \\ Ca + Ab = \Delta S. \end{cases} \quad (9.26)$$

Risolvendolo si ottengono le espressioni cercate per a e b :

$$a = \frac{AQ - B\Delta S}{A^2 - BC}; \quad b = \frac{CQ - A\Delta S}{BC - A^2}. \quad (9.27)$$

Tenendo conto del fatto che $A = 100 \text{ mol K}$, $B = 1.5 \cdot 10^4 \text{ mol K}^2$ e $C \simeq 0.693 \text{ mol}$, si ottiene

$$a = 25.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$b = 2.96 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-2}.$$

Problema 9.14

SVOLGIMENTO

► Cominciamo col calcolare le coordinate termodinamiche incognite nei vari stati A , B , C e D . Nello stato A , essendo noti n , V_A e T_A , dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2.49 \cdot 10^5 \text{ Pa.} \quad (9.28)$$

Nello stato B , essendo $V_B = \frac{3}{2}V_A$ e $p_B = p_A$, utilizzando nuovamente l'equazione di stato si ottiene

$$T_B = \frac{3}{2}T_A = 450 \text{ K.}$$

Per lo stato C , ricordiamo che la trasformazione BC è adiabatica e reversibile, per cui

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \quad (9.29)$$

dove $\gamma = \frac{5}{3}$ per un gas perfetto monoatomico. Dalla 9.29, tenendo presente che $V_B = \frac{3}{2}V_A$ e $V_C = 2V_A$, si ricava

$$T_C = T_B \left(\frac{3}{4} \right)^{\gamma-1} = 2T_A \left(\frac{3}{4} \right)^{\gamma} = 371.47 \text{ K} \quad (9.30)$$

dove nel secondo passaggio si è usata la relazione $T_B = \frac{3}{2}T_A$. Per determinare la pressione p_C , si parte dall'equazione di stato $p_C V_C = nRT_C$ e, usando il risultato 9.30 e il fatto che $V_C = 2V_A$, si ricava

$$p_C = p_A \left(\frac{3}{4} \right)^{\gamma} = 1.54 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Infine, per lo stato D , consideriamo che la trasformazione CD è isocora e quindi $V_D = V_C = 2V_A$. Inoltre, la trasformazione DA è adiabatica reversibile, quindi sussiste la relazione $p_D V_D^{\gamma} = p_A V_A^{\gamma}$, da cui si ottiene

$$p_D = p_A \left(\frac{1}{2} \right)^{\gamma} = 0.78 \cdot 10^5 \text{ Pa.} \quad (9.31)$$

Dall'equazione di stato si ottiene infine $T_D = (2^{1-\gamma})T_A = 188.99 \text{ K}$.

- a) Grazie al primo principio della termodinamica sappiamo che in un ciclo $\Delta U = 0$ per cui $Q = L$. Il gas non compie lavoro nella trasformazione isocora CD : in tutte le altre trasformazioni il lavoro è non nullo. Però, nelle trasformazioni adiabatiche BC e DA , il gas non scambia calore. Pertanto anziché calcolare il lavoro totale L come somma dei lavori compiuti lungo le tre trasformazioni non isocore AB , BC e DA , conviene calcolare il calore totale scambiato dal gas lungo le due trasformazioni non adiabatiche, ossia AB e CD . Ricordando che $c_V = 3R/2$ e $c_p = 5R/2$, il calore scambiato nell'isobara AB vale

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 3116.25 \text{ J} \quad (9.32)$$

mentre quello scambiato lungo l'isocora CD vale

$$Q_{CD} = nc_v(T_D - T_C) = -2274.60 \text{ J.} \quad (9.33)$$

In particolare, $Q = Q_{AB} + Q_{CD} = 841.65 \text{ J}$ è il calore scambiato durante l'intero ciclo, che coincide con il lavoro totale compiuto:

$$L = Q = 841.65 \text{ J.}$$

b) Il rendimento del ciclo è dato da

$$\eta = \frac{L}{Q_{AB}} = 1 - \frac{c_V(T_C - T_D)}{c_p(T_B - T_A)} = 0.27 \quad (9.34)$$

che va paragonato con

$$\eta_C = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 0.58 \quad (9.35)$$

che rappresenta il rendimento della macchina di Carnot.

c) Essendo l'entropia una funzione di stato, la sua variazione su un ciclo è sempre nulla, quindi $\Delta S = 0$. Essendo le adiabatiche reversibili anche isoentropiche, segue che $\Delta S_{BC} = 0$ e $\Delta S_{DA} = 0$. Pertanto

$$\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} = 0$$

da cui $\Delta S_{CD} = -\Delta S_{AB}$. Per calcolare la variazione di entropia nella trasformazione isobara AB , utilizziamo la relazione

$$\Delta S_{AB} = n c_p \ln \frac{T_B}{T_A} = 8.42 \text{ J/K}. \quad (9.36)$$

Problema 9.15

Svolgimento

► Ricaviamo innanzitutto le variabili termodinamiche incognite negli stati A , B e C .

Nello stato A la temperatura si ottiene mediante l'equazione di stato: $T_A = p_A V_A / (nR)$.

Nello stato B , si ha $p_B = p_A/2$ e $V_B = 2V_A$, da cui $T_B = T_A$. Pertanto, A e B hanno la stessa temperatura e giacciono sulla stessa isoterna reversibile.

Nello stato C , si ha $p_C = p_A/2$, $V_C = V_A$, da cui $T_C = T_A/2$.

a) Per calcolare il rendimento, troviamo innanzitutto il lavoro compiuto nel ciclo, che corrisponde all'area del triangolo ABC :

$$L = \frac{(p_A - p_C)(V_B - V_C)}{2} = \frac{p_A V_A}{4} = \frac{nRT_A}{4}. \quad (9.37)$$

Per determinare il calore assorbito, si noti che il gas assorbe calore nelle trasformazioni AB e CA . Per calcolare il calore Q_{AB} , osserviamo che $Q_{AB} = \Delta u_{AB} + L_{AB} = L_{AB}$, visto che non c'è variazione di temperatura tra A e B . D'altra parte L_{AB} è l'area sottesa dalla retta AB . Quindi

$$Q_{AB} = L_{AB} = L + p_C(V_B - V_C) = \frac{p_A V_A}{4} + \frac{p_A V_A}{2} = \frac{3}{4} p_A V_A = \frac{3}{4} nRT_A. \quad (9.38)$$

Il calore scambiato lungo la trasformazione isocora CA coincide con la variazione di energia interna del gas tra C e A perché $L_{CA} = 0$. Quindi

$$Q_{CA} = \Delta u_{CA} = n c_V (T_A - T_C) = n c_V \frac{T_A}{2} = \frac{3}{4} nRT_A. \quad (9.39)$$

Il rendimento risulta pertanto

$$\eta = \frac{L}{Q_{AB} + Q_{CA}} = \frac{\frac{1}{4} nRT_A}{\frac{3}{4} nRT_A + \frac{3}{4} nRT_A} = \frac{1}{6}. \quad (9.40)$$

b) Per il calcolo della variazione di entropia, dalla relazione generale 9.10 otteniamo

$$\Delta S_{AB} = n c_V \ln \frac{T_B}{T_A} + n R \ln \frac{V_B}{V_A} = n R \ln 2. \quad (9.41)$$

Problema 9.16**SVOLGIMENTO**

► In ogni ciclo della macchina il fluido lavorante assorbe calore dall'acqua e ne cede al termostato: indichiamo con Q_1 e Q_2 , rispettivamente, il calore ceduto e assorbito durante l'intero funzionamento della macchina, al termine del quale l'acqua si è raffreddata fino a raggiungere la temperatura T_1 . Assumiamo che ciò avvenga quando la macchina ha compiuto un numero intero di cicli.

Q_2 può essere facilmente calcolato perché è uguale e opposto al calore ceduto dall'acqua per raffreddarsi da T_2 a T_1 . Conoscendo il volume $V = 1000 \text{ l} = 1 \text{ m}^3$ e la densità $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ dell'acqua, si trova la massa di acqua, $m = \rho V = 1000 \text{ kg}$. Pertanto

$$Q_2 = -mc(T_1 - T_2) = mc(T_2 - T_1) = 2.93 \cdot 10^8 \text{ J} = 293 \text{ MJ}.$$

Q_1 , ossia il calore ceduto dal fluido lavorante al termostato, dipende dal lavoro compiuto. Infatti dal primo principio della termodinamica sappiamo che $L = Q_1 + Q_2$, pertanto

$$Q_1 = L - Q_2 = L - mc(T_2 - T_1). \quad (9.42)$$

Dobbiamo ora calcolare il massimo lavoro L_{\max} che la macchina è in grado di produrre durante tutto il suo funzionamento; questo si ottiene quando la macchina opera reversibilmente, ossia quando la variazione di entropia dell'universo, ΔS_U , è zero.

Nel nostro caso l'universo termodinamico è costituito dal fluido lavorante, dal termostato e dall'acqua. Imponiamo quindi che la variazione di entropia dell'universo (tra l'istante iniziale in cui la temperatura dell'acqua è T_2 e l'istante finale in cui essa è uguale a T_1) sia maggiore o uguale a zero:

$$\Delta S_U \geq 0,$$

dove il segno di uguaglianza si riferisce al caso in cui la macchina è reversibile e il lavoro è massimo. Ora, ΔS_U è pari alla somma delle variazioni di entropia del fluido (che però è zero perché la macchina compie un numero intero di cicli), dell'acqua (ΔS_2) e del termostato (ΔS_1):

$$\Delta S_U = \Delta S_2 + \Delta S_1.$$

La variazione di entropia dell'acqua è data da:

$$\Delta S_2 = \int \left(\frac{\delta Q_2}{T} \right)_{\text{rev}} = \int_{T_2}^{T_1} \frac{mc dT}{T} = mc \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \quad (9.43)$$

e risulta ovviamente negativa. La variazione di entropia del termostato si può scrivere semplicemente; tenendo conto che la sua temperatura è costante e uguale a T_1 e, poiché il calore da esso scambiato è $-Q_1$, si può scrivere

$$\Delta S_1 = \int \left(-\frac{\delta Q_1}{T} \right)_{\text{rev}} = -\frac{Q_1}{T_1}. \quad (9.44)$$

Possiamo quindi scrivere la variazione di entropia dell'universo nella forma

$$\Delta S_U = -\frac{Q_1}{T_1} + mc \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \geq 0, \quad (9.45)$$

ossia, tenendo conto dell'Equazione 9.42,

$$-\frac{L - mc(T_2 - T_1)}{T_1} + mc \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \geq 0. \quad (9.46)$$

236 Capitolo 9 – Termodinamica: secondo principio

Tale disequazione può essere vista come una condizione sul lavoro L :

$$L \leq mc(T_2 - T_1) - mcT_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = L_{\max}. \quad (9.47)$$

Andando a sostituire i valori numerici, il lavoro massimo che si può ottenere risulta $L_{\max} = 2.96 \cdot 10^7 \text{ J} = 29.6 \text{ MJ}$. Il rendimento della macchina, in corrispondenza del lavoro massimo, è dato da

$$\eta_{\max} = \frac{L_{\max}}{Q_2} = \frac{mc(T_2 - T_1) - mcT_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{mc(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 10.1\%. \quad (9.48)$$

Se calcoliamo per confronto il rendimento della macchina di Carnot che opera tra due sorgenti a temperature *costanti* T_1 e T_2 , otteniamo

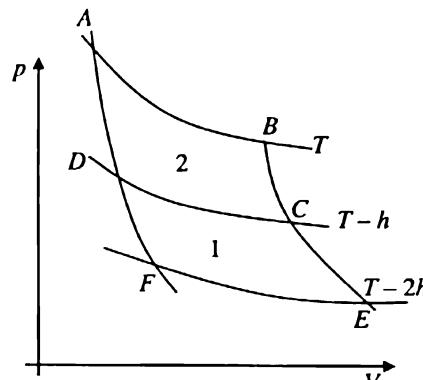
$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 18.9\%.$$

Si noti che, se ci poniamo nel caso in cui il rendimento è massimo, entrambe le macchine sono reversibili; la differenza tra i rendimenti è semplicemente dovuta al fatto che, nella macchina descritta nel problema, la temperatura della “sorgente” superiore diminuisce via via.

Problema 10.1

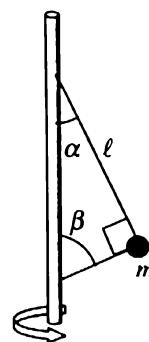
Si considerino i due cicli di Carnot $DCEF$ (1) e $ABCD$ (2) mostrati in Figura 10.1. Il ciclo 2 si svolge tra le temperature T e $T - h$, il ciclo 1 tra le temperature $T - h$ e $T - 2h$. Entrambi i cicli sono percorsi in senso orario e sono ovviamente reversibili.

- Determinare il rendimento dei due cicli, η_1 ed η_2 , in funzione di T e h . Determinare inoltre in quali condizioni il rendimento del ciclo composto vale 0.5 e trovare in tali condizioni il valore numerico di η_1 ed η_2 .
- In quali condizioni $\eta_1 = \eta_2$? Quale sarebbe, in questo caso, il rendimento del ciclo composto? Discutere brevemente il risultato.
- Si assuma $T = 300$ K e si supponga che il calore assorbito nel ciclo 1 sia $Q_{1H} = 3$ J mentre il calore assorbito nel ciclo 2 è $Q_{2H} = 5$ J. Determinare h e il valore numerico del rendimento del ciclo composto ABEF.

**Figura 10.1****Problema 10.2**

Un corpo di massa $m = 4.00$ kg è collegato da due fili di diversa lunghezza a un'asta verticale. Il filo superiore ha lunghezza $\ell = 1.25$ m. Quando il sistema ruota con velocità angolare sufficiente, i due fili sono tesi e il sistema mantiene la configurazione mostrata in Figura 10.2, in cui gli angoli sono rispettivamente $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$.

- Sapendo che la tensione nel filo superiore è $T_1 = 80$ N, determinare la tensione T_2 nel filo inferiore.
- Nelle stesse condizioni del punto precedente, calcolare il modulo della velocità angolare ω_0 con cui il sistema ruota.
- Trovare il massimo valore della velocità angolare per cui il filo inferiore non è teso.

**Figura 10.2****Problema 10.3**

Due dischi di metallo di ugual massa m e raggi R_1 e $R_2 = 2R_1$ sono fissati l'uno all'altro in modo da risultare coassiali. Il sistema così formato è libero di ruotare senza attrito attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro di massa. Sul disco più grande è avvolta una fune ideale, di massa trascurabile, che passa su una puleggia ed è connessa a un corpo sferico anch'esso di massa

m , come in Figura 10.3. La puleggia è di massa trascurabile e priva di attrito. All'istante $t = 0$ il corpo sferico, inizialmente in quiete, viene rilasciato.

- Scrivere l'energia cinetica del sistema in un generico istante, in cui la velocità del corpo sferico è v . Si esprima il risultato in funzione dei soli dati noti (m e R_1).
- Determinare l'accelerazione del corpo sferico durante la sua caduta (trascurando l'attrito con l'aria) in funzione dei soli dati noti (m e R_1).
- Se invece che in aria la massa m cade all'interno di un liquido viscoso in quiete (che esercita una forza di attrito $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$), determinare la velocità limite della massa m e la corrispondente velocità angolare limite del sistema dei due dischi.

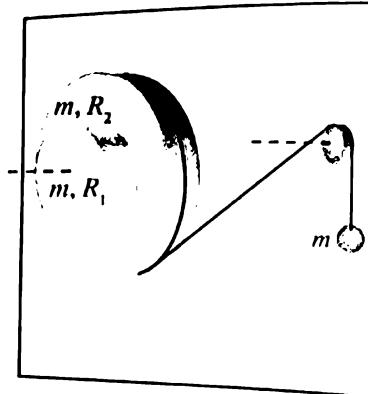


Figura 10.3

Problema 10.4

Si consideri una distribuzione di massa sferica di raggio R la cui densità varia con la distanza dal centro secondo la legge $\rho(r) = Ar^2$ dove $A > 0$ è una costante espressa in kg/m^5 .

- Quanto vale la massa totale?
- Trovare l'intensità, la direzione e il verso del campo gravitazionale a una generica distanza $r > R$ dal centro della sfera.
- Se la distribuzione di massa considerata fosse un pianeta, trovare quale velocità (in modulo) dovrebbe avere un satellite di massa m per poter descrivere un'orbita circolare di raggio $r = 2R$ attorno ad esso.

Problema 10.5

Si consideri il sistema rappresentato in Figura 10.4. La molla è ideale, ha massa trascurabile e costante elastica k . Ognuna delle due carrucole è costituita da un cilindro omogeneo di raggio R e massa M che ruota senza attrito attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro. Un filo inestensibile e di massa trascurabile che si avvolge sulle carrucole senza strisciare collega la molla a una massa m .

Calcolare:

- l'allungamento x_0 della molla e la tensione T nel filo all'equilibrio;
- la reazione vincolare agente all'equilibrio sull'asse della carrucola di sinistra;
- il periodo τ delle piccole oscillazioni di m attorno alla propria posizione di equilibrio.

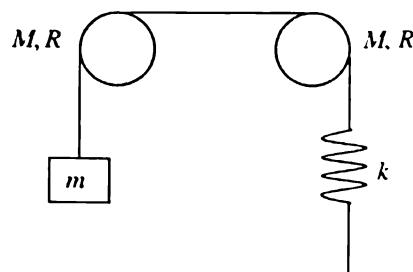


Figura 10.4

Problema 10.6

Un pallone può essere schematizzato come una sfera rigida cava, di raggio esterno R e raggio interno $R' < R$; si indichi con m la sua massa (trascurando l'aria al suo interno!) e con I il suo momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il centro. Il pallone viene lasciato cadere, partendo da fermo, lungo il profilo di una pista da skateboard, rappresentato in Figura 10.5; nel punto di partenza A il suo centro di massa è a una quota h dal suolo. Il tratto AB è liscio ed è inclinato di un angolo β rispetto all'orizzontale, mentre il tratto BC e il tratto CD (anch'esso inclinato di un angolo β) sono scabri con un coefficiente di attrito statico μ_s . Si assuma che il pallone rotoli senza strisciare su tutti i tratti scabri.

Si calcoli:

- la velocità v_B con cui il pallone arriva al fondo del piano liscio, e la velocità v_C nel punto C , prima che cominci la salita;
- l'accelerazione del centro di massa nel tratto CD ;
- il valore massimo dell'angolo β per cui il pallone rotola senza strisciare sul piano CD ;
- l'altezza massima h' raggiunta dal centro di massa lungo il tratto CD ;
- l'espressione del momento d'inerzia I in funzione delle grandezze m , R e r .

(Suggerimento: il momento d'inerzia di una sfera cava si può ottenere per differenza tra...)

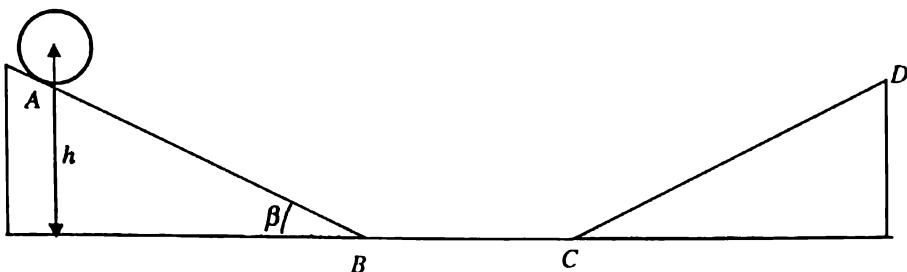


Figura 10.5

Problema 10.7

$n = 0.2$ moli di un gas ideale biatomico sono contenute in un recipiente a pareti adiabatiche munito di un pistone orizzontale di sezione $S = 0.1 \text{ m}^2$, libero di scorrere senza attrito e vincolato a una molla di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$. Nella parte destra del recipiente, al di là del pistone, è stato fatto il vuoto mediante una pompa.

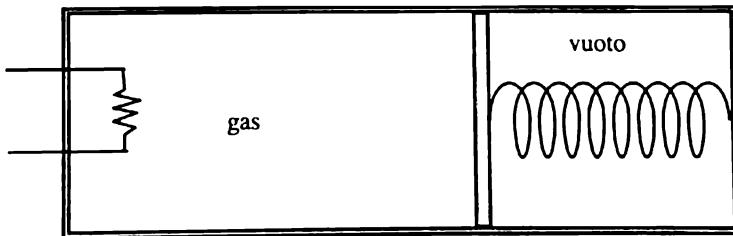


Figura 10.6

- Inizialmente il gas occupa un volume $V_1 = 1.0 \text{ m}^3$ e si trova alla temperatura $T_1 = 200 \text{ K}$. Determinare l'espressione della compressione x_1 della molla in funzione dei dati noti e il suo valore numerico.
- Il gas viene quindi riscaldato lentamente mediante una resistenza elettrica e si espande fino a raggiungere un volume $V_2 = 1.02 \text{ m}^3$. Trovare l'espressione della temperatura finale del gas in funzione dei dati noti e calcolarne il valore numerico.
- Calcolare il calore fornito al gas dalla resistenza elettrica durante l'espansione.

Problema 10.8

Una sbarra non omogenea di lunghezza ℓ è posta lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano, a una distanza h dall'origine (vedi Figura 10.7). La densità lineare di massa della sbarra, λ , varia secondo l'espressione $\lambda(x) = \lambda_0 + Ax^2$ dove λ_0 e A sono costanti positive.

- Determinare la massa totale M della sbarra.
- Determinare direzione, verso e modulo del campo gravitazionale creato dalla sbarra nell'origine.

- c) Trovare dove dovrebbe essere posto un oggetto puntiforme, avente massa M uguale a quella della sbarra, per rendere nullo il campo gravitazionale nell'origine.

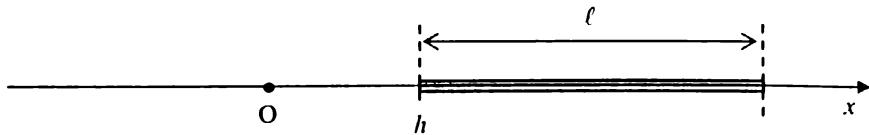


Figura 10.7

Problema 10.9

Un cilindro pieno omogeneo di massa M e raggio R è posto sopra un piano scabro inclinato di un angolo θ . Una fune inestensibile e di massa trascurabile è avvolta attorno al cilindro, passa su una carrucola fissa ideale, senza attrito e di massa trascurabile, ed è connessa a un cubo di massa m poggiato su un piano liscio anch'esso inclinato di θ , come in Figura 10.8. Inizialmente il cubo è mantenuto fermo, ma al tempo $t = 0$ esso viene rilasciato e comincia a scendere, trascinando il cilindro verso l'alto. Si supponga che il cilindro si muova di moto di puro rotolamento e che la fune non scivoli né sul cilindro né sulla carrucola.

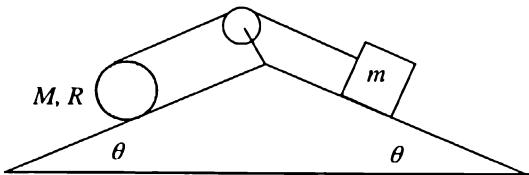


Figura 10.8

- Determinare il rapporto tra l'accelerazione a_m del cubo di massa m e l'accelerazione a_M del centro di massa del cilindro.
- Determinare l'accelerazione a_m con cui si muove il cubo dopo essere stato rilasciato, in funzione degli altri dati noti.
- Trovare il minimo valore che deve avere la massa m per far *salire* il cilindro lungo il piano.
- Usando considerazioni energetiche, trovare la velocità del cubo quando esso ha percorso un tratto di lunghezza L sul piano inclinato.

Problema 10.10

Un gas ideale biatomico compie il ciclo reversibile descritto in Figura 10.9 (DA è una isotermia). I valori dei volumi nei punti A e D sono rispettivamente $V_A = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ e $V_D = 4.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

- Trovare per quale valore di V_0 il calore complessivo scambiato in un ciclo è nullo.
- In tali condizioni, calcolare il numero di moli n del gas, richiedendo che nel punto C si abbia: $p_C = 2 \text{ atm}$, $T_C = 300 \text{ K}$.
- Calcolare la temperatura T_B nel punto B .
- Calcolare la variazione di entropia del gas lungo la trasformazione DA .

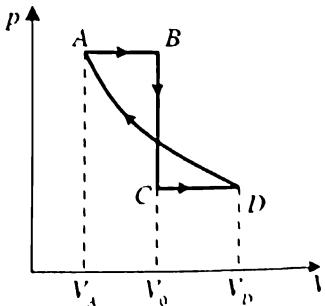
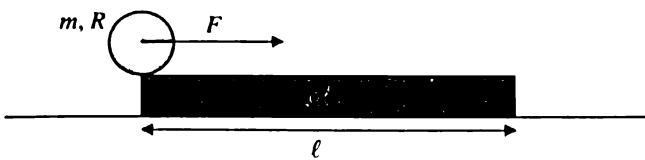


Figura 10.9

Problema 10.11

Una lastra quadrata di massa $M = 8.00 \text{ kg}$ e lato $\ell = 3.00 \text{ m}$ è appoggiata su un piano orizzontale. Su un'estremità della lastra, parallelamente a uno dei lati, è appoggiato un cilindro omogeneo di

**Figura 10.10**

massa $m = 4.00 \text{ kg}$ e raggio R . A partire dal tempo $t = 0$ il cilindro viene tirato con una forza F orizzontale, applicata nel centro di massa, di intensità costante $F = 9.00 \text{ N}$, sotto il cui effetto esso rotola senza strisciare sulla lastra. Nel caso in cui la lastra *non* si muove (il che significa che l'attrito statico tra lastra e piano orizzontale è molto elevato), calcolare:

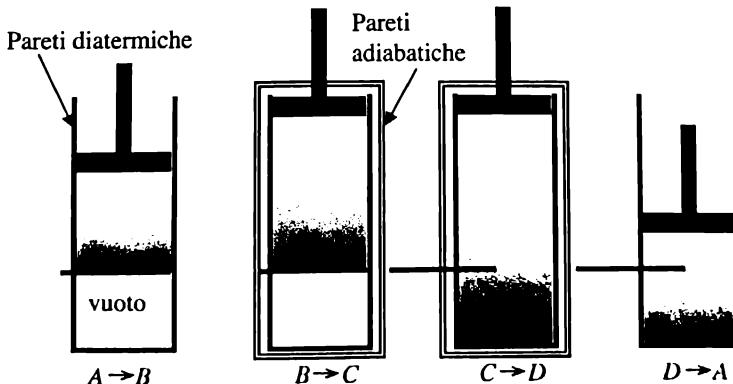
- l'accelerazione del centro di massa del cilindro;
- il minimo valore possibile del coefficiente di attrito statico fra cilindro e lastra;
- l'istante in cui il cilindro cade dalla lastra.

Si assuma ora invece che *non* ci sia attrito tra la lastra e il piano orizzontale su cui essa poggia. In tali condizioni:

- determinare l'accelerazione del centro di massa del cilindro rispetto al suolo;
- trovare dopo quanto tempo il cilindro cade dalla lastra.

Problema 10.12

Un gas perfetto biatomico si trova in un cilindro a pareti rigide e diatermiche chiuso in alto da un pistone isolante. Inizialmente il gas è confinato tra il pistone e una parete rigida rimovibile (al di sotto della quale è stato fatto il vuoto) e occupa un volume $V_A = 10 \text{ dm}^3$. La sua pressione è $p_A = 1 \text{ atm}$ e la sua temperatura $T_A = 300 \text{ K}$. Esso viene riscaldato *lentamente* a volume costante, finché giunge in uno stato B in cui la sua temperatura è pari a $T_B = 600 \text{ K}$. A questo punto il contenitore viene isolato termicamente dall'esterno e il pistone viene sollevato provocando un'espansione adiabatica reversibile fino a uno stato C in cui $p_C = 1.5 \text{ atm}$. Quindi la parete rigida rimovibile viene fatta scorrere lateralmente e il gas si espande liberamente e adiabaticamente in vuoto fino a uno stato D in cui la sua pressione è $p_D = p_A$. Infine, l'isolamento termico viene rimosso e il gas torna allo stato A mediante un raffreddamento isobaro reversibile.

**Figura 10.11**

- Si disegni il ciclo in un diagramma $p - V$.
- Si calcolino le variabili termodinamiche nei punti di equilibrio A, B, C e D .
- Si calcoli il calore Q complessivamente scambiato dal gas in un ciclo. È assorbito o ceduto?
- Si calcoli la variazione di entropia dell'universo nei tratti BC e CD .

Problema 10.13

Una particella di massa m si può muovere lungo una guida semicircolare di raggio R e centro O , priva di attrito. Essa parte da ferma, nel punto A (che si trova a una altezza R dalla base della guida) e arriva nel punto B (che si trova alla base della guida), dove è posta una particella di massa $M = 2m$. Quest'ultima particella è inizialmente in quiete, ed è collegata a una molla ideale di costante elastica k , il cui estremo fisso è posto nel punto C , diametralmente opposto rispetto ad A (Figura 10.12). Fra le due particelle avviene un urto completamente anelastico.

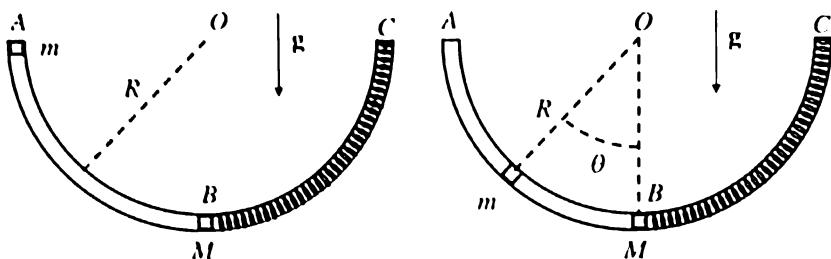


Figura 10.12 A sinistra: situazione iniziale; a destra: la posizione della particella di massa m è individuata dall'angolo θ .

- Nel tratto AB : si calcoli (in funzione dell'angolo θ che individua la posizione della particella di massa m) la reazione che la guida esercita sulla particella.
- Si calcoli la velocità con cui si muovono le particelle dopo l'urto.
- Si scriva l'equazione che determina la posizione in cui le particelle raggiungono l'altezza massima dopo l'urto e la si risolva nell'ipotesi che, alla massima altezza, l'angolo formato dal vettore posizione rispetto a O con la verticale OB sia piccolo.
- Sempre nell'ipotesi che le oscillazioni delle due masse siano "piccole", si determini il periodo del moto e la posizione di equilibrio.

Problema 10.14

Un sistema è formato da due ruote (costituite da dischi omogenei di massa m e raggio r) collegate da una sbarra, di massa trascurabile, che unisce i loro centri. Il sistema si può muovere lungo un piano, inclinato di un angolo β rispetto alla direzione orizzontale, avente coefficiente di attrito statico μ_s ; le due ruote rotolano senza strisciare. All'asse della ruota più in basso è applicato un momento costante M , entrante in Figura 10.13. Il sistema è inizialmente fermo.

- Si calcoli il valore minimo M_{\min} del modulo di M necessario perché il sistema salga lungo il piano inclinato.
- Supposto che $M > M_{\min}$, si determini l'accelerazione del sistema e le forze di attrito f_1 ed f_2 che agiscono sulla ruota inferiore e superiore.
- Mentre il sistema sta salendo, il momento M cessa di agire quando le ruote hanno velocità angolare ω_0 : si calcoli quanta strada percorre il sistema prima di fermarsi.

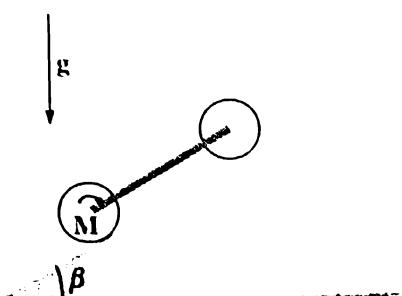


Figura 10.13

Problema 10.15

Una mole di gas perfetto biatomico è in equilibrio in uno stato A , dove sono note le variabili termodinamiche p_A, V_A, T_A . Descrivere, quindi, una trasformazione reversibile, caratterizzata dalla legge $pV^{4/3} = \text{cost.}$, fino allo stato B , nel quale dimezza la sua temperatura.

- Si calcolino le variabili termodinamiche nello stato B .
- Si calcoli il lavoro fatto dal gas.

- c) Si calcoli il calore specifico molare per questa trasformazione.
d) Si calcoli la variazione di entropia.

Problema 10.16

Un disco omogeneo di massa M , raggio r e spessore trascurabile, giace in un piano verticale, essendo fissato a un perno nel suo centro O ; un corpo puntiforme di massa m urta con velocità v_0 il disco nel punto P , come mostrato in Figura 10.14. L'urto è completamente anaelastico.

- a) Si calcoli la velocità angolare con cui il sistema inizia a muoversi subito dopo l'urto.
b) Si calcolino l'energia dissipata nell'urto e l'impulso esercitato dalla reazione in O durante l'urto.

Si supponga che, in seguito all'urto, il sistema si metta in moto, descrivendo piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio stabile.

- c) Si calcoli la frequenza di oscillazione.
d) Si descriva la legge oraria del centro di massa del sistema.
e) Si calcoli l'ampiezza massima dell'angolo di oscillazione.

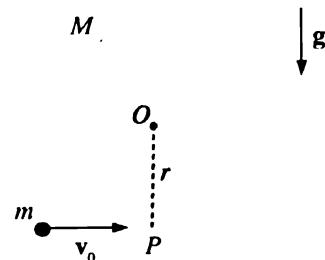


Figura 10.14

Problema 10.17

Un disco omogeneo, di massa m e raggio r , parte da fermo e si muove lungo un pendio inclinato di un angolo β rispetto alla direzione orizzontale (Figura 10.15). Esso percorre un tratto iniziale, *completamente liscio*, di lunghezza ℓ , mentre la parte restante del pendio ha coefficiente di attrito dinamico μ_d .

- a) Si calcoli la velocità del centro di massa quando il disco si muove lungo il tratto scabro.
b) Si determini quale condizione deve soddisfare μ_d affinché, da un certo punto in poi, possa esserci moto di rotolamento puro.
c) Si calcoli l'energia dissipata per attrito fino al momento in cui inizia il rotolamento puro.

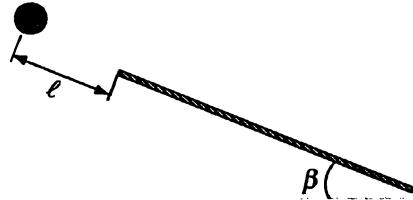


Figura 10.15

Problema 10.18

Una massa puntiforme $m = 0.1 \text{ kg}$ si trova inizialmente ferma nell'origine O di un asse orizzontale lungo cui può muoversi senza attrito. Tra l'istante $t_i = 0$ e l'istante $t_f = 1 \text{ s}$ ad essa viene applicata una forza F , parallela all'asse, diretta verso destra (si veda la Figura 10.16) e dipendente dal tempo secondo la legge

$$F(t) = at - bt^2,$$

dove $a = 2 \text{ N/s}$ e $b = 2 \text{ N/s}^2$. Per $t < t_i$ e $t > t_f$ s la forza è nulla.

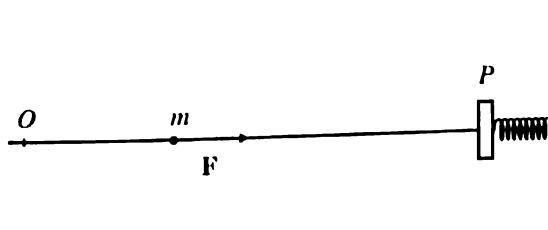


Figura 10.16

Terminata l'azione della forza, la massa puntiforme urta in modo completamente anelastico un piattello verticale P di massa $M = 0.3$ kg, comprimendo una molla ideale di costante elastica $k = 0.5$ N/m, inizialmente a riposo e fissata all'altro estremo a una parete verticale fissa, come mostrato in Figura 10.16.

- Calcolare la velocità v della massa m all'istante $t^* = 0.5$ s.
- Calcolare il lavoro L compiuto dalla forza F sulla massa m nell'intervallo di tempo tra t_i e t_f .
- A quale distanza d dall'origine deve essere posizionato il piattello P affinché l'urto avvenga all'istante t_f ?
- Quanto vale la massima compressione $\Delta\ell$ della molla a seguito dell'urto?

Problema 10.19

Un'asta rigida sottile ha lunghezza $L = 3$ m, massa $m = 10$ kg e densità non uniforme. In particolare (Figura 10.17a), detta x la distanza misurata lungo l'asta a partire dalla sua estremità A , la densità lineare di massa λ varia secondo la legge

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x^2}{L^2},$$

dove λ_0 è un coefficiente incognito.

- Quanto vale il coefficiente λ_0 ?
- A quale distanza x_{CM} dall'estremo A dell'asta si trova il suo centro di massa?
L'asta è vincolata a ruotare senza attrito in un piano verticale, attorno a un perno passante per A . All'estremità B è attaccata una molla ideale, di costante elastica $k = 30$ N/m, il cui altro estremo è vincolato a un sostegno rigido. All'equilibrio (Figura 10.17b), la molla è perpendicolare all'asta e l'asta forma un angolo $\theta = 60^\circ$ rispetto all'orizzontale.
- Quanto vale l'allungamento $\Delta\ell$ della molla in tali condizioni?
- Se la molla si spezza, l'asta comincia a ruotare attorno ad A ; quanto vale l'accelerazione tangenziale a_B dell'estremo B subito all'inizio del suo moto?

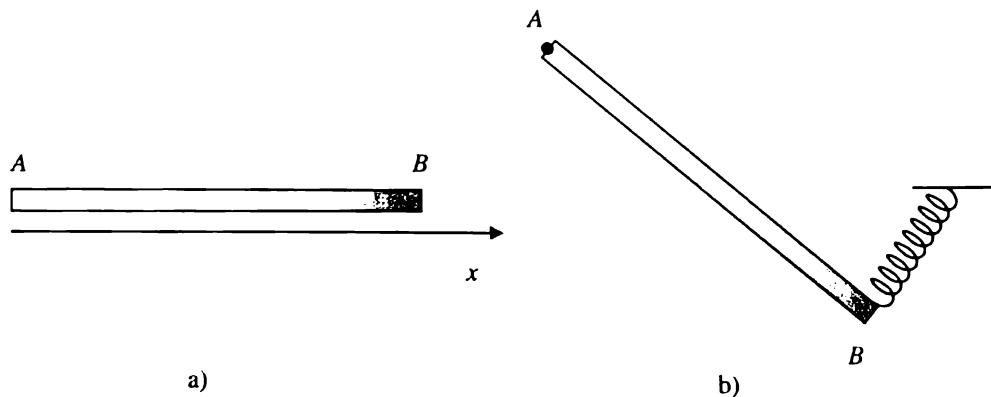


Figura 10.17

Problema 10.20

Una massa puntiforme $m = 200$ g è attaccata a un filo ideale di lunghezza $l = 90$ cm, l'altra estremità è fissata, tramite un chiodo, nel punto O di un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il piano è scabro e il coefficiente di attrito dinamico tra massa e piano vale $\mu_d = \sqrt{3}/(2\pi)$. Inizialmente la massa è tenuta ferma nel punto A , alla stessa quota di O , e il filo è teso. Dopo essere stata rilasciata, essa si mette in moto descrivendo l'arco di circonferenza

ABC, dove *B* è il punto della traiettoria che si trova a quota più bassa, mentre *C* è il punto in cui la velocità si annulla (si veda la Figura 10.18).

- Determinare il massimo valore μ_s^{\max} che deve avere il coefficiente di attrito statico affinché la massa, una volta rilasciata, si metta in moto.
- Determinare il modulo v_B della velocità della massa nel punto *B*.
- Determinare l'intensità della tensione del filo T_B quando la massa si trova in *B*.
- Scrivere l'equazione per l'angolo φ , che definisce il punto *C*.

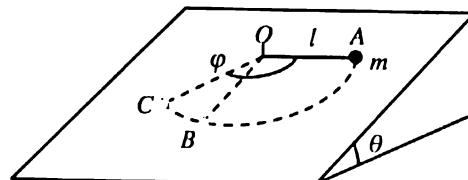


Figura 10.18

Problema 10.21

Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo nell'origine di un asse orizzontale privo di attrito. Tra gli istanti $t_i = 0$ e $t_f = \frac{\pi}{\alpha}$ esso è soggetto a una forza F , diretta lungo l'asse e dipendente dal tempo secondo la legge $F(t) = F_0[\sin(\alpha t) + \cos(\alpha t)]$, dove F_0 e α sono costanti positive. Terminata l'azione della forza, il punto continua a muoversi lungo l'asse e prosegue poi il suo moto salendo lungo una rampa curvilinea liscia, di altezza massima h rispetto all'orizzontale, come mostrato in Figura 10.19.

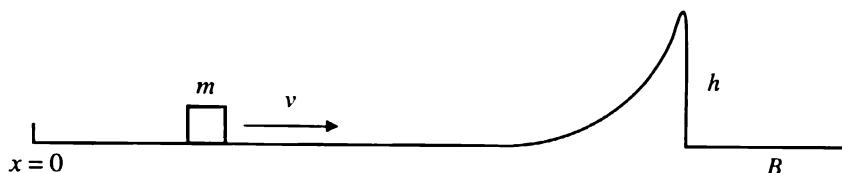


Figura 10.19

- Calcolare la velocità $v(t_f)$ raggiunta dal punto materiale nell'istante in cui la forza cessa di agire, in funzione F_0 , m , α .
- Calcolare la posizione $x(t_f)$ del punto materiale nello stesso istante.
- Calcolare il lavoro compiuto dalla forza F tra l'istante t_i e l'istante $t^* = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}$.
- Qual è il massimo valore di h per cui il punto materiale può cadere al di là della rampa, raggiungendo la regione *B*?

Problema 10.22

Un cilindro, contenente n moli di gas perfetto, è coperto nella sua parte superiore da un coperchio cavo di massa m_C , che può muoversi verticalmente senza attrito con le pareti del cilindro stesso, come mostrato in Figura 10.20. Il sistema è posto a contatto con un termostato avente temperatura costante T_* . Nella cavità del coperchio è contenuta una massa d'acqua, che al tempo $t = 0$ vale m_0 e che evaporata con tasso di evaporazione lento e costante. Dopo un certo tempo t_1 si osserva che tutta l'acqua contenuta nella cavità del coperchio è evaporata, pertanto la massa d'acqua presente nel coperchio varia nel tempo secondo la legge $m_A(t) = (1 - t/t_1)m_0$. Il tasso di evaporazione è sufficientemente lento affinché la trasformazione subita dal gas nel cilindro possa essere considerata reversibile, inoltre la pressione atmosferica è sempre trascurabile rispetto alla pressione esercitata dal coperchio sul gas. Determinare l'espressione delle seguenti quantità al generico tempo $t < t_1$, in funzione delle quantità note n, m_C, m_0, t_1, T_* :

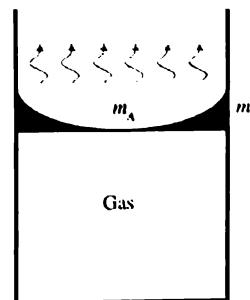


Figura 10.20

- il rapporto tra la pressione del gas al tempo generico t , $p(t)$, e quella iniziale $p(0)$;
- il lavoro $L(t)$ compiuto e il calore $Q(t)$ scambiato dal gas tra l'istante iniziale e l'istante t ;
- la variazione di entropia $\Delta S_{\text{gas}}(t)$ e $\Delta S_{\text{amb}}(t)$ tra l'istante iniziale e l'istante t .

Quando l'acqua è interamente evaporata, si riversa improvvisamente nel coperchio una nuova massa d'acqua m_0 , dopodiché si attende che il sistema torni all'equilibrio. Per questo secondo processo, che a causa della sua velocità non può essere considerato reversibile, calcolare:

- d) il lavoro compiuto e il calore scambiato dal gas;
- e) le variazioni di entropia del gas e dell'ambiente.

Problema 10.23

Una mole di gas perfetto monoatomico, che si trova inizialmente nello stato A identificato dalle variabili termodinamiche (p_A, V_A, T_A) , compie il seguente ciclo termodinamico:

- $A \rightarrow B$ espansione isoterma reversibile con volume finale $V_B = 2V_A$;
 - $B \rightarrow C$ espansione adiabatica con volume finale $V_C = 8V_A$ e temperatura finale $T_C = T_A/k$, dove $k > 1$;
 - $C \rightarrow D$ compressione isoterma reversibile;
 - $D \rightarrow A$ riscaldamento isocoro reversibile.
- a) Determinare le variabili termodinamiche associate agli stati B, C, D in funzione di p_A, V_A, T_A, k e tracciare un diagramma qualitativo del ciclo termodinamico nel piano (p, V) .
 - b) Calcolare, in funzione di T_A, k e R (costante dei gas perfetti), le espressioni del calore scambiato tra gas e ambiente, del lavoro compiuto dal gas e della sua variazione di energia interna, per tutte le trasformazioni del ciclo: $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A$, specificando in quali trasformazioni il calore viene ceduto e in quali assorbito dal sistema.
 - c) Calcolare il rendimento del ciclo in funzione di k .
 - d) Discutere la reversibilità della trasformazione $B \rightarrow C$ in funzione del valore di k .

Problema 10.24

Si considerino $n = 5$ moli di gas perfetto monoatomico che compie una trasformazione reversibile in cui il volume segue la legge $V(T) = aT^2$ dove $a = 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ K}^{-2}$. Nella trasformazione la temperatura del gas passa dal valore iniziale $T_i = 600 \text{ K}$ al valore finale $T_f = 400 \text{ K}$. Si calcoli:

- a) il valore delle variabili termodinamiche nello stato di equilibrio iniziale e in quello finale;
- b) il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione;
- c) il calore scambiato dal gas con l'ambiente nella trasformazione;
- d) la variazione di entropia del gas tra lo stato iniziale e quello finale.

Problema 10.25

Un blocco di ghiaccio (densità $\rho_g = 0.917 \text{ g/cm}^3$) di massa $M = 1 \text{ kg}$ alla temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$ è mantenuto completamente sommerso in una massa d'acqua (densità $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$) a $t_0 = 0^\circ\text{C}$ per mezzo di un filo, a una distanza $h = 1 \text{ m}$ dal fondo di un contenitore adiabatico. Il blocco viene colpito verticalmente da un proiettile di piombo (calore specifico $c_{pb} = 130 \text{ J/kg K}$) di massa $m = 10 \text{ g}$, temperatura $t_p = 20^\circ\text{C}$, velocità $v_p = 100 \text{ m/s}$ e volume trascurabile, che si inserisce nel ghiaccio, fermandosi al suo interno. (Si trascuri l'attrito viscoso tra il proiettile e l'acqua.)

- a) Quale sarà la velocità del sistema ghiaccio + proiettile subito dopo l'urto?
- b) Sapendo che il calore latente di fusione del ghiaccio è $L_f = 3.3 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$, quale massa di ghiaccio δM soderà in seguito all'urto?

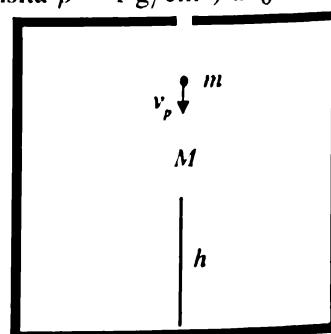


Figura 10.21

- c) Di quanto varierà, di conseguenza, il volume del blocco di ghiaccio?
d) Ipotizzando, per semplicità, che la massa di ghiaccio δM fonda *istantaneamente* dopo l'urto, a quale distanza minima dal fondo arriverebbe il sistema ghiaccio + proiettile in assenza di attrito viscoso con l'acqua?

Svolgimenti

Problema 10.1
SVOLGIMENTO

- a) $\eta_1 = \frac{h}{T-h}$, $\eta_2 = \frac{h}{T}$, $\eta_{\text{tot}} = \frac{2h}{T}$.
 $\eta_{\text{tot}} = 0.5$ quando $h = \frac{1}{4}T$; in queste condizioni $\eta_1 = \frac{1}{3}$ e $\eta_2 = \frac{1}{4}$.
b) $\eta_1 = \eta_2$ solo se $h = 0$. In queste condizioni $\eta_{\text{tot}} = 0$ e le tre isoterme coincidono, il lavoro prodotto è zero e tutti i cicli hanno rendimento nullo.
c) $h = 120$ K e $\eta_{\text{tot}} = 0.8$.

Problema 10.2
SVOLGIMENTO

- a) $T_2 = \frac{T_1 \cos \alpha - mg}{\cos \beta} = 60.1$ N.
b) $\omega_0 = \sqrt{\frac{T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta}{mr}} \simeq 6.0$ rad/s.
c) $\sqrt{\frac{g \tan \alpha}{r}} \simeq 3.0$ rad/s.

Problema 10.3
SVOLGIMENTO

- a) $K = \frac{13}{16}mv^2$.
b) $a = \frac{g}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_1^2}} = \frac{8}{13}g$.
c) $v_{\text{lim}} = \frac{mg}{b}$, $\omega_{\text{lim}} = \frac{mg}{2bR_1}$.

Problema 10.4
SVOLGIMENTO

- a) $M = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{4}{5}\pi A R^5$.
b) $\mathcal{G}(r) = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{u}_r$.
c) $v = \sqrt{\frac{2}{5}\pi G A R^2}$.

Problema 10.5**SVOLGIMENTO**

a) $x_0 = \frac{mg}{k}$, $T = mg$.

b) La reazione vincolare ha modulo $|\Phi| = g \sqrt{m^2 + (m+M)^2}$ e forma con l'orizzontale un angolo θ tale che $\tan \theta = \frac{m+M}{m}$.

c) $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k}}$.

Problema 10.6**SVOLGIMENTO**

a) $v_B = \sqrt{2g(h-R)}$; $v_C = \sqrt{\frac{2mg(h-R)}{m + \frac{I}{R^2}}}$.

b) $a = -\frac{mg \sin \beta}{m + \frac{I}{R^2}}$.

c) Il pallone rotola se $f_s \leq \mu_s mg \cos \beta$, ossia se $\tan \beta \leq \mu_s \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$.

d) $h' = h$.

e) $I = \frac{2}{5}m \frac{R^5 - R'^5}{R^3 - R'^3}$.

Problema 10.7**SVOLGIMENTO**

a) $x_1 = \frac{nRT_1S}{kV_1} = 0.332 \text{ m}$.

b) Quando il volume è V_2 , la molla è compressa di $x_2 = x_1 + \frac{V_2 - V_1}{S}$ per cui $p_2 = \frac{kx_2}{S}$; quindi $T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{V_2}{nR} \frac{k}{S} \left(x_1 + \frac{\Delta V}{S}\right) = 326.7 \text{ K}$.

c) Nell'espansione il gas compie un lavoro $L = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$ e assorbe un calore $Q = \Delta U + L = 535.3 \text{ J}$.

Problema 10.8**SVOLGIMENTO**

a) $M = \int_h^{h+\ell} \lambda(x) dx = \lambda_0 \ell + \frac{A}{3} \left[(h+\ell)^3 - h^3\right]$.

b) $G(x=0) = +G \int_h^{h+\ell} \frac{\lambda(x)}{x^2} dx \mathbf{u}_x = G \ell \left[\frac{\lambda_0}{h(h+\ell)} + A \right] \mathbf{u}_x$.

c) La massa M deve essere posta in un punto sull'asse x , di ascissa $x_M = -\sqrt{\frac{M}{\ell \left[\frac{\lambda_0}{h(h+\ell)} + A \right]}}$.

Problema 10.9**SVOLGIMENTO**

- a) $a_m = 2a_M$.
 b) $a_m = \frac{8m - 4M}{3M + 8m} g \sin \theta$.
 c) $m_{\min} = \frac{1}{2} M$.
 d) $v_m = \sqrt{\frac{16(m - \frac{1}{2}M)}{8m + 3M}} g L \sin \theta$.

Problema 10.10**SVOLGIMENTO**

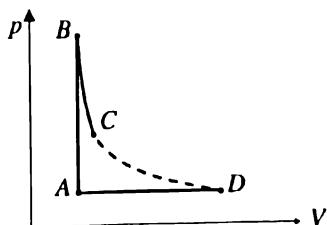
- a) $V_0 = \frac{4}{3} V_A \ln 4 = 1.85 V_A = 1.85 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.
 b) $n = \frac{p_C V_0}{R T_C} = 0.148 \text{ mol}$.
 c) $T_B = 4T_C = 1200 \text{ K}$.
 d) $\Delta S_{DA} = n R \ln \left(\frac{V_A}{V_D} \right) = -1.705 \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Problema 10.11**SVOLGIMENTO**

- a) $a_m = \frac{2F}{3m} = 1.50 \text{ m/s}^2$.
 b) $\mu_s^{\min} = \frac{1}{2} \frac{a_m}{g} \simeq 0.075$.
 c) Il cilindro cade dalla lastra all'istante $t^* = \sqrt{\frac{2\ell}{a_m}} = 2.0 \text{ s}$.
 d) Siano a_m e a'_m le accelerazioni del cilindro rispetto al suolo e alla lastra. Si trova che $a'_m = \frac{F}{\frac{3}{2}m + \frac{m^2}{2M}} \simeq 1.28 \text{ m/s}^2$ e $a_m = a'_m + a_0 = a'_m + \frac{m}{2M} a'_m = \frac{5}{4} a'_m = 1.60 \text{ m/s}^2$.
 e) Il cilindro cade dalla lastra all'istante $t' = \sqrt{\frac{2\ell}{a'_m}} \simeq 2.16 \text{ s}$.

Problema 10.12**SVOLGIMENTO**

- a) In un diagramma p, V il ciclo appare in questo modo:

**Figura 10.22**

b) Nel punto A è tutto noto, pertanto si ricava: $n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 0.4 \text{ mol.}$

- $p_B = p_A \frac{T_B}{T_A} = 2.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V_B = V_A = 0.01 \text{ m}^3, \quad T_B = 600 \text{ K};$
- $p_C = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V_C = V_B \left(\frac{p_B}{p_C} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0.012 \text{ m}^3, \quad T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = 541 \text{ K};$
- $p_D = p_A, \quad V_D = \frac{nRT_D}{p_D} = 0.018 \text{ m}^3, \quad T_D = T_C = 541 \text{ K}.$

c) $Q = Q_{AB} + Q_{DA} = nc_V(T_B - T_A) + nc_p(T_A - T_D) = -311 \text{ J.}$

d) $\Delta S_U^{BC} = 0, \quad \Delta S_U^{CD} = \Delta S_{\text{sist}}^{CD} = nR \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) = 1.35 \text{ J/K.}$

Problema 10.13

Svolgimento

a) $N(\theta) = 3mg \cos \theta.$

b) $v_0 = \frac{1}{3} \sqrt{2gR}.$

c) $\frac{1}{2}m_*v_0^2 = m_*gR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}kR^2\theta^2$, dove $m_* = 3m$ è la massa totale; nell'ipotesi $\theta \ll 1$,

$$1 - \cos \theta \simeq \frac{1}{2}\theta^2, \text{ la soluzione dell'equazione è data da } \theta = \pm \sqrt{\frac{m_*v_0^2}{m_*gR + kR^2}}.$$

d) Le masse descrivono un moto armonico di pulsazione $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m_*} + \frac{g}{R}}$ intorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$.

Problema 10.14

Svolgimento

a) $M_{\min} = 2mgr \sin \beta.$

b) Con $M > M_{\min}$: $a = \frac{1}{3m} \left(\frac{M}{r} - 2mg \sin \beta \right)$, $f_1 = \frac{5}{6} \frac{M}{r} + \frac{1}{3}mg \sin \beta$, $f_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{M}{r} - 2mg \sin \beta \right)$; la forza f_1 è concorde al verso del moto, mentre f_2 è diretta in verso opposto.

c) $\Delta x = \frac{l_C \omega_0^2}{2mg \sin \beta}$ dove l_C è il momento di inerzia di una ruota, rispetto al punto di contatto con il piano.

Problema 10.15

Svolgimento

a) $V_B = V_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^3 = 8V_A, p_B = \frac{1}{16} p_A.$

b) $L = \int pdV = \int_{T_A}^{T_B} (-3nR) dT = \frac{3}{2}nRT_A = \frac{3}{2}RT_A.$

c) $c = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right) \frac{1}{n} = c_V - 3R.$

d) $\Delta S = -c \ln 2.$

Problema 10.16**SVOLGIMENTO**

- a) $\omega = \frac{mv_0 r}{I_O}$, con $I = \frac{1}{2}Mr^2$ e $I_O = I + mr^2$.
- b) $\Delta T = -\frac{1}{2}mv_0^2 \left(\frac{I}{I_O} \right) < 0$, $J = -mv_0 \left(\frac{I}{I_O} \right)$ (diretto verso sinistra).
- c) $\Omega = \sqrt{\frac{mrg}{I_O}}$.
- d) Il centro di massa si muove a distanza $r_G = \frac{m}{m+M}r$ da O e la sua coordinata angolare varia secondo la legge: $\theta(t) = \frac{\omega}{\Omega} \sin(\Omega t)$.
- e) $A = \frac{\omega}{\Omega}$.

Problema 10.17**SVOLGIMENTO**

- a) $v_{CM}(t) = v_{CM0} + (g \sin \beta - \mu_d g \cos \beta)t$, con $v_{CM0} = \sqrt{2g \sin \beta \ell}$.
- b) $\mu_d > \frac{1}{3} \tan \beta$.
- c) $\Delta E = \frac{\mu_d m \cos \beta v_{CM0}^2}{2(\sin \beta - 3\mu_d \cos \beta)}$.

Problema 10.18**SVOLGIMENTO**

- a) $v(t) = \int_0^t \frac{F(t')}{m} dt' = \frac{1}{m} \left(a \frac{t^2}{2} - b \frac{t^3}{3} \right)$; quando $t = t^*$ si ha $v = 1.67$ m/s.
- b) $v_f = v(t_f) = 3.33$ m/s, $L = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 = 0.55$ J.
- c) $d = x(t_f) = \int_0^{t_f} v(t') dt' = 1.67$ m.
- d) $\Delta \ell = \frac{mv_f}{\sqrt{k(M+m)}} = 0.74$ m.

Problema 10.19**SVOLGIMENTO**

- a) $\lambda_0 = \frac{3m}{L} = 10$ kg/m.
- b) $x_{CM} = \frac{3}{4}L = 2.25$ m.
- c) $\Delta \ell = \frac{3mg \cos \theta}{4k} = 1.225$ m.
- d) Il momento d'inerzia dell'asta è $I_A = \frac{3}{5}mL^2$; l'accelerazione angolare è $\alpha = \frac{5}{4} \frac{g \cos \theta}{L}$, da cui $a_B = \alpha L = 6.12$ m/s².

Problema 10.20**SVOLGIMENTO**

- a) $\mu_s^{\max} = \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577.$
- b) Applicando il teorema dell'energia cinetica tra A e B e, ricordando che il piano è scabro, si ottiene $v_B^2 = 2gl \left(\sin \vartheta - \frac{\pi}{2} \mu_d \cos \vartheta \right)$, da cui $v_B = \frac{\sqrt{gl}}{2} \approx 1.48 \text{ m/s}$.
- c) $T_B = mg (3 \sin \vartheta - \pi \mu_d \cos \vartheta)$, da cui $T_B = \frac{3}{4} mg \approx 1.47 \text{ N}$.
- d) Applicando il teorema dell'energia cinetica tra i punti A e C si ottiene $\varphi = \frac{\tan \vartheta}{\mu_d} \sin \varphi$, da cui $\varphi = \frac{2\pi}{3} \sin \varphi$.

Problema 10.21**SVOLGIMENTO**

- a) $v(t) = \frac{F_0}{m\alpha} [\sin \alpha t - \cos \alpha t + 1]$, per cui $v(t_f) = 2 \frac{F_0}{m\alpha}$.
- b) $x(t) = \int_{t_i}^t v(t') dt'$, per cui $x(t_f) = \frac{F_0}{m\alpha^2} (2 + \pi)$.
- c) Dal teorema dell'energia cinetica, una volta calcolata $v(t^*)$, si ha $L = 2 \frac{F_0^2}{m\alpha^2}$.
- d) $h_{\max} = \frac{2F_0^2}{m^2 \alpha^2 g}$.

Problema 10.22**SVOLGIMENTO**

- a) $\frac{p(t)}{p(0)} = 1 - \frac{t/t_1}{1 + m_C/m_0}$.
- b) $L(t) = nRT_* \ln \left[\frac{V(t)}{V(0)} \right] = -nRT_* \ln \left[\frac{p(t)}{p(0)} \right] = -nRT_* \ln \left[1 - \frac{t/t_1}{1 + m_C/m_0} \right]$, $Q(t) = L(t)$.
- c) $\Delta S_{\text{gas}}(t) = -nR \ln \left[1 - \frac{t/t_1}{1 + m_C/m_0} \right]$, $\Delta S_{\text{amb}} = -\Delta S_{\text{gas}}$.
- d) $L = -nRT_* \frac{m_0}{m_C}$, $Q_{\text{gas}}^{\text{irr}} = L$.
- e) $\Delta S_{\text{gas}} = -nR \ln \left[1 + \frac{m_0}{m_C} \right]$, $\Delta S_{\text{amb}} = \frac{Q_{\text{amb}}^{\text{rev}}}{T_*} = -\frac{Q_{\text{gas}}^{\text{irr}}}{T_*} = nR \frac{m_0}{m_C}$.

Problema 10.23**SVOLGIMENTO**

- a)
- Stato A : (p_A, V_A, T_A) .
 - Stato B : $\left(\frac{p_A}{2}, 2V_A, T_A\right)$.
 - Stato C : $\left(\frac{p_A}{8k}, 8V_A, \frac{T_A}{k}\right)$.
 - Stato D : $\left(\frac{p_A}{k}, V_A, \frac{T_A}{k}\right)$.

b) • Trasformazione $A \rightarrow B$

$$\Delta U = 0$$

$$L = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_A \ln(2) > 0$$

$Q = L > 0$ (assorbito).

• Trasformazione $B \rightarrow C$

$$\Delta U = nc_V(T_C - T_B) = \frac{5}{2}RT_A\left(\frac{1}{k} - 1\right) < 0$$

$$L = -\Delta U > 0$$

$$Q = 0.$$

• Trasformazione $C \rightarrow D$

$$\Delta U = 0$$

$$L = nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = -nRT_A \frac{\ln(8)}{k} < 0$$

$Q = L < 0$ (ceduto).

• Trasformazione $D \rightarrow A$

$$\Delta U = nc_V(T_A - T_D) = \frac{5}{2}RT_A\left(1 - \frac{1}{k}\right) > 0$$

$$L = 0$$

$Q = \Delta U > 0$ (assorbito).

c) $\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{|Q_{\text{ass}}|} = 1 - \frac{3\ln(2)}{k\ln(2) + \frac{5}{2}(k-1)}.$

d) La trasformazione adiabatica ($B \rightarrow C$) è reversibile se

$$\Delta S_{BC} = nc_V \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = R \left[\ln(4) - \frac{5}{2} \ln(k) \right] = 0,$$

condizione che si verifica per $k = 2^{4/5} \simeq 1.74$.

Problema 10.24

SVOLGIMENTO

a) $T_i = 600 \text{ K}$, $V_i = aT_i^2 = 0.36 \text{ m}^3$, $p_i = \frac{nR}{aT_i} = \frac{2}{3}10^5 \text{ Pa}$.

$$T_f = 400 \text{ K}, \quad V_f = aT_f^2 = 0.16 \text{ m}^3, \quad p_f = \frac{nR}{aT_f} = 10^5 \text{ Pa}.$$

b) $L = \int_{T_i}^{T_f} p [V(T)] \frac{dV}{dT} dT = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nR}{aT} 2aT dT = 2nR(T_f - T_i) = -1.6 \cdot 10^4 \text{ J}.$

c) $Q = nc_V(T_f - T_i) + 2nR(T_f - T_i) = n(c_V + 2R)(T_f - T_i) = -2.8 \cdot 10^4 \text{ J}.$

d) $\int \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = n(c_V + 2R) \ln \frac{T_f}{T_i} = 140 \ln \frac{2}{3} \text{ J K}^{-1}.$

Problema 10.25  **SVOLGIMENTO**

- a) $v' = \frac{m}{m+M} v_p = \frac{0.01}{1.01} 100 \text{ m/s} = 0.99 \text{ m/s}$.
- b) Il calore assorbito dal ghiaccio deriva dal raffreddamento del proiettile e dalla conversione di energia cinetica in lavoro. Indicando il primo con Q_1 e il secondo con Q_2 si ottiene che $\delta M = \frac{Q_1 + Q_2}{L} = 2.28 \times 10^{-4} \text{ kg} = 0.228 \text{ g}$.
- c) $\delta V = \frac{\delta M}{\rho_g} = 0.248 \text{ cm}^3$.
- d) Il sistema ha un'accelerazione $a = g \left(1 - \frac{\rho(V - \delta V)}{m_p + M - \delta M} \right) = -0.778 \text{ m/s}^2$ rivolta verso l'alto; posto $y = -\frac{v'^2}{2a}$, la distanza minima dal fondo è $d_{\min} = h - y = 0.370 \text{ m}$.



Vettori

Le grandezze vettoriali sono rappresentate graficamente da segmenti orientati e caratterizzate da *direzione*, *verso* e *modulo* (o *intensità*); in alcuni casi è rilevante il *punto di applicazione* (vettori applicati).

Da un punto di vista matematico, i vettori sono elementi di uno *spazio vettoriale*, la qual cosa definisce le operazioni che si possono effettuare con essi. Nello spazio vettoriale n -dimensionale \mathbb{R}^n , una volta scelta una *base* di vettori linearmente indipendenti $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, un generico vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ può essere rappresentato come *combinazione lineare* dei vettori della base, ossia nella forma:

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + \dots + w_n \mathbf{e}_n, \quad (\text{A.1})$$

dove gli n scalari reali w_1, \dots, w_n sono le *componenti del vettore \mathbf{w} rispetto alla base scelta*. C'è una corrispondenza biunivoca fra il vettore \mathbf{w} e le sue componenti rispetto alla base, per cui possiamo dire che il vettore è identificato dalle sue componenti: $\mathbf{w} \equiv (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Più in generale, in Fisica si ha a che fare con *funzioni vettoriali*, ossia vettori dipendenti da un parametro che, nella maggior parte dei casi, è il tempo. Quindi, un vettore $\mathbf{w}(t)$ può essere rappresentato dalla combinazione lineare

$$\mathbf{w}(t) = w_1(t) \mathbf{e}_1(t) + w_2(t) \mathbf{e}_2(t) + \dots + w_n(t) \mathbf{e}_n(t). \quad (\text{A.2})$$

Osserviamo che sia le componenti, sia i vettori della base possono essere dipendenti dal tempo: è quello che accade, per esempio, per la base polare e per la base intrinseca (si veda il Capitolo 1).

Nello spazio tridimensionale, è possibile scegliere una base *ortonormale* costituita da tre vettori $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$, *adimensionali* e di modulo unitario (e, per questo, trattasi di *versori*), oltre che mutuamente ortogonali tra loro. Tali versori restano fissi nel tempo e definiscono direzione e verso degli assi x , y e z di un sistema cartesiano¹. Rispetto a tale base, un generico vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere nella forma:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z. \quad (\text{A.3})$$

¹ Nel seguito, le rappresentazioni esplicite delle varie quantità di interesse saranno date solo in coordinate cartesiane. Naturalmente esistono anche altre possibilità, facilmente reperibili nei libri di testo, di cui abbiamo anche fatto uso nello svolgimento dei problemi.

Il vettore \mathbf{a} è identificato dalle sue componenti, per cui si può scrivere senza ambiguità: $\mathbf{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$. In particolare, gli stessi versori della base si possono esprimere attraverso le loro componenti; grazie alle proprietà di ortonormalità, si trova immediatamente che $\mathbf{u}_x \equiv (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_y \equiv (0, 1, 0)$, e $\mathbf{u}_z \equiv (0, 0, 1)$.

Anche il *modulo* di un vettore dello spazio euclideo tridimensionale si può scrivere in termini delle sue componenti:

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (\text{A.4})$$

Dato un vettore \mathbf{a} , è possibile ottenere da esso un *versore*, ossia un vettore *adimensionale* di *lunghezza unitaria*, concorde con \mathbf{a} in direzione e verso, dividendo \mathbf{a} per il suo modulo a (che per definizione è sempre positivo):

$$\mathbf{u}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{a} \mathbf{u}_x + \frac{a_y}{a} \mathbf{u}_y + \frac{a_z}{a} \mathbf{u}_z \equiv \left(\frac{a_x}{a}, \frac{a_y}{a}, \frac{a_z}{a} \right). \quad (\text{A.5})$$

Le componenti di un vettore *complanare* a due versori della base, per esempio \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y , hanno una semplice interpretazione trigonometrica: chiamando α l'angolo compreso tra il semiasse positivo dell'asse x e il generico vettore \mathbf{a} (Figura A.1), si vede che:

$$a_x = a \cos \alpha, \quad a_y = a \sin \alpha. \quad (\text{A.6})$$

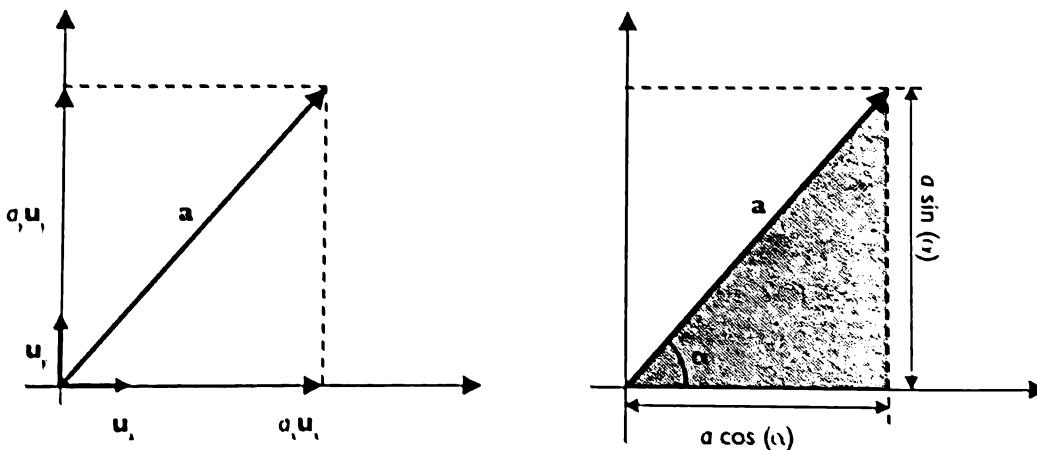


Figura A.1 Componenti cartesiane di un vettore nel piano.

Operazioni con i vettori

Prodotto per uno scalare. Dato un vettore $\mathbf{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ e uno scalare $\xi \in \mathbb{R}$, il vettore

$$\mathbf{a}' = \xi \mathbf{a} \quad (\text{A.7})$$

- ha modulo $|\mathbf{a}'| = |\xi| |\mathbf{a}|$;
- ha verso concorde a quello di \mathbf{a} se $\xi > 0$, opposto se $\xi < 0$;
- ha componenti $(a'_x, a'_y, a'_z) = (\xi a_x, \xi a_y, \xi a_z)$.

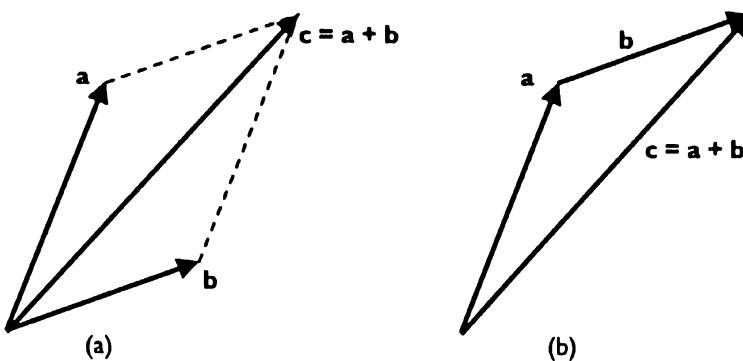


Figura A.2 La somma di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} è un vettore \mathbf{c} che può essere determinato usando la regola del parallelogramma (a) o la regola del poligono (b).

Somma. Siano dati due vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} dello spazio euclideo tridimensionale: Si chiama *somma* (o *vettore risultante*) di \mathbf{a} e \mathbf{b} il vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ che:

- giace nel piano definito da \mathbf{a} e \mathbf{b} ;
- rappresenta la diagonale (orientata) del parallelogramma avente per lati i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} (Figura A.2a).

Si noti che:

- la somma è commutativa, ossia $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
- Se $\mathbf{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ e $\mathbf{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$, il vettore somma ha componenti

$$c_x = (a_x + b_x), \quad c_y = (a_y + b_y), \quad c_z = (a_z + b_z);$$

- oltre che con la regola del parallelogramma, la somma di due vettori si può costruire graficamente con la regola del poligono (Figura A.2b), che è molto più pratica se i vettori da sommare sono più di due;
- la differenza fra due vettori, $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, è semplicemente la somma di \mathbf{a} e $-\mathbf{b}$ (Figura A.3).

Prodotto scalare. Il *prodotto scalare* tra due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} è lo scalare

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha,$$

essendo α l'angolo compreso fra di essi (Figura A.4).

Si noti che:

- il prodotto scalare è commutativo ossia $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
- il prodotto scalare di due vettori perpendicolari è nullo;
- $a \cos \alpha$ è la lunghezza della proiezione di \mathbf{a} nella direzione di \mathbf{b} (Figura A.4);

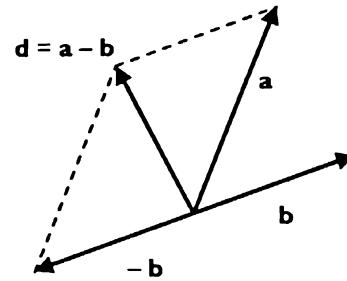


Figura A.3 La differenza tra due vettori, $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ è uguale alla somma di \mathbf{a} e di $-\mathbf{b}$, qui determinata usando la regola del parallelogramma.

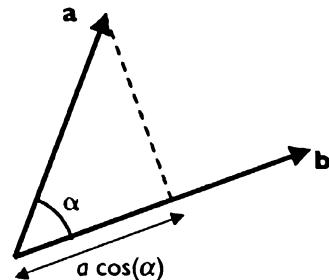


Figura A.4 Nel prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha = (a \cos \alpha)b$, $(a \cos \alpha)$ rappresenta la proiezione di \mathbf{a} sulla direzione di \mathbf{b} .

- dato un versore \mathbf{u} e un vettore \mathbf{a} , il prodotto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ è la *proiezione* di \mathbf{a} lungo la direzione individuata da \mathbf{u} . Per esempio, dato un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, si ha che

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_x, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_y, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_z;$$

- il prodotto scalare di un vettore per se stesso è uguale al quadrato del suo modulo:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a \cos \alpha = a^2 \rightarrow |\mathbf{a}| = a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad (\text{A.8})$$

(avendo usato il fatto che $\alpha = 0$ perché ogni vettore è parallelo a se stesso);

- la condizione di ortonormalità dei versori di una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ si esprime in termini di prodotto scalare dicendo che

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 1 \quad \text{se } i = j, \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{se } i \neq j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (\text{A.9})$$

In particolare, la relazione (A.9) è valida per la base cartesiana $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$, per cui

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = 1, \quad \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = 1, \quad \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = 0, \quad \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_z = 0, \quad \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = 0; \quad (\text{A.11})$$

- il prodotto scalare fra due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} può essere espresso in funzione delle loro componenti cartesiane:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \quad (\text{A.12})$$

- l'angolo fra due vettori si esprime in funzione delle loro componenti nella forma

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (\text{A.13})$$

Prodotto vettoriale. Il *prodotto vettoriale* associa a due vettori \mathbf{a}, \mathbf{b} un vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ che (si veda la Figura A.5):

- ha modulo $c = ab \sin \alpha$, essendo α l'angolo compreso fra \mathbf{a} e \mathbf{b} ;
- ha direzione perpendicolare sia ad \mathbf{a} , sia a \mathbf{b} , ossia *al piano definito da \mathbf{a} e \mathbf{b}* ;
- ha verso tale che, osservando dalla punta di \mathbf{c} , si deve vedere \mathbf{a} sovrapporsi a \mathbf{b} ruotando in senso *antiorario* per un angolo minore di 180 gradi (regola della mano destra).

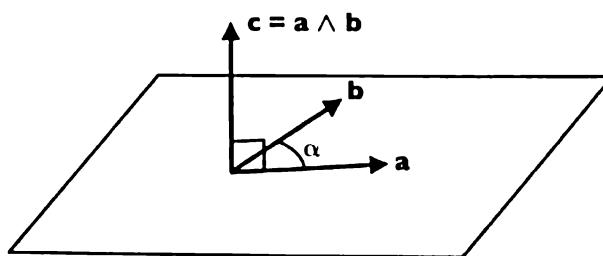


Figura A.5 Il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ è un vettore ortogonale al piano in cui giacciono \mathbf{a} e \mathbf{b} , e il cui verso è determinato dalla regola della mano destra.

Si noti che:

- il prodotto vettoriale *non è commutativo*, in quanto: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$;
- il prodotto vettoriale di due *vettori paralleli* è *nullo*;
- in particolare per i vettori della base cartesiana ortonormale $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ si ha che

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_y &= -\mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_z \\ \mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_z &= -\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_x &= -\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_x &= \mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_z = \mathbf{0};\end{aligned}$$

- le componenti del vettore \mathbf{c} , prodotto vettoriale fra i vettori $\mathbf{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ e $\mathbf{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$ si scrivono in modo sintetico sotto la forma di determinante simbolico

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Esplicitamente:

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{u}_x + c_y \mathbf{u}_y + c_z \mathbf{u}_z \quad (\text{A.15})$$

dove

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y \quad (\text{A.16})$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z \quad (\text{A.17})$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x. \quad (\text{A.18})$$

Derivate di vettori

Spesso i vettori di interesse in Fisica sono rappresentativi di grandezze che variano nel tempo e/o nello spazio, delle quali può servire, quindi, calcolare le derivate temporali e/o spaziali (e queste, a loro volta, possono essere funzioni del tempo e/o delle coordinate spaziali).

Ricordiamo che la derivata di una funzione vettoriale si effettua utilizzando le proprietà dell'operatore di derivazione, in particolare:

- (i) la sua linearità, che permette di definire la derivata di una somma come somma delle derivate degli addendi;
- (ii) la regola di Leibniz, che definisce la derivata di un prodotto. Quindi, se la funzione vettoriale $\mathbf{w}(t)$ è data da

$$\mathbf{w}(t) = w_1(t) \mathbf{e}_1(t) + w_2(t) \mathbf{e}_2(t) + \dots + w_n(t) \mathbf{e}_n(t), \quad (\text{A.19})$$

la sua derivata temporale diventa

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{dw_i}{dt} \mathbf{e}_i + w_i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right]. \quad (\text{A.20})$$

In particolare se i vettori di base sono *fissi*, ossia non dipendenti dal tempo, si ottiene

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{dw_i}{dt} \mathbf{e}_i \right] \quad (\text{A.21})$$

Per esempio, se $\mathbf{w}(t)$ è espresso rispetto alla base cartesiana canonica $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ nella forma $\mathbf{w}(t) = w_x(t)\mathbf{u}_x + w_y(t)\mathbf{u}_y + w_z(t)\mathbf{u}_z$ si ottiene esplicitamente

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw_x}{dt}\mathbf{u}_x + \frac{dw_y}{dt}\mathbf{u}_y + \frac{dw_z}{dt}\mathbf{u}_z. \quad (\text{A.22})$$

La derivata temporale di un vettore $\mathbf{w}(t)$ (non nullo) di modulo costante e non nullo è perpendicolare al vettore stesso:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Questa proprietà è valida, in particolare, per i versori, i quali hanno per definizione modulo sempre unitario.

Operatori vettoriali

Nello spazio tridimensionale, scelto un sistema di coordinate cartesiane (e quindi una base $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$), si definisce l'operatore vettoriale differenziale *nabla*:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (\text{A.24})$$

- data una funzione $f = f(x, y, z)$ si chiama *gradiente* di f la funzione vettoriale ∇f avente componenti:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z; \quad (\text{A.25})$$

- dato un vettore $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$, si chiama *divergenza* di \mathbf{v} la funzione scalare $\nabla \cdot \mathbf{v}$ così definita:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad (\text{A.26})$$

- dato un vettore $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$, si chiama *rotore* di \mathbf{v} la funzione vettoriale $\nabla \wedge \mathbf{v}$, avente componenti:

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z. \quad (\text{A.27})$$

Problemi di Fisica

Meccanica e termodinamica

con MyLab

L'attività didattica e di apprendimento del corso è proposta all'interno di un ambiente digitale per lo studio, che ha l'obiettivo di completare il libro offrendo risorse didattiche fruibili in modo autonomo o per assegnazione del docente.

Il codice presente sulla copertina di questo libro consente l'accesso per 18 mesi a **MyLab**, una piattaforma digitale interattiva specificamente pensata per accompagnare e verificare i progressi durante lo studio.

Le attività formative e valutative sono dettagliate nella pagina di catalogo dedicata al libro, consultabile all'indirizzo link.pearson.it/53364FB7 o tramite QR code.



9788891904959A

Per accedere alla piattaforma MyLab, registrati come **studente** universitario sul sito **pearson.it/place** attivando il codice studente che trovi sulla copertina del libro.

Il **docente** può richiedere l'accesso alla piattaforma MyLab al consulente universitario di zona:

pearson.it/consulenti-universitari.

€ 21,00



9788891904959

Gli autori

Dario Daghero è professore associato di Fisica Sperimentale al Politecnico di Torino dove svolge ricerca in Fisica dello stato solido e superconduttività. Insegna Fisica generale agli allievi ingegneri e si occupa dell'orientamento per la scuola secondaria.

Rita Claudia Iotti è professore associato di Fisica della materia al Politecnico di Torino, dove svolge attività di ricerca teorica nell'ambito della fisica dei nanomateriali e dei dispositivi quantistici. È titolare da diversi anni di corsi di Fisica generale.

Pietro Mandracci è professore associato in Fisica della Materia presso il Politecnico di Torino. Si occupa di materiali innovativi e di processi basati su plasmi non termici per applicazioni nella tecnologia avanzata e in ambito biomedicale.

Matteo Luca Ruggiero insegna Fisica nella scuola secondaria ed è docente a contratto al Politecnico di Torino. Svolge ricerca in Relatività e si occupa di innovazione nella didattica della Fisica, collaborando anche con l'Università di Torino.