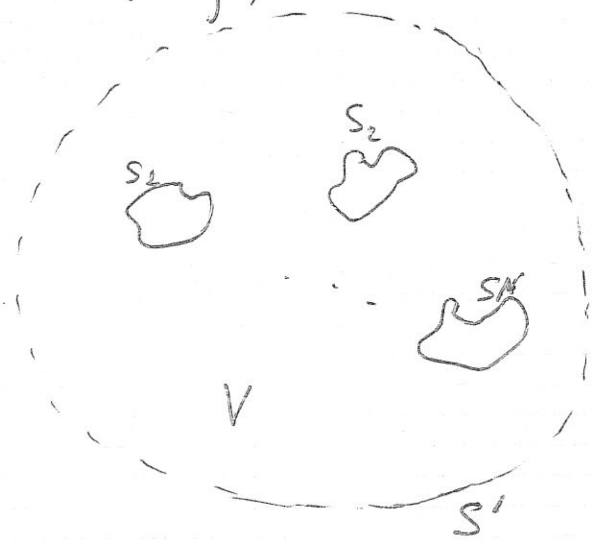
ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

Per un sistema di N cariche puntiformi risulta:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i \qquad V_i = \sum_{1,\, j \neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

Generalizzando ad un sistema di N conduttori di superfici $S_1, \dots, S_N$ e una distribuzione di carica volumetrica (esterna ai conduttori) ρ, abbiamo



$$U_e = \frac{1}{2} \int_V d\sigma' \rho V + \frac{1}{2} \int_S da' \sigma V$$

$S = S_1 + S_2 + \dots S_N$

V esterno di conduttori

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\operatorname{div}(V \vec{E}) = V \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \operatorname{grad} V$$

$$U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V d\sigma' V \operatorname{div} \vec{E} + \frac{1}{2} \int_S da' \sigma V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V d\sigma' \operatorname{div}(V \vec{E}) -$$

$$- \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V d\sigma' \vec{E} \cdot \operatorname{grad} V + \frac{1}{2} \int_S da' \sigma V =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{S_V} da' V \vec{E} \cdot \vec{n}_V + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V d\sigma' \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \int_S da' \sigma V =$$

$$S_V = S' + S_1 + \ldots + S_N = S' + S$$

$$\vec{E} \cdot \vec{n}_V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ $\vec{n}_V$ diretta all'interno dei conduttori

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{S'} da'\, V \vec{E} \cdot \vec{n}_V + \cancel{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{S} da'\, V \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V dv' \vec{E} \cdot \vec{E}$$

$$\cancel{+ \frac{1}{2} \int_S da'\, \sigma V}$$

se $S' \to +\infty$ $\quad V \propto \frac{1}{r} \quad E \propto \frac{1}{r^2} \quad da' \propto r^2$

$$\int_{S'} da'\, V \vec{E} \cdot \vec{n}_V \longrightarrow 0$$

$$U_e = \int_V dv' \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} \right)$$

Possiamo pensare che il lavoro speso per portare le cariche sui conduttori viene ritrovato sotto forma di energia associata al campo elettrico e distribuita nello spazio con densità volumetrica:

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}$$ densità di energia elettrostatica.

In altri termini l'energia elettrostatica può essere vista come il lavoro necessario per creare in una certa regione di spazio un campo elettrico.