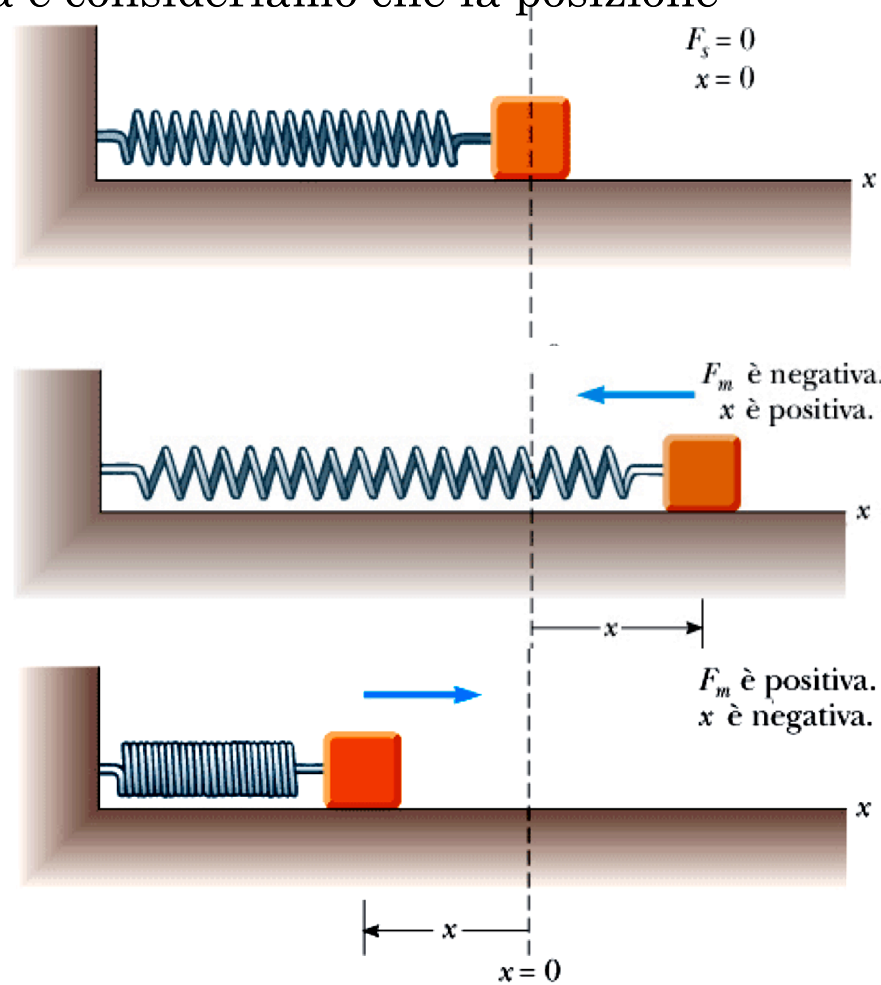
# Molla e legge di Hooke

Consideriamo un corpo di massa m poggiato su una superficie priva di attrito ed attaccato all'estremità libera di una molla e consideriamo che la posizione di equilibrio (F=0) sia in x=0




- Se la molla viene allungata o compressa di un tratto x rispetto alla sua posizione di equilibrio essa eserciterà una forza proporzionale allo spostamento che si oppone ad esso:

**legge di Hooke** $$\boxed{F = -kx}$$

La costante di proporzionalità *k* è detta costante elastica della molla

**La forza esercitata dalla molla è sempre diretta in verso opposto a quello dello spostamento dalla posizione di equilibrio x=0**

NB: la x nella formula rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio, se tale posizione fosse stata in un punto $x=x_0$ la legge di Hooke sarebbe stata scritta:

$$\boxed{F = -k\left(x - x_0\right)} \Rightarrow \boxed{F = -k\Delta x}$$

# Moto (oscillatorio) armonico

La legge di Hooke ci fornisce l'andamento della forza di un corpo soggetto ad una forza elastica. L'equazione del moto si può ora ricavare dalla seconda legge di Newton:

$$\boxed{F = ma = -kx}$$

Equazione differenziale di secondo grado omogenea

$$ma = -kx \Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

Dove:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

La soluzione di questa equazione è una funzione trigonometrica che rappresenta una oscillazione:

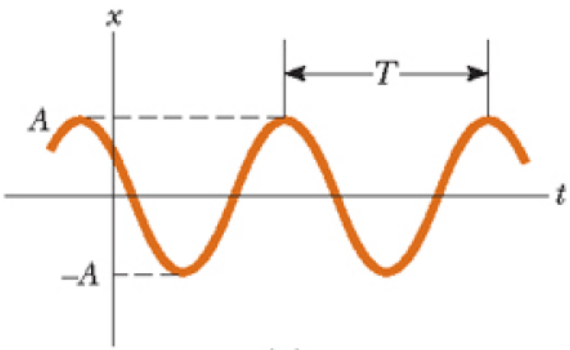
$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

**NB**: $\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è la pulsazione dell'oscillazione, che dipende dalla costante elastica della molla e dalla massa ad essa applicata.

# Moto armonico (2)

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ è una soluzione dell'equazione differenziale: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

Se infatti deriviamo due volte x(t) otteniamo:



(a)

Equazioni di un moto armonico di ampiezza A, frequenza angolare ω ed angolo di fase ϕ

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{A\cos(\omega t + \varphi)}_{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}(\cos(\omega t + \phi)) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

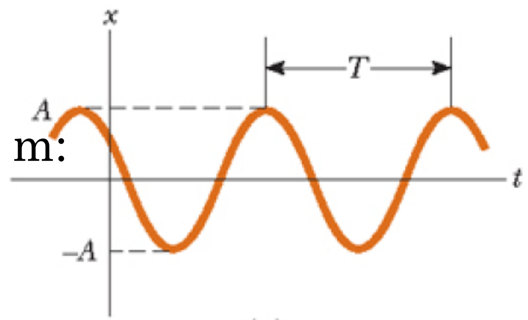
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

# Proprietà del moto armonico (3)

Data l'equazione del moto si possono determinare alcune proprietà del moto oscillatorio: la pulsazione ω ed il periodo T.

- Il periodo T e' pari al tempo minimo che impiega l'oscillazione a tornare alla stessa posizione con la stessa velocità. Dipende solo da k ed m

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$



(a)

- La frequenza *f* è l'inverso del periodo e dipende solo da k ed m:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- La frequenza angolare :

$$\boxed{\omega = \frac{f}{2\pi} = \frac{2\pi}{T}}$$

- Le grandezze $A$ e $\phi$ che compaiono nella soluzione sono l'Ampiezza e la costante di fase e dipendono dalle condizioni iniziali del moto, cioè dalla posizione e dalla velocità iniziale.

$$(\omega t + \phi) = \text{fase del moto}$$

# Proprietà del moto armonico (4)

Poiché le funzioni seno e coseno oscillano tra +1 e -1:

I valori estremi per x sono ±A,

I valori estremi di $v$ sono ±ωA

I valori estremi di $a$ sono ± $\omega^2$A

$$\boxed{x_{max} = A}$$

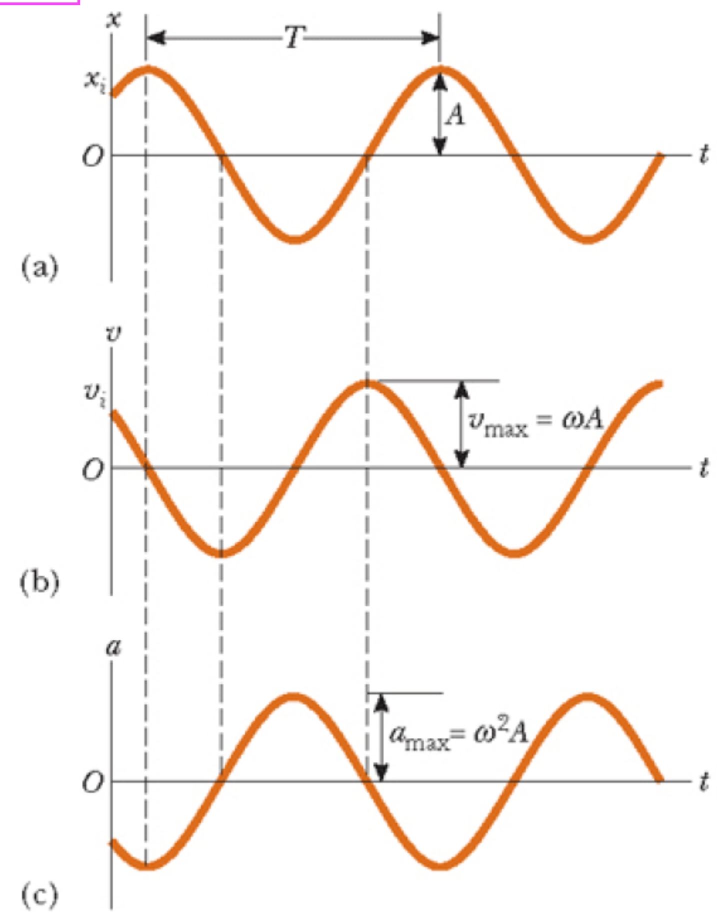
$$\boxed{v_{max} = \omega A = A\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$



# Proprietà del moto armonico (5)

Esempio 1: se abbiamo una molla inizialmente allungata di una quantità $L$ e lasciata libera di oscillare all'istante $t=0$, essa comincerà ad oscillare tra $x=L$ ed $x=-L$.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow x(t=0) = L \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} A = L \\ \cos(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

Si avrà quindi che l'equazione del moto armonico sarà:

$$x(t) = L\cos(\omega t) \quad e \quad v(t) = -\omega L \sin(\omega t)$$

Esempio 2: Consideriamo una molla lasciata libera di oscillare tra $x=L$ ed $x=-L$. In questo caso prendiamo come istante iniziale $t=0$, l'istante in cui la molla passa per il suo punto di riposo ($x(0)=0$) per poi immediatamente allungarsi($v(0)=v_{max}$ ). Cambieranno quindi le condizioni iniziali rispetto al caso precedente:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow x(t=0) = 0 \; e \; v(t=0) = -A\omega\sin(\varphi) = v_{\max} = L\omega$$

Si avrà quindi: $\begin{cases} A = L \\ \cos(\varphi) = 0 \; e \; sin(\varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

Le equazioni del moto armonico con queste condizioni iniziali saranno quindi:

$$x(t) = L\cos\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) = L\sin(\omega t) \qquad v(t) = -\omega L\sin\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) = wL\cos(\omega t)$$

# Energia e Lavoro

1. Che cos'è l'energia
2. Energia Cinetica
3. Lavoro di una forza costante
4. Lavoro di un forza variabile
5. Il teorema dell'energia cinetica
6. Esempio: il lavoro compiuto dalla forza peso
7. Esempio: il lavoro compiuto per sollevare ed abbassare un peso
8. Esempio: lavoro compiuto dalla forza elastica
9. Esempio: il lavoro compiuto dalla forza di attrito

# Che cos'è l'energia- definizione di sistema

Il termine energia è un parola comunemente usata nel nostro colloquiare quotidiano. Conosciamo molti tipi di energia e gli innumerevoli campi in cui essa può essere utilizzata, sappiamo che qualsiasi movimento richiede energia, che il controllo di alcune "fonti di energia" è stato ed è tuttora una delle cause di guerre tra stati…

MA…. Cosa significa in realtà energia?

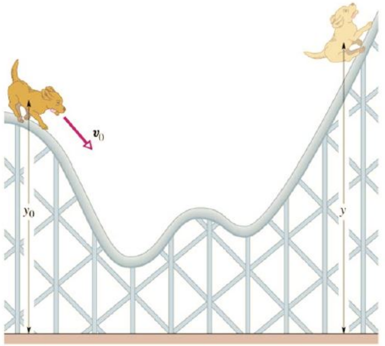
- ***Dal punto di vista fisico**: L'energia è una grandezza fisica scalare associata allo stato di un corpo o di un sistema di corpi .*

- Se una forza interviene a cambiare lo stato di un corpo il valore numerico dell'energia che lo rappresenta si modifica.

- **La proprietà più importante del nostro Universo è che in esso l'energia si conserva, si può trasformare , passare da un corpo ad un altro, ma l'energia totale si deve conservare.**

- Mediante lo studio dell'energia è possibile risolvere dei problemi di dinamica anche senza l'utilizzo delle leggi di newton e questo approccio è molto conveniente soprattutto quando si ha a che fare con forze variabili, cioè quando l'accelerazione non è costante e le equazioni del moto possono risulta molto complicate.

- **Definizione di Sistema**:
- Un sistema è un modello semplificato di una piccola porzione di Universo che viene presa in considerazione.
- Un sistema può essere composto da: una sola particella, un insieme di particelle, una regione di spazio..
- Un sistema può cambiare di forma e dimensione ( pallina di gomma ..)



# Energia Cinetica

**Energia cinetica di un corpo :** ***energia associata allo stato di moto del corpo***

Se ad un certo istante un corpo si muove con una velocità v, sufficientemente inferiore alla velocità della luce, l'energia cinetica del corpo in quell'istante é

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2}$$

**Energia Cinetica**

- L'energia cinetica aumenta quadraticamente all'aumentare del modulo della velocità e se un corpo è fermo la sua energia cinetica è nulla

- L'energia cinetica dipende linearmente dalla massa del corpo

- L'unità di misura dell'energia è il Joule e si ha che: $\boxed{1J = Kg \cdot m^2 / s^2}$

- Vedremo che la variazione di energia cinetica si collega strettamente ad un nuovo concetto fisico detto **Lavoro** ( in fisica la parola Lavoro ha un significato diverso da quello comunemente usato).

# Lavoro svolto da una forza costante

Consideriamo una forza costante $\vec{F}$ che agisca su un punto materiale e supponiamo per semplicità che il moto avvenga nella direzione della forza.
Sia $\Delta$r lo spostamento. Definiamo **Lavoro della forza il prodotto:**

$$L = F \cdot \Delta r$$

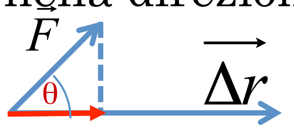
Più in generale se il moto avviene in una direzione diversa rispetto alla forza il **lavoro è definito come il prodotto scalare della forza per lo spostamento** :

$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = F \Delta r \cos\theta}$$

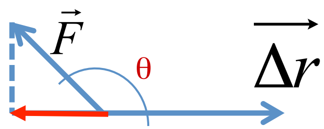
**Lavoro** ( grandezza scalare)

Dove θ è l'angolo tra la direzione della forza e quella dello spostamento.
Siccome L è uno scalare esso può essere positivo, negativo o nullo:

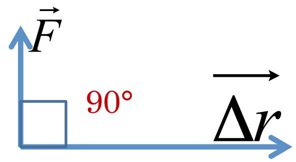
- Se $\theta<\pi/2$ ( cioè cos θ >0)la forza ha una componente positiva nella direzione del moto $\rightarrow$ $L>0$ ed il lavoro e' detto lavoro motore



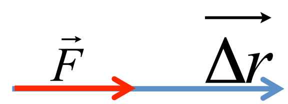

- Se $\pi/2<\theta<\pi$ ( cioè cos θ <0) la forza ha una componente negativa nella direzione del moto allora $L<0$ ed e' detto lavoro resistente.




- Se $\theta=\pi/2$ ( cioè cos θ =0)la forza non ha una componente nella direzione del moto $\rightarrow$ $L=0$




- Se $\theta=0$ ( cioè cos θ =1)la forza e lo spostamento sono paralleli nella direzione del moto $\rightarrow$ $L=F\cdot\Delta r$



# Alcune considerazioni sul lavoro di una forza

$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = F \Delta r \cos\theta}$$

Poiché $F cos\theta$ può essere vista come la proiezione della forza $\vec{F}$ sulla direzione dello spostamento $\Delta$r, quando forza e spostamento hanno direzioni diverse, il lavoro è compiuto solo dalla componente di $\vec{F}$ nella direzione di $\overrightarrow{\Delta r}$ .

Se quindi la Forza agente su un corpo è perpendicolare allo spostamento la sua componente lungo $\Delta$r è nulla e quindi non compie lavoro.

# Lavoro svolto da una forza variabile(1)

- Se la forza agente non è costante ma la traiettoria è lineare (particella che si muove lungo l’asse x ma con forza che varia in funzione della posizione) allora possiamo scomporre la traiettoria stessa in intervalli *dx* sufficientemente piccoli da poter considerare in essi che la forza sia costante

- Possiamo esprimere il lavoro effettuato dalla forza lungo la traiettoria come la somma dei lavori eseguiti nei singoli segmenti di traiettoria:

$$L = F_{x1}\,\Delta x + F_{x2}\,\Delta x + F_{x3}\,\Delta x + \;\ldots\; + F_{xN}\,\Delta x$$

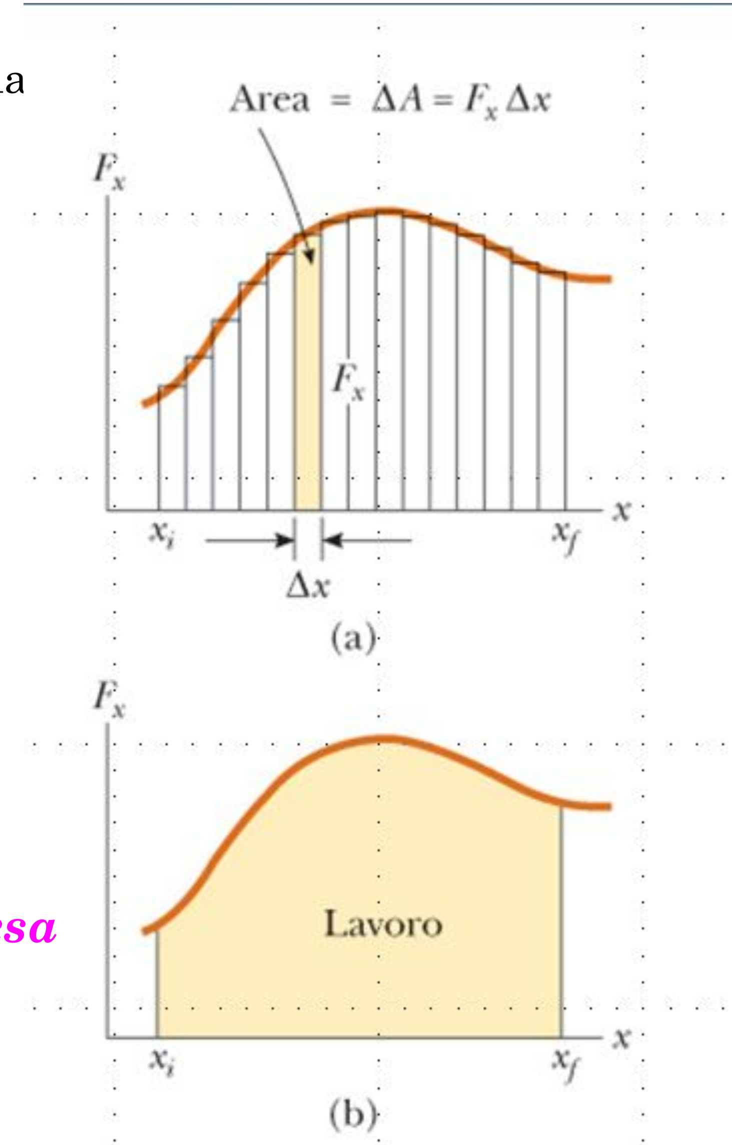
Cioè:

$$\boxed{L = \sum_{n=1}^{N} L_n = \sum_{n=1}^{N} F_{x_n}\,\Delta x}$$

Se le dimensioni degli intervalli tendono a zero il numero degli intervalli cresce fino ad infinito e la somma tende all’integrale:

$$\boxed{L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_{x_n}\,\Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx}$$

***Il lavoro è pari all’integrale definito di F(x) calcolato tra $x_i$ ed $x_f$, cioè è pari all’area sottesa dalla curva $F_x(x)$ nell’intervallo $\Delta x = x_f - x_i$***




NB: Se la forza fosse costante, $F_x$ potrebbe essere estratto dall’integrale e si otterrebbe di nuovo $L = F_x \cdot \Delta x$

# Lavoro svolto da una forza variabile(2)

In un sistema costituito da una particella su cui agiscono più forze, il lavoro totale compiuto sul sistema è dato dalla somma dei lavori effettuati dalle singole forze:

$$L_{tot} = \sum L = \int_{x_i}^{x_f} \left( \sum F_x \right) dx$$

NB la somma di integrali di funzioni è uguale all'integrale della somma delle funzioni

$$\sum \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} \left( \sum F_x \right) dx$$

Consideriamo ora un caso più generale, di una particella che si muove lungo una traiettoria tridimensionale mentre è soggetta ad una forza risultante $\vec{R} = \sum \vec{F}$ .
Il lavoro, che è una grandezza scalare sarà dato dall'integrale del prodotto scalare tra $\vec{R}$ ed il percorso infinitesimo $d\vec{r}$ :

$$L = \int \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \longrightarrow \quad L = \int \vec{R} \cdot d\vec{r}$$

L'integrale è calcolato lungo il percorso della traiettoria ( integrale di linea)

NB: In ogni caso **il lavoro è una grandezza scalare** e le sue dimensioni fisiche sono: **$[M][L]^2[T]^{-2}$**

L'unita' di misura del lavoro è la stessa dell'energia : **il Joule**

$$1J = N \cdot m = Kg \cdot m^2 / s^2$$

# Analisi tridimensionale

$$\boxed{L = \int dL = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Esplicitiamo:
Consideriamo una particella sulla quale agisca una forza :

$$\boxed{\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}}$$

dove $F_x$, $F_y$, $F_z$, dipendono da x, y, z rispettivamente (semplificazione)
Supponiamo che la particella compia uno spostamento infinitesimo

$$d\vec{r} = (dx)\hat{i} + (dy)\hat{j} + (dz)\hat{k}$$

Il lavoro infinitesimo dL, svolto dalla forza F mentre la particella si sposta di $d\vec{r}$ sarà:

$$\boxed{dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

Il lavoro L svolto da F durante lo spostamento dalla posizione iniziale $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ alla posizione finale $\vec{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$ sarà quindi:

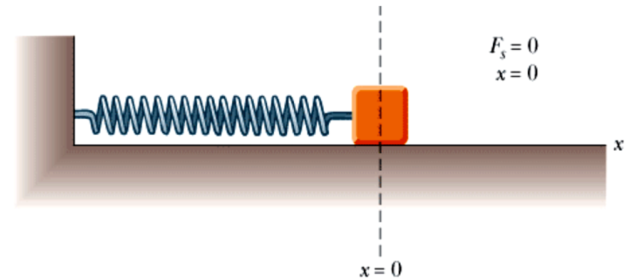
$$\boxed{L = \int_i^f dL = \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz}$$

# Lavoro svolto da una molla(1)

Consideriamo una forza elastica agente in una dimensione:

$$\boxed{F = -kx}$$

Il segno negativo significa che la forza è sempre rivolta in senso contrario a quello dello spostamento dalla posizione di equilibrio x=0. La forza tende quindi sempre a riportare la molla alla posizione di equilibrio e per questo viene chiamata Forza di Richiamo




Se $x>0$ la forza è negativa,
Se $x<0$ la forza è positiva,
Quando $x=0$ la molla non è deformata e la forza è nulla.

Quindi se agganciamo un corpo poggiato su un piano orizzontale ad una molla e lo spostiamo di una distanza $x_{max}$ esso comincerà ad oscillare tra $+x_{max}$ e $-x_{max}$ passando per $x=0$

Il lavoro compiuto da una molla sarà quindi dato dall'integrale ( poiché F varia in funzione di x):

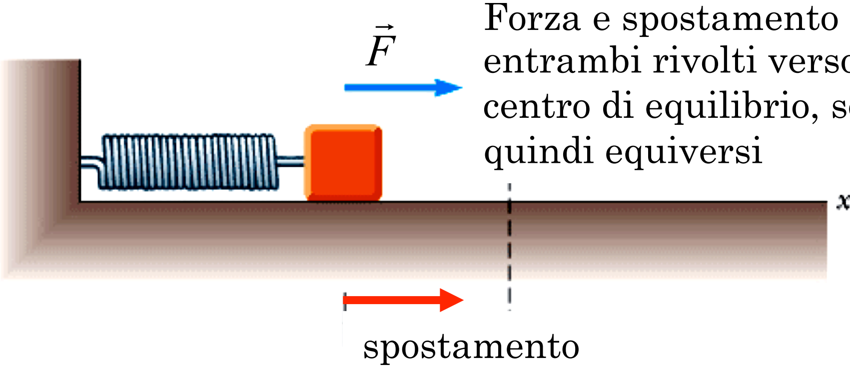
$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{x_i}^{x_f} kx \ dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x \ dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2}$$

**Lavoro svolto da una molla durante lo spostamento dal punto $x_i$ al punto $x_f$**

# Lavoro svolto da una molla(2)

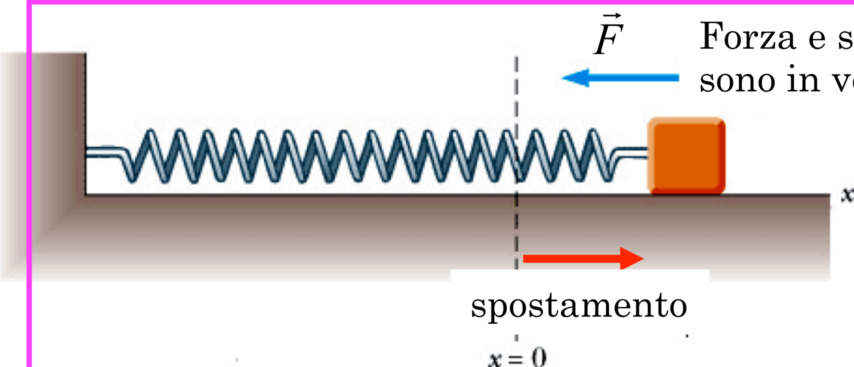
$$L = -\int_{x_i}^{x_f} kx\,dx \qquad \boxed{L = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2}$$




Forza e spostamento sono entrambi rivolti verso il centro di equilibrio, sono quindi equiversi

Se $x_i = - x_{max}$ ed $x_f = 0$

$$L_{-x_{\max}0} = -\int_{-x_{\max}}^{0} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 > 0$$




Forza e spostamento sono in verso opposto

Se $x_i = 0$ ed $x_f = x_{max}$

$$L_{0x_{\max}} = -\int_{0}^{x_{\max}} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_{\max}^2 < 0$$

**Il lavoro compiuto dalla molla per andare da $-x_{max}$ a $+x_{max}$ è quindi nullo!**

$$L = -\int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_{\max}^2 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = 0$$

# Lavoro svolto da una molla(3)

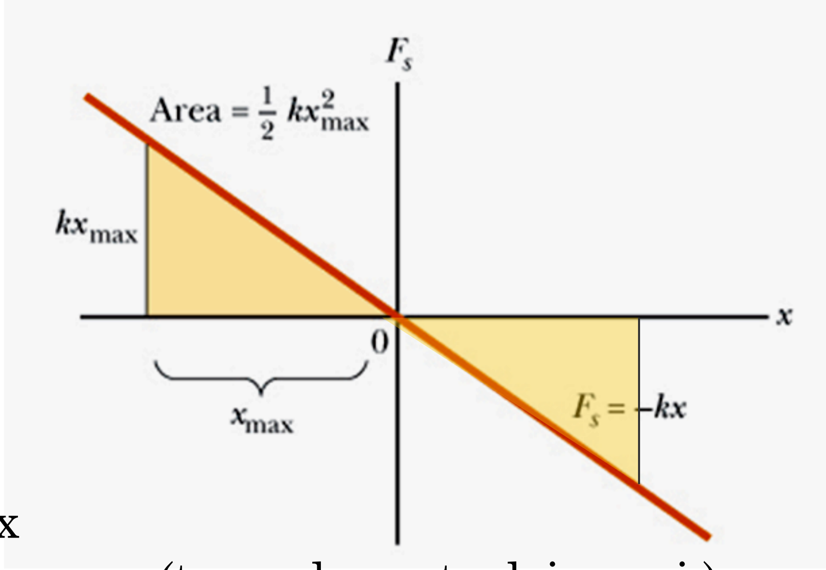



Grafico di F=-kx in funzione di x
L'area in giallino è il lavoro della forza di richiamo F della molla durante lo spostamento da $-x_{max}$ a $+x_{max}$.
È evidente che le due aree triangolari ( quella corrispondente al lavoro da $-x_{max}$ a 0 e quella da 0 a $+x_{max}$ ) si annullano a vicenda, essendo state ottenute moltiplicando la base pari a $x_{max}$ una volta per kx ed un'altra per –kx
Poiché il lavoro è proprio la somma di queste due aree (tenendo conto dei segni ) il lavoro è nullo

Il lavoro svolto dalla forza di richiamo della molla è nullo quando lo spostamento iniziale rispetto all'equilibrio e quello finale coincidano

$$L = -\int_{x_i}^{x_f} kx\, dx = -\frac{1}{2}kx_i^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 \quad \text{Se } x_i = x_f \quad L = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 = 0$$

# Teorema dell'energia cinetica

Se si può calcolare il lavoro compiuto dalla forza risultante agente su una particella per effettuare un dato spostamento, sarà possibile calcolare in maniera molto semplice anche la sua variazione di velocità.

Consideriamo una particella che si muove lungo una traiettoria e scomponiamo la sua accelerazione nelle componenti tangente $a_t$ e radiale $a_r$ rispetto alla traiettoria stessa.

Definiamo forza tangenziale $F_t$ la componente della forza nella direzione della traiettoria.

$$\boxed{F_t = ma_t}$$

Forza tangenziale

Il lavoro della forza si può scrivere in termini di tale componente:

$$\boxed{L = \int_i^f F_t dr}$$

Ricordiamo che:

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}} \Rightarrow \boxed{F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt}}$$

E sostituendo nell'espressione del lavoro:

$$L = \int_{r_i}^{r_f} F_t\, dr = \int_{r_i}^{r_f} m\frac{dv}{dt}dr = m\int_i^f \frac{dr}{dt}dv = m\int_{v_i}^{v_f} v\, dv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_i}^{v_f} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt}} \qquad \boxed{v}$$

Dove $v_i$ e $v_f$ sono le velocità della particella nel punto iniziale e finale dello spostamento

# Teorema dell’energia cinetica

Ricordiamo che per definizione l’energia cinetica di una particella che possiede una velocità v è pari a:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2}$$

Avremo quindi che

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta T}$$

Variazione dell’energia cinetica della particella

Possiamo quindi enunciare il TEOREMA DELL’ENERGIA CINETICA:

**Quando è svolto lavoro sul sistema e la sola variazione nel sistema è la variazione del modulo della velocità, il lavoro compiuto dalla forza risultante che agisce sul sistema è pari alla variazione dell’energia cinetica della particella che avviene nello spostamento.**

$$\boxed{L = \Delta T = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2}$$

Se $L>0$ $\quad \Delta T>0$ $\Rightarrow$ l’energia cinetica aumenta andando dal punto iniziale i al punto finale f

Se $L<0$ $\quad \Delta T<0$ $\Rightarrow$ l’energia cinetica diminuisce nello spostamento da i ad f

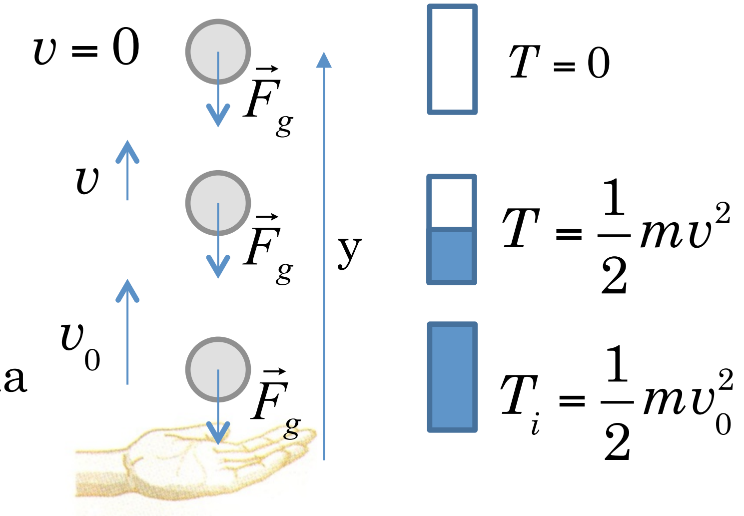
Se L=0 $\quad \Delta$T=0 $\Rightarrow$ l’energia cinetica non varia

# Lavoro compiuto dalla forza gravitazionale

- Consideriamo una pallina di massa m che viene gettata in aria verticalmente con una velocità iniziale $v_0$

$$T_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Energia cinetica iniziale




- La pallina è soggetta alla forza gravitazione

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

- A causa della presenza di tale forza la velocità della pallina, diminuisce e quindi anche l'energia cinetica

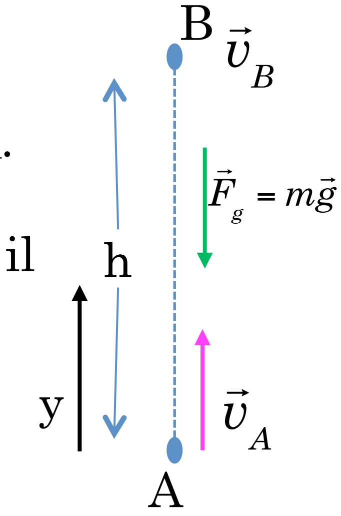
- Il lavoro che la forza gravitazionale fa sulla pallina durante lo spostamento Δy è:

$$L = F_g \Delta y \cos\theta = \begin{cases} -mg\Delta y & \text{Mentre la pallina sale ( θ=180° perche la forza e lo spostamento hanno versi opposti)} \\ +mg\Delta y & \text{Mentre la pallina scende ( θ=0° perche la forza e lo spostamento sono equiversi )} \end{cases}$$

Il segno positivo sta ad indicare che la forza gravitazionale trasferisce energia mgΔy alla particella sotto forma di energia cinetica

# Esempio di applicazione del teorema dell'energia cinetica(1)

Consideriamo due punti A e B posti uno sopra all'altro  a distanza h, ed un corpo di massa m che si muove da A a B con velocità iniziale $\vec{v}_A$. Tale corpo è soggetto alla sola forza peso $\vec{F}_g = m\vec{g}$.
Determinare la distanza h se B è la posizione di massima altezza che il corpo può raggiungere




<u>Possiamo risolverlo da un punto di vista puramente energetico (invece che da un punto di vista dinamico)</u>

L'unica forza che agisce è la forza peso

Il lavoro sarà sicuramente negativo in quanto lo spostamento da A a B ha verso opposto alla forza peso :

$$L = \vec{F}_g \cdot \overrightarrow{\Delta r} = -mg\Delta y \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = -mgh}$$

Per il teorema dell'energia cinetica si ha: $L = -mgh = \Delta T = \left(T_B - T_A\right) = \frac{1}{2}m\underbrace{v_B^2}_{0} - \frac{1}{2}mv_A^2$

$$-mgh = -\frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{v_A^2}{2g}}$$

Risultato già visto nello studio della caduta del grave