

Energia elettrostatica

U in presenza di un dielettrico è il lavoro per:

- La costruzione della **distribuzione di carica libera** ρ_{lib}
(= portare la carica dall'infinito alla configurazione finale)
- La **polarizzazione del dielettrico**
(dovuta alla presenza di carica libera)

Equivalentemente: U è il lavoro per costruire la **distribuzione di carica libera**, ma **in presenza** del potenziale dovuto sia a ρ_{lib} che a ρ_p

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \rho_{\text{lib}} V d\tau$$

dove: $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ V è soluzione dell'equazione:

$$\rho_{\text{lib}} = \text{div } \mathbf{D}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_{\text{lib}} + \rho_p}{\epsilon_0}$$

In generale, per uno scalare (V) e un vettore (\mathbf{D}):

$$\text{div}(\mathbf{VD}) = V \text{div } \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \text{grad } V = V \text{div } \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$$

↑ a) ↑ b)

a) Lavoro per costruire la distribuzione di carica
(come nel vuoto)

b) Lavoro di polarizzazione del dielettrico

A parità di campo \mathbf{E} la densità di energia u è maggiore
in presenza di dielettrici (b)

Sfera dielettrica in campo \mathbf{E}_0 uniforme

Il campo totale \mathbf{E} è uguale al campo esterno \mathbf{E}_0 più il campo determinato dalla polarizzazione della sfera \mathbf{E}_p

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$$

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

Supponendo \mathbf{P} uniforme nella sfera

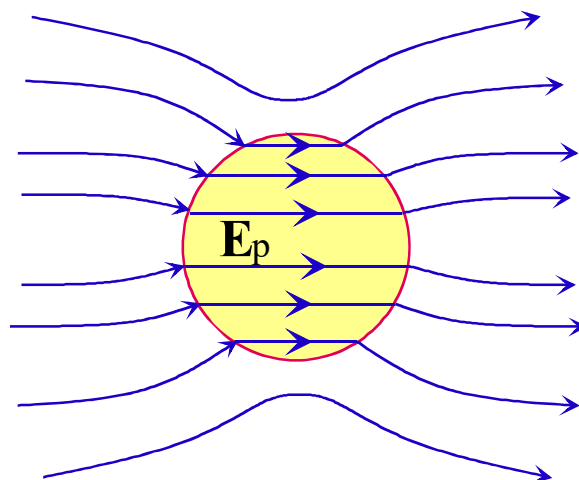
$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{3} \mathbf{E}$$

anche il campo \mathbf{E} risulta uniforme nella sfera

$$\mathbf{E} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \mathbf{E}_0 \quad (\mathbf{E} < \mathbf{E}_0)$$
$$\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{(2 + \epsilon_r) \epsilon_0} \mathbf{E}_0$$

all'esterno \mathbf{E}_p è un campo di dipolo



Campo elettrico efficace

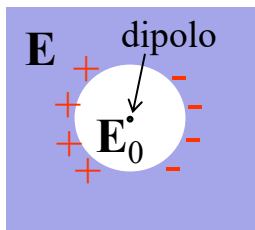
E_{eff} = Campo elettrico efficace

= Campo che agisce sulla singola molecola nella posizione considerata

= Campo dovuto a tutte le molecole del dielettrico, eccetto quella considerata

Il dielettrico si comporta come una distribuzione di dipoli.

Supponiamo di rimuovere una sfera di dielettrico centrata nel punto P in cui vogliamo valutare E_{eff} .



$$E_{\text{eff}} = E_0 + E_{\text{dip}}$$

con: E_0 = Campo in P dopo aver tolto la sfera

E_{dip} = Contributo di tutti i dipoli, eccetto quello in P

$$E_0 = E - E_{\text{sfera}}$$

con: E = Campo nel dielettrico prima di rimuovere la sfera

E_{sfera} = Campo generato dalla sfera di dielettrico

$$E_{\text{sfera}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

In molte situazioni (gas, liquidi non polari, cristalli a reticolo cubico, ...):

$$E_{\text{dip}} \cong 0$$

$$\Rightarrow E_{\text{eff}} \cong E_0 = E + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Modello microscopico della polarizzazione

Il comportamento elettrico di un dielettrico è caratterizzato dalla **relazione costitutiva** $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ del materiale.

$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ può essere determinata:

- **sperimentalmente**
- con un **modello microscopico** del materiale.

Una trattazione teorica accurata si basa sulla meccanica quantistica. Vediamo una **trattazione classica** approssimata, ma qualitativamente corretta.

\mathbf{p}_{mi} = Momento di dipolo della singola molecola

In un volumetto $\Delta\tau$ con n molecole:

$$\Delta\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{mi} = n \langle \mathbf{p}_m \rangle$$

dove il momento molecolare medio risulta:

$$\langle \mathbf{p}_m \rangle = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{p}_{mi}$$

Quindi:

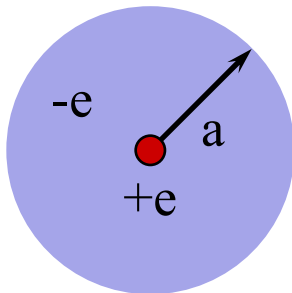
$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{n \langle \mathbf{p}_m \rangle}{\Delta\tau}$$

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_m \rangle$$

con N = numero medio di molecole per unità di volume

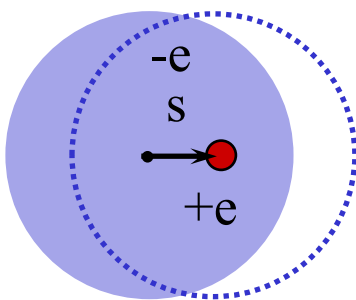
Polarizzazione per deformazione

Molecole **non** polari ($\mathbf{p} = 0$)



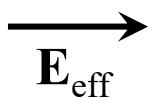
Modello di Bohr:

- carica puntiforme positiva $+e$ (nucleo)
- nube elettronica di carica negativa $-e$ distribuita uniformemente in una sfera di raggio a



Sotto effetto di \mathbf{E}_{eff} il baricentro di $-e$ si sposta rigidamente fino a raggiungere la posizione di equilibrio a distanza s .

Solo la carica q_e , nella sfera di raggio s :



$$q_e = \rho \frac{4}{3} \pi s^3 = \frac{-e}{\frac{4}{3} \pi a^3} \frac{4}{3} \pi s^3 = -e \frac{s^3}{a^3}$$

determina un'interazione (attrazione coulombiana) netta con $+e$:

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{s}{a} \right)^3 \frac{-e}{s^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-es}{a^3}$$

All'equilibrio \mathbf{E}_c è uguale e opposto a \mathbf{E}_{eff} :

$$E_{\text{eff}} = \frac{es}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{e} E_{\text{eff}}$$

$$\Rightarrow p_m = es = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_{\text{eff}}$$

$$\mathbf{p}_m = \alpha_e \mathbf{E}_{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = N \alpha_e \mathbf{E}_{\text{eff}} \propto \mathbf{E}_{\text{eff}}$$

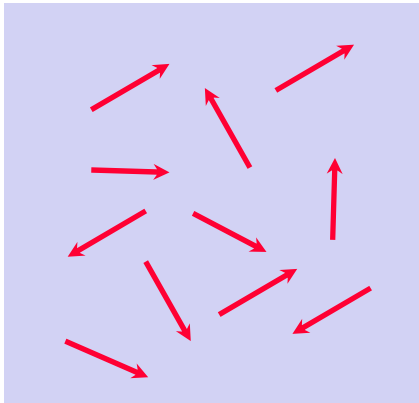
dove: α_e = Polarizzabilità elettronica

Polarizzazione per orientamento

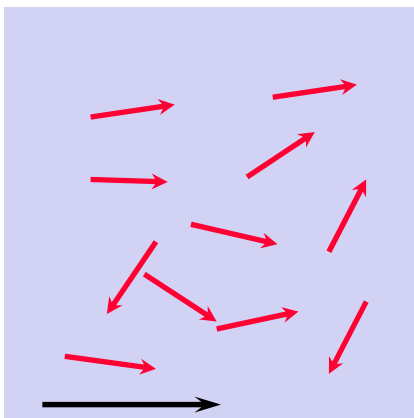
Si verifica nei **materiali polari**, dove le molecole possiedono un **momento di dipolo proprio p** anche in assenza di campo esterno:

$$p \neq 0$$

Nei materiali omogenei e isotropi, in assenza di campo esterno, per effetto del moto di **agitazione termica** i dipoli sono disposti casualmente e il dipolo medio è uguale a zero:



$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{p} \rangle = 0$$



\mathbf{E}_{eff}

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{p} \rangle \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} \neq 0$$

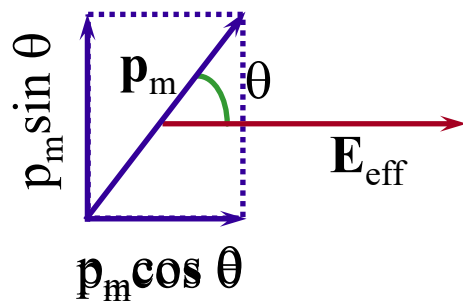
\mathbf{E}_{eff} tende ad allineare i dipoli

\Rightarrow Componente media di dipolo nella direzione del campo

\Rightarrow Componente ortogonale a media nulla

La polarizzazione **P** dipende da $\langle \mathbf{p} \rangle$

⇒ Per valutare la polarizzazione indotta occorre determinare il momento di dipolo medio nella direzione di \mathbf{E}_{eff} :



$$\langle p_m \cos \theta \rangle$$

L'energia del dipolo vale:

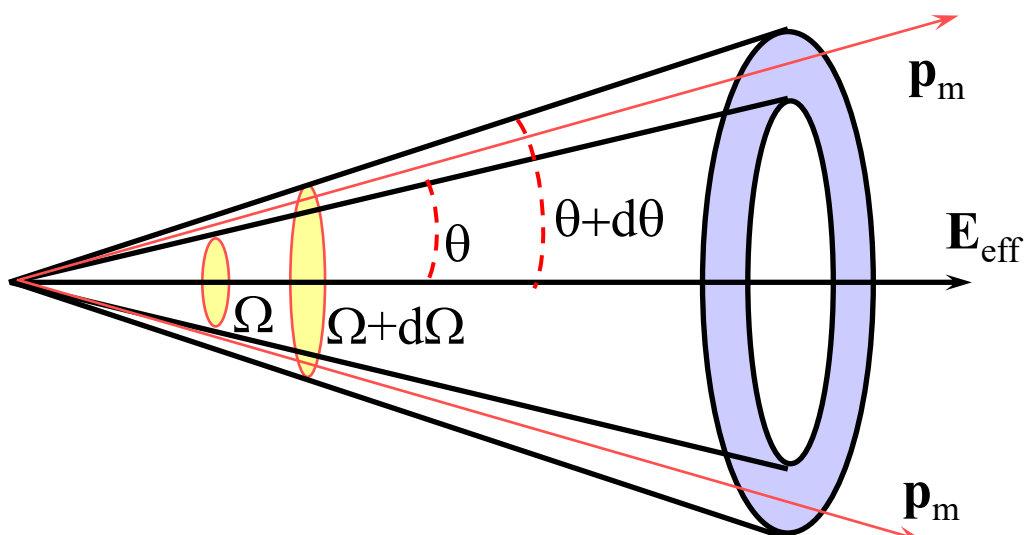
$$U = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{E}_{\text{eff}} = -p_m E_{\text{eff}} \cos \theta$$

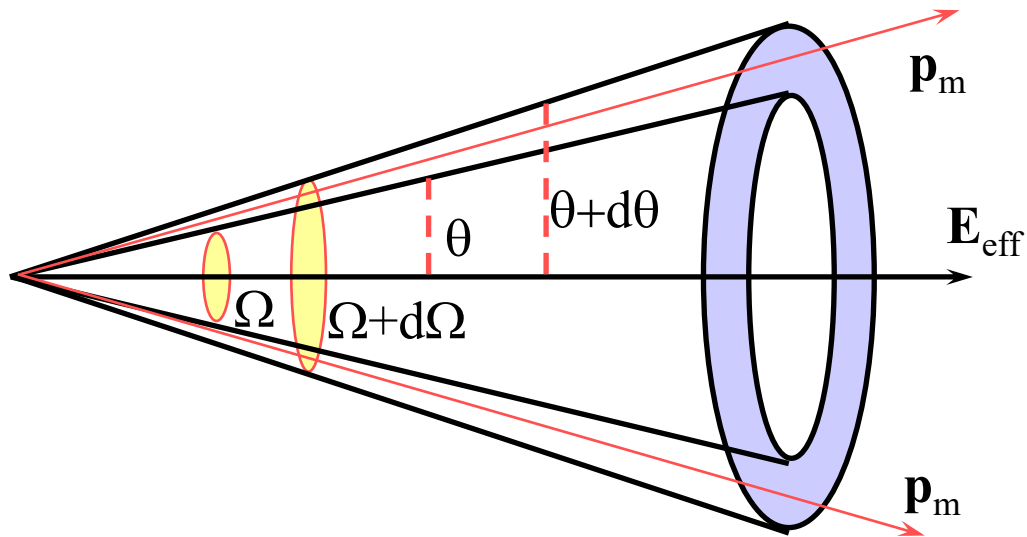
Dalla statistica di Boltzmann, la probabilità per un dipolo di avere energia U (e di formare un angolo θ con \mathbf{E}_{eff}) è proporzionale a:

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$$

I dipoli che formano un angolo θ con \mathbf{E}_{eff} sono diretti lungo un cono di semiapertura θ .

⇒ I dipoli che formano un angolo compreso tra θ e $\theta+d\theta$ sono compresi tra l'angolo solido Ω e $\Omega+d\Omega$:





I dipoli contenuti nell'angolo solido compreso tra Ω e $\Omega+d\Omega$ hanno eguale probabilità.

Il numero di dipoli in tale intervallo è:

$$dN = A \exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT}\right) d\Omega$$

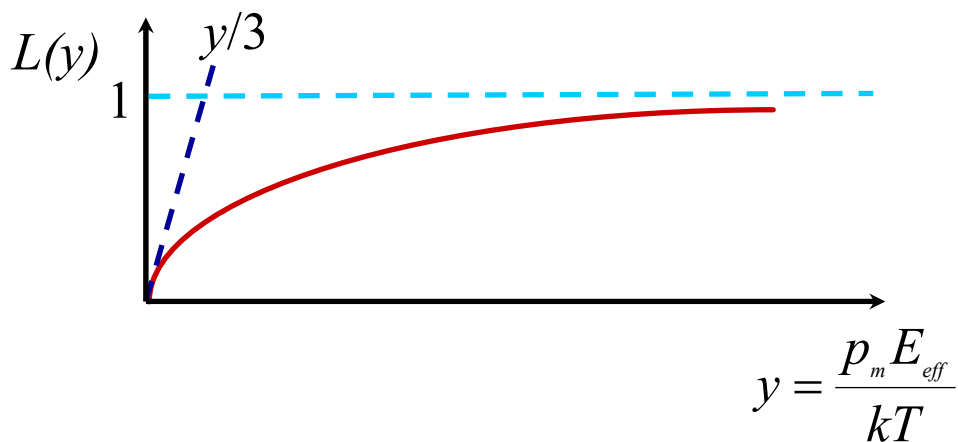
Il valore medio di $p_m \cos \theta$ si ottiene sommando su tutto l'angolo solido i valori pesati con le rispettive probabilità per ogni angolo solido:

$$\langle p_m \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^{4\pi} p_m \cos \theta A e^{-\frac{U(\theta)}{kT}} d\Omega}{\int_0^{4\pi} A e^{-\frac{U(\theta)}{kT}} d\Omega}$$

Ponendo: $y = \frac{p_m E_{eff}}{kT}$

$$\langle p_m \cos \theta \rangle = p_m \langle \cos \theta \rangle = p_m \left(\coth y - \frac{1}{y} \right)$$

$$L(y) = \coth y - \frac{1}{y} \quad \text{Funzione di Langevin}$$



Per $y \rightarrow \infty \Rightarrow L \rightarrow 1$ $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ Tutte le molecole sono allineate

Per piccoli valori di y : $L(y) \rightarrow \frac{y}{3}$ (tangente nell'origine)

$$\langle p_m \cos \theta \rangle = p_m \frac{y}{3} = \frac{p_m^2 E_{eff}}{kT}$$

$$\langle \mathbf{p}_m \rangle = \alpha_o \mathbf{E}_{eff} \quad \mathbf{P} = N\alpha_o \mathbf{E}_{eff}$$

$$\alpha_o = \frac{p_m^2}{3kT} = \text{Polarizzabilità per orientamento}$$

$$\alpha_o = \frac{p_m^2}{3kT} \propto \frac{1}{T}$$

Per i **materiali lineari**:

$$\langle \mathbf{p}_m \rangle = \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}} \quad \mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_m \rangle = N\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \mathbf{E}_{\text{eff}}$$

da cui:

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \frac{1}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \mathbf{E} \quad \mathbf{P} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \mathbf{E} = \chi \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$$

$$\chi = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

Relazione di Clausius - Mossotti
(es. solidi)

$$\text{Se } \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \ll 1 \quad (\text{es. gas})$$

$$\Rightarrow \chi = N\alpha \quad \mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E}$$