Analisi di Fourier

Una funzione $f(z,t)$ (**non** periodica) può sempre essere espressa come sovrapposizione di un insieme continuo di termini armonici:

$$f(z,t) = \int_0^{+\infty} [a(z,\omega) sin(\omega t) + b(z,\omega) cos(\omega t)] d\omega$$

dove:

$$a(z,\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z,t) sin(\omega t) dt$$

$$b(z,\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z,t) cos(\omega t) dt$$

⇒ Per il **teorema di Fourier**, ogni segnale elettromagnetico può essere visto come sovrapposizione di infinite onde piane monocromatiche.

Spettro di frequenza = Intervallo di frequenze su cui si sviluppa il segnale.

In un mezzo materiale, la velocità della luce è:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

Per molti materiali, l'interazione di dipolo elettrico è prevalente:

$$\varepsilon_r > 1; \quad \mu_r \cong 1$$

$$v \cong \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

dove:

$$\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r}}$$ **Indice di rifrazione**

Ogni onda elementare si propaga con velocità:

$$\boxed{v_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu}$$ **Velocità di fase**

(Relazione di dispersione)

Se n = n(ν), ogni onda armonica ha velocità diversa.

Consideriamo un segnale a 2 componenti:

$$\omega, k \qquad \omega + \Delta\omega, k + \Delta k \qquad (\Delta\omega << \omega,\ \Delta k << k)$$

$$f(z,t) = f_0 \, sin(kz - \omega t) + f_0 \, sin[(k + \Delta k)z - (\omega + \Delta\omega)t] =$$

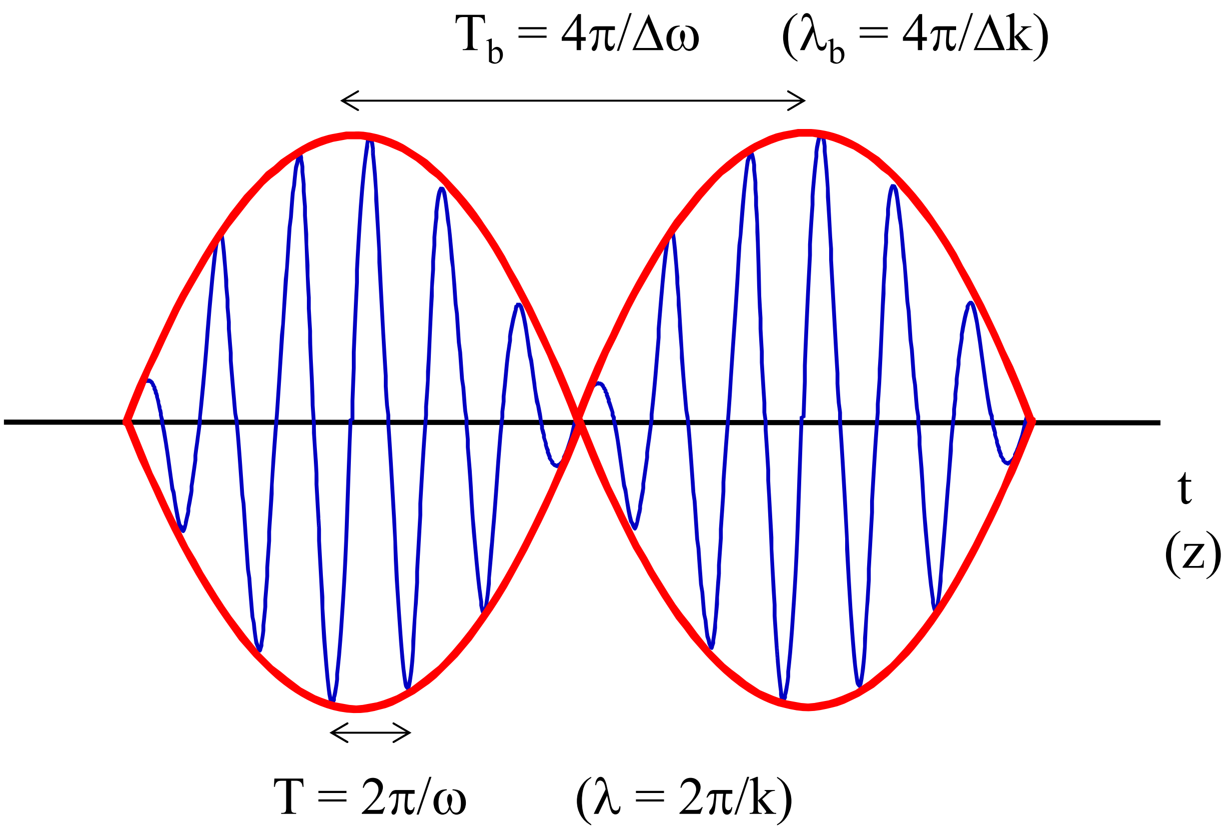
$$= 2 f_0 \, sin\left[\frac{(2k + \Delta k)z - (2\omega + \Delta\omega)t}{2}\right] cos\left[-\frac{(\Delta kz - \Delta\omega t)}{2}\right]$$

Trascurando $\Delta\omega$ e Δk rispetto a ω e a k:

$$f(z,t) = 2 f_0 \sin(kz - \omega t)\cos\left[\frac{\Delta kz - \Delta\omega t}{2}\right]$$

$f(z,t)$ rappresenta l’espressione di un “**battimento**”, cioè di un segnale a frequenza ω, modulato in ampiezza a frequenza $\Delta\omega$.

Il segnale fisico reale è costituito dal battimento.



Il battimento, cioè l'inviluppo delle due onde, è rappresentato dal termine:

$$\cos\left[\frac{1}{2}(\Delta k\, z - \Delta\omega t)\right]$$

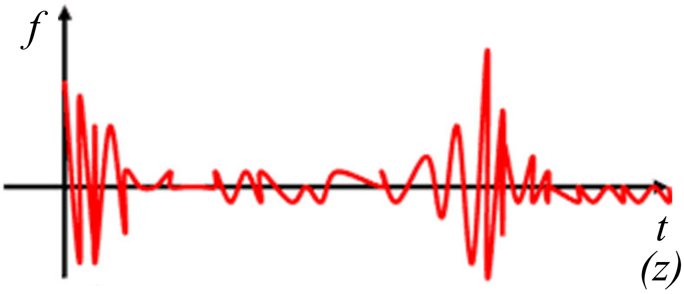
e si propaga con velocità:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$ **Velocità di gruppo**

mentre per la singola onda:

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$ **Velocità di fase**

In generale, quando c'è tutto uno spettro di frequenze e non solo due.
Maggiore è l'intervallo di frequenze, più localizzato nel tempo (e nello spazio) è il **pacchetto d'onda.**



$$\boxed{\mathrm{v_g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}}$$ **Velocità di gruppo**

Quindi:

$$\mathrm{v}_g = \frac{d\left(k\mathrm{v_f}\right)}{dk} = \mathrm{v_f} + k\frac{d\mathrm{v_f}}{dk}$$

dove:

$$k = \frac{\omega}{\mathrm{v_f}} = \frac{2\pi\upsilon}{\mathrm{v_f}} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \text{essendo: } \mathrm{v_f} = \lambda\upsilon$$

Ne segue che:

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{v_g}} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d\left(2\pi/\lambda\right)}{d\left(2\pi\nu\right)} = \frac{d\left(1/\lambda\right)}{d\nu} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{n\nu}{c}\right) = \frac{n}{c} + \frac{\nu}{c}\frac{dn}{d\nu}}$$

Se $dn/d\nu \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v_g} \neq \mathrm{v_f}$

Un materiale in cui $n = n(\nu)$ si dice **materiale dispersivo.**