Soluzione I prova in itinere - 26/04/2018

Esercizio 1

a.

Si risolve il moto parabolico. Scrivendo $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \vec{u}_x + v_0 \sin\alpha \vec{u}_y$ si ottiene:

$$v_0 \cos(\alpha) t = L$$
$$H + v_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2} = h$$

$$t = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}$$
$$H + v_0 \sin\alpha \left(\frac{L}{v_0 \cos\alpha}\right) - \frac{gL^2}{2(v_0\cos\alpha)^2} = hH + L\tan\alpha - h = \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{gL^2}{2(H + L\tan\alpha - h)\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{gL}{2\left(\frac{H-h}{L} + \tan\alpha\right)}} = 2\sqrt{\frac{9.81\cdot 3}{1+2\sqrt{3}}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 5.14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b.

Conservazione della quantità di moto lungo la direzione parallela al suolo. La velocità finale sarà $\vec{v} = v\vec{u}_x$, con v pari a:

$$(M+m)v = mv_0\cos(\alpha)$$
$$v = \frac{m}{m+M} v_0 \cos(\alpha) = \frac{m}{m+M}\sqrt{\frac{gL}{2\left(\frac{H-h}{L} + \tan\alpha\right)}} = \frac{1}{2}\frac{5.14}{51}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0.05\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c.

Il vettore impulso totale causato dalle forze esercitate sul carrello sarà dato dalla variazione di quantità di moto del carrello, che è pari a $Mv\vec{u}_x$:

$$\vec{I} = Mv\vec{u}_x = \frac{mM}{m+M}\sqrt{\frac{gL}{2\left(\frac{H-h}{L} + \tan\alpha\right)}}\,\vec{u}_x = 10\cdot 0.05\,\text{Ns} = 0.5\,\text{Ns}$$

Esercizio 2

a.

Perché il corpo scivoli, la forza apperente $\vec{F}_{\text{app}} = -Ma\vec{u}_x$ deve essere maggiore in modulo della forza di attrito statico massima $\vec{F}_{\text{att}} = Mg\mu_s\vec{u}_x$:

$$-Ma\vec{u}_x + Mg\mu_s\vec{u}_x < 0$$
$$a > \mu_s g$$

b.

La deformazione Δx per cui le forze totali agenti sul corpo M nel sistema di riferimento del vagone si annullano si ottiene risolvendo:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = (k\Delta x - Ma + \mu_d Mg)\vec{u}_x = 0$$
$$\Delta x = \frac{M(a - \mu_d g)}{k}$$

c.

Detta $\vec{a}_r$ l'accelerazione di M rispetto al sistema solidale al vagone, si ottiene:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = M\vec{a}_r = 0 \qquad \vec{a}_r = 0$$

Esercizio 3

a.

All'equilibrio:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = -Mg\vec{u}_y + k(y_1 - y_0)\vec{u}_y = 0$$
$$M = \frac{k(y_1 - y_0)}{g} = \frac{9.81\,\text{kg/s}^2}{9.81\,\text{m/s}^2} 0.6\,\text{m} = 0.6\,\text{kg} = 600\,\text{g}$$

b.

All'inizio m ha velocità nulla. La sua energia meccanica totale E_i è data da:

$$E_i = \frac{1}{2}k(y_1 - y_0)^2 + mgy_T.$$

L'energia meccanica totale al momento dell'urto E_f sarà:

$$E_f = \frac{1}{2}k(y_0)^2 + mg(y_T + y_1) + \frac{1}{2}mv^2.$$

Uguagliando $E_i = E_f$ si ottiene un'energia cinetica finale K_f :

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(y_1 - y_0)^2 + \cancel{mgy_T} - \frac{1}{2}k(y_0)^2 - \cancel{mgy_T} - mgy_1 = \frac{1}{2}k(y_1^2 + \cancel{y_0^2} - 2y_1y_0 - \cancel{y_0^2}) - mgy_1$$
$$K_f = y_1\frac{k(y_1 - 2y_0) - 2gm}{2}$$

Il corpo urta se arriva a toccare il ramo con velocità v maggiore di zero. Non urta se $K_f < 0$:

$$K_f < 0 \qquad k\,[y_1 - 2y_0] < 2gm \qquad m > \frac{k}{g}\frac{y_1 - 2y_0}{2} = \frac{9.81\,\text{kg/s}^2}{9.81\,\text{m/s}^2}\frac{0.2\,\text{m}}{2} = 100\,\text{g} = m_{\text{min}}$$

Inoltre, m può essere al massimo pari a $m_{\text{max}} = M$, dunque:

$$m_{\text{min}} < m < m_{\text{max}} \qquad 100\,\text{g} < m < 600\,\text{g}$$

Il moto di m che ne consegue è un moto armonico. Il corpo oscilla attorno alla posizione di equilibrio. All'equilibrio, l'allungamento $\Delta y'$ è pari a $\Delta y' = mg/k$. La molla parte ad oscillare da ferma, con un allungamento iniziale $\Delta y = y_1 - y_0$. L'ampiezza A dell'oscillazione sarà dunque:

$$A = \Delta y - \Delta y' = y_1 - y_0 - \Delta y' = y_1 - y_0 - \frac{mg}{k}$$

Dato $t_0 = 0$ istante iniziale, la posizione $y(t)$ della ghianda rispetto alla posizione del tappeto è:

$$y(t) = y_T + A - A\cos(\omega t)$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$ pulsazione di oscillazione del sistema. Il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

c.

m_s parte con velocità iniziale $v_1 = 0$ e arriva a terra con velocità v_2 al tempo T_1. Dalle leggi orarie del moto:

$$y_T - \frac{1}{2}gT_1^2 = 0 \qquad T_1 = \sqrt{\frac{2y_T}{g}}$$
$$v_2 = gT_1$$

Nell'urto elastico, m_s conserva l'energia cinetica e inverte la direzione del moto. Per conservazione dell'energia meccanica, deve tornare alla quota y_T con velocità v_3 nulla. Si ha infatti:

$$E_3(\text{energia finale}) = E_2(\text{energia suolo}) = E_1(\text{energia iniziale})$$
$$m_s g y_T + \frac{1}{2}m_s v_3^2 = \frac{1}{2}m_s v_2^2 = m_s g y_T \qquad v_3 = 0$$

Il tempo T_2 che ci mette per tornare alla posizione iniziale partendo da terra con velocità $v_2 = gT_1$ è dunque necessariamente uguale al precedente T_1. Dalla legge oraria per la velocità si ottiene:

$$v_3 = 0 = v_2 - gT_2 \qquad \cancel{g}T_1 = \cancel{g}T_2$$

Si ricava dunque:

$$T_S = T_1 + T_2 = 2T_1 = 2\sqrt{\frac{2y_T}{g}} = 2\sqrt{\frac{8\,\text{m}}{9.81\,\text{m/s}^2}} = 1.81\,\text{s}$$

Per afferrare di nuovo la ghianda occorre che T_S sia uguale ad un numero intero N di oscillazioni della ghianda:

$$T_S = 2\sqrt{\frac{2y_T}{g}} = N2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$m = \frac{2y_T k}{gN^2\pi^2} = \frac{8\,\text{m}\cdot 9.81\,\text{kg/s}^2}{9.81\,\text{m/s}^2\cdot N^2\pi^2} = \frac{8}{\pi^2 N^2}\,\text{kg}$$

Dovendo essere soddisfatta:

$$m_{\min} < m < M$$
$$0.1\,\text{kg} < \frac{8}{\pi^2 N^2}\,\text{kg} < 0.6\,\text{kg}$$
$$0.986 < \frac{8}{N^2} < 5.922$$

L'unica soluzione possibile è $N = 2$, da cui si ricava una massa m:

$$m = \frac{y_T k}{2g\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}\,\text{kg} \approx 203\,\text{g}$$

Esercizio 4

a.

Dalla seconda legge della dinamica e dalle leggi orarie del moto circolare:

$$ma_c = F_c m\frac{v^2}{R} = \gamma\frac{Mm}{R^2}$$

dove M è la massa delle terra, a_c l'accelerazione centripeta del sistema, v la velocità tangenziale. Si ottiene :

$$v = \sqrt{\gamma\frac{M}{R}}$$

b.

Occorre usare la conservazione della quantità di moto fra prima e dopo l'esplosione. Le quantità di moto iniziale e finale lungo la direzione x, p_i^x e p_f^x, sono:

$$p_i^x = mv$$

$$p_f^x = \frac{3}{4}mv_1\cos(\theta) + \frac{1}{4}mv_2\cos(-\theta) = \frac{3}{8}mv_1 + \frac{1}{8}mv_2$$

Eguagliando p_i^x e p_f^x si ottiene:

$$8v = 3v_1 + v_2$$

Lungo la direzione y:

$$p_i^y = 0$$

$$p_f^y = \frac{3}{4}mv_1\sin(\theta) + \frac{1}{4}mv_2\sin(-\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{8}mv_1 - \frac{\sqrt{3}}{8}mv_2$$

Da cui si ottiene

$$v_2 = 3v_1$$

Mettendo a sistema le due relazioni trovate si ricava:

$$v_2 = 4v$$
$$v_1 = \frac{4}{3}v$$

c.

Per capire che forma hanno le due traiettorie, valutiamo l'energia meccanica totale del sistema, scrivendo quella potenziale in modo che sia pari a zero quando R tende a infinito. Se l'energia totale è minore di zero, la traiettoria è ellittica. Se è uguale a zero la traiettoria è parabolica. Se è maggiore di zero è iperbolica. Per il primo frammento m_1:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= -\gamma\frac{Mm_1}{R} + \frac{1}{2}m_1v_1^2 = -\gamma\frac{Mm_1}{R} + \frac{1}{2}m_1\frac{16}{9}v^2 \\
E_1 &= -\gamma\frac{Mm_1}{R} + m_1\frac{8}{9}\frac{\gamma M}{R} = \frac{\gamma Mm_1}{R}(-1+8/9) \\
&\quad E_1 = -\frac{1}{9}\frac{\gamma Mm_1}{R} < 0
\end{aligned}
$$

La traiettoria di m_1 è ellittica. Per m_2 si ottiene:

$$
\begin{aligned}
E_2 &= -\gamma\frac{Mm_2}{R} + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = -\gamma\frac{Mm_2}{R} + \frac{1}{2}m_2(16v^2) \\
E_2 &= -\gamma\frac{Mm_2}{R} + 8m_2\frac{\gamma M}{R} = \frac{\gamma Mm_2}{R}(-1+8) \\
&\quad E_2 = +7\frac{\gamma Mm_2}{R} > 0
\end{aligned}
$$

La traiettoria di m_2 è iperbolica.

Esercizio 3. Soluzioni alternative

Punto b. Soluzione usando prodotto notevole

Se definiamo subito $\Delta y = y_1 - y_0$, l'equazione $E_i = E_f$ diventa:

$$\frac{1}{2}k\Delta y^2 + \cancel{mgy_T} = \frac{1}{2}ky_0^2 + \cancel{mgy_T} + mg(y_0 + \Delta y) + \frac{1}{2}mv^2,$$

da cui l'energia cinetica finale diventa:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(\Delta y^2 - y_0^2) - mg(y_0 + \Delta y)$$

che NON ha soluzione (dunque l'urto non avviene) se:

$$mg(y_0 + \Delta y) > \frac{1}{2}k(\Delta y^2 - y_0^2)$$
$$m > m_{\min} = \frac{k(\Delta y^2 - y_0^2)}{2g(y_0 + \Delta y)} = \frac{k(\Delta y - y_0)}{2g} = \frac{k(y_1 - 2y_0)}{2g} = ...$$

Punto b. Soluzione usando proprietà del moto armonico

Se si analizza fin da subito il moto armonico, la situazione limite è quella in cui l'ampiezza di oscillazione $A_{\max} = y_1/2$. Si è visto che l'ampiezza massima di oscillazione è legata alla massa minima dalla relazione:

$$A_{\max} = y_1 - y_0 - \frac{m_{\min}g}{k}$$

Risolvendo:

$$y_1/2 = y_1 - y_0 - \frac{m_{\min}g}{k}$$

si ottiene subito:

$$m_{\min} = \frac{k(y_1 - 2y_0)}{2g} = ...$$

Punto b. Ulteriori dettagli su massimo e minimo periodo e massima e minima ampiezza

L'oscillazione con ampiezza massima $A_{\max}$ corrisponde a quella che si ottiene per $m = m_{\min} = 100\,\mathrm{g}$, mentre quella con ampiezza minima si ottiene per $m = m_{\max} = M = 600\,\mathrm{g}$:

$$A < A_{\max} = y_1 - y_0 - \frac{m_{\min}g}{k} = y_1 - y_0 - \frac{\cancel{g}}{\cancel{k}}\frac{\cancel{k}}{\cancel{g}}\frac{y_1 - 2y_0}{2} = \frac{y_1}{2} = 0.5\,\mathrm{m}$$
$$A > A_{\min} = y_1 - y_0 - \frac{Mg}{k} = 0$$

Si avrà periodo minimo $T_{\min}$ per $m = m_{\min}$ e periodo massimo $T_{\max}$ per $m = m_{\max} = M$:

$$T > T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\min}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{y_1 - 2y_0}{2g}} = 0.634\,\mathrm{s}$$
$$T < T_{\max} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{y_1 - y_0}{g}} = 1.554\,\mathrm{s}$$