Potenziale Vettore

$$\mathit{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \mathbf{A}:\ \mathbf{B} = \mathit{rot}\,\mathbf{A}$$

$$\exists\, \mathbf{A}':\ \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathit{grad}\, f$$

$$\mathbf{B} = \mathit{rot}\,\mathbf{A}'$$

essendo: $\quad \mathit{rot}\,\mathit{grad}\, f = 0 \quad \forall f$ scalare

Esiste una famiglia di vettori $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathit{grad}\, f$
tali che: $\mathit{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$

A = Potenziale vettore di **B**

Essendo fissato solo il rotore del vettore **A**, la divergenza può essere scelta in modo opportuno a seconda del particolare problema fisico che si vuole descrivere.

In **magnetostatica**, scegliamo: $\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0}$

$$\mathit{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}}$$

In coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$
$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

in analogia con l'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

con soluzione:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\tau \frac{\rho}{r} d\tau$$

Quindi:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{J_x}{r} d\tau$$
$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{J_y}{r} d\tau$$
$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{J_z}{r} d\tau$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = rot\ \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau}$$

Soluzione del problema generale della magnetostatica

Per un conduttore filiforme ($d\tau = S dl$, $\boldsymbol{J} = J\mathbf{u}_t$, $I = JS$):

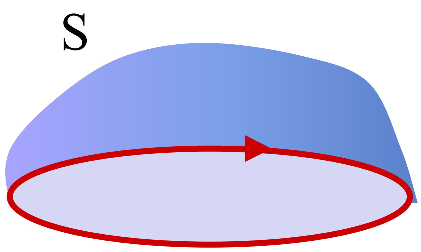
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\mathbf{J}}{r} S\, dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\mathbf{u}_t}{r} dl$$

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_r}{r^2}\, dl$$

Relazioni valide in condizioni quasi stazionarie, lentamente variabili ($div\,\mathbf{J} = 0 \;\Rightarrow\; I = cost$ in ogni sezione)

Legame tra flusso di B e circuitazione di A

Consideriamo una linea γ ed una superficie S che ha la linea come bordo



$$\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_n\, dS = \iint_S rot\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_n\, dS = \oint_\gamma \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_t\, dl$$

Autoinduzione

Variazioni di $\phi(\mathbf{B})$ concatenato con un circuito γ inducono una fem f nel circuito.

L'induzione si ha anche se il campo **B** è originato dalla corrente nel circuito stesso.

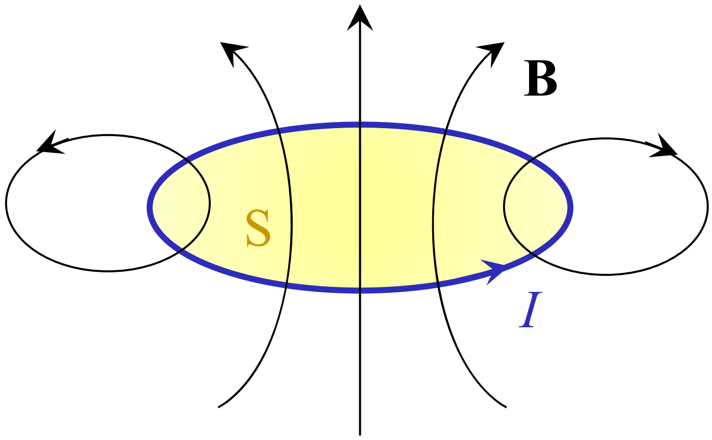
Fenomenologia

Una spira percorsa da corrente genera un campo **B**.

Il flusso di **B** concatenato con la spira non è nullo.

Se la corrente varia nel tempo, $\phi(\mathbf{B})$ varia nel tempo.

Si induce una fem nella spira (**autoinduzione**).



$B \propto I$ (I formula di Laplace)

$\phi(\mathbf{B}) \propto I$

$\phi(\mathbf{B}) = LI$

Descrizione quantitativa

Approssimiamo una corrente lentamente variabile con una corrente I stazionaria.

Per un circuito filiforme:

$$\phi_S(\mathbf{B}) = \iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_n\, dS = \iint_S rot\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_n dS = \oint_\gamma \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_t\, dl$$

dove: $\mathbf{A} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_\gamma \dfrac{\mathbf{u}_t}{r} dl$

$$\phi_S(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_\gamma \mathbf{u}_t\, dl \cdot \oint_\gamma \frac{\mathbf{u}_t}{r} dl$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\phi = LI}$$

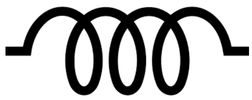
dove: $L = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_\gamma \mathbf{u}_t\, dl \cdot \oint_\gamma \dfrac{\mathbf{u}_t}{r} dl$

L = **Induttanza** o **coefficiente di autoinduzione =**
= Flusso autoconcatenato da una corrente unitaria

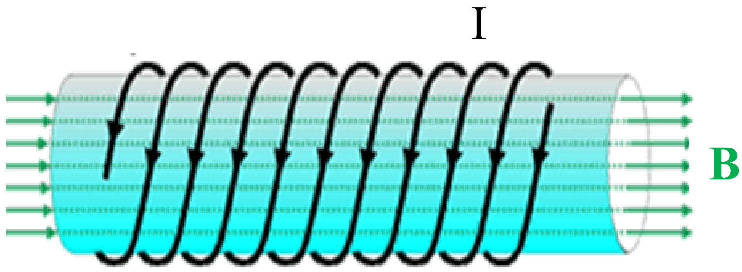
L dipende dalla geometria e dal materiale, **non** dalle condizioni elettriche

Nel S.I.: L in Wb/A = W s = **Henry (H)**

Induttore = Circuito (chiuso o quasi) con induttanza non nulla



Esempio: solenoide indefinito



$$H = \frac{NI}{\ell} \qquad B = \mu_o \mu_r H$$

$$\phi = NSB = \mu_o \mu_r NS \frac{NI}{\ell} \quad \Rightarrow \quad L = \mu_o \mu_r \frac{N^2 S}{\ell}$$

Esempio numerico: $\mu_r = 1$, N = 1000, $S = 1$ cm^2, $\ell = 1$ cm $\Rightarrow L \cong 13$ mH

Con un "nucleo" ferromagnetico ($\mu_r \approx 10^4$), si possono facilmente raggiungere $L \approx 100$ H

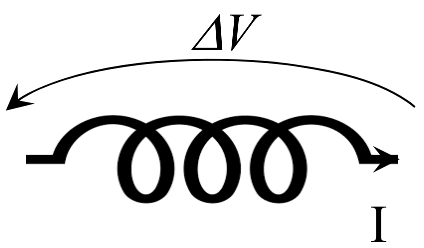
Se I varia lentamente (**regime quasi stazionario**):

$$\boxed{f = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}}$$

Se I aumenta, f è opposta ad I e tende a far ridurre la corrente (e viceversa)

Se non fosse così, la corrente dovrebbe aumentare indefinitamente (energia $\rightarrow \infty$)

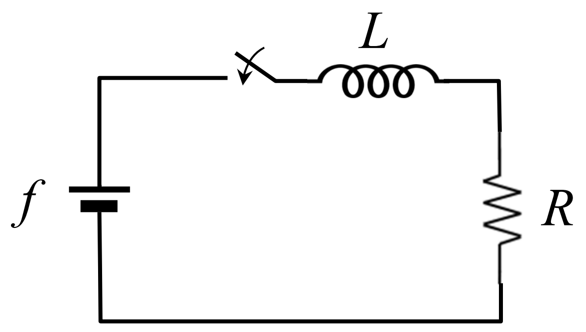
Un **induttore ideale** ha resistenza nulla.



$$\Delta V = -f_L = L\frac{dI}{dt}$$

Circuito RL

Determiniamo come varia la corrente $I(t)$ nel tempo durante la **carica**.
Chiudiamo l'interruttore all'istante $\tau = 0$ $[I(0) = 0]$.



$$f + f_L = RI \quad \Leftrightarrow \quad f = L\frac{dI}{dt} + RI$$

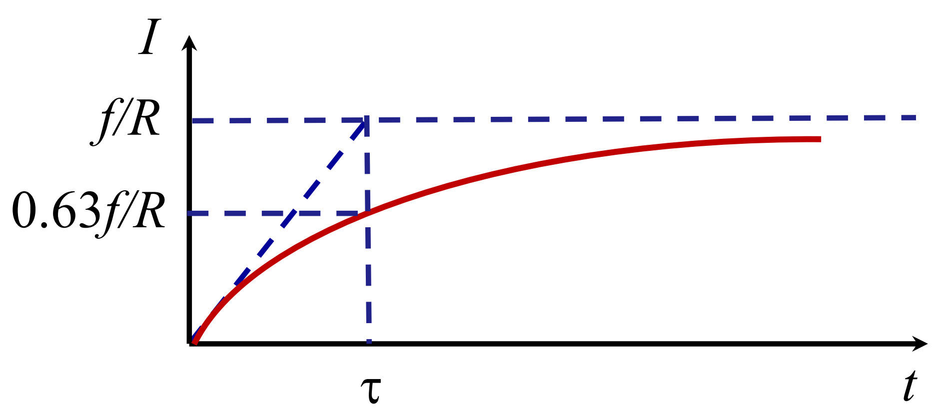
$$\Rightarrow \quad I(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{f}{R}$$

dove: $\tau = L/R$ = **Costante di tempo**

= Tempo dopo il quale $I = 63\%\, I_{max}$

All'istante iniziale: $I(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -f/R$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{f}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$



Nel transitorio il generatore compie un lavoro contro la fem indotta.

Se non ci fosse induttanza, la corrente salirebbe a gradino.

A regime (dopo alcune τ), $I = f/R$, come se l'induttore non ci fosse.

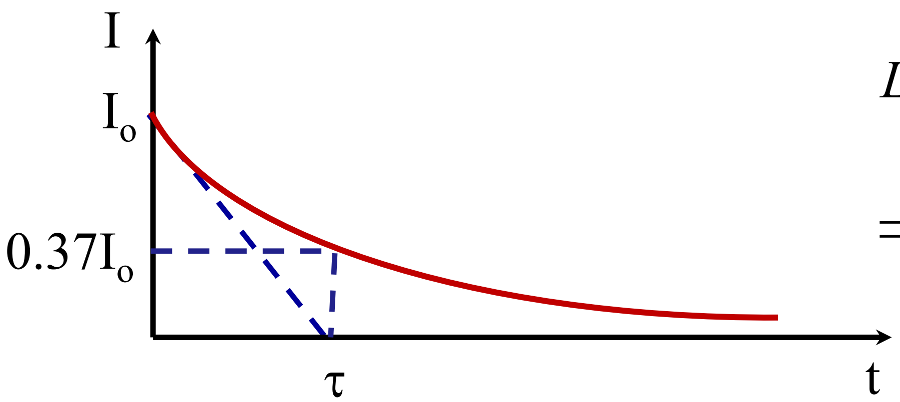
Studiamo adesso la **scarica** dell'induttore

All'istante $t = 0$, quando $I(0) = I_o$, apriamo l'interruttore.

Il flusso autoconcatenato diminuisce.

La fem genera una corrente che si oppone a tale riduzione.

Se non ci fosse induttanza, la corrente scenderebbe a gradino.



$$L\frac{dI}{dt} = -RI$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = I_o \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Anche in assenza di generatore, nel transitorio c'è dissipazione di energia nella resistenza.

Dal punto di vista della corrente, l'induttanza introduce "inerzia" nel sistema.

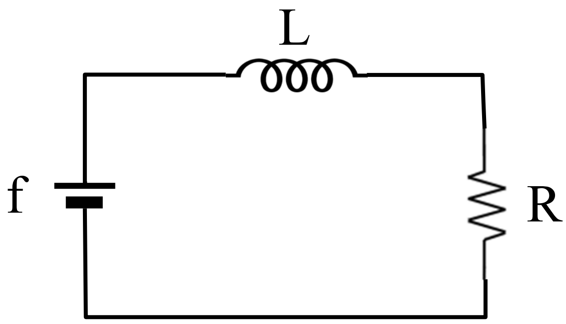
Quando si apre un interruttore, se la corrente varia bruscamente, si possono avere fem elevate $\rightarrow$ scintille

$\Rightarrow$ Apertura graduale dei circuiti di potenza

Energia del campo magnetico

Analizziamo il circuito *RL*
Consideriamo un induttore ideale (solenoide indefinito)
La fem *f* del generatore determina una corrente *I* tale che:

$$\phi = NSB \quad \Rightarrow \quad f_L = -\frac{d\phi}{dt} = -NS\frac{dB}{dt}$$



$$f = NS\frac{dB}{dt} + RI$$

Il bilancio energetico del circuito è:

potenza generata = potenza dissipata + potenza immagazzinata

$$fI = RI^2 + NS\frac{dB}{dt}I = RI^2 + S\ell H\frac{dB}{dt}$$

dato che: H = NI/ℓ

Ogni variazione di **B** comporta una variazione di energia immagazzinata nell'induttore

$H\,dB = du_m$ = Variazione di energia magnetica per unità di volume

Calcoliamo la densità di energia magnetica immagazzinata in un materiale lineare, quando il campo cresce da zero ad **H**:

$$u_m = \int_0^H H dB = \int_0^H H \mu dH = \frac{1}{2}\mu H^2$$

In un **materiale lineare** (**B** = μ**H**):

$$\boxed{u_m = \frac{1}{2}BH = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2}$$

L'energia immagazzinata in tutto il volume dell'induttore (considerando il **materiale omogeneo**) è:

$$U_m = u_m\tau = (S\ell)\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right) = (S\ell)\left(\frac{1}{2}\mu\frac{N^2I^2}{\ell^2}\right) = \frac{1}{2}\mu\frac{N^2S}{\ell}I^2$$

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

L'energia immagazzinata nell'induttore si dissipa per effetto Joule nella resistenza durante la scarica:

$$P_{diss} = \int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty RI_o^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)dt = RI_o^2\frac{\tau}{2} = RI_o^2\frac{L}{2R} = \frac{1}{2}LI_o^2$$

In un **generico materiale**:

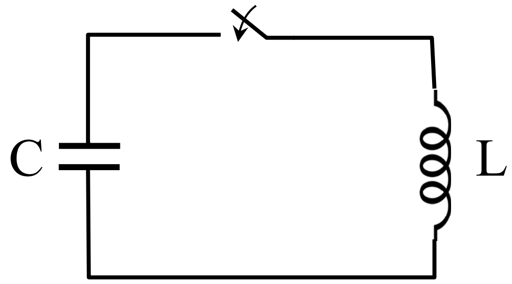
$$\boxed{u_m = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}} \qquad \boxed{U_m = \int_\tau \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\, d\tau}$$

Densità di energia magnetica

Circuito LC

Consideriamo un circuito costituito da un condensatore C con carica iniziale Q_0 e un induttore L.

Situazione ideale, con $R = 0$



Quando si chiude l'interruttore:

- Il condensatore si scarica, generando una corrente I
- I genera un campo **B**
- L'induttore si carica, generando una fem f
- f determina una corrente che carica il condensatore

Se non c'è dissipazione ($R = 0$), il processo si ripete indefinitamente.

Analizziamo il sistema dal punto di vista energetico:

- All'istante $t = 0$, l'energia è immagazzinata nel condensatore:

$$U = U_e = \frac{1}{2}\frac{Q_o^2}{C}$$

- Ad un generico istante *t*, la corrente di scarica del condensatore, carica l'induttore:

$$U = U_e + U_m = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$$

- Quando il condensatore è completamente scarico e l'induttore carico, la situazione si inverte.

Se non ci sono dissipazioni (R = 0), l'energia continua a passare da C ad L e viceversa, ma complessivamente si conserva

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0$$

dove:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{d^2Q}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0}$$

dove: $\omega = 1/\sqrt{(LC)}$

L'equazione della carica corrisponde all'equazione del moto dell'oscillatore armonico

$$\Rightarrow \quad Q = A\cos(\omega t + \delta)$$

Il sistema è analogo ad una massa vincolata ad una molla:

- $U_p = kx^2/2$ corrisponde ad $U_e = Q^2/2C$

- $U_c = mv^2/2$ corrisponde ad $U_m = LI^2/2$

m corrisponde a *L*: entrambe descrivono l'inerzia del sistema a cambiare stato.

La corrente oscilla alla stessa pulsazione della carica:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \omega A \sin(\omega t + \delta)$$

All'istante iniziale: $Q(0) = Q_o$ ed $I(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad I(0) = 0 = \omega A \sin\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$$

$$\Rightarrow \quad Q(0) = Q_o \quad \Rightarrow \quad A = Q_o$$

$$\Rightarrow \quad Q = Q_o \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \quad I = \omega Q_o \sin\omega t = I_o \sin\omega t$$

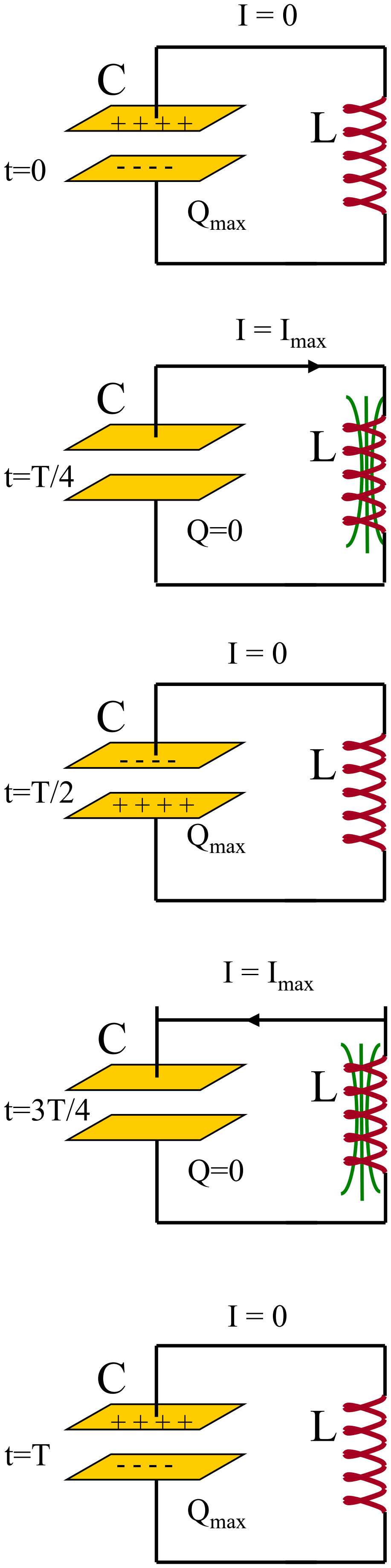
L'energia del circuito è:

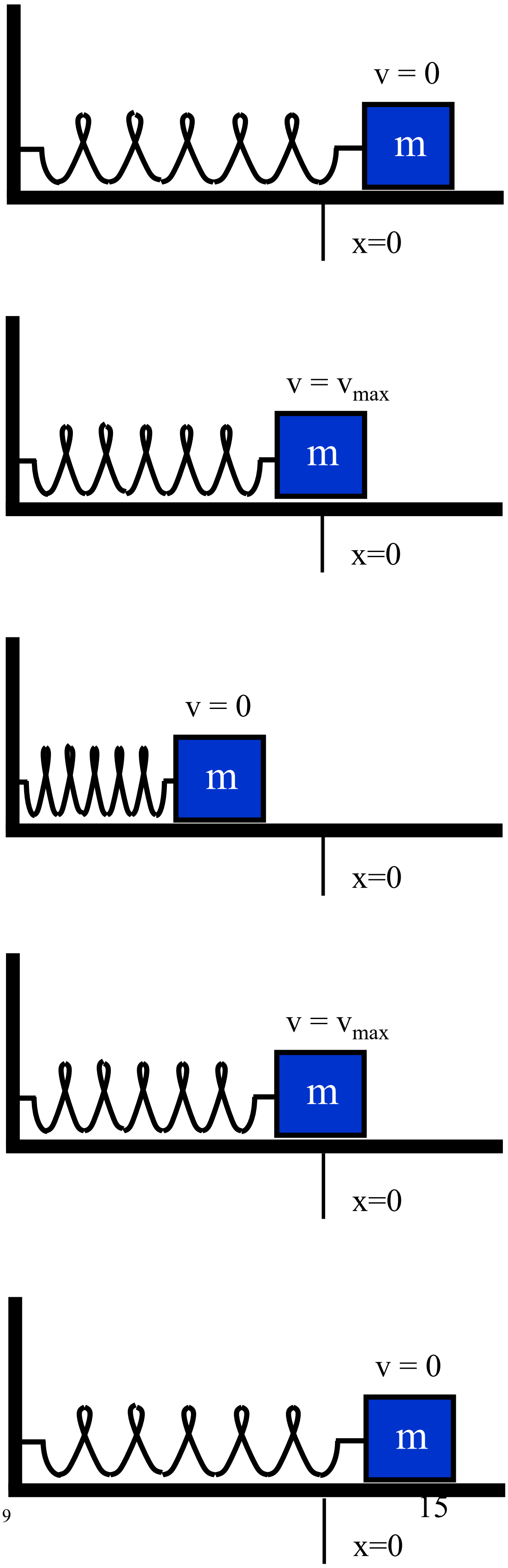
$$U = \frac{Q_o^2}{2C}\cos^2\omega t + \frac{LI_o^2}{2}\sin^2\omega t = \frac{Q_o^2}{2C} = \frac{LI_o^2}{2} = \text{cost}$$

L'energia oscilla tra componente elettrica e magnetica

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$$

$$U = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$





Nelle situazioni reali, la resistenza $R \neq 0$ e parte dell'energia viene dissipata ad ogni oscillazione per effetto Joule

Nel bilancio energetico, dobbiamo tenere conto dell'energia dissipata:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} + RI^2 = 0$$

Otteniamo l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato:

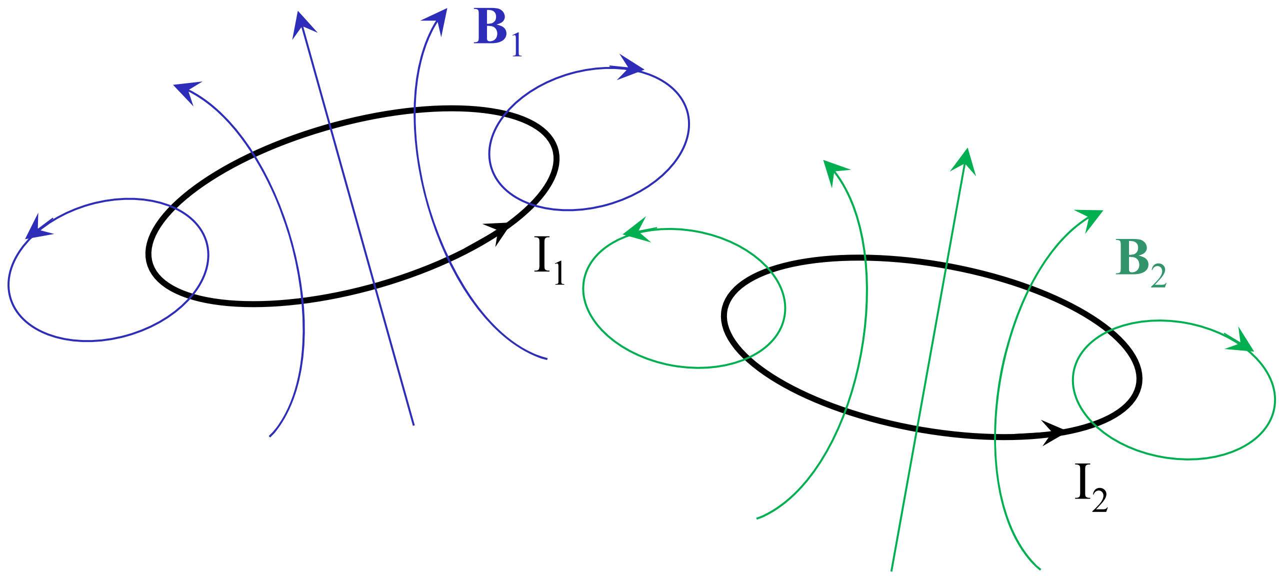
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Il sistema è analogo ad una massa vincolata ad una molla, ma soggetta ad attrito viscoso:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx$$

La carica oscilla tra L e C, ma si riduce progressivamente per la dissipazione.

Mutua induzione



Il flusso concatenato con ogni circuito dipende dal campo **B** complessivo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, cioè è generato sia da I_1 che da I_2

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21}$$

dove:

ϕ_{ii} = Flusso concatenato con *i* dovuto alla corrente in *i* stesso

ϕ_{ij} = Flusso concatenato con *i* dovuto alla corrente in *j*

Sappiamo che, in condizioni lentamente variabili: $\phi_{ii} = L_i I_i$

Si può dimostrare anche che: $\phi_{ij} = M_{ij} I_j$

M = **coefficiente di mutua induzione**

Descrizione quantitativa

Approssimiamo una corrente lentamente variabile con una corrente I stazionaria.

Per un circuito filiforme:

$$\phi_{12} = \iint_{S1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{u}_{n1}\, dS_1 = \iint_{S1} rot\, \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{u}_{n1} dS_1 = \oint_{\gamma 1} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{u}_{t1}\, dl_1$$

$$= \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\gamma 1} \oint_{\gamma 2} \frac{\mathbf{u}_{t1} \cdot \mathbf{u}_{t2}}{r} dl_1 dl_2$$

$$\text{essendo: } \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\gamma 2} \frac{\mathbf{u}_{t2}}{r} dl_2$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\phi_{12} = M_{12} I_2}$$

dove: $$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma 1} \oint_{\gamma 2} \frac{\mathbf{u}_{t1} \cdot \mathbf{u}_{t2}}{r} dl_1 dl_2 = M_{21} = M$$

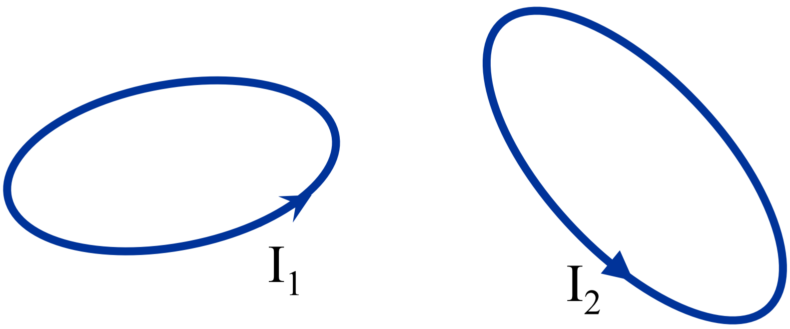
M = **coefficiente di mutua induzione**

M dipende solo dalla geometria e dai mezzi, **non** dalle caratteristiche elettriche

Come per l'autoinduzione, se la corrente **I varia lentamente** nel tempo (**regime quasi stazionario**), si conserva la proporzionalità tra ϕ ed *I*

Se *I* varia in un circuito, ϕ concatenato con l'altro varia e in esso si induce una fem (mutua induzione)

Energia associata ai circuiti percorsi da correnti



Il flusso concatenato con il circuito 1 è dovuto al campo magnetico generato sia da I_1 che da I_2 (e analogamente per il circuito 2).

Assumiamo un regime in cui le correnti siano lentamente variabili (regime quasi stazionario) in modo che si possa assumere che l'energia del sistema rimanga confinata nei circuiti:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$
$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} f_1 &= -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} \\ f_2 &= -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} \end{aligned}$$

Calcoliamo l'**energia del sistema**:

- Per imporre una corrente, bisogna vincere l'"inerzia" dell'autoinduzione, fornendo energia dall'esterno (generatore)

Per il circuito 1, la potenza P_1 del generatore per imporre I_1 è:

$$P_{g1} = f_{g1} I_1 = -f_1 I_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} I_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2\right)$$

e l'energia immagazzinata nel circuito è:

$$U_1 = \int_0^{t(I_1)} P_{g1}\, dt = \int_0^{I_1} L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} dt = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \frac{1}{2} \phi_{11} I_1$$

Analogamente per imporre I_2 nel il circuito 2:

$$U_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = \frac{1}{2} \phi_{22} I_2$$

Questa energia è pari al lavoro speso dal generatore per lanciare la corrente I, lavoro speso contro la forza elettromotrice indotta che si manifesta quando la corrente passa dal valore zero al suo valore finale.

Per mantenere I_1 costante mentre si fa crescere I_2, è necessario contrastare la fem indotta in 1:

$$f_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad P_{g12} = -f_{12} I_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt} I_1$$

$$\Rightarrow \quad U_{12} = M_{12} I_1 I_2$$

Viceversa, se si impone prima I_2 e poi I_1:

$$U_{21} = M_{21} I_1 I_2$$

Dovendo essere l'energia indipendente dal percorso tra stato iniziale e finale:

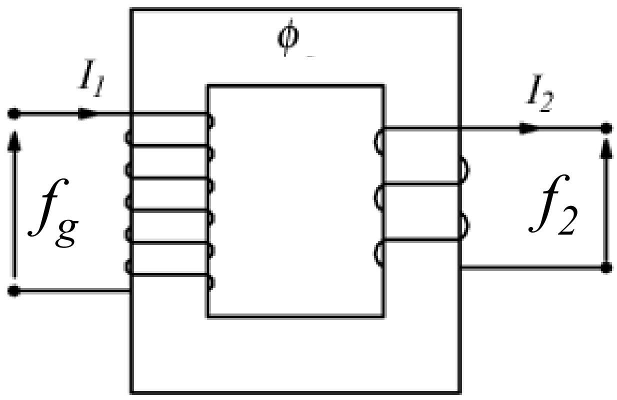
$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

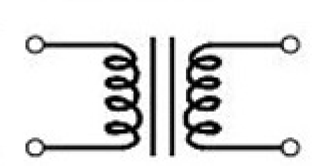
L'energia associata ai due circuiti sarà:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2}$$

Essendo $L > 0$, ma $M >< 0$, l'energia può essere maggiore o minre di quella dei circuiti non "accoppiati".

Applicazione: Trasformatore





Due avvolgimenti ("primario" e "secondario") sono avvolti su un nucleo ferromagnetico, con piccola isteresi, che mantiene confinate le linee di **B**.

Una fem f_g alternata ($cos(\omega t)$) viene imposta al primario

Si induce una fem f_2 nel secondario:

$$f_1(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow B_1(t) \rightarrow \phi_{21}(t) \rightarrow f_2(t)$$

Per la conservazione dell'energia:

$$<f_1 I_1> = <f_2 I_2>$$

Però:

$$\frac{\sqrt{< f_2^2 >}}{\sqrt{< f_1^2 >}} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Il trasformatore "trasforma" i valori di f ed I

La rete di distribuzione è in alternata proprio per sfruttare i trasformatori

$$MT\ (\sim kV) \quad \rightarrow \quad AT\ (300\ kV) \quad \rightarrow \quad BT\ (220\ V)$$

– Centrale elettrica: ***Generatore***

Energia termica → Energia meccanica → Energia elettrica

Media tensione (≈kV)

– ***Linea di trasmissione***

Alta tensione (300 kV)

Bassa corrente, per motivi economici (ridurre la sezione dei cavi)

– ***Utenza***

Bassa tensione (220 V), per motivi di sicurezza

Esempio numerico (linea di trasmissione):

La potenza dissipata sulla linea di trasmissione è:

$$P_{diss} = R<I^2> = \rho l<I^2>/S$$

Supponiamo che la linea di trasmissione sia a bassa tensione (*fem* = 300 V, anziché 300 kV)

A parità di potenza trasmessa, la $<I^2>$ è 10^6 volte maggiore

Per mantenere inalterata la P_{diss}, S deve crescere di 10^6, cioè i cavi devono avere diametro di 10 m, anziché 1 cm