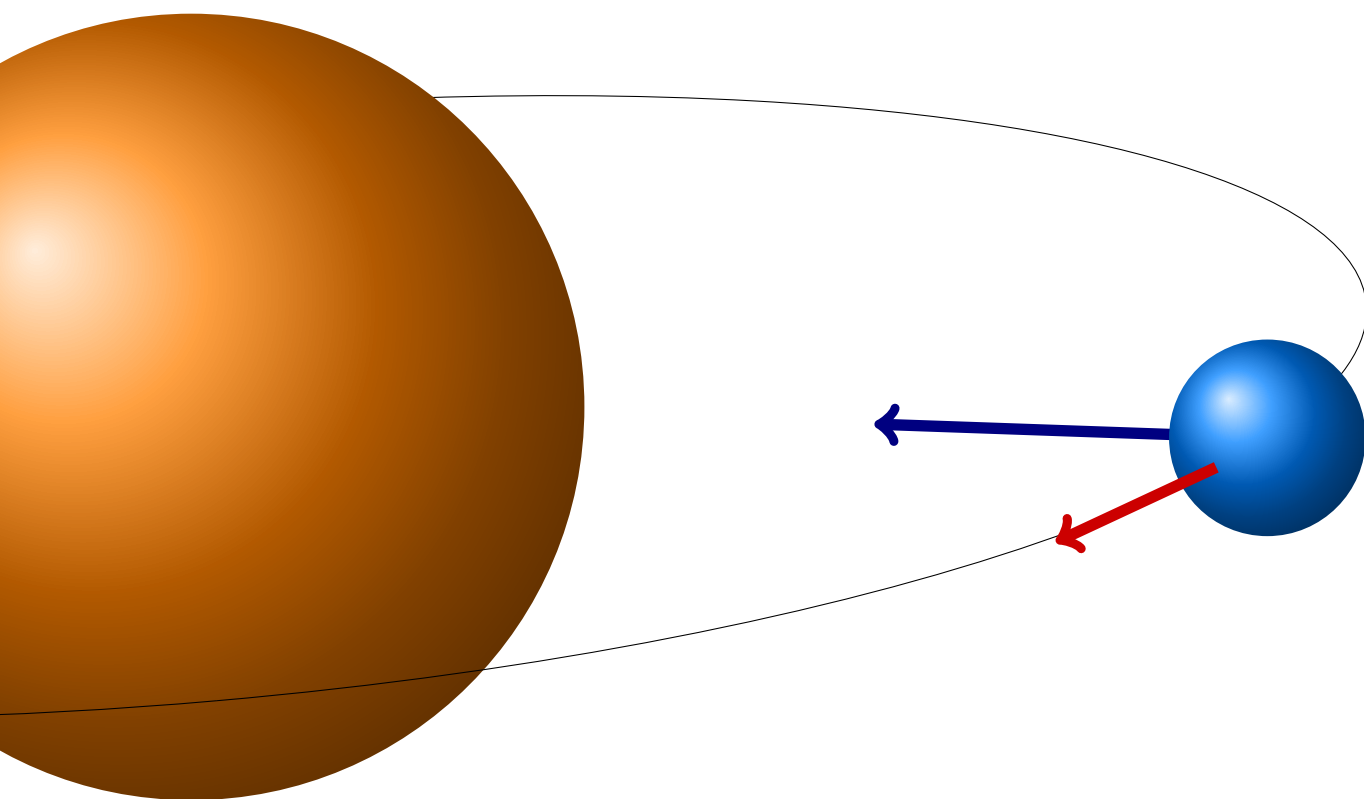


Forze centrali e gravitazione

Andrea Crespi



Indice

1	Cinematica in coordinate polari	4
2	Momento angolare e momento di una forza	5
3	Forze centrali a simmetria sferica	9
4	La forza di gravità	11
5	Generalità sul moto in un campo gravitazionale	14
6	Moti dei pianeti e dei satelliti	16
A	La bilancia di Cavendish	20

1 Cinematica in coordinate polari

Tratteremo in queste Sezioni alcuni moti particolari, in cui un punto preciso nello spazio assume rilevanza come centro di rotazione o centro di forza. La descrizione Cinematica di questi moti si può avvalere vantaggiosamente di una rappresentazione in *coordinate polari*, in cui l'origine del sistema di coordinate è fatta coincidere proprio con questo centro naturale del movimento. Poiché, come vedremo, in casi molto significativi questi moti avvengono su un piano, discutiamo qui con qualche dettaglio la trattazione cinematica del **moto piano in coordinate polari**.

Consideriamo un punto materiale che può muoversi su un piano. Se adottiamo un sistema di coordinate cartesiane, stabilito su due assi x e y intersecanti in O, possiamo individuare due versori validi globalmente in tutto lo spazio, \vec{u}_x e \vec{u}_y . Essi che caratterizzano i due assi scelti e la posizione di un generico punto si può scrivere come:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

espressione in cui compaiono esplicitamente le coordinate x e y del punto stesso.

Utilizzando invece un sistema di *coordinate polari piane*, un punto generico è individuato da una coordinata radiale r e da una coordinata angolare θ . Se il sistema di coordinate polari condivide la stessa origine O del sistema cartesiano discusso sopra, ed è inoltre appropriatamente orientato, le coordinate dei due sistemi si trasformano le une nelle altre tramite le relazioni:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

In un sistema di coordinate polari non sono definiti versori validi globalmente. In ogni punto P dello spazio è definito invece un sistema di versori *locali* (vedi Figura 1):

- il **versore radiale** \vec{u}_r , diretto come il segmento OP, uscente dall'origine;
- il **versore trasverso** \vec{u}_θ , diretto ortogonalmente al segmento OP e orientato verso gli angoli crescenti.

Proiettando questi due versori indietro sul sistema cartesiano, essi assumono le espressioni:

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= +\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta &= -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{aligned} \quad (1-1)$$

Si può inoltre verificare che sono legati da relazioni di derivazione:

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = +\vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r \quad (1-2)$$

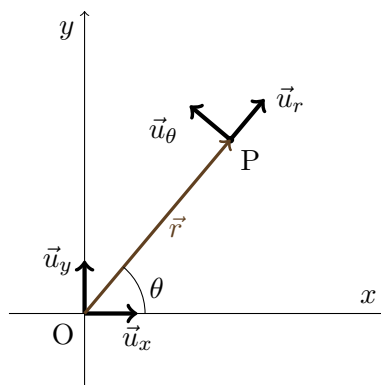


Figura 1: Versori in un sistema di coordinate cartesiane e in un sistema di coordinate polari aventi la stessa origine O.

In coordinate polari, il **vettore posizione** si può esprimere in funzione dei versori locali come:

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \quad (1-3)$$

Notiamo che, a differenza dello sviluppo sui versori \vec{u}_x e \vec{u}_y , in questa scrittura non si esplicitano completamente le informazioni sulle coordinate del punto, poiché non compare la coordinata θ .

Il **vettore velocità** si può sviluppare nel modo seguente:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \quad (1-4)$$

per cui si evidenzia una scomposizione in due componenti ortogonali:

$$\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta \quad (1-5)$$

La componente $v_r = \frac{dr}{dt}$, detta *componente radiale*, mette in evidenza le variazioni di distanza dall'origine O. La componente $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$, detta *componente trasversale*, mette in evidenza le variazioni della coordinata angolare θ ovvero le rotazioni attorno all'origine.

Derivando ancora rispetto al tempo la (1-4) è possibile ricavare anche il **vettore accelerazione**, scomposto sul sistema di versori locali. Questo assume una forma piuttosto complicata:

$$\vec{a} = \underbrace{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]}_{a_r} \vec{u}_r + \underbrace{\left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right]}_{a_\theta} \vec{u}_\theta \quad (1-6)$$

2 Momento angolare e momento di una forza

Introduzione e definizioni

È utile definire alcune grandezze vettoriali per trattare, in modo più compatto e significativo, la dinamica dei moti di rotazione attorno a un punto scelto detto *polo*. Definiamo qui di seguito, a questo proposito, il *momento angolare* e il *momento di una forza* (si veda anche la definizione generale di *momento di un vettore* nel Riquadro 1).

Momento angolare

Si definisce **momento angolare** di un punto materiale con quantità di moto \vec{q} , rispetto a un polo Ω , il vettore:

$$\vec{l}_\Omega = \vec{r}^* \times \vec{q} = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{q} \quad (2-1)$$

dove \vec{r} è il vettore posizione del punto materiale e \vec{r}_Ω è il vettore posizione del polo.

Il momento angolare è detto anche *momento della quantità di moto*. Poiché la quantità di moto è definita come $\vec{q} = m\vec{v}$, dove m è la massa del punto materiale e \vec{v} la sua velocità vettoriale, il momento angolare si scrive anche come:

$$\vec{l}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times m\vec{v} \quad (2-2)$$

Se ora descriviamo il moto di un punto materiale in un sistema di coordinate polari, in cui per semplicità $\Omega \equiv O$, possiamo considerare $\vec{r}_\Omega = 0$ e sviluppare ulteriormente la (2-2) come:

$$\vec{l}_\Omega = \vec{r} \times m\vec{v} = r\vec{u}_r \times m(v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta) = rmv_r \underbrace{(\vec{u}_r \times \vec{u}_r)}_{=0} + rmv_\theta \underbrace{(\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta)}_{=\vec{u}_z} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z \quad (2-3)$$

Riquadro 1 - Momento di un vettore

Si definisce *momento* di un vettore generico \vec{b} , applicato a un punto P, rispetto a un polo Ω , il vettore:

$$\vec{m}_\Omega = \vec{r}^* \times \vec{b} = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{b}$$

Dove \vec{r} è il vettore posizione del punto P e \vec{r}_Ω è il vettore posizione del polo Ω . Il vettore \vec{r}^* rappresenta la posizione del punto *rispetto al polo*. Per le proprietà del prodotto vettoriale, il momento \vec{m}_Ω è ortogonale al piano σ su cui giacciono il vettore \vec{b} e il vettore $\vec{r}^* = \vec{r} - \vec{r}_\Omega$ (vedi figura sottostante).

Il pedice Ω al vettore momento (\vec{m}_Ω), che specifica il polo rispetto a cui è calcolato, può essere in generale omesso quando il polo è chiaro dal contesto.

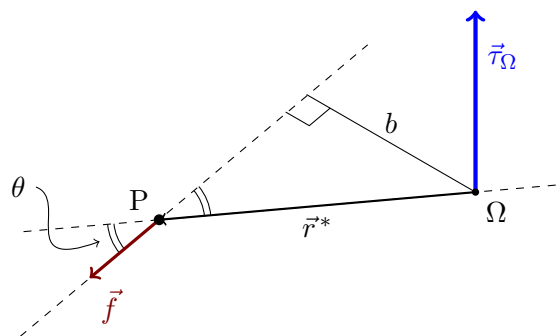
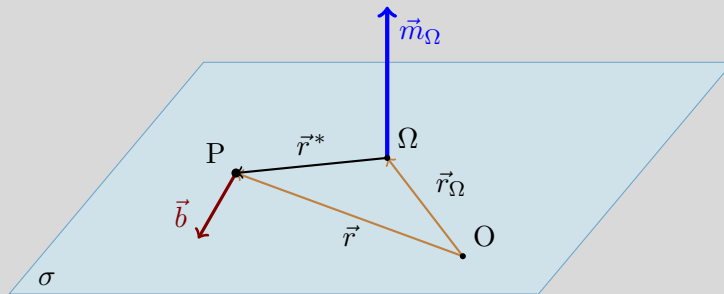


Figura 2: Illustrazione geometrica del braccio b di una forza \vec{f} , applicata a un punto P, rispetto a un polo Ω . È indicato anche il momento $\vec{\tau}_\Omega$ della forza.

dove \vec{u}_z è un versore ortogonale al piano e abbiamo ricordato che $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$. Il momento angolare dunque mette in evidenza la presenza di una velocità angolare di rotazione $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ attorno al polo:

$$\vec{l}_\Omega = mr^2\omega \vec{u}_z \quad (2-4)$$

Veniamo ora alla definizione del vettore *momento di una forza* \vec{f} :

Momento di una forza

Si definisce **momento** della forza \vec{f} rispetto a un polo Ω il vettore:

$$\vec{\tau}_\Omega = \vec{r}^* \times \vec{f} = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f} \quad (2-5)$$

dove \vec{r} è il vettore posizione del punto di applicazione della forza \vec{f} e \vec{r}_Ω è il vettore posizione del polo.

Il momento di una forza è detto anche *momento torcente*, oppure semplicemente *momento meccanico*. Il modulo di $\vec{\tau}_\Omega$ è pari a:

$$|\vec{\tau}_\Omega| = |\vec{r} - \vec{r}_\Omega| \cdot |\vec{f}| \cdot \sin \theta = b \cdot |\vec{f}| \quad (2-6)$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori e $b = |\vec{r} - \vec{r}_\Omega| \cdot \sin \theta$ è detto *braccio*.

Teoremi riguardanti il momento angolare

Date le definizioni di momento angolare e di momento meccanico, vale anzitutto il seguente **Teorema del Momento Angolare**:

La derivata temporale del momento angolare di un punto materiale, rispetto a un polo Ω è data da:

$$\frac{d\vec{l}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_{\Omega,ris} - \vec{v}_\Omega \times \vec{q} \quad (2-7)$$

dove $\vec{\tau}_{\Omega,ris}$ è il momento (valutato rispetto al polo Ω) della risultante delle forze applicate al punto materiale, \vec{v}_Ω è la velocità di traslazione del polo e \vec{q} è la quantità di moto del punto materiale.

I) Possiamo esplicitare la derivata del momento angolare come derivata del prodotto:

$$\frac{d\vec{l}_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{q} + (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d\vec{q}}{dt} \quad (2-8)$$

II) Ora, valgono le seguenti:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad \frac{d\vec{r}_\Omega}{dt} = \vec{v}_\Omega \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}_{ris}$$

dove \vec{v} è la velocità del punto materiale, \vec{v}_Ω è la velocità del polo e \vec{f}_{ris} è la risultante delle forze applicate al punto materiale.

Possiamo perciò sviluppare la (2-8) come:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}_\Omega}{dt} &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}_\Omega}{dt} \right) \times \vec{q} + (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d\vec{q}}{dt} = \\ &= \underbrace{\vec{v} \times \vec{q}}_{\vec{v} \times m\vec{v}} - \vec{v}_\Omega \times \vec{q} + \underbrace{(\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_{ris}}_{\vec{\tau}_{\Omega,ris}} \end{aligned} \quad (2-9)$$

III) Notando che $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ perché il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo, risulta allora dimostrata la tesi. ■

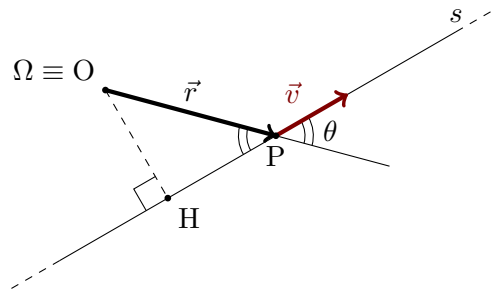


Figura 3: Consideriamo il momento angolare, rispetto a un polo Ω arbitrario, di un punto materiale P (avente massa m) che si muove con velocità \vec{v} costante su una traiettoria rettilinea s . Se scegliamo per comodità l'origine degli assi $O \equiv \Omega$, il momento angolare si scrive: $\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = |\vec{r}| \cdot m|\vec{v}| \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_z = \overline{OH} \cdot m|\vec{v}| \cdot \vec{u}_z$, dove \vec{u}_z è un versore uscente dal piano del foglio. Perciò, se la velocità \vec{v} costante, il momento angolare \vec{l} non dipende dalla posizione di P sulla traiettoria (dipendendo solo dalla lunghezza del segmento \overline{OH}) ed è costante anch'esso.

Si dimostra inoltre in modo immediato, dalla (2-7), il seguente **Corollario**.

Se Ω è un punto fisso, cioè se $\vec{v}_\Omega = 0$, la derivata del momento angolare è:

$$\frac{d\vec{l}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_{\Omega,ris} \quad (2-10)$$

Infine, integrando la (2-10) su un intervallo di tempo arbitrario si ottiene l'analogo del Teorema dell'Impulso, valido però per il momento angolare, detto **Teorema dell'Impulso Angolare**:

L'azione di un momento meccanico $\vec{\tau}$ su un punto materiale, in un intervallo di tempo tra t e $t + \Delta t$, determina una variazione di momento angolare pari all'integrale di $\vec{\tau}$ in quell'intervallo di tempo.

$$\Delta \vec{l} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{\tau} dt \quad (2-11)$$

Momento meccanico $\vec{\tau}$ e momento angolare \vec{l} devono essere valutati rispetto allo stesso polo.

Conservazione del momento angolare

È interessante considerare alcune condizioni e situazioni significative in cui il momento angolare si conserva, ovvero in cui $\frac{d\vec{l}_\Omega}{dt} = 0$.

- *Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché il momento angolare si conservi rispetto a un qualsiasi polo, è che la forza risultante sul punto materiale rimanga identicamente nulla.*

Infatti, in tal caso, anche $\vec{\tau}_{ris}$ calcolato rispetto a un qualsiasi polo sarà nullo. In pratica, nelle condizioni del Primo Principio della Dinamica (cioè per forze risultanti nulle) non solo si conserva la quantità di moto del punto materiale, ma si conserva anche il momento angolare. In Figura 3 si mostra infatti che il momento angolare di un punto che si muove di moto rettilineo uniforme, rispetto a un polo arbitrario, è costante.

- *Il momento angolare si può conservare anche in presenza di forze risultanti non nulle, se queste non danno momento rispetto al polo scelto.*

Consideriamo una pallina appoggiata su un piano senza attrito e legata, tramite una funicella ideale di lunghezza r , a un chiodo infisso sullo stesso piano. Questa pallina compie un moto

circolare uniforme con velocità angolare ω , su una traiettoria di raggio r avente centro nel chiodo stesso. L'accelerazione centripeta necessaria per sostenere il moto è fornita dalla forza di tensione \vec{T} della fune (che quindi si comporta da forza centripeta); ricordiamo che tale accelerazione non modifica il modulo del vettore velocità ma solo la sua direzione. Se scegliamo come polo il centro O della traiettoria circolare, il momento angolare è:

$$\vec{l}_O = rmv\vec{u}_z = mr^2\omega\vec{u}_z \quad (2-12)$$

Se ω è costante è chiaro che $\frac{d\vec{l}_O}{dt} = 0$. Infatti, il momento della forza di tensione rispetto a O è identicamente nullo durante il moto, perché \vec{T} è sempre parallelo (con verso opposto) a \vec{r} .

- *Se si conserva il momento angolare rispetto a un polo fisso Ω , allora il moto avviene su un piano.* Infatti, il vettore momento angolare \vec{l}_Ω identifica univocamente un piano σ ad esso ortogonale. Per le proprietà del prodotto vettoriale, tale piano è quello su cui giacciono i vettori $\vec{r}^* = \vec{r} - \vec{r}_\Omega$ e \vec{q} . Nel caso in cui \vec{l}_Ω rimanga costante, i vettori $\vec{r}^*(t)$ che identificano la posizione del punto materiale in istanti successivi durante il moto devono giacere tutti sullo stesso piano σ e la traiettoria del moto giacerà dunque su questo stesso piano.

3 Forze centrali a simmetria sferica

In molte situazioni, la forza a cui è soggetto un punto materiale è funzione *della sua posizione spaziale*. Ad esempio, ciò può accadere se il punto materiale interagisce (a distanza) con un altro corpo, che può essere considerato fisso e immobile nello spazio. Pensiamo al caso della forza peso, dovuta all'interazione di un grave con il pianeta Terra. Su regioni limitate di spazio può essere considerata uniforme (come abbiamo fatto nella nostra precedente trattazione). Tuttavia, se consideriamo il pianeta Terra nel suo insieme osserviamo che il vettore forza peso dovrà essere avere direzione e verso diversi a seconda della latitudine e longitudine, in quanto esso punterà sempre verso il centro della Terra.

Una funzione vettoriale delle *sole coordinate spaziali* $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice **campo vettoriale**. Quando una forza dipende dalla sola posizione spaziale parla di **campo di forze**. Un caso particolarmente rilevante in Fisica è quello delle *forze centrali a simmetria sferica*.

Campo di forze centrali

Un **campo di forze centrali a simmetria sferica** è una forza $\vec{f}(\vec{r})$ funzione delle sole coordinate spaziali che ha:

- direzione sempre passante per un punto O fissato, detto *centro di forza*;
- modulo dipendente unicamente dalla distanza r tra il punto O e la posizione del punto materiale.

In un sistema di coordinate polari sferiche centrato in O la forza \vec{f} si può scrivere come:

$$\vec{f} = f(r) \vec{u}_r \quad (3-1)$$

Il verso della forza \vec{f} , determinato dal segno di $f(r)$, può essere uscente da O oppure entrante verso O , a seconda dei casi (vedi Figura 4). Le forze centrali hanno le seguenti importanti proprietà:

- *Un punto materiale soggetto unicamente a un campo di forze centrali, centrato in un punto O , conserva nel suo moto il momento angolare rispetto al polo O .*

Infatti, per definizione di forza centrale, la direzione della forza è sempre parallela al vettore \vec{r} spiccato da O . La derivata temporale del momento angolare è dunque nulla:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\tau}_{O,ris} = \vec{r} \times \vec{f} = r\vec{u}_r \times f(r)\vec{u}_r = rf(r)(\vec{u}_r \times \vec{u}_r) = 0 \quad (3-2)$$

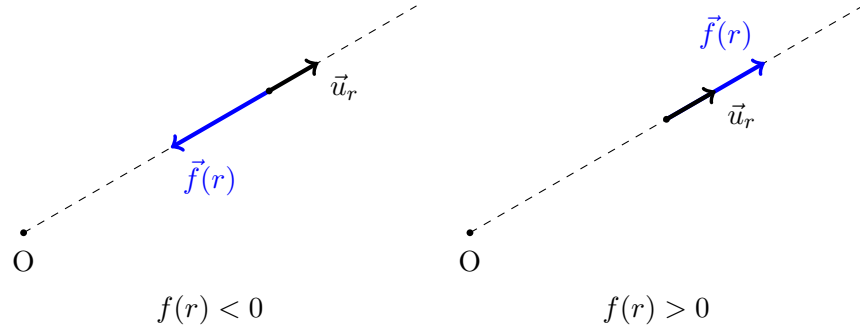


Figura 4: Le forze centrali possono essere attrattive e dirette verso il centro di forza O se $f(r) < 0$, oppure repulsive e con verso uscente da O se $f(r) > 0$.

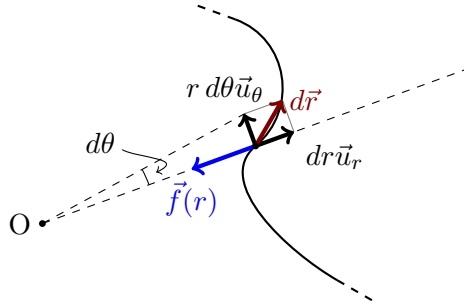


Figura 5: Scomposizione di uno spostamento infinitesimo $d\vec{r}$, compiuto da un punto materiale su una traiettoria arbitraria, lungo le direzioni normale e tangente di un sistema di coordinate polari centrato in O . Se la forza \vec{f} agente sul punto materiale è una forza centrale, ovvero se è sempre diretta parallelamente a \vec{u}_r , il lavoro infinitesimo $d\mathcal{L} = \vec{f} \cdot d\vec{r}$ dipende solo dalla componente radiale di $d\vec{r}$.

- *Il moto di un punto materiale soggetto unicamente a un campo di forze centrali, centrato in un punto O , è planare e si svolge su un piano su cui giace anche O .*

Abbiamo già evidenziato nella Sezione 2 che, se si conserva il momento angolare rispetto a un polo fisso, allora il moto si svolge su un piano. Tale piano può essere individuato come il piano su cui giacciono il vettore \vec{r} e il vettore \vec{v} in ogni istante di tempo. Il vettore \vec{r} è spiccato da O , dunque il piano contiene O .

- *Tutte le forze centrali sono conservative.*

Si può anche dire che i campi di forze centrali sono *campi conservativi*. In realtà, come si potrà notare analizzando con un po' di attenzione la dimostrazione, una forza centrale è conservativa solo se $f(r)$ ammette una primitiva, ma questa condizione accade tipicamente in Fisica.

Per dimostrare la conservatività scriviamo il lavoro di una generica forza centrale \vec{f} su una curva arbitraria da A a B :

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_A^B f(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{r} \quad (3-3)$$

Ora, nel sistema di coordinate polari che stiamo impiegando, lo spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ si può localmente scomporre sui versori \vec{u}_r e \vec{u}_θ (Figura 5):

$$d\vec{r} = d(r\vec{u}_r) = dr \vec{u}_r + r d(\vec{u}_r) = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta \quad (3-4)$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{AB} &= \int_A^B f(r) \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta) = \\
 &= \int_A^B f(r) \underbrace{(\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r)}_{=1} dr + \int_A^B r f(r) \underbrace{(\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta)}_{=0} d\theta = \\
 &= \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

che è un integrale scalare e dipende solo dalle distanze r_A e r_B agli estremi del percorso.

4 La forza di gravità

La **forza di gravità** è la forza che attrae l'uno verso l'altro due corpi, in virtù del fatto che entrambi sono dotati di massa. L'azione di questa forza avviene a distanza, cioè senza contatto, ed è governata dalla seguente legge matematica.

Legge di gravitazione universale

Due punti materiali di massa m_1 ed m_2 , distanti r uno dall'altro, esercitano l'uno sull'altro una forza attrattiva, diretta lungo la congiungente dei due punti e in modulo pari a:

$$f_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{4-1}$$

dove $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ è detta *costante di gravitazione universale*.

La scoperta della legge (4-1) è attribuita a Isaac Newton, che la discusse nel suo trattato di Meccanica *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis* (1687). Isaac Newton derivò la legge di gravitazione dalle osservazioni note al tempo, e sue personali, del moto dei pianeti del Sistema Solare e del moto dei satelliti di Giove e Saturno. In particolare, l'astronomo Johannes Kepler¹ aveva enunciato tre leggi che descrivevano il moto ellittico dei pianeti attorno al Sole, leggi che noi tratteremo nella prossima Sezione. Newton, nel suo trattato, mostrò matematicamente che *se il moto dei pianeti è quello individuato da Kepler, allora, su ogni pianeta deve agire una forza attrattiva diretta verso la stella, che deve essere proporzionale alla sua massa e decadere come l'inverso del quadrato della distanza*. Mostrò inoltre, sempre con rigore matematico, che se la (4-1) vale per corpi puntiformi, essa vale nella stessa forma anche per corpi sferici e anche se sono molto vicini fra loro. Con notevole coraggio intellettuale, Newton ipotizzò allora che tale legge attrattiva che poteva spiegare i moti dei pianeti dovesse essere universale e riguardare *ogni corpo dotato di massa*. Doveva essere questa stessa forza di gravità a spiegare la **forza peso** con cui ogni corpo pesante è attratto verso il basso in prossimità della superficie terrestre (Riquadro 2). Questo fu un passaggio notevole dal punto di vista filosofico, in quanto fino ad allora era comune ritenere che i corpi celesti seguissero leggi fisiche diverse rispetto ai corpi e agli oggetti con cui interagiamo sulla Terra. Il primo esperimento che permetta una misura accurata di γ è invece attribuito a Henry Cavendish, che impiegò una bilancia di torsione (vedi Appendice A).

Sfruttando la compattezza della notazione vettoriale, possiamo scrivere la forza \vec{f}_{12} esercitata dalla massa m_2 sulla massa m_1 , e viceversa la forza \vec{f}_{21} esercitata dalla massa m_2 sulla massa m_1 , come:

$$\vec{f}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{f}_{21} \tag{4-2}$$

Se, nella specifica situazione, uno dei due punti materiali può essere considerato fisso nello spazio, possiamo riscrivere la (4-2) in un sistema di riferimento con origine O coincidente con tale punto.

¹Spesso ricordato, italianizzando il nome, come Giovanni Keplero.

Riquadro 2 - La forza di gravità e la forza peso

La legge (4-1) vale rigorosamente per due punti materiali, posti a una certa distanza, ovvero per due oggetti massivi posti a distanza molto maggiore delle loro dimensioni. Qualora l'interazione gravitazionale riguardi corpi estesi, a distanze paragonabili con le loro dimensioni, occorre sommare tutte le forze di attrazione che derivano dalle interazioni tra i vari punti che costituiscono i corpi. Lo stesso Newton aveva dimostrato matematicamente che la (4-1) vale rigorosamente anche *per corpi sferici* indipendentemente dalla loro distanza reciproca.

La stessa legge descrive in realtà anche l'interazione tra un corpo puntiforme ed un corpo sferico. Può essere dunque impiegata per quantificare la forza di attrazione della Terra su un corpo di dimensioni non troppo estese. In particolare, per un corpo di massa m posto in prossimità della superficie terrestre possiamo scrivere:

$$f_g = \gamma \frac{mM_T}{R_T^2}$$

dove M_T è la massa della Terra e R_T è il raggio terrestre. Questa forza coincide con quella che in precedenza abbiamo denominato *forza peso* e scritto come

$$P = mg$$

Risulta allora:

$$mg = \gamma \frac{mM_T}{R_T^2}$$

$$g = \gamma \frac{M_T}{R_T^2}$$

Si capisce quindi come mai sia possibile considerare g costante e uniforme nello spazio in molti situazioni sperimentali. Dal momento che $R_T \simeq 6370$ km, a differenze di altitudine (rispetto al suolo) anche di centinaia di metri corrispondono variazioni molto piccole del valore di g .

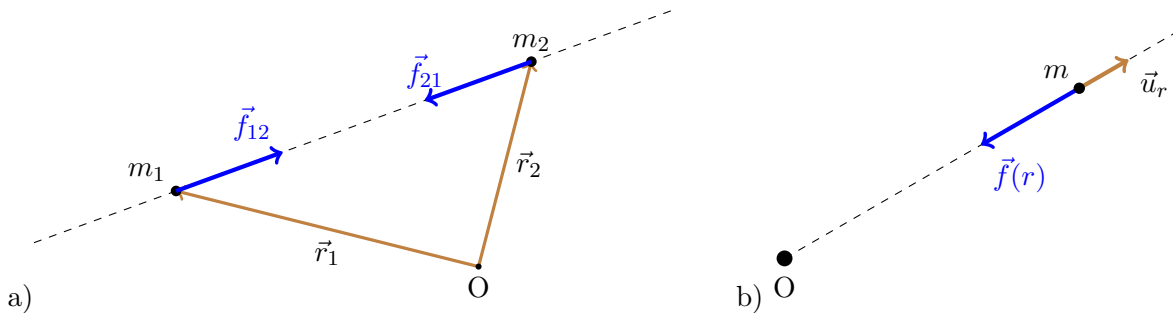


Figura 6: (a) Forze di interazione gravitazionale tra due masse puntiformi: la forza di attrazione è diretta lungo la congiungente delle due masse. (b) Se una delle due masse può essere considerata come fissa e l'origine O del sistema di riferimento è posta in coincidenza con la sua posizione, la forza gravitazionale che essa esercita sulle altre masse è una forza centrale $\vec{f}(r) = -|f(r)|\vec{u}_r$.

Riquadro 3 - Il campo gravitazionale

Nella nostra trattazione abbiamo considerato la forza di attrazione gravitazionale come un'interazione che si instaura *a distanza* e *in modo istantaneo* tra due corpi. Da ciò consegue che, qualora una delle masse cambi la sua posizione nel tempo, l'altra si debba "accorgere" istantaneamente e senza alcun ritardo dello spostamento.

Nella Fisica Moderna (in particolare nella Teoria della Relatività) si è compreso come nessuna informazione possa propagarsi nello spazio a velocità superiore rispetto a quella della luce e come nessuna interazione possa essere considerata *istantanea* nel senso classico del termine.

Una rappresentazione fisica più corretta dei fenomeni di interazione gravitazionale può essere perciò la seguente. La prima massa produce una *perturbazione dello spazio* attorno a se, che si allontana da essa a velocità finita. Tale perturbazione è il **campo gravitazionale** \vec{G} definito dalla (4-5). La seconda massa non interagisce *direttamente* con la prima massa, ma interagisce con il campo \vec{G} presente nel punto in cui si trova, secondo la legge (4-4).

In questo senso la formula (4-4) non è una semplice riscrittura della (4-3) in forma più compatta, ma è una Legge dal significato fisico profondo.

Considerando fissa la massa m_2 abbiamo $\vec{r}_2 = 0$. Concentrandoci allora sul punto materiale di massa m_1 e scrivendo per semplicità $m_1 = m$, $\vec{r}_1 = \vec{r}$ e $m_2 = M$, la (4-2) diventa:

$$\vec{f}_g = -\gamma \frac{mM}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r \quad (4-3)$$

È evidente che la forza di gravità può essere in questo caso vista come un **campo di forze centrali**, con centro di forza in O. Inoltre, si può scrivere la (4-3) come:

$$\vec{f}_g = m\vec{G} \quad (4-4)$$

dove

$$\vec{G} = -\frac{\gamma M}{r^2} \vec{u}_r \quad (4-5)$$

è grandezza fisica vettoriale funzione della posizione spaziale, e dunque matematicamente un *campo vettoriale*, detta **campo gravitazionale** (vedi anche Riquadro 3).

Per quanto dimostrato nella precedente Sezione, **la forza di gravità è conservativa** in quanto forza centrale. L'energia potenziale gravitazionale può essere ricavata integrando la (4-3) su un percorso da un punto A a un punto B. Procedendo precisamente come nella (3-5) otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{AB} &= \int_A^B \vec{f}_g \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta) = \\ &= \gamma \frac{mM}{r_B} - \gamma \frac{mM}{r_A} = \left(-\gamma \frac{mM}{r_A} \right) - \left(-\gamma \frac{mM}{r_B} \right) \end{aligned} \quad (4-6)$$

dove r_A ed r_B sono le distanze di A e di B dal centro di forza O. Perciò, l'energia potenziale gravitazionale di un punto materiale di massa m , soggetto all'attrazione di un punto materiale di massa M posto nell'origine O, è data da:

$$\boxed{U_g = -\gamma \frac{mM}{r}} \quad (4-7)$$

L'energia meccanica di un punto materiale di massa m , soggetto alla sola attrazione gravitazionale data dalla (4-3) diventa:

$$E_M = E_K + U_g = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{r} \quad (4-8)$$

poiché non agiscono altre forze non conservative, *l'energia meccanica si conserva*.

5 Generalità sul moto in un campo gravitazionale

Per le proprietà delle forze centrali, un punto materiale soggetto a tale campo di forze conserva anche il momento angolare \vec{l} . Per questo motivo, come provato nella Sezione 2, il moto del punto avviene su un piano. La traiettoria seguita è generalmente detta *orbita* e il piano su cui essa giace è detto *piano orbitale*.

Un punto materiale soggetto alla sola forza gravitazionale conserva dunque sia l'energia meccanica E_M sia il momento angolare \vec{l} (si dice che sono *costanti del moto*). Imponendo la conservazione simultanea di queste due grandezze è possibile studiare le caratteristiche peculiari del moto in un campo gravitazionale, come vediamo ora.

Mettiamo anzitutto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{r} \\ \vec{l} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z \end{cases} \quad (5-1)$$

Riscriviamo la velocità del punto materiale secondo i versori del sistema di coordinate polari (vedi le Eq. (1-4) e (1-5)):

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (5-2)$$

Sostituiamo la (5-2) nell'espressione di E_M e riscriviamo l'equazione per \vec{l} in forma scalare, portando a sinistra $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\begin{cases} E_M = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \gamma \frac{mM}{r} \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2} \end{cases} \quad (5-3)$$

È questo un sistema di due equazioni differenziali, contenente le derivate prime di $r(t)$ e $\theta(t)$ in funzione del tempo. Adeguatamente risolto,² il sistema permetterebbe di ottenere l'*equazione del moto* del punto materiale in coordinate polari, date l'energia meccanica E_M e il momento angolare l , nonché l'equazione della traiettoria.

Qui ci limitiamo a ricavare, senza risolvere il sistema di equazioni, alcune informazioni molto importanti sul moto a partire da un'analisi più attenta dell'espressione dell'energia meccanica. Infatti, sostituendo la seconda delle (5-3) nella prima, otteniamo:

$$E_M = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r} \quad (5-4)$$

L'energia meccanica è scritta così in una forma che non contiene alcun riferimento alla coordinata θ , ma solo alla coordinata radiale r . Notiamo inoltre che il secondo termine $\frac{l^2}{2mr^2}$, che di per sé deriva dal termine cinetico, ora assume forma simile a un termine di energia potenziale, poiché dipende solo dalla posizione r .

La (5-4) può essere vista come la forma che assumerebbe l'energia meccanica di un punto materiale che possa muoversi unicamente lungo una coordinata r (avendo un'energia cinetica $\frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$), ed essendo soggetto a forze particolari che diano un'**energia potenziale efficace**:

$$U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r} \quad (5-5)$$

Un'analisi più dettagliata della (5-4) ci permette di ricavare, senza risolvere l'equazione della traiettoria, qual è l'intervallo di r che è effettivamente accessibile al moto. Infatti, poiché il termine cinetico

²La soluzione analitica esiste, anche se non è immediata da ricavare.

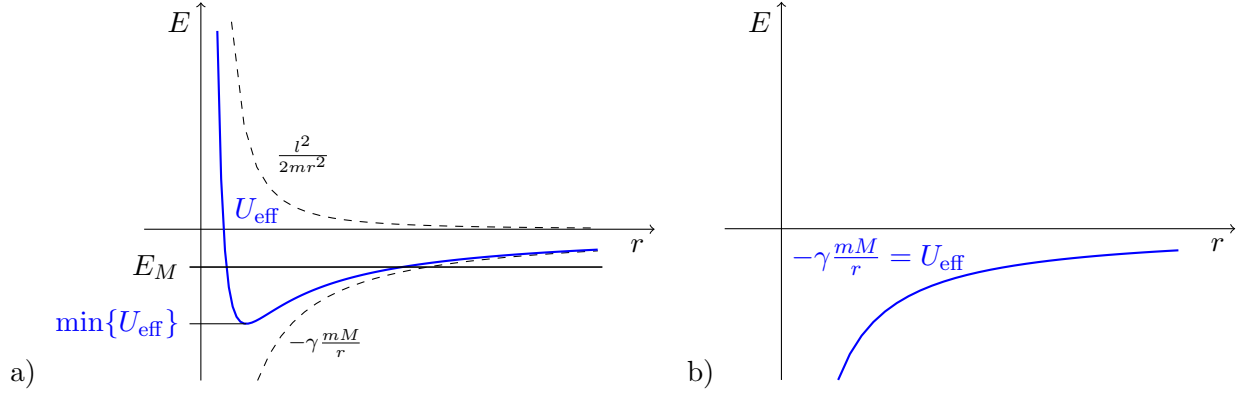


Figura 7: (a) Andamento tipico della funzione $U_{\text{eff}}(r)$, se $l \neq 0$. La regione accessibile è quella per cui $U_{\text{eff}} < E_M$. (b) Andamento tipico della funzione $U_{\text{eff}}(r)$, se $l = 0$.

l	E_M	r_{MIN}	r_{MAX}	Forma dell'orbita
$l = 0$	$E_M \geq 0$	NO	NO	semiretta
	$E_M < 0$	NO	SI	segmento di retta
$l \neq 0$	$E_M > 0$	SI	NO	iperbole
	$E_M = 0$	SI	NO	parabola
	$E_M < 0$	SI	SI	ellisse

Tabella 1: Esistenza di una distanza minima (r_{MIN}) o massima (r_{MAX}) dal centro di forza, per un punto materiale dotato di momento angolare l ed energia meccanica totale E_M . La forma dell'orbita in ciascun caso è inoltre specificata.

deve essere sempre positivo, è accessibile al moto del punto materiale solo l'intervallo di r per cui:

$$U_{\text{eff}}(r) \leq E_M \quad (5-6)$$

Se tracciamo un grafico della funzione $U_{\text{eff}}(r)$ (Figura 7), tale intervallo di r è quello per cui la funzione sta al di sotto della retta orizzontale che corrisponde a E_M . Notiamo anzitutto che il grafico di $U_{\text{eff}}(r)$ è diverso qualitativamente nel caso $l = 0$ rispetto al caso in cui $l \neq 0$. Chiaramente, l'energia meccanica del sistema non può assumere valori inferiori al minimo di U_{eff} (se esiste), poiché il termine cinetico non può mai essere negativo. A seconda dei casi (vedi Tabella 1), cioè a seconda dei valori di E_M e di l , potrà poi esistere una distanza minima r_{MIN} o una distanza massima r_{MAX} a cui il punto materiale può accedere. Tali valori di r corrispondono alle soluzioni dell'equazione $E_M = U_{\text{eff}}(r)$. La forma dell'orbita, che come già menzionato si ricava risolvendo il sistema (5-3), dipende anch'essa dal valore di E_M e di l ed è pure riportata in Tabella 1.

Limitandoci a commentare più in dettaglio il caso $l \neq 0$ (vedi anche Figura 8), che è il più rilevante per il moto dei pianeti e dei satelliti, possiamo anzitutto osservare che se $E_M \geq 0$ esiste una sola intersezione della retta orizzontale che indica E_M con il grafico di U_{eff} . Esiste dunque una distanza minima dal centro di forza a cui il punto materiale può arrivare, ma non esiste una distanza massima. L'orbita è perciò una curva *aperta* e il punto materiale può allontanarsi indefinitamente dal centro di attrazione. In particolare, si dimostra che se $E_M > 0$ l'orbita assume forma *parabolica*, mentre nel caso limite $E_M = 0$ l'orbita assume forma *iperbolica*.

Diverso è il caso $\min\{U_{\text{eff}}\} \leq E_M < 0$, in cui l'equazione $E_M = U_{\text{eff}}(r)$ ha due soluzioni. Il moto risulta vincolato in una regione limitata di spazio compresa tra un r_{MIN} e un r_{MAX} . L'orbita è dunque una curva *chiusa* e in particolare si può dimostrare che ha forma ellittica.

L'**orbita circolare** è un caso particolare di orbita ellittica in cui r_{MIN} e r_{MAX} coincidono. In pratica, è accessibile al punto materiale un unico valore di r e in ogni istante $E_M \equiv \min\{U_{\text{eff}}\}$. Nel caso dell'orbita circolare l'energia meccanica assume un'espressione particolarmente semplificata. Infatti,

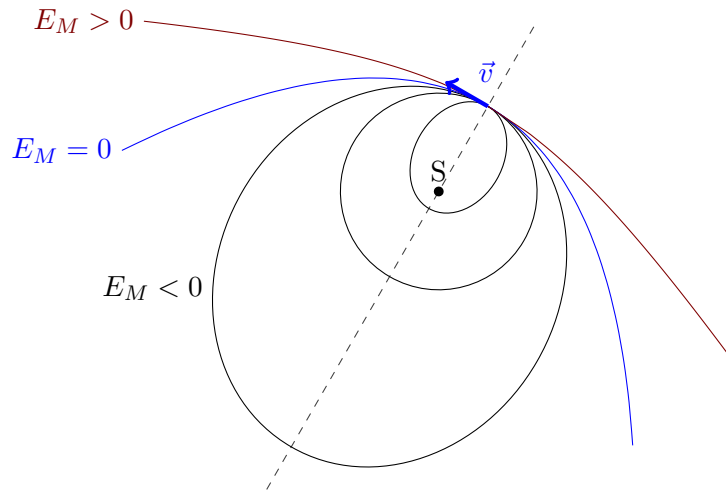


Figura 8: Se l'energia meccanica del punto materiale è negativa, l'orbita è chiusa e ha forma ellittica (o circolare). Se l'energia meccanica è nulla l'orbita ha invece a forma parabolica. Per valori positivi dell'energia meccanica l'orbita assume una forma iperbolica.

se il punto materiale, soggetto alla sola forza di gravità, si muove su un cerchio, vuol dire che la forza di gravità deve avere la forma di una forza centripeta. Perciò, se R è il raggio dell'orbita:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{\gamma M}{R} \quad (5-7)$$

L'energia cinetica del corpo orbitante è dunque pari a:

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R} \quad (5-8)$$

e l'energia meccanica diventa:

$$E_M = E_K + U_g = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{mM}{R} = -\frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R} \quad (5-9)$$

6 Moti dei pianeti e dei satelliti

Le tre Leggi di Keplero

Le osservazioni astronomiche, in particolare dei moti dei pianeti, della Luna e di altri corpi celesti del Sistema Solare, ebbero storicamente un ruolo fondamentale nel portare alla scoperta della Legge di Gravitazione Universale. In particolare, come già discusso, essa fu enunciata da Newton cercando di ricondurre a una legge dinamica comune i moti che si osservavano sulla Terra e i moti celesti.

Tre leggi matematiche che governano la cinematica del moto planetario erano state scoperte nei primi decenni del 1600 da Johannes Kepler (Keplero). La Prima e la Seconda Legge sono inoltre illustrate graficamente in Figura 9.

Leggi di Keplero

1. I pianeti si muovono su orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.
2. Il raggio vettore che congiunge il sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali: la velocità aerolare è costante.
3. Il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è costante per tutti i pianeti.

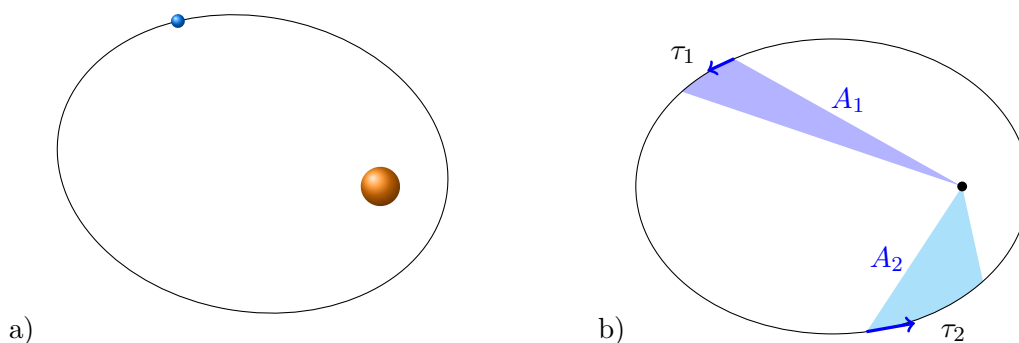


Figura 9: (a) Illustrazione della Prima Legge di Keplero: il pianeta (in blu) orbita attorno alla stella (in giallo) su un'orbita ellittica. La stella occupa uno dei fuochi dell'ellisse. (b) Illustrazione della Seconda Legge di Keplero. Consideriamo le aree A_1 ed A_2 spazzate dal raggio vettore (cioè il segmento che congiunge la stella al pianeta) in parti diverse dell'orbita, percorse rispettivamente in un tempo τ_1 e τ_2 . Se $\tau_1 = \tau_2$ allora anche $A_1 = A_2$.

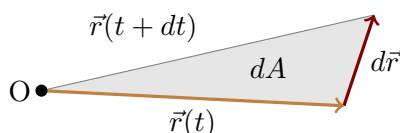


Figura 10: Un punto materiale si sposta in un tempo dt da una posizione $\vec{r} = \vec{r}(t)$ a una posizione $\vec{r} + d\vec{r} = \vec{r}(t + dt)$. Il *raggio vettore*, cioè il vettore \vec{r} , descrive l'area infinitesima dA marcata in grigio. Essa coincide con l'area del triangolo che ha per lati \vec{r} e $d\vec{r}$.

Le tre Leggi di Keplero possono essere dimostrate matematicamente e in modo rigoroso a partire dalla Legge di Gravitazione Universale. Nel seguito le discuteremo brevemente, dando però una dimostrazione completa solo per la Seconda.

La **Prima Legge** identifica la forma dell'orbita. Abbiamo già trattato nella precedente Sezione come la forma ellittica dell'orbita sia propria dei casi in cui un punto materiale (in questo caso, il pianeta), soggetto a un campo gravitazionale (esercitato dal Sole), possieda $E_M < 0$ e $l \neq 0$. Inoltre, la Prima Legge precisa che il centro di forza corrisponde a uno dei *fuochi* dell'ellisse (non il suo centro!). Come già discusso, in questi casi esiste una distanza minima e una distanza massima che il punto materiale può raggiungere rispetto al centro di forza. Nel caso delle orbite dei pianeti, il punto dell'orbita più vicino al Sole è detto *perielio*, il punto più lontano è detto *afelio*.

La **Seconda Legge** è una conseguenza diretta della conservazione del momento angolare. Infatti, l'area infinitesima spazzata dal raggio vettore in un tempo dt è l'area del triangolo che ha per lati \vec{r} e $d\vec{r}$. Possiamo anche esprimere l'area come prodotto vettoriale.

$$dA = |\vec{r} \times d\vec{r}| \quad (6-1)$$

Si definisce allora **velocità areolare** la grandezza:

$$\sigma = \frac{dA}{dt} \quad (6-2)$$

e si prova facilmente che essa è proporzionale in modulo al momento angolare:

$$\sigma = \frac{1}{dt} |\vec{r} \times d\vec{r}| = |\vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{r}| = \frac{1}{m} |\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{1}{m} |\vec{l}| \quad (6-3)$$

Se dunque \vec{l} è costante, è costante anche σ .

Pianeta	a ($\times 10^8$ km)	T (anni)	T^2/a^3 ($\times 10^{-8}$ anni ² /km ³)
Mercurio	0.579	0.241	0.30
Venere	1.08	0.615	0.30
Terra	1.49	1.00	0.30
Marte	2.28	1.88	0.30
Giove	7.78	11.9	0.30
Saturno	14.3	29.5	0.30
Urano	28.7	84.0	0.30
Nettuno	45.0	165	0.30

Tabella 2: Misura del semiasse maggiore dell'orbita (a) e del periodo orbitale (T) per gli otto pianeti del Sistema Solare. È riportato anche il valore del rapporto T^2/a^3 che rimane perfettamente costante, in accordo con la Terza Legge di Keplero.

La **Terza Legge** può essere provata molto facilmente per il caso particolare delle orbite circolari. In tal caso la forza di gravità che è applicata al pianeta orbitante deve avere la forma di una forza centripeta, in quanto è l'unica forza che ne governa il moto sulla traiettoria circolare. Perciò, per un pianeta di massa m che orbita attorno a una stella di massa M_S seguendo una circonferenza di raggio R , si può scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{f}_g &= \vec{f}_C \\ -\gamma \frac{mM_S}{R^2} \vec{u}_r &= -m\omega^2 R \vec{u}_r\end{aligned}\quad (6-4)$$

Ma la velocità angolare ω può essere scritta in funzione del periodo T tramite la nota relazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$, perciò riscrivendo scalarmente la (6-4) e semplificando m si ottiene:

$$\gamma \frac{M_S}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R \quad (6-5)$$

Da quest'ultima relazione si ricava immediatamente:

$$\frac{T^2}{R^3} = C = \frac{4\pi^2}{\gamma M_S} \quad (6-6)$$

Notiamo che C è una costante per tutti i pianeti che orbitano attorno alla stessa stella, perché contiene solo la costante di gravitazione γ e la massa della stella M_S (vedi anche la Tabella 2).

Le Leggi di Keplero sono valide non solo per descrivere il moto dei pianeti intorno al Sole, ma anche per descrivere il moto di un qualunque oggetto orbitante attorno ad un altro di massa molto maggiore. Possono descrivere il moto dei satelliti attorno ai pianeti, ad esempio il moto della Luna o dei satelliti artificiali attorno alla Terra. In quest'ultimo caso, il punto dell'orbita più vicino alla Terra è detto *perigeo* e il punto più lontano è detto *apogeo*.

Naturalmente, esse devono essere adattate al caso specifico, sostituendo il corpo più massivo nel ruolo del Sole e i corpi orbitanti nel ruolo dei pianeti. In particolare, nella relazione (6-6), alla massa del Sole M_S andrà sostituita la massa M del corpo centrale.

Satelliti artificiali e sonde spaziali

La Legge di Gravitazione governa anche la dinamica dei satelliti artificiali, delle sonde e delle navicelle spaziali. In generale, per collocare un oggetto artificiale su un'orbita terrestre oppure solare (caratterizzata da determinati valori di E_M e l), sarà necessario fornire al corpo ulteriore energia meccanica e momento angolare. Ciò si ottiene applicando in modo opportuno *forze non conservative*, che sono quelle esercitate ad esempio dal razzo di lancio o dai propulsori della navicella. Quando però il razzo

si stacca o i propulsori si spengono, anche questi oggetti artificiali rimangono di fatto soggetti alle sole interazioni gravitazionali con i corpi celesti.

Ci si può chiedere quale sia la velocità minima che si deve imprimere a un corpo di massa m , che si trova inizialmente in prossimità della superficie della Terra, affinché cominci effettivamente a orbitare attorno ad essa (in altre parole, affinché non ricada mai al suolo). Tale velocità v_1 è detta **prima velocità cosmica** e si calcola considerando che, nel caso limite, il corpo lanciato si muoverebbe su un'orbita circolare di raggio uguale³ al raggio terrestre R_T . Imponendo che la forza gravitazionale coincida con la forza centripeta si ricava:

$$\gamma \frac{mM_T}{R_T^2} = m \frac{v_1^2}{R_T} \quad (6-7)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_T}{R_T}} \quad (6-8)$$

dove M_T è la massa della Terra.

Se un corpo è lanciato con velocità maggiore della prima velocità cosmica (e direzione adeguata), esso potrà muoversi su orbite ellittiche che si spingono sempre più lontano dalla Terra, cioè con distanza di *apogeo* sempre maggiore. Se la velocità è sufficientemente elevata, la distanza di *apogeo* diventa infinita o, in altre parole, il corpo può *sfuggire all'orbita terrestre* intraprendendo un'orbita parabolica o iperbolica. La minima velocità v_2 per cui ciò accade è detta **seconda velocità cosmica** o **velocità di fuga** e si può calcolare facilmente a partire dalle considerazioni energetiche discusse nella Sezione 5. Affinché l'orbita sia aperta, infatti, l'energia meccanica deve essere nulla o positiva.

$$E_M = -\gamma \frac{mM_T}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \quad (6-9)$$

da cui:

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{\gamma M_T}{R_T}} = \sqrt{2}v_1 \quad (6-10)$$

È utile infine menzionare, sempre con riguardo ai satelliti terrestri, un caso di particolare rilevanza per le applicazioni che è quello delle **orbite geostazionarie**. Sono orbite il cui periodo è pari al periodo di *rotazione* della Terra su se stessa: un satellite collocato su quest'orbita si manterrà indefinitamente sulla verticale della stessa località geografica. Satelliti geostazionari possono essere puntati dalla Terra tramite antenne fisse e sono perciò impiegati per le telecomunicazioni (ad es. le trasmissioni televisive). Il raggio dell'orbita geostazionaria⁴ è ricavabile dalla (6-6), sostituendo a M_S la massa terrestre $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg e imponendo che il periodo sia pari al periodo di rotazione terrestre $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$:

$$R_G = \left(\frac{\gamma M_T T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 4.22 \cdot 10^7 \text{ m} \simeq 42200 \text{ km} \quad (6-11)$$

³È chiaramente un'approssimazione, in cui si considera la Terra una sfera perfettamente liscia, priva di montagne contro cui il corpo lanciato possa scontrarsi.

⁴Misurato dal centro della Terra.

A La bilancia di Cavendish

Il fisico scozzese Henry Cavendish impiegò nel 1798 una bilancia di torsione per misurare con precisione la forza di attrazione gravitazionale tra due corpi di cui fosse nota sia la massa che la distanza relativa. Lo strumento si compone di un bilanciante di lunghezza $L \simeq 2$ m, sospeso al centro tramite un filo sottile, ai cui estremi sono appese due sferette di piombo (di circa 730 g di massa). Le due sferette sono portate in prossimità di due sfere più grandi (di massa superiore a 150 kg), da cui sono attratte per la forza di gravità, ciascuna con una forza \vec{f} . Le due forze esercitano dunque complessivamente sul bilanciante un momento:

$$\tau_g = Lf \quad (\text{A-1})$$

che tenderebbe a far ruotare il bilanciante torcendo il filo. Tuttavia, il filo con cui è sospeso il bilanciante oppone resistenza alla torsione, funzionando in modo analogo a una molla (di costante elastica estremamente piccola) e contrastando così τ_g con un momento:

$$\tau_{el} = -k_{el}\theta = -\tau_g \quad (\text{A-2})$$

Attraverso precise misure dell'angolo di torsione θ e conoscendo la costante elastica di torsione k_{el} è possibile risalire alla forza di attrazione tra le masse.

$$Lf = k_{el}\theta \quad \rightarrow \quad f = \frac{k_{el}\theta}{L} \quad (\text{A-3})$$

Di fatto, questo strumento è in grado di misurare una forza dell'ordine di 10^{-7} N.

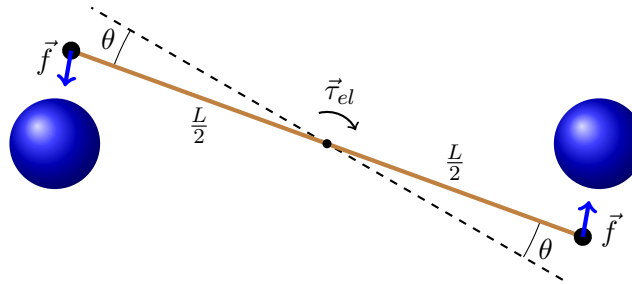


Figura 11: Rappresentazione schematica dell'esperimento di Cavendish.

Misure di questo tipo consentono di ottenere la misura della **costante di gravitazione universale**. Infatti nota m_1 , m_2 e la distanza r tra le masse che si attraggono, si ha:

$$\gamma = \frac{fr}{m_1m_2} \quad (\text{A-4})$$

In realtà, Cavendish utilizzò queste misure per **stimare la massa della Terra**, nota l'accelerazione di gravità. Infatti, l'accelerazione di gravità in prossimità della superficie terrestre si può scrivere come (Riquadro 2):

$$g = \gamma \frac{M_T}{R_T^2}$$

dove M_T è la massa della Terra e R_T il suo raggio. Ai tempi di Cavendish, il raggio della Terra era già noto in modo piuttosto accurato da misure astronomiche. Anche g era ben nota, dal momento che può essere misurata facilmente osservando la caduta libera di un grave o il moto su un piano inclinato. Perciò si può ricavare:

$$M_T = g \frac{R_T^2}{\gamma} = g \frac{R_T^2 m_1 m_2}{Fr}$$

dove m_1 , m_2 , r , e F sono i dati dell'esperimento. La misura di Cavendish fu precisa entro l'1% del valore oggi accettato $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg.