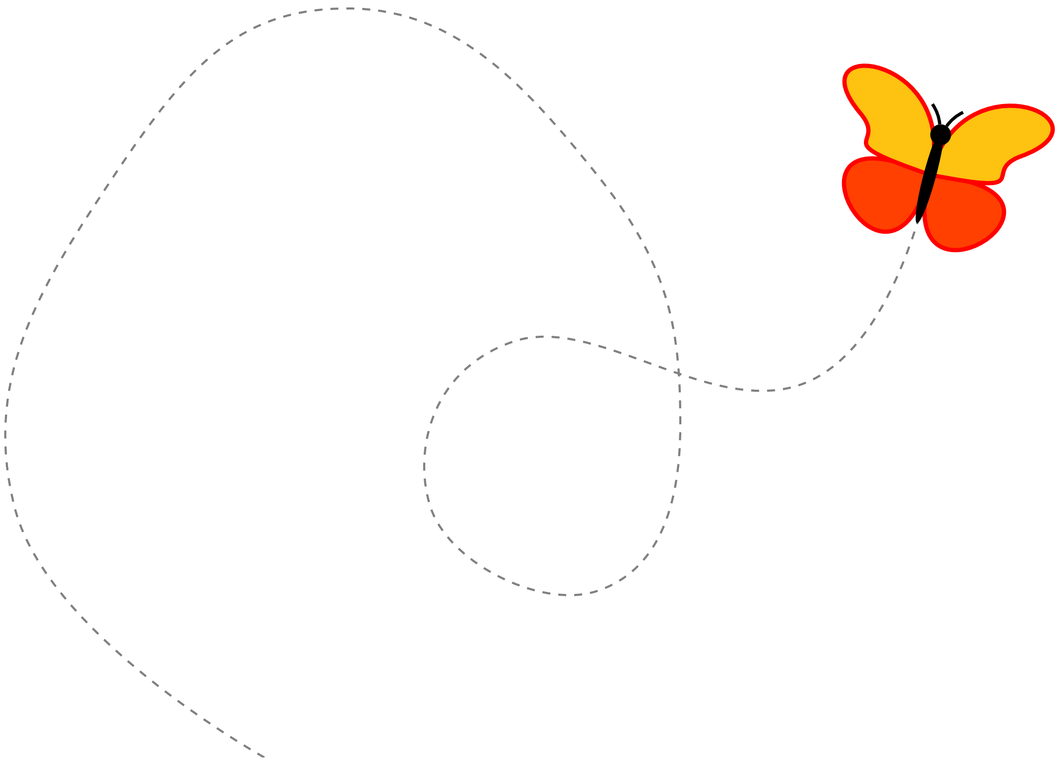
Meccanica del Punto Materiale

Andrea Crespi



Indice

1 Cinematica del punto materiale

1.1 Introduzione

La descrizione del movimento dei corpi, in modo più o meno *qualitativo*, fa parte del nostro parlare quotidiano. La Cinematica si occupa di sviluppare gli strumenti adeguati per una descrizione *matematica* e *quantitativa* dei moti. Essa non riguarda le interazioni tra i corpi e non studia come queste causino i moti stessi: tuttavia, dà una rappresentazione rigorosa del moto che è alla base di tutta l'indagine Fisica successiva.
Nella nostra trattazione, studieremo essenzialmente **il moto di un punto nello spazio**. Oltre a essere il caso più semplice, questa può essere una schematizzazione appropriata per descrivere il moto corpi estesi in molte situazioni di interesse. In particolare, è conveniente considerare un corpo esteso come puntiforme quando le sue dimensioni sono piccole rispetto alle distanze percorse e sono trascurabili rispetto alla precisione che vogliamo avere nello studio del movimento. Ad esempio, per una locomotiva che percorre decine o centinaia di chilometri possiamo scegliere di trascurare le sue dimensioni, dell'ordine dei dieci o venti metri.
In altri casi, è possibile scegliere più o meno arbitrariamente un punto di un corpo esteso a rappresentarne la posizione, trascurando l'estensione del corpo stesso, non perché quest'ultima sia piccola, ma in quanto non rilevante per il nostro studio. Per esempio, per tracciare gli spostamenti di un ascensore su e giù tra un piano e l'altro, possiamo scegliere di identificarne la posizione verticale semplicemente con la posizione di un segno puntiforme inciso sulla sua struttura. Anche se lo spostamento compiuto dal segno di riferimento è comparabile con la dimensione dell'ascensore stesso, esso descrive compiutamente il moto per quanto di nostro interesse.
Se si assume che l'intera massa del corpo sia concentrata nell'unico punto che ne descrive la posizione, tale modello è usualmente denominato **punto materiale**.

Punto materiale

Rappresentazione di un corpo in moto come un punto nello spazio, che possiede l'intera massa m del corpo stesso.

Nel seguito ci riferiremo sempre a *punti materiali*. Tutta la trattazione cinematica può essere comunque considerata valida per qualsiasi oggetto modellizzato come un punto mobile, indipendendemente dal fatto che abbia oppure no una massa.
Definiamo infine:

Traiettoria

Il luogo dei punti occupati dal punto materiale nel suo moto.

1.2 Cinematica scalare

Iniziamo con lo studio del moto di un corpo vincolato a seguire un certo percorso. È questo il caso degli esempi già citati: un ascensore che si muove verso l'alto o verso il basso, ma lungo la stessa corsia verticale, oppure una locomotiva che si muove su un binario. Utilizzando le definizioni date poco sopra, possiamo dire che ci proponiamo qui di studiare il **moto di un punto materiale la cui traiettoria è una curva fissata**. Nel caso dell'ascensore, la traiettoria sarà una retta verticale; nel caso della locomotiva, sarà una curva che segue le rotaie.
Per descrivere il moto fissiamo un sistema di riferimento e un adeguato sistema di coordinate spaziali. In particolare:

- fissiamo un punto sulla traiettoria, detto origine
- orientiamo la traiettoria stabilendo un verso positivo
- scegliamo un'unità di misura delle lunghezze

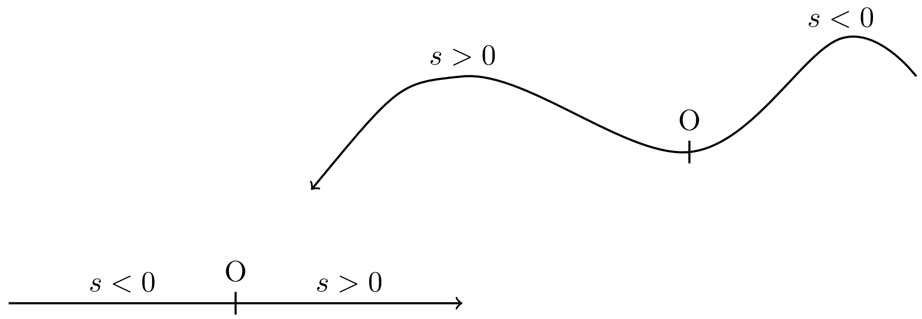


Figura 1: Esempi di traiettorie, una rettilinea e una curvilinea, su cui sono state definite due ascisse curvilinee stabilendo un punto di origine e un'orientazione.

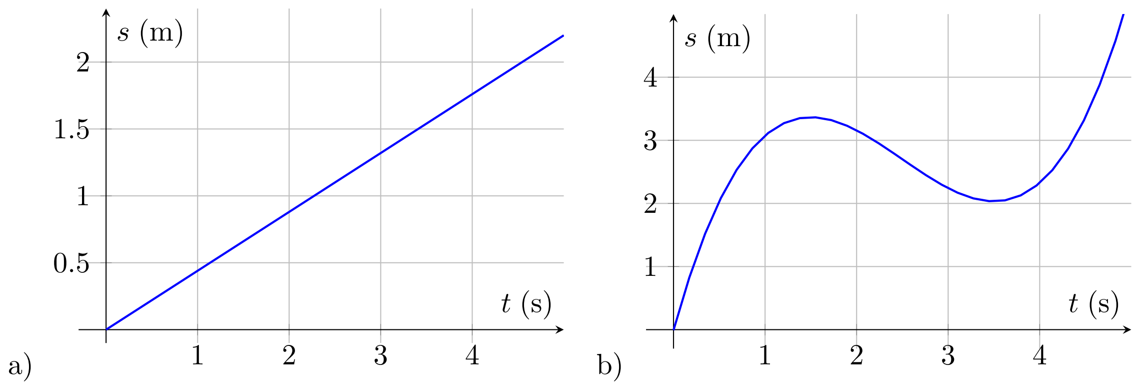


Figura 2: Esempi di diagramma orario per un moto uniforme (a) e per un moto vario (b). L'asse delle ascisse riporta la coordinata temporale t (tra parentesi l'unità di misura: secondi). L'asse delle ordinate riporta l'ascissa curvilinea s (tra parentesi l'unità di misura: metri).

È allora possibile indicare univocamente la posizione del punto materiale *tramite uno scalare detto ascissa curvilinea* (vedi anche Fig. 1).

Ascissa curvilinea

Numero reale s, il cui modulo $|s|$ è pari alla lunghezza dell'arco di traiettoria che congiunge l'origine O con la posizione P del punto materiale in un dato istante. Il segno è positivo se procedendo da O a P si è concordi con il verso stabilito positivo della traiettoria, il segno è negativo in caso contrario.

Per descrivere il movimento (che è variazione della posizione *nel tempo*) abbiamo bisogno anche di un riferimento temporale, ovvero un orologio che fornisca una misura del tempo t trascorso rispetto a un istante scelto come istante iniziale $t = 0$. Il movimento del punto materiale può allora essere descritto completamente tramite la:

Legge oraria

Si definisce **legge oraria** la funzione:

$$s = s(t) \tag{1-1}$$

che associa univocamente a ogni istante di tempo t il valore dell'ascissa curvilinea s del punto materiale.

Tale funzione può essere rappresentata in un grafico detto **diagramma orario** (vedi Fig. 2).
Un'altra nozione impiegata nel linguaggio quotidiano è quella di *velocità*: comunemente intendiamo che un corpo si muove tanto più velocemente quanto più percorre grandi distanze in poco tempo. La

Cinematica dà definizioni quantitative di questo concetto, riferendosi allo *spostamento* compiuto in un certo *intervallo di tempo*. Se un punto materiale in un istante t_1 si trova all'ascissa $s_1 = s(t_1)$ e all'istante t_2 si trova all'ascissa $s_2 = s(t_2)$ ha percorso la distanza $\Delta s = s_2 - s_1$ nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Definiamo allora:

Velocità scalare media

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \tag{1-2}$$

La velocità media ci dà l'idea di quanto spazio è stato percorso complessivamente in un dato intervallo di tempo. La sua unità di misura, nel Sistema Internazionale, è il m/s.

La stessa velocità media può in realtà essere associata a moti molto diversi tra loro. Consideriamo per esempio un ascensore, di cui misuriamo all'istante $t_1 = 0$ s la posizione $s_1 = 3$ m (corrispondente alla cabina ferma al primo piano) e dopo qualche minuto, al tempo $t_2 = 300$ s la posizione $s_2 = 6$ m (corrispondente alla cabina ferma al secondo piano). La velocità media è $v_m = (6-3)/(300-0)$ m/s $= 1$ cm/s. Notiamo che sarebbero compatibili con queste informazioni casi molto diversi tra loro: ad esempio, l'ascensore potrebbe essersi mosso molto lentamente, coprendo la distanza di 1 cm ad ogni secondo trascorso. Oppure, l'ascensore potrebbe essere salito in 10 s al secondo piano, e quindi essere rimasto fermo lì per i rimanenti 290 s. Oppure ancora, l'ascensore potrebbe essere salito in 30 s fino al terzo piano (diciamo $s = 9$ m) e quindi essere disceso al secondo in modo da essere sempre in s_2 al tempo t_2. Di fatto, esisterebbero infinite altre possibilità.

Per avere una comprensione più completa degli spostamenti dell'ascensore nel tempo, si potrebbe allora pensare di non osservarlo solo in due istanti t_1 e t_2, bensì periodicamente a intervalli Δt molto piccoli. Per ciascuno di questi intervalli si potrebbe valutare lo spostamento Δs compiuto rispetto all'istante precedente e quindi calcolare la velocità media con la (1-2). La nostra conoscenza dell'effettivo movimento effettuato sarà tanto più accurata quanto più gli intervalli Δt saranno piccoli: in particolare, le varie velocità medie ci daranno un'idea progressiva di come avvengono gli spostamenti e della loro effettiva rapidità. Più precisamente, utilizzando la nozione matematica di limite possiamo far tendere Δt a 0 e definire la *velocità istantanea*, coincidente con la derivata prima rispetto al tempo della legge oraria.

Velocità scalare istantanea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{1-3}$$

Un'altra quantità di interesse nella descrizione del moto può essere la *variazione della velocità nel tempo*, detta **accelerazione**.[1] L'importanza di questa grandezza sarà discussa ampiamente nello studio della dinamica.

Con procedimenti analoghi al caso della velocità, si definiscono l'accelerazione (scalare) media e l'accelerazione (scalare) istantanea. Quest'ultima in particolare è pari alla derivata prima della velocità istantanea e alla derivata seconda dell'ascissa curvilinea.

[1]Notare l'**ortografia** della parola, scritta in italiano con due 'c' e una sola 'l'!

Riquadro 1 - Moto uniforme e uniformemente accelerato

Se la velocità istantanea è costante nel tempo e pari a v, è immediato ricavare dalla (1-9):

$$\boxed{a(t) = 0 \qquad v(t) = v = cost. \qquad s(t) = v \cdot (t - t_0) + s_0} \tag{1-4}$$

Se è invece uniforme nel tempo l'accelerazione a, possiamo dedurre dalla (1-9) e dalla (1-10):

$$\boxed{a(t) = a = cost. \qquad v(t) = a \cdot (t - t_0) + v_0 \qquad s(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t0) + s_0} \tag{1-5}$$

In queste espressioni abbiamo definito, per compattezza, $v_0 = v(t_0)$ e $s_0 = s(t_0)$.
Per il moto uniformemente accelerato, ricavando t dall'equazione per la velocità e sostituendolo in quella per l'accelerazione, si può ottenere anche un'espressione che mette in relazione direttamente a, v e s senza contenere t:

$$v^2 - v_0^2 = 2\,a\,\Delta s \tag{1-6}$$

dove $\Delta s = s - s_0$.

Accelerazione scalare

Accelerazione scalare media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{1-7}$$

Accelerazione scalare istantanea:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{1-8}$$

L'unità di misura dell'accelerazione, nel Sistema Internazionale, è il m/s^2.
Le relazioni (1-3) e (1-8), contenenti le derivate, possono essere invertite in modo da ricavare l'ascissa curvilinea a partire dalla velocità istantanea e la velocità a partire dall'accelerazione:

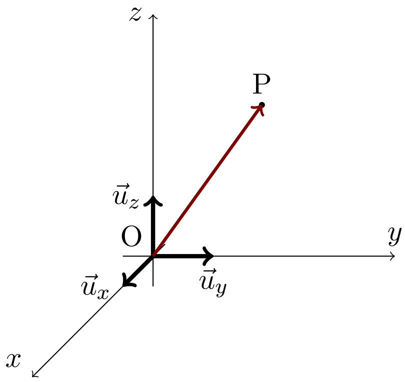
$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \tag{1-9}$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \tag{1-10}$$

Se la velocità istantanea si mantiene costante nel tempo ($v(t) = cost.$, $a(t) = 0$) si parla di **moto uniforme**, se l'accelerazione si mantiene costante e non nulla nel tempo si parla di **moto uniformemente accelerato**. Esistono espressioni molto semplici che mettono in relazione le varie grandezze cinematiche in questi casi notevoli; esse sono discusse nel Riquadro 1.

1.3 Cinematica nello spazio tridimensionale

Nella Sezione 1.2 abbiamo affrontato la descrizione del moto di un punto vincolato a una traiettoria. In quel caso, fissando un sistema di riferimento appropriato sulla traiettoria stessa è possibile descrivere compiutamente il moto tramite grandezze scalari. Affrontiamo ora il caso più generale in cui il punto materiale può muoversi liberamente nello spazio.
Anzitutto, ricordiamo che la posizione di un punto non può mai essere definita in modo *assoluto* ma sempre *relativamente* a qualche altra entità (punti, rette, piani). D'altra parte, persino nei nostri



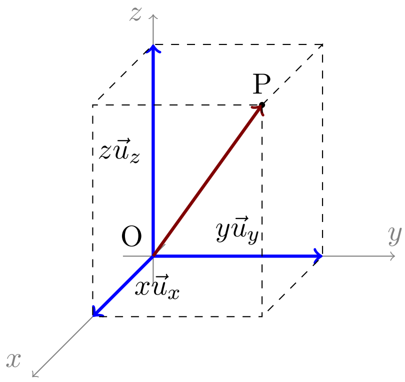


Figura 3: A sinistra, il vettore posizione $\vec{r}$ di un punto P, rappresentato in un sistema di riferimento cartesiano di origine O. Sono riportati anche i tre versori $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ e $\vec{u}_z$degli assi coordinati. A destra, $\vec{r}$ è riportato assieme alle sue componenti cartesiane, che sommate vettorialmente danno il vettore stesso $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

discorsi di tutti i giorni, per comunicare a qualcun altro (e perciò identificare) la posizione di un oggetto ci basiamo sempre su osservazioni riguardo a come l'oggetto sia disposto rispetto ad altre entità assunte come riferimento ("il bicchiere *è sopra* il tavolo", "il libro che cerchi è *il secondo da destra sul primo scaffale dal basso*" e così via. . .).
Nello spazio, la posizione di un punto P può essere espressa relativamente alla posizione di un altro punto O, assunto come riferimento o *origine*, tramite il **vettore posizione** $\vec{r} \equiv \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (vedi Figura 3).
Il moto di un punto materiale può essere dunque completamente caratterizzato mediante la seguente:

Equazione vettoriale del moto

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1-11}$$

Per rappresentare in modo inequivoco il vettore $\vec{r}$ conoscere l'origine O non è sufficiente, ma è necessario fissare un sistema di coordinate. Molto usato è il **sistema di coordinate cartesiane**, basato su tre assi orientati x, y e z, mutuamente ortogonali e aventi un punto comune di intersezione in O. Come noto, a ciascun asse si associa un versore, cioè un vettore di modulo unitario, spiccato dall'origine e giacente sull'asse corrispondente con la stessa orientazione.

$$\vec{u}_x \qquad \vec{u}_y \qquad \vec{u}_z$$

L'orientazione degli assi è sempre scelta in modo che i tre versori formino, nell'ordine, una terna destrorsa e quindi valga:

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z$$

Sottolineiamo che il sistema di coordinate può essere disposto nello spazio nel modo più conveniente per affrontare il problema da studiare.
Il vettore $\vec{r}$ può dunque essere rappresentato tramite le sue proiezioni sugli assi cartesiani:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \tag{1-12}$$

La conoscenza della posizione del punto materiale in un dato istante coincide con la conoscenza di un vettore o equivalentemente di tre scalari, cioè della terna di coordinate (x, y, z). Allo stesso modo, l'equazione vettoriale del moto è equivalente a tre equazioni scalari:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{1-13}$$

Se osserviamo un punto materiale in due istanti t_1 e $t_2 = t_1 + \Delta t$, possiamo definire il **vettore spostamento** come:

$$\Delta r = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \tag{1-14}$$

Notiamo che questo vettore indica solo la differenza di posizione tra il punto finale e il punto iniziale. Per giungere da $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ nell'intervallo Δt il punto materiale può avere compiuto una traiettoria lunga o breve, curva o rettilinea: questa informazione però non è contenuta nel vettore spostamento.
In analogia al caso scalare, possiamo definire il **vettore velocità** sulla base dello *spostamento compiuto in un certo intervallo di tempo*. Abbiamo dunque la:

Velocità media

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{1-15}$$

e, passando al limite per $\Delta t \to 0$, la:

Velocità istantanea

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1-16}$$

Quest'ultima grandezza coincide con la derivata prima del vettore posizione rispetto al tempo, ed è anche indicata semplicemente con il termine *velocità* senza altri aggettivi.
Per descrivere la variazione nel tempo del vettore velocità si definisce il **vettore accelerazione**:

Accelerazione

Accelerazione media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{1-17}$$

Accelerazione scalare istantanea:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1-18}$$

L'accelerazione istantanea coincide con la derivata prima nel tempo del vettore velocità e con la derivata seconda del vettore posizione.
La derivata di un vettore si compone delle derivate delle componenti cartesiane. Questo vale naturalmente anche per il vettore velocità e il vettore accelerazione:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \tag{1-19}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{u}_z = \\ &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z \end{aligned} \tag{1-20}$$

A partire dalle definizioni dei vettori velocità e accelerazione come derivate, è anche possibile scrivere relazioni vettoriali analoghe alla (1-9) e alla (1-10):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\, dt \tag{1-21}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt \tag{1-22}$$

Prima di procedere ulteriormente con la trattazione, è forse dovuta a questo punto qualche considerazione sul formalismo matematico che stiamo adottando per descrivere il moto. Anzitutto, abbiamo dato per assunto che l'equazione del moto $\vec{r}(t)$ sia una *funzione continua* della variabile temporale e allo stesso modo che sia continua la curva che costituisce la traiettoria. Questa assunzione è molto ragionevole, perché implica che un punto materiale non possa teletrasportarsi istantaneamente da un punto a un altro dello spazio, comunque distante da esso. In realtà, si può assumere tranquillamente che $\vec{r}(t)$ sia derivabile due volte per ogni t: se così non fosse, infatti, esisterebbe almeno un istante in cui l'accelerazione vettoriale non è definita. Come si vedrà in dettaglio più avanti, studiando la Dinamica, se non è definita un'accelerazione allora non è definita neanche la forza agente in quell'istante sul punto materiale, situazione che fisicamente non può accadere.
Se in linea di principio le grandezze che descrivono un moto possono essere considerate funzioni continue e derivabili della variabile temporale, ciò non significa che nelle situazioni reali e sperimentali sia sempre operabile il calcolo analitico delle derivate. Infatti, i fenomeni fisici sono descritti da funzioni analitiche solo nell'ambito di modelli ed approssimazioni (peraltro fondamentali per arrivare comprenderli). Inoltre, non è possibile acquisire dati sperimentali con precisione infinita e ad intervalli di tempo infinitesimi, in modo da avere una rappresentazione arbitrariamente fedele della *effettiva* funzione continua che la grandezza fisica sta seguendo. L'esecuzione dell'operazione di derivata o integrale sui dati sperimentali andrà dunque intesa nel senso del calcolo numerico e tenendo debito conto delle incertezze di misura.

1.4 Traiettoria e rappresentazione intrinseca della velocità

Come già menzionato, l'equazione vettoriale del moto (1-11) contiene in sé tutte le informazioni necessarie a descrivere il moto stesso, poiché permette di associare ad ogni istante di tempo la posizione del punto materiale. Essa contiene, di fatto, anche le informazioni relative alla traiettoria. Matematicamente parlando, la traiettoria è il codominio di $\vec{r}(t)$ e costituisce una curva in tre dimensioni. La variabile temporale t è uno dei parametri possibili (non l'unico!) per la descrizione matematica di questa curva, come funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$. Infatti, tale parametro può non essere il più conveniente per evidenziare la geometria della traiettoria stessa. Un punto materiale, nel suo moto, potrebbe percorrere più volte alcuni punti o tutta la traiettoria, oppure potrebbe percorrere alcuni tratti più velocemente e altri più lentamente, rendendo difficile o poco pratico riconoscere la geometria della traiettoria dall'evoluzione temporale della posizione.
Qualora sia assegnata in un problema esplicitamente l'equazione del moto, spesso si desidera ottenere un'equazione della traiettoria in forma implicita, cioè del tipo $f(x, y, z) = 0$, oppure esplicita rispetto a una delle coordinate, ad esempio $y = f(x)$ per un moto nel piano. Nei casi che possono essere affrontati in modo analitico, l'equazione della traiettoria in una di queste forme può essere ottenuta a partire dalle equazioni scalari del moto (1-13) cercando di "eliminare" la variabile temporale t. Alcuni esempi sono riportati nel Riquadro 2.
Una parametrizzazione interessante della curva della traiettoria è quella che sfrutta l'*ascissa curvilinea.* L'ascissa curvilinea s permette di associare biunivocamente ad ogni numero reale contenuto in un intervallo definito, pari alla lunghezza totale della traiettoria stessa, un punto preciso sulla traiettoria (vedi Sezione 1.2). Operando un cambio di variabile possiamo passare dalla funzione vettoriale $\vec{r}(t)$ alla funzione vettoriale $\vec{r}(s(t))$:

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\,\vec{u}_x + y(s)\,\vec{u}_y + z(s)\,\vec{u}_z \tag{1-23}$$

con $s = s(t)$.
Il moto del punto materiale risulta compiutamente descritto quando è nota l'equazione della traiettoria nella forma (1-23) e la legge oraria $s = s(t)$. Notiamo che in questo modo l'aspetto di evoluzione temporale del moto è stato utilmente separato dall'aspetto puramente geometrico. Osserviamo inoltre che, una volta definita sulla traiettoria l'ascissa curvilinea, è possibile utilizzare tutte le grandezze scalari definite nella Sezione 1.2 per la descrizione cinematica del movimento.

Riquadro 2 - Esempi di calcolo dell'equazione della traiettoria

Esempio 1
È data la seguente equazione del moto, scritta in forma vettoriale:

$$\vec{r}(t) = A\,t\vec{u}_x - B\,t^2\vec{u}_z$$

Essa è equivalente alle equazioni scalari:

$$x(t) = A\,t \qquad y(t) = 0 \qquad z(t) = -B\,t^2$$

Possiamo ricavare, dalla prima, $t = x/A$, che sostituita nella terza fornisce:

$$\boxed{\frac{B}{A^2}x^2 + z = 0}$$

La traiettoria è perciò una parabola sul piano xz.

Esempio 2
È data la seguente equazione del moto in forma vettoriale:

$$\vec{r}(t) = A\,\sin(C\,t^2 + D)\vec{u}_x + B\,\cos(C\,t^2 + D)\vec{u}_y$$

equivalente alle equazioni scalari:

$$x(t) = A\,\sin(C\,t^2 + D) \qquad y(t) = B\,\cos(C\,t^2 + D) \qquad z(t) = 0$$

Qui possiamo notare che:

$$\left(\frac{x(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{B}\right)^2 = \sin^2(C\,t^2 + D) + \cos^2(C\,t^2 + D) = 1$$

dove abbiamo applicato la nota relazione $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, valida per ogni valore dell'argomento $\theta = C\,t^2 + D$. La traiettoria è perciò un'ellisse nel piano xy con equazione:

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0}$$

Consideriamo ora uno spostamento $\Delta\vec{r}$ di un punto materiale su una data traiettoria. Si può notare che (vedi Figura 4) quanto più l'intervallo di tempo considerato diventa piccolo, tanto più il vettore $\Delta\vec{r}$ tende a essere tangente alla traiettoria. Poiché il vettore velocità media è pari al vettore spostamento diviso per uno scalare, ciò significa che anche il vettore velocità media, al tendere di Δt a zero, diventa tangente alla traiettoria. *Il vettore velocità istantanea è dunque rigorosamente tangente alla traiettoria.*

Inoltre, sempre nello stesso limite $\Delta t \to 0$, il modulo del vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ tende a diventare pari alla lunghezza dell'arco di traiettoria compreso tra i due punti (in altre parole, la corda tende a confondersi con l'arco). Questo significa che, facendo riferimento alla differenza di ascissa curvilinea Δs tra i due punti:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{|\Delta s|} = 1 \tag{1-24}$$

Possiamo definire allora un vettore di modulo unitario che abbia la proprietà di essere tangente alla traiettoria:

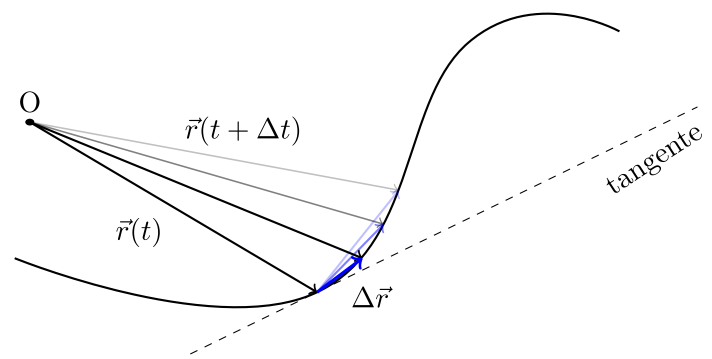


Figura 4: Il vettore spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ tende ad essere tangente alla traiettoria per $\Delta t \to 0$.

Versore tangente

$$\vec{u}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{1-25}$$

si mostra facilmente che $\vec{u}_t$ è sempre rivolto nel verso di s crescente. Dunque, se la direzione (tangente) di $\vec{u}_t$ è data unicamente dalle proprietà geometriche della curva della traiettoria, il verso dipende da come è stata definita l'orientazione dell'ascissa curvilinea.
La definizione (1-25) evidenzia anche che il versore tangente è la derivata del vettore posizione $\vec{r}$ rispetto all'ascissa curvilinea. Questo rende possibile scrivere il vettore velocità sulla base della velocità scalare definita sull'ascissa curvilinea stessa. Infatti, scrivendo $\vec{r}$ in funzione della coordinata s e sfruttando la legge di derivazione di funzione composta, abbiamo:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{r}\,(s(t)) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \frac{d\,s(t)}{dt} = \vec{u}_t \cdot \frac{ds}{dt} \tag{1-26}$$

e possiamo ottenere la cosiddetta *rappresentazione intrinseca* della velocità vettoriale:

$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{u}_t} \tag{1-27}$$

dove v è la velocità scalare istantanea. Si conferma ulteriormente la tangenza di $\vec{v}$ alla traiettoria. Si nota inoltre che il modulo del vettore velocità è pari al modulo della velocità scalare.[2]

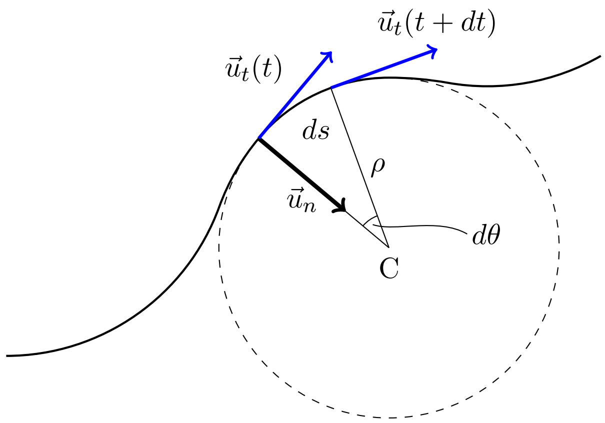
1.5 Scomposizione dell'accelerazione vettoriale

Partendo dalla eqrefeq:vIntrinseca e utilizzando la legge di derivazione del prodotto è possibile ricavare una scomposizione molto utile del vettore accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(v, \vec{u}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} \tag{1-28}$$

dove compare sia il versore tangente $\vec{u}_t$ sia la sua derivata temporale $\frac{d\vec{u}}{dt}$. Come già noto, in generale la derivata di un versore è ortogonale al versore stesso. Cerchiamo però di ricavare per $\frac{d\vec{u}}{dt}$ un'espressione appropriata per questo caso, ovvero funzione delle grandezze cinematiche e geometriche della traiettoria.
Valutiamo il versore tangente in due istanti di tempo separati da un intervallo infinitesimo dt: essi avranno direzione leggermente diversa e si troveranno in due punti della traiettoria separati di ds

[2] L'uguaglianza vale *in modulo*, infatti la velocità scalare è anche dotata di un segno, che descrive il verso del moto rispetto al verso positivo dell'ascissa curvilinea.



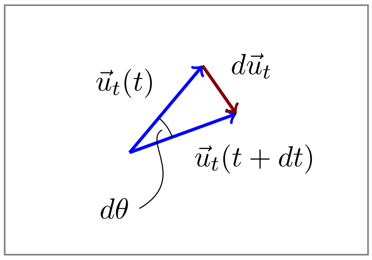


Figura 5: Un arco di traiettoria di lunghezza infinitesima ds è approssimato con un arco di circonferenza di raggio ρ (cerchio osculatore). L'arco infinitesimo è perciò di ampiezza $d\theta = ds/\rho$. La differenza infinitesima tra i versori tangenti agli estremi dell'arco è $d\vec{u}_t = d\theta\,\vec{u}_n = \frac{1}{\rho} ds\,\vec{u}_n$.

(vedi Fig. 5). Ora, due vettori distinti individuano un piano nello spazio su cui giacciono entrambi: possiamo tracciare su questo piano un cerchio di raggio ρ in modo che i due versori siano ad esso tangenti. Questo è detto *cerchio osculatore* e il piano su cui giace *piano osculatore*; il raggio ρ è detto anche *raggio di curvatura* della traiettoria in quel punto.
Il cerchio osculatore è una curva che approssima bene la traiettoria sull'arco di lunghezza ds, con tanto maggiore accuratezza quanto più piccolo è ds, per cui è lecito scrivere:

$$ds = \rho\, d\theta \tag{1-29}$$

L'angolo $d\theta$ è anche l'angolo che separa le direzioni dei due versori $\vec{u}_\theta$, perciò (vedi il riquadro in Fig. 5):

$$d\vec{u}_t = d\theta\,\vec{u}_n = \frac{ds}{\rho}\,\vec{u}_n \tag{1-30}$$

dove abbiamo definito il **versore normale** $\vec{u}_n$ come un versore *ortogonale alla traiettoria, diretto lungo il raggio del cerchio osculatore e orientato verso il suo centro*. Dividendo la (1-30) per dt ricaviamo la derivata del versore tangente che stavamo cercando:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\,\vec{u}_n = \frac{1}{\rho}\,v\,\vec{u}_n \tag{1-31}$$

Sostituendo quindi il risultato ottenuto nella (1-28):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{1-32}$$

In conclusione, il vettore accelerazione può essere scomposto in due componenti ortogonali tra loro $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_n$, rispettivamente tangente e normale alla traiettoria:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n} \tag{1-33}$$

$$\vec{a}_t = a_t\vec{u}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t \qquad\qquad \vec{a}_n = a_n\vec{u}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{1-34}$$

Il modulo del vettore accelerazione si può allora scrivere anche come:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{1-35}$$

Le due componenti hanno ruoli differenti. L'accelerazione tangenziale è responsabile unicamente delle *variazioni temporali del modulo del vettore velocità.* Essa infatti ha la parte scalare uguale a $\frac{dv}{dt}$, cioè all'*accelerazione scalare* (parte scalare che può essere positiva o negativa). D'altra parte, anche calcolando la derivata del modulo quadro di $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\vec{v}|^2 &= \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{a}\cdot\vec{v} = \\ &= 2\,(a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n)\,\cdot\, v\vec{u}_t = v\,a_t\,(\vec{u}_t\cdot\vec{u}_t) + v\,a_n(\vec{u}_n\cdot\vec{u}_t) = v\,a_t\end{aligned} \tag{1-36}$$

notiamo che non compare nel risultato la componente normale dell'accelerazione.
L'accelerazione normale $\vec{a}_n$ è responsabile invece dei *cambiamenti di direzione del vettore velocità.* Si può osservare che essa è nulla se la traiettoria è rettilinea, perché il cerchio osculatore avrebbe raggio $\rho \to \infty$. Al contrario se il moto è uniforme ($\frac{dv}{dt} = 0$ e quindi accelerazione tangenziale nulla) ma la traiettoria è curvilinea (ρ ha valore finito) l'accelerazione normale è non nulla.
Non deve stupire il fatto che si abbia accelerazione non nulla anche quando il *modulo* del vettore velocità non cambia. La derivata di un vettore *non coincide* con la derivata del suo modulo ed è un errore grave assimilarle.

2 Moti elementari

2.1 Moti con accelerazione uniforme

Se l'accelerazione vettoriale è costante e pari ad $\vec{a}$, si può procedere a ricavare il vettore velocità in funzione del tempo e l'equazione vettoriale del moto per integrazione applicando la (1-21) e la (1-22). Se in un istante assunto come "iniziale" il punto materiale si trova in posizione $\vec{r}_0$ con velocità $\vec{v}_0$, otteniamo:

$$\vec{v} = \vec{a}\,t + \vec{v}_0 \qquad\qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{2-1}$$

dove abbiamo assunto per semplicità $t_0 = 0$. Queste equazioni possono descrivere moti con traiettoria rettilinea oppure parabolica a seconda dei casi, come discutiamo qui di seguito.

Moto rettilineo uniforme

Il caso più semplice di moto in cui il vettore accelerazione è uniforme, ovvero costante nel tempo, è il caso in cui esso rimane uniformemente nullo ($\vec{a} = 0$). Si ottiene dalle (2-1):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \qquad\qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \tag{2-2}$$

Il vettore tangente alla traiettoria si mantiene uguale a se stesso lungo tutto il moto dal momento che $\vec{v} = v\vec{u}_t = \vec{v}_0$. La traiettoria seguita dal punto materiale è dunque una retta avente la direzione di $\vec{v}_0$ e passante per il punto identificato da $\vec{r}_0$; si parla di **moto rettilineo uniforme**.
Facendo riferimento a un appropriato sistema di coordinate cartesiane, in cui l'asse x coincide con la traiettoria seguita dal punto materiale e passa per $\vec{r}_0$, possiamo riscrivere l'equazione del moto come:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x = (x_0 + v_0 t)\,\vec{u}_x \tag{2-3}$$

La coordinata x è qui a tutti gli effetti l'ascissa curvilinea e la legge oraria può essere scritta come:

$$x = x_0 + v_0 t \tag{2-4}$$

dove x_0 è la coordinata del punto iniziale. Ritroviamo una equazione analoga alla (1-4) dimostrata nell'ambito della cinematica scalare.

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Consideriamo il caso in cui $\vec{a} \neq 0$ sia costante nel tempo e il vettore velocità iniziale $\vec{v}_0$ abbia la stessa direzione di $\vec{a}$ (con lo stesso verso oppure verso opposto). Anche in questo caso possiamo scegliere un sistema di coordinate cartesiane appropriato avente l'asse x orientato come la direzione comune di $\vec{v}$ ed $\vec{a}$ e passante per il punto iniziale. Si può scrivere allora $\vec{v} = v_x\vec{u}_x$ e $\vec{a} = a\vec{u}_x$ e le equazioni (2-1) diventano:

$$v\vec{u}_x = (at + v_0)\,\vec{u}_x \qquad\qquad x\vec{u}_x = \left(x + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right)\vec{u}_x \tag{2-5}$$

Il moto rimane confinato sull'asse x e può essere studiato tramite la sua proiezione su quest'asse, che lo descrive completamente. La legge oraria coincide con l'andamento nel tempo della coordinata x che può essere assimilata all'ascissa curvilinea.

$$v = at + v_0 \qquad\qquad x = x + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{2-6}$$

Si parla di **moto rettilineo uniformemente accelerato**.

Moto parabolico

Affrontiamo ora il caso più generale, in cui $\vec{a}$ e $\vec{v}_0$ hanno direzioni differenti. Geometricamente, si può sempre individuare un piano su cui giacciono entrambi questi vettori e passante per il punto $\vec{r}_0$. Si può definire un sistema di coordinate cartesiane in cui tale piano coincide con il piano xy e in particolare l'asse y è orientato come l'accelerazione $\vec{a}$. Si scrive allora:

$$\vec{a} = a\vec{u}_y \qquad \vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0y}\vec{u}_y \tag{2-7}$$

e le equazioni (2-1) diventano equivalenti alle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = at + v_{0y} \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_{0x}t + x_0 \\ y(t) = \dfrac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \tag{2-8}$$

La terza equazione di ciascun gruppo afferma semplicemente che *il moto rimane confinato sul piano xy*. Analizzando le altre due equazioni osserviamo che il moto si presenta come la *composizione* di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x e di un moto uniformemente accelerato sull'asse y.
Per ottenere l'equazione della traiettoria possiamo ricavare t dalla equazione per $x(t)$:

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 x}$$

e sostituirla nell'equazione per $y(t)$:

$$y = \frac{1}{2}\frac{a}{v_{0x}^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_{0x}}{v_{0y}}(x - x_0) + y_0 \tag{2-9}$$

Questa è l'equazione di una **parabola**, con asse parallelo a y.
Si può affermare quindi che il caso più generale di un moto in cui il vettore accelerazione rimane costante è un **moto parabolico**, che è di fatto la somma vettoriale, su due componenti ortogonali, di un moto uniformemente accelerato e di un moto rettilineo uniforme.
La rilevanza di questo caso è data dal fatto che esso descrive il **moto di caduta dei gravi**, cioè il moto dei corpi pesanti che cadono per l'effetto del loro peso, come avviene in prossimità della superficie terrestre. Infatti, si verifica sperimentalmente che tale moto è caratterizzato da un'accelerazione $\vec{g}$ costante rivolta verso il basso, detta *accelerazione di gravità*, in modulo pari a $|\vec{g}| = g = 9.81$ m/s^2.
Anche se lo studio delle cause sarà affrontato più avanti, dal punto di vista puramente cinematico il moto dei gravi può essere effettuato con gli strumenti sviluppati in questa sezione ed è approfondito nei Riquadri 3 e 4.

Riquadro 3 - Moto di un grave lanciato verso l'alto

Studiamo il moto di un corpo lanciato verso l'alto e soggetto all'accelerazione di gravità. Assumiamo un sistema di riferimento cartesiano con un asse y verticale, la cui origine è posta al livello del suolo. In tale sistema di riferimento l'accelerazione di gravità si scrive $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ e un corpo inizialmente posto ad altezza h rispetto al suolo avrà la coordinata iniziale $y_0 = h$. Se la velocità iniziale è diretta verticalmente $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$, dalle (2-8) risulta un moto rettilineo verticale, uniformemente accelerato verso il basso:

$$v_y = v_0 - gt \qquad y = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2-10}$$

Il caso particolare di partenza da fermo è incluso e si identifica con $v_0 = 0$.
Si possono ricavare dalla (2-10) diverse quantità di interesse. Ad esempio, si può ricavare il *tempo di caduta* t_{FALL}, risolvendo l'equazione della legge oraria in t per $y = 0$ e considerando solamente la soluzione positiva (l'equazione di secondo grado avrebbe di per sé due soluzioni, ma la soluzione che dà $t_{\mathrm{FALL}} < 0$ non ha significato fisico).

$$t_{\mathrm{FALL}} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \tag{2-11}$$

Se $v_0 = 0$, cioè il corpo cade partendo da fermo, si ha l'espressione particolarmente semplice $t_{\mathrm{FALL}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.
Si può anche calcolare l'*altezza massima* y_{MAX} raggiunta dal corpo lanciato verso l'alto. Per questo imponiamo $v_y = 0$ nella prima delle (2-10) e sostituiamo nella seconda il valore di t così ricavato. Infatti, nel punto più alto della traiettoria la velocità sta cambiando di segno da positiva (verso l'alto) a negativa (verso il basso), dunque per un istante essa diventa nulla.

$$t = \frac{v_0}{g} \qquad \rightarrow \qquad y_{\mathrm{MAX}} = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \tag{2-12}$$

Riquadro 4 - Moto del proiettile

Studiamo ora il moto di un grave avente velocità iniziale $\vec{v}_0$ non nulla ed orientata in direzione arbitraria. È il caso, ad esempio, di una palla verso un canestro, o di un proiettile sparato da un cannone. Possiamo impiegare un sistema di riferimento cartesiano con un asse x orizzontale e un asse x verticale. L'origine è posta a livello del suolo, sulla verticale del punto iniziale. Inoltre l'orientazione di x è scelta in modo che $\vec{v}_0$ giaccia sul piano xy.
Se la direzione di $\vec{v}_0$ descrive un angolo ϕ rispetto al suolo, possiamo scomporre il vettore $\vec{v}_0$ sugli assi x e y come segue:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0y}\vec{u}_x \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\varphi \\ v_{0y} = v_0 \sin\varphi \end{cases} \tag{2-13}$$

Per la descrizione completa del moto occorrerà considerare le equazioni sulle due dimensioni:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = -gt + v_{0y} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = h + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2-14}$$

Esse danno la traiettoria parabolica:

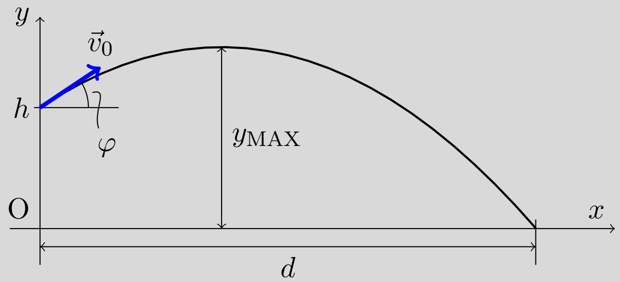
$$y = h + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 \tag{2-15}$$

Si ricava facilmente che per l'altezza massima raggiunta e per il tempo di caduta possono valgono formule analoghe alla (2-11) e alla (2-12):

$$t_{\text{FALL}} = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \qquad y_{\text{MAX}} = h + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} \tag{2-16}$$

dove è rilevante solo la componente verticale v_{0y} della velocità iniziale.
Possiamo anche calcolare la *gittata*, ovvero la distanza d percorsa lungo x prima che il grave al suolo, sostituendo in $x(t)$ il tempo t_{FALL}:

$$d = \frac{v_{0x}v_{0y} + v_{0x}\sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \tag{2-17}$$



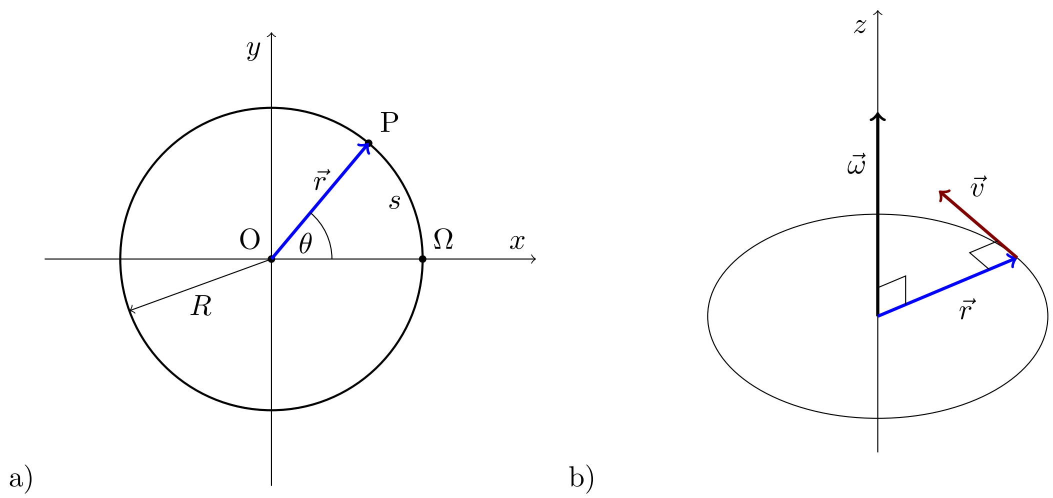


Figura 6: (a) Moto di un punto materiale su una traiettoria circolare: schema delle coordinate e del sistema di riferimento impiegati. (b) Relazione tra i vettori $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ e $\vec{v}$ in un moto circolare su un piano ortogonale all'asse z.

2.2 Moti circolari

Discutiamo in questa sezione alcune caratteristiche peculiari del moto di un punto materiale nel caso in cui *la traiettoria sia una circonferenza fissata* di raggio R come in Figura 6a. Scelta un'origine Ω per l'ascissa curvilinea e un verso di percorrenza, tale coordinata s sarà definita nell'intervallo $[0; 2\pi R)$. Vista la particolarità della traiettoria compiuta, esiste un'altra coordinata molto utile per descrivere la posizione del punto materiale, che è l'angolo:

$$\theta = \frac{s}{R} \tag{2-18}$$

Esso si definisce come l'angolo compreso tra il raggio spiccato da O e passante per l'origine Ω dell'ascissa curvilinea e il raggio passante per la posizione P del punto materiale. Tale coordinata θ è detta anche *anomalia*. In un moto circolare generico, l'anomalia è una funzione arbitraria del tempo $\theta(t)$. Conoscere la legge $\theta(t)$ è equivalente a conoscere la legge oraria $s(t)$, poiché possono essere trasformate l'una nell'altra tramite la (2-18).
Per studiare il moto ci si può anche riferire a un sistema di coordinate cartesiane con origine O posta nel centro della traiettoria circolare, ad esempio orientato in modo che: il piano xy coincida con il piano della circonferenza, Ω sia posta sull'asse x e la coordinata s appaia crescente in senso antiorario quando l'asse z è uscente dal piano (Fig. 6a). L'equazione vettoriale del moto si può allora scrivere come:

$$\vec{r}(t) = R\cos(\theta(t))\,\vec{u}_x + R\sin(\theta(t))\,\vec{u}_y \tag{2-19}$$

Il vettore velocità si può scrivere derivando rispetto al tempo ciascuna componente cartesiana, oppure nella sua rappresentazione intrinseca:

$$\vec{v}(t) = v\vec{u}_t = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_t \tag{2-20}$$

La derivata prima della funzione $\theta(t)$ è detta **velocità angolare**:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) \tag{2-21}$$

Misurando l'angolo in *radianti* (rad) la velocità angolare si misura in rad/s. In realtà è possibile definire la velocità angolare anche come un *vettore* $\vec{\omega}$, pari in modulo a $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$, diretto ortogonalmente

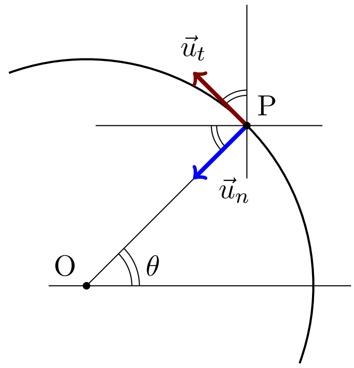


Figura 7: Disposizione dei versori tangente e normale alla traiettoria in un moto su una traiettoria circolare di centro O.

al piano della circonferenza e con verso uscente dal piano se il punto materiale è osservato procedere in senso antiorario. Nel sistema di riferimento di Fig. 6:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_z} \tag{2-22}$$

Con questa definizione, date le relazioni geometriche tra i diversi vettori coinvolti (vedi Fig. 6b), si può scrivere la velocità vettoriale come:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega R \vec{u}_t} \tag{2-23}$$

Moto circolare uniforme

In un moto circolare uniforme la velocità scalare $v(t) = v$ è costante nel tempo, da cui consegue:

$$v = \omega R = cost. \qquad \omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt} = cost. \qquad \theta = \omega t \tag{2-24}$$

La velocità vettoriale è espressa dalla (2-23) come nel caso generale.
È interessante valutare il vettore accelerazione, nelle sue componenti tangenziale e normale. Poiché la velocità scalare non varia nel tempo l'accelerazione tangenziale è nulla. Non è nulla invece l'accelerazione normale, che si può calcolare facilmente considerando che il cerchio osculatore coincide con la circonferenza stessa della traiettoria ($\rho = R$). Il vettore accelerazione si può scrivere allora come:

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \omega^2 R \vec{u}_n \tag{2-25}$$

Il versore normale $\vec{u}_n$ è diretto lungo il raggio della circonferenza, rivolto verso il centro (vedi Fig. 7); perciò, l'accelerazione è detta anche **accelerazione centripeta**. Le espressioni della velocità e dell'accelerazione, qui ricavate facendo riferimento alla discussione delle Sezioni 1.4 e 1.5, possono essere calcolate anche a partire dalla equazione del moto in coordinate cartesiane, come mostrato nel Riquadro 5.
Sottolineiamo ancora una volta che il vettore accelerazione *non coincide con l'accelerazione scalare.* Anche se la velocità scalare non varia nel tempo (e dunque l'accelerazione scalare è nulla e il moto è uniforme) il vettore velocità cambia nel tempo la sua direzione. L'accelerazione normale è responsabile proprio delle variazioni di direzione della velocità.
Analizziamo ora una caratteristica particolare del moto circolare uniforme, cioè la sua *periodicità.* In generale, un moto si dice *periodico* se ad istanti di tempo diversi, che differiscono di multipli interi di una quantità T detta **periodo**, si osserva la stessa posizione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t + mT) \tag{2-29}$$

Riquadro 5 - Moto circolare uniforme in coordinate cartesiane

Adottiamo il sistema di coordinate cartesiane già menzionato, in cui l'origine O coincide con il centro della circonferenza, la circonferenza giace sul piano xy e la coordinata θ misura l'angolo (antiorario) rispetto all'asse x. La legge oraria di un moto circolare uniforme con velocità angolare ω si scrive:

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\vec{u}_x + R\sin(\omega t)\,\vec{u}_y \tag{2-26}$$

Osserviamo ora che in questo sistema di riferimento i vettori tangente e normale alla circonferenza, in funzione di θ si scrivono:

$$\vec{u}_t = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \qquad\qquad \vec{u}_n = -\cos\theta\,\vec{u}_x - \sin\theta\,\vec{u}_y \tag{2-27}$$

Tali relazioni valgono chiaramente per qualsiasi moto circolare, anche non uniforme.
Derivando rispetto al tempo la (2-26) si ricava facilmente:

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = -\omega R\sin(\omega t)\vec{u}_x + \omega R\cos(\omega t)\vec{u}_y = v\vec{u}_t \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\vec{u}_x - \omega^2 R\cos(\omega t)\vec{u}_y = \omega^2 R\vec{u}_n = -\omega^2\vec{r} \end{cases} \tag{2-28}$$

Nel caso del moto circolare, constatiamo che una stessa posizione $\vec{r}$ sulla traiettoria è identificata da angoli che differiscono di multipli di 2π:

$$\vec{r}(\theta) = \vec{r}(\theta + 2m\pi) \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{2-30}$$

Se il moto è anche *uniforme*, essendo costante la velocità angolare ed essendo $\theta = \omega t$:

$$\vec{r}(\omega t) = \vec{r}(\omega t + 2m\pi) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}(\omega t) = \vec{r}\left(\omega\left(t + m\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) \tag{2-31}$$

Questa relazione mostra che per istanti di tempo t che differiscono di $m\frac{2\pi}{\omega}$ la posizione sulla traiettoria è la stessa. Il periodo del moto circolare uniforme è dunque proprio:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{2-32}$$

Per i moti periodici si può definire anche la **frequenza**, come inverso del periodo, che in questo caso vale:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2-33}$$

Nel Sistema Internazionale il periodo si misura in secondi (essendo una misura di tempo). L'unità di misura della frequenza è invece l'inverso del secondo, che prende il nome di Hertz: 1 Hz = 1 s^{-1}.

Moto circolare non uniforme

In un moto circolare non uniforme la velocità scalare e la velocità angolare non rimangono costanti nel tempo. Nel caso più generale non è un moto periodico (potrà esserlo solo in casi molto particolari). In generale, si può definire un vettore **accelerazione angolare**:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{2-34}$$

Se il piano xy della traiettoria non varia nel tempo, ovvero $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{u}_z$, si può scrivere l'accelerazione angolare anche come:

$$\vec{\alpha}(t) = \alpha(t)\,\vec{u}_z \qquad\qquad \alpha(t) = \frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{d^2}{dt^2}\theta(t) \tag{2-35}$$

L'unità di misura dell'accelerazione angolare è il rad/s^2. Nel moto circolare non uniforme saranno non nulle, in generale, sia l'accelerazione tangenziale sia l'accelerazione normale, che varranno:

$$\vec{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2}\,\vec{u}_t = R\frac{d^2 s}{dt^2}\,\vec{u}_t = \alpha R\,\vec{u}_t \tag{2-36}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_n = \omega^2 R\,\vec{u}_n \tag{2-37}$$

Tali componenti possono essere scritte in una forma vettoriale elegante derivando la (2-23):

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v} = \\ &= \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}_{\vec{a}_n}\end{aligned} \tag{2-38}$$

Ragionando sulle relazioni di ortogonalità tra i vettori non è difficile dimostrare che:

$$\vec{\alpha}\times\vec{r} = \alpha R\vec{u}_t \qquad\qquad \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \omega^2 R\vec{u}_n \tag{2-39}$$

Nel caso particolare in cui l'accelerazione angolare α si mantenga costante nel tempo si parla di **moto circolare uniformemente accelerato** e la funzione $\theta(t)$ si può ricavare esplicitamente per integrazione:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \tag{2-40}$$

dove ω_0 e θ_0 sono rispettivamente la velocità e la posizione angolare nell'istante $t = 0$. Nel caso generale $\theta(t)$ sarà una funzione qualsiasi.

2.3 Moto oscillatorio armonico

Un tipo di moto che si ritrova in Fisica in numerose situazioni, dalle piccole oscillazioni di un pendolo meccanico alle vibrazioni di una corda di chitarra, è il **moto oscillatorio armonico**. Si tratta di un moto avente una *legge oraria sinusoidale su una traiettoria rettilinea.* Tale legge oraria è dunque della forma:

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)} \tag{2-41}$$

I vari parametri nell'equazione hanno nomi specifici: A è l'*ampiezza di oscillazione* o *elongazione*, ω_0 è la *pulsazione*, l'argomento del coseno $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ è la *fase*, φ_0 è la *fase iniziale* (cioè la fase all'istante $t = 0$).
Il moto armonico è *periodico*, cioè $x(t) = x(t + mT)$ per ogni m intero, con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{2-42}$$

Si definisce anche la frequenza:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{2-43}$$

Velocità e accelerazione si ricavano derivando la (2-41):

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -A\omega_0\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \tag{2-44}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -A\omega_0^2\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \tag{2-45}$$

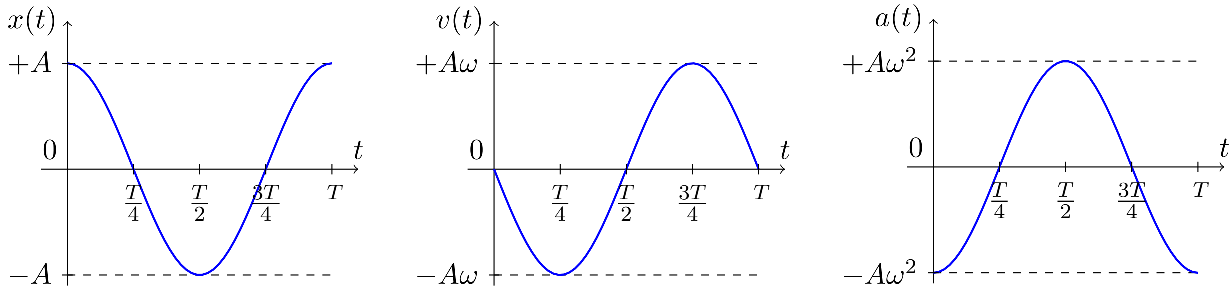


Figura 8: Posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo, per un moto armonico descritto dalla legge oraria (2-41) con $\varphi_0 = 0$.

Si può osservare che accelerazione, velocità e posizione seguono tutte leggi sinusoidali, sfasate di $\pi/2$ l'una rispetto all'altra, come visibile nei grafici in Fig. 8. Tra la posizione $x(t)$ e l'accelerazione $a(t)$ vale l'importante relazione:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0} \tag{2-46}$$

Essa è l'equazione differenziale[3] caratteristica del moto armonico.
È utile sottolineare che, data la nota relazione trigonometrica $\cos\varphi = \sin(\varphi - \frac{\pi}{2})$, la legge oraria di uno stesso moto armonico può essere scritta indifferentemente con una funzione coseno o una funzione seno, a patto di adattare la fase iniziale $\varphi' = \varphi - \pi/2$.
Rileggendo infine le equazioni (2-26), si può notare che un moto circolare uniforme può essere visto come composizione di due moti armonici su assi ortogonali con la stessa ampiezza e pulsazione, sfasati di $\pi/2$. Il moto armonico, a sua volta, potrebbe essere visto come la proiezione su un asse rettilineo di un moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega = \omega_0$.

[3]Cioè, un'equazione che mette in relazione derivate diverse di una stessa funzione, eventualmente anche con la funzione stessa.

3 I Principi della Dinamica

3.1 Interazioni e forze

Il fatto che i corpi interagiscano tra di loro o con l'ambiente che li circonda, in diversi modi, è ben noto da numerosi esempi tratti dall'esperienza quotidiana. Ad esempio, il contatto di un corpo in velocità con un altro fermo può provocare il movimento anche di quest'ultimo, oppure deformazioni di uno o di entrambi. Sotto l'azione delle braccia dell'arciere, un arco da tiro si deforma e, nel suo ritornare rapidamente alla forma iniziale, può fare accelerare una freccia fino a grande velocità. Infine, osserviamo come tutti i corpi sulla Terra siano attratti verso il basso da un'interazione che chiamiamo gravità.

L'azione meccanica che un corpo svolge su un altro è descritta in Fisica con una grandezza detta **forza**. Cominciamo ad inquadrarne alcuni aspetti, analizzando con attenzione gli esempi discussi poco sopra. Riguardo ai possibili effetti, possiamo osservare che una forza può *modificare lo stato di moto di un corpo* oppure, soprattutto nel caso di corpi vincolati che non possono muoversi, *provocare deformazioni* del corpo stesso. Riguardo alla modalità di azione, possiamo dire che esistono *forze di contatto*, che agiscono quando due corpi si toccano, e *forze a distanza* che agiscono senza un contatto fisico tra i due corpi.

Quanto detto non costituisce ancora una definizione appropriata di forza. Una grandezza fisica deve infatti essere sempre definita in modo operativo, ovvero stabilendo una procedura che permetta di misurarla. Possiamo allora pensare di misurare le forze tramite i loro *effetti statici*, ovvero tramite la misura della deformazione che provocano su corpo prescelto, detto **dinamometro**. Un dinamometro è essenzialmente una molla, che può essere agganciata ad altri oggetti ai due estremi. Essa è inserita in un involucro graduato così che può essere letto senza difficoltà il suo allungamento (Figura 9a).

Per stabilire una procedura di misura, occorre anzitutto stabilire un criterio di uguaglianza e di confronto tra grandezze. Possiamo perciò definire *uguali* forze che provocano lo stesso allungamento del dinamometro e possiamo definire *maggiore* di un'altra una forza che provoca un allungamento maggiore del dinamometro.

Il dinamometro può essere quindi calibrato adottando un'opportuna unità di misura. Per effettuare la calibrazione in modo accurato è conveniente sfruttare una *forza campione* che sia facilmente controllabile dallo sperimentatore. Possiamo sfruttare, per questo, la forza di gravità (Figura 9b), procedendo nel modo seguente.

Fissiamo il dinamometro a un gancio, in modo che si possa allungare liberamente verso il basso, quando vi appendiamo dei corpi pesanti. Stabiliamo un campione fondamentale, ad esempio un cilindretto metallico: l'allungamento misurato appendendo al dinamometro tale campione corrisponderà ad *una unità di forza*. Possiamo individuare quindi due cilindretti metallici che provocano lo stesso allungamento, quando appesi individualmente. L'allungamento del dinamometro misurato quando i due cilindretti sono appesi *insieme* corrisponde a *due unità di forza*.[4] Possiamo quindi procedere con tre o più cilindri uguali e calibrare così l'intera scala graduata. Ora potremo utilizzare il dinamometro per misurare anche forze di altro tipo (non solo quella di gravità), sulla base della scala stabilita.

Tramite il dinamometro possiamo poi verificare che **le forze si comportano come vettori**. Per prima cosa, possiamo mostrare sperimentalmente che, oltre ad avere un *modulo* indicato dall'allungamento del dinamometro stesso, una forza è dotata di *direzione* e *verso*. Infatti, se il dinamometro è *molto leggero* ed è agganciato a un vincolo attorno a cui può liberamente ruotare, applicando diversi tipi di forze il dinamometro si disporrà su direzioni diverse. Data una forza applicata, possiamo identificare la direzione della forza con la direzione lungo cui si dispone il dinamometro e il verso con il verso di allungamento (Figura 10).

Utilizzando funicelle e carrucole, possiamo compiere esperimenti più elaborati (Figura 11a). Verifichiamo che un dinamometro si allunga in modo uguale se un peso è applicato direttamente o con

[4] Notiamo che in questo modo stiamo anche *definendo* l'operazione di somma tra forze, dicendo che appendendo due cilindri stiamo applicando al dinamometro la somma delle loro forze di attrazione verso il basso. Notiamo inoltre che non è necessario che, appendendo due cilindri uguali, l'allungamento sia *doppio* rispetto al caso di un solo cilindro appeso.

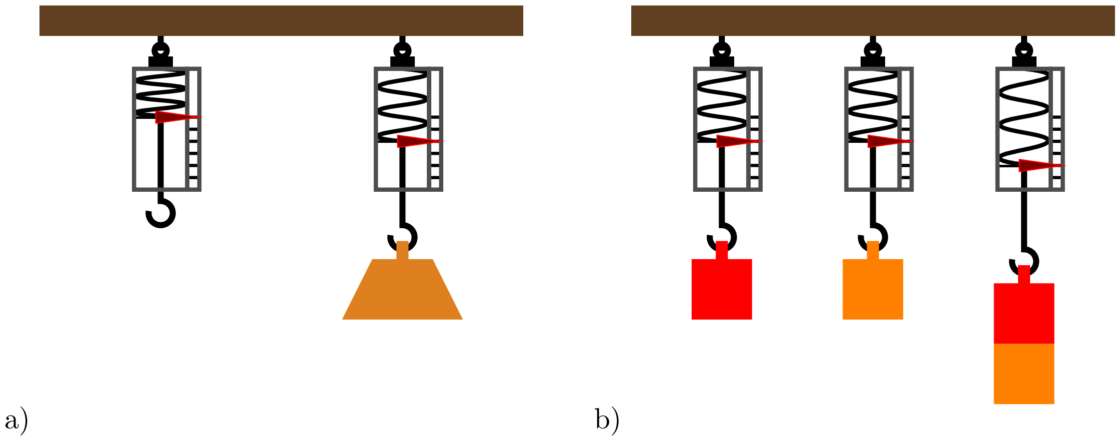


Figura 9: (a) Definiamo operativamente la forza tramite l'uso di un dinamometro. Appendendo all'estremo libero di un dinamometro un corpo pesante (soggetto, cioè, all'attrazione verso il basso che chiamiamo gravità) esso ne provoca l'allungamento. La misura dell'allungamento su una scala graduata e appropriatamente calibrata corrisponde alla misura della forza agente sul dinamometro. (b) La calibrazione della scala graduata può essere operata sperimentalmente. Si può scegliere un'unità campione e sul corrispettivo allungamento marcare la tacca '1'. Per marcare la tacca '2' si può identificare un oggetto che produca lo stesso allungamento (cioè la stessa forza) della prima unità campione, e quindi appendere insieme i due oggetti allo stesso dinamometro. Procedendo in modo analogo è possibile costruire tutta la scala.

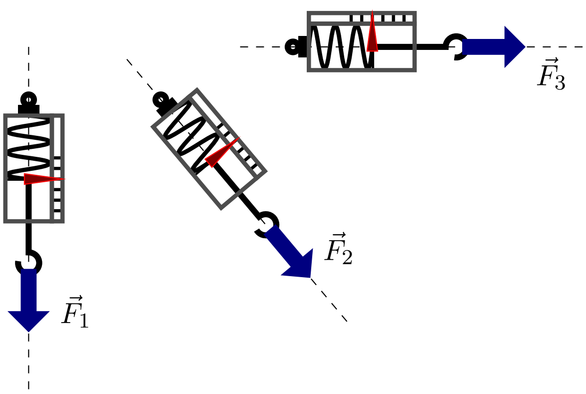


Figura 10: Il dinamometro permette di evidenziare le caratteristiche vettoriali di una forza $\vec{F}$ ad esso applicata. L'allungamento, letto sulla scala graduata, ne misura il modulo. Se il dinamometro è molto leggero e vincolato a un punto fisso, la direzione su cui si dispone e il verso di allungamento indicano la direzione ed il verso di $\vec{F}$.

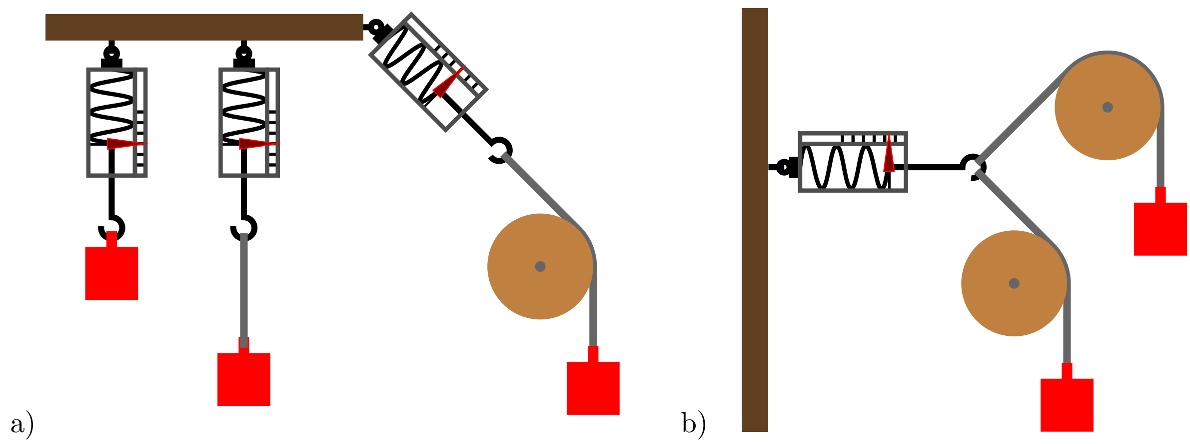


Figura 11: (a) Il dinamometro presenta lo stesso allungamento se un peso è applicato all'estremo libero direttamente, oppure se è connesso ad esso tramite una funicella molto leggera. La funicella dunque permette di trasmettere la forza mantenendone inalterato il modulo. L'allungamento non cambia anche se facciamo passare la funicella su una carrucola: a seconda della configurazione del sistema può cambiare però l'inclinazione del dinamometro. Perciò, funicelle e carrucole propriamente disposte possono essere impiegate per applicare forze di modulo noto con direzioni arbitrariamente scelte. (b) Impiegando funicelle e carrucole possiamo applicare più forze allo stesso dinamometro, controllandone modulo, direzione e verso. Si può verificare con esperimenti analogo a quello qui raffigurato che le forze si sommano secondo la regola del parallelogramma.

l'interposizione di una funicella (se questa è molto leggera). Ancora, osserviamo che il dinamometro si allunga allo stesso modo (anche se in direzioni diverse) se facciamo passare la funicella attraverso una carrucola, vincolata in posizioni diverse. Possiamo così concludere che la funicella *trasmette una forza mantenendone inalterato il modulo*, ma potendone mutare la direzione. Una fune infatti esercita sempre una forza di trazione orientata come la retta tangente al suo tratto terminale. Con esperimenti analoghi a quello mostrato in Figura 11b, possiamo infine osservare che *le forze si sommano secondo la regola del parallelogramma*. Definiamo in particolare **forza risultante** la somma vettoriale di più forze applicate a uno stesso punto materiale:

$$\vec{F}_{ris} = \sum_i \vec{F}_i \tag{3-1}$$

Concludiamo, perciò che le forze possono essere considerate, a pieno titolo, delle grandezze vettoriali.

3.2 Osservazioni sulla dinamica dei corpi

Avendo definito la grandezza fisica *forza*, cerchiamo ora di comprendere come l'azione di una forza sia legata al moto di un corpo a cui essa è applicata. È questo infatti lo scopo della Dinamica. Non si tratta di un ragionamento da condurre in astratto, ma si tratta di osservare *criticamente* la realtà sperimentale e cercare di trarre da essa delle leggi da sottoporre poi a verifica.

Anzitutto, possiamo chiederci *se la presenza di una forza sia in ogni caso necessaria per sostenere il movimento di un corpo*. Occorre procedere con grande attenzione, perché un approccio superficiale al problema ci potrebbe facilmente condurre in errore. Per esempio, quotidianamente osserviamo che un qualsiasi oggetto che spingiamo o tiriamo, che lanciamo, o che facciamo rotolare o scivolare, prima o poi inesorabilmente si ferma. Per questo, potremmo essere indotti (erroneamente, come si vedrà) a pensare che per mantenere un corpo in movimento occorra sempre l'azione di una forza.

Seguiamo l'interessante ragionamento che Galileo Galilei espone nel suo *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* pubblicato nel 1632. Egli considera una palla che rotola su piani inclinati con angoli diversi, ma avverte di volersi porre in un caso di attriti minimi o idealmente nulli. Considera infatti "una palla perfettissimamente rotonda ed un piano esquisitamente pulito, per rimuover tutti

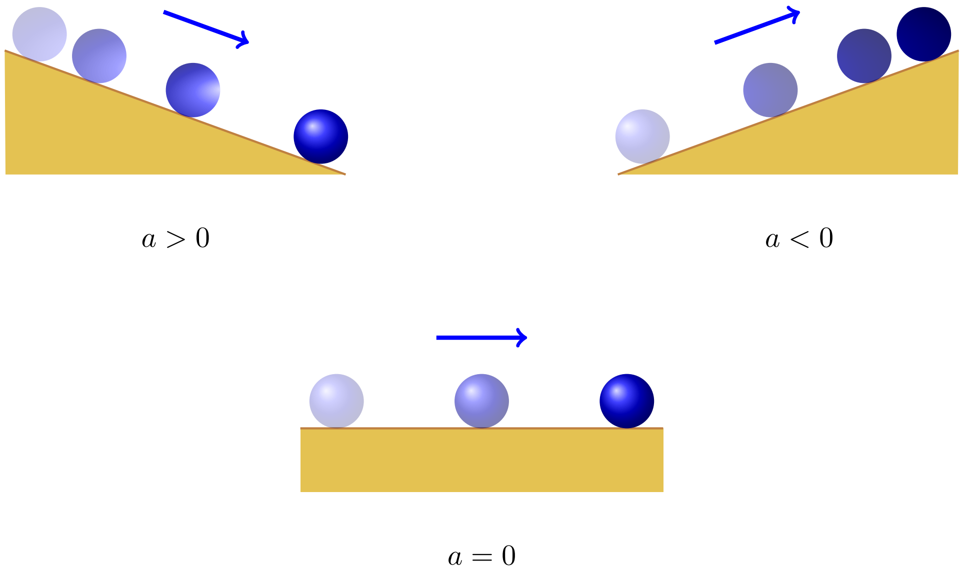


Figura 12: L'esperienza ci mostra che una palla sferica, lanciata con una certa velocità iniziale su un piano inclinato, tenderà ad accelerare ulteriormente se il piano è inclinato verso il basso e a rallentare se il piano è inclinato verso l'alto. È lecito ipotizzare che, nel caso ideale di assenza di ogni attrito, su un piano perfettamente orizzontale la palla non acceleri né rallenti, ovvero conservi immutata la sua velocità.

gli impedimenti esterni ed accidentarii"; inoltre, vuole trascurare l'"impedimento dell'aria, mediante la sua resistenza all'essere aperta, e tutti gli altri ostacoli accidentarii, se altri ve ne potessero essere."

Se il piano è inclinato verso il basso, una palla inizialmente ferma comincerà a rotolare e una palla già in movimento in quella direzione aumenterà la sua velocità. Se il piano è inclinato verso l'alto, una palla inizialmente ferma comincerà a rotolare nel verso opposto al caso precedente e una palla già in movimento verso l'alto (perché lanciata a forza in quella direzione) tenderà a rallentare. Se ora consideriamo angoli sempre più piccoli di inclinazione (verso l'alto o verso il basso), osserveremo qualitativamente gli stessi fenomeni appena descritti. Solamente, l'accelerazione o la decelerazione saranno sempre minori.

Cosa accadrà ora a una palla posta, inizialmente ferma, su un piano perfettamente orizzontale? È ragionevole che essa rimanga in quiete. Si può quindi pensare che la palla sia soggetta a una forza risultante non nulla nel caso dei piani inclinati e a una forza risultante nulla se si trova su un piano orizzontale.

E se invece la palla posata sul piano orizzontale fosse inizialmente in movimento? Il piano perfettamente orizzontale può essere considerato come la situazione intermedia e di connessione tra le due inclinazioni, verso l'alto e verso il basso. L'unico modo di collegare con continuità le due situazioni considerate è che la palla non aumenti né diminuisca la sua velocità, visto che il piano non è né ascendente né discendente. A questo punto, appare ragionevole formulare la seguente ipotesi, anche se potrebbe apparire controintuitiva: che in assenza di asperità del piano o resistenza dell'aria o altri ostacoli, *il moto continui indefinitamente anche se la forza risultante è nulla.*

Più in generale possiamo ipotizzare *che non sia necessaria una forza per sostenere il moto, ma solo per cambiarlo, ovvero per cambiare la velocità di un corpo.* Il fatto che i corpi lanciati su un piano, di fatto, prima o poi si fermino, non è in contraddizione con questa ipotesi: a rallentare i corpi non è null'altro che l'azione di altre forze, quali le forze di attrito con il piano stesso o l'aria.

Un'analisi sperimentale più accurata e quantitativa porta a evidenziare una *proporzionalità diretta* tra la forza applicata (definita e misurata come nella Sezione 3.1) e l'*accelerazione* del corpo stesso. La prima visione chiara dell'esistenza di questa proporzionalità è attribuita a Isaac Newton, che così

scrisse nel suo trattato *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (I principi matematici della Filosofia Naturale, pubblicato nel 1687):
"Se una data forza produce un certo moto, una forza doppia ne produrrà uno doppio, una forza tripla uno triplo [...] E questo moto, poiché ha sempre la stessa direzione della forza generatrice, se il corpo era già in movimento andrà a sommarsi al moto precedente se è concorde, oppure si sottrarrà se è contrario, oppure ancora si aggiungerà obliquamente se hanno direzioni diverse e si comporrà dunque con questo a seconda delle direzioni di entrambi."
Un'altra interessante osservazione a partire dalla realtà sperimentale può essere poi la seguente. Laddove individuiamo un'interazione tra due corpi, troviamo sempre la presenza di *due* forze: una che agisce sul primo dei due corpi e una che agisce sull'altro. Sempre dalle parole di Newton:
"Un corpo che spinge o tira un altro corpo, altrettanto da quest'ultimo è spinto o tirato. Se uno spinge una pietra con un dito, anche il suo dito è spinto dalla pietra. Se un cavallo tira una pietra, legata con fune, anche il cavallo è tratto indietro verso la fune in modo eguale. Infatti la fune, tesa verso entrambe le parti, tramite la sua stessa tendenza a rilassarsi incalzerà il cavallo verso la pietra e la pietra verso il cavallo. Impedirà l'avanzare dell'uno tanto quanto sarà causa dell'avanzamento dell'altro."

3.3 I tre Principi della Dinamica Newtoniana

Tutte le considerazioni sulla dinamica dei corpi, discusse nella Sezione 3.2 possono essere condensate in tre Leggi fondamentali, che proprio Isaac Newton per primo formulò all'interno del trattato già citato *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.
Queste Leggi possono essere assunte come Principi, cioè proposizioni non dedotte matematicamente da altre, ma formulate per induzione dall'osservazione della realtà. È opportuno comunque sottolineare che il valore di questi Principi non è dato dalla bontà del ragionamento che ha portato a enunciarli (come può essere la discussione della Sezione 3.2) bensì dal fatto che le loro conseguenze, ovvero tutta la teoria della Meccanica che da essi si sviluppa, è soggetta a rigorosa verifica sperimentale.

I Principi della Dinamica

I Principio Un punto materiale non soggetto a forze persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, in un sistema di riferimento inerziale.

II Principio Un punto materiale soggetto, in un dato istante, a una forza risultante $\vec{f}$ possiede in quello stesso istante un'accelerazione $\vec{a}$ tale che:

$$\vec{f} = m\vec{a} \tag{3-2}$$

dove m è la massa del corpo.

III Principio Ad ogni forza $\vec{f}_{12}$ applicata a un punto materiale 1 in virtù dell'interazione con un punto materiale 2, ne corrisponde un'altra $\vec{f}_{21}$ uguale in modulo e direzione ma opposta in verso, detta *reazione*, applicata all'altro corpo con cui il primo sta interagendo.

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} \tag{3-3}$$

Un primo contenuto importante del Primo Principio è l'individuazione di una sorta di *stato naturale* dei corpi, in assenza di qualsiasi interazione con altri corpi, ovvero in assenza di forze. Tale stato spontaneo, a dispetto dell'intuito comune e di quanto si insegnava nella fisica aristotelica, non è lo stato di quiete assoluta, bensì lo stato di *moto rettilineo uniforme*. In effetti, lo stato di quiete può essere visto come un caso limite di moto rettilineo uniforme a velocità nulla. Il Primo Principio è

detto anche **Principio d'Inerzia**: *inerzia* indica infatti la tendenza di un corpo a *non mutare* il suo stato di moto.
Un aspetto altrettanto importante del Primo Principio è sottolineato dalla specificazione "in un sistema di riferimento inerziale". Infatti, è ben noto che il moto osservato di un corpo *dipende dal sistema di riferimento adottato.* Per esempio, se osserviamo il mondo da una giostra in rotazione, tutto sembrerà in qualche modo ruotare rispetto a noi: un moto ben diverso dal moto rettilineo uniforme! Appariranno ruotare anche corpi sufficientemente isolati o soggetti a forze risultanti nulle, quindi i Principi di Newton *non sono validi* in questo sistema di riferimento!
Affinché i Principi di Newton siano validi *è necessario individuare un sistema di riferimento adeguato.* In molti casi, l'esperienza mostra che può essere appropriato un sistema di riferimento solidale con il suolo terrestre. In realtà, con misure molto precise si potrebbero rendere evidenti gli effetti della rotazione terrestre, che danno conseguenze simili all'osservazione da una giostra. Un sistema di riferimento che può essere valido per la maggioranza delle applicazioni è allora un sistema di riferimento solidale con le stelle lontane (*sistema di riferimento delle stelle fisse*). Un sistema di riferimento in cui sia valido il Primo Principio della Dinamica è detto, per definizione, **sistema di riferimento inerziale. Il Primo Principio, postula l'esistenza di almeno un sistema di riferimento siffatto** e potrebbe essere riscritto come segue:

> *Esiste almeno un sistema di riferimento, detto* inerziale*, in cui un punto materiale non soggetto a forze persevera in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Sempre la Prima Legge ci fornisce indicazioni su come impostare il **problema statico** del punto materiale: molto semplicemente, se sappiamo o vogliamo imporre che un punto materiale si mantenga fermo ($\vec{a} = 0$ e $\vec{v} = 0$), la risultante delle forze ad esso applicate deve essere nulla.

$$\vec{a} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F}_{ris} = 0 \tag{3-4}$$

Il Secondo Principio fornisce quindi una relazione quantitativa tra la forza applicata ad un corpo e la sua accelerazione. Per non incorrere in errori occorre sempre ricordare la natura *vettoriale* di questa relazione. Come ogni relazione vettoriale, se conveniente per la soluzione dei problemi essa può essere riscritta come tre relazioni scalari, per mezzo delle sue proiezioni su assi cartesiani opportuni:

$$F_x = ma_x \qquad\qquad F_y = ma_y \qquad\qquad F_z = ma_z \tag{3-5}$$

Dalla conoscenza delle forze applicate in ogni istante di tempo, il Secondo Principio permette di ricavare l'accelerazione $\vec{a}(t)$ del punto materiale. Ora, per un punto materiale di cui sia noto lo stato iniziale, tramite le leggi della Cinematica è possibile ricavare sia la velocità $\vec{v}(t)$ che la posizione $\vec{r}(t)$ in ogni istante di tempo, a partire dalla conoscenza della sola $\vec{a}(t)$. Perciò, **il Secondo Principio è una legge di Natura estremamente potente perché afferma che tutto ciò che riguarda il movimento di un corpo è determinato univocamente dalle forze ad esso applicate.**
Se conosciamo bene le forze applicate possiamo conoscere completamente il moto del punto materiale. Nei casi più semplici, ad esempio in molti degli esercizi ed esempi svolti in questo corso, l'equazione vettoriale del moto potrà essere ricavata analiticamente con "carta e penna". In casi più complessi, dove entrano in gioco forze diverse, che variano nel tempo o nello spazio, $\vec{r}(t)$ o $\vec{v}(t)$ possono essere ricavate in modo approssimato con gli strumenti del calcolo numerico e l'ausilio di un calcolatore elettronico.
La relazione (3-2) può essere impiegata per stabilire quali siano le forze applicate a un punto materiale, se è noto il suo moto e la sua massa. Per esempio, osservando un punto muoversi di moto uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a} = cost.$, potremo dedurre che su di esso deve necessariamente agire una forza risultante $\vec{f} = m\vec{a} = cost.$. Se invece osserviamo un moto circolare uniforme, potremo ricordare che a tale moto è associata una accelerazione centripeta $\vec{a} = -\omega^2 R\vec{u}_r$ (dove R è il raggio della traiettoria circolare e ω la velocità angolare) in modulo costante e diretta verso il centro della tra-

iettoria; dedurremo allora che sul punto materiale agisce una forza con la forma $\vec{f} = m\vec{a} = -m\omega^2 R\vec{u}_r$. Si parla in quest'ultimo caso di *forza centripeta*.[5]
Da quanto detto, risulta che il Secondo Principio della Dinamica può essere impiegato per ottenere una **misura dinamica di una forza**, cioè per misurare la forza agente su un punto materiale di massa nota, a partire dalla misura della sua accelerazione. Si tratta di una misura diversa da quella *statica* operata con il dinamometro, utile quando la forza in gioco non è misurabile direttamente. Infine, sempre tramite la (3-2) si può definire la forza come grandezza derivata, come lo è nel Sistema Internazionale, scrivendo la'equazione dimensionale:

$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{M}] \cdot [\mathrm{a}] = [\mathrm{M}] \cdot [\mathrm{L}] \cdot [\mathrm{T}]^{-2} \tag{3-6}$$

L'unità di misura della forza, nel Sistema Internazionale, è il **newton** (simbolo N):

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}} \tag{3-7}$$

Il Terzo Principio, infine, insegna un fatto fondamentale sulla Fisica delle forze. **Le forze nascono sempre da interazioni tra due (o più) corpi: le forze perciò non esistono mai da sole.** Se su un corpo agisce una forza allora, su un altro corpo con cui questo sta interagendo, deve agire necessariamente una forza uguale in modulo e direzione alla prima, ma opposta in verso.
Può essere utile fare alcune precisazioni, soprattutto per evitare errori di comprensione. Anzitutto, anche se il termine *reazione* è impiegato talvolta, nel linguaggio quotidiano, per indicare un fenomeno conseguente a una prima *azione*, è opportuno chiarire che le due forze di cui tratta il Terzo Principio *non sono* l'una conseguenza dell'altra. $\vec{f}_{12}$ e $\vec{f}_{21}$ sono entrambi, a pari merito, le manifestazioni dell'interazione reciproca che avviene tra i due corpi.
Un altro errore che è importante evitare è quello di considerare azione e reazione applicate allo stesso punto materiale. Azione e reazione, invece, *sono applicate a corpi diversi* e perciò *non si bilanciano mai*.

3.4 La quantità di moto

Per una trattazione fisica più completa della Dinamica dei punti materiali e in particolare, come vedremo, della Dinamica dei Sistemi di più punti materiali, è utile introdurre una grandezza vettoriale detta **quantità di moto**. Essa è definita come il prodotto della *massa* per il *vettore velocità*.

Quantità di moto

La *quantità di moto* di un punto materiale di massa m avente velocità istantanea $\vec{v}$ è definita come:

$$\boxed{\vec{q} = m\vec{v}} \tag{3-8}$$

Si definisce inoltre l'**impulso** di una forza $\vec{f}$ come integrale di tale forza su un dato intervallo di tempo.

Impulso

Si definisce $\vec{J}$ impulso di una forza $\vec{f}$, nell'intervallo di tempo tra t e $t + \Delta t$, la quantità vettoriale:

$$\boxed{\vec{J} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}\, dt} \tag{3-9}$$

[5] Sottolineiamo che dire che un corpo è sottoposto a una *forza centripeta* non dice nulla su quale sia l'origine fisica di questa forza, ma dice soltanto che, poiché il moto osservato è circolare, la forza deve soddisfare (anche) la relazione $\vec{a} = -\omega^2 R\vec{u}_r$. A seconda dei casi e delle situazioni, forze di natura diversa possono svolgere questo ruolo. Ad esempio, per un satellite che ruota su un orbita circolare la forza che gioca il ruolo di forza centripeta è la forza di gravità; per un'automobile che compie una traiettoria circolare, la forza centripeta sarà l'attrito statico delle ruote sull'asfalto.

Per quest'ultima grandezza si dimostra facilmente il **Teorema dell'impulso**:

> *L'azione di una forza $\vec{f}$ su un punto materiale, in un dato intervallo di tempo tra t e $t + \Delta t$, determina una variazione di quantità di moto pari all'impulso della forza stessa in quell'intervallo di tempo.*
>
> $$\boxed{\Delta\vec{q} = \vec{J}} \tag{3-10}$$

Infatti:

$$\vec{J} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}\,dt = \int_t^{t+\Delta t} \frac{d\vec{q}}{dt}\,dt = \vec{q}(t+\Delta t) - \vec{q}(t) = \Delta q \tag{3-11}$$

Come menzionato, le proprietà più interessanti della quantità di moto emergeranno soprattutto nella trattazione dei sistemi di punti materiali. Possiamo cominciare qui ad osservare che i primi due Principi della Dinamica possono essere riscritti in relazione a questa quantità. Per un singolo punto materiale di massa m fissata il Primo Principio diventa:

> *I) Un punto materiale non soggetto a forze mantiene costante la sua quantità di moto, in un sistema di riferimento inerziale.*

Inoltre, se m costante:

$$\frac{d\,\vec{q}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(m\vec{v}) = m\frac{d\,\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{3-12}$$

per cui possiamo riscrivere il Secondo Principio della Dinamica come:

> *II) Un punto materiale soggetto in dato istante a una forza risultante $\vec{f}$ subisce una variazione di quantità tale che:*
>
> $$\boxed{\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt}} \tag{3-13}$$

Anche il Terzo Principio della Dinamica può essere riformulato in relazione alla quantità di moto. Consideriamo due punti materiali interagenti tra loro, per cui proprio dal Terzo Principio sappiamo che se il primo è soggetto a una forza $\vec{f}_{12}$ al secondo sarà applicata la sua reazione uguale e contraria. Integrando ambo i membri della (3-3) su un intervallo di tempo Δt e applicando il Teorema dell'Impulso, otteniamo:

$$\Delta\vec{q}_1 = \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_{12}\,dt = -\int_t^{t+\Delta t} \vec{f}_{21}\,dt = -\Delta\vec{q}_2 \tag{3-14}$$

Se definiamo la quantità di moto *del sistema dei due punti materiali* come $\vec{Q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$ risulta dalla precedente relazione che

$$\Delta\vec{Q} = \Delta\vec{q}_1 + \Delta\vec{q}_2 = 0 \tag{3-15}$$

Il Terzo Principio della Dinamica equivale ad asserire *la conservazione della quantità di moto di un sistema di punti materiali in assenza di forze esterne al sistema* (cioè se i punti interagiscono solo fra di loro). Qui abbiamo considerato il caso più semplice, con soli due punti coinvolti. Riprenderemo questa importante legge di conservazione più avanti generalizzando la validità della (3-15) al caso generale di un sistema comprendente un numero arbitrario di punti materiali.

Così presentate, queste formulazioni dei Principi della Dinamica nei termini della quantità di moto potrebbero apparire delle ripetizioni inutili. In realtà, esse sono in realtà formulazioni *più generali* dei principi enunciati nella sezione precedente. Anche se in questa trattazione abbiamo assunto costante la massa m del punto materiale, si mostra sperimentalmente che *i Principi della Dinamica, formulati tramite la quantità di moto, valgono anche nel caso di massa variabile.*

Nella Fisica moderna si tende perciò ad assumere come principi fondamentali proprio queste formulazioni e non gli enunciati della Sezione 3.3. In questo corso, tuttavia, studieremo solo situazioni in cui la massa dei punti materiali è fissata: le due versioni sono in tal caso equivalenti e possiamo tranquillamente continuare ad assumere come Principi gli enunciati della Sezione 3.3.

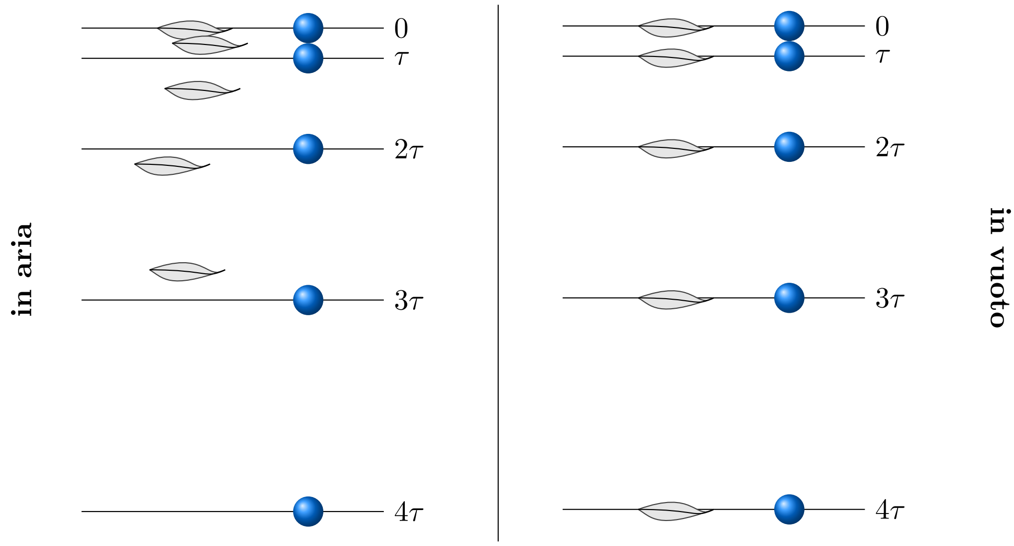


Figura 13: In aria, una piuma e una pallina lasciate cadere nello stesso istante, cadono al suolo in tempi diversi. In vuoto, invece, i due oggetti procedono insieme nella caduta e toccano il suolo nello stesso istante.

4 Leggi sperimentali delle forze

4.1 Forza peso

Denominiamo generalmente **forza peso** la forza con cui un corpo avente massa non nulla è attratto verso il basso, in prossimità della superficie terrestre. Occorre distinguere nettamente i concetti di *massa* e *peso*, spesso confusi nel linguaggio quotidiano. In Fisica massa e peso sono *due grandezze diverse e non omogenee*; non hanno le stesse dimensioni né la stessa unità di misura.

La massa è misurata tramite la bilancia a due bracci, ovvero tramite il confronto con una massa campione, e la sua unità di misura nel SI è il kilogrammo (kg). Il peso (ovvero la forza peso) è misurato tramite il dinamometro o un analogo misuratore di forza e la sua unità di misura nel SI è il newton (N).

Misure sperimentali accurate mostrano che il peso di un dato corpo può essere diverso a seconda del luogo in cui è misurato. La massa misurata con la bilancia a due bracci, invece, rimane la stessa.

Forza peso è infatti il nome che diamo alla forza di gravità a cui è soggetto un corpo *vicino alla superficie terrestre*, che origina da un'interazione tra la massa del corpo in esame e le masse che costituiscono il globo terrestre, Tale interazione risulta essere leggermente diversa a seconda del luogo in cui ci troviamo. Anzitutto, la Terra non è perfettamente simmetrica; inoltre, le montagne oppure le cavità nel terreno possono modificare localmente l'intensità e la direzione della forza di gravità risultante sul corpo.

Per estensione, possiamo parlare di forza peso anche per indicare la forza di gravità a cui è soggetto un corpo che si trova in prossimità della superficie lunare o della superficie di un altro satellite o pianeta. Il peso potrà essere in questo caso variare di molto rispetto a quello misurato sulla Terra, a causa delle masse molto diverse di questi corpi celesti: per esempio, il peso di un dato corpo sulla Luna è circa un sesto di quello che si misurerebbe sulla Terra.

In aggiunta alle misure con il dinamometro, per studiare quantitativamente gli effetti della forza peso possiamo osservare il moto dei corpi che si muovono sotto l'azione di questa sola forza. In altre parole, possiamo studiare **il moto di caduta libera**. Si osserva sperimentalmente che in un luogo fissato e trascurando i fenomeni di attrito, i corpi cadono con un moto *uniformemente accelerato* con accelerazione $\vec{g}$ rivolta verso il basso. Il modulo di tale accelerazione è *uguale per tutti i corpi* (indipendentemente dal loro peso) e vale circa $|\vec{g}| \simeq 9.81$ m/s^2 (vedi Figura 13).

Se l'accelerazione misurata è costante, significa che la forza peso $\vec{P}$ rimane costante durante la caduta. Più precisamente, possiamo scrivere un'espressione per $\vec{P}$ applicando la Seconda Legge di Newton, sostituendo $\vec{a} = \vec{g}$:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}} \tag{4-1}$$

La forza peso è dunque proporzionale alla massa m del corpo. L'accelerazione $\vec{g}$ è detta **accelerazione di gravità**. Dato il valore che $|\vec{g}|$ assume in prossimità della superficie terrestre, un corpo di massa 1 kg ha un peso di circa 9.8 N e, viceversa, un peso di 1 N corrisponde a poco più di 0.1 kg di massa. Infine, può essere utile citare un'altra unità di misura, non facente parte del SI, che può essere usata per la forza peso: il *kilogrammo-peso* (simbolo $\mathrm{kg_P}$). 1 $\mathrm{kg_P}$ è definito come la forza peso, sulla Terra, di un corpo di massa 1 kg. In pratica:

$$1\ \mathrm{kg_P} \simeq 9.81\ \mathrm{N}$$

4.2 Reazioni vincolari e attriti

Può essere utile in molte situazioni, nella descrizione delle interazioni tra corpi, schematizzare alcuni di questi come perfettamente rigidi e inamovibili. Questi ultimi possono costituire dei **vincoli**, cioè degli impedimenti, al moto di altri corpi. Possiamo pensare ad esempio a un chiodo infisso in un muro: tirandolo in una qualunque direzione tramite una fune, esso non si sposta. Oppure pensiamo al piano di un tavolo: appoggiandovi sopra degli oggetti esso li sostiene senza sprofondare, con deformazione trascurabile.

Quando si esercita una forza esterna su un vincolo, esso è in grado di fornire tutta la **forza di reazione** necessaria a bilanciarla, in modo da rimanere fermo e indeformato. Si tratta naturalmente di un modello semplificato: nessun corpo reale è in grado di sopportare una forza arbitrariamente grande senza deformarsi, rompersi o semplicemente muoversi. La schematizzazione come vincolo ideale è tuttavia molto utile nella descrizione fisica dei problemi ed è assolutamente ragionevole quando le forze in gioco sono sufficientemente piccole.[6]

I vincoli possono essere di diversa natura. Un **vincolo fisso e puntiforme**, come un chiodo, sarà in grado di esercitare una forza di reazione $\vec{R}$ in *qualunque direzione*, in modo da bilanciare perfettamente una qualunque forza di trazione o di pressione.

Un **piano liscio**, come il piano ghiacciato di una pista di pattinaggio, potrà esercitare una forza di reazione solo in *direzione ortogonale* al piano e solo in *verso uscente* dal piano stesso. Tale forza di reazione è di solito denominata **reazione normale** $\vec{R}_n$ e bilancia le forze di pressione verso il piano. Riprendendo l'esempio del piano ghiacciato, un pattinatore preme con la sua forza peso contro di esso e il piano esercita su di lui una reazione uguale e contraria al peso, in modo da non farlo sprofondare. Tuttavia, il piano ghiacciato non produce alcuna forza in direzione parallela al piano stesso e perciò non limita in alcun modo lo scivolamento del pattinatore. Inoltre, il piano non è in grado di esercitare alcuna forza di attrazione: la reazione non può mai essere rivolta in verso entrante nel piano. Nel Riquadro 6 è trattato lo scivolamento su un piano inclinato liscio, come esempio di Dinamica in presenza di reazioni vincolari normali a un piano.

Un **piano scabro**, cioè un piano *non liscio*, è in grado di esercitare su un corpo appoggiato, oltre alla reazione normale, anche una **reazione tangente**. Sono forze che originano dallo sfregamento del corpo contro al piano e sono anche dette forze di **attrito radente**.

Mentre le forze di reazione normale impediscono il moto del corpo attraverso il piano, *le forze di reazione tangente contrastano il moto del corpo parallelamente al piano stesso.* Si osserva sperimentalmente che queste forze di attrito radente seguono una legge diversa se il corpo è fermo oppure è in movimento rispetto al piano su cui è appoggiato; nei due casi prendono il nome di **attrito statico** oppure **attrito dinamico**, rispettivamente.

[6] Il concetto di *sufficientemente piccolo* non è un concetto assoluto, e dipende dal caso specifico e dall'accuratezza con cui si vogliono descrivere i fenomeni. Un tavolo potrà essere considerato indeformabile quando vi si appoggi sopra un libro o si faccia rotolare su di esso una pallina. Non potrà essere considerato tale quando ci si voglia appoggiare un blocco di granito, oppure quando si sia interessati proprio a studiarne le più piccole deformazioni.

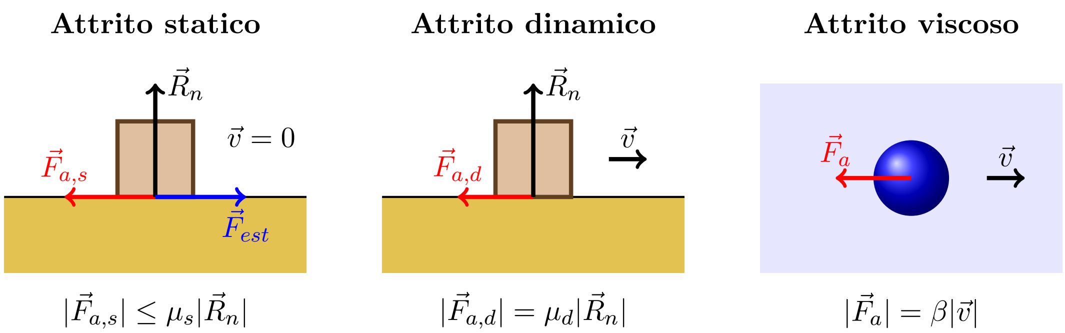


Figura 14: Schema riassuntivo delle forze di attrito radente (caso statico e dinamico) e attrito viscoso in regime laminare.

Consideriamo anzitutto il caso di un corpo fermo rispetto al piano, su cui agisce una forza esterna con una componente non nulla parallela al piano stesso:

$$\vec{F}_{est,\parallel} = |\vec{F}_{est,\parallel}| \cdot \vec{u}_{\parallel} \tag{4-2}$$

In assenza di attrito, $\vec{F}_{est,\parallel}$ tenderebbe ad accelerare il corpo in tangenzialmente al piano secondo la direzione e il verso indicato da $\vec{u}_{\parallel}$. Le forze di attrito statico $\vec{F}_{a,s}$ possono bilanciare questa componente delle forze esterne *mantenendo fermo il corpo*, fino a un valore massimo del modulo della forza esterna:

$$\vec{F}_{a,s} = -\vec{F}_{est,\parallel} \qquad \text{a condizione che} \qquad |\vec{F}_{est,\parallel}| \leq |\vec{F}_{a,s}|_{\mathrm{MAX}} \tag{4-3}$$

Per il valore massimo vale la legge sperimentale:

$$\boxed{|F_{a,s}|_{\mathrm{MAX}} = \mu_s |\vec{R}_n|} \tag{4-4}$$

μ_s è detto coefficiente di attrito statico, è tipicamente minore di 1 e dipende dalle caratteristiche delle superfici in contatto. $|\vec{R}_n|$ è il modulo della reazione normale che equivale alla forza con cui il corpo è premuto contro il piano stesso.
Se invece il corpo è in movimento sul piano scabro con velocità $\vec{v} = v\vec{u}_t$, si trova sperimentalmente che la forza di attrito dinamico *è indipendente da* v ed è determinata dalla legge:

$$\boxed{\vec{F}_{a,d} = -\mu_d |\vec{R}_n| \vec{u}_t} \tag{4-5}$$

La forza di attrito dinamico ha dunque la stessa direzione della velocità vettoriale, ma verso opposto. Il modulo della forza di attrito è proporzionale alla forza con cui il corpo è premuto contro il piano (o equivalentemente alla reazione normale) tramite un coefficiente μ_d detto coefficiente di attrito dinamico. Data una coppia di superfici a contatto, generalmente *il coefficiente di attrito dinamico è minore di quello statico*:

$$\boxed{\mu_d < \mu_s < 1} \tag{4-6}$$

Questo è il motivo per cui, quando gli pneumatici di un'auto iniziano a slittare su una superficie scivolosa, è difficile recuperare la tenuta di strada. Infatti, fintanto che le ruote rotolano senza slittare, possono essere tenute in traiettoria da una forza di attrito statico[7]. Se per qualche motivo, però, una o più ruote iniziano a slittare cioè a compiere un moto di strisciamento relativo rispetto alla strada, la forza di attrito implicata è quella di attrito dinamico, che è inferiore alla precedente e peggiora ulteriormente lo slittamento. Il Riquadro 7 mostra un semplice esempio in cui si possono osservare le diverse condizioni di azione della forza di attrito statico e dinamico. La Tabella 1 riporta, sempre

[7]Vedremo in dettaglio più avanti, trattando il moto dei corpi rigidi, come l'attrito statico sia implicato nel rotolamento.

Materiali	$\mu_\mathbf{s}$	$\mu_\mathbf{d}$
Acciaio-acciaio	0.74	0.57
Acciaio-ottone	0.51	0.44
Vetro-vetro	0.94	0.40
Legno-legno	∼0.6	∼0.4
Gomma-strada	∼0.9	∼0.8
Teflon-teflon	0.04	0.04

Tabella 1: Coefficienti di attrito statico (μ_s) e dinamico (μ_d) per alcune coppie di materiali a contatto (superfici asciutte). Tratti da "Mark's Standard Handbook for Mechanical Engineers", McGraw-Hill.

a modo di esempio, i coefficienti di attrito statico e dinamico per alcune coppie di materiali messi a contatto.
Possiamo concludere questa breve discussione dell'attrito radente sottolineando alcuni aspetti che possono apparire controintuitivi, ma che è importante tenere presente per evitare errori:

- Le forze di attrito radente (sia attrito statico che dinamico) *non dipendono dall'area della superficie di appoggio* ma solo dalla forza con cui il corpo è premuto contro il piano.
- Il modulo della forza di attrito statico dipende dal caso specifico: assume il valore necessario a tenere fermo il corpo, a patto di non superare in modulo il valore massimo specificato dalla (4-3). Non bisogna incorrere nell'errore di considerare la disuguaglianza (4-3) come un'uguaglianza valida in ogni caso: l'uguaglianza si ha solo in casi limite.
- Il modulo della forza di attrito dinamico è fissato dalla (4-5). Sottolineiamo di nuovo che tale modulo non dipende dalla velocità del corpo. Per applicare la (4-5) è sufficiente che il corpo sia in moto.

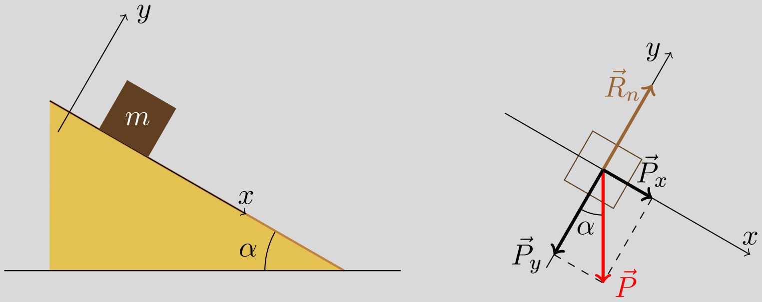
Un ulteriore tipo di forza d'attrito è quella che un corpo incontra quando si muove all'interno di un fluido viscoso, come l'acqua oppure la stessa aria atmosferica. Se la velocità $\vec{v}$ di moto relativo ha modulo troppo elevato, la forza di **attrito viscoso** è espressa da:

$$\vec{F}_a = -\beta\vec{v} \tag{4-7}$$

La forza di attrito ha la stessa direzione di $\vec{v}$ e verso opposto. In modulo, è *direttamente proporzionale alla velocità relativa* tra il corpo in moto e il fluido, tramite un coefficiente β detto *coefficiente di attrito viscoso*. Il coefficiente di attrito viscoso dipende non solo dalla natura del fluido ma anche dalla geometria e dalle dimensioni del corpo in movimento.
La dipendenza dalla velocità dell'attrito viscoso (a differenza dell'attrito radente che è indipendente da essa) lo rende sempre più significativo al crescere delle velocità. Contrastare la forza di attrito viscoso con l'aria è ciò che rende difficoltoso spingere i veicoli terrestri ad alte velocità. Un buon profilo aerodinamico serve a diminuire il coefficiente β del veicolo e perciò riduce i consumi di carburante, oppure consente di raggiungere velocità massime più elevate.
Inoltre, la presenza dell'attrito viscoso rallenta la caduta libera dei corpi in atmosfera, per cui si raggiunge una *velocità limite* di caduta (vedi anche il Riquadro 8). L'utilizzo di un paracadute va ad aumentare il coefficiente β e perciò contribuisce a diminuire la velocità di caduta, fino ad un livello tale per cui l'impatto col suolo può essere affrontato senza conseguenze dannose per il paracadutista.

Riquadro 6 - Il piano inclinato senza attrito

Consideriamo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, su cui è appoggiato un corpo di massa m inizialmente fermo. Riusciamo a prevedere quantitativamente il moto di questo corpo, in assenza di attriti?



Per potere applicare il Secondo Principio della Dinamica, per prima cosa occorre stabilire quali siano tutte le forze in gioco. In assenza di attriti, le forze applicate al corpo sono solamente due: la *forza peso*, diretta verso il basso, e la *reazione vincolare* del piano, diretta normalmente al piano stesso. Possiamo scrivere:

$$\vec{F}_{ris} = \vec{P} + \vec{R}_n = m\vec{a}$$

Il problema può essere risolto facilmente proiettando l'equazione vettoriale su due assi x e y, rispettivamente parallelo e ortogonale al piano inclinato, tenendo presente che la reazione vincolare non ha componenti parallele al piano:

$$\begin{cases} F_{ris,x} = P_x = ma_x \\ F_{ris,y} = R_n - P_y = ma_y \end{cases}$$

dove $P_x = mg\sin\alpha$ e $P_y = mg\cos\alpha$. Ora, sappiamo che il corpo non può sprofondare attraverso il piano né compiere altri movimenti in direzione ortogonale rispetto al piano stesso. La reazione normale andrà infatti a bilanciare per quanto necessario le forze prementi contro il piano, per cui:

$$R_n = P_y \qquad a_y = 0$$

Il moto può invece avvenire lungo la direzione parallela al piano, con accelerazione:

$$a = a_x = \frac{F_{ris,x}}{m} = \frac{P_x}{m} = g\sin\alpha$$

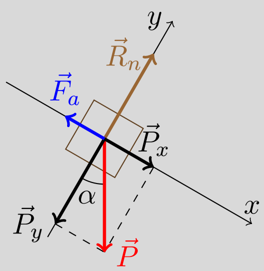
Integrando tale accelerazione costante possiamo ricavare $v(t)$ e $s(t)$:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a\,dt = 0 + \int_0^t g\sin\alpha\,dt = gt\,\sin\alpha$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t)\,dt = 0 + \int_0^t gt\sin\alpha\,dt = \frac{1}{2}gt^2\,\sin\alpha$$

Riquadro 7 - Il piano inclinato con attrito

Calcolare il massimo angolo α_{MAX} con cui un piano scabro può essere inclinato rispetto all'orizzontale, affinché un corpo di massa m appoggiato su di esso inizialmente fermo non scivoli giù. Calcolare invece l'accelerazione del corpo appoggiato, se l'angolo di inclinazione supera α_{MAX}. Considerare pari a μ_s e μ_d, rispettivamente, i coefficienti di attrito statico e dinamico.



Le forze applicate al corpo sono: la *forza peso*, diretta verso il basso, la *reazione vincolare* del piano, diretta normalmente al piano stesso e la *forza d'attrito* (statico se il corpo sta fermo, dinamico se il corpo scivola). La risultante è:

$$\vec{F}_{ris} = \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{F}_a = m\vec{a}$$

Come per l'esercizio precedente, proiettiamo l'equazione vettoriale su due assi x e y, rispettivamente parallelo e ortogonale al piano inclinato. Ricordiamo che la forza d'attrito in ogni caso tende a contrastare il moto che si avrebbe in sua assenza, perciò è diretta parallelamente al piano, con verso ascendente.

$$\begin{cases} F_{ris,x} = P_x - F_a = ma_x \\ F_{ris,y} = R_n - P_y = ma_y \end{cases}$$

dove $P_x = mg\sin\alpha$ e $P_y = mg\cos\alpha$. Come nel caso senza attrito, la reazione normale andrà a bilanciare per quanto necessario le forze prementi contro il piano:

$$R_n = P_y = mg\cos\alpha \qquad a_y = 0$$

Consideriamo prima il caso in cui il corpo non scivola. Per l'attrito statico vale la disuguaglianza:

$$F_a \le F_{a,MAX} = \mu_s|\vec{R}_n| = \mu_s mg\cos\alpha$$

Se $a_x = 0$ (corpo fermo):

$$P_x = F_a \le F_{a,MAX} \quad \rightarrow \quad mg\sin\alpha \le \mu_s mg\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \tan\alpha \le mu_s$$

Si ricava che l'angolo massimo di inclinazione affinché il corpo non scivoli è:

$$\alpha_{MAX} = \arctan\mu_s$$

Qualora invece sia $\alpha > \alpha_{MAX}$, il corpo cominci a scivolare, l'attrito è di tipo dinamico e vale:

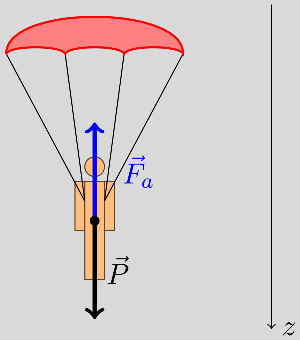
$$F_a = \mu_d|\vec{R}_n| = \mu_d mg\cos\alpha$$

L'accelerazione è allora:

$$a_x = \frac{P_x - F_a}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha}{m} = g\left(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha\right)$$

Riquadro 8 - Velocità limite in caduta libera

Calcolare la velocità con cui atterra un paracadutista di massa $m = 70$ kg (con il paracadute aperto), se è soggetto a una forza di attrito viscoso con l'aria con coefficiente $\beta = 137$ kg/s.



Durante la caduta il paracadutista è soggetto alla sua forza peso e alla forza di attrito viscoso.

$$\vec{F}_{ris} = \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a}$$

Considerando la proiezione di questa equazione su un asse z verticale rivolto verso il basso:

$$ma = mg - \beta v$$

si ottiene l'accelerazione:

$$a = g - \frac{\beta}{m}v$$

Possiamo studiare come dipende l'accelerazione a dalla velocità v. L'accelerazione è nulla se:

$$g - \frac{\beta}{m}v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = v_l = \frac{gm}{\beta}$$

Se $v > v_l$ avremo $a < 0$ quindi il paracadutista tende a rallentare. Se $v < v_l$ invece $a > 0$ quindi il paracadutista tende ad accelerare. Dunque, v_l è una *velocità di equilibrio* che una volta raggiunta viene mantenuta (perché $a = 0$) detta anche **velocità limite**. In questo caso vale:

$$v_l = \frac{gm}{\beta} = \frac{9.81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 70\ kg}{137\ \mathrm{kg/s}} \simeq 5.0\ \mathrm{m/s}$$

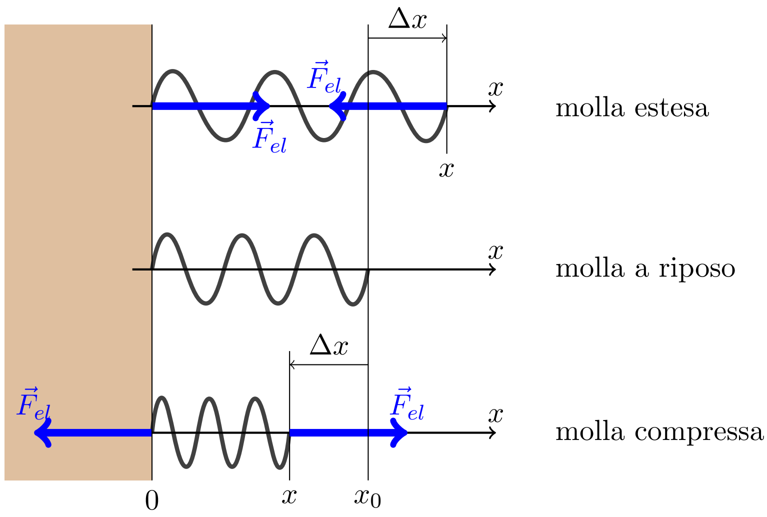


Figura 15: Una molla estesa (o compressa) produce ad entrambi gli estremi una forza proporzionale all'allungamento (o accorciamento) che tende a riportarla alla sua dimensione a riposo. La forza $\vec{F}_{el}$ sull'estremo a sinistra, nella figura, è la forza *che la molla esercita sul vincolo*. La forza sull'estremo a destra è la forza *che la molla esercita su un corpo a contatto con quell'estremo*. Le due forze sono quindi applicate a corpi diversi.

4.3 Forze elastiche e di tensione

Abbiamo già menzionato come uno dei possibili effetti di una forza sia quello di produrre una deformazione del corpo su cui essa agisce. Ciò si osserva specialmente, ma non esclusivamente, nel caso in cui la forza è esercitata su un corpo soggetto a qualche vincolo che ne limiti i movimenti. Pensiamo a una molla che, tenuta ferma a un estremo, può essere allungata o compressa da una forza che agisce sull'altro estremo. Oppure a un pezzo di plastilina, che si appiattisce premuto contro a un tavolo. O ancora, al ramoscello di un albero che si piega un poco, quando un uccello vi si posa sopra.
Possiamo distinguere due comportamenti. Nel caso della molla o del ramo dell'albero, almeno entro certi limiti di forza esterna applicata, finita l'azione della forza esterna il corpo tende a ritornare esattamente nella forma originaria. Nel caso della plastilina invece la deformazione permane. Nel primo caso si parla di *deformazione elastica*, nel secondo caso di *deformazione plastica*.
Qui tratteremo brevemente il caso delle forze che si originano da deformazioni elastiche. Si osserva sperimentalmente che, nel regime elastico, un corpo sottoposto a deformazione origina una forza, detta forza elastica $\vec{F}_{el}$, che è funzione della deformazione stessa Δx e può opporsi alla forza esterna che servirebbe per produrre e mantenere quella deformazione:

$$|\vec{F}_{el}| = f(\Delta x) \tag{4-8}$$

Tale funzione $f(\Delta x)$ può essere convenientemente approssimata con una retta attorno al punto di deformazione nulla, almeno per deformazioni non troppo grandi.

$$|F_{el}| = k|x| \tag{4-9}$$

La costante k, detta *costante elastica*, dipende dalle caratteristiche fisiche del corpo, in particolare dal materiale di cui è composto, dalla sua forma e dal punto e direzione in cui è applicata la forza esterna. La sua unità di misura nel SI risulta essere il N/m.
La relazione semplificata (4-9), detta *legge di Hooke*, è adatta ad esempio a descrivere con particolare accuratezza il comportamento delle molle. Si dice **molla ideale** una molla di massa trascurabile che obbedisca *esattamente* alla (4-9) per ogni deformazione.
Consideriamo una molla ideale vincolata a un estremo e imponiamo un sistema di coordinate con un asse x avente l'origine sull'estremo fisso della molla, diretto parallelamente ad essa e orientato verso

l'altro estremo (vedi Fig. 15). La coordinata x identifica in ogni istante la posizione dell'estremo libero e perciò anche la lunghezza della molla.
Se non agisce alcuna forza, la molla ha una lunghezza x_0 detta *lunghezza a riposo*. Deformando la molla, essa agisce con una forza elastica $\vec{F}_{el} = -\vec{F}$ descritta dalla legge vettoriale:

$$\boxed{\vec{F}_{el} = -k(x - x_0)u_x = -k\Delta x\vec{u}_x} \tag{4-10}$$

La *costante elastica* k è una caratteristica propria della molla in esame. Una molla con un valore di k elevato è più rigida di una con k piccolo, perché a parità di forza applicata risponderà con una deformazione inferiore.
Il segno meno nella formula (4-10) indica il fatto che la forza elastica tende a contrastare la deformazione indotta. Infatti, se la molla è allungata ($\Delta x > 0$) sarà diretta come $-\vec{u}_x$ cioè tende ad accorciarla. Viceversa, se la molla è compressa ($\Delta x < 0$) la forza elastica diretta come $+\vec{u}_x$ tende ad allungarla.
Per ora abbiamo valutato la situazione all'estremo libero della molla. In realtà, anche all'estremo vincolato deve accadere una situazione simmetrica, in modo che la risultante delle forze sulla molla sia nulla, visto che essa non sta accelerando. In particolare la forza elastica è esercitata con lo stesso modulo e direzione, ma versi opposti, *ad entrambi gli estremi della molla*.
La legge di Hooke può essere usata per descrivere il comportamento non solo delle molle, ma anche di altri oggetti elastici, per esempio di una **fune elastica**. Una fune elastica si oppone alle forze che ne causano l'estensione, ad entrambi i suoi estremi, con una forza elastica proporzionale all'allungamento stesso. A differenza della molla, per cui la legge di Hooke può essere applicata sia all'estensione che alla compressione, per la fune elastica tale legge vale solo per l'allungamento. Infatti, una fune produce forze ai suoi estremi solo se viene tesa e tirata. Invece, se si applica una forza a un estremo come per comprimerla, tipicamente la fune si ripiega su se stessa senza esercitare forze di reazione significative.
Un **fune inestensibile ideale** è una fune di massa trascurabile dotata di una costante elastica $k \to +\infty$. In tal caso le forza di reazione della fune sono solitamente dette **forze di tensione**. Si tratta chiaramente di un modello ideale, ma molto usato quando una fune è in grado di produrre forze di reazione molto grandi con allungamento trascurabile. Le forze di tensione della fune sono, come le forze elastiche, esercitate ad entrambi gli estremi.
Si può osservare che le molle e le funi ideali *trasferiscono una forza applicata ad esse* da un estremo all'altro estremo. Ad esempio, consideriamo una molla vincolata a un estremo. Premendo contro l'estremo libero una molla con una forza $\vec{F}_{est}$ essa si deforma in modo tale da produrre, su tale primo estremo, una forza elastica $\vec{F}_{el,1} = -\vec{F}_{est}$; all'altro estremo, però, la molla eserciterà contro il vincolo una forza elastica $\vec{F}_{el,2} = -\vec{F}_{el,1} = +\vec{F}_{est}$. La forza $\vec{F}_{est}$ è dunque trasferita identicamente da un estremo all'altro. In realtà, avevamo già osservato questa caratteristica, per quanto riguarda le funi, nella Sezione (3.1) introducendo le forze.
Infine, possiamo studiare come si comporta un sistema costituito da due molle (o altri elementi elastici) in serie o in parallelo, caratterizzati rispettivamente da costanti elastiche di valore k_1 e k_2 (Figura 16).
Ponendo le due **molle in serie** esse devono esercitare forze elastiche della stessa intensità, come si deduce imponendo la condizione di forza risultante nulla sul punto che congiunge le due molle. Possiamo allora scrivere:

$$F_{el,1} = -k_1x_1 = -k_2x_2 = F_{el,2} \tag{4-11}$$

Consideriamo ora le due molle come un unico sistema, che esercita una forza elastica $F_{el} = F_{el,1} = F_{el,2}$ agli estremi a fronte di una deformazione complessiva $x = x_1 + x_2$. La costante elastica del sistema complessivo, adattando la legge di Hooke, è:

$$k_{serie} = -\frac{F_{el}}{x} = -\frac{F_{el}}{x_1 + x_2} = -\frac{F_{el}}{-\frac{F_{el}}{k_1} - \frac{F_{el}}{k_1}}$$

$$k_{serie} = -\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} \tag{4-12}$$

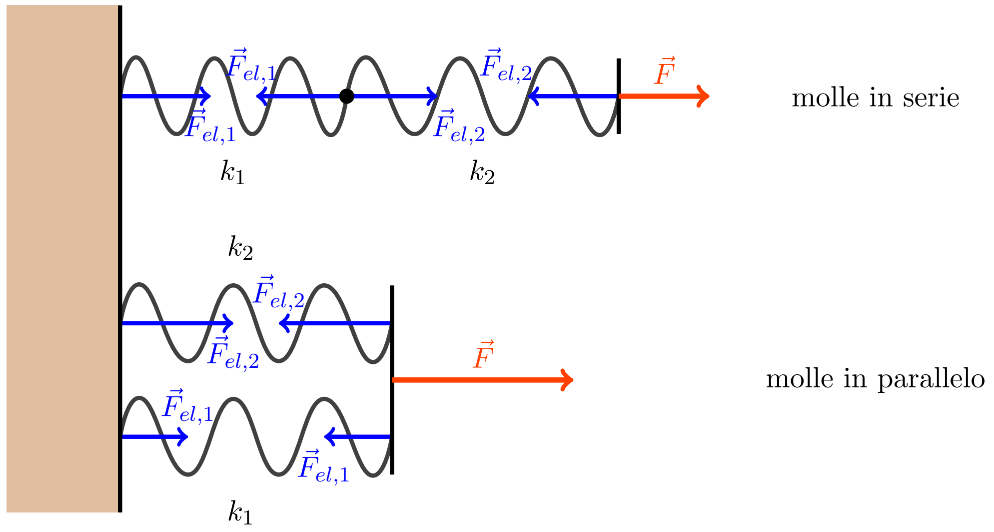


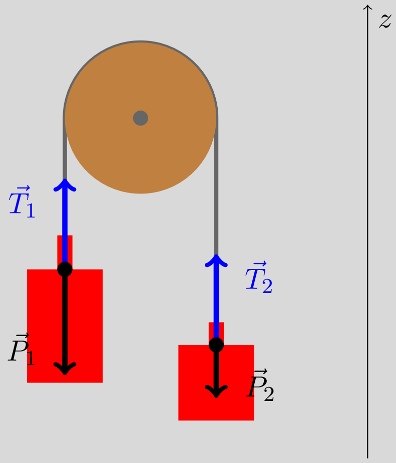
Figura 16: Molle con costante elastica differente poste in serie oppure in parallelo. Nel primo caso, devono esercitare la stessa forza $|\vec{F}_{el,1}| = |\vec{F}_{el,1}|$ e potranno avere allungamenti diversi. Nel secondo caso, condividono lo stesso allungamento, quindi eserciteranno forze diverse che andranno a sommarsi.

Se invece poniamo le due **molle in parallelo** esse condivideranno la deformazione $x_1 = x_2$. Insieme tuttavia eserciteranno, su un corpo posto ad un estremo, una forza pari alla somma delle loro forze. Il sistema costituito dalle due molle è allora caratterizzato da una deformazione $x = x_1 = x_2$ e da una forza $F_{el} = F_{el,1} + F_{el,2}$, e perciò da una costante elastica:

$$\begin{aligned} k_{parall} &= -\frac{F_{el}}{x} = -\frac{F_{el,1} + F_{el,2}}{x} = -\frac{-k_1 x_1 - k_2 x_2}{x} \\ k_{parall} &= k_1 + k_2 \end{aligned} \tag{4-13}$$

Riquadro 9 - La macchina di Atwood

La cosiddetta *macchina di Atwood* è costituita da due masse m_1 ed m_2 connesse da una fune inestensibile, fatta passare sopra a una carrucola. Calcoliamo l'accelerazione delle due massse nell'ipotesi che fune e carrucola abbiano massa trascurabile.



Adottiamo un sistema di coordinate con un asse z verticale, diretto verso l'alto. La massa m_1 è soggetta alla forza peso rivolta verso il basso $\vec{P}_1 = -m_1 g \vec{u}_z$ e alla forza di tensione della fune rivolta verso l'alto $\vec{T}_1 = T\vec{u}_z$. La massa m_2 è soggetta alla forza peso $\vec{P}_2 = -m_2 g \vec{u}_z$ e alla forza di tensione della fune $\vec{T}_2 = T\vec{u}_z$. La forza di tensione della fune è a questo punto ancora ignota ma, per le proprietà della fune ideale, sappiamo che è uguale in modulo ai due estremi: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.
Applichiamo il Secondo Principio della Dinamica per entrambi i punti materiali scrivendo le due equazioni scalari relative alla componente z, essendo nulle le altre componenti:

$$F_{ris,1} = m_1 a_1 = T_1 + P_1 = T - m_1 g \qquad F_{ris,2} = m_2 a_2 = T_2 + P_2 = T - m_2 g$$

I moti delle due masse non sono indipendenti, poiché sono vincolati dalla fune che ha una lunghezza fissata. Indichiamo con z_1 e z_2 le loro coordinate a un istante generico e con $z_{1,0}$ e $z_{2,0}$ le loro coordinate a un istante iniziale. A uno spostamento $\Delta z_1 = z_1 - z_{1,0}$ della massa m_1 corrisponde uno spostamento $\Delta z_2 = z_2 - z_{2,0}$ della massa m_2 pari a $\Delta z_2 = -\Delta z_1$. Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt}\Delta z_1 = \frac{d}{dt}(z_1 - z_{1,0}) = \frac{d}{dt} z_1 = v_1 \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Delta z_1 = \frac{d^2}{dt^2} z_1 = a_1$$
$$\frac{d}{dt}\Delta z_2 = \frac{d}{dt}(z_2 - z_{2,0}) = \frac{d}{dt} z_2 = v_2 \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Delta z_2 = \frac{d^2}{dt^2} z_2 = a_2$$

da cui:

$$a_2 = \frac{d^2}{dt^2}\Delta z_2 = \frac{d^2}{dt^2}(-\Delta z_1) = -\frac{d^2}{dt^2}\Delta z_1 = -a_1$$

Si ha dunque il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g \\ m_2 a_2 = T - m_2 g \\ a_2 = -a_1 \end{cases}$$

Sottraiamo la seconda dalla prima:

$$m_1 a_1 - m_2 a_2 = -m_1 g + m_2 g$$

e sostituendo la terza otteniamo a_1:

$$m_1 a_1 + m_2 a_1 = -m_1 g + m_2 g \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g}$$

Impiegando di nuovo la relazioni tra le accelerazioni ricaviamo anche a_2:

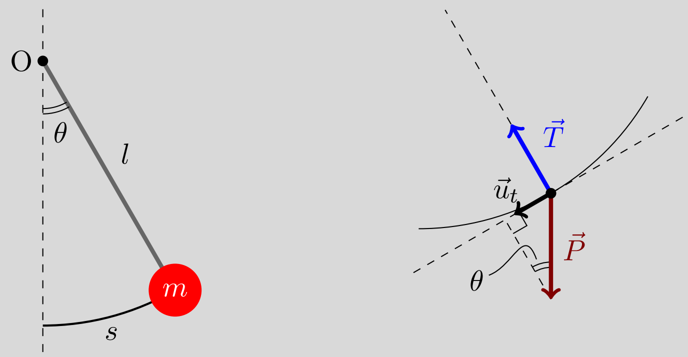
$$\boxed{a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g}$$

I due corpi dunque si muovono con accelerazioni in modulo uguali e dirette in verso opposto, direttamente proporzionali alla differenza delle masse e inversamente proporzionali alla loro somma. Note le masse, questa macchina può essere impiegata per misurare g a partire dalla misura di a_1 oppure a_2.
Infine, si può anche calcolare la tensione della fune:

$$T = m_1 a_1 + m_1 g = \frac{m_1 m_2 - m_1^2 + m_1^2 + m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Riquadro 10 - Il pendolo semplice

Un pendolo semplice è costituito da una massa m, modellizzata come un punto materiale, appesa a un vincolo O tramite una fune inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile.



Studiamo le forze a cui è soggetta la massa m quando la fune descrive un angolo θ rispetto alla verticale. Vi è la forza peso $\vec{P}$ diretta verticalmente e la tensione $\vec{T}$ diretta lungo la fune. I due vettori $\vec{P}$ e $\vec{T}$ identificano un piano nello spazio, che è il piano su cui giacciono una retta verticale e la fune stessa. La forza risultante

$$\vec{F}_{ris} = \vec{P} + \vec{T}$$

giace necessariamente su questo piano e giace sempre su questo piano anche l'accelerazione $\vec{a} = \vec{F}_{ris}/m$. Da ciò consegue che il moto della massa puntiforme *rimane sempre confinato sul piano identificato*. Inoltre, poiché la fune vincola la massa m a una distanza fissata da O, *la traiettoria di m è circolare*, di raggio l e centrata in O. Nota la traiettoria, possiamo studiare il moto nella coordinata intrinseca $s = \theta \cdot l$.

L'accelerazione scalare equivale all'accelerazione tangenziale $a = \frac{d^2s}{dt^2} = a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t$. Applicando appropriatamente il Secondo Principio della Dinamica, otteniamo:

$$a = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = \frac{1}{m}\vec{F}_{ris} \cdot \vec{u}_t = \frac{1}{m}\left(\vec{P} \cdot \vec{u}_t + \vec{T} \cdot \vec{u}_t\right) = \frac{1}{m}\left(-mg\,\sin\theta + 0\right) = -g\,\sin\theta$$

Ora, ricordando che $s = \theta l$ e che $a = \frac{d^2s}{dt^2}$, possiamo riscrivere la precedente come:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\sin\left(\frac{s}{l}\right) = 0$$

Questa è una equazione differenziale trascendente che non ha soluzione analitica. Se però consideriamo solo *piccole oscillazioni*, che corrispondono a valori ridotti dell'angolo θ, possiamo approssimare $\sin(s/l) \simeq s/l$ da cui:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l}s = 0$$

Riconosciamo l'equazione differenziale del moto armonico, che ha soluzione:

$$s(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \phi_0\right)$$

dove la pulsazione ω_0 è:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Se la massa m è lasciata partire da ferma ad un angolo iniziale θ_0, possiamo ricavare $A = \theta_0 l$ e $\phi_0 = 0$, da cui:

$$s = \theta_0 l\cos\left(\omega_0 t\right)$$

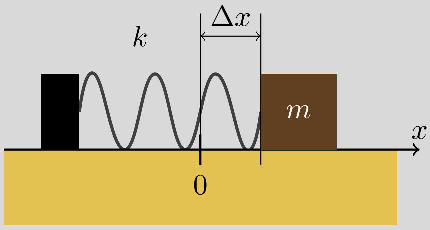
Le piccole oscillazioni del pendolo semplice sono quindi descritte da *un moto armonico, la cui pulsazione non dipende dall'ampiezza di oscillazione*. Questo fenomeno, descritto per la prima volta da Galileo Galilei, è detto *isocronismo* delle oscillazioni del pendolo. La pulsazione non dipende neppure dalla massa m ma solo dalla lunghezza l e dall'accelerazione di gravità.

4.4 Forze macroscopiche e interazioni fondamentali

Nelle precedenti sezioni abbiamo ricavato, a partire da osservazioni sperimentali, le leggi che governano le forze tipicamente coinvolte nei fenomeni meccanici che avvengono vicino alla superficie terrestre. Più avanti nel corso tratteremo con maggiore dettaglio la **forza gravitazionale** e daremo qualche nozione di base sulla forza di attrazione o repulsione tra cariche elettriche, cioè la **forza elettrostatica**.
Tutte queste forze sono descritte da leggi molto diverse tra loro. In realtà, la Fisica moderna ha compreso come questa varietà di forze sia manifestazione di sole **quattro interazioni fondamentali** che agiscono a livello dei costituenti microscopici della materia: l'interazione *gravitazionale*, l'interazione *elettromagnetica*, l'interazione *debole* e l'interazione *forte*. Le ultime due agiscono solo a livello delle particelle subatomiche e perciò non sono coinvolte nella descrizione dei fenomeni meccanici macroscopici.
La maggior parte delle forze coinvolte nei fenomeni meccanici, con l'eccezione della forza peso che ha origine gravitazionale, è causata a livello microscopico dall'interazione elettromagnetica. Infatti, sono di natura elettromagnetica le forze di interazione tra gli atomi e le molecole che costituiscono la materia di cui siamo circondati. Le forze implicate nelle deformazioni elastiche o plastiche, e più in generale tutte le forze di contatto come le reazioni vincolari o gli attriti, hanno origine da forze elettrostatiche.

Riquadro 11 - L'oscillatore massa-molla

Consideriamo un corpo di massa m appoggiato su un piano senza attrito, fissato a un estremo di una molla ideale di costante elastica k. L'altro estremo della molla è agganciato a un vincolo fisso. Il corpo è tirato in una direzione, lasciandolo appoggiato sul piano, fino ad allungare la molla di Δx. Quindi, è lasciato andare.



Adottiamo un sistema di coordinate cartesiane con un asse x orientato nella direzione in cui è stata tirata la molla e con l'origine nel punto di riposo della molla stessa.
Il corpo di massa m è soggetto a tre forze:

- la forza peso $\vec{P}$ diretta verso il basso;
- la forza di reazione normale al piano d'appoggio, diretta verso l'alto, che bilancia esattamente la forza peso:
$$\vec{P} = -\vec{R}_n$$
- la forza elastica della molla che nel sistema di coordinate scelto può essere scritta come:
$$\vec{F}_{el} = -kx\,\vec{u}_x$$

La risultante è dunque:
$$\vec{F}_{ris} = \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{F}_{el} = \vec{F}_{el}$$

Scriviamo il Secondo Principio della Dinamica nella sua proiezione scalare sull'asse x:
$$F_{ris} = -kx = ma$$

Essendo $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ questa equazione coincide con l'equazione differenziale:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Riconosciamo anche qui l'equazione differenziale del moto armonico, che ha soluzione:
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

con
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Imponendo la condizione iniziale $x(0) = \Delta x$ e $v(0) = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$ si ottiene $A = \Delta x$ e $\phi_0 = 0$.
In conclusione, la massa si muove di moto armonico con elongazione Δx e pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:
$$x(t) = \Delta x\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

5 Lavoro ed energia

5.1 Considerazioni introduttive

Le quantità definite ed utilizzate finora nella nostra trattazione della Meccanica, o almeno la maggior parte di esse, sono collegate in modo molto diretto a grandezze direttamente misurabili. Ad esempio, la massa, la lunghezza, il tempo, persino la forza, sono grandezze fisiche la cui misura può essere svolta per confronto diretto con un campione. Anche grandezze come la velocità o l'accelerazione, la cui misura diretta può essere più difficoltosa, rappresentano parametri la cui rilevanza fisica può essere compresa in modo semplice.
Definiremo qui di seguito nuove quantità, quali il lavoro e le diverse forme di energia, tramite espressioni matematiche più complesse che potrebbero sembrare, ad un primo approccio, piuttosto astratte. La rilevanza fisica di tali quantità è dovuta alle leggi matematiche che si possono dimostrare su di esse; in particolare, sarà di fondamentale importanza la *legge di conservazione dell'energia*, a cui arriveremo alla fine di questa Sezione.
Affermò a riguardo Richard Feynman,[8] nelle sue famose *Lectures on Physics* (1964): *"There is a fact, or if you wish, a law, governing all natural phenomena that are known to date. [...] The law is called the conservation of energy. It states that there is a certain quantity, which we call energy, that does not change in the manifold changes which nature undergoes. That is a most abstract idea, because it is a mathematical principle; it says that there is a numerical quantity which does not change when something happens. It is not a description of a mechanism, or anything concrete; it is just a strange fact that we can calculate some number and when we finish watching nature go through her tricks and calculate the number again, it is the same."*
Tuttavia, proprio nell'astrazione risiede la potenza di questi concetti. Come vedremo, non sarà aggiunto nessun nuovo Principio oltre ai tre già enunciati su cui si fonda la Meccanica Newtoniana. I concetti di lavoro ed energia, e i teoremi ad essi correlati, ci permetteranno però di comprendere più in profondità le implicazioni dei Principi di Newton, e di affrontare con notevole semplicità problemi altrimenti difficili da risolvere.

5.2 Lavoro e potenza

Sia $\vec{f}$ una forza costante applicata a un punto materiale che, nel suo moto, percorre un segmento rettilineo di traiettoria $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (Figura 17a). Si definisce **lavoro** della forza $\vec{f}$ sul percorso $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ la quantità *scalare*:

$$\mathcal{L} = \vec{f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\vec{f}| \cdot \overline{\mathrm{AB}} \cdot \cos\theta \tag{5-1}$$

Se l'angolo θ compreso tra i due vettori è acuto, $\mathcal{L} > 0$ e si dice che $\vec{f}$ compie *lavoro motore*. Altrimenti se l'angolo è ottuso, $\mathcal{L} < 0$ e si parla di *lavoro resistente*. Notiamo che se lo spostamento $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ è ortogonale alla forza $\vec{f}$ si ha $\mathcal{L} = 0$, cioè la forza non compie lavoro su quello spostamento.
Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura adottata è il **joule**, abbreviato J:

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N\,m} = 1\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$$

Il concetto di lavoro può essere talvolta collegato all'idea umana di "fatica" nel compiere una azione. Per esempio, quando solleviamo con le braccia un oggetto pesante, la nostra "fatica" è tanto maggiore quanto maggiore è la forza che dobbiamo esercitare per sollevarlo (che deve bilanciarne il peso) ma è anche tanto maggiore quanto maggiore è lo spostamento che facciamo compiere all'oggetto stesso. È questo un esempio di lavoro motore in cui lo spostamento è parallelo ed equiverso alla forza impiegata. Se invece usiamo la nostra forza muscolare per frenare un oggetto in movimento, abbiamo un esempio di lavoro resistente in cui forza e spostamento hanno la stessa direzione ma verso opposto.
Si definisce anche il **lavoro infinitesimo** di una forza $\vec{f}$ applicata ad un punto materiale che compie uno spostamento infinitesimo $d\vec{r}$:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{f} \cdot d\vec{r} \tag{5-2}$$

[8] Fisico statunitense (1918-1988), Premio Nobel per la fisica nel 1965.

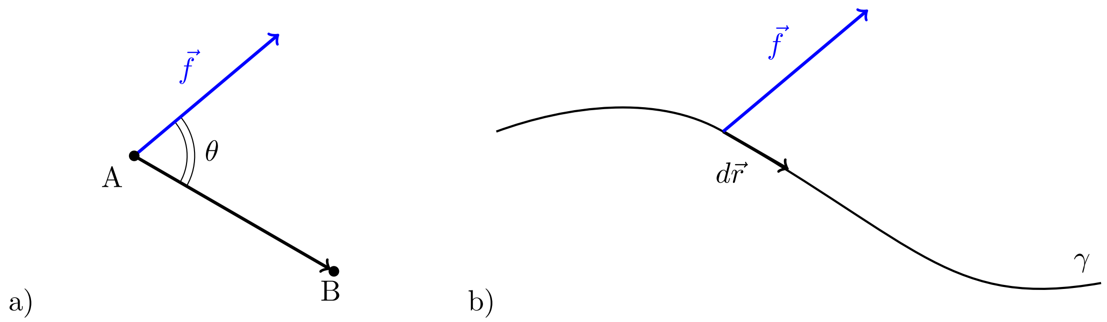


Figura 17: (a) Nel caso di una forza $\vec{f}$ costante, applicata a un punto materiale che compie uno spostamento rettilineo da un punto A a un punto B, il lavoro della forza è definito come prodotto scalare $\mathcal{L} = \vec{f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. (b) Nel caso di più generale, il lavoro è definito come integrale di linea $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{r}$ della forza $\vec{f}$ sulla curva γ che descrive la traiettoria (essendo $d\vec{r}$ il segmento infinitesimo di traiettoria).

A partire dalla (5-2) è quindi possibile dare la definizione generale di lavoro (Figura 17b):

Lavoro di una forza

Sia $\vec{f}$ una forza arbitraria, applicata a un punto materiale che compie il tratto di traiettoria descritto dalla curva γ (aperta o chiusa). Si definisce **lavoro** della forza $\vec{f}$ sulla traiettoria γ l'integrale di linea:

$$\mathcal{L} = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{r} \tag{5-3}$$

In pratica, il lavoro della forza $\vec{f}$ è la sommatoria di tutti i lavori infinitesimi δL che vengono compiuti nei segmenti $d\vec{r}$ in cui è scomposta la traiettoria, al limite di suddivisioni infinitamente piccole. Sottolineiamo che la forza $\vec{f}$ può variare modulo, direzione o verso da un punto all'altro della traiettoria. Il lavoro svolto da una forza *dipende sia dalla specifica traiettoria compiuta dal punto di applicazione, sia dal modo in cui essa è percorsa.* Certi tipi di forze possono essere costanti nel tempo e uniformi nello spazio (ad esempio, la forza peso). Altre forze possono dipendere dalla posizione nello spazio (ad esempio, la forza elastica). Altre ancora, come ad esempio le forze d'attrito, possono dipendere dalla traiettoria stessa, essendo sempre tangenti ad essa, e possono variare anche con la velocità di percorrenza. Nel caso generale, perciò, *non si può risolvere* l'integrale nella (5-3) come differenza dei valori di una funzione primitiva: l'integrale andrà valutato in modo specifico a seconda del caso. Si può esprimere questo fatto dicendo che il differenziale del lavoro δL *non è un differenziale esatto* (per distinguerlo dai differenziali esatti si indica con $\delta\mathcal{L}$ anziché $d\mathcal{L}$).
Direttamente dalle proprietà degli integrali discendono le seguenti proprietà del lavoro:

- Il lavoro della somma di due (o più) forze, su una traiettoria γ, è pari alla somma dei lavori delle singole forze su γ:

$$\mathcal{L} = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma (\vec{f_1} + \vec{f_2}) \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{f_1} \cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{f_2} \cdot d\vec{r} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \tag{5-4}$$

- Sia γ una curva che congiunge i punti A e B. Sia C un punto intermedio, appartenente a γ, che divide la curva in due parti γ_1 (da A a C) e γ_2 (da C a B). Allora il lavoro di una forza $\vec{f}$ su γ si può scrivere come:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{AB}} = \int_{\gamma\,\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1\,\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2\,\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \mathcal{L}_{\mathrm{AC}} + \mathcal{L}_{\mathrm{CB}} \tag{5-5}$$

- Se si cambia il verso di percorrenza della traiettoria (ovvero si scambiano gli estremi di integrazione), il lavoro cambia di segno.

$$\int_{\gamma\,A}^{B} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma\,B}^{A} \vec{f} \cdot d\vec{r} \tag{5-6}$$

Il lavoro svolto nell'unità di tempo è detto *potenza*.

Potenza

Se una quantità di lavoro $\mathcal{L}$ è svolta nell'intervallo di tempo Δt si definisce **potenza media** la quantità:

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} \tag{5-7}$$

Al limite per $\Delta t \to 0$ si definisce la **potenza istantanea** o semplicemente **potenza**:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta\mathcal{L}}{dt} \tag{5-8}$$

Dalla (5-2) e dalla (5-8) ricaviamo che una forza $\vec{f}$ costante applicata a un punto materiale che si sta muovendo con velocità $\vec{v}$ sviluppa una potenza pari a:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{f} \cdot d\vec{r}\right) = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} \tag{5-9}$$

L'unità di misura della potenza nel Sistema Internazionale è il **watt** (W):

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 1\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$$

A partire dal watt si definisce un'unità di misura del lavoro che, pur non appartenendo al Sistema Internazionale, è molto usata in pratica: il wattora (Wh). In particolare, è frequente l'utilizzo del multiplo kilowattora (kWh).

$$1\ \mathrm{Wh} = 1\ \mathrm{W} \cdot 1\ \mathrm{h} = 1\ \mathrm{W} \cdot 3600\ \mathrm{s} = 3.6 \cdot 10^3\ \mathrm{J}$$

$$1\ \mathrm{kWh} = 1000\ \mathrm{Wh}$$

5.3 Il Teorema dell'Energia Cinetica

Il significato fisico del *lavoro* si comprende più compiutamente a partire dal seguente teorema, che riguarda il lavoro della risultante di tutte le forze agenti sul punto materiale.

> *Si consideri un punto di materiale di massa m che compie un moto da un punto iniziale i a un punto finale f. Il lavoro $\mathcal{L}$ della risultante $\vec{F}$ di tutte le forze applicate al punto materiale durante il moto vale:*
>
> $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{5-10}$$
>
> *dove v_f e v_i sono le velocità del punto materiale rispettivamente nel punto f e nel punto i.*

I) Consideriamo il lavoro infinitesimo svolto da $\vec{F}$ su un segmento $d\vec{r}$ di traiettoria $\delta\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Applicando il Secondo Principio della Dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ e scrivendo lo spostamento infinitesimo come $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ (espressione che risulta immediatamente dalla definizione di velocità vettoriale istantanea), risulta:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot \vec{v}\,dt \tag{5-11}$$

II) Se ora sostituiamo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e semplifichiamo dt otteniamo:

$$\delta\mathcal{L} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} \tag{5-12}$$

III) Notiamo che il differenziale primo di v^2 corrisponde a:

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot (d\vec{v}) + (d\vec{v}) \cdot \vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v} \tag{5-13}$$

perciò:

$$\delta\mathcal{L} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = m\frac{1}{2}d(v^2) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{5-14}$$

IV) Integrando su un percorso arbitrario da un punto iniziale i a un punto finale f otteniamo infine la (5-10):

$$\mathcal{L} = \int_i^f \delta\mathcal{L} = \int_i^f d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{5-15}$$

■

È utile a questo punto dare un nome alla quantità $\frac{1}{2}mv^2$.

Energia cinetica

Si definisce **energia cinetica** di un punto materiale di massa m, in moto con velocità scalare v, la quantità:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2} \tag{5-16}$$

Data questa definizione si può riscrivere la (5-10) come:

$$\boxed{\mathcal{L} = E_K^f - E_K^i = \Delta E_K} \tag{5-17}$$

Il teorema sopra dimostrato prende infatti il nome di **Teorema dell'Energia Cinetica** ed afferma, in sintesi, che *il lavoro della risultante delle forze agenti su un punto materiale è pari alla sua variazione di energia cinetica*. Esso vale anche in forma infinitesima (sfruttando la relazione (5-14)):

$$\boxed{\delta L = dE_K} \tag{5-18}$$

Il Teorema dell'Energia Cinetica mostra che una forza risultante non nulla, applicata a un punto materiale, provoca una variazione della sua velocità scalare *solo nella misura in cui tale risultante compie lavoro*. Per esempio, nel caso di un grave che cade per un'altezza h sotto l'azione della sua forza peso $\vec{P}$, si ha una risultante delle forze costante e pari a $\vec{P}$, che produce uno spostamento sempre parallelo ad essa e dunque compie un lavoro $\mathcal{L} = Ph = mgh$. Se il grave inizia a cadere da fermo ($v_i = 0$), il Teorema dell'Energia Cinetica implica $mhg = \frac{1}{2}mv_f^2$ e dunque $v_f = \sqrt{2gh}$ (risultato che poteva essere raggiunto anche studiando il moto tramite il Secondo Principio della Dinamica). Un caso differente è quello di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme. La forza centripeta necessaria a sostenere il moto è sempre ortogonale allo spostamento e dunque non compie mai lavoro: infatti, in tale moto la velocità scalare è costante.
L'energia cinetica di un punto materiale corrisponde al lavoro necessario per accelerare il corpo, partendo da fermo, alla velocità v. Lavoro ed energia hanno le stesse dimensioni e, nel SI, la stessa unità di misura: il joule.
Occorre infine sottolineare che l'energia cinetica *dipende dal sistema di riferimento adottato*, in quanto la velocità v, presente nella sua definizione, è dipendente dal sistema di riferimento.

5.4 L'energia potenziale

Abbiamo già evidenziato come, nel caso più generale, il lavoro svolto da una forza dipenda in modo specifico dalla traiettoria compiuta. Esistono tuttavia delle particolari forze, dette *conservative*, il cui *lavoro non dipende dalla traiettoria ma solo dai punti iniziale e finale.* Più in dettaglio:

Forze conservative ed energia potenziale

Definiamo **forze conservative** le forze che soddisfano le seguenti tre condizioni (equivalenti fra loro):

(1) Il lavoro svolto dipende solo dal punto iniziale e finale della traiettoria, ma non dalla specifica traiettoria compiuta e dalle modalità di percorrenza. Date due traiettorie arbitrarie γ e γ' aventi gli estremi in comune, se $\vec{f}$ è conservativa si può scrivere:

$$\boxed{\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma'} \vec{f} \cdot d\vec{r}} \tag{5-19}$$

(2) Il lavoro svolto su una qualsiasi traiettoria chiusa è nullo.

$$\boxed{\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0} \tag{5-20}$$

(3) Il lavoro su una traiettoria γ, che congiunge un punto iniziale A a un punto finale B, si può esprimere come:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{AB}} = \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B}) = -\Delta U} \tag{5-21}$$

dove U è una funzione scalare delle coordinate spaziali, che si chiama per definizione **energia potenziale**.

L'energia potenziale U è definita a meno di una costante additiva, infatti sommando o sottraendo una costante ad U la (5-21) rimane valida. In altri termini, si può definire un punto nello spazio come riferimento e assumere nulla l'energia potenziale in quel punto. L'energia potenziale quantifica il lavoro necessario a portare il punto materiale da tale punto di riferimento al punto desiderato.
La dimostrazione dell'equivalenza delle tre condizioni enunciate nella definizione, è riportata nel Riquadro 12. Si potrebbe mostrare inoltre che la (5-21) vale anche al livello delle differenze infinitesime.

$$\int_{\gamma} \delta\mathcal{L} = \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} dU = U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B}) \tag{5-22}$$

$$\boxed{\delta L = -dU} \tag{5-23}$$

Si dice che, **nel caso delle forze conservative, il differenziale del lavoro è un differenziale esatto**.
Un primo esempio di forza conservativa, tra quelle che abbiamo trattato nella Sezione 4, è quello della **forza peso**. La forza peso agente su un punto materiale (in prossimità della superficie terrestre) può essere considerata costante e uniforme nello spazio. Perciò, il lavoro della forza peso su un cammino qualsiasi da un punto A a un punto B si può scrivere come:

$$\mathcal{L}_P = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\vec{r} = \vec{P} \cdot (\vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}) \tag{5-24}$$

Il lavoro dipende solo dai punti iniziale e finale e non dal cammino percorso e abbiamo così provato la conservatività della forza peso. Ora, $\vec{r}_\mathrm{A} = x_\mathrm{A}\vec{u}_x + y_\mathrm{A}\vec{u}_y + z_\mathrm{A}\vec{u}_z$ e $\vec{r}_\mathrm{B} = x_\mathrm{B}\vec{u}_x + y_\mathrm{B}\vec{u}_y + z_\mathrm{B}\vec{u}_z$. Se orientiamo l'asse z verticalmente, con verso positivo verso l'alto, scriviamo la forza peso come $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ e sviluppiamo la (5-24) come:

$$\mathcal{L}_P = -mg\vec{u}_z \cdot (x_\mathrm{B}\vec{u}_x + y_\mathrm{B}\vec{u}_y + z_\mathrm{B}\vec{u}_z - x_\mathrm{A}\vec{u}_x - y_\mathrm{A}\vec{u}_y - z_\mathrm{A}\vec{u}_z) = mgz_\mathrm{A} - mgz_\mathrm{B} \tag{5-25}$$

Una possibile espressione per l'*energia potenziale della forza peso* è dunque:

$$\boxed{U_P = mgz} \tag{5-26}$$

Notiamo che possiamo scegliere un'origine arbitraria per gli assi cartesiani, quindi z rappresente la quota (cioé l'altezza) rispetto a un livello arbitrario assunto come riferimento per l'energia potenziale. Spesso si assume come riferimento il livello del suolo e si usa indicare l'energia potenziale anche come $U_P = mgh$ dove h indica l'altezza rispetto al suolo.
Il ragionamento svolto qui per la forza peso potrebbe essere ripetuto per una generica **forza costante e uniforme** nello spazio $\vec{F} = F\vec{u}_x$, dove $\vec{u}_x$ indica un asse orientato arbitrariamente. L'energia potenziale associata a tale forza costante si scriverebbe allora $U_F = -Fx$ dove x è la coordinata del punto su tale asse.
Un ulteriore esempio rilevante di forza conservativa è la **forza elastica**. Consideriamo l'allungamento o accorciamento di una molla ideale, misurato su un asse x orientato parallelamente ad essa e avente l'origine nel suo estremo libero in posizione di riposo. La forza elastica ha l'espressione $\vec{F}_{el} = -kx\vec{u}_x$ mentre lo spostamento infinitesimo è $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x$. Proviamo la conservatività mostrando che il lavoro svolto su uno spostamento da un punto A a un punto B dipende solo dagli estremi:

$$\mathcal{L}_{el} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} -kx\vec{u}_x \cdot dx\,\vec{u}_x = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} -kxdx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} = \frac{1}{2}kx_\mathrm{A}^2 - \frac{1}{2}kx_\mathrm{B}^2 \tag{5-27}$$

Dall'espressione ricavata per $\mathcal{L}_{el}$ vediamo inoltre che possiamo assumere per l'*energia potenziale della forza elastica* l'espressione:

$$\boxed{U_{el} = \frac{1}{2}kx^2} \tag{5-28}$$

Un esempio importante di **forza non conservativa**, tra quelle che abbiamo discusso nella Sezione precedente, è invece quello delle **forze d'attrito**. Consideriamo infatti un punto materiale soggetto ad attrito radente dinamico.[9] Esso è sempre diretto tangenzialmente alla traiettoria e in verso opposto al moto: $\vec{F}_{a,d} = -|\vec{F}_{a,d}|\vec{u}_t$. Riferendoci all'ascissa curvilinea s, possiamo scrivere $d\vec{r} = ds\vec{u}_t$ e quindi il lavoro d'attrito su una traiettoria da A a B diventa:

$$\mathcal{L}_a = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} -|\vec{F}_{a,d}|\vec{u}_t \cdot ds\vec{u}_t = -\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} |\vec{F}_{a,d}|ds \tag{5-29}$$

Se la forza d'attrito si mantiene costante durante il moto si può semplificare:

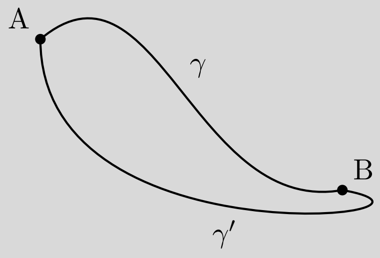
$$\mathcal{L}_a = -\int_A^B |\vec{F}_{a,d}|ds = -|\vec{F}_{a,d}|\,\Delta s_{AB} \tag{5-30}$$

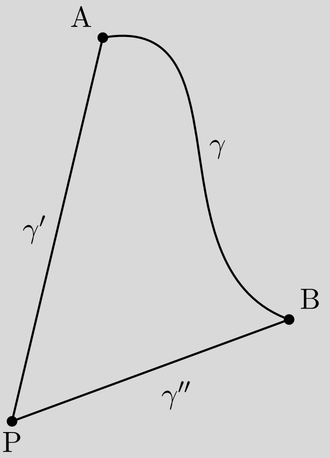
dove Δs_{AB} è la *lunghezza* della traiettoria percorsa. Il lavoro d'attrito è *sempre negativo*, *dipende dalla traiettoria* e non solo dai suoi estremi e ciò mostra che la forza d'attrito non è conservativa.
Esistono anche forze non conservative che danno un lavoro positivo, ad esempio la **forza motrice** svolta dal motore a scoppio nel caso di un'automobile, oppure dalle gambe del ciclista nel caso di una bicicletta.

[9]Possiamo notare, incidentalmente, che l'attrito statico non compie mai lavoro poiché durante la sua azione il punto materiale non si sposta.

Riquadro 12 - Condizioni di conservatività

Dimostriamo qui che le tre condizioni enunciate nella definizione di forza conservativa sono equivalenti. In altre parole, assumendone una per vera, conseguono le altre due. Per questo, mostriamo in particolare che dalla (1) discende la (2), che dalla (2) discende la (1), che dalla (1) e dalla (2) insieme discende la (3). È semplice poi osservare che dalla (3) discendono la (1) e la (2): è sufficiente valutare la (5-21) su due curve con gli stessi estremi oppure su una curva chiusa, cioè con gli estremi coincidenti.





$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$ Si consideri una curva chiusa arbitraria e si scelgano due punti distinti A e B giacenti su di essa. Questi due punti suddividono la curva chiusa in due parti, cioè due curve distinte γ e γ' che congiungono gli stessi estremi A e B. Valutiamo l'integrale del lavoro sul percorso chiuso individuato dall'unione delle due:

$$\oint_{\gamma\cup\gamma'} \delta\mathcal{L} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} + {}_{\gamma'}\!\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \delta\mathcal{L} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} - {}_{\gamma'}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} = 0$$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$ Si considerino due curve arbitrarie γ e γ' con estremi in comune A e B. Scriviamo l'integrale sul percorso chiuso individuato dall'unione delle due, che qui sappiamo essere nullo per la condizione (2):

$$0 = \oint_{\gamma\cup\gamma'} \delta\mathcal{L} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} + {}_{\gamma'}\!\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \delta\mathcal{L} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} - {}_{\gamma'}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L}$$

da cui si ricava:

$${}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} = {}_{\gamma'}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L}$$

$(\mathbf{1}), (\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{3})$ Fissiamo un punto arbitrario P nello spazio. Consideriamo due curve γ' e γ'', ad esempio due segmenti, che congiungono P ai due punti A e B. Dalla condizione 1 possiamo scrivere:

$${}_{\gamma'}\!\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \delta\mathcal{L} = \phi(\mathrm{A}) \qquad {}_{\gamma''}\!\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} = \phi(\mathrm{B})$$

infatti ϕ è una funzione scalare che dipende dagli estremi di ciascun integrale. Siccome P è fissato ed è comune ad entrambi gli integrali, possiamo esplicitare la sola dipendenza da A e da B.

Congiungiamo con una curva γ a piacere i punti A e B. Scriviamo l'integrale del lavoro sulla traiettoria chiusa composta dalle tre curve, percorsa in ordine ABPA, che sappiamo essere nullo dalla condizione (2):

$$0 = \oint \delta\mathcal{L} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} + {}_{\gamma''}\!\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{P}} \delta\mathcal{L} + {}_{\gamma'}\!\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \delta\mathcal{L} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} - {}_{\gamma''}\!\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} + {}_{\gamma'}\!\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \delta\mathcal{L} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} - \phi(\mathrm{B}) + \phi(\mathrm{A})$$

risulta:

$${}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} = \phi(\mathrm{B}) - \phi(\mathrm{A})$$

Se definiamo $U(\mathrm{A}) = -\phi(\mathrm{A})$ e $U(\mathrm{B}) = -\phi(\mathrm{B})$:

$${}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{L} = U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B})$$

Osserviamo che la funzione U non è unica, in quanto ϕ dipende anche dal punto P. Si mostra facilmente che una diversa scelta di P comporterebbe una costante additiva su ϕ. La relazione (5-21) dunque è soddisfatta per infinite e diverse funzioni U, che differiscono per una costante additiva.

5.5 Il Teorema di Conservazione dell'Energia Meccanica

Concentriamoci di nuovo il lavoro compiuto dalla risultante delle forze agenti su un punto materiale. La forza risultante è la sommatoria di tutte le forze agenti sul punto materiale. In generale, alcune di queste potranno essere conservative, mentre altre saranno non conservative.

$$\vec{F}_{ris} = \underbrace{\sum_i \vec{f}_i^{\,C}}_{\text{f. cons.}} + \underbrace{\sum_j \vec{f}_j^{\,NC}}_{\text{f. non cons.}} \tag{5-31}$$

Possiamo separare i contributi di lavoro di questi due gruppi di forze. Considerando il lavoro su una curva γ da un punto A a un punto B:

$$\mathcal{L}_{tot} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(\sum_i \vec{f}_i^{\,C} + \sum_j \vec{f}_j^{\,NC} \right) \cdot d\vec{r} = {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sum \vec{f}_i^{\,C} \cdot d\vec{r} + {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sum \vec{f}_j^{\,NC} \cdot d\vec{r} = \mathcal{L}^C + \mathcal{L}^{NC} \tag{5-32}$$

I termini $\mathcal{L}^C$ e $\mathcal{L}^{NC}$ sommano rispettivamente i contributi di lavoro delle forze conservative o non conservative agenti sul punto materiale. Ogni contributo di lavoro di forza conservativa può essere scritto come differenza di un'energia potenziale associata:

$$\mathcal{L}^C = \sum_i {}_{\gamma}\!\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{f}_i^{\,C} \cdot d\vec{r} = \sum_i \left(U_i(\mathrm{A}) - U_i(\mathrm{B})\right) = U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B}) \tag{5-33}$$

dove abbiamo indicato l'energia potenziale complessiva del punto materiale come $U = \sum_i U_i$. Dal Teorema dell'Energia Cinetica otteniamo quindi:

$$\underbrace{\mathcal{L}^C + \mathcal{L}^{NC}}_{\mathcal{L}_{tot}} = E_K(\mathrm{B}) - E_K(\mathrm{A}) \tag{5-34}$$

$$U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B}) + \mathcal{L}^{NC} = E_K(\mathrm{B}) - E_K(\mathrm{A}) \tag{5-35}$$

$$\mathcal{L}^{NC} = E_K(\mathrm{B}) + U(\mathrm{B}) - E_K(\mathrm{A}) - U(\mathrm{A}) \tag{5-36}$$

Definiamo ora una quantità che rappresenti la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

Energia meccanica

Definiamo **energia meccanica** di un punto materiale la somma dell'energia cinetica E_K e dell'energia potenziale totale U.

$$\boxed{E_M = E_K + U = E_K + \sum_i U_i} \tag{5-37}$$

Ad ogni forza conservativa $\vec{f_i}$ agente sul punto materiale (e rilevante nel problema in esame) è associabile un contributo U_i di energia potenziale.

Risultano allora dalla (5-36) due importanti conseguenze. Anzitutto:

> *Il lavoro svolto dalle forze non conservative su un punto materiale è pari alla sua variazione di energia meccanica.*
> $$\boxed{\mathcal{L}^{NC} = \Delta E_M} \tag{5-38}$$

che vale anche per variazioni infinitesime:

$$\boxed{\delta\mathcal{L}^{NC} = dE_M} \tag{5-39}$$

Inoltre:

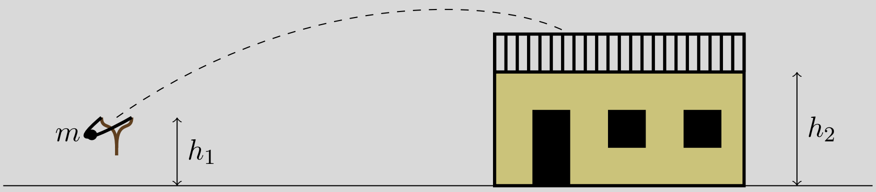
> *In assenza di forze non conservative, o qualora queste non compiano lavoro, si conserva l'energia meccanica.*
> $$\boxed{\mathcal{L}^{NC} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E_M = 0} \tag{5-40}$$

Quest'ultimo risultato è noto come **Teorema di Conservazione dell'Energia Meccanica**.
Nelle condizioni per cui $\Delta E_M = 0$, la variazione di uno qualsiasi dei contributi che compongono l'energia meccanica deve essere esattamente compensata da una variazione di segno opposto di uno o più degli altri termini. Ad esempio, se l'energia cinetica E_K aumenta, cioè se il punto materiale accelera, devono ridursi i termini di energia potenziale. Viceversa, se l'energia cinetica diminuisce, il corpo incrementa energia potenziale in qualche forma. Possono anche avvenire variazioni bilanciate dei diversi termini di energia potenziale, senza variazioni nette di energia cinetica. **L'energia dunque si trasforma** da una forma all'altra, mantenendo il bilancio globale costante.
In generale, quando una certa quantità di energia si trasforma da una forma all'altra *viene svolta una corrispondente quantità di lavoro*, come assicurato dalla (5-17) per il contributo cinetico e dalla (5-21) per i contributi di energia potenziale. I termini energetici possono dunque essere interpretati anche come *possibilità di svolgere del lavoro*. L'energia cinetica rappresenta lavoro che potrebbe essere svolto in virtù del fatto che il punto materiale ha una certa velocità. L'energia potenziale rappresenta lavoro che può essere svolto in virtù del fatto che il corpo si trova in una certa configurazione. Ad esempio, nel caso dell'energia potenziale della forza peso, la possibilità di generare lavoro è data dal fatto che il corpo si trova a una certa quota.
La corrispondenza tra lavoro e trasformazione di energia da una forma all'altra vale in realtà anche per il lavoro delle forze non conservative. Infatti, come avremo modo di discutere studiando la Termodinamica, in questo caso *è l'energia meccanica stessa che si trasforma in altre forme di energia*, ad esempio termica. Infatti, una forza non conservativa come l'attrito provoca tipicamente un riscaldamento del corpo che viene rallentato da essa (o di un altro corpo in contatto). Considerando dunque anche le altre forme di energia non Meccanica, *la conservazione dell'energia totale è un fatto sperimentale che si verifica sempre*. L'energia non si può creare né distruggere: i fenomeni fisici ne provocano soltanto la trasformazione di energia da una forma all'altra.

Per concludere, sottolineiamo di nuovo, come già all'inizio della Sezione, che quanto discusso qui riguardo all'energia e al lavoro *non ha aggiunto alcun principio fisico nuovo* rispetto ai Tre Principi della Dinamica. Sono state date definizioni di nuove quantità e sono stati enunciati nuovi teoremi riguardo ad esse. I teoremi che riguardano l'energia ci permettono di avere una comprensione maggiore dei fenomeni meccanici individuando quantità che si conservano o si trasformano durante il moto. Inoltre, possono essere un utile strumento per risolvere alcuni problemi, in cui non è richiesto di calcolare l'intera equazione del moto, ma solo alcuni parametri relativi ad istanti precisi. Esempi di questo metodo risolutivo sono riportati nei Riquadri 13 e 14.

Riquadro 13 - Lancio con la fionda

L'elastico di una fionda è assimilabile a una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Un sassolino di massa m viene lanciato con un certo angolo (non noto) rispetto all'orizzontale, allungando la fionda di Δx. Durante il lancio la fionda si trova ad altezza h_1 rispetto al suolo. Il sassolino finisce su un terrazzo, posto ad altezza h_2 rispetto al suolo. Calcolare la velocità con cui atterra sul terrazzo, trascurando ogni forma di attrito durante il moto.



Non sussistendo alcuna forma di attrito, ovvero di forza non conservativa, possiamo applicare il Teorema di Conservazione dell'Energia Meccanica tra l'istante iniziale, in cui il sassolino si trova sulla fionda tesa e allungata prima del lancio, e l'istante finale in cui il sassolino atterra sul terrazzo.

Le forze che agiscono sul sassolino sono la forza elastica della fionda e la forza peso. L'energia meccanica si compone quindi del contributo cinetico, del contributo di energia potenziale elastica e del contributo di energia potenziale della forza peso. Nell'istante iniziale, considerando che il sassolino è inizialmente fermo:

$$E_M^i = E_K^i + U_{el}^i + U_P^i$$

$$E_M^i = 0 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mgh_1$$

Nell'istante finale è nullo il contributo di energia potenziale elastica:

$$E_M^f = E_K^f + U_{el}^f + U_P^f$$

$$E_M^f = \frac{1}{2}mv^2 + 0 + mgh_2$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_M^i = E_M^f$$

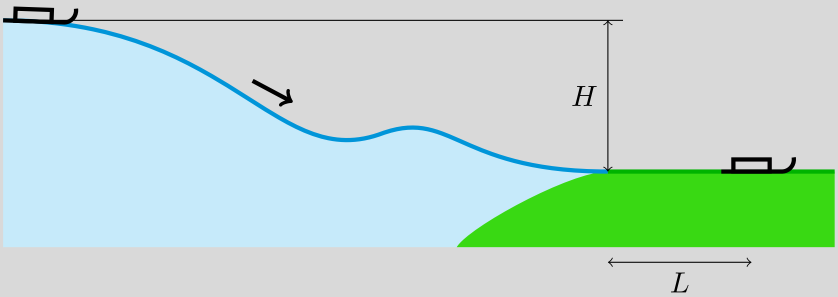
$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_2$$

ricaviamo la velocità finale:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta x^2 - 2g(h_2 - h_1)}$$

Riquadro 14 - Il rallentamento dello slittino

Uno slittino scivola giù da una collina innevata e arriva, alla fine del pendio, su un tratto pianeggiante dove c'è solo erba. Sapendo che lo slittino parte, da fermo, da un'altitudine $H = 40$ m rispetto al tratto piano e che si ferma dopo una distanza $L = 100$ m di percorrenza sull'erba, calcolare il coefficiente di attrito dinamico tra lo slittino e il manto erboso. Trascurare ogni attrito nella discesa innevata.



Nel primo tratto (innevato) agiscono sullo slittino la forza peso e la reazione normale. Quest'ultima non compie mai lavoro (in quanto ortogonale allo spostamento) e perciò non ha alcun termine di energia associato.
Nel secondo tratto (sull'erba) oltre alla forza peso e alla reazione normale agisce sullo slittino la forza non conservativa di attrito dinamico, che compie un lavoro:

$$\mathcal{L}_{att} = -\mu_d |\vec{R}_n| L = -\mu_d mgL$$

Procediamo in modo da applicare la (5-38) tra l'istante iniziale, in cui lo slittino si trova fermo ad altitudine H, e l'istante finale, in cui lo slittino è fermo sul piano erboso.
L'energia meccanica iniziale è:

$$E_m^i = E_K^i + U_P^i = 0 + mgH$$

L'energia meccanica finale è:

$$E_m^f = E_K^f + U_P^f = 0 + 0$$

Scriviamo perciò:

$$\mathcal{L}_{att} = \mathcal{L}^{NC} = \Delta E_M = E_M^f - E_M^i$$

$$-\mu_d mgL = 0 - mgH$$

da cui:

$$\mu_d = \frac{H}{L} = \frac{40 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0.4$$