Sistemi di coordinate

cartesiane,
cilindriche,
sferiche
e
polari

Andrea Farina

Politecnico di Milano
Dipartimento di Fisica

andrea.farina@polimi.it

22/01/2008

Sistema di coordinate cartesiane

In coordinate cartesiane un punto P dello spazio è individuato da una terna di numeri reali (x, y, z) che possono assumere qualsiasi valore:

$$\begin{aligned} -\infty < &x < +\infty \\ -\infty < &y < +\infty \\ -\infty < &z < +\infty \end{aligned}$$

I versori degli assi $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ si mantengono sempre costanti.
Gli elementi infinitesimi di spostamento, di superficie e di volume sono i seguenti (Fig. 2):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \begin{cases} \mathrm{d}x\,\mathbf{u}_x \\ \mathrm{d}y\,\mathbf{u}_y \\ \mathrm{d}z\,\mathbf{u}_z \end{cases} \qquad \mathrm{d}S = \begin{cases} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{cases} \qquad \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

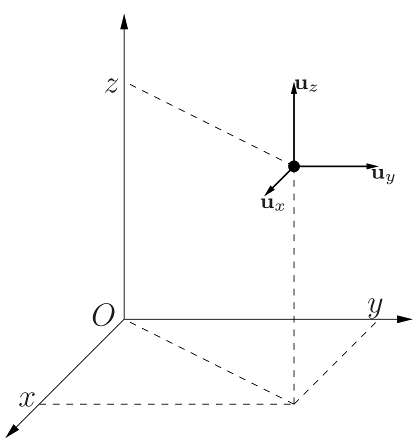

Figura 1: Sistema di coordinate cartesiane.

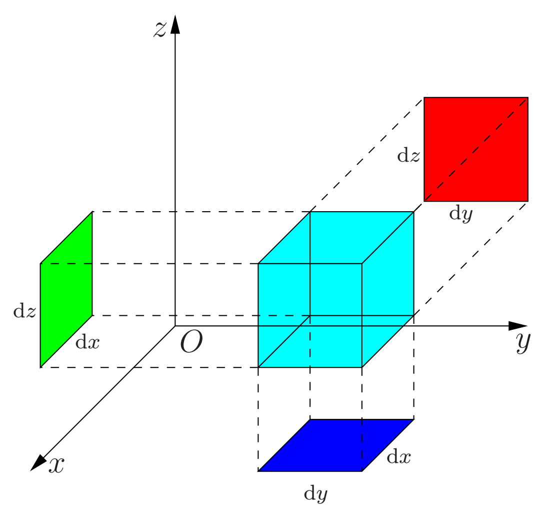

Figura 2: Elementi infinitesimi di superficie ed elemento infinitesimo di volume in coordinate cartesiane.

Sistema di coordinate cilindriche

In coordinate cilindriche un punto P dello spazio è individuato da una terna di numeri reali (r, φ, z) soggetti alle seguenti limitazioni:

$$\begin{aligned} 0 \leq & r < +\infty \\ 0 \leq & \varphi < 2\pi \\ -\infty < & z < +\infty \end{aligned}$$

I versori $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\varphi$, $\mathbf{u}_z$ non sono tutti e tre costanti; infatti $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\varphi$ cambiano direzione a seconda del punto P considerato.
Gli elementi infinitesimi di spostamento, di superficie e di volume sono i seguenti (Fig. 4):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \begin{cases} \mathrm{d}r\,\mathbf{u}_r \\ r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathbf{u}_\varphi \\ \mathrm{d}z\,\mathbf{u}_z \end{cases} \qquad \mathrm{d}S = \begin{cases} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \end{cases} \qquad \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

Di seguito sono riportate le relazioni che legano le coordinate cilindriche alle coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

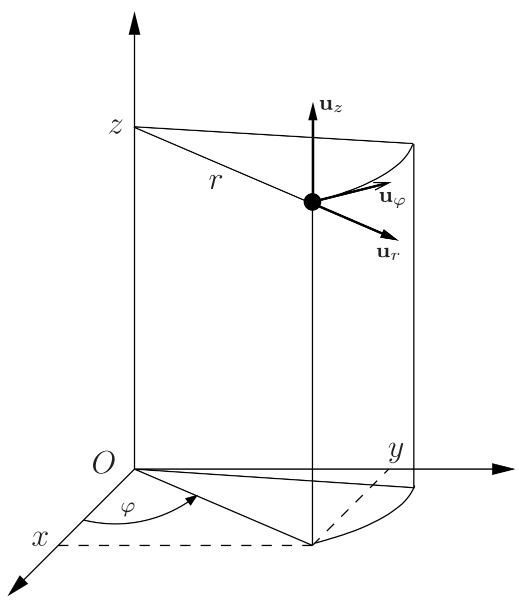

Figura 3: Sistema di coordinate cilindriche.

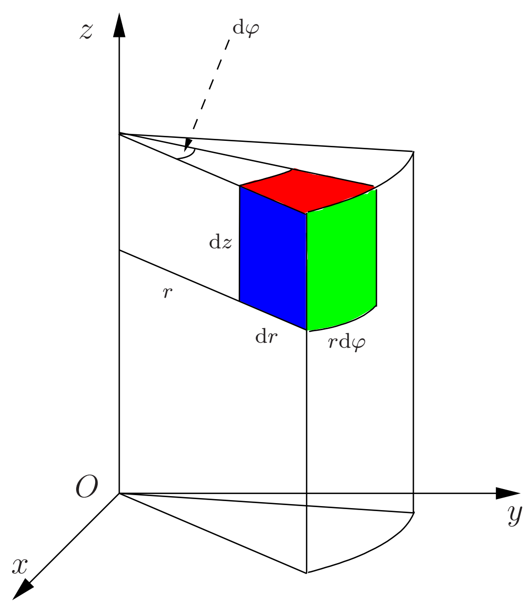

Figura 4: Elementi infinitesimi di superficie ed elemento infinitesimo di volume in coordinate cilindriche.

Sistema di coordinate sferiche

In coordinate sferiche un punto P dello spazio è individuato da una terna di numeri reali (r, ϑ, φ) soggetti alle seguenti limitazioni:

$$\begin{aligned} 0 \leq & r < +\infty \\ 0 \leq & \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq & \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

I versori $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\vartheta$, $\mathbf{u}_\varphi$ non sono costanti; infatti cambiano direzione a seconda del punto P considerato.
Gli elementi infinitesimi di spostamento, di superficie e di volume sono i seguenti (Fig. 6):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \begin{cases} \mathrm{d}r\,\mathbf{u}_r \\ r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathbf{u}_\vartheta \\ r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathbf{u}_\varphi \end{cases} \qquad \mathrm{d}S = \begin{cases} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \\ r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ r\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \end{cases} \qquad \mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

Di seguito sono riportate le relazioni che legano le coordinate sferiche alle coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$$

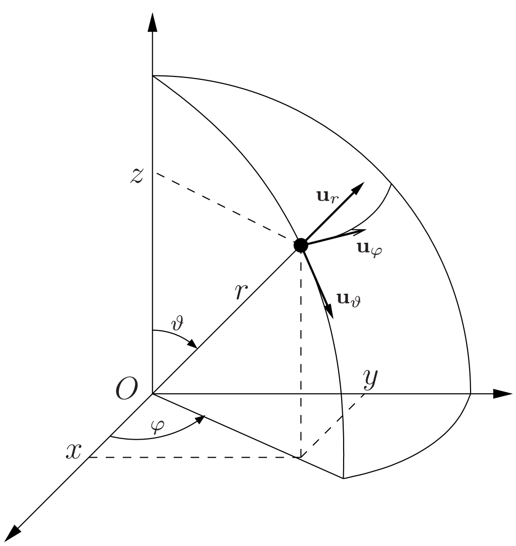

Figura 5: Sistema di coordinate sferiche.

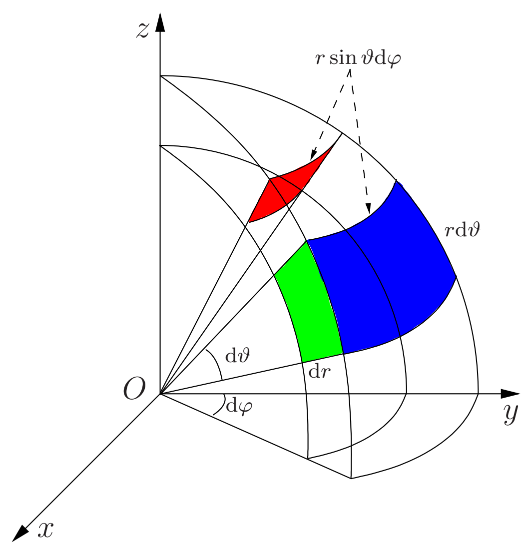

Figura 6: Elementi infinitesimi di superficie ed elemento infinitesimo di volume in coordinate sferiche. L'elemento di superficie $r\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ è stato ruotato più in alto per chiarezza.

Sistema di coordinate polari

In coordinate polari un punto P del piano è individuato da una coppia di numeri reali (r, φ) soggetti alle seguenti limitazioni:

$$\begin{aligned} 0 \leq & r < +\infty \\ 0 \leq & \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

I versori $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\varphi$ non sono costanti; infatti cambiano direzione a seconda del punto P considerato.
Gli elementi infinitesimi di spostamento e di superficie sono i seguenti (Fig. 8):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \begin{cases} \mathrm{d}r\, \mathbf{u}_r \\ r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathbf{u}_\varphi \end{cases} \qquad \mathrm{d}S = r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi$$

Di seguito sono riportate le relazioni che legano le coordinate polari alle coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Osserviamo che le coordinate polari corrispondono alle coordinate cilindriche applicate al piano xy.

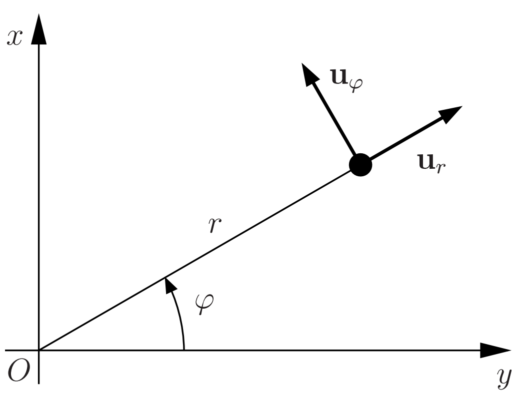

Figura 7: Sistema di coordinate polari.

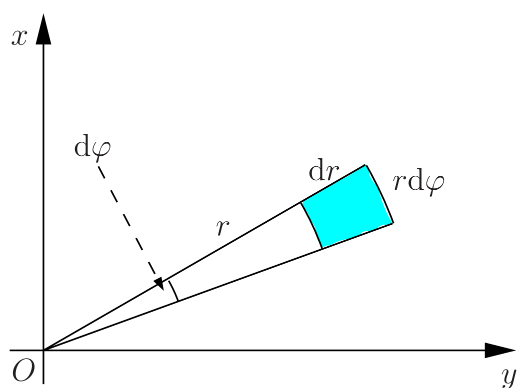

Figura 8: Elemento infinitesimo di superficie in coordinate polari.

Esempi

Superficie del cerchio. Determinare la superficie di un cerchio di raggio R.
Si scrive l'elemento infinitesimo di superficie in coordinate polari (Fig. 9):

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\,(r\mathrm{d}\varphi) = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

Successivamente si effettua un integrale di superficie:

$$S = \iint_S \mathrm{d}S = \int_0^R\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^R r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2}2\pi = \pi R^2$$

Possiamo effettuare il calcolo anche sfruttando in partenza la simmetria del problema, integrando per "anelli" (Fig. 10). L'elemento di superficie diventa quindi una corona circolare di spessore $\mathrm{d}r$:

$$\mathrm{d}S = \pi\,(r+\mathrm{d}r)^2 - \pi r^2 = \pi\left[(\mathrm{d}r)^2 + 2r\mathrm{d}r\right] = 2\pi r\mathrm{d}r$$

dove nell'utimo passaggio si è trascurato il termine $(\mathrm{d}r)^2$ in quanto infinitesimo di ordine superiore a uno. L'integrale di superficie risulta:

$$S = \iint_S \mathrm{d}S = \int_0^R 2\pi r\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

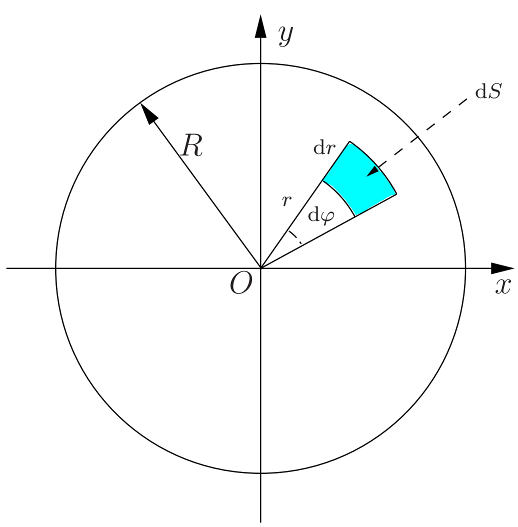

Figura 9: Elemento infinitesimo di superficie.

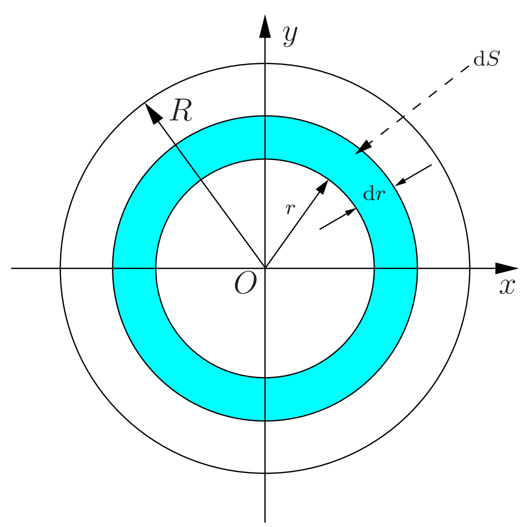

Figura 10: Elemento infinitesimo di superficie otenuto sfruttando la simmetria del problema.

Superficie della sfera. Determinare la superficie di una sfera di raggio R.
Si scrive l'elemento infinitesimo di superficie in coordinate sferiche (Fig. 11):

$$\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\vartheta\,(R\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi) = R^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

Successivamente si effettua un integrale di superficie:

$$\begin{aligned}S = \iint_S \mathrm{d}S = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = R^2\int_0^{\pi}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \\ = R^2\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi}\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 4\pi R^2\end{aligned}$$

Possiamo effettuare il calcolo anche sfruttando in partenza la simmetria del problema, integrando per "strisce circolari" (Fig. 12). L'elemento di superficie diventa quindi:

$$\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\vartheta\left[(R\sin\vartheta)\,2\pi\right] = 2\pi R^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta$$

L'integrale di superficie risulta:

$$S = \iint_S \mathrm{d}S = \int_0^{\pi} 2\pi R^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta == 2\pi R^2\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} = 4\pi R^2$$

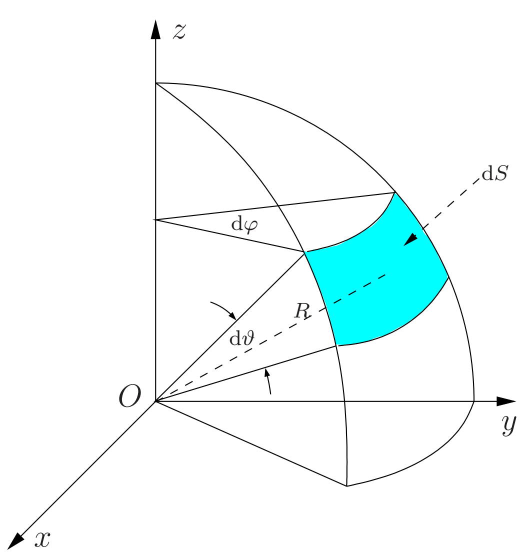

Figura 11: Elemento infinitesimo di superficie.

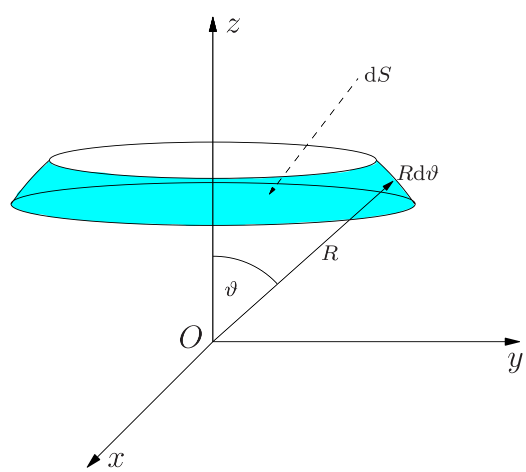

Figura 12: Elemento infinitesimo di superficie ottenuto sfruttando la simmetria del problema.

Volume della sfera. Determinare il volume di una sfera di raggio R.
Si scrive l'elemento infinitesimo di volume in coordinate sferiche:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\,(r\mathrm{d}\vartheta)\,(r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi) = r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

Successivamente si effettua un integrale di volume:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V \mathrm{d}V = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\cdot[-\cos\vartheta]_0^\pi\cdot[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Possiamo effettuare il calcolo anche sfruttando in partenza la simmetria del problema, integrando per "gusci sferici" di spessore infinitesimo dr. L'elemento di volume diventa quindi:

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

L'integrale di volume risulta:

$$V = \iiint_V \mathrm{d}V = \int_0^R 4\pi r^2\mathrm{d}r = 4\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$