Campo di dipolo oscillante

Consideriamo dipolo elettrico con momento che oscilla sinusoidalmente nel tempo (ad es. perchè varia la distanza *dr* tra le cariche oppure la carica *q* stessa)

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \sin \omega t$$

Questo sistema descrive, ad esempio:
- un'antenna
- un elettrone perturbato (in moto accelerato)

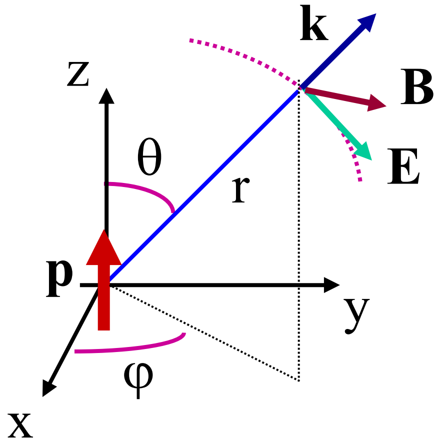
E' la base per il modello di interazione radiazione-materia: la distanza nucleo-elettrone può essere modulata da un campo e.m. sinosuidale e l'atomo si comporta come un dipolo oscillante ed emette a sua volta radiazione e.m.

La soluzione esatta (valida anche per $r \approx dr$) per i campi contiene termini proporzionali a $1/r^3$, $1/r^2$ e $1/r$.

A grandi distanze ($r >> \lambda >> dr$) rimane solo il termine $1/r$. Ponendo:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\omega}{c}\mathbf{u}_r$$

risulta:



$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\mathbf{p}_0 \times \mathbf{k}) \times \mathbf{k}}{r}\sin(kr - \omega t) \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 \omega}{4\pi}\frac{\mathbf{p}_0 \times \mathbf{k}}{r}\sin(kr - \omega t) \end{aligned}}$$

La soluzione per i campi **E** e **B** è:
- un'***onda sferica*** (con ampiezza $\propto 1/r$)
- ***progressiva***, che si allontana dal dipolo.

E e **B** sono tangenti alla superficie sferica di raggio r.
E appartiene al piano meridiano.

In modulo:

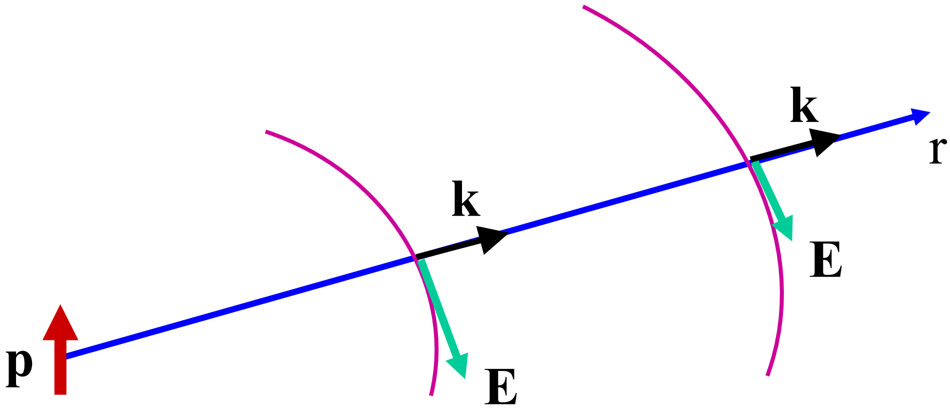
$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_\theta = \frac{p_0 \sin\theta \; k^2}{4\pi\varepsilon_0 \, r} \sin(kr - \omega t) = \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t)$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_\varphi = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \frac{p_0 \sin\theta}{r} \frac{\omega}{c} \sin(kr - \omega t) =$$

$$= \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_0 \sin\theta}{r} \frac{\omega^2}{c} \sin(kr - \omega t) =$$

$$= \frac{1}{c} \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, r} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t) = \frac{\mathrm{E}}{c}$$

- I moduli dei campi dipendono da θ.
- Il dipolo non emette nella direzione di oscillazione (θ = 0)
- La massima emissione per θ = 90°.
- Tra il modulo di **E** e di **B** vale lo stesso rapporto delle onde piane o sferiche.
- **E** è polarizzato linearmente nel piano meridiano.



Densità di energia:

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \frac{p_0^{\,2} \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \sin^2(kr - \omega t)$$

Densità di energia media:

$$\bar{u} = \frac{p_0^{\,2} \sin^2\theta}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4$$

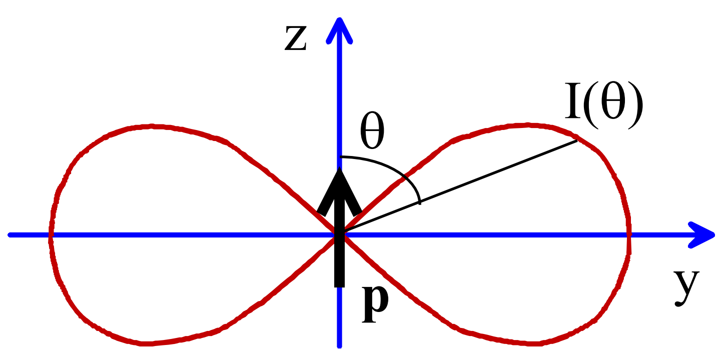
$$\left[\text{dove il valor medio di } sin^2(kr - \omega t) = 1/2\right]$$

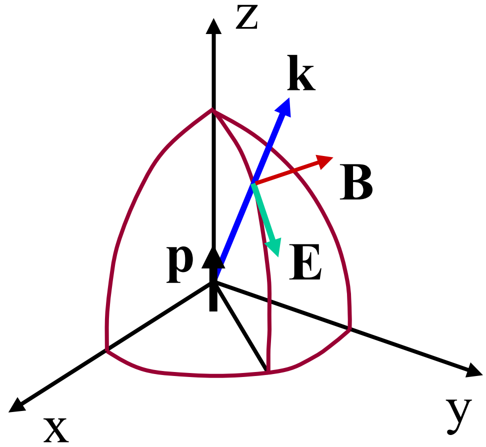
Intensità media:

$$\bar{I} = c\bar{u} = \frac{c\, p_0^{\,2} \sin^2\theta}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 = \frac{p_0^{\,2} \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} = \frac{I_o}{r^2} \sin^2\theta$$

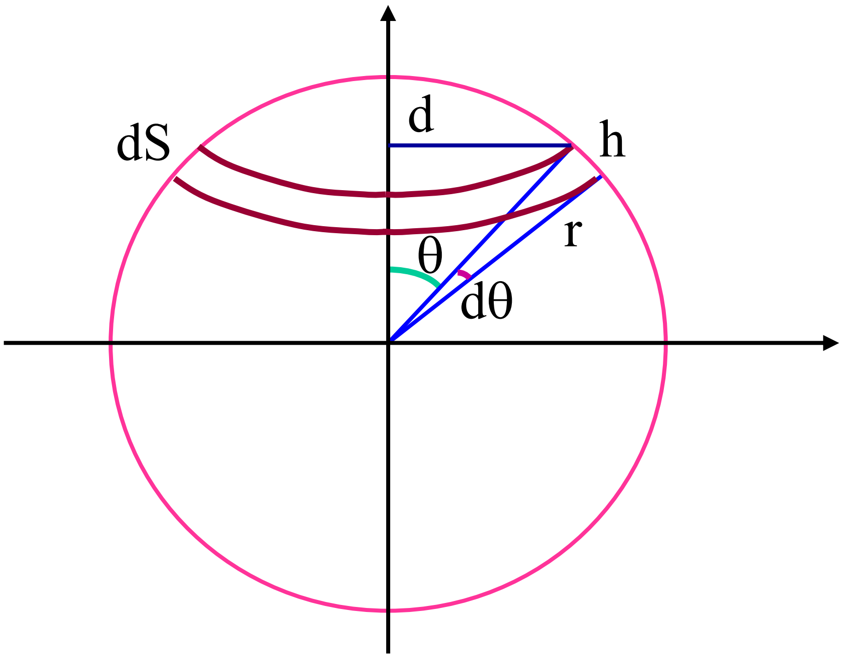
dove: $I_o \propto \omega^4$

$\Rightarrow$ L'intensità cresce rapidamente con la frequenza.





Potenza totale irraggiata:



$$d = r \sin\theta$$

$$h = r\,d\theta$$

$$dS = 2\pi d \cdot h = 2\pi r \sin\theta \cdot r\,d\theta = 2\pi r^2 \sin\theta\,d\theta$$

$$P = \int_0^\pi I(\theta) 2\pi r^2 \sin\theta\,d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \frac{c p_0{}^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 2\pi r^2 \sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{p_0{}^2\,\omega^4}{12\pi\,\varepsilon_0\,c^3}$$

$$\left(\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta = \frac{4}{3}\right)$$

$$P = \frac{8\pi}{3} I_o \propto \omega^4$$

La potenza totale irraggiata cresce rapidamente con la frequenza.