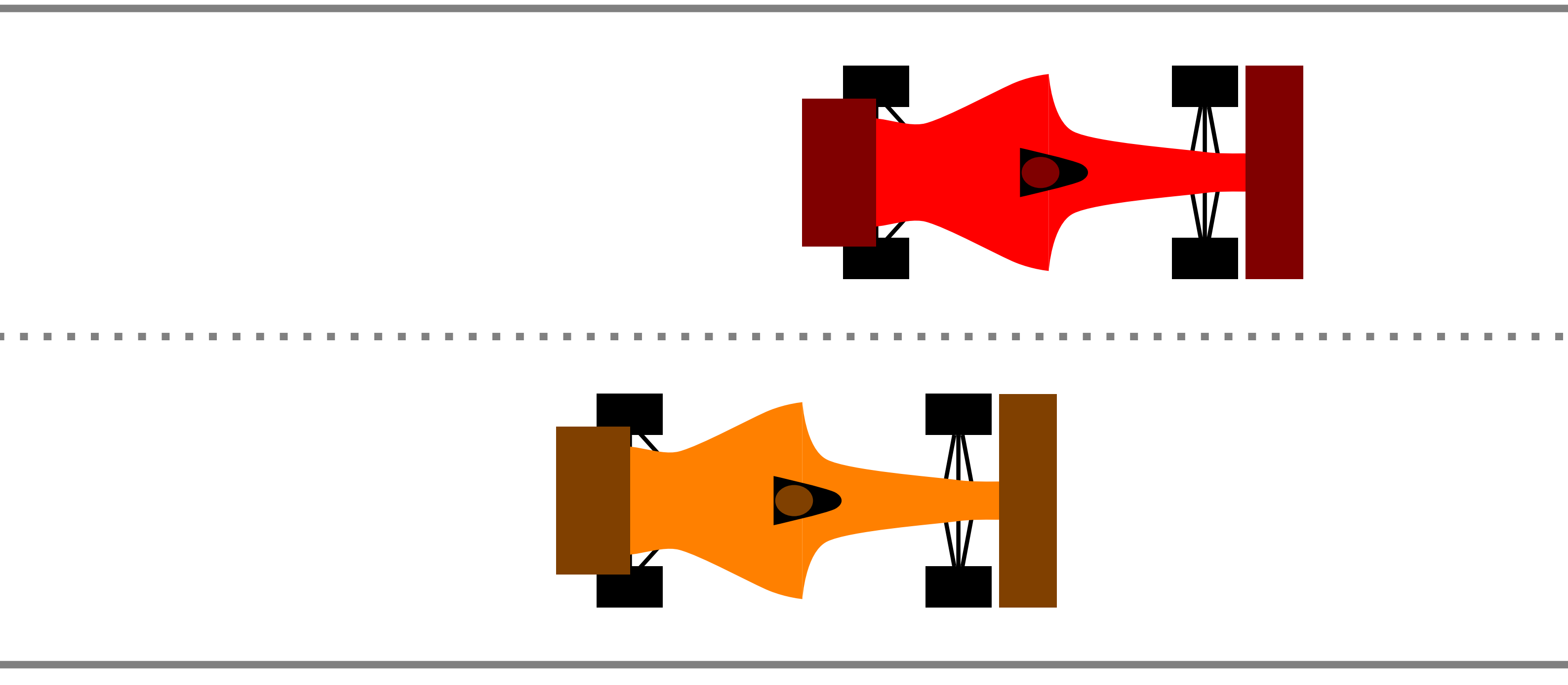
Meccanica Relativa

Andrea Crespi



Indice

1 Sistemi di riferimento diversi

Nella descrizione quantitativa della realtà fisica e più specificamente per descrivere il moto dei punti materiali è essenziale adottare un **sistema di riferimento**. Come già visto, questo si può concretizzare per la parte spaziale in una *terna di assi ortogonali* che si intersecano in un punto detto origine, sui quali si stabilisce un sistema di coordinate cartesiane. In realtà, altrettanto importante è stabilire un *asse temporale*. La coordinata temporale t è essenziale per descrivere quantitativamente l'evoluzione della posizione nello spazio e definire le velocità e le accelerazioni.
La scelta del sistema di riferimento è sempre in qualche modo arbitraria. È sempre possibile descrivere un certo fenomeno fisico in sistemi di riferimento diversi. Il fenomeno è chiaramente sempre lo stesso, ma cambiando il sistema di riferimento la sua rappresentazione sarà differente. Pensiamo ad esempio di trovarci su un'automobile in corsa e di osservare il sedile di fianco al nostro. Questo, *nel nostro sistema di riferimento solidale con l'automobile* è assolutamente fermo, non lo vediamo né allontanarsi né avvicinarsi. Al contrario, per una persona che osservi l'auto in corsa da un marciapiede *in un sistema di riferimento solidale con la strada*, il sedile si sta muovendo insieme all'auto e si avvicina o allontana, a seconda della posizione relativa.
In queste sezioni studieremo in quale modo è possibile passare da un sistema di riferimento all'altro nella descrizione cinematica e dinamica del moto di un punto.
Considereremo quindi due sistemi di riferimento S e S', su ciascuno dei quali è scelta un'origine, una terna di assi e di versori, e un asse temporale.

$$\begin{array}{llll} \text{sistema S:} & \text{O} & \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z & t \\ \text{sistema S':} & \text{O'} & \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z & t' \end{array}$$

I due sistemi potranno essere in moto arbitrario l'uno rispetto all'altro. Ciò significa che in ogni istante l'origine O' potrà essere in moto con velocità $\vec{V}$ e accelerazione $\vec{A}$ rispetto ad O (misurate nel sistema di riferimento S). Inoltre, la terna di versori di S' potrà essere in rotazione rispetto alla terna di versori di S con velocità angolare $\vec{\omega}$ e accelerazione angolare $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.
Per procedere a sviluppare questa teoria, nota anche come *Relatività di Galileo*, faremo le due seguenti ipotesi:

- **Il tempo è assoluto**: è possibile assumere due assi dei tempi coincidenti per i sistemi di riferimento S ed S', che rimangano sempre gli stessi nonostante il loro moto relativo. È ben definito il concetto di simultaneità e, dati gli stessi campioni di tempo, la durata di un certo fenomeno è la stessa anche se misurata in due sistemi di riferimenti diversi.

- **Lo spazio è assoluto**. Dati gli stessi campioni di lunghezza si ottengono le stesse misure nei due sistemi di riferimento, nonostante il loro moto relativo.

Queste due ipotesi sono estremamente importanti, anche se a prima vista potrebbero apparire scontante. Sono inoltre strettamente legate tra di loro e la teoria della *Relatività di Einstein* ha mostrato come in realtà non siano rigorosamente vere. Tuttavia, esse possono possono considerarsi valide con eccellente approssimazione quando il moto relativo tra i due sistemi di riferimento è *lento* rispetto alla velocità della luce ($c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s). Perciò, dato l'elevato valore di quest'ultima, possono essere assunte tranquillamente valide non solo nell'ambito di questo corso di Fisica, ma nella grandissima parte delle situazioni pratiche di interesse ingegneristico.
Per prima cosa, studiamo come si trasforma la **posizione** di un punto P(x, y, z) generico da un sistema di riferimento all'altro. Il vettore posizione del punto P nel sistema di riferimento S è:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \tag{1-1}$$

Il vettore posizione dell'origine O' del sistema di riferimento S', valutata in S, è d'altra parte:

$$\vec{R} = x_{\text{O}'}\vec{u}_x + y_{\text{O}'}\vec{u}_y + z_{\text{O}'}\vec{u}_z \tag{1-2}$$

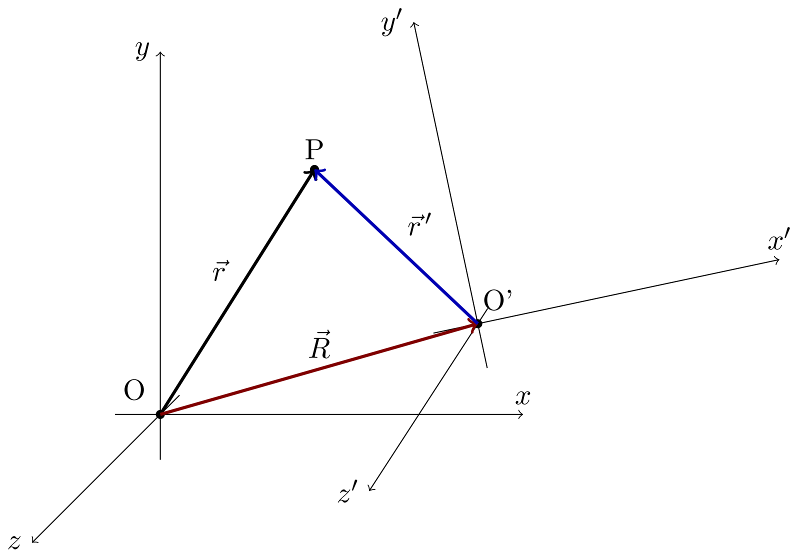


Figura 1: Posizione di un punto P descritta in due sistemi di riferimento diversi.

Osservando la Figura 1 è facile ricavare che la posizione di P rispetto ad O' è data dal vettore $\vec{r} - \vec{R}$. Poiché lo spazio è assoluto, tale posizione relativa rimane inalterata quando è osservata da S' e perciò costituisce la posizione di P in S', denominata $\vec{r}'$.

$$\vec{r}' \equiv \vec{r} - \vec{R} \tag{1-3}$$

Nel sistema S' il vettore $\vec{r}'$ troverà una sua rappresentazione naturale secondo la base di versori $\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z'$:

$$\vec{r}' = x'\vec{u}_x' + y'\vec{u}_y' + z'\vec{u}_z' \tag{1-4}$$

Per concludere, possiamo scrivere la legge di trasformazione della posizione nella forma tipicamente ricordata:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'} \tag{1-5}$$

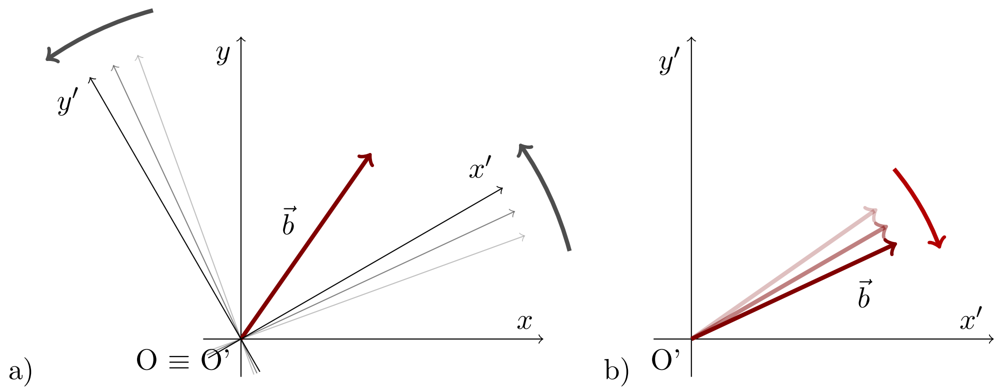


Figura 2: (a) Un sistema di riferimento S, con assi cartesiani x e y, ha la stessa origine O ≡ O' di un sistema di riferimento S', con assi x' e y'. Il sistema S' ruota nel tempo rispetto a S, attorno all'origine comune. (b) Un vettore $\vec{b}$ che nel sistema S è fisso, nel sistema S' è visto ruotare nel tempo e avrà derivata non nulla.

2 Derivate temporali di vettori

Consideriamo ora un generico vettore $\vec{b}$ nello spazio. Le ipotesi discusse nella sezione precedente (spazio e tempo assoluti) implicano che, da qualunque sistema di riferimento lo *si osservi*, il vettore $\vec{b}$ mantenga la stessa lunghezza. Tuttavia, nel sistema di riferimento S e nel sistema di riferimento S', tale vettore $\vec{b}$ *è rappresentato* propriamente secondo basi differenti di versori:

$$\underbrace{b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z}_{\text{in S}} = \vec{b} = \underbrace{b'_x\vec{u}'_x + b'_y\vec{u}'_y + b'_z\vec{u}'_z}_{\text{in S'}} \tag{2-1}$$

Si nota che in sistemi di riferimento diversi può apparire all'osservatore assai differente la *variazione temporale* di un vettore, ovvero la sua derivata. Ad esempio, si consideri un caso in cui il sistema S' stia ruotando rispetto ad S (vedi Figura 2). Un vettore che si mantiene fisso e immobile in S e quindi in S ha derivata nulla, in S' è visto ruotare ed ha derivata non nulla.[1]
Nei due sistemi di riferimento S ed S' le derivate di $\vec{b}$ sono definite come:

$$\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} = \frac{db_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{db_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{db_z}{dt}\vec{u}_z \tag{2-2}$$

$$\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S'}} = \frac{db'_x}{dt}\vec{u}'_x + \frac{db'_y}{dt}\vec{u}'_y + \frac{db'_z}{dt}\vec{u}'_z \tag{2-3}$$

Abbiamo qui assunto, coerentemente con l'ipotesi di tempo assoluto, un'unica coordinata temporale $t \equiv t'$. Notiamo che gli scalari $\frac{db_x}{dt}$, $\frac{db_y}{dt}$ e $\frac{db_z}{dt}$, $\frac{db'_x}{dt}$, $\frac{db'_y}{dt}$ e $\frac{db'_z}{dt}$ non hanno bisogno del pedice S o S', perché la derivata di uno scalare (sempre dal momento che il tempo è assoluto) non dipende dal sistema di riferimento.
Le derivate $\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}}$ e $\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S'}}$ in generale non coincidono. Ricaviamo nel seguito la relazione che permette di passare dall'una all'altra. Possiamo anzitutto riscrivere la derivata temporale di $\vec{b}$ come segue:

$$\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} = \frac{db_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{db_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{db_z}{dt}\vec{u}_z = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathrm{S}} (b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z) \tag{2-4}$$

Infatti i versori $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ e $\vec{u}_z$ sono fissi in S e quindi possono essere "portati dentro" alla derivata. Ora possiamo continuare lo sviluppo della derivata, applicando la (2-1) e tenendo presente che i versori

[1] Si ricorda che la derivata di un vettore ne descrive sia i mutamenti di modulo sia i mutamenti di direzione.

$\vec{u}'_x$, $\vec{u}'_y$ e $\vec{u}'_z$, visti da S, *non sono fissi* e potranno avere una derivata non nulla.

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathrm{S}}\left(b'_x\vec{u}'_x + b'_y\vec{u}'_y + b'_z\vec{u}'_z\right)\\ &= \underbrace{\frac{db'_x}{dt}\vec{u}'_x + \frac{db'_y}{dt}\vec{u}'_y + \frac{db'_z}{dt}\vec{u}'_z}_{\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}'}} + b'_x\left.\frac{d\vec{u}'_x}{dt}\right|_{\mathrm{S}} + b'_y\left.\frac{d\vec{u}'_y}{dt}\right|_{\mathrm{S}} + b'_z\left.\frac{d\vec{u}'_z}{dt}\right|_{\mathrm{S}}\end{aligned} \tag{2-5}$$

Analizziamo più in dettaglio le derivate dei singoli versori. Sei il sistema di riferimento S' sta compiendo una generica rototraslazione rispetto ad S, per cui ad un certo istante la terna $\vec{u}'_x$, $\vec{u}'_y$, $\vec{u}'_z$ sta ruotando con velocità angolare data dal vettore $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_\omega$, la derivata di ciascun versore può essere scritta come:

$$\left.\frac{d\vec{u}'_x}{dt}\right|_{\mathrm{S}} = \vec{\omega}\times\vec{u}'_x \qquad \left.\frac{d\vec{u}'_y}{dt}\right|_{\mathrm{S}} = \vec{\omega}\times\vec{u}'_y \qquad \left.\frac{d\vec{u}'_z}{dt}\right|_{\mathrm{S}} = \vec{\omega}\times\vec{u}'_z \tag{2-6}$$

Si conclude quindi:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} &= \left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}'} + b'_x\vec{\omega}\times\vec{u}'_x + b'_y\vec{\omega}\times\vec{u}'_y + b'_z\vec{\omega}\times\vec{u}'_z =\\ &= \left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}'} + \vec{\omega}\times\left(b'_x\vec{u}'_x + b'_y\vec{u}'_y + \times b'_z\vec{u}'_z\right)\end{aligned} \tag{2-7}$$

ovvero:

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} = \left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{\mathrm{S}'} + \vec{\omega}\times\vec{b}} \tag{2-8}$$

3 Trasformazione delle velocità e delle accelerazioni

Facendo uso della relazione (2-8) possiamo ora svolgere le derivate prima e seconda della (1-5) e ricavare le trasformazioni delle velocità e delle accelerazioni nei due sistemi di riferimento S ed S'. Prima di procedere, definiamo precisamente i vettori velocità e accelerazione di un punto generico nei due sistemi di riferimento:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} & \vec{a} &= \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathrm{S}}\\ \vec{v}' &= \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{\mathrm{S}'} & \vec{a}' &= \left.\frac{d\vec{v}'}{dt}\right|_{\mathrm{S}'}\end{aligned} \tag{3-1}$$

e i vettori velocità ed accelerazione dell'origine O' rispetto al sistema S:

$$\vec{V} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} \qquad \vec{A} = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} \tag{3-2}$$

Legge di composizione delle velocità

Svolgiamo allora la derivata prima della relazione (1-5), applicando la (2-8):

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} &= \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} + \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{\mathrm{S}}\\ \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} &= \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} + \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{\mathrm{S}'} + \vec{\omega}\times\vec{r}'\end{aligned} \tag{3-3}$$

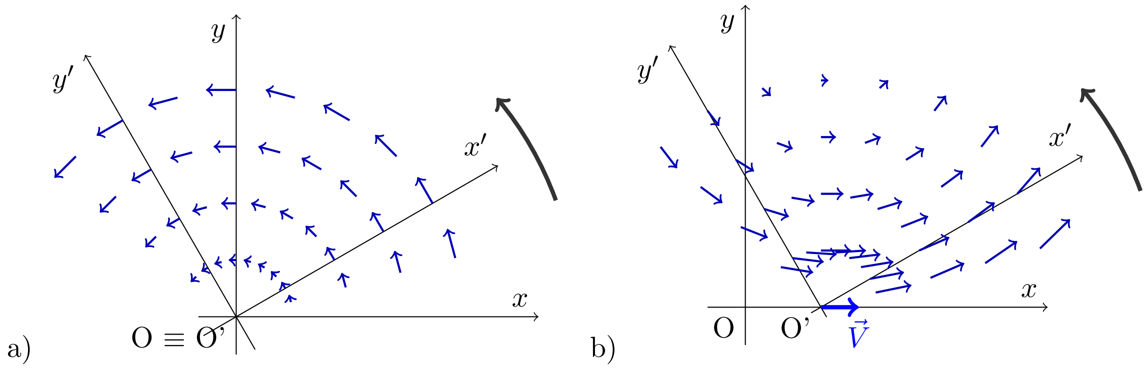


Figura 3: Illustrazione della velocità di trascinamento, come velocità dei punti solidali con un sistema S’ rispetto ad un sistema S. (a) Se un sistema S’ ruota senza traslare rispetto a un sistema S, i punti solidali con S’ si muovono di moto circolare uniforme in S. I punti del sistema hanno velocità diverse fra loro e pari a $\vec{\omega} \times \vec{r}'$. (b) Se il sistema S’ oltre a ruotare trasla con velocità $\vec{V}$, questa componente di velocità va ulteriormente sommata su ogni punto, dando luogo alla distribuzione di velocità descritta dalla (3-5).

Utilizzando le definizioni (3-1) otteniamo:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{3-4}$$

I termini $\vec{V}$ e $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ costituiscono la cosiddetta **velocità di trascinamento**:

$$\vec{v}_t = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{3-5}$$

Si tratta infatti della velocità istantanea con cui sta traslando un punto solidale con il sistema S’ (che viene quindi *trascinato* insieme ad esso) che nell’istante considerato si trovi a coincidere con il punto P (vedi Figura 3). La (3-4) afferma perciò che la velocità di P nel sistema S è data dalla somma della velocità di P nel sistema S’ con la velocità *locale* di traslazione del sistema S’ (rispetto a S) in quel punto. La **Legge di Composizione delle Velocità** è usualmente scritta come segue:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}'} \tag{3-6}$$

Legge di composizione delle accelerazioni

Svolgiamo la derivata temporale della (3-4) nel sistema S, che di fatto è la derivata seconda della (1-5).

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} &= \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} + \left.\frac{d\vec{v}'}{dt}\right|_{\mathrm{S}} + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{\mathrm{S}} = \\ &= \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} + \left(\left.\frac{d\vec{v}'}{dt}\right|_{\mathrm{S'}} + \vec{\omega} \times \vec{v}' \right) + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{\mathrm{S}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\left.\tfrac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{\mathrm{S'}} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) \end{aligned} \tag{3-7}$$

Applicando le definizioni (3-1), (3-2) e la definizione di accelerazione angolare $\vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{\mathrm{S}}$, l’espressione qui sopra può essere rielaborata come:

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}' \tag{3-8}$$

Si possono individuare nella (3-8) i termini di una **accelerazione di trascinamento**, ovvero l’accelerazione locale di S’ rispetto ad S, in un punto istantaneamente coincidente con P:

$$\vec{a}_t = \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{3-9}$$

L'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t$ è data dalla somma dell'accelerazione dell'origine O' ($\vec{A}$), dell'accelerazione tangenziale dovuta all'accelerazione angolare del moto rotatorio ($\vec{\alpha} \times \vec{r}'$) e dell'accelerazione centripeta ($\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$).
Si individua anche un termine aggiuntivo, detto **accelerazione complementare** o **accelerazione di Coriolis**:

$$\vec{a}_{\text{co}} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' \tag{3-10}$$

Quest'ultima è non nulla quando sussistono contemporaneamente due condizioni: il sistema di riferimento S' ruota rispetto ad S ($\vec{\omega} \neq 0$) e il punto P di interesse è in movimento rispetto ad S' con una velocità $\vec{v}'$ non parallela all'asse di rotazione.
La **Legge di Composizione delle Accelerazioni** si può scrivere allora nella forma:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_{\text{co}} + \vec{a}'} \tag{3-11}$$

4 Trasformazioni di Galileo e sistemi di riferimento inerziali

Affrontiamo ora un caso di rilevanza fondamentale nello studio della Meccanica, cioè quello di un sistema di riferimento S' che trasla a velocità costante rispetto ad S, senza ruotare.

$$\vec{V} = cost. \qquad \vec{A} = 0 \qquad \vec{\omega} = 0 \qquad \vec{\alpha} = 0 \tag{4-1}$$

In questo caso, le leggi di composizione delle velocità e delle accelerazioni si riducono a:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \tag{4-2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' \tag{4-3}$$

Con una scelta opportuna dell'origine O' e considerando $t = t'$, si può scrivere $\vec{R} = \vec{V} \cdot t = \vec{V} \cdot t'$. Se i sistemi di coordinate imposti su S e S' sono orientati allo stesso modo è possibile allora scrivere esplicitamente la trasformazione delle coordinate spaziali e temporali da un sistema di riferimento all'altro con il seguente sistema lineare di equazioni:

$$\begin{cases} x = x' + V_x \cdot t' \\ y = y' + V_y \cdot t' \\ z = z' + V_z \cdot t' \\ t = t' \end{cases} \tag{4-4}$$

Queste relazioni sono dette anche **Trasformazioni di Galileo**.
Si può constatare che, se S è un sistema di riferimento inerziale, allora anche S' è un sistema di riferimento inerziale. Un sistema di riferimento inerziale è infatti un sistema in cui un punto materiale non soggetto a forze ha accelerazione nulla. Se in S tale punto ha accelerazione $\vec{a} = 0$, la (4-3) ci assicura che anche $\vec{a}' = 0$, dunque il Primo Principio della Dinamica vale identicamente nei due sistemi di riferimento.
Si può ulteriormente notare che anche il Secondo Principio della Dinamica può essere verificato allo stesso modo in S ed S':

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\vec{a}' \tag{4-5}$$

dove $\vec{f}$ è la risultante delle forze applicate al punto materiale di massa m. Nei due sistemi di riferimento valgono dunque le stesse leggi fisiche che descrivono le forze; sono in altre parole *equivalenti* per la descrizione del moto.
Data l'arbitrarietà di $\vec{V}$ si può affermare che:

> *Se esiste un sistema di riferimento inerziale S, allora ne esistono infiniti. Sono sistemi di riferimento inerziali tutti i sistemi S' che traslano con velocità $\vec{V}$ arbitraria e costante rispetto ad S, senza ruotare.*

5 Dinamica in sistemi di riferimento accelerati

Se analizziamo un caso generale, in cui il sistema di riferimento S' accelera o ruota rispetto ad S, l'accelerazione segue la legge generale di composizione (3-11), qui riprodotta per comodità:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_{\text{co}} + \vec{a}'$$

L'accelerazione osservata è differente a seconda del sistema di riferimento scelto. Ne consegue che se S è inerziale, S' non lo è; infatti, *nel sistema S' non vale il Secondo Principio della Dinamica* nella forma usuale.

$$\vec{f} = m\vec{a} \neq m\vec{a}' \tag{5-1}$$

Per spiegare il moto osservato, nel sistema S' dovrebbe essere vera la seguente:

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\vec{a}_t + m\vec{a}_{\text{co}} + m\vec{a}' \tag{5-2}$$

Si può notare che i termini $m\vec{a}_{\text{co}}$ e $m\vec{a}'$ sono dimensionalmente analoghi a delle forze aggiuntive che entrano in gioco in questo caso. Di fatto, nel sistema di riferimento non inerziale S' è possibile studiare la dinamica di un punto materiale utilizzando una relazione analoga[2] al Secondo Principio della Dinamica:

$$\boxed{\vec{f}' = m\vec{a}'} \tag{5-3}$$

dove la forza $\vec{f}'$ si compone di diversi termini, che sommano alla risultante $\vec{f}$ delle forze realmente applicate al punto di massa m altri termini detti **forze fittizie** o **apparenti**:

$$\vec{f}' = \vec{f} + \underbrace{\vec{f}_t + \vec{f}_{\text{co}}}_{\text{forze fittizie}} \tag{5-4}$$

$$\vec{f}_t = -m\vec{a}_t = -m\vec{A} - m\vec{\alpha} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{5-5}$$

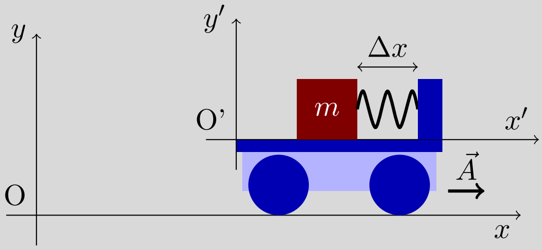
$$\vec{f}_{\text{co}} = -2\, m\, \vec{\omega} \times \vec{v}' \tag{5-6}$$

Il termine $\vec{f}_t$ è detto **forza di trascinamento** mentre il termine $\vec{f}_{\text{co}}$ è detto **forza di Coriolis**.
In pratica, in un sistema di riferimento non inerziale, per descrivere correttamente la dinamica dei corpi, occorre considerare forze aggiuntive che producano in modo quasi "artificioso" le accelerazioni osservate. Ciascuna di queste forze corrisponde a uno dei termini impiegati nella relazione di composizione delle accelerazioni, moltiplicato per la massa e cambiato di segno, così che possa essere verificata la (5-2). Sottolineiamo che le forze apparenti hanno origine puramente cinematica e non fisica; in altre parole, non sono dovute ad alcuna interazione tra corpi. Per le forze apparenti non vale nemmeno il Terzo Principio della Dinamica e ad esse non corrisponde alcuna forza di reazione applicata ad altri corpi.
I Riquadri 1 e 2 riportano due esempi significativi di descrizione del moto in sistemi di riferimento non inerziali.

[2] Si tratta di una relazione *analoga* al Secondo Principio, e non dello stesso Secondo Principio. Questo infatti non coinvolge le forze apparenti e vale solo nei sistemi di riferimento inerziali.

Riquadro 1 - Un carrello accelerato

Consideriamo un carrello che si sta muovendo di moto uniformemente accelerato su un binario, con accelerazione $\vec{A}$. Sul piano del carrello può scivolare senza attrito un blocchetto di massa m, che è agganciato a un'estremità di una molla ideale. La molla, che ha costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, è agganciata all'altra estremità a un perno solidale col carrello. Ci proponiamo di calcolare l'allungamento della molla in condizioni di equilibrio.



Soluzione nel sistema inerziale del binario

Sia S un sistema di riferimento inerziale solidale con il binario su cui si muove il carrello. In questo sistema di riferimento, una volta raggiunto l'equilibrio, il blocchetto di massa m si deve muovere insieme al carrello con la sua stessa accelerazione $\vec{A} = A\vec{u}_x$. Altrimenti, se si muovesse con accelerazione diversa, la molla si allungherebbe o accorcerebbe indefinitamente nel tempo. Al blocchetto è applicata la forza peso $\vec{P}$ diretta verso il basso e la reazione normale del carrello, diretta verso l'alto e che bilancia la forza peso $\vec{R}_n = -\vec{P}$. L'unica altra forza applicata è la forza elastica $\vec{f}_{el} = k\,\Delta x\,\vec{u}_x$. La forza risultante $\vec{f}$ sul blocchetto è allora:

$$\vec{f} = \vec{f}_{el} = k\,\Delta x\,\vec{u}_x = mA\vec{u}_x$$

da cui risulta:

$$\Delta x = \frac{mA}{k}$$

Soluzione nel sistema non inerziale del carrello

Sia S' un sistema di riferimento non inerziale, solidale con il carrello. In questo sistema di riferimento, una volta raggiunto l'equilibrio, il blocchetto di massa m è fermo ed ha accelerazione nulla. Dunque deve essere:

$$0 = m\vec{a}' = \vec{f}'$$

Al blocchetto sono applicate la forza peso e la reazione vincolare del carrello, che si bilanciano come nella descrizione precedente. È applicata poi la forza elastica $\vec{f}_{el} = k\,\Delta x\,\vec{u}_x'$. Poiché il carrello è accelerato, il sistema S' solidale con esso è pure accelerato con accelerazione $\vec{A}$ rispetto a un sistema inerziale. In S' occorre considerare anche la forza apparente di trascinamento:

$$\vec{f}_t = -m\vec{A} = -mA\vec{u}_x'$$

La risultante $\vec{f}'$ è allora uguale a:

$$\vec{f}' = \vec{f}_t + \vec{f}_{el} = -mA\vec{u}_x' + k\,\Delta x\,\vec{u}_x' = 0$$

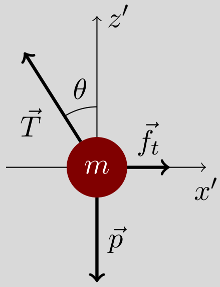
e si può concludere:

$$\Delta x = \frac{mA}{k}$$

È opportuno sottolineare che le due descrizioni sono solo rappresentazioni diverse dello stesso fenomeno fisico, e infatti danno lo stesso risultato Δx.

Riquadro 2 - Un ciondolo appeso allo specchietto

Un'automobile sta compiendo una curva circolare di raggio R verso sinistra, a velocità tangenziale costante v_0. Un ciondolo, appeso con un filo inestensibile allo specchietto retrovisore, pende inclinato di un angolo θ rispetto alla verticale. Descriviamo il problema in un sistema di riferimento solidale alla vettura e ricaviamo l'angolo θ in funzione di R e v.



Consideriamo in particolare un sistema di riferimento S' solidale con l'automobile, con origine O' posta al centro della curva di raggio R. Trascurando le dimensioni dell'auto rispetto a quelle della curva, si può affermare che il ciondolo stesso si trovi a una distanza R dall'origine. Il sistema S' non è inerziale e si muove rispetto ad un sistema di riferimento fisso S, avente origine O coincidente con O', con i seguenti parametri:

$$\vec{V} = 0 \qquad \vec{A} = 0 \qquad \vec{\omega} = \frac{v_0}{R}\vec{u}_z' \qquad \vec{\alpha} = 0$$

Valutiamo ora le forze fittizie applicate al ciondolo. Considerando che il ciondolo all'equilibrio è fermo rispetto ad S' ($\vec{v}' = 0$) su di esso non agisce la forza di Coriolis, ma agisce solo una forza di trascinamento pari a:

$$\vec{f}_t = -m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' = m\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_x'$$

La presenza di questo tipo di forza apparente è propria dei sistemi di riferimento in rotazione. Essa ha l'espressione di una forza centripeta cambiata di segno ed è infatti detta **forza centrifuga**.

La risultante delle forze applicate al ciondolo è data dalla somma vettoriale delle seguenti forze:

- forza peso, diretta verso il basso $\vec{P} = -mg\vec{u}_z'$
- tensione del filo $\vec{T}$, diretta con angolo θ rispetto alla verticale
- la forza centrifuga, diretta orizzontalmente $\vec{f}_t = m\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_x'$

Poiché il ciondolo è fermo nel sistema di riferimento S', tale risultante deve essere nulla:

$$\vec{f}' = \vec{T} + \vec{P} + \vec{f}_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} T_{x'} = m\frac{v_0^2}{R} \\ T_{z'} = mg \end{cases}$$

Da semplici considerazioni geometriche si ha allora:

$$\tan\theta = \frac{T_{x'}}{T_{z'}} = \frac{v_0^2}{gR} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{v_0^2}{gR}$$