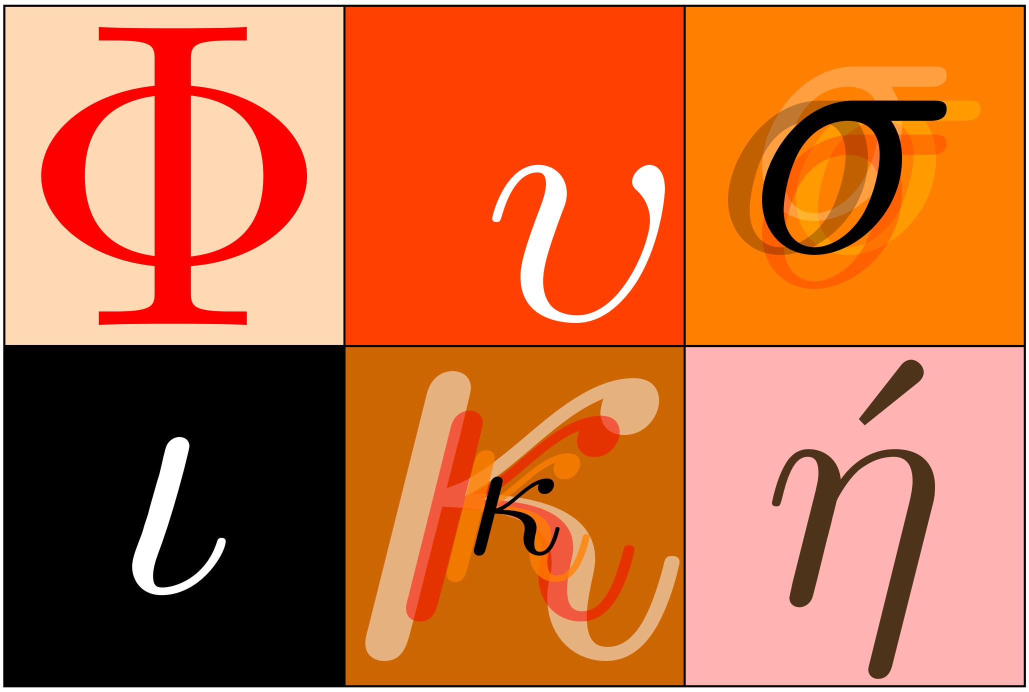
Introduzione alla Fisica Sperimentale

Andrea Crespi



Indice

1 I fondamenti della Fisica Sperimentale **4**

2 Grandezze fisiche e loro misura **7**

3 L'incertezza di misura **12**

4 Sistemi di riferimento e sistemi di coordinate **14**

5 Grandezze scalari e vettoriali **18**

6 Calcolo vettoriale **23**

1 I fondamenti della Fisica Sperimentale

Prospettiva storica

Fisica è una parola che deriva dal greco *physis* ($\varphi\upsilon\sigma\iota\varsigma$), che significa *natura*. Nata come nella Grecia Antica come parte della Filosofia, la Fisica è da allora la Scienza della Natura in senso lato.

Il desiderio di comprendere la Natura è in realtà antico quanto l'umanità stessa. Nelle civiltà arcaiche ritroviamo miti e leggende che spiegano i fenomeni naturali più appariscenti, quali ad esempio l'alternarsi del giorno e della notte, coinvolgendo direttamente l'azione di divinità.

In Occidente, si fa risalire proprio alla Grecia Antica la formazione di un pensiero volto a investigare la Natura in modo razionale, superando una visione puramente magica o religiosa. A partire dal VI secolo avanti Cristo abbiamo notizia di numerosi *filosofi* che, cercando soprattutto di comprendere quale fosse la vera *sostanza* o *principio* delle cose, elaborarono teorie molto diverse tra loro. Solo per elencarne alcuni esempi: Talete di Mileto ipotizzò che il principio generatore di tutto fosse l'acqua, Anassimene che fosse invece l'aria, Empedocle sostenne che le sostanze fondamentali fossero quattro: terra, acqua, aria e fuoco. Democrito teorizzò che la materia fosse composta da *atomi* indivisibili della stessa sostanza. Platone reputò invece che la realtà più autentica delle cose naturali non fosse contenuta nelle cose stesse, che vediamo e di cui facciamo esperienza attraverso i sensi, ma fosse costituita da *idee* conoscibili solo attraverso l'intelletto.

Notevole importanza storica ebbe la Fisica di Aristotele (IV secolo avanti Cristo), su cui è utile spendere qualche parola. Questa era essenzialmente una teoria del movimento, che per i corpi presenti sulla Terra (i corpi celesti seguivano leggi differenti) veniva spiegato come tendenza verso un *luogo naturale*. Aristotele riteneva infatti i corpi formati da miscugli diversi di quattro elementi fondamentali: terra, acqua, aria e fuoco. I luoghi naturali di questi elementi sono sfere concentriche. La sfera della terra è la più interna, posta nelle profondità del suolo. Troviamo quindi la sfera dell'acqua, quella dell'aria e infine, la più esterna di tutte, quella del fuoco. Ciascun corpo tende perciò a muoversi verso l'alto o verso il basso, cioè verso la sfera che costituisce il suo luogo naturale, a seconda dell'elemento che lo compone in prevalenza. Le fiamme tenderanno a salire verso l'alto in ogni circostanza; bolle d'aria nell'acqua tenderanno pure a salire; i corpi pesanti (composti prevalentemente dall'elemento terra) tenderanno invece inesorabilmente a cadere verso il basso. Da questo impianto teorico, tramite serrate deduzioni, Aristotele traeva diverse conclusioni. Ad esempio, affermava che corpi più pesanti dovessero cadere più velocemente di corpi più leggeri; o ancora, affermava l'impossibilità dell'esistenza del vuoto.

Le idee di Aristotele sopravvissero ai secoli e furono fatte proprie anche da pensatori medioevali e rinascimentali, sia cristiani che islamici. Esse costituirono il nucleo della visione scientifica dominante in Europa fino alla fine del XVI secolo. Apparentemente, nessuno si era mai curato di verificarne dettagliatamente le implicazioni e le conseguenze delle sue deduzioni.

Consideriamo, ad esempio, la deduzione aristotelica per cui la caduta libera di un corpo è tanto più rapida quanto maggiore è il suo peso. Risalgono solo alla fine del XVI secolo i primi esperimenti, tra l'altro piuttosto semplici, che mostrarono l'erroneità di questa affermazione. Un esperimento molto noto è quello svolto nel 1586 dal belga Simon Stevin. Egli fece cadere contemporaneamente due sfere di piombo, una pesante dieci volte meno dell'altra, da un campanile a Delft (Olanda). Osservò che inesorabilmente arrivavano al suolo nello stesso tempo, confutando le previsioni di Aristotele. Agli inizi del 1600, Galileo Galilei condusse altri studi su questi argomenti utilizzando un piano inclinato. Constatando che il moto di rotolamento di una sfera metallica sul piano era uniformemente accelerato, egli arrivò di fatto a sviluppare una legge matematica per descrivere il fenomeno.

Proprio a Galileo Galilei è attribuito il merito di avere posto le basi della Fisica così come la conosciamo oggi, fondata sul *metodo scientifico* e sull'uso del *linguaggio matematico*. In questo, egli operò una vera e propria rivoluzione rispetto a tutta la scienza precedente. Da Galileo in poi la Fisica, Scienza della Natura, prese dunque a separarsi dalla Filosofia e a perseguire un cammino autonomo.

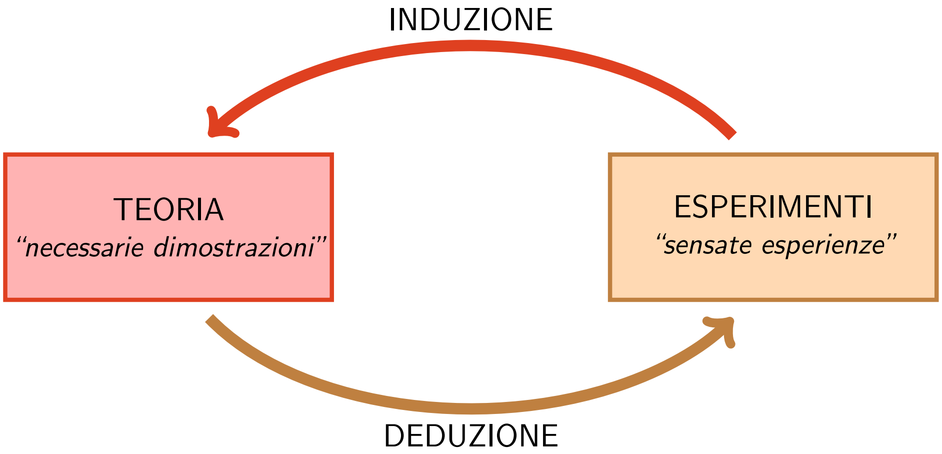


Figura 1: Rappresentazione schematica del modo di procedere tipico del metodo scientifico: le teorie sono formulate per induzione dall'osservazione della realtà sperimentale, dalle teorie si ricavano per deduzione conseguenze verificabili in nuovi esperimenti.

La Fisica da Galileo in poi: un metodo e un linguaggio

Il primo aspetto fondamentale della Fisica galileiana è il metodo impiegato per sviluppare la conoscenza della Natura, che prende il nome di **metodo scientifico** o *metodo sperimentale*. Esso si incardina su uno stretto rapporto tra quelle che Galileo chiamava "le sensate esperienze", cioè l'osservazione della realtà e l'esecuzione di prove mirate, e "le necessarie dimostrazioni", ovvero le teorie che la descrivono. Il metodo procede ciclicamente (vedi Figura 1). Anzitutto, a partire dall'osservazione della realtà, ragionando per *induzione*, si formulano ipotesi e si sviluppano teorie e modelli. Questi modelli sono quindi messi severamente alla prova: con procedimento *deduttivo* si cerca di trarne conclusioni che possano essere verificate con esperimenti precisi. Si torna così all'esperienza per avere la conferma delle proprie teorie.

È quest'ultimo un tratto specifico del metodo sperimentale, assai distante dall'approccio antico. È chiaro che anche le teorie di Aristotele, così come la grande varietà delle teorie precedenti, avessero come punto di partenza l'osservazione della realtà e delle evidenze che essa ci presenta quotidianamente. Nel pensiero greco era però sempre presente, in qualche modo, l'idea che una conoscenza superiore potesse originare dal *puro ragionamento*. Perciò, l'esperienza non era chiamata a convalidare le deduzioni ricavate, pur tramite complessi sillogismi. Esse erano ritenute vere *necessariamente*, in quanto conseguenze di assiomi considerati autoevidenti e indubitabili.

Al contrario, lo scienziato moderno cerca di trarre dalla teoria ipotizzata delle deduzioni che lo conducano a "*previsioni rischiose*" (Karl Popper). In altre parole, si concentra su quei fatti che ragionevolmente possono verificarsi *se e solo se* è vera la teoria. Addirittura, andrà a cercarne di proposito le conseguenze più inverosimili o paradossali, che costituiranno il banco di prova preferenziale per tutta la teoria costruita. In ogni caso, è richiesto che tali previsioni siano verificabili in *esperimenti*, cioè situazioni controllate e semplificate, preparate spesso dallo stesso scienziato, la cui osservazione porti a conseguenze chiare e non ambigue. Queste sono più propriamente le "sensate esperienze" di Galileo, che portarono a un salto di qualità nell'indagine delle leggi della Natura.

Un secondo aspetto fondante della Fisica di oggi, la cui importanza fu riconosciuta con chiarezza sempre da Galileo, è l'impiego del **linguaggio matematico**. Le teorie della Fisica sono infatti *modelli* matematici della realtà, ovvero rappresentazioni schematiche dei fenomeni che permettono di fare previsioni quantitative su di essi tramite leggi matematiche. Anche questo aspetto segna una differenza radicale rispetto alla Filosofia Naturale greca e medievale, che forniva spesso spiegazioni *qualitative*, orientate alla comprensione della natura ultima delle cose, e non *quantitative*, miranti cioè a descriverne in modo puntuale il comportamento.

La struttura stessa con cui sono organizzate gerarchicamente le teorie fisiche è quella propria delle

teorie matematiche. Essa si basa su alcuni assiomi fondamentali, detti “Principi”: questi non sono dimostrati, ma sono assunti ragionevolmente come veri a partire dall’osservazione della realtà e dei risultati degli esperimenti. Ci sono poi Teoremi e Leggi, proprio come in matematica, che vengono dimostrati per *deduzione* a partire dai Principi. Le conseguenze di questi teoremi e leggi sono poi sempre sottoposte a verifica sperimentale, come già discusso. Se l’esperimento conferma la previsione, allora avremo una prova in più (ma mai, a rigore, definitiva!) della bontà degli assiomi ipotizzati. Altrimenti, a meno di errori nei ragionamenti deduttivi impiegati, sono i Principi stessi di partenza a non potersi più considerare validi. Si dovrà modificare la teoria a partire da assiomi modificati e di nuovo riprendere le verifiche sperimentali delle conseguenze.
La successione di esperimenti-osservazioni-sviluppo di modelli-deduzioni-nuovi esperimenti prosegue incessantemente, in un ciclo che tende a perfezionare sempre di più i modelli teorici o a comprenderne i limiti di applicabilità. Anche la struttura della teoria è soggetta a continua analisi, con l’obiettivo di ridurre al minimo possibile il numero di Principi da assumere come indimostrati.

Nota sul contenuto di questo corso

Questo corso di Fisica si concentrerà sulla presentazione organica di teorie riguardanti la Meccanica e la Termodinamica, teorie che sono strutturate in Principi, Leggi e Teoremi. Sarà presentata la ragionevolezza dei Principi impiegati, sulla base di esperimenti e osservazioni riportate. Saranno dimostrate quindi numerose leggi, in forma di espressioni matematiche, che consentiranno di fare previsioni quantitative sulle condizioni di equilibrio e di movimento dei corpi (in Meccanica), o sulle dinamiche generate dal calore (in Termodinamica).
Anche quando ci si concenterà essenzialmente sulle dimostrazioni, tuttavia, non bisognerà mai dimenticare che la prova della bontà di un modello è unicamente la verifica sperimentale. Di fatto, ogni passaggio della teoria sviluppata è stato oggetto di verifica dettagliata e con esperimenti mirati, da parte di numerosi scienziati lungo i secoli. Ciascuna delle leggi enunciate è dunque stata verificata sperimentalmente.
Il fatto che l’Ingegneria abbia costruito macchine e dispositivi che basano il proprio funzionamento su di esse (e che tali macchine continuano a funzionare come devono) è un’ulteriore prova sperimentale quotidiana della loro validità.

2 Grandezze fisiche e loro misura

Definizioni fondamentali

Come discusso nella sezione precedente, l'approccio della Fisica per lo studio della natura si basa sulla scelta del linguaggio matematico per descriverla. Oggetto di studio della Fisica possono essere solo quelle caratteristiche della realtà che ci circonda (dette *grandezze fisiche*) che possano essere *misurate*, cioè quantificate numericamente e così trattate matematicamente. Si può definire:

Grandezza fisica

Una **grandezza fisica** è una caratteristica di un corpo o di un fenomeno che può essere *misurata*; la definizione di una grandezza coincide con la *descrizione delle procedure per misurarla.*

Si dice perciò che le grandezze fisiche sono definite in modo **operativo**, cioè proprio tramite le operazioni che servono per misurarle. Per spiegare cos'è la lunghezza, si può spiegare come misurarla con un regolo, per spiegare cos'è il tempo, si può dire che è ciò che si misura con l'orologio. Queste definizioni potrebbero apparire alquanto prosaiche. Sicuramente è palese la distanza dal modo di pensare degli antichi che volevano giungere a un'essenza astratta e filosofica delle cose. La Fisica da Galileo in poi ha invece chiarito e precisato il suo ambito di indagine come la descrizione quantitativa di ciò che è *esperienza.* Domande più profonde o filosofiche non sono negate, ma sono dichiarate come al di fuori del suo scopo.
Risulta necessario a questo punto stabilire precisamente cosa significhi misurare.

Misurazione

Si definisce **misurazione** il procedimento operativo per associare a una grandezza fisica un numero. Tale numero è la **misura** di quella grandezza.

Per essere compatibili con il metodo scientifico, le procedure di misura devono essere riproducibili: misure ripetute sulla stessa grandezza devono dare *idealmente* lo stesso valore, indipendentemente dalla persona che le esegue.

Unità di misura

Le procedure di misura richiedono sempre il confronto con un'adeguata grandezza campione detta **unità di misura**. Quest'ultima deve essere una grandezza confrontabile con quella da misurare, ovvero ad essa *omogenea* (non ha senso confrontare masse con lunghezze, o tempi con velocità!). In dettaglio, la misurazione ha lo scopo di stabilire il **rapporto tra la grandezza in esame e l'unità di misura**.
Prendiamo come esempio la misura di lunghezza effettuata con un regolo campione (vedi Figura 2). Si accostano tanti regoli identici al bordo dell'oggetto da misurare, partendo da un estremo e fino ad arrivare all'altro. Possiamo stabilire che il risultato della misura sia dato dal numero di regoli che possiamo accostare fino ad arrivare all'altro estremo, senza superarlo. Se un numero intero di regoli campione non è adeguato per arrivare esattamente all'altro estremo possiamo eventualmente cercare di riempire lo spazio rimanente con regoli più piccoli, frazioni note del campione originario. Dopo questa operazione è verosimile che rimanga ancora uno spazio libero non corrispondente a questi regoli. In linea di principio, possiamo procedere con regoli sottomultipli sempre più piccoli, fino a che non siamo soddisfatti della risoluzione ottenuta. La misura sarà allora la specificazione non ambigua del numero di regoli interi e di tutti i regoli sottomultipli impiegati.

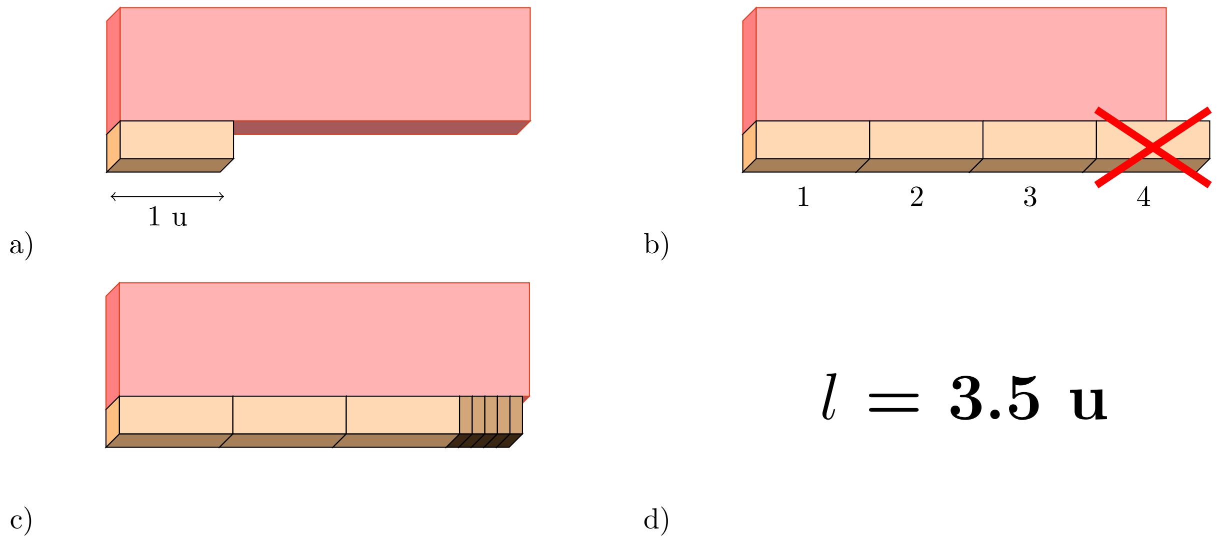


Figura 2: Illustrazione del procedimento di misura diretta di una lunghezza tramite regoli. (a) Si vuole misurare il lato maggiore del parallelepipedo rosso, scegliendo l'unità di misura (1 u) costituita dal regolo chiaro. (b) Si accostano al lato da misurare regoli identici uno a fianco all'altro, partendo dallo spigolo a sinistra e fino a che l'estremo dell'ultimo regolo non supera l'altro spigolo del parallelepipedo. Qui la misura risulta essere 3 u. (c) Lo spazio rimasto ancora libero può essere confrontato con regoli sottomultipli (il regolo scuro, pari a 1/10 u), procedendo allo stesso modo. Si contano 5 regoli più piccoli, prima di superare lo spigolo. (d) La misura della lunghezza è l'indicazione non ambigua di tutti i regoli usati: in forma decimale si può scrivere 3.5 u.

Ragionando su questo di esempio si può intuire che la definizione di una procedura di misura deve includere in modo più o meno esplicito:

i) la definizione dell'operazione di somma tra grandezze omogenee (cioè, il fatto che due regoli accostati costituiscano la somma del loro valore)

ii) la definizione di un criterio di confronto per valutare le disuguaglianze (cioè stabilire che, se si supera l'estremo della lunghezza da misurare, la lunghezza dei regoli accostati è inferiore a quella dell'oggetto, altrimenti è superiore).

Per una singola grandezza fisica possono esistere *diverse unità di misura*. Non si sta parlando qui solo dei multipli o sottomultipli già citati nell'esempio con il regolo, ma proprio di campioni differenti. La scelta di quale usare non è mai obbligata da ragioni fisiche, ma al contrario è dettata da convenzioni, esigenze di comodità o convenienza di comunicazione dei risultati. Fino a qualche secolo fa, era comune trovare unità di misura diverse per indicare lunghezze o pesi anche solo cambiando regione. Si capisce come tale molteplicità di campioni utilizzati potesse generare inconvenienti anche nei commerci. Il venditore che ci sta vendendo dieci "braccia"[1] di stoffa pregiata e costosa starà usando come unità di misura il braccio milanese (circa 59 cm) o il braccio fiorentino (circa 58 cm)?
Per risolvere questi problemi, a partire dalla Rivoluzione Francese è iniziato un processo di unificazione delle unità di misura in uso nei vari Paesi, che ha dato origine all'odierno **Sistema Internazionale (SI)**. Il SI è una convenzione di utilizzo di unità di misura per le varie grandezze fisiche, oggi adottato in larga parte del mondo e anche in Italia. E' anche detto **sistema MKS**, dalle iniziali delle tre unità di misura adottate per lunghezza, massa e tempo: rispettivamente il *metro* (m), il *kilogrammo* (kg) e il *secondo* (s). Il SI è oggi adottato pressoché universalmente dalla comunità scientifica. Negli Stati Uniti d'America e in Gran Bretagna, tuttavia, soprattutto in alcuni contesti, è ancora in uso il **sistema britannico (BRIT)**, basato sul *piede* per la lunghezza e sulla *libbra* per la massa.

[1]Antica unità di misura di lunghezza impiegata anche in Italia.

Fattore	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Prefisso	kilo	mega	giga	tera	peta	exa	zetta	yotta
Simbolo	k	M	G	T	P	E	Z	Y
Fattore	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{24}
Prefisso	milli	micro	nano	pico	femto	atto	zepto	yocto
Simbolo	m	μ	n	p	f	a	z	y

Tabella 1: Prefissi impiegati nel Sistema Internazionale per specificare multipli e sottomultipli dell'unità di misura. Il prefisso intero si antepone all'unità di misura scritta per esteso (ad es. nanometro, megahertz, picosecondo). Il simbolo si antepone al simbolo dell'unità di misura, usato di fianco al valore numerico (ad es. nm, MHz, ps).

Appare evidente a questo punto che la misura di una grandezza fisica, per non essere ambigua, deve *sempre* essere scritta accostando al valore numerico la sua unità di misura in forma simbolica[2]. Dire che un tavolo è lungo 1.3 (senza null'altro aggiungere) è un'affermazione errata e priva di significato; la lunghezza di un tavolo potrà essere invece 1.3 m.
Nel Sistema Internazionale, multipli e sottomultipli delle unità di misura sono sempre decimali. Per indicarli si usano correntemente i *prefissi* specificati nella Tabella 1: 1000 metri sono pari a 1 kilometro; 10^{-9} secondi sono pari a 1 nanosecondo e così via.
Le misure che procedono tramite il confronto diretto con un campione sono dette **misure dirette**. Ad esempio la misura di una lunghezza tramite un regolo o un metro a nastro è una misura diretta. Se invece la misura è ottenuta tramite dei calcoli a partire dalla misura diretta di altre grandezze, questa è detta **misura indiretta**. Per esempio, un telemetro laser misura la distanze sulla base della misura del tempo impiegato da un impulso di luce, partito dallo strumento, per ritornare allo strumento stesso dopo essere stato riflesso dall'oggetto di interesse.

Dimensioni delle grandezze fisiche

Si distinguono due tipi di grandezze fisiche, **fondamentali** e **derivate**. Le grandezze fisiche fondamentali sono un sottoinsieme di grandezze che non possono essere espresse come combinazione di altre grandezze. Nel SI le grandezze fondamentali sono sette in tutto e sono elencate in Tabella 2; quelle rilevanti per la Meccanica sono tipicamente *tempo*, *lunghezza* e *massa*. Le grandezze derivate si definiscono invece dalla combinazione di altre grandezze. Ad esempio, la velocità è definita come lunghezza percorsa in un'unità di tempo.
Le unità di misura delle grandezze fondamentali sono definite tramite misure dirette, mentre le unità di misura delle grandezze derivate originano dalle combinazioni delle unità di misura delle grandezze componenti. Ad esempio, nel SI la velocità si misura in metri al secondo (m/s).
Due grandezze fisiche omogenee hanno, si dice, le stesse **dimensioni**. Il concetto di dimensione specifica in Fisica le *classi di equivalenza* delle grandezze fisiche. Per distinguere nella notazione quando ci si vuole riferire alle dimensioni della grandezza, e non alla grandezza stessa, si usa il simbolo della grandezza tra parentesi quadre:

$$\begin{array}{ll} [\mathrm{T}] & \text{dimensioni del tempo} \\ [\mathrm{L}] & \text{dimensioni di una lunghezza} \\ [\mathrm{M}] & \text{dimensioni di una massa} \end{array}$$

Le dimensioni di una qualsiasi grandezza possono essere espresse come prodotto di opportune potenze delle dimensioni delle grandezze fondamentali; ad esempio [volume] $= \left[\mathrm{L}^3\right]$; [velocità] $= \left[\mathrm{L\,T}^{-1}\right]$.

[2] Per convenzione, le unità di misura si scrivono con il nome per esteso quando sono menzionate in una frase, ma sono scritte sempre abbreviate, ovvero in forma simbolica, dopo il valore numerico. “Il kilogrammo è un'unità di misura della massa.” ma “La massa d'acqua contenuta nel bicchiere è pari a 0.2 kg.”

Grandezza	**Simbolo**	**Unità di misura**
tempo	T	secondo (s)
lunghezza	L	metro (m)
massa	M	kilogrammo (kg)
intensità di corrente elettrica	I	ampere (A)
temperatura	Θ	kelvin (K)
quantità di materia	N	mole (mol)
intensità luminosa	$\mathrm{I_V}$	candela (cd)

Tabella 2: Grandezze fisiche fondamentali nel Sistema Internazionale.

Ci sono anche **grandezze adimensionali** che hanno la dimensione di numeri puri. Volendo esprimerle in funzione delle grandezze fondamentali, tutti gli esponenti sono pari a zero. Per esempio: il numero di palline in una scatola è una grandezza fisica adimensionale, adimensionale è anche il rapporto tra grandezze omogenee.
In una legge fisica, cioè in una equazione matematica che mette in relazione diverse grandezze, i due termini dell'uguaglianza devono avere le stesse dimensioni. Altrimenti, sarebbe un'uguaglianza illecita, perché solo grandezze omogenee possono essere confrontate. Si parla di **analisi dimensionale** quando si studiano le dimensioni dei vari termini di una legge fisica. Una condizione necessaria (ma non sufficiente!) affinché una legge fisica sia corretta, è che sia corretta dimensionalmente.
La verifica della correttezza dimensionale è un utile controllo che può essere svolto quando si riportano o si effettuano operazioni sulle formule algebriche delle leggi fisiche. Per esempio in un moto rettilineo uniforme si scrive la legge:

$$x = v \cdot t$$

dove x ha le dimensioni di una lunghezza, v di una velocità e t di un tempo. Tale formula è corretta dimensionalmente in quanto:

$$\begin{aligned} &[x] = [\mathrm{L}] \\ &[v] = [\mathrm{L}]\left[\mathrm{T}^{-1}\right] \qquad \rightarrow \qquad [x] = [\mathrm{L}] = [\mathrm{L}]\left[\mathrm{T}^{-1}\right][\mathrm{T}] = [v]\,[t] \\ &[t] = [\mathrm{T}] \end{aligned}$$

Al contrario, una legge del tipo $x = vt^3$ non potrebbe avere significato fisico, in quanto errata dimensionalmente. Ricordiamo comunque che la sola correttezza dimensionale non garantisce che non siano stati fatti altri tipi di errori.

La definizione delle grandezze fondamentali della Meccanica

Per concludere, può essere utile discutere brevemente la definizione delle tre grandezze fondamentali in meccanica, assieme alla definizione delle loro unità di misura fondamentali nel Sistema Internazionale.

Tempo

Il **tempo** è la grandezza fisica che si misura con l'orologio.

Un orologio si basa sempre su un fenomeno periodico (un orologio a pendolo sulle oscillazioni di un pendolo, un orologio al quarzo sulle vibrazioni di un cristallo di quarzo): un periodo di tale fenomeno costituisce un campione unitario del tempo. L'orologio è uno strumento in grado di contare questi eventi periodici che si ripetono e fornisce perciò una misura del tempo trascorso, eventualmente trasformando il valore misurato in un'unità di misura diversa. Ad esempio, in un orologio digitale il cristallo di quarzo compie tipicamente più di 30000 oscillazioni al secondo: un circuito elettronico trasforma poi questo conteggio in secondi, minuti, ore.

Per la definizione dell'unità di misura fondamentale di tempo, nel SI, si utilizza come fenomeno periodico la radiazione elettromagnetica oscillante emessa, in particolari condizioni, da un isotopo del Cesio: il secondo è l'intervallo di tempo corrispondente a 9 192 631 770 periodi di tale oscillazione.

Lunghezza

La **lunghezza** è la grandezza fisica che si misura con il regolo.

Il procedimento di misura diretta si basa su un determinato campione di lunghezza. Regoli della stessa lunghezza possono essere accostati l'uno accanto all'altro all'oggetto da misurare e il numero di regoli contenuti costituisce il valore di lunghezza misurato. Per praticità, tipicamente anziché impiegare questo metodo di confronto diretto con un singolo campione, si utilizza un oggetto graduato (un righello, un metro a nastro...) che permette di svolgere un'operazione equivalente.
Nel SI l'unità di misura fondamentale della lunghezza è il metro, che è definita come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299 792 458 di secondo.

Massa

La **massa** è la grandezza fisica che si misura con la bilancia a due bracci.

Per la misura diretta si pone l'oggetto da misurare su un piatto della bilancia e si contano i campioni di peso che occorre posare sull'altro piatto per avere l'equilibrio: il numero di questi ultimi fornisce il valore misurato della massa. Chiaramente si possono combinare, per maggiore praticità, campioni corrispondenti a multipli, sottomultipli o frazioni note dell'unità di misura principale, che vanno conteggiati in modo appropriato.
Nel SI l'unità di misura fondamentale della massa è il kilogrammo. Fino al 2019 la definizione questa unità di misura si riferiva semplicemente a un kilogrammo campione, cioè un cilindretto costruito in platino-iridio custodito a Parigi (*Le Grand Kilo*), la cui massa per definizione era pari a un kilogrammo. Più recentemente questa unità di misura è stata definita sulla base di una procedura più complessa, la cui comprensione va molto al di là delle possibilità di questo corso. Essa coinvolge una particolare bilancia (*bilancia di Kibble*) che consente di correlare la misura di massa al valore di una costante di natura (la *costante di Planck*) e perciò permette di definire il kilogrammo sulla base di un valore assegnato a quella costante. Chiaramente, la nuova definizione è stata costruita in modo che il valore effettivo del kilogrammo sia praticamente invariato rispetto alla definizione precedente. La nuova definizione tuttavia permette di definire l'unità di misura con minore incertezza rispetto alla precedente.

3 L'incertezza di misura

Quando si compiono misure ripetute sulla stessa grandezza fisica, impiegando strumenti di misura diversi, oppure anche lo stesso strumento, l'esperienza mostra che i risultati ottenuti non sono tutti uguali tra loro. Se la misura di una medesima grandezza produce risultati leggermente differenti, distribuiti in un intervallo di una certa ampiezza, ciò significa che un dato valore misurato potrebbe in realtà originare da un intervallo altrettanto ampio di valori possibili del misurando. Questo intervallo è detto **incertezza di misura**.

Si dice **errore** la differenza tra il risultato di una data misura e il valore effettivamente posseduto dalla grandezza (*valore vero*). Poiché noi conosciamo direttamente solo il risultato della misura, ne consegue che non è possibile conoscere con certezza né il valore vero né l'errore. Questi ultimi possono solamente essere stimati. Lo stesso risultato di misura è una stima del valore vero della grandezza (con una data incertezza); stime più accurate (con minore incertezza) possono in genere essere ottenute ripetendo le misure più volte e sfruttando gli strumenti della statistica, ad esempio operando la media dei risultati.

Si distinguono solitamente due categorie di errori, in base alla loro influenza sul risultato di misure ripetute:

- **errore sistematico**: è un errore che ha sempre la stessa entità e lo stesso segno, quando la misura è ripetuta;

- **errori casuali**: sono errori che cambiano entità e segno da una misurazione all'altra, ma hanno media nulla.

Tanto più l'errore sistematico è piccolo, tanto più si dice che una misura è *accurata*. Tanto più l'errore casuale è piccolo, tanto più si dice che una misura è *precisa*. Essendo gli errori casuali a media nulla, la loro influenza può essere diminuita operando la media di misure ripetute, come si può dimostrare facendo ricorso alla Statistica. Gli errori sistematici, invece, sono più difficili da individuare e richiedono tipicamente confronti con strumenti più accurati.

Gli errori di misura, sistematici oppure casuali, possono avere cause molto diverse, delle quali discutiamo qui di seguito, brevemente alcuni esempi.

Errori soprattutto di tipo sistematico possono essere attribuiti a non idealità dello strumento o della procedura di misura. Ad esempio, se pesiamo con una bilancia non perfettamente azzerata, anche quando il piatto della bilancia è vuoto il quadrante segnerà un peso non nullo e quel peso andrà a sommarsi/sottrarsi a tutte le pesate successive.

Altri errori possono essere causati dal fatto che il nostro strumento di misura non è sensibile solo alla grandezza che vogliamo misurare, ma anche ad altri fattori, che influenzano in modo imprevedibile il risultato. Per esempio, bilance molto sensibili potrebbero dare valori fluttuanti in presenza di una brezza o lieve spostamento d'aria all'interno del laboratorio. In realtà, tra questo tipo di cause potremmo annoverare anche la non perfetta riproducibilità delle azioni dello sperimentatore.

Un particolare tipo di errore è l'errore di sensibilità, dovuto al fatto che lo strumento di misura non è in grado di discernere sottomultipli arbitrariamente piccoli dell'unità di misura. Ad esempio, su un righello che ha tacche in corrispondenza dei millimetri, non è possibile leggere i centesimi di millimetro o i micrometri. È importante qui notare che il problema non si risolverebbe solamente aggiungendo tacche sul righello con spaziatura sempre inferiore: infatti, verosimilmente il posizionamento del righello stesso rispetto all'oggetto da misurare non può essere fatto con precisione arbitraria. Di fatto, ha poco senso produrre uno strumento la cui sensibilità (cioè l'analogo della spaziatura delle tacche) sia di molto inferiore all'errore casuale presente nella misurazione. Incrementare la sensibilità dello strumento senza migliorare anche altri aspetti della sua costruzione o della procedura di misura, semplicemente metterebbe in mostra più evidentemente gli errori casuali.

Già da questa breve discussione si capisce che *è impossibile annullare del tutto l'incertezza di misura*. Lo sperimentatore dovrà curarsi di ridurla quando possibile, ma soprattutto di quantificarla e gestirla

Valore numerico	108	10.8	10.82	10.80	0.108
Numero di cifre significative	3	3	4	4	3
Errore stimato	~ 1	~ 0.1	~ 0.01	~ 0.01	~ 0.001
Notazione scientifica	$1.08 \cdot 10^2$	$1.08 \cdot 10^1$	$1.082 \cdot 10^1$	$1.080 \cdot 10^1$	$1.08 \cdot 10^{-1}$

Tabella 3: Esempi di applicazione del criterio delle cifre significative per indicare l'errore di misura, per diversi valori numerici. Nell'ultima riga della tabella il valore numerico della prima riga è scritto in notazione scientifica.

anche utilizzando gli strumenti della statistica. È questo un argomento vasto e molto importante, che però non sarà trattato in questo corso.
Proprio perché ineliminabile e dunque presente in ogni misurazione, l'errore deve essere sempre considerato, quando si utilizza un dato proveniente da una misura sperimentale. In generale, affinché sia riportato in modo completo, **il risultato di una misura sperimentale deve indicare anche l'errore stimato** (oltre all'unità di misura). Ad esempio, per una misura di massa, si potrebbe avere:

$$m = (2.5 \pm 0.1) \text{ kg}$$

Questa notazione indica che il risultato ottenuto dalla misura è 2.5 kg. Tuttavia, possiamo stimare (tipicamente, a partire da misure analoghe ripetute più volte) che se ripetessimo quella misura potremmo ottenere un valore differente entro $\pm$ 0.1 kg. Dunque, il nostro risultato è incerto in quell'intervallo.
Un modo sintetico per indicare l'incertezza, adottato soprattutto quando non è così importante valutare l'errore in modo dettagliato, è quello di scrivere i valori numerici curando il numero di **cifre significative**. Si dicono cifre significative tutte le cifre riportate in un valore numerico, escludendo i primi zeri a sinistra. Se non è specificato l'errore in modo esplicito, si considera *che esso incida solo sulla cifra più a destra*. Esempi sono dati in Tabella 3.
Una notazione che rende immediatamente evidente il numero di cifre significative adottate è la *notazione scientifica* o *esponenziale*. Il valore numerico è scritto nella forma:

$$x \cdot 10^y$$

dove $1 \leq |x| < 10$ e y è un numero intero (positivo o negativo). x ha dunque una sola cifra a sinistra della virgola. Il numero di cifre significative è quindi pari al numero di decimali impiegati più uno.
Compiendo operazioni sui valori numerici (somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni...), l'errore di misura si *propaga* dai valori di partenza al risultato finale. Per tenere conto di questo, il risultato dovrà essere scritto con un numero di cifre significative pari a quelle dell'addendo più incerto. Laddove necessario, il risultato andrà dunque arrotondato al giusto numero di cifre significative. Questa regola pratica approssimata può essere giustificata a partire dalla teoria della propagazione degli errori, che qui non trattiamo.

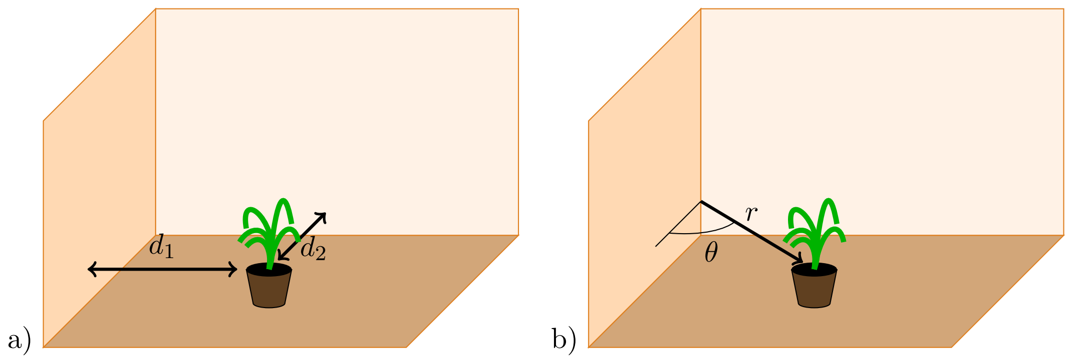


Figura 3: La posizione di un oggetto in una stanza può essere determinata con riferimento ad altri corpi considerati come fissi e indeformabili, ad esempio le pareti della stanza. In particolare, la posizione potrebbe essere indicata tramite le distanze dalle due pareti (a) oppure sulla base della distanza da uno spigolo e di un angolo (b).

4 Sistemi di riferimento e sistemi di coordinate

La posizione e il moto di un corpo non sono concetti *assoluti*. La posizione di un corpo è sempre *relativa* rispetto ad altri corpi assunti come riferimenti: potrà essere specificata con precisione sulla base delle distanze misurate da questi ultimi, espresse impiegando adeguate *unità di misura*. Ad esempio, immaginiamo di voler specificare la posizione di un vaso posato sul pavimento di una stanza vuota: potremmo riferirci in qualche modo alle distanze dalle pareti della stanza (Figura 3). Se la stanza fosse infinita, vuota e senza pareti, come infinito e isotropo è virtualmente lo spazio tridimensionale, non sarebbe possibile specificare alcuna posizione! Anche lo stato di moto o quiete è *relativo* al riferimento adottato. Una valigia, posata sulla cappelliera di un treno in corsa, apparirà ferma al passeggero seduto di fronte. La stessa valigia apparirà invece in movimento ad un osservatore fermo sulla banchina di una stazione, che la stia vedendo attraverso il finestrino.
Finora abbiamo discusso essenzialmente riferimenti *spaziali* In realtà, per la descrizione completa dei movimenti, che sono variazioni di posizione nel tempo, è richiesto di compiere misure di intervalli di tempo e perciò è necessario anche un *orologio*.

Sistema di riferimento

Si definisce **sistema di riferimento** l'insieme che comprende:

- i corpi indeformabili posti a distanze fisse gli uni dagli altri, rispetto ai quali è possibile descrivere la posizione e il moto di altri corpi
- un orologio con cui sia possibile misurare intervalli di tempo.

Dato un sistema di riferimento, è possibile specificare la posizione dei corpi in molti modi diversi. Pensiamo ad esempio alla stanza vuota menzionata sopra, in cui i corpi scelti come riferimenti fissi sono le pareti e il pavimento. La posizione di un punto potrebbe essere specificata allora tramite le distanze (misurate ortogonalmente) da due pareti e l'altezza dal pavimento.[3] In alternativa, però, si potrebbe anche impiegare la distanza rispetto a uno spigolo fissato, l'angolo rispetto a una parete e di nuovo l'altezza dal pavimento (Figura 3b). Entrambi questi metodi permettono di associare in modo biunivoco una terna di numeri reali alla posizione dell'oggetto di interesse: prendono il nome di *sistemi di coordinate*. Sottolineiamo che entrambi questi metodi assumono come riferimenti fissi gli stessi corpi quindi sono *sistemi di coordinate* diversi associati allo stesso *sistema di riferimento*. Definiamo dunque:

[3]Nel caso del vaso, l'altezza dal pavimento è assunta nulla nel momento in cui si specifica che è appoggiato.

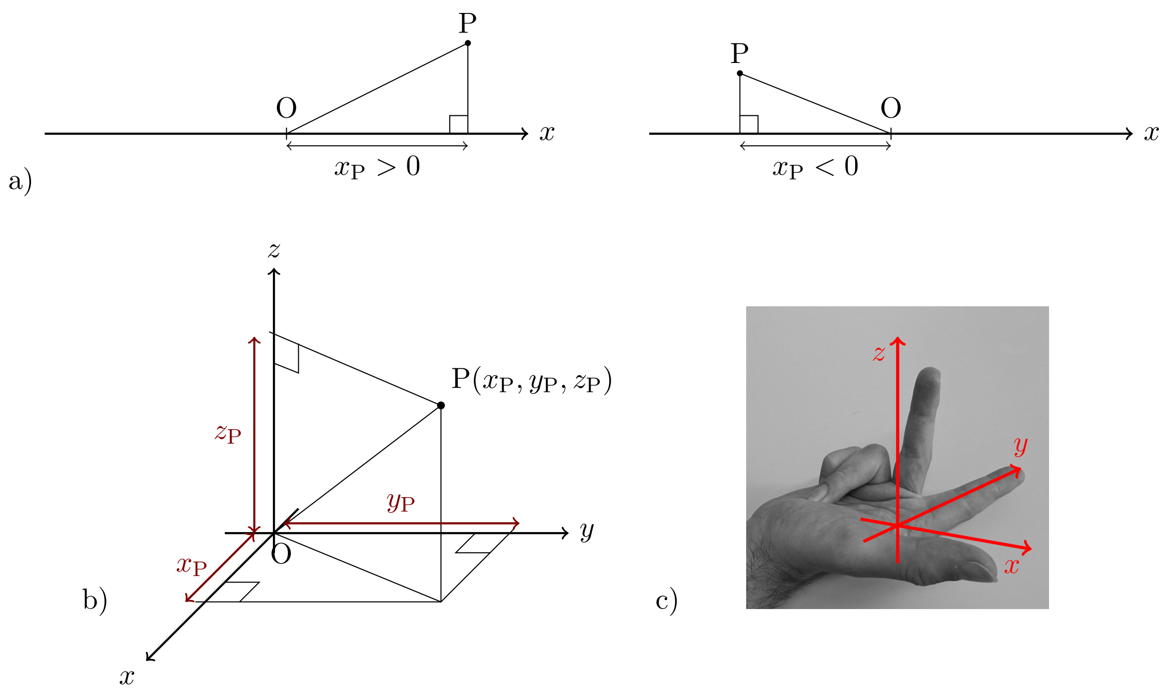


Figura 4: (a) Proiezione ortogonale di un punto P su una retta orientata x. Fissata un'origine O sull'asse la coordinata cartesiana x_P del punto P rispetto a questo asse è la distanza della proiezione dall'origine, presa con il segno positivo se la proiezione del punto si trova sul semiasse positivo, altrimenti con il segno negativo. (b) Posizione di un punto P in un sistema di coordinate cartesiane nelle tre dimensioni. (c) Le orientazioni dei tre assi cartesiani devono seguire la regola della mano destra.

Sistema di coordinate

Si definisce **sistema di coordinate** una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e una n-upla ordinata di numeri reali.

Il numero di coordinate necessarie può differire a seconda delle situazioni. Per descrivere la posizione di un punto su una linea, un solo numero reale è sufficiente; su un piano servono *coppie* ordinate di numeri reali; per descrivere la posizione nello spazio tridimensionale servono *terne* di numeri.
Un sistema di coordinate ampiamente utilizzato è il **sistema di coordinate cartesiane** (Figura 4). Si stabiliscono tre rette orientate dette *assi*, mutuamente ortogonali e intersecanti in un unico punto detto *origine*. Tali assi sono nominati x, y e z e l'orientazione è fissata in modo che formino in tale ordine una *terna destrorsa*. In altre parole, gli assi x, y e z devono essere orientati rispettivamente come il pollice, indice e medio della mano destra. L'orientazione stabilisce su ciascun asse un semiasse positivo e un semiasse negativo rispetto all'origine. Dato un punto arbitrario P nello spazio, si tracciano le proiezioni ortogonali del punto sui tre assi: le tre coordinate cartesiane del punto P sono le distanze delle tre proiezioni dall'origine, prese col segno positivo o negativo a seconda del segno stabilito del semiasse. Queste tre distanze sono sempre riportate nell'ordine fissato (x, y, z).
Altri sistemi di coordinate possibili sono ad esempio quello di **coordinate cilindriche** o di **coordinate sferiche**, discussi rispettivamente nei Riquadri 1 e 2. La scelta di utilizzare un sistema di coordinate piuttosto che un altro è data dalla unicamente comodità di descrizione di un certo tipo di problema, in relazione anche alla simmetria del sistema fisico in esame. Per esempio, per descrivere la posizione di un punto sul globo terrestre si usano latitudine, longitudine e altitudine, che sono un particolare tipo di coordinate sferiche. Per descrivere la posizione di un pixel su uno schermo rettangolare si possono invece impiegare coordinate cartesiane nel piano. È sempre possibile, comunque, passare da un sistema di coordinate ad un altro (con lo stesso numero di coordinate) per mezzo di trasformazioni matematiche.

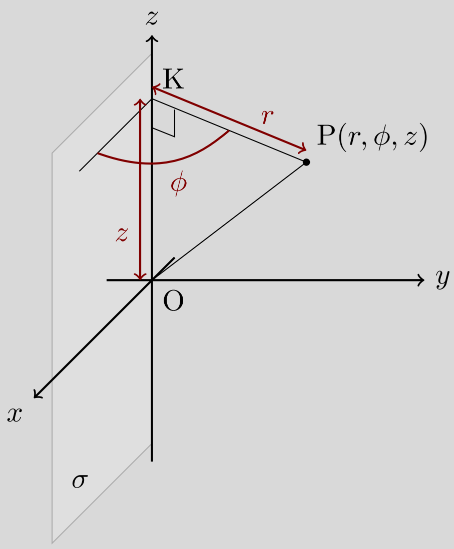
Riquadro 1 - Coordinate polari cilindriche

Un sistema di coordinate cilindriche si basa su una retta orientata (asse) di riferimento z con origine O e su un semipiano σ che lo contiene. Sia K la proiezione di un punto P sull'asse z. Le coordinate del punto P sono r, ϕ e z definite come:

- r: la lunghezza del segmento PK, sempre con il segno positivo;
- ϕ: l'angolo compreso tra il segmento PK e il semipiano σ, misurato in verso antiorario (da un osservatore che veda z diretto verso di sé);
- z: la lunghezza del segmento OK, con il segno positivo o negativo a seconda del semiasse su cui cade la proiezione.

Se si considera ora un sistema di coordinate cartesiane in cui l'asse z coincide con l'asse z del sistema di coordinate cilindriche e l'asse x giace (per la sua parte positiva) sul semipiano σ, è possibile passare da un sistema di coordinate all'altro con le trasformazioni seguenti:

$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi \\ y = r\,\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$



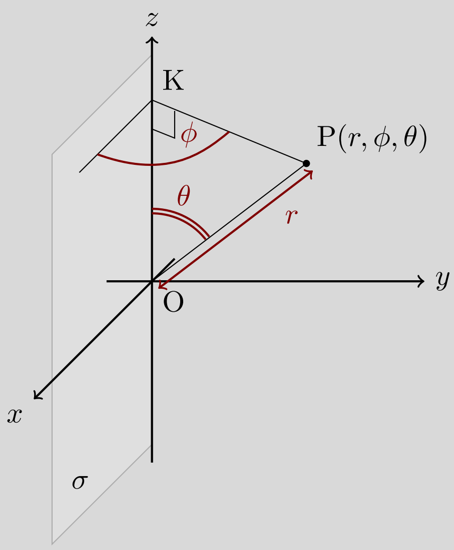
Riquadro 2 - Coordinate polari sferiche

Un sistema di coordinate sferiche si basa su una retta orientata di riferimento z con origine O (*asse polare*) e su un semipiano σ che lo contiene. Sia K la proiezione di un punto P sull'asse z. Le coordinate del punto P sono r, ϕ e θ definite come:

- r (*raggio*): la lunghezza del segmento OP, ovvero la distanza del punto P dall'origine;
- ϕ (*longitudine*): l'angolo compreso tra il segmento KP e il semipiano σ, misurato in verso antiorario (da un osservatore che veda z diretto verso di sé);
- θ (*colatitudine*): l'angolo (positivo) compreso tra il segmento OP e l'asse z;

Se si considera ora un sistema di coordinate cartesiane in cui l'asse z coincide con l'asse z del sistema di coordinate sferiche e l'asse x giace (per la sua parte positiva) sul semipiano σ, è possibile passare da un sistema di coordinate all'altro con trasformazioni seguenti:

$$\begin{cases} x = r\,\sin\theta\,\cos\phi \\ y = r\,\sin\theta\,\sin\phi \\ z = r\,\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$



5 Grandezze scalari e vettoriali

Abbiamo già discusso come il concetto di grandezza fisica sia strettamente legato all'esistenza di un'operazione di *misura*, che permette di associarvi univocamente un *numero*. In realtà, associare *un solo* numero può non essere sufficiente per caratterizzare completamente alcune grandezze.
Pensiamo, per esempio, di trovarci in una grande piazza deserta, in un punto noto, e ad un certo istante di spostarci in un altro punto arbitrario di questa piazza. Per descrivere il nostro *spostamento* in modo completo, specificare un solo numero reale non è sufficiente. Se ad esempio dicessimo soltanto *di quanto* ci siamo spostati, cioè la distanza rispetto al punto di partenza, potremmo essere su un punto qualsiasi di una circonferenza centrata sul punto di partenza, avente raggio pari a questa distanza (Figura 5a). Per identificare univocamente lo spostamento è necessario conoscere l'equivalente di un *segmento orientato* nello spazio, ovvero una *freccia* (Figura 5b).
Distinguiamo perciò due tipi di grandezze fisiche, dette *scalari* e *vettoriali*.

Grandezza scalare

Uno **scalare** è una grandezza fisica rappresentabile completamente tramite un **numero reale**.

Le grandezze scalari si indicano con una lettera dell'alfabeto, senza alcun segno aggiuntivo: ad esempio sono scalari la lunghezza l di un oggetto, la sua massa m o l'intervallo di tempo τ trascorso tra due eventi.

Grandezza vettoriale

Un **vettore** è una grandezza fisica rappresentabile completamente tramite un **segmento orientato** nello spazio, su cui ha significato l'operazione di **somma secondo la regola del parallelogramma** e l'operazione di **moltiplicazione per uno scalare**.

I vettori si indicano con una lettera *segnata al di sopra da una freccia*; questa è la notazione consigliata soprattutto nella scrittura a mano. Alternativamente, un vettore può essere indicato da una lettera in grassetto (soluzione adottata in alcuni testi stampati, ma sconsigliabile nella scrittura a mano) o da una lettera sottolineata (notazione utilizzata in algebra).

$$\vec{v} \qquad \mathbf{v} \qquad \underline{v}$$

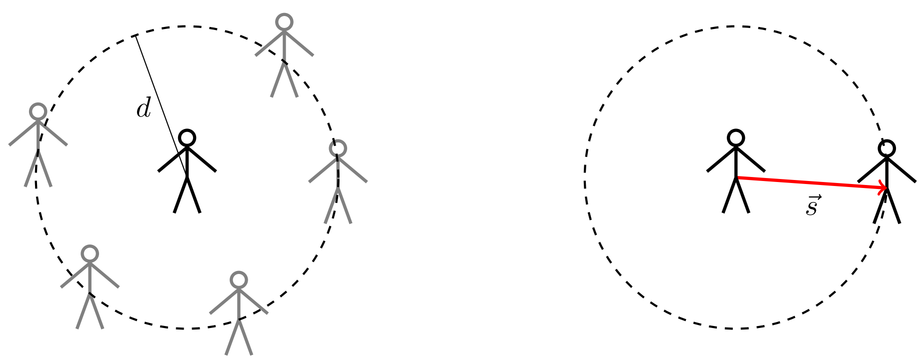


Figura 5: Per descrivere uno spostamento su un piano, non è sufficiente specificare la distanza d. Infatti questa distanza corrisponde a un'infinità di possibili punti di arrivo, disposti su una circonferenza di raggio d centrato nella posizione iniziale. Per descrivere univocamente lo spostamento è necessario specificare l'informazione equivalente a un segmento orientato, indicato qui con $\vec{s}$.

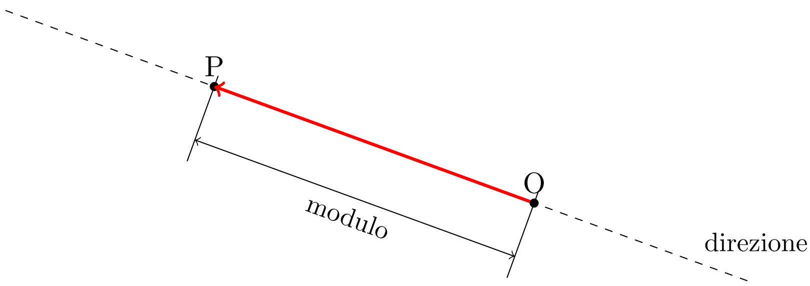


Figura 6: Un segmento orientato da un punto O, detto *origine*, a un punto P, detto *estremo libero*, rappresenta un vettore. La lunghezza del segmento indica il *modulo* del vettore. La retta su cui giace, o meglio il fascio di rette parallele a cui questa appartiene, rappresenta la *direzione*. Il *verso* è data dall'orientazione del segmento (da O verso P e non da P verso O).

Un vettore $\vec{v}$, per essere determinato completamente, richiede la conoscenza di tre parametri, corrispondenti a proprietà diverse del segmento orientato che lo rappresenta (Figura 6):

- **modulo**: un numero reale positivo, corrispondente alla lunghezza del segmento orientato in un'opportuna unità di misura,
- **direzione**: identificata dal fascio di rette parallele a cui appartiene quella su cui giace il segmento;
- **verso**: l'orientazione del segmento.

Il modulo del vettore $\vec{v}$ si indica con $|\vec{v}|$ oppure, se non c'è ambiguità con altre quantità scalari, con v. Se un segmento di estremi O e P è orientato da O verso P, O è detto *origine* o *punto di applicazione* mentre P è detto *estremo libero*. Un'ulteriore notazione per identificare il vettore specificando i punti estremi del segmento orientato può essere anche $\overrightarrow{OP}$.

Definizioni relative ai vettori

Si danno le seguenti definizioni:

vettore nullo: un vettore di modulo nullo, per cui direzione e verso non sono definiti; si indica con 0;

versore: un vettore di modulo unitario, adimensionale; esso è utile per rappresentare genericamente una retta orientata, di cui porta direzione e verso.

Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si dicono:

uguali: se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso;
$$\vec{a} = \vec{b}$$

paralleli: se hanno la stessa direzione e lo stesso verso, ma moduli eventualmente diversi;
$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

opposti: se hanno la stessa direzione, lo stesso modulo, ma verso opposto:
$$\vec{a} = -\vec{b}$$

Notiamo che l'uguaglianza di due vettori non impone che i segmenti orientati che li rappresentano abbiano la stessa origine: segmenti della stessa lunghezza giacenti su rette parallele ugualmente orientate, sono *rappresentazioni equivalenti della stessa grandezza fisica*.
In certi casi, però, può avere significato fisico anche il punto di applicazione, si parla allora di **vettori applicati** e la loro determinazione richiede, oltre alla conoscenza di modulo, direzione e verso, anche la conoscenza di tale punto.
Finora abbiamo cercato di distinguere nella discussione, anche con l'uso attento delle parole, il *vettore* (grandezza fisica) dal *segmento orientato* (ente geometrico) che lo rappresenta. Nel seguito tuttavia, per mera semplicità di discorso, ci riferiremo spesso al segmento orientato come vettore.

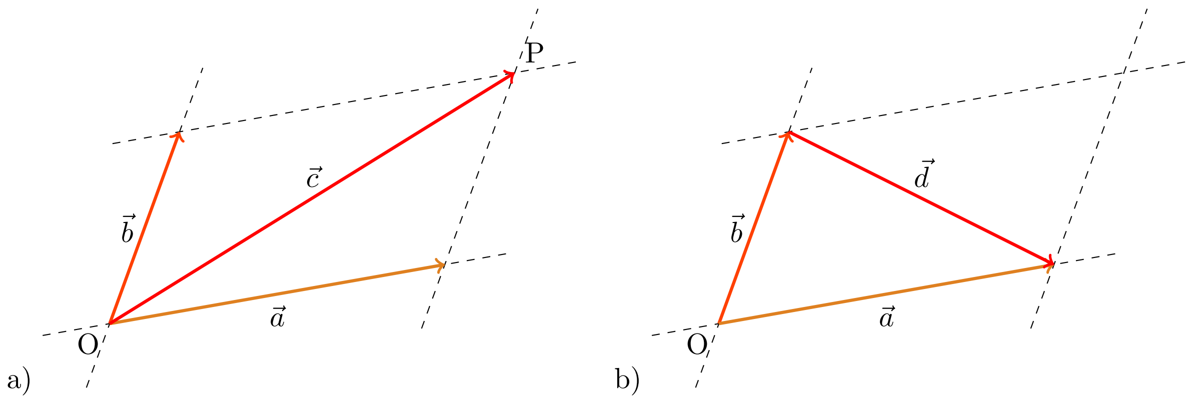


Figura 7: (a) Somma di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ secondo la regola del parallelogramma. Si tracciano due segmenti orientati a rappresentare $\vec{a}$ e $\vec{b}$, a partire dalla stessa origine O. Si tracciano due rette, parallele a quelle su cui giacciono $\vec{a}$ e $\vec{b}$, passanti per i rispettivi estremi liberi; tali rette si intersecano in P. Si individua così un parallelogramma: il vettore somma $\vec{c}$ è rappresentato dalla diagonale OP del parallelogramma. (b) Per ricavare il vettore differenza si può usare la stessa costruzione: il vettore differenza $\vec{d}$ è l'altra diagonale, orientata in modo da avere come origine l'estremo libero del secondo vettore.

La regola del parallelogramma

La **somma** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tramite la regola del parallelogramma è definita dalla procedura qui di seguito dettagliata. Si dispongano segmenti orientati corrispondenti ai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in modo che abbiano la stessa origine. Si costruisca un parallelogramma avente per lati questi due segmenti. Il vettore somma:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \tag{5-1}$$

è rappresentato dalla diagonale che si diparte dall'origine comune dei due vettori, orientata in modo da avere la stessa origine. Il procedimento è illustrato graficamente in Figura 7.
Tale operazione mostra le seguenti proprietà:

i) proprietà commutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

ii) proprietà associativa: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

iii) l'elemento neutro è il vettore nullo: $\vec{a} + 0 = \vec{a}$

iv) la somma di un vettore con il suo opposto dà il vettore nullo: $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

Una costruzione geometrica alternativa per ottenere la somma di due vettori è mostrata in Figura 8a. Questa costruzione può essere facilmente generalizzata alla somma di un numero arbitrario di vettori come in Figura 8b.
A partire dall'operazione di somma, si può definire la **differenza** tra vettori, come *somma con il vettore opposto*:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \tag{5-2}$$

Il vettore differenza è di fatto l'altra diagonale del parallelogramma costruito per la somma, orientata in modo che il vettore differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ abbia l'estremo libero coincidente con l'estremo libero del vettore $\vec{a}$.

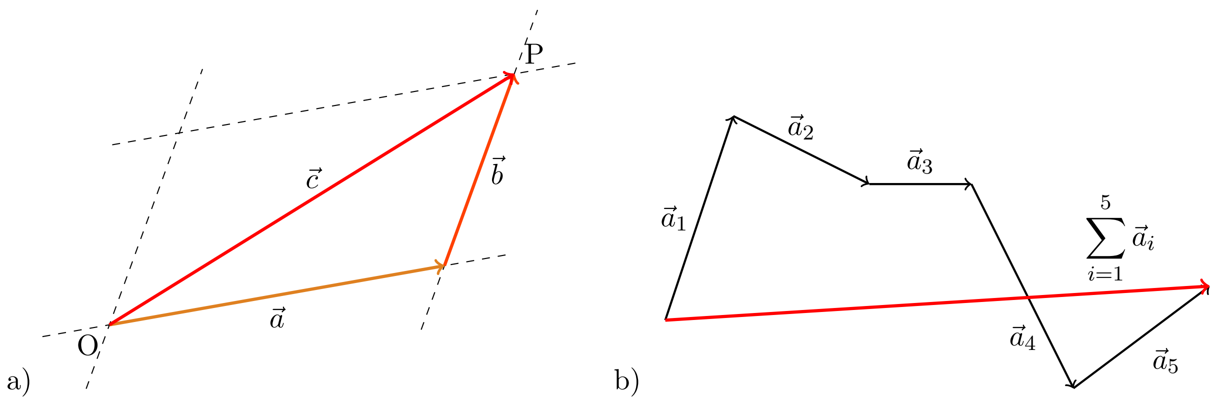


Figura 8: (a) La somma di due vettori può essere ricavata con una costruzione alternativa alla regola del parallelogramma, ma ad essa perfettamente equivalente. Si concatenano i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in modo che l'origine del secondo coincida con l'estremo libero del primo. Il vettore somma $\vec{c}$ congiunge l'origine del primo vettore all'estremo libero del secondo vettore. (b) Questa costruzione può essere estesa facilmente per ricavare graficamente la somma di un certo numero di vettori. È sufficiente concatenarli l'uno all'altro, in modo che l'estremo libero di ciascuno sia l'origine del successivo. Il vettore somma complessivo congiunge l'origine del primo con l'estremo libero dell'ultimo.

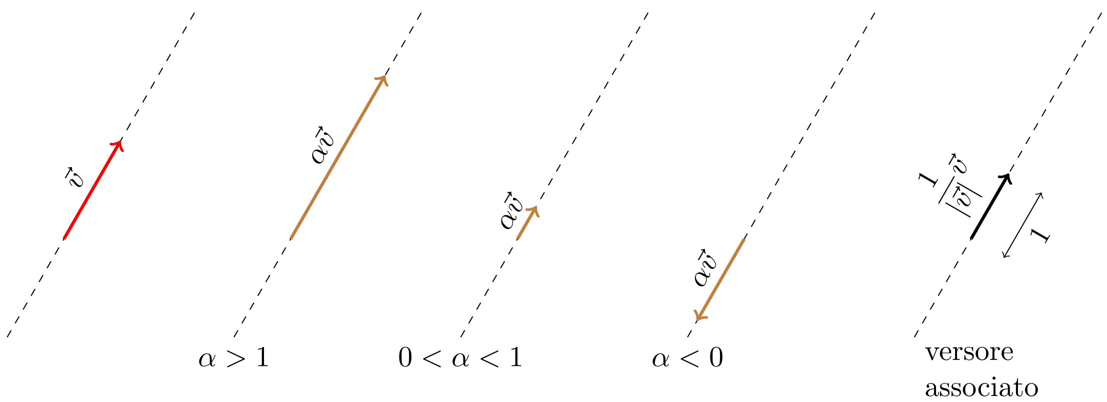


Figura 9: Esempi di applicazione del prodotto di un vettore $\vec{v}$ per uno scalare α. Il vettore risultante ha sempre la stessa direzione del vettore di partenza. Il modulo del vettore risulta moltiplicato per il modulo di α. Il vettore cambia verso se α è negativo. Il vettore più a destra, di modulo unitario, è il *versore* associato a $\vec{v}$ e, di fatto, è il versore associato a tutti i vettori $\alpha\vec{v}$ con $\alpha > 0$.

Il prodotto di un vettore per uno scalare

Il prodotto di un vettore $\vec{v}$ per uno scalare α,

$$\vec{v}\,' = \alpha\vec{v} \tag{5-3}$$

è un vettore $\vec{v}\,'$ che ha modulo $|\vec{v}\,'| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$; ha la stessa direzione di $\vec{v}$ ($\vec{v}\,' \parallel \vec{v}$); ha lo stesso verso di $\vec{v}$ se $\alpha > 0$, altrimenti verso opposto (vedi esempi in Figura 9). Questa operazione gode delle proprietà seguenti:

i) proprietà associativa: $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$

ii) proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari: $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

iii) proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori: $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$

iv) legge di annullamento: $\alpha\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha = 0) \vee (\vec{v} = 0)$

v) moltiplicazione per l'unità (scalare): $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Si può anche definire il *quoziente fra un vettore e uno scalare*:

$$\frac{\vec{v}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{v} \tag{5-4}$$

Sottolineiamo tuttavia che **non ha alcun significato la divisione fra due vettori**.
Tramite questa operazione è anche possibile abbinare ad ogni vettore $\vec{v}$ un **versore associato** $\vec{u}_v$:

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{5-5}$$

Il vettore $\vec{v}$ si può scrivere allora come:

$$\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{u}_v \tag{5-6}$$

Talvolta, quando si compiono operazioni su vettori che giacciono sulla stessa retta orientata x, è conveniente esprimerli in funzione del versore $\vec{u}_x$ associato a tale retta:

$$\vec{v} = v_x\vec{u}_x \tag{5-7}$$

dove v_x è detta *parte scalare* di $\vec{v}$. In valore assoluto, la parte scalare è pari al modulo del vettore stesso. Tuttavia, la parte scalare può essere positiva o negativa a seconda che $\vec{v}$ abbia verso concorde o discorde rispetto a $\vec{u}_x$.

Nota sulla definizione di grandezza vettoriale

L'inclusione delle operazioni di somma tra vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare, all'interno della definizione di vettore, è consistente con la nozione di *spazio vettoriale* (sul campo reale) sviluppata in Algebra. Si definisce infatti spazio vettoriale proprio un insieme di elementi (detti vettori) su cui è possibile definire un'operazione di somma e prodotto per uno scalare con le proprietà elencate.
D'altra parte, in Fisica possiamo ritrovare grandezze che potrebbero essere rappresentate da un segmento orientato, ma su cui non ha senso l'operazione di somma. Ad esempio, questo potrebbe essere il caso delle rotazioni di un angolo finito, dove si potrebbe ipotizzare una rappresentazione con un segmento diretto come l'asse di rotazione e la cui lunghezza e orientazione dipendono dall'angolo descritto e dal verso di rotazione. L'applicazione successiva di diverse rotazioni, però, non nemmeno è commutativa, quindi non ha senso sommare i segmenti! Tali grandezze non potrebbero dunque essere definite vettori.

6 Calcolo vettoriale

Prodotto scalare

Un'altra operazione di fondamentale importanza in Fisica, che può essere definita tra due vettori, è il prodotto scalare:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{6-1}$$

Il prodotto scalare del vettore $\vec{a}$ e del vettore $\vec{b}$, che si legge *a scalar b*, restituisce uno *scalare c* (non un vettore!) tale che:

$$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta \tag{6-2}$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. Si dimostrano le seguenti proprietà:

i) proprietà commutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

ii) proprietà distributiva rispetto alla somma: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

iii) proprietà associativa rispetto alla moltiplicazione per uno scalare $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}$

iv) legge di annullamento: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (|\vec{a}| = 0) \vee (|\vec{b}| = 0) \vee (\vec{a} \perp \vec{b})$

Notiamo che se l'angolo tra i due vettori è acuto il prodotto scalare è positivo, se è ottuso il prodotto scalare è negativo. Significativamente, *il prodotto scalare tra due vettori ortogonali è nullo*: la condizione $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ può dunque esprimere la condizione di ortogonalità tra due vettori non nulli.
Geometricamente, il prodotto scalare è legato al concetto di proiezione ortogonale (vedi Figura 10). Dato un vettore $\vec{a}$ e una retta orientata x, rappresentata da un versore $\vec{u}_x$, si può definire il vettore $\vec{a}_x$:

$$\vec{a}_x = a_x \vec{u}_x = \underbrace{|\vec{a}| \cdot \cos\theta}_{a_x} \cdot \vec{u}_x = (\vec{a} \cdot \vec{u}_x)\vec{u}_x \tag{6-3}$$

La parte scalare a_x è detta *proiezione* di $\vec{a}$ su x.
Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è dunque propriamente la proiezione di uno dei vettori sulla direzione orientata dell'altro, moltiplicata ulteriormente per il modulo di quest'ultimo.
Infine, si può facilmente osservare che il prodotto scalare di un vettore per se stesso coincide con il modulo quadro del vettore stesso.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0 \tag{6-4}$$

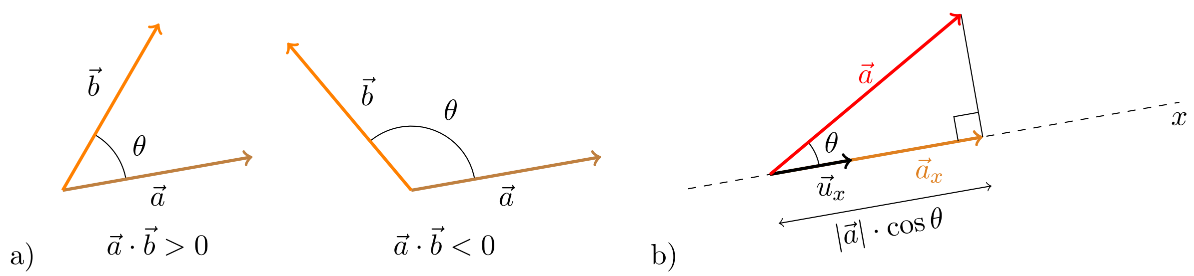


Figura 10: (a) Il segno del prodotto scalare dipende dall'angolo compreso tra i due vettori. Se $0 \leqslant \theta < \pi/2$ il prodotto scalare è positivo, altrimenti è negativo. (b) Significato geometrico associato al prodotto scalare. Il prodotto scalare di un vettore $\vec{a}$ per il versore $\vec{u}_x$ associato alla retta orientata x corrisponde a $\vec{a} \cdot \vec{u}_x = |\vec{a}| \cos\theta$ cioè pari in modulo alla *proiezione ortogonale* del vettore $\vec{a}$ sulla retta x. Il segno può essere positivo o negativo, a seconda dell'angolo θ.

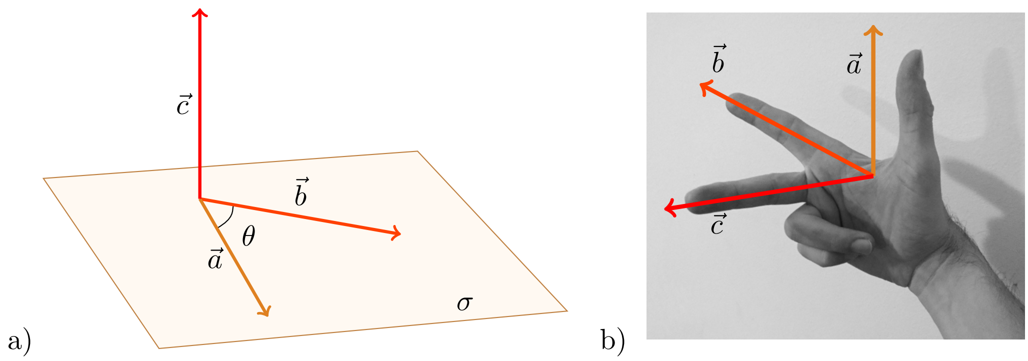


Figura 11: (a) Il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore con direzione ortogonale al piano σ su cui giacciono i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il suo modulo è $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$. Il verso è definito dalla regola della mano destra (b): disponendo la mano destra in modo che il pollice e l'indice indichino nelle direzioni e verso rispettivamente di $\vec{a}$ e di $\vec{b}$, il prodotto vettoriale $\vec{c}$ avrà il verso in cui punta il dito medio, piegandolo in modo ortogonale al palmo della mano.

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale tra un vettore $\vec{a}$ e un vettore $\vec{b}$ a dare un vettore $\vec{c}$ è indicato con:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{6-5}$$

L'operazione di prodotto qui si legge *a vettor b*. Il risultato è appunto un *vettore* $\vec{c}$ che ha: modulo $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$ dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori, direzione ortogonale al piano su cui giacciono $\vec{a}$ e $\vec{b}$; verso stabilito in modo che la terna $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ segua la regola della mano destra (si veda anche la Figura 11).
Si dimostrano le seguenti proprietà:

i) proprietà anticommutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

ii) proprietà distributiva rispetto alla somma: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

iii) proprietà associativa rispetto alla moltiplicazione per uno scalare: $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$

iv) legge di annullamento: $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (|\vec{a}| = 0) \vee (|\vec{b}| = 0) \vee (\vec{a} \parallel \vec{b})$

Notiamo anzitutto l'*assenza della proprietà commutativa*: scambiando l'ordine dei fattori il prodotto vettoriale restituisce il vettore opposto (*anticommutatività*). Osserviamo inoltre che il prodotto vettoriale si annulla se $\theta = 0$, ovvero se i due vettori sono paralleli. La condizione $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ può esprimere la condizione di parallelismo tra due vettori non nulli.

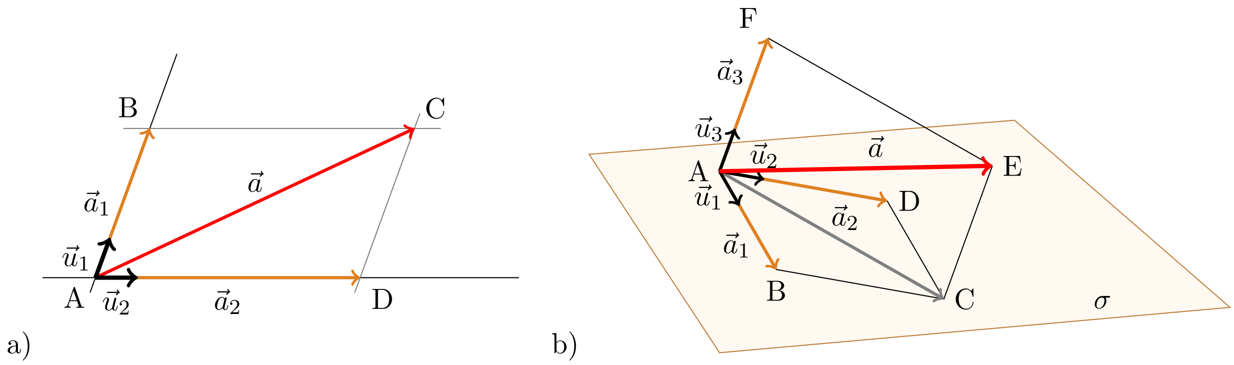


Figura 12: (a) Scomposizione di un vettore $\vec{a}$ nel piano su due rette orientate arbitrarie, identificate dai versori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$. (b) Scomposizione di un vettore $\vec{a}$ qualsiasi nello spazio tridimensionale, su tre rette orientate, arbitrarie non complanari, caratterizzate dai versori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$.

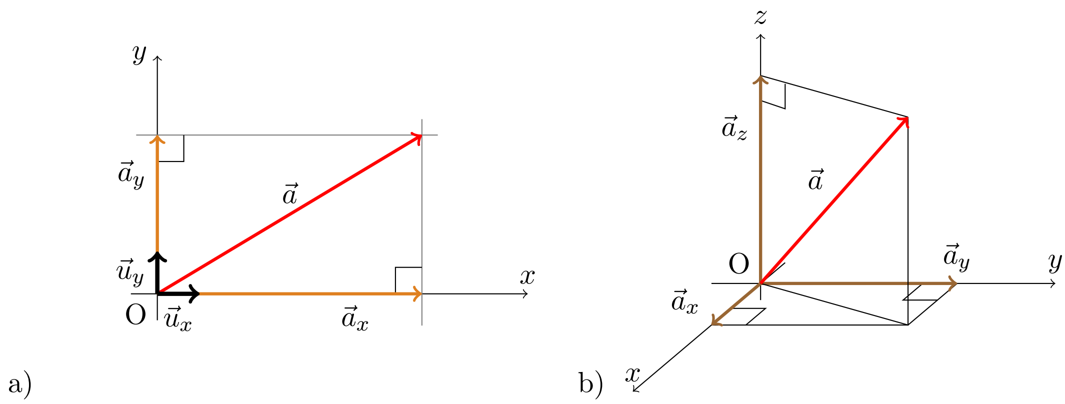


Figura 13: Scomposizione cartesiana di un vettore $\vec{a}$ arbitrario nel piano (a) o nello spazio tridimensionale (b).

Scomposizione di un vettore nel piano e nello spazio

Si considerino un vettore arbitrario $\vec{a}$ e due rette orientate qualsiasi, non parallele, tutti giacenti sullo stesso piano. È semplice dimostrare con considerazioni geometriche che è sempre possibile scrivere $\vec{a}$ come somma di due vettori giacenti sulle due rette orientate scelte. In formule:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 \tag{6-6}$$

dove $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono i versori associati alle due rette.
Indicato infatti con A il punto di intersezione tra le due rette orientate, si tracci il segmento orientato $\overrightarrow{AC}$ che rappresenta il vettore $\vec{a}$ (vedi Figura 12a). Si traccino sul piano rette passanti per C e parallele alle due di partenza. Si costruisca così un parallelogramma ABCD, avente per diagonale proprio il segmento $\overline{AC}$. I lati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ del parallelogramma, orientati in modo che abbiano l'origine in A, sono allora i vettori $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$. Infatti, per costruzione la loro somma secondo la regola del parallelogramma è pari a $\vec{a}$. I vettori $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ sono detti **vettori componenti** di $\vec{a}$ lungo le direzioni $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.
Se le due rette orientate sono ortogonali, il parallelogramma tracciato è in realtà un rettangolo. In tal caso, la parte scalare dei due componenti corrisponde alla proiezione ortogonale del vettore $\vec{a}$ sulle due rette. La (6-6) può essere allora riscritta facendo uso del prodotto scalare:

$$\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{u}_1)}_{a_1}\cdot\vec{u}_1 + \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{u}_2)}_{a_2}\cdot\vec{u}_2 \tag{6-7}$$

Questa relazione è particolarmente utile per scomporre un vettore lungo due assi cartesiani sul piano (Figura 13a). Dati infatti i versori dei due assi $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ è possibile scrivere un vettore $\vec{a}$ qualsiasi giacente sul piano come:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y \tag{6-8}$$

dove $a_x = \vec{a}\cdot\vec{u}_x$ e $a_y = \vec{a}\cdot\vec{u}_y$. I vettori $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$ sono i vettori componenti di $\vec{a}$ lungo i due assi cartesiani; le parti scalari a_x e a_y sono dette semplicemente *componenti cartesiane* (scalari).
Dal Teorema di Pitagora si deduce inoltre che per le componenti cartesiane (e in realtà per ogni coppia di componenti ortogonali) vale:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \tag{6-9}$$

La discussione fatta finora riguardo a vettori e rette che giacciono su un piano definito può essere estesa senza troppe difficoltà alle tre dimensioni.

Sia dato un vettore arbitrario $\vec{a}$ e tre rette orientate nello spazio, non parallele nè complanari, caratterizzate dai versori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$. È sempre possibile scrivere:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3} \tag{6-10}$$

Si indichi infatti con $\overrightarrow{AE}$ il vettore $\vec{a}$ di partenza e sia σ il piano su cui giacciono $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ (Figura 12b). Si tracci una retta parallela alla direzione di $\vec{u}_3$ passante per E e si indichi con C il punto di intersezione di tale retta con σ. Si tracci allora una retta passante per E, parallela al segmento AC, e sia F la sua intersezione con la retta di $\vec{u}_3$. È stato così costruito un parallelogramma (ACEF) che ha per diagonale $\overrightarrow{AE}$. Si può allora scrivere:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC}$$

Si osserva ora che $\overrightarrow{AC}$ giace sullo stesso piano di $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, quindi si può applicare la scomposizione sul piano:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$$

per cui:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

I tre vettori $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ sono proprio i componenti lungo le tre rette orientate scelte:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}_1 = a_1\vec{u}_1 \qquad \overrightarrow{AD} = \vec{a}_2 = a_2\vec{u}_2 \qquad \overrightarrow{AF} = \vec{a}_3 = a_3\vec{u}_3$$

È semplice constatare che se $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ sono mutuamente ortogonali, i parallelogrammi costruiti sono in realtà rettangoli e i componenti possono essere scritte tramite il prodotto scalare, generalizzando la (6-6) alle tre dimensioni. Di nuovo, questo risulta particolarmente utile quando le tre rette orientate sono una terna di assi cartesiani nello spazio (Figura 13b).

Sia dato un vettore arbitrario $\vec{a}$ e un sistema di assi cartesiani nello spazio. Si può sempre scrivere:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z = (\vec{a}_x\cdot\vec{u}_x)\,\vec{u}_x + (\vec{a}_y\cdot\vec{u}_y)\,\vec{u}_y + (\vec{a}_z\cdot\vec{u}_z)\,\vec{u}_z} \tag{6-11}$$

vale inoltre:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{6-12}$$

I vettori $\vec{a}_x = a_x\vec{u}_x$, $\vec{a}_y = a_y\vec{u}_y$ e $\vec{a}_z = a_z\vec{u}_z$ sono i vettori componenti cartesiani *di $\vec{a}$. Le parti a_x, a_y e a_z sono semplicemente le* componenti cartesiane.

Una conseguenza importante di questo risultato è che, dato un sistema di assi cartesiani, si può dare una corrispondenza biunivoca tra un vettore (definito in associazione a un segmento orientato nello spazio euclideo) e una terna ordinata di numeri reali, cioè le tre componenti scalari. Ci si riconduce così alla definizione di vettore in $\mathbb{R}^3$ data in Algebra.

Modulo	$v = \|\vec{v}\|$	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
Prodotto per uno scalare	$\vec{v}' = \alpha\vec{v}$	$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v'_x \\ \alpha v'_y \\ \alpha v'_z \end{bmatrix}$
Versore associato	$\vec{u}_v = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$	$\begin{bmatrix} u_{vx} \\ u_{vy} \\ u_{vz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ \dfrac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ \dfrac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \end{bmatrix}$
Somma	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}$
Differenza	$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$	$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{bmatrix}$
Prodotto scalare	$c = \vec{a} \cdot \vec{b}$	$c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Prodotto vettoriale	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$
	(alternativa)	$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
Derivata	$\vec{a} = \dfrac{d}{dt}\vec{v}$	$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d\,v_x}{dt} \\ \dfrac{d\,v_y}{dt} \\ \dfrac{d\,v_z}{dt} \end{bmatrix}$

Tabella 4: Tabella riassuntiva delle definizioni e operazioni vettoriali sulle componenti cartesiane.

È possibile, e spesso conveniente, svolgere le operazioni tra vettori utilizzando direttamente le componenti scalari, utilizzando le formule riassunte in Tabella 4. Tali relazioni si dimostrano semplicemente a partire dalle proprietà delle diverse operazioni e tenendo conto delle proprietà di ortogonalità e unitarietà dei versori degli assi.

$$\begin{aligned} \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1 \quad \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = 1 \quad \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1 \\ \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 0 \quad \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0 \quad \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x = 0 \end{aligned} \tag{6-13}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_x \times \vec{u}_x = 0 \quad \vec{u}_y \times \vec{u}_y = 0 \quad \vec{u}_z \times \vec{u}_z = 0 \\ \vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \quad \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \quad \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_x \end{aligned} \tag{6-14}$$

La dimostrazione delle relazioni caratteristiche di alcune operazioni è data come esempio nel Riquadro 3.

Riquadro 3 - Operazioni sulle componenti cartesiane: alcune dimostrazioni

Dati due vettori $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$ e $\vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$, si dimostrano le seguenti relazioni.

Somma

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z + b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z = \\ &= (\underbrace{a_x + b_x}_{c_x})\vec{u}_x + (\underbrace{a_y + b_y}_{c_y})\vec{u}_y + (\underbrace{a_z + b_z}_{c_z})\vec{u}_z\end{aligned}$$

Prodotto scalare

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z) \cdot (b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z) = \\ &= a_xb_x(\underbrace{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x}_{1}) + a_xb_y(\underbrace{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y}_{0}) + a_xb_z(\underbrace{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_z}_{0}) + \\ &+ a_yb_x(\underbrace{\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x}_{0}) + a_yb_y(\underbrace{\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y}_{1}) + a_yb_z(\underbrace{\vec{u}_y \cdot \vec{u}_z}_{0}) + \\ &+ a_zb_x(\underbrace{\vec{u}_z \cdot \vec{u}_x}_{0}) + a_zb_y(\underbrace{\vec{u}_z \cdot \vec{u}_y}_{0}) + a_zb_z(\underbrace{\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z}_{1}) = \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\end{aligned}$$

Prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z) \times (b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z) = \\ &= a_xb_x(\underbrace{\vec{u}_x \times \vec{u}_x}_{0}) + a_xb_y(\underbrace{\vec{u}_x \times \vec{u}_y}_{\vec{u}_z}) + a_xb_z(\underbrace{\vec{u}_x \times \vec{u}_z}_{-\vec{u}_y}) + \\ &+ a_yb_x(\underbrace{\vec{u}_y \times \vec{u}_x}_{-\vec{u}_z}) + a_yb_y(\underbrace{\vec{u}_y \times \vec{u}_y}_{0}) + a_yb_z(\underbrace{\vec{u}_y \times \vec{u}_z}_{\vec{u}_x}) + \\ &+ a_zb_x(\underbrace{\vec{u}_z \times \vec{u}_x}_{\vec{u}_y}) + a_zb_y(\underbrace{\vec{u}_z \times \vec{u}_y}_{-\vec{u}_x}) + a_zb_z(\underbrace{\vec{u}_z \times \vec{u}_z}_{0}) = \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{u}_x + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{u}_y + (a_xb_y - a_yb_z)\vec{u}_z\end{aligned}$$

Questa espressione è equivalente al determinante simbolico della matrice 3×3 che contiene sulla prima riga i tre versori, sulla seconda riga le componenti del primo vettore e sulla terza riga le componenti del secondo vettore:

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

Derivata di un vettore

La **derivata** di una funzione vettoriale si definisce in modo analogo alla derivata di una funzione scalare, come limite del rapporto incrementale per variazioni tendenti a zero della variabile indipendente. Per esempio, la derivata di una grandezza vettoriale $\vec{v}$ rispetto al tempo t è definita come:

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{6-15}$$

La derivata di un vettore è dunque essa stessa un vettore e *non è la derivata del suo modulo.* Inoltre, è importante sottolineare fin d'ora che la derivata di un vettore *non ha, in generale, la stessa direzione e lo stesso verso del vettore di partenza.*

Per la derivata di una funzione vettoriale valgono proprietà simili a quelle delle derivate di funzioni scalari.

i) derivata della somma: $\frac{d}{dt}(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt}$

ii) derivata del prodotto per uno scalare: $\frac{d}{dt}(\alpha\, \vec{v}) = \frac{d\alpha}{dt}\vec{v} + \alpha\frac{d\vec{v}}{dt}$

iii) derivata del prodotto scalare: $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt}$

iv) derivata del prodotto vettoriale: $\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w} + \vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt}$

v) derivata di funzione composta: $\frac{d}{dt}\vec{v}\,(s(t)) = \frac{d\vec{v}(s)}{ds} \cdot \frac{d\,s(t)}{dt}$

Avendo definito la derivata, si può definire anche il **differenziale** di una funzione vettoriale $\vec{v}(t)$, cioè la sua variazione infinitesima in un intervallo dt a meno di infinitesimi di ordine superiore. In dettaglio:

$$d\vec{v} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot dt \tag{6-16}$$

È semplice mostrare che le componenti cartesiane della derivata di un vettore sono le derivate delle componenti del vettore stesso.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt}(v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z) \\ &= \frac{d\,v_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\,v_z}{dt}\vec{u}_y + \frac{d\,v_z}{dt}\vec{u}_z \end{aligned} \tag{6-17}$$

Abbiamo già richiamato il fatto che la derivata di un vettore può avere in generale direzione differente rispetto al vettore di partenza. Per comprendere meglio questo aspetto possiamo studiare la **derivata di un versore**, cioè la derivata di un vettore di modulo unitario per definizione. Poiché un versore non può cambiare il suo modulo (unitario), l'unica caratteristica che può variare nel tempo è la sua direzione. In altre parole, l'unica evoluzione temporale ammessa per un versore è una *rotazione.* Consideriamo allora un versore $\vec{u}(t)$ che in un intervallo Δt compie una rotazione di un angolo $\Delta\theta$ come in Figura 14a.

Ci concentriamo ora sul vettore differenza $\Delta\vec{u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$. Anzitutto osserviamo che la *direzione* del vettore $\Delta\vec{u}$ descrive un angolo $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta}{2}$ rispetto alla direzione di $\vec{u}(t)$. Possiamo indicare la direzione di $\Delta\vec{u}$ tramite il versore $\vec{u}_\Delta$ e scrivere:

$$\Delta\vec{u} = |\Delta\vec{u}| \cdot \vec{u}_\Delta \tag{6-18}$$

Valutiamo anche il modulo del vettore $\Delta\vec{u}$, che è pari a:

$$|\Delta\vec{u}| = 2 \cdot \sin\frac{\Delta\theta}{2} \tag{6-19}$$

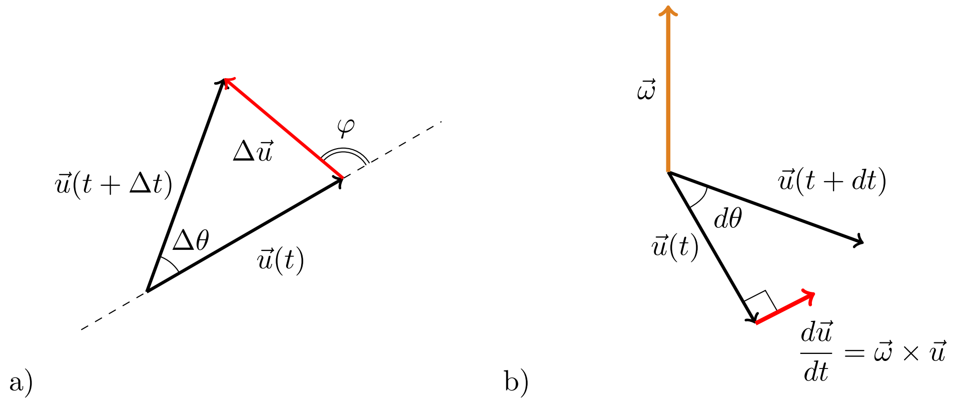


Figura 14: (a) Un versore $\vec{u}(t)$ compie in un intervallo di tempo Δt una rotazione sul piano di un angolo $\Delta\theta$. (b) Definendo il vettore velocità angolare $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_z$ (dove $\vec{u}_z$ è la direzione dell'asse di rotazione) si può scrivere $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{u}$. Tale derivata è ortogonale al versore $\vec{u}$ stesso e giace sul piano ortogonale all'asse di rotazione.

Notiamo che, per Δt tendente a zero, $\Delta\theta$ tende ad annullarsi e la (6-19) può essere approssimata da:

$$|\Delta\vec{u}| \simeq \Delta\theta \tag{6-20}$$

Il limite del rapporto incrementale è allora:

$$\frac{d}{dt}\vec{u} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{u}|}{\Delta t}\vec{u}_\Delta = \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right]\cdot\left[\lim_{\Delta t\to 0}\vec{u}_\Delta\right] = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_n \tag{6-21}$$

dove $\vec{u}_n$ è un versore ortogonale a $\vec{u}$ (*versore normale*). Se definiamo la velocità angolare di rotazione del versore come $\omega = d\theta/dt$, possiamo scrivere infine:

$$\frac{d}{dt}\vec{u} = \omega\vec{u}_n \tag{6-22}$$

La derivata di un versore $\vec{u}$ è dunque un vettore precisamente *ortogonale* al versore stesso e in modulo pari alla velocità angolare di rotazione.[4]
In realtà è possibile definire, più in generale, un **vettore velocità angolare** $\vec{\omega}$. Esso è un vettore di modulo $\omega = d\varphi/dt$, diretto come l'asse di rotazione e orientato in modo che, se la rotazione è vista da un osservatore in senso antiorario, lo stesso osservatore vede $\vec{\omega}$ come uscente dal piano. Con questa definizione ulteriore si può dimostrare che la relazione:

$$\frac{d}{dt}\vec{u} = \omega\vec{u}_n = \vec{\omega}\times\vec{u} \tag{6-23}$$

La (6-23) vale in generale, anche per rotazioni che cambiano istante per istante il modulo della velocità angolare o l'asse di rotazione. Occorrerà semplicemente considerare la $\vec{\omega}$ *istantanea*, relativa al movimento infinitesimo che il versore sta compiendo in quell'istante.
A questo punto possiamo ricavare una **espressione generale** della derivata di un vettore qualsiasi, che nel tempo muta sia modulo che direzione, procedendo come segue:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(v\vec{u}_v) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v + v\frac{d\vec{u}_v}{dt} = \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{u}_v + v(\vec{\omega}\times\vec{u}_v) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v + \vec{\omega}\times v\vec{u}_v\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v + \vec{\omega}\times\vec{v}} \tag{6-24}$$

[4] Si può osservare che la derivata di un versore *non è un versore*, perché il suo modulo non è unitario.

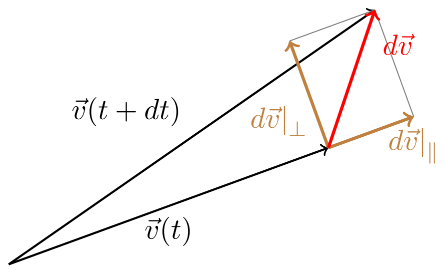


Figura 15: Scomposizione del differenziale $d\vec{v}$ di una funzione vettoriale $\vec{v}(t)$ lungo le direzioni parallela e ortogonale. I componenti della derivata $\frac{d\vec{v}}{dt}$ corrispondono a quelli del differenziali divisi per dt: ne mantengono dunque direzione e verso. Da questa raffigurazione può essere più evidente come il componente parallelo sia responsabile della variazione di modulo mentre il componente ortogonale sia responsabile del cambio di direzione.

La derivata di un vettore è dunque data dalla somma di due componenti. Un componente è parallelo al vettore di partenza ed è responsabile delle *variazioni del modulo* del vettore stesso:

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\parallel} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v \tag{6-25}$$

Un componente è invece ortogonale ed è responsabile delle sue *variazioni di direzione.*

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\perp} = v\frac{d\vec{u}_v}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = v\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_n \tag{6-26}$$

Si veda anche la Figura 15 dove è rappresentata la scomposizione del differenziale $d\vec{v}$.
Nel caso particolare in cui un vettore cambi nel tempo solamente il suo modulo, mantenendo la sua direzione, si avrà solo il componente parallelo della derivata. Se un vettore cambia invece solo la sua direzione, ruotando con velocità angolare $\vec{\omega}$, ma non varia il suo modulo, avremo solo il componente ortogonale.