Premessa: Metodo simbolico

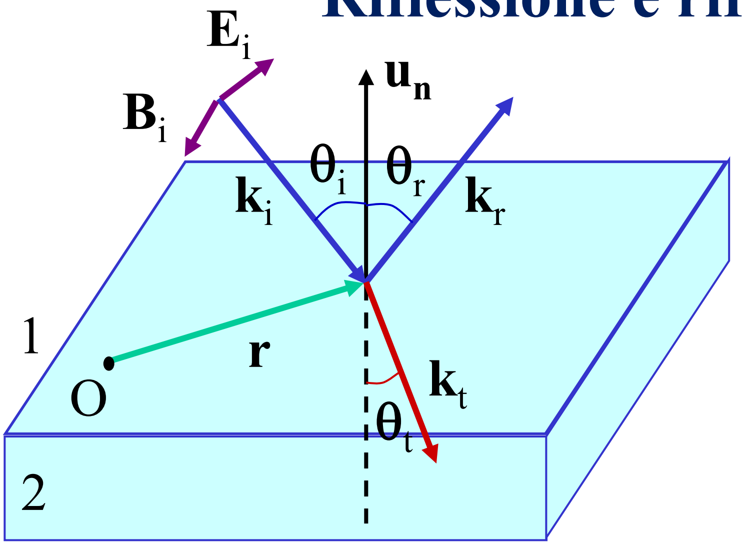
Con il **metodo simbolico** possiamo dare una rappresentazione complessa ad ogni funzione che varia sinusoidalmente nel tempo, come il campo elettrico di un'onda:

$$\boxed{f = f_o \sin(\omega t) \qquad \Leftrightarrow \qquad f = f_o e^{i\omega t}}$$

corrispondenza biunivoca

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \sin(\omega t - kz) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{i(\omega t - kz)} = \mathbf{E}_o e^{i\omega t} e^{-ikz}$$

Riflessione e rifrazione



$$\mathbf{u_n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{u}_{ki} = \frac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|}$$

Consideriamo un'onda piana incidente sulla superficie di separazione tra **due mezzi dielettrici** 1 e 2:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i}\, e^{i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{0i}\, e^{i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} = \frac{\mathbf{u}_{ki} \times \mathbf{E}_i}{v_1} = \mu_1 \mathbf{H}_i$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r}\, e^{i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_{0r}\, e^{i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} = \frac{\mathbf{u}_{kr} \times \mathbf{E}_r}{v_1} = \mu_1 \mathbf{H}_r$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t}\, e^{i(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{0t}\, e^{i(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} = \frac{\mathbf{u}_{kt} \times \mathbf{E}_t}{v_2} = \mu_2 \mathbf{H}_t$$

Supponiamo che sulla superficie sia: $\sigma = 0$ e $\mathbf{J_s} = 0$.
Per le condizioni al contorno per **E**, **H**, **D** e **B** :

$$\mathbf{u_n} \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = \mathbf{u_n} \times \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{u_n} \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r) = \mathbf{u_n} \times \mathbf{H}_t$$

$$\mathbf{u_n} \cdot (\varepsilon_1 \mathbf{E}_i + \varepsilon_1 \mathbf{E}_r) = \mathbf{u_n} \cdot \varepsilon_2 \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{u_n} \cdot (\mu_1 \mathbf{H}_i + \mu_1 \mathbf{H}_r) = \mathbf{u_n} \cdot \mu_2 \mathbf{H}_t$$

dove: $\varepsilon_r = n^2$, $\mu_r \cong 1$

Queste condizioni sono soddisfatte eguagliando tra di loro gli esponenti e le ampiezze dei campi:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$$

→ Conservazione dell'energia

→ Conservazione della quantità di moto $\Rightarrow$ Leggi di Snell

(Nell'interpretazione corpuscolare: E = hν e G = h/λ)

$$\mathbf{u_n} \times (\mathbf{E}_{oi} + \mathbf{E}_{or}) = \mathbf{u_n} \times \mathbf{E}_{ot}$$

$$\mathbf{u_n} \times (\mathbf{H}_{oi} + \mathbf{H}_{or}) = \mathbf{u_n} \times \mathbf{H}_{ot}$$

$$\mathbf{u_n} \cdot (\varepsilon_1 \mathbf{E}_{oi} + \varepsilon_1 \mathbf{E}_{or}) = \mathbf{u_n} \cdot \varepsilon_2 \mathbf{E}_{ot}$$

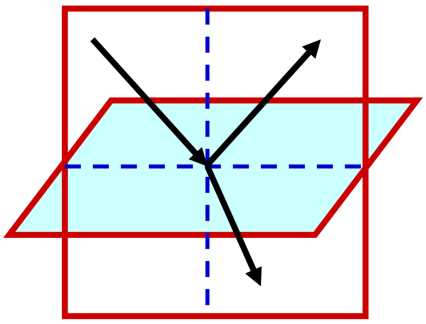
$$\mathbf{u_n} \cdot (\mu_1 \mathbf{H}_{oi} + \mu_1 \mathbf{H}_{or}) = \mathbf{u_n} \cdot \mu_2 \mathbf{H}_{ot}$$

→ Relazioni di Fresnel

Occupiamoci prima della **direzione di propagazione**.

I vettori d'onda risultano complanari.

Piano di incidenza = **Piano che contiene i vettori d'onda** (ed è normale alla superficie di separazione).



Inoltre, le fasi devono eguali sulla superficie:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \qquad \text{dove:} \quad k = \frac{\omega}{v}$$

Essendo:

$$|\mathbf{k}_i| = \frac{\omega}{\mathrm{v}_1} \qquad |\mathbf{k}_r| = \frac{\omega}{\mathrm{v}_1} \qquad |\mathbf{k}_t| = \frac{\omega}{\mathrm{v}_2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\omega}{\mathrm{v}_1}\sin\theta_i = \frac{\omega}{\mathrm{v}_1}\sin\theta_r$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\theta_i = \theta_r}$$

I legge di Snell:
Legge della riflessione

$\Rightarrow$ L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza.

Inoltre:

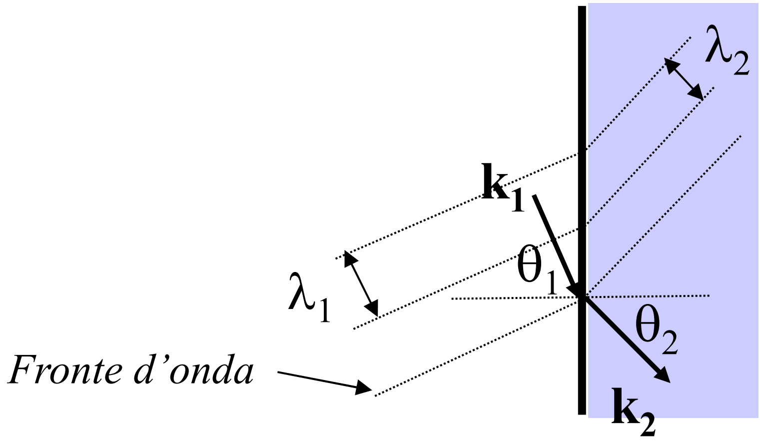
$$\frac{\omega}{\mathrm{v}_1}\sin\theta_i = \frac{\omega}{\mathrm{v}_2}\sin\theta_t \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1\omega}{c}\sin\theta_i = \frac{n_2\omega}{c}\sin\theta_t$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

II legge di Snell:
Legge della rifrazione

Le due leggi della riflessione e della rifrazione sono dette **leggi di Snell** e costituiscono la base dell'ottica geometrica.

L'origine della rifrazione è la diversa velocità nei due mezzi, mentre la frequenza deve rimanere la stessa (tutti gli oscillatori mantengono la frequenza della forzante).



Perchè i punti della superficie di separazione vedano la stessa frequenza da tutte e due le parti della superficie, la distanza tra due creste (= λ) lungo la superficie deve essere la stessa in tutti e due i mezzi.

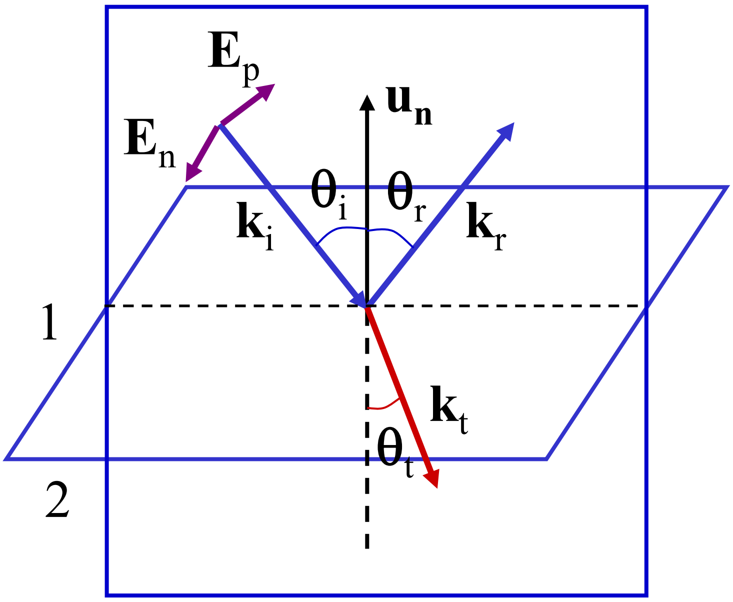
$$\upsilon_1 = \frac{c}{n_1\lambda_1} = \upsilon_2 = \frac{c}{n_2\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Questo è possibile solo se cambia la direzione di propagazione.

Se l'onda incidente è piana, sia l'onda riflessa che quella rifratta sono piane.
Se l'onda incidente è sferica, quella riflessa lo è, mentre quella rifratta no.
Per la diversa velocità nei due mezzi, il fronte d'onda si deforma.

Relazioni di Fresnel

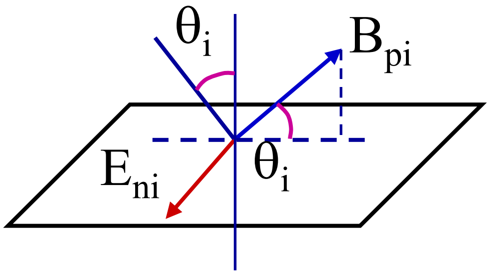
Occupiamoci ora dell'**ampiezza delle onde**.



Scomponiamo il campo **E** in una componente parallela $\mathbf{E}_p$ e in una normale $\mathbf{E}_n$ al piano di incidenza.

a) Supponiamo: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n$

$$\mathbf{u_n} \times (\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r}) = \mathbf{u_n} \times \mathbf{E}_{0t}$$
$$\mathbf{u_n} \times (\mathbf{H}_{0i} + \mathbf{H}_{0r}) = \mathbf{u_n} \times \mathbf{H}_{0t}$$



$\mathbf{E}_n \perp$ al piano di incidenza
$\Rightarrow \mathbf{B}$ // al piano di incidenza:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_p$$

$$E_{ni} + E_{nr} = E_{nt}$$

$$\mathbf{u_n} \times \left(\frac{\mathbf{u}_{ki} \times \mathbf{E}_{ni}}{\mu_1 v_1} + \frac{\mathbf{u}_{kr} \times \mathbf{E}_{nr}}{\mu_1 v_1} \right) = \mathbf{u_n} \times \left(\frac{\mathbf{u}_{kt} \times \mathbf{E}_{nt}}{\mu_2 v_2} \right)$$

$[\mu_1 \cong \mu_2]$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{E_{ni}}{v_1} - \frac{E_{nr}}{v_1} \right) \cos\theta_i = \frac{E_{nt}}{v_2} \cos\theta_t$$

Combinando le due equazioni:

$$\left(\frac{E_{ni}}{v_1}-\frac{E_{nr}}{v_1}\right)\cos\theta_i=\frac{E_{ni}+E_{nr}}{v_2}\cos\theta_t$$

$$\left(\frac{E_{ni}}{v_1}-\frac{E_{nt}-E_{ni}}{v_1}\right)\cos\theta_i=\frac{E_{nt}}{v_2}\cos\theta_t$$

dove: $v_1 = c/n_1$ e $v_2 = c/n_2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_{nr} &= \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}E_{ni} \\ E_{nt} &= \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}E_{ni} \end{aligned}}$$

Dalla legge di Snell, si ha: $\left[\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}=\frac{n_2}{n_1}\right]$

$$\boxed{\begin{aligned} E_{nr} &= -\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}E_{ni} \\ E_{nt} &= \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}E_{ni} \end{aligned}}$$

Relazioni di Fresnel per $E = E_n$

b) Supponiamo: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p$

E // al piano di incidenza $\Rightarrow$ **B** $\perp$ al piano di incidenza

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_n$$

Dalle condizioni al contorno su $\mathbf{D}_\perp$ ed $\mathbf{E}_{//}$:

$$\mathbf{u_n} \cdot \varepsilon_1 \left(\mathbf{E}_{pi} + \mathbf{E}_{pr}\right) = \mathbf{u_n} \cdot \varepsilon_2 \mathbf{E}_{pt}$$
$$\mathbf{u_n} \times \left(\mathbf{E}_{pi} + \mathbf{E}_{pr}\right) = \mathbf{u_n} \times \mathbf{E}_{pt}$$

Sapendo che:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

Si ricava che:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} E_{pr} &= \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} E_{pi} \\ E_{pt} &= \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} E_{pi} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} E_{pr} &= \frac{\mathrm{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\mathrm{tg}(\theta_i + \theta_t)} E_{pi} \\ E_{pt} &= \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} E_{pi} \end{aligned}}$$

Relazioni di Fresnel per $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p$

- $E_{nr} = 0$, se:

$$n_2 \cos\theta_t - n_1 \cos\theta_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\theta_t = \mathrm{tg}\,\theta_i$$

$$\Rightarrow \quad \theta_i = \theta_t \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2$$

$\Rightarrow$ E' sempre: $E_{nr} \neq 0$

- $E_{pr} = 0$, se:

$$n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t = \sin\theta_i \cos\theta_i - \sin\theta_t \cos\theta_t = 0$$

$$\sin(2\theta_t) = \sin(2\theta_i)$$

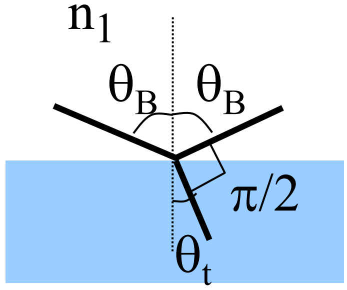
$$\Rightarrow \quad \theta_t = \theta_i \qquad 2\theta_i = \pi - 2\theta_t$$

La prima soluzione è banale. La seconda implica:

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i} = \frac{n_2}{n_1}$$

cioè:

$$\boxed{tg\,\theta_B = \frac{n_2}{n_1}}$$



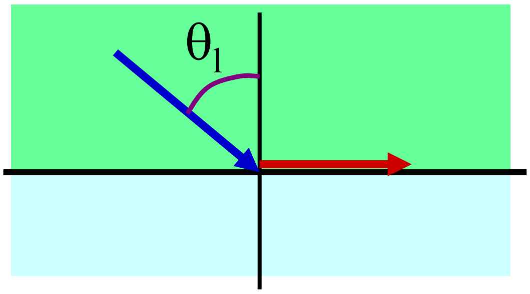
L'angolo per cui questa condizione è soddisfatta è detto **angolo di Brewster**.

Applicazioni

- Un'onda polarizzata linearmente con $\mathbf{E} = \mathbf{E_p}$, che incide all'angolo di Brewster, non ha componente riflessa $\Rightarrow$ Perdite per trasmissione minime

- Un'onda depolarizzata che incide all'angolo di Brewster, ha l'onda riflessa polarizzata linearmente ($\perp$ al piano di incidenza)

Passando da un mezzo ad un altro con indice di rifrazione minore (**$n_1 > n_2$**), esiste un angolo di incidenza detto **angolo limite θ_l** per cui **non** c'è onda trasmessa:

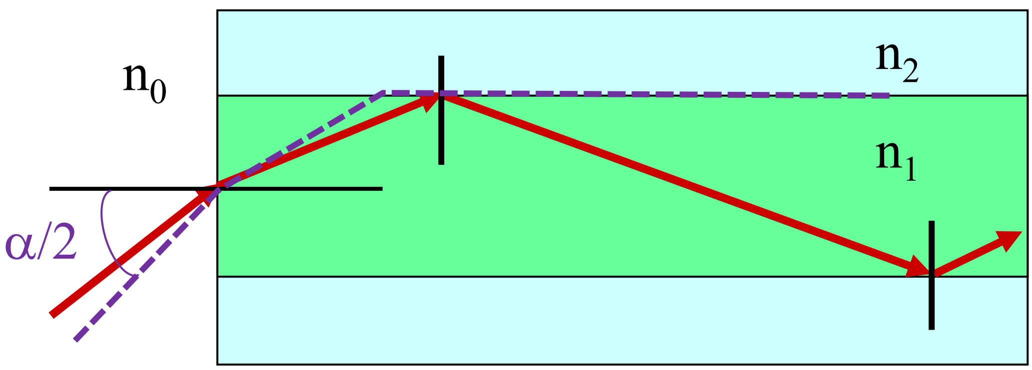


$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\theta_t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\theta_l = \frac{n_2}{n_1}}$$

Per angoli di incidenza maggiori o uguali dell'angolo limite non c'è trasmissione dell'onda.

$\Rightarrow$ Principio della **fibra ottica**



$\text{NA} = n_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ = **Apertura numerica**

Sapendo che:

$$\bar{I} = \bar{u}v = \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)v = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n^2 E^2 \frac{c}{n} \propto nE^2$$

Definiamo:

Riflettanza $$\boxed{R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_r^2}{E_i^2}}$$

Trasmittanza $$\boxed{T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\frac{E_t^2}{E_i^2}}$$

$$R_n = \left[\frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\right]^2 = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

$$T_n = \frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\left[\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\right]^2 = \frac{\sin(2\theta_i)\sin(2\theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

$$R_p = \left[\frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}\right]^2 = \frac{tg^2(\theta_i - \theta_t)}{tg^2(\theta_i + \theta_t)}$$

$$T_p = \frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\left[\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}\right]^2 = \frac{\sin(2\theta_i)\sin(2\theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)\cos^2(\theta_i - \theta_t)}$$

R e *T* esprimono la percentuale di energia riflessa e trasmessa.
In accordo con la conservazione dell'energia:

$$R + T = 1$$

Per **incidenza normale**: $\theta_i = \theta_t = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} R_n &= R_p = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \\ T_n &= T_p = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \end{aligned}}$$

Esempi:

- aria-vetro: $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5 \quad \Rightarrow \quad R = 0.04$
- aria-acqua: $n_1 = 1$, $n_2 = 1.33 \quad \Rightarrow \quad R = 0.02$

Se $\theta_i = 0$, scambiando n_1 ed n_2, R e T non cambiano.

$\mathbf{E}_t$ ed $\mathbf{E}_i$ hanno sempre lo stesso segno, mentre $\mathbf{E}_r$ può avere segno opposto ad $\mathbf{E}_i$:

$$\frac{E_t}{E_i} > 0 \qquad \text{per:} \quad n_1 < n_2 \quad \text{ed} \quad n_1 > n_2$$

$$\frac{E_r}{E_i} > 0 \qquad \text{per:} \quad n_1 > n_2$$

$$\frac{E_r}{E_i} < 0 \qquad \text{per:} \quad n_1 < n_2$$

$\mathbf{E}_i$ si sfasa di π quando viene riflesso da un'interfaccia con un mezzo più rifrangente.

Per dimostrarlo si usano:
- la condizione al contorno per $\mathbf{E}_{tg}$ (con $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{tg}$) nel passaggio da un mezzo all'altro
- la conservazione dell'energia (o dell'intensità) tra prima e dopo l'incidenza sulla superficie di separazione.

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ n_1 E_i^2 = n_1 E_r^2 + n_2 E_t^2 \end{cases} \qquad \left(\text{dove:} \quad I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n E^2 c\right)$$

$$\Rightarrow \qquad E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i \qquad\qquad E_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i$$

Per <u>incidenza normale</u> dal vuoto sulla superficie di un ***conduttore ideale***, dove l'indice di rifrazione è puramente immaginario (*):

$$\mathrm{n}_1 = 1 \qquad \mathrm{n}_2 = \mathrm{in}$$

$$R = \left[\frac{1 - in}{1 + in}\right]^2 = \left|\frac{\sqrt{1+n^2}\; e^{-i\phi}}{\sqrt{1+n^2}\; e^{i\phi}}\right|^2 = \left|e^{-2i\phi}\right|^2 = 1 \qquad \left(n_1 + in_2 = \rho e^{i\phi}\right)$$

$\Rightarrow$ L'onda è totalmente riflessa.

....

(*) Per $\omega < \omega_p$:

$$n_2^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad n_2 = in$$