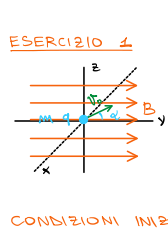
5 - Magnetostatica

Monday, 15 August 2022 17:41

ESERCIZIO 1



PARTICELLA CARICA +q
CAMPO UNIFORME $\vec{B}$
STUDIA TRAIETTORIE PER α

CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} \vec{B} = B\vec{u_y} \\ \vec{v_0} = v_0(\cos\alpha\,\vec{u_y} + \sin\alpha\,\vec{u_z}) \\ \vec{r_0} = 0 \end{cases}$$

FORZA DI LORENTZ

$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$

LA FORZA NON COMPIE LAVORO: $P_{DISS} = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0$

$F \perp v \longrightarrow |\vec{v}| = v_0$ SEMPRE

$$\vec{F} = \text{DET}\begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \text{DET}\begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ 0 & v_y & v_z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-v_zB_y)\vec{u_x} \cancel{- (0)\vec{u_y} + (0)\vec{u_z}} = -v_zB_y\vec{u_x}$$
$$= -v_0B\sin\alpha\,\vec{u_x}$$

- $\alpha = 0$

$\vec{F} = -v_0B\sin(0)\vec{u_x} = 0$

FORZA NULLA, LA PARTICELLA CONTINUA A VIAGGIARE SU $+\vec{u_y}$ A VELOCITA' v_0 COSTANTE

TRAIETTORIA

$$\gamma \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = v_yt = v_0t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

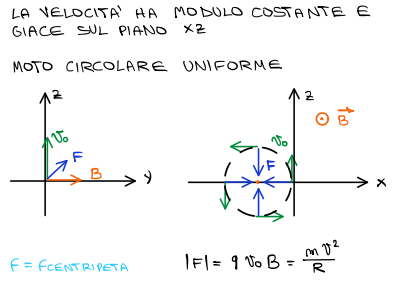
- $\alpha = \pi/2$

$\vec{F} = -v_0B\cancel{\sin(\pi/2)}\vec{u_x} = -v_0B\vec{u_x}$

LA FORZA HA MODULO COSTANTE ED E' SEMPRE PERPENDICOLARE ALLA VELOCITA'

LA VELOCITA' HA MODULO COSTANTE E GIACE SUL PIANO XZ

MOTO CIRCOLARE UNIFORME



$F = F_{CENTRIPETA}$ $\quad |F| = qv_0B = \frac{mv^2}{R}$

RAGGIO $\quad R = \frac{mv}{qB}$

PULSAZIONE $\quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$

PERIODO $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$

TRAIETTORIA

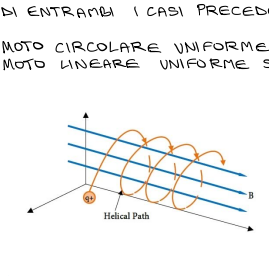
$$\gamma \begin{cases} x(t) = R(\cos(\omega t) - 1) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$$

- $\alpha \in (-\pi, +\pi)$

$\vec{F} = -v_0B\sin(\alpha)\,\vec{u_x}$

IL MOTO AD ELICA HA LE CARATTERISTICHE DI ENTRAMBI I CASI PRECEDENTI

MOTO CIRCOLARE UNIFORME SU PIANO ZX
MOTO LINEARE UNIFORME SU ASSE Y



$F = F_{CENTRIPETA}$ $\quad |F| = qv_0B\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}$

RAGGIO $\quad R = \frac{mv}{qB\sin\alpha}$

PULSAZIONE $\quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB\sin\alpha}{m}$

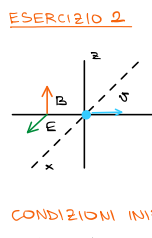
PERIODO $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB\sin\alpha}$

PASSO $\quad P = Tv_x = \frac{2\pi m v_0}{qB\tan\alpha}$

TRAIETTORIA

$$\gamma \begin{cases} x(t) = R(1 - \cos(\omega t)) \\ y(t) = v_xt = v_0\cos(\alpha)t \quad \text{COST} \\ z(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$$

ESERCIZIO 2



PARTICELLA CARICA +q
CAMPO UNIFORME $\vec{B}, \vec{E}$
STUDIA TRAIETTORIE PER α

CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} \vec{B} = B\vec{u_z} \\ \vec{E} = E\vec{u_x} \\ \vec{v_0} = v_0\vec{u_y} \\ \vec{r_0} = 0 \end{cases}$$

IN QUESTO CASO IL MOTO NON E' LA SOMMA DEGLI EFFETTI (TRAIETTORIE) DEI 2 CAMPI POICHE' IL CAMPO E COMPIE LAVORO

FORZA DI LORENTZ

$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} + q\vec{E} \longleftrightarrow \sum F = ma$

$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v}\times\vec{B} + \frac{q}{m}\vec{E}$

SVOLGO IL PRODOTTO SCALARE

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = v_yB\vec{u_x} - v_xB\vec{u_y}$$

SOSTITUISCO NELL' ACCELERAZIONE

$\vec{a} = \frac{q}{m}(v_yB\vec{u_x} - v_xB\vec{u_y}) + \frac{q}{m}(E\vec{u_x})$

DIVIDIAMO IN COMPONENTI

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial}{\partial t}v_x = \frac{q}{m}(v_yB + E) & 1 \\ a_y = \frac{\partial}{\partial t}v_y = \frac{q}{m}(-v_xB) & 2 \\ a_z = \frac{\partial}{\partial t}v_z = 0 \longrightarrow v_z\ \text{COST} & 3 \end{cases}$$

RICAVO v_y DALLA (1)

$v_y = \frac{1}{B}\left(\frac{m}{q}\frac{\partial}{\partial t}v_x - E\right)$

DERIVO RISPETTO AL TEMPO

$$\frac{\partial}{\partial t}y = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{m}{qB}\left(\frac{\partial}{\partial t}v_x - \frac{qE}{m}\right)\right]$$
$$= \frac{m}{qB}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}v_x\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{qE}{m}\right)\right]$$
$$= \frac{m}{qB}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_x$$

SOSTITUISCO $\frac{\partial}{\partial t}v_y$ NELLA (2)

$\frac{m}{qB}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_x = \frac{q}{m}(-v_xB)$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_x + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0$

$\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0$

SOLUZIONE NOTA

$v_x = A\sin(\omega t + \varphi)$

$v_y = \frac{m}{qB}\left(\dot{v}_x - \frac{qE}{m}\right) = \frac{\cancel{m}}{\cancel{qB}}A\,\omega\cos(\omega t + \varphi) - \frac{E}{B}$

DOVE $\quad \omega = \frac{qB}{m}$

DETERMINO A, φ

$$\begin{cases} v_x(0) = 0 \\ v_y(0) = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} A\sin(\varphi) = 0 \longrightarrow \varphi = 0 \\ A\,\cancel{\cos(\varphi)} = v_0 + \frac{E}{B} \end{cases}$$

VELOCITA'

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = \left(v_0 + \frac{E}{B}\right)\sin\left(\frac{qB}{m}t + 0\right) \\ v_y(t) = v_0 + A\cos(\omega t + \varphi) - \frac{E}{B} = v_0 + \left(v_0 + \frac{E}{B}\right)\cos\left(\frac{qB}{m}t + 0\right) + \frac{E}{B} \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = (v_0 + K)\sin(\omega t) \\ v_y(t) = (v_0 + K)\cos(\omega t) - K \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \qquad K = \frac{E}{B}$$

TRAIETTORIA

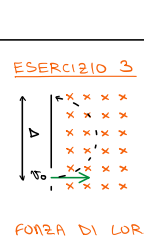
$$\gamma \begin{cases} x(t) = \int v_x = \frac{v_0 + K}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) \\ y(t) = \int v_y = \frac{v_0 + K}{\omega}\sin(\omega t) - Kt \\ z(t) = \int v_z = 0 \end{cases}$$

MOTO C.U. IN PIANO XY

MOTO R.U. IN $-y$ DI VELOCITA' $\vec{K} = -\frac{E}{B}\vec{u_y}$

CHIAMATO ANCHE CICLOIDALE

ESERCIZIO 3



PROTONE P^+
CAMPO B UNIFORME
MASSIMA DISTANZA D ?

FORZA DI LORENTZ

$|F| = qvB = \frac{mv^2}{R}$

$R = \frac{mv_0}{qB} \qquad D = 2R$

SPETTROMETRO DEMPSTER

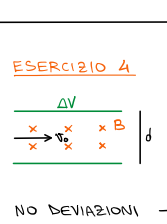
$E_C = q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2$

$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$

$F = qvB = mv^2/R$

$D = 2R = 2\cdot\frac{mv_0}{qB} = 2\sqrt{\frac{2m\Delta V}{qB^2}}$

ESERCIZIO 4



CONDENSATORE PIANO CARICO
ΔV COSTANTE, B UNIFORME
ΔV AFFINCHE' E' NO DEVIAZIONI ?

NO DEVIAZIONI $\longrightarrow a_y = 0 \longrightarrow \sum F_y = 0$

$F(E) = qE = -eE$

$F(B) = q\vec{v}\times\vec{B} = -evB$

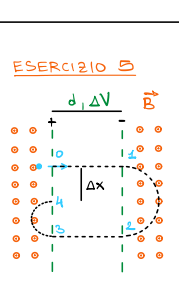
$eE = evB \qquad \Delta V = Ed = v_0dB$

SELETTORE DI VELOCITA'

$v_0 = \frac{\Delta V}{Bd} = \frac{E}{B}$

PONENDO UNA PICCOLA FENDITURA SELEZIONEREMO SOLO LE PARTICELLE NON DEFLESSE (A DATA v_0)

ESERCIZIO 5



GRIGLIA METALLICA
$\vec{B}$ UNIFORME, ΔV COSTANTE
CARICA +q, m
$F_{LORENTZ} = 0$ IN CONDUTTORE
$\Delta V = V_0 - V_1$

0 → 1

ENERGIA MECCANICA

$E_M = E_C + qV = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_x$

$\Delta E_M = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0$

$v_1^2 = v_0^2 + \frac{2q}{m}\Delta V$

POICHE' $\Delta V > 0$ q VIENE ACCELERATA

1 → 2

TRAIETTORIA SEMI-CIRCOLARE

$F_{LORENTZ} = F_{CENTRIPETA}$

$qv_1B = \frac{mv_1^2}{R_1} \qquad R_2 = \frac{mv_1}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{v_0^2 + \frac{2q\Delta V}{m}}$

2 → 3

PER SIMMETRIA LA CARICA VIENE DECELERATA

$$\Delta E_M = 0 \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2}_{\text{B NON INFLUENZA }|\vec{v}|} + \underbrace{qV_2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + qV_3}_{\text{CONDENSATORE}}$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2}mv_3^2 + qV_0$$

$v_3^2 = v_1^2 - \frac{2q}{m}\Delta V = v_0^2 \cancel{+ \frac{2q}{m}\Delta V - \frac{2q}{m}\Delta V}$

$v_3 = v_0 \qquad$ VELOCITA' INIZIALE

3 → 4

TRAIETTORIA SEMI-CIRCOLARE

$F_{LORENTZ} = F_{CENTRIPETA}$

$qv_0B = \frac{mv_0^2}{R_4} \qquad R_4 = \frac{mv_0}{qB}$

DISTANZA FINALE

$\Delta x = 2R_2 - 2R_4 = \frac{2m}{qB}(v_1 - v_0)$

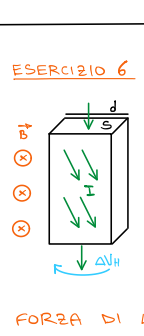
$= \frac{2m}{qB}\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2q\Delta V}{m}} - v_0\right)$

CICLOTRONE

SE AD OGNI PERIODO T INVERTO LA POLARITÀ DELLE GRIGLIE, HO UN DISPOSITIVO PER ACCELERARE CARICHE A VELOCITA' RELATIVISTICHE

$T = \frac{\text{DISTANZA}}{\text{VELOCITA'}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB}$

ESERCIZIO 6

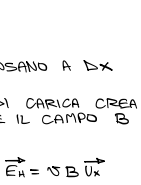


LASTRA ARGENTO S, d
CORRENTE I
CAMPO $\vec{B}$ UNIFORME
N PORTATORI CARICA / VOLUME
CALCOLA ΔV_{HALL}

FORZA DI LORENTZ

I PORTATORI DI CARICA (-e) SONO SOTTOPOSTI A:

$\vec{F_L} = -e\vec{v}\times\vec{B} = -evB\vec{u_x}$



LA CORRENTE I TRADIZIONALE E' VERSO IL BASSO MENTRE GLI ELETTRONI SCORRONO VERSO L' ALTO

CAMPO ELETTRICO

GLI ELETTRONI SI ADDENSANO A DX

LO SBILANCIAMENTO DI CARICA CREA UNA DDP (ΔV) FINO A CONTRASTARE IL CAMPO B

$qE_H = qvB \qquad \vec{E_H} = vB\vec{u_x}$

INTENSITA' DI CORRENTE

$I = SJ \qquad$ DOVE $\quad \vec{J} = -eN\vec{v}$

$v = \frac{J}{eN} = \frac{I}{eNS}$

DIFFERENZA DI POTENZIALE

ASSUMIAMO $\vec{E_H}$ UNIFORME

$\Delta V_H = E_H\cdot d = dvB = \frac{IdB}{eNS}$

EFFETTO GALVANOMETRICO

CHIAMATO ANCHE EFFETTO HALL

USATO PER MISURARE $\quad B(\Delta V) = \frac{eNS\Delta V_H}{Id}$

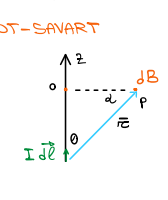
"MAGNETOMETRO"

ESERCIZIO 7

FILO CONDUTTORE RETTILINEO INDEFINITO
SEZIONE TRASCURABILE
CORRENTE STAZIONARIA I

DIMOSTRAZIONE BIOT-SAVART

SCOMPONGO IL FILO



$\vec{dl} = dz\,\vec{u_z}$

$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$

$\vec{B} = \int_{FILO} dB\,\vec{u_\theta} = \int_{FILO}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dz\sin\theta}{r^2}\vec{u_\theta}$

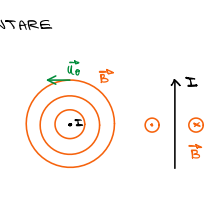
GEOMETRIA FILO

$\sin\theta = \cos\alpha \quad$ COMPLEMENTARE

$r = d/\cos\alpha$

$z = r\sin\alpha = d\tan\alpha$

$dz = |dl| = \frac{d}{\cos^2\alpha}d\alpha$



SOSTITUENDO IN $\vec{B}$

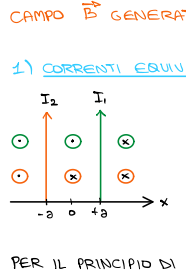
$\vec{B} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\cos\alpha\,d\alpha\,\vec{u_\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{u_\theta}$

ESERCIZIO 8

2 FILI CONDUTTORI RETTILINEI PARALLELI POSTI A DISTANZA 2a PERCORSI DA CORRENTI DI STESSA INTENSITA' I

CAMPO $\vec{B}$ GENERATO ?

1) CORRENTI EQUIVERSE

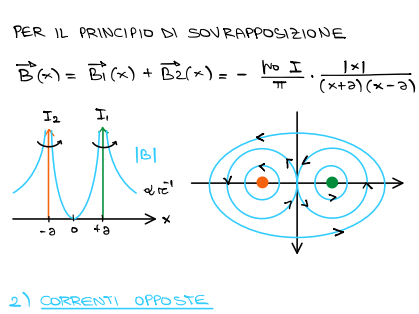


$\vec{B_1}(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)}\vec{u_z}$

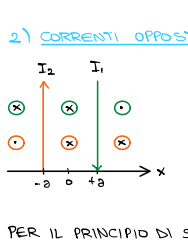
$\vec{B_2}(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)}\vec{u_z}$

PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$\vec{B}(x) = \vec{B_1}(x) + \vec{B_2}(x) = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{|x|}{(x+a)(x-a)}\vec{u_z}$



2) CORRENTI OPPOSTE

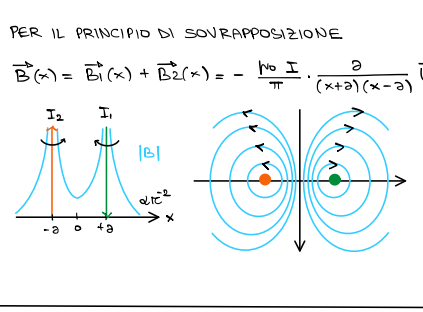


$\vec{B_1}(x) = +\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)}\vec{u_z}$

$\vec{B_2}(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)}\vec{u_z}$

PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

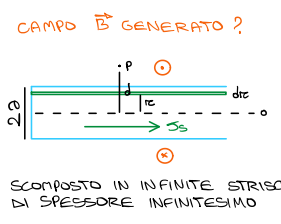
$\vec{B}(x) = \vec{B_1}(x) + \vec{B_2}(x) = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{(x+a)(x-a)}\vec{u_z}$



ESERCIZIO 9

NASTRO CONDUTTORE
LARGHEZZA 2a, LUNGHEZZA ∞
DENSITA' DI CORRENTE SUPERFICIALE $\vec{J_S}$

CAMPO $\vec{B}$ GENERATO ?



SCOMPONGO IN INFINITE STRISCE (FILI) DI SPESSORE INFINITESIMO

BIOT-SAVART $\quad \vec{dB} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(d-x)}\vec{u_\theta}$

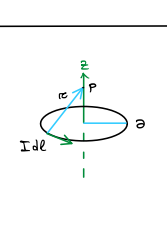
$\vec{B} = \int dB = \int_{-a}^{+a}\frac{\mu_0 J_S}{2\pi(d-x)}dx = \frac{\mu_0 J_S}{2\pi}\log\left(\frac{d+a}{d-a}\right)$

CAMPO GENERATO A $d = 2a$

$B(d=2a) = \frac{\mu_0 J_S}{2\pi}\log\left(\frac{2a+a}{2a-a}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\log 3$

DOVE $\quad I = 2aJ_S$

ESERCIZIO 10



SPIRA CIRCOLARE DI RAGGIO a E SEZIONE TRASCURABILE PERCORSA DA CORRENTE I

CAMPO $\vec{B}$ GENERATO ?

$B = \int_{SPIRA}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\int_{SPIRA}\vec{dl}\times\vec{r} \qquad r\ \text{COST}$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\int_{SPIRA}\vec{dl}\times(\cancel{z\vec{u_z}} + a\vec{u_r})$

$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3}\int_{SPIRA}\vec{dl}\times\vec{u_r}$

$= \frac{\mu_0 I a}{2\cancel{4}\pi r^3}2\pi a\,\vec{u_z} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}\vec{u_z}$

RICORDIAMO CHE $\quad r = \sqrt{z^2 + a^2}$

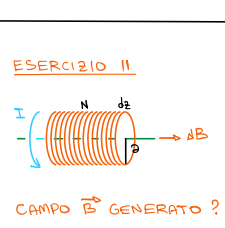
CAMPO MAGNETICO NELL' ASSE

$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\vec{u_z}$

CAMPO MAGNETICO AL CENTRO

$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a}\vec{u_z}$

ESERCIZIO 11



CILINDRO INFINITO FORMATO DA INFINITE SPIRE CIRCOLARI (CHIAMATO SOLENOIDE)

CAMPO $\vec{B}$ GENERATO ?

ASSIMILO dz SEZIONE A SPIRA

INTENSITA' DI CORRENTE $\quad dI = I\,N\,dz$

SE LE SPIRE SONO MOLTO VICINE (DENSE) L' APPROSSIMAZIONE E' VALIDA E TUTTA LA CORRENTE SCORRE SULLA SUPERFICIE LATERALE

$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\vec{u_z} \qquad$ SINGOLA SPIRA

$\vec{dB}(z) = \frac{\mu_0 a^2\,dI\,\vec{u_z}}{2((z-z_0)^2+a^2)^{3/2}} \qquad$ SOLENOIDE

$\vec{B}(z_0) = \int_{SOLENOIDE}dB = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 a^2 I N\vec{u_z}}{2((z-z_0)^2+a^2)^{3/2}}dz$

GEOMETRIA

$(z - z_0) = a\cot\theta$

$dz = -\frac{a\,d\theta}{\sin^2\theta}$

$$\begin{cases} z_{SUP} = \infty \longrightarrow \theta_{SUP} = 0 \\ z_{INF} = -\infty \longrightarrow \theta_{INF} = \pi \end{cases}$$

SOSTITUENDO

$B(z_0) = \int_0^\pi\frac{\mu_0 a^3 I N\vec{u_z}}{2}\frac{1}{(a^2\cot^2\theta + 1)^{3/2}}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\mu_0 I N\vec{u_z}}{2}\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta = \mu_0 I N\vec{u_z}$

$N = M/L \quad$ DENSITA' DI SPIRE

CAMPO SULL' ASSE Z

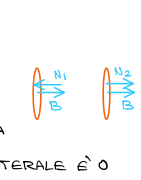
$B(z) = \mu_0 I N\vec{u_z}$

CAMPO IN TUTTI I PUNTI INTERNI

III $\quad$ DIV $\vec{B} = \int_\Sigma B\cdot\vec{n}\,dS = 0$

IV $\quad$ CURL $\vec{B} = \oint_\gamma B\cdot dl = \mu_0\Sigma I$

III MAXWELL



CAMPO SOLENOIDALE, FLUSSO 0

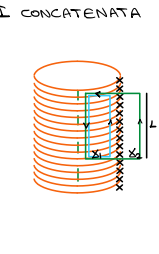
IL CAMPO HA SIMMETRIA CILINDRICA

IL FLUSSO LUNGO LA SUPERFICIE LATERALE E' 0

$B = B(r)\vec{u_z}$

IV MAXWELL

CIRCUITAZIONE DI γ E' PROPORZIONALE AD I CONCATENATA



CIRCUITO γ_1

CURL $\vec{B} = LB(r) - LB(0) = 0 \qquad I_{CONC} = 0$

SIGNIFICA CHE $\quad B(r) = B(0)$

TUTTI I PUNTI INTERNI HANNO LO STESSO $\vec{B}$

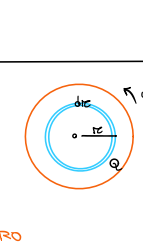
CIRCUITO γ_2

CURL $\vec{B} = LB(r) - LB(0) = -\mu_0 NLI$

CAMPO MAGNETICO GENERALE

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 NI\vec{u_z} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

ESERCIZIO 12



DISCO DI RAGGIO R CARICO Q
DENSITA' σ UNIFORME
DISCO POSTO IN ROTAZIONE ω

INDUZIONE MAGNETICA NEL CENTRO

DENSITA' DI CARICA $\quad \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$

SCOMPOSIZIONE IN CORONE CIRCOLARI dr, r

$dI = \frac{dq}{T} \qquad dq = \sigma\,2\pi r\,dr \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$

CORRENTE $\quad dI = \sigma\omega r\,dr = \frac{Q\omega r}{\pi R^2}dr$

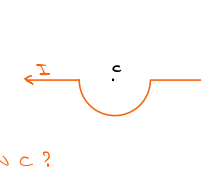
CAMPO MAGNETICO (CENTRO SPIRA)

$\vec{dB}(0) = \frac{\mu_0\,dI\,\vec{u_z}}{2r}$

$\vec{B}(0) = \int_{DISCO}dB(0) = \int_0^R\frac{\mu_0\omega Q\,\vec{u_z}}{2\pi R^2}dr = \frac{\mu_0\omega Q}{2\pi R}\vec{u_z}$

ESERCIZIO 13

FILO "A CAZZO"
TRATTI RETTILINEI E SEMICIRCONFERENZA



CAMPO MAGNETICO IN C ?

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\times dr}{r^3}$

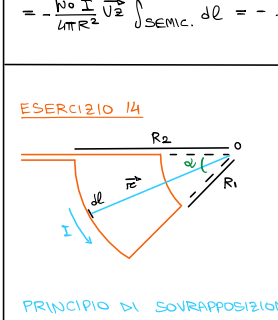
I TRATTI RETTILINEI NON DANNO CONTRIBUTO

$B(C) = \int_{SEMIC.}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\times dr}{R^3}$

$r = R$ COSTANTE $\qquad dl\times r = -dl\,R\,\vec{u_z}$

$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\vec{u_z}\int_{SEMIC.}dl = -\frac{\mu_0 I}{4R}\vec{u_z}$

ESERCIZIO 14



CONSIDERA IL CIRCUITO
$\alpha = \pi/4$ COST
CALCOLA IL CAMPO DI INDUZIONE MAGNETICA GENERATO IN O

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$\vec{B}(0) = \int_{ARCO\ R_1}dB + \int_{ARCO\ R_2}dB$

DOVE $\quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\times dr}{r^3}$

$B(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\int_1\frac{dl\times r}{R_1^3} + \int_2\frac{dl\times r}{R_2^3}\right)$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{u_z}\left(\int_1\frac{dl}{R_2^2} - \int\frac{dl}{R_1^2}\right)$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) =$

$= -\frac{\mu_0 I}{16R_1R_2}(R_2 - R_1)\vec{u_z}$

ESERCIZIO 15

FILO CONDUTTORE RETTILINEO INDEFINITO
SCORRE UNA CORRENTE I
CALCOLA $\vec{B}$ IN TUTTO LO SPAZIO (CON AMPERE)

CAMPO INDUZIONE MAGNETICA

SIMMETRIA CILINDRICA

INVARIANTE PER ROTAZIONI ATTORNO AD I

$\vec{B}(x,y,z) = B(r)\,\vec{u_\theta}$

LE CORRENTI SONO I VORTICI DI $\phi(\vec{B})$

CURL $\vec{B} = \mu_0 I$

SOTTO QUESTE IPOTESI:

γ: LINEE DI FLUSSO CERCHI CONCENTRICI

LEGGE DI AMPERE

CURL $\vec{B} = \oint_\gamma B\cdot dl = \mu_0 I$

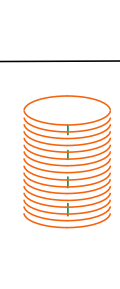
$\oint_\gamma B(r)\vec{u_\theta}\cdot dl\,\vec{u_\theta} = \mu_0 I$

$B(r)\oint dl = B(r)\,2\pi r = \mu_0 I$

$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$

ESERCIZIO 16

CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$ DI UN SOLENOIDE USANDO AMPERE

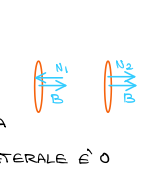


CAMPO IN TUTTI I PUNTI INTERNI

III $\quad$ DIV $\vec{B} = \int_\Sigma B\cdot\vec{n}\,dS = 0$

IV $\quad$ CURL $\vec{B} = \oint_\gamma B\cdot dl = \mu_0\Sigma I$

III MAXWELL



CAMPO SOLENOIDALE, FLUSSO 0

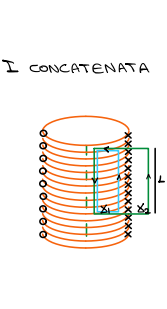
IL CAMPO HA SIMMETRIA CILINDRICA

IL FLUSSO LUNGO LA SUPERFICIE LATERALE E' 0

$B = B(r)\vec{u_z}$

IV MAXWELL

CIRCUITAZIONE DI γ E' PROPORZIONALE AD I CONCATENATA



CIRCUITO γ_1

CURL $\vec{B} = LB(r) - LB(0) = 0 \qquad I_{CONC} = 0$

SIGNIFICA CHE $\quad B(r) = B(0)$

TUTTI I PUNTI INTERNI HANNO LO STESSO $\vec{B}$

CIRCUITO γ_2

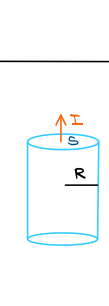
CURL $\vec{B} = LB(r) - LB(0) = -\mu_0 NLI$

CAMPO MAGNETICO GENERALE

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 NI\vec{u_z} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

ESERCIZIO 17

CAVO CONDUTTORE
CILINDRO RETTILINEO INDEFINITO
$\vec{J}$ DENSITA' UNIFORME



MAX CAMPO MAGNETICO ?

TEOREMA DI AMPERE

CURL $\vec{B} = \oint\vec{B}\cdot dl = \oint B(r)\,\vec{u_\theta}\cdot dl\,\vec{u_\theta} = \mu_0 I_C$

$B(r)\oint dl = B(r)\,2\pi r = \mu_0 I_C$

$B(r) = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r}\vec{u_\theta}$

DENSITA' DI CARICA

$\vec{J}(r) = \frac{I}{S(r)}\vec{u_z} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{u_z} \qquad$ R COSTANTE

CORRENTE INCATENATA

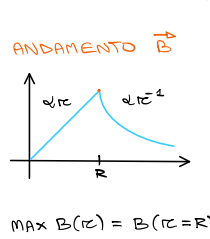
$I_C = \int_\Sigma\vec{J}\cdot n\,dS = \pi r^2 J$

$$I_C = \begin{cases} \left(\frac{r}{R}\right)^2 I \\ I \end{cases}$$

CAMPO INDUZIONE MAGNETICA

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r}\vec{u_\theta} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r\,\vec{u_\theta} \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta} \end{cases}$$

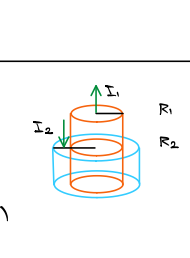
ANDAMENTO $\vec{B}$



MAX $B(r) = B(r=R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{u_\theta}$

ESERCIZIO 18

CAVO COASSIALE
NUCLEO CONDUTTORE R_1 I_1
GUAINA DI METALLO $\chi = 0$ (ISOLANTE) SPESSORE $\Delta x = R_2 - R_1$
MAGLIA METALLICA ESTERNA R_2 I_2 SPESSORE TRASCURABILE



TEOREMA DI AMPERE

CURL $\vec{B} = \oint\vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_C(r)$

$B(r)\oint dl = \mu_0 I_C(r)$

$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_C(r)}{2\pi r}\vec{u_\theta}$

DENSITA' DI CORRENTE

OMOGENEA ALL' INTERNO DI CIASCUN MATERIALE

$$\vec{J}(r) = \frac{I}{S}\vec{u_z} = \begin{cases} \frac{I_1}{\pi R_1^2}\vec{u_z} & r \in (0, R_1) \\ \frac{I_1}{\pi r^2}\vec{u_z} & r \in (R_1, R_2) \\ \frac{(I_1 - I_2)}{\pi R_2^2}\vec{u_z} & r = R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

CORRENTE INCATENATA

$$I_C(r) = \pi r^2 J(r) = \begin{cases} I_1\left(\frac{r}{R_1}\right)^2 & r \in (0, R_1) \\ I_1 & r \in (R_1, R_2) \\ I_1 - I_2 & r = R_2 \\ I_1 - I_2 & r > R_2 \end{cases}$$

CAMPO INDUZIONE MAGNETICA

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_C(r)}{2\pi r}\vec{u_\theta} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R_1^2}r\,\vec{u_\theta} & r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\vec{u_\theta} & r \in (R_1, R_2) \\ \frac{\mu_0(I_1 - I_2)}{2\pi r}\vec{u_\theta} & r \geq R_2 \end{cases}$$

TROVA I_1, I_2 DATE LE SEGUENTI CONDIZIONI:

$$\begin{cases} r_1 \in (R_1, R_2) \\ r_2 > R_2 \\ B(r_1) = -B(r_2) \\ |B(r_1)| = |B(r_2)| = B_0 \end{cases}$$

2 INCOGNITE 2 EQUAZIONI

$$\begin{cases} B(r_1) = -B(r_2) \\ |B(r_1)| = B_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = -\frac{\mu_0(I_1 - I_2)}{2\pi r_2} \\ \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = B_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_2 I_1 = (I_2 - I_1)r_1 \\ I_1 = \frac{2\pi B_0}{\mu_0}r_1 \end{cases}$$

$(r_2 + r_1)I_1 = r_1 I_2$

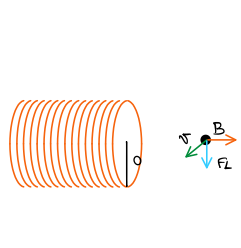
$I_2 = \frac{r_2 + r_1}{r_1}I_1 = \frac{r_2 + r_1}{\cancel{r_1}}\,\frac{2\pi B_0\cancel{r_1}}{\mu_0} = \frac{2\pi(r_2 + r_1)B_0}{\mu_0}$

COPPIA DI CORRENTI (I_1, I_2)

$$\begin{cases} I_1 = \frac{2\pi B_0 r_1}{\mu_0} \\ I_2 = \frac{2\pi B_0(r_1 + r_2)}{\mu_0} \end{cases}$$

ESERCIZIO 19

SOLENOIDE RETTILINEO INDEFINITO
$N = 10^3\,m^{-1}$ DENSITA' DI SPIRE
ELETTRONE SI MUOVE DENTRO
$m_e, q_e, a = 5\,cm, v = 10^7\,m/s$
I AFFINCHE' NON URTI LE PARETI



FORZA DI LORENTZ

$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} \qquad |\vec{F}| = evB = \frac{mv^2}{R}$

$R = \frac{mv\sin\alpha}{eB}$

PER NON USCIRE DAL SOLENOIDE

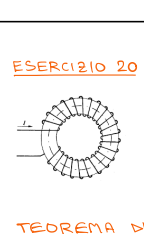
$R \leq a \qquad R_{MAX} = \frac{mv}{eB} = a$

INTENSITA' DI CORRENTE

SOSTITUIAMO $\quad B = \mu_0 NI$

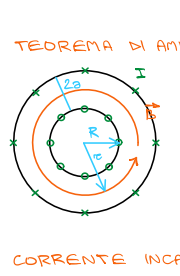
$R_{MAX} = a = \frac{mv}{e\mu_0 NI} \longrightarrow I = \frac{mv}{e\mu_0 Na}$

ESERCIZIO 20



SOLENOIDE TOROIDALE
RAGGIO ESTERNO R
RAGGIO INTERNO a
N SPIRE, CORRENTE I

TEOREMA DI AMPERE



SIMMETRIA DI ROTAZIONE

$\vec{B} = B(r)\vec{u_\theta}$

CURL $\vec{B} = \oint B\cdot dl = \mu_0 I_C$

CORRENTE INCATENATA

$$I_C(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ NI & r \in (R, R+2a) \\ NI - NI = 0 & r > R+2a \end{cases}$$

CAMPO INDUZIONE MAGNETICA

$\oint B\cdot dl = B(r)\oint dl = 2\pi r\,B(r) = \mu_0 I_C(r)$

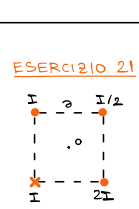
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}I_C(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{u_\theta} & r \in (R, R+2a) \\ 0 & r > R+2a \end{cases}$$

APPROSSIMAZIONE

SE $R >> a \qquad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\vec{u_\theta} = \mu_0 m I\vec{u_\theta}$

m DENSITA' DI SPIRE

ESERCIZIO 21



4 FILI INDEFINITI PERCORSI DA CORRENTE

CAMPO IN $\vec{B}(O)$?

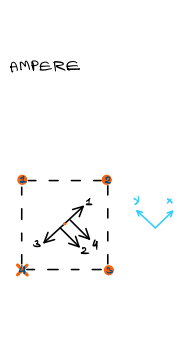
LEGGE DI BIOT SAVART

NON ME LA RICORDO MA LA RICAVO CON AMPERE

$\oint B\,dl = \mu_0 I_C \longrightarrow 2\pi r\,B(r) = \mu_0 I$

$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$

TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE



$\vec{B}(O) = \sum\vec{B_i}(O)$

DOVE OGNI SINGOLO CONTRIBUTO:

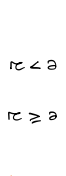
$B_i(O) = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi r_i} = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I_i\sqrt{2}}{2\pi a}\vec{u_\theta}$

$$B(O) = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\begin{vmatrix} B_1 - B_3 \\ B_2 + B_4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\begin{vmatrix} \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{2\pi a} - \frac{\mu_0(2I)\sqrt{2}}{2\pi a} = -\frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{2\pi a}\vec{u_x} \\ -\frac{\mu_0(I/2)\sqrt{2}}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{2\pi a} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{2\pi a}\vec{u_y} \end{vmatrix}$$

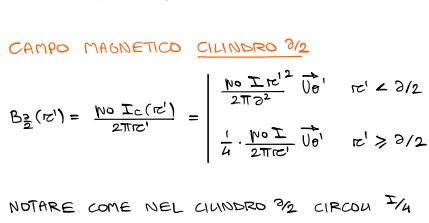
$\vec{B}(O) = \sum B_i = -\frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{2\pi a}\left(\vec{u_x} + \frac{3}{2}\vec{u_y}\right)$

ESERCIZIO 22

CONDUTTORE CILINDRICO INDEFINITO (a)
I UNIFORME SU SEZIONE
CAVITA' CILINDRICA (a/2)
J COSTANTE (PRIMA, DOPO CAVITA')
CALCOLA IL CAMPO



PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE



$B(r)\,2\pi r = \mu_0 I_C(r)$

$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \qquad$ COSTANTE

CORRENTE INCATENATA CILINDRO a

$$I_C(r) = \begin{cases} \vec{J}\pi r^2 = I\left(\frac{r}{a}\right)^2 & r < a \\ \vec{J}\pi a^2 = I & r > a \end{cases}$$

CAMPO MAGNETICO CILINDRO a

$$B_a(r) = \frac{\mu_0 I_C(r)}{2\pi r} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{u_\theta} & r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta} & r \geq a \end{cases}$$

CORRENTE INCATENATA CILINDRO a/2

$$I_C(r') = \begin{cases} \vec{J}\pi r'^2 = I\left(\frac{r'}{a}\right)^2 & r' < a/2 \\ \vec{J}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = I/4 & r' > a/2 \end{cases}$$

CAMPO MAGNETICO CILINDRO a/2

$$B_{\frac{a}{2}}(r') = \frac{\mu_0 I_C(r')}{2\pi r'} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r'^2}{2\pi a^2}\vec{u_{\theta'}} & r' < a/2 \\ \frac{1}{4}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r'}\vec{u_{\theta'}} & r' \geq a/2 \end{cases}$$

NOTARE COME NEL CILINDRO a/2 CIRCOLI 1/4

CAMPO MAGNETICO TOTALE

GRAZIE AL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PUO' ESSERE ESPRESSO COSI'

$\vec{B}(P) = \vec{B_a}(P) - \vec{B_{\frac{a}{2}}}(P)$

IL MENO E' USATO PER DESCRIVERE L' EFFETTO DELLA CAVITA'

CALCOLO $\vec{B}(O)$

$B(O) = B_a(r=0) - B_{\frac{a}{2}}(r' = a/2)$

$= 0 - \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi(a/2)}\right]\vec{u_y}$

$= +\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{u_y}$

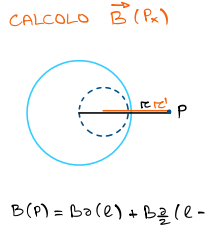
CALCOLO $\vec{B}(C)$

$B(C) = B_a(r = a/2) - B_{\frac{a}{2}}(r' = 0)$

$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\cdot\frac{a}{2}\vec{u_y} - 0$

$= +\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{u_y}$

CALCOLO $\vec{B}(P_e)$



$B(P) = B_a(\ell) + B_{\frac{a}{2}}(\ell - a/2)$

$= \frac{\mu_0 I}{2\pi\ell}\vec{u_y} - \frac{1}{4}\frac{\mu_0 I}{2\pi(\ell - a/2)}\vec{u_y}$

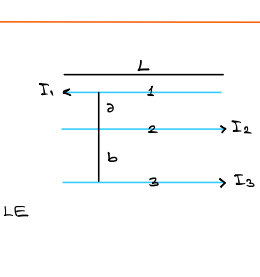
$= \frac{\mu_0 I}{2\pi\ell}\vec{u_y} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(2\ell - a)}\vec{u_y}$

$= \frac{\mu_0 I(3\ell - 2a)}{4\pi\ell(2\ell - a)}\vec{u_y}$

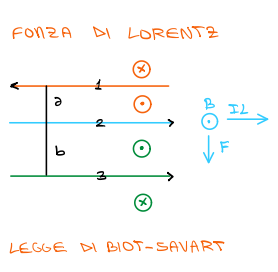
GENERALIZZAZIONE $\qquad$ LMAO

ESERCIZIO 23

3 FILI RETTILINEI LUNGHEZZA L
DISTANZE a, $b = \frac{3}{2}a$
$I_1 = I, \quad I_2 = 3I \quad I_3 = 2I$
FORZA AGENTE SUL FILO CENTRALE



FORZA DI LORENTZ



$F_{LORENTZ} = q\vec{v}\times\vec{B}$
$= qvB\,\vec{u_\theta}$
$= q\frac{dl}{dt}B\,\vec{u_\theta}$
$= ILB\,\vec{u_\theta}$

LEGGE DI BIOT-SAVART

$2\pi r\,B(r) = \mu_0 I \qquad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$F_2 = \sum F_{i,2} = I_2LB_1 + I_2LB_3$

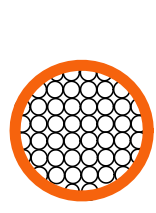
$= I_2L\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} + \frac{I_2L\,\mu_0 I_3}{2\pi b}$

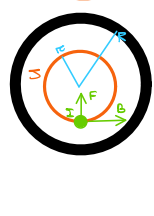
$= -\frac{\mu_0 I_2 L}{2\pi}\left(\frac{I_1}{a} + \frac{I_3}{b}\right)\vec{u_y}$

$= -\frac{7\mu_0 I^2 L}{2\pi a}\vec{u_y}$

ESERCIZIO 24

N FILI RETTILINEI INDEFINITI
CAVO CILINDRICO RAGGIO R
FILI ATTRAVERSATI DA I
FORZA CHE AGISCE PER UNITA' DI LUNGHEZZA CHE AGISCE A $r = R/2$





CORRENTE INCATENATA

$J = \frac{NI}{\pi R^2}$

$$I_C(r) = \begin{cases} J\pi r^2 = NI\left(\frac{r}{R}\right)^2 & r < R \\ J\pi R^2 = NI & r > R \end{cases}$$

CAMPO INDUZIONE MAGNETICA

CURL $\vec{B} = \oint B\cdot dl = \mu_0 I_C$

$B(r)\,2\pi r = \mu_0 I_C(r)$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_C(r)}{2\pi r}\vec{u_\theta} = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi R^2}r\,\vec{u_\theta} & r < R \\ \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{u_\theta} & r > R \end{cases}$$

CALCOLO $B(r = R/2)$

$B\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R^2}\,\frac{R}{2} = \frac{\mu_0 NI}{4\pi R}\vec{u_\theta}$

FORZA DI LORENTZ

$\frac{F}{L} = I\vec{u_z}\times\vec{B}\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{\mu_0 NI^2}{4\pi R}\vec{u_z}\times\vec{u_\theta}$

$\frac{F}{L} = -\frac{\mu_0 NI^2}{4\pi R}\vec{u_r}$

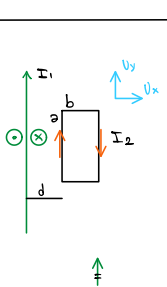
I FILI VENGONO ATTRATTI VERSO IL CENTRO

ESERCIZIO 25

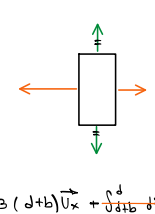
FILO RETTILINEO INDEFINITO SCORRE CORRENTE I_1

SPIRA RETTANGOLARE LATO a/b ATTRAVERSATA DA I_2

CALCOLA F NELLA SEGUENTE DISPOSIZIONE



CAMPO MAGNETICO FILO



$B_1(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\vec{u_z}$

FORZA SULLA SPIRATA

$\vec{F} = \sum\int I_2\,\vec{dl}\times\vec{B}$

$= I_2aB(d)\vec{u_x} + \cancel{\int_d^{d+b}dF} - I_2aB(d+b)\vec{u_x} + \cancel{\int_{d+b}^{d}dF}$

$= I_2a(B(d) - B(d+b))\vec{u_x}$

PER SIMMETRIA I CONTRIBUTI SULLA y SI ELIDONO

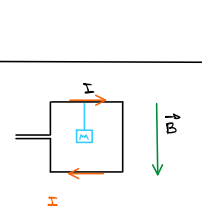
$\vec{F} = I_2a\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+b)}\right)\vec{u_x}$

$= \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+b}\right)\vec{u_x}$

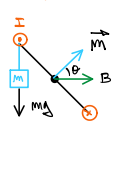
$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi d(d+b)}\vec{u_x}$

ESERCIZIO 26

SPIRA QUADRATA PERCORSA DA CORRENTE I GIRA ATTORNO AL SUO ASSE ORIZZONTALE



CAMPO $\vec{B}$ UNIFORME
MASSA m APPESA AD ESTREMO
MASSIMA m SOLLEVABILE ?



$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} \qquad$ MOMENTO MECCANICO

$\vec{m} = Ia^2\,\vec{N} \qquad$ MOMENTO DI DIPOLO

$|M| = Ba^2I\sin\theta$

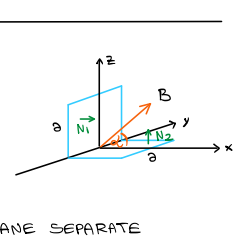
$|M_P| = mg\,d = mg\frac{a}{2}\sin\theta$

PER SOLLEVARE LA MASSA $\quad |M| \geq |M_P|$

$Ba^2I\,\cancel{\sin\theta} \geq mg\frac{a}{2}\cancel{\sin\theta} \longrightarrow m \leq \frac{2IBa}{g}$

ESERCIZIO 27

SPIRA PIEGATA AD L
2 SPIRE QUADRATE DI LATO a



MOMENTO ANGOLARE MASSIMO ?

PUO' ESSERE VISTA COME 2 SPIRE PIANE SEPARATE

ASSE DI ROTAZIONE: y

MOMENTO MECCANICO

$M = \vec{m}\times\vec{B}$

CAMPO MAGNETICO

$\vec{B} = B(\cos\alpha\,\vec{u_x} + \sin\alpha\,\vec{u_z})$

DIPOLO MAGNETICO

$\vec{m} = m_1 + m_2 = a^2I\,\vec{N_1} + a^2I\,\vec{N_2} = a^2I(\vec{u_x} + \vec{u_z})$

$M = a^2IB(\vec{u_x} + \vec{u_z})\times(\cos\alpha\,\vec{u_x} + \sin\alpha\,\vec{u_z})$

$= a^2IB(0 - \sin\alpha\,\vec{u_y} + \cos\alpha\,\vec{u_y} + 0)$

$= a^2IB(\cos\alpha - \sin\alpha)\vec{u_y}$

MAX (M) $\longrightarrow$ MAX $(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$\cos\alpha - \sin\alpha = A\cos(\alpha + \varphi) = \sqrt{2}\cos(\alpha + \pi/4)$

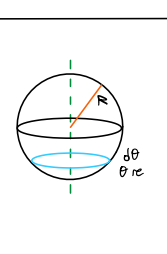
$$\begin{cases} A^2 = (1)^2 + (-1)^2 \longrightarrow A = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{-1}{+1}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

MAX $\quad \sqrt{2}\cos(\alpha + \pi/4) = \sqrt{2} \quad$ PER $\quad \alpha = -\frac{\pi}{4}V + \frac{3}{4}\pi$

$\text{MAX}(M) = \sqrt{2}\,a^2IB\,\vec{u_y}$

ESERCIZIO 28

MOMENTO DI DIPOLO DI UNA SFERA
CARICA UNIFORMEMENTE Q
ROTANTE ω ATTORNO ALL' ASSE



$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$dq = \sigma\,dA = \sigma\,2\pi r\,R\,d\theta$

$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega\,dq}{2\pi} = \frac{Q\omega\cos\theta\,d\theta}{4\pi}$

$\vec{m} = \int d\vec{m} = \int_{SFERA}\pi r^2\,dI\,\vec{u_z}$

$= \frac{2Q\omega R^2}{4}\vec{u_z}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta$

$= \frac{Q\omega R^2}{3}\vec{u_z}$