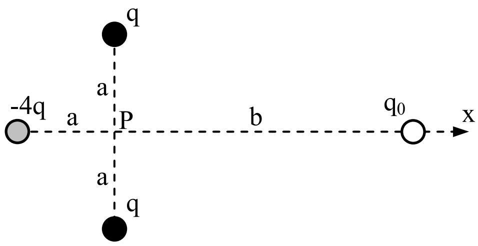
Politecnico di Milano
Fisica Sperimentale B+C (prof. Claudia Dallera - Roberta Ramponi)
a.a. 2006-2007 - Facoltà dei Sistemi - Ind. Fisica-Matematica

II prova in itinere - 06/07/2007

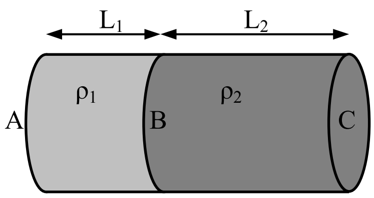
Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Scrivere in stampatello nome, cognome, matricola e firmare ogni foglio.



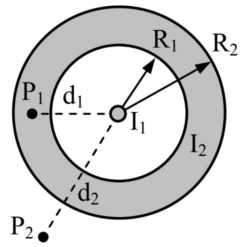
1. Si abbiano tre cariche fissate disposte come in figura alla medesima distanza *a* da un punto P (origine dell'asse delle x): le cariche positive siano entrambe di carica *q*, mentre la carica negativa valga *-4q*;

- determinare l'energia di configurazione delle 3 cariche;
- determinare il campo elettrico ed il potenziale creato dalle tre cariche lungo l'asse x, per x > 0;
- una particella carica q_0 di massa m_0 sia posta ad una distanza *b* dall'origine dell'asse x ed inizialmente ferma; determinare la velocità con la quale la particella giunge nel punto P, e la forza cui ivi è sottoposta.

2.

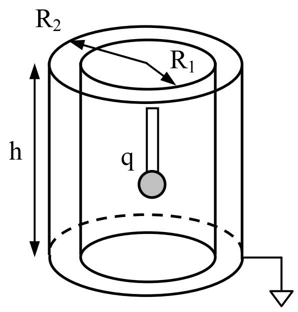


- Utilizzando il modello di Drude della conduzione nei metalli, si ricavi la legge di Ohm in forma puntuale per un conduttore avente densità di portatori *n*, assumendo pari a τ il tempo medio fra gli urti.
- Dato un conduttore cilindrico di sezione *S*, formato da due segmenti di lunghezza $AB = L_1$ e $BC = L_2$ aventi rispettivamente resistività ρ_1 e ρ_2, si calcoli la resistenza equivalente tra i punti A e C.
- Facoltativo: nel caso in cui si applichi una d.d.p. pari a V_{AC} ai capi di tale conduttore, si calcoli il campo elettrico *E* nei due metalli e la carica totale *Q* presente all'interfaccia tra i due metalli.



3. Un filo rettilineo indefinito a sezione trascurabile, percorso dalla corrente I_1, è circondato da un filo a sezione cava ad esso coassiale, con raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, percorso dalla corrente I_2. La corrente I_1 è entrante nel piano del foglio, mentre I_2 è uscente. Si calcoli, in modulo direzione e verso, il campo magnetico nei punti P_1 (d_1) e P_2 (d_2) in figura.

[I_1 = 20 A; I_2 = 10 A; R_1 = 1 cm; R_2 = 2 cm; d_1 = 1.5 cm; d_2 = 3 cm]



4. Sulla base dell'esperienza del laboratorio di elettrostatica, si abbia un condensatore cilindrico alto *h* e di raggi interno ed esterno rispettivamente R_1 ed R_2, in cui l'armatura esterna venga collegata a terra: ricavare

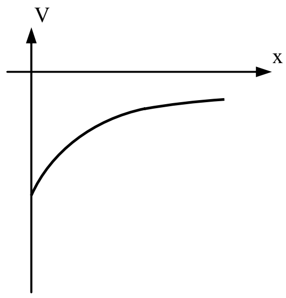
- il campo elettrico che si crea tra le armature del condensatore;
- la differenza di potenziale tra le due armature;
- la capacità del condensatore cilindrico.

Una bacchetta caricata per strofinio con una carica *q* venga poi posta all'interno del condensatore, come in figura, e la tensione letta dall'elettrometro collegato ai capi del condensatore cilindrico sia *V*: nell'ipotesi di induzione completa tra la bacchetta ed il cilindro, calcolare il valore della carica q presente sulla bacchetta.

[h = 22 cm; R_1 = 6 cm; R_2 = 12 cm; V = 24 V]

1. Determiniamo il campo elettrico con la sovrapposizione degli effetti

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2x}{\left[a^2 + x^2\right]^{3/2}} - \frac{4}{(a+x)^2}\right)$$



e la funzione potenziale, o integrando il campo elettrico o con la sovrapposizione degli effetti, sommando i potenziali dovuti alle singole tre cariche

$$V(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{4}{a+x}\right)$$

Per l'energia di configurazione si ha

$$E_{el} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i;\,j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\frac{1 - 8\sqrt{2}}{2}$$

Per valutare la velocità con la quale la particella giunge nell'origine dell'asse x, sfruttiamo la conservazione dell'energia tra la posizione iniziale ($x = b$) e quella finale ($x = 0$), ricordando che la particella parte da ferma ($K_i = 0$)

$$U_i = K_f + U_f \qquad\qquad q_0 V(b) = \frac{1}{2}mv^2 + q_0 V(0)$$

$$V(b) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{4}{a+b}\right) \qquad\qquad V(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a} - \frac{4}{a}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a}$$

$$v = \sqrt{\frac{qq_0}{\pi\varepsilon_0 m_0 a}\frac{5 + \sqrt{10}}{10}}$$

2. Sono due resistori in serie, per cui

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2}{S}$$

La corrente e la densità di corrente che scorre nel conduttore complessivo vale

$$I = \frac{V_{AC}}{R} = \frac{V_{AC}}{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2}S \qquad\qquad J = \frac{I}{S} = \frac{V_{AC}}{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2}$$

mentre la tensione ai capi di ciascun conduttore risulta

$$V_1 = R_1 I = V_{AC}\frac{\rho_1 L_1}{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2} \qquad\qquad V_2 = R_2 I = V_{AC}\frac{\rho_2 L_2}{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2}$$

Ora ricaviamo il campo elettrico con la legge di Ohm locale e la carica all'interfaccia

$$E_1 = \rho_1 J = V_{AC}\frac{\rho_1}{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2} \qquad\qquad E_2 = \rho_2 J = V_{AC}\frac{\rho_2}{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2}$$

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q/S}{\varepsilon_0} \qquad\qquad Q = \Delta E\,\varepsilon_0 S = V_{AC}\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2}\varepsilon_0 S$$

3. Con il teorema di Ampere ricaviamo il campo magnetico in ogni punto

$$\Lambda\left(\vec{B}\right) = \oint \vec{B}\bullet d\vec{s} = B\,2\pi r = \mu_0 I_{conc}$$

$d_1 < r < d_2$: la corrente concatenata è tutta I_1 e parte di I_2

$$I_{conc} = I_1 - JS = I_1 - \frac{I_2}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\pi\left(r^2 - R_1^2\right) = I_1 - I_2\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = 15.8\text{ A}$$

$$B_1 = \left.\frac{\mu_0 I_{conc}}{2\pi r}\right|_{r = d_1} = 2.11\text{ G}$$

$r > d_2$: la corrente concatenata è tutta I_1 meno I_2

$$I_{conc} = I_1 - I_2 = 10\text{ A}$$

$$B_2 = \left.\frac{\mu_0 I_{conc}}{2\pi r}\right|_{r = d_2} = 0.667\text{ G}$$

4. Dal teorema di Gauss, ponendo λ la densità lineare di carica sul condensatore, il campo tra le armature vale

$$\Phi\left(\vec{E}\right) = E\,2\pi r\,h = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

La differenza di potenziale tra le armature la ricaviamo integrando il campo elettrico

$$V = -\int_{R_1}^{R_2} E\,dr = -\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

per cui la capacità risulta

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \lambda h\frac{2\pi\varepsilon_0}{\lambda\ln b/a} \qquad C = 2\pi\varepsilon_0\frac{h}{\ln b/a} = 17.7\text{ pF}$$

Conoscendo la ddp letta, ricaviamo la carica

$$C = \frac{q}{\Delta V} \qquad q = C\,\Delta V = 425\text{ pC}$$