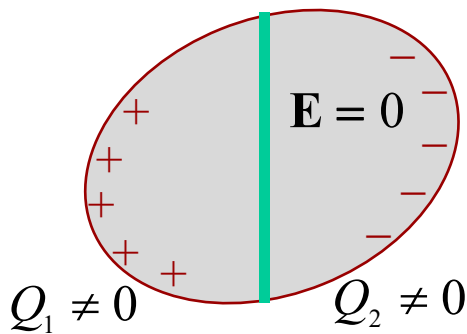


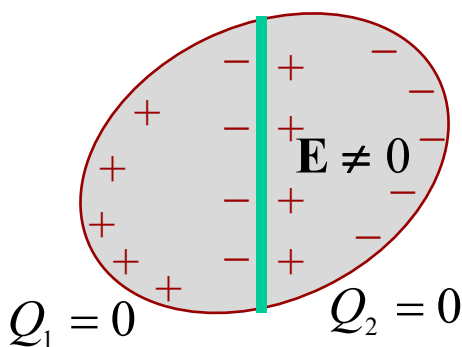
# Dielettrici



**Conduttore**

$\Rightarrow$  carica libera

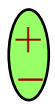
$\Rightarrow$  **induzione**



**Dielettrico**

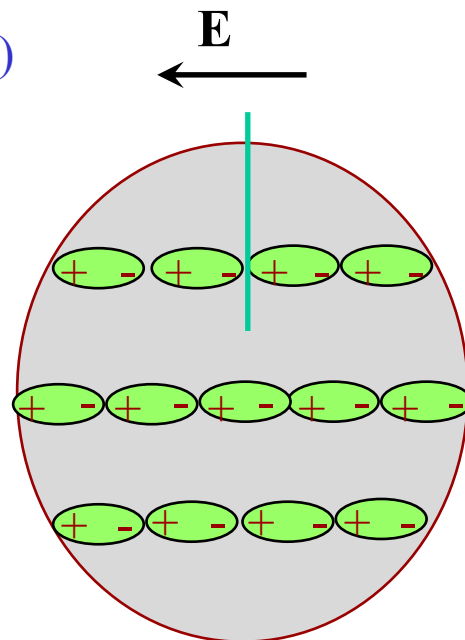
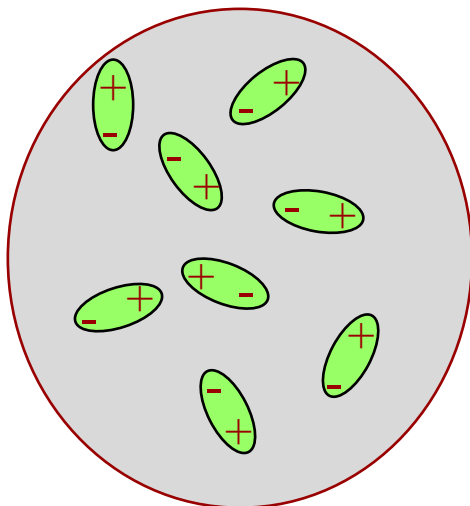
$\Rightarrow$  carica di polarizzazione

$\Rightarrow$  **polarizzazione**



**Dipolo elettrico**

(es. sistema nucleo-elettrone)



Il dielettrico può essere rappresentato come una distribuzione di **dipoli elettrici**, cioè coppie di cariche uguali e contrarie, legate, che possono ruotare intorno ad una posizione di equilibrio.

# Dielettrici e Polarizzazione

Il **dipolo** è l'elemento costitutivo

⇒ Il dielettrico è **sempre globalmente neutro**.

La distribuzione dei dipoli può determinare distribuzioni di carica di superficie e di volume.

**Polarizzazione P:** Momento di dipolo per unità di volume

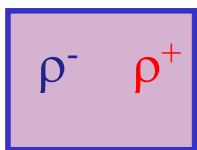
$$\mathbf{P} \triangleq \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau} = N \langle \mathbf{p} \rangle \quad (N = \text{Densità di dipoli})$$

S.I.:  $(\text{Cm})/(\text{m}^3) = \text{C}/\text{m}^2$

Grandezza macroscopica, definita in ogni punto del volume del dielettrico

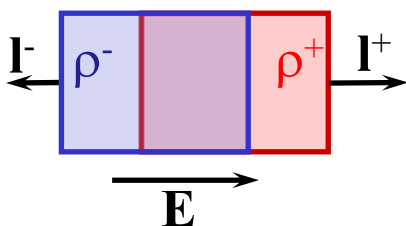
Schematizziamo il sistema con densità di carica di volume positive e negative e definiamo il campo nel dielettrico come campo medio nell'intorno di un punto.

In assenza di **E**:



$$\rho^+ + \rho^- = 0 \quad \left| \rho^+ \Delta\tau \right| = \left| \rho^- \Delta\tau \right|$$

In presenza di **E**:



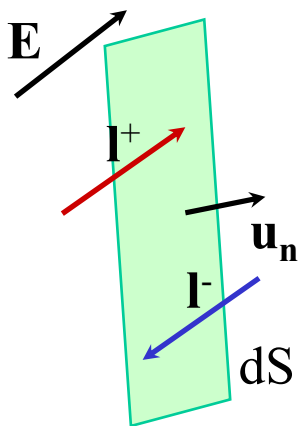
spostamento netto:  $\mathbf{l} = \mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-$

$$\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-) \rho^+ \Delta\tau = \rho^+ \Delta\tau \mathbf{l}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \rho^+ \mathbf{l}$$

Distribuzione di **carica di superficie** generata dalla parte terminale dei dipoli.

Distribuzione di **carica di volume** generata da disomogeneità del materiale (dipoli diversi nel volume non vengono compensati)



$dS$  = superficie infinitesima all'interno del volume del dielettrico.

Attraverso  $dS$  passa una carica:

$$dQ^+ = \rho^+ \mathbf{l}^+ \cdot \mathbf{u}_n dS$$

$$dQ^- = \rho^- \mathbf{l}^- \cdot \mathbf{u}_n dS$$

$$\Rightarrow dQ = \rho^+ (\mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-) \cdot \mathbf{u}_n dS = \rho^+ \mathbf{l} \cdot \mathbf{u}_n dS = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

Per una superficie chiusa  $\Sigma$  all'interno del dielettrico:

$$Q_p = -\iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

dove il segno  $-$  indica che la carica è entrante.

$$Q_p = \iiint_{\tau} \rho_p d\tau \quad \Rightarrow \quad \rho_p = -\text{div } \mathbf{P}$$

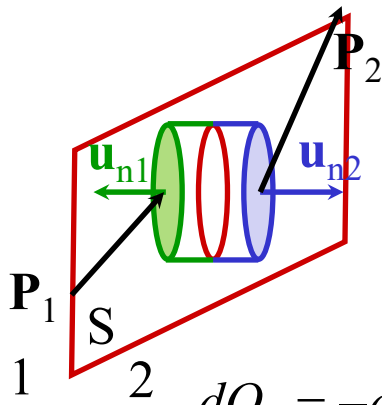
Sulla superficie del dielettrico:

$$dQ_p = \sigma_p dS = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n$$

La carica totale è sempre nulla:

$$Q_T = \iint_{\Sigma} \sigma_p dS + \iiint_{\tau} \rho_p d\tau = \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS - \iiint_{\tau} \text{div } \mathbf{P} d\tau = 0$$

## Condizioni al contorno tra due dielettrici



$S$  = Superficie di separazione tra due dielettrici.

Consideriamo un cilindro le cui basi siano una nel mezzo 1 e l'altra nel mezzo 2.

$$dQ_p = -d\Phi_\Sigma(\mathbf{P})$$

$$dQ_p = dQ_1 + dQ_2 + dQ_S$$

$$dQ_1 = \rho_1 d\tau_1$$

$$dQ_2 = \rho_2 d\tau_2$$

$$dQ_S = \sigma_p dS$$

Facendo tendere a zero l'altezza del cilindro:

$$dQ_1 + dQ_2 \rightarrow 0$$

$$d\Phi_{lat} \rightarrow 0$$

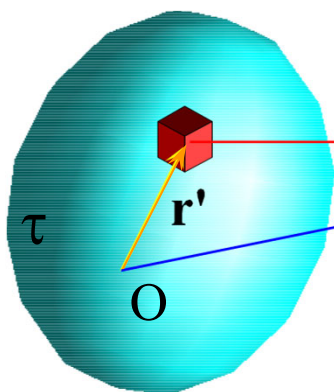
$$\Phi_\Sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{u}_{n2} dS_2 + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_{n1} dS_1 = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{u}_n dS = -\sigma_p dS$$

$$\sigma_p = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{u}_n = P_{n1} - P_{n2} = -[P_n]$$

**Alla superficie di separazione:**

- la componente normale di  $\mathbf{P}$  è discontinua
- la discontinuità è pari alla densità di carica di polarizzazione netta

## Campo $\mathbf{E}$ da cariche di polarizzazione



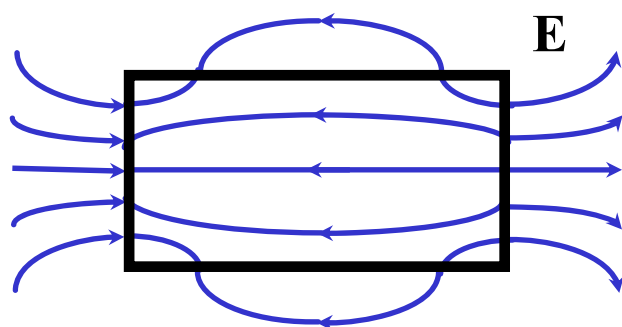
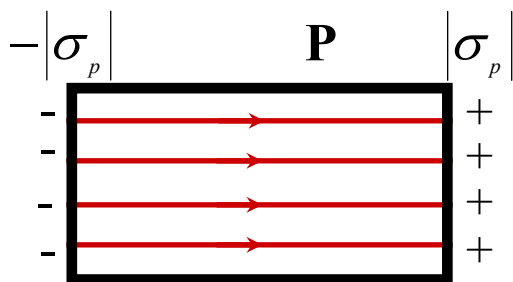
Consideriamo un  
elemento di volume  $\Delta\tau$

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{P}\Delta\tau$$

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Delta\tau$$

$$\Rightarrow V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau$$

### Esempio: Cilindro finito uniformemente polarizzato



$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = |\mathbf{P}| \quad \rho_p = 0$$

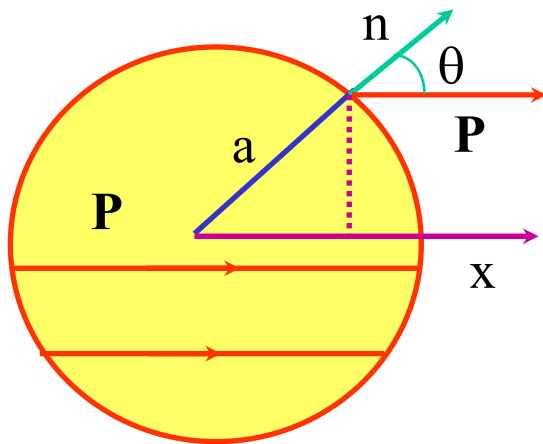
A grandi distanze,  $\mathbf{E}$  è il campo di un dipolo di momento:

$$p = (\sigma_p S) h = \sigma_p \tau = P \tau$$

Per uno strato indefinito ( $S \rightarrow \infty$ ):  $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$

Per un cilindro infinitamente lungo ( $h \rightarrow \infty$ ):  $\mathbf{E} \rightarrow 0$

## Esempio: Sfera dielettrica polarizzata uniformemente



$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = P \cos \theta$$

Per simmetria, il sistema equivale a un dipolo posto nel centro della sfera costituito da due cariche  $Q$  a distanza  $l$

$$Q = \rho^+ \tau \quad -Q = \rho^- \tau = -\rho^+ \tau$$

$$\mathbf{p} = Ql = \tau \rho^+ l = \tau \mathbf{P}$$

All'esterno della sfera:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \tau$$

Sulla superficie:  $r = a \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = Pa \cos \theta \quad x = a \cos \theta$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \frac{P}{a^3} x = \frac{\tau P x}{3\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{P}{3\epsilon_0} x$$

Essendo  $\mathbf{P}$  uniforme:  $\text{div } \mathbf{P} = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$

Posto:  $V = kx$ , dove:  $k = P/3\epsilon_0$

$$V = \frac{P}{3\epsilon_0} x \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

$V$  soddisfa l'eq. di Laplace e le condizioni al contorno.  
 $\mathbf{E}$  è uniforme e opposto a  $\mathbf{P}$ .

## Vettore spostamento elettrico $\mathbf{D}$

Per il teorema di Gauss:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \frac{Q_{lib} + Q_p}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \frac{Q_{lib}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

Quindi:

$$\iint_{\Sigma} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{u}_n dS = Q_{lib}$$

Definiamo:  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \text{Vettore spostamento elettrico}$

Nel S.I.  $\mathbf{D}$  si misura in:  $C m^{-2}$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D} &= \rho_{lib} \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho_{lib} + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Da:

$$\epsilon_0 \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0 = \oint_{\gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t dl - \oint_{\gamma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl$$

Cioè:

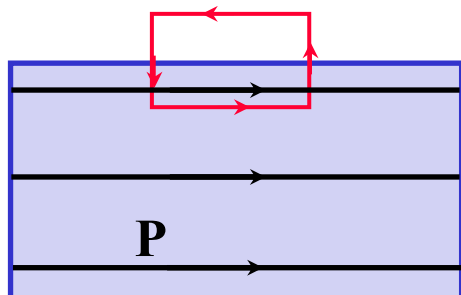
$$\text{rot } \mathbf{D} = \text{rot } \mathbf{P}$$

In generale:  $\text{rot } \mathbf{P} \neq 0 \Rightarrow \text{rot } \mathbf{D} \neq 0$

$\Rightarrow \mathbf{D}$  non è conservativo

## Esempi: Polarizzazione uniforme

### a) Mezzo generico

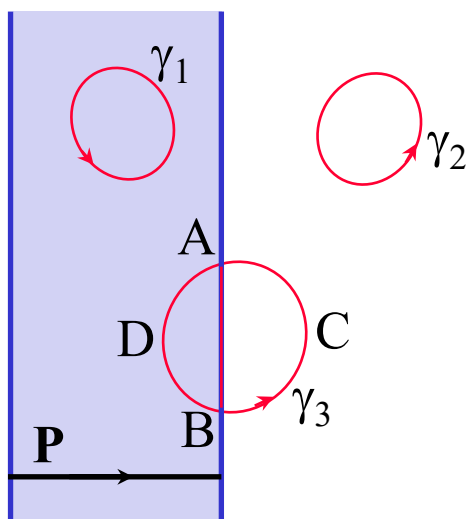


$\mathbf{P}$  uniforme

$$\oint_{\gamma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = Pl \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rot } \mathbf{P} \neq 0$$

### b) Strato indefinito



$\mathbf{P}$  uniforme

$$\gamma_1 : \mathbf{P} = \text{cost} \Rightarrow \oint_{\gamma_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\gamma_2 : \mathbf{P} = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma_2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\gamma_3 : \oint_{\gamma_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = ?$$

$$\oint_{ABC} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0 \Rightarrow \int_{AB} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl + \int_{BCA} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\mathbf{P} \perp AB \Rightarrow \int_{AB} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\Rightarrow \int_{BCA} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\text{Analogamente: } \int_{ADB} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0 \quad (\gamma_3 = BCA \cup ADB)$$

$$\text{rot } \mathbf{P} = 0$$



# Suscettività Dielettrica e Costante Dielettrica

## Relazione caratteristica $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$

Consideriamo **materiali omogenei**

### - Materiali isotropi

- $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  sono **paralleli**
- $\chi$  ed  $\varepsilon$  sono **scalari**

$$\mathbf{P} = \chi(\mathbf{E})\mathbf{E} \quad \mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$$

$\chi$  = Suscettività dielettrica

Nel S.I.:  $F/m = C^2/(Nm^2)$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi \mathbf{E} = \varepsilon(\mathbf{E}) \mathbf{E}$$

$$\varepsilon(\mathbf{E}) = \varepsilon_0 + \chi(\mathbf{E})$$

$\varepsilon$  = Costante dielettrica

### - Materiali lineari

Per certi intervalli di temperatura e campo  $\mathbf{E}$ , molti dielettrici omogenei e isotropi sono lineari, cioè:

- $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  sono **proporzionali**
- $\chi$  ed  $\varepsilon$  sono **costanti**

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}$$

$\varepsilon_r$  = Costante dielettrica relativa

( $\varepsilon_{r,aria} \cong 1.0006$ ,  $\varepsilon_{r,vetro} \approx 4-8$ ,  $\varepsilon_{r,acqua} \cong 80$ )

$$rot \mathbf{D} = rot(\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon rot \mathbf{E} + grad \varepsilon \times \mathbf{E} = grad \varepsilon \times \mathbf{E}$$

Se il mezzo è omogeneo ( $\varepsilon = cost$ )  $\Rightarrow grad \varepsilon = 0$

$$rot \mathbf{D} = 0$$

## - **Materiali anisotropi** ( $\mathbf{P} \nparallel \mathbf{E}$ )

Solidi cristallini e liquidi particolari (cristalli liquidi)

$$\begin{aligned}P_x &= \chi_{11}E_x + \chi_{12}E_y + \chi_{13}E_z \\P_y &= \chi_{21}E_x + \chi_{22}E_y + \chi_{23}E_z \\P_z &= \chi_{31}E_x + \chi_{32}E_y + \chi_{33}E_z\end{aligned}$$

## - **Materiali non lineari** ( $\mathbf{P} \not\propto \mathbf{E}$ )

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} + \chi_2 \mathbf{E}^2 + \chi_3 \mathbf{E}^3 + \dots$$

Applicazione: Modulatori ottici telecom

## - **Materiali piezoelettrici**

Cristalli (es. quarzo), ma anche ceramiche

Se polarizzati, si deformano

Applicazioni: Posizionatori micrometrici, oscillatori al quarzo

Se deformati, si polarizzano

Applicazioni: Dinamometri

## - **Altri materiali**

- Elettreti
- Ferroelectrici

Per i **dielettrici lineari**:

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\operatorname{div}(\chi \mathbf{E}) = -\operatorname{div}[\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}] = \\ &= -\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_{lib} \end{aligned}$$

$$\rho_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_{lib}$$

Analogamente, per la carica di superficie  
(es. superficie di contatto tra dielettrici e conduttori):

$$\sigma_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_{lib}$$

## Equazioni generali per i mezzi lineari

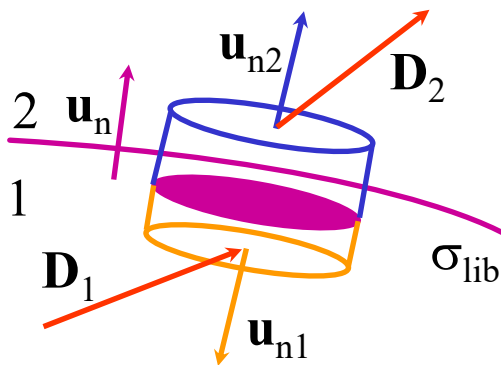
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 V &= -\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} & \text{per } \rho_{lib} &= 0 & \nabla^2 V &= 0 \end{aligned}$$

## Presenza di più dielettrici

- discontinuità alla superficie fra dielettrici diversi
- condizioni al contorno necessarie su ogni superficie

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2} \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 \\ \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} &= \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} \end{aligned}$$

## Condizioni al contorno per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$



Cilindro di altezza infinitesima con le basi rispettivamente nel mezzo 1 e 2

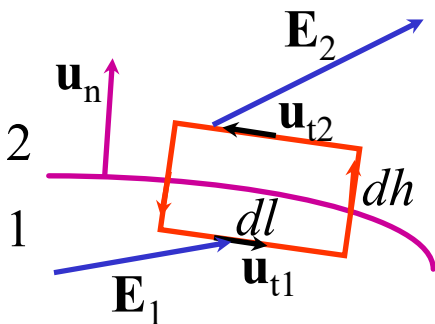
$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}$$

$$\sigma_{\text{lib}} dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}_{n1} dS + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_{n2} dS$$

$$[D_n] = \sigma_{\text{lib}}$$

$$\text{Se } \sigma_{\text{lib}} = 0 \Rightarrow [D_n] = 0$$

Se non c'è carica libera sulla superficie di separazione, si conserva la componente normale di  $\mathbf{D}$  ( $\text{div } \mathbf{D} = 0$ )



Linea chiusa rettangolare, a cavallo della superficie, con linee normali infinitesime ( $dh \ll dl$ )

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_{t2} dl - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_{t1} dl = 0$$

$$[E_t] = 0$$

La componente tangente del campo  $\mathbf{E}$  si conserva sempre ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ )

## Legge di rifrazione delle linee di campo

In assenza di carica libera sulla superficie:

$$\begin{aligned}[D_n] &= 0 \Rightarrow [\varepsilon_0 E_n + P_n] = 0 \\ \Rightarrow [\varepsilon_0 E_n] &= -[P_n] = \sigma_p\end{aligned}$$

Inoltre:

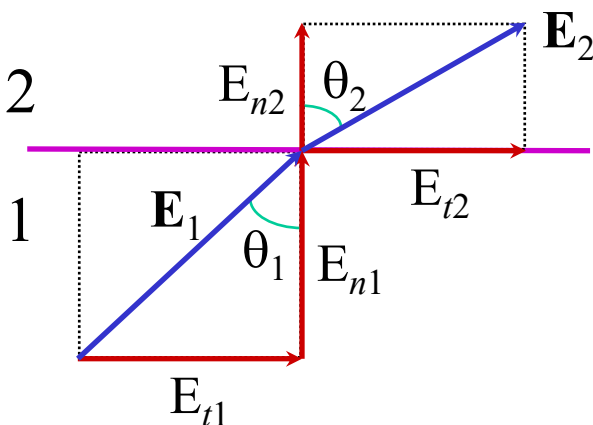
$$\begin{aligned}[E_t] &= 0 \\ \Rightarrow [D_t] &= [P_t]\end{aligned}$$

Per due mezzi lineari in assenza di cariche libere sulla superficie di separazione:

$$D_{n1} = D_{n2} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

Dividendo per  $E_{t1} = E_{t2}$

$$\varepsilon_1 \frac{E_{n1}}{E_{t1}} = \varepsilon_2 \frac{E_{n2}}{E_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\tan \theta_2}$$

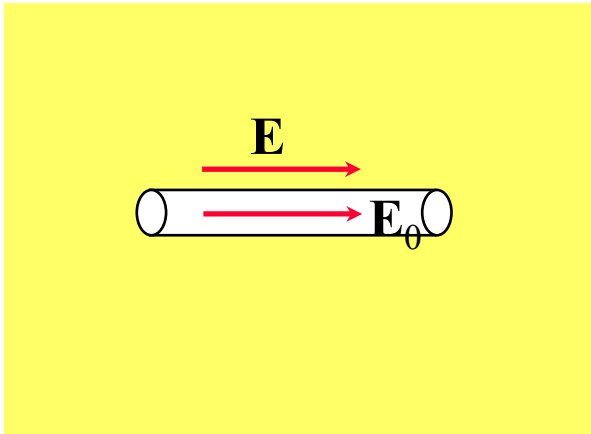


$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Legge di rifrazione  
delle linee di campo

## Definizione operativa di **E** e **D**

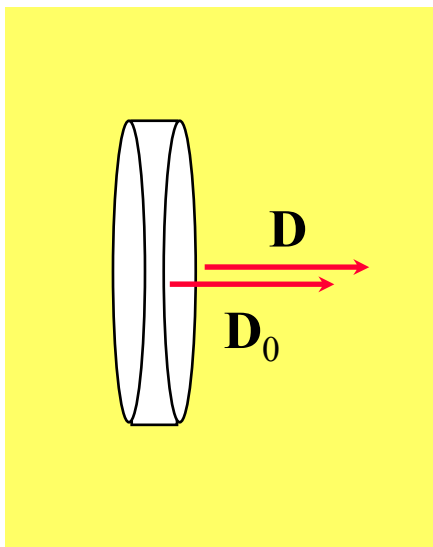
Cavità cilindrica con asse parallelo ad **E** e altezza grande rispetto alle dimensioni delle basi.



$$\begin{aligned}h &\gg \sqrt{S} & [E_t] &= 0 \\ \Rightarrow E &= E_t = E_{0t} = E_0 \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0\end{aligned}$$

Per la conservazione della componente tangente di **E**, il campo nella cavità è uguale a quello nel dielettrico.

Cavità cilindrica con asse parallelo a **D** e altezza piccola rispetto alle dimensioni delle basi.



$$\begin{aligned}h &\ll \sqrt{S} & [D_n] &= 0 \\ \Rightarrow D &= D_n = D_{0n} = D_0 \\ \Rightarrow \mathbf{D} &= \mathbf{D}_0\end{aligned}$$

Per la conservazione della componente normale di **D**, il campo **D** nella cavità è uguale a quello nel dielettrico.