Elaborato di Matematica

Problema e quesiti risolti in vista della prova orale alla maturità–a.s.2019/2020

Padova 2020
ZHANG GIOVANNI

Zhang Giovanni
Liceo S.S. Enrico Fermi
giovi.zhang@gmail.com

Liceo Scientifico Statale
Enrico Fermi

1 Problema 1

Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni *g(x)* e *f(x)* così definite:

$$f(x)= \sqrt{x}(k-x) \qquad g(x) = x^2(x-k)$$

1.1 Punto 1

Provare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0,k]$ il grafico di *f(x)* ha un unico punto di massimo F(x_F,y_F)ed il grafico di *g(x)* ha un unico punto di minimo G(x_G,y_G) Verificare che si ha x_G=2x_F e y_G= -(y_F)^2

Soluzione

Applichiamo il teorema di Lagrange: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b). Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b) : f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Poiché nel nostro caso
$f(b) = f(a)$ *con* $a = 0$ *e* $b = k$ *e* $f(0) = f(k) = 0 \implies$ **esiste almeno un c $\in$ (0,k): *f'(c)= 0*** [1]

Dominio di f: $x \geq 0$
Dominio di g: $x \in \mathbb{R}$

Studiamo ora l'andamento delle derivate:

$$f'(x) = \frac{k-3x}{2\sqrt{x}} \begin{cases} > 0 & per\ 0 \leq x < \frac{k}{3} \\ = 0 & per\ x = \frac{k}{3} \\ < 0 & per\ \frac{k}{3} < x \leq k \end{cases} \qquad e \qquad g'(x) = 3x^2 - 2xk \begin{cases} < 0 & per\ 0 \leq x < \frac{2k}{3} \\ = 0 & per\ x = \frac{2k}{3} \\ > 0 & per\ \frac{2k}{3} < x \leq k \end{cases}$$

Considerando l'intervallo $[0; k]$

- La funzione *f(x)* , dunque, presenta l'unico punto di massimo relativo in $\mathbf{F}(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{3}}, \sqrt{\frac{\mathbf{4k^3}}{\mathbf{27}}})$
- La funzione *g(x)* , presenta l'unico punto di minimo relativo in $\mathbf{G}(\frac{\mathbf{2k}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{-4k^3}}{\mathbf{27}})$

Da ciò,

$$\frac{x_F}{x_G} = \frac{k}{3} \cdot \frac{3}{2k} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_G = 2x_F}$$

$$\frac{-(y_F)^2}{y_G} = \frac{-(\sqrt{\frac{4k^3}{27}})^2}{\frac{-4k^3}{27}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y_G = -(y_F)^2}$$

1.2 Punto 2

Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

Soluzione

Cerchiamo i punti di intersezione di f *e* g:

$$\begin{cases} \text{y=}\sqrt{x}(k-x) \\ \text{y=x}^2(x-k) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{x}(x-k) = x^2(x-k)$$

Sapendo che $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x} > 0 \wedge x^2 > 0$, notiamo che f e g avranno sempre segno opposto. Dunque, se $f = g$ allora y=0 $\Rightarrow$ $\mathbf{x = 0} \vee \mathbf{x = k}$

Ci risulta che:
[2] $f'_+(0) = \frac{k-3\cdot 0}{2\sqrt{0}} \to +\infty$
e che
$g'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot k = 0$

[1]Il caso particolare con *f(b) = f(a)* è condizione per il teorema di Rolle
[2]poniamo f'_+ poiché la funzione è derivabile solo per x>0

Dunque per $O(0,0)$ le rette tangenti alle due funzioni coincidono con gli assi x e y, perpendicolari fra loro.

Le funzioni,inoltre, si intersecano nel punto $P(k,0)$ e, affinché lo facciano ortogonalmente,

$$f'(k) \cdot g'(k) = -1$$

$$f'(k) = \frac{k - 3 \cdot k}{2\sqrt{k}} = -\sqrt{\mathbf{k}} \;\; , \;\; g'(k) = 3 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot k = \mathbf{k^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{k} \cdot k^2 = -1 \; , \; ovvero \;\; k^{\frac{5}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{k = 1}$$

Dunque nel punto $P(1,0)$ le funzioni f e g si intersecano ortogonalmente.

1.3 Punto 3

D'ora in avanti, assumere $k = 1$. In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, per $x \in [0,1]$ rappresentano il profilo di una spira metallica. Sia S la regione piana delimitata da tale spira.
Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0 = 2,0 \cdot 10^{-2}\,T$, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7,0 \cdot 10^{-3}\,Wb$.

1.3.1 Soluzione

Tracciamo i grafici di f e g conoscendo:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(1-x) \quad \wedge \quad f'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} \quad \wedge \quad f''(x) = \frac{-1-3x}{4x\sqrt{x}} \\ g(x) = x^2(x-1) \quad \wedge \quad g'(x) = 3x^2 - 2x \quad \wedge \quad g''(x) = 6x - 2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

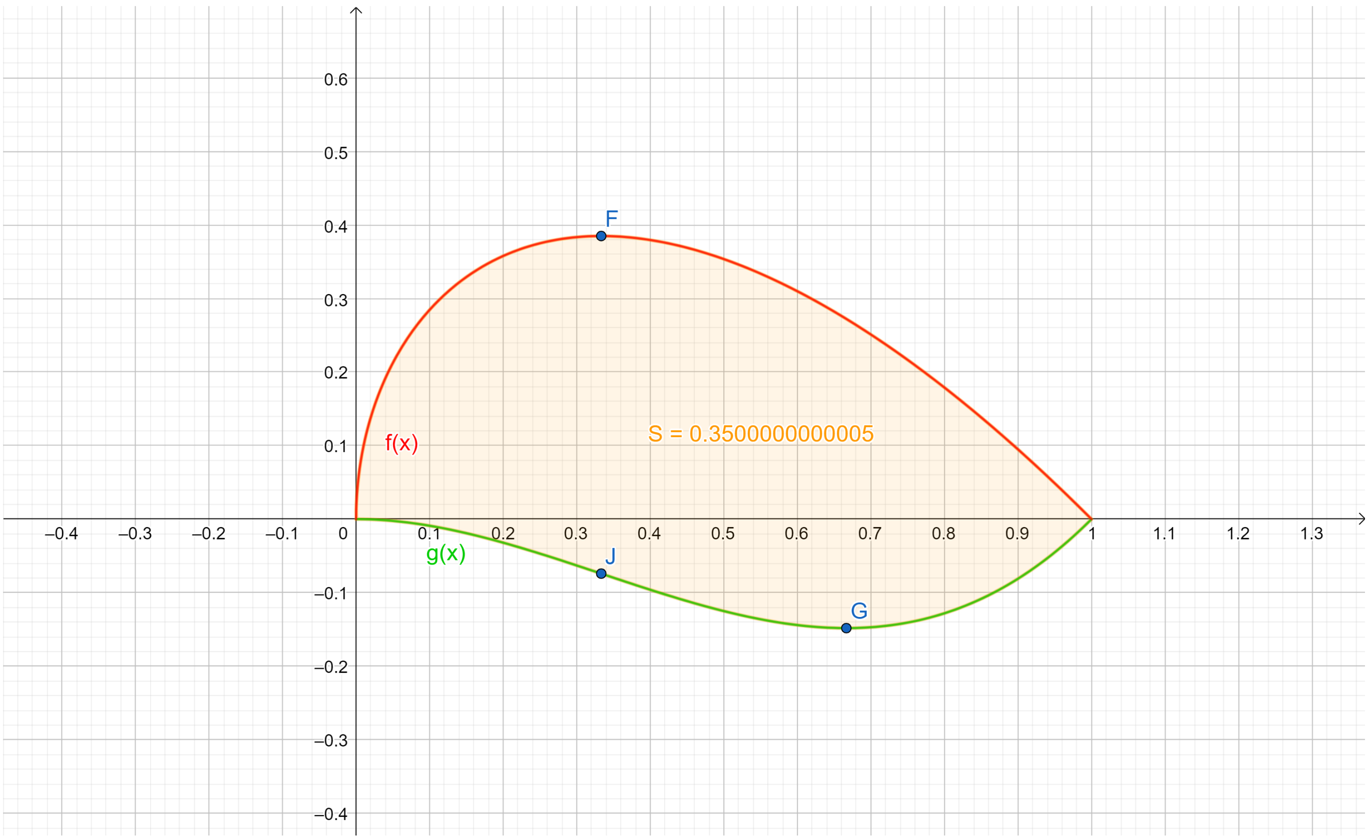

Figure 1: Grafico delle funzioni con relativa area compresa fra i due.

La funzione $f(x)$

- non è derivabile per $x = 0$,mentre $f'_+(0) = \infty \ \wedge \ f'(1) = -1$
- presenta un massimo relativo in $F(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{4}{27}})$ con $f'(\frac{1}{3}) = 0$
- $f"(x) < 0 \ \forall x \in [0;1]$ e dunque la funzione è concava per l'intero intervallo

La funzione $g(x)$

- è una funzione cubica con un minimo relativo $G(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27})$
- è derivabile in tutto R, presentando $g'(0) = 0 \ \wedge \ g'(1) = 1$
- presenta $g"(x) > 0$ per $x > \frac{1}{3}$. La funzione è, dunque, convessa per $x > \frac{1}{3}$ e concava per $x < \frac{1}{3}$.
- ha un punto di flesso in $J(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27})$ dove $g"(\frac{1}{3}) = 0$

Per il calcolo del flusso attraverso la superficie S, procediamo attraverso la definizione di flusso:

$$\mathbf{\Phi_S}\left(\tilde{\mathbf{B}}\right) = \int_{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{B}}\, \mathbf{dS} =$$

$$B_0 \int_S dS = B_0 \int_0^1 f(x) - g(x)\, dx = B_0 \int_0^1 (1-x)\sqrt{x} + (1-x)x^2\, dx = B_0 \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = B_0 \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{7}{20} B_0 = \mathbf{7,0 \cdot 10^{-3}\ Wb}$$

1.4 Punto 4

Supporre che la spira abbia resistenza elettrica pari a $R = 70\Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0 = 0s$, inizi a variare secondo la legge:

$$B(t) = B_0 e^{-\omega t} \cos(\omega t), \quad con \ \ \omega = \pi rad/s$$

e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.
Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

1.4.1 Soluzione

Dal punto 3 abbiamo visto che $\mathbf{\Phi_S}\left(\tilde{\mathbf{B}}\right) = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}}\,\mathbf{B(t)}$.La forza elettromotrice indotta viene espressa attraverso la legge di Faraday-Newman:

$$fem = -\frac{\partial \Phi_S\left(\vec{B}\right)}{\partial t} = -\frac{7}{20} B'(t) = \frac{7}{20} B_0 \ \omega e^{-\omega t} \left[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right]$$

La corrente si esprime secondo la legge di Ohm:

$$i(t) = \frac{fem}{R} = \frac{7B_0 \ \omega}{20R} \left[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right] \ e^{-\omega t}$$

Per capire l'andamento della funzione, studiamo il segno di $i(t)$ che dipende solamente da $[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)]$:

$$[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] < 0$$

$$\cos(\omega t) < -\sin(\omega t) \rightarrow \frac{3}{4}\pi + 2n\pi < wt < \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$$

La funzione $i(t)$, dunque, è negativa per:

$$\frac{3}{4} + 2n < t < \frac{7}{4} + 2n \ , \ dove \ n \in \mathbb{N}^+$$

Il segno della corrente cambia verso per la prima volta, da positivo a negativo, in $t = \frac{3}{4}$ per $n = 0$
Inoltre,

$$^3 i'(t) = \frac{7B_0 \ \omega}{20R} \cdot [-2\sin(\omega t)] e^{-\omega t}$$

[3] $i(t) = \frac{fem}{R} = \frac{7B_0\omega}{20R}\left[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right] e^{-\omega t} \rightarrow$ i'(t)= $\frac{7B_0\omega}{20R}\left[-\omega(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))e^{-\omega t} + \left(\omega\cos(\omega t) - \omega\sin(\omega t)\right)e^{-\omega t}\right] = \frac{7B_0\omega}{20R}\left[-2\sin(\omega t)\right] e^{-\omega t}$

$$i'(t)\begin{cases} < 0 & per\ 2\text{n} < t < 1+2\text{n} \\ = 0 & per\ t = \text{n} \\ > 0 & per\ 1+2\text{n} < t < 2+2\text{n} \end{cases} \qquad con\ \ n \in \mathbb{N}^+$$

La corrente, dunque, nell'intervallo $[0,2]$ è decrescente per $0 < t < 1$ e crescente $1 < t < 2$. Inoltre presenta un massimo e un minimo relativi, rispettivamente in $t = 0 \wedge t = 1$.

$$i(0) = \frac{7B_0\ \omega}{20R} = \pi \cdot 10^{-4} A$$

Per $t = 0$ abbiamo il primo massimo, e, poiché la funzione della corrente viene "smorzata" da $e^{-\omega t}$, essa presenta infiniti massimi e minimi relativi.
Rappresentiamo il grafico di $i(t)$ ignorando il fattore moltiplicativo $\pi \cdot 10^{-4}$:

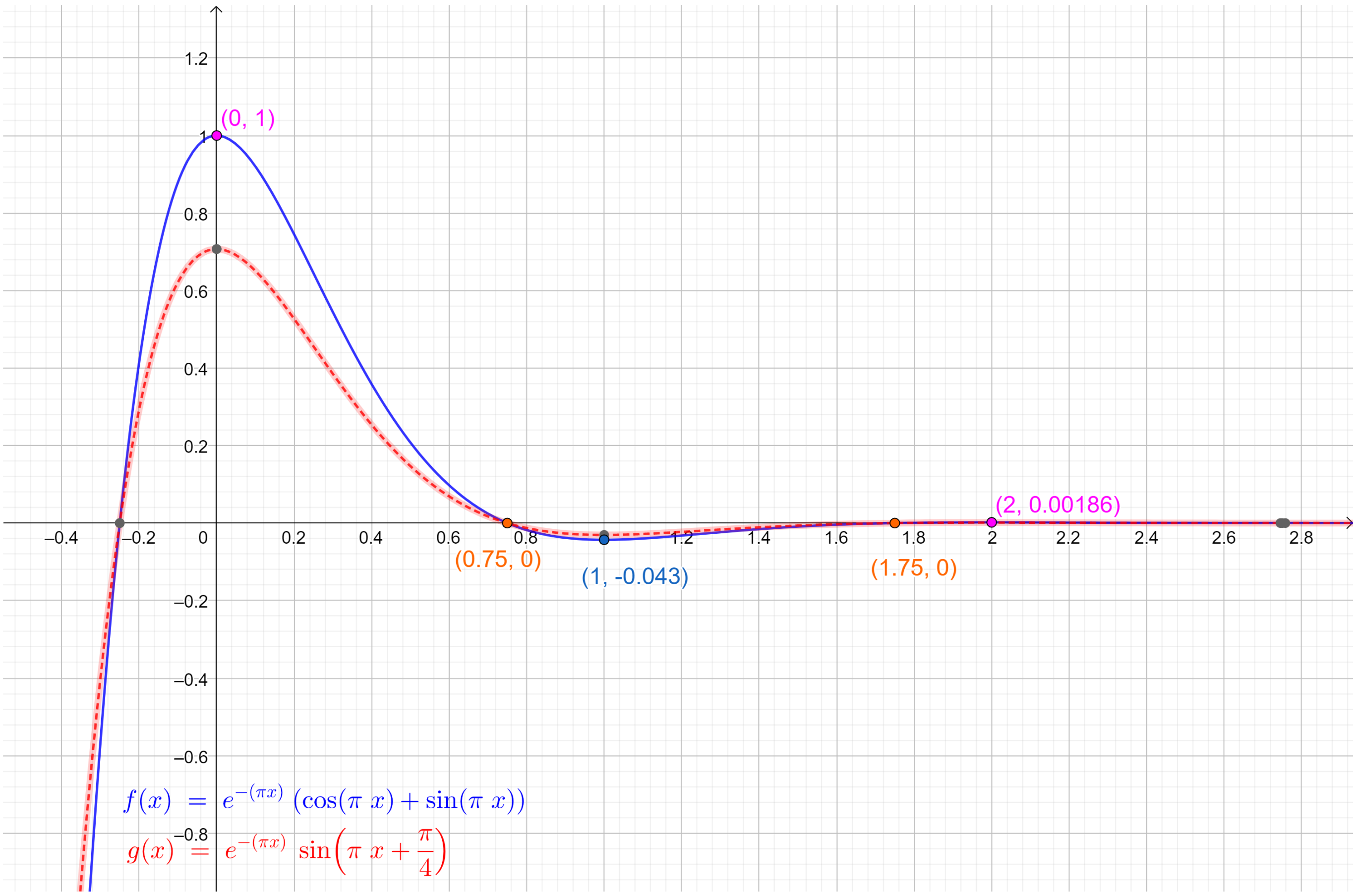

Figure 2: La Figura rappresenta la funzione $i(t) = e^{-\pi x}[\cos(\pi x) + \sin(\pi x)]$ senza il fattore $\pi \cdot 10^{-4}$(in blu), che presenta un andamento simile alla funzione $i_2(t) = e^{-\pi x}\sin(\pi x + \frac{\pi}{4})$(in rosso)

Le funzioni $i(t)$ e $i_2(t)$ variano di un fattore moltiplicativo[4].

La corrente $i(t)$, secondo la legge di Lenz, produce un campo magnetico B_i che si oppone alla variazione di flusso: , il segno meno della legge di Faraday-Newman($\mathcal{E} = -\dfrac{\partial\Phi(B)}{\partial t}$) ci dice come la corrente cambi verso in funzione della variazione del flusso. Se essa aumenta, allora $i < 0$, se diminuisce, $i > 0$. Posto, per convenzione, $B(uscente) > 0 \wedge B(entrante) < 0$, se $B(uscente)$ aumenta di intensità, allora $\Delta B > 0$ e $\Delta i(t) < 0$. Il verso della corrente negativa è tale da produrre un campo $B_i(entrante)$ che si oppone all'aumento. Secondo la regola della mano destra, quindi, durante il cambiamento del flusso, la corrente i gira in senso orario. Lo stesso procedimento logico vale per tutti gli altri casi possibili.

2 Quesito 1

Sia $f(x) = sin(x) + cos(x)$. Determinare la derivata $f^{(2020)}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

[4]Con il metodo dell'angolo aggiunto, possiamo trovare una funzione $i_2(t)$ che presenta un andamento simile. La ragione per cui non abbiamo considerato $\pi \cdot 10^{(-4)}$ è dovuta al fatto che essa "appiattisce" la funzione, rendendo poco evidente il suo andamento. La funzione $i_2(t)$ è più facile da studiare, ragione per cui cui può essere sostituita a $i(t)$ per capire i massimi e minimi

2.1 Soluzione

Studiamo le prime derivate della funzione $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$:

$$f'(x) = cos(x) - sin(x)$$

$$f"(x) = -sin(x) - cos(x)$$

$$f^{(3)}(x) = -cos(x) + sin(x)$$

$$f^{(4)}(x) = sin(x) + cos(x) = f(x)$$

Ecco dimostrato che $\forall n = 4k$ con $k \in \mathbb{N}^+$ $f^{(n)}(x) = f(x)$ e, poiché $f^{(2020)}(x) = f^{(n)}(x) = f^{(4\cdot505)}(x) = f(x) = cos(x) + sin(x)$

3 Quesito 2

Determinare la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo [2; 5] con una distribuzione uniforme. Determinare inoltre il valore medio, la varianza, la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4}$ Qual è la probabilità se ora per la variabile scegliamo l'intervallo $\frac{7}{3} < x < \frac{17}{4}$? Perché?

3.1 Soluzione

Per una distribuzione uniforme con:

$$f(x) \begin{cases} = k \ \ con \ \ k > 0 \ \ \wedge \ \ a < x < b, \ dove \ a = 2 \ e \ b = 5 \\ = 0 \ altrove \end{cases}$$

Per trovare k:

$$\int_a^b f(x)dx = 1 = \int_a^b kdx = 1 = k[x]_a^b$$

$$= k(b-a) = 1 \rightarrow k = \frac{1}{(b-a)} = \frac{1}{(5-2)} = \frac{1}{3}$$

Calcoliamo il valore medio:

$$M(x) = \int_a^b xkdx = k[\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{(b^2-a^2)}{2(b-a)} = \frac{(b+a)}{2} = \frac{(5+2)}{2} = \frac{7}{2}$$

Troviamo la varianza:

$$VAR(X) = M(x^2) - M(x)^2$$

dove,

$$M(x^2) = \int_a^b x^2kdx = k[\frac{x^3}{3}]_a^b = \frac{(b^3-a^3)}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{(b^2+ab+a^2)}{3}$$

dunque,

$$VAR(x) = \frac{(b^2+ab+a^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-2)^2}{12} = \frac{3}{4}$$

e la deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{VAR(x)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

La probabilità che sia $\frac{7}{3} < x < \frac{17}{4}$ equivale a:

$$P(\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4}) = \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{17}{4}} kdx = [\frac{x}{3}]_{\frac{7}{3}}^{\frac{17}{4}} = \frac{[\frac{17}{4} - \frac{7}{3}]}{3} = \frac{23}{36} = 63,9\%$$

La probabilità $P(\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4})$ non differisce da $P(\frac{7}{3} < x < \frac{17}{4})$ poiché la probabilità per un singolo punto è nullo. Infatti la probabilità che x sia un punto qualsiasi J è:

$$P(j) = \int_{j-\varepsilon}^{j+\varepsilon} kdx \ \ con \ \varepsilon \rightarrow 0$$

$$= k[F(j+\varepsilon) - F(j-\varepsilon)]$$

Da ciò è evidente che $P(j) = 0$ poiché per $\varepsilon \rightarrow 0, \ \ j - \varepsilon = j + \varepsilon$
In conclusione, $P(\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4}) = P(\frac{7}{3} < x < \frac{17}{4})$

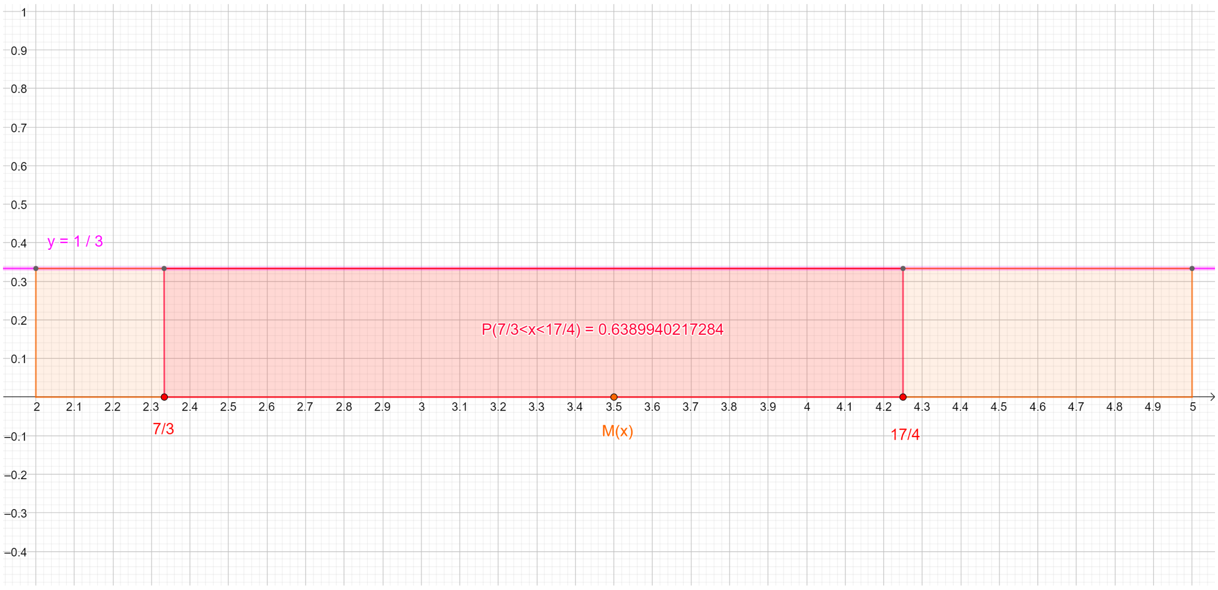

Figure 3: La Figura rappresenta il grafico della distribuzione uniforme

4 Quesito 3

Data la funzione: $f(x) = x^2 + 1$, *con* $x \in \mathbb{R}$
determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle y della porzione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dall'asse delle ascisse per $x \in [0; 3]$.

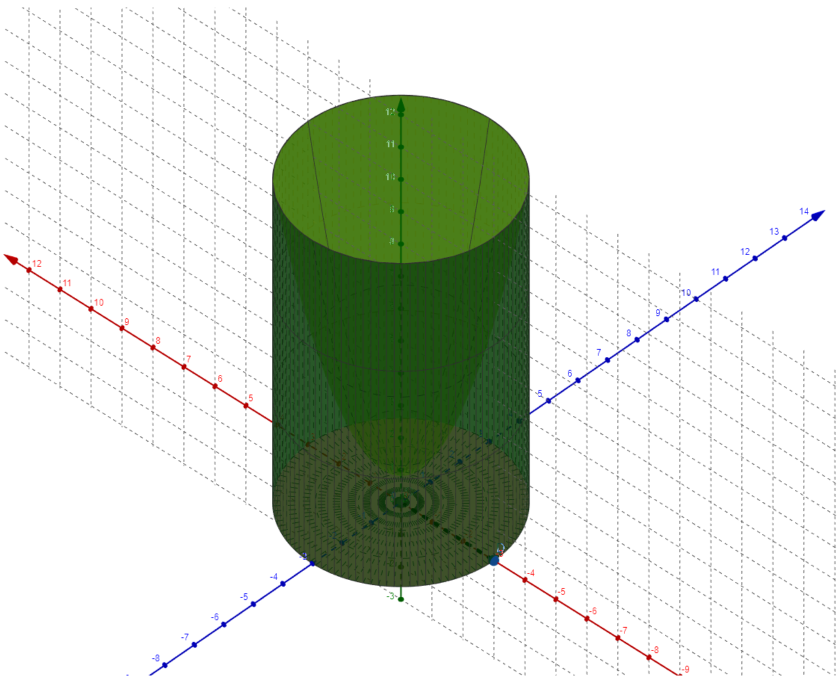

Figure 4: Rappresentazione tridimensionale del solido

Per calcolare il volume del solido ottenuto, utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici. Dividiamo il dominio di x in sezioni infinitesime dx.

Applichiamo il metodo dei gusci cilindrici:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x(x^2 + 1)dx = 2\pi \int_0^3 (x^3 + x)dx = 2\pi [\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}]_0^3$$

Dunque,

$$V = 2\pi [\frac{(3^4)}{4} + \frac{(3^2)}{2}] = \frac{99}{2}\pi \simeq 155.5u^2$$

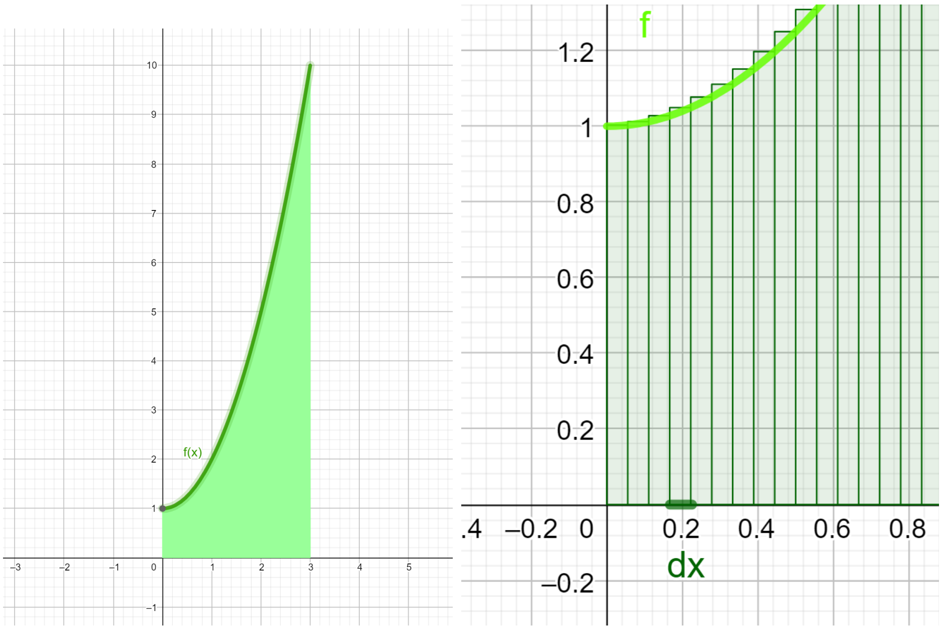

Figure 5: Rappresentazione bidimensionale della funzione $f(x)$

5 Quesito 4

Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una *d.d.p.* di $400V$ ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità. La figura illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato $1,00m$). Determinare l'intensità di $\vec{B}$ e il verso di percorrenza della traiettoria del protone.

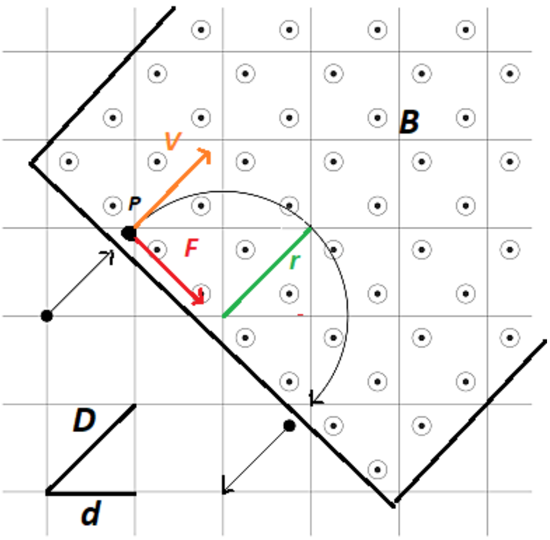

Figure 6: Rappresentazione del moto del protone

5.1 Soluzione

Il protone, prima di entrare nel campo magnetico percorre un tragitto di distanza $D = \sqrt{2}$ accelerato dalla differenza di potenziale, raggiungendo P con velocità v, definita così:

$$\Delta E_c = q_e \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m_e v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_e \Delta V}{m_e}}$$

Appena il protone entra nel campo magnetico , in verso uscente, con v ortogonale ad esso , il protone subisce la forza di Lorentz diretta verso il centro della circonferenza di raggio $r = \sqrt{2}$.
Dunque, affinché il protone percorra un moto circolare uniforme:

$$\alpha_c = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m_e}$$

Considerando che $F = q_e v B$,

$$\frac{q_e v B}{m_e} = \frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{q_e B}{m_e} = \sqrt{\frac{2 q_e \Delta V}{m_e \cdot r^2}}$$

$$B = \sqrt{\frac{2 q_e \Delta V m_e^2}{m_e \cdot r^2 \cdot q_e^2}} = \sqrt{\frac{2 \Delta V m_e}{r^2 \cdot q_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400V \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} Kg}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C}} = 2.04mT \simeq 2mT$$