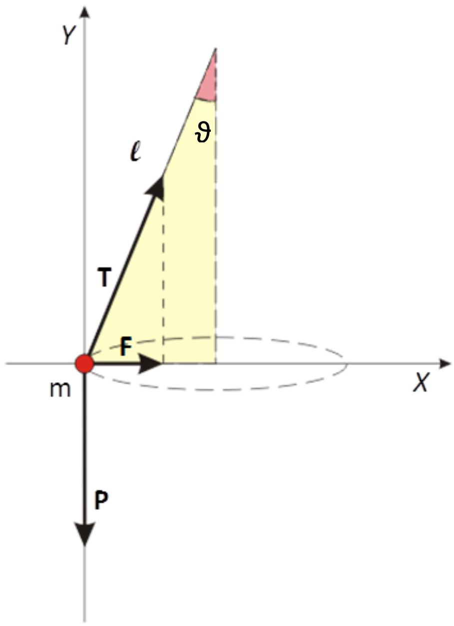
Pendolo conico

di *Ettore Limoli*

Il pendolo conico è costituito da una massa m, legata ad una cordicella inestensibile di lunghezza ℓ e massa trascurabile, che si muove con velocità angolare ω = costante, descrivendo una circonferenza di raggio r.



Le uniche forze che agiscono sulla massa m sono il peso P = m g e la tensione T della fune. Queste forze, perché la massa pendolare m si muova di moto circolare uniforme, devono avere per risultante la forza centripeta $F = m \cdot \omega^2 \cdot r$.

Ci proponiamo di dimostrare che l'angolo ϑ di apertura della funicella non dipende dalla massa pendolare m ma, esclusivamente, dalla lunghezza ℓ del filo e dalla velocità angolare ω. Determineremo, quindi, il periodo τ, ossia il tempo che impiega la massa a descrivere la circonferenza.

Per far ciò, introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortonormato come in figura. Determiniamo quindi le componenti delle forze secondo gli assi.

	modulo	**anomalia**	**Componenti**	
			x	**Y**
T	T	$90° - \vartheta$	$T \cdot \cos(90° - \vartheta)$	$T \cdot \text{sen}(90° - \vartheta)$
P	mg	-90°	0	-mg
F	$m \cdot \omega^2 \cdot r$	0°	$m \cdot \omega^2 \cdot r$	0

Poiché **F** è il risultante di **T** e **P**, osservando che $\cos(90° - \vartheta) = \text{sen}\,\vartheta$ e $\text{sen}(90° - \vartheta) = \cos\vartheta$, deve aversi:

$$\begin{cases} T\,sen\,\vartheta = \mathrm{m} \cdot \omega^2 \cdot r \\ T\cos\vartheta - m\,g = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} T\,sen\,\vartheta = \mathrm{m} \cdot \omega^2 \cdot r \\ T\cos\vartheta = m\,g \end{cases}$$

E, dividendo membro a membro e semplificando:

$$\frac{sen\,\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Ed, essendo (triangolo giallo in figura) r = ℓ sen ϑ, semplificando si ha:

$$\cos\vartheta = \frac{g}{\ell\,\omega^2} \qquad (*)$$

Che dimostra che ϑ non dipende da m.
Ed ancora

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell\cos\vartheta}$$

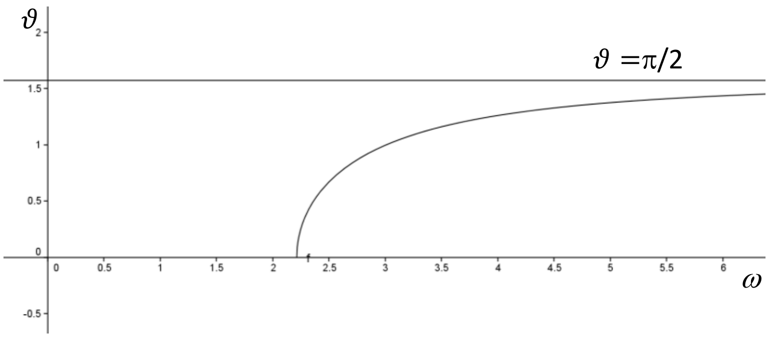
Da cui, ricordando che $\omega = 2\,\pi/\,\tau$, si ha:

$$\tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\vartheta}{g}}$$

Che è l'espressione del periodo.
Dalla (*) ricaviamo ϑ in funzione di ω.

$$\vartheta = \arccos\frac{g}{\ell\,\omega^2}$$

L'andamento grafico di questa funzione è riportato sotto.



Si è supposto ℓ = 2 metri.
Dominio della funzione: $\left[\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right., +\infty\left[\right.$

Codominio: $\left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$

Un esempio concreto lo si può osservare notando che in una giostra l'apertura del seggiolino non dipende dalla massa di chi vi sta seduto ma dalla velocità angolare della giostra.

♦ ♦ ♦ ♦

Ettore Limoli