Potenziali del campo elettromagnetico

Dalla definizione del **potenziale vettore A** e dalle equazioni di Maxwell:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}} \qquad\qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = -\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{t}}$$

Quindi:

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{t}}\right) = 0$$

⇒ Esiste una funzione scalare (potenziale scalare) V tale che:

$$\boxed{\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -grad\,V} \quad (rot\,grad\,V \equiv 0 \quad \forall V)$$

Quindi è possibile definire il campo **E** attraverso il potenziale vettore **A** e il potenziale scalare V.

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad\,V}$$

Noti A e *V* è possibile ricavare sia B che E

NB: Per definire i due potenziali sono state utilizzate due equazioni di Maxwell:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad\qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}$$

Quindi in tali definizioni sono implicite le proprietà espresse dalle due equazioni

Come nel caso stazionario, per il campo **A** è fissato il rotore, ma non la divergenza. Esiste cioè una famiglia di vettori che soddisfa alla condizione **B** = *rot* **A**, dati da

$$\boxed{\mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\,\psi}$$

$$\begin{bmatrix} rot\,\mathbf{A}' = rot\left(\mathbf{A} + grad\,\psi\right) = rot\,\mathbf{A} \\ essendo: rot\ grad\ f = 0, \forall\ f\ scalare \end{bmatrix}$$

Questa caratteristica di **A** si riflette su *V*:

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A}'$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - grad\,V' = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A} + grad\,\psi\right) - grad\,V' =$$

$$= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad\,\frac{\partial \psi}{\partial t} - grad\,V' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad\,V$$

Quindi:

$$\boxed{V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

Le due relazioni che stabiliscono le possibili famiglie di potenziali vettore e scalare si definiscono "**condizioni di compatibilità**" o "**gauge conditions**"

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\,\psi \\ V' = V - \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \end{array}}$$

I potenziali che soddisfano tali relazioni, danno origine agli stessi campi B e E.

A seconda della situazione fisica da descrivere è possibile, scegliendo opportunamente la funzione ψ, ricavare la forma analitica dei potenziali più adeguata al problema.

Perchè sono utili i potenziali del campo e.m.?

• Tutti i fenomeni macroscopici (eccetto quelli gravitazionali) sono di natura e.m., anche quelli spiegati con leggi empiriche diverse (*e.g.* attrito, forze elastiche…).

⇒ Importante saper determinare il campo e.m. nelle diverse situazioni.

• Le eq. di Maxwell sono molto potenti, ma possono essere difficili da integrare.

• Una famiglia di infiniti potenziali **A** e V corrispondono allo stesso campo e.m.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\,\psi$$

$$V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

⇒ E' possibile scegliere la coppia (**A**, V) (cioè la funzione ψ) che semplifica il calcolo.

Condizione di Coulomb (o Maxwell)

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0}$$

Quindi:

$$div\left(\mathbf{A} + grad\,\psi\right) = 0$$

$$div\,grad\,\psi = \nabla^2\psi = 0$$

La funzione ψ deve soddisfare l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2\psi = 0$$

Con opportune condizioni al contorno:

$$\psi = \cos t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{A}' = \mathbf{A} \\ V' = V \end{array}}$$

Inoltre, dalla I eq. di Maxwell:

$$div\mathbf{E} = div\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - grad\,V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla^2 V + div\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Quindi:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint_\tau \frac{\rho}{r}d\tau}$$

cioè un potenziale coulombiano, come nel caso elettrostatico.

Per il potenziale vettore **A,** dalla IV eq. di Maxwell:

$$rot\mathbf{B} = rot\left(rot\mathbf{A}\right) = \mu_0\left(\mathbf{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$grad\,div\,\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}}{r}d\tau}$$

$$[\nabla^2\mathbf{A} = grad\,div\,\mathbf{A} - rot\,rot\,\mathbf{A}]$$

Condizione di Lorentz

$$\boxed{div\,\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

da cui:

$$div\left(\mathbf{A} + grad\,\psi\right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(V - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0$$

Quindi per la funzione ψ:

$$\boxed{\nabla^2 \psi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0}$$

ψ è soluzione della equazione delle onde

Inoltre, dalle eq. di Maxwell:

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$rot\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Sapendo che:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad\,V$$

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$$

e usando le proprietà degli operatori:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = grad\ div\mathbf{A} - rot\ rot\mathbf{A}$$

$$\nabla^2 V = div\ grad\ V$$

Si ottiene che **A** e *V* soddisfano equazioni del tipo:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_o \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

che, in assenza di sorgenti, sono l'equazione delle onde.

Caso particolare: ρ = 0

Per l'invarianza di gauge:

$$V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

per la condizione di Lorentz:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

scegliendo

$$V' = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad V = 0$$

risulta

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{t}}}$$

Il campo elettromagnetico è descritto <u>solo</u> con il potenziale vettore **A**