

Dispensa di Analisi vettoriale:
vettori
e
operatori differenziali

Andrea Farina

Politecnico di Milano
Dipartimento di Fisica

andrea.farina@polimi.it

9 maggio 2012

Richiami di algebra vettoriale

Definizione 1. Si dicono **Grandezze scalari** quelle quantità fisicamente osservabili determinate da un numero invariante rispetto a un cambiamento del sistema di coordinate (es massa, carica elettrica).

Definizione 2. Si dicono **Grandezze vettoriali** quelle quantità fisicamente osservabili, determinate da una direzione, un verso e un numero reale positivo (detto modulo o intensità) invarianti rispetto a un cambiamento del sistema di coordinate (es velocità, accelerazione, forza).

Dipendono invece dal sistema di coordinate *le componenti* del vettore, che nel caso tridimensionale costituiscono una terna di numeri reali (v_x, v_y, v_z) legati al vettore \mathbf{v} dalla relazione:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$$

con $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ versori degli assi coordinati (Fig 1).

Definizione 3. Definiamo **prodotto scalare** fra due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} , lo scalare a , dato dalla relazione:

$$a = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \alpha \quad (1)$$

con α angolo compreso tra i due vettori.

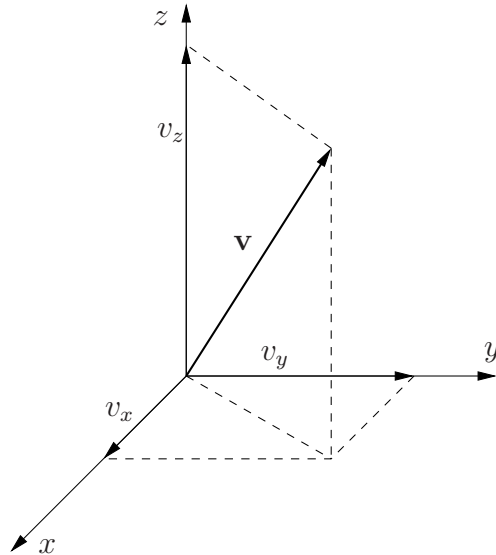


Figura 1: Rappresentazione del vettore \mathbf{v} e delle sue componenti.

Proprietà 3.1.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

Proprietà 3.2. Se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ allora:

- $\mathbf{v} = 0$ oppure
- $\mathbf{w} = 0$ oppure
- $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$

Proprietà 3.3.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

Definizione 4. Definiamo **prodotto vettoriale** fra due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} , il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, definito come:

- $|\mathbf{b}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \alpha$
- direzione di $\mathbf{b} \perp$ al piano formato da \mathbf{v} e \mathbf{w}
- verso di \mathbf{b} individuato dalla *regola della mano destra*

Proprietà 4.1.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

Proprietà 4.2. Se $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ allora:

- $\mathbf{v} = 0$ oppure
- $\mathbf{w} = 0$ oppure
- $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$

Proprietà 4.3.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y) \mathbf{u}_x + (v_z w_x - v_x w_z) \mathbf{u}_y + \\ + (v_x w_y - v_y w_x) \mathbf{u}_z$$

Campi scalari e vettoriali

Definizione 5. Assegnato un dominio Ω dello spazio, se esiste una funzione U che a ogni punto $P \in \Omega$ associa uno scalare $U(P)$, diremo che in Ω è definito un **campo scalare** U .

Un campo scalare tridimensionale può essere rappresentato tramite *superfici di livello*, definite dalla famiglia di equazioni:

$$U(x, y, z) = U_0$$

sulle quali $U(P)$ assume valore costante U_0 .

Esempio 5.1.

$$U = kz$$

Le superfici di livello sono piani perpendicolari all'asse z (Fig. 2).

Esempio 5.2.

$$U = x^2 + y^2 + z^2$$

Le superfici di livello sono sfere concentriche (Fig 3).

Definizione 6. Assegnato un dominio Ω dello spazio, se esiste una funzione \mathbf{v} che associa a ogni punto $P \in \Omega$ un vettore $\mathbf{v}(P)$, diremo che in Ω è definito un **campo vettoriale** \mathbf{v} .

Un campo vettoriale è sempre individuabile mediante 3 campi scalari che ne definiscono le componenti:

$$\begin{cases} v_x = v_x(P) \\ v_y = v_y(P) \\ v_z = v_z(P) \end{cases}$$

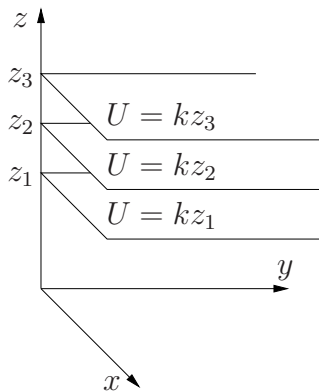


Figura 2: Superfici di livello dell'esempio 5.1.

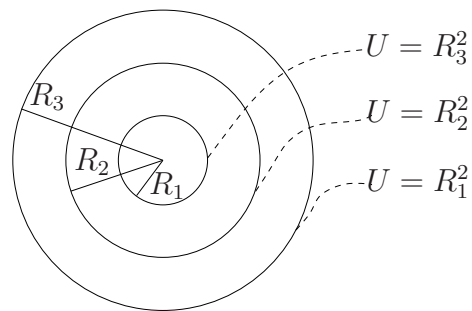


Figura 3: Superfici di livello dell'esempio 5.2.

Geometricamente un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ è rappresentabile mediante le *linee di flusso* (dette talvolta *linee di forza*), definite come linee orientate la cui tangente in un punto P definisce la direzione di $\mathbf{v}(P)$ e il cui verso coincide con quello di $\mathbf{v}(P)$ (Fig 4). Per convenzione la densità di linee di flusso disegnate in una certa regione è proporzionale al modulo di $\mathbf{v}(P)$ ivi assunto.

Esempio 6.1. Sia dato il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{v}(P) = \frac{x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

È possibile dimostrare che questo campo è radiale (Fig. 5) e che il suo modulo è proporzionale a $\frac{1}{r^2}$. Infatti:

$$\mathbf{v}(P) = \frac{x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{3/2}} = \frac{\mathbf{u}_r}{r^2}$$

Definizione 7. Si dicono **sorgenti** del campo i punti per cui passa più di una linea di flusso. Le sorgenti si dicono *positive* se le linee sono uscenti, *negative* se sono entranti

Osservazione. Un campo privo di sorgenti presenta linee di flusso chiuse o che si estendono all'infinito.

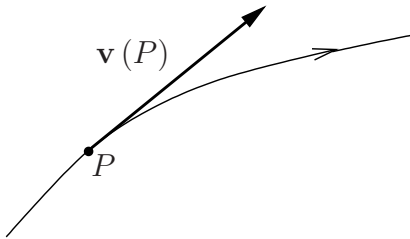


Figura 4: Esempio di linea di flusso.

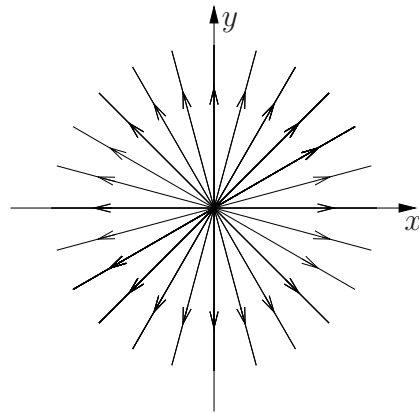


Figura 5: Linee di flusso dell'esempio 6.1.

Analisi vettoriale e operatori differenziali

Definizione 8. Sia assegnato un campo scalare $f = f(x, y, z)$ continuo e derivabile in una regione Ω dello spazio. Definiamo **gradiente** di f il vettore:

$$\mathbf{v} = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

Proprietà 8.1. Considerato il vettore $\mathbf{v} = \text{grad } f$ nel punto P e uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ da P a Q (Fig. 6), la quantità

$$df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } f \cdot (dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

indica di quanto varia la funzione f nel passare da P a Q :

$$df = f(Q) - f(P) = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}$$

Proprietà 8.2. Poiché

$$\text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = |\text{grad } f| |d\mathbf{r}| \cos \alpha$$

ne deduciamo che $df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}$ è massimo quando $\alpha = 0$, cioè quando $d\mathbf{r} \parallel \text{grad } f$.

Dunque spostandosi nella direzione del vettore $\text{grad } f$, la funzione f subisce la variazione maggiore; in altre parole il vettore $\mathbf{v} = \text{grad } f$ indica in quale direzione f varia più velocemente.

Proprietà 8.3. Se P e Q appartengono entrambi a una superficie di livello (Fig. 7) allora:

$$f(P) = f(Q) \Rightarrow df = f(P) - f(Q) \Rightarrow \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = df = 0$$

il che comporta che $\text{grad } f \perp d\mathbf{r}$. Ma $d\mathbf{r}$ giace sulla superficie di livello, dunque $\text{grad } f$ è sempre perpendicolare alle superfici di livello.

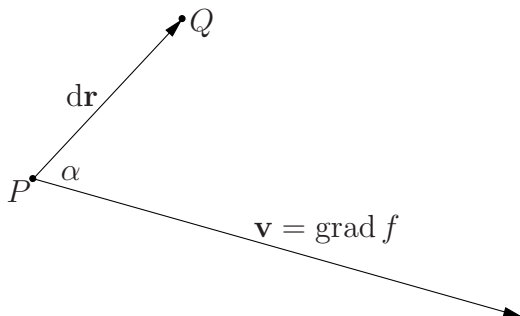


Figura 6: Incremento del campo scalare f nel passare da P a Q .

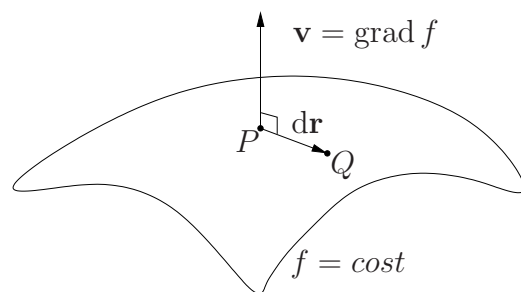


Figura 7: Spostamento infinitesimo su una superficie di livello.

Proprietà 8.4. Come diretta conseguenza della Proprietà 3, se considero $\mathbf{v} = \text{grad } f$ come un campo vettoriale, le sue linee di flusso sono perpendicolari alle superfici di livello di f .

Esempio 8.1. Sia (Fig.8)

$$f(x, y, z) = kz$$

risulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = k \end{array} \right. \Rightarrow \quad \text{grad } f = k\mathbf{u}_z$$

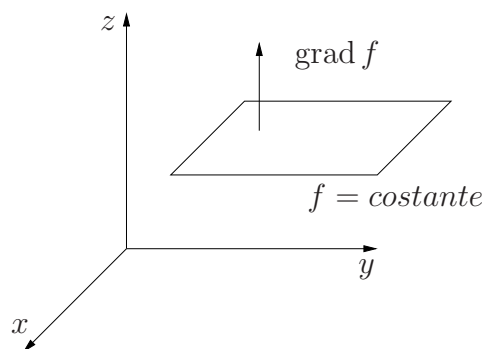


Figura 8: Esempio 8.1.

Osservazione. Data una funzione $f(P)$ è sempre possibile calcolare il vettore $\text{grad } f$. Tuttavia, dato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ non è detto che esso sia il gradiente di una certa funzione.

Definizione 9. Chiamiamo un campo $\mathbf{v}(P)$ **conservativo** se esiste una funzione $f(P)$ tale che:

$$\mathbf{v}(P) = \text{grad } f(P)$$

Proprietà 9.1. Si consideri in una regione dello spazio un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ che si possa scrivere come gradiente di una funzione f : $\mathbf{v}(P) = \text{grad } f(P)$. Sia inoltre assegnata una linea generica orientata γ che connetta i punti $P1$ e $P2$ (Fig.9), l'integrale di linea

$$\int_{P1 \rightarrow P2}^{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

può essere scritto, per le proprietà del gradiente, come:

$$\int_{P1 \rightarrow P2}^{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P1 \rightarrow P2}^{\gamma} \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = \int_{P1 \rightarrow P2}^{\gamma} df = f(P2) - f(P1)$$

e dunque *non dipende* dal percorso γ , ma solo dagli estremi $P1$ e $P2$.

Proprietà 9.2. Nel caso si consideri una linea γ orientata *chiusa* (Fig.10), la Proprietà 1 si riduce a:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = f(P2) - f(P1) = f(P1) - f(P1) = 0$$

Questo integrale è detto **circuitazione** di \mathbf{v} lungo γ .

Si dimostra che se \forall linea chiusa γ la circuitazione di \mathbf{v} è nulla, allora \mathbf{v} è conservativo.

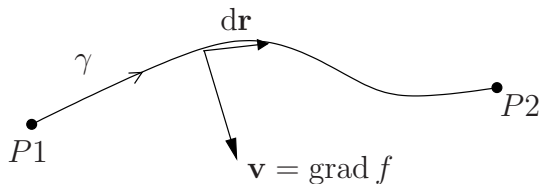


Figura 9: Linea generica che connette i punti $P1$ e $P2$.

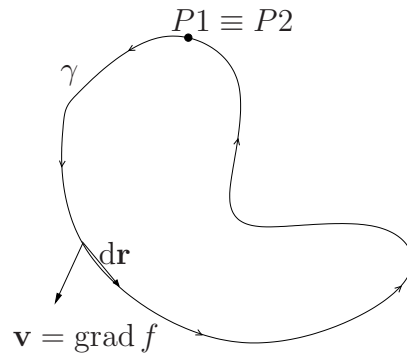


Figura 10: Linea chiusa.

Sono tipici campi conservativi:

- La forza (e il campo) gravitazionale;
- La forza elettrostatica (e il relativo campo elettrostatico);
- La forza elastica.

In genere un campo vettoriale dipendente dal tempo non è conservativo (non è tuttavia una regola generale).

Definizione 10. Considerato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ e una superficie Σ (Fig.11), suddividiamo Σ in tante areole infinitesime $d\Sigma$ e determiniamo il valore di $\mathbf{v}(P)$ in ogni punto della superficie. Possiamo assumere che $\mathbf{v}(P)$ sia approssimativamente costante all'interno di ogni areola $d\Sigma$. A ogni elemento $d\Sigma$ associamo un versore \mathbf{n} perpendicolare a $d\Sigma$.

Chiameremo la quantità:

$$d\Phi_{d\Sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$$

flusso di \mathbf{v} attraverso l'elemento superficiale $d\Sigma$.

La somma di tutti i flussi infinitesimi di \mathbf{v} lungo la superficie:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{v}) = \iint_{\Sigma} d\Phi(\mathbf{v}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$$

è dunque il **flusso** di \mathbf{v} attraverso Σ .

Se Σ è una superficie chiusa, la normale \mathbf{n} alla superficie è sempre presa con verso uscente dalla superficie stessa. In tal caso, se \mathbf{v} è anche esso uscente dalla superficie avremo $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{v}) > 0$ e diremo che il flusso è *uscente* da Σ .

Definizione 11. Considerato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ dotato di componenti continue e derivabili, definiamo **divergenza** di $\mathbf{v}(P)$ uno scalare:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

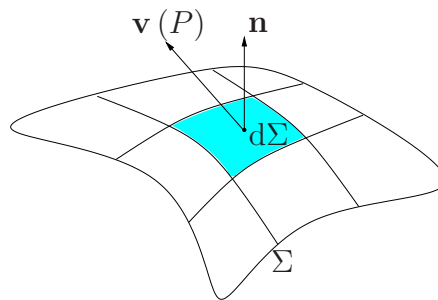


Figura 11: Superficie utilizzata per la definizione di flusso.

Proprietà 11.1. Teorema della divergenza. Considerata una regione dello spazio τ delimitata da una superficie chiusa Σ (Fig.12), risulta che:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{v}) = \oint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau$$

Proprietà 11.2. Dal teorema precedente risulta che, considerato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ tale che $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ovunque, il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ è sempre nullo. Un siffatto campo si dice **solenoidale**.

I campi solenoidali hanno necessariamente linee di flusso chiuse. Tipico campo solenoidale è il campo magnetico.

Proprietà 11.3. Se consideriamo un volumetto infinitesimo $d\tau$, racchiuso dalla superficie $d\Sigma$ e valutiamo il flusso del campo $\mathbf{v}(P)$ attraverso $d\Sigma$ avremo, per il teorema della divergenza:

$$d\Phi_{d\Sigma}(\mathbf{v}) \simeq d\tau \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Possono dunque aversi i seguenti casi:

- a) $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ dunque $d\Phi > 0$ quindi le linee di flusso di \mathbf{v} escono da $d\tau$. Nel volumetto $d\tau$ ci deve essere una sorgente positiva del campo (Fig.13).
- b) $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$ dunque $d\Phi < 0$ ne deriva che in $d\tau$ ci sarà una sorgente negativa (Fig.14).
- c) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ dunque $d\Phi = 0$ in tal caso il flusso netto è nullo, tante linee di flusso entrano in $d\tau$ quante ne escono. Quindi in $d\tau$ non ci sono sorgenti del campo (Fig.15).

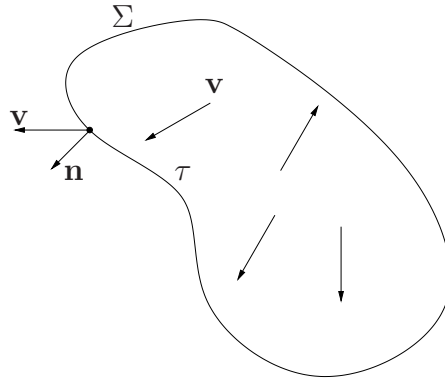


Figura 12: Regione di spazio utilizzata per il teorema della divergenza.

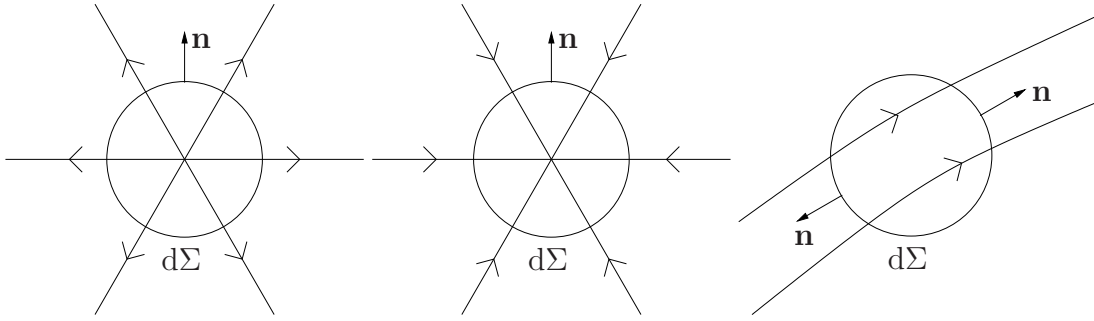


Figura 13: Sorgente positiva (a). **Figura 14:** Sorgente negativa (b). **Figura 15:** Flusso nullo (c).

Definizione 12. Considerato un campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ in una certa regione dello spazio, dotato di componenti continue e derivabili, definiamo **rotore** di $\mathbf{v}(P)$ il vettore:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z$$

Proprietà 12.1. Teorema di Stokes. Si consideri una linea chiusa orientata γ e una superficie aperta Σ che abbia γ per contorno (Fig.16). Si scelga il versore \mathbf{n} normale a Σ in modo che, rispetto al verso di γ , soddisfi la regola del cavatappi. Risulta che:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma$$

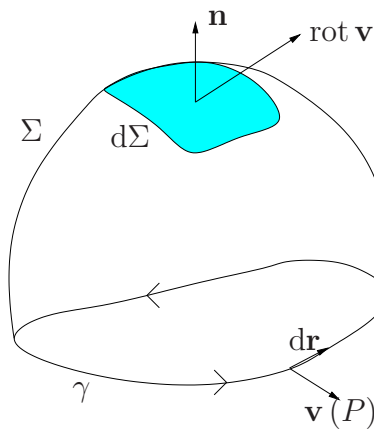


Figura 16: Superficie e linea utilizzate per il teorema di Stokes.

Proprietà 12.2. Per una campo $\mathbf{v}(P)$ conservativo, la circuitazione lungo qualsiasi linea chiusa γ è sempre nulla. Pertanto per tali campi $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Inoltre i

campi siffatti sono definiti *irrotazionali*.

Proprietà 12.3. Equivalente alla Proprietà 2 è dire che $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$ qualunque sia f (identità).

Proprietà 12.4. Nei punti in cui $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, ci sono vortici per il campo \mathbf{v} .

Esempio 12.1. Sia dato il campo $\mathbf{v}(P) = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$ (Fig.17)

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Esempio 12.2. Sia dato il campo $\mathbf{v}(P) = y\mathbf{u}_x - x\mathbf{u}_y$ (Fig.18)

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{u}_z \left(-\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = -2\mathbf{u}_z$$

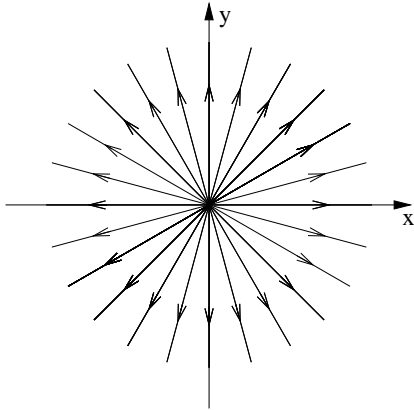


Figura 17: Esempio 12.1.

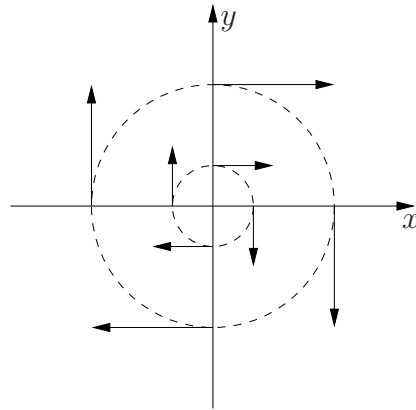


Figura 18: Esempio 12.2.

Definizione 13. Dato un campo scalare $f(P)$, definiamo **laplaciano** di f lo scalare

$$\Delta f = \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Una funzione f tale per cui $\Delta f = 0$ si dice *armonica*.

Esempio 13.1. Sia $f = x^2y + y^3x + z^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6yx \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 \end{array} \right.$$

Dunque

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2y + 6xy + 2$$

Identità operatoriali

Si dimostrano le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\operatorname{grad} f) &= 0 \\ \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= 0 \\ \operatorname{grad} (fg) &= g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g \\ \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \\ \operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \\ \operatorname{div} (f\mathbf{v}) &= f \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\operatorname{grad} f) \end{aligned}$$

Operatori vettoriali - complementi

Definizioni

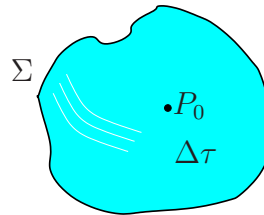
Gli operatori gradiente, divergenza, rotore e laplaciano possono essere definiti in *forma intrinseca*, indipendentemente dal sistema di coordinate in cui possiamo rappresentare i campi su cui operano. Nel seguito si assumerà che i campi (scalari o vettoriali) siano dotati di opportune condizioni di continuità e derivabilità nel dominio Ω in cui sono definiti.

Gradiente. Sia assegnato un campo scalare $f = f(P)$. Considerato un generico spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ che porti dal punto P_0 al punto $P_0 + dP$, definiamo **gradiente** della funzione f nel punto P quel vettore $\mathbf{v} = \text{grad } f$, tale che nel passaggio da P_0 a $P_0 + dP$ il differenziale della funzione sia pari a:

$$df = f(P_0 + dP) - f(P_0) = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}$$

Divergenza. Sia assegnato un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$. Consideriamo un elemento di volume $\Delta\tau$ centrato nel punto P_0 e delimitato da una superficie chiusa Σ . Detto $\Phi_\Sigma(\mathbf{v})$ il flusso del vettore \mathbf{v} attraverso Σ , definiamo **divergenza** del campo \mathbf{v} in P_0 la quantità

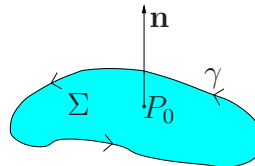
$$\text{div } \mathbf{v} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Phi_\Sigma(\mathbf{v})}{\Delta\tau}$$



Rotore. Sia assegnato un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$ e si consideri in un punto P_0 dello spazio un versore \mathbf{n} passante per P di direzione fissata. Sia assegnata una superficie aperta generica Σ di area S_Σ passante per P , tale che \mathbf{n} sia ad essa perpendicolare. Sia γ la linea chiusa che costituisce l'orlo della superficie Σ , orientata secondo la regola della vite destrorsa (una vite destrorsa che ruoti nel verso di percorrenza di γ avanza nella direzione di \mathbf{n}).

Si faccia tendere la linea γ a un punto coincidente con P_0 , mantenendo costante la direzione della normale \mathbf{n} alla superficie Σ in P_0 . Definiamo **rotore** del vettore \mathbf{v} in P_0 il vettore $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}$ tale per cui:

$$(\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{S_\Sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{S_\Sigma}$$



Laplaciano. Assegnato un campo scalare $f = f(P)$ si definisce **laplaciano** di f la quantità:

$$\Delta f = \operatorname{div} (\operatorname{grad} f)$$

Nota

Le definizioni così introdotte consentono di ricavare direttamente le proprietà degli operatori. Infatti:

- Dalla definizione di *gradiente* di un campo scalare f , si dimostra facilmente che:
 - $\operatorname{grad} f$ è un vettore che punta sempre nella direzione di massimo accrescimento di f ;
 - $\operatorname{grad} f$ è sempre diretto perpendicolarmente alle superfici di livello di f ;
 - Un campo $\mathbf{v}(P) = \operatorname{grad} f$ è sempre conservativo.
- Dalla definizione di *divergenza* di un campo vettoriale \mathbf{v} , deriva che:
 - Se in un punto $(\operatorname{div} \mathbf{v}) < 0, > 0$ oppure $= 0$, avremo in quel punto rispettivamente una sorgente di campo negativa, positiva oppure nessuna sorgente;
 - Il teorema della divergenza è conseguenza diretta della definizione.
- Dalla definizione di *rotore* di un campo vettoriale \mathbf{v} , deriva che:
 - Un campo conservativo ha sempre rotore nullo;
 - Il teorema di Stokes è conseguenza diretta della definizione;
 - Un campo conservativo non può avere linee di flusso chiuse (altrimenti la circuitazione del campo lungo una linea di flusso sarebbe diversa da zero). Di conseguenza un campo *irrotazionale* non può essere anche *solenoidale* (i campi solenoidali hanno linee di flusso chiuse o che terminano all'infinito).

L'operatore *nabla* ∇

È possibile riscrivere le definizioni degli operatori differenziali *gradiente*, *divergenza*, *rotore* e *laplaciano* in una notazione più compatta e intuitiva tramite la definizione dell'operatore vettoriale **nabla**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

Le definizioni degli operatori diventano quindi:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \\ &+ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Come è possibile osservare l'operatore gradiente equivale a un prodotto per uno scalare, la divergenza a un prodotto scalare, il rotore a un prodotto vettoriale e il laplaciano al modulo dell'operatore nabla moltiplicato per uno scalare.

Le identità vettoriali possono quindi essere riscritte nel seguente modo:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

$$\nabla (fg) = g \nabla f + f \nabla g$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \nabla \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{w}$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{v}) = f \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla f)$$

A titolo di esempio le prime due identità richiamano rispettivamente le relazioni:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

Gli operatori proiettati su sistemi di coordinate

Gli operatori gradiente, divergenza, rotore e laplaciano possono essere espressi in forma esplicita una volta che si stabilisca il sistema di coordinate in cui rappresentare i campi scalari o vettoriali su cui operano.

Coordinate cartesiane

Individuato un sistema di coordinate cartesiane costituito da una terna *destrorsa* di assi x , y e z a cui siano associati i versori \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z , risulta

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = & \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \\ & + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

$$\Delta f = \text{div } (\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordinate cilindriche

Indicando con r , φ e z la terna di numeri che individua un punto in coordinate cilindriche e con \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_φ , \mathbf{u}_z i versori associati, risulta:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{u}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\varphi + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordinate sferiche

Indicando con r , ϑ e φ la terna di numeri che individua un punto in coordinate sferiche e con \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_ϑ , \mathbf{u}_φ i versori associati, risulta:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{u}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta v_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\vartheta & r \sin \vartheta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ v_r & r v_\vartheta & r \sin \vartheta v_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta v_\varphi) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_r + \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \right) \mathbf{u}_\vartheta + \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\vartheta) - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{u}_\varphi \end{aligned}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$