Onde sferiche

Dalle eq. di Maxwell, con la condizione di Lorentz si ottengono le eq. per i potenziali:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cerchiamo una soluzione nello spazio libero, in assenza di sorgenti:

$$\rho = 0, \mathbf{J} = 0$$

Consideriamo l'equazione per il potenziale scalare:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Studiamo le soluzioni con simmetria sferica, che dipendono solo dalla distanza da un punto O.
In coordinate sferiche:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) - \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rV)}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rV) = 0$$

Per $\underline{r \neq 0}$, questa è l'equazione di D'Alembert per la funzione rV.

$$rV = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)}$$

Come nel caso delle onde piane, la soluzione è data da **un'onda progressiva e una regressiva**, ma in questo caso **l'intensità decresce con la distanza dal punto O**.

Questa soluzione vale per $r \neq 0$.

$$\lim_{r \to 0} V = \infty$$

in accordo con la possibilità che ci sia una carica (sorgente) in O.

$\Rightarrow$ Questa è anche soluzione dell'equazione inomogenea se la carica è contenuta in un volumetto infinitesimo centrato attorno ad O.

Equazioni del campo in presenza di sorgenti: Potenziali ritardati

Dalle eq. per i potenziali con la condizione di Lorentz:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cerchiamo una soluzione nel caso di una carica puntiforme posta in O:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t)\delta(\mathbf{r})$$

NB: E' un'*idealizzazione* (per la conservazione della carica, una carica puntiforme non può variare nel tempo), ma è *utile* perché consente di descrivere qualunque distribuzione di carica con la sovrapposizione degli effetti.

Integriamo su una sfera di raggio R, centrata in O:

$$\iiint_\tau \nabla^2 V d\tau - \frac{1}{c^2}\iiint_\tau \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} d\tau = -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\tau Q(t)\delta(\mathbf{r}) d\tau$$

$$\iiint_\tau div\, grad\, V\, d\tau - \frac{1}{c^2}\iiint_\tau \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} d\tau = -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\tau Q(t)\delta(\mathbf{r}) d\tau$$

Per il teorema della divergenza:

$$\iint_\Sigma grad\, V \cdot \mathbf{u}_n\, dS - \frac{1}{c^2}\iiint_\tau \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} d\tau - \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\tau Q(t)\delta(\mathbf{r}) d\tau$$

La sorgente ha simmetria sferica.
$\Rightarrow$ La soluzione avrà la stessa simmetria

$$grad\, V \cdot \mathbf{u}_n = \frac{\partial V}{\partial r}$$

e sarà costante sulla superficie sferica Σ.
Quindi:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R} \cdot 4\pi R^2 - \frac{1}{c^2}\int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} 4\pi r^2 dr = -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$V = \frac{1}{r}\; f\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad \xi = t - \frac{r}{c}$$

$$\left. -\frac{1}{c}\frac{1}{r}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - \frac{1}{r^2}\, f(\xi)\right|_{r=R} \cdot 4\pi R^2 - \frac{1}{c^2}\int_0^R \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} 4\pi r^2\, dr = -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

Per R $\rightarrow$ 0, ragionevolmente le derivate sono finite e i termini che le contengono tendono a zero.
Resta:

$$-4\pi f(t) = -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

Quindi la *f* è soluzione dell'equazione nella forma:

$$\boxed{f(t - r/c) = \frac{Q(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0}}$$

pertanto il potenziale *V* risulta:

$$\boxed{V(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}}$$

In generale:

$$\boxed{V(P,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\tau \frac{\rho\left(Q,t-\frac{r_{PQ}}{c}\right)}{r_{PQ}}d\tau}$$

Ripetendo lo stesso procedimento per le componenti del potenziale vettore **A**, si ottiene:

$$\boxed{\mathbf{A}(P,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\mathbf{J}\left(Q,t-\frac{r_{PQ}}{c}\right)}{r_{PQ}}d\tau}$$

I due potenziali ricavati prendono il nome di **potenziali ritardati**

Tali espressioni mettono in evidenza l'effetto del **valore finito della velocità di propagazione delle onde** elettromagnetiche:
Una variazione nel tempo della densità di carica o della densità di corrente in r = 0 viene avvertita a distanza r con un ritardo temporale pari al tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza r.

Nota la distribuzione spazio-temporale delle sorgenti (ρ e $\boldsymbol{J}$), è possibile risalire ad $\boldsymbol{A}$ e V.

Se, invece, sono note altre grandezze (*es.* fem o intensità di corrente), è necessario utilizzare direttamente le eq. di Maxwell con opportune condizioni iniziali e al contorno.

NB: Anche l'onda regressiva è soluzione e porta ad un potenziale anticipato, ma non ha un significato fisico.