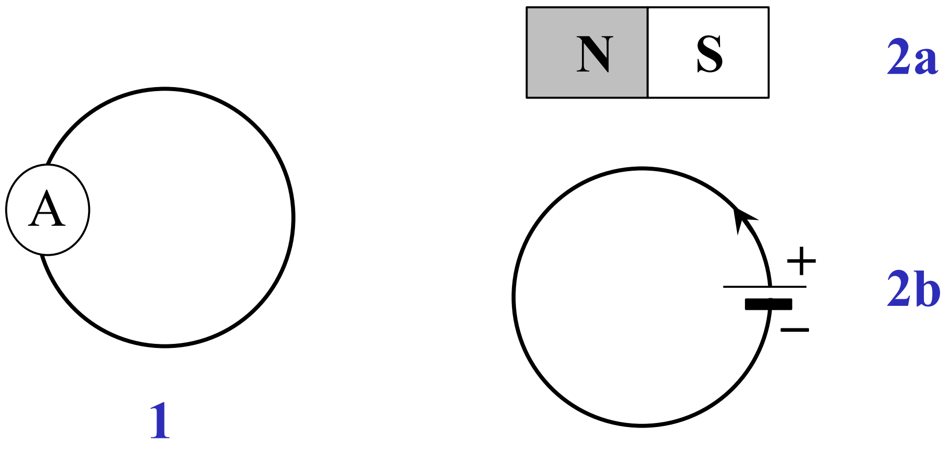
Induzione elettromagnetica

Fenomenologia (Faraday, 1830 circa)



1) Circuito (con amperometro)
2a) Magnete permanente
2b) Circuito percorso da corrente (con generatore di fem)

Nel circuito 1, si osserva una fem (corrente) quando:

- 1 è in moto nel campo **B** generato da 2
- 2 (a o b) è in moto
- La corrente in 2b varia nel tempo

La fem si genera quando 1 si trova in un campo **B** variabile nel tempo, perché:

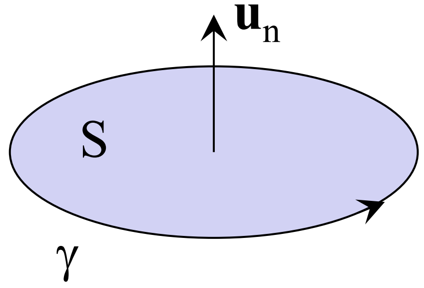
1 si *muove* in un campo **B** *non uniforme*

B è *variabile nel tempo*

Le origini sono diverse, ma gli effetti (fem indotta) e la legge che li descrive sono gli stessi

Leggi di Faraday-Neumann e Lenz

Flusso concatenato con la linea γ = Flusso attraverso una qualunque superficie S che ha γ come orlo



div $\mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{B})$ non dipende da S, ma solo da γ

$\phi(\mathbf{B}) > 0$, se le linee di forza hanno verso congruente con γ

Legge di Faraday-Neumann: La fem f indotta da un campo magnetico **B** in un circuito è pari (a meno del segno) alla derivata rispetto al tempo del flusso di **B** concatenato con il circuito

$$\boxed{f = -\frac{d\phi}{dt}}$$

Il fenomeno prende il nome di induzione elettromagnetica

(da cui il nome di "induzione magnetica" per **B**)

Alla fem indotta è associato un campo elettrico indotto

- presente in tutti i punti del circuito, contrariamente al caso di fem di natura non elettrica, confinate nel generatore
- rotazionale, dato che la sua circuitazione, cioè la fem indotta, è $\neq 0$

Il segno “–” indica che la fem indotta si oppone a ulteriori variazioni del flusso, evitando in particolare che l’energia del sistema diverga

Legge di Lenz: La fem indotta produce una corrente, che genera un campo **B** il cui flusso tende a compensare la variazione di flusso che l’ha generata, cioè tende ad opporsi alla causa che l’ha generata

Esempi:

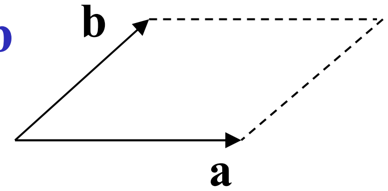
- B aumenta $\Rightarrow$ $d\phi/dt > 0$ $\Rightarrow$ $i < 0$ $\Rightarrow$ B indotto < 0 $\Rightarrow$ $B_{tot} < \mathrm{B}$
- $\mathbf{M} = -\alpha_d \mathbf{B}$ (precessione di Larmor nel diamagnetismo)

Vediamo l’origine della fem indotta separando i due casi:

- **B** non uniforme, ma stazionario e circuito in moto
- **B** variabile nel tempo (e circuito fermo)

Premessa

- Il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è l’area del parallelogramma individuato da **a** e **b**



- Permutazione ciclica del doppio prodotto vettore:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

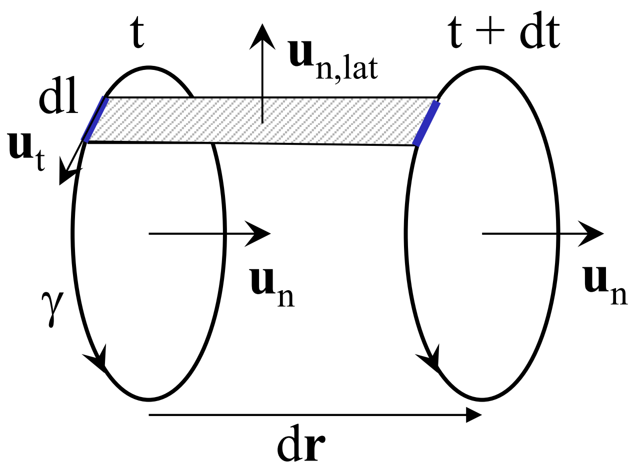
B stazionario e circuito in moto

Se il circuito è in moto in un campo **B**, gli e^- hanno velocità media (di deriva) $\mathbf{v} \neq 0$

$\Rightarrow$ Sugli e^- agisce la forza di Lorentz: $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

La forza di Lorentz fa muovere gli e^- nel circuito (cioè è l'origine della fem)

Verifichiamolo, considerando uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ di una spira in un campo **B** non uniforme



All'istante t: $\phi(t) = \phi$

All'istante $(t + dt)$: $\phi(t + dt) = \phi + d\phi$

Nell'intervallo dt, un elemento dl di circuito spazza una superficie di area:

$$dS_{lat} = \left| dl\mathbf{u}_t \times d\mathbf{r} \right|$$

$\mathbf{u}_{n,lat}$ è il versore normale alla superficie "laterale" spazzata dal circuito nel suo moto

La fem indotta è la circuitazione del campo **F**/(-*e*) corrispondente alla forza di Lorentz **F**:

$$f = \oint_\gamma \frac{\mathbf{F}}{-e} \cdot \mathbf{u}_t dl = \oint_\gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_t dl = \oint_\gamma \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dl =$$

$$= \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u}_t \times \mathbf{v}) dl = \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot \left(dl\mathbf{u}_t \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \iint_{S_{lat}} \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{u}_{n,lat} dS_{lat}}{dt} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \iint_{S_{lat}} \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{n,lat} dS_{lat} \right) = \frac{d\phi_{lat}}{dt}$$

B è solenoidale:

$$\phi_\Sigma(\mathbf{B}) = -\phi + (\phi + d\phi) + d\phi_{lat} = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\phi = -d\phi_{lat}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f = -\frac{d\phi}{dt}}$$

L'induzione e.m. ha conseguenze anche di tipo meccanico

Per il moto del circuito in **B non uniforme,** ϕ varia

$\Rightarrow f \neq 0$

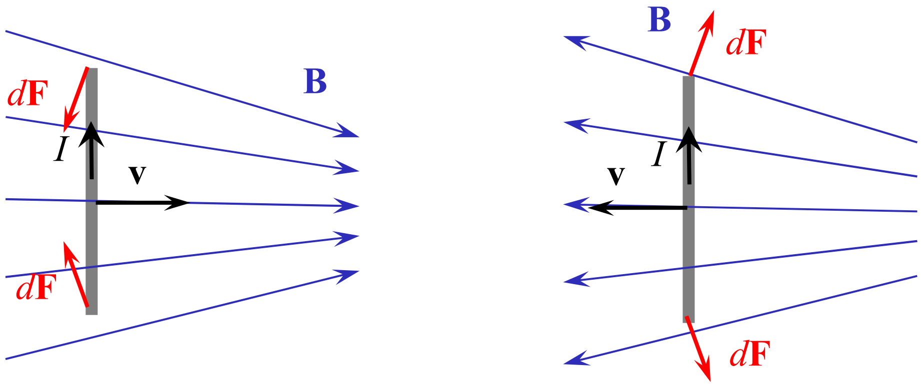
$\Rightarrow$ Si induce una corrente *I*,
detta **corrente parassita** o **corrente di Foucault**

Su *I* agisce **B**: $d\mathbf{F} = \mathbf{I}\, dl\mathbf{u}_t \times \mathbf{B}$

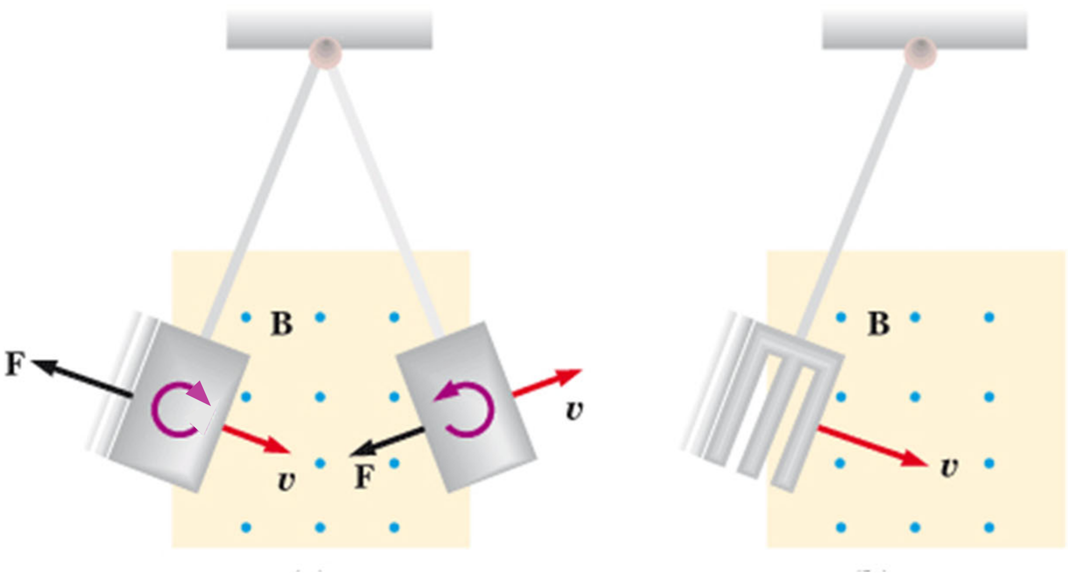
*d***F** si oppone al moto ed è detta **resistenza di attrito e.m.**

Esempi

- Spira che trasla in un campo **B** non uniforme



- Lamina metallica (o spira) che oscilla, entrando ed uscendo da **B** uniforme



Quando la lamina entra nel campo (esce), ϕ aumenta (diminuisce) $\Rightarrow$ Si induce f $\Rightarrow$ Si induce I oraria (antioraria) $\Rightarrow$ **F** frena il moto

Quando la lamina è all'interno del campo, ϕ = cost (**F** = 0)

Le parti conduttrici in movimento in campi magnetici sono sagomate per minimizzare le correnti parassite

La fem f indotta genera una corrente I.

Se il circuito ha una resistenza R, per effetto Joule si dissipa energia ($P_{diss} = fI$).

La forza di Lorentz non compie lavoro.

Da dove viene allora questa energia?

Se nel circuito c'è corrente, esso è sottoposto ad una forza che si oppone al moto ($d\mathbf{F} = I\, dl\mathbf{u}_t \times \mathbf{B}$).

$\Rightarrow$ Per mantenere il circuito in modo, ci deve essere una forza esterna ($d\mathbf{F}_{est} = -d\mathbf{F}$), che bilanci la forza data dalla II formula di Laplace.

Questa forza compie lavoro.

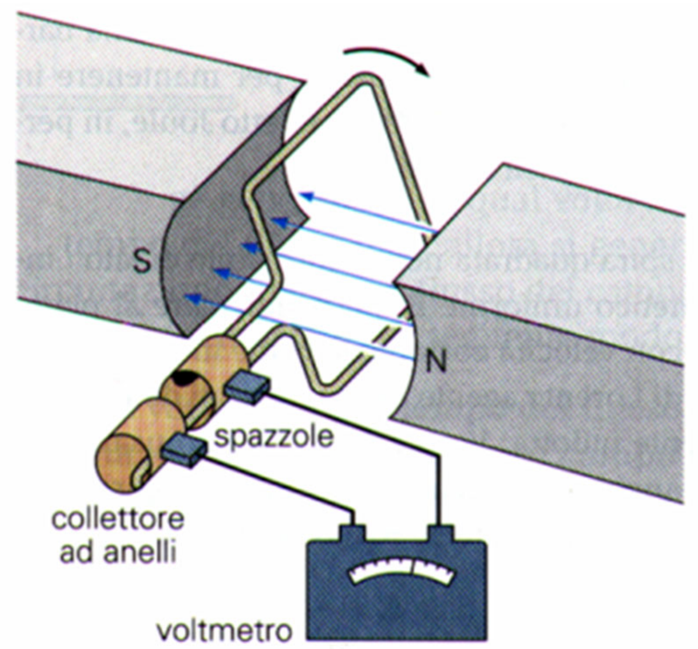
La potenza dissipata per effetto Joule è uguale alla potenza delle forze esterne che mantengono in moto il circuito.

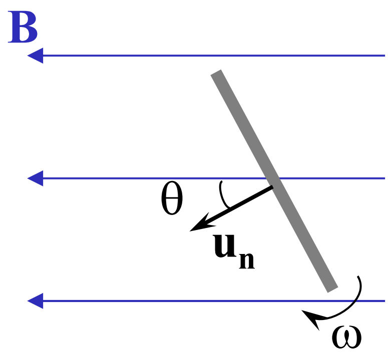
$$P_{mecc} = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}_{est} = -\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \left(I\, dl\mathbf{u}_t \times \mathbf{B} \right) = -\oint_\gamma I \left(\mathbf{u}_t \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{v}\, dl =$$
$$= -\oint_\gamma I \left(\mathbf{B} \times \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{u}_t\, dl = \oint_\gamma I \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{u}_t\, dl = fI = P_{diss}$$

Applicazione: Generatore elettrico

Energia meccanica → Energia elettrica

Una spira di superficie S ruota con velocità angolare ω in un campo **B** uniforme.





$$f = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(BS\cos\vartheta\right) = \omega BS\sin\left(\omega t\right)$$

Ai morsetti si ottiene una fem alternata.

La rete di distribuzione elettrica è a $\upsilon = \omega/2\pi = 50$ Hz.

B variabile nel tempo

Se il circuito è fermo, la forza di Lorentz **non** può avere valore medio ≠ 0.

Sperimentalmente I ≠ 0 ⇒ C'è una forza **F**, che mantiene in moto gli e^-.

Definiamo:

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}}{q} = \textbf{Campo elettromotore}$$

Per la legge di Faraday-Neumann:

$$f = \oint_\gamma \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{u}_t dl = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Il campo elettrico è: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_{e.s.}$ (elettrostatico)

$\mathbf{E}_{e.s.}$ è irrotazionale

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}$$

In questa equazione, non ci sono riferimenti ad elementi del circuito

⇒ L'equazione deve valere per *qualunque linea* chiusa γ

⇒ Alle variazioni temporali di **B** sono associati campi elettrici **non conservativi**, presenti **in ogni punto** dello spazio

Per il Th. di Stokes e per la definizione di flusso:

$$\oint_\gamma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_t dl = \iint_S rot\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_n dS =$$

$$= -\iint_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{u}_n dS \quad \Rightarrow \quad \iint_S \left(rot\,\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \right)\cdot\mathbf{u}_n dS = 0$$

Perché questo valga per ogni S:

$$\boxed{rot\,\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0}$$

II equazione di Maxwell

(o Legge di Faraday-Neumann in forma locale)

- Non è dedotta rigorosamente dalla legge dell'induzione e.m., ma è compatibile con essa.
- E' confermata sperimentalmente.
- E' compatibile con le leggi dell'e.s.:

Se $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}$ è conservativo

B ed **E** sono strettamente correlati: ad un campo **B** variabile è sempre associato un campo **E**

Applicazioni

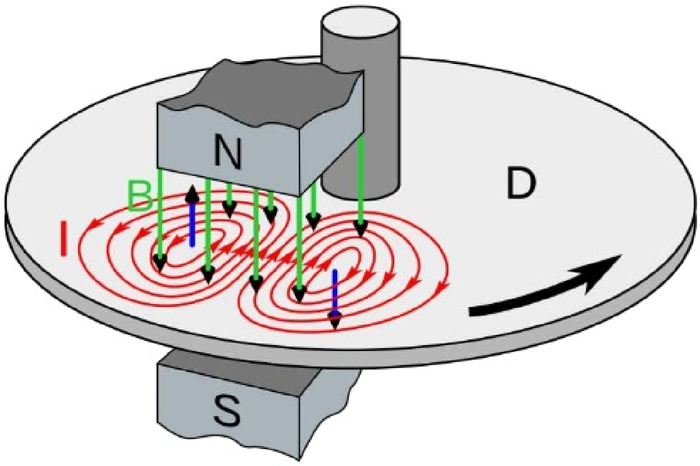
• **Freno elettromagnetico** (tram, treni)

Un disco conduttore (rame) ruota solidale con l'asse che deve essere frenato.

Un elettromagnete (o magnete permanente) genera un campo magnetico in una regione del disco.

La fem indotta genera una corrente che dissipa energia e tende ad opporsi al moto (frenare).

La frenata viene controllata variando la corrente nell'elettromagnete (o la posizione del magnete permanente), cioè il campo **B**.



• **Cucina a induzione**

Corrente alternata (20-50 KHz) in una bobina genera un campo **B**(t)

Il flusso ϕ(**B**) concatenato con il fondo della pentola varia nel tempo

Si induce una fem che fa circolare corrente.

La dissipazione per effetto Joule (e l'isteresi magnetica) determina l'aumento di temperatura.