

*Scipione Bobbio, nato nel 1941, si è laureato in
ingegneria elettronica all'Università di Napoli, dove è
professore di Elettrotecnica dal 1969.*

*Collabora ai più importanti programmi internazionali
di ricerca nel settore della fusione termonucleare
controllata.*

*Emilio Gatti, nato nel 1922, si è laureato in ingegneria
industriale all'Università di Padova nel 1946.*

*Dopo la specializzazione all'Istituto elettrotecnico
nazionale Galileo Ferraris di Torino, è stato nominato
direttore del Centro di Ricerca elettronica del CISE.
Dal 1951 è professore al Politecnico di Milano, dove,
già titolare delle cattedre di Elettronica applicata e di
Elettronica nucleare, insegna Fisica generale.*

*Fellow dell'IEEE dal 1971, è membro nazionale
dell'Accademia italiana delle Scienze (o "dei quaranta").*

PROGRAMMA DI MATEMATICA, FISICA, ELETTRONICA

Collezione diretta da

Sergio Carrà, Emilio Gatti, Francesco Gherardelli, Luigi Radicati, Giorgio Talenti

Mario Ageno, *Elementi di fisica*

T.M. Apostol, *Calcolo*

Vol. 1 *Analisi I*

Vol. 2 *Geometria*

Vol. 3 *Analisi 2*

Scipione Bobbio e Emilio Gatti, *Elettromagnetismo Ottica*

Max Born, *Fisica atomica*

Stefano Campi, Massimo Picardello e Giorgio Talenti, *Analisi matematica e calcolatori*

Vito Cappellini, *Elaborazione numerica delle immagini*

Francesco Carassa, *Comunicazioni elettriche*

Sergio Carrà, *Termodinamica: aspetti recenti e applicazioni alla chimica e all'ingegneria*

Claudio Citrini, *Analisi matematica I*

P.A.M. Dirac, *I principi della meccanica quantistica*

Albert Einstein, *Il significato della relatività*

Enrico Fermi, *Termodinamica*

Bruno Ferretti, *Le radici classiche della meccanica quantica*

Giorgio Franceschetti, *Campi elettromagnetici*

Giovanni Gallavotti, *Meccanica elementare*

Enrico Giusti, *Analisi matematica 1*

Enrico Giusti, *Analisi matematica 2*

Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica (vol. 1)*

Angelo Guerraggio, *Matematica generale*

Hermann Haken e Hans C. Wolf, *Fisica atomica e quantistica*

Werner Heisenberg, *I principi fisici della teoria dei quanti*

Gerhard Herzberg, *Spettri atomici e struttura atomica*

David A. Hodges e Horace G. Jackson, *Analisi e progetto di circuiti integrati digitali*

Charles Kittel, *Introduzione alla fisica dello stato solido*

Charles Kittel e Herbert Kroemer, *Termodinamica statistica*

Serge Lang, *Algebra lineare*

Giorgio Letta, *Teoria elementare dell'integrazione*

P.F. Manfredi, Piero Maranesi e Tiziana Tacchi, *L'amplificatore operazionale*

Jacob Millman, *Circuiti e sistemi microelettronici*

Jacob Millman e C.C. Halkias, *Microelettronica*

R.S. Muller e T.I. Kamins, *Dispositivi elettronici nei circuiti integrati*

Athanassios Papoulis, *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici*

Wolfgang Pauli, *Teoria della relatività*

Giovanni Prodi, *Analisi matematica*

Antonio Ruberti e Alberto Isidori, *Teoria dei sistemi*

Walter Rudin, *Analisi reale e complessa*

H.H. Schaefer, *Introduzione alla teoria spettrale*

Edoardo Sernesi, *Geometria I*

I.M. Singer e J.A. Thorpe, *Lezioni di topologia elementare e di geometria*

W.V. Smith e P.P. Sorokin, *Il laser*

Giovanni Soncini, *Tecnologie microelettroniche*

Guido Tartara, *Teoria dei sistemi di comunicazione*

Bruno Touschek e Giancarlo Rossi, *Meccanica statistica*

**SCIPIONE BOBBIO
EMILIO GATTI**

ELETTRONAGNETISMO OTTICA



Biblioteca Centrale
Facoltà Ingegneria

28460



BOLLATI BORINGHIERI

Prima edizione novembre 1991

© 1991 Bollati Boringhieri editore s.r.l., Torino, corso Vittorio Emanuele 86
I diritti di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale
o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche)
sono riservati

Stampato in Italia dalla Stampatre di Torino
CL 74-9321-5 ISBN 88-339-5483-8

POLITECNICO
BIBL. FAC.
INGEGNERIA

III A
1031
/1

00N28460

Elettromagnetismo Ottica / Scipione Bobbio, Emilio Gatti. - Torino : Bollati Boringhieri, 1991
825 p. : ill. ; 24 cm. - (Programma di matematica, fisica, elettronica)

I. BOBBIO, Scipione
II. GATTI, Emilio
1. ELETTRONICA
2. OTTICA

CDD 537

(a cura di S. & T. - Torino)

Indice

Prefazione, 9

1 Interazioni elettriche, 11

- 1.1 Elettrizzazione: esperienze qualitative 1.2 La carica elettrica 1.3 La legge di Coulomb 1.4 Il principio di sovrapposizione 1.5 Conservazione della carica 1.6 Quantizzazione della carica Esperienze illustrate Esercizi

2 Il campo elettrostatico, 26

- 2.1 Il campo elettrico 2.2 Distribuzioni continue di cariche 2.3 Campo elettrico prodotto da una distribuzione qualsiasi di cariche 2.4 Proprietà del campo elettrostatico: il teorema di Gauss 2.5 Proprietà del campo elettrostatico: la irrotationalità 2.6 Le proprietà del campo elettrostatico in forma locale Esperienze illustrate Esercizi

3 Il potenziale elettrostatico, 63

- 3.1 I potenziali della carica puntiforme 3.2 I potenziali di una distribuzione qualsiasi di cariche-sorgente 3.3 Equazioni di Poisson e di Laplace 3.4 Energia di un sistema di cariche puntiformi 3.5 Densità di energia di un campo elettrostatico 3.6 Espansione in serie di multipoli del potenziale elettrostatico 3.7 Il dipolo elettrico 3.8 Interazioni tra un dipolo e un campo elettrostatico 3.9 Distribuzioni di dipoli Esercizi

4 Il campo elettrostatico in presenza di conduttori nel vuoto, 96

- 4.1 Conduttori e isolanti 4.2 Equilibrio elettrostatico nei conduttori omogenei 4.3 Calcolo del campo in presenza di conduttori 4.4 Il campo nei conduttori cavi: schermi elettrostatici 4.5 I condensatori 4.6 Condensatori in parallelo e in serie 4.7 Energia elettrostatica in un sistema di conduttori carichi 4.8 Forze agenti tra conduttori Esperienze illustrate
Esercizi

5 Il campo elettrostatico in presenza di dielettrici, 148

- 5.1 Introduzione 5.2 Vettore 'polarizzazione' e carica di polarizzazione 5.3 Campo elettrico prodotto da distribuzioni di polarizzazione assegnate 5.4 Il vettore 'spostamento elettrico'
5.5 Materiali dielettrici lineari: suscettività elettrica e costante dielettrica 5.6 Condizioni al contorno per i vettori **E** e **D** 5.7 Il campo elettrico macroscopico nell'interno dei dielettrici 5.8 Campo elettrico in presenza di dielettrici lineari omogenei 5.9 Energia elettrostatica nei dielettrici polarizzati 5.10 Relazione tra grandezze macroscopiche e grandezze microscopiche 5.11 Fenomeni microscopici di polarizzazione: campo elettrico efficace 5.12 Polarizzazione per deformazione Esercizi

6 La corrente elettrica, 198

- | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------|-------------------------------------|---------------------------|--------------------------------|--|---------------------------------------|--|---|--|--|--|--|--|-----------------------|----------|
| 6.1 Introduzione | 6.2 Interazioni tra cariche in moto | 6.3 La corrente elettrica | 6.4 I diversi tipi di corrente | 6.5 Densità di corrente ed equazione di continuità | 6.6 La corrente in regime stazionario | 6.7 Il campo elettrico nei conduttori percorsi da corrente stazionaria | 6.8 Forza elettromotrice agente in un circuito percorso da corrente | 6.9 Esempio di calcolo del campo elettrico | 6.10 Le leggi di Ohm e di Joule in forma integrale | 6.11 Resistori in serie e in parallelo | 6.12 Esempi di generazione di forza elettromotrice | 6.13 Un modello del processo di conduzione nei conduttori ohmici | Esperienze illustrate | Esercizi |
|------------------|-------------------------------------|---------------------------|--------------------------------|--|---------------------------------------|--|---|--|--|--|--|--|-----------------------|----------|

7 Il campo magnetostatico nel vuoto, 252

- | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------|--|--|---|--|--|--------------------------------|---|---|---|------------------------------|---------------------------------|-----------------------|----------|
| 7.1 Introduzione | 7.2 Le leggi fondamentali della magnetostatica | 7.3 Campi magnetici prodotti da semplici distribuzioni di correnti | 7.4 Le leggi della magnetostatica in forma locale | 7.5 Il potenziale vettore e la legge elementare di Laplace | 7.6 Espansione in multipoli del potenziale vettore | 7.7 Il dipolo magnetico ideale | 7.8 Coefficienti di auto- e mutua induzione di circuiti | 7.9 Forze agenti su un circuito percorso da corrente, in un campo magnetico | 7.10 Lavoro per spostare un circuito percorso da corrente | 7.11 Cenni di magnetostatica | 7.12 Cenni di superconduttività | Esperienze illustrate | Esercizi |
|------------------|--|--|---|--|--|--------------------------------|---|---|---|------------------------------|---------------------------------|-----------------------|----------|

8 Il campo magnetostatico in presenza di mezzi materiali, 316

- | | | | | | | | | | | | |
|------------------|------------------------------------|---|--|--|--|---|-------------------|--------------------|----------------------|--|----------|
| 8.1 Introduzione | 8.2 L'intensità di magnetizzazione | 8.3 Estensione delle leggi della magnetostatica e classificazione dei materiali | 8.4 Condizioni al contorno per \mathbf{B} e \mathbf{H} | 8.5 Magnetizzazione di corpi omogenei e isotropi | 8.6 Definizione operativa dei vettori \mathbf{B} e \mathbf{H} nell'interno dei materiali | 8.7 Le masse magnetiche e il teorema di equivalenza | 8.8 Diamagnetismo | 8.9 Paramagnetismo | 8.10 Ferromagnetismo | 8.11 Magnetizzazione di materiali ferromagnetici policristallini | Esercizi |
|------------------|------------------------------------|---|--|--|--|---|-------------------|--------------------|----------------------|--|----------|

9 Il campo elettromagnetico, 359

- | | | | | | | | | | | | | | |
|--|----------------------------------|-----------------------------|--|--|--|-----------------------------------|--|--|---|--|--|-----------------------|----------|
| 9.1 Le leggi fondamentali nel vuoto, per linee e superfici ferme rispetto a un riferimento inerziale | 9.2 L'induzione elettromagnetica | 9.3 Corrente di spostamento | 9.4 Le leggi del campo elettromagnetico nel vuoto, per linee e superfici mobili e deformabili, in un riferimento inerziale | 9.5 Le leggi del campo elettromagnetico in presenza di mezzi materiali | 9.6 Le leggi del campo elettromagnetico in forma locale: le equazioni di Maxwell | 9.7 I potenziali elettromagnetici | 9.8 Energia magnetica associata a un sistema di correnti | 9.9 Densità di energia di un campo magnetico | 9.10 Energia del campo elettromagnetico: il teorema di Poynting | 9.11 Quantità di moto del campo elettromagnetico | 9.12 Un teorema di unicità per il campo elettromagnetico | Esperienze illustrate | Esercizi |
|--|----------------------------------|-----------------------------|--|--|--|-----------------------------------|--|--|---|--|--|-----------------------|----------|

10 Onde elettromagnetiche nel vuoto, 426

- | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-----------------|--------------------|-----------------------|------------------------|---|---|--|--|--|--|--|---|--|----------|
| 10.1 Equazione delle onde in assenza di sorgenti del campo | 10.2 Onde piane | 10.3 Onde sferiche | 10.4 Il fronte d'onda | 10.5 Campi sinusoidali | 10.6 Onde sinusoidali piane e loro polarizzazione | 10.7 Composizione di onde sinusoidali piane che si propagano nella stessa direzione | 10.8 Soluzione delle equazioni del campo in presenza di sorgenti: i potenziali ritardati | *10.9 I potenziali di Liénard e Wiechert | 10.10 Campo di un dipolo elementare oscillante | 10.11 Fenomeni di interferenza fra onde sinusoidali, nel vuoto | 10.12 Diffrazione delle onde elettromagnetiche: introduzione | *10.13 Diffrazione da un semipiano conduttore: soluzione rigorosa | 10.14 Diffrazione da un semipiano conduttore: soluzione analitica approssimata | Esercizi |
|--|-----------------|--------------------|-----------------------|------------------------|---|---|--|--|--|--|--|---|--|----------|

11 Le onde elettromagnetiche nei mezzi materiali, 513

- | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---------------------------------|---|---|-------------------------------|---|--|----------|
| 11.1 Introduzione | 11.2 Fenomeni di dispersione nei dielettrici dispersivi | 11.3 Onde piane nei dielettrici | 11.4 La propagazione nei mezzi conduttori | delle onde elettromagnetiche al confine tra dielettrici diversi | 11.5 Riflessione e rifrazione | 11.6 Riflessione e rifrazione al confine tra dielettrico e conduttore | 11.7 Cenni sulla propagazione nei mezzi anisotropi | Esercizi |
|-------------------|---|---------------------------------|---|---|-------------------------------|---|--|----------|

12 Elementi di ottica, 551

- 12.1 La luce e l'ottica geometrica 12.2 L'unificazione fra elettromagnetismo e ottica: equazioni dell'iconale 12.3 I sistemi ottici e le loro principali proprietà 12.4 Sistemi ottici semplici 12.5 Il metodo matriciale nello studio dei sistemi ottici 12.6 Formazione delle immagini nei sistemi ottici centrati 12.7 Lenti e sistemi di lenti 12.8 Coerenza delle radiazioni luminose: premesse statistiche 12.9 Interferenza fra radiazioni luminose correlate 12.10 Interferenza tra radiazioni luminose fra loro incorrelate: esperienza di Hanbury Brown e Twiss 12.11 Difrazione della radiazione luminosa: la teoria classica di Kirchhoff-Fresnel 12.12 Difrazione luminosa: le approssimazioni di Fraunhofer e di Fresnel Esperienze illustrate Esercizi

13 Elementi di elettrodinamica e meccanica relativistiche, 645

- 13.1 Introduzione 13.2 Confronto tra misure effettuate da osservatori diversi, fermi gli uni rispetto agli altri 13.3 Confronto tra misure di osservatori in moto relativo: le trasformazioni galileiane 13.4 Confronto tra misure di osservatori in moto relativo: le trasformazioni di Lorentz 13.5 Trasformazioni di velocità e accelerazioni 13.6 Le trasformazioni della densità di carica e della densità di corrente 13.7 Lo spaziotempo di Minkowski e la formulazione quadridimensionale dell'elettrodinamica 13.8 Formulazione quadridimensionale delle leggi dell'elettromagnetismo 13.9 Campo elettromagnetico di una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme 13.10 Elementi di meccanica relativistica 13.11 Meccanica relativistica delle collisioni Esperienze illustrate

APPENDICI

Appendice A, 707

- A.1 Sistemi inerziali A.2 Sistemi di coordinate A.3 Classificazione delle grandezze fisiche
 A.4 I vettori: definizione e operazioni elementari A.5 Componenti di un vettore in un sistema di assi cartesiani ortogonali A.6 Trasformazioni di coordinate cartesiane ortogonali e grandezze tensoriali del secondo ordine A.7 Campi scalari e campi vettoriali A.8 Rappresentazione analitica dei campi A.9 Rappresentazione geometrica dei campi A.10 Gradiente di un campo scalare A.11 Campi che ammettono potenziale A.12 Integrale di linea di un campo vettoriale lungo una linea orientata A.13 Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie A.14 Divergenza di un campo vettoriale; teorema della divergenza A.15 Rotore di un campo vettoriale; teorema di Stokes A.16 Il teorema di scomposizione di Helmholtz e il teorema di unicità A.17 Campi che ammettono potenziale vettore A.18 L'operatore laplaciano e altri operatori del secondo ordine A.19 L'operatore 'nabla' A.20 Le espressioni degli operatori vettoriali in diversi sistemi di coordinate ortogonali A.21 Funzioni armoeniche: proprietà fondamentali

Appendice B, 767

- B.1 Funzioni periodiche e sinusoidali B.2 Sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica B.3 Rappresentazione di una funzione non periodica mediante l'integrale di Fourier
 B.4 Proprietà e applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier

Appendice C, 779

- C.1 Il metodo simbolico

Appendice D, 786

- D.1 Il potenziale eletrostatico nei punti occupati da distribuzioni continue di cariche

Appendice E, 789

- E.1 La funzione impulsiva

Appendice F, 792

F.1 Potenziale prodotto da una distribuzione illimitata di cariche

Appendice G, 796

G.1 L'ipotesi di F. e H. London

Appendice H, 798

H.1 Derivazione delle formule di Feynman

Soluzioni degli esercizi, 803

Glossario, 817

Indice analitico, 823

Prefazione

Nel presentare un nuovo libro di fisica generale, sia pure dedicato soltanto all'elettromagnetismo e all'ottica, è naturale che gli autori illustrino brevemente i motivi che li hanno indotti ad affrontare un argomento più volte trattato con successo dagli specialisti.

Nato dalle dispense di fisica di Bertolaccini, Cova e Gatti, da anni in uso presso il Politecnico di Milano, questo libro si rivolge anzitutto agli allievi di Ingegneria elettronica, per i quali l'elettromagnetismo e l'ottica costituiscono, oltre che l'occasione di conoscere il grande fatto culturale della costruzione di una teoria unificata di campo, anche il momento di apprendimento degli strumenti fisico-matematici indispensabili per la comprensione e la capacità progettuale nei vari campi applicativi (circuiti, antenne, propagazione libera e guidata, dispositivi a vuoto e a stato solido, sistemi ottici). L'opera, forse in maniera ambiziosa, vuole costituire un ausilio didattico per studenti del primo biennio di Ingegneria e Fisica e una introduzione rigorosa a testi più avanzati o più specializzati nel campo delle applicazioni.

Per queste ragioni, particolare attenzione è stata dedicata allo sviluppo logico degli argomenti e alla loro corretta impostazione fisico-matematica. Di conseguenza, si è ridotta all'indispensabile la fenomenologia sperimentale (che, del resto, si ripresenterà in corsi successivi), e si sono aggiunte, come necessaria premessa alla lettura, appendici matematiche che illustrano gli algoritmi di uso più comune.

E' convinzione degli Autori che non sia possibile, oggi, prescindere da una presentazione relativistica dell'elettromagnetismo, sia per ragioni di carattere culturale sia per l'importanza delle applicazioni della relatività speciale in campi della fisica e della tecnologia che sono in continuo sviluppo. Il capitolo 13, dedicato all'elettrodinamica relativistica, risponde appunto a questa diffusa esigenza.

D'altra parte, gli Autori ritengono anche che un'impostazione della materia strettamente relativistica – quella, ad esempio, dell'ottimo testo di Edward Purcell, nella serie "La fisica di Berkeley" – difficilmente si adatti alle necessità di un corso introduttivo, tanto più se il futuro ingegnere si orienterà verso sbocchi di tipo tecnico-applicativo. Ci si è dunque attenuti a una presentazione tradizionale, che, partendo

dall'elettrostatica, tratta dell'elettrodinamica stazionaria e giunge infine al campo elettromagnetico variabile; nel contempo, ci si è sforzati di mettere in luce, ogni volta, i legami con le problematiche relativistiche, in modo che l'illustrazione della relatività speciale non comporti discontinuità logica rispetto agli argomenti precedentemente svolti e ne costituisca anzi il momento unificante.

Coerentemente con questa impostazione, le leggi dell'ottica geometrica sono ricavate da quelle dell'elettromagnetismo come caso limite per lunghezza d'onda tendente a zero.

L'analisi del funzionamento dei dispositivi ottici è poi svolta facendo ricorso anche alla moderna tecnica matriciale. Particolare attenzione è dedicata all'ottica ondulatoria (interferenza e diffrazione) e alle caratteristiche di coerenza della radiazione luminosa.

Un'ultima osservazione a proposito degli esercizi — tutti elementari e di difficoltà crescente — di cui il libro è corredata. Coerentemente con l'impostazione generale dell'opera, nella loro soluzione si sono messi in risalto i metodi di formulazione fisicomatemática che consentono l'estensione a casi più complessi (lo studio dettagliato di metodi analitici e numerici più avanzati è lasciato a corsi successivi). La loro soluzione costituisce un indispensabile complemento per una reale comprensione della materia.

E' infine doveroso esprimere il nostro sincero ringraziamento all'Editore per la bella veste tipografica che ha voluto dare al libro e, in particolare, al dottor Maurizio Bruno, senza la cui esperta opera di revisione queste pagine sarebbero state, certo, meno facilmente leggibili.

S. B.
E. G.

AVVERTENZA

Sono contrassegnati con asterisco i paragrafi riferentisi ad argomenti più specializzati che possono essere omessi in una prima lettura.

Capitolo 1

Interazioni elettriche

Nota bene: per una piena comprensione del testo è indispensabile lo studio preliminare delle appendici matematiche.

1.1 Elettrizzazione: esperienze qualitative

I fenomeni di attrazione e repulsione che vanno sotto il nome di “interazioni elettriche” sono rilevabili a mezzo di esperienze elementari. Ad esempio, una bacchetta di ambra, di ebanite, o più semplicemente di plastica, strofinata con un panno di lana o di seta, acquista la proprietà di attirare, sollevandoli, piccoli pezzi di carta, cenere o altro materiale leggero. Tale interazione, che si sovrappone a quella gravitazionale, è ben più intensa di questa, e difatti riesce a vincere la forza attrattiva che sul frammento esercita l’intero nostro pianeta.

L’origine del fenomeno può essere ricercata nel particolare stato fisico in cui il materiale della bacchetta viene a trovarsi per effetto dello strofinio: si è soliti dire che esso è “in stato di elettrizzazione” o che è “elettricamente carico” (con ciò non si dice ancora nulla sulla natura del fenomeno: si è soltanto trovato un modo conciso per fare riferimento ai risultati dell’esperienza). Tra le molte esperienze analoghe che potrebbero essere citate, ricorderemo le seguenti, particolarmente significative.

Il pendolino elettrico

E’ costituito da una leggera pallina di midollo di sambuco, o di vetro, sospesa a un supporto fisso mediante un filo di seta. Il pendolino viene attratto energicamente da un corpo preventivamente elettrizzato per strofinio e ne mette così in evidenza lo stato di elettrizzazione. L’esperienza riesce ancor meglio se la pallina è ricoperta da una sottile lamina d’oro o d’argento (vanno benissimo, ad esempio, le palline dell’albero di Natale).

Conduttori e isolanti

L’esperienza precedente riesce se come corpi da elettrizzare si usano materiali quali l’ambra, il vetro, l’ebanite; altri materiali, ad esempio i metalli, si rivelano inadatti. Così, una bacchetta metallica, impugnata dall’espertamentatore, anche se strofinata

con un panno di lana, di regola non agisce sul pendolino. Se però il metallo è maneggiato tramite un'impugnatura fatta di una sostanza del primo gruppo (ambra, vetro ecc.), di nuovo si presentano i fenomeni di elettrizzazione. Si osserva ancora che un metallo previamente elettrizzato per strofinio, toccato dalla mano dello sperimentatore (direttamente o tramite un altro oggetto metallico) perde subito la sua carica elettrica.

A questi fenomeni si può dare una spiegazione qualitativa supponendo che all'origine delle proprietà dei corpi "elettrizzati" vi sia un "qualcosa" (al momento non meglio definito) chiamato *elettricità*, che in alcuni corpi (come i metalli e il corpo umano) sarebbe libero di fluire e quindi di disperdersi, mentre in altri (l'ambra, il vetro ecc.) verrebbe trattenuto. Ai corpi del primo gruppo si dà il nome di *conduttori*, agli altri quello di *isolanti*.

Tipici conduttori sono il rame, l'argento, l'oro, e in generale i metalli e le leghe metalliche; tipici isolanti, l'ambra, l'ebanite, il vetro, la carta, il plexiglass, la porcellana ecc.

Elettrizzazione positiva e negativa

Dopo avere preventivamente elettrizzato una bacchetta di ambra, avviciniamola a un pendolino elettrico in modo che la pallina venga attirata dalla bacchetta fino a toccarla; se il contatto si verifica ripetutamente e in corrispondenza di punti diversi della bacchetta, ecco che l'attrazione si tramuta a un tratto in repulsione: da questo momento, e per un tempo abbastanza lungo, la pallina è respinta dalla bacchetta elettrizzata. Se a questo punto elettrizziamo una bacchetta di vetro (anziché di ambra) e l'avviciniamo al pendolino, senza toccarlo, notiamo di nuovo attrazione tra la bacchetta e la pallina.

Ogni corpo elettrizzato, avvicinato al pendolino, esercita su esso un'azione che per talune sostanze è attrattiva e per altre repulsiva. E' dunque naturale distinguere il tipo di elettrizzazione caratteristico del vetro (e delle sostanze che in queste esperienze si comportano come il vetro), da quello di sostanze del tipo dell'ambra: alla prima specie di elettrizzazione si dà il nome di *positiva*, all'altra, di *negativa*.

I risultati precedenti si possono riassumere dicendo che *corpi elettrizzati dello stesso segno si respingono, mentre corpi elettrizzati di segno opposto si attirano*.

L'aver indicato i due tipi di elettricità con i termini "positiva" e "negativa" è per ora una pura convenzione, che nulla ha a che vedere con la possibilità di introdurre una grandezza fisica corrispondente allo stato di elettrizzazione. Ora, un modo appariscente per determinare il tipo di elettrizzazione di un corpo è quello di soffiare su esso una polvere mista di minio e zolfo: lo zolfo resta attaccato ai corpi carichi positivamente colorandoli di giallo, mentre il minio colora di rosso quelli carichi negativamente.¹ A questo livello delle esperienze, quindi, si sarebbe potuto a buon diritto

¹ La cosa si spiega facilmente pensando che, all'atto della soffiatura della polvere (ad esempio mediante una pompetta), lo zolfo, strisciando contro il minio della pompetta, si elettrizzi negativamente.

distinguere un "elettricità gialla" da un "elettricità rossa", e affermare che elettricità dello stesso colore si respingono, mentre elettricità di colore diverso si attraggono.

Induzione elettrostatica

Se si avvicina un corpo carico *A* a un conduttore scarico *C*, senza toccarlo, è facile verificare (ad esempio, mediante la polvere di minio e zolfo) che la parte di *C* più vicina ad *A* si elettrizza in maniera eteronima rispetto ad *A*, mentre le regioni di *C* più lontane si elettrizzano in maniera omonima ad *A*. Inoltre, allontanando il corpo *A*, lo stato di elettrizzazione di *C* scompare immediatamente: per questo motivo, si parla di una elettrizzazione *indotta* da *A* in *C*.

Da questa esperienza, o da altre simili che possono effettuarsi, sia pure meno agevolmente, sostituendo il conduttore *C* con un isolante,² si deduce che nei corpi, in assenza di elettrizzazione (o, come si dice, allo *stato neutro*), i due tipi di elettricità sono intimamente mescolati, con effetto risultante nullo, e che in presenza di un corpo elettrizzato inducente le due forme di elettricità si separano, quella di un segno essendo attirata dal corpo inducente, e quella di segno opposto, respinta.

1.2 La carica elettrica

Le esperienze fin qui descritte hanno messo in luce aspetti importanti dei fenomeni connessi con l'elettrizzazione dei corpi materiali, senza tuttavia permetterne una descrizione quantitativa. A tal fine occorre anzitutto indicare un procedimento operativo che consenta di misurare il grado di elettrizzazione dei corpi; soltanto allora sarà possibile introdurre una grandezza fisica, univocamente definita, corrispondente a ciò che viene convenzionalmente denominato la *carica elettrica* posseduta da un corpo elettrizzato.

Cominciamo con l'introdurre la seguente *definizione*:

*Due corpi elettrizzati *A* e *B* possiedono cariche elettriche uguali e dello stesso "segno" se, a parità di posizione dei due corpi e di natura del mezzo circostante (ad esempio, l'aria o il vuoto), esercitano forze uguali (in modulo, direzione e verso) su uno stesso terzo corpo elettrizzato *C*, tenuto fermo in un punto qualsiasi del sistema di riferimento dell'osservatore solidale con *A* e *B*.*

Tale definizione è avvalorata dal seguente fatto sperimentale: se, dopo aver constatato l'uguaglianza tra le cariche possedute dai corpi *A* e *B*, si sostituisce il corpo carico *C* con un altro *C'*, le forze esercitate su quest'ultimo da *A* e *B* rimangono

vamente e il minio positivamente: è chiaro allora che lo zolfo viene attratto dai corpi positivi e il minio da quelli negativi.

² In questi casi, si hanno fenomeni di *polarizzazione* dell'isolante.

uguali tra loro. L'uguaglianza tra le cariche non dipende dunque dal corpo C o C' scelto, ma è una proprietà dello stato di elettrizzazione dei due corpi a confronto.³

Osservazione. A un esame più approfondito, la definizione di uguaglianza proposta rivela alcuni limiti. Infatti, se i corpi A e B , di cui si vuole confrontare la carica, non hanno uguale configurazione geometrica e fisica, è ambiguo il riferimento alla loro "parità di posizione"; poiché può accadere che, variando l'orientazione spaziale di A e B , varii in qualche misura la forza agente sul corpo carico C (tenuto fisso nella sua posizione).

Per eliminare l'inconveniente, occorre restringere la definizione: per esempio confrontando corpi aventi uguale configurazione geometrica e fisica, o per i quali le diverse orientazioni spaziali *non* modifichino in misura sperimentalmente rilevabile la forza agente sul corpo di riferimento. Delle due soluzioni, la prima ha scarsa utilità pratica, in quanto è subordinata a una condizione troppo restrittiva. Scegliendo la seconda si constata, invece, affinando un poco l'esperienza, che l'incertezza della definizione è superabile se le dimensioni dei corpi di prova esaminati sono sufficientemente piccole rispetto alle loro distanze dal corpo di riferimento.

In conclusione, la definizione proposta si intende riferita ai cosiddetti corpi (e quindi, cariche) *puntiformi*. La sua portata si è così notevolmente ridotta, eppero è sufficiente, come si vedrà in seguito, a costruire una teoria elettrica coerente.

A questo punto, per completare la definizione operativa della carica elettrica come grandezza fisica, occorre introdurre un'operazione di *somma* tra le cariche.

Ricordiamo che in meccanica due corpi sono di massa uguale quando, posti sui piatti di una bilancia, non ne alterano l'equilibrio; dopodiché il concetto di somma di due masse viene introdotto nel modo seguente: considerando l'insieme dei due corpi giustapposti come un unico, nuovo corpo, la massa di quest'ultimo, per definizione, è pari alla somma delle masse dei due componenti. La massa, per definizione, ha cioè carattere di *additività*.

Analogamente, anche alla carica elettrica si dà carattere additivo, considerando la carica di un corpo pari, per definizione, alla somma delle cariche dei corpi giustapposti che lo compongono.⁴ (L'operazione di somma si riferisce per il momento soltanto a cariche dello stesso colore o segno.)

E' possibile ora considerare cariche doppie, triple e in generale multiple di una carica di riferimento qualsiasi, unendo due, o tre o più corpi puntiformi dotati di cariche uguali. Analogamente, è possibile considerare sottomultipli di una carica di riferimento.

Il procedimento di definizione della carica elettrica potrebbe considerarsi concluso, ed essere schematizzato come segue:

³ L'uguaglianza, oltre a essere indipendente dalla posizione del corpo C , gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

⁴ Si noti che l'operazione di somma così definita gode delle proprietà commutativa e associativa.

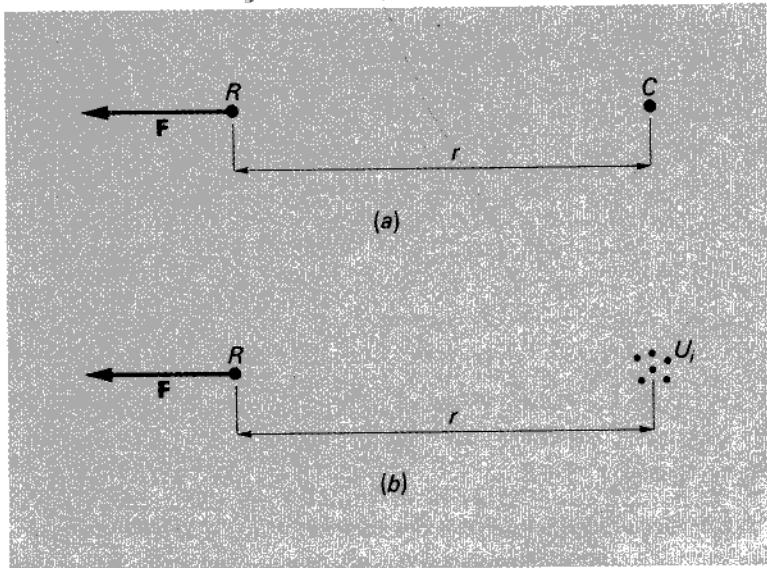


Figura 1.1

- 1) A un corpo U , elettrizzato di un dato colore (o segno) viene attribuita, per definizione, la carica unitaria di quel colore (o segno).
- 2) Dato un generico corpo C (carico dello stesso colore di U), si misura la forza F che esso esercita su un terzo corpo carico R posto a opportuna distanza r (vedi fig. 1.1a).
- 3) Dati infine più corpi U_i , dotati di carica uguale a quella unitaria, se ne giustappone un numero sufficiente a esercitare su R , in condizioni geometriche analoghe alle precedenti (vedi fig. 1.1b), una forza uguale a quella esercitata da C : il numero di cariche unitarie occorrenti definisce la carica elettrica del corpo C .⁵

Questo procedimento sarebbe da applicare separatamente alle cariche dei due colori; in linea di principio, nulla impedirebbe di definire unità indipendenti per i due tipi di elettricità. Tuttavia, per ragioni che saranno chiarite nel seguito, conviene scegliere l'unità "rossa" e quella "gialla" in modo che esse esercitino una forza di pari intensità, anche se di verso opposto, su uno stesso (qualsiasi) corpo carico.

Rispetto alla definizione della massa, quella della carica elettrica (dell'uno o dell'altro tipo di elettricità), pur essendo concettualmente analoga, presenta differenze sostanziali dal punto di vista operativo. Infatti, mentre i corpi sono praticamente immutabili nel tempo per quanto attiene alla loro massa, lo stesso non accade per la carica elettrica: per isolato che sia il corpo, essa si disperde in tempi comunque

⁵ Come in ogni operazione di misura, anche in questo caso non è possibile, in generale, trovare un numero intero di unità che esprima esattamente la misura in oggetto; occorre dunque fare ricorso a sottomultipli dell'unità scelta, fino a raggiungere il grado di precisione desiderato.

troppo brevi. Così, mentre è possibile conservare stabilmente un campione di massa, non altrettanto può farsi per un campione di carica.

Per questi motivi, come vedremo nel seguito, nella moderna metrologia si preferisce seguire vie diverse.

Osserviamo infine che non si è fatta ancora alcuna ipotesi sulla specifica dipendenza tra forze e cariche; per esplicitare tale legame occorre far riferimento a nuove esperienze, e di ciò si parlerà nel paragrafo seguente.

1.3 La legge di Coulomb

L'interazione tra due cariche elettriche puntiformi fisse nel vuoto, in un sistema di riferimento inerziale, è governata dalla *legge di Coulomb*. In base ad essa, la *forza che si esercita tra le cariche risulta*:

- diretta secondo la retta congiungente le due cariche;*⁶
- di intensità proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza interposta tra esse;*
- repulsiva per cariche omonime, attrattiva per cariche eteronime.*

A questo punto, decidendo di distinguere i due tipi di elettricità per mezzo del segno, la legge di Coulomb può essere scritta in forma concisa:

$$\mathbf{F}_2 = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{i}_{12} = -\mathbf{F}_1, \quad [1.3.1]$$

ove \mathbf{F}_2 è la forza esercitata dalla carica q_1 sulla q_2 , \mathbf{F}_1 quella esercitata dalla q_2 sulla q_1 ,⁷ r è la distanza tra le due cariche, \mathbf{i}_{12} è il versore della congiungente q_1 e q_2 , orientata dalla prima carica verso la seconda (vedi fig. 1.2)

Si verifica subito che, quando q_1 e q_2 sono dello stesso segno, il loro prodotto è positivo e la forza, espressa dalla [1.3.1], è repulsiva (come in fig. 1.2); quando invece sono di segno opposto, il loro prodotto è negativo e la forza è attrattiva.

Il valore della costante K dipende dalle unità di misura scelte per le grandezze che figurano nella legge (forza, distanza e carica). Nel Sistema internazionale (SI) (quello adottato nel presente volume), l'unità di carica prende il nome di "coulomb" (C); con tale unità, che definiremo in seguito, e misurando le distanze in metri, la [1.3.1] fornisce la forza espressa in newton, se la costante K è pari a

$$K = (8,987551679 \pm 0,000000066) \times 10^9 \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ C}^{-2}. \quad [1.3.2]$$

Per ragioni di comodità che saranno chiarite in seguito, si preferisce scrivere la legge

⁶ Si osservi che questa è l'unica direzione privilegiata nello spazio (vuoto), nel riferimento inerziale in cui le due cariche sono fisse.

⁷ Le due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 sono uguali e opposte, e verificano pertanto il principio di azione e reazione.

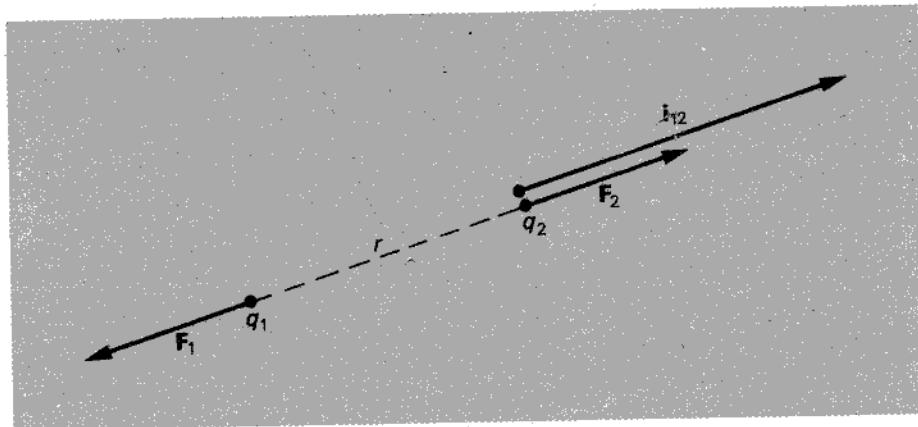


Figura 1.2

di Coulomb ponendo

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}; \quad [1.3.3]$$

la costante ϵ_0 , che prende il nome di *costante dielettrica del vuoto*, in base alla [1.3.2], ha il valore

$$\epsilon_0 \approx 8,854188 \times 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ s}^2 \text{ C}^2. \quad [1.3.4]$$

Notiamo esplicitamente che nel SI il valore di K (e quindi, di ϵ_0) non è oggetto di definizione, in quanto l'unità di carica elettrica è definita (come vedremo) a partire dall'unità di corrente e dall'unità di tempo. Il valore di 1 coulomb corrispondente approssimativamente a quello di una carica che, posta nel vuoto a un metro di distanza da una carica uguale, esercita su essa una forza pari a circa $8,9875 \times 10^9$ newton. Si tratta di un valore enorme: i corpi con i quali si sperimenta abitualmente hanno cariche dell'ordine dei microcoulomb ($1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$) o anche minori.

Le esperienze che condussero Coulomb, nel 1785, a enunciare la legge che porta il suo nome furono condotte utilizzando un apparato sperimentale che prese il nome di *bilancia di torsione* (l'originale è riportato in fig. 1.3): la repulsione tra le cariche, rispettivamente della sferetta t e della sferetta a , determina la torsione del filo di sospensione f fino all'equilibrio.

Dai tempi di Coulomb ad oggi, la legge ha avuto innumerevoli verifiche sperimentali dirette e indirette. Per il suo valore concettuale e per l'interesse storico, merita di essere ricordata quella di Maxwell e McAlister, i quali, nel 1878, mostrarono che l'esponente della distanza, nella [1.3.1], differisce da due per meno di una parte su 21 600. L'esperienza, basata su un'idea di Cavendish del 1772, utilizzava il fatto che un "guscio" sferico di cariche uniformemente distribuite non esercita alcuna forza su una carica posta al suo interno: ciò implica che la dipendenza della forza della distanza è del tipo $1/r^2$.

Mémo de l'Ac. R. des Sc. An 1783. Pug. 5-6. Pl. XIII.

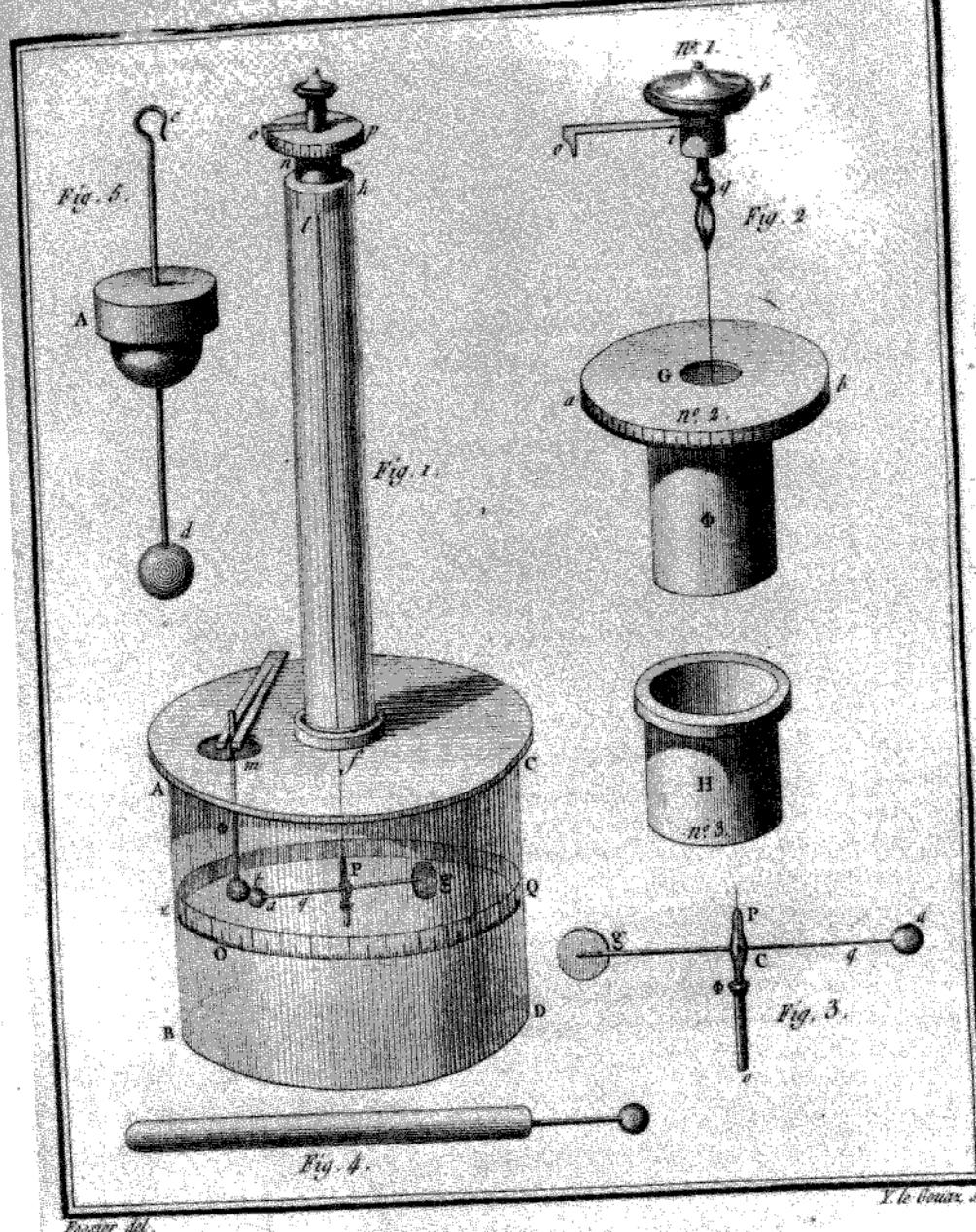


Figura 1.3
Dispositivo sperimentale di Coulomb.

In tempi abbastanza recenti, questa stessa idea fu ripresa da Plimpton e Lawton, che nel 1936, perfezionando non poco l'apparato sperimentale, dimostrarono che l'esponente differisce da due per meno di due parti su 10^9 .⁸

Per quel che riguarda i limiti di validità della legge al variare della distanza tra le cariche, si può affermare che essa vale, su scala microscopica, fino a distanze dell'ordine di 10^{-15} m; all'altro estremo della scala, esperienze indirette mostrano che la legge è valida almeno per distanze di qualche chilometro.

Quanto a struttura, la legge di Coulomb è identica a quella della interazione gravitazionale, con la sola differenza che le forze gravitazionali sono sempre attrattive. Come si è detto, le forze elettriche sono enormemente più intense di quelle gravitazionali: infatti l'applicazione delle leggi di Coulomb e di Newton al calcolo rispettivamente della forza di attrazione elettrica e di quella gravitazionale tra protoni fornisce, a parità di distanza, un rapporto tra le forze pari a

$$\frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}}{G \frac{m_p^2}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{e^2}{m_p^2} = 1,2367 \times 10^{36},$$

con

$$G = (6,668 \pm 0,005) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \text{ costante di gravitazione;}$$

$$m_p = (1,672648 \pm 0,000005) \times 10^{-27} \text{ kg, massa del protone;}$$

$$e = (1,602189 \pm 0,0000046) \times 10^{-19} \text{ C, carica del protone.}$$

1.4 Il principio di sovrapposizione

Nel paragrafo precedente è stata enunciata la legge che descrive l'interazione tra due cariche puntiformi fisse nel vuoto, senza però accennare al caso in cui le cariche presenti siano più di due. Ora, l'esperienza dimostra che *in presenza di più cariche* (vedi fig. 1.4) la forza agente su ciascuna, risultante dall'interazione con tutte le altre, è pari alla somma vettoriale delle forze che su essa vengono esercitate, conformemente alla legge di Coulomb, da ogni singola carica. E', questo, un risultato nuovo (*principio di sovrapposizione*), indipendente dalla additività delle cariche (data, come si è visto, per definizione) e dalla legge di Coulomb (che governa l'interazione tra *due* sole cariche). In virtù di tale principio, ad esempio, è nulla la forza esercitata da due cariche uguali e di segno opposto, sovrapposte l'una all'altra. Date inoltre due cariche (giustapposte) di segno opposto, di valori q_1 e q_2 , l'azione da esse esercitata su una terza carica è pari a quella che sarebbe esercitata da un'unica carica, di valore $q = q_1 - q_2$, e di segno omonimo a quello della maggiore tra q_1 e q_2 . (Si ha così una conferma del-

⁸ Una breve descrizione di questa esperienza è riportata alla fine del cap. 2.

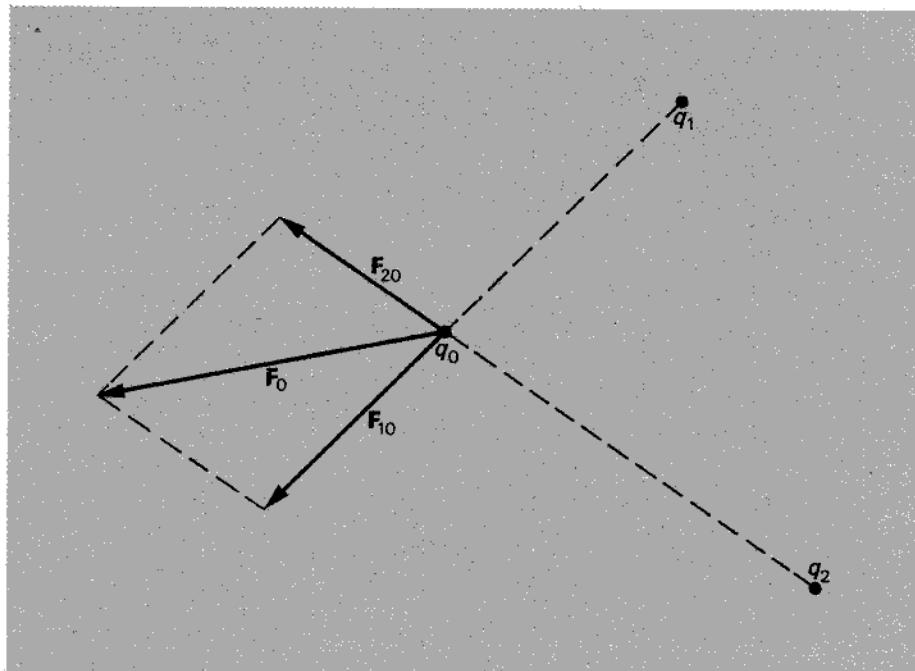


Figura 1.4

l'opportunità di adottare la convenzione "segno" anziché "colore" per le due specie di elettricità, e di scegliere per esse unità di pari valore.) E' naturale, a questo punto, introdurre un'operazione di somma anche tra cariche eteronime, attribuendo a ciascun corpo una carica pari alla somma algebrica di quelle possedute dai corpi che lo compongono.

Con ciò, il procedimento di definizione della carica elettrica come grandezza fisica può ritenersi concluso.

Gli argomenti precedenti (definizione quantitativa della carica, legge di Coulomb e principio di sovrapposizione) si potrebbero presentare, nel loro complesso, in un modo anche più semplice, ma meno soddisfacente dal punto di vista della gradualità dello sviluppo logico. Per definire la carica, si potrebbe, ad esempio, introdurre direttamente il rapporto tra due cariche omonime come rapporto tra le intensità delle forze da esse esercitate su uno stesso corpo carico di prova; dopodiché, scelto un campione-unità, la definizione sarebbe completa. In tal caso, però, il contenuto sperimentale della legge di Coulomb si ridurrebbe alla dipendenza della forza dal quadrato della distanza, la proporzionalità al prodotto delle cariche essendo già contenuta nella definizione di carica.

A posteriori i due procedimenti si equivalgono, in quanto forniscono complessivamente le stesse informazioni: differiscono, però, per il diverso peso che viene attribuito a quanto viene postulato per definizione o, viceversa, ricavato dall'esperienza.

1.5 Conservazione della carica

Intendendo *isolato* un sistema fisico che non abbia scambi di materia attraverso la superficie che lo limita, il *principio di conservazione della carica elettrica* può enunciarsi dicendo che *in un tale sistema la carica totale, pari alla somma algebrica delle cariche (positive e negative) in esso contenute, è costante nel tempo.*

I fenomeni naturali noti rispettano tutti questo principio: ciò significa che, data una regione spaziale Ω delimitata da una superficie chiusa Σ , se si misura la carica totale presente nella regione Ω in istanti diversi t_1 e t_2 e si verifica che esiste una differenza finita tra questi valori,

$$\Delta Q = Q(t_2) - Q(t_1),$$

si può essere certi che tale differenza è dovuta al passaggio di corpi carichi attraverso la superficie Σ nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) . In tal caso, il sistema fisico racchiuso da Σ *non* è isolato. In altre parole, non si è mai osservata creazione (o scomparsa) di una singola carica senza che contemporaneamente si verificasse, nello stesso luogo, la creazione (o la scomparsa) di una carica uguale e contraria (che è quanto accade, ad esempio, nell'interazione di un raggio γ con la materia). Proprio il fatto che le due cariche nascano nello stesso luogo e nello stesso istante assicura la validità del principio di conservazione della carica anche a livello locale.

1.6 Quantizzazione della carica

E' noto che i corpi si compongono di atomi e che questi sono a loro volta rappresentabili, secondo certi modelli, come strutture formate da insiemi di particelle estremamente piccole rispetto alla scala di lunghezza dell'esperienza quotidiana. Alcune di queste particelle, ad esempio l'elettrone e il protone, sono elettricamente cariche, altre, come il neutrone, non lo sono. Ora, poiché nell'atomo la carica positiva del nucleo è esattamente bilanciata da quella negativa degli elettroni, nei corpi è nulla, di norma, la carica elettrica risultante; di conseguenza le interazioni elettriche con altri corpi non si manifestano, almeno fino a distanze comparabili con la separazione spaziale delle loro cariche positive e negative. I fenomeni di elettrizzazione si verificano unicamente in coincidenza di perdita o di acquisto di particelle cariche (elettroni ad esempio), oppure quando le cariche positive si sono separate dalle negative. Comunque, la differenza nel numero di cariche di segno opposto è di regola irrilevante rispetto al numero totale delle particelle, e ciò spiega come mai su scala macroscopica le interazioni elettriche osservate non abbiano l'evidenza che ci si potrebbe aspettare tenendo conto dell'enorme divario esistente tra l'intensità delle forze elettriche e di quelle gravitazionali.

Alla base di questi fenomeni vi è un risultato sperimentale, di grande importanza

per la fisica, confermato da moltissime esperienze, la più celebre delle quali è quella di Millikan del 1909 (per una breve descrizione si rimanda alla fine del cap. 2):

I valori assunti dalla carica elettrica sono soltanto multipli interi della carica dell'elettrone (che pertanto è indivisibile).

A questo proposito si suole dire che la carica elettrica è *quantizzata*.⁹

La carica dell'elettrone, q_e , è negativa,¹⁰ quella del protone, ad essa uguale in valore assoluto, è positiva. Il suo valore, nel Sistema internazionale, è pari a $(1,6021892 \pm 0,0000046) \times 10^{-19}$ C.¹¹

Per una larga classe di fenomeni, la trattazione classica dell'elettromagnetismo *non* tiene conto della natura quantizzata della carica, che considera come grandezza variabile con continuità, così come si fa per la massa, nell'ambito della meccanica del continuo. Su questo argomento si tornerà più diffusamente nel seguito.

Esperienze illustrative

1. L'elettroscopio a foglie

Uno strumento, di costruzione relativamente semplice, che consente di verificare lo stato di elettrizzazione di un corpo è il cosiddetto *elettroscopio a foglie* (vedi fig. 1.5). Nella figura, R è un recipiente trasparente provvisto di un tappo (forato) isolante T , attraverso cui passa un'asticciola metallica B , la quale termina da un lato con una sferetta metallica S , dall'altro con due lamine molto leggere F e F' (*foglie*) d'oro, d'argento o alluminio. Avvicinando a S un corpo elettrizzato C , la sferetta S si carica di segno contrario a C , mentre le foglie F e F' si caricano dello stesso segno di C , e respingendosi divergono.

Se si allontana il corpo carico C , l'elettrizzazione indotta scompare, e le foglioline ricadono.

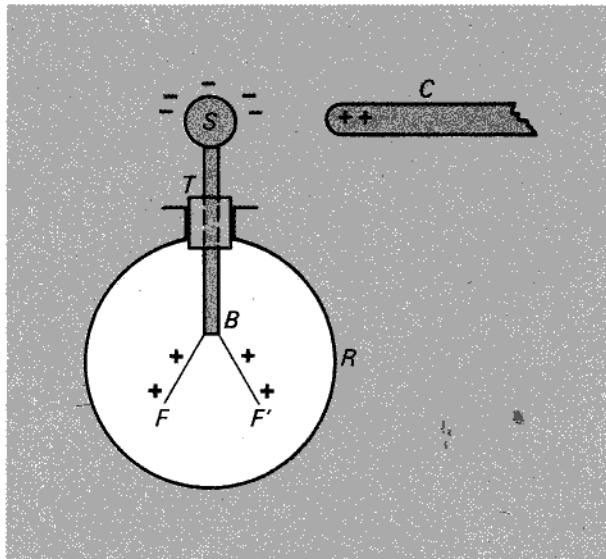
2. Elettrizzazione per induzione

Si consideri un elettroscopio il cui involucro sia costituito da un recipiente metallico R dotato di finestre di vetro. Collegiamo l'elettroscopio, mediante un filo con-

⁹ Già da alcuni anni è stata avanzata l'ipotesi, fondata su considerazioni teoriche, che esistano particelle, i cosiddetti *quarks*, aventi carica pari a $(+2/3)q_e$ e $(-1/3)q_e$; grazie ad essa è possibile inquadrare in un unico modello teorico il grande numero di particelle elementari oggi conosciute. L'ipotesi dei quark ha inoltre permesso, negli anni passati, di affermare l'esistenza di particelle non ancora scoperte. Non esiste ancora, però, evidenza sperimentale a questo proposito (una esperienza significativa è illustrata alle pp. 56 sgg.).

¹⁰ Spesso, la carica dell'elettrone è indicata con il simbolo "e".

¹¹ L'uguaglianza, in valore assoluto, tra la carica dell'elettrone e quella del protone è stata verificata sperimentalmente con precisione elevatissima. Nel 1963, ad esempio, Zorn, Chamberlain e Hughes, sperimentando su atomi di cesio, hanno mostrato che la carica dell'elettrone differisce da quella del protone per meno di 5 parti su 10^{19} , e inoltre che la carica del neutrone, se esiste, è minore di $5 \times 10^{-19} q_e$.

**Figura 1.5**

Le lamine F e F' dell'elettroscopio divergono, segnalando la presenza di una carica elettrica su C .

duttore, a un qualsiasi altro conduttore profondamente infisso nel terreno (vedi fig. 1.6); se alla sferetta S si avvicina un corpo carico C , le foglioline, come nell'esperienza precedente, divergono (vedi fig. 1.6a). Colleghiamo ora l'involucro metallico R alla sferetta S mediante il filo conduttore f : le foglioline ricadono (vedi fig. 1.6b). Infine, allontaniamo il corpo carico C , staccando contemporaneamente il collegamento f tra R e S (vedi fig. 1.6c): le foglioline divergono nuovamente e permangono in questo stato per parecchi minuti (se il tappo T è realizzato con un buon isolante e l'umidità dell'ambiente non è elevata).

La spiegazione del fenomeno è abbastanza semplice: quando si collega R a S attraverso f si realizza un unico conduttore, costituito dalla bacchetta B , dal filo f , dal recipiente R e dalla terra. Questo conduttore, per induzione, si carica negativamente nella parte più vicina al corpo C (carico, per ipotesi, positivamente) e positivamente nella parte più lontana (la terra). Quando, infine, si interrompe il collegamento f e si allontana il corpo carico C , le cariche negative presenti su S si diffondono su tutta l'asticciola B , e quindi anche sulle foglioline, facendole divergere.

Per scaricare l'elettroscopio, basta collegare nuovamente la sferetta S a terra mediante il filo f .

Esercizi

- Due cariche puntiformi del valore di 2×10^{-6} C sono poste a distanza di 1 cm. Calcolare il valore della forza F che agisce su ciascuna delle cariche.

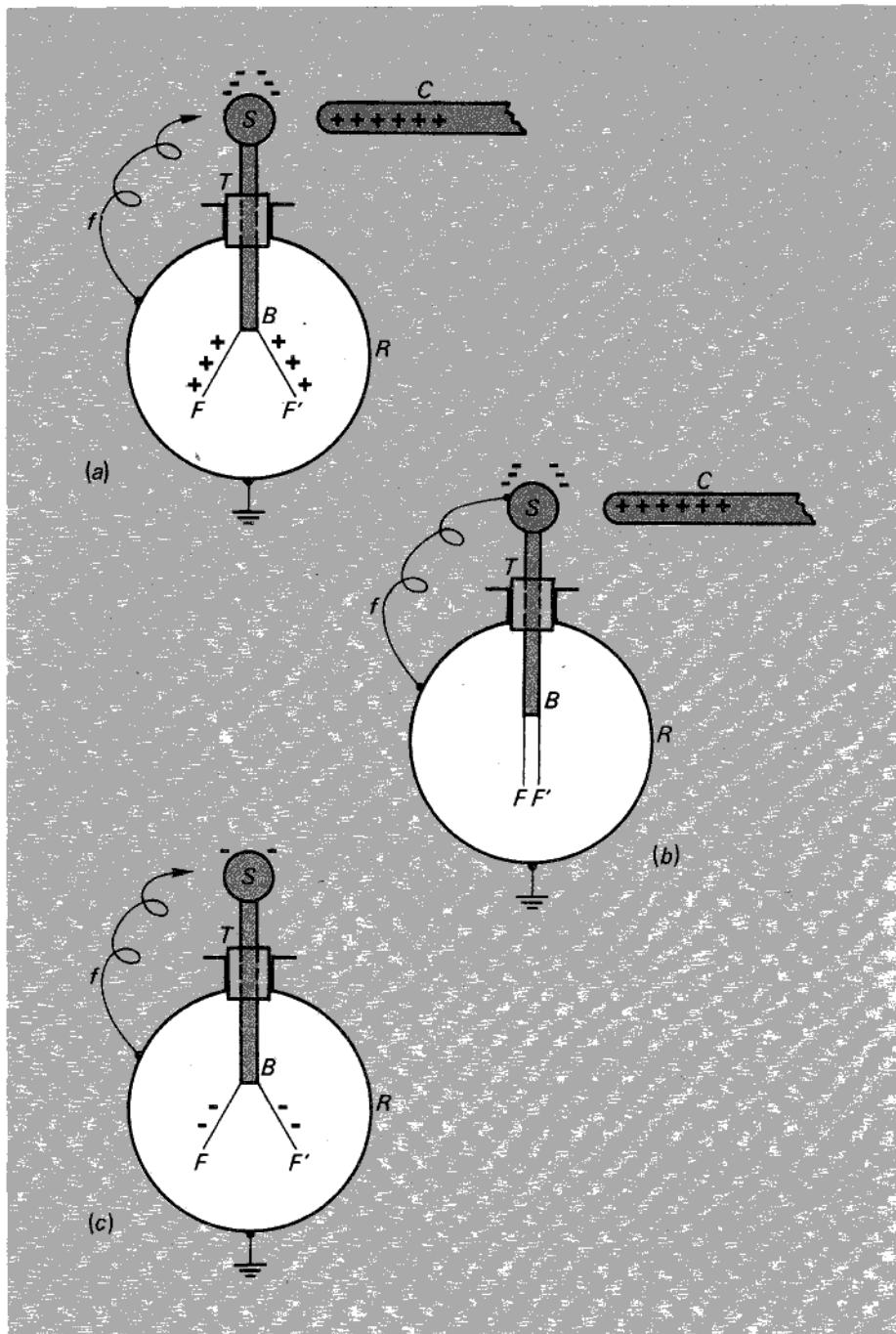


Figura 1.6

Un'esperienza sull'induzione elettrostatica; in questo caso l'involucro R è un conduttore.

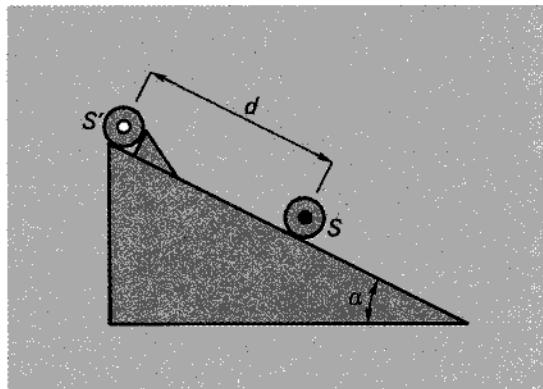


Figura 1.7

2. Immaginando di attribuire al Sole e alla Terra due cariche uguali Q , esprimere il valore di Q capace di bilanciare esattamente l'attrazione gravitazionale. Ricordiamo che $G = (6,668 \pm 0,005) \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, m_S (massa del Sole) = $1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$, m_T (massa della Terra) = $5,976 \times 10^{24} \text{ kg}$.
3. Date tre cariche uguali, del valore di $1\mu\text{C}$ (10^{-6} C), disposte nei vertici di un triangolo equilatero di lato 1 cm, calcolare la forza agente su ciascuna.
4. Una carica puntiforme q_1 di $2\mu\text{C}$ è posta a distanza $d = 10 \text{ cm}$ da una asticciola, lunga 1 cm, portante alle estremità due cariche, q e $-q$, di $1\mu\text{C}$ e $-1\mu\text{C}$; calcolare approssimativamente la forza F agente su q_1 e la coppia C agente sull'asticciola.
5. Le due lame di un elettroscopio divergono di un angolo α ; immaginando che alle estremità P e P' delle due lame siano localizzate due cariche uguali Q , esprimere il valore di Q in funzione delle caratteristiche delle lame.
6. Una sferetta S di massa m è disposta su un piano inclinato (vedi fig. 1.7); a distanza d da questa è "inchiodata" una seconda sferetta S' . Immaginando di attribuire a S e S' , rispettivamente, cariche q e $-q$, calcolare un valore delle cariche sufficiente a impedire che S rotoli lungo il piano inclinato.
7. Con riferimento al problema precedente, verificare che l'equilibrio è *instabile*. Verificare inoltre che, se le due sferette hanno cariche dello stesso segno e quella fissa è posta in basso e quella mobile in alto, l'equilibrio è *stabile*.
8. Date due cariche uguali q , poste nei punti A e B , verificare che una qualsiasi terza carica, posta nel punto medio del segmento AB , è in equilibrio *instabile*.

Capitolo 2

Il campo elettrostatico

2.1 Il campo elettrico

Ritornando all'interazione tra due cariche puntiformi q_1 e q_0 , fisse nel vuoto, immaginiamo di misurare di volta in volta la forza che agisce sulla carica q_0 , mantenendo fissa la carica q_1 nel punto Q e spostando q_0 . In altre parole, determiniamo il campo vettoriale $\mathbf{F}_0(P)$ dato dalla forza \mathbf{F}_0 agente sulla carica q_0 , posta in un generico punto P , per effetto della q_1 fissa in Q . Questo campo è definito in tutto lo spazio e, come mostra la legge di Coulomb, è di tipo *centrale*.¹

Sostituendo alla q_0 una carica q'_0 , e ripetendo le misure, si ottiene, sempre in base alla legge di Coulomb, un nuovo campo vettoriale $\mathbf{F}'_0(P)$:

$$\mathbf{F}'_0(P) = \frac{q'_0}{q_0} \mathbf{F}_0(P). \quad [2.1.1]$$

Indicando con $\mathbf{E}(P)$ il campo vettoriale che esprime la forza esercitata dalla carica q_1 sulla carica unitaria positiva posta nel generico punto P , la forza $\mathbf{F}_0(P)$ può essere espressa come

$$\mathbf{F}_0(P) = q_0 \mathbf{E}(P). \quad [2.1.2]$$

In base alla [1.3.1], il vettore $\mathbf{E}(P)$ è dato dalla

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{10}^2} \mathbf{i}_{10}, \quad [2.1.3]$$

avendo indicato con r_{10} la distanza tra il punto P e il punto Q (vedi fig. 2.1) e con \mathbf{i}_{10} il relativo versore orientato da Q verso P .

Con riferimento a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z , il versore

¹ Per le nozioni di "campo vettoriale" e di "campo centrale" vedi l'app. A.

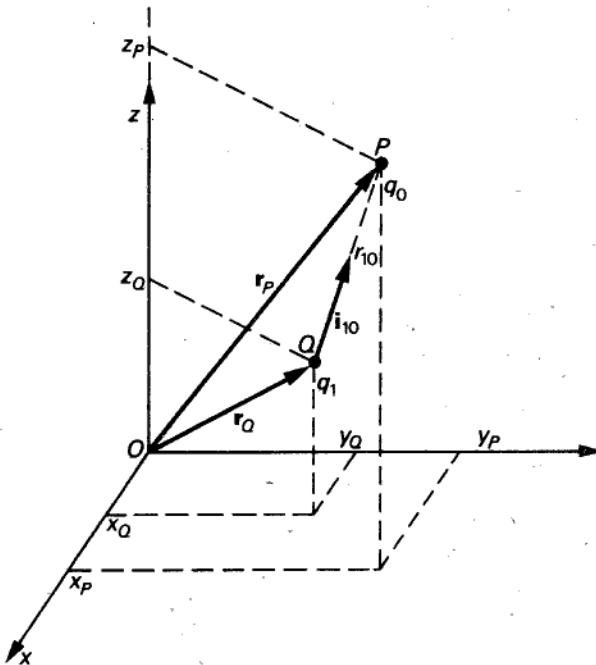


Figura 2.1

Relazione tra gli elementi geometrici che compaiano nella definizione di $\mathbf{E}(P)$.

i_{10} può essere espresso come

$$i_{10} = \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|} = \frac{(x_P - x_Q)\mathbf{i} + (y_P - y_Q)\mathbf{j} + (z_P - z_Q)\mathbf{k}}{[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2]^{1/2}},$$

avendo indicato con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} i versori degli assi coordinati. Per le componenti E_x , E_y , E_z di \mathbf{E} valgono le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_P - x_Q}{[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2]^{3/2}}, \\ E_y &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_P - y_Q}{[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2]^{3/2}}, \\ E_z &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_P - z_Q}{[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad [2.1.3']$$

Il campo $\mathbf{E}(P)$, che, in base alla [2.1.3], risulta definito in ogni punto non coincidente con Q , è il *campo elettrico* prodotto dalla carica q_1 , fissa nel punto Q ,² una

² Poiché per il momento si considerano solo cariche ferme, esso può essere anche detto *campo elettrostatico*.

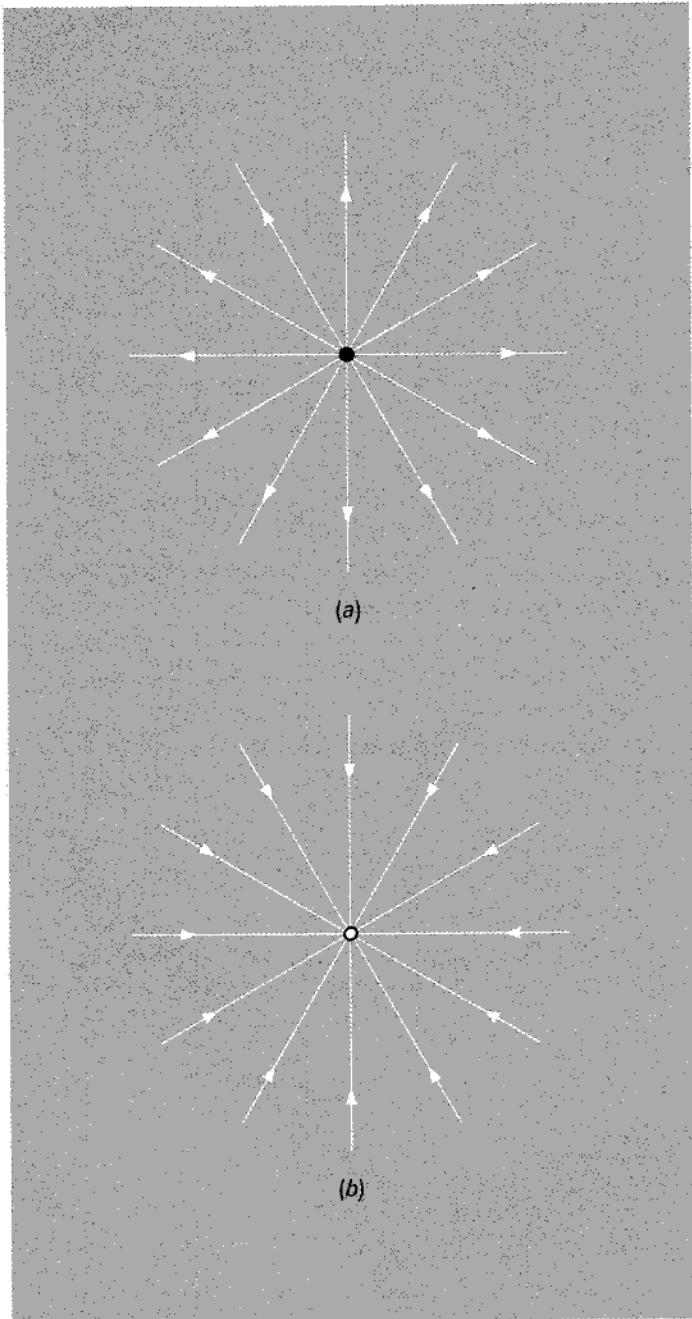


Figura 2.2

Rappresentazione del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme.

sua rappresentazione geometrica mediante linee vettoriali (vedi app. A) è riportata nelle figure 2.2a e b in corrispondenza di $q_1 > 0$ e $q_2 < 0$.

Pur essendo bidimensionale, la rappresentazione grafica è sufficiente a dare un'idea della struttura del campo, che è tridimensionale e a simmetria centrale; d'altronde, ciò appare naturale quando si consideri l'omogeneità e isotropia dello spazio nel sistema di riferimento inerziale nel quale è fissa la sorgente q_1 del campo.

L'unità di misura di E si ricava dalla [2.1.2]; nel Sistema internazionale, essa è data dal newton/coulomb (per una diversa rappresentazione dimensionale vedi p. 66).

La nozione di "campo elettrico", data per il caso di una sola carica-sorgente q_1 , può essere facilmente estesa al caso di un numero qualsiasi di cariche-sorgente. Infatti, se si considerano (nel vuoto) N cariche, q_1, q_2, \dots, q_N , fisse nei punti Q_1, Q_2, \dots, Q_N del nostro riferimento inerziale, la forza esercitata da questo insieme di cariche su una carica q_0 (carica di prova) posta in P , risulta, in base alla legge di Coulomb e al principio di sovrapposizione, pari a

$$\mathbf{F}_0(P) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{k0}(P) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{k0}^2} \mathbf{i}_{k0}. \quad [2.1.4]$$

In virtù della [2.1.4] è ancora possibile scrivere

$$\mathbf{F}_0(P) = q_0 \mathbf{E}(P), \quad [2.1.2']$$

con

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{k0}^2} \mathbf{i}_{k0} = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k(P), \quad [2.1.5]$$

dove si è indicato con $\mathbf{E}_k(P)$ il campo elettrico prodotto dalla sola carica-sorgente q_k posta nel punto Q_k .³

La [2.1.5] esprime il *principio di sovrapposizione per i campi elettrici*, secondo cui:

*Il campo elettrico prodotto da un insieme di cariche fisse nel vuoto è pari alla somma (vettoriale) dei campi prodotti singolarmente da ciascuna delle cariche.*⁴

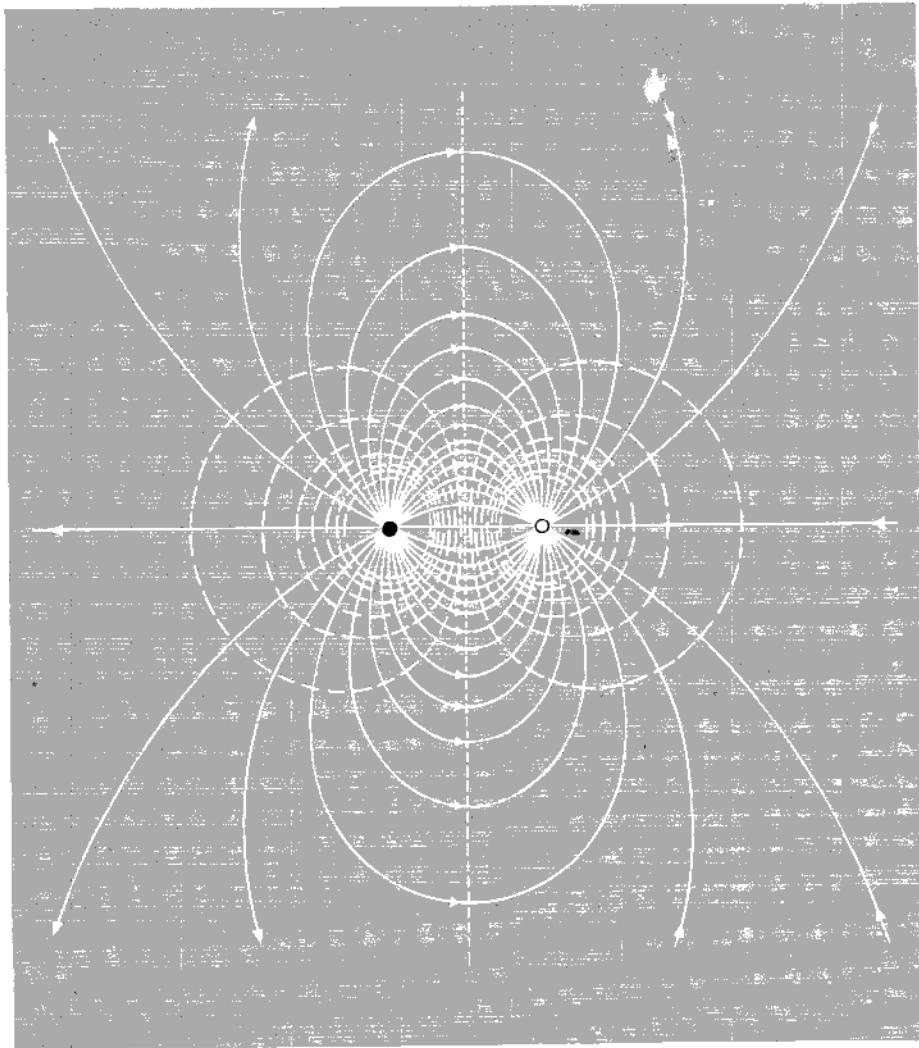
Anche la rappresentazione per linee vettoriali è utilizzabile: nelle figure 2.3a, b, c sono riportati (*linee a tratto continuo*) esempi di questo tipo di rappresentazione.

Se nella data situazione fisica la distribuzione delle cariche-sorgente non è nota a priori, non è possibile utilizzare la [2.1.5] per il calcolo del campo E . D'altra parte, poiché questo verifica la [2.1.2'], può essere misurato direttamente come

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\mathbf{F}_0(P)}{q_0}, \quad [2.1.2'']$$

³ La somma che compare nella [2.1.5] si estende alle sole cariche-sorgente; la carica di prova q_0 è esclusa, non potendo evidentemente esercitare una forza su sé stessa.

⁴ Tale definizione di E si può estendere al caso di un insieme *infinito* di cariche, a patto che le sommatorie nella [2.1.5] si mantengano limitate.



(a)

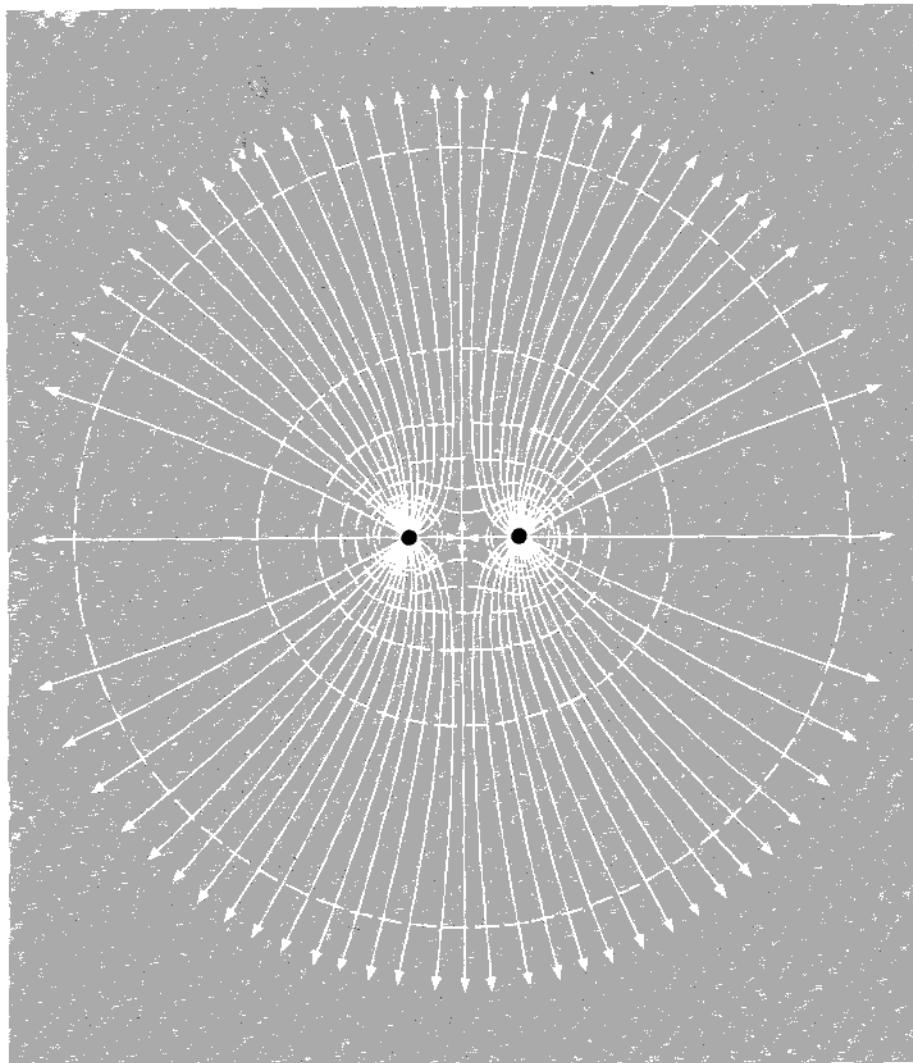
Figura 2.3

Rappresentazione del campo elettrico di più cariche puntiformi: la parte (a) si riferisce al caso di due cariche uguali e di segno opposto; la (b) a quello di due cariche uguali e dello stesso segno; in (c), infine, è raffigurato il campo prodotto da quattro cariche uguali e dello stesso segno.

determinando cioè, punto per punto, il rapporto tra la forza F_0 agente sulla generica carica q_0 e il valore di questa.

A proposito di questa definizione "operativa" del campo si impongono alcune precisazioni.

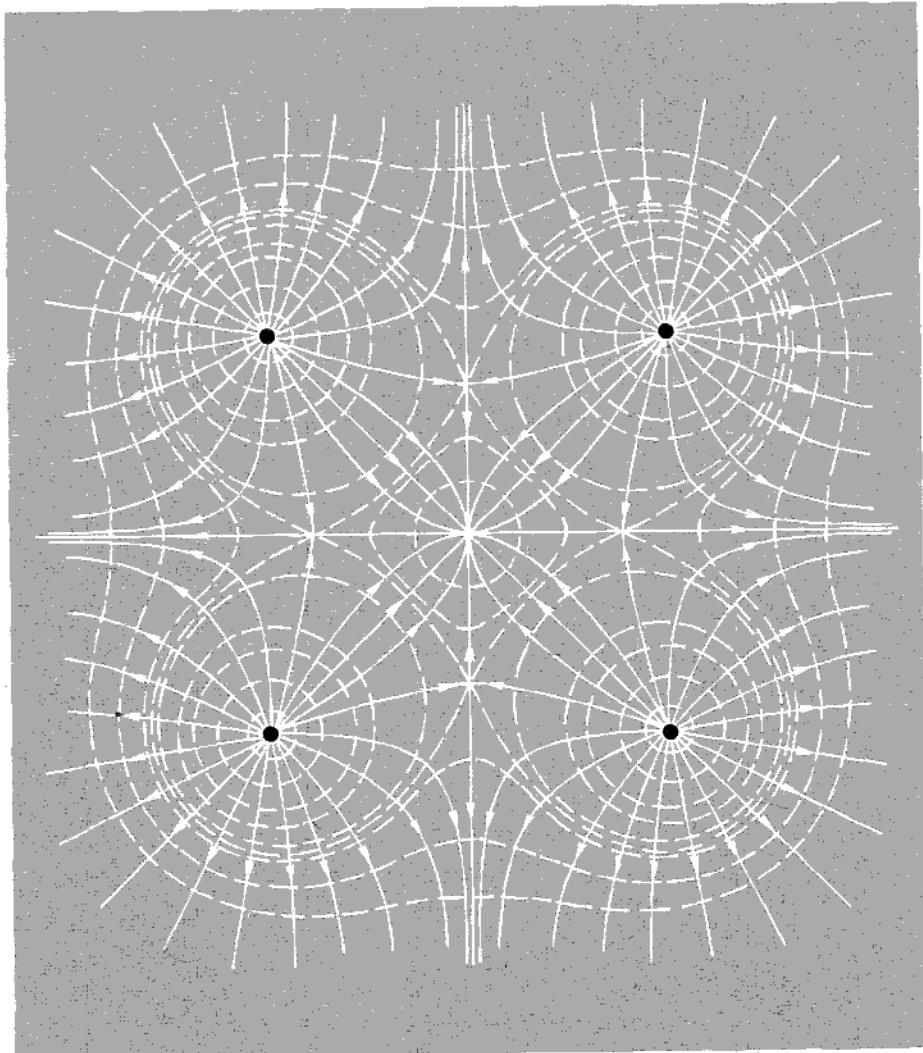
Se tutte le cariche-sorgente restassero fisse nelle loro posizioni, la definizione [2.1.2''] fornirebbe il campo E indipendentemente dal valore della carica esplora-



(b)

trice q_0 . Molto spesso, però, la situazione reale è differente. In genere, in assenza della carica esploratrice, le sorgenti del campo si trovano in equilibrio statico nei corpi circostanti (ad esempio, conduttori). Ora, una carica esploratrice, interagendo con le sorgenti, può modificarne la distribuzione fino al raggiungimento di una nuova situazione di equilibrio. Cosicché la misura del campo mediante la [2.1.2''] fornisce un valore diverso da quello che si potrebbe calcolare mediante la [2.1.5], in assenza di q_0 , una volta nota la distribuzione delle cariche-sorgente.

L'azione di disturbo esercitata dalla carica esploratrice q_0 sulle sorgenti del campo cresce inoltre con il valore della q_0 stessa: al variare di questo, si modifica la distri-



(c)

buzione delle sorgenti, e viene meno perciò la relazione di proporzionalità tra la forza F_0 e la carica q_0 .⁵

Per tutti questi motivi, la definizione operativa del campo elettrico \mathbf{E} viene data solitamente come segue:

$$\mathbf{E}(P) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_0(P)}{q_0}, \quad [2.1.6]$$

⁵ Tale proporzionalità deriva dall'ipotesi che, al variare di q_0 , non mutino le distanze r_{k_0} che compaiono nella [2.1.5].

intendendo, col far tendere a zero il valore della carica esploratrice, annullare il suo effetto di disturbo sulla distribuzione delle sorgenti. Il passaggio al limite va però inteso in senso macroscopico; è sufficiente cioè far decrescere la carica q_0 fino a valori che risultino di gran lunga minori di quelli delle sorgenti: un processo al limite in un'accezione matematica rigorosa non è concepibile, vista la quantizzazione della carica elettrica e la conseguente esistenza di un estremo inferiore dei valori ammissibili per essa (la carica q_e dell'elettrone).

2.2 Distribuzioni continue di cariche

Finora sono state considerate soltanto distribuzioni di cariche concentrate in singoli punti isolati; in molti casi però (come si è accennato a p. 22), pur avendo riguardo alla natura quantizzata della carica, è utile considerare cariche-sorgente distribuite con continuità, e tentare di estendere anche ad esse concetti e leggi esaminati in precedenza.

Cominciamo col considerare, a titolo di esempio, una distribuzione di N cariche puntiformi q , uguali tra loro e ugualmente spaziate lungo un segmento AB (vedi fig. 2.4). Supponiamo poi di aumentare il numero N delle cariche riducendo corrispondentemente il valore di ciascuna di esse in modo che la carica totale $Q = qN$, contenuta nel segmento AB , si mantenga costante. In tal modo, com'è ovvio, la distanza $\delta = L/(N-1)$ tra le cariche contigue diminuisce. Passando al limite per N che tende all'infinito,⁶ si tende a una situazione in cui le cariche sono distribuite con continuità sul segmento AB : comunque si scelga su AB un tratto elementare di lunghezza dx , si trova su esso una carica elementare dq di valore

$$dq = \frac{Q}{L} dx = \lambda dx, \quad [2.2.1]$$

avendo indicato con $\lambda = Q/L$ la *densità lineare di carica*, pari alla carica distribuita sull'unità di lunghezza del segmento AB .

Analogamente, è possibile immaginare situazioni in cui le cariche sono distribuite lungo una generica linea γ con densità lineare⁷

$$\lambda(P) = \left. \frac{dq}{dl} \right|_P, \quad [2.2.2]$$

in generale variabile da punto a punto su γ . La densità lineare così definita ha le dimensioni di una carica per unità di lunghezza e va perciò misurata in C/m.

La carica totale Q distribuita sulla linea γ è data da

$$Q = \int_{\gamma} \lambda(P) dl, \quad [2.2.3]$$

ove il simbolo di integrale indica un'integrazione estesa alla linea γ .

⁶ Si ammette qui che le cariche possano assumere valori arbitrariamente piccoli, ma su ciò torneremo alla fine di questo paragrafo.

⁷ Il simbolo " $|_P$ " indica che la derivata dq/dl è calcolata nel punto P .

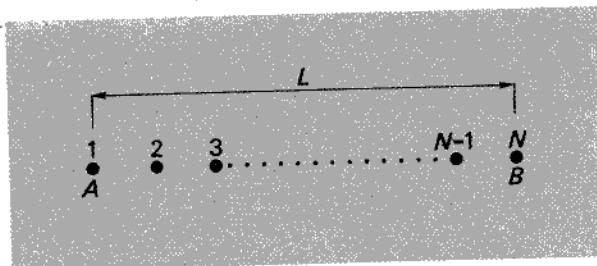


Figura 2.4

Analogamente è possibile concepire situazioni in cui le cariche sono distribuite su superfici oppure entro domini tridimensionali; in corrispondenza, si definiscono una *densità superficiale*

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad [2.2.4]$$

corrispondente alla carica per unità d'area, e una *densità di volume*

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \quad [2.2.5]$$

corrispondente alla carica per unità di volume. Le unità di misura di σ e ρ sono rispettivamente C/m^2 e C/m^3 .

Sulla base di queste definizioni, la carica totale Q distribuita su una superficie S o in un dominio spaziale Ω può essere espressa rispettivamente dalle formule

$$Q = \iint_S \sigma(P) dS, \quad [2.2.6]$$

$$Q = \iiint_{\Omega} \rho(P) d\tau, \quad [2.2.7]$$

dove gli integrali sono da intendere come integrali rispettivamente di superficie e di volume.

Ci si può chiedere ora se queste relazioni consentano di definire il campo non soltanto in corrispondenza dei punti non occupati da cariche (come accade nel caso delle cariche puntiformi concentrate), ma anche in quelli occupati da cariche-sorgente. Per il momento ci limitiamo ad affermare che:

- a) nei punti in cui la carica è distribuita con densità di volume ρ limitata il campo è definito e continuo;
- b) nei punti in cui la carica è distribuita con densità superficiale σ limitata il campo si mantiene limitato, ma presenta una discontinuità di prima specie;
- c) nei punti in cui la carica è distribuita con densità lineare λ limitata il campo diverge (vedi esempio 1).

2.2.1 Significato fisico delle distribuzioni continue di carica

Vogliamo ora chiarire il significato delle distribuzioni introdotte, tenendo conto della natura quantizzata della carica. Consideriamo ad esempio un corpo materiale Ω in cui la carica sia distribuita con densità di volume ρ . Se fosse possibile guardare nell'interno di Ω con una fantastica lente di ingrandimento, si scoprirebbe che a livello subatomico vi è un caos costituito da un enorme numero di cariche pressoché *puntiformi* (gli elettroni e i protoni contenuti in ciascun atomo), separate tra loro da enormi distanze e dotate di moti incessanti. Evidentemente, se si volesse definire la densità di volume ρ partendo dalla [2.2.5] si otterebbe una funzione variabile in modo assai discontinuo da punto a punto e da istante a istante, quasi ovunque e quasi sempre nulla, tranne che in certi punti e in certi istanti (occupati effettivamente da qualche carica) dove invece assumerebbe valori enormi. Quand'anche la definizione fosse possibile, una simile funzione non sarebbe di alcuna utilità per la fisica matematica. Nel definire la densità ρ occorre dunque procedere con cautela.

Nello scrivere la [2.2.5] ci si era riferiti a un processo al limite del tipo

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau},$$

valutando, in corrispondenza al generico "volumetto" $\Delta\tau$, la carica Δq in esso contenuta. Se ora, partendo da una scala macroscopica (ad esempio, dell'ordine del centimetro cubo), si passa a considerare valori sempre più piccoli di $\Delta\tau$, si constata che il rapporto $\Delta q/\Delta\tau$ varia, almeno in generale. Si vede pure, però, che quando $\Delta\tau$ diviene abbastanza piccolo (ad esempio, dell'ordine del millesimo di millimetro cubo), il valore di $\Delta q/\Delta\tau$ tende a stabilizzarsi: la situazione non muta fino a quando $\Delta\tau$ non si riduce a valori tanto piccoli da fare apparire in maniera significativa le discontinuità interatomiche. Chiaramente, affinché il limite sia calcolabile e la funzione ρ così definita abbia il grado di regolarità richiesto dalla fisica matematica, è necessario non spingersi oltre il livello precedentemente indicato, che è quello dell'"infinitesimo fisico".⁸

2.3 Campo elettrico prodotto da una distribuzione qualsiasi di cariche

Consideriamo una situazione in cui la carica sia distribuita in una regione spaziale Ω con densità di volume ρ limitata e variabile, in generale, da punto a punto.

La carica infinitesima dq contenuta in un volumetto elementare $d\tau$ centrato nel generico punto Q (punto-sorgente) è pari a $dq = \rho(Q)d\tau$. Potendo essere considerata puntiforme, essa produce, nel generico *punto-campo* P , un campo elementare (vedi fig. 2.5)

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_{QP}^2} \mathbf{i}_{QP} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(Q)}{r_{QP}^2} d\tau \mathbf{i}_{QP},$$

⁸ Si osservi inoltre che il valore di $\Delta q/\Delta\tau$ è da riguardare come un valore medio, relativo a un intervallo di tempo anch'esso "infinitesimo" in questa accezione: questo al fine di evitare brusche variazioni da istante a istante.

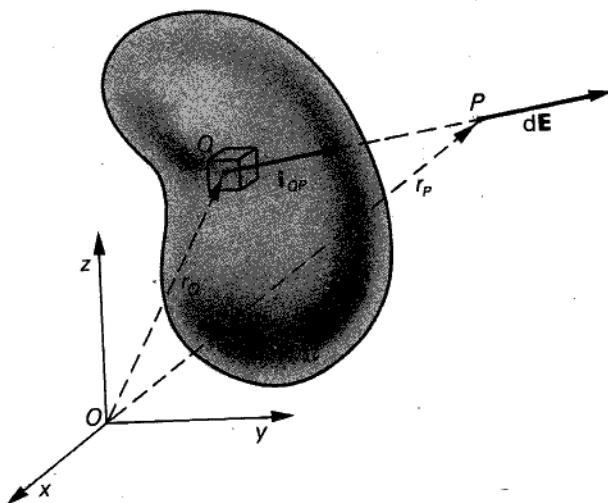


Figura 2.5

ove

$$r_{PQ} = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|.$$

Applicando il principio di sovrapposizione, si conclude che il campo prodotto in P dall'intera distribuzione di carica può scriversi come

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}^2} \mathbf{i}_Q d\tau, \quad [2.3.1]$$

dove l'integrale di volume è esteso alla regione Ω nella quale è definita la densità di carica $\rho(Q)$. In questa espressione la funzione integranda ha carattere *vettoriale* e pertanto l'operazione di integrazione va intesa in senso vettoriale. Ciò appare più chiaramente se ci si riferisce a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali; indicando rispettivamente con x_P, y_P, z_P le coordinate del punto-campo P , con x_Q, y_Q, z_Q quelle del generico punto-sorgente Q e con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi coordinati x, y, z , la [2.3.1], tenendo conto dell'espressione di \mathbf{i}_{QP} in coordinate cartesiane, assume la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_P, y_P, z_P) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(x_Q, y_Q, z_Q) \cdot \\ & \frac{(x_P - x_Q)\mathbf{i} + (y_P - y_Q)\mathbf{j} + (z_P - z_Q)\mathbf{k}}{[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2]^{3/2}} dx_Q dy_Q dz_Q. \end{aligned} \quad [2.3.2]$$

Ragionando in modo analogo si ottengono, per i campi originati da distribuzioni

superficiali e lineari, le seguenti espressioni:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(Q)}{r_{QP}^2} \mathbf{i}_{QP} dS, \quad [2.3.3]$$

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\gamma \frac{\lambda(Q)}{r_{QP}^2} \mathbf{i}_{QP} dl. \quad [2.3.4]$$

E' infine abbastanza semplice verificare (vedi anche § 3.2) che il campo \mathbf{E} prodotto da una distribuzione spazialmente limitata di cariche si annulla, per P tendente all'infinito, almeno come la funzione $1/r_{QP}^2$.

Esempio 1. Distribuzione lineare

Data una distribuzione di cariche disposte con densità uniforme λ lungo una retta l (vedi fig. 2.6), calcoliamo il campo da essa prodotto in un generico punto P non appartenente a l . Per motivi di simmetria, il campo si ripete identicamente su tutti i semipiani del fascio di asse l . Considerato, tra questi, il semipiano che contiene P , sceglieremo un sistema di assi cartesiani con l'asse y coincidente con l e l'asse x pas-

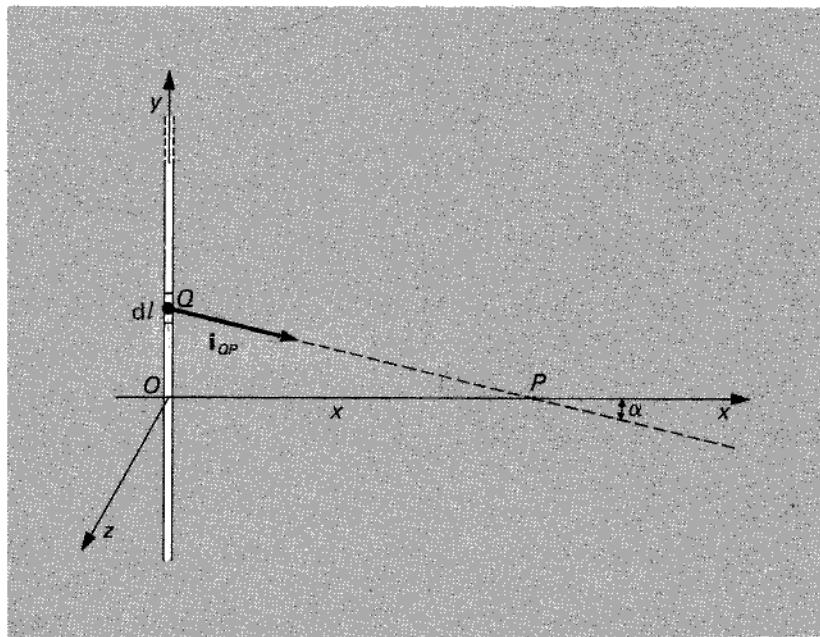


Figura 2.6

Distribuzione lineare di carica: il campo in P viene calcolato come somma vettoriale dei contributi di ogni elemento dL .

sante per P (orientati come in figura). Applicando la [2.3.4], con $dl = dy$, si ha

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{x^2 + y^2} \mathbf{i}_{QP} dy.$$

Le componenti di \mathbf{E} si scrivono come

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} \cos\alpha dy = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy,$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} \sin\alpha dy = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy.$$

L'esame della figura 2.6 mostra che la componente E_y è nulla, poiché per ogni

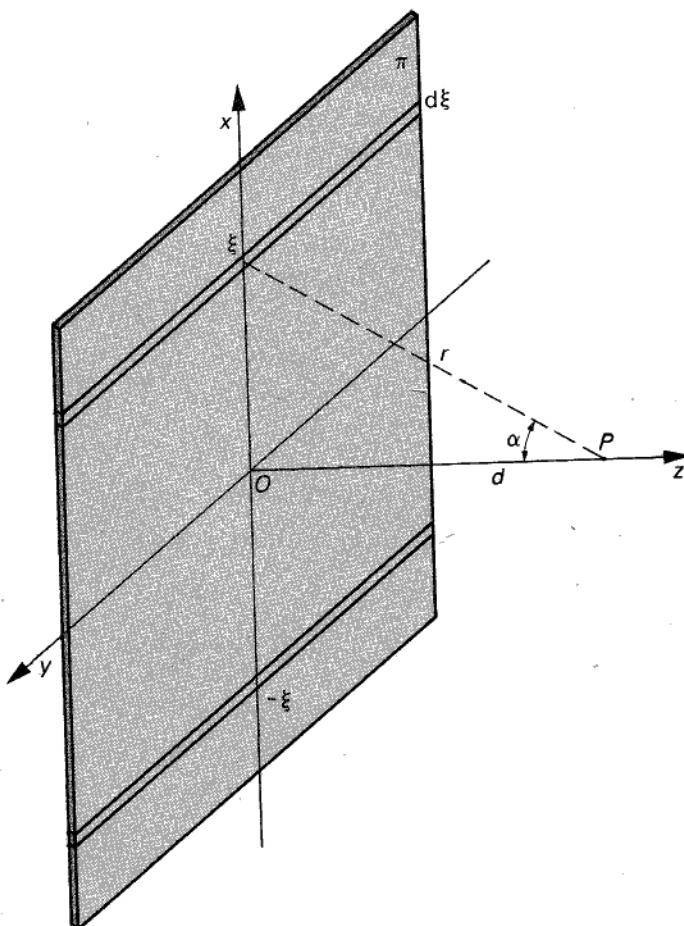


Figura 2.7

carica elementare posta nel generico punto di ordinata y ve n'è un'altra, nel punto di ordinata $-y$, che dà un contributo uguale e contrario al precedente. Per quel che riguarda la E_x , un semplice calcolo mostra che

$$E_x = E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}.$$

Il campo, dunque, diverge in corrispondenza della retta l .

Esempio 2. Distribuzione piana o 'strato piano'

Consideriamo (vedi fig. 2.7) una distribuzione di cariche con densità superficiale σ costante su una superficie piana π indefinita, e calcoliamo il campo da essa prodotto in un generico punto P posto a distanza d dal piano π . Per comodità, sceglieremo un sistema di assi cartesiani con l'asse z normale a π e passante per P e con gli assi x e y orientati come in figura. Considerati poi due "nastri" di cariche di spessore $d\xi$, posti simmetricamente a distanza ξ dall'asse y , si verifica subito, sulla base dei risultati dell'esempio precedente, che il campo da essi prodotto in P è diretto secondo l'asse z e ha modulo pari a

$$dE = 2 \frac{\sigma \cdot d\xi \cdot 1}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha.$$

Integrando tra 0 e ∞ , si ha

$$E = \frac{\sigma d}{\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{d\xi}{d^2 + \xi^2} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

In conclusione, il campo è indipendente dalla distanza del punto P dal piano π : esso risulta uniforme in ciascuno dei due semispazi individuati dal piano π . Nella figura 2.8 è riportato l'andamento della sola componente E_z di \mathbf{E} per sottolineare il fatto che il vettore del campo è uguale, in modulo, dall'uno e dall'altro lato di π , ma ha nei due casi direzioni opposte. Si nota inoltre che la componente E_z , normale al piano π , presenta nei punti di questo una discontinuità

$$[E_z] = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

avendo indicato con $[E_z]$ la differenza tra i valori assunti da E_z a sinistra e a destra di π (vedi le conclusioni del paragrafo precedente).

Esempio 3. Doppio strato piano di cariche

Consideriamo una distribuzione di cariche costituita da due strati piani π_1 e π_2 (del tipo trattato nell'esempio precedente) paralleli tra loro e separati da una distanza d ; siano rispettivamente $+\sigma$ e $-\sigma$ i valori, uniformi in ciascun piano, delle densità di carica distribuite su essi. Sovrapponendo gli effetti, si constata che il campo risultante \mathbf{E} è somma dei campi \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 prodotti separatamente dai due strati piani ed è nullo ovunque, tranne che nella regione compresa tra i piani π_1 e π_2 ; ivi è uniforme, diretto

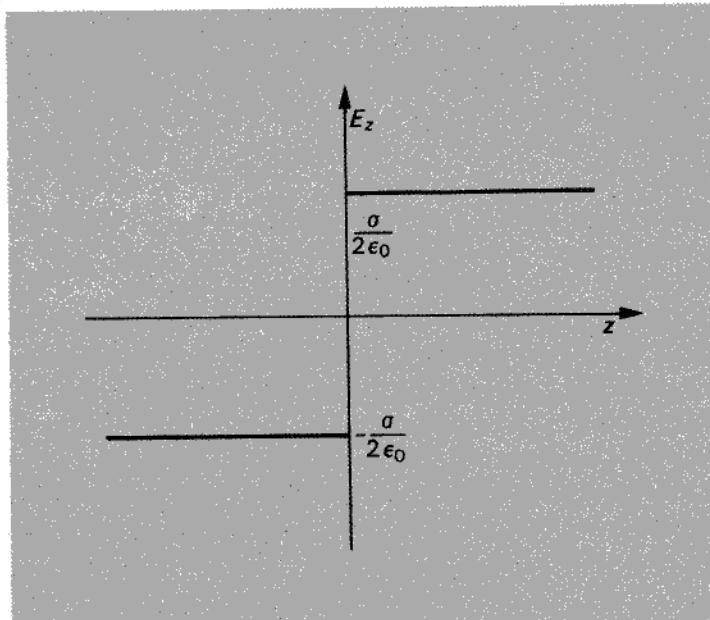


Figura 2.8

lungo l'asse z e di intensità pari a

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Nella figura 2.9 è riportato l'andamento, in funzione di z , della componente E_z : come si vede, anche in questo caso la componente normale ai piani presenta una discontinuità, pari in valore assoluto a σ/ϵ_0 , in corrispondenza di ciascuna delle distribuzioni superficiali. Si verifica dunque, come nell'esempio precedente, che nei punti sede di distribuzioni superficiali di cariche il campo si mantiene limitato, ma presenta una discontinuità.

2.4 Proprietà del campo elettrostatico: il teorema di Gauss

In questo paragrafo e in quello successivo ricaveremo le due proprietà fondamentali dei campi elettrostatici: il *teorema di Gauss* e la *proprietà di irrotationalità*. Ragioneremo per induzione, constatando innanzitutto che esse valgono per il campo di una singola carica puntiforme ed estendendole poi, in virtù del principio di sovrapposizione, al caso di una distribuzione qualsiasi di cariche.

Con riferimento alla semplice situazione riportata nella figura 2.10, consideriamo una superficie sferica Σ (non materiale), che circondi una carica puntiforme q posta nel suo centro. Orientiamo la normale \mathbf{n} a Σ verso l'esterno e calcoliamo il flusso Φ_Σ

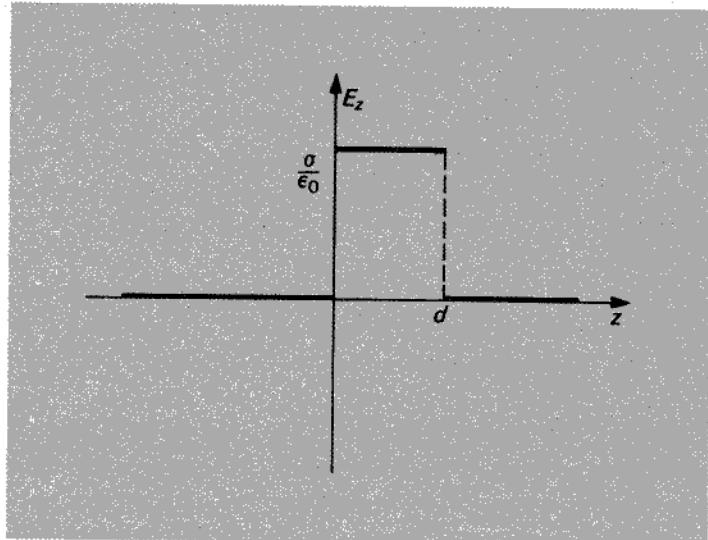


Figura 2.9

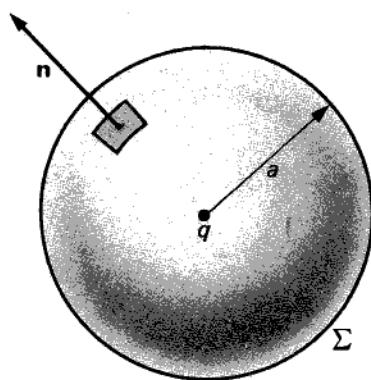


Figura 2.10

del campo elettrico uscente da Σ :⁹

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Osservando che nei punti di Σ il vettore del campo \mathbf{E} prodotto dalla carica q è costante in modulo ed è diretto secondo la normale \mathbf{n} , se ne deduce

$$\Phi_{\Sigma} = E \cdot 4\pi a^2,$$

⁹ Per la nozione di “flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata” vedi l'app. A.

avendo indicato con a il raggio di Σ . Tenendo conto poi della [2.1.3], si ha

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2},$$

e quindi

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad [2.4.1]$$

Si conclude così che il flusso del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme uscente da una superficie sferica centrata nella carica è proporzionale (secondo il fattore $1/\epsilon_0$) al valore della carica, indipendentemente dal raggio della sfera che si considera.

Punto centrale del ragionamento è l'osservazione che, al variare del raggio a della sfera, l'area di questa cresce proporzionalmente ad a^2 , mentre il campo sui punti della superficie sferica diminuisce con a^2 e il flusso uscente da Σ resta perciò costante.

Il *teorema di Gauss per la carica puntiforme* non è che una estensione della proprietà espressa dalla [2.4.1]. Esso afferma infatti:

Il flusso del campo elettrico uscente da una qualsiasi superficie chiusa che contenga la carica è proporzionale (secondo il fattore $1/\epsilon_0$) al valore q della carica stessa, indipendentemente dalla forma e dall'area della superficie.

Per dimostrare il teorema, considerata una generica superficie Σ_1 che contiene Σ (e quindi anche q ; vedi fig. 2.11) basta mostrare che il flusso uscente da Σ_1 è uguale a quello uscente da Σ . A tal fine, consideriamo un generico cono elementare con vertice nella carica q ; esso individua su Σ e Σ_1 , rispettivamente, due areole dS e dS_1 . Detta poi dS'_1 l'area della superficie elementare individuata dal "conetto" sulla su-

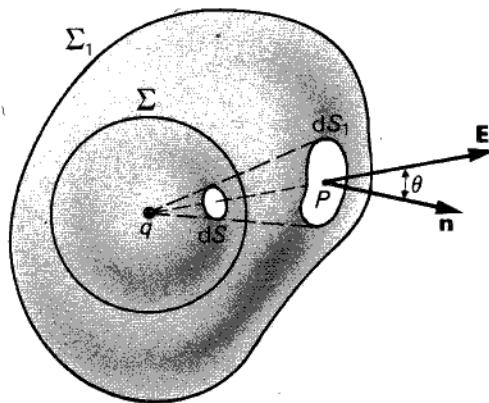


Figura 2.11

perficie sferica centrata in q e passante per il centro P di dS_1 , si ha

$$\frac{dS'_1}{dS} = \frac{r^2}{a^2}, \quad [2.4.2]$$

avendo indicato con r la distanza tra q e p . Indicando poi con θ l'angolo formato tra la normale \mathbf{n} a dS_1 e il campo \mathbf{E} , risulta

$$dS'_1 = dS_1 \cos \theta$$

e quindi, tenendo conto della [2.4.2],

$$dS_1 = dS \frac{r^2}{a^2} \frac{1}{\cos \theta}.$$

Siamo ora in grado di calcolare il flusso elementare di \mathbf{E} attraverso dS_1 :

$$d\Phi_1 = \mathbf{E}(P) \cdot \mathbf{n} dS_1 = E dS_1 \cos \theta.$$

Tenendo conto infine della [2.1.3], si ottiene

$$d\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \frac{r^2}{a^2} \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} dS = d\Phi.$$

Ripetendo il ragionamento per ogni altro “conetto” uscente da q e sommando, si conclude che il flusso di \mathbf{E} uscente dalla generica superficie chiusa Σ_1 è uguale a quello uscente dalla superficie sferica Σ .¹⁰ ■

Come corollario, si deduce che è nullo il flusso di \mathbf{E} uscente da una qualsiasi superficie chiusa non contenente la carica q .

Il teorema di Gauss può essere esteso al caso di una distribuzione qualsiasi di cariche: l'estensione è immediata, quando si consideri che, in base al principio di sovrapposizione, il campo prodotto da un insieme di cariche è pari alla somma (vettoriale) dei campi prodotti dalle singole cariche. Così, se all'interno di una superficie chiusa Σ vi sono N cariche puntiformi q_1, q_2, \dots, q_N , si ha subito

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k,$$

e quindi, in base al teorema di Gauss per la singola carica,

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{k=1}^N \iint_{\Sigma} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q_k.$$

¹⁰ Si potrebbe considerare anche il caso di una superficie chiusa Σ_1 passante per il punto in cui è posta la carica: la conclusione formale è che il flusso di \mathbf{E} uscente da Σ_1 è proporzionale alla carica q secondo il fattore $1/2\epsilon_0$, ma questo caso presenta scarso interesse fisico.

Ragionando in maniera analoga anche nel caso in cui le cariche siano distribuite con continuità all'interno di Σ , si conclude che il flusso di \mathbf{E} uscente da una qualsiasi superficie chiusa Σ è proporzionale (secondo il fattore $1/\epsilon_0$) alla carica totale contenuta nella regione spaziale racchiusa dalla superficie Σ :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad [2.4.3]$$

2.5 Proprietà del campo elettrostatico: la irrotationalità

Ci proponiamo ora di enunciare anche l'altra proprietà fondamentale del campo elettrostatico, quella di irrotationalità, partendo dal caso elementare di una sola carica-sorgente puntiforme. Ritorniamo perciò al campo di una carica *puntiforme* e ricordiamo che, in base alla [2.1.3], esso presenta una struttura di tipo *centrale*, dotata di simmetria sferica.

E' noto dall'analisi vettoriale (vedi § A.12) che tutti i campi di questo tipo godono della proprietà di irrotationalità: comunque si consideri una linea chiusa γ contenuta nella regione di definizione del campo, è nulla, lungo γ , la *circuitazione* di \mathbf{E} :

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = 0. \quad [2.5.1]$$

Osserviamo che il risultato si applica anche per linee che passano per la carica-sorgente, pur di intendere la circuitazione come *valore principale dell'integrale secondo Cauchy* (vedi app. D).

Il significato fisico di questa proprietà è chiaro quando si pensi che, in base alla definizione di \mathbf{E} , il suo integrale di linea è pari al lavoro compiuto dalle forze del campo quando si sposti la carica unitaria positiva lungo la linea stessa. La [2.5.1] afferma dunque che il lavoro compiuto dalle forze del campo nello spostamento della carica unitaria lungo una qualsiasi linea chiusa γ è nullo. In altre parole, se le forze del campo compiono un lavoro positivo lungo un tratto di linea (cioè la carica "cade" nel campo lungo questo tratto), nella rimanente parte della linea chiusa esse compiono lavoro negativo (le forze esterne applicate alla carica la fanno "risalire" contro le forze del campo).

Come è mostrato nell'appendice A, la [2.5.1] può essere espressa in una forma diversa, anche se del tutto equivalente: considerati due punti distinti A e B e due qualsiasi linee γ_1 e γ_2 di estremi A e B , orientate nello stesso modo (ad esempio da A verso B), si ha

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\gamma_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl. \quad [2.5.2]$$

In altre parole, l'integrale del campo \mathbf{E} prodotto da una carica puntiforme *non dipende dalla linea* lungo la quale esso è calcolato, ma soltanto dagli estremi A e B della linea stessa.

Resta ora da estendere la [2.5.1] e la [2.5.2] al caso di una *distribuzione qualsiasi di cariche-sorgente*. La cosa appare semplicissima quando si faccia riferimento al principio di sovrapposizione; considerando, ad esempio, il campo prodotto da un insieme di N cariche puntiformi q_1, q_2, \dots, q_N , si ha subito

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{td}l = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{td}l + \oint_{\gamma} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{td}l + \dots + \oint_{\gamma} \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{td}l, \quad [2.5.3]$$

avendo indicato con $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_N$, i campi prodotti dalle cariche q_1, q_2, \dots, q_N .

D'altra parte, ciascuno degli integrali contenuti nella [2.5.3] è nullo, in base alla [2.5.1]; di qui, la conclusione:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{td}l = 0.$$

L'estensione al caso di distribuzioni continue di cariche è a questo punto ovvia e possiamo concludere senz'altro enunciando la seguente, fondamentale *proprietà di irrotationalità* del campo elettrostatico:

La circuitazione del campo elettrostatico prodotto da una qualunque distribuzione di cariche-sorgente, lungo una qualsiasi linea chiusa, è nulla.

Tale proprietà può essere enunciata, in maniera equivalente, nella forma [2.5.2].

Prima di concludere questo paragrafo, sembra utile soffermarci ancora sul contenuto delle due proprietà esaminate. Lo sviluppo degli argomenti esposti ha mostrato che esse sono una diretta conseguenza della legge di Coulomb e del principio di sovrapposizione, cioè che non contengono alcuna informazione nuova rispetto a queste leggi fisiche. E' vera però anche la proposizione inversa: è possibile mostrare che, se si ammettono validi per un campo di forze il teorema di Gauss e la legge di irrotationalità, tali forze verificano una legge di interazione di tipo coulombiano e il principio di sovrapposizione.¹¹ In conclusione, esiste una completa equivalenza di contenuti tra il teorema di Gauss e la proprietà di irrotationalità da una parte e la legge di Coulomb e il principio di sovrapposizione dall'altra.¹² E' appunto per questo motivo che in molti casi un campo elettrostatico può essere calcolato più agevolmente utilizzando il teorema di Gauss e la proprietà di irrotationalità che non facendo ricorso di-

¹¹ Si noti che anche l'esistenza delle due specie di cariche è contenuta nel teorema di Gauss, quando nel suo enunciato si specifichi che il flusso di \mathbf{E} uscente da una superficie chiusa può essere positivo o negativo.

¹² A rigore, al teorema di Gauss e alla proprietà di irrotationalità occorre anche aggiungere un'informazione circa il "comportamento all'infinito" del campo.

rettamente a espressioni del tipo [2.3.1]. Nel seguito di questo paragrafo, saranno mostrati alcuni esempi interessanti di questo modo di procedere.

Esempio 1. Distribuzione lineare

Riprendiamo in esame l'esempio di una distribuzione lineare di cariche già trattato in precedenza (vedi § 2.3); sia λ la densità lineare di carica, uniforme lungo la retta z (vedi fig. 2.12). Per evidenti motivi di simmetria, il campo si ripete identicamente su tutti i semipiani del fascio di asse z e su tutti i piani ortogonali a z .

Questa semplice constatazione ci consente subito di concludere, in virtù della proprietà di irrotationalità, che nel generico punto P il campo è diretto lungo la normale a z passante per P .

Se infatti il campo avesse una componente E_t (diversa da zero) lungo la tangente alla circonferenza γ (giacente in un piano ortogonale a z) passante per P e con centro su z , tale componente, vista la simmetria, dovrebbe mantenersi costante su γ , e ciò implicherebbe

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_t \cdot 2\pi r \neq 0,$$

in contraddizione con la proprietà di irrotationalità.

Inoltre, tenendo conto anche della condizione di annullamento all'infinito, non può esservi una $E_z \neq 0$ (provvi il lettore a dimostrarlo); essendo infine, per simmetria, il campo indipendente da z , si deduce che esso ha ovunque direzione radiale.

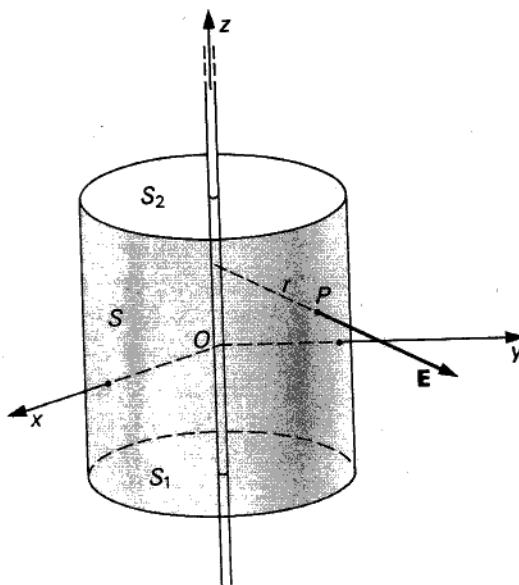


Figura 2.12

Consideriamo ora una superficie cilindrica chiusa Σ di asse z e passante per P : siano S la sua superficie laterale, h la sua altezza e S_1 e S_2 le sue basi. Applichiamo il teorema di Gauss a questa superficie:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_h}{\epsilon_0},$$

avendo indicato con Q_h la carica distribuita sul tratto di z (di lunghezza h) contenuto in Σ . Tenendo conto del fatto che nei punti di S_1 e S_2 il campo \mathbf{E} è tangente a tali superfici, mentre è normale a S nei punti di questa superficie, si conclude agevolmente:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_h}{\epsilon_0}.$$

Essendo inoltre, per simmetria, E uniforme su S e pari alla componente radiale E_r , si conclude

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E_r 2\pi r h = \frac{Q_h}{\epsilon_0},$$

e quindi:

$$E_r = \frac{Q_h}{2\pi\epsilon_0 r h} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Esempio 2. Distribuzione sferica

Consideriamo un insieme di cariche distribuite in una regione sferica di centro O e di raggio a , con densità di volume costante ρ . Semplici considerazioni di simmetria portano a concludere che il campo nel generico punto P è diretto lungo la semiretta spiccata da O e passante per P e inoltre che esso dipende soltanto dalla distanza di P da O . Consideriamo ora la superficie sferica Σ di centro O e raggio r , passante per P , e applichiamo ad essa il teorema di Gauss; otteniamo subito

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} E dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

avendo indicato con Q la carica contenuta all'interno di Σ .

Si ha quindi

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

e si comprende agevolmente che, per $r > a$, risulta

$$Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho;$$

ne segue che, al di fuori della sfera di cariche, il campo ha lo stesso valore che avrebbe se l'intera carica Q fosse concentrata nel centro O della sfera. Per distanze $r < a$, si ha invece

$$Q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

e quindi

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.$$

In definitiva, il campo cresce linearmente con r fino al valore

$$E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2}.$$

Nella figura 2.13 è riportato l'andamento di E in funzione di r . Tutto quanto si è detto porta a concludere che, in un punto P interno alla sfera, il campo è prodotto soltanto dalle cariche contenute nella sfera di centro O e passante per P : tutte le altre cariche danno un contributo globalmente nullo al campo in P . Si nota infine che, per $r=a$, il campo si mantiene continuo, ma la sua derivata è discontinua. (Il lettore ri trovi per esercizio il campo dello strato piano e quello del doppio strato, facendo uso de' teorema di Gauss e della proprietà di irrotazionalità.)

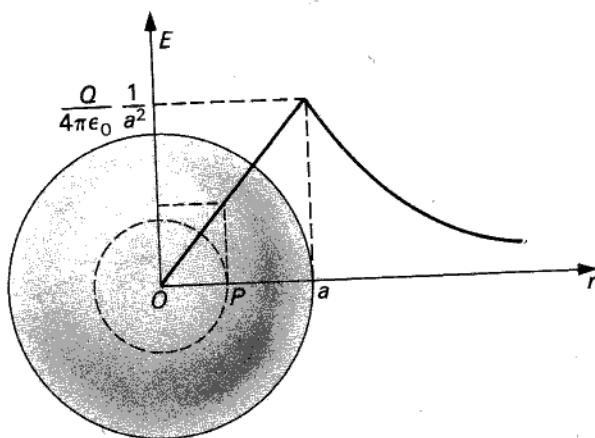


Figura 2.13
Distribuzione sferica di carica di volume, con $\rho = \text{cost.}$: nei punti interni l'andamento del campo elettrico è lineare.

2.6 Le proprietà del campo elettrostatico in forma locale

Le proprietà del campo illustrate nei paragrafi precedenti e riassunte dalle [2.4.3] e [2.5.1] sono espresse in forma *integrale*; esse contengono cioè operazioni di integrazione estese a regioni contenute nel campo.

D'altra parte, osservando che queste proprietà si applicano a superfici e linee di dimensioni comunque piccole, si può arrivare facilmente a enunciarle con riferimento a ciascun punto del campo, cioè, come si suole dire, in forma *locale*. L'utilità di tale formulazione appare chiara quando si pensi che, per il teorema di Helmholtz (vedi app. A), un campo vettoriale è univocamente individuato dalle sue *sorgenti* e dai suoi *vortici* (oltre che, naturalmente, da opportune condizioni al contorno). Nel seguito si mostrerà, appunto, come le due proprietà fondamentali del campo elettrostatico possano essere espresse in forma locale.

Cominciamo con il teorema di Gauss. Consideriamo una situazione in cui le cariche-sorgente siano distribuite con densità di volume $\rho(P)$ in una regione spaziale Ω . La [2.4.3] può scriversi nella forma

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho d\tau, \quad [2.6.1]$$

avendo indicato con Σ la superficie che racchiude la regione Ω . Applicando poi il teorema della divergenza (vedi app. A), si ottiene

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau,$$

e quindi, dalla [2.6.1],

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho d\tau.$$

Si riconosce subito che questa relazione, per il modo stesso in cui è stata ricavata, è valida per ogni regione Ω del campo; ne consegue che in ogni punto deve essere

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad [2.6.2]$$

Espresso in forma locale, il teorema di Gauss afferma dunque:

In ogni punto in cui sia presente una carica distribuita con densità di volume ρ , la divergenza del campo \mathbf{E} è proporzionale ad essa secondo il fattore $1/\epsilon_0$.

Naturalmente, nei punti in cui non esiste carica la divergenza del campo è nulla. Le densità di volume di carica appaiono perciò come "sorgenti" del campo vettoriale \mathbf{E} .

Anche quando la carica è distribuita con *densità superficiale* σ , il teorema di Gauss può essere espresso in forma locale: in tal caso, però, la sua formulazione è diversa dalla [2.6.2]. Infatti, consideriamo una superficie S sulla quale le cariche-sorgente siano distribuite con densità superficiale $\sigma(P)$ (vedi fig. 2.14), e consideriamo inoltre una superficie chiusa infinitesima di tipo cilindrico, con la superficie laterale di area trascurabile rispetto all'area dS di ciascuna base, e con le due basi poste rispettivamente da ambo i lati di S ; in altre parole, consideriamo una "monetina" tagliata longitudinalmente da S .¹³ Orientati i versori normali \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 (alle due basi dS_1 e dS_2) come indicato in figura, cioè in modo che risultino uscenti dalla superficie chiusa considerata, applichiamo il teorema di Gauss. Trascurando il contributo al flusso dato dalla superficie laterale della "monetina" rispetto a quello delle basi, perché infinitesimo di ordine superiore, si ha

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dS, \quad [2.6.3]$$

avendo indicato con \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 i campi che agiscono rispettivamente sulle due basi e con σ il valore della densità superficiale di carica in corrispondenza dell'intersezione tra la superficie S e la "monetina".¹⁴

Scelta ora la normale \mathbf{n} a S coincidente con \mathbf{n}_1 e indicando con E_{n1} e con E_{n2} le componenti di \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 valutate secondo \mathbf{n} , si ha

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = E_{n1} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = -E_{n2}$$

e quindi, dalla [2.6.3],

$$E_{n1} - E_{n2} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma. \quad [2.6.4]$$

Questa relazione costituisce un *nuovo enunciato*, in forma locale, del teorema di Gauss e afferma:

Nei punti del campo in cui sia presente una carica distribuita con densità superficiale $\sigma(P)$, il campo elettrostatico presenta una discontinuità nella componente normale alla superficie su cui è distribuita la carica; la differenza tra i valori della componente normale di \mathbf{E} , considerati dall'uno e dall'altro lato di questa superficie, è proporzionale (secondo $1/\epsilon_0$) al valore di $\sigma(P)$ nel punto considerato.

E' appena il caso di notare che, a causa della discontinuità, la divergenza del campo \mathbf{E} non è definibile (almeno nel senso usuale) nei punti di S .

¹³ Nel seguito ci riferiremo a una superficie elementare di questo tipo come a una "superficie di tipo M". E' appena il caso di sottolineare che il ricorso a questo tipo di superficie elementare è suggerito dalla necessità di studiare il comportamento del campo nelle immediate vicinanze di S , da entrambi i lati della superficie.

¹⁴ Se la carica fosse distribuita con densità di volume all'interno della "monetina", si ridurrebbe a zero quando quest'ultima venisse "schiacciata": è proprio la natura superficiale della distribuzione di carica a far sì che la carica contenuta nella monetina non risenta dell'operazione di schiacciamento.

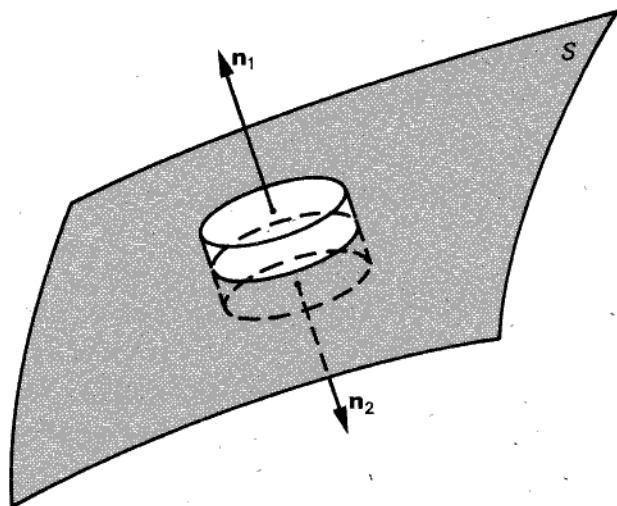


Figura 2.14
Superficie elementare di tipo "M".

Possiamo infine esprimere il teorema di Gauss in forma locale anche nei casi di *distribuzioni lineari* di cariche. Senza entrare in dettagli, ci si convince agevolmente che nel caso di una distribuzione lineare di cariche lungo una linea γ , con densità $\lambda(P)$, il campo \mathbf{E} non è definito in corrispondenza dei punti di γ e la sua componente, E_n , secondo la normale a γ , presenta in corrispondenza di γ una singolarità del tipo $1/r$. Ciò significa che, al tendere di r a zero, cioè man mano che ci si avvicina alla linea γ , la componente E_n cresce indefinitamente, tendendo asintoticamente a un andamento del tipo

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad [2.6.5]$$

dove λ è il valore della densità lineare del punto di γ al quale ci si avvicina facendo tendere r a zero.¹⁵

Abbiamo con ciò completato l'enunciazione del teorema di Gauss in forma locale; resta ora da percorrere un cammino analogo per ciò che riguarda la proprietà di irrotationalità. A tal fine, consideriamo un generico campo elettrostatico \mathbf{e} , in esso, una regione in cui non esistano cariche-sorgente, oppure queste siano distribuite con densità di volume ρ limitata e continua; sappiamo allora che le componenti di \mathbf{E} sono continue con derivate prime continue e vale quindi il teorema di Stokes (vedi app. A):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS, \quad [2.6.6]$$

¹⁵ Le distribuzioni lineari determinano quindi una condizione al contorno di tipo *asintotico* per il campo.

dove γ è una qualsiasi linea chiusa orientata e S è a sua volta una qualsiasi delle superfici che hanno γ come orlo (orientata in maniera congruente con γ). Sappiamo d'altra parte, in base alla irrotazionalità di \mathbf{E} , che, comunque si scelga la linea chiusa γ , risulta per essa

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = 0. \quad [2.6.7]$$

Dalle [2.6.6] e [2.6.7], tenuto conto della arbitrarietà di γ , discende

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad [2.6.8]$$

Tale relazione esprime, in forma locale, la proprietà di irrotazionalità in tutti i punti del campo in cui non esistano cariche, oppure ove queste siano distribuite con densità di volume ρ continua e limitata.

Consideriamo ora una superficie S su cui la carica sia distribuita con densità superficiale σ , oppure una superficie in corrispondenza della quale la densità di volume ρ si mantenga limitata, ma sia discontinua. Nel primo caso, sappiamo dalla [2.6.4] che la componente del campo normale a S presenta una discontinuità nei punti di S ; nel secondo, che essa si mantiene continua, ma non è derivabile (vedi esempio 2 del paragrafo precedente).

In ambedue i casi il rotore del campo \mathbf{E} non può essere calcolato (almeno nella maniera usuale) nei punti di S , e non può perciò applicarsi la [2.6.8]. Anche in questi casi possiamo però esprimere in maniera semplice la proprietà di irrotazionalità. Considerata infatti una linea chiusa rettangolare γ del tipo indicato nella figura 2.15, tale cioè che la lunghezza l delle basi sia molto maggiore dell'altezza h (d'ora in poi, chiameremo queste curve "linee T"), la proprietà di irrotazionalità assume per essa la forma

$$\int_{l_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{h_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{h_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{l_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = 0.$$

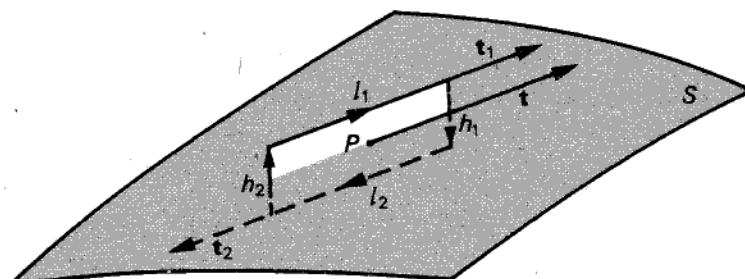


Figura 2.15
Superficie elementare di tipo "T".

Se ora facciamo tendere a zero le dimensioni del rettangolo in maniera che risulti comunque

$$l \gg h,$$

i due integrali relativi a h_1 e h_2 possono essere trascurati rispetto agli altri due (perché infinitesimi di ordine superiore) e possiamo pertanto scrivere

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_1 dl + \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_2 dl = 0,$$

avendo indicato con \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 i versori delle tangenti a γ lungo le due "basi" l_1 e l_2 .

Se ora indichiamo con E_{t1} e E_{t2} le componenti tangenziali di \mathbf{E} (calcolate entrambe lungo la tangente \mathbf{t} a S in P), si ha¹⁶

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_1 = E_{t1} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_2 = -E_{t2}$$

e quindi:

$$E_{t1} = E_{t2}. \quad [2.6.9]$$

Riassumendo, possiamo affermare che in corrispondenza dei punti di S le componenti di \mathbf{E} tangenziali alla superficie si mantengono continue nel passaggio da un lato all'altro della superficie stessa.

Per quel che riguarda, infine, le distribuzioni lineari di carica, ragionamenti analoghi ai precedenti portano a concludere che la componente tangenziale alla linea γ su cui è distribuita la carica tende assintoticamente, avvicinandosi a γ , a un andamento del tipo $(1/2\pi\epsilon_0)\lambda' \ln r$ (dove λ' è la derivata di λ lungo γ).

Si ha quindi

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{E_t}{E_n} = 0, \quad [2.6.10]$$

avendo indicato con E_t la componente di \mathbf{E} lungo la tangente a γ e con E_n quella normale.

Ne consegue che nelle "immediate vicinanze" di una distribuzione lineare di carica, il campo risulta "perpendicolare" alla linea stessa.

Per concludere, presentiamo un quadro riassuntivo delle proprietà fondamentali del campo elettrostatico, espresse in forma locale:

a) punti in cui non esiste carica:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

b) punti in cui la carica è distribuita con densità di volume ρ limitata e continua:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = (1/\epsilon_0)\rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

¹⁶ Si osservi che \mathbf{t} è parallelo ed equiverso a \mathbf{t}_1 .

- c) punti in cui la carica è distribuita con densità superficiale σ limitata e continua:
$$\begin{cases} E_{n1} - E_{n2} = (1/\epsilon_0)\sigma \\ E_{n1} = E_{r2} \end{cases}$$
- d) punti P_0 in cui la carica è distribuita con densità lineare λ limitata e continua:
$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} E_n = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \\ \lim_{r \rightarrow 0} E_t = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln r. \end{cases}$$

Per quel che riguarda punti in cui siano localizzate cariche puntiformi isolate, si è già visto in precedenza che il campo presenta ivi una singolarità del tipo “ $1/r^2$ ”. Altri casi, che pure possono presentarsi, vanno trattati singolarmente.

Esperienze illustrate

1. Esperienza di Plimpton e Lawton

Si è già visto in precedenza, sulla base del teorema di Gauss, che, dato un insieme di cariche distribuite con densità superficiale σ uniforme su una superficie sferica Σ di raggio R , il campo elettrostatico all'interno della sfera è in ogni punto *nullo*. D'altra parte, il teorema di Gauss è una diretta conseguenza del fatto che il campo E è inversamente proporzionale al quadrato di r . Se dunque l'esponente di r (a denominatore della legge di Coulomb) non fosse esattamente due, il campo all'interno dello strato sferico Σ non sarebbe nullo in ogni punto.¹⁷

L'esperienza di Plimpton e Lawton (risalente al 1936), diretta appunto a verificare che l'esponente della legge di Coulomb è due, si basa sulla precedente osservazione.

Nella figura 2.16 è riportato uno schema di principio dell'apparato utilizzato: una sfera metallica Σ_{est} , del diametro di circa 1,5 m, contiene al suo interno una seconda sfera Σ_{int} , anch'essa conduttrice. All'interno di Σ_{int} è disposto uno strumento E capace di rivelare il passaggio di una carica elettrica, anche piccolissima, che lo attraversi. Il cannocchiale C e lo specchio S consentono di osservare il quadrante di E . Comunichiamo alla sfera Σ_{est} una carica elettrica Q ; se l'esponente nella legge di Coulomb fosse diverso da due, esisterebbe all'interno di Σ_{est} un campo non nullo, che farebbe fluire, attraverso i sottili fili conduttori f_1 e f_2 e lo strumento E , una frazione di Q da Σ_{est} a Σ_{int} ; in tali condizioni, un passaggio di carica sarebbe rivelato da E . Le misure effettuate con tale dispositivo hanno consentito di stabilire che l'esponente di r nella legge di Coulomb è compreso tra 1,999 999 998 e 2,000 000 002.

2. Esperienza di Millikan

Questa celebre esperienza del 1911 consente di effettuare una misura diretta della carica elettrica elementare posseduta dall'elettrone. Il dispositivo utilizzato è rappresentato schematicamente nella figura 2.17. Tra due lastre conduttrici L e L' (armature) è creato, mediante un generatore G (vedi cap. 6), un campo elettrico E (rivolto verso il basso) la cui intensità è regolabile entro limiti opportuni. Il nebulizzatore P

¹⁷ Non sarebbe difficile verificare questa asserzione anche direttamente, senza far uso del teorema di Gauss.

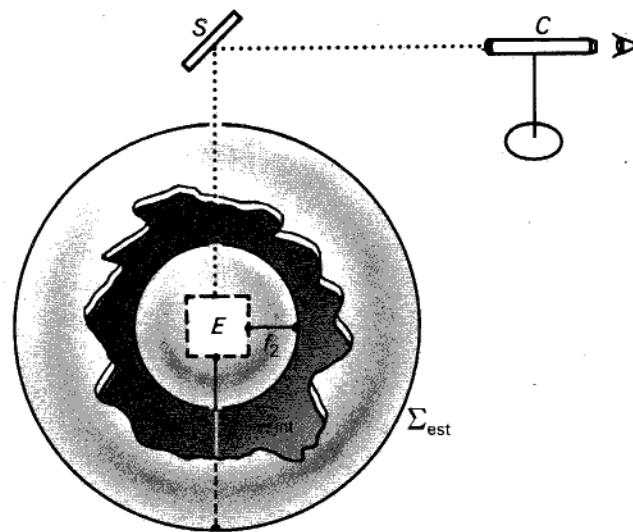


Figura 2.16
Schema dell'esperienza di Plimpton e Lawton.

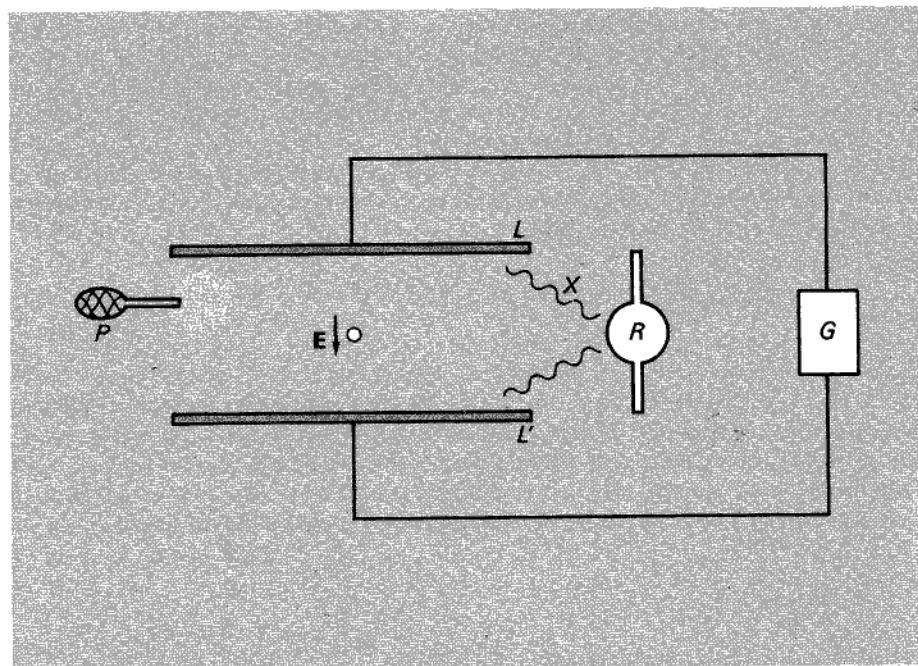


Figura 2.17
Schema dell'esperienza di Millikan.

consente di produrre goccioline microscopiche di qualunque sostanza, ad esempio, olio o mercurio: per effetto della gravità, le goccioline cadono tra le armature, frenate dall'aria. Durante la caduta, i raggi X prodotti da un opportuno tubo Röntgen investono le goccioline caricandole elettricamente. La forza agente su ciascuna di esse è pari a $F = qE$, se q è la carica posseduta dalla goccia; tale forza, per un opportuno valore di E , può bilanciare esattamente l'azione del peso, conformemente alla

$$mg = qE,$$

avendo indicato con m la massa della goccia e con g l'accelerazione di gravità. In queste condizioni, la goccia resta sospesa, senza cadere: la conoscenza di m ed E consente di misurare la carica q della goccia. Effettuando ripetutamente la misura della carica portata dalle singole goccioline, Millikan ebbe modo di verificare che i risultati erano sempre multipli interi del valore

$$e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

[1]

e ne dedusse che questo è il valore della carica elementare.

3. Sulla ricerca dei quark

Esperienze volte a rivelare l'esistenza dei quark sono in corso in molti laboratori del mondo. Tra esse è possibile distinguere: a) quelle relative alla produzione di quark mediante grandi macchine acceleratrici di particelle (vedi cap. 7, Esperienze illustrate) oppure usufruendo della componente di alta energia dei raggi cosmici; b) quelle volte a rivelare la presenza di eventuali quark nella materia che ci circonda. Le prime hanno finora dato esito negativo, mentre per quanto riguarda le seconde vi è ancora incertezza nell'interpretazione dei risultati, che in certi casi sembrano confermare, in altri smentire, l'ipotesi dell'esistenza dei quark.

Tra le esperienze del tipo (b), ricordiamo quella realizzata presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Genova dal gruppo di Morpurgo nel 1965; notevolmente migliorata rispetto alla prima versione, essa è tuttora in atto. L'idea centrale dell'esperienza è la seguente.

Supponiamo di poter disporre di un qualche granellino di materia in grado di oscillare, a mo' di pendolo, lungo un arco di circonferenza (vedi fig. 2.18), senza però essere sospeso a un filo; come si possa realizzare in pratica questa levitazione diremo tra un istante. Com'è ovvio, il granellino si disporrà nella posizione più bassa (P nella fig. 2.18). Collochiamo ora in A e B due placchette e inseriamo un campo elettrico E lungo l'asse x applicando ad A e B una differenza di potenziale. Supponiamo, per il momento, il campo elettrico rigorosamente uniforme. Se il granello è carico, esso, sotto l'azione del campo elettrico, si sposterà andando in una nuova posizione di equilibrio P' . E' facile vedere che il suo spostamento δ è dato dalla formula

$$\delta = \frac{qE}{mg} R;$$

q ed m sono la carica e la massa del granello, E è il campo elettrico, g è la costante di gravità ed R è il raggio di curvatura della circonferenza lungo la quale il granello oscilla. Poiché E viene mantenuto fisso durante le misure su un dato granello e m, g, R sono

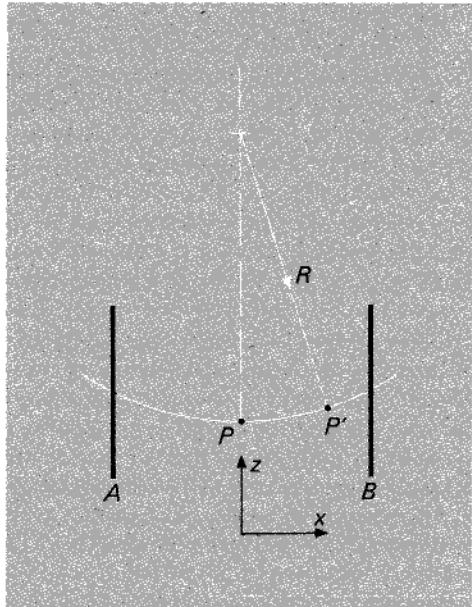


Figura 2.18

costanti, si può scrivere

$$\delta = Kq,$$

essendo K una costante caratteristica del granello. Se a questo punto il granello si ionizza, esso viene ad acquistare una diversa carica q' e il suo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio avrà un nuovo valore δ' ($\delta' = Kq'$). Continuando con le ionizzazioni, se le cariche q_i via via assunte sono rappresentabili con la formula

$$q_i = n_i e,$$

dove e è la carica unitaria, i vari spostamenti δ_i sono rappresentati dalla formula

$$\delta_i = K n_i e.$$

Se invece il granello contiene, nel suo interno, un quark, le cariche sono rappresentate dalla formula

$$q_i = \left(n_i \pm \frac{1}{3} \right) e$$

e gli spostamenti, di conseguenza, sono dati da

$$\delta_i = K \left(n_i \pm \frac{1}{3} \right) e.$$

I due casi sono molto diversi: nel primo una serie tipica di spostamenti, in unità arbitrarie, è 20, 10, 0, -10, -20; nel secondo, una serie tipica potrebbe essere +28, +16, +4, -8, -20. Nel secondo caso lo spostamento nullo (assenza di carica sul granello) è impossibile. Possiamo anche dire che ogniqualvolta, durante la serie delle

ionizzazioni, si osserva che il nostro granello possiede carica nulla, esso certamente non può contenere un quark.

Dobbiamo ora spiegare in qual modo i nostri granelli levitano nel modo descritto. Ciò è molto semplice e si basa sul fatto che una larga classe di sostanze, le sostanze diamagnetiche (vedi cap. 8), invece di essere attirate da un magnete, come succede per il ferro, ne vengono respinte. Naturalmente questa forza repulsiva è molto debole, inferiore di parecchi ordini di grandezza rispetto a quella che si esercita sulle sostanze ferromagnetiche: ma è sufficiente per i nostri scopi. Consideriamo dunque un granello di una sostanza diamagnetica ed esaminiamo la forza che su di esso si esercita quando viene portato, procedendo dall'alto verso il basso, tra le espansioni polari di un magnete sagomato come nella figura 2.19a. Man mano che si procede verso il basso cresce la forza repulsiva dovuta alle due espansioni polari, forza che tende ad impedire l'ulteriore avvicinamento del granello; ad una certa quota, questa forza controbilancia esattamente la forza di gravità, diretta verso il basso, ed il granello non può cadere. È facile anche rendersi conto che la stessa forza magnetica è in grado di impedire al granello di avvicinarsi all'uno o all'altro polo: in definitiva il granello si muove nel piano mediano tra i due poli lungo una circonferenza la cui curvatura è essenzialmente determinata dalla sagomatura dei bordi superiori delle espansioni polari (vedi fig. 2.19b).

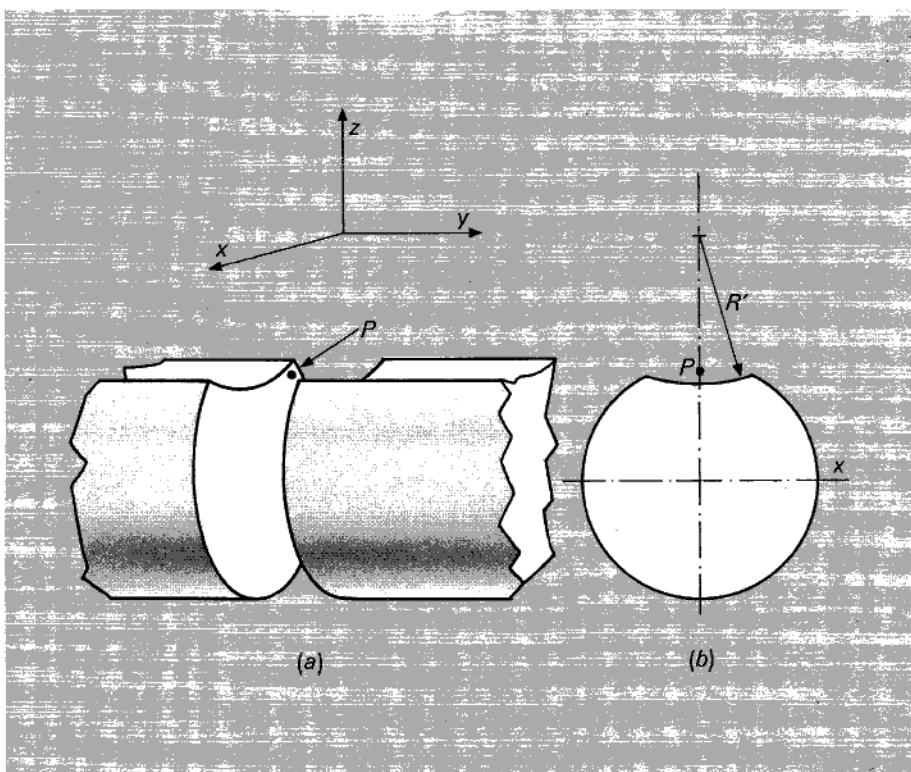


Figura 2.19

Come sostanza diamagnetica da impiegare, quella di gran lunga più conveniente è la grafite, in quanto il suo diamagnetismo specifico è assai superiore a quello di tutte le altre sostanze note (a temperatura ambiente).

Esercizi

1. Considerate due cariche puntiformi, di valore q e $-2q$, poste a distanza d , calcolare il campo \mathbf{E} nel punto O (centro del segmento che congiunge le due cariche) e nel punto O' , situato ad altezza h sull'asse dello stesso segmento.
2. Con riferimento alle stesse cariche del problema precedente, disegnare qualitativamente l'andamento delle linee vettoriali: in che cosa differiscono da quelle della figura 2.3a?
3. Disegnare qualitativamente l'andamento delle linee vettoriali del campo \mathbf{E} prodotto da tre cariche uguali poste ai vertici di un triangolo equilatero.
4. Considerato un segmento AB di lunghezza L , sul quale sia distribuita una carica con densità lineare $\lambda = \lambda_0 x/L$ (con λ_0 costante assegnata e x distanza da A del generico punto P), calcolare il valore della carica totale Q esistente su AB .
5. Con riferimento al problema precedente, tracciare il grafico della funzione $Q(x)$ che esprime, per ogni x , la carica contenuta nel segmento AP .
6. Considerato un disco circolare di raggio R sul quale sia distribuita una carica con densità superficiale σ data da $\sigma = \sigma_0 r/R$ (con r distanza dal centro del disco), calcolare il valore della carica totale Q esistente sul disco.

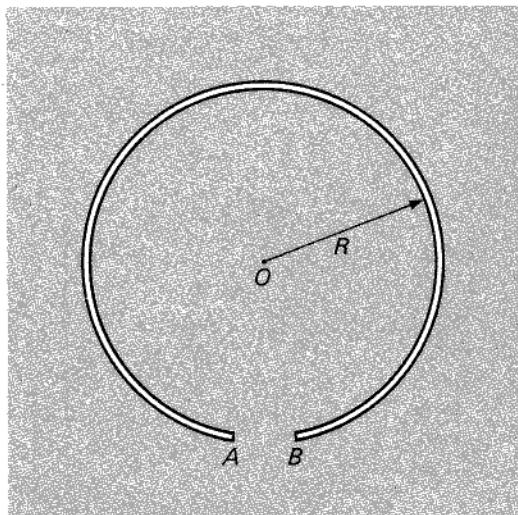


Figura 2.20

7. Considerata una sfera di raggio R entro la quale sia distribuita una carica con densità di volume ρ data da

$$\rho = \rho_0 \frac{r}{R}$$

calcolare la carica totale contenuta nella sfera.

8. Con riferimento al problema precedente, calcolare il campo E fuori e dentro la sfera.

9. Un'asticciola di plastica è piegata a forma di circonferenza, come nella figura 2.20; il raggio R è di 1 m, mentre la distanza tra gli estremi A e B è di 1 cm. Supponendo che l'asticciola porti una carica totale positiva di $1\mu C$, uniformemente distribuita, calcolare il campo nel centro O .

10. Una carica puntiforme q si trova in uno dei vertici di un cubo di lato l : calcolare il flusso di E attraverso ciascuna faccia del cubo.

(*Suggerimento.* Si cominci a considerare una carica posta nel centro di un cubo e si tenga conto della simmetria del sistema.)

11. Nella figura 2.21 sono rappresentate le tracce di due strati piani di cariche (perpendicolari al foglio) di spessore δ e dotati di densità di carica di volume uniforme ρ e $-\rho$. Calcolare il campo E in ogni punto.

12. Nella figura 2.22 O rappresenta la traccia di una distribuzione lineare rettilinea e indefinita, perpendicolare al foglio; se λ è la densità lineare di carica, uniforme, calcolare il lavoro compiuto dal campo per spostare la carica positiva di 1 C da A a B lungo il segmento γ .

13. Con riferimento al problema precedente, verificare che il lavoro compiuto dal campo lungo la linea chiusa $ABCD$ è nullo (vedi fig. 2.23).

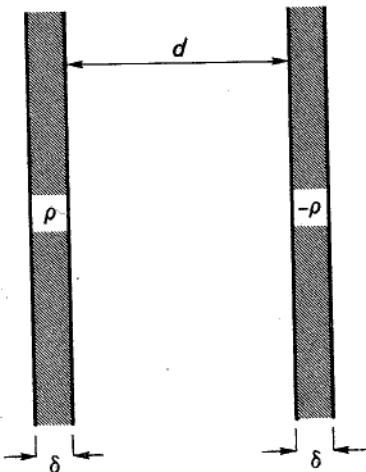


Figura 2.21

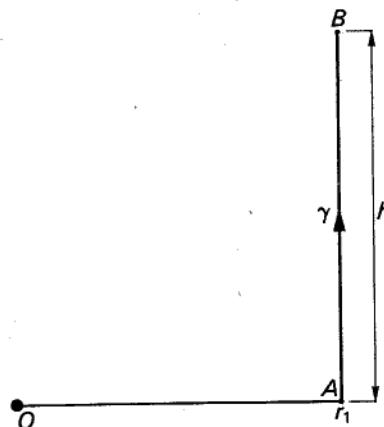


Figura 2.22

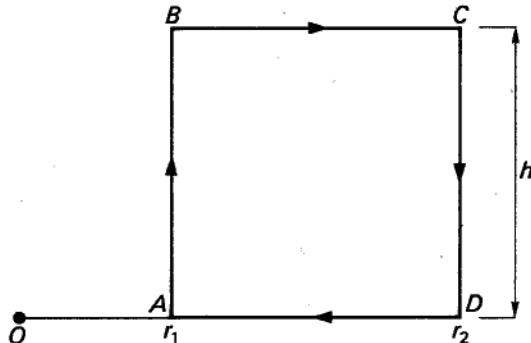


Figura 2.23

14. Il campo elettrico esistente in una regione ha, in coordinate cartesiane, l'espressione

$$\mathbf{E} = (-2xy + 3z)\mathbf{i} - (x^2 + 2z^2)\mathbf{j} + (3x - 4yz)\mathbf{k}.$$

Verificare che in ogni punto del campo $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ e calcolare la divergenza del campo.

15. Con riferimento al campo dell'esercizio precedente, calcolare l'integrale di linea di \mathbf{E} dal punto $A(1, 0, 0)$ al punto $B(0, 1, 0)$ lungo la linea γ indicata nella figura 2.24. Verificare, inoltre, che l'integrale di \mathbf{E} esteso al segmento γ_1 ha lo stesso valore.

16. Ancora con riferimento al campo descritto nell'esercizio 14, calcolare il flusso di \mathbf{E} attraverso il rettangolo $ACBO$, orientato secondo l'asse z .

17. Sempre con riferimento al campo precedente, valutare il flusso di \mathbf{E} attraverso il triangolo ABC , orientato secondo l'asse z .

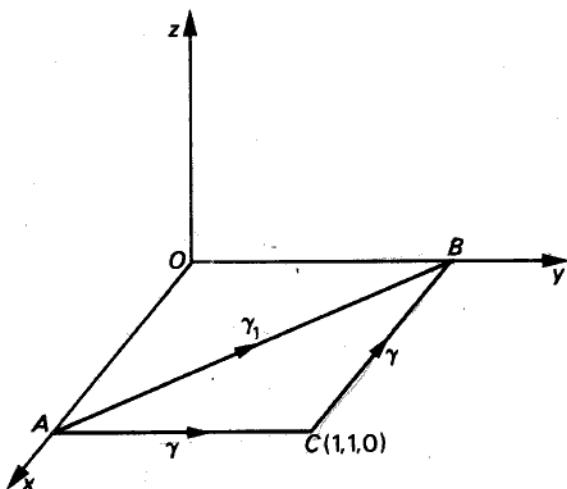


Figura 2.24

18. Il campo elettrico esistente in una regione dello spazio ha, in coordinate sferiche, l'espressione

$$\mathbf{E} = 2(\varphi - r\theta) \mathbf{i}_r - \left(r + 2 \frac{\theta \varphi}{r}\right) \mathbf{i}_\theta + \frac{2r - \theta^2}{r \sin \theta} \mathbf{i}_\varphi,$$

avendo indicato con i simboli \mathbf{i}_r , \mathbf{i}_θ , \mathbf{i}_φ i versori degli assi coordinati. Verificare che in ogni punto della regione $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ e calcolare la densità di volume di carica in ogni punto.

19. Considerato un cilindro circolare retto indefinito di raggio R , entro il quale sia distribuita una carica con densità di volume $\rho = \rho_0 r^2/R^2$, essendo r la distanza dall'asse del cilindro), calcolare il campo elettrico nell'intero spazio.

(*Suggerimento.* Applicare il teorema di Gauss a una superficie cilindrica coassiale con il cilindro dato e chiusa da due basi ortogonali all'asse.)

20. Considerato un cilindro circolare retto cavo, di raggio interno R_{int} ed esterno R_{est} , e detta $\rho = \rho_0 R^2/r$ la densità di volume di carica ivi esistente ($R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}}$), calcolare il campo elettrico prodotto nell'intero spazio.

21. Nella regione $|x| \leq 1$, $0 < y \leq 1$, $|z| \leq 1$, esiste il campo elettrico dell'esercizio 14; ammesso che nella regione $|x| \leq 1$, $-1 \leq y < 0$, $|z| \leq 1$ esista il campo (in coordinate cartesiane)

$$\mathbf{E} = (3z + xy) \mathbf{i}_x + \left(\frac{x^2}{2} + z^2\right) \mathbf{i}_y + (3x + 2yz) \mathbf{i}_z,$$

calcolare la densità superficiale di carica esistente sul piano xz , per $|x| \leq 1$ e $|z| \leq 1$.

(*Suggerimento.* Vedi § 2.6).

22. Con riferimento all'esercizio precedente, verificare che le componenti tangenti del campo elettrico sono continue in corrispondenza del piano xz .

23. Considerato un guscio sferico, di raggio interno R_{int} ed esterno R_{est} , detta $\rho = \rho_0 R_{\text{est}}/r$ la densità di carica volumetrica esistente nel guscio ($R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}}$), calcolare il campo elettrico nell'intero spazio.

(*Suggerimento.* Applicare il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con quella data.)

24. Un campo elettrostatico ha componenti cartesiane in una certa regione Ω , date da

$$\begin{cases} E_x = 2 \frac{xy}{z}, \\ E_y = \frac{x^2}{z}; \end{cases}$$

calcolare la terza componente, E_z .

(*Suggerimento.* Imporre la condizione di irrotationalità.)

25. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la densità di volume di carica esistente in Ω .

26. Può un campo elettrostatico avere linee vettoriali rettilinee e parallele a una direzione z e modulo variabile con x e y ?

Capitolo 3

Il potenziale elettrostatico

3.1 I potenziali della carica puntiforme

In questo capitolo, utilizzando le proprietà del campo, introdurremo una nuova grandezza, il *potenziale elettrostatico*, che, oltre a semplificare i calcoli, si presta agevolmente alla soluzione di problemi in cui non sia nota in partenza la distribuzione delle sorgenti.

Consideriamo inizialmente il caso di una sola carica-sorgente puntiforme. Data la sua struttura centrale e simmetrica, il campo \mathbf{E} della carica può essere espresso come *gradiente di una funzione scalare* (vedi § A.10). In particolare, se introduciamo una funzione scalare $V(P)$ ¹ definita dalla

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C \quad [3.1.1]$$

(avendo indicato con r la distanza tra il generico punto P e il punto Q in cui è localizzata la carica q e con C una costante arbitraria), risulta

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{i}_{QP} = -\text{grad } V(P). \quad [3.1.2]$$

Ogni funzione del tipo [3.1.1] costituisce dunque un potenziale scalare (vedi § A.11) del campo prodotto dalla carica puntiforme.

Vista l'arbitrarietà della costante C che appare nella definizione di $V(P)$, essa può essere scelta in modo che il potenziale V assuma valore nullo in un qualsiasi assegnato punto del campo, purché non coincidente con Q . Volendo infatti che il potenziale si

¹ In questo caso si è indicata con P , sinteticamente, la terna ordinata r, θ, φ che fornisce le coordinate sferiche del generico punto P .

annulli in corrispondenza di un particolare punto P_0 (diverso da Q), basta porre

$$C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0},$$

avendo indicato con r_0 la distanza di P_0 da Q .

In particolare, si può notare che, tra tutti i potenziali espressi dalla [3.1.1], uno soltanto verifica la condizione di annullamento all'infinito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0. \quad [3.1.3]$$

Esso è quello che corrisponde al valore nullo della costante; naturalmente, ove non ricorrono ragioni specifiche contrarie, riesce comodo assumere proprio tale funzione come potenziale del campo. Ad essa si dà il nome di *funzione di Green* corrispondente alle *condizioni normali all'infinito*. La funzione V assume lo stesso valore in tutti i punti di una generica superficie sferica centrata in Q , che è pertanto *superficie equipotenziale* del campo (vedi § A.9).

Nella figura 3.1, si riporta schematicamente l'andamento delle equipotenziali per una carica puntiforme; come si vede, esse sono perpendicolari alle linee vettoriali. Anche in questo caso, come in quello della figura 2.2, la rappresentazione grafica bidimensionale è sufficiente a dare una chiara idea della struttura simmetrica del campo.

Prima di passare al caso generale di un'assegnata distribuzione di cariche-sorgente, aggiungiamo qualche commento sul significato fisico del potenziale. Riferendoci ancora al campo prodotto dalla carica q fissa nel punto Q , immaginiamo di introdurre nel campo una carica q_0 e di spostarla (applicando ad essa una opportuna forza esterna) dal punto P_1 al punto P_2 lungo una linea assegnata γ .

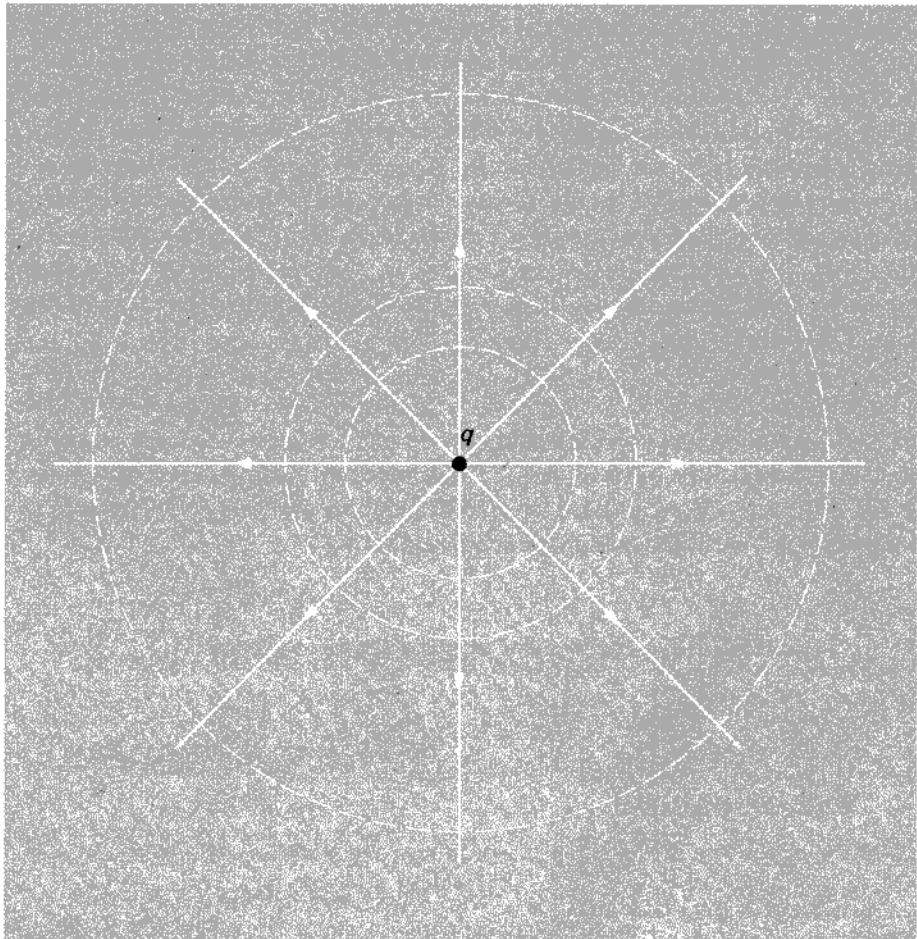
Supponiamo inoltre che la forza esterna applicata alla carica q_0 sia in ogni punto uguale e contraria a quella esercitata su di essa dalla q ;² in queste condizioni, la carica q si sposta con estrema lentezza (al limite, con velocità e accelerazione nulle) attraversando una successione continua di stati di equilibrio caratterizzati da energia cinetica nulla. Effettuiamo, cioè, una *trasformazione quasi statica*, in modo che il lavoro compiuto dalle forze esterne sia esattamente uguale e contrario a quello compiuto dalle forze del campo.

Calcoliamo ora il lavoro \mathcal{L}_γ compiuto dalle forze del campo quando si sposti la carica q_0 da P_1 a P_2 lungo γ .

Dalla definizione di \mathbf{E} si ottiene

$$\mathcal{L}_\gamma = q_0 \int_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{td}l, \quad [3.1.4]$$

² Per facilitare l'intuizione, possiamo supporre che la forza esterna sia appena superiore all'altra, in modo da riuscire a vincerla, imprimendo però alla carica un'accelerazione trascurabile.

**Figura 3.1**

Rappresentazione bidimensionale delle superfici equipotenziali (linee tratteggiate) e delle linee vettoriali per una carica puntiforme.

avendo indicato con \mathbf{t} il versore della tangente alla curva orientata γ e con dl la lunghezza del generico arco elementare. Sostituendo la [3.1.2] nella [3.1.4], si ottiene

$$\mathcal{L}_\gamma = -q_0 \int_{\gamma} \text{grad } V \cdot \mathbf{t} dl \quad [3.1.5]$$

e infine, tenendo conto delle proprietà del gradiente (vedi app. A),

$$\mathcal{L}_\gamma = q_0 [V(P_1) - V(P_2)], \quad [3.1.6]$$

dove V è una qualsiasi delle funzioni potenziali del campo. Si noti, a questo proposito, che la differenza tra i valori assunti da V in due punti distinti è indipendente dal valore scelto per la costante C .

Riassumendo, si può affermare che, scelto comunque uno dei potenziali del campo con C di valore arbitrario, la differenza $V(P_1) - V(P_2)$ tra i valori assunti da tale funzione in corrispondenza di due generici punti P_1 e P_2 del campo (purché diversi da Q) risulta pari al lavoro compiuto dalle forze del campo quando si sposti la carica unitaria positiva dal punto P_1 al punto P_2 , lungo uno qualsiasi dei percorsi che congiungono questi due punti: infatti, in base alle proprietà del gradiente che esprimono l'irrotationalità del campo, l'integrale contenuto nella [3.1.5] dipende soltanto dagli estremi P_1 e P_2 della linea γ . Inoltre il lavoro L_γ può risultare positivo o negativo (oltre che nullo, naturalmente), a seconda che lo spostamento della carica avvenga secondo le forze del campo oppure contro di esse.

Dalla [3.1.6], nel caso in cui $q_0 = 1 \text{ C}$, si ricava subito l'unità di misura per le differenze di potenziale,³ che nel Sistema internazionale prende il nome di "volt" (V): *tra due punti esiste una differenza di potenziale di 1 volt quando le forze del campo, per spostare una carica positiva pari a 1 coulomb da un punto all'altro, compiono il lavoro di 1 joule*. Di qui, si ricava pure l'unità di misura più usata per il campo E , che è data dal V/m, o da suoi multipli (ad esempio, kV/cm).

3.2 I potenziali di una distribuzione qualsiasi di cariche-sorgente

Possiamo ora estendere la nozione di potenziale a una distribuzione qualsiasi di cariche-sorgente puntiformi q_1, q_2, \dots, q_n ; per il principio di sovrapposizione si ha

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \cdots + \mathbf{E}_n,$$

avendo indicato con $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ i campi prodotti dalle singole cariche e con \mathbf{E} il campo risultante. In base a quanto detto nel paragrafo precedente, ciascuno dei campi $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$, considerato singolarmente, ammette potenziale. Indicando tali potenziali con V_1, V_2, \dots, V_n , risulta

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V_1 - \operatorname{grad} V_2 + \cdots + -\operatorname{grad} V_n.$$

Dalla linearità dell'operatore gradiente discende

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}(V_1 + V_2 + \cdots + V_n),$$

e quindi

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V,$$

[3.2.1]

con

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n.$$

[3.2.2]

Possiamo concludere che il campo prodotto da una qualsiasi distribuzione di cariche puntiformi (in numero limitato) ammette potenziale e tale potenziale è pari alla

³ Solitamente abbreviato con "d.d.p.".

somma dei potenziali associati singolarmente alle cariche-sorgente (*principio di sovrapposizione dei potenziali elettrostatici*).

Con riferimento al caso in esame delle n cariche puntiformi, ricordando la [3.1.1], il potenziale V in un generico punto P può essere espresso come

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \left(\frac{q_k}{r_k} + C_k \right), \quad [3.2.3]$$

dove r_k è la distanza tra il punto Q_k in cui è localizzata la carica q_k e il punto P in cui si valuta il potenziale, e C_k è la costante arbitraria associata al generico potenziale parziale prodotto dalla carica q_k . Se il numero delle cariche-sorgente è limitato,⁴ le costanti C_k possono essere scelte in maniera del tutto arbitraria, e risulta perciò

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k} + C, \quad [3.2.4]$$

con

$$C = \sum_{k=1}^n C_k.$$

In particolare, la costante C può essere posta uguale a zero, e con ciò la funzione $V(P)$ risulta tale da "annullarsi all'infinito"⁵. Se, invece, si vuole che il potenziale V assuma valore nullo in un punto P_0 (non coincidente con alcuno di quelli in cui sono localizzate le cariche-sorgente q_k), basta scegliere la costante C in modo che risulti

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_{k0}} + C = 0, \quad [3.2.5]$$

avendo indicato, anche in questo caso, con r_{k0} le distanze tra i punti in cui sono localizzate le cariche q_k e il punto P_0 in cui si vuole che il potenziale si annulli. Allo stesso risultato si arriva, ovviamente, se si scelgono i contributi parziali delle singole cariche in maniera che ciascuno si annulli nel punto P_0 . In tal caso, occorre scegliere ciascuna C_k in modo che risulti

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{k0}} + C_k = 0.$$

Consideriamo ora un insieme di cariche-sorgente distribuite con densità di volume ρ (in generale variabile da punto a punto) in una regione limitata τ . Suddividiamo

⁴ Per i casi in cui esso è illimitato, vedi app. E.

⁵ L'espressione può presentare qualche ambiguità quando il campo non ammette simmetria centrale. D'ora innanzi intenderemo che la funzione $V(P)$ si annulla all'infinito quando, comunque si fissi $\epsilon > 0$, è possibile determinare una superficie sferica Σ tale che nei suoi punti, e nei punti esterni risulti

$$|V(P)|_\Sigma < \epsilon.$$

E' agevole verificare che, posto $C=0$, la funzione $V(P)$ soddisfa questa condizione.

questa distribuzione di cariche in regioni elementari $d\tau$, ciascuna occupata da una carica elementare

$$dq = \rho d\tau;$$

il potenziale prodotto nel generico punto P dalla sola carica elementare $\rho(Q) d\tau$, posta nel punto Q , può essere espresso come

$$dV(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} d\tau, \quad [3.2.6]$$

indicando con r_{PQ} la distanza tra P e Q e considerando nullo, inoltre, il valore della costante arbitraria che entra nella definizione del potenziale.

Il principio di sovrapposizione consente di esprimere anche il potenziale prodotto da una distribuzione continua di cariche, integrando la [3.2.6] sull'intera regione τ nella quale sono distribuite le cariche-sorgente:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} d\tau. \quad [3.2.7]$$

L'integrale va inteso naturalmente come integrale di volume. Riferendosi a un sistema di coordinate cartesiane, risulta

$$V(x_P, y_P, z_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(x_Q, y_Q, z_Q)}{[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2]^{1/2}} dx_Q dy_Q dz_Q.$$

La funzione scalare $V(P)$ così costruita gode di alcune proprietà analitiche e fisiche molto interessanti. In primo luogo, *essa è continua in tutti i punti, compresi quelli nei quali è distribuita la carica*. Esaminiamo infatti il caso in cui il punto P sia esterno alla regione τ occupata dalle cariche: in tale caso, la funzione ρ/r , essendo ρ limitata in tutti i punti di τ e r sempre maggiore di zero, risulta definita in tutti i punti di τ ; possiamo perciò concludere che l'integrale contenuto nella [3.2.7] è una funzione continua in tutti i punti P non appartenenti a τ .

Il caso relativo a punti interni a τ , più complesso, verrà trattato in maggior dettaglio nell'appendice C.

Un'ulteriore proprietà analitica della funzione V riguarda il suo comportamento all'infinito: è agevole rendersi conto che, se la distribuzione delle cariche-sorgente è contenuta in una regione limitata, il potenziale V si annulla all'infinito, secondo quanto specificato in precedenza (vedi § 3.6). Da ciò discende anche la proprietà analoga per il campo E .

Osserviamo infine che, anche nel caso delle distribuzioni continue, il lavoro compiuto dal campo per spostare la carica unitaria positiva da un punto P_1 a uno P_2 è pari alla differenza di potenziale $V(P_1) - V(P_2)$ e le superfici equipotenziali sono ortogonali alle linee vettoriali del campo (esempi di equipotenziali sono riportati nella fig. 2.3 con linee tratteggiate).

Ragionando analogamente a quanto fatto in precedenza, nei casi di distribuzioni superficiali e lineari si ottiene

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(Q)}{r_{QP}} dS, \quad [3.2.8]$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\lambda(Q)}{r_{QP}} dl, \quad [3.2.9]$$

dove gli integrali vanno intesi rispettivamente come integrali di superficie e di linea.

Per quel che riguarda le proprietà formali della funzione $V(P)$, ci limitiamo ad affermare, senza dimostrarlo, che nel caso di distribuzioni superficiali il potenziale si mantiene continuo anche nei punti occupati da cariche-sorgente, mentre nei casi di distribuzioni lineari diverge logaritmicamente in corrispondenza dei punti occupati da cariche. Su queste proprietà del potenziale torneremo comunque più avanti a proposito di alcuni esempi (per le distribuzioni che si estendono all'infinito vedi app. F).

Osserviamo infine che il calcolo del potenziale prodotto da una distribuzione nota di cariche si riconduce al calcolo di un unico integrale di una funzione scalare: risulta, perciò, più semplice calcolare il potenziale piuttosto che il campo elettrico. Noto che sia il potenziale, si passa al calcolo del campo attraverso la [3.2.1], cioè, in ultima analisi, attraverso operazioni di derivazione.

Esempio 1. Potenziale di un anello circolare sui punti dell'asse

Consideriamo una distribuzione di cariche-sorgente con densità lineare uniforme λ su una circonferenza γ di raggio a (vedi fig. 3.2) e proponiamoci di calcolare il potenziale prodotto sui punti dell'asse di γ .

Assumendo l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane coincidente con l'asse dell'anello γ , il potenziale nel punto $P(0, 0, z)$ può essere espresso come sovrapposizione dei contributi forniti dai singoli tratti elementari in cui può essere suddiviso l'intero anello. Ciascuno di tali contributi sarà pari a

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{\frac{z}{\cos\theta}},$$

dove dl è il tratto elementare di γ considerato e r è la distanza tra dl e il punto P . Integrando sull'intera circonferenza e osservando che r è costante per tutti i dl , si ha

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\gamma} \frac{\lambda}{r} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi a \lambda \cos\theta}{z} = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}.$$

Il calcolo del potenziale in punti non appartenenti all'asse è più complicato.

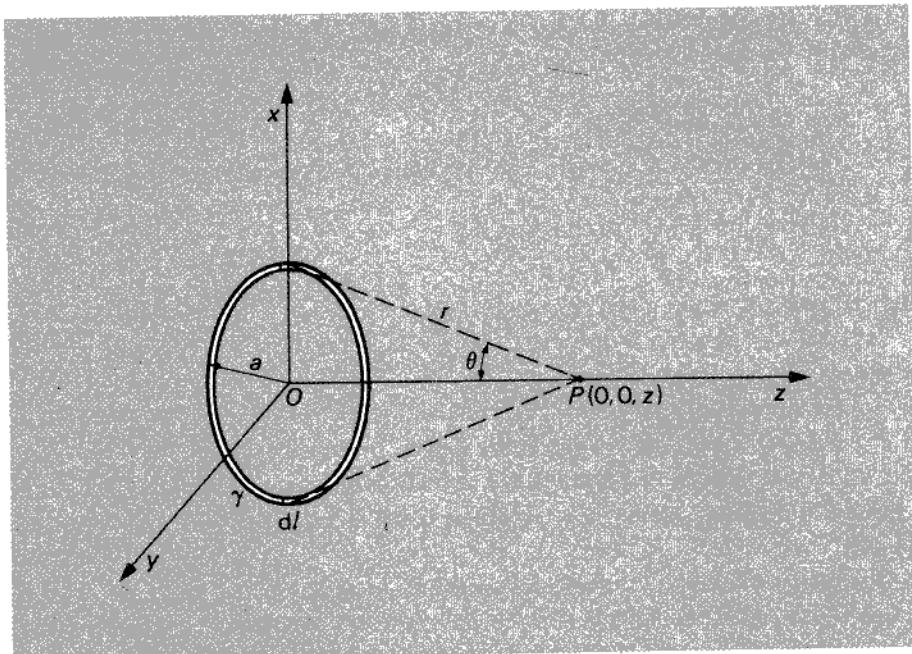


Figura 3.2

Esempio 2. Potenziale di un guscio sferico

Consideriamo una superficie sferica Σ di raggio R sulla quale sia distribuita una carica con densità superficiale uniforme σ (vedi fig. 3.3); suddividendo la superficie in "nastri" circolari di asse z è possibile calcolare il potenziale in un punto generico. A tal fine, con riferimento ai simboli usati in figura, il contributo dV fornito dal generico nastro è dato (vedi esempio 1) da

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{r} dS,$$

dove dS è l'area del nastro elementare. Osservando poi che

$$dS = 2\pi a R d\varphi = 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi$$

e

$$r = (R^2 + z^2 - 2Rz \cos\varphi)^{1/2},$$

si ha

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos\varphi)^{1/2}}.$$

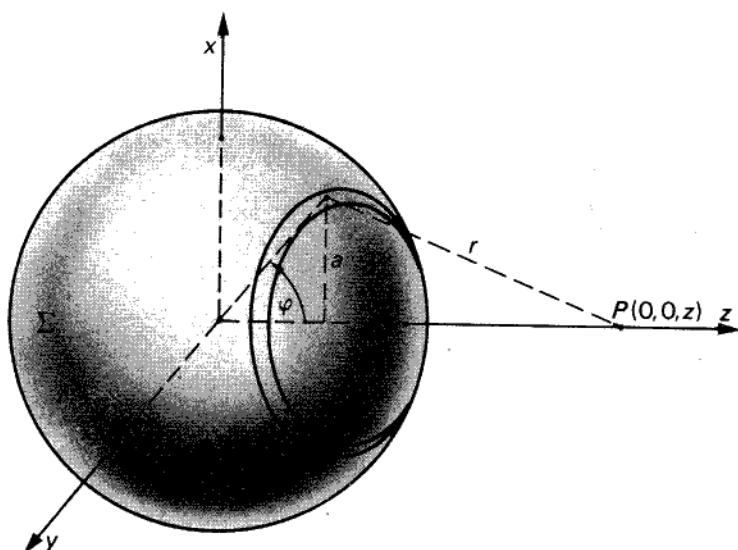


Figura 3.3

Integrando sull'intera superficie sferica, cioè per $\varphi \in [0, \pi]$, risulta

$$\begin{aligned}
 V(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \varphi}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \varphi)^{1/2}} d\varphi = \\
 &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} [(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \varphi)^{1/2}]_0^\pi = \\
 &= \begin{cases} \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} [(R+z) - (R-z)], & \text{per } z < R \\ \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} [(R+z) - (z-R)], & \text{per } z > R. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Osservando, poi, che la carica totale Q presente sulla superficie Σ è pari a

$$Q = 4\pi R^2 \sigma,$$

si ha

$$V(0, 0, z) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, & \text{per } z < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}, & \text{per } z > R. \end{cases}$$

E' da notare come, all'esterno della sfera, il potenziale abbia la stessa distribuzione che avrebbe se l'intera carica fosse concentrata nel centro (vedi fig. 3.4).

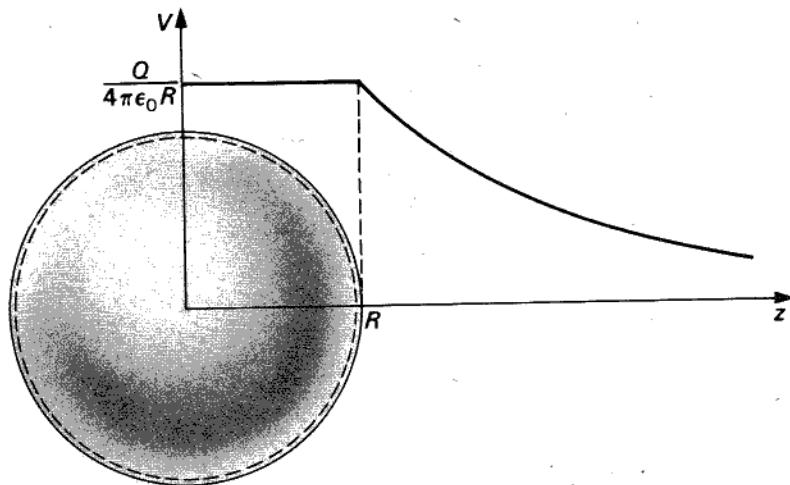


Figura 3.4
Potenziale di un guscio sferico: all'interno il potenziale è costante.

Esempio 3. Potenziale di doppio strato

Riprendiamo in considerazione l'esempio del doppio strato piano di cariche e studiamone il potenziale. Ricordando che, all'esterno del doppio strato, il campo è nullo, mentre all'interno vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} ,$$

si conclude facilmente che il potenziale V ha gradiente nullo all'esterno, mentre all'interno si ha

$$|\text{grad } V| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} .$$

Scegliendo arbitrariamente un punto in cui si vuole che il potenziale si annulli, l'andamento del potenziale risulta del tipo riportato nella figura 3.5,⁶ cioè

$$V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + C,$$

con C costante arbitraria, il cui valore va fissato a seconda del punto in cui si vuole che il potenziale si annulli. Indipendentemente dalla scelta di C , però, il valore della d.d.p. fra i due strati è pari a

$$|V_1 - V_2| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d .$$

⁶ La posizione dei due strati è quella riportata nel § 2.3 (esempio 3).

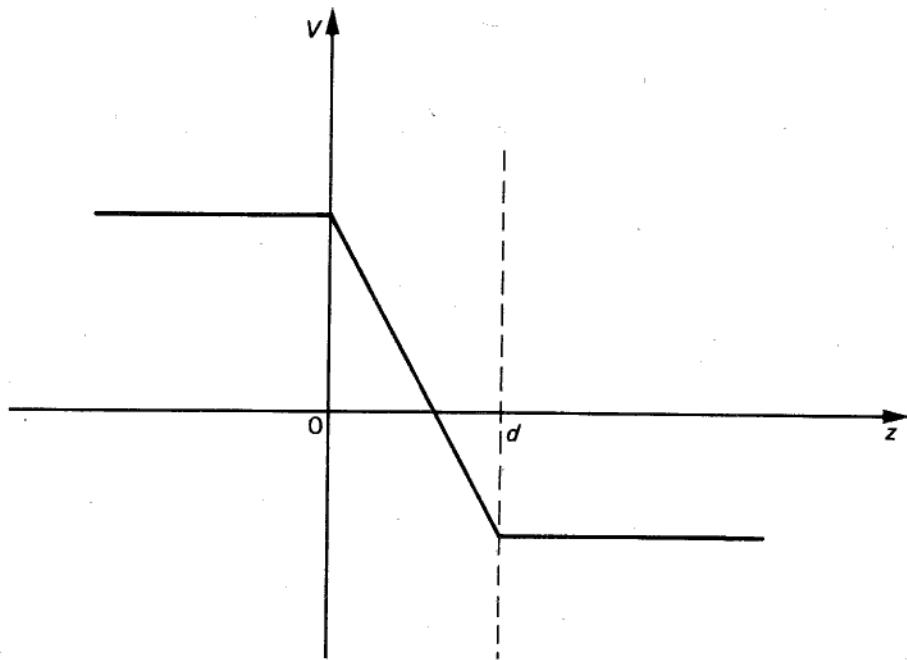


Figura 3.5

Questa relazione mette in luce un'interessante proprietà del doppio strato: immaginiamo di avvicinare fra loro i due strati (riducendo, quindi, la distanza d) e nel contempo di aumentare su essi il valore della densità superficiale σ in maniera che il prodotto σd si mantenga costante. In queste condizioni, la d.d.p tra i due strati si mantiene costante; è allora concepibile una situazione in cui la distanza d tenda a zero e il potenziale V presenti una vera e propria discontinuità in corrispondenza della distribuzione di cariche. Questa proprietà è caratteristica del doppio strato, e rimane valida anche quando la distribuzione di cariche non è piana.

3.3 Equazioni di Poisson e di Laplace

Nel capitolo precedente si è visto che nei punti regolari del campo le leggi dell'elettrostatica possono essere espresse in forma locale mediante le due equazioni:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad [3.3.1]$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad [3.3.2]$$

E' lecito ora chiedersi quale forma assumano queste equazioni quando si faccia

uso della nozione di potenziale. Ponendo in esse

$$\mathbf{E} = -\nabla V,$$

la [3.3.2] risulta identicamente verificata, mentre la [3.3.1] fornisce

$$\operatorname{div}(-\nabla V) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

e quindi

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad [3.3.3]$$

dove ∇^2 è il *laplaciano* di V (vedi app. A); la [3.3.3] prende il nome di *equazione di Poisson*.

Nelle regioni in cui non esistono cariche, la [3.3.3] diventa

$$\nabla^2 V = 0 \quad [3.3.4]$$

e prende il nome di *equazione di Laplace*.

Le equazioni di Poisson e di Laplace sono equazioni differenziali alle derivate parziali la cui forma analitica dipende dal sistema di coordinate nel quale si rappresenta l'operatore laplaciano (vedi § A.16).

Esse contengono ambedue le leggi fondamentali dell'elettrostatica. In altre parole, nota la distribuzione $\rho(P)$ delle cariche-sorgente, se fossimo in grado di determinare una funzione $V(P)$ tale da verificare l'equazione di Poisson in ogni punto, questa costituirebbe senz'altro un potenziale del campo, e pertanto arriveremmo immediatamente (essendo $\mathbf{E} = -\nabla V$) alla determinazione del campo. E' chiaro altresì che, qualora sia nota una funzione $V(P)$ che soddisfi all'equazione di Poisson, ogni altra funzione

$$V^* = V + C,$$

con C costante arbitraria, è soluzione della stessa equazione, poiché risulta

$$\nabla^2 V^* = \nabla^2 V$$

in ogni punto.

A titolo di esempio (peraltro particolarmente importante) di quanto precedentemente detto, supponiamo nota la funzione $\rho(P)$ in tutti i punti dello spazio e supponiamo inoltre che la ρ sia diversa da zero soltanto in una regione limitata τ (in altre parole, che la distribuzione di cariche non si estenda fino all'infinito). In tali condizioni la funzione

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(Q)}{r_{QP}} d\tau \quad [3.3.5]$$

soddisfa ovunque all'equazione di Poisson e costituisce perciò un potenziale del campo. La dimostrazione di ciò è contenuta, evidentemente, in quanto si è detto nei paragrafi precedenti a proposito del potenziale. Non risulterebbe comunque difficile controllare direttamente che la [3.3.5] verifica l'equazione di Poisson in ogni punto del campo. Osserviamo infine che, fra tutti i potenziali del campo, quello espresso dalla [3.3.5] è l'unico ad annullarsi all'infinito.

Appare con ciò riconfermato quanto già sottolineato in precedenza: nota la distribuzione di *tutte* le cariche-sorgente, la determinazione del potenziale (e quindi del campo) può avvenire per via diretta mediante la [3.3.5]. Molto spesso, però, le situazioni fisiche concrete non consentono questa completa conoscenza delle cariche-sorgente e la funzione $\rho(P)$ non è nota in tutti i punti dello spazio. In questi casi il problema si presenta più difficile; l'averlo posto in forma di equazione differenziale (di Poisson o di Laplace) ne facilita comunque la soluzione, come vedremo.

3.4 Energia di un sistema di cariche puntiformi

Ci proponiamo ora di definire e valutare l'energia associata a un sistema di cariche puntiformi. Consideriamo inizialmente il caso semplice di due cariche q_1 e q_2 poste nel vuoto a una distanza r_{12} l'una dall'altra (vedi fig. 3.6), nei punti Q_1 e Q_2 . Si è visto nei paragrafi precedenti che se si tiene fissa la q_1 in Q_1 e si sposta (con una trasformazione quasi statica) la q_2 dal punto Q'_2 a Q_2 , il lavoro compiuto contro le forze del campo per effettuare lo spostamento è indipendente dal percorso seguito ed è

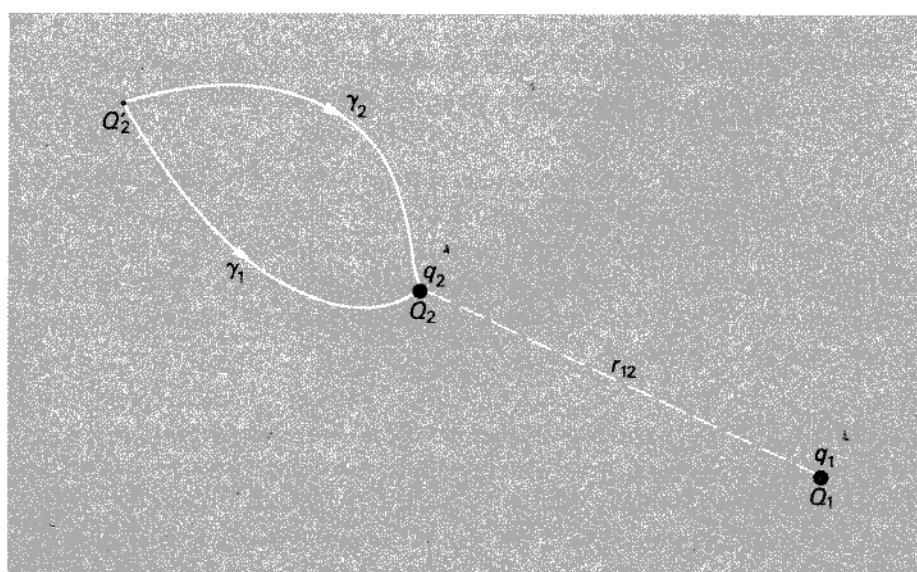


Figura 3.6

pari a

$$\mathcal{L} = q_2 [V_1(Q_2) - V_1(Q'_2)].$$

Ciò significa che, ove si modifichi una data configurazione iniziale delle due cariche, spostandone una o ambedue, il lavoro fatto dalle forze del campo dipende soltanto dalla configurazione finale assunta e non dal modo in cui si passa dall'una all'altra. Ci troviamo perciò in una situazione concettualmente analoga a quella che nell'ambito della termodinamica porta a definire l'energia interna di un sistema fisico come funzione di stato. Anche nel caso elettrico possiamo definire infatti una energia che dipende soltanto dallo *stato* del sistema (cioè dalla configurazione delle due cariche) e che, con le sue variazioni, fornisce il lavoro fatto dal sistema nel passaggio da una configurazione all'altra.

Per definire univocamente l'energia associata a uno stato del sistema, occorre scegliere uno stato di riferimento cui assegnare, per convenzione, il valore zero. Sembra naturale, nel caso elettrico, assumere tale stato come quello in cui le due cariche non interagiscono tra loro, cioè quello in cui le due cariche sono a distanza molto grande l'una dall'altra (al limite, infinita).

Osserviamo inoltre che finora si sono considerate cariche puntiformi, senza tenere conto del lavoro necessario per "costruire" ciascuna di esse. In altre parole, non si è tenuto conto del lavoro necessario per concentrare in un punto una carica finita, ove questa sia inizialmente disseminata all'infinito. Ciò premesso, l'energia associata a una qualsiasi configurazione delle cariche risulta univocamente definita e pari al lavoro compiuto contro le forze del campo per portare le cariche stesse dall'infinito alla posizione assunta nella configurazione in esame. Indicando con U_e l'energia elettrostatica associata al sistema, si ha dunque

$$U_e = q_2 [V_1(Q_2) - V_1(\infty)] = q_1 V_1(Q_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad [3.4.1]$$

La [3.4.1] può essere generalizzata a un sistema qualsiasi di cariche puntiformi.⁷ Date ad esempio tre cariche q_1, q_2, q_3 , inizialmente poste all'infinito, trasportiamo la q_1 nel punto Q_1 : poiché le cariche non interagiscono tra loro, questo spostamento non richiede alcun lavoro. Portiamo poi la q_2 in Q_2 , tenendo fissa la q_1 in Q_1 ; durante questa fase, la q_2 "sente" l'interazione con la q_1 , e perciò il lavoro fatto contro le forze di interazione è pari a

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

Portiamo, infine, la q_3 in Q_3 , mantenendo fisse le q_1 e q_2 rispettivamente in Q_1 e Q_2 . In questa fase la q_3 risente dell'azione sia della q_1 che della q_2 ; occorre perciò

⁷ Quando le due cariche hanno segno opposto, esse tendono a legarsi tra loro, e la loro energia, in base alla [3.4.1], risulta negativa.

compiere un lavoro

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

In conclusione, l'energia associata alla configurazione delle tre cariche q_1, q_2, q_3 , poste nei punti Q_1, Q_2, Q_3 , è data da

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right). \quad [3.4.2]$$

Si noti che l'energia U_e è indipendente dal modo in cui le cariche sono state trasportate dall'infinito alle loro posizioni finali.

La [3.4.2] può essere riscritta in una forma più adatta alla generalizzazione, osservando che, per tutti i valori degli indici, $r_{ij} = r_{ji}$. Si ha così

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^3 \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \end{aligned} \quad [3.4.2']$$

In definitiva, l'*energia associata a un sistema di N cariche puntiformi* q_1, q_2, \dots, q_N , poste nei punti Q_1, Q_2, \dots, Q_N a distanze reciproche r_{ij} , è data da

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad [3.4.3]$$

Tale risultato può essere posto in forma diversa utilizzando il concetto di potenziale. Si nota infatti che nella [3.4.3] compare il termine

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{q_j}{r_{ij}},$$

che corrisponde al valore del potenziale prodotto nel punto P_i da tutte le altre cariche (esclusa cioè la q_i). La [3.4.3] può essere allora riscritta nella forma

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i. \quad [3.4.4]$$

Il potenziale V_i da inserire in ciascun termine della somma contenuta nella [3.4.4] è quello prodotto da tutte le cariche tranne la i -esima. Del resto, se provassimo a calcolare il valore di V_i tenendo conto anche della carica q_i , arriveremmo a risultati privi di significato, poiché il contributo di una carica puntiforme al potenziale, nel punto da essa stessa occupato, diverge.

Osserviamo infine che, se si volesse assumere, per convenzione, un valore non

nullo per il potenziale all'infinito, il lavoro \mathcal{L} sarebbe pari a $V(P) - V_\infty$ (pur continuando ad avere lo stesso valore di prima) e la [3.4.4] assumerebbe la forma equivalente

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i (V_i - V_\infty) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i - \frac{1}{2} V_\infty \sum_{i=1}^N q_i.$$

Cerchiamo ora l'espressione dell'*energia elettrostatica associata a una distribuzione continua di cariche caratterizzata da una densità di volume ρ* (in generale, variabile da punto a punto). Ragionando come nei casi precedenti, immaginiamo di pervenire alla configurazione di cariche desiderata a partire da una situazione in cui tutta la carica disponibile sia suddivisa in tante cariche puntiformi molto piccole dq , trattabili come infinitesime, situate a grandissima distanza le une dalle altre, in modo che siano trascurabili le interazioni reciproche. Immaginiamo poi di portare a mano a mano le cariche dq nei vari punti, distribuendole negli elementi di volume $d\tau$, sino a raggiungere in ogni punto il desiderato valore di densità ρ . Come al solito, supponiamo che le cariche si siano mosse molto lentamente, in modo da poter trascurare la loro energia cinetica.

Indicando con dU_e il lavoro elementare necessario per portare l'incremento di carica dq' nel generico punto P quando il potenziale in P ha il valore $V'(P)$, si ha

$$dU_e = dq' V'(P) = d\rho' d\tau V'(P), \quad [3.4.5]$$

dove $d\rho'$ è l'incremento di densità in P e $d\tau$ l'elemento di volume centrato in P .

Poiché il lavoro necessario per realizzare la distribuzione di carica è indipendente dall'ordine e dal modo in cui i vari contributi vengono riuniti, possiamo supporre, per semplicità di calcolo, di portare le varie parti del sistema al valore finale della loro carica elettrica tutte insieme; immaginiamo cioè che ad ogni istante, durante il processo di carica, la densità di carica ρ' in tutti i punti si trovi a essere la stessa frazione α della densità finale ρ :

$$\rho' = \alpha \rho.$$

L'incremento di densità di carica è quindi

$$d\rho' = \rho d\alpha$$

e la [3.4.5] diviene

$$dU_e = \rho(P) V'(P) d\alpha d\tau. \quad [3.4.6]$$

Essendo tutte le cariche pari a una stessa frazione α del loro valore finale, anche il potenziale $V'(P)$ sarà una frazione α del valore finale $V(P)$:

$$V'(P) = \alpha V(P),$$

e quindi la [3.4.6] si scrive

$$dU_e = \alpha \cdot \rho(P) V(P) d\alpha d\tau. \quad [3.4.7]$$

L'energia elettrostatica totale si ottiene sommando tutti i termini del tipo [3.4.7] e facendo variare α tra 0 e 1:

$$U_e = \int_0^1 \alpha \left(\iiint_{\tau} \rho V d\tau \right) d\alpha = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho V d\tau. \quad [3.4.8]$$

La [3.4.8] è evidentemente della stessa forma della [3.4.4], con la differenza che l'operazione di integrazione su un continuo ha sostituito l'operazione di somma.⁸

Notiamo che nella [3.4.8] non occorre alcuna precisazione relativa al calcolo del potenziale: infatti non è necessario escludere il contributo della carica localizzata nel punto in cui si considera il potenziale, poiché tale contributo è infinitesimo.

In maniera analoga può essere espressa l'energia di interazione associata a un sistema di cariche *distribuite su una superficie o su una linea*, ottenendo, rispettivamente,

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V dS \quad [3.4.9]$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \lambda V dl. \quad [3.4.10]$$

La [3.4.10] ha però senso fisico soltanto quando il "filo" su cui è distribuita la carica con densità λ abbia un diametro piccolo, ma non nullo.

3.5 Densità di energia di un campo elettrostatico

Consideriamo una distribuzione di cariche dotata di densità di volume ρ in un dominio spaziale τ . Si è visto che l'energia associata a tale sistema è data da

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho V d\tau.$$

Ricordando che

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

si ha

$$\rho V = \epsilon_0 V \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Ricordando, poi, l'identità vettoriale

$$\operatorname{div}(f \mathbf{A}) = f \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} f,$$

⁸ Si noti che l'integrale nella [3.4.8] può essere esteso a una regione comunque grande che contenga τ , poiché al di fuori di τ si ha $\rho = 0$.

dove f e \mathbf{A} sono rispettivamente un generico campo scalare e un generico campo vettoriale, si ha

$$\rho V = \epsilon_0 V \operatorname{div} \mathbf{E} = \epsilon_0 \operatorname{div}(V\mathbf{E}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} V.$$

Essendo inoltre $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$, si ha

$$\rho V = \epsilon_0 \operatorname{div}(V\mathbf{E}) + \epsilon_0 E^2,$$

e la [3.4.8] diviene

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\tau} \operatorname{div}(V\mathbf{E}) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \epsilon_0 E^2 d\tau.$$

In base al teorema della divergenza risulta poi

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div}(V\mathbf{E}) d\tau = \iint_{\Sigma} V\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove Σ è la superficie chiusa che racchiude il dominio τ nel quale sono contenute le cariche. Inoltre, se la distribuzione delle cariche che producono il campo è tutta "al finito", il dominio τ e la superficie Σ (che supporremo, per esempio, sferici) possono essere scelti tanto grandi da rendere nullo l'integrale di superficie (vedi nota 8). Infatti, al tendere del raggio r della superficie all'infinito, il potenziale V tende a zero almeno come r^{-1} e il campo E come r^{-2} ; ne segue che il prodotto VE tende a zero almeno come r^{-3} , mentre l'area di Σ cresce come r^2 . In definitiva, l'integrale di superficie tende a zero (almeno come r^{-1}) e l'energia U_e può essere espressa dalla

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \epsilon_0 E^2 d\tau \quad [3.5.1]$$

purché l'integrale di volume sia esteso all'intero spazio (indicato con τ_∞). Questa relazione mostra che U_e può essere calcolata anche senza conoscere la distribuzione di carica, a patto che sia nota ovunque la distribuzione del campo. La [3.5.1] può inoltre essere interpretata formalmente dicendo che l'energia U_e è distribuita nell'intero spazio con una *densità di volume di energia* (ovvero un'*energia specifica*, energia per unità di volume)

$$u_e = \frac{dU_e}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad [3.5.2]$$

Con ciò si attribuisce un ulteriore significato intuitivo al campo, che appare come la sede in cui si "immagazzina" l'energia elettrostatica del sistema di cariche.

Riportiamo infine un'ulteriore osservazione per ciò che riguarda i limiti di applicabilità della [3.5.1]. Per il modo stesso in cui è stata ricavata (utilizzando, tra l'altro, la relazione $\operatorname{div} \mathbf{E} = (1/\epsilon_0) \rho$), la [3.5.1] non può essere applicata al caso di cariche puntiformi e a quello delle distribuzioni lineari. A titolo di esempio, applicandola al

caso della singola carica puntiforme, si ha subito

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

e, integrando per "gusci sferici",

$$U_e = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^r \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \rightarrow \infty.$$

Ciò, evidentemente, contrasta col fatto che l'energia U_e , essendo definita come *energia di interazione*, non può che essere nulla nel caso di una sola carica puntiforme al finito.

*3.6 Espansione in serie di multipoli del potenziale elettrostatico

Vogliamo ora esporre un metodo efficace che consente di calcolare in maniera approssimata il potenziale generato da una assegnata distribuzione di cariche. Questo metodo, noto sotto il nome di *espansione in serie di multipoli*, consente, tra l'altro, di introdurre in maniera chiara particolari distribuzioni di cariche (*dipoli e multipoli*), che risultano di grande interesse in molti settori della fisica atomica e nello studio del comportamento dei materiali isolanti.

Consideriamo una generica distribuzione di carica che occupi una regione limitata dello spazio, sì da poter essere interamente contenuta in una sfera di raggio a (vedi fig. 3.7); ci proponiamo di descriverne gli effetti a grande distanza (ossia in punti che siano a distanza dell'origine O molto maggiore di a).

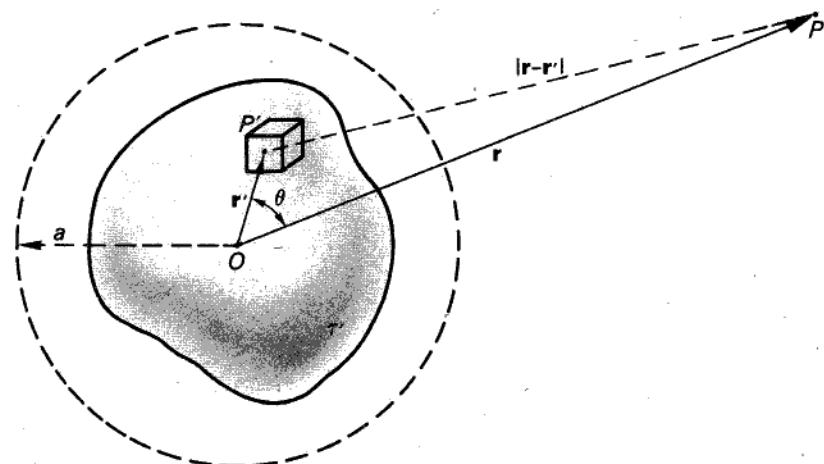


Figura 3.7

Indichiamo con \mathbf{r}' il raggio vettore spiccato dall'origine O verso il generico punto P' appartenente alla regione τ' occupata dalle cariche, con $\rho(\mathbf{r}')$ la densità di volume di carica in P' e con \mathbf{r} il raggio vettore dall'origine O al generico punto di osservazione P .

Il potenziale nel punto P è

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\tau', \quad [3.6.1]$$

dove con $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ si è indicata la distanza fra P e P' , pari a

$$r_{PP'} = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta)^{1/2} \quad [3.6.2]$$

(r e r' rappresentano, naturalmente, i moduli dei vettori \mathbf{r} e \mathbf{r}' , e θ è l'angolo da essi formato). Poiché ci limitiamo a considerare i valori assunti dal potenziale in punti lontani dall'origine, possiamo supporre $r'/r \ll 1$, e quindi sviluppare l'espressione $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ in serie di potenze di r'/r limitata ai primi termini. A tal fine, osserviamo che

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right) \right]^{-1/2};$$

ponendo poi

$$x = \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta,$$

possiamo scrivere

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} (1+x)^{-1/2}.$$

Ricordando infine che risulta (sviluppando in serie di Maclaurin)

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \dots,$$

si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} &= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos\theta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{3 \cos^2\theta - 1}{2} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} \cos\theta + \frac{r'^2}{r^3} \frac{3 \cos^2\theta - 1}{2} + \dots = \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2}{2r^5} - \frac{(r')^2}{2r^3} + \dots \end{aligned}$$

Sostituendo tale sviluppo in serie nella [3.6.1], limitandoci ad esempio ai primi due termini, otteniamo

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) d\tau'. \quad [3.6.3]$$

Poiché il vettore \mathbf{r} è indipendente dalla variabile di integrazione \mathbf{r}' , si ottiene

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') d\tau' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau' \right]. \quad [3.6.4]$$

Il primo termine di questa espressione fornisce il potenziale che sarebbe prodotto nel punto P se tutta la carica distribuita nella regione τ' ,

$$Q = \iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') d\tau',$$

fosse concentrata nell'origine O . E' intuitivo che questo debba essere il termine di prima approssimazione del potenziale, "visto" da un osservatore molto distante dalla distribuzione di carica.

Il secondo termine della [3.6.4] dà un contributo che varia con l'inverso del quadrato della distanza. In esso interviene la grandezza vettoriale

$$\mathbf{p} = \iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau', \quad [3.6.5]$$

che prende il nome di *momento di dipolo* della distribuzione di carica.⁹ Questa grandezza tiene conto, in qualche modo, della specifica distribuzione delle cariche nella regione τ' : ciò che invece la sola carica totale Q non può rappresentare. La [3.6.4] può dunque essere scritta nel modo seguente:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} \right); \quad [3.6.4']$$

i due termini che compaiono in tale espressione prendono il nome rispettivamente di *termine di monopolio* e *termine di dipolo*.

Notiamo che il primo termine può essere nullo, e ciò avviene quando nella distribuzione vi è globalmente tanta carica positiva quanta ve n'è di negativa. Tuttavia, quando la carica totale Q è nulla, non per questo le azioni elettriche sono nulle, anche limitandoci all'approssimazione [3.6.4']: vi è infatti il secondo termine, che può essere diverso da zero.

Consideriamo ora, in particolare, il secondo termine, cioè il momento di dipolo \mathbf{p} definito dalla [3.6.5]. Se consideriamo sistemi a carica totale Q non nulla, il momento

⁹ L'origine del termine "momento" va vista nel fatto che la funzione ρ è moltiplicata per il raggio vettore \mathbf{r}' .

di dipolo può essere calcolato immaginando di concentrare tutta la carica nel baricentro della distribuzione.¹⁰

In genere il momento di dipolo dipende dal punto rispetto al quale viene calcolato (cioè dall'origine dei vettori \mathbf{r}'): in particolare, è nullo il momento di dipolo rispetto al baricentro. Vedremo invece, nel paragrafo successivo, che il momento di dipolo dei sistemi a carica totale nulla non dipende dal punto rispetto a cui si calcola, ma è una proprietà intrinseca del sistema stesso.

Ricordiamo che la [3.6.4] è un'approssimazione limitata ai primi due termini dello sviluppo in serie della [3.6.1]; volendo riportarne altri, che vengono indicati come *termini di multipolo*, si ha

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right), \quad [3.6.6]$$

dove

$$K_0 = \iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') d\tau',$$

$$K_1 = \left[\iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau' \right] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$K_2 = \iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r} \right)^2 - \frac{r'^2}{2} \right] d\tau', \dots$$

Il terzo termine contiene il *momento di quadrupolo* della distribuzione, il quarto termine il *momento di ottupolo*, e così via. Nel seguito, utilizzeremo solo i primi due momenti Q e \mathbf{p} e non quelli di ordine superiore, importanti in altri campi della fisica (ad esempio in fisica nucleare). E' vero, però, che quando sono nulli i primi due termini, il potenziale a grandi distanze è determinato principalmente dal momento di quadrupolo della distribuzione; se è nullo anche questo, dal momento di ottupolo, e così via.

¹⁰ Questo, in modo analogo al baricentro di una distribuzione di massa, è definito dalla relazione

$$\mathbf{r}'_b = \frac{\iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau'}{\iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') d\tau'},$$

\mathbf{r}'_b essendo la sua distanza (vettoriale) dall'origine. Di conseguenza

$$\mathbf{r}'_b Q = \iiint_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau';$$

per calcolare il momento di dipolo si può cioè concentrare l'intera carica Q nel baricentro e moltiplicarla per \mathbf{r}'_b .

Lo sviluppo [3.6.6] mette in evidenza che, per una distribuzione di carica limitata nello spazio, il potenziale, al tendere della distanza all'infinito, tende a zero *almeno* come l'inverso della distanza.

3.7 Il dipolo elettrico

Il momento di dipolo di una distribuzione di carica, dato dalla [3.6.5], dipende in generale dall'origine scelta per misurare le distanze. Non ne dipende però quando la carica totale della distribuzione è nulla: in questo caso esso è una caratteristica intrinseca del sistema. Per mostrarlo consideriamo uno spostamento \mathbf{R} dell'origine; il momento di dipolo corrispondente è

$$\mathbf{p}' = \iiint_{\tau'} (\mathbf{r}' - \mathbf{R}) \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \iiint_{\tau'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' - Q\mathbf{R} = \mathbf{P} - Q\mathbf{R} \quad [3.7.1]$$

e, se $Q=0$, risulta

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}. \quad [3.7.2]$$

Una distribuzione di carica particolarmente semplice che soddisfa la condizione $Q=0$ è quella costituita da due cariche puntiformi uguali e di segno contrario, poste a distanza d l'una dall'altra.

Il momento di dipolo può essere calcolato scegliendo un'origine qualsiasi; la si consideri ad esempio coincidente col punto occupato dalla carica negativa. Il momento \mathbf{p} si calcola allora immediatamente ed è dato da

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}, \quad [3.7.3]$$

dove \mathbf{d} è la distanza vettoriale dalla carica negativa a quella positiva. Il momento di dipolo della distribuzione considerata è perciò un vettore avente: a) direzione della retta congiungente le due cariche, b) verso rivolto dalla carica negativa a quella positiva, c) modulo pari al prodotto della carica (positiva) per la distanza fra le cariche. In prima approssimazione, il potenziale generato in un punto qualsiasi dello spazio, a distanza grande rispetto alla separazione d delle cariche, è dato dalla [3.6.4'] in cui si ponga $Q=0$:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}. \quad [3.7.4]$$

Il campo elettrico si ottiene dalla [3.7.4] sapendo che

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V.$$

Scelta come origine delle coordinate la posizione occupata dalla carica negativa e indicato con \mathbf{r} il vettore che individua, rispetto a tale origine, il punto P in cui si

vuole misurare il campo, svolgendo i calcoli si ottiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad [3.7.5]$$

Il primo termine rappresenta il componente radiale del campo, il secondo il componente secondo la direzione del momento del dipolo. L'andamento delle linee di forza del campo è quello della figura 2.3a.

La particolare distribuzione di carica che stiamo studiando si presta a un'importante *schematizzazione limite*. Supponiamo di rendere molto piccola (al limite nulla), la separazione d fra le cariche positiva e negativa e di far crescere contemporaneamente (al limite sino a renderla infinita) la carica q , in modo che il prodotto qd (modulo del momento di dipolo) rimanga finito.¹¹ E' facile constatare che, in questo caso, nello sviluppo del potenziale rimane soltanto il termine contenente il momento di dipolo: il termine di quadrupolo, infatti, come si può dedurre dalla [3.6.6] del paragrafo precedente (in cui $r' = d$), risulta pari a

$$\frac{1}{8\pi\epsilon_0} q \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})^2}{r^5} - \frac{d^2}{r^3} \right]$$

e contiene dunque il prodotto qd^2 , che, al tendere di d zero e di q all'infinito (in modo che rimanga finito il prodotto qd), tende a zero. Analogamente, anche i termini di multipolo superiori, contenendo i prodotti qd^3 , qd^4 ecc., si annullano.

Il sistema così definito prende il nome di *dipolo elettrico ideale*: per esso, il potenziale è dato in tutti i punti dello spazio esattamente dalla [3.7.4], e il campo dalla [3.7.5].

Si è già detto che il dipolo ideale costituisce una schematizzazione limite; la sua importanza risiede nel fatto che molto spesso ci si trova a dover trattare sistemi di cariche elettriche aventi carica globale nulla e di cui interessa l'azione solo a distanze che sono molto grandi rispetto alle loro dimensioni.

Esempi di tali sistemi sono gli atomi e le molecole: elettricamente neutri nel loro complesso, spesso hanno momento di dipolo diverso da zero, oppure ne acquistano uno, in certe condizioni, per effetto di azioni esterne, come vedremo più avanti.

*3.8 Interazioni tra un dipolo e un campo elettrostatico

Un dipolo ideale, immerso in un campo elettrostatico, subisce azioni meccaniche. Se immaginiamo che le due cariche puntiformi siano rigidamente vincolate l'una all'altra, il sistema si comporta, dal punto di vista meccanico, come un corpo rigido, e le forze agenti su di esso sono descrivibili in modo completo mediante un risultante

¹¹ Ovviamente, se si avvicinassero tra loro le due cariche senza far crescere nel contempo il loro valore, il potenziale e il campo tenderebbero a zero ovunque.

e un momento delle forze rispetto a un polo di riduzione. Ci proponiamo di calcolare tale sistema di forze, dovute al campo elettrico in cui è immerso il sistema, nonché l'energia di interazione del dipolo col campo.¹²

Forza risultante

Indichiamo con \mathbf{r} la distanza vettoriale da O del punto occupato dalla carica negativa; sia \mathbf{E} il valore del campo elettrostatico in tale punto (vedi fig. 3.8). Nel punto occupato dalla carica positiva, se la separazione d fra le due cariche è molto piccola (cioè, al limite, il sistema diviene un dipolo ideale), il campo può essere espresso nella forma

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{E}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + d\mathbf{E}, \quad [3.8.1]$$

ove $d\mathbf{E}$ è la variazione del campo corrispondente allo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ dal primo al secondo punto.

In coordinate cartesiane ortogonali il vettore $d\mathbf{r}$ è individuato dalle sue componenti dx, dy, dz :

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

mentre $d\mathbf{E}$, differenziale di un vettore, è dato da

$$dE_x\mathbf{i} + dE_y\mathbf{j} + dE_z\mathbf{k},$$

ove dE_x, dE_y, dE_z rappresentano le variazioni infinitesime delle componenti di \mathbf{E} in corrispondenza allo spostamento $d\mathbf{r}$. Si ha

$$\begin{aligned} dE_x &= \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \\ dE_y &= \frac{\partial E_y}{\partial x} dx + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \\ dE_z &= \frac{\partial E_z}{\partial x} dx + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz, \end{aligned} \quad [3.8.2]$$

e in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} dE_x \\ dE_y \\ dE_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad [3.8.2']$$

¹² Il campo di cui si parla è quello esistente *in assenza del dipolo*: infatti, essendo il dipolo una struttura meccanicamente rigida, le azioni reciproche delle due cariche che lo costituiscono sono inefficaci dal punto di vista meccanico.

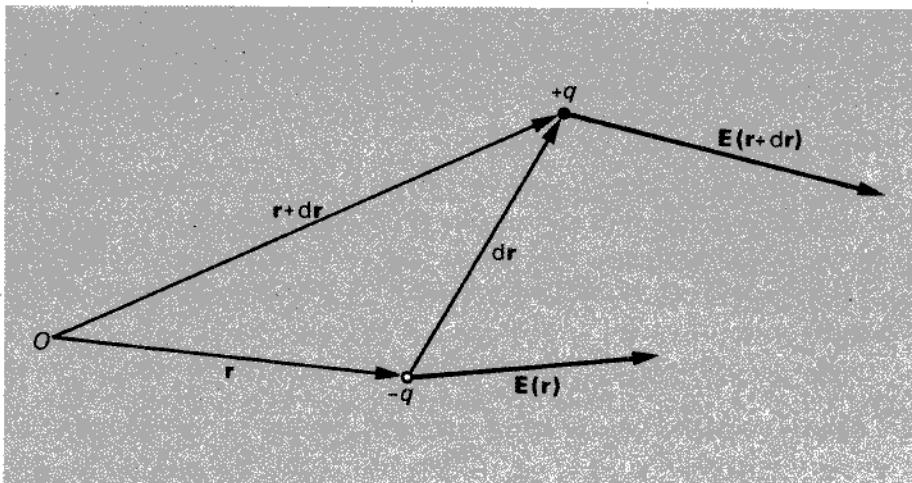


Figura 3.8

Dipolo elettrico ideale immerso in un campo elettrico.

Nel seguito si mostrerà che la matrice quadrata costituita dalle derivate parziali delle componenti di \mathbf{E} rappresenta l'insieme delle nove componenti cartesiane di un tensore del secondo ordine (vedi § A.6): ad esso si dà il nome di *gradiente del campo vettoriale* \mathbf{E} . La [3.8.2'] può quindi essere riscritta, in forma compatta, nella maniera seguente:

$$\mathbf{d}\mathbf{E} = (\text{grad } \mathbf{E}) \cdot \mathbf{dr}, \quad [3.8.2']$$

indicando con il simbolo “ \cdot ” il prodotto scalare tra il tensore $\text{grad } \mathbf{E}$ e il vettore \mathbf{dr} . Ciò premesso, possiamo scrivere l'espressione della forza risultante \mathbf{F} agente sul dipolo. Se indichiamo con \mathbf{F}_- e \mathbf{F}_+ le forze agenti sulla carica negativa e su quella positiva, si ha

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_- + \mathbf{F}_+ = -q\mathbf{E} + q(\mathbf{E} + \mathbf{d}\mathbf{E}) = q\mathbf{d}\mathbf{E}, \quad [3.8.3]$$

ovvero, in notazione tensoriale,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{dr} \cdot \text{grad } \mathbf{E} = \mathbf{p} \cdot \text{grad } \mathbf{E},$$

ove $\mathbf{p} = q\mathbf{dr}$ è l'espressione del momento di dipolo (vedi § 3.7).

Momento risultante

Calcoliamo ora il momento del sistema di forze agenti sul dipolo. Scegliamo come polo un punto qualsiasi, ad esempio il punto O della figura 3.8. Il momento rispetto a O è

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_- + (\mathbf{r} + \mathbf{dr}) \times \mathbf{F}_+ = -\mathbf{r} \times q\mathbf{E} + (\mathbf{r} + \mathbf{dr}) \times q(\mathbf{E} + \mathbf{d}\mathbf{E}) = \\ &= q\mathbf{dr} \times \mathbf{E} + qr \times \mathbf{d}\mathbf{E} + q\mathbf{dr} \times \mathbf{d}\mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{p} \times \mathbf{d}\mathbf{E}. \end{aligned} \quad [3.8.4]$$

dove

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_- + \mathbf{F}_+.$$

Essendo l'ultimo termine trascurabile rispetto agli altri, si ha

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad [3.8.5]$$

Il primo termine rappresenta il momento, rispetto al polo O , del risultante \mathbf{F} delle forze, il secondo rappresenta invece una coppia dipendente unicamente dal momento \mathbf{p} del dipolo e dal valore del campo elettrostatico \mathbf{E} nel punto occupato dal dipolo stesso. Se il polo di riduzione si fa coincidere con la posizione della carica negativa (che è appunto quella del dipolo ideale quando la distanza tra le cariche tende a zero), il momento si riduce alla coppia

$$\mathbf{C} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad [3.8.6]$$

Il dipolo è soggetto a un sistema di forze a risultante non nullo soltanto se il campo è non uniforme attorno al punto da esso occupato. In caso contrario, $d\mathbf{E} = 0$ e, come risulta dalla [3.8.3'], $\mathbf{F} = 0$. Se il campo è uniforme, il sistema di forze è descritto soltanto dalla coppia data dalla [3.8.6]. In questo caso il dipolo ruota, se libero da vincoli, sino ad allinearsi con il campo: in questa posizione la coppia è nulla. Vi sono evidentemente due configurazioni di equilibrio (in cui cioè $\mathbf{C} = 0$): una con \mathbf{p} ed \mathbf{E} equiversi (parallelî) e una con \mathbf{p} ed \mathbf{E} di verso opposto (antiparalleli). Solo la prima posizione è stabile: se infatti si sposta, con una piccola rotazione, il dipolo dalla sua posizione di equilibrio, è facile vedere che nel primo caso tende a tornare nella posizione iniziale, mentre nel secondo tende ad allontanarsene.

Energia di interazione campo-dipolo

Vogliamo ora calcolare l'energia elettrostatica di interazione di un dipolo con il campo elettrico. Tale energia *non* è quella propria del sistema delle due cariche puntiformi che costituiscono il dipolo (corrispondente al lavoro necessario per costruire il dipolo partendo da una situazione in cui le due cariche siano molto distanti tra loro). Intendiamo infatti calcolare l'energia relativa all'interazione tra il dipolo (*già costruito*) e le altre cariche che generano il campo \mathbf{E} agente su esso: l'energia, cioè, che corrisponde al lavoro compiuto per portare il dipolo nella configurazione considerata (nel campo \mathbf{E}) a partire da una situazione in cui il dipolo, già costituito, non subisca azioni da parte di tale campo, trovandosi molto lontano dalle cariche che lo generano.¹³

Sia V il potenziale nel punto occupato dalla carica negativa; il potenziale nel punto occupato dalla carica positiva è pari a

$$V' = V + dV,$$

dove dV è la variazione di potenziale conseguente allo spostamento $d\mathbf{r}$ (da ritenersi al limite tendente a zero).

¹³ Anche in questo caso le azioni reciproche fra le cariche costituenti il dipolo sono meccanicamente inefficaci, poiché esso è concepito come una struttura rigida.

Risultando

$$V + dV = V + \text{grad } V \cdot d\mathbf{r},$$

l'energia potenziale elettrostatica del dipolo nel campo vale (vedi § 3.4)

$$\begin{aligned} U_e &= U_{e-} + U_{e+} = -qV + q(V + dV) = \\ &= q d\mathbf{r} \cdot \text{grad } V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad [3.8.7]$$

dove U_{e-} e U_{e+} sono le energie potenziali elettrostatiche rispettivamente della carica negativa e di quella positiva.

3.8.1 Dimostrazione della natura tensoriale del gradiente del campo

Per convincersi che la matrice quadrata che appare nella [3.8.2'] rappresenta effettivamente le componenti di un tensore del secondo ordine, basta ragionare come segue.

Consideriamo un nuovo sistema di coordinate cartesiane Ox', y', z' (i cui assi siano ruotati rispetto agli assi x, y, z) e siano

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' \\ y &= a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' \\ z &= a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' \end{aligned} \quad [3.8.8]$$

le relazioni che descrivono questa trasformazione di coordinate.

Le componenti E'_x, E'_y, E'_z del vettore \mathbf{E} nel nuovo sistema di coordinate sono legate alle E_x, E_y, E_z dalle relazioni

$$\begin{aligned} E'_x &= a_{11}E_x + a_{12}E_y + a_{13}E_z \\ E'_y &= a_{21}E_x + a_{22}E_y + a_{23}E_z \\ E'_z &= a_{31}E_x + a_{32}E_y + a_{33}E_z \end{aligned} \quad [3.8.9]$$

Osserviamo ora che i nove elementi della matrice quadrata [3.8.2'] si ottengono dalle componenti di \mathbf{E} , nel sistema x, y, z , derivandole parzialmente rispetto a ciascuna delle variabili coordinate dello stesso sistema. In modo analogo, dalle componenti E'_x, E'_y, E'_z si ottengono, per derivazione parziale rispetto a x', y', z' , gli elementi di una nuova matrice quadrata: le componenti di $\text{grad } \mathbf{E}$ nel sistema di coordinate x', y', z' . Vogliamo determinare le relazioni che legano queste nuove derivate ($\partial E'_x / \partial x', \partial E'_y / \partial x', \dots$, ecc.) alle componenti di $\text{grad } \mathbf{E}$ nel vecchio sistema. Dalle [3.8.9] otteniamo subito

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} = a_{11} \frac{\partial E_x}{\partial x'} + a_{12} \frac{\partial E_y}{\partial x'} + a_{13} \frac{\partial E_z}{\partial x'}, \quad [3.8.10]$$

Poiché le tre componenti E_x, E_y, E_z sono funzioni di x, y, z , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x'} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x'} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial E_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x'} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \end{aligned}$$

Sostituendo tali relazioni nella [3.8.10]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E'_x}{\partial x'} = & a_{11} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \right) + \\ & + a_{12} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial E_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \right) + \\ & + a_{13} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \right);\end{aligned}$$

calcolando le derivate $\partial x / \partial x'$, $\partial y / \partial x'$, $\partial z / \partial x'$, dalle [3.8.8] si ha in definitiva

$$\begin{aligned}\frac{\partial E'_x}{\partial x'} = & a_{11} a_{11} \frac{\partial E_x}{\partial x} + a_{11} a_{12} \frac{\partial E_x}{\partial y} + a_{11} a_{13} \frac{\partial E_x}{\partial z} + a_{12} a_{11} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \\ & + a_{12} a_{12} \frac{\partial E_y}{\partial y} + a_{12} a_{13} \frac{\partial E_y}{\partial z} + a_{13} a_{11} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \\ & + a_{13} a_{12} \frac{\partial E_z}{\partial y} + a_{13} a_{13} \frac{\partial E_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Analoghe relazioni valgono per le altre derivate delle componenti E'_x , E'_y , E'_z rispetto alle variabili x' , y' , z' .

Tali derivate parziali si trasformano dunque, al variare del sistema di coordinate, come le nove componenti di un tensore del secondo ordine. Riassumendo, si può dire che l'operazione "gradiente", applicata a un campo vettoriale, dà come risultato un campo tensoriale del secondo ordine.

3.9 Distribuzioni di dipoli

Se si considera un sistema costituito di N dipoli, il potenziale e il campo sono dati, in base al principio di sovrapposizione, dalla somma dei contributi forniti singolarmente da ciascuno dei dipoli.

Come per le cariche, è possibile considerare anche distribuzioni continue di dipoli. A tal fine, consideriamo una regione elementare di volume $\Delta\tau$ (molto piccolo rispetto alla scala tipica delle nostre esperienze, ma comunque finito), e immaginiamo che in essa si trovi un numero N molto grande di dipoli "quasi ideali", tali cioè che la distanza d tra le cariche di segno opposto sia molto piccola rispetto alla dimensione lineare della regione $\Delta\tau$. Il momento di dipolo $\Delta\Pi$ globalmente presente nel volumetto $\Delta\tau$ è dato dalla somma vettoriale dei momenti di dipolo \mathbf{p}_i posseduti dai singoli dipoli:

$$\Delta\Pi = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i.$$

Per fissare le idee, immaginiamo che tutti i dipoli siano identici fra loro e ugualmente orientati ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$). Si ha allora

$$\Delta\Pi = N\mathbf{p}.$$

Introducendo il *momento di dipolo per unità di volume*,

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \Pi}{\Delta \tau}, \quad [3.9.1]$$

si ha subito

$$\mathbf{P} = n \mathbf{p}, \quad [3.9.2]$$

dove n è il numero di dipoli per unità di volume.

La definizione di \mathbf{P} può essere facilmente estesa al caso in cui i dipoli sono diversi o diversamente orientati, ponendo

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta \tau} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i. \quad [3.9.3]$$

Si è visto che, nel caso delle cariche, la distribuzione delle sorgenti è caratterizzata da una funzione *scalare* $\rho(Q)$, esprimente la carica per unità di volume; analogamente la distribuzione dei dipoli è caratterizzata da una funzione *vettoriale* $\mathbf{P}(Q)$ che fornisce il momento di dipolo, per unità di volume, nel generico punto Q . Anche qui si può immaginare una distribuzione di dipoli come un *continuo* caratterizzato dalla funzione vettoriale $\mathbf{P}(Q)$.

Ci proponiamo ora di valutare il potenziale e il campo prodotti da un'assegnata distribuzione di dipoli; a tal fine, consideriamo una regione Ω nella quale esista una distribuzione continua di dipoli caratterizzata dalla funzione $\mathbf{P}(Q)$. Considerato poi un volumetto $\Delta \tau$ centrato in un generico punto Q , sostituiamo all'insieme di dipoli contenuti in $\Delta \tau$ un unico dipolo elementare di momento

$$\Delta \Pi = \mathbf{P}(Q) \Delta \tau.$$

Tale dipolo produce nel generico punto Q' un potenziale elementare che, in base alla [3.7.4], ha la forma

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta \Pi \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Ragionando analogamente per ognuno dei volumetti $\Delta \tau$ in cui la regione Ω può considerarsi suddivisa, e sovrapponendo gli effetti, si ricava il potenziale V prodotto in Q' dall'intera distribuzione di dipoli:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'. \quad [3.9.4]$$

*3.9.1 Distribuzioni di cariche equivalenti a quelle di dipoli

Vogliamo ora mostrare che una distribuzione continua di dipoli è equivalente, ai fini del potenziale e del campo prodotti, a un'opportuna distribuzione di cariche disposte nella stessa regione occupata dai dipoli.

Ricordiamo innanzitutto che per le proprietà del gradiente (vedi § A.10) si ha

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

ove l'operatore "grad" agisce sulla variabile \mathbf{r} ; indicando con "grad'" l'operatore che agisce sulla variabile \mathbf{r}' , si ha

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad [3.9.5]$$

Sostituendo la [3.9.5] nella [3.9.4], otteniamo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'.$$

Ricordando poi che, per una nota identità vettoriale, si ha

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \operatorname{div}' \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}'),$$

otteniamo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}' \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}') d\tau'.$$

Applicando il teorema della divergenza al primo integrale, si ha

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\operatorname{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau',$$

dove Σ rappresenta la superficie che delimita la regione Ω . I due integrali presenti in questa relazione corrispondono esattamente ai potenziali che sarebbero prodotti da una distribuzione di cariche sulla superficie Σ , con densità superficiale

$$\sigma_{eq} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n, \quad [3.9.6]$$

e da una distribuzione di cariche nella regione Ω , con densità di volume

$$\rho_{eq} = -\operatorname{div}' \mathbf{P}. \quad [3.9.7]$$

Possiamo ora affermare che, data una superficie chiusa Σ che abbracci tutta la distribuzione di dipoli, il flusso di \mathbf{E} uscente da tale superficie è nullo. Ciò discende immediatamente dal teorema di Gauss, poiché la somma delle cariche di ciascun dipolo è nulla e tale risulta, quindi, anche la somma di tutte le cariche costituenti i dipoli dell'intera distribuzione. La conclusione è, d'altra parte, coerente con le [3.9.6] e [3.9.7]: se infatti si valuta la carica totale equivalente alla distribuzione di dipoli contenuta in Ω , risulta subito

$$Q_{tot} = \iiint_{\Omega} \rho_{eq} d\tau + \iint_{\Sigma} \sigma_{eq} dS = \iiint_{\Omega} (-\operatorname{div}' \mathbf{P}) d\tau + \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove Ω è la regione occupata dalla distribuzione e Σ la superficie che la delimita. Ap-

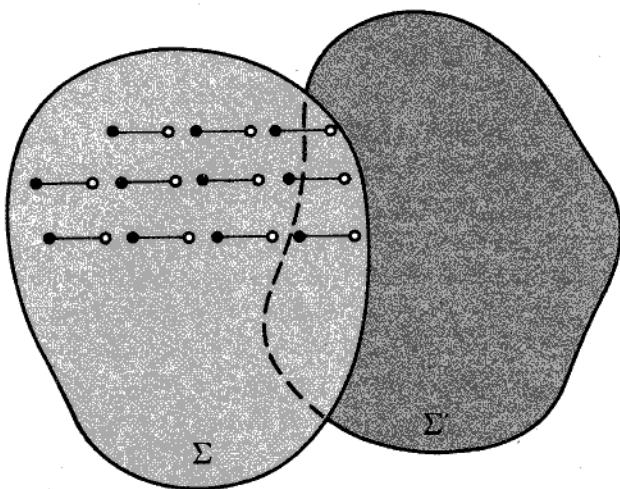


Figura 3.9

plicando il teorema della divergenza all'integrale di volume, si ha

$$Q_{\text{tot}} = - \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{\Sigma'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Diverso è il caso di una superficie Σ' che “tagli” alcuni dipoli (vedi fig. 3.9), poiché la somma delle cariche in essa contenute *non* è più nulla, e il flusso di \mathbf{E} da essa uscente è diverso da zero. Ciò spiega, fra l’altro, come sia possibile, partendo da un insieme di dipoli (ciascuno dei quali ha carica totale nulla), pervenire a una distribuzione di cariche equivalenti di densità localmente non nulla.

Esercizi

1. Con riferimento all’esercizio 1(cap. 2), valutare il potenziale nei punti O e O' .
2. Con riferimento alle stesse cariche dell’esercizio precedente, disegnare qualitativamente l’andamento delle equipotenziali e verificare che sono ortogonali alle linee vettoriali del campo.
3. Con riferimento all’esercizio 3 (cap. 2), disegnare l’andamento delle equipotenziali e verificare che sono ortogonali alle linee vettoriali del campo.
4. Con riferimento alla distribuzione di cariche dell’esercizio 4 (cap. 2), valutare il potenziale sui punti dell’asse x , per $x > L$.
5. Con riferimento alla distribuzione di cariche dell’esercizio 6 (cap. 2), calcolare il potenziale nei punti dell’asse del disco.

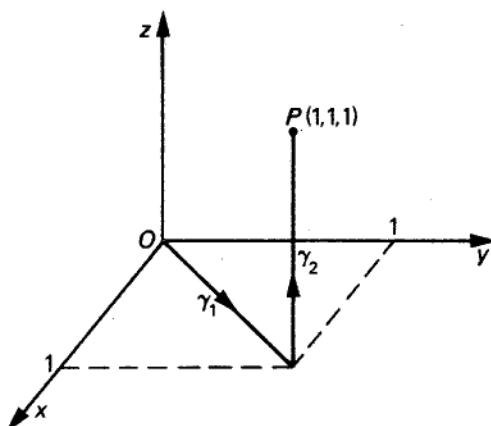


Figura 3.10

6. Con riferimento alla distribuzione di cariche dell'esercizio 7 (cap. 2) calcolare il potenziale fuori e dentro la sfera.

7. Calcolare i potenziali associati ai campi elettrici considerati negli esercizi 14 e 18 (cap. 2).

8. Con riferimento al campo descritto dalla relazione

$$\mathbf{E} = (2z - 2xy^2)\mathbf{i} - (2x^2y + 3z^2)\mathbf{j} + (2x - 6yz)\mathbf{k},$$

valutare la d.d.p. ΔV fra i punti $P(1, 1, 1)$ e $O(0, 0, 0)$ (vedi fig. 3.10)

(*Suggerimento.* Calcolare l'integrale di linea di \mathbf{E} prima lungo γ_1 e poi lungo γ_2 .)

9. Calcolare l'energia potenziale di due protoni che distano 6×10^{-15} m.

10. Calcolare il campo elettrico \mathbf{E} derivante dal potenziale scalare (in coordinate cartesiane):

$$V(x, y, z) = 3x^2y - 2\frac{xy}{z}.$$

11. Calcolare il campo elettrico \mathbf{E} derivante dal potenziale scalare (in coordinate cilindriche):

$$V(r, \varphi, z) = rz + \frac{r^2}{z} \sin \varphi.$$

12. Calcolare il potenziale dell'esercizio 19, cap. 2.

(*Suggerimento.* Integrare il campo, ponendo uguale a zero il potenziale in $r=R$).

13. Calcolare il potenziale dell'esercizio 23, cap. 2.

(*Suggerimento.* Annullare il potenziale all'infinito.)

14. In prossimità della terra, è presente un campo elettrico diretto lungo la verticale z , verso il basso. Se, a un'altezza di 300 m dal suolo, $E=60$ V/m e a un'altezza di 200 m, $E=100$ V/m, ammesso che E varii linearmente, qual è la distribuzione di carica esistente nella regione?

Capitolo 4

Il campo elettrostatico in presenza di conduttori nel vuoto

4.1 Conduttori e isolanti

Abbiamo sin qui visto come calcolare il campo quando sia nota la distribuzione delle sorgenti. Nella maggior parte dei casi di interesse pratico, tuttavia, la distribuzione delle sorgenti del campo *non* è nota a priori e deve essere determinata, in qualche modo, contemporaneamente al campo. La ragione di questa accresciuta difficoltà può essere illustrata da alcune semplici considerazioni.

Com'è noto, i corpi materiali sono costituiti, in ultima analisi, da un insieme di cariche positive e negative così intimamente mescolate fra loro che, in condizioni di neutralità elettrica, la carica totale contenuta in ogni regione "fisicamente infinitesima" del corpo è nulla.

Alcune delle cariche presenti nel corpo sono, però, in qualche misura (dipendente dalla natura fisica del corpo) libere di muoversi al suo interno. Accade quindi che, quando un corpo neutro viene immerso in un campo elettrico, le cariche di segno opposto in esso presenti, essendo soggette a forze di verso contrario, si allontanano le une dalle altre. Questa separazione distrugge la neutralità locale e il corpo presenterà, punto per punto, una distribuzione di cariche.¹ La distribuzione di cariche, "indotta" nel corpo, fornisce a sua volta un contributo al campo elettrico e questo, nello stesso tempo, concorre a modificare la distribuzione locale delle cariche nel corpo. Si comprende allora la ragione dell'accresciuta difficoltà: il campo elettrico viene a essere prodotto, oltre che dalle sorgenti esterne, anche dalle cariche indotte e queste, a loro volta, dipendono dal valore del campo risultante.

E' chiaro che se la distribuzione delle cariche indotte fosse nota a priori, il campo risultante potrebbe essere calcolato come nei capitoli precedenti: si potrebbe sostituire al corpo materiale la distribuzione di cariche in esso indotta e calcolare il campo pro-

¹ Si noti, comunque, che se al corpo non si aggiungono cariche dall'esterno, esso resta globalmente neutro.

dotto da tutte le cariche (interne ed esterne al corpo) come se queste agissero nel vuoto.² Ciò non è possibile, tuttavia, in quanto la distribuzione delle cariche nei corpi è a sua volta il risultato di una situazione di equilibrio fra le forze elettriche agenti sulle cariche e le reazioni dei vincoli cui esse sono soggette nel corpo. Si conclude, pertanto, che non è possibile assegnare a priori né la distribuzione delle cariche indotte nei corpi né il campo risultante, ma occorre invece determinare insieme l'una e l'altro.

I paragrafi che seguono descrivono i fenomeni che si verificano nei corpi conduttori posti nel vuoto (o nell'aria in condizioni normali) in presenza di un campo elettrico e indicano alcuni metodi per risolvere i problemi precedentemente indicati. I fenomeni connessi con gli isolanti saranno trattati nel capitolo successivo.

Nel capitolo 1 abbiamo definito qualitativamente gli isolanti (detti anche *dielettrici*) come corpi capaci di conservare a lungo la carica elettrica, e i conduttori come corpi che ne permettono invece la rapida dispersione. Questa distinzione è però soltanto qualitativa e deve essere approfondita attraverso uno studio più attento dei fenomeni di *conduzione* e di *polarizzazione*; ci limiteremo, per il momento, ai fenomeni elettrostatici connessi con i conduttori.

I conduttori sono sostanze che, in particolare i metalli, contengono un numero elevatissimo di particelle cariche (dell'ordine, ad esempio, di una per atomo) libere di muoversi nel loro interno. Tali cariche (nei conduttori metallici sono elettroni, nelle soluzioni elettrolitiche ioni positivi e negativi, nei gas ionizzati ioni positivi ed elettroni ecc.), entro tutta la regione occupata dal corpo, urtano continuamente tra di loro e con le altre particelle "fisse". In condizioni normali, però, molto difficilmente possono uscire dal corpo: esse si possono considerare come contenute in una *buca di potenziale* le cui pareti coincidono con la superficie del corpo, così come un liquido soggetto alla forza peso è contenuto dalle pareti di una vaschetta. In altre parole, sulla superficie esterna di un conduttore tutto avviene come se esistesse un doppio strato di cariche che avvolge completamente il corpo, determinando una brusca discontinuità di potenziale nel passaggio dall'interno all'esterno di esso (vedi cap. 3, esempio 3). E' appunto questa discontinuità a determinare il valore della "barriera" di potenziale che impedisce agli elettroni, in condizioni normali, di abbandonare il corpo.

Nel seguito, comunque, parleremo di *potenziale di un conduttore*, senza tenere conto della buca di potenziale suddetta, cioè della d.d.p. esistente tra l'interno del corpo e la sua superficie esterna.

I dielettrici sono, invece, sostanze in cui tutte le particelle cariche sono strettamente legate agli atomi e alle molecole cui appartengono. Sotto l'azione di un campo

² A tale proposito si osservi che, se si potessero fissare tutte le cariche di un corpo al loro posto, nulla accadrebbe immaginando il corpo stesso in un campo elettostatico: infatti, data l'immobilità delle cariche, la neutralità elettrica locale del corpo non verrebbe turbata. In una tale situazione, il corpo, indipendentemente dalla sua natura fisica, risulterebbe completamente "trasparente" al campo elettostatico. In altre parole, il campo sarebbe prodotto dalle sole cariche esterne, considerate agenti nel vuoto, come se il corpo non esistesse.

elettrico, esse possono spostarsi soltanto di poco rispetto alla loro posizione di equilibrio, e rimangono comunque ad essa legate.

Naturalmente, questa distinzione tra conduttori e isolanti si riferisce a una situazione ideale: nella realtà, anche in un isolante esistono particelle cariche non vincolate e capaci perciò di muoversi liberamente sotto l'azione di un campo elettrico. Esse però sono in numero estremamente minore che nei conduttori, e la loro "mobilità" è molto inferiore. Come vedremo nei paragrafi dedicati allo studio dei fenomeni di conduzione elettrica (cap. 6), l'attitudine a condurre l'elettricità, che distingue i conduttori dagli isolanti, può essere misurata attraverso un'opportuna grandezza fisica, detta *conducibilità elettrica*, la quale, in un tipico isolante (come ad esempio, il vetro, la gomma, la mica ecc.), è circa 10^{20} volte più piccola che in un buon conduttore (rame, argento, alluminio ecc.).

4.2 Equilibrio elettrostatico nei conduttori omogenei³

Diremo che un conduttore è *in equilibrio elettrostatico* quando in esso non si riscontra alcun moto macroscopico di cariche. Perché ciò accada occorre che sulle cariche libere presenti nel corpo non agiscano forze e che pertanto il campo elettrico macroscopico⁴ sia nullo in tutti i punti interni al conduttore. Per illustrare questa affermazione, consideriamo un corpo, inizialmente neutro, che venga immerso nel campo E_{est} prodotto da un insieme di cariche-sorgente fisse all'esterno del corpo. Sotto l'azione di E_{est} , le cariche libere del conduttore si muovono, dando luogo a una perturbazione della neutralità locale. Pur restando il corpo globalmente neutro (poiché nessuna carica è stata ad esso aggiunta o sottratta), si riscontra nel conduttore una distribuzione di cariche dei due segni, le quali danno luogo, a loro volta, a un campo "di reazione" E_r che si sovrappone a E_{est} , producendo un campo risultante

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{est} + \mathbf{E}_r.$$

La situazione evolve fino a quando il campo E_r non riesce a bilanciare l'azione di E_{est} in tutti i punti interni al conduttore. In queste condizioni, risulta

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_r = 0,$$

e le cariche libere, non più soggette a forze, restano ferme nella raggiunta configurazione di equilibrio elettrostatico. E' legittimo a questo punto chiedersi se il conduttore raggiunga in ogni caso una situazione di equilibrio elettrostatico o se sia possibile che ciò non accada. Per convincersi che, almeno in condizioni normali, uno stato di equilibrio deve in ogni caso essere raggiunto, basta osservare che, ove ciò non si verificasse,

³ L'ipotesi che il conduttore sia *omogeneo* e *isotermo*, cioè che sia costituito tutto dalla stessa sostanza e abbia la stessa temperatura in tutti i punti, è necessaria per escludere che esso possa essere sede di campi *elettromotori* (dei quali parleremo nel prossimo capitolo).

⁴ Per una precisazione di questo termine, vedi cap. 5.

le cariche continuerebbero a muoversi indefinitivamente nel conduttore, urtando continuamente contro quelle fisse e cedendo ad esse parte dell'energia cinetica guadagnata sotto l'azione del campo elettrico agente. Chiaramente, questa situazione non può protrarsi all'infinito se il conduttore è immerso in un campo elettrostatico, che è, per sua natura, irrotazionale (e quindi conservativo per il lavoro), così come, ad esempio, una pallina non può continuare a rimbalzare indefinitamente sul pavimento (per effetto del peso), a causa dell'energia che essa cede in continuazione al mezzo circostante e al pavimento. Fanno eccezione alcuni conduttori, i quali, portati a temperature estremamente basse (dell'ordine di quella dell'elio liquido), presentano fenomeni detti di *supercondutività* (vedi § 7.12): in questi casi, gli elettroni liberi, pur urtando continuamente contro gli ioni fissi del reticolo, non cedono ad essi alcuna energia poiché gli urti sono perfettamente elastici. Una volta innescato, in qualche modo, un movimento macroscopico di elettroni nel corpo, questo continua per tempi molto lunghi (dell'ordine degli anni). In un conduttore normale, posto a temperatura ambiente, ciò non accade e possiamo essere certi che esso raggiunge rapidamente⁵ una situazione di equilibrio. A conclusioni analoghe si perviene anche nel caso in cui al conduttore sia comunicata una carica netta; anche in questo caso essa si distribuisce sul corpo in maniera che, all'equilibrio, il campo elettrostatico al suo interno sia ovunque nullo.

Riassumendo: *dal punto di vista macroscopico, un corpo conduttore in equilibrio elettrostatico si presenta come una regione all'interno della quale risulta, in ogni punto, $\mathbf{E}=0$; di conseguenza, per il teorema di Gauss, all'interno del conduttore si ha*

$$\rho = 0.$$

Nei punti interni dei conduttori in equilibrio elettrostatico non possono dunque localizzarsi cariche. Diversa è la situazione in corrispondenza della superficie esterna: infatti, all'interfaccia tra il conduttore e lo spazio circostante, le forze di richiamo ivi esistenti, che nascono dalla presenza della barriera di potenziale di cui si è parlato nel paragrafo precedente, possono bilanciare le forze prodotte dal campo elettrico, impedendo alle cariche di abbandonare il corpo.⁶ All'equilibrio, sulla superficie del conduttore viene dunque a distribuirsi una carica (con densità superficiale σ variabile in genere da punto a punto) tale che il campo \mathbf{E} , all'interno del conduttore, sia ovunque nullo. All'esterno del corpo, l'azione di σ si sovrappone a quella delle altre sorgenti presenti, dando luogo a un campo risultante che è lo stesso che si otterrebbe se si "congelassero" le cariche superficiali sul conduttore, all'equilibrio, e si eliminasse,

⁵ Il tempo necessario per raggiungere l'equilibrio (detto *tempo di rilassamento*) in un buon conduttore è dell'ordine di $10^{-18} \div 10^{-19}$ s.

⁶ In questo senso, la barriera di potenziale agisce sulle cariche come un vincolo liscio unilaterale, capace cioè di impedire soltanto gli spostamenti perpendicolari alla superficie del corpo e diretti verso l'esterno. La discontinuità della funzione potenziale che corrisponde a questa barriera è comunque trascurata, in pratica, nella risoluzione dei problemi di potenziale.

per il resto, completamente il corpo. La presenza di una carica distribuita con densità superficiale σ sulla superficie Σ del conduttore implica (vedi § 2.6) l'esistenza di una discontinuità nella componente normale di \mathbf{E} in corrispondenza dei punti di Σ .⁷

In particolare, con riferimento alla situazione indicata nella figura 4.1, risulta

$$[E_n] = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

indicando con $[E_n]$ la differenza tra i valori assunti dalla componente di \mathbf{E} normale a Σ in punti immediatamente adiacenti da un lato e dall'altro della superficie. Tenendo conto poi del fatto che internamente al conduttore risulta $\mathbf{E}=0$, se ne conclude che all'esterno del conduttore, quale che sia la sua forma, la componente normale del campo elettrico è pari a σ/ϵ_0 ; si ha cioè

$$\lim_{P \rightarrow P_0 \text{ (dall'esterno)}} E_n(P) = \frac{\sigma(P_0)}{\epsilon_0} \quad (\text{teorema di Coulomb})$$

dove $\sigma(P_0)$ indica il valore di σ nel generico punto P_0 del conduttore (vedi fig. 4.1). Naturalmente, essendo la densità superficiale σ , in generale, variabile da punto a punto sulla superficie del conduttore, tale è pure la componente normale di \mathbf{E} all'esterno del corpo.

Il componente di \mathbf{E} tangente a Σ è nullo in corrispondenza dei punti di Σ : infatti (vedi § 2.6) le componenti tangenziali di \mathbf{E} non presentano discontinuità in corrispondenza di una distribuzione superficiale di carica e sono nulle all'interno del conduttore. In conclusione: *nel vuoto, nei punti adiacenti alla superficie del conduttore il campo elettrico, in condizioni di equilibrio elettrostatico, è normale ad essa*.

Questo risultato si ricava immediatamente anche sulla base di considerazioni diverse; essendo infatti $\mathbf{E} = -\nabla V$, all'interno del conduttore deve risultare $\nabla V(P)=0$ e quindi $V=\text{cost}$. Poiché il potenziale è continuo anche in corrispondenza di distribuzioni superficiali, esso è costante anche sulla superficie Σ . Ne deriva che il campo è ad essa normale e si può porre

$$E_n = -\frac{\partial V}{\partial n},$$

indicando con $\partial V / \partial n$ la derivata del potenziale effettuata "all'esterno" del conduttore lungo la normale ad esso.

Se sul corpo è presente una carica netta Q , tutto quanto si è detto continua a valere: la carica si distribuisce sulla superficie del conduttore con densità superficiale σ variabile da punto a punto. Il valore di Q può essere allora calcolato come segue:

$$Q = \iint_{\Sigma} \sigma dS = \epsilon_0 \iint_{\Sigma'} E_n dS$$

⁷ Questo anche quando alla σ si sovrapponga il doppio strato che determina la barriera di potenziale caratteristica del conduttore considerato.

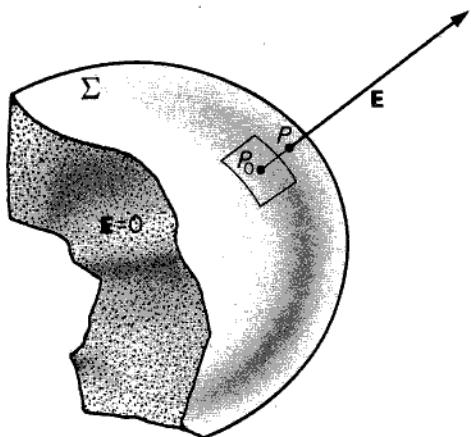


Figura 4.1

intendendo con ciò valutare il flusso di \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa Σ' che racchiuda interamente il conduttore (senza naturalmente contenere altre cariche, oltre quelle localizzate sul conduttore stesso).

Svolgiamo ora alcune considerazioni a proposito delle forze che agiscono sulle cariche localizzate alla superficie dei conduttori.

Dato un conduttore carico, supponiamo di conoscere la distribuzione della densità di carica superficiale σ su Σ . Considerati un generico punto P di Σ e un elemento superficiale dS centrato in P , valutiamo la forza agente sulla carica elementare σdS . Ricordando che il campo \mathbf{E} sulla pagina esterna di Σ è normale a Σ e ha modulo

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad [4.2.1]$$

saremmo indotti a concludere, a prima vista, che la forza agente sull'elemento di carica dS sia pari a

$$dF = E \sigma dS = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} dS. \quad [4.2.2]$$

Ciò però *non* è vero: a un esame più accurato, infatti, il valore corretto della forza risulta pari alla metà di quello previsto dalla [4.2.2]. Per convincersene, è sufficiente ricordare che, in base alla definizione generale di campo elettrico, per calcolare la forza agente sulla carica posta in P occorre togliere idealmente questa carica, immaginando di tenere fisse tutte le altre, e calcolare il campo da queste prodotto. Nel caso in esame, il valore di \mathbf{E} per il quale va moltiplicata la carica elementare σdS non è dunque quello dato dalla [4.2.1], che è prodotto da *tutte* le cariche esistenti su Σ , compreso lo stesso elemento di carica σdS , ma quello che si ottiene sottraendo al valore [4.2.1] il contributo fornito dall'elemento σdS . Per calcolare questo contri-

buto consideriamo due punti, P_1 e P_2 , immediatamente vicini a P dall'uno e dall'altro lato di Σ . Indichiamo con \mathbf{E}_1^{al} e \mathbf{E}_2^{al} i campi prodotti rispettivamente in P_1 e P_2 da tutte le altre cariche presenti su Σ eccetto la σdS , e con \mathbf{E}'_1 e \mathbf{E}'_2 i campi prodotti in P_1 e P_2 dalla sola carica elementare σdS (vedi fig. 4.2).

Ricordando che il campo all'interno del conduttore è nullo, mentre all'esterno verifica il teorema di Coulomb, si ha

$$\mathbf{E}_1^{\text{al}} + \mathbf{E}'_1 = 0$$

$$\mathbf{E}_2^{\text{al}} + \mathbf{E}'_2 = \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n},$$

dove \mathbf{n} è il versore della normale a Σ diretto verso l'esterno. Poiché i campi \mathbf{E}'_1 e \mathbf{E}'_2 debbono essere tra loro uguali e opposti (come per lo strato piano) e i campi \mathbf{E}_1^{al} e \mathbf{E}_2^{al} sono uguali tra loro (perché calcolati sostanzialmente nello stesso punto), sommando membro a membro risulta

$$2\mathbf{E}^{\text{al}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} = \mathbf{E}.$$

Ciò significa che nel punto P_1 il campo è fornito per metà dall'elemento di carica σdS e per la restante metà da tutte le altre cariche presenti su Σ .

Per calcolare la forza agente sulla carica σdS basta moltiplicare tale carica per il campo \mathbf{E}^{al} :

$$d\mathbf{F} = \sigma dS \frac{\mathbf{E}}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \mathbf{n}. \quad [4.2.3]$$

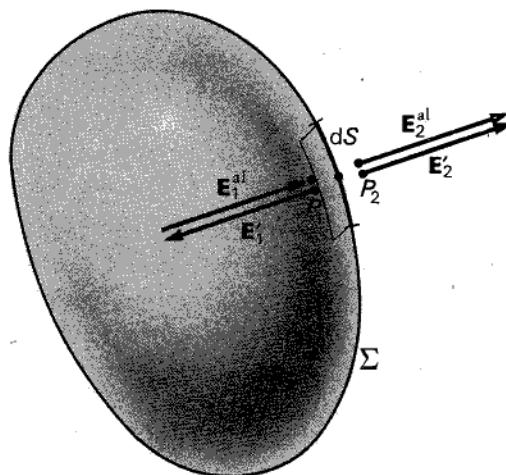


Figura 4.2

La forza agente sull'elemento di superficie dS del conduttore è dunque perpendicolare a tale superficie, diretta verso l'esterno⁸ e proporzionale all'area dell'elemento.

Le forze agenti su Σ si comportano pertanto in maniera del tutto analoga a quelle derivanti da una pressione p_{es} di valore

$$p_{es} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.$$

A questa grandezza (avente le dimensioni di una forza per unità di superficie) si dà il nome di *pressione elettrostatica*. Questo termine induce a considerare la situazione di equilibrio elettrostatico sulla superficie di un conduttore come dovuta alla pressione di un fluido immaginario che riempisse il conduttore e tendesse a espellerne le cariche, equilibrata da forze di richiamo esistenti alla superficie del corpo (e derivanti dalla barriera di potenziale ivi presente) che impediscono la fuoruscita.

Osserviamo infine che sarebbe stato possibile pervenire allo stesso risultato espresso dalla [4.2.3] considerando, in luogo della distribuzione superficiale σ su Σ , una distribuzione di volume limitata a una regione di spessore δ molto piccolo, attorno a Σ , e calcolando le forze agenti per unità di superficie su tale strato di cariche (lasciamo la dimostrazione al lettore).

4.3 Calcolo del campo in presenza di conduttori

Mostriamo ora come si imposta il calcolo del campo elettrostatico in presenza di conduttori nel vuoto. Consideriamo un conduttore, inizialmente scarico, al quale si comunichi una carica finita Q . Come già detto, questa si distribuisce sulla superficie Σ del conduttore con una densità superficiale σ , variabile da punto a punto, in modo da produrre campo nullo in tutti i punti interni al conduttore. Introdotto il potenziale V del campo prodotto da σ , analizziamo attentamente le condizioni cui tale funzione deve soddisfare sulla base delle proprietà generali del campo enunciate nei capitoli precedenti. Indicate con Γ e Ω rispettivamente le regioni interna ed esterna al conduttore (vedi fig. 4.3), si constata che la funzione potenziale V :

- a) è continua in tutti i punti di Ω , ivi compresa la frontiera Σ ;
- b) soddisfa in tutti i punti della regione di vuoto Ω all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = 0;$$

- c) assume valore costante in tutti i punti di Γ e in particolare sulla superficie Σ ;
- d) verifica la condizione

$$-\iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q;$$

⁸ Indipendentemente dal segno di σ , la forza dF è diretta verso l'esterno, poiché nella [4.2.3] compare il quadrato di σ .

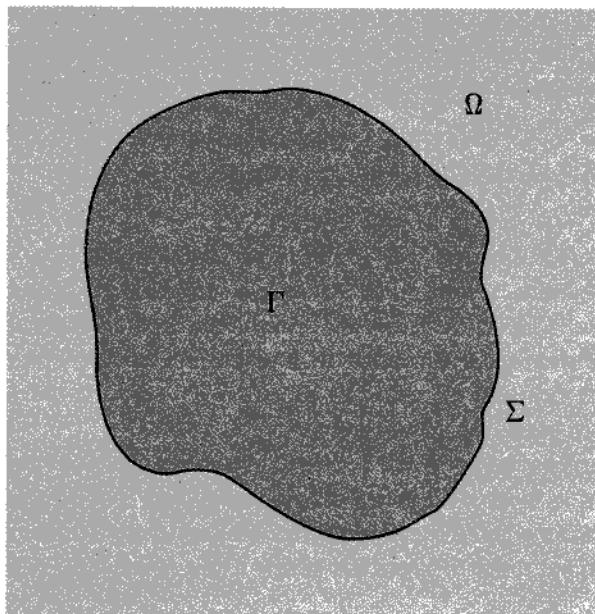


Figura 4.3

e) verifica la condizione

$$\lim_{P \rightarrow \infty} V(P) = 0.$$

La condizione (a) deriva dal fatto che il potenziale è continuo anche in presenza di distribuzioni superficiali;⁹ la condizione (b) tiene conto dell'assenza di cariche al di fuori del conduttore; a proposito della (c), osserviamo che, a priori, si sa soltanto che il potenziale è costante su Σ , ma non se ne conosce il valore; esso, d'altra parte, non può essere assegnato ad arbitrio, se si vuole che valga la condizione (e); per quanto riguarda la (d), si noti che l'integrale va esteso alla pagina esterna di Σ , giacché la derivata normale di V è discontinua su Σ . L'ultima condizione, infine, deriva dal fatto che la distribuzione di cariche σ che crea il campo è tutta al finito, essendo il conduttore limitato.¹⁰ A questo proposito vale la pena ricordare che la condizione (e) va intesa nel senso seguente: comunque si fissi $\epsilon > 0$, si può determinare una sfera (che contiene il corpo conduttore) al di là della quale la funzione V assuma ovunque valori minori di ϵ (condizione di *regolarità all'infinito*).

Poniamoci ora la seguente domanda: esiste una sola funzione che soddisfi contem-

⁹ Come sempre, si esclude la presenza di un doppio strato superficiale, il cui effetto, comunque, potrebbe essere valutato facilmente; vedi nota 6.

¹⁰ Naturalmente si sarebbe potuto porre il potenziale all'infinito pari a una costante non nulla, modificando la condizione (c).

poraneamente tutte queste condizioni?¹¹ La risposta è affermativa, come verrà dimostrato in 4.3.1.

Esempio. Sfera conduttrice

A titolo di esempio, consideriamo il caso semplice di una sfera conduttrice, di raggio R e centro O , posta nel vuoto; sia Q il valore della carica deposta su essa. Per ovvi motivi di simmetria, è evidente che la soluzione V deve dipendere soltanto dalla distanza r dal centro della sfera. Scrivendo l'equazione di Laplace in coordinate sferiche, si ha pertanto, per ogni $r > R$,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

L'equazione di Laplace si è perciò ridotta a una semplice equazione ordinaria, il cui integrale generale è dato da

$$V(r) = \frac{A}{r} + B,$$

con A e B costanti arbitrarie.

Si verifica agevolmente che, comunque si fissino A e B , la funzione $V(r)$ verifica le condizioni (a) e (c): essa, infatti, è continua per $r \geq R$ e assume valore costante

$$V(R) = \frac{A}{R} + B$$

sui punti di Σ . Affinché la $V(r)$ verifichi la condizione (e), basta porre $B=0$:

$$V(r) = \frac{A}{r}.$$

Inoltre si ha, sui punti di Σ ,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{A}{R^2}.$$

Dalla condizione (d) si ottiene dunque

$$-\iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS = \frac{A}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q,$$

e infine

$$A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}.$$

¹¹ Osserviamo che l'esistenza di almeno una soluzione è garantita dalla "fisica" del problema; d'altra parte, anche dal punto di vista strettamente matematico, si potrebbe mostrare che le condizioni (a)-(e) sono sufficienti a garantire l'esistenza di una soluzione in tutti i casi di interesse pratico.

La soluzione cercata è pertanto

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r};$$

essa corrisponde, per $r > R$, al potenziale che sarebbe prodotto da una carica puntiforme di valore Q posta al centro della sfera.

4.3.1 Dimostrazione della proprietà di unicità

Il primo passo della dimostrazione si riduce, in ultima analisi, alla ricerca di una funzione $V(P)$ che soddisfi le condizioni (a), (b), (c), (e) e che inoltre assuma il valore costante V_0 , supposto noto, sulla superficie: è questo il cosiddetto *problema di Dirichlet esterno* (vedi app. A), l'unicità della cui soluzione si dimostra facilmente: Infatti, supponiamo di conoscere due funzioni $V_1(P)$ e $V_2(P)$ che risultino entrambe soluzioni del problema proposto; in tutti i punti della regione Ω esse verificano le

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad \nabla^2 V_2 = 0.$$

Costruiamo ora la funzione

$$U(P) = V_1(P) - V_2(P);$$

essa verifica, in ogni punto della regione Ω , l'equazione

$$\nabla^2 U = 0$$

(perché evidentemente $\nabla^2 U = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2$). D'altra parte, essendo uguali le condizioni al contorno per V_1 e V_2 , si ha

$$V_1|_{\Sigma} = V_2|_{\Sigma} = V_0,$$

e quindi

$$U|_{\Sigma} = 0.¹²$$

Inoltre, si ha

$$\lim_{P \rightarrow \infty} U(P) = \lim_{P \rightarrow \infty} V_1(P) - \lim_{P \rightarrow \infty} V_2(P) = 0.$$

Infine, tenendo conto della continuità di V_1 e V_2 nella regione $\Omega \cup \Sigma$,¹³ si conclude che anche la funzione U è continua in $\Omega \cup \Sigma$.

Riassumendo, se $V_1(P)$ e $V_2(P)$ sono soluzioni del problema, la loro differenza $U(P)$ dev'essere continua in tutta la regione esterna al conduttore, compresa la sua superficie, verificare l'equazione di Laplace nel vuoto, assumere valore nullo sulla frontiera finita di tale dominio e annullarsi all'infinito. E' facile convincersi, sulla base del *teorema del massimo* per le funzioni armoniche (vedi § A.21), che l'unica soluzione di questo problema è quella identicamente nulla

$$U(P) \equiv 0.$$

¹² Si è indicato con $U|_{\Sigma}$ il valore assunto sui punti di Σ dalla funzione U .

¹³ Con questo simbolo si intende la regione Ω inclusa la sua frontiera Σ .

Se ne conclude che

$$V_1(P) = V_2(P);$$

di qui, l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet esterno.

Il secondo passo della dimostrazione consiste nella determinazione del valore del potenziale del conduttore a partire dalla conoscenza della carica totale Q . Per dimostrare l'unicità della soluzione di questo problema, indichiamo con $V_0(P)$ la funzione potenziale che assume il valore V_0 sui punti di Σ . Conoscendo la $V_0(P)$, possiamo calcolarne la derivata normale $\partial V_0 / \partial n$ sui punti della pagina esterna di Σ e ottenere quindi il valore della carica Q_0 :

$$Q_0 = -\epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial V_0}{\partial n} dS.$$

Tale carica corrisponde a quella che sarebbe presente globalmente sul conduttore qualora il suo potenziale avesse il valore V_0 .

Immaginiamo ora di attribuire un nuovo valore, V_1 , al potenziale del conduttore e chiediamoci come si modifichi, in corrispondenza, la funzione potenziale. Indicando con $V_1(P)$ la nuova funzione, è facile mostrare che

$$V_1(P) = \frac{V_1}{V_0} V_0(P). \quad [4.3.1]$$

Infatti la $V_1(P)$ soddisfa l'equazione di Laplace nella regione Ω , poiché risulta

$$\nabla^2 V_1 = \frac{V_1}{V_0} \nabla^2 V_0 = 0;$$

essa verifica inoltre le condizioni (a) ed (e) e assume il valore V_1 su Σ .

Tale risultato è di notevole importanza, poiché, quando sia nota la soluzione del problema corrispondente a un assegnato valore del potenziale sul conduttore, è immediato, attraverso la [4.3.1], calcolare la soluzione corrispondente a un qualsiasi altro valore. La [4.3.1] ci dice inoltre che le superfici equipotenziali relative a una soluzione restano ancora equipotenziali per ogni altra soluzione (anche se, ovviamente, il valore del potenziale su ciascuna superficie cambia da caso a caso). In altre parole, l'andamento delle linee vettoriali del campo resta lo stesso, al variare del potenziale assegnato al conduttore.¹⁴ Ciò è una diretta conseguenza della linearità dell'equazione di Laplace: infatti, se l'equazione che governa il potenziale non fosse lineare (come può accadere in presenza di taluni mezzi materiali) l'aspetto del campo potrebbe variare in funzione del potenziale del conduttore.

A questo punto, nota la funzione $V_1(P)$, si calcola subito la carica Q_1 :

$$Q_1 = -\epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial V_1}{\partial n} dS = -\epsilon_0 \frac{V_1}{V_0} \left[\iint_{\Sigma} \frac{\partial V_0}{\partial n} dS \right] = \frac{V_1}{V_0} Q_0.$$

Risulta così

$$\frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_0}{V_0};$$

¹⁴ Si noti che questa proprietà non vale se i corpi carichi sono più di uno; su questo punto torneremo in seguito.

dall'arbitrarietà di Q_1 , Q_0 , V_1 e V_0 discende che il rapporto tra la carica trasmessa al conduttore e il potenziale cui esso si porta è costante, indipendentemente dal valore di Q e V . Si ha, cioè,

$$\frac{Q}{V} = C. \quad [4.3.2]$$

La carica totale trasmessa al conduttore risulta dunque proporzionale al valore del potenziale che il corpo assume in corrispondenza; il coefficiente di proporzionalità C , che prende il nome di *capacità* del conduttore isolato, dipende soltanto dalla geometria del corpo.¹⁵ Le dimensioni della capacità sono $[C] = [Q]/[V]$; la sua unità di misura è pertanto il coulomb/volt (C/V) e assume il nome di "farad" (F). Come si vedrà meglio nel seguito, i valori di capacità di uso comune sono molto piccoli rispetto a questa unità: molto usati sono pertanto i suoi sottomultipli μF (10^{-6} F) e pF (10^{-12} F).

E' ora evidente che esiste una sola funzione potenziale compatibile con il desiderato valore Q della carica presente su Σ . Ammesso infatti che esistano due funzioni $V(P)$ e $V'(P)$ che diano luogo alla stessa Q , queste, per la [4.3.2], devono corrispondere allo stesso valore del potenziale su Σ . Pertanto, in base alla già dimostrata unicità della soluzione del problema di Dirichlet esterno, le due funzioni coincidono.

4.4 Il campo nei conduttori cavi: schermi elettrostatici

Consideriamo un conduttore Γ dotato di una cavità interna (vedi fig. 4.4) e comunichiamo ad esso una carica Q , come nel paragrafo precedente; ci si potrebbe aspettare che Q si distribuisca sia sulla superficie esterna Σ_{est} che su quella interna Σ_{int} . Dimostreremo, invece, che la carica si localizza soltanto su Σ_{est} .

A tal fine, consideriamo la funzione potenziale $V(P)$ soluzione del nostro problema: in tutti i punti interni alla regione Ω limitata da Σ_{int} essa soddisfa l'equazione di Laplace, per l'assenza di cariche all'interno della cavità:

$$\nabla^2 V = 0.$$

D'altra parte, il potenziale V deve assumere valore costante V_0 in tutti i punti del conduttore e quindi anche sui punti di Σ_{int} . Si conclude pertanto che il potenziale $V(P)$ è continuo in $\Omega \cup \Sigma_{\text{int}}$, soddisfa la $\nabla^2 V = 0$ in Ω e assume valore costante sui punti di Σ_{int} .

E' questa la forma di un *problema di Dirichlet interno* (vedi § A.21) corrispondente a un valore costante del potenziale sulla frontiera della regione Ω . Ragionando come nel paragrafo precedente, si verifica che unica sua soluzione è la costante

$$V(P) = V_0.$$

Possiamo concludere che nella regione Ω , interna alla cavità, risulta ovunque

$$V(P) = V_0$$

¹⁵ Ad esempio, per una sfera conduttrice isolata, si ha $C = Q/V = 4\pi\epsilon_0 R$. Per $R \approx 1\text{m}$, $C \approx 10^{-10}\text{ F} = 100\text{ pF}$.

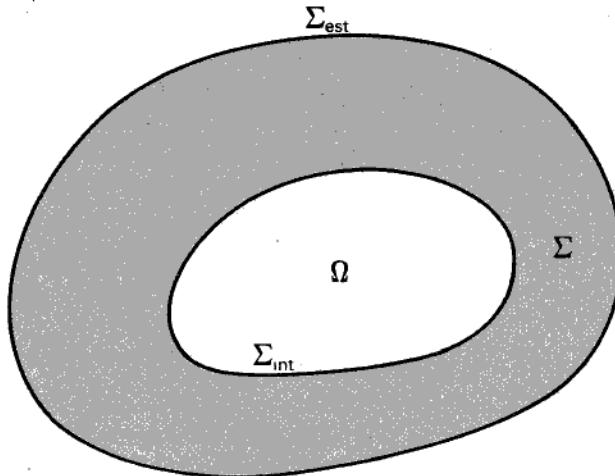


Figura 4.4

e quindi

$$\mathbf{E} = 0.$$

In particolare, è nulla la componente normale di \mathbf{E} in tutti i punti di Σ_{int} : di conseguenza, su Σ_{int} anche la densità superficiale σ è nulla (per il teorema di Coulomb) e tutta la carica si distribuisce sulla superficie esterna Σ_{est} .

Il ragionamento precedente porta pure a concludere che ogni distribuzione di cariche all'esterno del conduttore non produce campo all'interno della cavità: in altre parole, un conduttore cavo si comporta come uno *schermo elettrostatico* nei confronti della cavità.¹⁶

Inoltre il comportamento dello schermo è “simmetrico”, nel senso che eventuali distribuzioni di cariche poste nella cavità non influenzano la regione esterna.

Ciò può apparire a prima vista errato. Disponendo infatti all'interno della cavità della figura 4.4 un corpo carico C , ad esempio conduttore (vedi fig. 4.5), costatiamo che intorno ad esso esiste un campo elettrico le cui linee vettoriali fanno capo, da un lato al conduttore stesso, dall'altro, necessariamente, alla parete interna Σ_{int} della cavità. Ciò induce a pensare che la carica localizzata su tale superficie debba essere uguale e contraria a quella del corpo C . Possiamo mostrare che ciò è vero applicando il teorema di Gauss alla superficie Σ della figura 4.5 (*linea tratteggiata*).

¹⁶ Gli schermi elettrostatici che si usano in pratica non consistono di norma in conduttori cavi completamente chiusi, bensì in reti metalliche chiuse a maglie più o meno fitte (*gabbia di Faraday*). Si può infatti mostrare, come è del resto intuitivo, che i campi dovuti a distribuzioni di cariche esterne alla rete “penetrano” attraverso le sue maglie soltanto per una distanza pari a qualche passo della maglia. Ad esempio, una stanza in cui il soffitto e le pareti incorporino, come una sorta di armatura, una rete metallica, costituisce un ambiente schermato elettrostaticamente dall'esterno. Certi laboratori sono appunto schermati in questo modo affinché le esperienze non vengano perturbate da campi esterni.

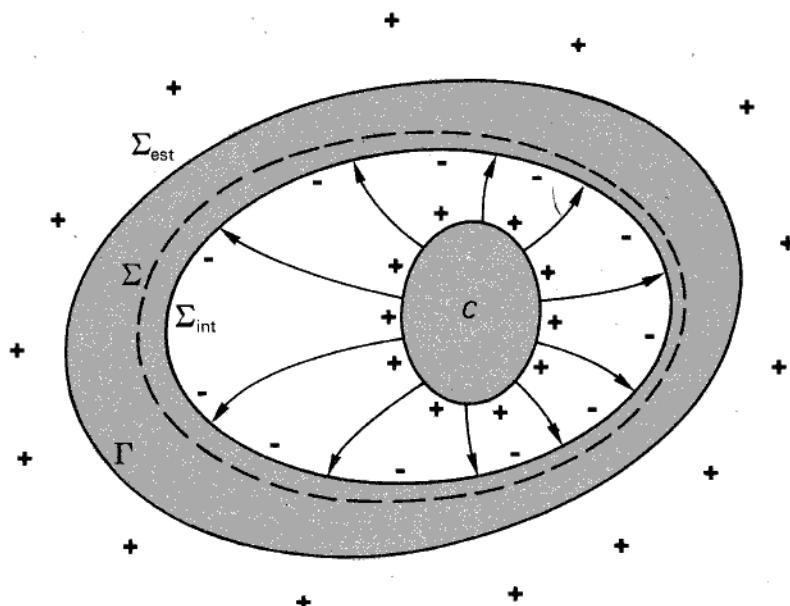


Figura 4.5

Il flusso del campo elettrostatico attraverso Σ è nullo (perché in ogni punto di Σ il campo è nullo). Di conseguenza è nulla la carica totale contenuta in Σ : sulle pareti della cavità deve dunque localizzarsi una carica uguale e opposta a quella del corpo C in essa contenuto. Inoltre il conduttore Γ , inizialmente scarico, deve restare tale anche dopo l'introduzione di C entro la cavità (per la conservazione della carica). Ciò può verificarsi soltanto se sulla superficie Σ_{est} si localizza una carica uguale e opposta a quella che si localizza su Σ_{int} (uguale quindi a quella posseduta dal corpo carico C posto all'interno). La carica su Σ_{est} produce un campo all'esterno della cavità; sarebbe però erroneo dedurre che il corpo carico posto all'interno influenzi elettricamente la regione esterna. Infatti ciò che altera la situazione elettrostatica all'esterno della cavità è l'introduzione, in essa, di un corpo carico: ma tale evento non si svolge completamente all'interno della cavità, poiché vi prende parte, cedendo una parte di carica, il mondo esterno. In altre parole, durante questa operazione, l'interno della cavità è in comunicazione con l'esterno.

Consideriamo invece che cosa accade se C è già contenuto entro la cavità e noi ne cambiamo semplicemente la posizione, o lo dividiamo in due parti, o compiamo qualsiasi altra operazione fisica che implichi la conservazione della carica elettrica totale nella cavità. Queste operazioni non hanno alcuna influenza sullo spazio esterno: in altre parole, la distribuzione della carica sulla superficie esterna del conduttore non cambia quando si modificano le condizioni all'interno della cavità. Se immaginiamo, ad esempio, di cambiare posizione al corpo carico nella cavità, la carica totale pre-

sente sulla superficie Σ_{est} del corpo Γ resta immutata; di conseguenza il calcolo del potenziale all'esterno di Σ_{est} può essere impostato come nel paragrafo precedente e la soluzione è indipendente dalla posizione di C nella cavità.

La distribuzione di carica sulla superficie esterna e il campo all'esterno del conduttore, a parità di forma e posizione di esso e di condizioni all'esterno (altre cariche vicine, altri conduttori vicini ecc.), sono indipendenti da ciò che accade nella cavità: *lo schermo elettrostatico funziona in ambedue i sensi, isolando l'interno da influenze esterne e viceversa.*

*4.4.1 Induzione elettrostatica

Vogliamo ora dare una descrizione non più soltanto qualitativa dei fenomeni di induzione elettrostatica esaminati nel capitolo 1. A tal fine, supponiamo di portare un corpo conduttore, inizialmente scarico, in una regione in cui vi sia un campo elettrostatico prodotto da una distribuzione di cariche, supposte fisse, all'esterno del corpo. I portatori di carica presenti nel conduttore, soggetti all'azione del campo, si muovono, giungendo in un tempo brevissimo sulla superficie e distribuendosi su essa in maniera da bilanciare punto per punto, entro il conduttore, il campo prodotto dalle cariche esterne. Di conseguenza il campo diviene nullo nella regione occupata dal conduttore, mentre nella zona esterna è deformato, rispetto alla configurazione che aveva in assenza del conduttore. Ciò è rappresentato nella figura 4.6 in relazione a una situazione in cui il campo iniziale è stato scelto uniforme.

E' necessario a questo punto calcolare la distribuzione di carica indotta sul corpo conduttore.

Mostriamo innanzitutto che la soluzione del problema è unica. Immaginiamo di conoscere posizione e valore delle cariche q_{est} inducenti, supponendo inoltre che la loro distribuzione non venga modificata quando si introduce il corpo conduttore: in altre parole, le q_{est} (esterne al corpo) siano rigidamente fissate nel sistema di riferimento del laboratorio. Indichiamo ora con $V_{\text{est}}(P)$ il potenziale (noto) prodotto nel generico punto P dalle cariche q_{est} ; esso è in generale variabile da punto a punto su Σ , in quanto, a essere costante nel conduttore, è il potenziale globale V , somma del potenziale V_{est} e del potenziale V_{ind} prodotto dalla distribuzione superficiale di cariche indotte su Σ . La funzione V_{ind} deve verificare, in tutti i punti della regione Ω esterna alla superficie Σ , l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V_{\text{ind}} = 0 \quad [4.4.1]$$

(in quanto le sorgenti di V_{ind} sono localizzate soltanto sulla superficie Σ).

Sui punti di Σ deve inoltre risultare

$$V(P)|_{\Sigma} = V_{\text{est}}(P)|_{\Sigma} + V_{\text{ind}}(P)|_{\Sigma} = \text{cost.} \quad [4.4.2]$$

Se supponiamo per un momento di conoscere il valore V_0 di tale costante, la [4.4.2] assume la forma

$$V_{\text{ind}}(P)|_{\Sigma} = V_0 - V_{\text{est}}(P)|_{\Sigma}. \quad [4.4.3]$$

Occorre dunque trovare una funzione $V_{\text{ind}}(P)$, continua nella regione $\Omega \cup \Sigma$, che verifichi l'equazione di Laplace in tutti i punti di Ω , assuma sulla frontiera Σ di tale regione i valori dati dalla [4.4.3] e abbia comportamento "regolare" all'infinito.

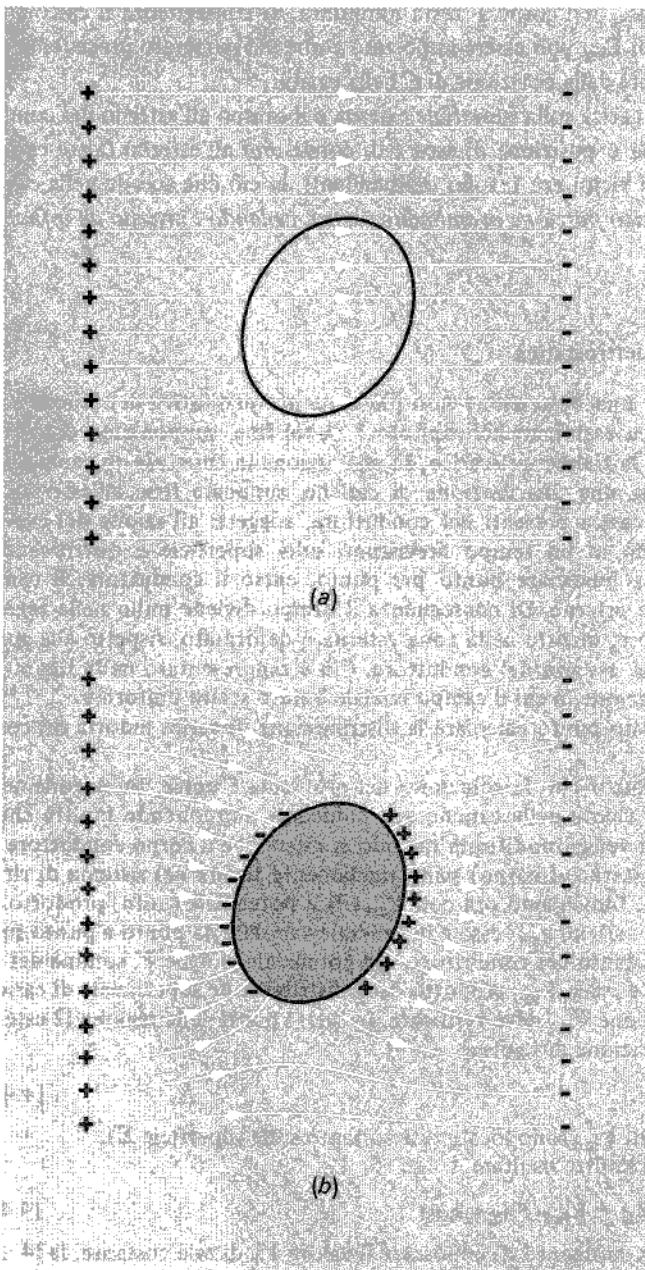


Figura 4.6

Immersione di un conduttore scarico in un campo elettrostatico uniforme: (a) situazione iniziale; (b) formazione (istantanea) di cariche indotte sulla superficie.

Si tratta quindi di un problema di Dirichlet esterno, corrispondente alla condizione al contorno [4.4.3]. Per esso, con i metodi già illustrati nei paragrafi precedenti, il lettore può agevolmente dimostrare l'unicità della soluzione. Supponiamo di riuscire a determinare in qualche modo tale soluzione $V_{\text{ind}}(P)$; essa, sommata alla $V_{\text{est}}(P)$ prodotta dalle cariche sorgenti fisse q_{est} , fornisce il potenziale $V(P)$ all'esterno del conduttore. E' possibile allora calcolare la derivata $\partial V / \partial n$ nei punti della *pagina esterna* Σ^+ di Σ ; essendo poi su quella *interna* (Σ^-) $\partial V / \partial n = 0$ (poiché il potenziale V è costante internamente a Σ), si conclude

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\Sigma^+} = - \frac{\sigma_{\text{ind}}}{\epsilon_0}.$$

E' così possibile determinare, punto per punto su Σ , la distribuzione di carica indotta σ_{ind} . Il problema sarebbe completamente risolto se si conoscesse effettivamente il valore della costante V_0 . Esso però non è noto a priori e l'analisi non può considerarsi ancora conclusa. A conferma di ciò, si noti che la carica totale corrispondente al valore assunto per V_0 è pari a

$$Q_{\text{ind}} = \iint_{\Sigma} \sigma_{\text{ind}} dS = -\epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad [4.4.4]$$

Per ipotesi, d'altra parte, il corpo deve essere scarico; di conseguenza il valore V_0 del potenziale su Σ non può essere assegnato ad arbitrio, ma dev'essere pari al particolare valore V'_0 per il quale la soluzione $V(P)$ fornisca

$$Q_{\text{ind}} = 0.$$

Un modo semplice per determinare V'_0 consiste nel sommare alla soluzione $V(P)$, corrispondente al generico valore V_0 , una $V_{Q_{\text{ind}}}(P)$ che sia soluzione del problema del paragrafo precedente in corrispondenza ad un valore Q_{ind} di carica dato dalla [4.4.4]. La funzione

$$V'(P) = V(P) - V_{Q_{\text{ind}}}(P)$$

fornisce la soluzione, unica, del problema, poiché soddisfa tutte le condizioni di esso ed è inoltre tale che

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial V'}{\partial n} dS = 0.$$

Essa corrisponde, cioè, a una carica totale nulla sul conduttore in esame.

I ragionamenti svolti ci consentono di riprendere un argomento già introdotto nel capitolo 3 a proposito della definizione operativa del campo elettrostatico.

Se più conduttori carichi sono tenuti fermi nelle loro posizioni mediante vincoli opportuni, la distribuzione di carica su ciascuno di essi è determinata dalla posizione e dalla carica di tutti gli altri: basta, ad esempio, spostare uno dei conduttori per modificare, per effetto dell'induzione elettrostatica, la distribuzione di carica anche sugli altri conduttori. Le cariche elettriche non sono quindi fisse e la misura del campo elettrico non può essere effettuata mediante una carica sonda di valore qualsivoglia, ma solo con una carica tanto *piccola* da non modificare apprezzabilmente, con la sua presenza, la distribuzione di carica preesistente.

Consideriamo ad esempio un piano infinito che separi lo spazio in due regioni:

da un lato lo spazio è riempito di un materiale conduttore, dall'altro c'è il vuoto. Il conduttore, e quindi anche il piano che ne costituisce la superficie, sono scarichi. In tutto lo spazio il campo elettrico è certamente nullo. Supponiamo di volerlo "misurare" nel punto P mediante una carica sonda. Disposta la carica q in P , la superficie del conduttore si carica, per induzione, di segno opposto rispetto alla carica sonda. Se sceglieremo quest'ultima positiva, il piano si carica negativamente e sulla carica sonda viene ad agire una forza dovuta alle cariche negative indotte. Misurando tale forza F e dividendola per q , si ottiene un campo

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$

diverso da zero: esso non può essere il campo che volevamo misurare, cioè quello (nullo) che esisteva in assenza della carica sonda. Per ridurre l'errore dovremmo considerare il rapporto F/q per valori di q il più possibile piccoli.

Calcoliamo ora la forza che si esercita sulla carica q . A tal fine, occorre trovare una funzione potenziale V la quale:

a) soddisfi l'equazione di Poisson¹⁷

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} q \delta(P)$$

nel semispazio vuoto a destra del conduttore;

- b) sia continua fin sul piano conduttore;
- c) assuma valore costante su tale piano;
- d) abbia un comportamento regolare all'infinito.

La ricerca diretta della soluzione presenta notevoli difficoltà; più semplice è aggirare il problema mediante il teorema di unicità. A tal fine, consideriamo una nuova situazione, in cui al posto del conduttore vi sia una carica puntiforme negativa, di valore $-q$, disposta in modo da costituire l'immagine speculare di q rispetto a S (vedi fig. 4.7). Sovrapponendo i potenziali prodotti singolarmente dalle due cariche, si ottiene

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right),$$

dove r_1 e r_2 sono rispettivamente le distanze fra il punto P in cui si valuta il potenziale e le cariche $+q$ e $-q$. E' immediato verificare che la funzione $V(P)$ così costituita soddisfa tutte le condizioni (a)-(d); in particolare essa assume valore costante sui punti di S . Per il teorema di unicità, la $V(P)$ costituisce la soluzione del nostro problema per il semispazio a destra di S . E' dunque calcolabile la forza \mathbf{F} che agisce su q per effetto della presenza del piano conduttore S : essa coincide con quella esercitata dalla carica immagine $-q$; si ha cioè

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4r^2} \mathbf{n},$$

dove \mathbf{n} è il versore della congiungente le due cariche, orientato dalla carica immagine a quella vera, e r è la distanza di ciascuna carica dal piano S .

¹⁷ Indichiamo qui con $\delta(P)$ la funzione impulsiva unitaria centrata nel punto P (vedi app. D).

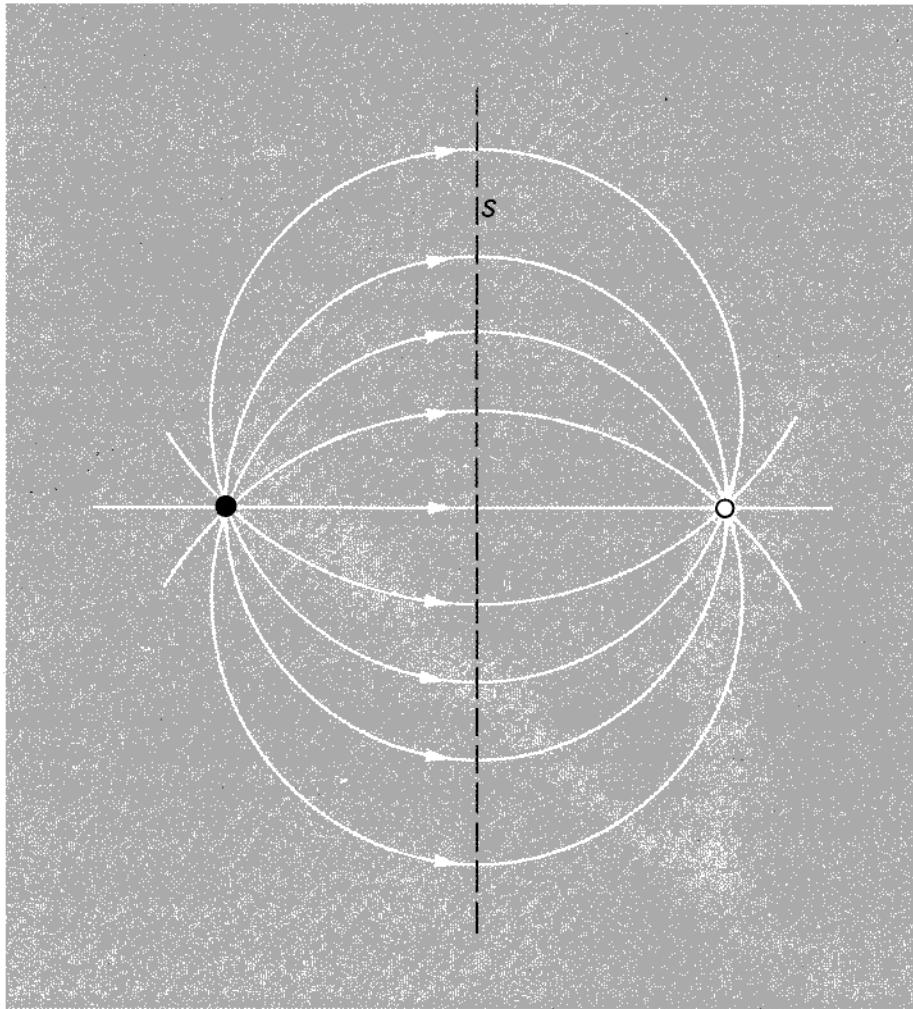


Figura 4.7

4.5 I condensatori

Con il termine *condensatore* intendiamo un sistema fisico costituito da due conduttori (*armature*) affacciati e separati da un mezzo isolante, caricati in modo che la carica comunicata a uno sia uguale e opposta a quella dell'altro. Spesso le armature del condensatore sono realizzate in forma di lamine di dimensioni molto maggiori rispetto alla loro distanza.

Questi semplici dispositivi consentono di creare intensi campi elettrostatici in regioni limitate e di immagazzinare quindi notevoli quantitativi di energia elettrostatica. Come vederemo nel seguito, ciò è conseguenza del seguente fatto: dette A e

B le armature del condensatore e $+Q$ e $-Q$ le cariche su esse presenti, la d.d.p. tra le armature è proporzionale al valore di Q :

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C}, \quad [4.5.1]$$

ove C , denominato *capacità* del condensatore, rappresenta un coefficiente caratteristico di questo; essendo omogeneo all'analogo coefficiente introdotto nel paragrafo 4.3 per un conduttore isolato,¹⁸ si misura in farad.

La [4.5.1] può essere verificata sperimentalmente per ogni condensatore; cercheremo tuttavia di dedurla con semplici ragionamenti sulla base di quanto visto in precedenza.

Affrontiamo, per cominciare, un problema più generale, considerando un sistema fisico costituito da due corpi conduttori Γ_1 e Γ_2 (vedi fig. 4.8) di forma qualsiasi, non in contatto tra loro, e caricati rispettivamente con cariche Q_1 e Q_2 .

Siano V_1 e V_2 i potenziali dei conduttori. Dette Σ_1 e Σ_2 le superfici dei due corpi e Ω lo spazio esterno ad essi, la funzione potenziale V dovrà:

- a) essere continua in $\Omega \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$;
- b) verificare l'equazione di Laplace in Ω ;
- c) assumere i valori costanti V_1 e V_2 rispettivamente sulle superfici Σ_1 e Σ_2 ;
- d) annullarsi all'infinito.

La funzione V è dunque soluzione di un problema di Dirichlet esterno, con frontiera multipla $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, la cui soluzione, com'è noto, è unica (vedi § A.21).

Indichiamo ora con $V_{10}(P)$ e $V_{01}(P)$ le soluzioni corrispondenti rispettivamente alle seguenti condizioni al contorno:

$$c') \quad \begin{cases} V=1 & \text{su } \Sigma_1 \\ V=0 & \text{su } \Sigma_2; \end{cases}$$

$$c'') \quad \begin{cases} V=0 & \text{su } \Sigma_1 \\ V=1 & \text{su } \Sigma_2. \end{cases}$$

Ciò significa che entrambe le funzioni $V_{10}(P)$ e $V_{01}(P)$ soddisfano alle precedenti condizioni (a), (b), (d) e che inoltre la V_{10} soddisfa la (c') e la V_{01} la (c'').¹⁹

Consideriamo ora la funzione

$$V(P) = V_1 \cdot V_{10}(P) + V_2 \cdot V_{01}(P),$$

con V_1 e V_2 costanti arbitrarie. In ogni punto di Ω si ha

$$\nabla^2 V = V_1 \nabla^2 V_{10} + V_2 \nabla^2 V_{01};$$

¹⁸ Quest'ultimo si può sempre riguardare come armatura di un condensatore la cui seconda armatura sia costituita da un conduttore cavo di raggio molto grande (questo conduttore è spesso costituito dalle pareti del laboratorio).

¹⁹ Per motivi dimensionali conviene attribuire dimensione di potenziale alle costanti V_1 e V_2 e considerare adimensionali le funzioni $V_{10}(P)$ e $V_{01}(P)$.

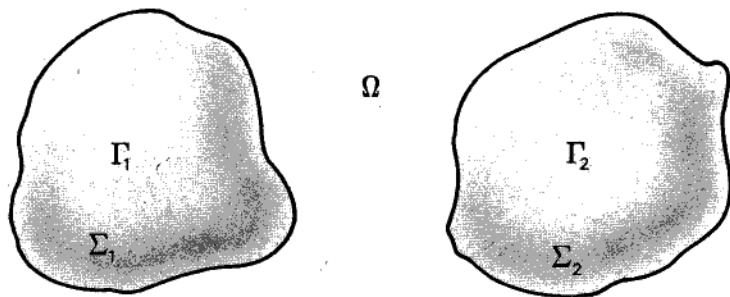


Figura 4.8

essendo

$$\nabla^2 V_{10} = \nabla^2 V_{01} = 0,$$

si ha

$$\nabla^2 V = 0.$$

Anche la V , d'altra parte, come la V_{10} e la V_{01} , si annulla all'infinito. Inoltre le funzioni V_{10} e V_{01} sono continue in $\Omega \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, e tale risulta anche la V .

Infine si ha, sui punti di Σ_1

$$V|_{\Sigma_1} = V_1 \cdot V_{10}|_{\Sigma_1} + V_2 \cdot V_{01}|_{\Sigma_1} = V_1 \cdot 1 + V_2 \cdot 0 = V_1,$$

e sui punti di Σ_2

$$V|_{\Sigma_2} = V_1 \cdot V_{10}|_{\Sigma_2} + V_2 \cdot V_{01}|_{\Sigma_2} = V_1 \cdot 0 + V_2 \cdot 1 = V_2.$$

La funzione V , soddisfacendo anche alla condizione (c), è soluzione del nostro problema: naturalmente, la conoscenza di V presuppone quella delle funzioni $V_{10}(P)$ e $V_{01}(P)$, che per il momento supporremo note. Tali funzioni dipendono esclusivamente dalla geometria del problema, cioè dalla forma delle superfici Σ_1 e Σ_2 , poiché i valori da esse assunti su Σ_1 e Σ_2 devono comunque soddisfare le condizioni (c') e (c'').

Le cariche presenti sui due corpi sono

$$Q_1 = -\epsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\epsilon_0 V_1 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V_{10}}{\partial n} dS - \epsilon_0 V_2 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V_{01}}{\partial n} dS,$$

$$Q_2 = -\epsilon_0 \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\epsilon_0 V_1 \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial V_{10}}{\partial n} dS - \epsilon_0 V_2 \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial V_{01}}{\partial n} dS.$$

Ponendo

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\epsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V_{10}}{\partial n} dS, & C_{12} &= -\epsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V_{01}}{\partial n} dS, \\ C_{21} &= -\epsilon_0 \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial V_{10}}{\partial n} dS, & C_{22} &= -\epsilon_0 \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial V_{01}}{\partial n} dS, \end{aligned} \quad [4.5.2]$$

si ha

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ Q_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{aligned} \quad [4.5.3]$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad [4.5.3']$$

La matrice così definita prende il nome di *matrice di capacità* del sistema in oggetto: i suoi elementi dipendono soltanto dalla geometria del sistema. Si potrebbe verificare (non lo facciamo per brevità) che tale matrice è simmetrica; risulta cioè

$$C_{12} = C_{21} \quad [4.5.4]$$

Infine, dalle [4.5.3] e [4.5.3'] si ha

$$C_{11} = \left. \frac{Q_1}{V_1} \right|_{V_2=0}, \quad C_{12} = C_{21} = \left. \frac{Q_1}{V_2} \right|_{V_1=0}, \quad C_{22} = \left. \frac{Q_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad [4.5.5]$$

Per calcolare ad esempio il coefficiente C_{11} , si può pensare di "mettere a terra"²⁰ il conduttore Γ_2 mantenendo Γ_1 al potenziale V_1 : una volta calcolata la funzione $V_{10}(P)$, il calcolo (o la misura) della carica Q_1 presente su Γ_1 fornisce il valore del rapporto Q_1/V_1 . In maniera analoga si procede per gli altri coefficienti di capacità.

Notiamo infine che le [4.5.3] e [4.5.3'] possono essere risolte rispetto a V_1 e V_2 :

²⁰ L'operazione di *messa a terra* si effettua concretamente collegando il corpo Γ alla terra mediante un filo conduttore terminante con una punta ben infissa nel terreno (o nei muri del laboratorio). In tal modo Γ_2 viene a costituire una piccolissima appendice di quella enorme sfera conduttrice che è la Terra ed è perciò vincolato ad assumerne il potenziale. Avendo poi la Terra, considerata come sfera conduttrice isolata nel vuoto, una capacità C_T molto grande ($\approx 700 \div 800 \mu F$) indipendentemente dalle cariche che si possano attribuire ad essa (purché di valore non grandissimo), il suo potenziale V_T , calcolato uguagliando a zero il potenziale all'infinito, è comunque molto piccolo, essendo

$$V_T = \frac{Q}{C_T}.$$

Con ottima approssimazione, V_T si può dunque considerare nullo, pur continuando a porre all'infinito lo zero per il potenziale.

considerando i termini Q_1 e Q_2 come noti, si ha

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

avendo indicato con $\|C_{ij}\|^{-1}$ la matrice inversa della matrice $\|C_{ij}\|$: ponendo

$$b_{11} = \frac{C_{22}}{|C|}, \quad b_{12} = b_{21} = -\frac{C_{21}}{|C|}, \quad b_{22} = \frac{C_{11}}{|C|},$$

dove $|C|$ indica il determinante della matrice $\|C_{ij}\|$, si ha

$$\begin{aligned} V_1 &= b_{11}Q_1 + b_{12}Q_2 \\ V_2 &= b_{21}Q_1 + b_{22}Q_2, \end{aligned} \quad [4.5.6]$$

oppure

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}. \quad [4.5.6']$$

Veniamo ora al caso particolare (specifico dei condensatori), in cui i due conduttori siano carichi in modo che risulti

$$Q_1 = -Q_2 = Q.$$

Dalle [4.5.3] si ricava

$$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{C_{22} + C_{12}}{C_{11} + C_{21}}. \quad [4.5.7]$$

Affinché le cariche presenti sui due corpi risultino uguali (in modulo) e opposte, V_1 e V_2 non possono essere dunque assegnati ad arbitrio, ma debbono soddisfare alla [4.5.7]: il loro rapporto è cioè fissato quando sia assegnata la geometria dei due corpi.

Esprimendo poi V_1 e V_2 in termini di V_1/V_2 e $(V_1 - V_2)$, mediante le identità

$$V_1 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \frac{V_1 - V_2}{\frac{V_1}{V_2} - 1}$$

$$V_2 = \frac{V_1 - V_2}{\frac{V_1}{V_2} - 1},$$

e sostituendo tali espressioni nelle [4.5.3], si ottiene

$$Q = C(V_1 - V_2), \quad [4.5.8]$$

dove si è posto

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}}. \quad [4.5.9]$$

La capacità di un condensatore dipende, dunque, soltanto dalla geometria del sistema, cioè dalla forma delle armature e dalla loro distanza.²¹

Osserviamo che se le armature non sono caricate in modo che risulti $Q_1 = -Q_2$, la sola conoscenza della d.d.p. fra le armature non è sufficiente a determinare le cariche su di esse: le [4.5.3] infatti mostrano che, a tal fine, occorre assegnare separatamente V_1 e V_2 , e non soltanto la loro differenza.

Di notevole interesse fisico è l'esempio riportato nella figura 4.9, in cui una delle armature del condensatore racchiude completamente l'altra. In questo caso, una volta assegnata all'armatura interna Γ_1 la carica Q , la distribuzione del campo nell'intercapedine tra le armature risulta univocamente determinata, indipendentemente dal valore della carica (anche se diverso da $-Q$) che si assegna all'armatura esterna Γ_2 : per convincersene, basta ripensare a quanto si è visto a proposito degli schermi elettrostatici. In questo caso, la carica Q presente su Γ_1 determina, per induzione elettrostatica, una carica $-Q$ sulla superficie interna Σ_{int} dell'armatura Γ_2 . Si parla, in situazioni del genere, di *induzione completa* tra Γ_1 e Γ_2 , intendendo, con ciò, che tutte le linee vettoriali di E che nascono sull'armatura interna Γ_1 terminano sulla superficie Σ_{int} di Γ_2 .

Si comprende, a questo punto, che la capacità di un simile condensatore, definita come rapporto tra la carica Q e la d.d.p. tra le armature, è indipendente dalla carica totale esistente su Γ_2 e non risente dell'influenza di sorgenti esterne al condensatore: essa è univocamente definita, indipendentemente dalla presenza di altri corpi conduttori nelle vicinanze del condensatore. In questo senso, un condensatore a induzione completa viene considerato ideale; nella realizzazione pratica dei condensatori ci si sforza il più possibile di verificare questa condizione.

Esempio 1. Condensatore piano

Dato un condensatore costituito da due armature piane parallele di area S , separate da una distanza d ,²² ci proponiamo di calcolarne la capacità. Se la distanza d è molto piccola rispetto alla dimensione delle armature (vedi fig. 4.10) possiamo, con buona approssimazione, fare riferimento al caso di due armature piane indefinite parallele, poste a distanza d l'una dall'altra. Indichiamo con x un asse ortogonale ad esse e scegliamo in modo qualunque gli altri due assi y e z di un sistema cartesiano; per semplici motivi di simmetria, il potenziale è indipendente da y e da z e soddisfa perciò all'equa-

²¹ Se tra le armature vi è un materiale dielettrico, la capacità del condensatore, come vedremo, dipende anche dalla sua natura fisica.

²² Facendo riferimento alla forma geometrica di questo particolare condensatore, si è soliti indicare graficamente un generico condensatore con il simbolo $-||-$.

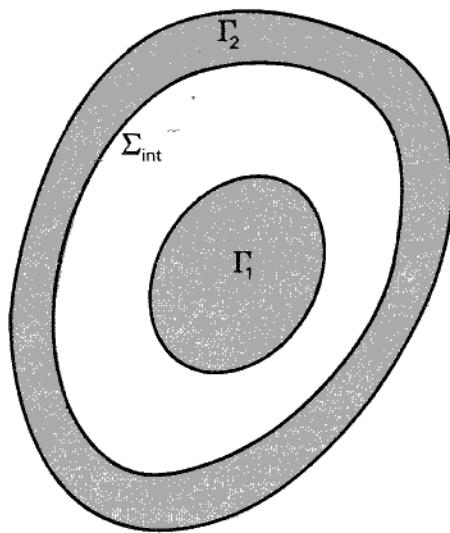


Figura 4.9

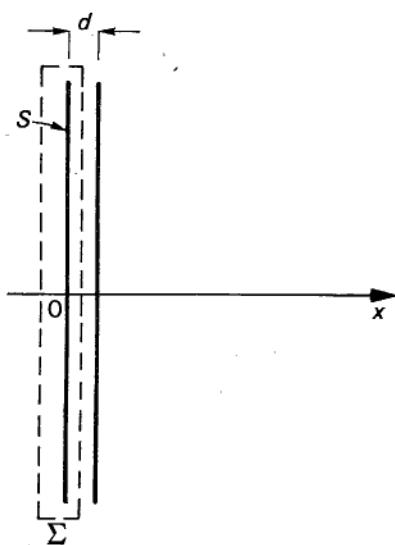


Figura 4.10

Calcolo della capacità di un condensatore piano mediante il teorema di Gauss.

zione di Laplace, nella forma

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0.$$

Si ha quindi

$$V(x) = Ax + B, \quad \text{per } x \in (0, d)$$

[4.5.10]

con A e B costanti arbitrarie.

Si conclude pure che

$$V = \text{cost.} \quad \text{per } x \notin (0, d).$$

Calcoliamo ora la capacità del condensatore

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}.$$

Applicando il teorema di Gauss a una superficie chiusa Σ , del tipo indicato con trattini nella figura 4.9, si ha

$$Q = \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = -\epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Nell'ambito dell'approssimazione considerata, la $\partial V / \partial n$ è nulla esternamente alle armature, e risulta perciò

$$Q = -\epsilon_0 A S;$$

osservando d'altra parte che, per la [4.5.10],

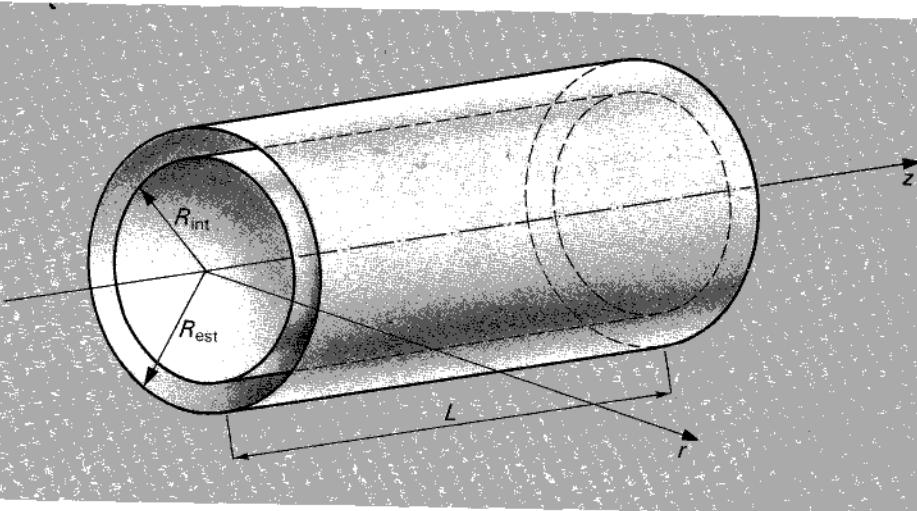
$$V_1 - V_2 = -Ad,$$

si ottiene

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Esempio 2. Condensatore cilindrico

Consideriamo un condensatore le cui armature siano costituite da due cilindri conduttori coassiali a sezione circolare, di raggi R_{int} e R_{est} ; supponendo che la sua lunghezza L sia molto maggiore di R_{est} , possiamo schematizzare il condensatore con un sistema costituito da due armature cilindriche indefinite. Nella regione tra esse compresa, vale per il potenziale V l'equazione di Laplace; tenendo conto della simmetria del sistema, concludiamo che la funzione V , assumendo un sistema di coordinate cilindriche r, z, φ (vedi fig. 4.11), dipende soltanto da r . L'equazione di Laplace

**Figura 4.11**

Calcolo della capacità di un condensatore cilindrico: il sistema dei due cilindri coassiali è riferito a coordinate r, z, φ .

assume dunque la forma

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0,$$

e quindi

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0. \quad [4.5.11]$$

Per $r \neq 0$, si ha allora

$$r \frac{dV}{dr} = K,$$

con K costante arbitraria. L'integrale generale di questa equazione è

$$V = K \ln r + A, \quad [4.5.12]$$

con A costante arbitraria.²³

I valori di K e A potrebbero venire specificati in base alle condizioni al contorno imposte al problema (assegnando i valori del potenziale sull'armatura interna e su quella esterna). Come vedremo, per il calcolo della capacità del condensatore ciò non è necessario.

²³ Per motivi dimensionali l'argomento del logaritmo va inteso come rapporto tra la distanza r e la distanza unitaria.

Dalla definizione di capacità (per unità di lunghezza) del condensatore, si ha

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V},$$

dove Q_1 è la carica presente (per unità di lunghezza) sulle armature e ΔV la d.d.p. relativa.

Si ha d'altra parte

$$Q_1 = \iint_{\Sigma_{\text{int}}} \sigma dS,$$

dove σ è la densità superficiale di carica esistente, ad esempio, sull'armatura interna Σ_{int} . Il valore di σ , noto il potenziale, può essere calcolato in base al teorema di Coulomb. Si ha così

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{\Sigma_{\text{int}}}$$

e, ricordando la [4.5.12],

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{K}{R_{\text{int}}}.$$

Tenendo conto dell'uniformità di σ su Σ_{int} , si ottiene

$$|Q_1| = 2\pi R_{\text{int}} \cdot 1 \cdot |K| \frac{\epsilon_0}{R_{\text{int}}} = 2\pi |K| \epsilon_0.$$

D'altra parte, la d.d.p. tra le armature, in base alla [4.5.12], è pari a

$$\Delta V = V_{\text{est}} - V_{\text{int}} = K \ln \frac{R_{\text{est}}}{R_{\text{int}}},$$

per cui si ha

$$C_1 = \frac{|Q_1|}{\Delta V} = \frac{2\pi |K| \epsilon_0}{|K| \ln \frac{R_{\text{est}}}{R_{\text{int}}}} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_{\text{est}}}{R_{\text{int}}}}. \quad [4.5.13]$$

Esempio 3. Condensatore sferico

Consideriamo un condensatore le cui armature siano costituite da due sfere conduttrici concentriche, di raggi R_{int} e R_{est} . Nella regione tra le armature vale per V l'equazione di Laplace; per la simmetria del sistema la funzione V , in un sistema di coordinate sferiche con origine nel centro O delle due sfere, dipende soltanto dalla coordinata r . L'equazione di Laplace assume quindi la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

e quindi, per $r \neq 0$,

$$r^2 \frac{dV}{dr} = K,$$

con K costante arbitraria. L'integrale generale di questa equazione è

$$V = -\frac{K}{r} + A, \quad [4.5.14]$$

con A costante arbitraria.

Ragionando come nel caso precedente, si ha

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{dV}{dr} \right|_{R_{\text{int}}} = -\epsilon_0 \frac{K}{R_{\text{int}}^2},$$

e quindi

$$|Q| = |\sigma| 4\pi R_{\text{int}}^2 = 4\pi \epsilon_0 |K|.$$

Dalla [4.5.14] discende

$$\Delta V = V_{\text{est}} - V_{\text{int}} = -\frac{K}{R_{\text{est}}} + \frac{K}{R_{\text{int}}},$$

e infine

$$C = \frac{|Q|}{\Delta V} = \frac{4\pi \epsilon_0}{\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R_{\text{est}}}} = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_{\text{int}} R_{\text{est}}}{R_{\text{est}} - R_{\text{int}}}. \quad [4.5.15]$$

4.6 Condensatori in parallelo e in serie

In questo paragrafo ci proponiamo di studiare i sistemi costituiti da più condensatori collegati elettricamente mediante fili conduttori. Per semplicità faremo l'ipotesi (verificata con ottima approssimazione nei casi usuali) che il comportamento di ciascun condensatore non risenta della presenza degli altri. Supporremo cioè che la relazione

$$Q = C(V_1 - V_2)$$

continui a valere, con lo stesso valore di C , anche quando il condensatore è posto nelle vicinanze di altri condensatori. Ciò risulta tanto più vero quanto più i condensatori sono lontani tra loro, oppure nell'ipotesi che i condensatori siano del tipo "a induzione completa" (cioè cavi).

Consideriamo più condensatori, connessi elettricamente come indicato nella figura 4.12 (collegamento *in parallelo*): essi saranno soggetti alla stessa differenza di potenziale tra le armature, poiché queste, connesse tra loro, costituiscono un unico conduttore. Il sistema di condensatori costituisce un unico condensatore di cui vo-

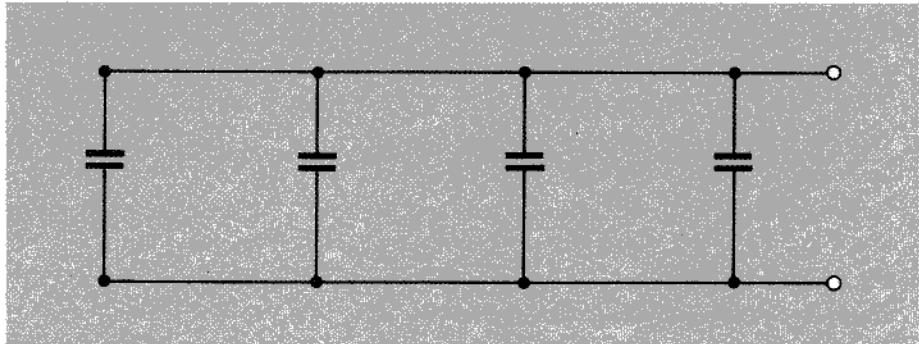


Figura 4.12
Condensatori in parallelo.

gliamo determinare la capacità C in funzione delle capacità $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_n$ degli n componenti.

Ciò è immediato, se si considera che per definizione è

$$C = \frac{Q}{V}, \quad [4.6.1]$$

essendo Q la carica totale su un'armatura del condensatore risultante e V la differenza di potenziale tra le sue armature.²⁴ Supponiamo di fissare V e calcoliamo Q . Evidentemente Q è pari alla somma delle cariche Q_k esistenti sulle armature collegate insieme:

$$Q = \sum_{k=1}^n Q_k.$$

Essendo tutti i condensatori sottoposti alla stessa V , possiamo scrivere, in base all'ipotesi fatta all'inizio di questo paragrafo,

$$Q = \sum_{k=1}^n C_k V = V \sum_{k=1}^n C_k,$$

e infine, dalla [4.6.1],

$$C = \sum_{k=1}^n C_k. \quad [4.6.2]$$

In definitiva:

La capacità di un sistema di condensatori collegati in parallelo è la somma delle capacità dei singoli condensatori.

Si noti che la capacità del parallelo di più condensatori è sempre maggiore della capacità di ciascuno dei condensatori collegati.

²⁴ Per non appesantire i simboli indicheremo con V la d.d.p. tra le armature piuttosto che il singolo potenziale di ciascuna.

Consideriamo ora più condensatori, connessi come indicato nella figura 4.13 (collegamento *in serie*); l'insieme dei condensatori costituisce un unico condensatore, le cui armature sono quelle estreme della catena di condensatori.

Immaginiamo di caricare ciascun condensatore, singolarmente, con cariche $+Q$ e $-Q$ sulle armature, *prima* di effettuare la connessione in serie. A collegamento avvenuto, possiamo supporre, in base all'ipotesi fatta all'inizio del paragrafo, che lo stato di carica di ciascun condensatore resti immutato; ne segue che il sistema complessivo si comporta come un unico condensatore di armature A e B , sulle quali si riscontrano le cariche $+Q$ e $-Q$.

Osserviamo inoltre che le armature, essendo collegate (come A_1 e A_2 , oppure A_3 e A_4 in fig. 4.13) risultano equipotenziali.

In questo caso, è la carica a essere uguale per tutte le C_k , mentre la differenza di potenziale V tra le armature del condensatore risultante è la somma delle differenze di potenziale V_k relative ai singoli condensatori collegati:

$$V = \sum_{k=1}^n V_k.$$

Per definizione di C_k , possiamo esprimere le V_k in funzione del valore Q comune a tutte le cariche dei condensatori, ottenendo

$$V = \sum_{k=1}^n \frac{Q}{C_k} = Q \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}.$$

Pertanto, dalla definizione di capacità, si ricava

$$C = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}}, \quad [4.6.3]$$

ovvero

$$C^{-1} = \sum_{k=1}^n C_k^{-1}. \quad [4.6.3']$$

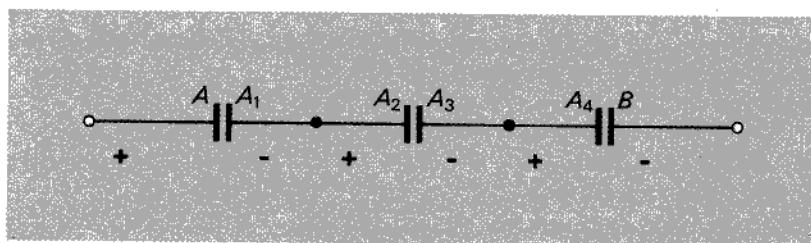


Figura 4.13
Condensatori in serie.

Dunque:

Il reciproco della capacità di un sistema di più condensatori in serie è la somma dei reciproci delle capacità dei singoli condensatori.

Si noti che la capacità della serie di più condensatori è sempre minore della capacità di ciascuno di essi.

4.6.1 Calcolo della capacità di un condensatore di forma qualsiasi

Quanto detto a proposito del collegamento tra più condensatori può essere utilizzato anche per calcolare, in maniera approssimata, la capacità di un generico condensatore, quando si conosca, almeno grossolanamente, l'andamento delle linee di campo e delle equipotenziali tra le sue armature.

Con riferimento al condensatore rappresentato nella figura 4.14, in cui un'armatura Γ_1 è contenuta in una cavità all'interno dell'armatura Γ_2 , consideriamo su Γ_1 una porzione di superficie S_{i1} e il tubo di flusso individuato dal contorno di S_{i1} . Questo tubo di flusso delimita su Γ_2 una superficie S_{i2} , corrispondente alla S_{i1} .

In queste condizioni, si dimostra che le cariche esistenti rispettivamente su S_{i1} e S_{i2} sono uguali e opposte. Consideriamo infatti una superficie chiusa Σ che abbia, come superficie laterale, le pareti del tubo di flusso in esame e, come "basi", le superfici S_{i1} e S_{i2} dei conduttori Γ_1 e Γ_2 .

Il flusso di \mathbf{E} uscente da Σ è nullo, poiché il campo è per definizione tangente sulle pareti del tubo di flusso e nullo sulle "basi" appartenenti ai conduttori.²⁵ Applicando il teorema di Gauss a tale superficie chiusa, concludiamo che la carica totale contenuta in essa è nulla: non esistendo altre cariche se non quelle presenti sulle armature, se ne deduce che *le cariche su due superfici corrispondenti sono uguali e opposte*.

Questa proprietà, di validità generale, è nota come *teorema delle superfici corrispondenti*.

Indichiamo ora con q_i e $-q_i$ le cariche esistenti sulle superfici corrispondenti S_{i1} e S_{i2} . Dal teorema di Coulomb (vedi § 4.2) discende che q_i può essere calcolata come flusso del vettore $\epsilon_0 \mathbf{E}$ attraverso la pagina esterna di S_{i1} :

$$q_i = \iint_{S_{i1}} \sigma dS = \iint_{S_{i1}} \epsilon_0 E_n dS = \iint_{S_{i1}} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Indicando tale flusso con il simbolo $\Phi_{S_{i1}}$, si ha $q_i = \Phi_{S_{i1}}$; poiché il flusso è costante attraverso tutte le sezioni di un tubo di flusso, il valore $\Phi_{S_{i1}}$ risulta uguale a quello calcolato attraverso una qualsiasi sezione del tubo di flusso in esame (indicato genericamente con il simbolo Φ_i). Risulta perciò $q_i = \Phi_i$.

Possiamo ora definire una *capacità del tubo di flusso*

$$C_i = \frac{q_i}{V_1 - V_2} = \frac{\Phi_i}{V_1 - V_2}, \quad [4.6.4]$$

e, più in generale, la capacità di un qualsiasi tratto di tubo di flusso compreso tra due

²⁵ Naturalmente il campo considerato è quello presente *all'interno* dei conduttori.

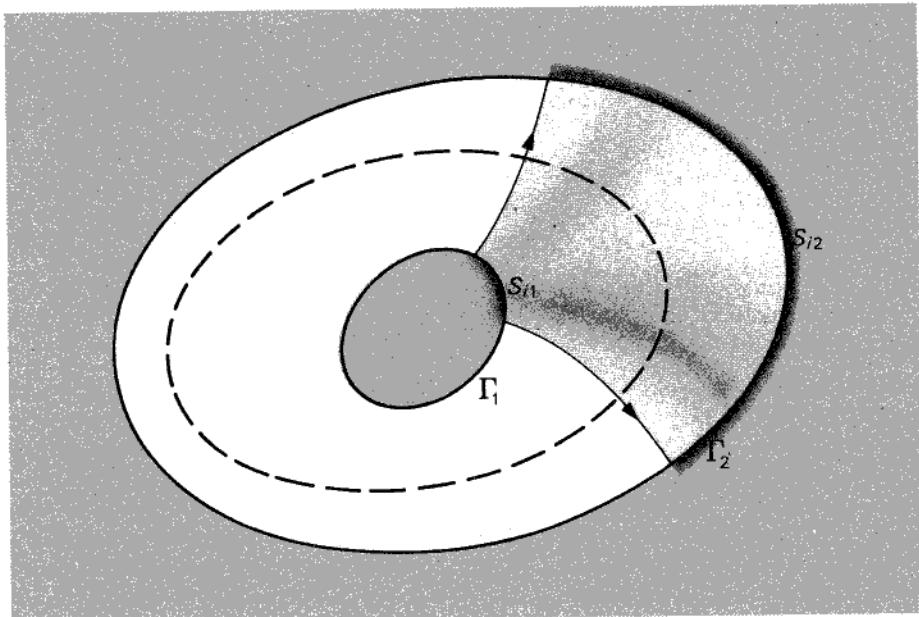


Figura 4.14
Superficie corrispondenti S_{i1} e S_{i2} in un condensatore di forma qualsiasi.

generiche superfici equipotenziali relative ai valori V_A e V_B del potenziale:

$$C_{iAB} = \frac{\Phi_i}{V_A - V_B}. \quad [4.6.5]$$

Dati ora più tubi di flusso compresi tra le stesse superfici equipotenziali V_A e V_B (ad esempio tra le superfici dei due conduttori), essi presentano tutti la stessa differenza di potenziale, e il flusso complessivo (cioè il valore delle cariche corrispondenti complessive) è la somma di quelli relativi ai singoli tubi. I tubi di flusso risultano dunque disposti in parallelo, e la loro capacità complessiva è

$$C_{AB} = \frac{\Phi}{V_A - V_B} = \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i}{V_A - V_B} = \sum_{i=1}^n C_{iAB}. \quad [4.6.6]$$

Risulta cioè:

La capacità di un sistema di tratti di tubi di flusso in parallelo è la somma delle capacità dei singoli tratti.

Dato invece un singolo tubo di flusso compreso tra due equipotenziali V_A e V_B , suddividiamolo in vari tratti mediante altre superfici equipotenziali V_C , V_D , V_E ...; questi tratti hanno tutti lo stesso flusso Φ_i , e la differenza di potenziale tra le estremità del tubo è la somma delle d.d.p. relative a ciascuno di essi. I tratti risultano

disposti in serie e la loro capacità complessiva è

$$C_{iAB} = \frac{\Phi_i}{V_A - V_B} \frac{\Phi_i}{(V_A - V_C) + (V_C - V_D) + \dots} = \frac{1}{\frac{1}{C_{iAC}} + \frac{1}{C_{iCD}} + \dots} \quad [4.6.7]$$

ovvero

$$C_{iAB}^{-1} = C_{iAC}^{-1} + C_{iCD}^{-1} + \dots; \quad [4.6.7']$$

Si ha dunque il seguente risultato:

Il reciproco della capacità di un sistema di tratti di tubo di flusso in serie è la somma dei reciproci delle capacità dei singoli tratti.

Un condensatore può sempre considerarsi come un sistema di tubi di flusso in parallelo compresi tra due armature e individuati suddividendo in parti la superficie di una di queste. Se si è in grado di calcolare la capacità di ogni tubo di flusso, è immediato ottenere la capacità del condensatore. Nel calcolo della capacità del singolo tubo, questo può poi essere riguardato come la serie di tanti tratti. In conclusione, conoscendo il tracciato delle linee vettoriali del campo e delle equipotenziali in un condensatore, il calcolo della sua capacità può essere ricondotto a quello della capacità di elementi assimilabili a piccoli condensatori piani. Si può pensare dunque di suddividere il condensatore mediante più superfici equipotenziali, come quelle tratteggiate nella figura 4.15, e considerare il condensatore come la serie di condensatori sottili, individuati da esse. Se veramente esistesse una sottile superficie metallica coincidente con una superficie equipotenziale, sulle sue facce si localizzerebbero cariche di segno opposto, uguali in valore assoluto alla carica totale esistente sulle superfici dei conduttori Γ_1 e Γ_2 , e l'introduzione della lamina non muterebbe la configurazione del campo.²⁶ Molti metodi di calcolo di capacità, in particolare di calcolo numerico, si basano su considerazioni di questo tipo.

4.7 Energia elettrostatica in un sistema di conduttori carichi

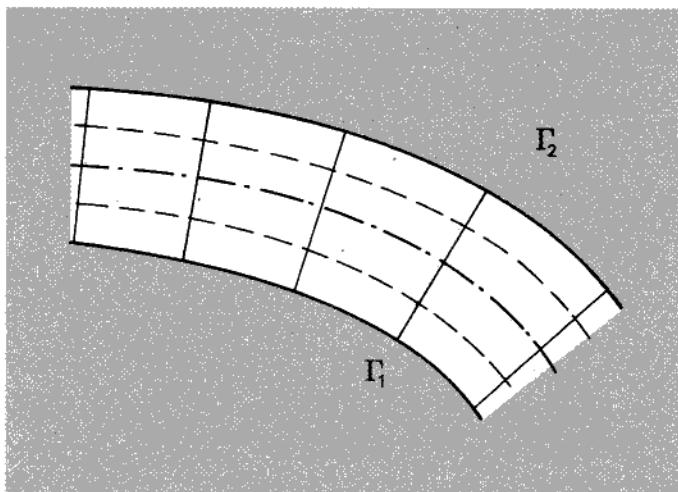
Nel capitolo 3 il calcolo dell'energia elettrostatica U_e associata a un sistema di cariche ha condotto, nel caso di una distribuzione superficiale, alla seguente espressione:

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V dS. \quad [4.7.1]$$

In un sistema di n conduttori, la carica elettrica è, appunto, distribuita sulle loro superfici. Indicando allora con S_i la superficie del conduttore Γ_i , la [4.7.1] diviene

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \sigma_i V_i dS. \quad [4.7.2]$$

²⁶ Proprietà nota anche come principio di metallizzazione delle superfici equipotenziali.

**Figura 4.15**

Superficie equipotenziali (linee tratteggiate) tra le armature di un condensatore di forma qualsiasi.

Notiamo che V_i è costante sulla superficie di ciascun conduttore e può quindi essere portato fuori dal segno di integrale. Inoltre, la carica totale esistente sull' i -esimo conduttore è esprimibile come

$$q_i = \iint_{S_i} \sigma_i dS.$$

Risulta perciò

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i. \quad [4.7.3]$$

E' questa l'espressione dell'energia elettrostatica di un sistema di conduttori. Nel caso particolare di un condensatore, l'energia elettrostatica risulta

$$U_e = \frac{1}{2} QV_1 - \frac{1}{2} QV_2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad [4.7.4]$$

dove Q è la carica del condensatore, V la differenza di potenziale tra le sue armature e C la sua capacità.

4.8 Forze agenti tra conduttori

La conoscenza dell'energia elettrostatica di un sistema di conduttori permette di calcolare le forze che tra essi si esercitano, utilizzando il principio di conservazione dell'energia. Consideriamo dapprima il caso in cui il sistema sia *isolato* e supponiamo

che uno dei conduttori sia libero di compiere una traslazione dr sotto l'azione delle forze elettriche dovute agli altri conduttori.²⁷ Il lavoro meccanico compiuto dalle forze del campo è

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad [4.8.1]$$

dove \mathbf{F} è la risultante delle forze elettriche agenti sul corpo. Poiché il sistema è isolato, questo lavoro è compiuto a spese dell'energia elettrostatica U_e del sistema

$$d\mathcal{L} = -dU_e, \quad [4.8.2]$$

si ha cioè

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU_e.$$

Detta allora F_r la componente di \mathbf{F} secondo la generica direzione \mathbf{r} , si ha

$$F_r = -\frac{\partial U_e}{\partial r} \Big|_q, \quad [4.8.3]$$

ove l'indice "q" indica che la derivazione va eseguita tenendo costanti le cariche.

Sia dato ora un sistema di conduttori *non isolato*. Più precisamente, i conduttori siano mantenuti a potenziali costanti per mezzo di sorgenti esterne di energia, ad esempio batterie (vedi cap. 5). La relazione [4.8.1] è ancora valida; il lavoro meccanico, però, è ora compiuto non soltanto a spese dell'energia del sistema di conduttori, ma anche a spese delle sorgenti esterne. L'equazione di conservazione dell'energia diviene qui

$$d\mathcal{L} + dU_{est}^* = dU_{est}, \quad [4.8.4]$$

ove dU_{est} indica l'energia fornita dalle sorgenti esterne e dU_e^* la variazione dell'energia elettrostatica del sistema *a potenziali costanti*.

Per esprimere la forza \mathbf{F} in funzione dell'energia elettrostatica, è necessario trovare un legame tra dU_e^* e dU_{est} . Ricordando che l'energia fornita dalle sorgenti esterne per incrementare di dq_k la carica del k -esimo conduttore è $V_k dq_k$, si ha:

$$dU_{est} = \sum_{k=1}^n V_k dq_k \quad [4.8.5]$$

differenziando a potenziali costanti la [4.7.3], si ottiene

$$dU_e^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k \quad [4.8.6]$$

e quindi, confrontando le [4.8.5] e [4.8.6], si ricava

$$dU_{est} = 2dU_e^*.$$

²⁷ Per facilitare l'intuizione, immaginiamo di "allentare" il vincolo che tiene bloccato al suo posto tale conduttore.

La [4.8.4] può essere scritta dunque nella forma²⁸

$$d\mathcal{L} = dU_e^*. \quad [4.8.7]$$

Si ha cioè

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dU_e^*$$

e infine

$$F_r = \frac{\partial U_e}{\partial r} \Big|_V. \quad [4.8.8]$$

Dato un sistema di conduttori avente una certa configurazione geometrica e un assegnato stato elettrico (cioè assegnati cariche e potenziali dei conduttori), *in condizioni statiche le forze agenti tra i conduttori dipendono solo dalla configurazione e dallo stato elettrico del sistema*. Ne deriva che le due relazioni [4.8.3] e [4.8.8], essendo espressioni diverse delle stesse forze, debbono fornire lo stesso risultato.

Esempio 1

Calcoliamo la forza che si esercita tra le armature di un condensatore, limitandoci per semplicità al caso piano.

La forza cercata è certamente attrattiva e normale alle armature. Come sistema di coordinate sceglieremo quindi una terna cartesiana ortogonale avente il piano yz coincidente con un'armatura e l'asse x rivolto verso l'altra. Spostiamo di poco le armature, l'una rispetto all'altra, secondo la direzione della forza (x). Riferendoci alla prima ipotesi, consideriamo isolato il condensatore; in altre parole, dopo averlo caricato, ad esempio mediante una batteria, immaginiamo di staccarlo dalla sorgente di carica e di effettuare lo spostamento in tali condizioni. Detta C la capacità, la [4.8.3] fornisce

$$F dx = -d \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right).$$

Essendo il sistema isolato, Q è costante e risulta

$$F dx = -\frac{1}{2} Q^2 d \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC. \quad [4.8.9]$$

Calcoliamo la variazione dC di capacità conseguente allo spostamento dx , ricordando l'espressione della capacità di un condensatore piano:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}. \quad [4.8.10]$$

²⁸ Osserviamo, a tale proposito, che per le [4.8.4] e [4.8.7] il lavoro elettrico dU_{est} si ripartisce ugualmente tra il termine di lavoro meccanico e quello di energia elettrostatica.

Dalla [4.8.10], si ricava

$$dC = -\epsilon_0 \frac{S}{d^2} dx,$$

la quale, sostituita nella [4.8.9], fornisce

$$F = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} S,$$

dove si è introdotta la densità superficiale di carica sulle armature. La forza riferita alla superficie è dunque

$$\frac{F}{S} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}, \quad [4.8.11]$$

Il segno “meno” indica semplicemente che essa, applicata all’armatura cui abbiamo assegnato lo spostamento dx , è rivolta nel verso negativo dell’asse x .

Se ci riferiamo alla seconda ipotesi lo spostamento avviene con il condensatore collegato alla batteria. La [4.8.8] fornisce

$$Fd\mathbf{x} = d \left(\frac{1}{2} CV^2 \right).$$

Poiché per ipotesi lo spostamento avviene a V costante, si ha

$$Fd\mathbf{x} = \frac{1}{2} V^2 dC. \quad [4.8.12]$$

La variazione di capacità dovuta allo spostamento dx si calcola anche in questo caso in base alla [4.8.10]:

$$dC = -\epsilon_0 S \frac{dx}{d^2};$$

dalla [4.8.12], si ottiene

$$F = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 S}{d^2},$$

che, per la [4.8.10], diviene

$$F = -\frac{1}{2} \frac{V^2 C^2}{\epsilon_0 S} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S},$$

che è, appunto, il risultato già ottenuto con il primo procedimento.

Esperienze illustrate

1. Elettrometro assoluto di Lord Kelvin

Un *elettrometro assoluto* è dispositivo elettrostatico che consente la misura delle d.d.p.

In linea di principio, l'elettrometro di Lord Kelvin si riduce a un condensatore piano (vedi fig. 4.15) con un'armatura, A , fissa e l'altra, A' , libera di muoversi rispetto alla prima; A' costituisce anche uno dei piatti di una bilancia di precisione di fulcro C . Per ottenere, tra le armature, un campo il più possibile uniforme si utilizza un *anello di guardia* G , costituito da un conduttore a forma di corona circolare connesso meccanicamente ad A ed elettricamente ad A' (vedi fig. 4.16), che abbraccia l'armatura A' e si trova al suo stesso potenziale. In tal modo la deformazione delle linee del campo si trasferisce alla periferia esterna dell'anello di guardia, dove non influisce sui risultati dell'esperienza. Quando si applichi al condensatore una d.d.p. V , nasce tra le armature una forza di attrazione F , che tende a far abbassare l'armatura A' ; un opportuno peso p , posto sull'altro piatto della bilancia, equilibra l'effetto di F . In queste condizioni, la forza F agente su A' è pari (come si è visto nel paragrafo precedente) a

$$|F| = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} S = \sigma S \frac{E}{2}$$

dove σ è la densità di carica superficiale presente sulle armature, S è l'area di ciascuna

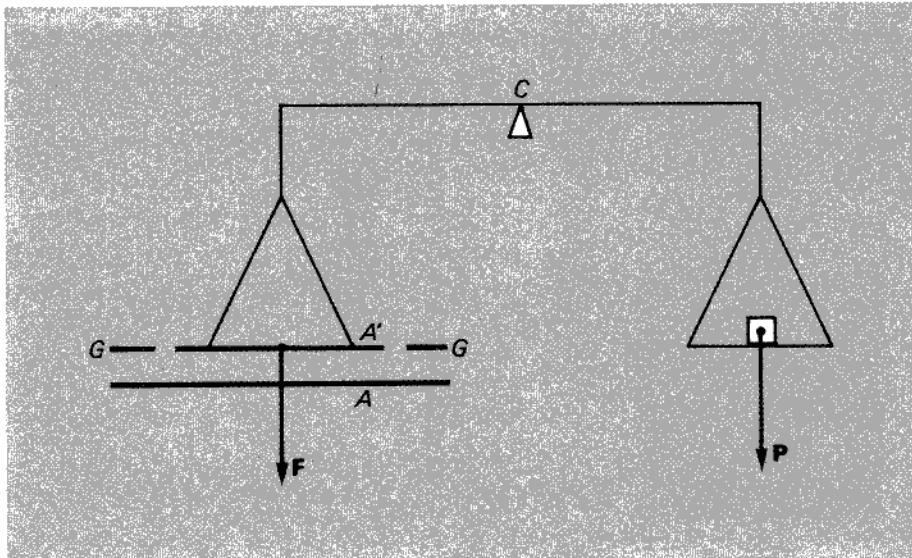


Figura 4.16
Elettrometro assoluto di Lord Kelvin.

armatura ed E è il campo elettrostatico esistente su di essa. Essendo

$$\sigma = \epsilon_0 E, \quad V = Ed, \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad V = \int \sigma d = Ed$$

dove d indica la distanza tra le armature in condizioni di equilibrio, si ha

$$F = \epsilon_0 \frac{S}{2} \frac{V^2}{d^2}$$

e quindi

$$V = d \sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}}$$

La misura di p (e quindi di F) consente dunque di calcolare la d.d.p. applicata al condensatore.

2. Elettrometro di Kolbe

L'elettroscopio a foglie può essere trasformato in elettrometro. Nella figura 4.17 è rappresentato schematicamente un normale elettroscopio a foglie di alluminio; applicando tra la sferetta conduttrice S e l'involucro R (*a terra*) una d.d.p. V , tutto il conduttore costituito da S , dalla bacchetta conduttrice B e dalle foglioline F e F' si porta al potenziale V , mentre l'involucro è posto a potenziale nullo. All'interno dell'elettroscopio le linee vettoriali del campo elettrico hanno l'andamento riportato in figura. Per ottenere uno strumento capace di misurare d.d.p., è sufficiente (vedi fig. 4.18) che una delle lame sia fissa e un'altra mobile su una scala graduata, tarata per confronto con un altro strumento. Una buona realizzazione consente di misurare d.d.p. dell'ordine di $300 \div 400$ V con una deviazione dell'ordine di 45° e un errore di $\pm 0,5$ V.

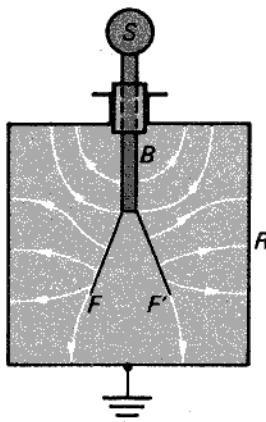


Figura 4.17

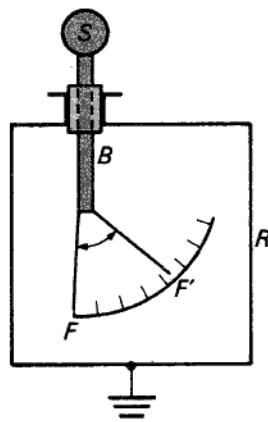


Figura 4.18

3. Macchine elettrostatiche

Si tratta di dispositivi che consentono di produrre d.d.p. anche notevoli (fino a valori dell'ordine di alcuni milioni di volt) per strofinio e induzione elettrostatica. Ne descriviamo brevemente alcune.

a) *Duplicatore di Belli*. Il dispositivo è rappresentato schematicamente nella figura 4.19. In essa, P_A e P_B sono due recipienti conduttori (*pozzi*) collegati elettricamente ai piatti, anch'essi conduttori, A e B ; affacciati a questi sono disposti altri due piatti conduttori C_A e C_B , muniti dei manici isolanti M_A e M_B . C_A e C_B sono collegati elettricamente mediante un conduttore $O_A O_B$ che può essere staccato dai piatti stessi.

Immaginiamo di introdurre inizialmente nel pozzo P_A una carica (anche piccola), ad esempio positiva. Il conduttore costituito dal sistema $C_A O_A O_B C_B$ si carica per induzione: C_A si carica negativamente e C_B positivamente. Staccato il conduttore $O_A O_B$ da C_A e C_B , si trasportino i piatti C_A e C_B (impugnandoli per i manici isolanti) rispettivamente in P_B e P_A , facendoli entrare in contatto con le pareti conduttrici di tali pozzi. I piatti C_A e C_B perdono così la loro carica, che si trasferisce ai pozzi: la carica positiva su P_A viene accresciuta, mentre su P_B appare una carica negativa. Rimettiamo ora al loro posto i piatti C_A e C_B e il conduttore $O_A O_B$ che li collega e ripetiamo la stessa sequenza di operazioni. Si ottengono nuove e più forti cariche indotte su C_A e C_B che possono ancora essere scaricate in P_B e P_A e così via. Il fenomeno si esalta rapidamente, producendo notevoli d.d.p. tra P_A e P_B . Naturalmente, procedendo nell'esperienza, occorre compiere un lavoro meccanico via via crescente per allontanare i piatti C_A e C_B da A e B e introdurli nei pozzi P_B e P_A vincendo l'azione contraria delle forze elettrostatiche. Un dispositivo del genere è *autoeccitante*, nel senso che anche una piccola carica, inizialmente presente, è sufficiente a innescare il fenomeno di crescita della d.d.p., con un processo che in elettronica viene indicato come *reazione positiva*.

b) *Generatore di Van de Graaf*. Lo schema del dispositivo è del tipo riportato nella figura 4.20. La sfera conduttrice S è sostenuta da una colonna isolante I . All'interno della colonna, una cinghia di trasporto C è mossa da due pulegge azionate da un motore. Con l'aiuto di una macchina ausiliaria, il pettine conduttore P_1 è caricato a

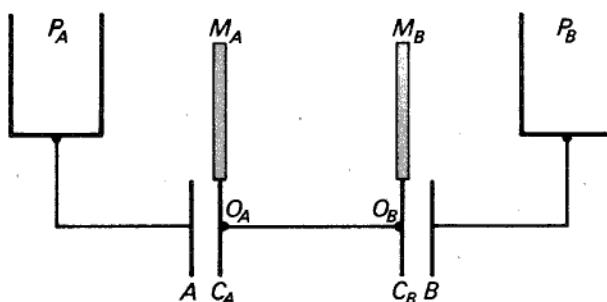


Figura 4.19
Schema del duplicatore di Belli.

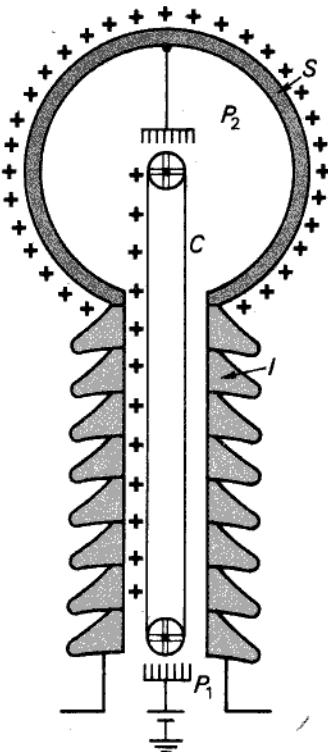


Figura 4.20

Schema di macchina elettrostatica a effluvio (generatore di van de Graaf).

un potenziale (rispetto a terra) di una decina di migliaia di volt; il pettine stesso trasmette²⁹ questa carica Q alla cinghia isolante, che la trasporta meccanicamente in prossimità del secondo pettine P_2 . Una volta entrata all'interno della sfera S , la carica induce, sulla superficie interna di questa e su P_2 , una carica $-Q$ di segno contrario, e sulla superficie esterna, una Q dello stesso segno. La carica $-Q$ sfugge per effluvio dal pettine P_2 (*potere dispersivo delle punte*) e, passando sulla cinghia, neutralizza la carica Q ivi esistente. Come risultato, la sfera acquista globalmente una carica Q . Il processo continua, e sulla sfera si accumula una carica crescente. Per evitare che il campo elettrostatico prodotto in prossimità della sfera superi il valore per il quale può avvenire la scarica nell'aria circostante occorre che la sfera stessa sia molto grande. Ricordiamo infatti che il valore del campo sulla sfera è pari a

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

dove R è il raggio di S . Di qui si vede che, affinché il valore di E sia contenuto entro i

²⁹ Il meccanismo di trasmissione avviene *per effluvio*, cioè attraverso la ionizzazione locale dell'aria, in corrispondenza del pettine.

30kV/cm (valore tipico per l'aria in condizioni normali), con $V=30 \times 10^6$ V, dev'essere $R \geq 10$ m. Per sostenere valori così elevati di d.d.p., occorre inoltre che la colonna isolante I sia molto alta.

4. Voltmetri elettrostatici

Si tratta di strumenti di uso abbastanza comune per la misura di d.d.p. fra 1000 e 15 000 V. Due armature a forma di settori circolari (vedi fig. 4.21) sono affacciate tra loro in modo da formare un condensatore. Una delle armature (A_1) è fissa, mentre l'altra (A_2) è libera di ruotare attorno a un asse O perpendicolare al piano del disegno. La capacità C di questo condensatore è proporzionale all'area delle porzioni di armatura affacciate tra loro e, quindi, all'angolo di rotazione α tra queste; si ha

$$C = k\alpha.$$

Assegnando alle due armature una d.d.p. V , nasce una coppia meccanica il cui momento (vedi § 4.8) è dato da

$$M = \frac{\partial U_e}{\partial \alpha} \Big|_V = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} k V^2;$$

U_e indica il valore dell'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema, e si è supposto che la rotazione delle armature avvenga mentre queste sono collegate alla sorgente che fornisce la d.d.p. V (operando dunque a V costante). Supponendo che il momento M , di origine elettrostatica, sia contrastato dall'azione di un'opportuna molla, all'equilibrio risulta

$$\Gamma\alpha = \frac{1}{2} k V^2,$$

indicando rispettivamente con Γ la costante di torsione della molla e con α l'angolo di cui essa ruota. Un indice I , solidale alla molla, ruota su una scala graduata indicando il valore di V .

5. Tracciamento sperimentale di campi elettrostatici

a) *Metodo della vasca elettrolitica.* Per mezzo di una vasca colma di un opportuno liquido conduttore è possibile visualizzare la distribuzione delle superfici equipotenziali di un campo piano (vedi cap. 6).

b) *Metodo della carta grafitata.* E' un metodo analogo al precedente, che utilizza, in luogo di un liquido conduttore, una carta speciale su cui è deposto uno strato di polvere di grafite.

c) *Metodo della membrana di gomma.* Si tratta di un metodo molto usato in passato per il tracciamento di campi elettrostatici.

Consideriamo una sottile membrana di gomma, tesa orizzontalmente in maniera uniforme; supponiamo poi di deformarla, spostando verticalmente alcuni suoi punti mediante forze opportune. In queste condizioni, la membrana si dispone secondo una nuova configurazione di equilibrio. Non sarebbe difficile mostrare che, se la superficie individuata dalla membrana è abbastanza regolare, la funzione $z(x, y)$, che fornisce,

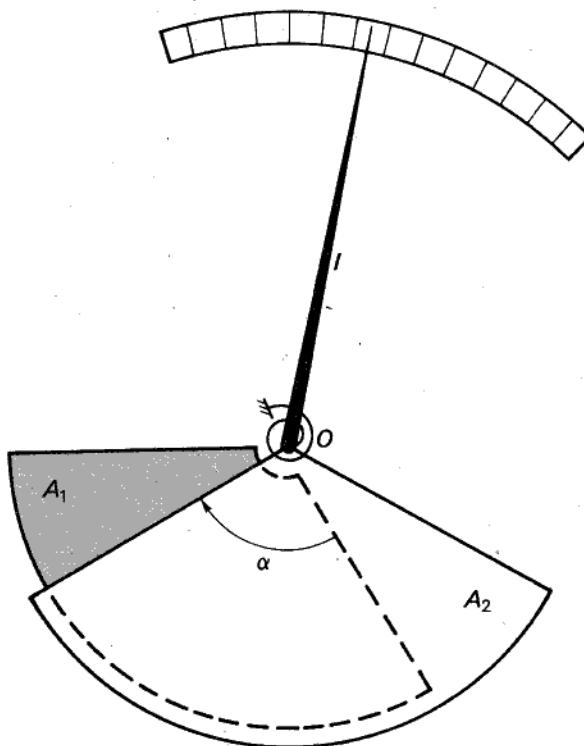


Figura 4.21
Misurazione delle d.d.p. mediante un voltmetro elettrostatico.

in coordinate cartesiane, l'altezza di ciascun punto della membrana rispetto a un piano orizzontale, soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{\tau},$$

dove p è la forza agente per unità di superficie (in direzione verticale) nel generico punto³⁰ e τ è la tensione meccanica della membrana.

Questa relazione coincide con l'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico, quando si sostituisca alla funzione $(1/\epsilon_0)\rho(x, y)$, la funzione $(1/\tau)p(x, y)$. Supponiamo ora di voler risolvere un problema piano di elettrostatica per il quale sia nota la distribuzione della densità di volume di carica $\rho(x, y)$ in una regione piana Ω e sia nota inoltre, come condizione al contorno, la distribuzione del potenziale su tutti i punti della frontiera γ di Ω . In base a quanto si è detto, è sufficiente tendere la membrana di gomma al di sopra del dominio Ω in modo che la distribuzione di carica $\rho(x, y)$ corrisponda alla distribuzione delle forze che deformano la membrana, e l'al-

³⁰ La p è considerata positiva quando è diretta verso l'alto.

tezza di ciascun punto del bordo della membrana sia proporzionale al valore ivi prefissato del potenziale.

In queste condizioni, l'altezza di ciascun punto della membrana rispetto al piano orizzontale risulta proporzionale al potenziale nel punto di corrispondente. In altre parole, la membrana si dispone in maniera da visualizzare il grafico della funzione potenziale nel dominio (vedi fig. 4.22); le linee equipotenziali vengono dunque a coincidere con le linee di livello della superficie individuata dalla membrana. Se la forza p è identicamente nulla, la membrana si dispone in maniera da individuare la funzione armonica corrispondente all'assegnata condizione al contorno.

d) *Esempi.* Per dare un'idea dell'andamento delle linee vettoriali e di quelle equipotenziali riportiamo i grafici qualitativi di alcuni campi elettrostatici (vedi fig. 4.23 a-d), riferentisi a situazioni fisicamente interessanti (le linee vettoriali sono *continue* e quelle equipotenziali sono *tratteggiate*).

6. Vari tipi di condensatori

a) *Bottiglia di Leida.* Si tratta di uno dei tipi più antichi di condensatori, il cui interesse è più storico che applicativo. È costituito da un cilindro di vetro ricoperto internamente ed esternamente da un foglio di stagnola. I valori tipici di capacità per questi condensatori sono dell'ordine di $10^{-9} \div 10^{-8}$ F.

b) *Condensatori a carta.* Sono costituiti da due strisce di carta stagnola intercalate a due strisce di carta compresse tra loro e arrotolate in modo da formare un piccolo cilindro.

I valori di capacità tipici di questi condensatori sono dell'ordine delle decine di microfarad, ed essi trovano largo impiego tecnico nel campo delle d.d.p. dell'ordine delle centinaia e migliaia di volt.

c) *Condensatori ceramici.* Sono condensatori di uso diffusissimo: presentano capacità notevolmente più elevate di quelle degli altri tipi di condensatori, a parità di dimensioni (tipici sono i condensatori da 1 a 100 μ F, e oltre). Sono realizzati con materiali speciali: spesso, ossidi di titanio o terre rare (vedi § 5.16).

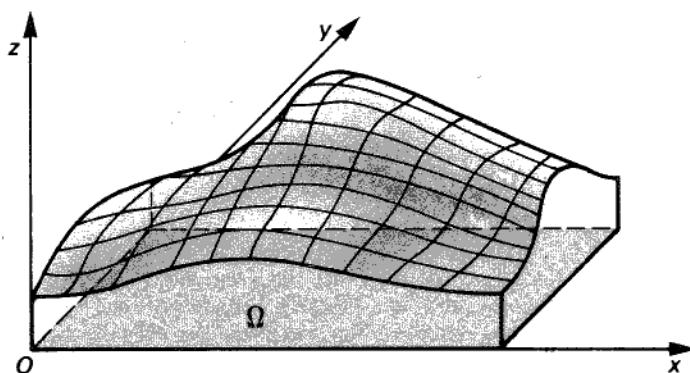
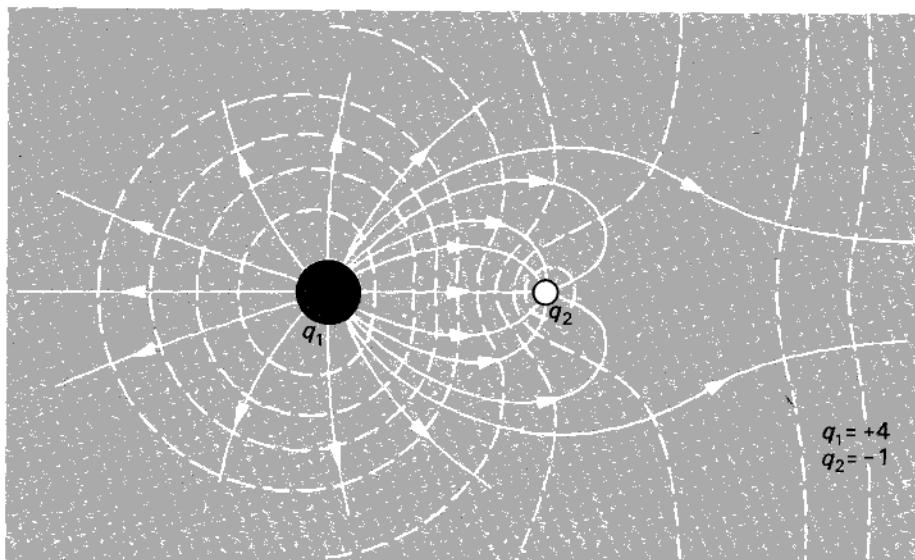


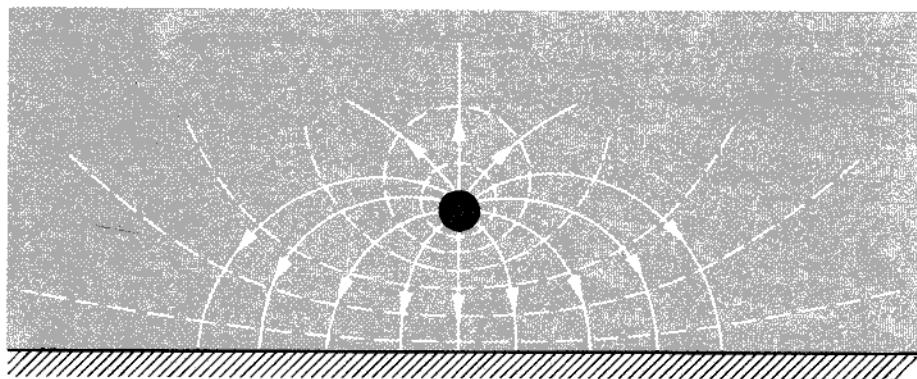
Figura 4.22

7. Il potere dispersivo delle punte

Non è difficile rendersi conto che, quando un conduttore carico possiede una regione a forte curvatura (cioè una punta), il campo elettrico in corrispondenza di



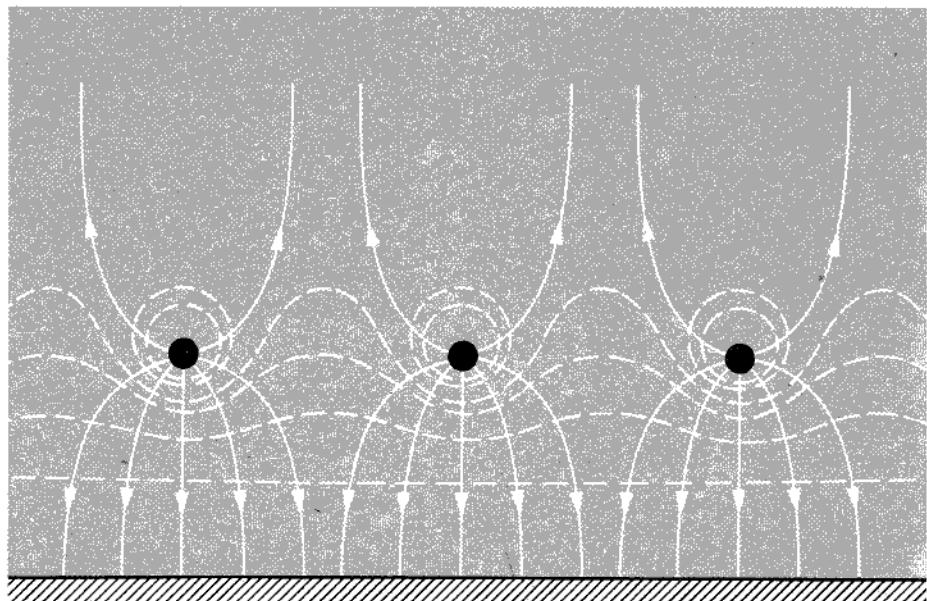
(a)



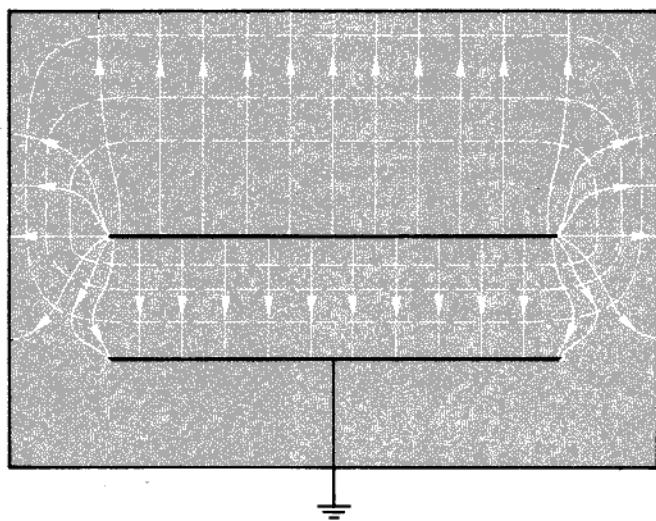
(b)

Figura 4.23

Andamento delle linee vettoriali e delle equipotenziali (*linee tratteggiate*) del campo elettrostatico: la parte (a) si riferisce al caso di due cariche puntiformi di segno opposto ($q_1=4$, $q_2=-1$); la (b) a quello di una carica puntiforme in presenza di un piano conduttore; la (c) a quello di tre cariche puntiformi, uguali e dello stesso segno, in presenza di un piano conduttore; la (d), infine, al caso di un condensatore piano schermato da una gabbia di Faraday.



(c)



(d)

essa assume valori notevolmente maggiori che negli altri punti del conduttore. Consideriamo infatti due sfere metalliche, di raggi R e r (con $R \gg r$) e immaginiamo di porle, singolarmente, allo stesso potenziale V . Ricordando l'espressione della capacità di una sfera isolata nel vuoto, possiamo calcolare il valore delle cariche Q e q presenti, rispettivamente, sulla sfera di raggio R e su quella di raggio r :

$$Q_1 = C_1 V = 4\pi\epsilon_0 R V,$$

$$q = C_2 V = 4\pi\epsilon_0 r V,$$

e quindi

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}.$$

Possiamo ora valutare le densità di carica σ_1 e σ_2 esistenti sulla superficie delle due sfere:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R V}{4\pi R^2} = \epsilon_0 \frac{V}{R},$$

$$\sigma_2 = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 r V}{4\pi r^2} = \epsilon_0 \frac{V}{r},$$

e quindi

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r}{R}.$$

Le densità di carica sono dunque inversamente proporzionali ai raggi: ricordando il teorema di Coulomb, se ne deduce che il campo è maggiore in corrispondenza della sfera di raggio minore.

L'effetto descritto risulta particolarmente vistoso in presenza di conduttori appuntiti: in questi casi, il campo elettrico in corrispondenza della punta può assumere valori così elevati da riuscire a ionizzare l'aria circostante. Si determina allora un doppio flusso di cariche: quelle esistenti sulla punta tendono ad abbandonarla, sotto l'azione del forte campo ivi esistente, e inversamente, le cariche opposte presenti nell'aria circostante tendono a "precipitare" sulla punta.

Entrambi i fenomeni hanno l'effetto di ridurre, disperdendola, la carica esistente sul conduttore. Il fenomeno, per valori del campo molto intensi, dà luogo a un flusso di cariche che, in circostanze adatte, può essere addirittura visibile come un alone luminoso che circonda la punta.³¹

Esercizi

- Nel condensatore piano ad armature indefinite schematizzato nella figura 4.24 si introduca una lastra conduttrice indefinita di spessore δ . Calcolare la capacità per unità d'area del sistema così costituito e mostrare che essa è indipendente dalla posizione della lastra (purché parallela alle armature).

³¹ Tipico, ad esempio, è il cosiddetto *effetto corona*: nelle linee ad alta tensione, i conduttori della linea appaiono talvolta circondati da una guaina luminosa.

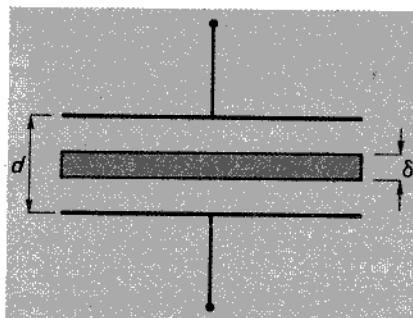


Figura 4.24

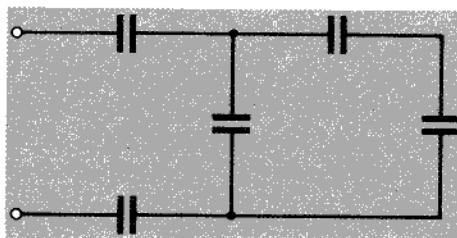


Figura 4.25

2. Calcolare la capacità equivalente C_{eq} al sistema di condensatori riportati nella figura 4.25, supponendo che ciascuno di essi abbia una capacità di $1 \mu\text{F}$.

3. Calcolare la capacità equivalente C_{eq} al sistema di condensatori riportati nella figura 4.26, supponendo che ciascuno di essi abbia una capacità di $1 \mu\text{F}$.

(*Suggerimento.* Applicando tra A e B una d.d.p. V e tenendo conto della simmetria del sistema, si ha

$$V_{AC} = V_{AD} + V_{BC} + V_{DB} = \frac{V}{2}, \quad V_{CD} = 0 \quad \text{ecc.)}$$

4. Due condensatori, di capacità $C_1 = 1 \mu\text{F}$ e $C_2 = 2 \mu\text{F}$, sono collegati in serie (fig. 4.27); se la d.d.p. applicata tra A e B è pari a 100 V, calcolare le d.d.p. V_{AD} e V_{DB} esistenti ai capi dei due condensatori.

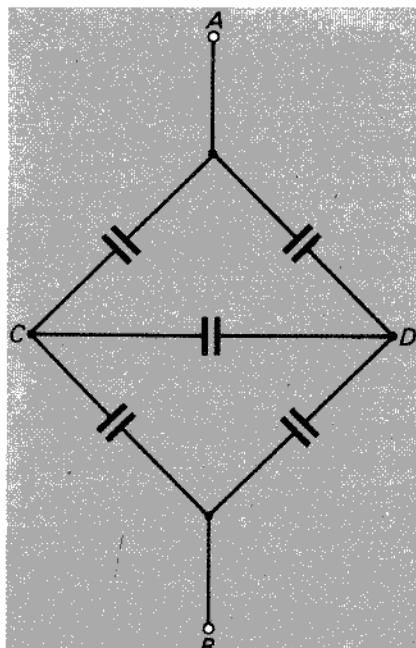


Figura 4.26



Figura 4.27

5. In un campo uniforme, di valore E , viene immersa una lastra piana conduttrice, perpendicolarmente alla direzione del campo. Calcolare le densità superficiali di carica che si inducono sulle due facce della lastra e verificare che il campo, nel conduttore, è nullo.

6. Considerato un sistema costituito da due sfere conduttrici concentriche, di raggi R_{int} e R_{est} , calcolare la distribuzione del potenziale e del campo, quando sulla sfera interna è presente una carica Q_{int} e su quella esterna una carica Q_{est} .

(*Suggerimento.* Utilizzare l'equazione di Laplace.)

7. Considerato un sistema costituito da due conduttori cilindrici indefiniti, coassiali e sezioni circolari di raggi R_{int} e R_{est} , calcolare le distribuzioni del potenziale e del campo, quando sul cilindro interno è presente una carica Q_{int} per unità di lunghezza e su quello esterno una carica Q_{est} (ancora per unità di lunghezza).

8. Calcolare approssimativamente la capacità per unità di lunghezza del condensatore cilindrico ad armature ellittiche rappresentato schematicamente nella figura 4.28, dove

$$a = 50 \text{ cm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad d = 1 \text{ mm}.$$

(*Suggerimento.* Utilizzare la formula che esprime la capacità di un condensatore piano.)

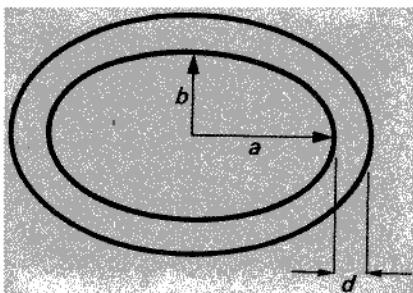


Figura 4.28

9. Calcolare la forza con cui si attraggono le armature di un condensatore piano cui è applicata una d.d.p. di 10^4 V, supponendo che l'area delle armature affacciate sia di 1 m^2 e la distanza tra le stesse di 1 cm.

10. Assumendo pari a 30 kV/cm la rigidità dell'aria, qual è la massima carica che si può comunicare a una sfera conduttrice di diametro pari a 10 cm?

11. Una sferetta conduttrice carica è a un potenziale di 1000 V; calcolare il raggio R della sferetta in funzione della carica q esistente su essa.

12. Un contatore Geiger può essere assimilato a un condensatore cilindrico di raggio esterno $R_{\text{est}} = 1 \text{ cm}$ e raggio interno $R_{\text{int}} = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}$. Ammesso che ad esso sia applicata una d.d.p. $V = 1000 \text{ V}$, qual è la distribuzione del campo nel condensatore?

13. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la distribuzione del potenziale e le cariche esistenti sulle armature (per unità di lunghezza).

14. Un condensatore di capacità $C=100 \text{ pF}$ è carico alla tensione di 100 V ; se i suoi morsetti sono collegati, in un secondo momento, a quelli di un altro condensatore, la sua tensione scende al valore di 70 V . Calcolare la capacità del secondo condensatore.

15. Una sfera conduttrice di raggio R è immersa in un campo elettrico uniforme, preesistente, \mathbf{E} (vedi fig. 4.29); determinare la distribuzione di carica sulla sfera.

(*Suggerimento*. Si ragioni come nell'esercizio 4 del cap. 5.)

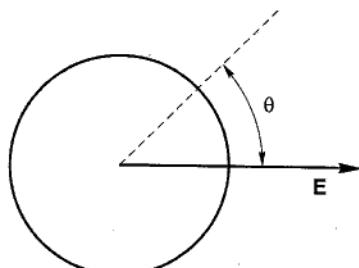


Figura 4.29

16. Una sfera conduttrice di raggio R possiede una carica Q ; una carica puntiforme q è posta a distanza $r > R$ dal centro della sfera. Spiegare qualitativamente perché può avvenire, in certi casi, che la sfera e la carica puntiforme si attraggono, pur essendo Q e q dello stesso segno.

17. Siano $q_1 (> 0)$ e $q_2 (< 0)$ due cariche puntiformi, poste nei punti Q_1 e Q_2 (vedi fig. 4.30); si consideri un punto O sulla retta $Q_1 Q_2$ (esterno al segmento $Q_1 Q_2$) tale che le sue distanze, d_1 e d_2 , da Q_1 e Q_2 siano nel rapporto

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2}.$$

Si consideri, poi, la superficie sferica Σ , di centro in O e raggio $R = d_1 d_2$.

Verificare che il potenziale prodotto da q_1 e q_2 è nullo in tutti i punti di Σ (nel vuoto).

(*Suggerimento*. Sovrapporre i potenziali coulombiani delle due cariche puntiformi).

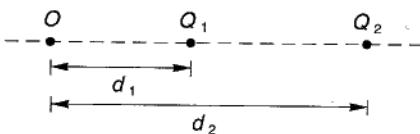


Figura 4.30

18. Una carica puntiforme q sia a distanza d , nel vuoto, dal centro di una sfera conduttrice posta a potenziale zero; calcolare il campo elettrico risultante.

(*Suggerimento*. Con riferimento all'esercizio 17, si ponga una carica puntiforme di valore $q' = -qR/d$, essendo R il raggio della sfera, nel punto Q posto a distanza $d' = R^2/d$ dal centro, sulla retta che congiunge il centro con la carica q).

19. Con riferimento all'esercizio precedente, si supponga che la sfera conduttrice sia scarica e isolata, prima di avvicinare ad essa la carica puntiforme q ; calcolare il campo in queste nuove condizioni.

(*Suggerimento*. La superficie della sfera non è, ora, vincolata al potenziale zero; si disponga, nel centro della sfera, una seconda carica $q'' = -q'$, e si calcoli il campo prodotto nel vuoto dalle tre cariche q, q', q'' .)

Capitolo 5

Il campo elettrostatico in presenza di dielettrici

I. FENOMENI DI POLARIZZAZIONE: IL PUNTO DI VISTA MACROSCOPICO

5.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti sono stati esaminati i campi elettrici prodotti da cariche fisse in posizioni note, o distribuite su corpi conduttori, nel vuoto. Nel caso più generale, in cui siano presenti corpi dielettrici, si constata sperimentalmente che questi influenzano non poco il campo elettrico nelle loro vicinanze.

Consideriamo ad esempio un corpo dielettrico scarico di forma sferica e immaginiamo di sottoporlo all'azione di un campo elettrico, per esempio avvicinandolo a un corpo carico positivamente. Il campo elettrico, attorno al corpo carico, risulta modificato dalla presenza della sfera dielettrica, sulla cui superficie compaiono cariche, negative nelle zone più vicine al corpo, positive in quelle più lontane. Apparentemente, il fenomeno è simile all'induzione che si avrebbe se la sfera fosse conduttrice; in realtà, come si vedrà in seguito, vi è una sostanziale diversità nel modo in cui il campo in prossimità della sfera viene modificato nei due casi: basti pensare che la superficie della sfera dielettrica non è equipotenziale, come invece accade nel caso di un conduttore.

Sperimentalmente la differenza tra i due casi può essere messa in evidenza in maniera molto semplice. Consideriamo una sfera conduttrice che, dopo esser stata avvicinata a un corpo carico, venga divisa in due (come mostrato in fig. 5.1). Separate le parti, una di esse risulta avere una carica globalmente positiva, l'altra una carica negativa. Effettuando l'operazione con una sfera dielettrica, si constata che ciascuna delle parti in cui la sfera viene divisa ha carica globale nulla, poiché su ciascuna delle facce del taglio compaiono cariche che neutralizzano le cariche presenti sul resto della superficie del pezzo. La neutralità complessiva del singolo pezzo permane continuando a dividere la sfera in parti, in maniera qualsiasi: questa proprietà vale anche per corpi di forma non sferica.

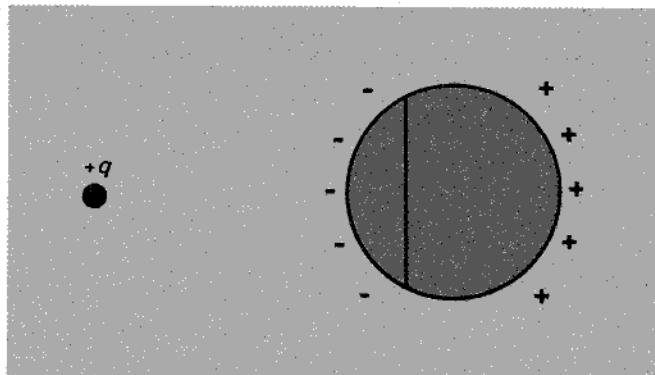


Figura 5.1

Tutto ciò si spiega intuitivamente ricordando che le molecole di un dielettrico, pur essendo globalmente neutre, sono formate da portatori di carica (dei due segni), legati a posizioni di equilibrio da intense forze di richiamo che permettono loro solo piccoli spostamenti. In condizioni di equilibrio, in assenza di cause che influiscano sulla distribuzione delle cariche microscopiche, il campo elettrico prodotto da un corpo isolante è nullo, poiché i contributi delle distribuzioni di carica opposte si bilanciano tra loro. Se il corpo viene immerso in un campo elettrico, i portatori positivi sono sollecitati da forze dirette nel senso del campo, quelli negativi da forze dirette in senso opposto. Gli spostamenti risultanti sono piccoli, dell'ordine delle dimensioni molecolari, ma la distribuzione di carica ne viene alterata; in queste condizioni, il dielettrico si dice *polarizzato*. Nei conduttori, le cariche libere possono compiere spostamenti macroscopici ed essere quindi separate macroscopicamente: nei dielettrici i portatori restano legati alle rispettive posizioni di equilibrio (a meno di piccoli spostamenti) e la separazione macroscopica è impossibile.

Un elemento di volume fisicamente infinitesimo (vedi § 5.2) di dielettrico contiene un gran numero di molecole,¹ e, anche se polarizzato, rimane globalmente neutro. In assenza di polarizzazione, la distribuzione di cariche è caratterizzata inoltre da momento di dipolo nullo: il campo elettrico da essa creato è trascurabile, anche a piccola distanza dall'elemento. Nel caso della polarizzazione, invece, in seguito agli spostamenti delle cariche eteronome, l'elemento di volume acquista un momento di dipolo non nullo.

Per determinare il contributo dato al campo elettrico, a grande distanza, da un elemento di volume polarizzato è sufficiente considerarne il momento di dipolo globale, e riguardare il dielettrico come un mezzo caratterizzato da proprietà variabili con continuità da un punto all'altro. Occorre sottolineare che questo tipo di rappre-

¹ Nei solidi e nei liquidi un volumetto cubico di lato 10^{-3} mm contiene un numero di molecole dell'ordine di dieci miliardi.

sentazione non è applicabile su scala atomica: esso non è valido, ad esempio, nel calcolo del campo elettrico agente su un dato atomo nel dielettrico, poiché nell'atomo i portatori di carica sono soggetti a forze anche da parte di cariche così vicine da non poter essere trattate come una distribuzione continua. Di conseguenza, il campo effettivamente esistente all'interno del materiale presenta localmente forti intensità e forti variazioni tra punti a distanze dell'ordine delle dimensioni atomiche.

In una descrizione macroscopica, in cui il dielettrico viene trattato come un continuo, come "campo in un punto interno" bisogna intendere la *media dei valori del campo microscopico in un intorno del punto*.² Secondo la definizione operativa, tale valore è dato dal rapporto tra la forza agente su una carica sonda e la carica stessa. Questa dev'essere dunque fisicamente infinitesima: abbastanza piccola da non perturbare macroscopicamente la distribuzione delle sorgenti, ma estesa a sufficienza (da un punto di vista microscopico) perché la forza che agisce su essa possa riguardarsi come azione mediata in un intorno del punto.

Riassumendo, un dielettrico polarizzato contribuisce al campo elettrico, sia all'interno che all'esterno del volume occupato. La polarizzazione dipende dal campo elettrico totale all'interno del dielettrico, che a sua volta è dovuto, in parte, alla polarizzazione. Inoltre, il fatto che la polarizzazione dia un contributo al campo anche all'esterno del dielettrico può variare la distribuzione delle cariche ivi esistenti (ad esempio, su corpi conduttori), e modificare, anche per questo motivo, il campo elettrico agente sul dielettrico.

5.2 Vettore 'polarizzazione' e carica di polarizzazione

Macroscopicamente, un dielettrico non polarizzato si presenta dunque come un continuo, con densità di carica nulla in ogni suo punto. Sappiamo, però, che esso contiene cariche dei due segni e che i fenomeni di polarizzazione sono dovuti a piccoli spostamenti di queste. Un modello adatto a trattare il dielettrico è perciò quello in cui esso è considerato come una sovrapposizione di due distribuzioni continue di carica: una positiva di densità ρ_+ , una negativa di densità ρ_- . La prima rappresenta il contributo delle cariche positive dei nuclei atomici del materiale, la seconda quello degli elettroni. Dato il numero elevatissimo di cariche presenti per unità di volume, ρ_+ e ρ_- hanno valori molto grandi.

In assenza di polarizzazione, le densità sono uguali e opposte in ogni punto:

$$\rho_+(x, y, z) + \rho_-(x, y, z) = 0. \quad [5.2.1]$$

² Detto E_{micr} il campo elettrico effettivo all'interno del materiale (campo microscopico), il campo mediato, in un volumetto $\Delta\tau$, è dato da

$$E = \langle E_{\text{micr}} \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \iiint_{\Delta\tau} E_{\text{micr}} d\tau.$$

Dato un generico elemento di volume $\Delta\tau$, le cariche in esso contenute, $\rho_+\Delta\tau$ e $\rho_-\Delta\tau$, sono dunque uguali e opposte e i loro baricentri coincidono; di conseguenza carica globale e momento di dipolo dell'elemento sono nulli.

Supponiamo ora di polarizzare il materiale: nell'ambito macroscopico, ciò significa dare, nell'intorno di un generico punto (x, y, z) , uno spostamento "piccolo", $\mathbf{l}_+(x, y, z)$, alle cariche positive e uno spostamento, anch'esso piccolo, $\mathbf{l}_-(x, y, z)$ a quelle negative. Si ha dunque un piccolo spostamento relativo $\mathbf{l} = \mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-$, tra i baricentri delle due cariche, che determina la nascita di un momento di dipolo associato all'elemento di volume:³

$$\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-) \rho_+ \Delta\tau = \rho_+ \mathbf{l} \Delta\tau. \quad [5.2.2]$$

La figura 5.2 illustra, in sezione, un elemento cubico di dielettrico (la carica positiva è indicata con *tratteggio inclinato a destra*, quella negativa con *tratteggio inclinato a sinistra*): la parte (a) della figura rappresenta l'elemento non polarizzato, la (b) l'elemento stesso, polarizzato, in corrispondenza a spostamenti \mathbf{l}_+ e \mathbf{l}_- paralleli alla direzione AB .

Come si è osservato nel paragrafo precedente, per il calcolo del campo macroscopico basta considerare il momento di dipolo di ogni elemento di volume. Introduciamo dunque un *vettore di polarizzazione* \mathbf{P} , definito come momento di dipolo elettrico per unità di volume:⁴

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau}. \quad [5.2.3]$$

Confrontando con la [5.2.2], si ha

$$\mathbf{P} = \rho_+ \mathbf{l}. \quad [5.2.4]$$

Il contributo dato dal materiale polarizzato al campo elettrico macroscopico può quindi essere calcolato riferendosi a una distribuzione continua di momento di dipolo: ogni elemento di volume produce un campo di dipolo, e il campo totale è somma di questi contributi infinitesimi. Sappiamo però (vedi § 3.9.1) che è possibile sostituire alla distribuzione di dipoli una distribuzione equivalente di cariche (di volume e superficiali) che producano gli stessi effetti. Queste cariche, che in un dielettrico polarizzato sono localizzate in generale sia sulla superficie esterna (con densità superficiale σ_p) sia nel volume (con densità ρ_p), sono dette *di polarizzazione*.

Per meglio chiarire l'aspetto fisico dei fenomeni di polarizzazione, mostriamo l'equivalenza in modo intuitivo. La descrizione della polarizzazione mediante una distribuzione di carica con densità di volume non nulla può sembrare incompatibile

³ In questa descrizione lo spostamento relativo \mathbf{l} , rispetto alle dimensioni lineari di $\Delta\tau$, va pensato come un infinitesimo di ordine superiore; la densità si suppone invece elevatissima, al limite infinita, si da poter considerare il prodotto $\rho\mathbf{l}$ come una grandezza finita. In altre parole, $\Delta\mathbf{p}$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $\Delta\tau$.

⁴ Poiché \mathbf{P} rappresenta una grandezza macroscopica, il passaggio al limite va inteso nel senso specificato in § 2.2.

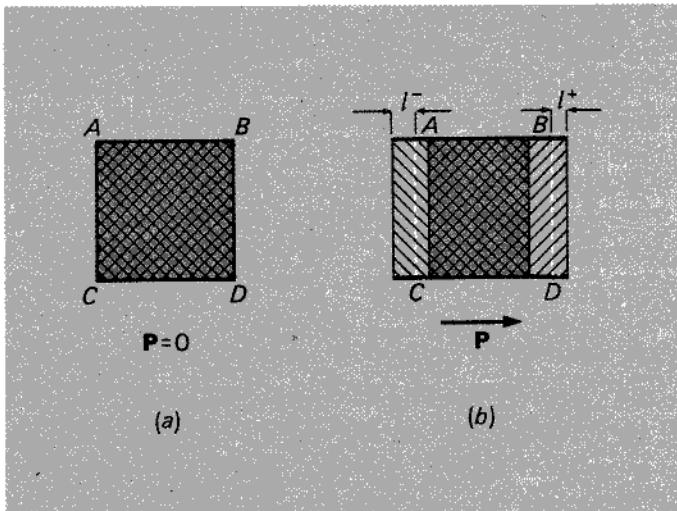


Figura 5.2

con l'altra, in cui il dielettrico si riduce a un insieme di dipoli (aventi carica nulla). L'incompatibilità è tuttavia solo apparente, come mostreremo in dettaglio. E' facile spiegare l'esistenza di carica sulla superficie del dielettrico. Supponendo ad esempio (vedi fig. 5.2) che la faccia AC dell'elemento sia parte della superficie esterna del dielettrico, è evidente che, a dielettrico polarizzato, si ha in questa zona superficiale una distribuzione di carica negativa.

Per quanto riguarda la carica nel volume interno, la spiegazione è meno immediata. Cominciamo col considerare, all'interno del dielettrico, una generica superficie S , di normale \mathbf{n} (vedi fig. 5.3). All'atto della polarizzazione (rimanendo sempre nel macroscopico), la superficie viene attraversata nei due sensi da cariche di segno opposto. Calcoliamo dunque la carica netta che attraversa un elemento superficiale dS in senso concorde a \mathbf{n} . In seguito allo spostamento \mathbf{l}_+ , attraverso dS passa la carica positiva che era adiacente ad esso prima della polarizzazione. Tale carica è contenuta in un volumetto cilindrico avente per basi dS e una superficie ad esso parallela: la superficie laterale di questo cilindretto è descritta da generatrici parallele a \mathbf{l}_+ e lunghe quanto \mathbf{l}_+ stesso. La carica positiva attraversante dS è dunque pari a

$$\rho_+ \mathbf{l}_+ \cdot \mathbf{n} dS.$$

Per la carica negativa si ha

$$\rho_- \mathbf{l}_- \cdot \mathbf{n} dS = -\rho_+ \mathbf{l}_+ \cdot \mathbf{n} dS.$$

La carica netta attraversante dS vale dunque

$$dQ = \rho_+ (\mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-) \cdot \mathbf{n} dS = \rho_+ \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} dS.$$

[5.2.5]

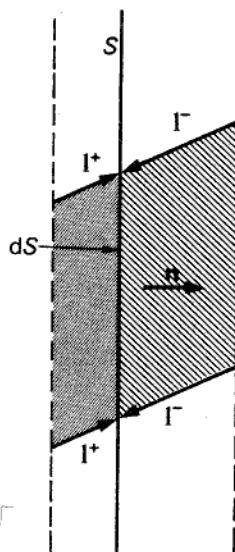


Figura 5.3

Per la [5.2.4], si può scrivere

$$dQ = \rho_p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS; \quad [5.2.6]$$

dunque la carica netta che attraversa dS al momento della polarizzazione è espressa dal flusso di \mathbf{P} attraverso dS .

Consideriamo ora una generica superficie Σ chiusa, interna al dielettrico, e indichiamo con τ il volume in essa contenuto (vedi fig. 5.4): sappiamo che quando il dielettrico non è polarizzato essa contiene una carica globale nulla. D'altra parte, integrando la [5.2.6], appare chiaro che, quando il materiale è polarizzato, si può avere entro la stessa superficie Σ una carica Q_p non nulla. Definiamo *carica di polarizzazione* questo aumento (positivo o negativo) di carica globale che può avversi entro la superficie Σ in seguito alla polarizzazione. Per il principio di conservazione della carica, tale aumento di carica Q_p entro Σ è dato dalla carica totale che è entrata in τ attraverso Σ durante il processo di polarizzazione e come tale può essere valutato.

Orientata la normale \mathbf{n} nel verso uscente da Σ , la carica totale entrata è, per la [5.2.6],

$$Q_p = - \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS; \quad [5.2.7]$$

essa è distribuita nel volume τ con densità ρ_p , per cui risulta

$$Q_p = \iiint_{\tau} \rho_p d\tau. \quad [5.2.8]$$

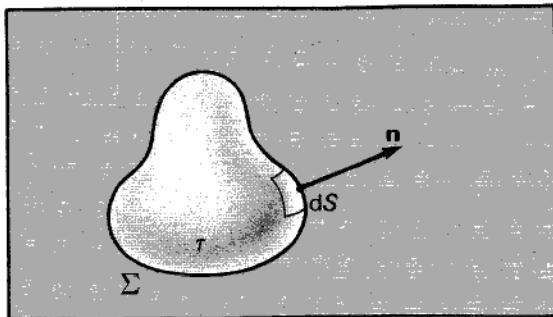


Figura 5.4

Confrontando le [5.2.7] e [5.2.8] e osservando che le due espressioni devono fornire lo stesso valore di Q_p per qualsiasi superficie Σ (e relativo volume τ), si può ricavare la relazione tra ρ_p e \mathbf{P} . Applichiamo a tal fine il teorema della divergenza alla [5.2.7]:

$$Q_p = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau; \quad [5.2.9]$$

dall'identità

$$-\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau = \iiint_{\tau} \rho_p d\tau, \quad [5.2.10]$$

otteniamo

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad [5.2.11]$$

Immaginando ora che la superficie S nella figura 5.3 non sia interna al dielettrico, ma faccia parte del suo contorno, si può ricavare anche l'espressione della carica di polarizzazione nello strato superficiale del dielettrico, cioè la densità superficiale σ_p . Supposta \mathbf{n} uscente dal dielettrico, si ha, dalla [5.2.6],

$$dQ = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS; \quad [5.2.12]$$

e ponendo

$$dQ = \sigma_p dS, \quad [5.2.13]$$

si ricava

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n. \quad [5.2.14]$$

Tale relazione è generalizzabile al caso in cui vi sia una superficie di discontinuità S tra dielettrici diversi 1 e 2. Consideriamo una superficie elementare di tipo "M"

(vedi § 2.6) situata per metà nel mezzo 1 e per metà nel mezzo 2, avente base dS parallela alla superficie di separazione S (vedi fig. 5.5). Per la [5.2.7], la carica di polarizzazione dQ_p contenuta in un volumetto uguaglia il flusso di \mathbf{P} entrante nel volumetto stesso. La carica di polarizzazione può essere distribuita con densità σ_p sulla superficie di discontinuità S e con densità ρ_{p1} e ρ_{p2} nel volume dei due mezzi. Pertanto entro il volumetto si può avere una $dQ_{ps} = \sigma_p dS$, sulla superficie S , e una $dQ_p = (\rho_{p1} + \rho_{p2}) d\tau$ nel volume. Date le dimensioni del volumetto, dQ_p risulta infinitesima di ordine superiore a dQ_{ps} e quindi trascurabile.

Per lo stesso motivo, è trascurabile il flusso del vettore \mathbf{P} attraverso la superficie laterale rispetto al flusso attraverso le basi; quest'ultimo, indicando con \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 il vettore "polarizzazione" nei due materiali e tenendo conto che $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ (vedi fig. 5.5), è dato da

$$-\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n} dS. \quad [5.2.15]$$

Dalla [5.2.7], si ottiene

$$\sigma_p dS = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n} dS, \quad [5.2.16]$$

ovvero

$$\sigma_p = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n} = P_{n1} - P_{n2}. \quad [5.2.17]$$

In particolare, se il mezzo 2 è il vuoto, $\mathbf{P}_2 = 0$ e si ritrova la [5.2.14].

Verifichiamo ora che le due descrizioni del dielettrico polarizzato sono compa-

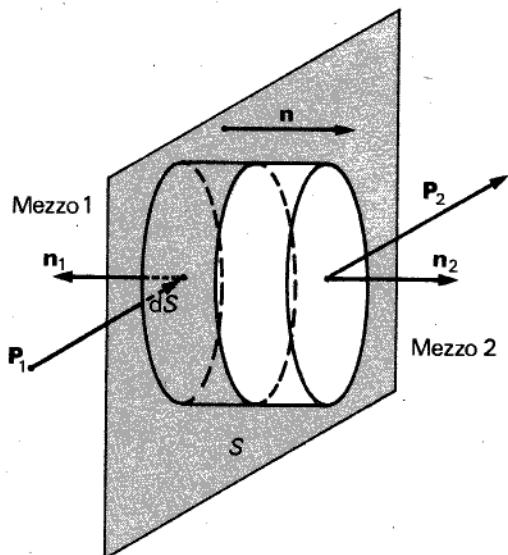


Figura 5.5

tibili. Ogni porzione di dielettrico possiede cariche, distribuite sulla superficie con densità σ_p (data dalla [5.2.14]) e nel volume τ con densità ρ_p (data dalla [5.2.11]); la carica globale del pezzo di dielettrico è sempre nulla. Infatti

$$Q = \sum_{\Sigma} \int \sigma_p dS + \iiint_{\tau} \rho_p d\tau \quad [5.2.18]$$

e, tenuto conto delle [5.2.11] e [5.2.14] e del teorema della divergenza, si ha

$$Q = \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau = 0. \quad [5.2.19]$$

Ciò vale per ogni elemento di volume $\Delta\tau$ (ad esempio quello di fig. 5.2) considerato a sé stante. Quando i vari $\Delta\tau$ sono accostati, venendo a formare un pezzo di dielettrico di dimensioni finite, le cariche sulle superfici affacciate delle coppie di elementi interni a contatto si neutralizzano e di questi elementi resta da considerare solo la carica di volume. Al campo contribuiscono dunque le sole cariche distribuite nel volume e quelle sulle superfici esterne.

In molti casi accade che $\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$, e occorre quindi considerare soltanto le cariche presenti sulle superfici esterne: ciò avviene in tutti i dielettrici uniformemente polarizzati e, come si vedrà più avanti, in quelli lineari e omogenei.

Le densità di carica ρ_p , σ_p che si determinano nel dielettrico a seguito del fenomeno di polarizzazione non sono dovute ad apporto di cariche esterne, ma, come abbiamo visto, si formano in seguito a spostamenti delle cariche microscopiche del materiale dalle rispettive posizioni di equilibrio. Per tale motivo esse vengono anche denominate *densità di carica legata*, per distinguerle dalle *densità di carica libera* esaminate nei capitoli precedenti. La *densità di carica totale* ρ (ovvero σ) è quindi, in genere, somma di una densità di carica libera ρ_{lib} (ovvero σ_{lib}) e una densità di carica di polarizzazione ρ_p (ovvero σ_p).⁵

$$\rho = \rho_{lib} + \rho_p, \quad [5.2.20]$$

$$\sigma = \sigma_{lib} + \sigma_p. \quad [5.2.21]$$

5.3 Campo elettrico prodotto da distribuzioni di polarizzazione assegnate

Vogliamo ora esaminare come si calcola il contributo dato al campo elettrico macroscopico da distribuzioni di polarizzazione note, prescindendo per il momento da come siano state determinate; supporremo cioè che la distribuzione di polarizzazione

⁵ La distinzione tra cariche libere e cariche legate è netta solo quando, per la struttura del materiale, è possibile individuare le singole molecole componenti. In questi casi, ciascun atomo interagisce principalmente con alcuni atomi vicini, formando un complesso molecolare. In molti cristalli, invece, ogni atomo interagisce con uguale intensità con tutti i suoi vicini, e in un certo senso non appartiene a una particolare molecola, ma a tutto il cristallo.

sia un dato del problema. Più avanti (vedi § 5.8) vedremo anche come si determina il campo totale, almeno in alcuni casi semplici.

Assunto un punto qualsiasi O come origine, indichiamo con \mathbf{r} il vettore che da O va al punto A in cui si considera il campo (vedi fig. 5.6) e con \mathbf{r}' il vettore da O a un punto A' del dielettrico polarizzato (di superficie Σ e volume τ).

Per semplicità, calcoliamo dapprima il potenziale $V(\mathbf{r})$, anziché il campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. La polarizzazione sia assegnata mediante il vettore $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$. L'elemento di volume $\Delta\tau'$ attorno ad A' possiede un momento di dipolo $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{P}\Delta\tau'$; pertanto, il suo contributo al potenziale in A è (vedi la [3.7.4])

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Delta\tau'. \quad [5.3.1]$$

Il potenziale $V(\mathbf{r})$ si ricava sommando tutti i contributi del dielettrico:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'. \quad [5.3.2]$$

Ricordando che la polarizzazione può essere descritta anche come una distribuzione di cariche sulla superficie Σ con densità σ_p e nel volume τ con densità ρ_p , il potenziale risulta esprimibile come sovrapposizione di contributi forniti da cariche infinitesime $\sigma_p dS$ e $\rho_p d\tau'$:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \sigma_p \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho_p \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \quad [5.3.3]$$

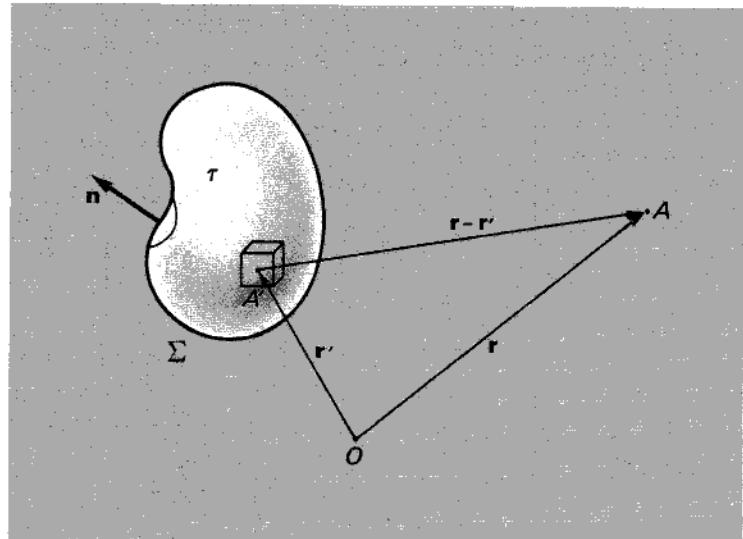


Figura 5.6

Per le [5.2.11] e [5.2.14], risulta

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\operatorname{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\tau', \quad [5.3.4]$$

(indicando con “ div' ” l’operatore divergenza applicato alle coordinate \mathbf{r}' ; vedi § 3.9.1).

L’espressione del campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ si può ottenere come gradiente (rispetto alla coordinata \mathbf{r}) del potenziale $V(\mathbf{r})$ o anche, direttamente, per sovrapposizione. In tal modo si ottiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \sigma_p dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \rho_p d\tau'. \quad [5.3.5]$$

Vediamo ora qualche esempio relativo a corpi di varie forme, uniformemente polarizzati.

Esempio 1. Cilindro circolare, di lunghezza a e sezione S , uniformemente polarizzato in direzione parallela all’asse

Nella figura 5.7a sono rappresentate la distribuzione di \mathbf{P} e quella della carica di polarizzazione. Data l’uniformità di \mathbf{P} , non si ha carica nel volume; data la sua direzione, si hanno densità σ_p solo sulle facce terminali. Sulla superficie S_1 si ha una

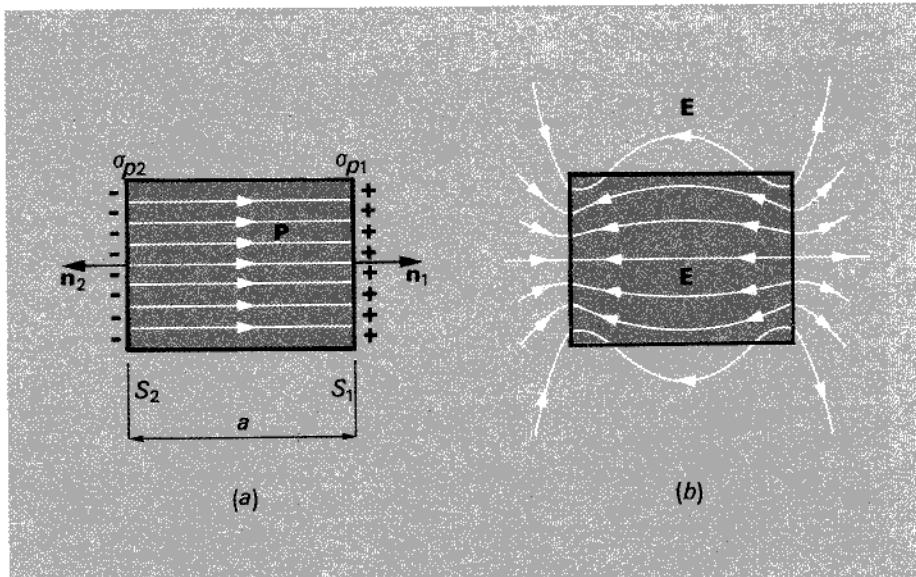


Figura 5.7

Cilindro dielettrico circolare, di lunghezza finita, uniformemente polarizzato.

densità uniforme positiva $\sigma_{p_1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_1 = |\mathbf{P}|$; sulla S_2 si ha densità uguale e opposta $\sigma_{p_2} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_2 = -|\mathbf{P}|$. La distribuzione del campo \mathbf{E} è uguale in ogni piano passante per l'asse (vedi fig. 5.7b). Non calcoliamo qui esplicitamente il campo a partire dalla [5.3.5]; non è difficile, tuttavia, rendersi conto qualitativamente dell'andamento delle linee di forza, tenendo presente che, per quanto detto, esso è dovuto ai due semplici strati di carica sulle superfici S_1 e S_2 . A grande distanza, il campo è simile a quello generato da un dipolo di momento elettrico pari al momento elettrico totale $\mathbf{p} = \mathbf{P}\tau$ del dielettrico (con $\tau = Sa$). Il campo elettrico \mathbf{E} dovuto a questa \mathbf{P} uniforme non è uniforme entro il materiale ed è opposto a \mathbf{P} .

Esempio 2. Cilindro circolare indefinito, di sezione S , uniformemente polarizzato in direzione parallela all'asse

Si può considerare questa situazione come limite, per $a \rightarrow \infty$, di quella nella zona centrale dell'esempio precedente. E' chiaro che, via via che le facce terminali si allontanano, rimanendo costanti le loro dimensioni e le densità σ_{p_1} e σ_{p_2} , il campo nella zona centrale diminuisce, tendendo a zero al tendere della lunghezza a a infinito. Il campo elettrico generato è quindi nullo.

Esempio 3. Strato dielettrico indefinito, di spessore a , uniformemente polarizzato in direzione normale alle facce

Questo caso può essere considerato come limite dell'esempio 5.1 al tendere a infinito della sezione. Il campo elettrico è prodotto da un doppio strato piano indefinito di cariche con densità $\sigma_p = |\mathbf{P}|$. Il campo \mathbf{E} all'esterno del dielettrico è nullo, all'interno è uniforme, parallelo e di senso opposto a \mathbf{P} (vedi fig. 5.8):

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}.$$

Esempio 4. Sfera dielettrica, di raggio a , uniformemente polarizzata

La polarizzazione uniforme (vedi fig. 5.9a) produce una densità di carica superficiale a simmetria cilindrica rispetto alla direzione di polarizzazione. La densità σ_p , in un punto qualsiasi della superficie, dipende solo dall'angolo θ tra la normale alla superficie sferica e la direzione di polarizzazione:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{P}| \cos \theta. \quad [5.3.6]$$

Si potrebbe ricavare l'andamento del campo introducendo la [5.3.6] nella [5.3.5], con qualche difficoltà analitica, ma è più semplice fare riferimento al modello macroscopico della polarizzazione (vedi § 5.2). Polarizzare la sfera equivale ad attribuire alle due densità di carica uniformi uno spostamento relativo $\mathbf{l} = \mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-$ in modo che $\mathbf{P} = \rho_+ \mathbf{l}$. Il campo è calcolabile quindi come risultante dei campi creati da queste due distribuzioni sferiche uguali e di segno contrario, distanti \mathbf{l} . Indichiamo con τ il volume della sfera, con $Q = \tau \rho_+$ la totale carica della distribuzione positiva e con $-Q$ la carica, uguale e opposta, della distribuzione negativa. Ricordando che il campo al-

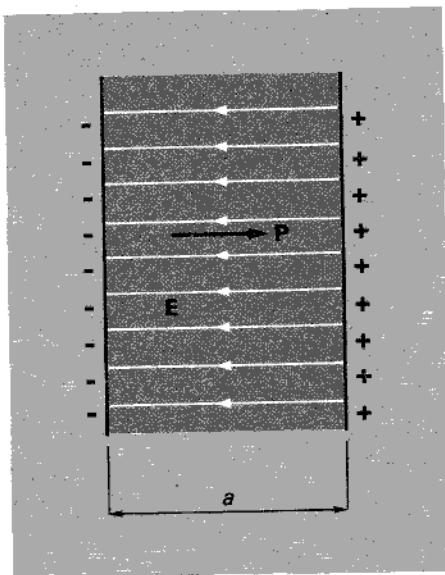


Figura 5.8

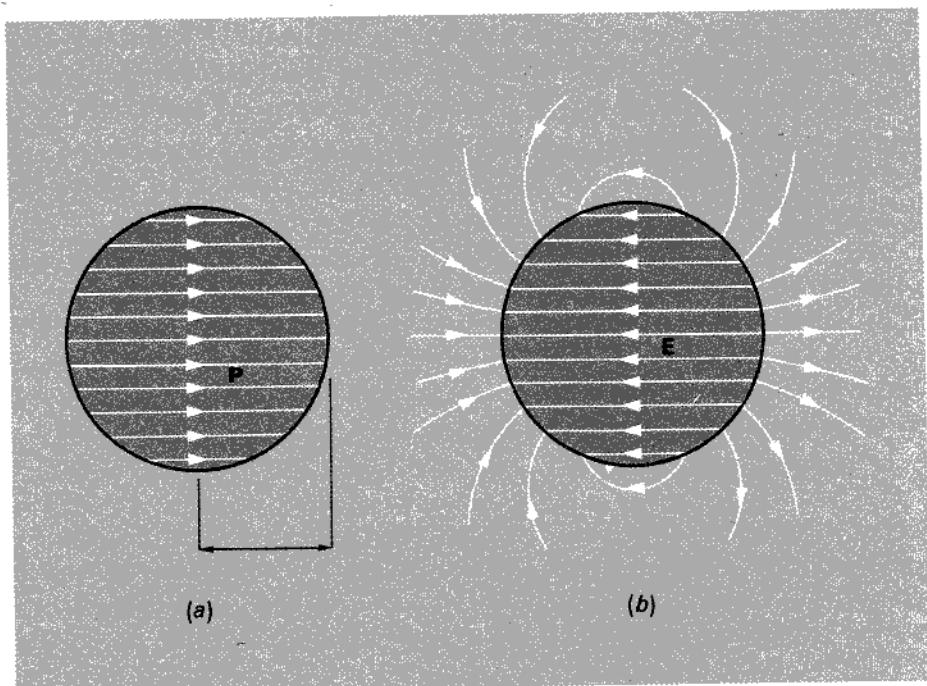


Figura 5.9

(a) Sfera dielettrica uniformemente polarizzata; la parte (b) mostra l'andamento del relativo campo elettrico.

l'esterno di una distribuzione sferica di carica si può calcolare come se la carica totale fosse concentrata nel centro, si conclude che, all'esterno della sfera polarizzata, il campo è uguale a quello prodotto da due cariche Q e $-Q$, situate in prossimità del centro della sfera e spostate, l'una rispetto all'altra, di una piccola quantità \mathbf{l} ; esso è pari, cioè, al campo di un dipolo di momento $\mathbf{p} = Q\mathbf{l}$, situato al centro della sfera.

Riassumendo, \mathbf{p} , momento di dipolo totale della sfera, è dato da

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{l} = \tau \rho_+ \mathbf{l} = \tau \mathbf{P}. \quad [5.3.7]$$

Osserviamo che, data la particolare simmetria, il campo, *all'esterno* della sfera, è un campo di dipolo non solo a grande distanza (come nell'esempio 1), ma anche in prossimità di essa.

Utilizzando questo risultato, si può calcolare il campo *all'interno* della sfera. Infatti ora conosciamo il potenziale di tutti i punti esterni, fino alla superficie della sfera: detto \mathbf{r} il raggio vettore dal centro al punto generico in cui si considera $V(\mathbf{r})$, si ha

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad [5.3.8]$$

Per i punti della superficie si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}| &= a \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} &= |\mathbf{P}| a \cos \theta. \end{aligned} \quad [5.3.9]$$

Introducendo una coordinata x nella direzione e nel verso di \mathbf{P} , con origine nel centro,

$$x = a \cos \theta,$$

si ha, in tali punti,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \frac{|\mathbf{P}|}{a^3} x = \frac{P}{3\epsilon_0} x. \quad [5.3.10]$$

Si tratta ora di determinare V nei punti interni. Essendo, all'interno della sfera,

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P} = 0,$$

il potenziale è quella particolare soluzione dell'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = 0,$$

che rispetta la condizione al contorno [5.3.10]. Per determinarne l'espressione basta considerare che

$$V = Kx,$$

con K costante, è soluzione dell'equazione di Laplace e che, scegliendo

$$K = \frac{P}{3\epsilon_0},$$

si soddisfa la condizione [5.3.10]. Pertanto la [5.3.10] è l'espressione di V anche nei punti interni alla sfera. Essa mostra che V cresce linearmente in direzione x (cioè nella direzione di \mathbf{P}) ed è indipendente dalle altre coordinate: il campo \mathbf{E} all'interno della sfera è dunque uniforme, parallelo al vettore \mathbf{P} e di verso opposto ad esso:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad [5.3.11]$$

In tutti questi esempi è risultato che il contributo al campo \mathbf{E} dovuto alla polarizzazione ha verso contrario a \mathbf{P} . Come si è detto all'inizio del paragrafo, \mathbf{P} nei materiali dielettrici dipende da \mathbf{E} ; esso inoltre (vedi § 5.5), nella maggior parte dei materiali, ha lo stesso verso di \mathbf{E} totale. Il contributo dato a \mathbf{E} totale dalla polarizzazione tende quindi a ridurre la polarizzazione stessa e pertanto viene denominato *campo elettrico depolarizzante*.

5.4 Il vettore 'spostamento elettrico'

E' noto (vedi § 2.4) il teorema di Gauss per una distribuzione di cariche fisse nel vuoto; sulla base di quanto detto circa i fenomeni di polarizzazione, si comprende che esso rimane valido anche in presenza di dielettrici materiali, a patto di includere tra le cariche anche quelle di polarizzazione. Si ha pertanto

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{\text{lib}} + Q_p), \quad [5.4.1]$$

dove Q_{lib} e Q_p sono la carica libera e quella di polarizzazione globalmente presenti nella regione delimitata dalla superficie chiusa Σ . Ricordando l'espressione [5.2.7] della carica di polarizzazione, si ha

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{lib}} - \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS,$$

e quindi

$$\iint_{\Sigma} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS = Q_{\text{lib}}. \quad [5.4.2]$$

Pertanto il flusso del vettore $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ uscente da Σ uguaglia la *carica libera totale* contenuta entro Σ . Definito *spostamento elettrico* il vettore⁶

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad [5.4.3]$$

⁶ L'unità di misura per \mathbf{D} , nel sistema SI, è uguale a quella per \mathbf{P} , ed è il C/m².

la [5.4.2] diviene

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q_{\text{lib}} \quad [5.4.4]$$

ed esprime il teorema di Gauss mediante \mathbf{D} . Anche la [5.4.1] e la [5.4.4] possono essere date in forma locale⁷ attraverso le

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{lib}} + \rho_p) \quad [5.4.5]$$

e

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}. \quad [5.4.6]$$

Tale relazione potrebbe far pensare che \mathbf{D} sia in tutto simile al vettore \mathbf{E} che sarebbe creato nel vuoto da una distribuzione di carica libera ρ_{lib} , in assenza di dielettrici: tuttavia ciò non è vero in generale. Tra \mathbf{E} e \mathbf{D} vi è una fondamentale differenza: mentre \mathbf{E} è sempre irrotazionale, ciò non può dirsi per \mathbf{D} . Infatti, dalla definizione [5.4.3] e tenendo conto dell'irrotationalità di \mathbf{E} , si ottiene

$$\oint_{\gamma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}; \quad [5.4.7]$$

in forma locale,

$$\operatorname{rot} \mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{P}. \quad [5.4.8]$$

Non è detto che in generale \mathbf{P} sia conservativo; anzi, è facile trovare esempi in cui integrali di \mathbf{P} estesi a linee chiuse non sono nulli; e anche nell'ipotesi che \mathbf{P} sia irrotazionale entro tutto il volume del dielettrico, occorre tener conto delle discontinuità di \mathbf{P} alla superficie esterna. Nell'esempio 1, a una linea del tipo indicato nella figura 5.10a corrisponde evidentemente una circuitazione non nulla, poiché si hanno contributi tutti positivi dagli elementi del tratto AB , e nulli dal resto della linea. Nell'esempio 3, invece, a qualsiasi linea chiusa corrisponde circuitazione nulla. Ciò è evidente per le linee completamente esterne ($\mathbf{P}=0$) o completamente interne (\mathbf{P} uniforme).

Consideriamo ora una linea $ADBC$, in parte esterna e in parte interna (vedi fig. 5.10b): l'unico contributo potrebbe venire dal tratto interno ACB , ma in questo caso anch'esso è nullo. Si esamini infatti la linea chiusa $ACBA$ costituita dal tratto ACB completato dal segmento rettilineo AB , parallelo alla superficie e situato all'interno del dielettrico a distanza infinitesima da esso: essa avrà circuitazione nulla, essendo immersa tutta in un campo uniforme. Consideriamo ora il solo tratto AB :

⁷ Come al solito, le [5.4.5] e [5.4.6] rappresentano l'espressione del teorema di Gauss nei punti di regolarità del campo; gli altri casi saranno trattati in seguito (vedi § 5.6).

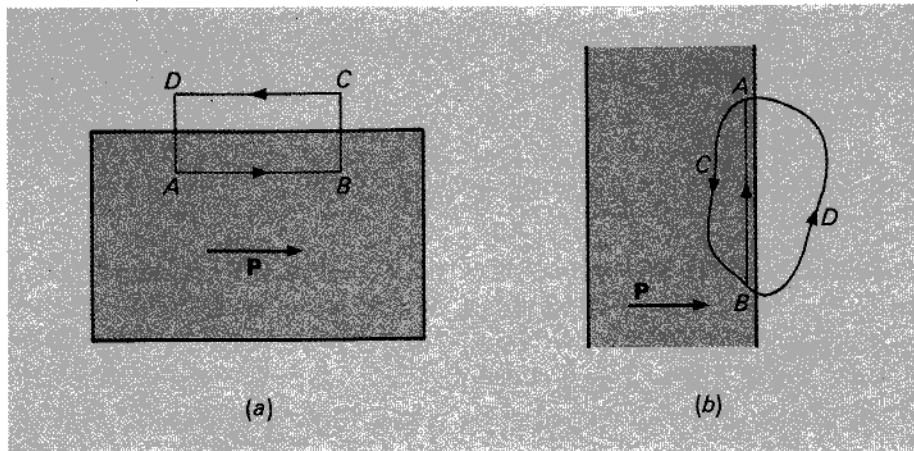


Figura 5.10

essendo \mathbf{P} normale ad esso in ogni punto, il suo contributo è pure nullo:

$$\int_{AB} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} = 0;$$

dunque anche il contributo dell'altro tratto ACB sarà nullo.

Dagli esempi visti è chiaro che la sola conoscenza della distribuzione di carica libera ρ_{lib} non basta a calcolare \mathbf{D} tramite la [5.4.6], poiché in generale $\text{rot } \mathbf{D} \neq 0$: occorre conoscere dunque la natura del dielettrico e la sua geometria (oppure, naturalmente, la distribuzione di \mathbf{P}). Anche se \mathbf{P} è conservativo, limitatamente all'interno del materiale, il fatto che lo sia ovunque dipende in generale dalla geometria di questo; ciò si verifica, ad esempio, quando le superfici di discontinuità del dielettrico risultano in ogni loro punto normali a \mathbf{P} (vedi § 5.5).

In conclusione, \mathbf{D} non ha nell'elettrostatica un ruolo fondamentale quanto \mathbf{E} : Anche da un punto di vista pratico, di solito si è in grado di controllare sperimentalmente non le cariche libere sui conduttori, ma le differenze di potenziale tra essi, e quindi il campo \mathbf{E} e non \mathbf{D} .

5.5 Materiali dielettrici lineari: suscettività elettrica e costante dielettrica

Da un punto di vista macroscopico, il comportamento di un dielettrico è completamente caratterizzato dalla relazione $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{E})$ tra le grandezze macroscopiche \mathbf{P} ed \mathbf{E} , misurate nello stesso punto del dielettrico; tale relazione può essere determinata sperimentalmente mediante misure macroscopiche.

Nella maggior parte dei materiali, si ha polarizzazione \mathbf{P} nulla quando il campo \mathbf{E} è nullo; in altri casi \mathbf{P} ed \mathbf{E} non hanno la stessa direzione, e la relazione $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{E})$ ha

Nella maggior parte dei materiali, si ha polarizzazione \mathbf{P} nulla quando il campo \mathbf{E} è nullo; in altri casi \mathbf{P} ed \mathbf{E} non hanno la stessa direzione, e la relazione $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{E})$ ha carattere tensoriale: ciò accade nei materiali anisotropi (ad esempio in molti monocrystalli). Nel seguito, ci limiteremo a considerare materiali che da un punto di vista macroscopico si possono considerare isotropi, quali i policristalli, i solidi amorfi, i fluidi. In essi \mathbf{P} ha la stessa direzione del campo \mathbf{E} che lo provoca:

$$\mathbf{P} = \chi(E) \mathbf{E}; \quad [5.5.1]$$

la quantità scalare χ , in generale funzione dell'intensità di \mathbf{E} , è detta *suscettività elettrica* del materiale.⁸

Dalla definizione di \mathbf{D} , si ha, introducendo la [5.5.1],

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi(E) \mathbf{E} = \epsilon(E) \mathbf{E}, \quad [5.5.2]$$

in cui lo scalare $\epsilon(E)$,

$$\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E), \quad [5.5.3]$$

prende il nome di *costante dielettrica* o *permittività* del materiale.

Le quantità χ e ϵ sono, in generale, funzioni della densità di massa ρ_m , della temperatura T e dell'intensità del campo elettrico. Tuttavia, si verifica sperimentalmente che in molti materiali la dipendenza da E è molto debole: ciò significa che, in questi casi, χ e ϵ , per assegnate ρ_m e T , risultano entro ampi limiti indipendenti da E . comportamento elettrico è completamente determinato dalle costanti caratteristiche (dotate di dimensioni) χ e ϵ . Si è soliti inoltre introdurre una costante adimensionale ϵ_r , detta *costante dielettrica relativa* (rispetto al vuoto), data dalla

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}. \quad [5.5.4]$$

Nel seguito, tratteremo quasi sempre materiali lineari. Per essi sono meglio specificabili le condizioni per cui $\text{rot } \mathbf{D} = 0$. Infatti si ha

$$\text{rot } \mathbf{D} = \text{rot}(\epsilon \mathbf{E}) = \text{rot } \mathbf{E} + \text{grad } \epsilon \times \mathbf{E} = \text{grad } \epsilon \times \mathbf{E}. \quad [5.5.5]$$

Se $\text{grad } \epsilon$ è dovunque nullo o parallelo a \mathbf{E} , \mathbf{D} è irrotazionale. Ciò si può avere ad esempio in un mezzo omogeneo ($\text{grad } \epsilon = 0$ nel suo interno) se le superfici di confine, in corrispondenza alle quali si ha discontinuità di ϵ , risultano normali a \mathbf{E} in ogni loro punto.

In realtà, un materiale non può essere considerato lineare per ogni valore del campo elettrico applicato: generalmente, una relazione lineare tra polarizzazione e campo applicato sussiste per campi di intensità non troppo elevate. Per tutti i dielettrici si ha un valore (in genere assai elevato) del campo elettrico (caratteristico del materiale

⁸ Le dimensioni di χ sono uguali a quelle della costante ϵ_0 del vuoto, e la sua unità di misura nel SI è quindi il $C \cdot s^2 / kg \cdot m^3$ cioè F/m . In alcuni testi, viene definita una suscettività adimensionale χ_r , legata alla suscettività sopra definita dalla relazione $\chi_r = \chi / \epsilon_0$.

e dipendente dalle condizioni fisiche in cui si trova) raggiunto il quale avviene la scarica elettrica, cioè un violento fenomeno di conduzione. Si parla in questo caso di *rottura del dielettrico*, e il valore E_{\max} del campo elettrico, al di sopra del quale si hanno questi fenomeni di conduzione, prende il nome di *rigidità dielettrica*. A titolo di esempio, riportiamo nella tabella 5.1 i valori di ϵ_r e qualche valore della rigidità dielettrica E_{\max} per alcuni dielettrici.

Tabella 5.1

Materiale	ϵ_r	E_{\max} (V/m)
Aria:		
(1 atm)	1,00059	3×10^6
(100 atm)	1,0548	
Acqua distillata a 20 °C	80,0	
Alcool etilico a 0 °C	28,4	
Nylon	6,0	$5 \div 20 \times 10^6$
Mica	3,5	16×10^6
Vetri (di varie composizioni)	5 \div 10	9×10^6

5.6 Condizioni al contorno per i vettori E e D

Esaminiamo ora come cambiano **E** e **D** passando da un lato all'altro della superficie *S* di separazione tra due dielettrici.

Consideriamo, al solito, una superficie elementare di tipo "M" (vedi fig. 5.11a), situata metà nel mezzo 1 e metà nel mezzo 2, e applichiamo ad essa il teorema di Gauss nella forma [5.4.4]. Immaginiamo che una carica libera sia distribuita con densità σ_{lib} sulla superficie di discontinuità e con densità $\rho_{\text{lib}1}$ e $\rho_{\text{lib}2}$ nel volume dei due mezzi. Ragionando come per la [5.2.17], si riconosce che la carica nel volume dell'elemento è trascurabile rispetto a quella sulla superficie di discontinuità e che il flusso di **D** attraverso la superficie laterale è trascurabile rispetto a quello attraverso le basi. Si ottiene così, dalla [5.4.4],

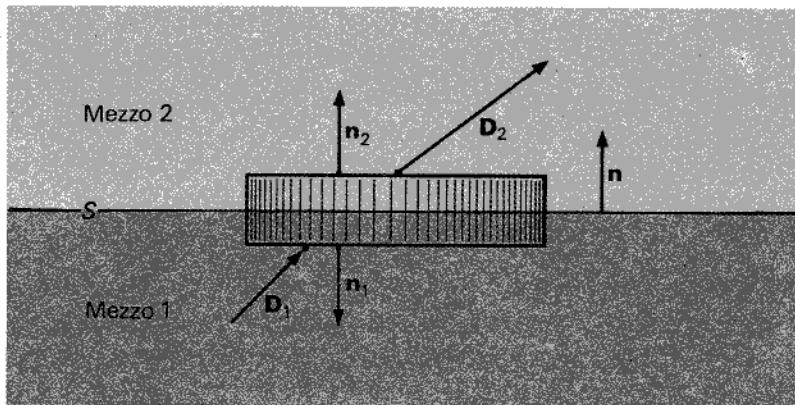
$$\sigma_{\text{lib}} dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} dS, \quad [5.6.1]$$

e, quindi, dette D_{n2} e D_{n1} le componenti **D** secondo la normale **n** (diretta dal mezzo 1 al mezzo 2) alla superficie di separazione,

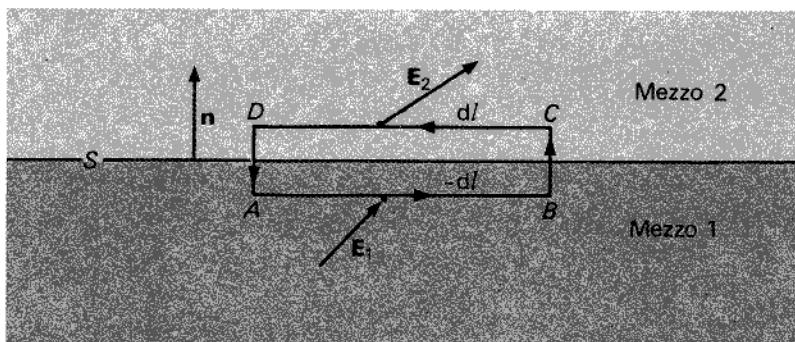
$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_{\text{lib}}. \quad [5.6.2]$$

Se sulla superficie di separazione dei due mezzi vi è uno strato di carica libera, la componente normale di **D** ha dunque una discontinuità pari alla densità superficiale di carica libera; se invece $\sigma_{\text{lib}} = 0$, tale componente è continua:

$$D_{n2} = D_{n1}. \quad [5.6.3]$$



(a)



(b)

Figura 5.11

Esaminiamo ora il campo **E**. La sua componente normale è in genere discontinua, anche se non vi è carica libera sulla superficie; in questo caso particolare ciò risulta, tenuto conto della [5.4.3], dalla continuità di D_n e dalla discontinuità di P_n . Osserviamo infatti che sulla superficie di separazione dei due mezzi è presente uno strato di carica di polarizzazione con densità

$$\sigma_p = P_{n1} - P_{n2} \quad [5.6.4]$$

e deve dunque esservi una discontinuità di E_n tale che

$$\epsilon_0(E_{n2} - E_{n1}) = \sigma_p = P_{n1} - P_{n2}. \quad [5.6.5]$$

Per quanto riguarda le componenti di **E** tangenziali alla superficie, consideriamo una linea chiusa di tipo "T" (vedi fig. 5.11b) costituita da due tratti uguali AB e CD , di lunghezza dl infinitesima, paralleli alla superficie e situati da lati opposti di

essa, e da due tratti BC e DA , infinitesimi di ordine superiore rispetto a dL . L'integrale di \mathbf{E} esteso a qualsiasi linea chiusa è nullo; nel caso particolare della linea $ABCD$, i contributi dei tratti DA e CB sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a quelli di AB e CD , e pertanto

$$\mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = 0; \quad [5.6.6]$$

ovvero, con ovvio significato dell'indice t ,

$$E_{t2} = E_{t1}. \quad [5.6.7]$$

Dalla [5.6.7] e dalla [5.4.3] si deduce che le componenti tangenziali di \mathbf{D} presentano una discontinuità uguale a quella del vettore \mathbf{P} :

$$\rightarrow D_{t2} - D_{t1} = P_{t2} - P_{t1}. \quad [5.6.8]$$

Nel caso in cui i materiali 1 e 2 siano lineari e non vi sia carica libera sulla superficie di separazione, si ricava una semplice relazione tra le direzioni dei vettori di campo nei due mezzi. Indicando con θ_1 e θ_2 gli angoli formati con la normale \mathbf{n} da \mathbf{E}_1 (vedi fig. 5.12) (e quindi \mathbf{D}_1 e \mathbf{P}_1) ed \mathbf{E}_2 (ovvero \mathbf{D}_2 e \mathbf{P}_2) rispettivamente, e con ϵ_1 ed ϵ_2 le costanti dielettriche, la [5.6.3] può essere riscritta nella forma

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}.$$

Dividendo per la [5.6.7], si ha

$$\epsilon_1 \frac{E_{n1}}{E_{t1}} = \epsilon_2 \frac{E_{n2}}{E_{t2}},$$

ed essendo

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{E_{t2}}{E_{n2}},$$

si ricava

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}, \quad [5.6.9]$$

relazione esprimente la cosiddetta *legge di rifrazione* delle linee di campo. In particolare, se il dielettrico 1 ha costante $\epsilon_1 \ll \epsilon_2$, ad esempio se 1 è aria ($\epsilon_{r1} \approx 1$) e 2 è acqua ($\epsilon_{r2} = 80$), è $\theta_1 \ll \theta_2$: le linee di forza nel mezzo con ϵ più bassa tendono a essere dirette normalmente alle superfici di separazione.

*5.7 Il campo elettrico macroscopico nell'interno dei dielettrici

Il campo elettrico macroscopico, in un punto interno di un dielettrico, è stato definito come la media, nell'intorno del punto, del campo microscopico ivi effettivamente esistente; ripetendo considerazioni fatte nel caso del vuoto, si è anche detto che è

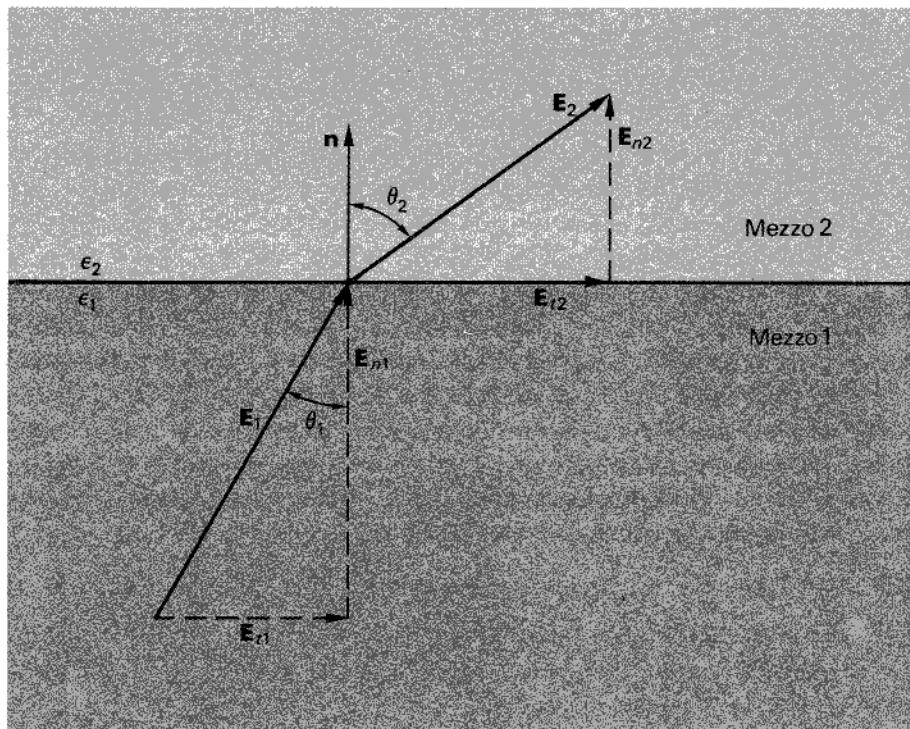


Figura 5.12

possibile darne una definizione operativa, misurando la forza agente su una carica sonda introdotta nel dielettrico (vedi § 5.1).

Vedremo ora come, a tal fine, sia opportuno ricondursi a una misura del campo in una cavità di forma opportuna praticata nel mezzo. Ricordiamo anzitutto che il campo macroscopico è una funzione continua nei punti di una regione in cui il materiale non presenta discontinuità macroscopiche: all'interno del dielettrico, in punti molto vicini (a distanza infinitesima, da un punto di vista macroscopico), la differenza tra i valori misurati del campo è infinitesima dello stesso ordine della distanza.

Ciò premesso, supponiamo che si riesca a praticare nel dielettrico, intorno a un punto A (appartenente alla regione di regolarità) una piccola cavità, senza, con questo, alterare in modo apprezzabile il campo elettrico nei punti vicini alla cavità stessa. Dopodiché misuriamo il campo nella cavità, e, utilizzando le relazioni tra campo nel vuoto e campo nel dielettrico (vedi § 5.6), ricaviamo il valore di quest'ultimo in un punto A' infinitamente vicino alla superficie di separazione tra i due mezzi. Per l'ipotesi fatta tale valore si può considerare una misura del campo preesistente (in quel punto) alla creazione della cavità; poiché la distanza AA' è piccola, esso costituisce, in virtù della continuità ricordata, un valore sufficientemente approssimato del campo (preesistente) in A .

Vediamo ora come si può ricavare una cavità soddisfacente la condizione suddetta.

Supponendo di conoscere la direzione di \mathbf{E} , pratichiamo una cavità cilindrica allungata, Ω , con asse parallelo a \mathbf{E} (vedi fig. 5.13) e tale che le dimensioni lineari delle basi siano infinitesime rispetto alla lunghezza. Verifichiamo che il campo nei punti del dielettrico prossimi alla zona centrale non è variato. Togliendo il materiale polarizzato che riempiva Ω , viene a mancare nel volume la distribuzione di carica ρ_p , mentre sulle basi restano, non compensate dalle corrispondenti cariche sulle facce del cilindretto rimosso, cariche con densità σ_p . Data l'orientazione di Ω , non si ha densità di carica sulla superficie laterale. Nella zona che ci interessa, il contributo di volume, ricavabile dalle [5.3.3] e [5.3.5], risulta infinitesimo, essendo finita ρ_p , infinitesimo il volume della cavità e infinitesimo di ordine superiore a $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$, per $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$, l'elemento $d\tau'$. Pure infinitesimo è il contributo delle basi, essendo σ_p finita e avendo esse dimensioni infinitesime rispetto alla loro distanza dai punti della zona centrale. Si tratta dunque di quantità trascurabili rispetto al contributo (finito) dovuto alle altre cariche interne ed esterne del dielettrico. Indicato con \mathbf{E}_d il campo nel dielettrico e con \mathbf{E}_0 quello nella cavità, la condizione di continuità [5.6.7] comporta

$$\mathbf{E}_{t0} = \mathbf{E}_{td}. \quad [5.7.1]$$

Ciò significa che basta misurare la componente di \mathbf{E}_0 secondo la direzione dell'asse a per conoscere il valore della componente omonima di \mathbf{E}_d . Ma, per l'orientazione della cavità, $E_{td} = E_d$; se inoltre il dielettrico è isotropo, \mathbf{E}_0 è, per simmetria, parallelo ad a ; in questo caso il campo misurato nella cavità coincide con quello presente nel dielettrico.⁹

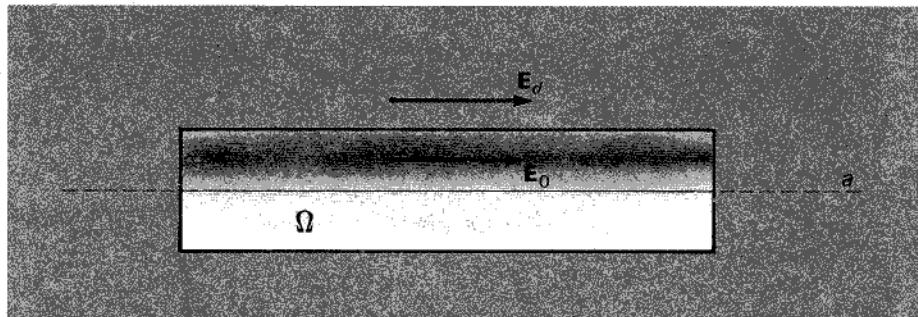
Supponiamo ora di non conoscere la direzione di \mathbf{E} ; in tal caso, per una cavità come quella rappresentata nella figura 5.13, la distribuzione di carica sulla superficie laterale non è nulla. Si può tuttavia dimostrare che ciò non influisce, nella zona centrale, sul valore di E_{td} , che pertanto può essere ancora determinato, per la [5.7.1], mediante una misura nella cavità. La direzione di \mathbf{E}_d è data dalla orientazione della cavità per cui tale misura è massima.

Scegliendo una cavità di forma diversa, si può definire operativamente anche \mathbf{D} . Sia data ad esempio (vedi fig. 5.14) una cavità cilindrica di altezza infinitesima rispetto alle dimensioni della base; indichiamo con $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ il vettore spostamento nel vuoto, al centro della cavità, e con \mathbf{D}_d lo stesso vettore in un punto del dielettrico posto sull'asse del cilindro e infinitamente prossimo a una superficie di base.

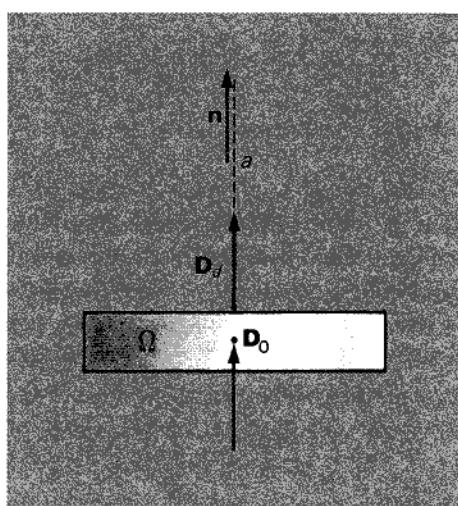
Se la direzione dell'asse, indicata con n , coincide con quella del campo, sulle superfici di base si hanno densità di cariche opposte $+\sigma_p, -\sigma_p$. Queste distribuzioni non alterano il campo nei punti del dielettrico prossimi alla zona centrale: da questi punti, infatti, le superfici sono viste praticamente come un doppio strato piano inde-

⁹ Se il dielettrico non è isotropo, \mathbf{E}_0 non è in generale parallelo all'asse e il modulo di \mathbf{E}_d uguaglia la componente secondo l'asse di \mathbf{E}_0 :

$$\mathbf{E}_d = E_{t0}.$$

**Figura 5.13**

Definizione operativa del campo elettrico nel dielettrico mediante una misura del campo effettuata nella cavità.

**Figura 5.14**

Definizione operativa del vettore spostamento nel dielettrico.

finito. Se l'asse non è parallelo al campo, si ha una distribuzione di carica anche sulla superficie laterale, ma ancora una volta si dimostra che nella zona centrale ciò non modifica E_{nd} . Non essendovi densità di carica libera, in virtù della relazione di continuità [5.6.3] è lecito porre

$$D_{nd} = D_{n0} = \epsilon_0 E_{n0}. \quad [5.7.2]$$

Se l'asse è parallelo al campo e il dielettrico è isotropo si ha¹⁰

$$|D_d| = |D_0| = \epsilon_0 |E_0|. \quad [5.7.3]$$

¹⁰ Per dielettrici non isotropi vale una precisazione analoga a quella fatta nel caso di E .

Allo stesso risultato si perviene considerando che il campo prodotto nella zona centrale dalle distribuzioni di carica $\sigma_p = P_n$ sulle basi è praticamente quello di un doppio strato piano indefinito: nullo fuori della cavità, e pari a

$$\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{P_n}{\epsilon_0}$$

e orientato come \mathbf{P} nel suo interno. Di conseguenza

$$E_{n0} = E_{nd} + \frac{P_n}{\epsilon_0}, \quad [5.7.4]$$

e inoltre

$$D_{n0} = \epsilon_0 E_{n0} = \epsilon_0 E_{nd} + P_n = D_{nd}. \quad [5.7.5]$$

Anche in questo caso, infine, se la direzione di \mathbf{D}_d non è nota, può essere individuata come quella per cui il valore misurato di E_{n0} risulta massimo.

5.8 Campo elettrico in presenza di dielettrici lineari omogenei

Esaminiamo ora il problema del calcolo del campo in presenza di conduttori e di dielettrici di date caratteristiche. Note sono la forma e le dimensioni dei corpi, la relazione tra polarizzazione e campo in ogni punto dei dielettrici, e alcune condizioni del tipo già visto nei capitoli 1 e 4 (distribuzioni di carica libera, cariche globali sui conduttori, differenze di potenziale tra i vari conduttori). Ci limitiamo ai dielettrici *lineari*, cioè tali che

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad [5.8.1]$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad [5.8.2]$$

con χ e ϵ indipendenti da \mathbf{E} , e *omogenei*, per i quali cioè χ e ϵ sono costanti in tutti i punti. Il calcolo del campo viene dunque effettuato in regioni dello spazio dotate di caratteristiche uniformi, separate da superfici di discontinuità (condizione, questa, soddisfatta nella maggior parte dei casi di interesse tecnico).

Osservazione. Data la linearità della relazione tra campo elettrico e polarizzazione, sarà possibile estendere risultati ottenuti nello studio dei fenomeni elettrostatici nel vuoto in presenza di soli corpi di conduttori. Per lo stesso motivo, si può ancora applicare il principio della sovrapposizione degli effetti: ad esempio, le relazioni tra cariche e potenziali dei conduttori sono sempre date da relazioni lineari (ora però i coefficienti costanti C_{ik} dipendono anche dai dielettrici lineari presenti nel sistema).

A. Relazioni tra le diverse densità di carica

All'interno dei singoli dielettrici, essendo questi lineari e omogenei, le densità di carica libera e di polarizzazione risultano in ogni punto proporzionali. Dalle [5.8.1]

si ha infatti

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\operatorname{div}(\chi \mathbf{E}) = -\chi \operatorname{div} \mathbf{E} = -(\epsilon_r - 1) \rho, \quad [5.8.3]$$

e dalla [5.8.2]

$$\rho_{\text{lib}} = \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \epsilon_r \rho. \quad [5.8.4]$$

Combinando queste relazioni, si ottiene

$$\rho_p = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_{\text{lib}}. \quad [5.8.5]$$

All'interno di un dielettrico lineare omogeneo si ha dunque carica di polarizzazione solo dove vi è anche carica libera. Altrettanto può dirsi per la superficie di contatto tra dielettrici e conduttori. Indicata con \mathbf{n} la normale, diretta dal conduttore al dielettrico, poiché nel primo in condizioni statiche è $\mathbf{E} = \mathbf{P} = 0$, si deduce

$$\sigma_p = -P_n = -\chi E_n = -\frac{\chi}{\epsilon_0} \sigma = -(\epsilon_r - 1) \sigma, \quad [5.8.6]$$

$$\sigma_{\text{lib}} = D_n = \epsilon E_n = \epsilon_r \sigma, \quad [5.8.7]$$

$$\sigma_p = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_{\text{lib}}. \quad [5.8.8]$$

Per le superfici di confine tra dielettrici diversi valgono invece le condizioni viste nel paragrafo 5.6.

B. Equazioni generali del campo e del potenziale

Le equazioni cui soddisfano i campi entro i singoli pezzi di dielettrico si determinano immediatamente: \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{P} sono infatti proporzionali, con costanti di proporzionalità indipendenti dal punto. Si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{D}, \quad [5.8.9]$$

e quindi

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon}. \quad [5.8.10]$$

Questa equazione è analoga a quella che si avrebbe nel vuoto con le sole cariche libere, e l'effetto della polarizzazione si traduce nella sostituzione di ϵ_0 con la ϵ del dielettrico. Introducendo il potenziale scalare elettrostatico

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V,$$

si ottiene

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}. \quad [5.8.11]$$

Se non vi è densità di carica libera, $\rho_{\text{lib}} = 0$ e si ritrova l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = 0.$$

Infine, la presenza di discontinuità (vedi § 5.4) fa sì che la distribuzione del campo **D** non sia in generale uguale a quella che si avrebbe, a parità di ρ_{lib} , nello spazio vuoto. L'uguaglianza si verifica quando le superfici di discontinuità sono normali a **D** in ogni loro punto.

C. Presenza di un solo dielettrico

Il caso più semplice, per il calcolo del campo elettrico, è quello in cui i corpi conduttori sono contenuti in una regione dello spazio delimitata da una superficie equipotenziale chiusa (per esempio, l'interno di uno schermo elettrostatico), in cui tutto lo spazio non occupato dai conduttori sia riempito da un solo dielettrico lineare omogeneo di costante dielettrica ϵ_r .¹¹

Supposte assegnate le cariche libere totali dei conduttori, immaginiamo che, a parità di altre condizioni, il dielettrico sia sostituito dal vuoto. In entrambi i casi, i conduttori sono equipotenziali, le cariche libere sono distribuite solo sulla superficie e la distribuzione di potenziale soddisfa in tutto il volume del dielettrico l'equazione di Laplace. Di conseguenza (per l'unicità della soluzione) a parità di carica libera globale su ciascun conduttore, sono anche uguali le distribuzioni σ_{lib} . Se è presente un dielettrico, tuttavia, esso si polarizza, il che determina la comparsa, sulle sue superfici affacciate ai conduttori, di una densità σ_p (di segno opposto a σ_{lib}), data dalla [5.8.8]. Tale densità tende a "schermare" σ_{lib} , cioè a ridurre il campo **E** nel dielettrico. Si vede infatti dalla [5.8.7] che la densità totale σ risulta ridotta di un fattore ϵ_r rispetto a σ_{lib} , sicché il campo **E** in ogni punto è uguale a quello che si avrebbe nel vuoto diviso per ϵ_r . Questa conclusione è indipendente da forma e dimensioni dei conduttori carichi (vedi esercizio 1). In questi casi è verificata la condizione affinché il campo **D** risulti lo stesso che nel vuoto, a parità di carica libera assegnata. E' immediato osservare che, riducendosi il campo **E**, vengono ridotte del fattore ϵ_r tutte le differenze di potenziale, e quindi i coefficienti di capacità (vedi § 4.6) vengono aumentati dello stesso fattore. In particolare, la capacità di un condensatore a induzione completa, riempito di un dielettrico di costante ϵ_r , risulta ϵ_r volte maggiore rispetto al caso in cui invece del dielettrico vi sia il vuoto. Su questa osservazione si basano vari metodi di misura della costante dielettrica.

D. Presenza di più dielettrici

Consideriamo ora il problema del calcolo del campo nel caso in cui vi siano regioni con caratteristiche dielettriche diverse, separate da superfici di discontinuità, e conduttori sottoposti a determinati vincoli (riguardanti i potenziali, le cariche libere globali, le densità superficiali di carica libera ecc.).

¹¹ In questo tipo di problemi rientrano anche quelli in cui i conduttori sono immersi in un solo mezzo dielettrico infinitamente esteso.

La distribuzione di potenziale nei dielettrici soddisfa in generale l'equazione [5.8.11], che, nel caso più comune in cui le cariche libere si trovino solo su conduttori, si riduce all'equazione di Laplace. Tuttavia, confrontando, a parità di conduttori e di condizioni su essi (per esempio di cariche libere globali), la distribuzione di campo (o di potenziale) con quella che si avrebbe nel caso del vuoto o di un unico dielettrico, si nota che le due distribuzioni sono diverse. Infatti, nel caso di più dielettrici, passando da un lato all'altro di una superficie di discontinuità, si hanno variazioni nel campo e nel potenziale, dovute al mutamento di caratteristiche dielettriche, che evidentemente non si verificano quando vi è il vuoto o un unico materiale dielettrico omogeneo. In questo tipo di problemi è quindi essenziale imporre alle soluzioni dell'equazione di soddisfare, oltre che le condizioni sui conduttori, anche quelle di raccordo sulle superfici di discontinuità. In particolare si è visto (§ 5.6) che devono essere continue le componenti tangenziali di \mathbf{E} ; tale condizione può essere sostituita da quella di continuità del potenziale, ad essa equivalente:¹²

$$V_2 = V_1. \quad [5.8.12]$$

Inoltre, in assenza di cariche libere sulla superficie, è continua la componente normale di \mathbf{D} , e quindi si ha

$$\epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n}. \quad [5.8.13]$$

Vediamo qualche esempio elementare.

Esempio 1. Lastra dielettrica piana indefinita, di spessore l_1 , immersa in un campo elettrico diretto normalmente ad essa (uniforme in assenza della lastra)

Consideriamo (vedi fig. 5.15a) un condensatore piano indefinito, le cui armature siano poste a distanza $l \geq l_1$. Per simmetria, le linee vettoriali dei campi \mathbf{E} e \mathbf{D} sono ovunque dirette secondo le normali alle superfici degli elettrodi e i loro moduli sono uguali in tutti i punti di ogni piano parallelo a dette superfici. Data la geometria delle discontinuità, la distribuzione di \mathbf{D} è quella che si avrebbe nello spazio vuoto, a parità di carica libera sugli elettrodi: quindi \mathbf{D} è uniforme. Ciò può dedursi direttamente dalle considerazioni precedenti e dal teorema di Gauss, essendovi carica libera solo sugli elettrodi. Indicando con \mathbf{E}_1 , \mathbf{D}_1 i campi nel dielettrico e con \mathbf{E}_0 , \mathbf{D}_0 gli stessi campi nel vuoto, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \mathbf{D}_0, \\ \mathbf{D}_1 &= \epsilon_1 \mathbf{E}_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 \mathbf{E}_1, \\ \mathbf{D}_0 &= \epsilon_0 \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad [5.8.14]$$

¹² L'equivalenza è evidente quando si osservi che, prese due linee parallele e congruenti da un lato e dall'altro della superficie di discontinuità, la continuità delle componenti tangenziali di \mathbf{E} implica la continuità degli integrali di linea di \mathbf{E} , e quindi dei potenziali.

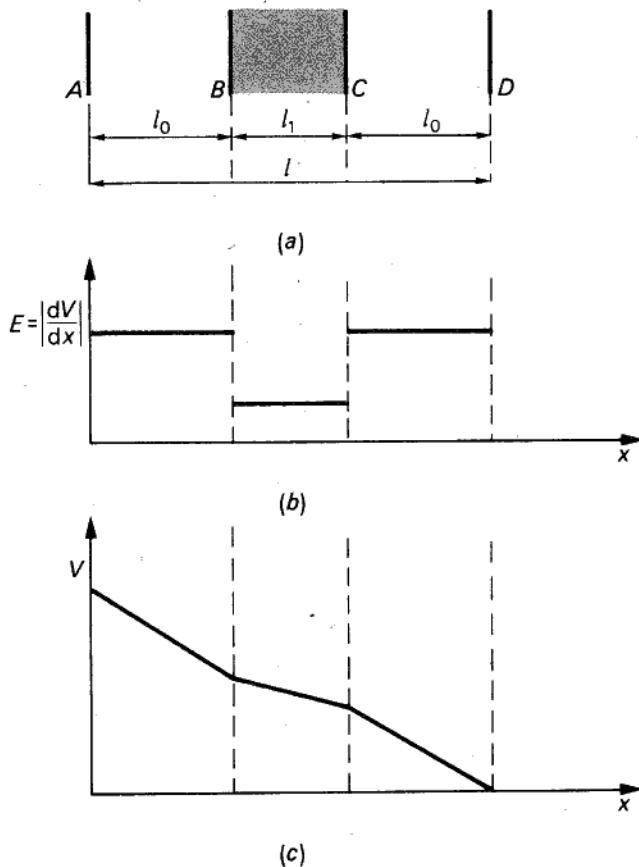


Figura 5.15

Di conseguenza il campo \mathbf{E}_0 nel vuoto è ϵ_{r1} volte maggiore che nel dielettrico:

$$\mathbf{E}_0 = \epsilon_{r1} \mathbf{E}_1. \quad [5.8.15]$$

La differenza di potenziale tra gli elettrodi, $V = V_A - V_D$, risulta

$$\begin{aligned} V &= V_A - V_D = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) = \\ &= E_0 l_0 + E_1 l_1 + E_0 l_0 = E_1 (l_1 + \epsilon_{r1} 2 l_0). \end{aligned} \quad [5.8.16]$$

Si può ricavare la capacità C associabile alla superficie S degli elettrodi: su questi la densità di carica è

$$\sigma_{\text{lib}} = \epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1, \quad [5.8.17]$$

per cui la capacità C è

$$C = \frac{\sigma_{\text{lib}} S}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{l_1 + 2 l_0 \epsilon_{r1}}. \quad [5.8.18]$$

In particolare, per $l_1 = 0$ si ritrova il risultato noto per il condensatore nel vuoto:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{l};$$

nel caso in cui tutto lo spazio tra gli elettrodi sia occupato dal dielettrico, in cui cioè $l_0 = 0$, la capacità è invece

$$C_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 \frac{S}{l} = \epsilon_{r1} C_0. \quad [5.8.19]$$

Misurando C_1 e C_0 si può dunque ricavare la costante ϵ_r nel dielettrico.

Tali considerazioni si estendono facilmente al caso di *più strati* di dielettrico: il campo elettrico E è più intenso negli strati dielettrici a costante ϵ_r minore, e la differenza di potenziale tende a localizzarsi su questi strati. Nella parte (b) della figura 5.15 è riportato il grafico del modulo del campo internamente alle armature: nella parte (c) è riportato il corrispondente diagramma di potenziale.

Matematicamente il potenziale V si sarebbe potuto ricavare in modo diretto, tenendo presente che l'equazione di Laplace si riduce in questo caso a

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0.$$

Le condizioni al contorno per V sono:

a) sulle armature

$$V(0) = V_A$$

$$V(l) = V_D,$$

b) sulle superfici di discontinuità

$$\begin{cases} \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=l_0^-} = \epsilon_{r1} \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=l_0^+}, & \text{per } x = l_0, \\ V(l_0^-) = V(l_0^+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{r1} \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=(l_0+l_1)^-} = \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=(l_0+l_1)^+}, & \text{per } x = l_0 + l_1, \\ V(l_0 + l_1)^- = V(l_0 + l_1)^+ \end{cases}$$

• *Esempio 2. Sfera dielettrica, di raggio a , immersa in un campo elettrico (uniforme, in assenza della sfera, con intensità E_0)*

Consideriamo una sfera di dielettrico posta tra le armature di un condensatore piano, carico e di dimensioni molto grandi rispetto ad essa. In tali condizioni, essendo le cariche libere sulle armature molto distanti dalla sfera al momento della sua introduzione, la loro distribuzione in pratica non cambia: in altre parole, a sufficiente

distanza dalla sfera il campo rimane uniforme. In prossimità di essa ciò non è più vero: la sfera si polarizza con una certa distribuzione di \mathbf{P} e la polarizzazione, a sua volta, produce un contributo al campo, che chiamiamo \mathbf{E}_p . Nella sfera e fuori di essa il campo totale è dunque

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p; \quad [5.8.20]$$

a sua volta \mathbf{P} dipende da \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad [5.8.21]$$

Matematicamente, il problema si risolve determinando il potenziale mediante l'equazione di Laplace, con le note condizioni di raccordo alla superficie della sfera e con l'ulteriore condizione che a grande distanza da questa il potenziale si riduca a quello del campo uniforme \mathbf{E}_0 . Tuttavia, sulla base dei risultati già ottenuti in questo capitolo, è possibile determinare l'andamento del campo in modo più diretto. Supponendo infatti che la sfera si polarizzi uniformemente — verificheremo poi la giustezza di questa ipotesi intuitiva — si deduce che nel suo interno \mathbf{E}_p è uniforme (vedi p. 162) e vale

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad [5.8.22]$$

Combinando la [5.8.22] con la [5.8.20] e [5.8.21], si ha

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{3} \mathbf{E}; \quad [5.8.23]$$

se ne deduce che, nella sfera, \mathbf{E} è uniforme e dato da

$$\mathbf{E} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \mathbf{E}_0. \quad [5.8.24]$$

Essendo $\epsilon_r > 1$, il campo entro il dielettrico è minore di \mathbf{E}_0 , il che concorda con il fatto (vedi § 5.3) che il campo \mathbf{E}_p tende a ridurre la polarizzazione \mathbf{P} e quindi è opposto a \mathbf{E}_0 . L'espressione di \mathbf{P} in funzione di \mathbf{E}_0 si ricava dalle [5.8.24] e [5.8.21]:

$$\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{2 + \epsilon_r} \epsilon_0 \mathbf{E}_0. \quad [5.8.25]$$

Essendo \mathbf{E} uniforme nella sfera, anche \mathbf{P} risulta uniforme, in accordo con l'ipotesi fatta. Il campo nei punti esterni alla sfera si ricava dalla [5.8.20] tenendo presente che in essi \mathbf{E}_p (vedi § 5.3, esempio 4) è un campo di dipolo relativo a un dipolo $P \cdot 4\pi a^3/3$ posto al centro della sfera. Come si vede dalla figura 5.16, le linee di forza di \mathbf{E} tendono a passare nel mezzo a costante dielettrica più elevata.

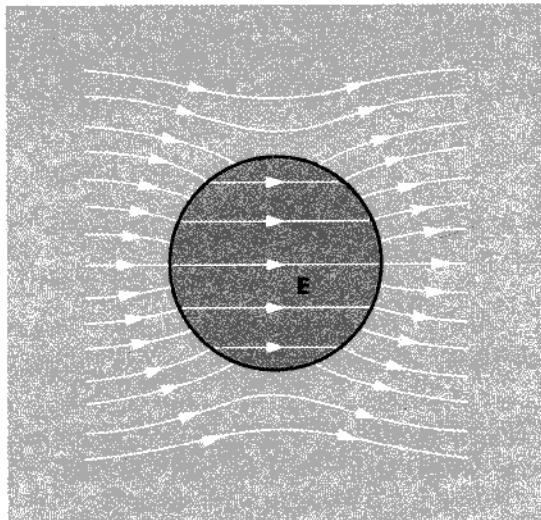


Figura 5.16

Esempio 3. Dielettrico di forma qualsiasi entro un condensatore piano indefinito

L'esempio 2 potrebbe far pensare che qualunque pezzo di dielettrico lineare e omogeneo, posto in un campo uniforme, si polarizzi uniformemente. Ciò si verifica invece soltanto per dielettrici di forma tale che una loro uniforme polarizzazione produca nel loro interno un campo \mathbf{E}_p anch'esso uniforme. Si dimostra che ciò si ha solo per dielettrici a forma di ellissoide: la sfera ne è un caso particolare.

Vogliamo ora calcolare il campo quando è dato un dielettrico di forma qualsiasi in presenza di conduttori carichi: per esempio un cilindro di dimensioni finite, posto nel vuoto tra le armature di un condensatore piano indefinito. In primo luogo scriviamo le equazioni cui soddisfa il potenziale e le condizioni al contorno che individuano la soluzione particolare corrispondente al problema considerato. Ciò fatto, la soluzione risulta univocamente determinata (anche se può essere difficile calcolarne l'espressione). Nel nostro caso, supposte note la costante dielettrica relativa ϵ_r e la differenza di potenziale V tra le armature, la distribuzione di potenziale è completamente individuata dalle seguenti condizioni:

- nei punti esterni al dielettrico, cioè nel vuoto, è descritta da una funzione V_1 che soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2 V_1 = 0$;
- nei punti interni al dielettrico è descritta da una funzione V_2 soddisfacente l'equazione di Laplace $\nabla^2 V_2 = 0$;
- in corrispondenza alle superfici delle armature A e B del condensatore, V_1 assume valori uniformi, V_A e V_B rispettivamente, tali che $V_A - V_B = V$ (per l'arbitrarietà del riferimento si può scegliere $V_B = 0$);
- in corrispondenza alle superfici del cilindro, le funzioni V_1 e V_2 sono legate dalle

relazioni:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \\ \frac{\partial V_1}{\partial n} = \epsilon_r \frac{\partial V_2}{\partial n} \end{cases}$$

L'ultima condizione indica che nella zona del cilindro la distribuzione del campo è diversa da quella che si avrebbe nel caso del vuoto.

5.9 Energia elettrostatica nei dielettrici polarizzati

Esamineremo ora alcuni aspetti energetici della polarizzazione dei dielettrici, prendendo in esame un sistema contenente dielettrici polarizzati sottoposti al campo creato da cariche libere distribuite su conduttori e/o in posizioni assegnate dello spazio. Pur limitandoci per il momento ai soli dielettrici lineari, la valutazione dell'energia immagazzinata nel dielettrico materiale è molto più complicata che nel caso (trattato nei §§ 3.4 e 3.5) in cui il sistema sia costituito da sole cariche libere distribuite nel vuoto.

Le ragioni di questa maggiore complessità sono essenzialmente due: in primo luogo, i processi di polarizzazione di un dielettrico materiale si accompagnano in generale a scambi di calore con i corpi circostanti (il dielettrico può assorbire calore da questi, o viceversa cederne); in secondo luogo, all'atto della polarizzazione, vengono ad agire nel dielettrico forze meccaniche che deformano il dielettrico stesso variandone anche la densità (si parla di fenomeni di *elettrostrizione*). D'altra parte, occorre anche dire che in genere tanto i termini di scambio di calore quanto quelli connessi con la elettrostrizione sono di modesta entità e che pertanto non si commette grave errore, almeno per ciò che riguarda le applicazioni più comuni, nel trascurarli.

Questa ipotesi semplifica l'analisi del fenomeno e consente, come si vedrà, di arrivare abbastanza agevolmente all'espressione dell'energia elettrostatica immagazzinata nel dielettrico. A tal fine, cominciamo col valutare il lavoro fatto dal campo elettrico nel corso del processo di polarizzazione. Nelle ipotesi preciseate più sopra, questo lavoro dipende solo dalla situazione iniziale (stato di riferimento) e da quella finale, e non dal modo con cui si passa dall'una all'altra. Scegliamo come stato di riferimento quello in cui i dielettrici siano presenti, ma non polarizzati, e le cariche libere siano contenute tutte in un serbatorio posto all'infinito: da questo, portiamo le cariche poco alla volta nei diversi punti del sistema, fino a raggiungere la distribuzione desiderata. Analogamente a quanto visto nel paragrafo 3.4, il lavoro per portare in volume $\Delta\tau$, attorno a un punto P , un incremento di carica libera dq'_{lib} = $d\rho_{lib}\Delta\tau$ vale

$$d\mathcal{L} = d\rho'_{lib} \Delta\tau V'(P), \quad [5.9.1]$$

dove $V'(P)$ è il potenziale in P quando ivi si porta dq'_{lib} .

Sottolineiamo che il potenziale V' è ora prodotto sia dalle cariche libere che da

quelle di polarizzazione. Ancora come nel paragrafo 3.4, incrementiamo gradualmente e contemporaneamente le cariche in tutti i punti del sistema, in maniera che in ciascuna fase del processo esse raggiungano in ogni punto la stessa frazione α della densità finale:

$$\rho'_{\text{lib}}(P) = \alpha \rho_{\text{lib}}(P),$$

donde

$$d\rho'_{\text{lib}} = \rho_{\text{lib}}(P) d\alpha.$$

La [5.9.1] diviene pertanto:

$$d\mathcal{L} = \rho_{\text{lib}}(P) V'(P) d\alpha \Delta\tau.$$

Nel caso dei dielettrici lineari, assumendo che la temperatura non varii in maniera significativa nel corso del processo, la relazione tra campo \mathbf{E} (o potenziale V) e carica libera è ancora lineare, a parità di distribuzione della carica libera stessa e di geometria del sistema. Pertanto, anche il potenziale $V'(P)$ si trova ad essere una frazione α del suo valore finale $V(P)$:

$$V'(P) = \alpha V(P) \quad [5.9.2]$$

e il lavoro \mathcal{L} complessivo risulta pari a

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \alpha d\alpha \iiint_{\tau} \rho_{\text{lib}} V d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho_{\text{lib}} V d\tau, \quad [5.9.3]$$

dove τ è la regione entro la quale è $\rho \neq 0$.

Procedendo in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo 3.5, è possibile dare di \mathcal{L} un'espressione diversa, immediatamente ricavabile dalla [5.9.3]. Questa può, infatti, essere riscritta nella forma equivalente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau_{\infty}} \rho_{\text{lib}} V d\tau, \quad [5.9.3']$$

in cui τ_{∞} rappresenta l'intero spazio (si ricordi che, al di fuori di τ , è $\rho = 0$). Sostituendo nella [5.9.3'] la relazione

$$\rho_{\text{lib}} = \operatorname{div} \mathbf{D},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau_{\infty}} (\operatorname{div} \mathbf{D}) V d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\tau_{\infty}} [\operatorname{div}(V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} V] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_{\infty}} V \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{2} \iiint_{\tau_{\infty}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\tau_{\infty}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau. \end{aligned} \quad [5.9.4]$$

(Nell'ultimo passaggio si è fatto uso del fatto che, essendo il dielettrico tutto al finito, tanto V che \mathbf{D} hanno comportamento regolare all'infinito e l'integrale esteso a Σ_∞ si annulla.)

La [5.9.4] fornisce dunque il lavoro complessivo fatto per arrivare alla configurazione finale con dielettrico polarizzato. Nelle ipotesi semplificative specificate all'inizio del paragrafo, questo lavoro si trasforma interamente in energia elettrostatica, immagazzinata *nell'intero spazio* (comprendente il dielettrico materiale e il vuoto circostante). Indicando con U_e tale energia, la [5.9.4] può essere riscritta come

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\tau_\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau, \quad [5.9.4']$$

oppure, *in forma locale*, introducendo una densità di volume di energia u_e (cfr. p. 80):

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}. \quad [5.9.5]$$

Le [5.9.4'] e [5.9.5], comunemente adottate per esprimere l'energia elettrostatica immagazzinata nei dielettrici lineari, non specificano però con chiarezza il ruolo che tali grandezze assumono nell'ambito della termodinamica. Senza voler approfondire la questione, ci limiteremo qui ad affermare che un'analisi più dettagliata mostra che i due termini

$$a_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \quad [5.9.6]$$

e

$$u_{eo} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [5.9.7]$$

che figurano nella [5.9.5] rappresentano, il primo, la variazione di densità di energia libera (nel senso della termodinamica) che il dielettrico materiale subisce quando venga portato dallo stato non polarizzato a quello polarizzato (mediante l'azione di un campo elettrico) mantenendo costanti, in ciascun punto, la temperatura e la densità di massa, il secondo, la vera e propria densità di energia del campo, presente tanto nel mezzo materiale quanto nel vuoto circostante.

Si noti infine che nel caso più generale di dielettrico non lineare (che non presenta però fenomeni di isteresi; vedi § 5.12), la [5.9.6] diventa

$$a_e = \int_0^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}, \quad [5.9.8]$$

conservando il suo significato fisico.

II. FENOMENI DI POLARIZZAZIONE: IL PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO

5.10 Relazione tra grandezze macroscopiche e grandezze microscopiche M.O.

Una trattazione esauriente e rigorosa dei fenomeni microscopici di polarizzazione dovrebbe basarsi sulla meccanica quantistica. Una illustrazione classica, basata su modelli semplici della struttura atomica, è tuttavia sufficiente a darne una spiegazione accettabile, in prima approssimazione, anche dal punto di vista quantitativo: almeno nei casi più semplici, i risultati ottenuti in tal modo sono sufficientemente vicini a quelli misurati sperimentalmente. Naturalmente, la nostra scelta — rappresentare sistemi quantistici con modelli classici — implicherà un riferimento non rigoroso ad atomi, elettroni e nuclei.

Prima di procedere nella trattazione, occorre chiarire anzitutto la relazione che intercorre tra grandezze microscopiche e macroscopiche. Come si ricorderà, le proprietà delle grandezze macroscopiche in un punto del materiale risultano dal contributo di un grandissimo numero di atomi; tutti quelli di un elemento di volume contenente il punto. Esse sono legate a proprietà microscopiche *mediate* su questo insieme di atomi.

Ad esempio, il campo elettrico, che a distanze inferiori a 10^{-10} m da un nucleo ha valori molto alti (dell'ordine di 10^{11} V/m), in punti meno vicini (anche dell'ordine di 10^{-9} m) può essere molto diverso in intensità e direzione, per effetto delle cariche degli elettroni e di altri nuclei vicini. In uno stesso punto, inoltre, a causa dei moti delle cariche, esso può variare notevolmente in intervalli di tempo molto brevi (anche dell'ordine di 10^{-15} s). Il campo elettrico macroscopico, però, essendo pari a una media di valori del campo su un volumetto contenente moltissimi atomi, può benissimo risultare nullo.

Consideriamo ora il vettore polarizzazione \mathbf{P} , ricordando che la polarizzazione macroscopica del dielettrico è dovuta a una polarizzazione degli atomi e delle molecole che lo compongono. Ogni molecola del dielettrico polarizzato è un insieme di cariche avente carica globale nulla e momento elettrico di dipolo non nullo. Per definizione, il momento di dipolo $\Delta\mathbf{p}$ di un elemento di volume $\Delta\tau$ è la somma dei momenti di dipolo delle molecole in esso contenute. Indicando con $\mathbf{P}_{\text{mol}}^{(i)}$ il momento di dipolo molecolare della i -esima molecola, e con n il numero di molecole contenute in $\Delta\tau$, si ha

$$\Delta\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{\text{mol}}^{(i)}. \quad [5.10.1]$$

Indicando poi con $\overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}}$ la media dei momenti di dipolo $\mathbf{P}_{\text{mol}}^{(i)}$, si ha

$$\overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{\text{mol}}^{(i)}, \quad [5.10.2]$$

e possiamo scrivere

$$\Delta \mathbf{p} = n \overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}}.$$

Per la [5.2.3], che definisce il vettore \mathbf{P} , otteniamo

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta \tau} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{\text{mol}}^{(i)}}{\Delta \tau} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{n \overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}}}{\Delta \tau}. \quad [5.10.3]$$

Indicando con N la densità di molecole (numero di molecole per unità di volume), possiamo scrivere

$$\mathbf{P} = N \overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}}. \quad [5.10.4]$$

Conoscendo, per un certo materiale, la dipendenza funzionale di $\overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}}$ da \mathbf{E} , potremo spiegarci la relazione caratteristica $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$.

5.11 Fenomeni microscopici di polarizzazione: campo elettrico efficace

Sia dato un dielettrico costituito da un gas, abbastanza raroфtato da poter trascurare le interazioni elettriche tra una molecola e l'altra, cosicché il campo che agisce sulla singola molecola del gas sia determinato soltanto da cariche esterne al gas stesso. Inoltre il campo è supposto uniforme. Bisogna ora distinguere due tipi di molecole, a seconda della struttura presentata in assenza di campi elettrici esterni.

Se, oltre che carica globale nulla, la molecola ha momento di dipolo nullo (poiché coincidono i baricentri delle distribuzioni di carica positiva e negativa) essa si dice *non polare*. Sono tali le molecole monoatomiche e quelle poliatomiche dotate di sufficiente simmetria, ad esempio CO_2 e H_2 . Sottponendo queste molecole all'azione di un campo elettrico, le opposte distribuzioni di carica tendono a spostarsi in sensi opposti; i baricentri non coincidono più, e si genera un momento di dipolo non nullo. Nel caso di molecole monoatomiche, si ha una piccola deformazione della distribuzione elettronica attorno al nucleo (*polarizzazione elettronica per deformazione*). Nelle molecole poliatomiche, oltre alla deformazione della struttura elettronica, si hanno talvolta piccoli spostamenti relativi tra gli atomi e gli ioni costituenti la molecola (*polarizzazione atomica o ionica*).

Nelle molecole *polari* invece (ad esempio HCl , H_2O), anche in assenza di campi elettrici esterni i baricentri delle distribuzioni di cariche opposte non coincidono, cosicché il momento di dipolo non è nullo (*momento di dipolo permanente*). Sottoposte all'azione di un campo elettrico, tali molecole, oltre a deformarsi, tendono a ruotare finché i loro momenti di dipolo si dispongono parallelamente al campo e nel suo stesso verso (vedi § 3.8): naturalmente, a causa del moto di agitazione termica, nella situazione di equilibrio soltanto la media dei momenti di dipolo risulta avere questa orientazione. Il fenomeno è detto *polarizzazione per orientamento*.

Nel calcolare il sistema di forze agenti su una molecola immersa in un campo elettrico esterno, questa può essere considerata alla stregua di un semplice dipolo elettrico, se il campo agente su di essa è uniforme in tutto il suo volume. In questo caso, forza risultante e coppia risultante del sistema di forze sono le stesse che si avrebbero se le cariche positive e quelle negative fossero concentrate nei rispettivi baricentri.

Ogni molecola di un dielettrico polarizzato produce inoltre un contributo al campo elettrico. Nel caso di un gas rarefatto, data la distanza media piuttosto grande tra le molecole, questo contributo è in media trascurabile, e il campo agente su ogni molecola dipende soltanto dalle sorgenti esterne al dielettrico. Supponiamo ora di aumentare la densità del gas. Data la maggior vicinanza delle molecole, su ciascuna agisce un campo, originato, oltre che dalle cariche esterne, anche dalle altre molecole del dielettrico. In altre parole, la polarizzazione di una molecola dipende anche da quella delle altre. Il campo elettrico cui ci si riferisce nel calcolo della polarizzazione della singola molecola viene detto *campo elettrico efficace*¹³ E_{eff} . Notiamo esplicitamente che esso non coincide con il campo elettrico microscopico nella regione dello spazio occupata della molecola: infatti quest'ultimo è determinato da *tutte* le cariche, comprese quelle della molecola in questione, mentre E_{eff} , dovendo descrivere le azioni subite dalla molecola, è dovuto a tutte le cariche *eccettuate quelle della molecola stessa*. A maggior ragione, il campo efficace non coincide con il campo elettrico macroscopico, anche se, come vedremo più avanti, è legato ad esso da una relazione che dipende dalla struttura del materiale. Possiamo considerare E_{eff} come il campo calcolabile nella posizione della molecola, quando si sia prima "congelata" la situazione delle altre molecole del materiale polarizzato, e, quindi, tolta la molecola in esame. Pur essendo in linea di principio chiaramente definito, il campo efficace può essere anche molto difficile da calcolare.

Il caso di un gas a temperatura e pressione normali è tuttavia semplice. Poiché la distanza media tra le molecole è ancora abbastanza grande, nel calcolo dei contributi al campo forniti dalle altre molecole è lecito considerare, per ciascuna di queste, i soli termini di dipolo; tale approssimazione è accettabile anche per i contributi delle molecole più vicine a quella in esame. Si può supporre, inoltre, che il campo efficace sia uniforme in tutta la regione occupata dalla molecola, e schematizzare le molecole semplicemente come dipoli elettrici, sia nel calcolare il campo da esse generato, sia nel calcolare le forze da esse subite.

Nei dielettrici liquidi si hanno ancora molecole non vincolate a posizioni fisse e in moto di agitazione termica. La trattazione è quindi analoga a quella dei gas; tuttavia, data la maggiore densità (e la minor distanza media tra le molecole), la validità delle approssimazioni sopra riportate è minore e, anche nei limiti di queste, i risultati sono quantitativamente differenti.

I dielettrici solidi, dotati di struttura reticolare e in cui le distanze tra atomi adiacenti sono dell'ordine delle dimensioni degli atomi stessi, costituiscono un caso più

¹³ In alcuni testi viene denominato *campo interno* o *campo molecolare*.

complesso. Spesso il campo efficace agente su un atomo *non* è uniforme, e per calcolare i contributi degli atomi vicini non basta l'approssimazione di dipolo. Anche quando essa è accettabile, poi, il calcolo di E_{eff} risulta non di rado complicato se la struttura cristallina non è delle più semplici.

Il campo efficace può risultare infine diverso a seconda delle posizioni degli atomi nel reticolo (ad esempio nei cristalli formati da più tipi di atomi), e si possono avere effetti di anisotropia. Gli effetti microscopici di polarizzazione nei solidi sono quelli esaminati nel caso dei gas e dei liquidi, complicati dall'esistenza della struttura reticolare. Si ha sempre un effetto di deformazione della distribuzione elettronica attorno ai nuclei, e quindi una *polarizzazione elettronica per deformazione*. In alcuni cristalli, però, specialmente in quelli ionici, il campo produce piccoli spostamenti degli ioni dalle posizioni che essi occupano nel reticolo e si ha anche una *polarizzazione ionica*. Vi sono solidi in cui gli atomi sono raggruppati in complessi interagenti tra loro, e si possono considerare formati da molecole: nel caso in cui queste siano dotate di momento di dipolo permanente, si può avere *polarizzazione per orientamento*. In un solido le molecole non possono muoversi liberamente, come in un gas o in un liquido, ma hanno possibilità di moto limitate, in quanto interagiscono con le molecole vicine della struttura reticolare. Le modalità con cui avviene la polarizzazione per orientamento sono quindi diverse dal caso dei gas, e dipendono dalla struttura del solido. In generale una trattazione quantitativa della polarizzazione nei solidi è piuttosto complicata, e va svolta nell'ambito della meccanica quantistica. Oltre alle considerazioni qualitative sopra riportate, ci limiteremo a trattare casi di solidi con struttura molto semplice, per i quali si possano effettuare, nel calcolo del campo efficace, le approssimazioni già esposte per i gas e i liquidi.

*5.12 Polarizzazione per deformazione

Sono non polari molecole monoatomiche come He, Ne, A, molecole biatomiche simmetriche come H₂, N₂, O₂, molecole poliameriche a disposizione simmetrica, ad esempio CO₂ (in cui gli atomi sono allineati lungo una retta, con quello di carbonio al centro). Per semplicità, consideriamo il caso non polare, convenientemente schematizzato per poter calcolare l'effetto di un campo elettrico applicato.

Sia dato dunque un atomo di idrogeno. Secondo il modello di Bohr, l'elettrone descrive un'orbita attorno al nucleo in tempi dell'ordine di 10⁻¹⁵ secondi; rispetto a interazioni che avvengono in tempi più lunghi (10⁻¹⁴ s o più), l'elettrone si può considerare "distribuito" lungo l'orbita. In altre parole, su tale intervallo di tempo, il momento di dipolo è in media nullo. La meccanica quantistica insegna però che è più corretto immaginare che l'elettrone possa trovarsi non solo in tutti i punti di un'orbita, ma in tutti i punti dello spazio nelle vicinanze del nucleo. Vi è cioè una probabilità non nulla per l'elettrone di trovarsi in un punto qualsiasi dell'atomo. Per interazioni che si svolgono in tempi più lunghi di 10⁻¹⁵ s, un modello adatto a descrivere l'atomo

di idrogeno è perciò quello di una carica puntiforme positiva $+e$ (il nucleo), circondata da una distribuzione continua, a simmetria sferica, di carica negativa globalmente pari alla carica $-e$ dell'elettrone. Secondo la teoria quantistica, la densità di tale carica negativa varia gradualmente per distanze crescenti dal nucleo, tendendo a zero in modo esponenziale; per dare un'idea delle dimensioni di questa specie di *nuvola elettronica*, precisiamo che una sfera di raggio $2,2 \times 10^{-10}$ m contiene il 99 per cento della carica $-e$. Data la simmetria, il momento di dipolo di questo sistema è evidentemente nullo.

Supponendo di applicare un campo efficace E_{eff} , uniforme su tutto l'atomo, la distribuzione elettronica viene distorta nella direzione del campo; il baricentro della carica negativa si sposta, rispetto al nucleo, nella direzione del campo e in senso opposto a questo, e l'atomo acquista un momento di dipolo indotto P_{micr} , parallelo ed equiverso al campo,¹⁴ di modulo pari alla carica e moltiplicata per la distanza tra nucleo e baricentro della carica negativa.

Per calcolare P_{micr} , come si è detto, impieghiamo un modello atomico costituito da una carica puntiforme $+e$ al centro di una carica $-e$ distribuita con densità uniforme in una sfera di raggio a .

Supponiamo che l'effetto del campo E_{eff} sia semplicemente di spostare la distribuzione sferica di un tratto s rispetto al nucleo, lasciandone inalterata la forma. In condizioni di equilibrio, la forza eE_{eff} esercitata sul nucleo dal campo E_{eff} è bilanciata dall'attrazione di questo verso il centro della sfera negativa. La carica contenuta entro una sfera di raggio s , con lo stesso centro della distribuzione negativa, vale $(s/a)^3(-e)$; il campo dovuto alla carica negativa, in un punto a distanza s dal centro, dipende solo da questa carica e vale

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{s}{a}\right)^3 \frac{e}{s^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{es}{a^3}.$$

In condizioni di equilibrio si ha dunque

$$eE_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 s}{a^3},$$

donde

$$s = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{e} E_{\text{eff}}, \quad [5.12.1]$$

$$P_{\text{micr}} = es = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_{\text{eff}}. \quad [5.12.2]$$

Assumendo $a = 1\text{\AA} = 10^{-10}$ m e considerando un campo $E_{\text{eff}} = 10^6$ V/m, si ricava uno spostamento $s = 10^{-15}$ m, molto piccolo rispetto alla dimensione a dell'atomo.

¹⁴ Il momento P_{micr} indotto è parallelo al campo perché l'atomo possiede una simmetria sferica nella distribuzione di carica. Nel caso di sistemi meno simmetrici (come per esempio la molecola CO_2) può non aversi parallelismo.

La relazione tra P_{micr} e E_{eff} si riduce a una semplice proporzionalità:

$$P_{\text{micr}} = \alpha_e E_{\text{eff}}; \quad [5.12.3]$$

la costante α_e si dice *polarizzabilità elettronica dell'atomo*; per le [5.12.2], essa risulta proporzionale al volume dell'atomo:

$$\alpha_e = 4\pi\epsilon_0 a^3. \quad [5.12.4]$$

Un'espressione come la [5.12.3] può essere considerata come primo termine di uno sviluppo in serie di potenze di E_{eff} , impiegabile nel caso di deformazioni molto piccole.¹⁵ Per campi elettrici molto intensi, talvolta si deve tenere conto di termini successivi e considerare una relazione non lineare tra P_{micr} e E_{eff} . Di fatto, per molti materiali i campi E_{eff} risultano molto piccoli rispetto a quelli che tengono legati gli elettroni al nucleo, e pertanto l'approssimazione lineare è in pratica sufficiente sino a valori prossimi alla rigidità dielettrica.

Un calcolo quantistico, più corretto, fornisce

$$\alpha_e = 4\pi\epsilon_0 \frac{9}{2} a_0^3, \quad [5.12.5]$$

in cui a_0 è il raggio della prima orbita di Bohr. Misurando sperimentalmente α_e si ottiene un valore in buon accordo con quello calcolato.

In modo analogo, anche per atomi con Z elettroni si può considerare un nucleo $+Ze$ e una nuvola elettronica di carica globale $-Ze$ (valutando il raggio a in base ai dati disponibili sulle strutture atomiche). La polarizzabilità α_e è ancora data dalla [5.12.4], che fornisce un valore tanto più in accordo con i dati sperimentali quanto meno la struttura atomica si discosta dal modello della distribuzione sferica uniforme.

Nel caso poi di molecole poliatomiche, le distribuzioni degli elettroni attorno agli atomi possono differire notevolmente da quelle che si hanno per gli stessi atomi isolati, e la polarizzabilità elettronica delle molecole può anche risultare diversa dalla somma della polarizzabilità degli atomi componenti.

I rilievi sperimentali confermano che anche per atomi a più elettroni e per molecole non polari il momento di dipolo indotto dipende linearmente da E_{eff} , cosicché può definirsi una polarizzabilità α_e .¹⁶

Abbiamo accennato anche (vedi § 5.11) a un effetto di polarizzazione atomica, o ionica, dovuto a piccoli spostamenti relativi tra atomi, o ioni: il fenomeno è in genere meno importante della polarizzazione per deformazione elettronica, ma in alcune sostanze dà un contributo notevole alla polarizzazione. Esso si presenta se la struttura molecolare (reticolare nel caso di solidi) è abbastanza deformabile. In genere, gli spo-

¹⁵ Scrivendo la [5.12.3] senza ulteriori specificazioni, è implicita l'ipotesi che E_{eff} sia uniforme su tutto l'atomo.

¹⁶ Nel caso di molecole in cui P_{mol} dipenda linearmente da E_{eff} , ma non sia ad esso parallelo, α_e non è una semplice quantità scalare, bensì ha carattere tensoriale.

stamenti di atomi e ioni sono piccoli e il momento di dipolo indotto dipende linearmente dal campo E_{eff} . Si può quindi anche definire una *polarizzabilità atomica*, o *ionica*, α_i .

*5.12.1 Polarizzazione per orientamento

Molte molecole, formate da atomi di diverso tipo, hanno struttura asimmetrica, e di conseguenza sono polari (ad esempio HC_1 , H_2O , NH_3). I momenti di dipolo permanente delle molecole polari sono in genere molto più grandi dei momenti di dipolo prodotti in molecole non polari dai campi elettrici realizzabili in pratica.

Ad esempio, consideriamo la molecola polare biatomica HC_1 : in essa l'elettrone dell'atomo di idrogeno tende a spostarsi verso il C1, così che ne risulta un eccesso di carica positiva verso l'estremità H. Il momento di dipolo elettrico permanente della molecola è $3,44 \times 10^{-30} \text{ C m}$, pari cioè a una carica elettronica ($e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$) moltiplicata per circa $2 \times 10^{-11} \text{ m}$. Se, per confronto, consideriamo l'esempio fatto nel paragrafo precedente, cioè un atomo H sottoposto a un campo $E_{\text{eff}} = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$, vediamo che il momento di dipolo indotto è circa 10^4 volte inferiore.

Tralasciamo, per il momento, la polarizzazione per deformazione delle molecole polari, che considereremo come dipoli rigidi.¹⁷

Ai fini della polarizzazione, interessa la media $\overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}}$ nell'intorno di un punto. Se le molecole sono libere di muoversi, tutte le orientazioni sono equivalenti, e pertanto, in assenza di campo elettrico, i dipoli \mathbf{P}_{mol} sono orientati in modo casuale, e la loro media è nulla in ogni punto ($\overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}} = 0$). Se però, l'insieme dei dipoli è immerso in un campo elettrico, ogni molecola, nel suo moto di agitazione termica, tende a rimanere più a lungo in direzione parallela ed equiversa al campo; ovvero, a un dato istante, sono più numerose le molecole il cui \mathbf{P}_{mol} è orientato in tal modo. Si intuisce che la media $\overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}}$ risulta parallela ed equiversa al campo, poiché tutte le direzioni normali al campo sono nelle stesse condizioni (e quindi la media delle componenti dei momenti \mathbf{P}_{mol} normali al campo è ancora nulla) mentre *non* è tale la media delle componenti dei \mathbf{P}_{mol} secondo la direzione del campo.

Detto θ l'angolo formato da un generico dipolo con il campo efficace E_{eff} (vedi fig. 5.17), vogliamo calcolare la media delle componenti $P_{\text{mol}} \cos \theta$. Allo scopo, ci si può avvalere della statistica classica di Boltzmann, secondo la quale, in condizioni di equilibrio, a temperatura T , ogni dipolo ha una probabilità di trovarsi in uno stato cui compete energia totale W proporzionale al fattore

$$e^{-W/kT}.$$

L'energia totale W è somma dell'energia cinetica e di quella potenziale; la prima è indipendente dalla orientazione del dipolo, e qui non interessa; la seconda è (vedi la [3.8.7])

$$U_e = -\mathbf{P}_{\text{mol}} \cdot \mathbf{E}_{\text{eff}} = -P_{\text{mol}} E_{\text{eff}} \cos \theta.$$

[5.12.6]

¹⁷ Data la proporzionalità tra momento indotto per deformazione e campo efficace, è possibile, anche nel caso della polarizzazione per deformazione, adottare un modello semplificato, in cui le molecole sono assimilate a due cariche opposte legate elasticamente tra di loro. In assenza di campo efficace, le posizioni delle cariche vanno pensate coincidenti nel caso di molecole non polari; nel caso di molecole polari, invece, esse sono già separate, come fossero fissate agli estremi di una sbarretta elastica. Naturalmente, i legami "elastici", in questi modelli, rappresentano le forze elettriche che tengono insieme la molecola.

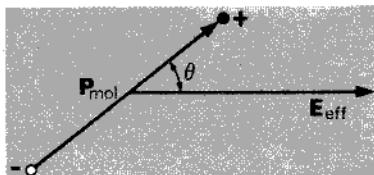


Figura 5.17

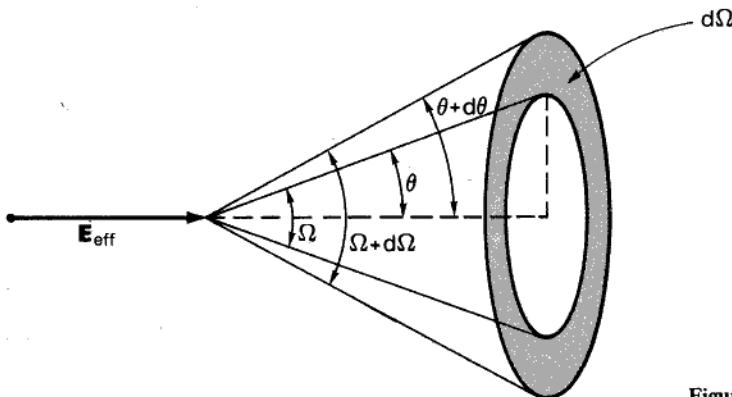


Figura 5.18

Dato che tutte le orientazioni sono possibili, il numero di stati corrispondenti a quelle comprese in un certo angolo solido è proporzionale all'angolo solido stesso. Ai fini del nostro calcolo, interessa conoscere il numero di stati possibili aventi orientazioni che con il campo E_{eff} formino un angolo compreso tra θ e $\theta + d\theta$. Tale numero è proporzionale all'angolo solido $d\Omega$ compreso (vedi fig. 5.18) tra due coni di semiapertura θ e $\theta + d\theta$:

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Pertanto, il numero dN di dipoli che, in condizioni di equilibrio, ha orientazione compresa tra θ e $\theta + d\theta$ è:

$$dN = A e^{-U(\theta)/kT} d\Omega, \quad [5.12.7]$$

A essendo una costante di proporzionalità.¹⁸ La media delle componenti $P_{\text{mol}} \cos \theta$ è data dunque da

$$P_{\text{mol}} \overline{\cos \theta} = \frac{\int_0^{4\pi} P_{\text{mol}} \cos \theta A e^{-U(\theta)/kT} d\Omega}{\int_0^{4\pi} A e^{-U(\theta)/kT} d\Omega} = P_{\text{mol}} \frac{\int_0^{\pi} \cos \theta \exp\left(\frac{P_{\text{mol}} E_{\text{eff}}}{kT} \cos \theta\right) \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \exp\left(\frac{P_{\text{mol}} E_{\text{eff}}}{kT}\right) \sin \theta d\theta}$$

¹⁸ Essa resta determinata dal numero totale di dipoli N del sistema, dovendo essere

$$N = \int_0^{\pi} \frac{dN}{d\theta} d\theta.$$

Introdotto il parametro adimensionale

$$y = \frac{P_{\text{mol}} E_{\text{eff}}}{kT},$$

è facile calcolare questa espressione, ottenendo

$$\overline{P_{\text{mol}} \cos \theta} = P_{\text{mol}} \left(\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{y} \right) = P_{\text{mol}} \left(\operatorname{ctgh} y - \frac{1}{y} \right). \quad [5.12.8]$$

La funzione

$$L(y) = \operatorname{ctgh} y - \frac{1}{y} \quad [5.12.9]$$

è detta *funzione di Langevin*; un suo grafico è riportato nella figura 5.19. Si noti che, per $y \gg 1$, essa tende asintoticamente al valore 1: ciò corrisponderebbe all'allineamento completo dei dipoli, caso in cui la media del momento di dipolo sarebbe uguale al modulo P_{mol} del singolo dipolo molecolare. Tuttavia, nella maggior parte dei casi si ha $y \ll 1$. Infatti, per le molecole polari, P_{mol} è dell'ordine di 10^{-30} C m , ovvero di una carica elettronica per 10^{-11} m : quindi, anche con campi dell'ordine di 10^6 V/m , si hanno energie potenziali dell'ordine di 10^{-5} eV ,¹⁹ mentre kT a temperatura ambiente (300 K) è dell'ordine di $25 \times 10^{-3} \text{ eV}$. Ai fini pratici, si può approssimare la curva nella figura 5.19 con la tangente nell'origine; ciò corrisponde a sviluppare in serie la funzione e considerarne soltanto il primo termine, ottenendo

$$L(y) = \frac{1}{3} y.$$

Nella maggior parte dei casi di interesse pratico, si può porre

$$\overline{P_{\text{mol}} \cos \theta} = \frac{1}{3} P_{\text{mol}} y = \frac{P_{\text{mol}}^2 E_{\text{eff}}}{3 kT},$$

cioè

$$\overline{P_{\text{mol}}} = \frac{1}{3} \frac{P_{\text{mol}}^2}{kT} E_{\text{eff}}. \quad [5.12.10]$$

In questa approssimazione, $\overline{P_{\text{mol}}}$ risulta semplicemente proporzionale a E_{eff} , e si può ancora definire *polarizzabilità per orientamento dipolare* α_d :

$$\alpha_d = \frac{1}{3} \frac{P_{\text{mol}}^2}{kT}. \quad [5.12.11]$$

Si nota che la polarizzabilità α_d ha significato solo se riferita alla media del momento di dipolo molecolare, e non anche a una singola molecola, come nella polarizzazione per deformazione. Inoltre, a differenza della polarizzazione per deformazione, α_d dipende dalla temperatura (è proporzionale al reciproco, T^{-1} , della temperatura assoluta).

¹⁹ L'“elettronvolt” (eV), unità di energia molto usata in elettronica, è pari al lavoro effettuato per spostare una carica pari ad e (cioè $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$) tra due punti tra i quali esista una d.d.p. di 1V. Si ha $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C V} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

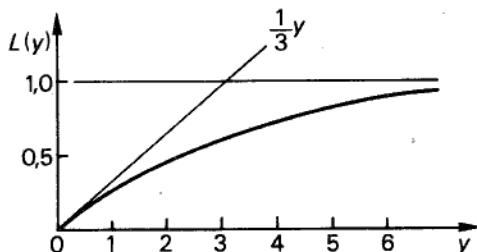


Figura 5.19
Grafico della funzione di Langevin.

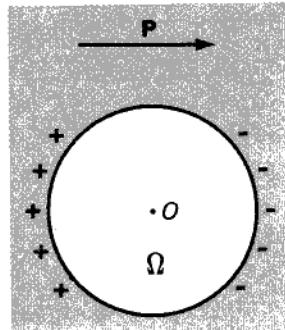


Figura 5.20

Possiamo ora tener conto dei fenomeni di polarizzazione per deformazione, presenti anche nelle sostanze polari, aggiungendo il loro effetto a quello di orientamento.²⁰ Si può cioè definire una *polarizzabilità molecolare totale*, dovuta alla polarizzazione elettronica, a quella per orientamento ed eventualmente anche alla polarizzazione ionica:

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_d.$$

[5.12.12]

Nelle sostanze polari, gli effetti di polarizzazione sono prevalenti e α_d è preponderante.

Infine, per quanto detto nel paragrafo 5.11, questa trattazione della polarizzazione per orientamento si applica bene a gas e liquidi, ma assai meno al caso dei solidi.

*5.12.2 Relazione tra campo elettrico efficace e campo elettrico macroscopico

Limitiamoci, per semplicità, ai casi in cui atomi e molecole del dielettrico siano rappresentabili mediante dipoli. Volendo determinare il campo efficace su una molecola si può immaginare, ad esempio, di calcolarne il valore (con uno dei metodi esaminati nella prima parte del capitolo) nel centro O di una cavità sferica Ω , ottenuta con la rimozione di una sfera di dielettrico contenente la molecola, considerando la parte rimanente (dopo la rimozione) "congelata" ai valori della polarizzazione macroscopica preesistente. Nel calcolo del campo, l'ipotesi di continuità del mezzo costituisce un'approssimazione accettabile limitatamente al contributo di molecole lontane da quella in esame. Occorre dunque, se si vuole che l'approssimazione suddetta sia valida nel centro della cavità (supposta per semplicità di forma sferica), che il raggio di questa sia sufficientemente grande. Resta da considerare il contributo delle molecole più vicine, quelle che in precedenza erano contenute in Ω . Supponiamo, allora, di collocarle tutte, una per una, nel posto che loro compete nella cavità (eccettuata

²⁰ Nel caso di molecole *non* a simmetria sferica, come per tutte le molecole polari e molte molecole non polari, la polarizzabilità molecolare per deformazione dipende in genere dall'orientazione della molecola rispetto al campo efficace agente su di essa. A rigore, quindi, nel tener conto degli effetti di deformazione, occorre considerarne la media su tutte le molecole nell'intorno del punto considerato, cioè introdurre nella [5.12.12] le polarizzabilità molecolari per deformazione α_e e α_i *mediate* sulla distribuzione di orientazioni delle molecole rispetto a E_{eff} .

naturalmente quella in O), e di conteggiare i loro contributi nel centro.²¹ Indicando con \mathbf{E}_0 il campo al centro della cavità vuota e con \mathbf{E}_{dip} quello dovuto alle molecole, da pensare come dipoli, contenute in Ω (eccettuata quella in O), avremo

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{dip}}. \quad [5.12.13]$$

Consideriamo dapprima il termine \mathbf{E}_0 . Supponiamo che la polarizzazione, nella zona del dielettrico in cui vogliamo praticare la cavità, sia uniforme, e che \mathbf{P} sia parallelo al campo elettrico macroscopico \mathbf{E} . Dopo la creazione della cavità, il campo elettrico macroscopico \mathbf{E}_0 , al centro di questa, è più intenso del campo \mathbf{E} preesistente: ora, infatti, sulla superficie sferica della cavità vi è una distribuzione di cariche di polarizzazione (vedi fig. 5.20), legate alla discontinuità di \mathbf{P} , che contribuisce positivamente al campo nella cavità.

Per convincersene è sufficiente osservare che tale contributo è uguale e contrario al campo prodotto dalla porzione sferica di dielettrico uniformemente polarizzato che è stata tolta.²² Nella sfera esso vale $-\mathbf{P}/3\epsilon_0$; \mathbf{E}_0 è dato dunque da²³

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad [5.12.14]$$

Quanto al termine \mathbf{E}_{dip} , si può dimostrare che in non pochi casi di interesse pratico esso risulta nullo.²⁴ Se i dipoli molecolari sono numerosi, tutti ugualmente orientati ma distribuiti casualmente nella cavità (in modo che non vi sia correlazione tra le loro posizioni) si dimostra $\mathbf{E}_{\text{dip}} = 0$. Questo caso rappresenta abbastanza bene la situazione nei gas e nei liquidi non polari. Così pure, se i dipoli sono uguali e disposti secondo un reticollo cristallino cubico, come accade per cristalli cubici costituiti da atomi uguali, è $\mathbf{E}_{\text{dip}} = 0$.²⁵

I dielettrici esaminati in questo testo sono appunto quelli per cui \mathbf{E}_{dip} è nullo; per essi²⁶

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad [5.12.15]$$

²¹ Naturalmente, il procedimento ha senso soltanto se il risultato del calcolo *non* dipende dalle particolari dimensioni della cavità (condizione, come vedremo, in molti casi soddisfatta).

²² Date le piccole dimensioni della cavità, la polarizzazione \mathbf{P} nel dielettrico rimane invariata quando si pratica la cavità, e tale resta quindi anche il suo contributo al campo elettrico.

²³ Come si è visto in § 5.7, per la cavità sferica si ottiene un valore intermedio tra quelli relativi a cavità cilindriche allungate ($\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$) e schiacciate ($\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$).

²⁴ Omettiamo le relative dimostrazioni, che il lettore può ritrovare in molti testi di fisica dei solidi.

²⁵ Invece nel caso di cristalli cubici composti da atomi diversi, non sempre risulta $\mathbf{E}_{\text{dip}} = 0$. Con strutture cristalline più complesse, in genere \mathbf{E}_{dip} non è nullo, e quando vi siano diversi tipi di atomi nella struttura, può essere diverso per atomi diversi e possono verificarsi effetti di anisotropia.

²⁶ Per i liquidi polari, l'espressione risulta approssimata per eccesso. La spiegazione di ciò richiede cognizioni di struttura della materia al di là dei limiti di questo testo. Qualitativamente, possiamo dire che il dipolo della molecola in esame influenza il dielettrico circostante, cosicché una parte del campo creato da questo è sempre orientata parallelamente al dipolo stesso.

*5.12.3 Relazione tra suscettività elettrica e polarizzabilità molecolare

Conoscendo, per un dato materiale dielettrico, la relazione tra momento di dipolo molecolare medio $\overline{P}_{\text{mol}}$ e campo efficace E_{eff} , nonché quella tra campo efficace e campo elettrico macroscopico, si può dedurre la relazione caratteristica $P = P(E)$.

Ci limiteremo a considerare materiali tali che

$$\overline{P}_{\text{mol}} = \alpha E_{\text{eff}}, \quad [5.12.16]$$

per cui si possa cioè definire una *polarizzabilità molecolare* α , dovuta ai vari effetti microscopici (vedi § 5.12). Dalle [5.12.16] e [5.10.4] si ricava

$$P = N\alpha E_{\text{eff}}. \quad [5.12.17]$$

Sostituendo la [5.12.17] nella [5.12.15] e raccogliendo E_{eff} , si ottiene

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} E. \quad [5.12.18]$$

Dalle [5.12.17] e [5.12.18] risulta

$$P = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} E. \quad [5.12.19]$$

Per questi dielettrici la relazione tra P e E è dunque lineare e la suscettività χ è data da

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}. \quad [5.12.20]$$

Ricordiamo che i materiali per cui valgono queste espressioni sono gas, liquidi non polari e solidi a struttura semplice. Se $N\alpha/3\epsilon_0 \ll 1$, il campo efficace coincide praticamente con E e la suscettività si riduce semplicemente al prodotto della polarizzabilità molecolare per la densità di molecole:

$$E_{\text{eff}} = E, \quad [5.12.21]$$

$$\chi = N\alpha; \quad [5.12.22]$$

cioè avviene ad esempio nel caso dei gas rarefatti, per i quali la densità N è bassa, e il risultato è in accordo con quanto detto nel paragrafo 5.11. Una misura della suscettività elettrica di gas rarefatti fornisce quindi un modo di misurare la polarizzabilità α delle molecole del gas. Determinata α , è possibile verificare sperimentalmente la validità della [5.12.20], effettuando misure di χ con densità N (dello stesso gas) note e di valore via via crescente. I risultati sperimentali sono in accordo con la [5.12.20]. Si noti che il fattore $1 - N\alpha/3\epsilon_0 < 1$, a denominatore, produce un aumento del valore di χ : ciò corrisponde al fatto che il campo efficace è maggiore del campo E , date le mutue interazioni tra le molecole del materiale polarizzato, tendenti a rinforzare la polarizzazione stessa a parità di campo macroscopico E .

Dalla [5.12.20] si può ricavare un'espressione della polarizzabilità molecolare α in funzione della densità N e della costante dielettrica relativa ϵ_r (quantità macroscopica misurabile facilmente). Essendo

$$\chi = \epsilon_0(\epsilon_r - 1),$$

dalla [5.12.20] si ricava la

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad [5.12.23]$$

nota come *relazione di Clausius-Mossotti*.

Effettuando misure a diverse temperature, si può ricavare l'andamento di α in funzione della temperatura. Ricordando che è dipendente dalla temperatura solo la polarizzabilità molecolare per orientamento α_d , si può ricavare separatamente il suo valore e quello della somma della polarizzabilità elettronica e ionica $\alpha_e + \alpha_i$. Se inoltre, per α_d , vale la [5.12.11], si può anche ricavare il valore di P_{mol} .

*5.12.4 Fenomeni di polarizzazione permanente

In alcuni solidi si riscontra una polarizzazione anche in assenza di campi elettrici esterni. Questa situazione può essere artificialmente prodotta, ad esempio, nella cera, le cui molecole sono formate da lunghe catene di atomi e sono dotate di momento elettrico permanente. Sottoponendo la cera liquida all'azione di un forte campo elettrico, si osserva un orientamento, almeno parziale, delle molecole nella direzione del campo; quando poi la si lascia nuovamente solidificare, l'orientamento si mantiene anche quando il campo esterno è rimosso. Vi sono però sostanze cristalline in cui la polarizzazione si produce *spontaneamente*; in esse ogni cella del reticolo ha un momento di dipolo e tali momenti sono paralleli tra loro. In entrambi i casi, è difficile rilevare la polarizzazione permanente, perché i pezzi di materiale polarizzato attirano cariche libere dall'aria e queste neutralizzano il campo creato dalla polarizzazione.

La polarizzazione spontanea si manifesta in cristalli aventi strutture reticolari con basso grado di simmetria e piuttosto complicate. Se, in qualche modo, se ne altera la struttura, si ha una variazione della polarizzazione. Ciò si rileva abbastanza facilmente all'esterno, in quanto occorre un certo tempo perché vengano attirate cariche libere in misura tale da neutralizzare la variazione di carica di polarizzazione. Una variazione si può produrre scaldando il materiale, alterandone quindi la struttura per dilatazione termica; la variazione di polarizzazione osservata viene detta *effetto piroelettrico*. Si può inoltre variare un po' la struttura del cristallo con l'applicazione di opportune forze (ad esempio comprimendolo o incurvandolo). L'applicazione di sforzi può provocare polarizzazione (*effetto piezoelettrico*) anche in dielettrici che non si polarizzano spontaneamente.

Alcuni materiali che presentano polarizzazione spontanea hanno proprietà elettriche analoghe a quelle magnetiche dei materiali ferromagnetici (di cui ci occuperemo in seguito) e pertanto sono detti *ferroelettrici*. In essi, la relazione tra P e E non è lineare né univoca: il valore della polarizzazione dipende non solo da quello del campo che agisce sul cristallo, ma anche da come si è arrivati a tale situazione. In questi casi, il grafico della relazione tra P e E è dato da una curva chiusa, detta *ciclo di isteresi*, del tipo illustrato nella figura 5.21; i valori negativi indicano che P (o E) può essere diretto in senso opposto a quello corrispondente ai valori positivi.²⁷

Per $E=0$, si possono avere due polarizzazioni di segno opposto, corrispondenti ai punti A e B . Se, a partire dalla situazione A , aumentiamo il campo E , la polarizza-

²⁷ Il termine *isteresi* indica un ritardo: qui la polarizzazione P , in un certo senso, "rimane indietro" rispetto alle variazioni di E .

zione P diminuisce, per poi cambiare segno e crescere fino a un valore di saturazione. Diminuendo da questo punto in poi l'intensità di E , si osserva che P , anziché assumere i valori precedenti, descrive il ramo superiore della curva, portandosi in B (per $E = 0$) e in C (per E crescente in senso negativo).

A campo applicato nullo, il materiale è in A o in B , a seconda del senso del campo precedentemente applicato: in un certo senso il materiale ne serba "memoria".

Il valore del campo corrispondente a C , cioè quello necessario per annullare la polarizzazione a partire da B , è detto *campo coercitivo*. Per ogni materiale vi è una temperatura caratteristica (*temperatura di Curie*) al di sopra della quale scompare il comportamento ferroelettrico e il materiale si presenta con caratteristiche simili a quelle di un qualsiasi dielettrico. Le sostanze ferroelettriche note non sono molte. Si tratta di cristalli con reticolati poco simmetrici, composti da più tipi di atomi, e spesso con composizione chimica abbastanza complicata. Un esempio tipico è il titanato di bario, BaTiO_3 , che ha una temperatura di Curie di 120°C .

Una teoria rigorosa dei fenomeni ferroelettrici risulta molto complessa, poiché occorre considerare sia la struttura reticolare del materiale sia le polarizzabilità elettroniche, ioniche o per orientamento di atomi e molecole componenti; inoltre, ogni materiale ferroelettrico presenta aspetti particolari. Ci limiteremo pertanto a un breve cenno, per chiarire almeno qualitativamente i fenomeni. Nei materiali ferroelettrici si può verificare una situazione di equilibrio, in cui il momento di dipolo di una generica cella del cristallo si mantiene parallelo a quello delle altre celle, per effetto del campo efficace da queste generato. Ciò è possibile se la polarizzabilità della cella ha valore sufficiente. Ammettiamo, per ora, che si possa usare l'espressione [5.12.15] per E_{eff} ; se il campo esterno è nullo ($E = 0$), detta P_0 la polarizzazione, risulta

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{3\epsilon_0} P_0.$$

D'altra parte, indicando con α la polarizzabilità di una singola cella e con N il numero di celle per unità di volume, si ha $P_0 = N\alpha E_{\text{eff}}$, e quindi

$$P_0 = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} E_{\text{eff}}. \quad [5.12.24]$$

Ciò è possibile quando

$$P_0 = 0,$$

oppure, con polarizzazione non nulla, se risulta

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = 1. \quad [5.12.25]$$

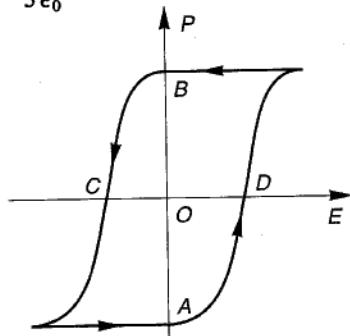


Figura 5.21

La [5.12.25] rappresenterebbe la condizione per avere polarizzazione spontanea. Nella maggior parte dei materiali si ha invece $N\alpha/3\epsilon_0 < 1$, e non vi è comportamento ferroelettrico. In realtà, la [5.12.25] non è esatta; un'espressione corretta sarebbe ben più complicata e dipendente dal particolare materiale. Infatti per i materiali ferroelettrici non è valida l'espressione [5.12.15]; il relativo calcolo del campo efficace è anzi molto complesso, avendo essi strutture reticolari complicate, con atomi di diverso tipo e distanze tra essi dell'ordine delle dimensioni atomiche.

Esercizi

1. Si consideri un piccolo conduttore sferico, carico, immerso in un dielettrico. Verificare che la forza elettrica che agisce su di esso, facendo tendere a zero le dimensioni del conduttore, è data dal prodotto della carica libera totale del conduttore per il campo creato, nella regione da esso occupata, da tutte le cariche eccettuata quella presente sul conduttore stesso.

(*Osservazione.* La soluzione dell'esercizio costituisce una riprova delle compatibilità tra definizione operativa e procedimento di calcolo del campo del dielettrico.)

2. In un condensatore piano (che ha aria tra le armature, poste a distanza d) viene inserita una lastra di vetro di spessore δ ($\delta < d$). Calcolare la distribuzione del campo elettrico nell'aria e nel vetro quando: 1) la lastra è inserita mentre il condensatore è collegato a un dispositivo che mantiene costante la d.d.p. fra le armature; 2) la lastra è inserita dopo che il condensatore, alla tensione V , è stato sconnesso dal dispositivo, rimanendo, quindi, isolato.

3. Risolvere numericamente l'esercizio precedente, assumendo: $d = 1 \text{ cm}$, $\delta = 0,5 \text{ cm}$, $\epsilon_{\text{vetro}} = 5 \epsilon_0$, $V = 10 \text{ kV}$.

4. Con riferimento all'esercizio 3, calcolare σ_{lib} e σ_{pol} prima e dopo l'inserimento della lastra.

5. Calcolare la pressione che si esercita su una armatura di un condensatore piano che ha aria tra le armature, poste a distanza $d = 1 \text{ mm}$, quando una d.d.p. $V = 1 \text{ kV}$ sia applicata alle armature.

6. Con riferimento all'esercizio precedente, immaginiamo di isolare il condensatore, dopo averlo caricato, e di riempire poi lo spazio tra le armature con petrolio ($\epsilon = 2\epsilon_0$). Calcolare la pressione agente sulle armature.

7. Con riferimento all'esercizio 5, calcolare la pressione, supponendo di riempire il condensatore di petrolio *prima* di caricarlo.

8. Due condensatori ad aria, inizialmente scarichi, vengono collegati in serie; sapendo che la d.d.p. applicata ai morsetti liberi è mantenuta al valore costante V , calcolare di quanto variano i potenziali delle armature dei due condensatori quando uno di essi venga riempito con un dielettrico di costante ϵ .

9. Una sfera dielettrica di costante ϵ è immersa in un campo uniforme E preesistente nel vuoto. Calcolare σ_{pol} per la sfera.

(*Suggerimento.* Vedi esercizio 15 del cap. 4).

Capitolo 6

La corrente elettrica

6.1 Introduzione

Abbiamo finora considerato le interazioni tra cariche elettriche ferme in un riferimento inerziale. In questo capitolo e nei successivi esamineremo le interazioni, ben diverse dalle precedenti, tra cariche in moto, quelle che sono alla base dei fenomeni di magnetismo noti fin dall'antichità. Analizzeremo i legami tra fenomeni elettrici e magnetici, enunciandone le leggi generali e mostreremo, utilizzando la teoria della relatività speciale, che è possibile interpretare i fenomeni tra cariche in movimento in termini di quelli tra cariche ferme.

In primo luogo dovremo verificare, sperimentalmente, se la definizione di carica elettrica data in elettrostatica (vedi § 1.2) sia ancora valida per descrivere fenomeni di tipo elettrodinamico.

Consideriamo una carica-sorgente puntiforme q_0 , fissa in un punto P_0 del riferimento inerziale K (vedi fig. 6.1), e un corpo carico di prova C , anch'esso puntiforme, in moto generico lungo una traiettoria γ nello stesso riferimento. Misuriamo dapprima la forza \mathbf{F} esercitata da q_0 su C quando questo si trova in un generico punto P di γ .¹

Sostituiamo poi a C un corpo carico C' (puntiforme) in moto lungo una generica traiettoria γ' , anch'essa passante per P , e misuriamo in questo punto la forza \mathbf{F}' esercitata su esso da q_0 . Per definizione diremo che C e C' possiedono la stessa carica, cioè che $q = q'$, quando $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$.² L'esperienza mostra ora che due corpi di pari carica (secondo la definizione data nel cap. 1) da fermi hanno ancora la stessa carica (nel senso esteso appena specificato) quando ciascuno di essi si muove nel nostro riferi-

¹ In questo caso non è possibile considerare, come si era fatto nel caso elettrostatico, la forza agente sulla carica fissa q_0 , poiché non vale il principio di azione e reazione. Infatti, quando il corpo C si trova nel punto P di γ all'istante t , la carica q_0 "sente" l'azione trasmessa da C in un istante precedente; l'azione trasmessa all'istante t la raggiungerà successivamente (questo nell'ipotesi che la velocità di propagazione dell'interazione sia finita).

² Si verifica sperimentalmente che, se \mathbf{F} e \mathbf{F}' sono uguali in P , permangono tali in qualunque punto dello spazio comune alle due traiettorie γ e γ' .

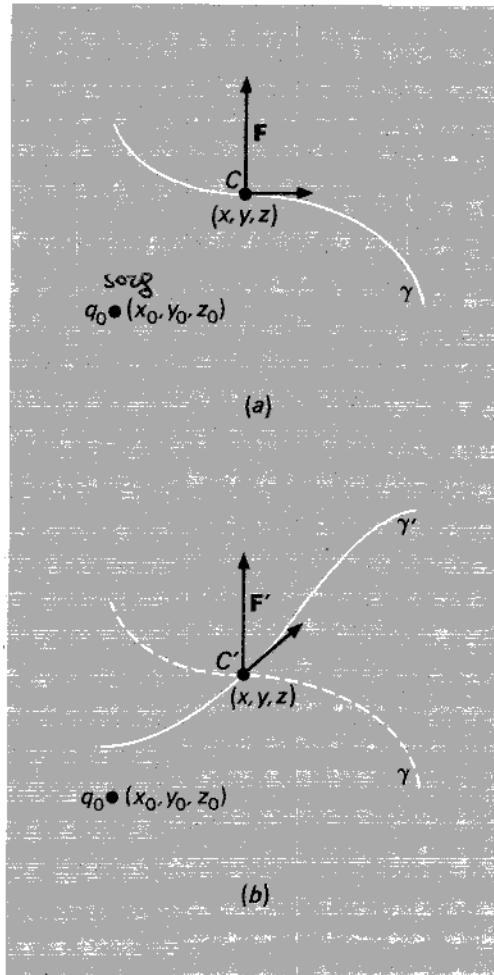


Figura 6.1

mento: la vecchia definizione di uguaglianza risulta così un caso particolare di quella ora data.

Supponendo che per la carica continua a valere la proprietà additiva (nel senso specificato nel cap. 1) si può definire anche per i corpi in moto una grandezza fisica corrispondente alla carica elettrica. Inoltre, si verifica sperimentalmente che se due cariche fisse stanno tra loro in un rapporto α , esse permangono nello stesso rapporto anche quando si muovono. È naturale, quindi, attribuire ai corpi in moto lo stesso valore di carica che avevano da fermi. In questo senso, si può dire che le cariche elettriche godono di una proprietà di *invarianza relativistica*.

6.2 Interazioni tra cariche in moto

Si è visto nei capitoli 1 e 2 che la forza esercitata da un insieme di cariche-sorgente, fisse in un riferimento inerziale, su una carica di prova q , anch'essa fissa nello stesso riferimento, può essere posta sotto la forma

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}, \quad [6.2.1]$$

dove \mathbf{E} è un campo vettoriale la cui struttura dipende soltanto dalla distribuzione delle cariche-sorgente.

Immaginiamo ora di ritornare all'esperienza della figura 6.1, con la carica-sorgente q_0 fissa nel nostro riferimento inerziale, mentre quella di prova, q , si muove con una legge qualsiasi. L'esperienza mostra che la forza esercitata da q_0 sulla carica q , quando questa passa per il generico punto P , è la stessa che si riscontrerebbe se q fosse fissa in P . In conclusione:

Se le cariche-sorgente sono fisse, il moto della carica di prova non modifica le forze esercitate su di essa dalle cariche-sorgente.

Tale affermazione non è generalmente valida quando le cariche-sorgente si muovono.³ E' noto infatti dall'esperienza che *su una carica di prova q passante per il punto P , all'istante t , in un riferimento inerziale, agisce una forza*

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E}(P, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(P, t)], \quad [6.2.2]$$

dove $\mathbf{E}(P, t)$ e $\mathbf{B}(P, t)$ sono campi vettoriali, denominati rispettivamente campo elettrico e campo magnetico.⁴

Osserviamo che:

- La forza \mathbf{F} agente sulla carica di prova è proporzionale al valore di questa (come avveniva nel caso statico).
- Se all'istante t la carica di prova è ferma nel punto P , le cariche-sorgente esercitano su essa una forza

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}$$

³ Si pone qui una questione ben nota nell'ambito della meccanica, ma che forse è utile ricordare brevemente: come definire e misurare la forza agente su un punto materiale mobile, nei casi in cui essa dipenda dalla velocità del punto. In questi casi, non potendosi definire la forza attraverso i suoi effetti statici (ad esempio con un dinamometro) si pone, *per definizione*:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

si definisce cioè la forza agente sul corpo come derivata nel tempo della quantità di moto \mathbf{p} posseduta dal corpo. In questa forma, il secondo principio della dinamica sembrerebbe ridursi alla definizione della grandezza fisica "forza". Il suo ruolo di legge fisica fondamentale appare chiaro quando si espliciti a primo membro, caso per caso, il termine di forza in funzione delle posizioni e delle velocità di tutti i punti materiali con i quali il punto in esame interagisce. In questo modo, scompare, dall'espressione del secondo principio, la forza come grandezza indipendente, ma vi ricompare con il ruolo di "funzione di forza".

⁴ Il campo \mathbf{B} , detto *induzione magnetica*, è in realtà un campo "pseudovettoriale" (vedi § A.4).

(come si vede dalla [6.2.2] per $v=0$), come nel caso statico. Si constata tuttavia che il valore di $\mathbf{E}(P, t)$, prodotto da una distribuzione di cariche-sorgente in moto (considerata all'istante t in un dato riferimento) è in generale diverso da quello che le stesse sorgenti produrrebbero se fossero fisse nelle posizioni occupate nel medesimo istante. Per questo motivo, il vettore \mathbf{E} , indicato come *campo eletrostatico* nei capitoli precedenti, ora è detto *campo elettrico*. Ancora una volta, per misurarne il valore in un generico punto P , all'istante t , basta misurare (vedi cap. 2) la forza che in quel punto e in quell'istante agisce su una carica unitaria positiva *ferma nel dato riferimento*:⁵

$$\mathbf{F}(P, t) = 1 \cdot \mathbf{E}(P, t). \quad [6.2.3]$$

Si noti che il campo \mathbf{E} così definito (a carica di prova ferma) è proprio quello che fornisce il primo termine, nell'espressione [6.2.2], della forza agente sulla carica di prova quando questa è in moto con velocità v .

c) Su una carica di prova in moto con velocità v agisce, oltre alla forza *elettrica* $q\mathbf{E}$, una *forza magnetica*, $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, definibile operativamente come differenza tra la forza totale agente sulla carica di prova q e la sola forza elettrica:

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{F} - q\mathbf{E}. \quad [6.2.4]$$

Note \mathbf{F} , q e v , la [6.2.4] consente di definire e misurare il campo magnetico \mathbf{B} , nel punto P e all'istante t .⁶ Le dimensioni di B si deducono immediatamente dall'equazione (ricavata dalla [6.2.2])

$$[v][B] = [E];$$

B si misura pertanto in Vs/m²; a questa unità si dà il nome di "tesla" (T). Il tesla è dunque il valore di un campo B che esercita sulla carica di 1 C, in moto con una velocità di 1 m/s, una forza di 1 N.

La forza magnetica è proporzionale alla velocità della carica di prova ed è diretta perpendicolarmente a v : ciò significa che essa *non può compiere lavoro sulla carica*.

⁵ A proposito dell'influenza che la carica di prova q può esercitare sulle cariche-sorgente, si possono ripetere le considerazioni fatte nel cap. 2 a proposito del caso statico: anche qui si dovrebbe, a rigore, definire il campo per mezzo di un processo al limite per q tendente a zero.

⁶ Più precisamente, il procedimento operativo per la definizione di \mathbf{B} (ed \mathbf{E}) è il seguente.

a) Una prima misura di forza, effettuata a carica ferma ($v_1=0$), consente di determinare il campo: $\mathbf{E} = \mathbf{F}_1/q$.

b) Una seconda misura di forza, effettuata con la carica q in moto con velocità v_2 arbitraria, fornisce un valore $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 + q\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}$; si ha dunque

$$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1}{q}. \quad [6.2.4']$$

Tale relazione mostra che \mathbf{B} giace in un piano α normale al vettore $(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1)/q$; essa non è sufficiente a determinare completamente il vettore induzione, di cui fornisce soltanto la componente (nel piano α) in direzione ortogonale a \mathbf{v}_2 .

c) Una terza misura di forza, effettuata con la carica in moto con velocità v_3 , giacente in α e perpendicolare a \mathbf{v}_2 , consente infine di determinare la componente di \mathbf{B} nella direzione di \mathbf{v}_2 .

Osserviamo che **B** dipende dal moto delle sole cariche-sorgente; in particolare, esso è nullo se le sorgenti sono ferme, e in tal caso, come detto all'inizio di questo paragrafo, la forza agente sulla carica di prova in moto si riduce a quella elettrica.

A questo punto dell'esposizione, rinunciamo a chiederci perché le cariche in moto producano un campo magnetico. Vedremo nel seguito che è possibile dare un'interpretazione unitaria sia delle forze elettriche che di quelle magnetiche; per il momento conviene accettare l'esistenza di queste ultime come un fatto sperimentale.

Si tratterebbe ora di procedere al calcolo effettivo dei campi (elettrico e magnetico) prodotti da una distribuzione assegnata di cariche-sorgente (in moto in un dato riferimento); si potrebbe, in vista di ciò, iniziare con la descrizione dei campi prodotti da una singola carica, per passare poi, in virtù del principio di sovrapposizione, al caso più complesso dei campi prodotti da distribuzioni qualsiasi. Tale impostazione, malgrado il pregio di una continuità logica di sviluppo, presenta diversi inconvenienti, non ultimo il fatto che, nella maggior parte delle applicazioni, ci si trova di fronte, piuttosto che al movimento di singole cariche, a moti collettivi di cariche, vere e proprie *correnti*. Seguiremo pertanto la via tradizionale, movendo dalla descrizione dei campi associati alle correnti per giungere alla descrizione di quelli prodotti dalla carica singola.

6.3 La corrente elettrica

Dati due corpi conduttori *A* e *B*, fermi nel nostro riferimento, supponiamo che *A* possieda una carica positiva Q_A e che *B* sia scarico. Immaginiamo di turbare l'equilibrio elettrostatico dei corpi, collegandoli con un filo di materiale conduttore: per rendere osservabile il fenomeno per tempi non troppo brevi, si potrà usare, ad esempio, un filo di lana umido.⁷ Misure della carica elettrica, effettuate contemporaneamente sull'uno e sull'altro corpo, rivelano una graduale diminuzione della carica Q_A posseduta da *A* e un aumento della Q_B . Naturalmente, in base al principio di conservazione della carica, dev'essere, per ogni *t*,

$$Q_A(t) + Q_B(t) = Q = \text{cost.} \quad [6.3.1]$$

E' naturale spiegare il fenomeno pensando che, nella situazione descritta, le cariche fluiscano lungo il filo da *A* verso *B*. A tale flusso, che interessa tutti i punti del filo contemporaneamente, si dà il nome di *corrente elettrica*. Dalla [6.3.1] si ricava

$$\frac{dQ_A}{dt} = -\frac{dQ_B}{dt}, \quad \text{per ogni } t. \quad [6.3.2]$$

Si immagini ora, data una generica sezione *S* del filo, di poter misurare direttamente la quantità di carica che l'attraversa in un determinato tempo; in altre parole,

⁷ E' l'umidità a rendere debolmente conduttore il filo di lana, che, altrimenti, sarebbe isolante.

di "contare", cronometro alla mano, le cariche che, dall'istante dell'inizio del collegamento tra A e B , attraversano in un verso prefissato (ad esempio, da A verso B) la sezione S . Si ottiene in tal modo una funzione $q(t)$ che fornisce, per ogni t segnato dal cronometro, la quantità totale di carica che ha attraversato S dall'origine dei tempi all'istante considerato.⁸

E' possibile ora definire una nuova grandezza fisica, l'*intensità di corrente elettrica*, mediante la relazione

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t). \quad [6.3.3]$$

Essa indica, in ogni istante, la quantità di carica che attraversa la sezione S del conduttore nell'unità di tempo, ed è pertanto una grandezza scalare; le sue dimensioni sono quelle di una carica divisa per un tempo: $[i] = [Q]/[t]$. All'unità di i nel SI (che verrà definita nel cap. 7), si dà il nome di "ampere" (A); essa corrisponde al passaggio, attraverso la sezione del conduttore, di 1 C/s.⁹

Per illustrare meglio la nozione introdotta, riportiamo alcune considerazioni.

Nella definizione della $q(t)$ si suppone dato un verso di riferimento rispetto al quale contare il passaggio delle cariche attraverso S : a seconda che le cariche attraversino S nel verso prefissato o in quello opposto, vanno sommate o sottratte al precedente valore di q . In definitiva, negli istanti in cui risulta $i > 0$, le cariche (positive) attraversano S nel verso prefissato; quando invece $i < 0$, le cariche (positive) attraversano S in senso opposto.

Finora si è supposto che la corrente sia prodotta da un flusso di cariche positive: come si modifica, ora, la definizione di intensità di corrente se a muoversi sono anche le cariche negative? Semplicemente basta, nel definire la funzione $q(t)$, considerare la carica *netta* che attraversa la sezione S nel verso stabilito. Ciò significa che, una volta fissato un verso di riferimento, quando una carica (positiva o negativa che sia) attraversa la sezione S nel senso prefissato il suo valore va sommato in senso algebrico al valore precedente di q : se la carica è positiva, il valore di q cresce, se è negativa, diminuisce.

Ancora, possiamo pensare che se una carica positiva e una carica negativa (uguali in valore assoluto) attraversano insieme, nello stesso senso, la sezione S , ciò equivalga al passaggio, attraverso S , di una particella neutra, che in quanto tale non contribuirebbe alla corrente.

L'esperienza conferma che, a tutti gli effetti elettrici e magnetici, il moto di una carica positiva è equivalente a quello di una carica negativa in verso opposto.

⁸ Nelle condizioni in cui immaginiamo di effettuare l'esperienza, risulta

$$q(t) = Q_A(0) - Q_A(t).$$

⁹ In realtà, nel SI si preferisce definire l'unità di corrente in modo indipendente dal coulomb (vedi § 8.9), derivando poi da essa la definizione dell'unità di carica (in ogni caso la corrente di 1 A corrisponde al passaggio di 1C/s).

6.4 I diversi tipi di corrente

Un conduttore metallico si può immaginare costituito da una struttura di cariche positive, fisse nei vertici di un reticolo, e da una nube di elettroni liberi che si muovono in maniera caotica, urtando continuamente tra loro e contro le cariche positive fisse.

In condizioni di equilibrio elettrostatico, l'intensità di corrente che attraversa una generica sezione S del conduttore è nulla. Infatti si osserva che, a causa della natura caotica dei moti di agitazione termica degli elettroni, in ogni intervallo di tempo fisicamente infinitesimo Δt , tanti elettroni attraversano la sezione S in un senso quanti l'attraversano in senso opposto; pertanto, su una scala di tempi macroscopica (quella che interessa per la definizione dell'intensità di corrente) la funzione $q(t)$ si mantiene identicamente nulla, e tale risulta di conseguenza la sua derivata.

Ben diversa è la situazione se, per effetto di opportune forze agenti sugli elettroni liberi, questi acquistano (sovrapposto al loro moto caotico di agitazione termica) un moto orientato in una certa direzione. Nel caso elettrostatico il baricentro di una nuvola di n elettroni occupa una posizione che, in media, su una scala di tempi macroscopica, è sempre la stessa. Nel caso dinamico, invece, sovrapposta a quella di agitazione termica, vi è una componente di velocità costante (sia pure piccola rispetto a quella termica) che muta nel tempo la posizione media dell'elettrone. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di queste velocità, si pensi che, mentre le velocità di agitazione termica degli elettroni in un conduttore metallico, a temperatura ambiente, sono dell'ordine di 10^5 m/s, la componente di velocità "orientata" ha tipicamente valori dell'ordine delle frazioni di millimetro al secondo. Le correnti di questo tipo prendono il nome di *correnti di conduzione*. Data la piccolissima massa degli elettroni liberi rispetto a quella degli ioni fissi, la corrente fluisce senza un concomitante trasporto macroscopico di massa. Inoltre il passaggio di corrente in un conduttore non implica che questo presenti una carica elettrica netta; infatti in un volumetto di conduttore fisicamente infinitesimo le cariche positive (fisse) sono mediamente tante quante le negative (in moto). Di conseguenza, la carica totale può essere e rimanere nulla, pur se il volumetto è attraversato da un flusso continuo di cariche negative.

Oltre alle correnti di conduzione, ne esistono di altri tipi, con proprietà fisiche che dipendono dalla natura del mezzo: ad esempio, le correnti dette *di convezione*, presenti solitamente nei liquidi e nei gas e costituite da movimenti macroscopici, di tipo fluidodinamico, in cui si spostano in maniera diversa sia le cariche positive sia quelle negative. Di questo tipo sono le correnti associate ai movimenti delle masse d'aria durante un temporale. Ancora diverse sono le correnti associate al moto di *lacune* in un semiconduttore (concetto basilare, questo, nell'elettronica dei dispositivi).

Infine, in situazioni variabili nel tempo, accanto alle correnti di conduzione e di convezione, possono avere luogo negli isolanti, e anche nel vuoto (in quest'ultimo caso, in assenza di cariche di ogni tipo), fenomeni di tipo diverso, che prendono il nome di *correnti di spostamento*; di essi tratteremo nel capitolo 9.

6.5 Densità di corrente ed equazione di continuità

Consideriamo una regione Ω di un conduttore in cui vi sia il passaggio di una corrente. Sia ρ la densità di volume delle sole cariche in moto e sia v la loro velocità¹⁰ nel punto P e all'istante t (vedi fig. 6.2); dato un elemento di superficie dS e fissato ad arbitrio il verso della normale n a tale superficie, valutiamo la carica che attraversa dS , nel verso indicato da n , in un tempo elementare dt . Durante tale intervallo, la superficie dS è attraversata da tutta e sola quella carica che all'inizio si trovava, rispetto a un qualsiasi punto di dS , a distanza non maggiore di $vd t$: la attraversano, cioè, tutti i portatori di carica in moto contenuti in un cilindro obliquio di base dS e altezza $v \cdot n dt$. Tale carica è data da

$$dq = \rho v \cdot n dt dS. \quad [6.5.1]$$

Posto

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}, \quad [6.5.2]$$

la [6.5.1] si scrive

$$dq = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dt dS = J_n dt dS, \quad [6.5.3]$$

dove J_n è la componente del vettore \mathbf{J} secondo la normale n a dS .

Il vettore \mathbf{J} definito dalla [6.5.2] è detto *densità di volume di corrente*: la sua unità è

$$\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2},$$

e la sua componente secondo una generica direzione orientata n indica, come si vede dalla [6.5.3], la quantità di carica che attraversa la superficie unitaria (normale a n) nell'unità di tempo.

Data ora una generica superficie (non chiusa) S , si può valutare (con riferimento a un verso arbitrariamente prefissato) l'intensità di corrente¹¹ che l'attraversa, ovvero la quantità di carica che l'attraversa nell'unità di tempo. Dalla [6.5.3] si ha

$$i = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS. \quad [6.5.4]$$

L'intensità di corrente i che attraversa una generica superficie orientata S è data dunque dal flusso, attraverso S , del vettore densità di corrente \mathbf{J} .

¹⁰ Ci si riferisce qui alla media vettoriale tra le velocità (microscopiche) dei portatori esistenti in un intorno di P , media coincidente, per definizione, con la velocità del moto orientato sovrapposto a quello caotico.

¹¹ In tal modo la definizione di intensità di corrente, data precedentemente per i conduttori filiformi, si estende al caso generico di conduttori comunque estesi spazialmente.

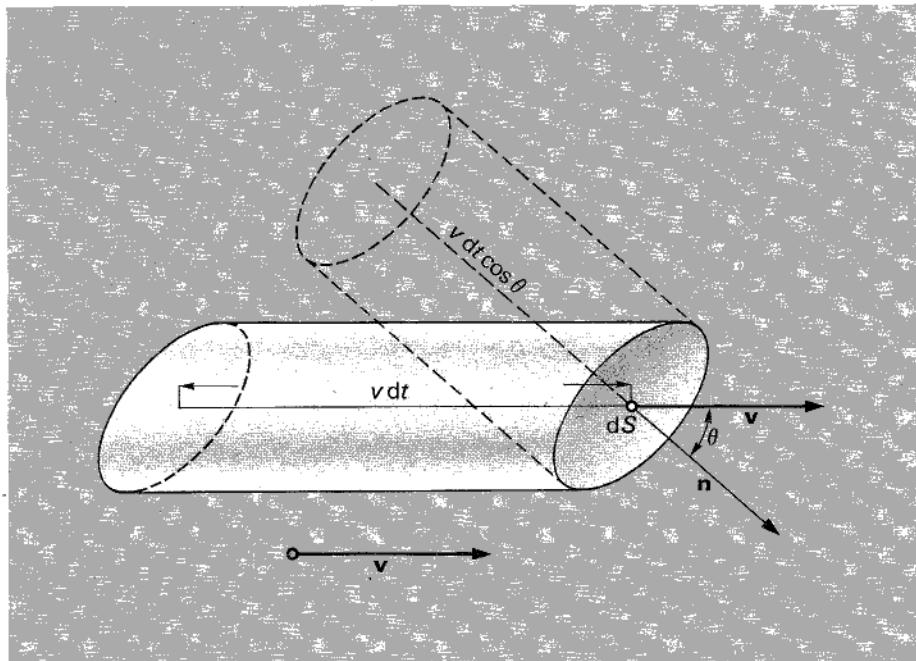


Figura 6.2

La [6.5.2] esprime la densità di corrente nel caso che i portatori siano tutti dello stesso segno; in caso contrario si scriverà

$$\mathbf{J} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-, \quad [6.5.5]$$

con ovvio significato dei simboli.

Riassumendo, il fenomeno del trasporto di carica associato a una corrente è descritto localmente da una grandezza vettoriale (la densità di corrente), in forma integrale da una grandezza scalare (l'intensità di corrente).

Immaginando che il conduttore in cui si verifica il passaggio di corrente sia costituito da una *lamina* conduttrice (vedi fig. 6.3) S , è naturale definire nel generico punto P di S un vettore *densità di corrente superficiale* \mathbf{J}_s :

$$\mathbf{J}_s = \sigma \mathbf{v}, \quad [6.5.6]$$

dove σ è la densità di carica superficiale che passa per il punto P con velocità \mathbf{v} . Le dimensioni di \mathbf{J}_s sono evidentemente quelle di una corrente per unità di lunghezza e la relativa unità di misura è A/m. L'intensità di corrente che entra nella lamina sarà

$$i = \int_{\gamma} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} dl,$$

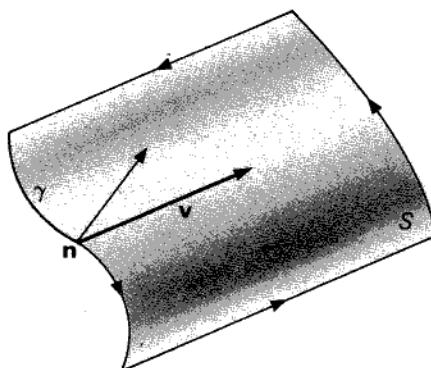


Figura 6.3

dove γ è la linea che costituisce l'orlo di ingresso di S (vedi fig. 6.3) e n è il versore normale a γ e tangente a S .

Il trasporto di carica rispetta il principio di conservazione: *data una qualsiasi superficie chiusa Σ , la quantità di carica che l'attraversa in un generico intervallo di tempo corrisponde alla variazione della carica contenuta nel volume racchiuso da Σ .*

La quantità di carica che nell'unità di tempo esce dalla superficie chiusa Σ è

$$i = \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Ad essa deve corrispondere dunque una variazione della carica totale contenuta all'interno di Σ ; indicando questa con Q , si ha

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{dQ}{dt}. \quad [6.5.7]$$

Il segno “-” esprime il fatto che, nel caso di cariche positive uscenti da Σ (primo membro positivo), si riscontra una diminuzione di Q e cioè si ha $dQ/dt < 0$.

Indicando con ρ la densità di carica nel volume τ racchiuso da Σ , si ha

$$Q = \iiint_{\tau} \rho d\tau,$$

e quindi

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau.$$

Poiché il volume τ è invariabile, le operazioni di derivazione rispetto al tempo e integrazione nel volume sono tra loro indipendenti, e pertanto l'ordine con cui vengono eseguite può essere invertito. Ricordando che la densità di carica ρ è funzione

sia del punto che del tempo, si ha

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau,$$

e quindi

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau. \quad [6.5.8]$$

Applicando il teorema della divergenza al primo membro di tale relazione, si ha

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{J} d\tau = - \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau. \quad [6.5.9]$$

Data l'arbitrarietà di Σ , e quindi di τ , la [6.5.9] implica l'uguaglianza delle funzioni integrande; in ogni punto e per ogni t si ha dunque

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad [6.5.10]$$

Questa relazione, detta *equazione di continuità*, esprime il principio di conservazione della carica in forma locale, mentre la [6.5.7] e la [6.5.8] lo esprimono in forma integrale.

6.6 La corrente in regime stazionario

Una proprietà (locale) indipendente dal tempo in ogni punto di un sistema fisico si dice *stazionaria*; se le proprietà locali del sistema sono tutte stazionarie, è il sistema stesso a dirsi stazionario. Dato ad esempio un liquido in movimento, poniamoci in un punto fisso P del riferimento rispetto al quale il liquido è in moto. Esaminiamo poi, in istanti successivi, le velocità delle masse liquide che passano per P (è questo, il cosiddetto *punto di vista euleriano*). Può accadere che in P la velocità del liquido sia costante nel tempo: se ciò si verifica in ogni punto, il moto è stazionario. In istanti diversi, la velocità misurata nello stesso punto P si riferisce al moto di particelle di liquido diverse; se si seguisse nel suo moto una di queste (*punto di vista lagrangiano*), si troverebbe che anche in caso di stazionarietà la velocità, in generale, varia lungo la traiettoria e quindi nel tempo.

Una corrente elettrica si dice *stazionaria* se in ogni punto del mezzo in cui essa scorre sono stazionarie densità di carica e densità di corrente. In tal caso, dalla [6.5.10], si ha, in ogni punto e in ogni istante,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad [6.6.1]$$

In regime stazionario, il campo del vettore densità di corrente è dunque solenoidale; data nel campo una qualsiasi superficie *chiusa* Σ , si ha per essa

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad [6.6.2]$$

Ciò significa che la quantità di carica che globalmente esce da Σ nell'unità di tempo è nulla: tanta carica entra in Σ quanta, nello stesso tempo, ne esce. Se così non fosse, si riscontrerebbe una variazione temporale della quantità di carica contenuta nella regione racchiusa da Σ , in contraddizione con l'ipotesi di stazionarietà.

Una conseguenza importante di tutto ciò è che, in regime stazionario, la corrente che percorre un conduttore ha lo stesso valore attraverso tutte le sue sezioni: *il conduttore costituisce, cioè, un tubo di flusso* (vedi app. A) per il campo del vettore \mathbf{J} .

Per dimostrarlo, consideriamo, in un conduttore percorso da corrente (vedi fig. 6.4), un tratto limitato da una superficie chiusa Σ costituita da due sezioni generiche S_1 e S_2 e dalla superficie laterale S ; dalla [6.6.2] si deduce

$$\iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_2 dS + \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad [6.6.3]$$

D'altra parte, data una superficie δS a forma di moneta (superficie di tipo "M") posta a cavallo della superficie laterale del conduttore, anche per essa è

$$\iint_{\delta S} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Trascurando (perché infinitesimo di ordine superiore) il contributo all'integrale

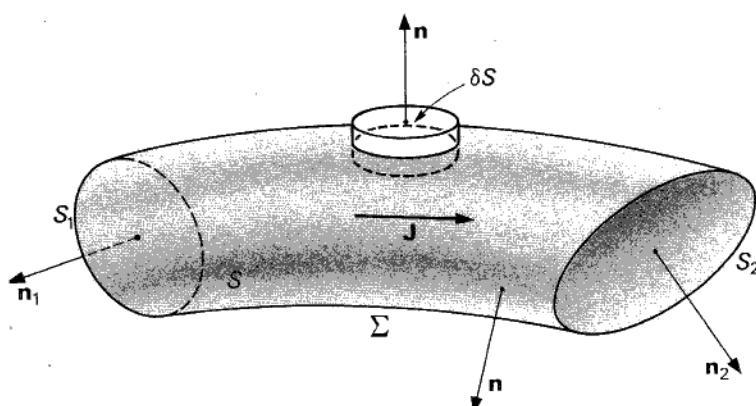


Figura 6.4

dato dalla superficie laterale di δS , si conclude che

$$J_{n1} dS + J_{n2} dS = 0,$$

dove J_{n1} e J_{n2} indicano rispettivamente le componenti di \mathbf{J} normali alle basi di δS immediatamente all'interno e all'esterno di S . D'altra parte, essendovi corrente, per ipotesi, soltanto nel conduttore (e non all'esterno di esso), sarà $J_{n2} = 0$, e quindi anche $J_{n1} = 0$. Il vettore \mathbf{J} è dunque tangente alla superficie laterale del conduttore. Tenendo conto di ciò nella [6.6.3], si ha

$$\iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_1 dS = - \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_2 dS.$$

Se l'orientamento della normale a S_1 è concorde con quello della normale a S_2 , si ha

$$\iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_2 dS. ■$$

Altra conseguenza interessante della [6.6.2] è che, dato un mezzo percorso da corrente e diviso da una superficie S in due regioni di caratteristiche fisiche diverse, le componenti del vettore \mathbf{J} normali a S assumono, in ogni punto di tale superficie, lo stesso valore su ambedue le "pagine".¹² In altre parole

$$J_{n1} = \lim_{P_1 \rightarrow P_0^-} J_n = \lim_{P_2 \rightarrow P_0^+} J_n = J_{n2},$$

com'è facile dimostrare considerando, al solito, una superficie chiusa elementare di tipo "M" centrata in P e applicando ad essa la [6.6.2].

Riassumendo, il principio di conservazione della carica, applicato alle correnti stazionarie, garantisce la solenoidalità del campo del vettore \mathbf{J} . In forma *integrale*, ciò può esprimersi dicendo che il flusso di \mathbf{J} uscente da una qualsiasi superficie chiusa Σ contenuta nel campo è nullo, ossia

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0;$$

in forma *locale*, si può dire: in tutti i punti regolari del mezzo

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0;$$

e nei punti di discontinuità tra mezzi di caratteristiche diverse,

$$J_{n1} = J_{n2}.$$

¹² Come vedremo in seguito, le componenti tangenziali possono presentare una discontinuità.

6.7 Il campo elettrico nei conduttori percorsi da corrente stazionaria

Nei paragrafi precedenti la corrente elettrica è stata esaminata da un punto di vista per così dire cinematico, nel senso che si sono introdotte le grandezze fisiche adatte a descrivere il fenomeno, senza interrogarsi sulle sue cause. Affronteremo ora questo nuovo aspetto, limitandoci per il momento al caso di correnti stazionarie.

Evidentemente, il fatto che in un conduttore i portatori di carica si muovono in maniera orientata rivela che su essi agiscono opportune forze, che possono essere di varia origine; per il momento esamineremo quelle di natura elettrica.

Abbiamo visto nel capitolo precedente che, dato un conduttore in equilibrio elettrostatico, il campo elettrico è nullo in ogni suo punto interno. Se il conduttore non è in equilibrio, ovvero è percorso da una corrente, esso è sede di un campo elettrico non nullo che agisce sulle cariche libere, determinandone il moto. E' naturale chiedersi, allora, quali siano le leggi che governano il comportamento del campo elettrico in un conduttore percorso da corrente stazionaria.

L'esperienza mostra che esse, all'interno e all'esterno del conduttore, sono le stesse che valevano per i fenomeni elettrostatici (nel seguito approfondiremo il motivo di ciò). In presenza di corrente stazionaria, infatti, il campo verifica ancora le seguenti due leggi fondamentali:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q, \quad (\text{teorema di Gauss}) \quad [6.7.1]$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = 0. \quad (\text{proprietà di irrotationalità}) \quad [6.7.2]$$

Riassumendo, un conduttore percorso da corrente stazionaria è sede di due campi vettoriali, entrambi stazionari: il campo elettrico \mathbf{E} e il campo della densità di corrente \mathbf{J} , i quali verificano rispettivamente le [6.7.1], [6.7.2] e [6.6.2]. Tali leggi, però, non dicono come \mathbf{E} sia legato a \mathbf{J} ; tale legame dipende dalle caratteristiche fisiche del conduttore e non può quindi essere espresso indipendentemente da queste.

L'espressione

$$\mathbf{J} = f(\mathbf{E}), \quad [6.7.3]$$

caratteristica di ciascun conduttore, prende il nome di *relazione costitutiva* e va determinata sperimentalmente caso per caso.

Per alcuni conduttori, a temperatura costante, la [6.7.3], come si vedrà nei paragrafi successivi, è una relazione lineare¹³

$$\mathbf{J} = g \mathbf{E} \quad [6.7.4]$$

detta *legge di Ohm* (in forma locale).

¹³ Se il mezzo è isotropo, la [6.7.4] è una semplice relazione di proporzionalità con g costante scalare (in generale dipendente dal punto): \mathbf{E} e \mathbf{J} sono perciò paralleli ed equiversi. Se invece il

La grandezza g è detta *conducibilità elettrica* e dipende unicamente dalla natura del conduttore; la quantità inversa $\eta = 1/g$ è detta *resistività elettrica*.¹⁴

La conducibilità si misura in A/Vm e la resistività in Vm/A. Su tali unità torneremo, comunque, nel seguito.

La [6.7.4] non è applicabile a tutti i conduttori: essa vale, con ottima approssimazione, per i metalli e le leghe metalliche, ed è generalmente applicabile alle soluzioni elettrolitiche, ma non ai gas ionizzati. Per molte sostanze, comunque, la [6.7.4] si può considerare approssimativamente valida, almeno in un campo ristretto di valori di E e J . Perciò, anche per mezzi sostanzialmente non "ohmici", ad esempio i materiali isolanti, si può definire una resistività. I materiali a resistività più bassa sono i metalli: per il rame, $\eta = 1,69 \times 10^{-8}$ Vm/A, a temperatura ambiente. Un valore di η tipico di un isolante (quarzo, ad esempio) è dell'ordine di 10^{17} Vm/A (cioè 10^{25} volte maggiore di quello del rame).

La conducibilità di un mezzo dipende (vedi Esperienze illustrate alla fine del capitolo) dalle condizioni fisiche in cui esso si trova, cioè dalla temperatura, dalla pressione, dallo stato di aggregazione (solido, liquido, gassoso). Fenomeno fondamentale è poi l'*effetto Joule*, cioè il fatto ben noto che un conduttore percorso da corrente si riscalda (si pensi alle lampade, alle stufe ecc.).

Il calore sviluppato deriva dalla trasformazione del lavoro compiuto dalle forze elettriche: i portatori di carica interagiscono infatti con gli atomi o le molecole che li circondano, perdendo, nei continui urti, l'energia cinetica che acquistano tra un urto e l'altro dal campo elettrico. L'energia ceduta negli urti si trasforma in calore. Per calcolare la potenza specifica (cioè per unità di volume) dissipata nel conduttore, consideriamo un "tubicino" di flusso del vettore J , di lunghezza elementare dl e sezione dS . La carica che fluisce, in un tempo dt , attraverso dS vale

$$dq = J \cdot n dS dt,$$

dove n è il versore della normale alla superficie dS . Il lavoro compiuto dal campo elettrico E per spostare tale carica lungo dl (dl è diretto come J e ha il suo stesso verso) vale

$$d\mathcal{L} = E \cdot dl dq = (E \cdot dl)(J \cdot n dS dt). \quad [6.7.5]$$

mezzo non è isotropo, la [6.7.4], scritta nelle componenti dei due vettori, ha spesso la forma:

$$\begin{cases} J_x = g_{xx} E_x + g_{xy} E_y + g_{xz} E_z \\ J_y = g_{yx} E_x + g_{yy} E_y + g_{yz} E_z \\ J_z = g_{zx} E_x + g_{zy} E_y + g_{zz} E_z, \end{cases} \quad [6.7.4']$$

dove le g_{ij} , in generale, sono grandezze variabili da punto a punto. Nei corpi cristallini (in genere non isotropi, almeno nel caso di monocrystalli), le diverse direzioni non sono tutte equivalenti. I conduttori più usati sono i metalli, che cristallizzano in sistemi a elevata simmetria (cubico a corpo centrale, cubico a facce centrate ecc.) e si possono quindi considerare, con buona approssimazione, isotropi, anche sotto forma di monocrystalli. Nella maggior parte dei casi, si hanno materiali macroscopicamente isotropi anche se i singoli monocrystalli non lo sono, poiché le proprietà macroscopiche risultano da misure su insiemi di molti microcrystalli con orientazioni casualmente distribuite.

¹⁴ La conducibilità è talvolta indicata con il simbolo σ (oppure γ), e la resistività con ρ .

Scambiando di posto dl con J (operazione lecita poiché i due vettori hanno ugual direzione e verso) e dividendo per dt, si ha

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) (dl \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau, \quad [6.7.6]$$

dove $d\tau$ è il volume elementare del tratto di tubo di flusso considerato. La potenza specifica (potenza per unità di volume) dissipata nel punto P vale perciò

$$P_\tau = \frac{d\mathcal{L}}{dt d\tau} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad [6.7.7]$$

Se nel conduttore vale la legge di Ohm, si ha inoltre

$$P_\tau = EJ = \eta J^2 = \rho E^2. \quad [6.7.8]$$

6.8 Forza elettromotrice agente in un circuito percorso da corrente

Per mantenere una corrente stazionaria in un conduttore, occorre dunque spendere un lavoro, che viene continuamente trasformato in calore. Come si è visto, questo lavoro può essere localmente fornito dal campo elettrico che agisce sui portatori di carica. È naturale, allora, chiedersi se una corrente stazionaria in un conduttore possa essere mantenuta esclusivamente da un campo elettrico verificante le [6.7.1] e [6.7.2]. La risposta è negativa; per mostrarlo osserviamo in primo luogo che un conduttore percorso da corrente, in regime stazionario, fa sempre parte di un *circuito elettrico*, cioè di un percorso chiuso lungo il quale si verifica il passaggio della corrente. In regime stazionario infatti (vedi § 6.6) il campo vettore \mathbf{J} è solenoidale: esso presenta, cioè, linee vettoriali chiuse.¹⁵ Ora, un campo elettrico irrotazionale può, certo, mantenere la corrente entro una porzione di conduttore, ma non entro un circuito chiuso. Infatti, essendo conservativo, esso compie lavoro nullo lungo ogni linea chiusa γ ,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = 0, \quad [6.8.1]$$

e non può, quindi, fornire il lavoro necessario a mantenere la corrente nell'intero circuito.

Nel caso dei conduttori ohmici, ciò appare evidente quando si osservi che, per la legge di Ohm, la [6.8.1] implicherebbe

$$\eta \oint_{\gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} dl = 0, \quad [6.8.2]$$

¹⁵ Ciò non è vero in generale, poiché le linee vettoriali di un campo solenoidale possono non essere chiuse, ma ricoprire *in senso ergodico* una superficie (vedi § 7.11). In ogni caso esse non hanno origine né fine, ed è proprio questa la proprietà qui utilizzata. L'ipotesi fatta, pertanto, non toglie generalità a quanto segue.

risultato impossibile, se $\eta \neq 0$, in quanto, essendo γ una linea vettoriale di \mathbf{J} , la ciruitazione di \mathbf{J} può essere nulla soltanto se risulta ovunque $\mathbf{J} = 0$.

Per mantenere una corrente in un circuito chiuso, in regime stazionario, occorre dunque che sui portatori di carica agiscano, sovrapposte alle forze elettriche conservative, forze di altra natura (chimica, meccanica, termica ecc.)¹⁶ capaci di compiere lavoro non nullo lungo un percorso chiuso.¹⁷

Il circuito conduttore, pertanto, dovrà essere del tipo riportato nella figura 6.5, ove sono rappresentate schematicamente due regioni dalle diverse caratteristiche fisiche: una, C , è un semplice conduttore (ad esempio metallico), mentre l'altra, G (compresa tra "facce" parallele) è la sede dei fenomeni, di origine non elettrica, in grado di produrre il necessario campo non conservativo. In altre parole, soltanto all'interno di G si suppone che esista un campo di forze \mathbf{F}_m (*non elettriche*) agente sui portatori di carica. Il campo elettrico \mathbf{E} , invece, è presente in entrambe le regioni, come pure nello spazio esterno al circuito. In G si verifica la sovrapposizione delle forze originate da \mathbf{E} e di quelle non elettriche \mathbf{F}_m .

Data una linea chiusa γ solo parzialmente contenuta in G (vedi fig. 6.5), si ha necessariamente

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{t} dl \neq 0, \quad [6.8.3]$$

poiché, essendo $\mathbf{F}_m = 0$ all'esterno di G , risulta

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\gamma_G} \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{t} dl \neq 0, \quad [6.8.3']$$

dove si è indicato con γ_G il tratto di γ contenuto nella regione G .

Ad esempio, se, entro G , \mathbf{F}_m è uniforme e diretto come nella figura 6.5, risulta

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{t} dl = F_m l_G,$$

dove l_G è la distanza tra le facce.

Per descrivere, punto per punto, le forze non conservative \mathbf{F}_m , può essere utile definire un campo vettoriale \mathbf{E}_m con le stesse dimensioni del campo elettrico:

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{q}, \quad [6.8.4]$$

¹⁶ Nel distinguere tra forze di origine elettrica e non elettrica una certa cautela si impone: infatti, a livello microscopico tutte le interazioni tra atomi, elettroni e nuclei sono, in fondo, di natura elettrica. La distinzione ha dunque senso soltanto nell'ambito macroscopico; forze elettriche, in questo contesto, sono soltanto quelle che nascono per la presenza, entro volumi macroscopici, di distribuzioni di cariche elettriche globalmente non nulle.

¹⁷ L'unica eccezione è costituita dai fenomeni di *supercondutività* cui si è accennato in precedenza, per i quali $\eta = 0$ (vedi § 7.12).

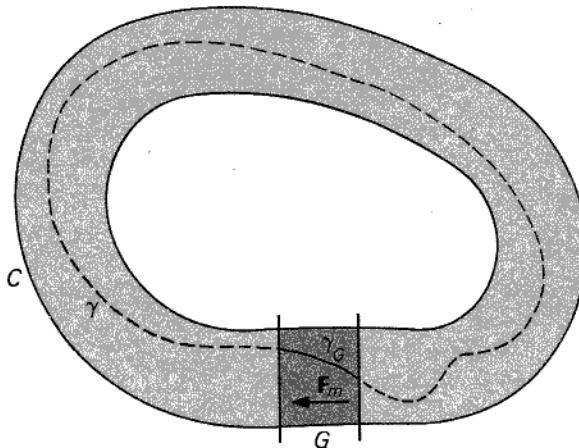


Figura 6.5

dove q è la carica del portatore che si muove nel conduttore. Il vettore \mathbf{E}_m , detto *campo elettromotore*, pur avendo le dimensioni di una forza divisa per una carica, ha proprietà fisiche completamente diverse da quelle di un campo elettrico: in particolare, oltre ad essere non conservativo, \mathbf{E}_m dipende in generale dal valore di q , perché non necessariamente \mathbf{F}_m risulta proporzionale al valore della carica.

Nel seguito esamineremo in maggior dettaglio le origini fisiche del campo elettromotore; per il momento possiamo immaginare, intuitivamente, che i portatori, entrati in G , vengano sospinti attraverso tale regione da una “mano” microscopica, con forza F_m .

In un circuito elettrico, i componenti in cui agiscono forze F_m si dicono *generatori*, in quanto forniscono il lavoro necessario per far circolare la corrente.

Dalla [6.8.3] segue

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{td}l \neq 0; \quad [6.8.5]$$

\mathcal{E} è la *forza elettromotrice*¹⁸ (f.e.m.) agente lungo la linea γ . Naturalmente (vedi [6.8.3']) si ha

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{td}l = \int_{\gamma_G} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{td}l.$$

¹⁸ Il termine è infelice, non trattandosi di una forza, bensì di una grandezza avente le dimensioni di un lavoro diviso per una carica e che quindi, nel Sistema internazionale, è misurata in volt; tale grandezza è scalare, di segno dipendente dall'orientazione (arbitraria) della linea γ , e rappresenta il rapporto \mathcal{L}/q tra il lavoro fatto dal campo elettromotore quando si sposti la carica q lungo la curva chiusa γ e la carica stessa.

Esaminiamo ora più da vicino le condizioni di funzionamento del circuito considerando il caso più semplice, quello in cui il generatore è *aperto*, cioè non collegato a un conduttore esterno che chiuda il circuito. Il generatore presenta due terminali *A* e *B* (detti anche *morsetti*, in quanto permettono la chiusura del circuito mediante collegamento con un conduttore esterno). Supponiamo di conoscere la distribuzione del campo elettromotore \mathbf{E}_m , punto per punto, nella regione G : essa sia, ad esempio, uniforme.

A circuito aperto non può avversi, nel generatore, circolazione di corrente stazionaria, e pertanto (in condizioni stazionarie) in ogni suo punto risulta $\mathbf{J}=0$. Ciò implica che la forza totale agente sui portatori di carica (somma di \mathbf{F}_m e di $q\mathbf{E}$) è ovunque nulla in G :

$$\mathbf{E}_m + \mathbf{E} = 0. \quad [6.8.6]$$

A circuito aperto, il campo elettromotore \mathbf{E}_m è dunque equilibrato, punto per punto, da un campo elettrostatico. Per spiegare l'origine di \mathbf{E} si osservi che, sotto l'azione di \mathbf{E}_m , le cariche libere presenti in G si mettono in moto e migrano fin dove è possibile, cioè fino alla superficie limite del generatore (in particolare sui suoi morsetti). Su tale superficie, inizialmente neutra, si crea una distribuzione di carica superficiale che dà luogo a un campo elettrostatico *di reazione*. Il processo continua finché il campo elettrostatico diventa tale da equilibrare, punto per punto,¹⁹ il campo elettromotore.

La figura 6.6 offre una rappresentazione qualitativa della distribuzione di cariche sulla superficie del generatore e delle linee vettoriali del campo elettrostatico \mathbf{E} da esse prodotto, dentro e fuori del generatore. Data una qualunque linea γ_{AB}^{est} congiungente all'esterno del generatore (vedi fig. 6.7) i morsetti *A* e *B*, si ha²⁰

$$\int_{\gamma_{AB}^{\text{est}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = V^0(A) - V^0(B),$$

poiché \mathbf{E} è conservativo; ai morsetti del generatore è presente cioè una differenza di potenziale $V_{AB}^0 = V^0(A) - V^0(B)$. D'altra parte, per la definizione stessa di \mathbf{E} ,

$$\int_{\gamma_{AB}^{\text{int}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = V^0(A) - V^0(B),$$

dove γ_{AB}^{int} è una qualsiasi linea congiungente *A* e *B* all'interno del generatore. Essendo inoltre, in ogni punto di γ_{AB}^{int} (per la [6.8.6]),

$$\mathbf{E}_m = -\mathbf{E},$$

¹⁹ Ciò è vero soltanto nei punti *interni* al generatore: sul suo involucro esterno l'azione del campo elettromotore è bilanciata (almeno per quel che riguarda la componente normale alla superficie) dalle forze di richiamo che impediscono ai portatori di uscire dal corpo.

²⁰ Lo zero soprascritto, in V^0 , indica che i potenziali si riferiscono alla situazione di circuito aperto.

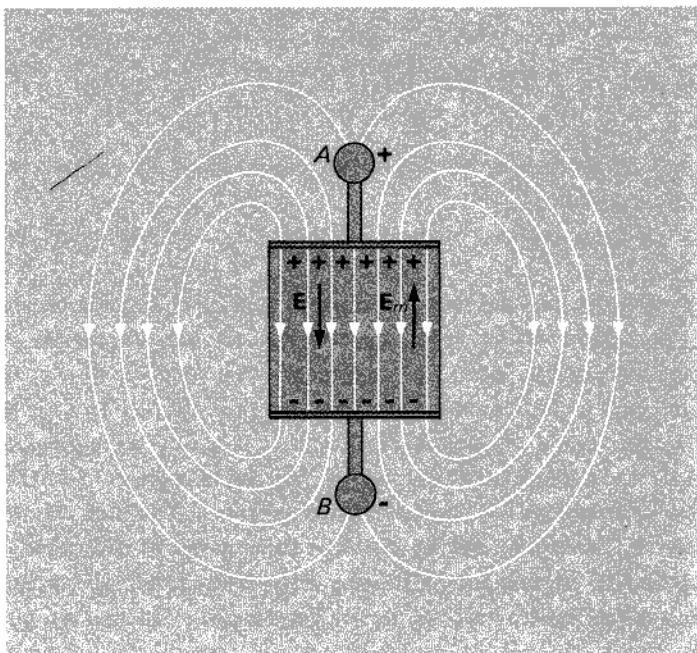


Figura 6.6

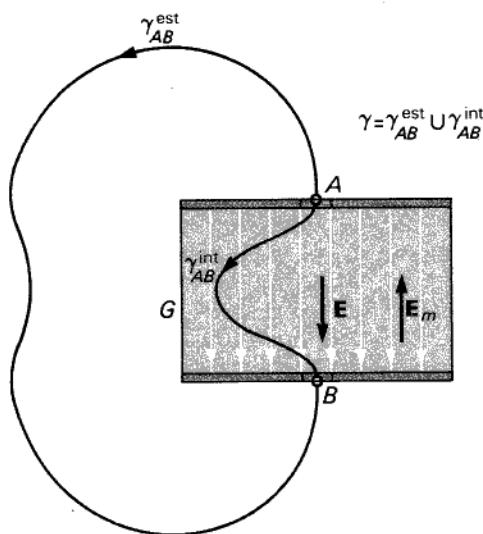


Figura 6.7

risulta, in definitiva,

$$V_{AB}^0 = \int_{\gamma_{AB}^{int}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{tdl} = - \int_{\gamma_{AB}^{int}} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{tdl} = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{tdl} = \mathcal{E},$$

ove γ è una qualunque linea chiusa coincidente, all'interno di G , con γ_{AB}^{int} , ma orientata in verso opposto a questa.

A circuito aperto la d.d.p. presente ai morsetti del generatore coincide dunque con la sua f.e.m.²¹

Si immagini ora di collegare i morsetti A e B per mezzo di un conduttore esterno C (vedi fig. 6.8). I portatori liberi di questo, soggetti all'azione del campo elettrico \mathbf{E} , si mettono in movimento, dando luogo a una corrente che modifica la distribuzione delle cariche all'interfaccia tra l'intero sistema (costituito ora anche da C) e l'ambiente esterno. Una volta raggiunto il regime stazionario, le cariche libere (supposte, per semplicità, positive) "cadono" lungo C dal punto a potenziale maggiore (in fig. 6.8, il punto A) a quello a potenziale minore (B); l'opposto invece si verifica all'interno del generatore, dove \mathbf{E}_m muove le cariche contro le forze derivanti dal campo elettrico, facendole risalire dal punto a potenziale minore a quello a potenziale maggiore. Se il mezzo conduttore contenuto nel generatore è lineare, risulta, in ogni suo punto,

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \quad [6.8.7]$$

dove g è la conducibilità elettrica entro il generatore,²² mentre nel conduttore esterno C si ha

$$\mathbf{J} = g_c \mathbf{E},$$

g_c essendo la conducibilità di C .

All'interno del generatore, in condizioni stazionarie, il campo elettromotore \mathbf{E}_m prevale su quello elettrico \mathbf{E} , cosicché

$$\mathbf{E}_m + \mathbf{E} = \eta \mathbf{J}. \quad [6.8.8]$$

Il prevalere di \mathbf{E}_m su \mathbf{E} all'interno di G dipende dalla diminuzione di potenziale imposta dal collegamento esterno tra i morsetti A e B : al limite, per conduttanza infinita di C , si avrebbe un *cortocircuito*, con conseguente differenza di potenziale nulla tra A e B e annullamento di \mathbf{E} entro il generatore.

La d.d.p. tra i morsetti A e B risulta

$$V_{AB} = V(A) - V(B) = \int_{\gamma_{AB}^{int}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{tdl},$$

²¹ Di conseguenza, se il campo elettromotore è uniforme, il valore della f.e.m. non dipende dalla linea considerata, purché essa attraversi una sola volta la regione G . Se invece il campo elettromotore non è uniforme in G , la f.e.m. può dipendere dalla particolare linea considerata. In tali casi, pur essendo il generatore aperto, nel suo interno può circolare corrente.

²² La [6.8.7] costituisce un'estensione della legge di Ohm (espressa in forma locale) al caso in cui siano presenti contemporaneamente sia il campo elettrico \mathbf{E} che quello elettromotore \mathbf{E}_m .

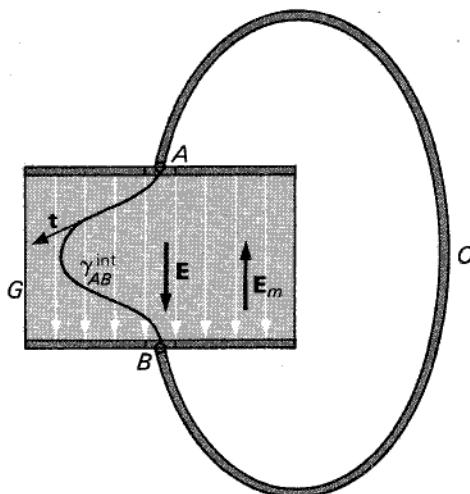


Figura 6.8

dove γ_{AB}^{int} è una qualsiasi linea congiungente *A* e *B* internamente a *G*. Dalla [6.8.8] si ha

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{J} - \mathbf{E}_m,$$

e quindi

$$V_{AB} = \int_{\gamma_{AB}^{\text{int}}} \eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} dl - \int_{\gamma_{AB}^{\text{int}}} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl = \mathcal{E} - \int_{\gamma_{AB}^{\text{int}}} \eta (-\mathbf{J}) \cdot \mathbf{t} dl. \quad [6.8.9]$$

A circuito chiuso, dunque, la d.d.p. tra i morsetti del generatore non coincide più con la sua f.e.m. Con riferimento agli orientamenti indicati nella figura 6.8, si ha $-\mathbf{J} \cdot \mathbf{t} > 0$: la d.d.p. è minore della f.e.m.

*6.9 Esempio di calcolo del campo elettrico

Possiamo ora affrontare il problema del calcolo del campo elettrico e della densità di corrente in un conduttore lineare, omogeneo e isotropo, percorso da corrente in regime stazionario.

In regime stazionario, le equazioni fondamentali per i campi \mathbf{J} e \mathbf{E} , in ogni punto appartenente a un dominio di regolarità nel conduttore, sono le seguenti:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad [6.9.1]$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad [6.9.2]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad [6.9.3]$$

dove ρ è la densità di carica di volume eventualmente presente. Alle [6.9.1]-[6.9.3], valide indipendentemente dalla natura del mezzo che si considera, si deve aggiungere una relazione costitutiva, che, per i conduttori ohmici, è del tipo

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m), \quad [6.9.4]$$

dove si è indicato con \mathbf{E}_m l'eventuale campo elettromotore presente nel mezzo.

Le [6.9.1] e [6.9.4] forniscono

$$\operatorname{div}[g(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m)] = 0; \quad [6.9.5]$$

pertanto, in ogni punto di una regione in cui la conducibilità elettrica del mezzo è costante, risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \mathbf{E}_m. \quad [6.9.6]$$

Conoscendo il campo elettromotore in tutti i punti di un mezzo omogeneo, è dunque possibile, in virtù della [6.9.6], calcolare subito $\operatorname{div} \mathbf{E}$ e, attraverso la [6.9.3], la distribuzione di cariche libere nel mezzo. Ove non vi sia campo elettromotore (oppure esso sia solenoidale), risulta

$$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

e non si hanno cariche libere. Se invece il mezzo conduttore non è omogeneo, si ha, dalla [6.9.5],

$$\operatorname{div}[g(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m)] = g \operatorname{div}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) + (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \cdot \operatorname{grad} g = 0,$$

e quindi

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) = -\frac{1}{g}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \cdot \operatorname{grad} g = -(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \cdot \operatorname{grad} \ln g,$$

ovvero

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \mathbf{E}_m - (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \cdot \operatorname{grad} \ln g. \quad [6.9.7]$$

La [6.9.7] mostra che anche in assenza di un campo elettromotore ($\mathbf{E}_m = 0$) può esservi densità di carica libera: essa è data infatti da

$$\rho = -\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \ln g. \quad [6.9.8]$$

A questo punto, non resta che servirsi della [6.9.2] e introdurre il potenziale del campo:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V;$$

tal espressione, unitamente alla [6.9.6], mostra che in tutti i punti regolari di un mezzo *omogeneo*

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = -\operatorname{div} \mathbf{E}_m,$$

e quindi

$$\nabla^2 V = \operatorname{div} \mathbf{E}_m. \quad [6.9.9]$$

In regime stazionario, come in elettrostatica, il potenziale V verifica dunque un'equazione del tipo di Poisson;²³ l'unica differenza è che il secondo membro dell'equazione è noto se si conosce, anziché una distribuzione di cariche sorgenti, la distribuzione del campo elettromotore \mathbf{E}_m .

Naturalmente, volendo integrare l'equazione di Poisson in una regione limitata, occorre specificare opportune condizioni al contorno. Come vedremo in seguito, è proprio la diversità di queste condizioni, rispetto a quelle corrispondenti del caso elettrostatico, a rendere formalmente diverse le soluzioni dei problemi relativi a correnti stazionarie.

Per illustrare un possibile modo di scrivere le condizioni al contorno, faremo riferimento a un caso abbastanza generale per poter mettere a fuoco gli aspetti principali della questione. Consideriamo perciò (vedi fig. 6.9) un generatore G delimitato dalla superficie laterale S e da due basi A e B (terminali) costituite da un mezzo dotato di elevata conducibilità elettrica g (al limite infinita). Il generatore sia chiuso su un sistema costituito da due conduttori omogenei C_1 e C_2 , caratterizzati rispettivamente da conducibilità elettriche g_1 e g_2 tali che

$$g \gg g_1 \quad \text{e} \quad g \gg g_2.$$

Siano infine S_0 la superficie di separazione tra C_1 e C_2 , S_1 e S_2 le superfici laterali di C_1 e C_2 e Ω l'ambiente isolante esterno.

Il sistema si compone dunque di sei regioni distinte: il generatore G ; gli elettrodi A e B ; il conduttore C_1 ; il conduttore C_2 ; l'ambiente esterno Ω .

Nella regione G , detto V_g il potenziale, vale per esso l'equazione

$$\nabla^2 V_g = \operatorname{div} \mathbf{E}_m; \quad [6.9.11]$$

nelle regioni A e B , supposte omogenee, per i rispettivi potenziali V_A e V_B si ha

$$\nabla^2 V_A = 0, \quad [6.9.12]$$

$$\nabla^2 V_B = 0; \quad [6.9.13]$$

analogamente, nelle regioni C_1 e C_2 (supposte omogenee) e nella regione Ω , detti rispettivamente V_1 , V_2 e V_0 i potenziali, risulta

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad [6.9.14]$$

$$\nabla^2 V_2 = 0, \quad [6.9.15]$$

$$\nabla^2 V_0 = 0. \quad [6.9.16]$$

²³ La [6.9.9] è verificata soltanto in mezzi omogenei; più in generale vale la seguente equazione:

$$\nabla^2 V + \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} (\ln g) = \operatorname{div} \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_m \cdot \operatorname{grad} (\ln g). \quad [6.9.10]$$

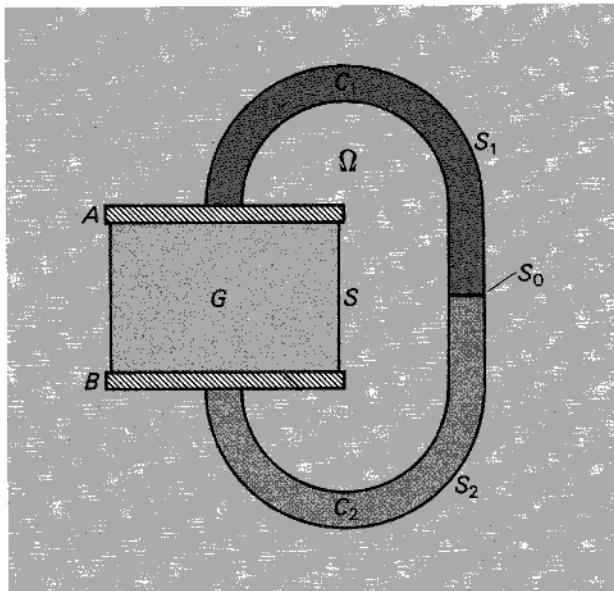


Figura 6.9

Ad ogni regione corrisponde dunque una ben precisa funzione potenziale, soluzione dell'equazione di Laplace. Le relative condizioni al contorno possono essere ricavate come segue.

Dalla stazionarietà del campo di corrente discende che in tutti i punti della superficie S_0 (che, non essendo di regolarità, *non* verificano né la [6.9.14] né la [6.9.15]) si ha

$$J_{n1} = J_{n2}, \quad [6.9.17]$$

ove J_{n1} e J_{n2} indicano le componenti normali a S_0 della densità di corrente, valutate rispettivamente dalla parte di C_1 e di C_2 . Per la legge di Ohm, valida per ciascuno dei due mezzi, dev'essere

$$J_{n1} \Big|_{S_0} = g_1 E_{n1} \Big|_{S_0} = -g_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} \Big|_{S_0},$$

$$J_{n2} \Big|_{S_0} = g_2 E_{n2} \Big|_{S_0} = -g_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} \Big|_{S_0},$$

ove E_{n1} e E_{n2} sono le componenti normali del campo elettrico e $\partial/\partial n$ le derivate normali dei potenziali. Dalla [6.9.17] si ottiene

$$g_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} \Big|_{S_0} = g_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} \Big|_{S_0}. \quad [6.9.18]$$

Alla superficie di separazione S_1 tra C_1 e Ω vale ancora la [6.9.17]. D'altra parte, essendo nulla la densità di corrente in tutti i punti di Ω , si conclude

$$J_{n1}|_{S_1} = 0,$$

e quindi

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0. \quad [6.9.19]$$

Analogamente, su S_2 risulta

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} \Big|_{S_2} = 0. \quad [6.9.20]$$

Per quel che riguarda gli elettrodi A e B , osserviamo che, dovendo risultare J di valore finito, si ha

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} E = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta J = 0.$$

Nelle regioni A e B occupate dagli elettrodi, il campo elettrico assume dunque valori molto piccoli, e si può ritenere che ciascun elettrodo sia equipotenziale.

Le precedenti condizioni [6.9.18], [6.9.19] e [6.9.20] una volta assegnati i potenziali V_A e V_B , sono sufficienti a garantire l'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace in ciascuna delle regioni C_1 e C_2 (non ne daremo peraltro la dimostrazione).

Nel caso in cui C_1 e C_2 abbiano la stessa conducibilità (quando cioè il conduttore esterno sia costituito da un unico mezzo omogeneo) la condizione al contorno [6.9.18] scompare e si ha un classico problema con condizioni al contorno miste (*problema di Dirichlet-Neumann*).

Se invece i due conduttori hanno conducibilità diversa, su S_0 si ha una discontinuità nella componente normale del campo elettrico; in base al teorema di Gauss, sui punti di tale superficie esisterà una carica distribuita con densità superficiale proporzionale alla discontinuità nella componente del campo.

Ragionando in maniera analoga, si conclude che anche sulle superfici S_1 e S_2 , all'interfaccia con lo spazio esterno, si localizzano cariche con densità superficiale proporzionale alla componente normale del campo elettrico (valutata sulla faccia esterna del conduttore).

Finora si è supposto di conoscere i potenziali V_A e V_B ; in caso contrario il problema sarebbe ben più complesso e per garantire l'unicità della soluzione occorrebbe considerare anche le condizioni al contorno sulle superfici che delimitano il generatore. La d.d.p. tra gli elettrodi è comunque generalmente nota.

6.10 Le leggi di Ohm e di Joule in forma integrale

Nel seguito mostriremo che, se due regioni equipotenziali (elettrodi), tra cui esista una d.d.p. V , vengono collegate per mezzo di conduttore lineare e isotropo, questo è sede di una corrente che verifica la relazione:

$$V=RI, \quad [6.10.1]$$

espressione, in forma integrale, della *legge di Ohm*.

La costante di proporzionalità R (*resistenza elettrica*) dipende dal materiale di cui è fatto il conduttore e dalla sua geometria, nonché dalla posizione degli elettrodi. La relativa unità di misura, nel Sistema internazionale, è l'ohm (Ω), che rappresenta la resistenza di un conduttore in cui circoli una corrente di 1 A quando esso è sottoposto a una d.d.p. di 1 V.

La [6.10.1] può essere posta nella forma equivalente:

$$I=GV, \quad [6.10.2]$$

dove G (inverso di R) è la cosiddetta *conduttanza elettrica* del conduttore; l'unità di misura di G è evidentemente (nel SI) $1/\Omega$.²⁴

Mostriamo ora che le [6.10.1] e [6.10.2] derivano dalla [6.7.4] e pertanto valgono per i soli conduttori lineari. Consideriamo, nel conduttore, un tubo di flusso filiforme del vettore \mathbf{J} (vedi fig. 6.10); ogni sezione S del tubo di flusso sia cioè tanto piccola da poter ritenere costanti su essa i vettori \mathbf{J} e \mathbf{E} (variabili, in generale, da sezione a sezione). Indicata con l un'ascissa curvilinea valutata lungo l'asse del tubo di flusso e considerata una sezione di questo, S_k , ortogonale a \mathbf{J} , si ha

$$I_k = \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} S_k = JS_k,$$

indicando con \mathbf{t} il versore della tangente all'asse del tubo di flusso (diretto come \mathbf{J}) e con J il modulo del vettore \mathbf{J} . Allora

$$V = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B \eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B \eta \frac{I_k}{S_k} dl. \quad [6.10.3]$$

L'area S_k varia in generale con l , come varia il valore della resistività (almeno se il conduttore è supposto non omogeneo): il valore di I_k è invece costante, per la definizione stessa di tubo di flusso. Si ha quindi

$$V = I_k \int_A^B \frac{\eta}{S_k} dl.$$

²⁴ Le unità di resistività e conducibilità possono allora essere riscritte, rispettivamente, come $\Omega \text{ m}$ e $1/\Omega \text{ m}$.

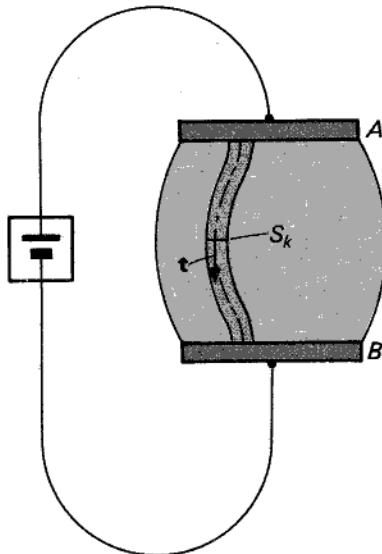


Figura 6.10

La quantità

$$R_k = \int_A^B \frac{\eta}{S_k} dl \quad [6.10.4]$$

è la *resistenza* del k -esimo tubo di flusso; scriveremo dunque

$$V_k = V = R_k I_k.$$

Queste considerazioni si possono ripetere per ognuno dei sottilissimi tubi di flusso in cui l'intero conduttore può immaginarsi suddiviso. D'altra parte, detta I la corrente che attraversa l'intera sezione, si ha²⁵

$$I = \sum_k I_k.$$

da cui segue

$$I = \sum_k \frac{V}{R_k},$$

ovvero

$$I = V \sum_k \frac{1}{R_k};$$

²⁵ Se la sezione di ciascun tubo di flusso filiforme tende a zero, il simbolo di sommatoria va sostituito con quello di integrale; nel seguito, per semplicità, continueremo a considerare il caso discreto.

ponendo

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}, \quad [6.10.5]$$

si conclude che

$$I = \frac{V}{R}. \quad [6.10.6]$$

Ciò dimostra che la legge di Ohm, in forma integrale, è una diretta conseguenza della [6.7.4].

In maniera analoga si può esprimere in forma integrale la legge di Joule. La potenza trasformata in calore, per effetto Joule, in un tratto elementare dl del k -esimo tubo di flusso filiforme è infatti

$$dP_k = \eta J_k^2 S_k dl,$$

cioè, ricordando la [6.7.8],

$$dP_k = \eta \frac{I_k^2}{S_k^2} S_k dl = \eta \frac{I_k^2}{S_k} dl.$$

La potenza P_k , dissipata nell'intero k -esimo tubo di flusso, è allora

$$P_k = \int_A^B \eta \frac{I_k^2}{S_k} dl = R_k I_k^2. \quad [6.10.7]$$

D'altra parte, essendo $V = R_k I_k$, si ha pure

$$P_k = VI_k,$$

e la potenza totale dissipata nell'intero conduttore risulta

$$P = \sum_k P_k = \sum_k VI_k = V \sum_k I_k = VI. \quad [6.10.8]$$

Di qui, per la legge di Joule,

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}. \quad [6.10.9]$$

Riprendiamo ora lo studio di un circuito costituito da un generatore, di f.e.m. \mathcal{E} , chiuso su un conduttore AB (vedi fig. 6.8). La [6.8.9] può essere riscritta, supponendo che \mathbf{J} sia uniforme nel generatore, nella forma:

$$V_{AB} = \mathcal{E} - \int_{\gamma_{AB}^{int}} \eta \frac{S\mathbf{J}}{S} \cdot \mathbf{t} dl = \mathcal{E} - I \int_{\gamma_{AB}^{int}} \frac{\eta}{S} dl,$$

ove S indica la sezione trasversale del generatore, e I la corrente in esso circolante.

Ponendo

$$R_g = \int_{\gamma_{AB}^{\text{int}}} \frac{\eta}{S} dl,$$

si ha

$$V_{AB} = \mathcal{E} - R_g I.$$

Moltiplicando ambo i membri di tale relazione per I si ottiene

$$\mathcal{E}I = V_{AB}I + R_g I^2,$$

che esprime il bilancio energetico dell'intero circuito. Infatti, ricordando la definizione di f.e.m., si riconosce subito che il termine $\mathcal{E}I$ rappresenta la potenza *erogata* dal generatore, cioè il lavoro compiuto, per unità di tempo, dal campo elettromotore agente in esso. Inoltre, il termine $V_{AB}I$ rappresenta, per la [6.10.8], la potenza dissipata nel conduttore AB per effetto Joule, e $R_g I^2$ quella dissipata all'interno del generatore. In questo caso, la potenza sviluppata dal campo elettromotore contro le forze del campo elettrico, all'interno del generatore, viene trasformata interamente in calore, per effetto Joule, nel conduttore esterno e nello stesso generatore.

Esamineremo ora alcuni interessanti esempi di calcolo della resistenza di conduttori partendo dalle equazioni del potenziale.

Esempio 1. Conduttore cilindrico percorso da corrente longitudinale

Sia dato un conduttore cilindrico C , omogeneo, avente sezione di forma generica e resistività η . Le sue estremità (parallele e normali all'asse) siano collegate a due eletrodi piani S_1 e S_2 (di resistività trascurabile rispetto a η) ai quali sia applicata una d.d.p. Assunto un sistema di coordinate cartesiane con asse z coincidente con l'asse del conduttore, la funzione potenziale V risulta indipendente da x e y . In ogni punto di C si ha allora

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

L'integrale generale di questa equazione è

$$V = Az + B,$$

[6.10.10]

con A e B costanti arbitrarie. Il campo elettrico \mathbf{E} risulta dunque uniforme e diretto secondo z ; in modulo

$$E = \left| \frac{dV}{dz} \right| = |A|;$$

di conseguenza la densità di corrente \mathbf{J} è anch'essa uniforme e diretta secondo z , e

inoltre

$$J = \frac{E}{\eta} = \frac{A}{\eta}$$

La corrente I che percorre il conduttore è dunque pari a

$$I = JS = \frac{A}{\eta} S,$$

dove S indica l'area della sezione normale del conduttore. La d.d.p. ai capi del conduttore è data dalla [6.10.10]:

$$\Delta V = |V_1 - V_2| = AL,$$

dove L è la lunghezza di C . Per definizione, si ha

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{AL}{A \frac{S}{\eta}} = \eta \frac{L}{S}, \quad [6.10.11]$$

formula molto utile per valutare la resistenza dei conduttori *filiformi* (aventi cioè sviluppo longitudinale di gran lunga maggiore della dimensione trasversale caratteristica della sezione normale).

Esempio 2. Conduttore cilindrico cavo percorso da corrente radiale

Consideriamo un conduttore cilindrico cavo, a sezione circolare, di raggio interno R_{int} ed esterno R_{est} (vedi fig. 6.11), dotato di resistività η . Supponiamo che la superficie interna S_{int} e quella esterna S_{est} siano costituite da due elettrodi (dotati di

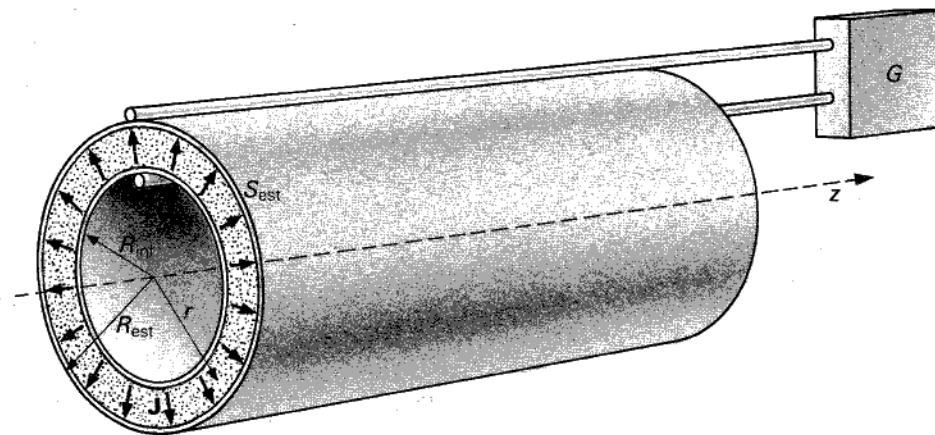


Figura 6.11

resistività molto minore di η) tra cui vi sia una d.d.p. V . Per simmetria, V dipende soltanto dalla coordinata radiale r .

L'equazione di Laplace assume allora la forma

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0. \quad [6.10.12]$$

Posto

$$\varphi(r) = \frac{dV}{dr}, \quad [6.10.13]$$

la [6.10.12] diventa

$$\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r} \varphi = 0,$$

il cui integrale generale è

$$\varphi = \frac{A}{r},$$

con A costante arbitraria. Sostituendo tale espressione nella [6.10.13], si ottiene l'integrale generale della [6.10.12] nella forma

$$V = A \ln r + B, \quad [6.10.14]$$

con A e B costanti arbitrarie. Il campo elettrico, anch'esso diretto radialmente, ha modulo

$$E = \left| \frac{dV}{dr} \right| = \frac{|A|}{r};$$

direzione radiale ha pure la densità di corrente \mathbf{J} , di modulo

$$J = \frac{1}{\eta} E = \frac{1}{\eta} \frac{|A|}{r}.$$

La corrente totale che attraversa una qualunque superficie cilindrica di raggio r , coassiale con le superfici S_{int} e S_{est} , sarà

$$I = 2\pi r L J = 2\pi r L \frac{1}{\eta} \frac{|A|}{r} = \frac{1}{\eta} 2\pi L |A|,$$

dove L indica la lunghezza del conduttore.

La d.d.p. V agli elettrodi, dalla [6.10.14], risulta

$$V = |A| \ln \frac{R_{est}}{R_{int}}.$$

Infine, la resistenza del conduttore è, in queste condizioni,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{|A| \ln \frac{R_{\text{est}}}{R_{\text{int}}}}{\frac{1}{\eta} 2\pi L |A|} = \eta \frac{\ln \frac{R_{\text{est}}}{R_{\text{int}}}}{2\pi L}, \quad [6.10.15]$$

espressione molto utile, ad esempio, quando si voglia calcolare la cosiddetta *resistenza di isolamento* di un cavo coassiale.

6.11 Resistori in serie e in parallelo

Nel caso di resistori in serie (vedi fig. 6.12), per la solenoidalità del vettore densità di corrente, la corrente I ha lo stesso valore in tutti i resistori. E' pure evidente che la d.d.p. V_{AB} , applicata agli estremi A e B della catena, è pari alla somma delle d.d.p. V_k (con $k = 1, 2, \dots, N$) esistenti ai capi dei singoli resistori. Si ha cioè

$$V_{AB} = \sum_{k=1}^N V_k.$$

Poiché per ciascun resistore è

$$V_k = R_k I,$$

dove R_k è la resistenza del k -esimo resistore, si conclude che

$$V_{AB} = \sum_{k=1}^N R_k I.$$

Ciò significa che una catena di resistori in serie si comporta come un unico resistore

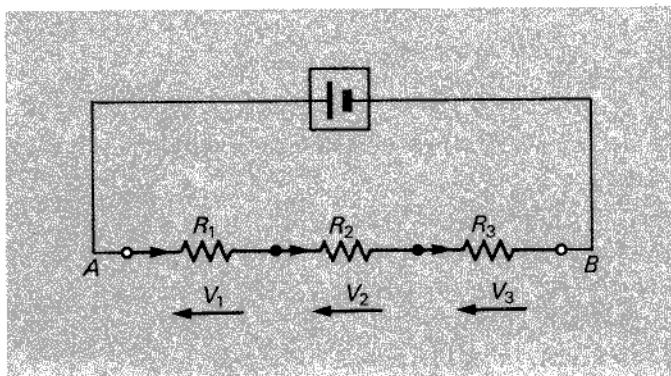


Figura 6.12
Resistori in serie.

di resistenza R_{eq} pari a

$$R_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N R_k. \quad [6.11.1]$$

Nel caso dei resistori in parallelo (vedi fig. 6.13), dalla solenoidalità del vettore densità di corrente discende

$$I = \sum_{k=1}^N I_k,$$

avendo indicato con I_k la corrente che percorre il k -esimo resistore e con I quella che entra dal morsetto A (ed esce da B). D'altra parte, per la irrotationalità del campo elettrico, le d.d.p. applicate ai vari resistori sono uguali tra loro e uguali, in particolare, alla d.d.p. V_{AB} . Essendo infine

$$V_k = R_k I_k = V_{AB},$$

si conclude agevolmente

$$I = \sum_{k=1}^N I_k = \sum_{k=1}^N \frac{V_{AB}}{R_k} = V_{AB} \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}.$$

Ciò significa che un sistema di N resistori connessi in parallelo risulta equivalente a un unico resistore, di resistenza R_{eq} data da

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}. \quad [6.11.2]$$

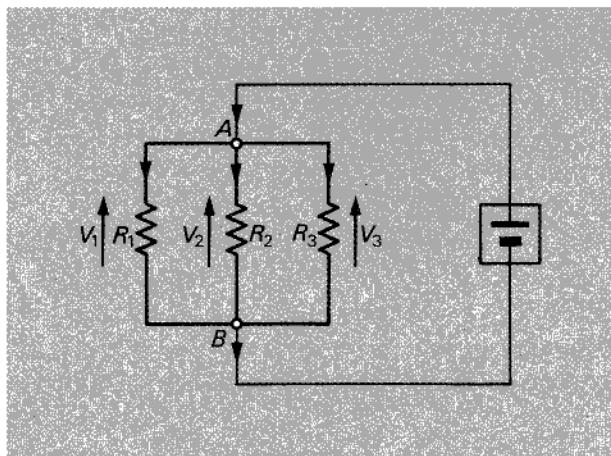


Figura 6.13
Resistori in parallelo.

6.12 Esempi di generazione di forza elettromotrice

Alcuni esempi serviranno a chiarire meglio l'origine e la natura delle forze elettromotrici.

Esempio 1. La pila

La cosiddetta *pila di Volta* è un dispositivo che consente la conversione di energia chimica in energia elettrica; essa consiste essenzialmente in due elettrodi metallici immersi in una opportuna soluzione. Esistono attualmente numerosissimi tipi di pile voltaiche, che forniscono forze elettromotrici comprese generalmente tra 1 e 2 V.

A titolo di esempio, consideriamo la *pila Weston*: in pratica, un tubo di vetro a forma di H (vedi fig. 6.14) contenente una soluzione acquosa di CdSO_4 (solfato di cadmio). Gli elettrodi sono costituiti in parte di mercurio, in parte di un amalgama (soluzione) di cadmio in mercurio. Sopra il mercurio vengono posti alcuni cristalli di Hg_2SO_4 , poco solubili in acqua. Agli elettrodi giungono, attraverso il vetro, due fili metallici, atti a connettere la pila a un eventuale circuito esterno. Se misuriamo la differenza di potenziale tra gli elettrodi a circuito aperto, troviamo che essa è diversa da zero, con l'elettrodo di Hg a potenziale maggiore rispetto all'altro. Infatti gli ioni

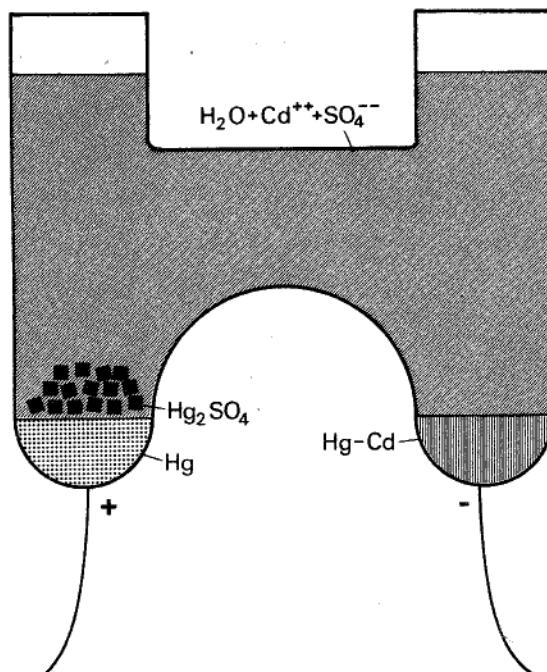


Figura 6.14
Pila Weston.

di cadmio Cd^{++} (atomi di Cd privati di due elettroni) hanno la tendenza a passare dall'amalgama Cd-Hg nella soluzione di CdSO_4 (la spiegazione del fenomeno esula dagli scopi di questa trattazione). Per ogni ione di cadmio che abbandona l'elettrodo di amalgama, questo rimane con due elettroni in eccesso e pertanto si carica sempre più negativamente rispetto alla soluzione elettrolitica. Gli ioni positivi Cd^{++} , per sfuggire all'amalgama, devono vincere una forza elettrostatica crescente che si oppone al loro passaggio in soluzione. Quando questa forza arriva a uguagliare la forza (di natura chimica) tendente a far loro abbandonare l'amalgama, il moto di ioni Cd^{++} verso la soluzione cessa. In queste condizioni, l'elettrodo di amalgama risulta carico negativamente rispetto alla soluzione, e tra i due mezzi esiste una differenza di potenziale.

Le forze non conservative di origine chimica agiscono in corrispondenza della superficie di separazione fra l'elettrodo e la soluzione. Pertanto, in un sottile strato, vicino a tale superficie, su ogni portatore di carica (cioè su ogni ione Cd^{++}) agisce il campo di forze \mathbf{F}_m . Dividendo la forza per la carica del portatore su cui agisce (pari, in valore assoluto, a due cariche elettroniche), si ottiene il campo elettromotore:

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{q}. \quad [6.12.1]$$

In condizioni di equilibrio, a circuito aperto, quando cioè l'elettrodo si è caricato negativamente al punto da impedire il passaggio di altri portatori Cd^{++} in soluzione, si è stabilito nello strato un campo elettrostatico \mathbf{E} tale che

$$\mathbf{E}_m + \mathbf{E} = 0. \quad [6.12.2]$$

Processi analoghi si verificano in corrispondenza della superficie di separazione soluzione-elettrodo di Hg. Qui gli ioni Hg^+ , presenti nella soluzione per dissociazione²⁶ dell' Hg_2SO_4 , hanno la tendenza a passare dalla soluzione all'elettrodo di Hg. Tale passaggio si arresta quando le forze elettrostatiche, dovute alla carica positiva che l'elettrodo acquista rispetto alla soluzione, bilanciano le forze che spingono gli Hg^+ a entrare nell'elettrodo. Come si è detto, a circuito aperto, tra i morsetti della pila si misura una differenza di potenziale uguale in valore alla forza elettromotrice di essa.²⁷

Per meglio illustrare il funzionamento del dispositivo, riportiamo su un grafico (vedi fig. 6.15) l'andamento del potenziale, entro la pila, a morsetti aperti. Se si chiude il circuito, inserendo tra i morsetti della pila un conduttore (vedi fig. 6.16), in esso fluirà corrente. Consideriamo il funzionamento della pila in questa nuova situazione. Gli elettroni presenti in eccesso nell'amalgama Cd-Hg fluiscano verso l'elettrodo positivo di Hg, attraverso il conduttore, sotto l'azione del campo elettrico ivi esistente. Di conseguenza, l'equilibrio alla superficie soluzione-elettrodo di amal-

²⁶ La funzione dei cristalli di Hg_2SO_4 posti sopra l'elettrodo di Hg è appunto quella di rifornire continuamente la soluzione di ioni Hg^+ e SO_4^{2-} .

²⁷ Questa è a sua volta somma delle due f.e.m. che si manifestano in corrispondenza delle interfacce soluzione-elettrodo.

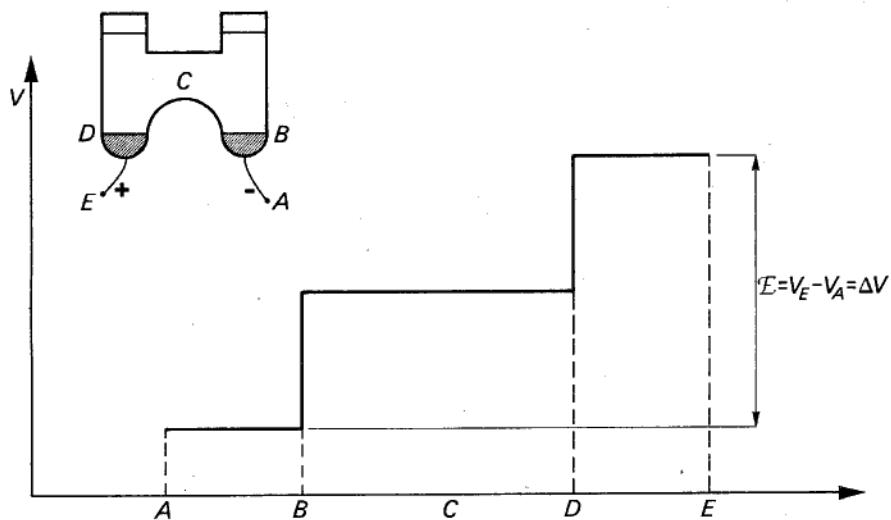


Figura 6.15

gama è turbato, in quanto il campo elettrostatico in questa regione tende a diminuire. Le forze chimiche provocano il passaggio di altri ioni Cd^{++} in soluzione, e nuovi elettronni vengono forniti all'elettrodo di amalgama a sostituire quelli che continuamente lo abbandonano. Analogamente, in corrispondenza dell'elettrodo di Hg , cui affluiscono elettroni attraverso il conduttore esterno, le forze chimiche tendono a prevalere su quelle elettrostatiche e gli ioni Hg^+ continuano a passare dalla soluzione

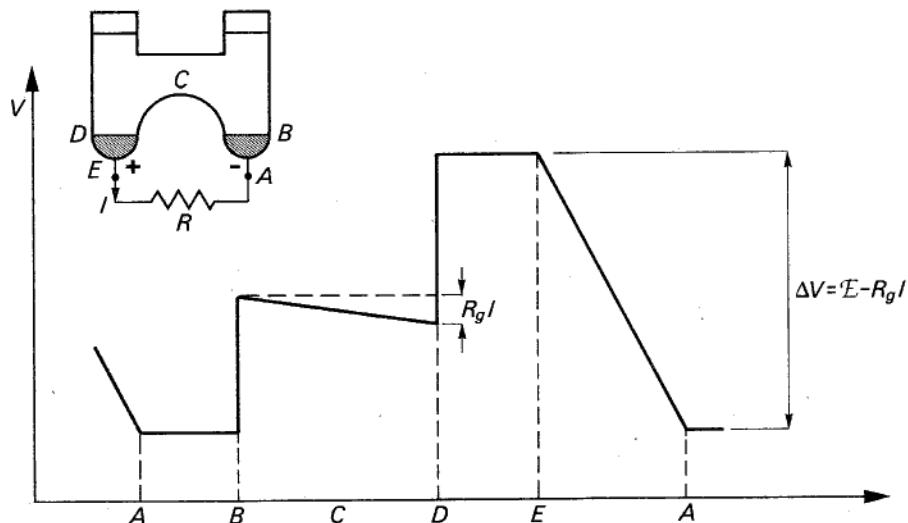


Figura 6.16

all'elettrodo, dove si combinano ciascuno con un elettrone trasformandosi in atomi (neutri) di Hg. Si stabilisce così un flusso continuo di cariche, e nel circuito nasce una corrente elettrica. Nel conduttore esterno, la carica è trasportata da elettroni; attraverso la superficie elettrodo-soluzione, da ioni Cd⁺⁺ e ioni Hg⁺; entro l'elettrolita, da ioni Cd⁺⁺ e ioni SO₄⁻, che migrano attraverso la soluzione.

Il risultato finale di ciò che avviene al confine tra elettrodi e soluzione è la sottrazione di elettroni da atomi di Cd (ossidazione del Cd) e l'aggiunta di elettroni ad atomi di Hg (riduzione del Hg). Nella figura 6.16 è riportato l'andamento del potenziale lungo il circuito. Osserviamo che i vari punti della soluzione non sono più allo stesso potenziale, come avveniva a circuito aperto: si riscontra ora una differenza di potenziale $R_g I$ dovuta al fatto che la soluzione possiede una resistività non nulla (corrispondente a una *resistenza interna*, R_g , della pila). Il lavoro necessario per muovere gli ioni attraverso la soluzione deve essere fornito dalle forze di origine chimica; la parte rimanente del lavoro di tali forze viene utilizzata nel condurre e ivi dissipata in calore. La differenza di potenziale $V = V_+ - V_-$ tra i morsetti della pila non è più, come avveniva a circuito aperto, uguale alla forza elettromotrice, ma risulta più piccola di essa, a causa della *caduta di potenziale* entro la soluzione. I processi che avvengono entro la pila sono reversibili. Se, ad esempio, nel circuito si inserisce un altro generatore, avente forza elettromotrice maggiore di E , e tale da far circolare corrente in verso opposto, la pila viene attraversata da una corrente che procede internamente dall'elettrodo di Hg a quello di amalgama. In tal caso i processi sopra descritti si invertono: ioni Cd⁺⁺ passano dalla soluzione all'amalgama, mentre ioni Hg passano dall'elettrodo di Hg alla soluzione e così via.

Esempio 2. Il disco di Nichols

Un disco metallico viene fatto ruotare con velocità angolare costante attorno a un asse perpendicolare al suo piano e passante per il centro (vedi oltre, fig. 9.3). Gli elettroni di conduzione (elettroni liberi) del metallo, sotto l'azione della forza centrifuga, tendono a portarsi verso il bordo del disco.²⁸ Addensandosi ivi la carica negativa, si stabilisce un campo elettrostatico, diretto dal centro del disco verso il bordo, che esercita sugli elettroni una forza opposta a quella centrifuga. Il moto radiale degli elettroni cessa quando la forza elettrostatica equilibra quella centrifuga. Tra il centro e il bordo, in queste condizioni, si può misurare una differenza di potenziale che si mantiene finché dura la rotazione del disco. Il disco è un generatore di forza elettromotrice e le forze di natura non elettrica che in esso agiscono sui portatori di carica sono le forze centrifughe; la sua f.e.m. uguaglia la differenza di poten-

²⁸ Se gli elettroni di conduzione fossero completamente liberi di muoversi entro il disco metallico, come un gas rarefatto entro un recipiente, non parteciperebbero del moto di rotazione del disco e non sarebbero soggetti alla forza centrifuga. In realtà, essi sono immersi in un reticolo cristallino costituito da ioni positivi con cui interagiscono continuamente (si può pensare a una successione di urti). E' a causa di questa interazione che essi vengono trascinati dal reticolo nel moto rotatorio.

ziale esistente tra centro e bordo a circuito aperto (cioè quando centro e bordo non sono collegati mediante un conduttore esterno).

Possiamo calcolare tale forza elettromotrice. Sia a il raggio del disco e ω la sua velocità angolare; consideriamo un elettrone di conduzione in un punto del disco a distanza r dal centro e indichiamone con $-e$ la carica e con m_e la massa. In condizioni di equilibrio tra forza centrifuga e forza elettrostatica, si ha

$$m_e \omega^2 r - e E = 0, \quad [6.12.3]$$

da cui si ricava l'andamento del campo elettrostatico in funzione del raggio:

$$E = \frac{m_e}{e} \omega^2 r. \quad [6.12.4]$$

Poiché il campo elettrostatico deve equilibrare il campo elettromotore E_m punto per punto, si ottiene

$$E_m = -E = -\frac{m_e}{e} \omega^2 r. \quad [6.12.5]$$

La forza elettromotrice è perciò

$$E = \int_{\gamma_{CB}} E_m \cdot d\mathbf{l} = \int_0^a \left(-\frac{m_e}{e} \omega^2 r \right) \cdot dr = \frac{1}{2} \frac{m_e}{e} \omega^2 a^2. \quad [6.12.6]$$

Come cammino di integrazione γ_{CB} tra centro C e bordo B del disco si è scelto per comodità un raggio (a circuito aperto, per il calcolo di E , i cammini sono equivalenti, purché interni al disco).

Immaginiamo ora che si riesca, con tecnica opportuna, a trasferire elettroni nel centro del disco (trasportandoli esternamente ad esso) dopo averli prelevati dal bordo. Se questa operazione avviene con continuità, si stabilisce un moto continuo di elettroni: esternamente al disco, dal bordo verso il centro; internamente, per ripristinare l'equilibrio, nel verso opposto. In effetti, il trasferimento di cariche dalla periferia al centro turba l'equilibrio tra forza centrifuga e forza elettrostatica a favore della prima. Per trasferire gli elettroni colleghiamo la periferia al centro con un filo metallico avente resistenza R , facendo sì, però, che esso non ruoti solidalmente con il disco, ma rimanga fermo: ciò si ottiene mediante due contatti striscianti (vedi oltre, fig. 9.3). Sugli elettroni di conduzione del filo agisce soltanto un campo elettrico (presente ovviamente anche all'esterno del filo) e non più un campo elettromotore. Non più soggetti a forze opposte che si equilibrano, essi si mantengono in moto: il flusso viene alimentato e gli elettroni tornano tramite il circuito esterno dal bordo del disco al centro.

Anche qui, come accade nel caso della pila, quando fluisce corrente non si ha più egualianza tra forza elettromotrice E e differenza di potenziale $\Delta V = V_C - V_B$ tra i

morsetti (centro e bordo) del generatore. Si ha piuttosto

$$\Delta V = \mathcal{E} - R_0 I, \quad [6.12.7]$$

dove R_0 è la resistenza interna del disco. Nel caso del disco di Nichols, le forze responsabili del moto dei portatori di carica sono di natura meccanica. La potenza elettrica spesa per far circolare la corrente è

$$P = \mathcal{E} I = I \Delta V + R_0 I^2 = (R + R_0) I^2. \quad [6.12.8]$$

Essa deve essere fornita dal dispositivo che mantiene in moto il disco: ad esempio, da un motore. Se il motore cessa di funzionare il disco si arresta anche in assenza di attriti. Possiamo calcolare la potenza meccanica fornita dal motore per mantenere in moto il disco, e confrontarla con l'espressione [6.12.8] della potenza elettrica. Se \mathbf{M} è il momento della quantità di moto del disco e Γ è la coppia motrice esercitata dal motore, risulta

$$\Gamma = \frac{d\mathbf{M}}{dt}. \quad [6.12.9]$$

Al primo membro di tale relazione bisognerebbe introdurre anche le eventuali coppie resistenti: ma nel nostro caso esse sono nulle, perché si suppongono trascurabili gli attriti meccanici di qualsiasi tipo. Si può pensare che il momento della quantità di moto del disco sia dovuta a due contributi: quello \mathbf{M}_r del reticolo cristallino e quello \mathbf{M}_e degli elettroni liberi. Soltanto quest'ultimo varia nel tempo ed è quindi l'unico da considerare. Passando dal centro alla periferia, il momento della quantità di moto di ogni elettrone varia da zero a $m_e \omega a^2$; detto dn il numero di elettroni che compiono tale percorso in un tempo dt , si ha,

$$dM_e = m_e \omega a^2 dn, \quad [6.12.10]$$

e quindi

$$\Gamma = m_e \omega a^2 \frac{dn}{dt}. \quad [6.12.11]$$

Ricordiamo che la potenza meccanica \dot{W} è legata alla coppia, in un sistema rigido rotante, dalla relazione

$$\dot{W} = \Gamma \omega. \quad [6.12.12]$$

Si ottiene allora, per la [6.12.11],

$$\dot{W} = m_e \omega^2 a^2 \frac{dn}{dt}. \quad [6.12.13]$$

Trasformiamo tale relazione in un'espressione in cui compaiano le grandezze elettriche relative al circuito considerato, per stabilire un confronto con la [6.12.8].

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_e}{e} \omega^2 a^2;$$

[6.12.14]

la [6.12.13] diventa, quindi,

$$\dot{W} = 2Ee \frac{dn}{dt}. \quad [6.12.15]$$

Poiché

$$I = \frac{dq}{dt},$$

ed è $dq = edn$, si ha

$$\dot{W} = 2EI. \quad [6.12.16]$$

Confrontando la [6.12.16] con la [6.12.8], si constata che la potenza fornita dal motore per mantenere il disco in rotazione è maggiore (doppia) di quella trasformata in potenza elettrica. Il risultato, a prima vista sorprendente, si spiega tenendo presente che il contatto tra il filo e il bordo del disco è strisciante, cioè formato da un elettrodo (*spazzola*), collegato con il filo e di opportuno materiale conduttore, che striscia sul bordo del disco. All'uscita del disco, ciascun elettrone, entrando attraverso la spazzola nel filo, avrà, a causa della rotazione, una velocità tangenziale ωa . A tale velocità corrisponde un'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m_e \omega^2 a^2. \quad [6.12.17]$$

Per dn elettroni che fluiscono attraverso il contatto in un tempo dt , l'energia cinetica corrispondente alla velocità tangenziale è

$$dT = \frac{1}{2} m_e \omega^2 a^2 dn, \quad [6.12.18]$$

e la potenza corrispondente

$$\dot{W}_{\text{diss}} = \frac{1}{2} m_e \omega^2 a^2 \frac{dn}{dt}. \quad [6.12.19]$$

Tale potenza viene *dissipata* in calore in corrispondenza del contatto strisciante, quando gli elettroni cedono al reticolo del filo fermo (in cui entrano) l'energia cinetica corrispondente alla loro velocità tangenziale. La parte di potenza meccanica trasformata in potenza elettrica è quindi

$$\dot{W} - \dot{W}_{\text{diss}} = \frac{1}{2} m_e \omega^2 a^2 \frac{dn}{dt} = EI,$$

in accordo con la [6.12.8].

Il disco di Nichols non può tuttavia essere utilizzato nella pratica, poiché la forza elettromotrice ottenuta è tanto piccola che risulta assai difficile poterla misurare. Ad esempio, con $a = 10 \text{ cm}$ e $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$, la differenza di potenziale (a circuito aperto) è $V = E = 3 \times 10^{-10} \text{ V}$. Con l'esperienza del disco si può tuttavia, mediante sistemi piuttosto sensibili e perfezionati, ottenere una misura del rapporto e/m_e .

6.13 Un modello del processo di conduzione nei conduttori ohmici

Presentiamo ora un modello del processo di conduzione che rende ragione della validità della legge e descrive in modo soddisfacente ciò che avviene in molti tipi di conduttori, in particolare quelli metallici.

Consideriamo un conduttore metallico omogeneo. Come sappiamo, in esso esiste un gran numero di elettroni che si muovono interagendo continuamente con gli ioni del reticolo cristallino del corpo. La distanza media tra le particelle è molto grande rispetto alle loro dimensioni, e pertanto ciascun elettrone per la maggior parte del tempo non è in interazione diretta, cioè in urto, con le altre particelle. Di conseguenza, un generico elettrone, a partire da un istante $t=0$, si muove di moto rettilineo uniforme con una certa velocità u fino a quando non subisce una nuova collisione.²⁹ Durante la collisione le particelle scambiano energia cinetica e quantità di moto e la velocità del portatore muta in modulo, direzione e verso, più o meno drasticamente a seconda della natura dell'urto. La nuova velocità si mantiene costante finché un secondo urto ne provoca la variazione. Dopo un numero sufficiente di urti, in media dopo un certo *tempo caratteristico* τ , la velocità del portatore non è più correlata in alcun modo alla velocità u iniziale.

La perdita di correlazione si può verificare solo dopo parecchi urti, se questi comportano mediamente una piccola variazione della quantità di moto, oppure dopo pochi urti, se a ciascuno corrisponde una forte variazione della quantità di moto. Al limite, può avvenire anche dopo un urto solo, come nel caso di collisione tra sfere perfettamente elastiche. Il tempo caratteristico τ (legato alla natura del portatore e del mezzo in cui esso si trova) è insomma tanto minore quanto più frequenti sono le sollecitazioni e quanto più forte è la variazione media di quantità di moto in un singolo urto. Nel seguito, per semplicità, supporremo che la correlazione vada perduta con un singolo urto: τ sarà dunque il tempo che intercorre, in media, tra un urto e il successivo.

Immaginiamo ora di applicare un campo elettrico E . La forza che agisce su ciascun elettrone è pari a $-eE$. Se la quantità di moto di un portatore, subito dopo l'urto (all'istante $t=0$), è pari a mu , nell'istante t essa è uguale a $mu - eEt$. Poiché, però,

²⁹ Con questo termine non si intende un urto meccanico vero e proprio, ma piuttosto l'interazione tra due particelle quando si avvicinino al punto da esercitare l'una sull'altra forze non trascurabili.

in seguito all'urto l'elettrone perde ogni "ricordo" della sua velocità precedente, gli incrementi di quantità di moto dovuti al campo, tra un urto e il successivo, non si sommano, ma vanno perduti in corrispondenza di ogni collisione. Durante gli urti, gli elettroni cedono cioè al reticolo cristallino l'energia cinetica acquisita sotto l'azione del campo, accrescendo l'energia cinetica degli ioni del reticolo, e aumentandone con ciò l'agitazione termica. In conclusione, l'energia ceduta dal campo agli elettroni si ritrova sotto forma di calore: è questo, il meccanismo dell'effetto Joule.

Analizziamo ora in maggior dettaglio il modello, chiedendoci quale sia, in un generico istante, il valore medio della quantità di moto degli elettroni contenuti in un volumetto $\Delta\Omega$. Immaginiamo di "fotografare" la situazione al generico istante t e di sapere ricostruire la storia di ciascun elettrone negli istanti precedenti; indichiamo con \mathbf{u}_i la velocità che il portatore i -esimo possedeva immediatamente dopo l'ultimo urto prima di t e con t_i il tempo trascorso da quell'urto fino all'istante considerato.

Indicando ora con $\bar{\mathbf{v}}$ la velocità media degli elettroni contenuti in $\Delta\Omega$ all'istante t , si ha

$$m\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m\mathbf{u}_i - e\mathbf{E}t_i), \quad [6.13.1]$$

dove n indica il numero totale di elettroni contenuti in $\Delta\Omega$.

Come si è detto, i portatori perdono dopo ciascun urto ogni memoria della loro velocità precedente; di conseguenza le velocità \mathbf{u}_i sono distribuite in modo completamente casuale tra gli n elettroni contenuti in $\Delta\Omega$. Si ha allora

$$\sum_{i=1}^n m\mathbf{u}_i = 0, \quad [6.13.2]$$

e quindi

$$m\bar{\mathbf{v}} = -\frac{e}{n} \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{E}. \quad [6.13.3]$$

Il termine

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

è, per definizione, il valor medio dei tempi trascorsi dall'ultimo urto e risulta pari al tempo medio τ intercorrente tra un urto e il successivo (che a sua volta, nelle nostre ipotesi, rappresenta il tempo necessario per far perdere al portatore ogni memoria dell'urto precedente).

Ponendo quindi

$$\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad [6.13.4]$$

si ha

$$m\bar{v} = -eE\tau. \quad [6.13.5]$$

Nell'ipotesi che il valore di τ sia indipendente da E , la formula precedente mostra che gli elettroni contenuti in $\Delta\Omega$ acquistano mediamente, sotto l'azione di E , una velocità \bar{v} proporzionale a E .

Il moto dei portatori è dunque, in media, rettilineo uniforme nella direzione di E .³⁰ Ogni portatore, tra un urto e l'altro, viene accelerato nella direzione del campo, ma perde bruscamente la velocità acquistata all'atto dell'urto successivo. La \bar{v} prende il nome di *velocità di deriva*, ed è in genere molto piccola in modulo rispetto a \bar{u} , media dei moduli delle velocità di agitazione termica.

Il rapporto

$$\mu = \frac{|\bar{v}|}{E} \quad [6.13.6]$$

indica la *mobilità* dei portatori nel conduttore in esame. Ricordando infine che la densità di corrente J , nel nostro conduttore metallico, è per definizione

$$J = \rho \bar{v},$$

(dove ρ è la densità di carica di volume) si ha

$$J = -\frac{en}{\Delta\Omega} \bar{v} = e^2 \frac{N\tau}{m} E, \quad [6.13.7]$$

ove $N = n/\Delta\Omega$ è la densità dei portatori.

La [6.13.7] è una relazione di proporzionalità tra J e E , e dà conto quindi della legge di Ohm. La costante di proporzionalità

$$g = e^2 \frac{N}{m} \tau \quad [6.13.8]$$

è la conducibilità elettrica del mezzo.

La teoria esaminata in questo paragrafo non è sempre applicabile. Una prima limitazione riguarda l'intensità del campo elettrico. Infatti, se questo è sufficientemente intenso da far acquistare ai portatori di carica, fra un urto e il successivo, una velocità addizionale comparabile a quella di agitazione termica, il tempo medio tra una collisione e l'altra non è, come supposto, indipendente dal campo, ma è funzione dell'intensità di quest'ultimo. Di conseguenza le [6.13.3] e [6.13.7] perdono il carattere di linearità e la legge di Ohm non è più verificata. Il valore del campo al di sopra del quale occorre tener conto della dipendenza di τ da E dipende dal mezzo considerato e dal cammino libero medio dei portatori entro di esso. Nei gas ionizzati a

³⁰ Tale conclusione è ben diversa da quella cui si perverrebbe se gli elettroni *non* subissero collisioni con gli ioni del reticolo: in tal caso la velocità degli elettroni, sotto l'azione del campo E , crescerebbe linearmente nel tempo e la [6.13.5] non sarebbe valida.

bassa pressione, ad esempio, il cammino libero è molto lungo e perciò, già per campi piuttosto deboli, essi non seguono più la legge di Ohm. Nei metalli, invece, sono necessari campi molto intensi perché si possano osservare deviazioni da tale legge. Nei gas, infine, se il campo elettrico è molto intenso, si verifica il fenomeno della scarica elettrica, che sostanzialmente si riduce a un violento passaggio di corrente. In questo caso i portatori di carica presenti (vi è sempre qualche atomo ionizzato nei gas, anche in condizioni normali) acquistano dal campo, prima dell'urto con un atomo (o con una molecola), un'energia cinetica tanto elevata da poter ionizzare (privare cioè di un elettrone) l'atomo con cui successivamente collidono, creando così nuovi portatori di carica; questi, a loro volta, acquistano energia sufficiente per ripetere il processo, e così via. I portatori si moltiplicano a valanga e la corrente cresce rapidamente sino a valori molto elevati: in questi casi, evidentemente, la legge di Ohm non è più applicabile.

La teoria sviluppata non è certamente valida quando il campo elettrico, anziché essere costante nel tempo, muta rapidamente. Più precisamente, la teoria cade in difetto quando E varia su una scala di tempi comparabili o inferiori a quello tra due urti consecutivi. Tale tempo caratteristico è però molto piccolo: per un gas ionizzato, in condizioni di temperatura e pressioni normali, risulta dell'ordine di 10^{-10} s per gli ioni, e ancora minore per gli elettroni: per gli elettroni di conduzione di un metallo a temperatura ambiente è dell'ordine di 10^{-14} s. Questi tempi sono evidentemente brevissimi; la teoria svolta può dunque essere applicata anche per campi variabili rapidamente nel tempo. Essa non è valida invece, ad esempio, per i campi associati a onde elettromagnetiche di frequenza molto elevata (raggi X, raggi γ).

Riprendendo in esame i metalli che seguono la legge di Ohm, non sarebbe difficile mostrare, in particolare, che l'ipotesi precedente (che le distanze tra le particelle siano tanto grandi da poter supporre che l'elettrone non risenta della loro influenza, se non durante gli urti con gli ioni del reticolo) è priva di fondamento. Ciò implica l'impossibilità di far uso delle leggi della meccanica classica nell'interpretazione dei fenomeni in oggetto: in effetti, per analizzare correttamente il moto degli elettroni nei metalli è necessario ricorrere alle leggi della meccanica quantistica. Senza addentrarci nell'argomento, riporteremo ora alcune conclusioni di tale studio.

Un risultato è a prima vista sorprendente: in un reticolo metallico ideale, cioè in una successione regolare, periodica, di ioni positivi, un elettrone si muove *senza subire alcuna collisione*; il suo tempo caratteristico è, cioè, infinito. Ciò significa che, in un metallo ideale, la conduttività è pure infinita (per la [6.13.8]) e la resistività nulla. In realtà il reticolo del metallo non è perfettamente periodico, bensì affetto da imperfezioni di varia natura. Ad esempio, alcune posizioni reticolari possono essere non occupate, oppure possono essere occupate posizioni non facenti parte del reticolo; vi possono essere slittamenti di parte del reticolo rispetto al resto (*dislocazioni*); il materiale, inoltre, è in generale policristallino e le superfici delimitanti i singoli cristalli sono luoghi in cui viene interrotta la periodicità del reticolo. Infine, possono esservi, nel metallo, varie impurità, cioè atomi estranei inseriti nel reticolo. A queste imperfezioni si aggiunge il fatto che gli ioni non sono fissi nelle rispettive posizioni reticolari,

ma si muovono attorno ad esse per effetto dell'agitazione termica. Per tutti questi motivi, il reticolo, anche senza imperfezioni geometriche e senza impurità, non risulta perfettamente "trasparente" agli elettroni, come lo sarebbe se mancasse l'agitazione termica.

Nei metalli puri il maggior contributo alla resistività è dato, alle normali temperature, proprio dall'agitazione termica del reticolo. E' chiaro che quanto più essa è forte, cioè quanto più elevata è la temperatura, tanto minore risulta τ e quindi tanto più bassa la conducibilità. La conducibilità dei metalli diminuisce dunque al crescere della temperatura; si potrebbe anzi dimostrare che essa varia inversamente alla temperatura, in accordo con le rilevazioni sperimentali (vedi Esperienze illustrate, p. 247). Il modello quantistico mostra inoltre che la resistività cresce se si dissolvono le impurità nel metallo e che dunque la resistività di una lega risulta sempre maggiore di quella del metallo componente di resistività più bassa: conclusione anch'essa confermata dall'esperienza.

Esperienze illustrate

1. Diodo a vuoto

Un semplice dispositivo che consente di evidenziare il movimento di cariche associate alla circolazione di una corrente è quello rappresentato nella figura 6.17. Un filamento conduttore c (*catodo*) viene opportunamente riscaldato (fino all'incandescenza), in maniera indiretta, dal calore che si produce, per effetto Joule, in una resistenza R alimentata dalla pila E_1 . Del dispositivo fa parte, inoltre, un elettrodo

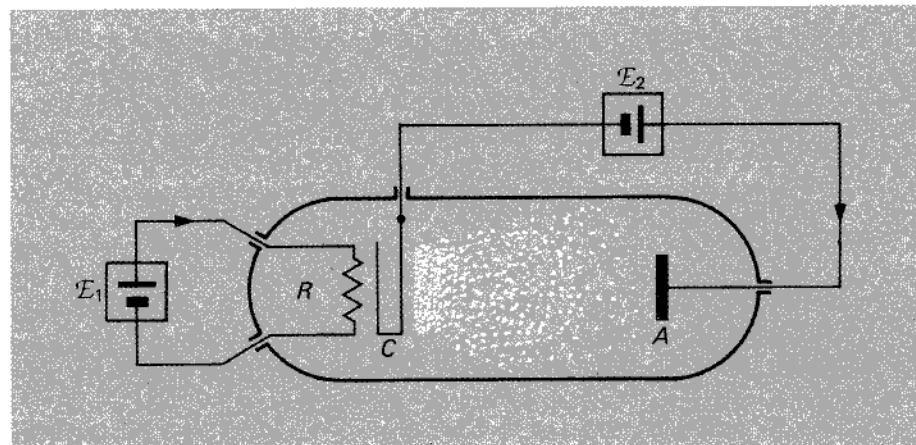


Figura 6.17
Diodo a vuoto.

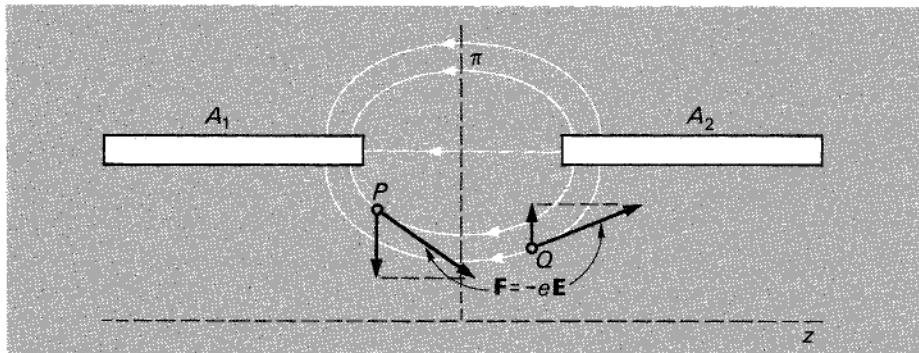
conduttore (*anodo*), indicato con A , il quale è collegato al catodo attraverso una pila E_2 , che lo mantiene a un potenziale maggiore di c . Il tutto è contenuto in un'ampolla di vetro, all'interno della quale si è creato un vuoto spinto. La forte agitazione termica degli elettroni, nel catodo, fa sì che molti di questi riescano ad acquistare energia cinetica sufficiente a superare la barriera di potenziale esistente alla superficie del filamento, fuoriuscendo da esso. Il fenomeno, noto come *effetto termoelettrico*, è naturalmente tanto più pronunciato quanto più alta è la temperatura del filamento emettitore. Gli elettroni che abbandonano il catodo si trovano soggetti all'azione del campo elettrico E (esistente nel vuoto tra anodo e catodo) prodotto dalla d.d.p. applicata alla pila E_2 ; sotto l'azione di tale campo gli elettroni accelerano, dirigendosi verso l'anodo. Si genera così una vera e propria corrente, che si chiude, all'esterno, attraverso la pila E_2 e i conduttori che la collegano ai due elettrodi.

2. Lenti eletrostatiche

Un dispositivo molto semplice, e molto usato in elettronica, atto a mettere in evidenza l'azione focalizzatrice di un campo eletrostatico su un fascetto di elettroni è quello schematizzato nella figura 6.18a. Tra i due elettrodi cilindrici A_1 e A_2 (di asse z) si stabilisce (mediante un opportuno generatore) una d.d.p. V che determina, nella regione compresa tra i due elettrodi, un campo eletrostatico, le cui linee vettoriali hanno l'andamento qualitativo disegnato in figura. Quando un elettrone, in moto secondo una direzione parallela all'asse z , raggiunge un punto P della regione interessata al campo elettrico, è soggetto, per effetto del campo, a una forza

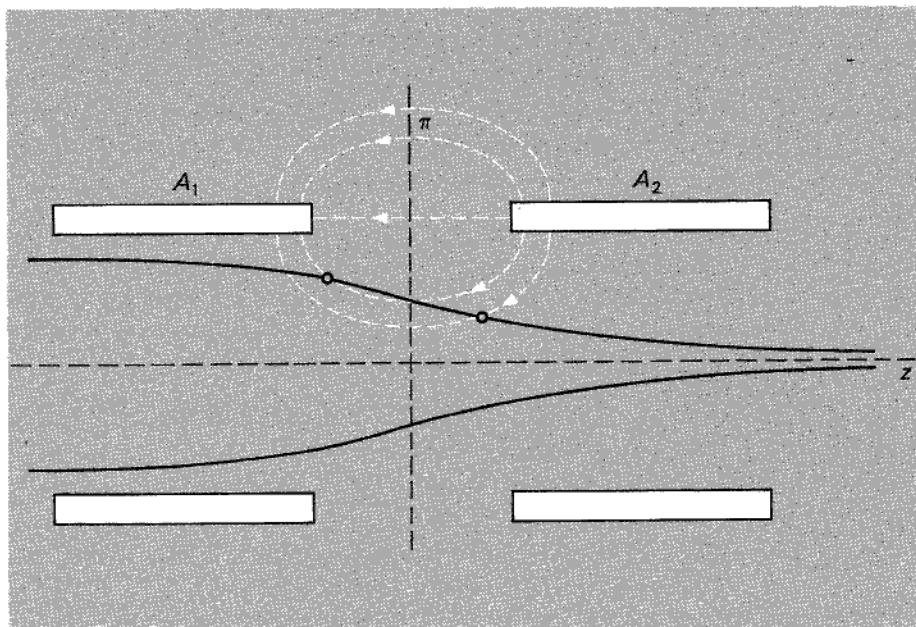
$$\mathbf{F} = -e \mathbf{E},$$

che presenta una componente diretta verso l'asse del sistema. L'altra componente agisce invece in senso longitudinale, accelerando tangenzialmente l'elettrone. Di conseguenza, durante il tragitto nella regione che si trova alla sinistra del piano π (di mezzeria tra i due elettrodi) l'elettrone viene deviato verso l'asse z e contemporaneamente accelerato in direzione longitudinale. Quando, invece, l'elettrone supera il



(a)

Figura 6.18
Lente eletrostatica.



(b)

piano π (in figura, ad esempio in Q), la situazione si inverte, poiché la forza agente su esso tende a farlo divergere dall'asse; tuttavia, essendo ora la velocità maggiore di quella posseduta nel tratto di traiettoria alla sinistra di π (a causa dell'accelerazione determinata dal campo), la particella resta in questa regione per un intervallo di tempo minore di quello trascorso alla sinistra di π . In conclusione, l'effetto di convergenza è maggiore di quello di divergenza e l'elettrone, all'uscita del secondo elettrodo, si muove su una traiettoria non più parallela all'asse z , ma inclinata rispetto a questo, come mostrato nella figura 6.18b. Lo stesso accade evidentemente anche agli altri elettroni del fascetto: ne deriva che, all'uscita dell'elettrodo A_2 , il "pennello" elettronico risulta focalizzato, così come accade quando un fascio di raggi luminosi attraversa una lente convergente. Per questi motivi, il dispositivo descritto costituisce un esempio di *lente elettrostatica*.

3. La vasca elettrolitica \rightarrow

Si tratta di un dispositivo che consente di determinare sperimentalmente la soluzione dell'equazione di Laplace corrispondente ad assegnate condizioni al contorno. Il sistema è del tipo schematizzato nella figura 6.19: una vasca di vetro è riempita con un liquido conduttore omogeneo (ad esempio acqua) nel quale sono immersi alcuni elettrodi di conducibilità molto maggiore di quella del liquido stesso.

Volendo studiare, ad esempio, il campo elettrostatico esistente, nel vuoto, tra due elettrodi di forma assegnata portati a potenziali diversi, è sufficiente immergere nel liquido due elettrodi della forma voluta e applicare loro la d.d.p. desiderata. In queste

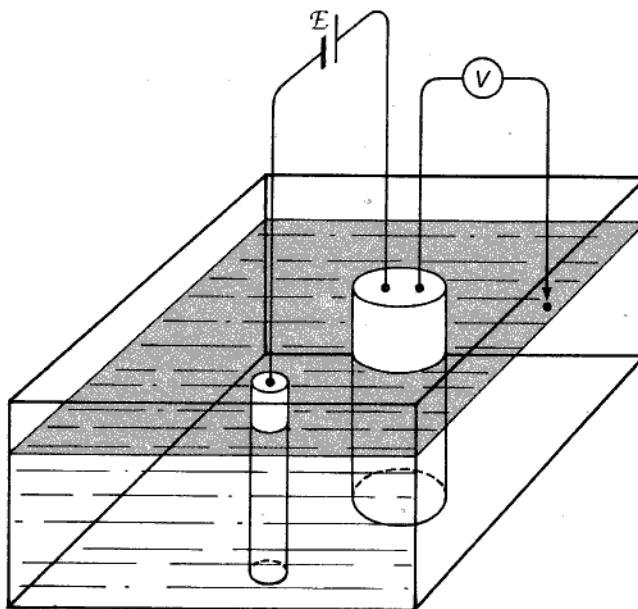


Figura 6.19

condizioni si stabilisce nel liquido un campo stazionario di corrente, che, come si è visto nei paragrafi precedenti, è associato a una funzione potenziale V armonica: in altre parole, la V soddisfa in tutti i punti del liquido l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = 0.$$

Il potenziale V , inoltre, assume valore costante su ciascuno degli elettrodi (così come nel corrispondente caso elettrostatico); l'unica, sensibile, differenza tra la funzione soluzione del problema elettrostatico che si desidera studiare e la distribuzione del potenziale V nella vasca deriva dalla presenza, in quest'ultima, di pareti isolanti che impongono condizioni al contorno (derivata del potenziale nulla in direzione normale alle pareti) che, in generale, non corrispondono a quelle del problema in esame. Se le pareti, tuttavia, sono abbastanza lontane dagli elettrodi, il campo nelle vicinanze di questi può ritenersi poco turbato dalla loro presenza.

Per rilevare la distribuzione del potenziale V che si stabilisce nel liquido, è sufficiente disporre uno strumento misuratore di d.d.p. (cioè un *elettrometro*, o, come si vedrà meglio nel seguito, un *voltmetro*) tra uno degli elettrodi e il punto del liquido di volta in volta considerato. Riportando su un foglio i punti per i quali la misura di V ha dato lo stesso valore, si ha una chiara visualizzazione dell'andamento delle equipotenziali.

4. Variazione della resistività con la temperatura ↗

Si rileva sperimentalmente che, per un'ampia classe di conduttori e in un largo campo di temperature, la resistività varia pressoché linearmente, secondo la legge

$$\eta(T) = \eta_0 [1 + \alpha(T - T_0)],$$

dove T_0 è una temperatura di riferimento, η_0 il valore della resistività a tale temperatura e α il cosiddetto *coefficiente di temperatura* del conduttore. Spesso la temperatura T_0 di riferimento è assunta pari a quella ambiente tipica (20°C). La tabella 6.1 che segue riporta i valori tipici di η_0 e α per alcuni conduttori.

Tabella 6.1

Materiali	Resistività ($\mu\Omega\text{m}$)	Conducibilità ($1/\mu\Omega\text{m}$)	Coefficiente di temperatura a 20°C ($1/^\circ\text{C}$)
Argento	$0,0159 \div 0,017$	$5,9 \div 6,3 \times 10$	$3,8 \times 10^{-3}$
Rame	$0,0170 \div 0,0178$	$5,6 \div 5,9 \times 10$	$3,9 \times 10^{-3}$
Alluminio	$0,028 \div 0,03$	$3,3 \div 3,6 \times 10$	$3,7 \times 10^{-3}$
Zinco	$0,063$	$1,6 \times 10$	$3,7 \times 10^{-3}$
Ottone	$0,07 \div 0,09$	$1,1 \div 1,4 \times 10$	$1,5 \times 10^{-3}$
Ferro	$0,09 \div 0,15$	$0,67 \div 1,1 \times 10$	$4,5 \times 10^{-4}$
<i>Leghe per resistori:</i>			
Rame-nichel-manganese (nickelina, manganina, costantana)	$0,43 \div 0,5$	2,2	$-0,05 \div 0,1 \times 10^{-3}$
Nichel-cromo	1,1	0,8	$0,02 \times 10^{-3}$
Carbone per lampade ad arco	$60 \div 80$	$1,70 \times 10^{-2}$	$-0,2 \div 0,8 \times 10^{-3}$
Acqua di mare	3×10^5	3×10^{-6}	—
Acqua dolce	$10^7 \div 10^8$	$10^{-8} \div 10^{-7}$	—
Acqua distillata	$1 \div 4 \times 10^{10}$	$0,2 \div 1 \times 10^{-10}$	—
Terreni	$10^8 \div 10^{10}$	$10^{-10} \div 10^{-8}$	—

Esercizi

- Calcolare la resistenza, a temperatura ambiente, di un filo di rame della lunghezza di 1 km e del diametro di 1 cm.
- Calcolare la resistenza di isolamento di un cavo coassiale, di raggio interno $R_{\text{int}} = 1 \text{ mm}$, raggio esterno $R_{\text{est}} = 10 \text{ mm}$, lunghezza $L = 10 \text{ m}$, sapendo che la resistività η dell'isolante interposto tra le armature è dell'ordine di $10^{12} \Omega \text{ m}$.
- Calcolare la resistenza R che si presenta tra i morsetti A e B del conduttore ad anello raffigurato nella figura 6.20, supponendo che la distanza tra A e B sia trascurabile rispetto alla lunghezza del conduttore.

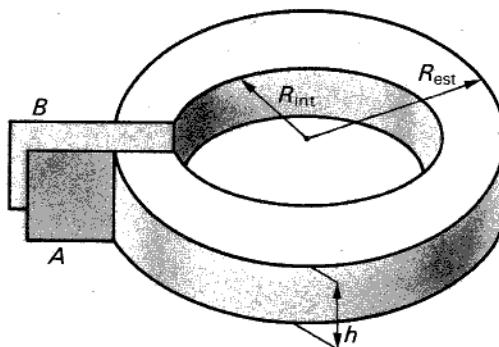


Figura 6.20

4. Calcolare approssimativamente la resistenza tra gli elettrodi A e B del solido raffigurato nella figura 6.21, sapendo che la sua sezione è rettangolare, di profondità h costante lungo l'asse.

5. Calcolare la resistenza che si presenta tra due elettrodi sferici di raggio R_{int} e R_{est} , sapendo che la resistività η del conduttore interposto tra gli elettrodi è molto maggiore di quella degli elettrodi.

6. Calcolare la resistenza equivalente che si presenta tra i morsetti A e B del sistema di resistori raffigurato nella figura 6.22, sapendo che tutti i resistori hanno resistenza di 1Ω .

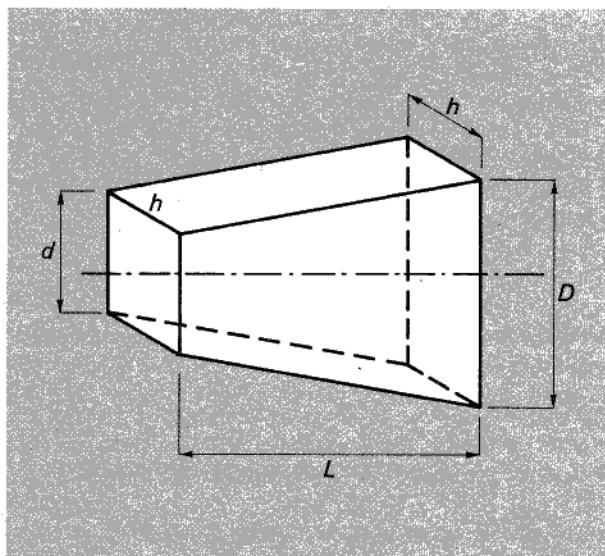


Figura 6.21

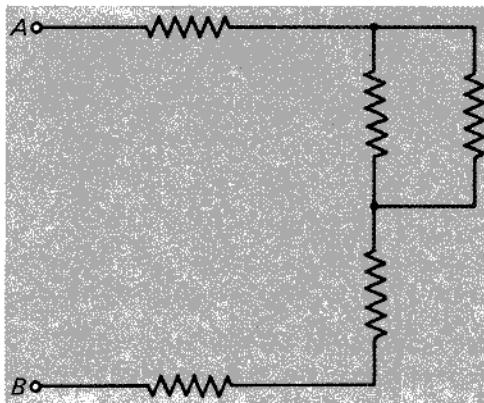


Figura 6.22

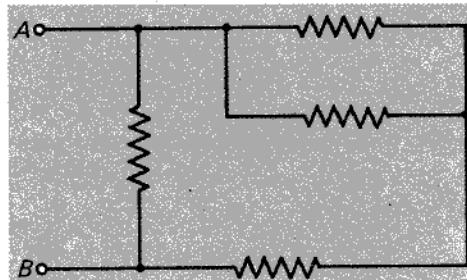


Figura 6.23

7. Calcolare la resistenza equivalente, tra A e B , del sistema di resistori da 1Ω raffigurato nella figura 6.23.

8. Calcolare la resistenza equivalente, tra A e B , del sistema di resistori da 1Ω raffigurato nella figura 6.24.

(*Suggerimento.* Vedi l'analogo esercizio relativo ai condensatori, nel capitolo precedente.)

9. Con riferimento al circuito semplice raffigurato nella figura 6.25, tracciare un grafico della d.d.p. V_{AB} in funzione della corrente i , mantenendo fissi i valori di \mathcal{E} e R_g e facendo variare, tra zero e infinito, i valori della resistenza R .

10. Calcolare la d.d.p. V_{AB} nel circuito raffigurato nella figura 6.26 (*ponte di Wheatstone*), sapendo che tutti i resistori hanno resistenza di 1Ω e la f.e.m. \mathcal{E} vale 10 V .

11. Un generatore di f.e.m. $\mathcal{E}=100\text{ V}$ alimenta, mediante una linea lunga 1 km (vedi fig. 6.27), un resistore di 10Ω . Calcolare il diametro dei due conduttori di rame che costituiscono la linea in modo che la d.d.p. V_{AB} sia pari a 95 V .

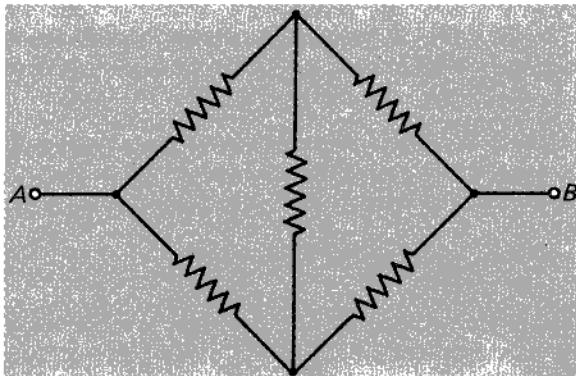


Figura 6.24

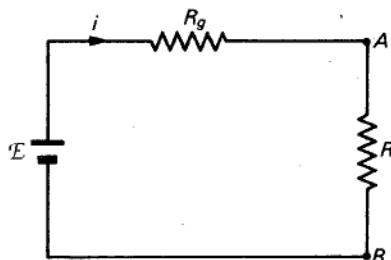


Figura 6.25

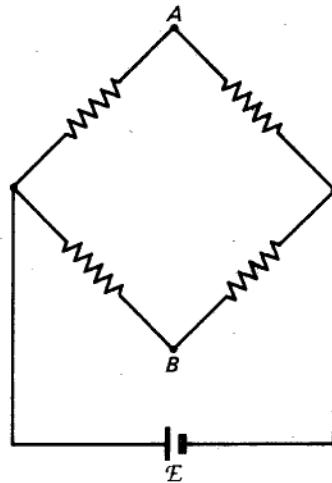


Figura 6.26

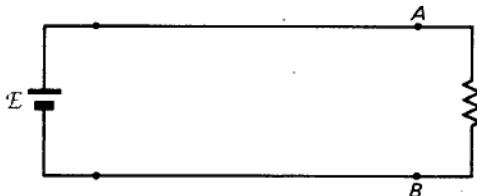


Figura 6.27

12. Si vuole progettare una resistenza della potenza di 100 W, alimentata con una d.d.p. di 100 V, utilizzando un filo di tungsteno del diametro di $14,6 \mu\text{m}$; calcolare la lunghezza del filo.

13. Una lampada a incandescenza ha una potenza di 50 W, se alimentata con una tensione di 220 V; il diametro del filo di tungsteno è di $25 \mu\text{m}$. Calcolare la lunghezza del filo, supponendo che la temperatura di lavoro sia di 2500 K.

14. Calcolare la potenza che si dissipa per effetto Joule in un conduttore cilindrico di raggio R , lunghezza L e resistività η , percorso da una corrente diretta lungo l'asse del cilindro e distribuita con densità $J = J_0 r/R$, indicando con r la distanza dall'asse e con J_0 il valore di J sulla periferia del cilindro.

15. Una sfera conduttrice ideale di raggio R è immersa in un mezzo omogeneo di resistività finita η ; supponendo che la sfera sia mantenuta a un potenziale V_0 rispetto all'infinito, calcolare la distribuzione, nell'intero spazio, della densità di corrente, del campo elettrico e del potenziale.

(*Suggerimento.* Tenere conto della solenoidalità della densità di corrente \mathbf{J} e della simmetria sferica.)

16. Risolvere l'esercizio precedente nell'ipotesi che uno dei due semispazi in cui l'intero spazio è diviso dà un piano passante per il centro della sfera sia sostituito dal vuoto; ci si limiti a calcolare la distribuzione delle grandezze nel semispazio conduttore.

(*Suggerimento.* Limitatamente al semispazio conduttore la densità di corrente è ancora diretta radialmente e varia come $1/r^2$.)

17. Un cilindro circolare retto, conduttore, è percorso longitudinalmente da una corrente di densità

$$J = J_0 \left(\frac{r}{R} \right)^2,$$

essendo R il raggio del cilindro e r la distanza di un punto generico dall'asse. Calcolare l'intensità di corrente i attraverso una sezione generica del conduttore.

18. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo pari a η la resistività del conduttore, calcolare la potenza che si dissipa per unità di lunghezza.

(*Suggerimento.* Integrare sul volume del conduttore la potenza dissipata per unità di volume, data da ηJ^2 .)

19. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la resistenza per unità di lunghezza del conduttore e confrontarla con quella relativa al caso di densità di corrente uniforme.

(*Suggerimento.* La resistenza per unità di lunghezza, R_l , è pari a $R_l = P_l/i^2$).

20. Si consideri un condensatore piano costituito di due strati dielettrici di costanti ϵ_1 , ϵ_2 , e di spessori d_1 , d_2 ; i due dielettrici presentano, inoltre, dissipazione (caratterizzata dalle conducibilità g_1 , g_2). Calcolare la distribuzione del campo elettrico e della densità di corrente nel condensatore, quando alle armature sia applicata una tensione V .

(*Suggerimento.* In regime stazionario, la densità di corrente J è uniforme nei due strati e ha in essi lo stesso valore; pertanto $g_1 E_1 = g_2 E_2$, essendo E_1 , E_2 i campi elettrici nei due strati.)

21. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la distribuzione del vettore D e delle cariche, libere e di polarizzazione.

(*Suggerimento.* Alla superficie di separazione dei due strati, si localizzano sia cariche libere che cariche di polarizzazione.)

22. Un generatore di f.e.m. $E = 220$ V alimenta due lampade da 100 W in parallelo; supponendo che i conduttori che collegano il generatore alle lampade siano lunghi 300 m e abbiano ciascuno una sezione di 1 mm^2 ; calcolare di quanto si riduce la tensione ai morsetti delle lampade quando ad esse vengano collegate (ancora in parallelo) altre 5 lampade da 100 W ciascuna.

(*Suggerimento.* Detta R_c la resistenza dei due conduttori e R_{lamp} quella di ciascuna lampada, si ha

$$E = R_c i + \frac{R_{\text{lamp}}}{2} i,$$

e inoltre $R_{\text{lamp}}(i/2)^2 = 100$ W, essendo i la corrente che circola prima della inserzione delle nuove lampade. A inserzione avvenuta, risulta

$$= R_c i' + \frac{R_{\text{lamp}}}{7} i'.$$

Capitolo 7

Il campo magnetostatico nel vuoto

7.1 Introduzione

Avvicinando due circuiti percorsi da correnti stazionarie, si constata che tra essi si esercitano forze mutuamente attrattive o repulsive,¹ che scompaiono non appena si annulli una almeno delle due correnti. Per spiegare, almeno qualitativamente, l'origine del fenomeno occorre pensare che, quando in un conduttore circola una corrente, il moto delle cariche produce un campo magnetico nello spazio circostante. In presenza di un secondo conduttore, percorso anch'esso da corrente, in prossimità del primo, le cariche in movimento in ciascuno dei due circuiti risultano soggette a una forza magnetica pari, per la [6.2.2], a

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

dove \mathbf{v} è la velocità corrispondente al moto "orientato" che caratterizza la corrente.² I portatori di carica in moto, nel conduttore, sono soggetti sia alle forze che derivano dal campo elettrico nel conduttore, sia a quelle originate dal campo magnetico. Il campo elettrico, pur agendo tanto sugli ioni del reticolo cristallino che sugli elettroni liberi, esplica la sua azione soltanto su questi ultimi, mantenendoli in moto; esso non può però aver effetto alcuno sull'intero conduttore, poiché questo è (in ogni sua porzione macroscopica) neutro.

Nel sistema di riferimento considerato, le forze di origine magnetica (se il conduttore è fermo) agiscono soltanto sulle cariche libere, normalmente alla direzione del loro moto. Tuttavia esse non sono sufficienti a strapparle dal conduttore a causa delle

¹ Dette *forze ponderomotrici*, capaci cioè di agire sul conduttore come qualunque altra forza di origine meccanica (il peso ad esempio). Le prime esperienze relative a tali forze si devono a H. C. Oersted, J. B. Biot e F. Savart.

² La forza agente sulla carica, quando è mediata su un intervallo di tempo fisicamente infinitesimo, non risente del termine derivante dal moto di agitazione termica.

ingenti forze di richiamo di tipo coulombiano che le legano a cariche fisse di segno opposto. L'effetto macroscopico risultante delle forze magnetiche è una forza ponderomotrice agente sull'intero conduttore.

7.2 Le leggi fondamentali della magnetostatica

Nel presentare le leggi che descrivono il campo magnetico prodotto da correnti stazionarie, si potrebbe, analogamente a quanto è stato fatto per l'elettrostatica, partire dalla legge che esprime il campo magnetico prodotto nel vuoto da una corrente "elementare" (ad esempio una spira circolare), quindi, utilizzando un principio di sovrapposizione, estendere tale legge al caso generale di una distribuzione di correnti. Ciò tuttavia non sarebbe agevole: presenteremo perciò direttamente le leggi fondamentali (in forma integrale), ricavando quindi da esse il campo magnetico prodotto da una generica distribuzione di correnti stazionarie.³

La *prima legge della magnetostatica* afferma che *il campo magnetico prodotto da una qualsiasi distribuzione di correnti è solenoidale*. In altre parole, indicando con \mathbf{B} il campo magnetico e con Σ una qualsiasi superficie chiusa contenuta nel campo, si ha

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad [7.2.1]$$

dove \mathbf{n} è il versore della normale a Σ .

E' evidente la differenza rispetto al caso elettrostatico, nel quale, in luogo della [7.2.1], vale il teorema di Gauss (secondo cui il flusso di \mathbf{E} uscente da una superficie chiusa è proporzionale alla somma delle cariche presenti nella regione da essa racchiusa). Nel caso magnetico, il flusso di \mathbf{B} è sempre nullo: *non* esistono cariche magnetiche da cui partano o in cui terminino le linee vettoriali. Si presentano, queste, senza inizio né fine (cioè chiuse) oppure estese all'infinito, o ancora con una struttura di tipo *ergodico* (vedi § 7.11).

La proprietà di solenoidalità di un campo vettoriale può essere espressa (vedi app. A) in forma equivalente alla [7.2.1]: date due generiche superfici (non chiuse) S_1 e S_2 , aventi lo stesso orlo γ , risulta

$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS, \quad [7.2.2]$$

indicando rispettivamente con \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 le normali alle superfici, orientate in maniera concorde. Poiché il flusso del campo magnetico dipende soltanto da γ , si è soliti

³ In elettrostatica ciò equivarrebbe a presentare direttamente il teorema di Gauss e la proprietà di irrotationalità, ricavando poi da tali leggi il campo di una generica distribuzione di cariche.

parlare, nel caso magnetico, di "flusso concatenato con una linea chiusa γ ", senza specificare la superficie. Le dimensioni del flusso di \mathbf{B} sono evidentemente quelle di un campo magnetico per una superficie: $[\Phi] = [B][S]$. La sua unità di misura nel SI è data dal $T\ m^2$; ad essa si dà il nome di "weber" (Wb).

La seconda legge della magnetostatica (detta anche *legge della circuitazione, o legge di Ampère*) riguarda la circuitazione del campo magnetico: *diversamente da quello elettrostatico, il campo magnetico è rotazionale*. Nel vuoto, detta γ una generica linea chiusa orientata, contenuta nel campo, risulta

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dl = \mu_0 I; \quad [7.2.3]$$

μ_0 è una costante (*permeabilità del vuoto*) che dipende dalle unità di misura adottate per le diverse grandezze e che, nel Sistema internazionale, ha per definizione il valore $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ (vedi § 7.8); il termine I indica la somma di tutte le correnti concatenate con γ . Ricordiamo che due linee chiuse si dicono concatenate se non è possibile "staccarle" senza tagliarne una.⁴ La somma suddetta va intesa inoltre in senso algebrico, considerando con il segno "+" tutte le correnti il cui verso di riferimento (vedi p. 203) è *congruente* con quello scelto per orientare γ ,⁵ con il segno "-" le altre. Così, con riferimento alla figura 7.1, si ha ad esempio

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dl = \mu_0 (I_1 - I_2);$$

su γ_1 è stato scelto il verso di riferimento congruente con quello di γ , su γ_2 l'opposto.

Se la linea chiusa γ *non* concatena correnti (o concatena correnti la cui somma è nulla), la circuitazione del campo magnetico è nulla. Se la linea chiusa coincide con una linea vettoriale, la circuitazione è senz'altro non nulla: infatti, avendo il prodotto scalare $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t}$ sempre lo stesso segno, essa è somma di contributi tutti dello stesso segno. Ogni linea vettoriale del campo magnetico è quindi concatenata con almeno una corrente.

Dette γ_1 e γ_2 due linee (aperte) di estremi A e B , ugualmente orientate, risulta

$$\int_{A\gamma_1 B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dl - \int_{A\gamma_2 B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dl = \mu_0 I,$$

indicando ancora con I la somma algebrica delle correnti concatenate con la curva chiusa $A\gamma_1 B (-\gamma_2)A$. Se tale curva non concatena correnti (o concatena correnti

⁴ In modo più rigoroso, anche se meno intuitivo: *due linee chiuse sono concatenate se esiste almeno una superficie non chiusa, avente per orlo una delle linee, che abbia con l'altra un solo punto di intersezione*.

⁵ I due versi sono congruenti quando il verso della corrente è quello di avanzamento di un cavatappi che ruoti nel senso indicato dal verso positivo assunto su γ .

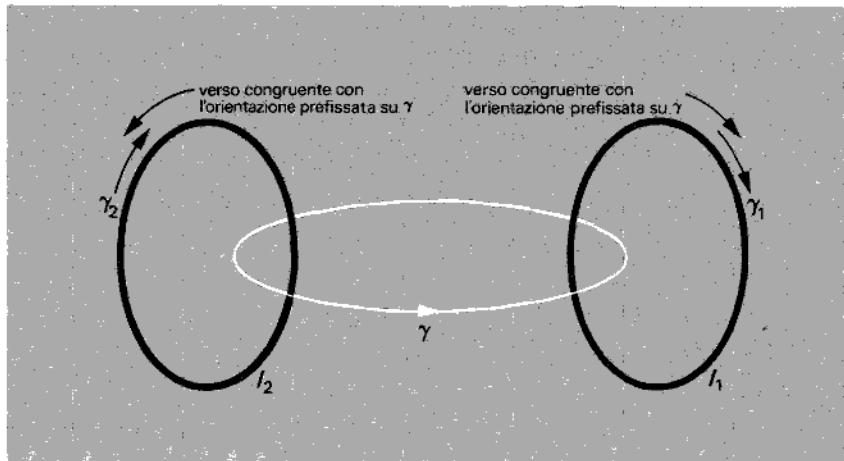


Figura 7.1

Due spire piane, percorse da corrente, concatenate con la linea chiusa γ ; su γ_1 è stato scelto, per la corrente I_1 , un verso di riferimento coerente con quello assunto come positivo su γ , su γ_2 il verso opposto.

la cui somma è nulla), risulta dunque

$$\int_{A\gamma_1 B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{td}l = \int_{A\gamma_2 B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{td}l.$$

Riassumendo: *in regioni internamente connesse, in cui non vi siano correnti, è possibile trovare un potenziale per il campo magnetico, poiché è nulla, in esse, la circuitazione di \mathbf{B} (questa condizione non è verificata, in generale, in presenza di correnti).*

Chiariamo ora con un esempio (vedi fig. 7.2) per quale motivo le regioni debbano essere internamente connesse. Il punto O rappresenta la traccia di una corrente I perpendicolare al foglio. Se si immagina che, nel piano del foglio (e in tutti i piani a questo paralleli) vi sia un "buco" avente per contorno una linea chiusa γ_1 che circonda O , il campo magnetico viene a essere considerato in una regione che non contiene la corrente che lo produce. Poiché il dominio in cui si considera il campo non comprende la regione delimitata da γ_1 , ogni linea chiusa interamente contenuta in esso *non* concatena correnti *contenute nel dominio*. Ciò nonostante, la circuitazione del campo attorno a una linea chiusa che abbia O nel suo interno è diversa da zero, poiché, evidentemente, il limitarsi a considerare il campo soltanto all'esterno di γ_1 non può modificare i valori di \mathbf{B} ivi esistenti. L'apparente difficoltà viene superata non appena si osservi che, una volta effettuato il "buco" attorno a I , la rimanente regione del piano *non* è più internamente connessa.

Consideriamo un ulteriore esempio (vedi fig. 7.3). Il punto O è ancora traccia di una corrente I perpendicolare al foglio. Una linea, del tipo indicato con γ_1 , proviene "dall'infinito", gira attorno a O e ritorna all'infinito.

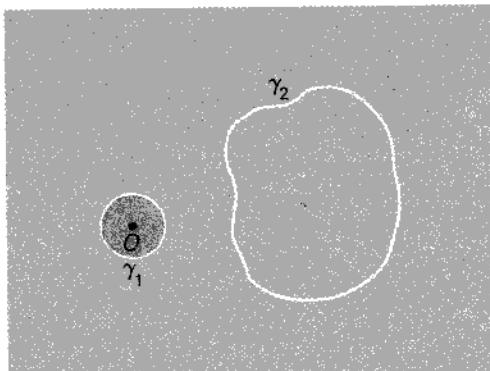


Figura 7.2

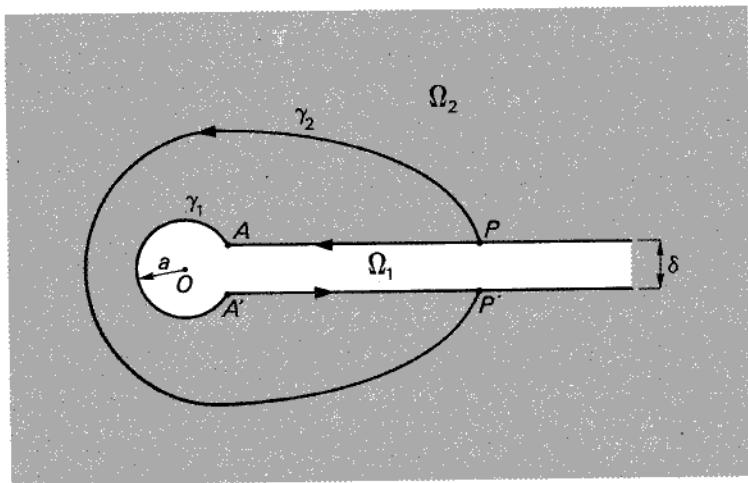


Figura 7.3

La porzione di piano Ω_2 (*area ombreggiata*) ottenuta escludendo la parte Ω_1 , contornata dalla curva γ_1 , è internamente connessa: pertanto, il campo ammette ivi potenziale. E' chiaro, altresì, che il raggio a della circonferenza che racchiude il punto O può essere reso piccolo a piacere (purché non nullo) e così pure la distanza δ tra le due semirette che delimitano la regione Ω_1 . La regione Ω_2 può dunque estendersi fino a comprendere *quasi* l'intero piano: il campo sembrerebbe quindi ammettere potenziale ovunque, in contrasto con quanto detto prima.

In realtà, considerando ad esempio due punti "affacciati", come P e P' , e indicando con φ il potenziale del campo, risulta, in base alla definizione di potenziale,

$$\varphi(P) - \varphi(P') = \int_{PA'A'P'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{tdl};$$

quando la distanza δ tende a zero, la linea $PAA'P'$ tende a chiudersi attorno al punto O e l'integrale di linea del campo tende al valore $\mu_0 I$. Ne segue che, quando si cerca di estendere la regione nella quale può essere introdotto un potenziale per \mathbf{B} sino a comprendere l'intero dominio, il potenziale rivela un brusco salto (pari a $\mu_0 I$) attraverso il tratto infinitesimo δ . Si è dunque indotti a considerare un potenziale i cui valori differiscono di una quantità finita in punti infinitamente vicini tra loro (come P e P'). Volendo eliminare una tale discontinuità, si dovrà attribuire al potenziale carattere di *polidromia*, considerare cioè funzioni potenziali che assumono più valori distinti in uno stesso punto.

Osserviamo che nelle leggi della magnetostatica nel vuoto precedentemente esaminate è contenuto anche un principio di sovrapposizione, secondo cui il campo magnetico prodotto nel vuoto da un insieme di correnti è pari alla somma (vettoriale) dei campi prodotti da ciascuna corrente (considerata singolarmente). A secondo membro della [7.2.3] appare infatti la somma delle correnti che creano il campo (in modo analogo il principio di sovrapposizione dei campi elettrostatici è contenuto nel teorema di Gauss). Osserviamo poi che anche il campo magnetico prodotto da distribuzioni spazialmente limitate "va a zero" all'infinito (vedi § 7.6).

Confrontiamo infine le leggi dell'elettrostatica e quelle della magnetostatica, in modo da evidenziarne l'aspetto "duale":

<i>Elettrostatica</i>	<i>Magnetostatica</i>
$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q$	$\iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$
$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = 0$	$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \mu_0 I$.

7.3 Campi magnetici prodotti da semplici distribuzioni di correnti

Esempio 1. Corrente rettilinea indefinita

Il punto O (vedi fig. 7.4) è la traccia di un conduttore filiforme rettilineo e indefinito, perpendicolare al foglio, percorso da corrente (supposta positiva con riferimento al verso uscente dal foglio). Assumiamo un sistema di coordinate cilindriche il cui asse z coincide con il conduttore. Come mostrano semplici considerazioni di simmetria, il campo si ripete identicamente su tutti i piani paralleli a quello di figura (e perciò perpendicolari all'asse z). Il suo modulo, sempre per simmetria, è indipendente da φ ; esso assume cioè lo stesso valore in punti (come P e P') equidistanti da O . Non esistendo nel piano della figura direzioni privilegiate (per l'omogeneità e l'isotropia dello spazio, nel riferimento inerziale in cui il conduttore è fermo), il campo magnetico non può che presentarsi in uno dei modi seguenti:

- diretto, in ogni punto P , come la congiungente OP ;
- uniforme in tutto lo spazio e parallelo all'asse del conduttore.
- tangente, in ogni punto P , alla circonferenza passante per P e di centro O .

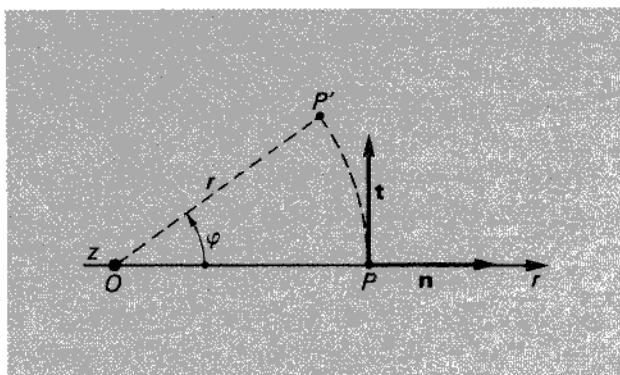


Figura 7.4

L'ipotesi (a) *non* è accettabile, poiché la circuitazione del campo estesa a una qualsiasi circonferenza di centro O risulterebbe nulla (il campo sarebbe in ogni punto perpendicolare alla curva), in contrasto con la legge di Ampere.⁶ La (b) è anche da scaricare, perché \mathbf{B} deve annullarsi all'infinito nelle direzioni ortogonali all'asse. Non resta che considerare il caso (c) (vedi fig. 7.5). Un tale campo verifica la prima legge della magnetostatica, in quanto le sue linee vettoriali sono chiuse. Affinché esso rispetti la seconda legge, è necessario che

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \mu_0 I,$$

dove γ è una qualsiasi linea chiusa concatenata con I . Scegliendo come γ la circonferenza passante per il generico punto P , orientata in senso antiorario, e ricordando che essa allora coincide con una linea vettoriale, si conclude che in ogni suo punto

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = B,$$

dove B è il modulo di \mathbf{B} . Essendo inoltre B indipendente da φ , si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \int_0^{2\pi} Br d\varphi = 2\pi r B,$$

e, quindi, dalla legge di Ampère,

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}. \quad [7.3.1]$$

Il campo prodotto dalla corrente I è dunque proporzionale alla corrente e inversamente proporzionale alla distanza.

⁶ Un campo radiale, inoltre, risulterebbe non solenoidale, in contrasto con la prima legge della magnetostatica.

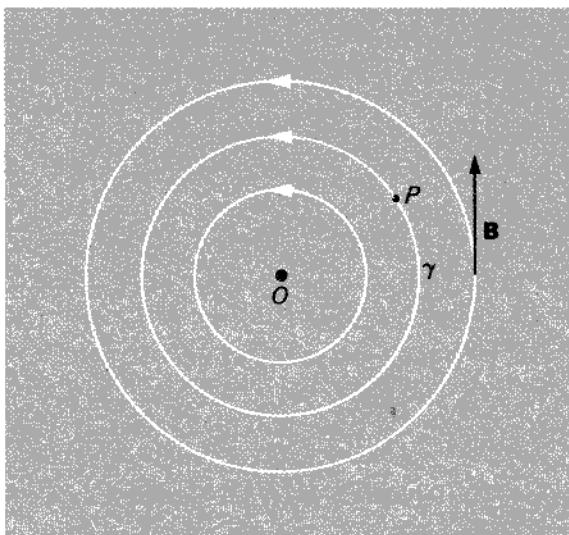


Figura 7.5
Campo magnetico di una corrente rettilinea indefinita.

mente proporzionale alla distanza r dal conduttore. Il verso del campo, per la legge di Ampère, è quello di rotazione di un cavatappi che avanzi nel senso della corrente. In corrispondenza di O , il campo non è definito e presenta una singolarità del tipo $1/r$; inoltre, esso tende a zero quando P si allontana indefinitamente dal conduttore.

Il potenziale sarà una funzione del tipo

$$\Psi = \frac{\mu_0}{2\pi} I \varphi. \quad [7.3.2]$$

Ricordando infatti l'espressione delle componenti del gradiente in coordinate cilindriche (vedi app. A) si ha subito

$$(\text{grad } \Psi)_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0,$$

$$(\text{grad } \Psi)_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

$$(\text{grad } \Psi)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\mu_0}{2\pi} I$$

e quindi

$$\mathbf{B} = \text{grad } \Psi. \quad [7.3.3]$$

La [7.3.2] è una funzione polidroma se considerata nell'intero piano, mentre risulta monodroma quando si escluda dal suo dominio di definizione una semiretta

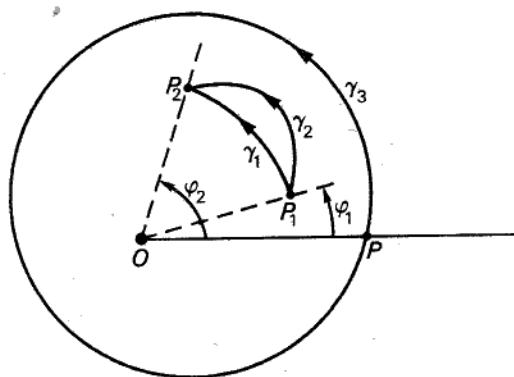


Figura 7.6

r spiccata dal punto O (vedi fig. 7.6). Dunque, a patto di considerare linee aperte (come la γ_1 o la γ_2), si ha

$$\int_{P_1 \gamma_1 P_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \Psi(P_2) - \Psi(P_1) = \int_{P_1 \gamma_2 P_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Considerando invece una linea chiusa γ_3 intorno al punto O , si può scrivere

$$\oint_{\gamma_3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \Psi(P) - \Psi(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (2\pi - 0) = \mu_0 I,$$

a patto di attribuire a φ , in P , il valore 0 se P è punto di inizio di γ_3 , il valore 2π se P è considerato come termine di γ_3 . Occorre cioè attribuire allo stesso punto P più valori di φ e, quindi, del potenziale Ψ , che pertanto è polidromo. Per eliminare la polidromia occorre escludere la semiretta r dal dominio di definizione di Ψ ; in tal caso, però, non è più possibile considerare linee chiuse che circondino il punto O , poiché esse non possono comprendere i punti di r . Il potenziale così definito presenta allora una discontinuità in corrispondenza dei punti di r , poiché risulta

$$\lim_{\varphi_1 \rightarrow 0} \Psi(P_1) = 0, \quad \lim_{\varphi_2 \rightarrow 2\pi} \Psi(P_2) = \mu_0 I. \quad [7.3.4]$$

Esempio 2. Conduttore rettilineo di sezione circolare finita

Consideriamo il caso, simile a quello dell'esempio precedente, ma più plausibile dal punto di vista pratico, di un conduttore rettilineo indefinito avente sezione circolare di raggio a , percorso da una corrente I distribuita con densità \mathbf{J} uniforme sulla sua sezione. Ancora per ragioni di simmetria, il campo in un generico punto P , esterno al conduttore, ha lo stesso valore, direzione e verso che avrebbe se l'intera corrente I fosse concentrata sull'asse del conduttore; si ha cioè

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Non così avviene internamente al conduttore: ragionando come nell'esempio precedente, si conclude ancora che, in ciascun punto Q , il campo è diretto lungo la circonferenza γ passante per Q e centrata in O , e ha inoltre modulo uniforme lungo γ ; diverso è però il valore della circuitazione di \mathbf{B} lungo γ , poiché la corrente concatenata dalla linea γ non risulta pari all'intera corrente I , bensì alla frazione

$$\frac{\pi r^2 J}{\pi a^2 J} = \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

di essa.

Si ha pertanto

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I$$

e quindi

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} r. \quad [7.3.5]$$

All'interno del conduttore, il campo cresce linearmente da zero fino al valore $\mu_0 I / 2\pi a$; nella figura 7.7 è riportato l'andamento di B in funzione della distanza r dall'asse del conduttore (la curva a trattini mostra l'andamento che il campo avrebbe se l'intera corrente I fosse concentrata sull'asse).

Per quel che riguarda il potenziale, valgono considerazioni analoghe a quelle del caso precedente.

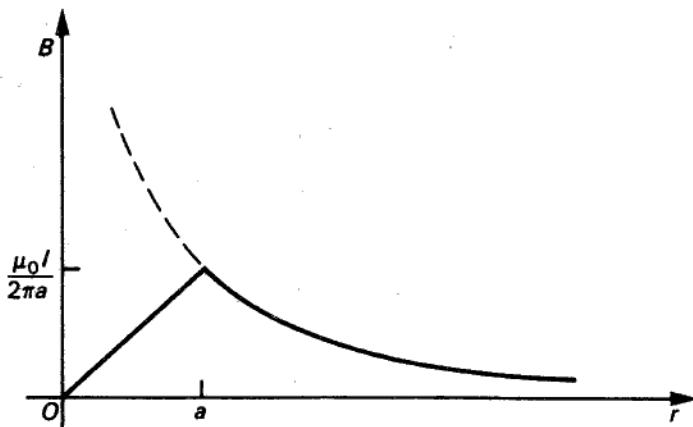


Figura 7.7

Esempio 3. Due correnti rettilinee parallele

I punti O_1 e O_2 sono le tracce di due conduttori rettilinei e indefiniti, perpendicolari al piano del foglio, lungo i quali scorrono due correnti I_1 e I_2 dello stesso segno (vedi fig. 7.8). Indicando con \mathbf{B}_1 il campo magnetico prodotto dalla prima corrente e con \mathbf{B}_2 quello prodotto dalla seconda, considerate agenti separatamente, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti si ha subito

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$$

dove \mathbf{B} è il campo prodotto dalle due correnti quando agiscono insieme.

Le linee vettoriali di \mathbf{B} hanno un andamento del tipo riportato in figura. La linea γ , a forma di lemniscata, suddivide il dominio dell'intero campo in due regioni: quella esterna a γ , in cui le linee vettoriali si concatenano con entrambe le correnti I_1 e I_2 ; quella interna, in cui esse si concatenano con una soltanto delle correnti.

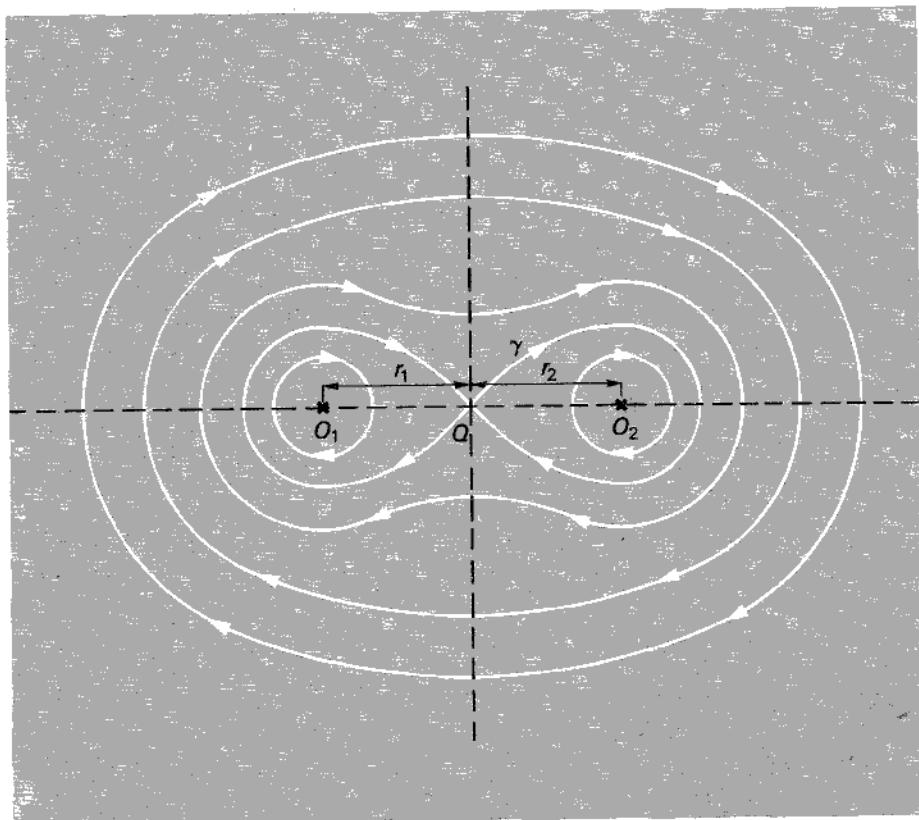
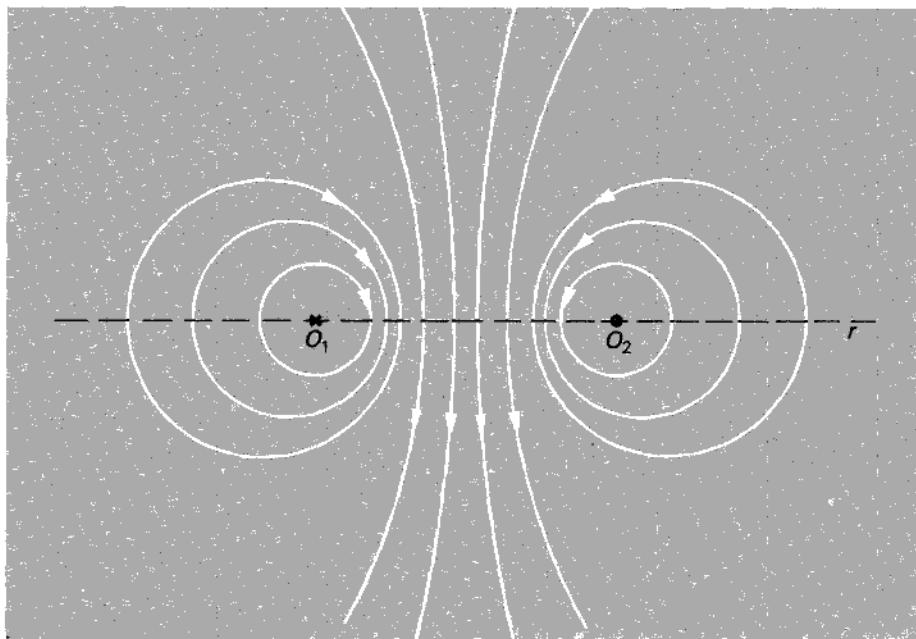


Figura 7.8

Campo magnetico di due correnti rettilinee indefinite di ugual modulo e segno.

**Figura 7.9**

Campo magnetico di due correnti rettilinee e indefinite di segno opposto.

Particolarmente interessante è il punto singolare Q , in cui il campo si annulla. Esso è situato sulla retta r congiungente i due punti O_1 e O_2 , a distanze r_1 dal primo e r_2 dal secondo tali che

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}.$$

A grande distanza dai due conduttori il campo è simile a quello che sarebbe prodotto da un'unica corrente di valore

$$I = I_1 + I_2,$$

mentre, man mano che ci si avvicina a uno di essi, risente sempre meno della presenza dell'altro.

Se le I_1 e I_2 hanno verso opposto, l'andamento delle linee vettoriali diventa del tipo rappresentato nella figura 7.9. Contrariamente al caso precedente, il campo si rinforza nella regione (della retta r) compresa fra O_1 e O_2 , mentre si indebolisce notevolmente all'esterno di tale segmento.

Esempio 4. Solenoide toroidale

Consideriamo (vedi fig. 7.10) un conduttore toroidale cavo, avente sezione di forma qualsiasi, con asse di simmetria (di rivoluzione) coincidente con l'asse z . Data

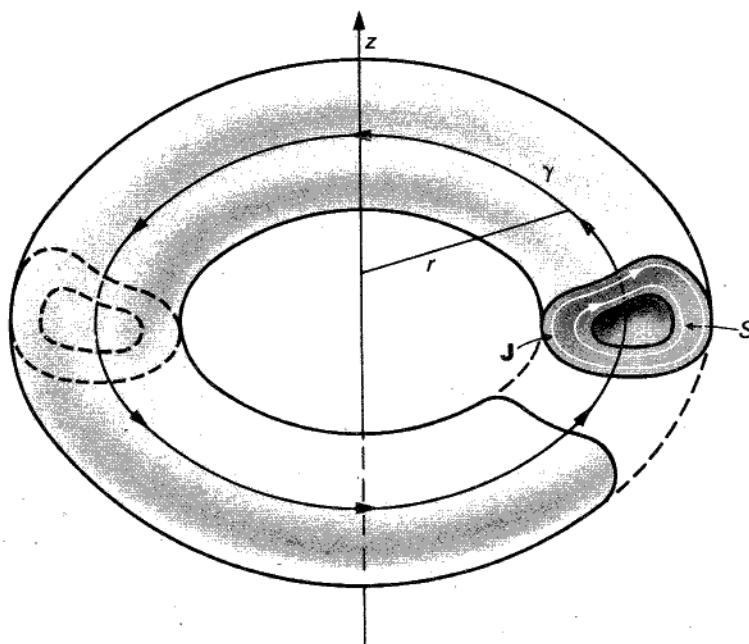


Figura 7.10

una generica sezione S di tale conduttore con uno dei semipiani del fascio di asse z , supponiamo che le linee del vettore densità di corrente J siano tutte contenute in questi semipiani "meridiani". Si può anche pensare che il sistema in oggetto sia costituito da un unico conduttore filiforme avvolto ripetutamente attorno a un supporto solido avente la forma della cavità Ω , in modo che il numero totale N delle spire sia il più grande possibile e che ciascuna spira sia praticamente contenuta in uno dei semipiani meridiani. Un sistema del genere prende il nome di *solenoide toroidale* e approssima il sistema di partenza tanto meglio quanto maggiore è il numero N e quanto più uniformemente è realizzato l'avvolgimento.

In base a semplici considerazioni di simmetria si conclude che le linee vettoriali del campo magnetico sono costituite da circonferenze giacenti su piani ortogonali all'asse z e concentriche con esso. Il campo è nullo esternamente al solenoide, poiché, se vi fosse una linea vettoriale esterna al solenoide, essa non concatenerebbe alcuna corrente.⁷ Nella cavità, invece, il campo è diverso da zero e può essere calcolato in base alla legge di Ampère:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 NI,$$

⁷ Essa potrebbe infatti essere ridotta a un punto, per deformazione continua, senza "tagliare" il solenoide.

dove r è il raggio della circonferenza γ (vedi fig. 7.10) lungo la quale si calcola la circuitazione di \mathbf{B} , N il numero totale di spire del solenoide e I la corrente circolante in ciascuna spira. Si ha quindi

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} . \quad [7.3.6]$$

All'interno della cavità, il campo *non* dipende dalla forma della sezione del conduttore, ma soltanto dalla corrente totale (NI) e dalla distanza dall'asse. Inoltre, esso è identico al campo che sarebbe prodotto da un unico conduttore rettilineo, diretto lungo l'asse z e percorso da una corrente di densità pari a NI .

Esempio 5. Solenoide rettilineo indefinito

Un caso limite, particolarmente interessante, del solenoide trattato nell'esempio 4 è quello in cui il raggio del toro tende all'infinito e il solenoide diventa rettilineo e indefinito. Estrapolando i risultati precedenti, si conclude agevolmente che il campo magnetico, all'interno di esso, risulta uniforme e diretto lungo l'asse del solenoide stesso. Le sue linee vettoriali sono dunque rette parallele all'asse del solenoide, orientate rispetto alla corrente secondo la consueta "regola del cavatappi". Il valore del campo all'interno del solenoide è pari a

$$B = \mu_0 nI, \quad [7.3.7]$$

dove n è il *numero di spire* dell'avvolgimento *per unità di lunghezza* e I il valore della corrente circolante in ciascuna di esse.

Esteriormente al solenoide, il campo è, com'è ovvio, nullo per le stesse ragioni del caso precedente.

7.4. Le leggi della magnetostatica in forma locale

Come per il caso elettrostatico, presentiamo ora le leggi della magnetostatica in forma locale. Consideriamo inizialmente il caso di correnti distribuite con densità di volume \mathbf{J} finita.

Applicando la *prima legge* della magnetostatica a una qualsiasi superficie chiusa Σ , si ha

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Supponendo che il campo sia ovunque finito e continuo con le sue derivate parziali prime, si ha (per il teorema della divergenza)

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{B} d\tau = 0.$$

Essendo tale relazione valida per qualsiasi Σ , in ogni punto del campo dev'essere

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

[7.4.1]

E' questa l'espressione in forma locale della prima legge della magnetostatica, valida in tutti i punti in cui la corrente sia distribuita con densità di volume finita \mathbf{J} (o, in particolare, nulla).

Invece in punti in cui la corrente sia distribuita con densità superficiale \mathbf{K}_s la [7.4.1] non può essere usata, giacché, come si vedrà, il campo presenta ivi una discontinuità, il che non consente di definire in senso usuale la divergenza di \mathbf{B} .

Dato un punto P_0 siffatto (vedi fig. 7.11), ragionando in maniera analoga a quanto si è fatto nel caso elettrostatico, applichiamo la prima legge a una superficie di tipo "M" (vedi § 2.6). Trascurando il flusso uscente dalla superficie laterale, perché infinitesimo di ordine superiore rispetto a quello relativo alle due basi, si ottiene subito

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = 0,$$

e quindi

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad [7.4.2]$$

dove B_{n1} e B_{n2} sono le componenti del campo \mathbf{B} lungo la normale \mathbf{n} alla superficie.

Passando alla *seconda legge*, consideriamo una regione in cui la corrente sia distribuita con densità di volume \mathbf{J} finita (o, eventualmente, nulla). Applicando la legge di Ampère a una linea chiusa γ , si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

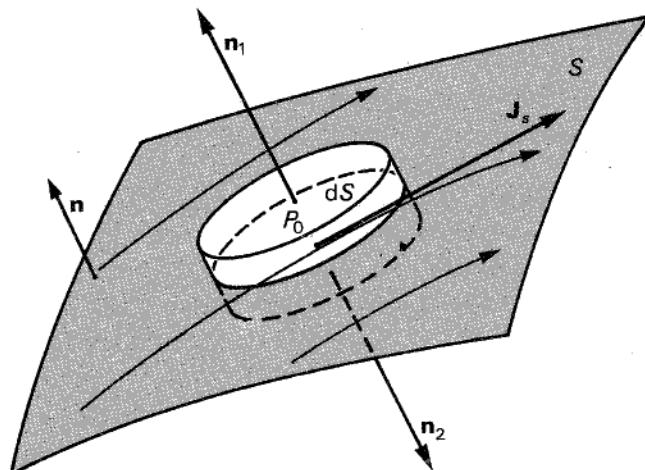


Figura 7.11

dove I è la corrente totale concatenata con γ . Tenendo conto, inoltre, della continuità di \mathbf{B} , dal teorema di Stokes si ricava

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_{\gamma}} \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove S_{γ} è una qualsiasi superficie di orlo γ . Osservando, poi, che la corrente I può essere espressa come flusso attraverso S_{γ} della densità di corrente di volume \mathbf{J} , si ha

$$\iint_{S_{\gamma}} \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Per l'arbitrarietà di γ e S_{γ} nel campo, si ottiene infine

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad [7.4.4]$$

E' questa l'espressione della seconda legge, in forma locale, valida per i punti in cui la corrente sia distribuita con densità di volume \mathbf{J} finita (o eventualmente nulla). Le correnti di questo tipo costituiscono i *vortici* del campo magnetico.

Esaminiamo ora il caso in cui la corrente sia distribuita con densità superficiale \mathbf{J}_s su una superficie S . Considerando una linea chiusa elementare di tipo "T" (vedi fig. 7.12), e trascurando i termini derivanti dai tratti di linea ortogonali a S , perché infinitesimi di ordine superiore rispetto agli altri due, si ottiene

$$[B_t] = \mu_0 J'_s; \quad [7.4.5]$$

$[B_t]$ è la variazione, nel passaggio dall'una all'altra faccia di S , della componente di \mathbf{B} secondo la direzione (tangente a S) di l_1 e l_2 ; J'_s è la componente di \mathbf{J}_s secondo la direzione perpendicolare, nel piano tangente a S , alla linea "T". La [7.4.5] può essere riscritta, nella forma equivalente:

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{J}_s, \quad [7.4.6]$$

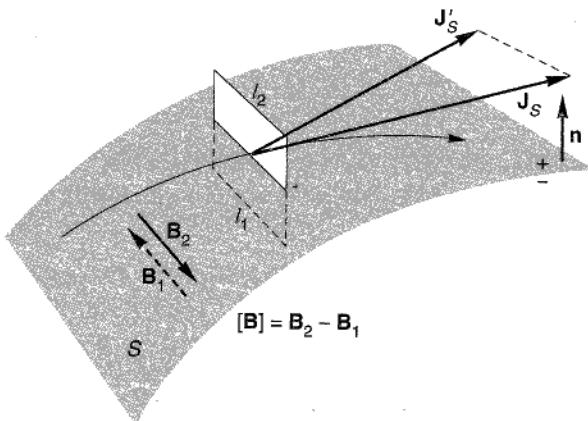


Figura 7.12

indicando con \mathbf{n} il versore della normale a S e con $[\mathbf{B}]$ la variazione del vettore induzione magnetica nel passaggio dalla faccia negativa alla faccia positiva di S .

Infine, nelle immediate vicinanze di un conduttore filiforme percorso da corrente (anche non rettilineo), il campo tende ad assumere l'andamento caratteristico del conduttore rettilineo e indefinito.

Diamo un quadro riassuntivo dei casi esaminati:

a) Punti in cui non esiste corrente:	$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$
b) Punti in cui la corrente è distribuita con densità di volume \mathbf{J} limitata e continua:	$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \end{array} \right.$
c) Punti in cui la corrente è distribuita con densità superficiale \mathbf{J}_s :	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} \\ \mathbf{n} \times [\mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{J}_s \end{array} \right.$
d) Punti in cui circola una corrente filiforme di intensità I :	$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{B}_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}_n}{\mathbf{B}_t} = 0 \end{array} \right.$

7.5 Il potenziale vettore e la legge elementare di Laplace

Com'è noto (vedi § A.17) ogni campo solenoidale ammette potenziale vettore; pertanto, \mathbf{B} ammette potenziale vettore. Indicato con \mathbf{A} uno qualsiasi dei potenziali vettori di \mathbf{B} , risulta

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad [7.5.1]$$

E' anche noto che, se \mathbf{A} è un potenziale vettore per \mathbf{B} , tale è ogni altro campo

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi, \quad [7.5.2]$$

dove φ è un qualsiasi campo scalare. Di conseguenza ogni campo magnetico \mathbf{B} ammette infiniti potenziali vettori: la conoscenza di uno fornisce quella di tutti gli altri; essendo essi definiti dalla [7.5.2].

Sostituendo la [7.5.1] nella [7.4.4], si ottiene subito

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Per una nota formula di analisi vettoriale (vedi [A.18.5]) si ha

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad [7.5.3']$$

Tra gli infiniti potenziali vettori di \mathbf{B} è sempre possibile sceglierne uno solenoidale,⁸ per il quale, cioè, risulti in ogni punto

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

La [7.5.3'] diventa allora

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad [7.5.4]$$

Ogni soluzione di questa equazione, purché solenoidale, costituisce un potenziale vettore del campo \mathbf{B} prodotto dalle correnti \mathbf{J} assegnate. In coordinate cartesiane la [7.5.4], proiettata sui tre assi coordinati, è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z. \end{cases} \quad [7.5.4']$$

La ricerca di un potenziale vettore solenoidale associato alla assegnata distribuzione di correnti si riduce dunque alla ricerca della soluzione di un sistema di tre equazioni scalari, ciascuna delle quali ha la forma di un'equazione di Poisson. Con l'ulteriore condizione al contorno che le tre funzioni, A_x, A_y, A_z si annullino all'infinito, la soluzione di ciascuna equazione assume, come nel caso elettrostatico, la forma dell'integrale "coulombiano":

$$\begin{cases} A_x(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{J_x(Q)}{r_{QP}} d\tau \\ A_y(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{J_y(Q)}{r_{QP}} d\tau \\ A_z(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{J_z(Q)}{r_{QP}} d\tau; \end{cases} \quad [7.5.5]$$

le componenti A_x, A_y e A_z sono valutate nel generico punto-campo P , mentre le J_x, J_y e J_z sono valutate nel generico punto-sorgente Q e r_{QP} indica la distanza tra P e Q ; l'integrale di volume è esteso infine all'intera regione nella quale è distribuita la corrente.

Le [7.5.5] possono essere riassunte formalmente in un'unica relazione vettoriale

⁸ Dato un qualsiasi potenziale vettore \mathbf{A}_0 , non solenoidale, è sufficiente, allo scopo, considerare una funzione scalare ψ tale che risulti ovunque

$$\nabla^2 \psi = -\operatorname{div} \mathbf{A}_0.$$

Infatti, il potenziale vettore definito dalla

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \operatorname{grad} \psi$$

è per definizione solenoidale.

che consente il calcolo diretto del potenziale vettore \mathbf{A} , a partire dalla conoscenza di \mathbf{J} :

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q)}{r_{QP}} d\tau, \quad [7.5.5']$$

purché, naturalmente, sia nota la distribuzione di \mathbf{J} in tutti i punti dello spazio.

Una volta noto il campo vettoriale \mathbf{A} , è semplice calcolare \mathbf{B} , essendo

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Risulta in questo modo risolto, almeno in linea di principio, il problema fondamentale della magnetostatica, che consiste nel *determinare il campo magnetico prodotto da una assegnata distribuzione di correnti circolanti in conduttori posti nel vuoto*. Rispetto al caso elettrostatico, la soluzione è soltanto più complicata, a causa del carattere vettoriale della funzione integranda nella [7.5.5']. Sostituendo la [7.5.1] nella [7.5.5'], si ottiene

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot}_P \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q)}{r_{QP}} d\tau. \quad [7.5.6]$$

Per la linearità dell'operatore "rot", si ottiene

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \text{rot}_P \frac{\mathbf{J}(Q)}{r_{QP}} d\tau, \quad [7.5.6']$$

dove il pedice P indica che l'operazione di "rot" va effettuata nel punto-campo P (e non nel punto-sorgente Q). Data la relazione (vedi app. A)

$$\text{rot}_P \frac{\mathbf{J}(Q)}{r_{QP}} = \frac{1}{r_{QP}} \text{rot}_P \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \text{grad}_P \frac{1}{r_{QP}},$$

ed essendo $\text{rot}_P \mathbf{J} = 0$ (poiché \mathbf{J} non è funzione di P), si ha, in definitiva,

$$\mathbf{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \mathbf{J}(Q) \times \text{grad}_P \frac{1}{r_{QP}} d\tau.$$

D'altra parte,

$$\text{grad}_P \frac{1}{r_{QP}} = -\frac{1}{r_{QP}^2} \text{grad}_P r_{QP} = -\frac{\mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3},$$

per cui

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q) \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} d\tau. \quad [7.5.6'']$$

Questa relazione è del tutto equivalente alla [7.5.6], ma consente di arrivare più agevolmente a un'espressione generale del campo magnetico prodotto da un'assegnata

distribuzione di correnti filiformi. Consideriamo, a tal fine, un generico circuito filiforme percorso da una corrente I . Avendo posto $d\tau = dS dl$, ove dS è l'area della sezione trasversale dell'elemento di volume $d\tau$ e dl la sua lunghezza, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\gamma} \frac{\mathbf{J}(Q) \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} dS dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\gamma} \frac{\mathbf{J}(Q) dS \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} dl = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\gamma} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} dl, \end{aligned} \quad [7.5.7]$$

dove \mathbf{t} è il versore della tangente alla curva γ che costituisce l'asse del conduttore percorso da corrente.

La [7.5.7] può essere riletta immaginando l'intero circuito γ suddiviso in tratti elementari dl ciascuno dei quali fornisca un contributo elementare al campo \mathbf{B} , dato da

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Idl \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3}, \quad [7.5.7']$$

relazione nota come *legge elementare di Laplace*: essa, evidentemente, non ha un significato autonomo rispetto alla [7.5.7], in quanto non ha senso fisico considerare un "elemento di corrente" Idl prescindendo dal circuito chiuso di cui fa parte. E' d'altra parte suggestiva l'analogia della [7.5.7'] con la formula che nel caso elettrostatico fornisce il contributo della generica carica elementare dq al campo in P :

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3}.$$

*7.6 Espansione in multipoli del potenziale vettore

Sia data una distribuzione di correnti in una regione limitata dello spazio; analogamente a quanto è stato fatto per le distribuzioni continue di cariche (vedi § 3.6), descriviamone gli effetti a grande distanza. Sia τ' la regione in cui è distribuita la corrente, con densità di volume \mathbf{J} ; indichiamo con \mathbf{r}' la congiungente l'origine O con il generico punto P' di τ' e con $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ la densità di corrente in P' . Detto poi \mathbf{r} il vettore congiungente O con il generico punto di osservazione P , il potenziale vettore \mathbf{A} prodotto in P dalla distribuzione di corrente è

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \quad [7.6.1]$$

Limitandoci a considerare punti P per i quali

$$\frac{r'}{r} \ll 1,$$

si ha (come nel caso elettrostatico)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots$$

Sostituendo tale espansione nell'espressione del potenziale vettore e limitandoci ai primi due termini, si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) d\tau'.$$

Ponendo

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{r} d\tau', \quad \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\tau',$$

risulta

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1. \quad [7.6.2]$$

Il primo termine di questa somma viene indicato come *termine di monopolo*; il secondo, come *termine di dipolo*. Contrariamente al caso elettrostatico, il termine di monopolo è sempre nullo. Per dimostrarlo, osserviamo anzitutto che

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \iiint_{\tau'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau',$$

poiché r è indipendente dalla variabile di integrazione. Per calcolare l'integrale, suddividiamo l'intera regione τ' in tanti "circuiti" elementari, ciascuno costituito da un tubo di flusso del vettore \mathbf{J} . L'integrale si traduce quindi nella somma vettoriale dei contributi forniti da ciascuno di tali tubi di flusso. Consideriamo il generico contributo elementare: indicando con γ la linea chiusa che costituisce l'asse del tubo di flusso in esame e con dS l'area della sua sezione retta (in generale, variabile lungo γ), si ha

$$d\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \oint_{\gamma} \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \oint_{\gamma} J(r') dS dl,$$

dove t è il versore della tangente a γ , avente ovunque (per ipotesi) la direzione e il verso di \mathbf{J} . Poiché, per la solenoidalità di \mathbf{J} , la corrente elementare $J(r') dS$ è costante lungo γ , si ha⁹

$$d\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} J(r') dS \oint_{\gamma} t dl = 0. \quad [7.6.3]$$

⁹ Infatti, essendo i vettori $t dl$ "consecutivi", nel loro insieme costituiscono un "poligono" chiuso, per cui $\oint_{\gamma} t dl = 0$.

Essendo dunque nullo il contributo fornito dal singolo tubo di flusso elementare, risulta

$$\iiint_{\tau'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' = 0. \quad [7.6.4]$$

Consideriamo ora il secondo termine della [7.6.2]: si ha

$$\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mathbf{r}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

e risulta perciò

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) d\tau'.$$

Scrivendo poi

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) + \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{r}' \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right] + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right], \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) - \mathbf{r}' \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right] \right\} d\tau' + \\ &\quad -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) + \mathbf{r}' \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right] \right\} d\tau'. \end{aligned} \quad [7.6.5]$$

Il secondo integrale a secondo membro della [7.6.5] è nullo. Infatti, suddividendo ancora una volta l'intera distribuzione di corrente in tubi di flusso elementari, si ha

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' = J(\mathbf{r}') dS \mathbf{t} dl = dI \mathbf{t} dl,$$

dove dI indica il valore della corrente circolante nel generico tubo di flusso elementare. Il contributo dato da tale tubo di flusso, di asse γ , al secondo integrale nella [7.6.5] è pari a

$$d\mathbf{A}^* = -\frac{\mu_0}{4\pi} dI \oint_{\gamma} \frac{1}{2} \left[\mathbf{t} \left(\mathbf{r}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) + \mathbf{r}' \left(\mathbf{t} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right] dl.$$

Essendo $\mathbf{tdl} = \mathbf{dr}'$, si ha poi

$$\mathbf{dA}^* = -\frac{\mu_0}{4\pi} dI \oint_{\gamma} \frac{1}{2} \left[\mathbf{dr}' \left(\mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) + \mathbf{r}' \left(\mathbf{dr}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \right].$$

Inoltre

$$\mathbf{dr}' \left(\mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) + \mathbf{r}' \left(\mathbf{dr}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) = \mathbf{d}' \left[\mathbf{r}' \left(\mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \right],$$

indicando con il simbolo “ d' ” l’operazione di differenziazione rispetto alle variabili con apice. Risulta, con ciò, dimostrato che il vettore \mathbf{dA}^* è esprimibile come integrale di linea (esteso a γ) di un differenziale esatto: dunque esso è senz’altro nullo. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per ogni tubo di flusso: in definitiva, il secondo integrale nella [7.6.5] risulta nullo e si ha

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau'} \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) - \mathbf{r}' \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{r} \right] \right\} d\tau'.$$

Ricordando ora l’identità

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c},$$

valida per ogni terna di vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , si ha

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) - \mathbf{r}' \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{r} \right] = \left[\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] \times \nabla \frac{1}{r},$$

e quindi

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \left\{ [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] \times \nabla \frac{1}{r} \right\} d\tau'.$$

Essendo poi il vettore $\nabla \frac{1}{r}$ indipendente dalla variabile di integrazione, risulta

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d\tau' \right\} \times \nabla \frac{1}{r} \quad [7.6.6]$$

Il vettore

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d\tau' \quad [7.6.7]$$

è denominato *momento di dipolo* della distribuzione di corrente rispetto all’origine O . Sostituendo la [7.6.7] nella [7.6.6], si ha infine

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad [7.6.8]$$

Il vettore \mathbf{m} , definito dalla [7.6.7], risulta indipendente dal punto O dal quale si spiccano i raggi vettori \mathbf{r}' . Data infatti una nuova origine O' e indicando con ρ' le distanze da essa, risulta

$$\rho' = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'O}$$

dove $\mathbf{r}_{O'O}$ è il vettore spiccato da O' verso O .

Sostituendo tale relazione nella [7.6.7], si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{m}' &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \rho' \times \mathbf{J}(\rho') d\tau' = \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} (\mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'O}) \times \mathbf{J} d\tau' = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} d\tau' + \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{J} d\tau'. \end{aligned}$$

Essendo il vettore $\mathbf{r}_{O'O}$ indipendente dalla variabile di integrazione, si ha subito

$$\mathbf{m}' = \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} d\tau' + \frac{1}{2} \mathbf{r}_{O'O} \times \iiint_{\tau'} \mathbf{J} d\tau',$$

e quindi, per la [7.6.4],

$$\mathbf{m}' = \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} d\tau' = \mathbf{m}. \quad [7.6.9]$$

Riassumendo, mentre il momento di dipolo elettrico di una distribuzione di cariche risulta indipendente dal polo rispetto al quale è calcolato soltanto quando la carica totale è nulla, nel caso magnetico ciò si verifica sempre, poiché in ogni caso risulta

$$\iiint_{\tau'} \mathbf{J} d\tau' = 0.$$

7.7 Il dipolo magnetico ideale

Un caso importante è quello in cui la distribuzione di corrente si riduce a una spira filiforme γ percorsa da corrente. Nell'ipotesi che questa sia *piana* (come in fig. 7.13), l'espressione del momento di dipolo, che in questo caso verrà indicato con \mathbf{m} , diventa particolarmente semplice: infatti risulta

$$\mathbf{J} d\tau' = \mathbf{J} S_c dl = \mathbf{J} S_c t dl = I t dl,$$

dove S_c è l'area della sezione retta del conduttore e I l'intensità di corrente che lo

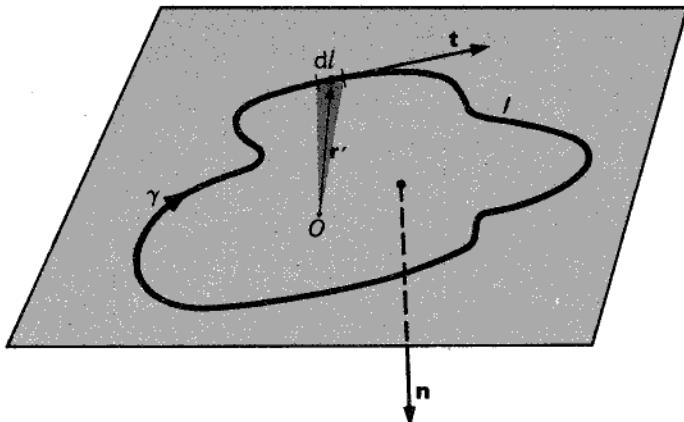


Figura 7.13
Spira piana, filiforme, percorsa da corrente.

percorre. Sostituendo l'espressione precedente nella [7.6.7], si ha subito

$$\mathbf{m} = I \oint_{\gamma} \frac{1}{2} \mathbf{r}' \times \mathbf{t} dl. \quad [7.7.1]$$

Avendo il vettore $(1/2)\mathbf{r}' \times \mathbf{t} dl$ modulo pari all'area del triangolo avente base dl e vertice opposto in O , risulta

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}, \quad [7.7.2]$$

dove S è l'area della regione piana delimitata dalla spira e \mathbf{n} il versore della normale alla spira stessa; il verso di \mathbf{n} è, al solito, quello di avanzamento di un cavatappi che ruoti nel verso scelto su γ per definire la corrente I .

Come nel caso elettrostatico, anche in quello magnetostatico si introduce un *dipolo magnetico ideale*, definito facendo tendere a zero l'area S di una spira e aumentando contemporaneamente la corrente I che la percorre, in modo che \mathbf{m} resti costante. Il sistema puntiforme cui in tal modo si perviene prende il nome di "dipolo magnetico ideale", ed è caratterizzato dal suo momento di dipolo \mathbf{m} .

Il campo magnetico prodotto da un dipolo ideale si calcola subito, utilizzando la [7.6.8]. Per un dipolo ideale, infatti, il potenziale vettore è

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad [7.7.3]$$

Tale relazione, in questo caso, è da considerarsi esatta, poiché la distribuzione di corrente che costituisce il dipolo si riduce a un punto, e, di conseguenza, la distanza r risulta, in ogni caso, infinitamente maggiore della r' (nulla).

Nota \mathbf{A} , il campo magnetico \mathbf{B} si calcola agevolmente. Si ha infatti

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Essendo poi $r/r^3 = -\operatorname{grad} 1/r$, si ha

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\mathbf{m} \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right). \quad [7.7.4]$$

Inoltre, per una nota identità vettoriale (vedi § A.19),

$$\mathbf{m} \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\operatorname{rot} \frac{\mathbf{m}}{r} + \frac{1}{r} \operatorname{rot} \mathbf{m},$$

da cui, essendo \mathbf{m} costante,

$$\mathbf{m} \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\operatorname{rot} \frac{\mathbf{m}}{r}.$$

La [7.7.4] diviene allora

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{m}}{r}.$$

Ricordando che, per ogni campo vettoriale \mathbf{a} ,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a},$$

si ha

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\mathbf{m}}{r} - \nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} \right).$$

D'altra parte, esprimendo il termine $\nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r}$ in coordinate cartesiane, risulta

$$\left(\nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} \right)_x = \nabla^2 \frac{m_x}{r}, \quad \left(\nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} \right)_y = \nabla^2 \frac{m_y}{r}, \quad \left(\nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} \right)_z = \nabla^2 \frac{m_z}{r},$$

per cui (essendo \mathbf{m} costante)

$$\left(\nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} \right)_x = m_x \nabla^2 \frac{1}{r}, \quad \left(\nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} \right)_y = m_y \nabla^2 \frac{1}{r}, \quad \left(\nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} \right)_z = m_z \nabla^2 \frac{1}{r}.$$

Poiché, per $r \neq 0$,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0,$$

si ha infine

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\mathbf{m}}{r}. \quad [7.7.5]$$

Questa relazione fornisce \mathbf{B} in tutti i punti, tranne quello in cui è posto il dipolo, dove il campo non è definito. La [7.7.5] mostra che il campo magnetico prodotto da un dipolo ideale è esprimibile come gradiente di un'opportuna funzione scalare U , data da

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\mathbf{m}}{r} . \quad [7.7.6]$$

Si è dunque trovata una distribuzione di corrente per la quale il campo magnetico ammette ovunque (tranne nel punto in cui essa è concentrata) un *potenziale scalare* monodromo. Del resto, comunque si consideri una linea chiusa γ non passante per il punto in cui è posto il dipolo, poiché essa non si concatena con la corrente, per la seconda legge della magnetostatica dev'essere

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = 0,$$

il che garantisce che \mathbf{B} discende da un potenziale scalare. Data invece una linea chiusa concatenata con il dipolo, la circuitazione di \mathbf{B} risulta *non* nulla. Riprendiamo in esame la [7.7.6]; in base a note identità vettoriali si ha

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{m}}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

e quindi (essendo $\operatorname{div} \mathbf{m} = 0$)

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{m}}{r} = \mathbf{m} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

Si ha cioè

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}, \quad [7.7.7]$$

da cui l'espressione

$$U = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad [7.7.7']$$

analoga a quella, la [3.7.4], che dà il potenziale di un dipolo elettrico di momento $\mathbf{P} = \mathbf{m}$.

Anche l'andamento dei campi \mathbf{B} ed \mathbf{E} , nei due casi, è simile, se li si considera a distanza sufficientemente grande dai dipoli (nelle immediate vicinanze intercorrono invece differenze notevoli).

Infine, il campo di una qualunque distribuzione di correnti, tutte al finito, si può sempre considerare come sovrapposizione dei campi prodotti da una opportuna distribuzione di dipoli magnetici. Pertanto esso tende a zero, all'infinito, almeno come $1/r^3$, così come il campo dei singoli dipoli.

7.8 Coefficienti di auto- e mutua induzione di circuiti

Consideriamo (vedi fig. 7.14) un circuito quasi filiforme τ percorso da corrente stazionaria I (prodotta, ad esempio, da un generatore di f.e.m. non disegnato in figura). In tutti i punti (interni ed esterni al conduttore) il campo magnetico \mathbf{B} può essere calcolato dalla

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad [7.8.1]$$

con

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau, \quad [7.8.2]$$

quando sia nota la distribuzione di \mathbf{J} in tutti i punti del volume τ del conduttore. Indichiamo con γ la linea chiusa che costituisce l'asse longitudinale del circuito, e con Φ_γ il flusso del campo magnetico prodotto da I e concatenato con γ . Si ha

$$\Phi_\gamma = \iint_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \quad [7.8.3]$$

dove S_γ è una qualsiasi superficie (aperta) avente la linea chiusa γ come orlo e orientata in modo che il verso positivo della normale ad essa, dato da \mathbf{n} , e il verso scelto su γ (per valutare I) siano legati fra loro dalla regola del cavatappi. Dalle proprietà di \mathbf{A} discende subito

$$\Phi_\gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl. \quad [7.8.3']$$

Se quindi è nota la distribuzione di \mathbf{J} nel conduttore, la [7.8.2] fornisce \mathbf{A} e la [7.8.3'] fornisce Φ_γ . Variamo ora in qualche modo (ad esempio, con un nuovo generatore) il valore di Φ_γ .

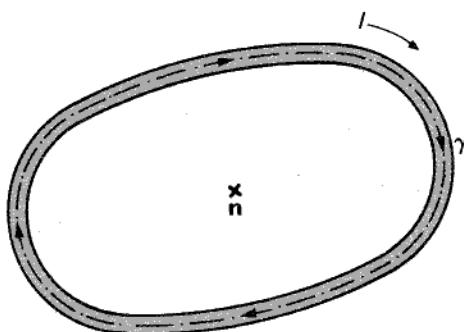


Figura 7.14

\mathbf{J} in tutti i punti del circuito fino a ottenere una nuova distribuzione di corrente

$$\mathbf{J}' = K \mathbf{J}, \quad [7.8.4]$$

con K costante arbitraria. In queste condizioni si ha

$$I' = K I.$$

Per le [7.8.1] e [7.8.2], anche \mathbf{A} e \mathbf{B} variano linearmente:

$$\mathbf{A}' = K \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B}' = K \mathbf{B}.$$

Risulta quindi

$$\Phi'_\gamma = K \Phi_\gamma,$$

ove Φ'_γ indica il nuovo valore del flusso concatenato con la linea γ . Detto $\Phi_{1\gamma}$ il valore di Φ_γ che corrisponde alla corrente unitaria circolante nel circuito, si ha

$$\Phi_\gamma = \frac{\Phi_{1\gamma}}{1} I,$$

dove l'“uno” a denominatore va inteso come valore della corrente unitaria. Indicando il rapporto $\Phi_{1\gamma}/1$ con il simbolo L , si scriverà

$$\Phi_\gamma = L I. \quad [7.8.5]$$

L prende il nome di *coefficiente di autoinduzione* (o *autoinduttanza*) del circuito (relativamente alla linea γ). Esso ha le dimensioni di un flusso diviso per una corrente; la sua unità, nel SI, è dunque il Wb/A e prende il nome di “henry” (H). Per come è stato definito, L risulta non negativo: infatti quando I è positiva (come nel caso di fig. 7.14) le linee vettoriali del campo magnetico “puntano” dalla stessa parte di \mathbf{n} rispetto a γ , e ciò implica che anche Φ_γ risulta positivo. Analogamente, quando I è negativa anche Φ_γ è tale: in ambedue i casi il rapporto $\Phi_{1\gamma}/I$ sarà positivo.

Φ_γ è stato definito con riferimento a una linea chiusa γ che costituisce l'asse longitudinale del circuito; potremmo però ripetere tutti i ragionamenti considerando un'altra linea chiusa γ' , anch'essa interamente contenuta nel circuito. Se la lunghezza di questo è di gran lunga maggiore del diametro del conduttore, il flusso concatenato con γ e quello concatenato con γ' , prodotti dalla stessa corrente I , sono pressoché coincidenti. Riferendoci a γ' , dunque, perverremmo a un valore di L all'incirca uguale al precedente.¹⁰ Non altrettanto semplice, come vedremo più avanti, è il caso di un conduttore non filiforme.

¹⁰ Il supporre il conduttore *rigorosamente* filiforme (cioè con diametro nullo) condurrebbe a una definizione di L non significativa. Avvicinandosi al conduttore, anche in corrispondenza di una corrente finita il campo \mathbf{B} tenderebbe all'infinito; il suo flusso concatenato con il circuito assumerebbe un valore illimitato, e così pure il rapporto Φ_γ/I . D'altra parte, supporre che una corrente finita possa circolare in un conduttore rigorosamente filiforme non ha senso fisico.

Sia dato ora un sistema costituito da due circuiti quasi filiformi, del tipo descritto precedentemente (vedi fig. 7.15) e indicati rispettivamente con C_1 e C_2 . Supponiamo che nel primo circoli una corrente I_1 (valutata in base a un verso di riferimento arbitrariamente prefissato) e che nel secondo invece *non* circoli corrente. Fissiamo arbitrariamente un verso positivo su γ_2 , asse di C_2 , e, detta S_2 una qualunque superficie aperta che abbia tale linea come orlo, orientiamone la normale n_2 con la solita regola. Vogliamo determinare il flusso del campo magnetico prodotto da I_1 e concatenato con γ_2 . Ragionando come per il coefficiente di autoinduzione, risulta

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1, \quad [7.8.6]$$

dove Φ_{21} rappresenta il flusso, concatenato con γ_2 , prodotto da I_1 , e M_{21} un fattore

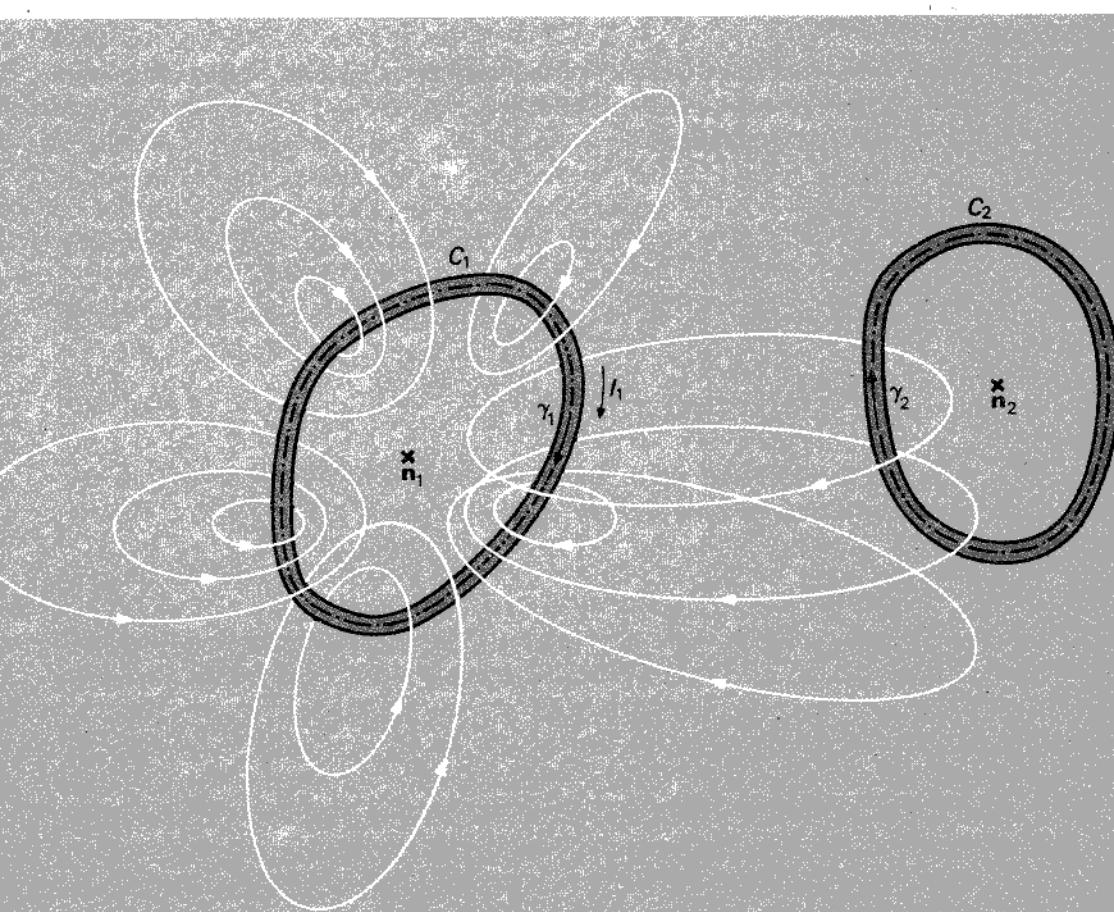


Figura 7.15

di proporzionalità avente le dimensioni di un'induttanza (e misurabile quindi, come L , in henry), denominato *coefficiente di mutua induzione* del primo circuito sul secondo.

M_{21} può essere maggiore o minore di 0, a seconda dell'orientamento dei circuiti. Nella figura 7.15, ad esempio, l'andamento delle linee vettoriali di \mathbf{B} prodotte da una corrente I_1 positiva è tale che, nei punti della superficie S_2 , \mathbf{B} e \mathbf{n}_2 hanno verso contrario, per cui $\Phi_{21} < 0$.¹¹ In questo caso, il coefficiente M_{21} è negativo. Se, ferma restando l'orientazione del primo circuito, si invertisse quella del secondo, e di conseguenza il verso positivo della normale a S_2 , il flusso Φ_{21} , prodotto dalla stessa corrente I_1 , risulterebbe positivo, e tale sarebbe anche il coefficiente M_{21} .

Consideriamo ora una situazione simmetrica rispetto alla precedente, in cui cioè circoli corrente solo nel circuito C_2 . Ragionando come sopra, si ottiene

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2, \quad [7.8.7]$$

ove Φ_{12} è il flusso concatenato con C_1 prodotto da I_2 , e M_{12} è il coefficiente di mutua induzione del secondo circuito sul primo.

Si verifica facilmente che

$$M_{21} = M_{12} \quad [7.8.8]$$

cosicché è lecito parlare di un unico coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti. Calcoliamo infatti il valore di M_{21} e M_{12} , supponendo nota la distribuzione del potenziale vettore prodotta nel primo caso dalla corrente I_1 , e, nel secondo, da I_2 . Dalla [7.8.2] si ha subito, nel primo caso,

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\gamma_1} \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \frac{\mathbf{t}_1}{r} dl_1, \quad [7.8.9]$$

dove γ_1 è la linea chiusa che costituisce l'asse longitudinale del primo circuito e \mathbf{t}_1 il versore della tangente a tale curva. Per definizione si ha

$$\Phi_{21} = \oint_{\gamma_2} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{t}_2 dl_2, \quad [7.8.10]$$

dove γ_2 è l'asse del secondo circuito. Dalle [7.8.9] e [7.8.10] si ha dunque

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \left(\oint_{\gamma_1} \frac{\mathbf{t}_1}{r} dl_1 \right) \cdot \mathbf{t}_2 dl_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2}{r} dl_1 dl_2. \quad [7.8.11]$$

Con un procedimento analogo si deduce

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \left(\oint_{\gamma_2} \frac{\mathbf{t}_2}{r} dl_2 \right) \cdot \mathbf{t}_1 dl_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1}{r} dl_2 dl_1, \quad [7.8.12]$$

per cui $M_{21} = M_{12} = M$.

¹¹ Si noti che soltanto le linee vettoriali che si concatenano con *entrambi* i circuiti contribuiscono al flusso di mutua induzione.

L'eguaglianza è stata mostrata supponendo che i flussi siano proporzionali alle correnti: ove tale proporzionalità non sia verificata (come nel caso dei materiali *ferromagnetici*, di cui si tratterà più avanti), il risultato non è più valido. Nei casi lineari, invece, la [7.8.11] (detta anche *integrale di Neumann*) costituisce un'utile via per il calcolo dei coefficienti di mutua induzione.

Esempio 1. Autoinduzione di un solenoide 'lungo'

Consideriamo un solenoide rettilineo la cui lunghezza sia molto maggiore della dimensione trasversale tipica. Sappiamo (vedi § 7.3) che, se le spire che costituiscono il solenoide sono sufficientemente numerose e avvolte in maniera uniforme, il campo **B** è, con ottima approssimazione, costante nella regione interna e pari a

$$B = \mu_0 nI,$$

ove n è il numero di spire per unità di lunghezza e I la corrente circolante in ciascuna di esse. Per calcolare il flusso concatenato con la linea chiusa che costituisce l'intero avvolgimento, occorrerebbe, in base alla definizione, valutare l'integrale di superficie di **B** attraverso una generica superficie che avesse come orlo l'avvolgimento stesso. Un simile calcolo, per la difficoltà di visualizzare la superficie, si presenta non facile. Tuttavia si commette un errore trascurabile considerando il flusso Φ , concatenato con l'intero avvolgimento, pari alla somma dei flussi Φ_{sp} concatenati con le singole spire (considerate come se fossero chiuse). Poiché inoltre, per l'uniformità del campo, i flussi Φ_{sp} sono tra loro uguali, si deduce che

$$\Phi = N\Phi_{sp}, \quad [7.8.13]$$

dove N è il numero totale delle spire del solenoide e Φ_{sp} il flusso concatenato con una singola spira. Per l'uniformità di **B** si ha

$$\Phi_{sp} = BS = \mu_0 nIS = \mu_0 \frac{N}{l} IS, \quad [7.8.14]$$

ove l è la lunghezza del solenoide e S l'area della superficie (piana) racchiusa da ciascuna spira. Sostituendo la [7.8.14] nella [7.8.13], si ha

$$\Phi = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS,$$

e quindi, per definizione di coefficiente di autoinduzione,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S. \quad [7.8.15]$$

Esempio 2. Autoinduzione di un solenoide toroidale

Consideriamo un solenoide toroidale a sezione rettangolare (vedi fig. 7.16) di raggio interno R_{int} e raggio esterno R_{est} , composto da N spire avvolte in modo uni-

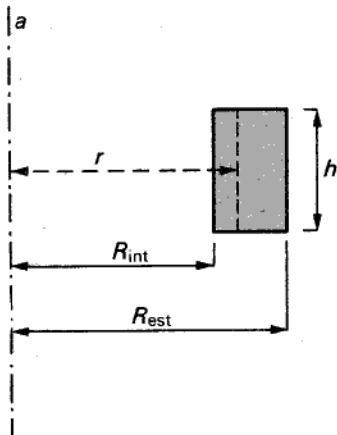


Figura 7.16

forme. Ragionando come per l'esempio precedente, si ha

$$\Phi = N \Phi_{sp}$$

con lo stesso significato dei simboli. Poiché il campo B nella regione interna al solenoide vale (vedi § 3)

$$B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r},$$

si ha subito

$$\Phi_{sp} = \int_{R_{int}}^{R_{est}} B(r) h dr = \int_{R_{int}}^{R_{est}} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln \frac{R_{est}}{R_{int}},$$

e quindi

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N \Phi_{sp}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_{est}}{R_{int}} \quad [7.8.16]$$

Esempio 3. Mutua induzione tra un filo rettilineo e un solenoide toroidale

Consideriamo un sistema di due circuiti (vedi fig. 7.17) costituito da un conduttore rettilineo, coassiale con un solenoide toroidale a sezione rettangolare. Calcoliamo anzitutto il flusso prodotto da una corrente I_1 circolante nel filo rettilineo e concatenato con una singola spira del solenoide. Con le convenzioni di segno addottate in figura, ricordando che la normale n_2 alla spira è orientata in maniera congruente con il verso assunto come positivo sul contorno della spira stessa, si ha

$$\Phi_{sp1} = - \int_{R_{int}}^{R_{est}} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} h dr = - \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi} \ln \frac{R_{est}}{R_{int}}.$$

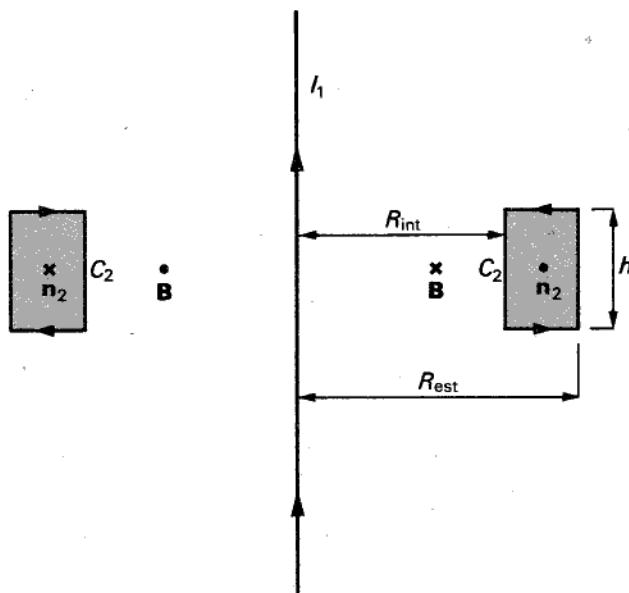


Figura 7.17

Il flusso concatenato con l'intero solenoide è allora

$$\Phi_{21} = N\Phi_{sp1} = -\frac{\mu_0 I_1 N h}{2\pi} \ln \frac{R_{est}}{R_{int}},$$

e per definizione di coefficiente di mutua induzione si ha

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = -\mu_0 \frac{Nh}{2\pi} \ln \frac{R_{est}}{R_{int}}. \quad [7.8.17]$$

7.9 Forze agenti su un circuito percorso da corrente, in un campo magnetico

Sia dato un circuito quasi filiforme percorso da corrente \$I\$ e immerso in un campo magnetico; consideriamone un tratto delimitato dalle sezioni \$S_1\$ e \$S_2\$, di lunghezza \$\Delta l\$ piccola rispetto alla lunghezza totale.

Immaginando di poter osservare il moto dei portatori di carica nel conduttore, indichiamo con \$q\$ il valore della carica di ciascuno di essi, e con \$\mathbf{v}\$ la sua velocità (corrispondente al moto ordinato che determina la corrente). Se \$\mathbf{B}\$ è il campo magnetico nel tratto di conduttore in esame (prodotto, naturalmente, sia da \$I\$ che da eventuali sorgenti esterne al circuito), la forza agente su ciascun portatore in moto è

$$\mathbf{F}_q = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad [7.9.1]$$

Come si è visto all'inizio di questo capitolo, essa si trasmette al reticolo fisso esistente nel conduttore e pertanto agisce globalmente su di esso. Calcoliamo ora la forza ΔF che agisce sul tratto Δl . Allo scopo, immagineremo di "fotografare" in un certo istante la situazione dei portatori di carica esistenti in Δl : la forza ΔF è la risultante delle forze agenti su essi all'istante considerato.

Supponendo che tutti i portatori abbiano la stessa velocità v , si ha

$$\Delta F = q v \mathbf{x} \mathbf{B} \Delta n, \quad [7.9.2]$$

dove Δn è il numero di portatori presenti nel tratto Δl all'istante in esame. Detto Δt l'intervallo di tempo necessario a ciascun portatore per percorrere il tratto Δl , si ha

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta l}{\Delta t} \mathbf{t},$$

dove \mathbf{t} è il versore orientato secondo l'asse del conduttore. La [7.9.2] può scriversi allora nella forma

$$\Delta F = q \frac{\Delta l}{\Delta t} \mathbf{t} \mathbf{x} \mathbf{B} \Delta n. \quad [7.9.3]$$

D'altra parte, i portatori che attraversano S_2 nel tempo Δt sono tutti e soli quelli presenti nel tratto di lunghezza Δl , e pertanto la carica totale che attraversa S_2 (in Δt) è

$$\Delta Q = q \Delta n.$$

La corrente è dunque

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q \frac{\Delta n}{\Delta t},$$

e la [7.9.3] assume la forma

$$\Delta F = I \Delta l \mathbf{t} \mathbf{x} \mathbf{B} \quad [7.9.4]$$

Passando al limite per $\Delta l \rightarrow 0$ si ottiene l'espressione della forza elementare che agisce su un tratto infinitesimo dl di conduttore percorso da una corrente I e immerso in un campo magnetico \mathbf{B} :

$$dF = Idl \mathbf{t} \mathbf{x} \mathbf{B}; \quad [7.9.5]$$

come si vede, essa è perpendicolare sia al conduttore sia al campo ed è diretta nel verso di avanzamento di un cavatappi che ruoti nel senso che va da $Idl \mathbf{t}$ a \mathbf{B} (secondo l'angolo minore).

Per calcolare la forza totale agente su un intero circuito percorso da corrente basta sommare i contributi relativi a ciascun tratto elementare, ottenendo

$$\mathbf{F} = \oint_{\gamma} Idl \mathbf{t} \mathbf{x} \mathbf{B}, \quad [7.9.6]$$

dove γ è la linea chiusa che costituisce l'asse longitudinale del circuito. Tale espressione è utile per determinare, ad esempio, il moto di un circuito *rigido* soggetto all'azione del campo magnetico. In tal caso, per calcolare la forza risultante è possibile, nella [7.9.6], limitarsi a considerare il campo magnetico \mathbf{B}_0 prodotto da sorgenti *esterne* al circuito: infatti il campo prodotto dalla I stessa non può produrre una forza risultante diversa da zero sul circuito, così come una singola carica non produce forza su sé stessa.

Ciò non è più possibile se si vuol studiare l'effetto deformante prodotto dall'azione di queste forze su un conduttore *non rigido*. In tal caso occorre determinare la distribuzione delle forze agenti sui singoli tratti elementari del circuito, tenendo però conto dell'*effettivo* campo \mathbf{B} agente sul trattino considerato: tale campo sarà la somma di quello prodotto da correnti esterne e di quello prodotto dalla corrente circolante nel circuito stesso.

Affrontiamo ora il caso generale di un conduttore "massiccio" percorso da corrente. A tal fine, esaminiamone un tratto generico, supponendo di conoscere la distribuzione della densità di corrente \mathbf{J} e del campo magnetico \mathbf{B} in esso esistenti. Dato un generico tubo di flusso elementare del vettore \mathbf{J} , consideriamone un tratto elementare di sezione retta dS e lunghezza dl . Trattando tale tubo di flusso come un circuito filiforme percorso dalla corrente elementare

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

(\mathbf{n} , vettore della normale a dS , è parallelo a \mathbf{J}), possiamo applicare ad esso la [7.9.5], ottenendo

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS) dl \mathbf{t} \times \mathbf{B}.$$

Poiché \mathbf{J} e \mathbf{n} hanno la stessa direzione e inoltre \mathbf{t} coincide con \mathbf{n} , si ha

$$d\mathbf{F} = dS dl \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

Indicando con $d\tau$ il volume elementare del tratto di tubo di flusso (pari al prodotto $dS dl$), si ha

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad [7.9.7]$$

relazione che fornisce la forza agente, *per unità di volume*, nel generico punto del conduttore. Per calcolare la forza totale che agisce su un tratto finito di conduttore basta sommare i contributi dei singoli volumi elementari, ottenendo

$$\mathbf{F} = \iiint_{\tau} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau, \quad [7.9.8]$$

ove τ è il volume della regione di conduttore considerata.

Esempio 1. Due conduttori rettilinei e indefiniti, paralleli fra loro

Dati due conduttori rettilinei, paralleli e indefiniti, posti a distanza d nel vuoto, percorsi dalle correnti I_1 e I_2 , calcoliamo la forza agente su ciascuno di essi per effetto

della corrente circolante nell'altro. Poiché, ad esempio, il campo \mathbf{B}_1 prodotto da I_1 in corrispondenza del secondo conduttore è perpendicolare ad esso e pari a

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d},$$

applicando la [7.9.6] si ottiene

$$F_{2L} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} L, \quad [7.9.10]$$

dove F_{2L} è il modulo della forza agente su un tratto di lunghezza L del secondo conduttore. La [7.9.6] mostra che tale forza è diretta lungo la perpendicolare ai due conduttori e risulta attrattiva se le due correnti sono concordi, repulsiva se sono discordi.

Utilizzando la [7.9.10] si definisce, nel Sistema internazionale, l'unità di corrente: l'"ampere" (A) è l'intensità di una corrente che, circolando in due conduttori rettilinei e indefiniti, posti nel vuoto a una distanza di 1 m, genera tra questi una forza (per unità di lunghezza) pari a 2×10^{-7} N/m.

Esempio 2. Spira rettangolare in campo magnetico uniforme

Consideriamo la spira rettangolare rigida γ di figura 7.18, libera di ruotare intorno all'asse z e percorsa da una corrente I ; essa è immersa in un campo magnetico \mathbf{B}_0 uniforme, perpendicolare all'asse z . La giacitura di γ sia tale che la sua normale \mathbf{n} formi un angolo α con \mathbf{B}_0 . Per calcolare le sole forze capaci di muovere la spira applichiamo la [7.9.6], considerando il solo campo \mathbf{B}_0 in cui la spira è immersa, senza tener conto del campo prodotto dalla corrente che circola in essa. Spezzando il cammino di integrazione nei quattro tratti AB , BC , CD e DA , si verifica subito che i contributi dei tratti AB e CD sono opposti e diretti lungo l'asse z ; essi non hanno, perciò, alcun effetto sulla spira; BC e DA forniscono, invece, due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , costituenti, nel loro insieme, una coppia di momento

$$M = IBLh \sin \alpha; \quad [7.9.11]$$

L e h indicano le lunghezze, rispettivamente, di AB e di BC . Tale coppia fa ruotare la spira finché \mathbf{n} non coincide con la direzione di \mathbf{B}_0 : in queste condizioni, M si annulla e la spira resta in equilibrio.

Esempio 3. Solenoide rettilineo e indefinito

Consideriamo un solenoide rettilineo e indefinito, a sezione circolare, percorso, in ciascuna delle sue spire, da una corrente I . Calcoliamo le forze che agiscono sul solenoide per effetto dell'interazione tra la corrente I e il campo magnetico \mathbf{B} da essa prodotto.

All'interno del solenoide \mathbf{B} è uniforme, diretto lungo l'asse e pari a

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I,$$

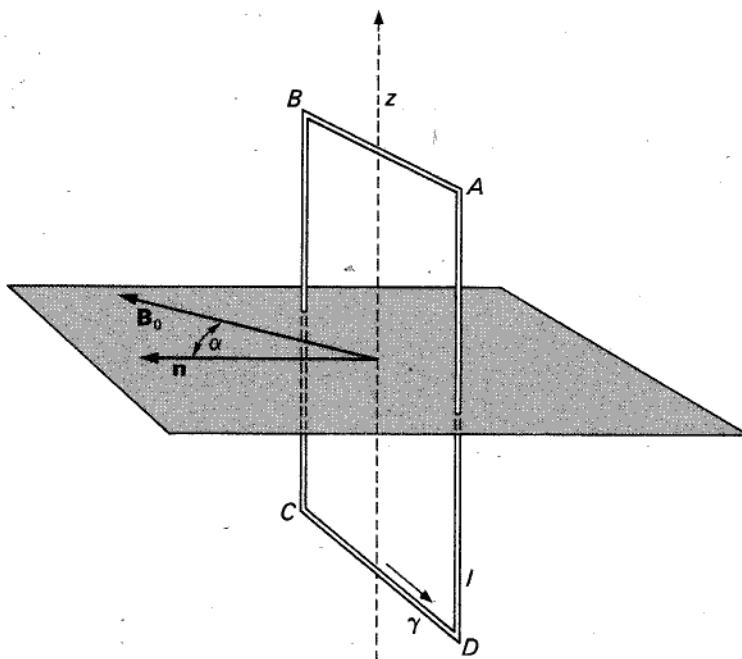


Figura 7.18

dove n è il numero di spire per unità di lunghezza; all'esterno, invece, il campo è nullo, per cui il solenoide risulta soggetto a una distribuzione di forze, a risultante nulla, agenti come una vera e propria pressione dall'interno verso l'esterno. Ricordando i ragionamenti fatti a proposito della pressione elettrostatica, è facile mostrare che la *pressione magnetica* agente sul solenoide è, in questo caso,

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \mu_0 \frac{n^2 I^2}{2} \quad [7.9.12]$$

7.10 Lavoro per spostare un circuito percorso da corrente

Sia dato un circuito filiforme γ (vedi fig. 7.19) percorso da una corrente I e immerso nel campo magnetico \mathbf{B}_0 prodotto da altre correnti (non disegnate); un tratto elementare di γ , dl , sia libero di spostarsi scorrendo lungo i "binari" conduttori p e q . Immaginiamo di applicare ad esso una forza sufficiente a spostarlo nella posizione $P'Q'$ in maniera *quasi statica*: supponiamo cioè che, in ogni istante, la forza applicata dallo sperimentatore sull'elemento dl bilanci esattamente la forza $d\mathbf{F}$ esercitata sullo stesso dal campo magnetico. In queste condizioni, calcoliamo il lavoro compiuto

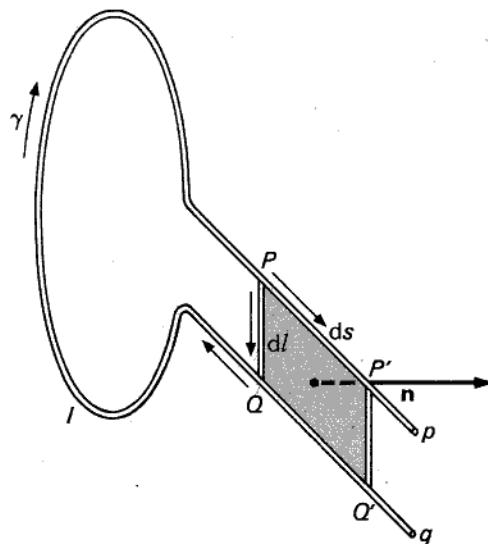


Figura 7.19

dalla forza $d\mathbf{F}$ nel corso dello spostamento.¹² Detta ds la lunghezza dello spostamento, si ha

$$d\mathcal{L} = d\mathbf{F} \cdot t_{PP'} ds, \quad [7.10.1]$$

dove $t_{PP'}$ è il versore della tangente al "binario" p . Detto \mathbf{B} il campo magnetico agente su dl (prodotto sia dalle distribuzioni di corrente degli altri circuiti sia da quello del circuito γ), per la [7.9.5], si ha

$$d\mathcal{L} = (I t dl \times \mathbf{B}) \cdot t_{PP'} ds, \quad [7.10.2]$$

dove t è il versore della tangente a γ in corrispondenza di dl . D'altra parte, risulta

$$t_{PP'} ds \times t_{PQ} dl = dS \mathbf{n}, \quad [7.10.3]$$

avendo indicato con dS l'area del rettangolo di lati dl e ds e con \mathbf{n} il versore della normale a tale superficie. Sostituendo l'espressione [7.10.3] nella [7.10.1], per la "regola ciclica" del prodotto triplo, si ha

$$d\mathcal{L} = t_{PP'} ds \times I t_{PQ} dl \cdot \mathbf{B} = I \mathbf{n} dS \cdot \mathbf{B}.$$

Il prodotto $\mathbf{n} dS \cdot \mathbf{B}$ rappresenta il flusso elementare $d\Phi_t$ di \mathbf{B} attraverso dS , per cui

$$d\mathcal{L} = I d\Phi_t. \quad [7.10.4]$$

¹² Supporremo, in quel che segue, che durante gli spostamenti dei circuiti le correnti in essi circolanti non mutino, cioè che gli spostamenti avvengano a correnti stazionarie.

Nel corso del suo moto, il conduttore $d\ell$ "taglia" le linee vettoriali di \mathbf{B} : il flusso $d\Phi_t$ corrisponde, appunto, all'area spazzata da $d\ell$.

Considerando ora un circuito γ *rigido* (filiforme) in moto rispetto alle sorgenti di \mathbf{B}_0 , le precedenti considerazioni si applicano, evidentemente, a tutti i tratti elementari in cui esso può pensarsi suddiviso: il lavoro totale compiuto dalle forze del campo, nel corso dello spostamento dell'intero circuito γ dalla posizione 1 alla posizione 2 (vedi fig. 7.20) è dato da

$$\mathcal{L} = I \Delta \Phi_t, \quad [7.10.5]$$

dove $\Delta \Phi_t$ è il flusso di \mathbf{B} attraverso la superficie ombreggiata. Tale flusso può essere espresso in forma diversa, osservando che

$$\Delta \Phi_t = \Phi_2 - \Phi_1, \quad [7.10.6]$$

dove Φ_1 e Φ_2 rappresentano i valori del flusso concatenato con γ relativi alle due posizioni considerate. Nel loro calcolo non occorre tener conto anche del flusso di autoinduzione prodotto dalla corrente I circolante nel circuito, poiché esso resta immutato nel passaggio da 1 a 2. I flussi che interessano sono dunque soltanto quelli dovuti a \mathbf{B}_0 , di mutua induzione con le altre correnti esistenti. E' chiaro d'altra parte che il circuito (supposto rigido) non può esercitare lavoro su sé stesso.

Estendiamo ora le conclusioni cui siamo pervenuti al caso generale di un circuito qualsiasi (di dimensioni non trascurabili rispetto alla sua lunghezza). Suddividiamo, allo scopo, l'intero conduttore massiccio, percorso dalla corrente totale I , in un numero N arbitrariamente grande di tubi di flusso del campo di corrente, caratterizzati rispettivamente dalle correnti I_1, I_2, \dots, I_N . Considerando ciascuno di tali tubi di flusso come un circuito quasi filiforme, possiamo scrivere

$$\mathcal{L}_1 = I_1(\Phi'_1 - \Phi_1), \quad \mathcal{L}_2 = I_2(\Phi'_2 - \Phi_2), \dots, \quad \mathcal{L}_N = I_N(\Phi'_N - \Phi_N),$$

indicando con \mathcal{L}_k il lavoro compiuto dalle forze del campo sul k -esimo tubo di flusso nel corso del suo spostamento, e con Φ_k e Φ'_k , rispettivamente, i valori del flusso concatenato con il medesimo tubo di flusso nelle sue posizioni iniziale e finale.

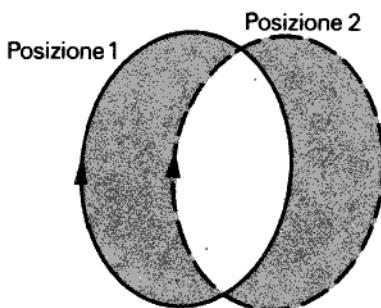


Figura 7.20

Il lavoro totale \mathcal{L} compiuto sull'intero circuito è dato da

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \cdots + \mathcal{L}_N = \\ &= I_1(\Phi'_1 - \Phi_1) + I_2(\Phi'_2 - \Phi_2) + \cdots + I_N(\Phi'_N - \Phi_N) = \\ &= I_1\Phi'_1 + I_2\Phi'_2 + \cdots + I_N\Phi'_N - (I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2 + \cdots + I_N\Phi_N).\end{aligned}\quad [7.10.7]$$

E' naturale, a questo punto, definire un flusso Φ , *concatenato con l'intero circuito massiccio*, tale che

$$I\Phi = I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2 + \cdots + I_N\Phi_N.$$

Per definizione

$$\Phi = \frac{I_1}{I}\Phi_1 + \frac{I_2}{I}\Phi_2 + \cdots + \frac{I_N}{I}\Phi_N,\quad [7.10.8]$$

da cui deriva infine

$$\mathcal{L} = I(\Phi' - \Phi),\quad [7.10.9]$$

indicando con Φ e Φ' , rispettivamente, i valori del flusso concatenato con l'intero circuito nella posizione iniziale e in quella finale.

La [7.10.8], estendendo la nozione di flusso concatenato al caso di un circuito non filiforme, permette di definire coefficienti di auto e mutua induzione anche nel caso di circuiti massicci.

Grazie a questi risultati è possibile inoltre calcolare rapidamente la risultante delle forze magnetiche agenti sulle diverse parti di un generico circuito percorso da corrente e il momento risultante agente su di esso. Infatti, se il circuito (supposto rigido) subisce una traslazione ds , il lavoro totale delle forze magnetiche, nel corso di tale spostamento, dev'essere pari a quello compiuto dalla risultante R . Si ha dunque

$$d\mathcal{L} = R \cdot ds = I d\Phi.\quad [7.10.10]$$

Applicando tale relazione al caso in cui lo spostamento dS sia diretto secondo l'asse x di un sistema di coordinate cartesiane Ox, y, z , si ottiene

$$R_x dx = I d\Phi,$$

dove $d\Phi$ indica la variazione del flusso concatenato con il circuito nel corso del suo spostamento. Pertanto

$$R_x = I \frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad [7.10.11]$$

e similmente,

$$R_y = I \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$R_z = I \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Analogamente, si può esprimere il momento risultante Γ agente sul circuito mediante le relazioni

$$\begin{cases} \Gamma_x = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \\ \Gamma_y = I \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \\ \Gamma_z = I \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}, \end{cases} \quad [7.10.12]$$

dove α, β, γ sono rispettivamente, gli angoli di rotazione attorno agli assi x, y, z .

*7.11 Cenni di magnetoidrostatica

Un interessante capitolo della magnetostatica riguarda la *fisica del plasma*, un ramo della fisica nel quale intensi sono gli sforzi di ricerca, nel mondo, da oltre trent'anni. Il settore appare particolarmente promettente in vista della possibilità, ormai abbastanza concreta, di utilizzare per scopi pacifici l'energia che si libera nelle reazioni di fusione tra nuclei leggeri (ad esempio, quelli degli isotopi deuterio e trizio dell'idrogeno).

Per avere un'idea di che cosa sia un plasma come quello che è oggetto di queste ricerche, si pensi a un gas portato a temperature estremamente elevate (dell'ordine di 10^8 K), eppero di densità sufficientemente bassa (dell'ordine di 10^{20} particelle per metro cubo) perché la sua pressione, nonostante l'alta temperatura, rimanga in un intervallo di valori modesti (alcune atmosfere). In queste condizioni, la materia presenta proprietà fisiche completamente diverse da quelle di ogni altro sistema, tanto che il plasma è spesso indicato come "quarto stato" della materia. Un plasma non è contenibile in alcun recipiente e dev'essere "confinato" in una regione limitata, evitando il contatto con altri corpi materiali.¹³ Operazione non impossibile, considerando che, nelle condizioni fisiche descritte, il plasma si presenta come un ammasso globalmente e localmente neutro di cariche elettriche dei due segni: infatti, alle temperature richieste tutti gli atomi sono ionizzati, hanno cioè perduto i loro elettroni orbitali, trasformandosi in ioni positivi.

Il plasma poi, essendo tutti i suoi componenti portatori liberi (e, quindi, mobili) di carica, presenta una conducibilità elettrica elevatissima (superiore di un ordine di grandezza a quella del rame a temperatura ambiente): pertanto possono circolare in esso correnti anche molto intense e di ciò si trae profitto per confinarlo mediante opportuni campi magnetici. Per comprendere intuitivamente come ciò sia possibile, si

¹³ Non tanto perché le pareti del recipiente non possano resistere alle temperature richieste, ma in quanto un contatto con esse, data la densità estremamente bassa del plasma, ne provocherebbe l'immediato raffreddamento e insudiciamento.

pensi a una "colonna" cilindrica indefinita di plasma, a sezione circolare, percorsa da una corrente longitudinale (diretta, cioè, secondo l'asse z). Immaginando l'intera corrente suddivisa in tanti tubi di flusso elementari (vedi fig. 7.21), si comprende come queste correnti equivarse si attirino reciprocamente (il fenomeno è detto *strizione ortogonale*). Si può dunque concepire una situazione in cui la pressione esercitata dal plasma (che tenderebbe, ovviamente, a farlo espandere) sia esattamente bilanciata dall'effetto di strizione (fenomeno noto come *z -pinch*). Uno degli inconvenienti di tale tecnica è la dispersione del plasma dalle estremità del cilindro. Il modo più semplice per ovviare alla difficoltà è quello di utilizzare configurazioni di plasma a geometria toroidale.

Prima di descrivere in maggior dettaglio un sistema siffatto, approfondiamo l'analisi delle condizioni in cui un plasma può essere confinato da un campo magnetico. Perché ciò avvenga, occorre (e basta) che ciascuna regione elementare del plasma sia in equilibrio meccanico, cioè che le forze agenti su essa si facciano equilibrio.

Consideriamo, quindi, un volumetto elementare $d\tau$ di un plasma avente configurazione generica e orientiamolo secondo gli assi di un sistema cartesiano. La componente secondo x della forza applicata alla faccia posteriore del cubetto (quella di ascissa x) è

$$dF_{1x} = p(x) dS,$$

avendo indicato con dS l'area della faccia e con p la pressione del plasma. La componente secondo x della forza applicata alla faccia anteriore (di ascissa $x + dx$) è

$$dF_{2x} = -p(x + dx) dS = -p(x) dS - \frac{\partial p}{\partial x} dx dS,$$

dove il segno “-” è dovuto al fatto che su questa faccia le forze di pressione agiscono

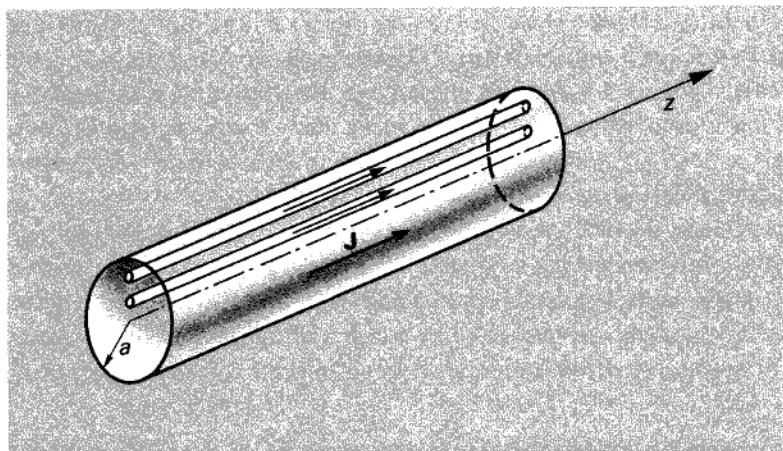


Figura 7.21

in verso opposto a quello dell'asse x . La componente secondo x della risultante di queste due forze è pertanto

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dS. \quad [7.11.1]$$

Ragionando allo stesso modo per le altre due coppie di facce, si ha

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dy dS,$$

$$dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dz dS.$$

Essendo

$$dx dS = dy dS = dz dS = d\tau,$$

si può scrivere

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dF_y}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dF_z}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

cioè, in forma compatta;

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} p, \quad [7.11.2]$$

ove \mathbf{F}_τ è la forza per unità di volume applicata al centro di $d\tau$. In particolare, se in un intorno di tale punto la pressione si mantiene costante, $\operatorname{grad} p$ è nullo, e il volumetto è soggetto a risultante nulla, almeno per ciò che riguarda le forze di pressione. D'altra parte, se nel plasma circola una corrente distribuita con densità di volume \mathbf{J} , su $d\tau$ agisce anche una forza di origine magnetica che, per unità di volume, è pari a

$$\mathbf{f}' = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad [7.11.3]$$

(\mathbf{J} e \mathbf{B} si riferiscono, naturalmente, al centro del volumetto in esame). Il volumetto resta in equilibrio se \mathbf{f} e \mathbf{f}' sono uguali e opposte, cioè quando

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \operatorname{grad} p. \quad [7.11.4]$$

E' questa la condizione di equilibrio locale di un plasma. D'altra parte, in condizioni stazionarie, i due campi \mathbf{J} e \mathbf{B} devono verificare ovunque le equazioni della magnetostatica:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad [7.11.5]$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad [7.11.6]$$

Le precedenti equazioni [7.11.4]÷[7.11.6] descrivono le condizioni di equilibrio del plasma nell'ipotesi che questo si comporti come un fluido isotropo;¹⁴ sono, queste, le equazioni della *magnetoidrostatica*.

Le [7.11.5] e [7.11.6] mostrano che \mathbf{J} e \mathbf{B} sono campi stazionari, ma non dicono nulla sul modo in cui la corrente è mantenuta nel plasma: per dare informazioni a questo riguardo occorrerebbe ampliare il sistema di equazioni, tenendo conto anche del campo elettrico \mathbf{E} e di una relazione costitutiva, valida nel plasma, che esprimesse la corrente in funzione degli altri campi esistenti. L'esposizione risulterebbe peraltro notevolmente appesantita, per la necessità di descrivere in modo dettagliato il comportamento fisico del plasma, e ciò, in una discussione sulle condizioni di equilibrio, non appare necessario.

L'equazione [7.11.4], l'unica in cui compare p , esprime una condizione assai restrittiva per i campi \mathbf{J} , e \mathbf{B} : in sostanza essa afferma che *non* tutte le combinazioni di campi magnetostatici e di correnti possono mantenere un plasma in equilibrio, bensì soltanto quelle per cui

$$\text{rot}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0.¹⁵ \quad [7.11.7]$$

Moltiplicando scalarmente la [7.11.4] per \mathbf{J} e per \mathbf{B} , si ha

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \cdot \text{grad } p,$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \text{grad } p.$$

D'altra parte, essendo $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ perpendicolare sia a \mathbf{J} che a \mathbf{B} , risulta

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0,$$

e, quindi

$$\mathbf{J} \cdot \text{grad } p = 0, \quad [7.11.8]$$

$$\mathbf{B} \cdot \text{grad } p = 0. \quad [7.11.9]$$

Il vettore $\text{grad } p$ è dunque, in ogni punto, perpendicolare a \mathbf{J} e \mathbf{B} ; essendo d'altra parte $\text{grad } p$, per definizione, perpendicolare alla *superficie isobarica* (caratterizzata cioè da p costante) passante per il punto in cui si valuta il gradiente, \mathbf{J} e \mathbf{B} sono ad essa tangenti. Le linee vettoriali di \mathbf{J} e \mathbf{B} si sviluppano perciò interamente su superfici isobariche, né esiste punto in cui esse possano "forare" tali superfici. Nella figura 7.22 sono indicate due porzioni di superfici isobariche relative ai valori p_0 e p_1 , e, su esse, le linee vettoriali dei campi \mathbf{J} e \mathbf{B} . Possiamo dire, in definitiva, che una superficie isobarica, in un plasma in equilibrio, è anche *superficie magnetica* e *superficie di corrente*, intendendo con ciò che \mathbf{B} e \mathbf{J} risultano tangentи ad essa in ogni suo punto.

¹⁴ La condizione $\text{div } \mathbf{J} = 0$, esprimente la conservazione della carica in condizioni stazionarie, è una diretta conseguenza delle [7.11.5] e [7.11.6].

¹⁵ Almeno per plasmi internamente connessi.

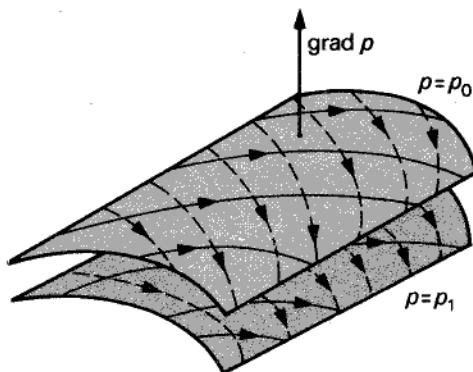


Figura 7.22
Superfici isobariche.

Torniamo ora alle configurazioni toroidali cui si è accennato in precedenza, considerando ad esempio (vedi fig. 7.23) un anello di plasma a sezione circolare di raggio minore a e raggio maggiore R ; in esso le distribuzioni di pressione p , di densità di corrente \mathbf{J} e di campo magnetico \mathbf{B} risultano tra loro in equilibrio, nel senso precedentemente specificato. Facciamo, inoltre, l'ipotesi di "assimmetria": in un sistema di coordinate cilindriche r, z, φ (vedi fig. 7.23) risultino nulle le derivate parziali rispetto a φ di p e di tutte le componenti di \mathbf{J} e \mathbf{B} .

Conviene distinguere, per ciascuno dei campi \mathbf{J} e \mathbf{B} , il componente *toroidale* da quello *poloidale*, ponendo

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{tor}} + \mathbf{J}_{\text{pol}}; \quad [7.11.10]$$

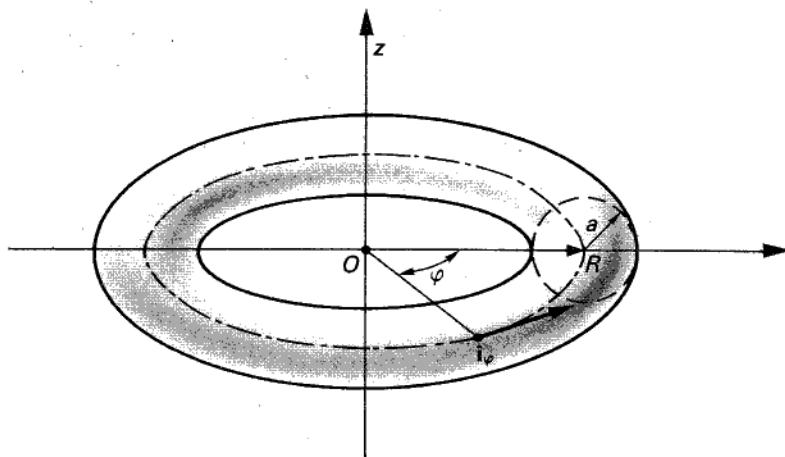


Figura 7.23

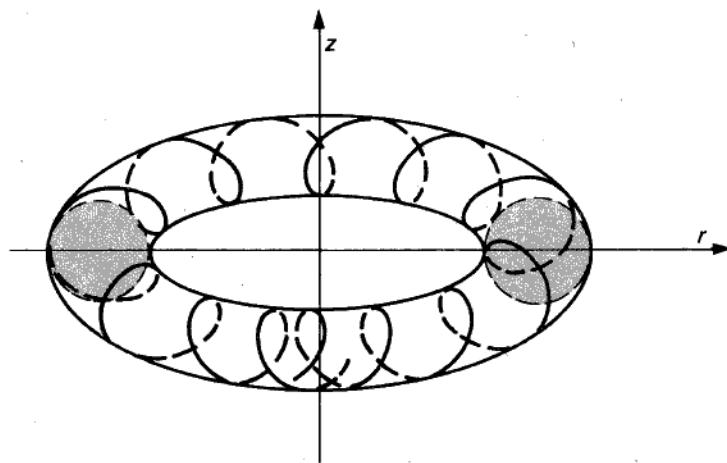


Figura 7.24

i vettori \mathbf{J}_{tor} e \mathbf{B}_{tor} sono dati da

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\text{tor}} &= J_\varphi \mathbf{i}_\varphi, \\ \mathbf{B}_{\text{tor}} &= B_\varphi \mathbf{i}_\varphi,\end{aligned}\quad [7.11.11]$$

avendo indicato con \mathbf{i}_φ il versore della tangente alla linea coordinata φ e con J_φ e B_φ

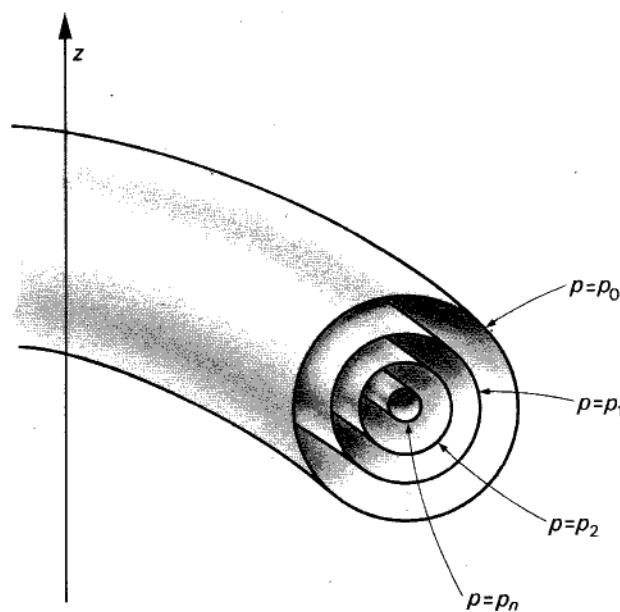


Figura 7.25

le relative componenti scalari di \mathbf{J} e \mathbf{B} ; J_{pld} e B_{pld} , giacendo nei semipiani del fascio di asse z (*meridiani*), hanno invece soltanto componenti secondo gli assi coordinati r e z .

In generale, dunque, le linee vettoriali di \mathbf{J} e \mathbf{B} hanno forma di “eliche” avvolte su ciascuna delle superfici isobariche (vedi fig. 7.24) e queste, a loro volta, hanno la struttura di superfici toroidali interne l’una all’altra (vedi fig. 7.25).

Le linee vettoriali di \mathbf{J} e \mathbf{B} in generale continuano ad avvolgere la superficie isobaria, ricoprendola internamente senza richiudersi mai. In casi del genere, si dice che esse ricoprono *in senso ergodico* la superficie.

*7.12 Cenni di supercondutività

Il fenomeno della supercondutività, scoperto da H. Kamerlingh Onnes nel 1911 a Leida può essere descritto schematicamente da due fatti sperimentali di notevole rilievo.

1) Molte sostanze, costituite da elementi metallici puri, oppure da leghe o da composti intermetallici, raffreddate al di sotto di una temperatura critica T_c (diversa da caso a caso, ma spesso dell’ordine di qualche grado, o frazione di grado) presentano un improvviso crollo del valore della resistività elettrica; nella figura 7.26 è riportato,

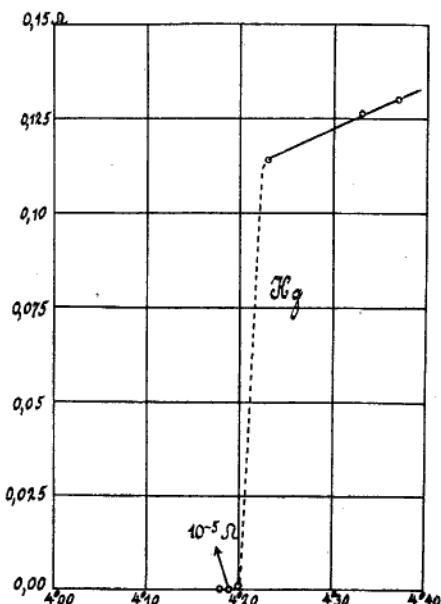


Figura 7.26

Resistenza in ohm di un campione di mercurio in funzione della temperatura assoluta.
(Grafico originale di Onnes)

ad esempio, l'andamento della resistenza del mercurio in funzione della temperatura.

2) Al di sotto della temperatura critica, i materiali superconduttori, se immersi in un debole campo magnetico, presentano un comportamento perfettamente *diamagnetico* (vedi § 8.3): il campo magnetico al loro interno è cioè rigorosamente nullo. Si verifica, anzi, il cosiddetto *effetto Meissner*: se un campione di materiale, immerso in un campo magnetico, è raffreddato gradualmente fino alla sua temperatura critica, il campo magnetico inizialmente presente nel materiale viene "espulso" da questo, come mostrato nelle figure 7.27a e b, la prima riferentesi a una temperatura $T > T_c$, la seconda al caso in cui $T < T_c$. L'effetto Meissner è caratteristico dei superconduttori e non si verifica nei materiali diamagnetici.

La resistività di un superconduttore, al di sotto della temperatura critica, è nulla o quasi: si pensi che la costante di tempo (vedi § 9.7) L/R di un avvolgimento sopraconduttore è sicuramente dell'ordine di molti anni. Tipici superconduttori sono Nb_3Sn , Nb_3Al , Nb_3Ge , oltre a molti polimeri.

Un altro importante fenomeno, tipico dei superconduttori, è il seguente: rinforzando notevolmente il campo magnetico in cui il materiale è immerso, fino a superare un valore critico B_c ,¹⁶ lo stato superconduttore scompare (anche se la temperatura è inferiore a quella critica) e il materiale ritorna al suo normale comportamento resistivo. Il valore del campo critico, per ciascun materiale, diminuisce al crescere della temperatura e si annulla per $T = T_c$.

Per spiegare le proprietà magnetiche di un superconduttore non è sufficiente l'ipotesi della perfetta conducibilità. Infatti, per un materiale dotato di resistività nulla non sarebbe difficile ricavare, partendo dalle equazioni dell'elettromagnetismo, un'equazione che, ammettendo come soluzione anche un campo magnetico uniforme nel conduttore, sia incompatibile con l'effetto Meissner.

Un'interpretazione soddisfacente di questi fenomeni è stata data, nel 1957, da Bardeen, Cooper e Schrieffer nell'ambito della meccanica quantistica, ma essa esula dagli scopi di questo libro. Nel seguito ci limiteremo ad accennare a un modello interpretativo di tipo fenomenologico, proposto da F. e H. London nel 1935, atto a spiegare alcuni dei fatti sperimentali citati, e in particolare l'effetto Meissner. Tale modello si fonda sull'ipotesi che in un superconduttore la densità di corrente \mathbf{J} e il potenziale vettore magnetico \mathbf{A} siano legati dalla relazione (vedi app. G)

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_I^2} \mathbf{A}, \quad [7.12.1]$$

dove λ_I è una costante detta *lunghezza di penetrazione*, e \mathbf{A} è tale da verificare, in ogni punto interno, la condizione

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad [7.12.2]$$

¹⁶ Per gli attuali superconduttori, B_c può raggiungere valori di una decina di tesla.

e sulla superficie esterna del superconduttore, la condizione al contorno

$$J_n = A_n = 0 \quad [7.12.3]$$

(al solito, il pedice n indica le componenti normali alla superficie considerata).

Sostituendo la [7.12.1] nell'equazione

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J},$$

si ottiene

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda_l^2} \mathbf{A},$$

e ancora (prendendo il rotore)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda_l^2} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Infine, dalla definizione di "potenziale vettore", si ha

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{\lambda_l^2}. \quad [7.12.4]$$

Come si è detto, questa equazione, unita alle condizioni al contorno [7.12.3], consente di descrivere in modo soddisfacente il comportamento magnetico dei superconduttori. In particolare, essa si rivela in accordo con l'effetto Meissner, perché, non ammettendo la soluzione uniforme, non consente l'esistenza di un campo magnetico uniforme (non nullo) nel superconduttore.

La [7.12.4] lascia inoltre prevedere che un campo magnetico, applicato a un superconduttore dall'esterno, si attenuerà man mano che si procede dalla superficie esterna del materiale verso il suo interno, annullandosi a una distanza dalla superficie dell'ordine di alcune volte λ_l . Poiché λ_l , pur variando da materiale a materiale, ha tipicamente valori dell'ordine di 500 Å, si comprende che in un tale materiale un campo magnetico non può sussistere se non limitatamente a un sottilissimo strato esterno.

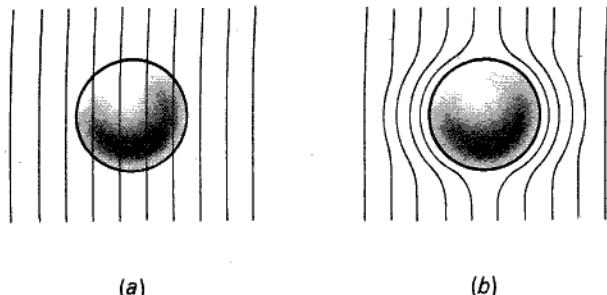


Figura 7.27
Illustrazione dell'effetto Meissner.

Esperienze illustrate

1. Tubo catodico

Il tubo catodico, che trova utilizzazione diffusa in numerosi dispositivi (dall'oscilloscopio al televisore) è schematicamente rappresentato nella figura 7.28. Nel tubo di vetro T è realizzato in vuoto molto spinto; un catodo C , riscaldato elettricamente come in un diodo a vuoto (vedi Esperienze illustrate alla fine del capitolo precedente) emette elettroni che, opportunamente accelerati e focalizzati dalle coppie di elettrodi E_1 ed E_2 (vedi, nelle Esperienze illustrate del cap. 5, quanto si è detto sulle lenti elettrostatiche) costituiscono un sottile "pennello" elettronico che colpisce lo schermo fluorescente S . Le sostanze che ricoprono S , colpiti dagli elettroni incidenti, si illuminano, rendendo così visibile, sotto forma di macchiolina luminosa, la traccia del pennello elettronico. Ulteriori elettrodi, opportunamente disposti (in figura, E_{ver} ed E_{or}), consentono di deviare la traiettoria degli elettroni, sia nel piano verticale che in quello orizzontale, in modo da permettere al pennello elettronico di colpire lo schermo nel punto desiderato. La deflessione del fascetto elettronico può avvenire sia ad opera di un campo elettrico che di un campo magnetico.

Analizziamo più da vicino la deflessione magnetica. Supponiamo che all'uscita degli elettrodi acceleratori e focalizzatori il pennello elettronico sia diretto lungo un asse x (vedi fig. 7.29); parallelamente al piano del foglio siano poi disposte due bobine, percorse da correnti uguali I (una al di sopra del foglio, l'altra al di sotto), che producono un campo magnetico B diretto perpendicolarmente al foglio, come indicato dalle "code di freccia". Per semplicità, supponiamo B uniforme nella regione compresa tra le due bobine. Per la [6.2.2], la forza agente su un elettrone dotato di velocità v nel campo magnetico B è

$$\mathbf{F} = -ev \mathbf{X} \mathbf{B},$$

dove e indica il valore assoluto della carica dell'elettrone. La forza \mathbf{F} , essendo perpendicolare sia a v che a \mathbf{B} , non può imprimere all'elettrone alcuna accelerazione tan-

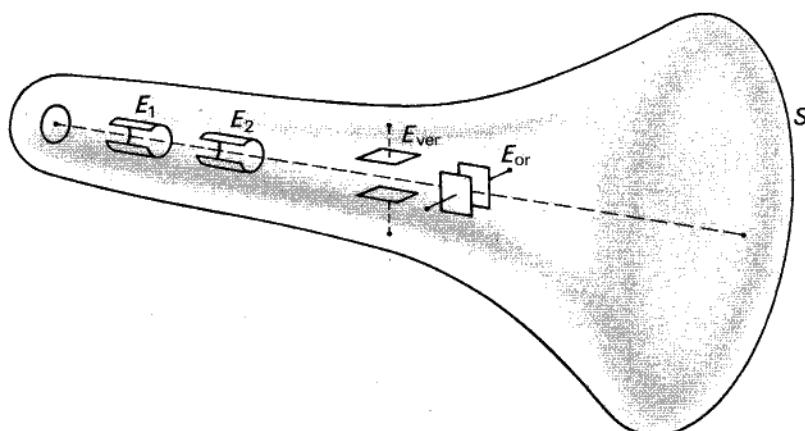


Figura 7.28

Schema del tubo catodico.

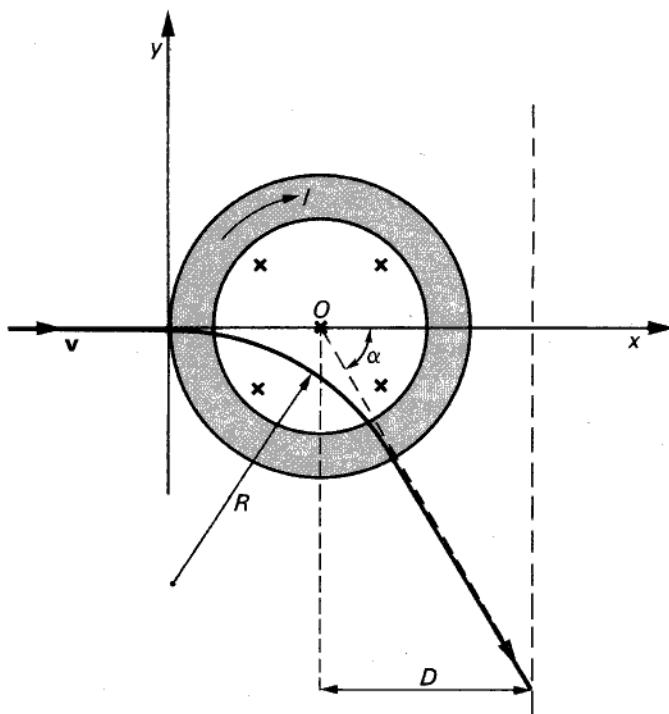


Figura 7.29

genziale: il modulo della velocità dell'elettrone deve quindi rimanere costante nel corso del suo moto nel campo magnetico.

Indicando con v_0 il modulo di v all'ingresso della regione in cui è localizzato il campo magnetico, si ha subito (v essendo ortogonale a \mathbf{B})

$$F = ev_0 B. \quad [1]$$

Tale forza risulta costante in modulo in ogni punto della traiettoria dell'elettrone, come conseguenza della costanza di v e di B , e produce, pertanto, un'accelerazione centripeta dell'elettrone di valore

$$a = \frac{v_0^2}{R},$$

ove R è il raggio di curvatura della traiettoria. Il secondo principio della dinamica¹⁷ fornisce

$$ev_0 B = m_e \frac{v_0^2}{R}.$$

e quindi

$$R = \frac{m_e v_0}{e B}, \quad [2]$$

¹⁷ Per velocità v_0 piccole rispetto a quella della luce nel vuoto.

m_e essendo la massa dell'elettrone. La [2] mostra che lungo la traiettoria, nelle condizioni descritte, R è costante. Entrato nella regione ove è presente il campo magnetico B , l'elettrone percorre dunque un arco di circonferenza di raggio R , dopodiché, uscito dalla zona di B e non più soggetto a forze, continua di moto inerziale fino a raggiungere lo schermo. Per determinare completamente la traiettoria dell'elettrone, osserviamo che la velocità angolare ω con cui la particella percorre l'arco di circonferenza è

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{e}{m_e} B.$$

All'uscita dalla regione di campo magnetico, la particella ha percorso un arco di traiettoria di lunghezza approssimativamente uguale al diametro d delle bobine (almeno, per angoli di deviazione non molto grandi), in un tempo

$$t = \frac{d}{v_0};$$

ne consegue che l'angolo di deviazione è

$$\alpha = \omega t = \frac{e}{m_e} B \frac{d}{v_0}.$$

Detta infine D la distanza tra il centro O delle bobine e lo schermo, la deviazione dell'elettrone nella direzione dell'asse y , in corrispondenza dello schermo, risulta

$$y = D \operatorname{tg} \alpha$$

da cui, approssimando $\operatorname{tg} \alpha$ con α ,

$$y \approx D \frac{e}{m_e} B \frac{d}{v_0};$$

questa relazione consente di calcolare l'entità della deviazione verticale del pennello elettronico sullo schermo in funzione dei parametri geometrici del tubo catodico, del campo magnetico B prodotto dalle bobine e della velocità v_0 posseduta dagli elettroni all'uscita degli elettrodi acceleratori e focalizzatori.

2. Il ciclotrone

Il ciclotrone, realizzato nel 1932, fu la prima (in ordine di tempo) delle cosiddette *macchine acceleratrici*, dispositivi capaci di accelerare particelle cariche (protoni, elettroni ecc.) conferendo loro energie estremamente elevate.

Il principio di funzionamento di un ciclotrone è molto semplice: due scatole metalliche semicircolari, a forma di "D" (vedi fig. 7.30), affacciate tra loro, sono immerse in un forte campo magnetico, normale al piano del foglio; il campo è prodotto da due avvolgimenti costituenti, nel loro complesso, un potente elettromagnete. Tra le scatole è applicata (agli elettrodi A e B) una d.d.p. V_{AB} variabile sinusoidalmente nel tempo in maniera opportuna, come sarà chiarito più avanti. Supponiamo ora che dal centro O del dispositivo venga emesso, a bassa velocità, un protone; questo, soggetto all'azione del campo magnetico B , compie una traiettoria semicircolare (vedi esperienza precedente) di raggio

$$R = \frac{m_p v_0}{eB},$$

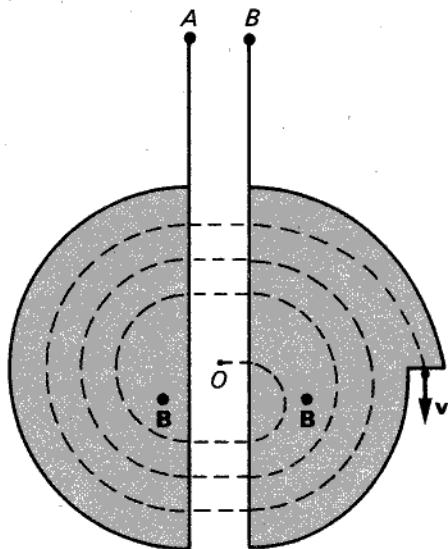


Figura 7.30

Rappresentazione schematica del ciclotrone (in realtà il raggio della spirale cresce sempre di meno procedendo verso l'esterno).

in un intervallo di tempo τ pari a metà del periodo di rotazione T :

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{e} \frac{m_p}{B}.$$

Effettuata una semicirconferenza, il protone si ritrova nell'interspazio tra le due D, dove viene accelerato dal campo elettrico ivi esistente, acquistando un'energia

$$U_e = q V_{AB},$$

V_{AB} essendo la d.d.p. esistente tra le scatole. A questo punto, la velocità posseduta dalla particella è

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2 U_e}{m_p}},$$

e il raggio della nuova orbita semicircolare è, corrispondentemente, maggiore. D'altra parte, il tempo impiegato a percorrere la nuova semicirconferenza è ancora uguale al precedente, poiché il periodo T è indipendente dalla velocità. Se, nel frattempo V_{AB} si è invertita, la particella viene di nuovo accelerata, nell'intercapedine tra le due "D", acquistando nuovamente un'energia W .

Variando V_{AB} in modo alternato con periodo T , il processo continua e la particella acquista, a ogni passaggio nell'intercapedine, un'energia W , finché non esce dalla regione interessata dal campo magnetico (di solito dopo parecchie decine di giri).

L'energia W acquistata da un protone dopo un passaggio nell'intercapedine, in corrispondenza di una d.d.p. V dell'ordine, ad esempio, di 10^5 V, è pari a

$$W = 1,6 \times 10^{-19} \times 10^5 = 1,6 \times 10^{-14} \text{ J.}$$

Usualmente, per misurare gli incrementi di energia di una particella carica si ricorre a un'unità diversa dal joule: l'"elettronvolt" (eV), corrispondente all'energia acquistata

da una particella, dotata di carica pari a quella dell'elettrone, quando viene accelerata (nel vuoto) da una d.d.p. di 1 V. Si ha cioè

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \times 1 = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J.}$$

L'energia W risulta, nell'esempio citato, dell'ordine di 10^5 eV. Dopo 100 giri, la particella è dunque accelerata fino a una energia di circa 10 MeV (e cioè 10^7 eV).

Il numero di giri che la particella può compiere prima di uscire dalla macchina dipende dal diametro delle "D". D'altronde, l'energia massima cui possono essere accelerati i protoni (dell'ordine di qualche decina di MeV) è limitata da effetti relativistici (vedi cap. 11) dato che la velocità angolare della particella dipende dalla sua massa. Un'opportuna "sagomatura" del campo magnetico permette comunque di superare questo limite.

Altri tipi di macchine acceleratrici, in cui il campo magnetico viene "modulato" nel tempo e agiscono, inoltre, campi elettrici rapidamente variabili, consentono di raggiungere energie molto più alte (dell'ordine delle centinaia di gigaelettronvolt; $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$).

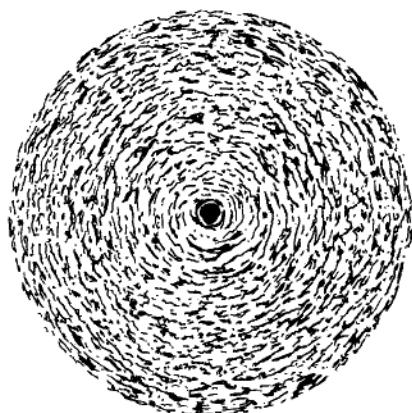


Figura 7.31

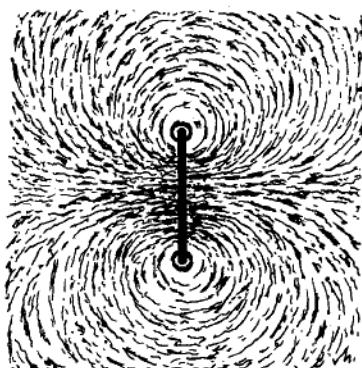


Figura 7.32

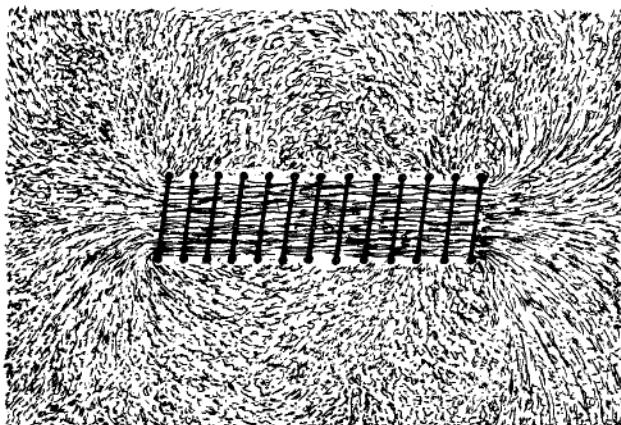


Figura 7.33

3. Campi magnetici prodotti da circuiti semplici

Cospargendo limatura di ferro in prossimità di circuiti percorsi da corrente si ottengono suggestive immagini delle linee vettoriali del campo.

Nelle figure 7.31, 7.32 e 7.33 sono riportate le fotografie relative, rispettivamente, al caso di un conduttore rettilineo indefinito, di una spira circolare e di un solenoide rettilineo.

4. Esperienza di Rowland

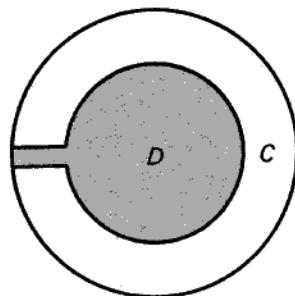
Si tratta di un'esperienza classica, volta a mettere in evidenza il fatto che il campo magnetico è prodotto dal moto delle cariche elettriche, indipendentemente dalle cause che producono il moto stesso.

Un anello conduttore *C* (vedi fig. 7.34), interrotto in corrispondenza di una sua sezione, è montato su un disco isolante *D*; superiormente all'anello è sospeso un ago magnetico, libero di oscillare. Dopo aver collocato, in qualche modo, una carica elettrica (ad esempio, dell'ordine di qualche frazione di microcoulomb) sull'anello conduttore, poniamo il disco in rotazione (con velocità angolare dell'ordine di alcune decine di giri al secondo). In queste condizioni si osserva una deviazione dell'ago magnetico: ciò significa che la carica elettrica presente sull'anello, posta in rotazione meccanicamente, produce nello spazio circostante un campo magnetico, allo stesso modo di una corrente.

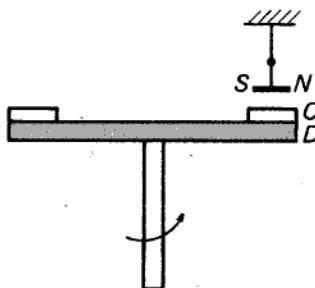
5. L'elettrodinamometro assoluto

Questo strumento consente di effettuare con grande precisione misure di correnti, sfruttando le azioni elettrodinamiche che tra queste si esercitano.

La forma tipica di un elettrodinamometro è schematizzata nella figura 7.35. Su una tavola rigida *T* è montata una bilancia di precisione; a uno dei piatti (quello *di destra*) è sospesa una spira *S*, disposta tra altre due, *S*₁ e *S*₂, rigidamente connesse alla tavola. Le tre spire sono collegate elettricamente tra loro in modo da essere tutte



(a)



(b)

Figura 7.34

Schema del dispositivo usato nell'esperienza di Rowland.

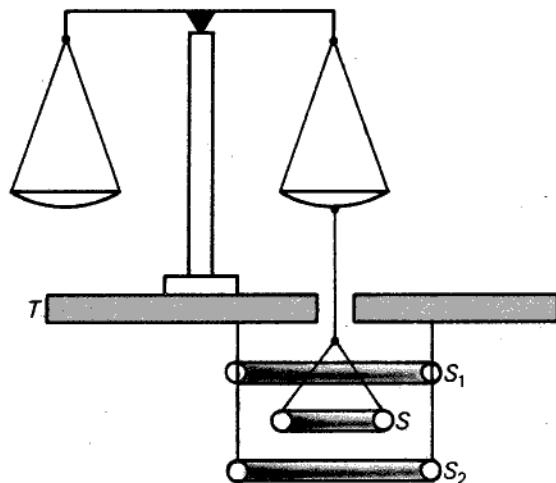


Figura 7.35

Schema dell'elettrodinamometro assoluto.

percorse dalla corrente che si vuole misurare. Per mantenere in equilibrio S occorre disporre sui piatti alcuni pesi, dalla cui misura si risale agevolmente al valore della corrente.

6. Il galvanometro magnetoelettrico

Si tratta di uno strumento in grado di misurare correnti debolissime (dell'ordine, ad esempio, di 10^{-9} A). Esso è rappresentato schematicamente nella figura 7.36a. Un magnete "a ferro di cavallo" (vedi cap. 8) porta tra le sue espansioni polari un cilindretto di ferro dolce C , fisso insieme con esso. Su C è montato un telaietto A costi-

tuito da un leggerissimo avvolgimento di spire sottili, capace di ruotare attorno all'asse aa' , costituito da un filo conduttore teso. Nel traferro del magnete è presente un campo magnetico B le cui linee vettoriali hanno un andamento radiale. Supponiamo di far circolare una corrente I nell'avvolgimento A , adducendola ad esso attraverso il filo conduttore aa' .

Sul generico conduttore dell'avvolgimento percorso da corrente il campo magnetico esercita una forza

$$F = I h b,$$

agente in direzione tangente (vedi fig. 7.36b) al cilindretto C . Sui conduttori diametralmente opposti a quello considerato agisce evidentemente una forza uguale in modulo e direzione, ma di verso opposto alla precedente. Nasce, perciò, una coppia di momento Γ pari a

$$\Gamma = F d,$$

ove d è il diametro dell'avvolgimento. Se N è il numero di spire dell'avvolgimento, la coppia totale agente su esso è pari a

$$\Gamma_{\text{tot}} = N c = N h d B I = N S B I,$$

avendo indicato con S l'area racchiusa da ciascuna spira. La coppia Γ_{tot} mette in rotazione il telaietto A e produce, quindi, una torsione del filo di sospensione aa' ; nel filo nasce allora una coppia di torsione Γ_α che si oppone alla rotazione del telaietto. Tale coppia è proporzionale all'angolo di rotazione α :

$$\Gamma_\alpha = K_\alpha \alpha$$

dove K_α indica la costante di torsione del filo.

In queste condizioni, il telaietto ruota finché la coppia Γ_α risulta tale da bilanciare esattamente la Γ_{tot} . Si ha allora

$$K_\alpha \cdot \alpha = N S B I$$

e quindi

$$I = K \alpha,$$

con

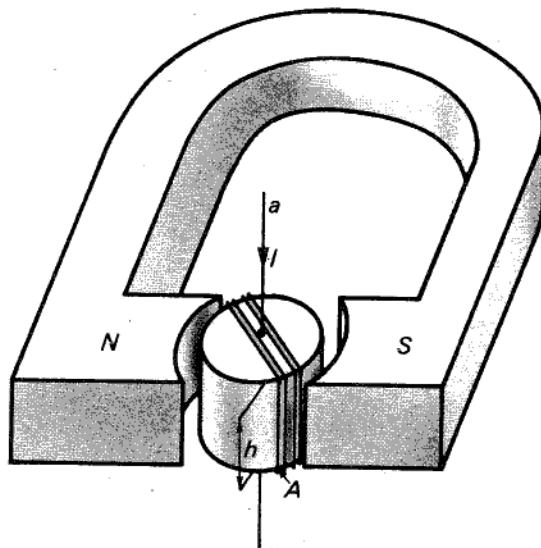
$$K = \frac{K_\alpha}{N S B}.$$

La corrente I risulta dunque proporzionale all'angolo α di rotazione dell'equipaggio mobile dello strumento. Il valore della costante K dello strumento viene determinato, naturalmente, tarando lo strumento per confronto con un altro usato come campione.

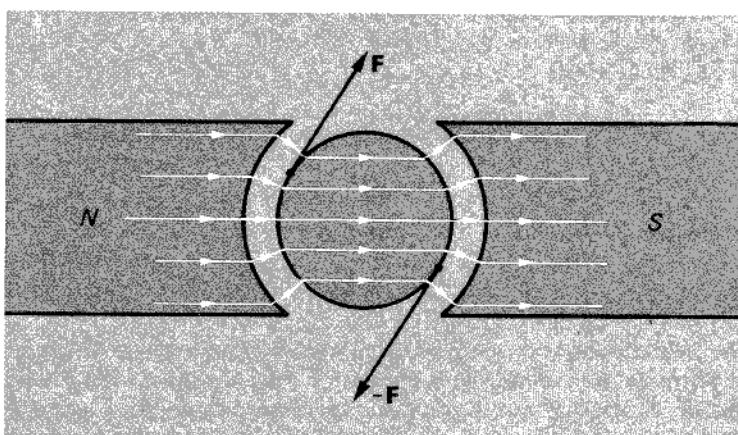
7. L'effetto Hall

Ci proponiamo qui di fare almeno cenno a un fenomeno di grande interesse, anche per le sue molteplici applicazioni: l'effetto Hall. Ci limiteremo a una descrizione qualitativa, valida nei casi in cui sia presente, nel conduttore, una sola specie di portatori di carica.

Consideriamo un conduttore metallico percorso da una corrente di densità J , sotto l'azione di un campo elettrico longitudinale E_l . Immaginiamo, ora, di investire



(a)



(b)

Figura 7.36

il conduttore con un forte campo magnetico B , perpendicolare alla direzione del moto delle cariche¹⁸ (vedi fig. 7.37a), trascurando il campo magnetico prodotto

¹⁸ In un conduttore metallico, come è noto, la corrente è costituita da un moto di elettroni aventi velocità diretta in senso opposto a J .

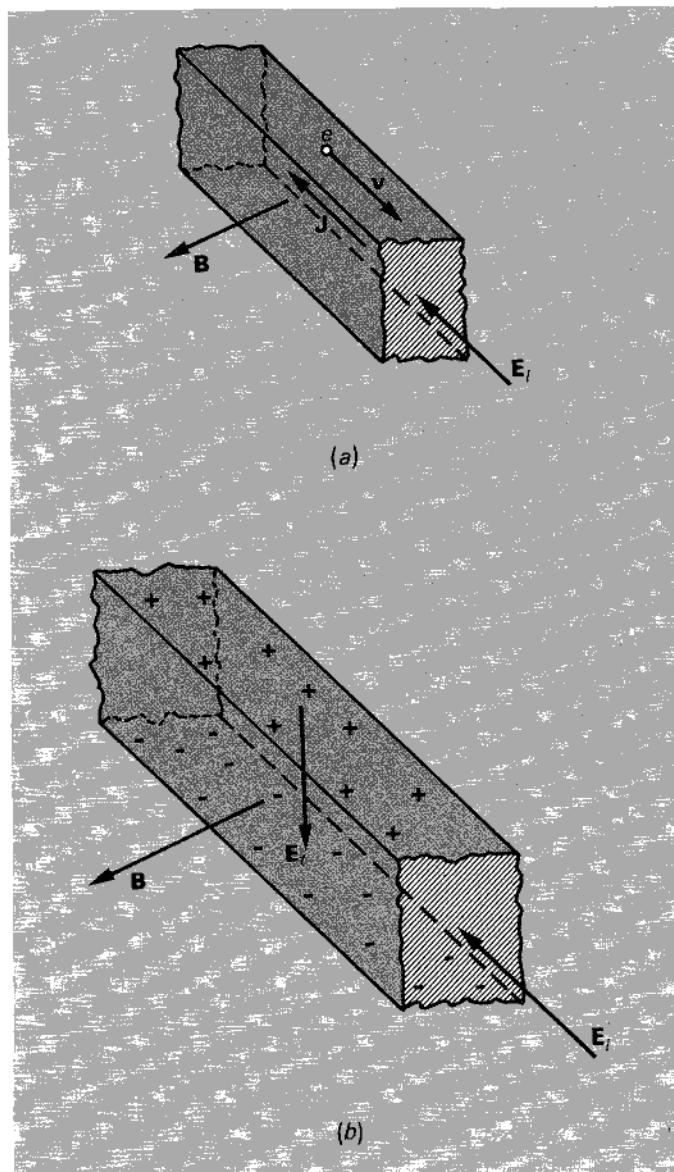
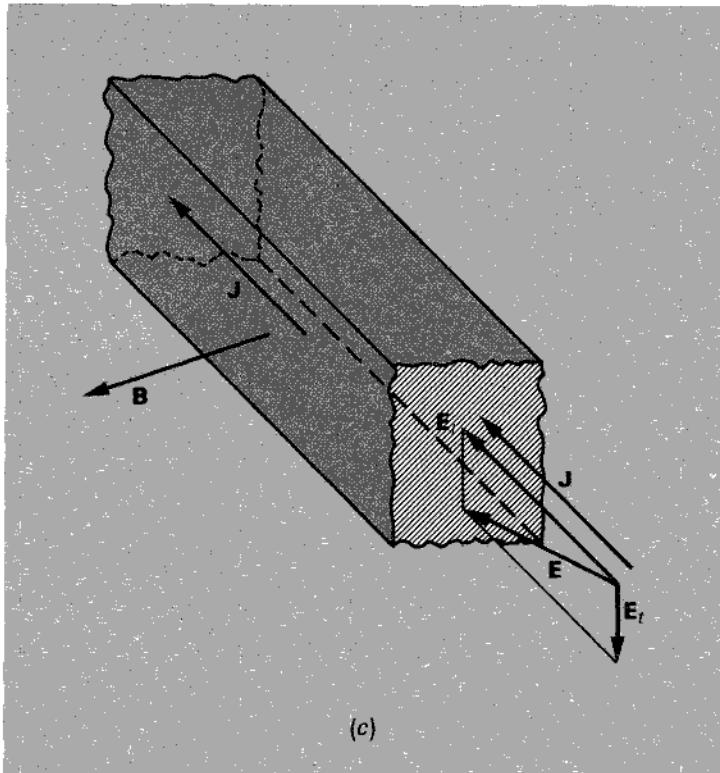


Figura 7.37
Illustrazione dell'effetto Hall.

dalla stessa corrente. Non appena B è applicato, gli elettroni in moto incurvano la loro traiettoria sotto l'azione delle forze di Lorentz; in un tempo brevissimo, si determina un accumulo di elettroni sulla faccia inferiore del conduttore e una rarefazione su quella superiore (vedi fig. 7.37 b). Nasce così un campo elettrostatico trasversale E_t , diretto, nel conduttore, dall'alto verso il basso. Il processo continua finché E_t non



è tale da equilibrare esattamente la forza di Lorentz. In queste condizioni, gli elettroni risentono unicamente della forza loro impressa dal campo longitudinale \mathbf{E}_l e continuano indisturbati nel loro moto. Il campo elettrico che agisce ora nel conduttore non è più soltanto \mathbf{E}_l , bensì (vedi fig. 7.37c)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_t;$$

se ne conclude che \mathbf{J} non è parallela al campo elettrico totale \mathbf{E} , ma forma con esso un angolo non nullo. La presenza di \mathbf{E}_t (*campo di Hall*) può essere rivelata misurando la d.d.p. che, a causa delle cariche presenti, si manifesta tra le due facce del conduttore.

Esercizi

1. In un conduttore cilindrico cavo indefinito, di raggio interno R_{int} ed esterno R_{est} , scorre una corrente, diretta lungo l'asse del cilindro, distribuita con densità uniforme \mathbf{J} sulla sezione del conduttore. Calcolare il campo magnetico in tutto lo spazio.
2. Un cavo coassiale rettilineo e indefinito, i cui parametri geometrici sono indicati nella figura 7.38, è percorso da una corrente I distribuita uniformemente sulla

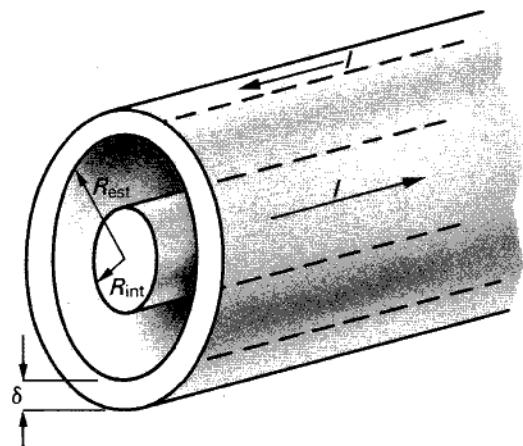


Figura 7.38

sezione retta dei conduttori (interno ed esterno) che costituiscono il cavo. Calcolare il campo magnetico in tutti i punti dello spazio.

3. Calcolare il campo magnetico sui punti dell'asse di una spira circolare di raggio R , percorsa da una corrente I .

(*Suggerimento.* Si utilizzi la legge elementare di Laplace, tenendo conto della simmetria del sistema.)

4. Tracciare uno schizzo qualitativo delle linee vettoriali del campo magnetico prodotto da una spira circolare percorsa da corrente.

5. Calcolare il campo magnetico prodotto nei punti dell'asse da un solenoide "corto" percorso da corrente del tipo indicato nella figura 7.39.

(*Suggerimento.* Si utilizzino i risultati ottenuti per la spira circolare e si integri sulla lunghezza l .)

6. Tracciare qualitativamente l'andamento delle linee vettoriali del campo prodotto dal solenoide del problema precedente.

7. Dato un conduttore rettilineo e indefinito di sezione circolare (vedi fig. 7.40) percorso da una corrente diretta perpendicolarmente al foglio e distribuita con densità uniforme J sull'intera sezione, calcolare l'integrale di linea del campo magnetico \mathbf{B} lungo la corda γ di estremi A e B .

8. Verificare che la circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} prodotta dal conduttore rettilineo e indefinito di traccia O indicato nella figura 7.41, percorso dalla corrente I , lungo la linea chiusa $ABCD$ è nulla (essendo AB e CD archi di circonferenza di raggi R_1 e R_2).

9. Calcolare il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza del cavo coaxiale dell'esercizio 2, trascurando il flusso associato al campo esistente entro i conduttori.

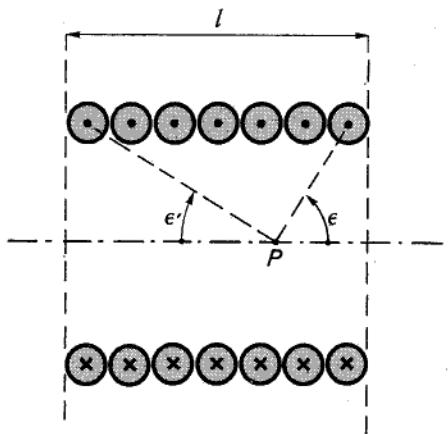


Figura 7.39

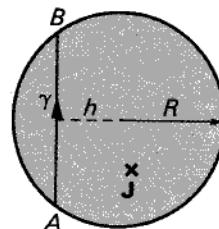


Figura 7.40

- 10.** Determinare il moto di una carica lanciata con velocità iniziale generica v_0 in un campo magnetico uniforme.

(*Suggerimento.* Si scomponga la velocità iniziale v_0 della carica nel suo componente v_{\parallel} , parallelo al campo magnetico B , e nel componente v_{\perp} , ad esso normale, ponendo

$$v_0 = v_{\parallel} + v_{\perp}.$$

Si comprende agevolmente che la v_{\parallel} non dà luogo a forza (poiché $v_{\parallel} \times B = 0$) e si mantiene perciò inalterata, mentre la v_{\perp} determina un moto circolare uniforme.)

- 11.** Calcolare il campo magnetico prodotto da una lastra piana conduttrice S percorsa da una corrente uniforme distribuita con densità superficiale J_s , costante in tutti i punti del conduttore (vedi fig. 7.42).

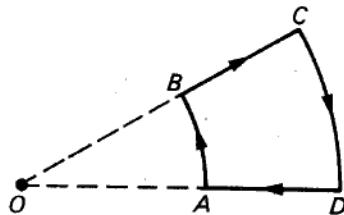


Figura 7.41

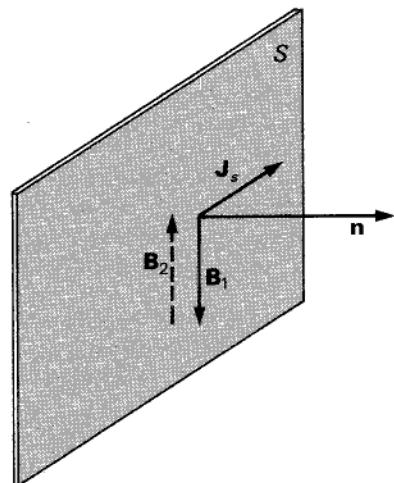


Figura 7.42

12. Calcolare il campo magnetico prodotto da due lastre piane conduttrici parallele percorse da correnti distribuite con densità superficiale uniforme \mathbf{J}_s su una lastra, e $-\mathbf{J}_s$ sull'altra.

13. Calcolare la forza agente per unità d'area su ciascuna delle lastre dell'esercizio precedente.

(*Suggerimento.* Si tenga conto del fatto che la forza agente su un elemento di corrente non è dovuta all'intero campo esistente in corrispondenza di tale elemento, ma a quello che si ottiene sottraendo il campo prodotto dall'elemento stesso; vedi l'analogo problema elettrostatico.)

14. Con riferimento all'esercizio 7, verificare la legge di Ampère, applicandola alla linea chiusa costituita dalla corda AB e dall'arco (corto) di circonferenza BA .

15. Calcolare il coefficiente di autoinduzione (per unità di lunghezza) di un solenoide lungo che ha $n=100$ spire per decimetro di lunghezza, e sezione delle spire $S=100 \text{ cm}^2$.

16. Supponiamo di inserire, nel solenoide dell'esercizio precedente, un altro solenoide, con $n'=500$ spire per decimetro di lunghezza e $S'=50 \text{ cm}^2$; calcolare il coefficiente di mutua induzione M per unità di lunghezza e discuterne il segno.

17. Un filo conduttore lungo 2 m è percorso da una corrente di 10 A; calcolare la forza che si esercita sul filo quando esso è immerso in un campo magnetico $B=2 \text{ T}$:

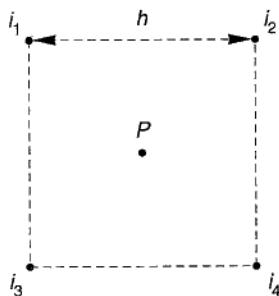
- a) diretto parallelamente al filo,
- b) ortogonale al filo,
- c) formante un angolo $\pi/4$ con il filo.

18. Sulla superficie di un disco musicale, di raggio R , si sia depositata uniformemente, per strofinio, una carica Q . Calcolare il campo magnetico che si produce al centro del disco, in funzione della carica Q , quando il disco ruota a 33 giri/minuto.

19. Una spira quadrata di lato h è percorsa da una corrente i ; calcolare il campo magnetico nel centro della spira.

(*Suggerimento.* Fare uso della legge elementare di Laplace [7.5.7']).

20. Quattro fili rettilinei indefiniti sono disposti lungo gli spigoli di un parallelepipedo retto a sezione quadrata di lato h e sono percorsi rispettivamente da correnti i_1, \dots, i_4 aventi uguale intensità i (vedi fig. 7.43). Calcolare il campo magnetico al centro della sezione quadrata al variare del segno di ciascuna delle i_k .



Capitolo 8

Il campo magnetostatico in presenza di mezzi materiali

I. POLARIZZAZIONE MAGNETICA: IL PUNTO DI VISTA MACROSCOPICO

8.1 Introduzione

In questo capitolo descriveremo il comportamento magnetico dei materiali seguendo una via simile a quella adottata per i dielettrici: nella prima parte, affronteremo l'argomento da un punto di vista macroscopico, con un approccio di tipo fenomenologico; nella seconda, presenteremo alcuni elementi di interpretazione microscopica, limitandoci a modelli di tipo classico (cioè non quantistico).

Il peso dei vari argomenti è tuttavia notevolmente diverso rispetto al caso dei dielettrici, per molte ragioni, tra cui le seguenti:

a) Mentre i dielettrici lineari hanno un comportamento molto diverso, quantitativamente, da quello del vuoto o dell'aria, i materiali aventi caratteristica magnetica lineare si comportano praticamente come il vuoto, per cui nella grande maggioranza delle applicazioni pratiche non se ne tiene conto.

b) Mentre i dielettrici non lineari (materiali ferroelettrici) hanno, dal punto di vista pratico, importanza minore di quella dei dielettrici lineari, i materiali magneticamente non lineari (quelli ferromagneticci, di cui parleremo tra breve) hanno la massima importanza dal punto di vista applicativo: basti pensare che lo studio dei fenomeni magnetici ha avuto origine, anticamente, proprio dalle comuni calamite, costituite, come vedremo più avanti, da particolari materiali ferromagnetici.

Nella prima parte di questo capitolo faremo riferimento a un "continuo" di dipoli magnetici. In altre parole, come, per i dielettrici, avevamo schematizzato il mezzo, dal punto di vista macroscopico, con un continuo di dipoli elettrici, così, ora, schematicizzeremo macroscopicamente il materiale con un continuo di spire elementari percorse da correnti. Vedremo poi, nella seconda metà del capitolo, come ricollegare queste correnti elementari alla struttura microscopica del materiale. Per il momento,

tanto per fissare le idee, consideriamo il semplice modello di Bohr dell'atomo di idrogeno. In esso, l'elettrone che ruota intorno al protone è equivalente a una corrente di intensità

$$i = \frac{e}{T}, \quad [8.1.1]$$

dove e indica la carica dell'elettrone e T il periodo dell'orbita. Per convincersene si osservi che, attraverso ogni "sezione" ideale dell'orbita, l'elettrone passa $1/T$ volte al secondo; la carica che attraversa ciascuna sezione, per unità di tempo, è data pertanto proprio dalla [8.1.1].

Per un elettrone con momento della quantità di moto \hbar (unità di momento angolare orbitale in fisica atomica) si ha

$$m_e = m_B = e \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 = e \frac{m_e \omega^2 r}{2m_e} = \hbar \frac{e}{2m_e},$$

dove m_B è il *magnetone di Bohr* (unità di misura dei momenti magnetici atomici).

8.2 L'intensità di magnetizzazione

Consideriamo un punto P in un generico mezzo magnetizzato, e sia $\Delta\tau$ un elemento di volume centrato in P . Detto $\Delta\mathbf{m}$ il momento magnetico della materia contenuta in $\Delta\tau$, definiamo *intensità di magnetizzazione* nel punto P il vettore

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta\tau}. \quad [8.2.1]$$

Esso è, quindi, il momento magnetico per unità di volume del materiale (si noti l'analogia fra il vettore \mathbf{M} così definito e il vettore \mathbf{P} relativo ai dielettrici). Come nel caso di \mathbf{P} , il vettore \mathbf{M} può essere scritto come

$$\mathbf{M} = N \overline{\mathbf{m}}, \quad [8.2.2]$$

dove N è il numero di atomi per unità di volume e $\overline{\mathbf{m}}$ il valore medio del momento magnetico atomico.

Definiamo ora il vettore *densità di corrente molecolare* \mathbf{J}_{mol} nel mezzo.¹ Presa una superficie fisicamente infinitesima ΔS passante per un punto P , \mathbf{J}_{mol} è definito in P dalla relazione

$$(\mathbf{J}_{\text{mol}})_n = \mathbf{J}_{\text{mol}} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{I_{\text{mol}}}{\Delta S}, \quad [8.2.3]$$

in cui \mathbf{n} è la normale nel punto P alla superficie ΔS e I_{mol} è la corrente molecolare attraversante la superficie ΔS , pari alla somma algebrica di tutte le correnti microscopiche.

¹ Si noti l'analogia tra il vettore \mathbf{J}_{mol} e la densità di carica di polarizzazione ρ_p dei dielettrici.

piche che attraversano la superficie ΔS . Come al solito, il "lim" va inteso in senso macroscopico.

Consideriamo ora una superficie S che poggia su una linea chiusa, γ , immersa in un mezzo in cui vi siano N spire elementari per unità di volume. La corrente che attraversa S è dovuta soltanto alle correnti delle spire elementari che si concatenano con la linea γ (vedi fig. 8.1a): per tutte le altre spire, "tagliate" da S , la corrente associata è nulla perché somma di due contributi uguali e di segno opposto (in corrispondenza dei due punti in cui la spira è tagliata da S). Per semplicità, consideriamo circolari le spire elementari, individuando la loro orientazione mediante il rispettivo momento magnetico.

Per calcolare la corrente totale attraverso S possiamo supporre tutte le spire ugualmente orientate (secondo la direzione media) e di area A uguale alla media delle proiezioni sul piano normale a questa direzione (ciò corrisponde a considerare i dipoli equivalenti tutti isoorientati e uguali al dipolo equivalente medio dell'intorno).² Un elemento $d\mathbf{l}$ della linea γ attraversa quindi tutte le spire il cui centro è contenuto nel volume cilindrico descritto movendo una spira parallelamente a sé stessa con il centro su $d\mathbf{l}$ (vedi fig. 8.1b). Tale volume vale

$$A \frac{\bar{\mathbf{m}}}{|\bar{\mathbf{m}}|} \cdot d\mathbf{l}, \quad [8.2.4]$$

dove $\bar{\mathbf{m}}$ è il vettore *momento magnetico atomico medio*. Se N è il numero di spire per unità di volume e i la corrente di una singola spira, la corrente delle spire attraversate da $d\mathbf{l}$ vale

$$NiA \frac{\bar{\mathbf{m}}}{|\bar{\mathbf{m}}|} \cdot d\mathbf{l} = N\bar{\mathbf{m}} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}.$$

Pertanto, la totale corrente associata a S è

$$\iint_S \mathbf{J}_{\text{mol}} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad [8.2.5]$$

Trasformando l'integrale di linea in integrale di superficie (mediante il teorema di Stokes), si ha

$$\iint_S \mathbf{J}_{\text{mol}} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \text{rot } \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} dS,$$

e, per l'arbitrarietà di S ,

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{J}_{\text{mol}}. \quad [8.2.6]$$

² Evidentemente, se il mezzo non è magnetizzato i momenti magnetici atomici hanno orientazione casuale, e sia $\bar{\mathbf{m}}$ che \mathbf{M} sono nulli.

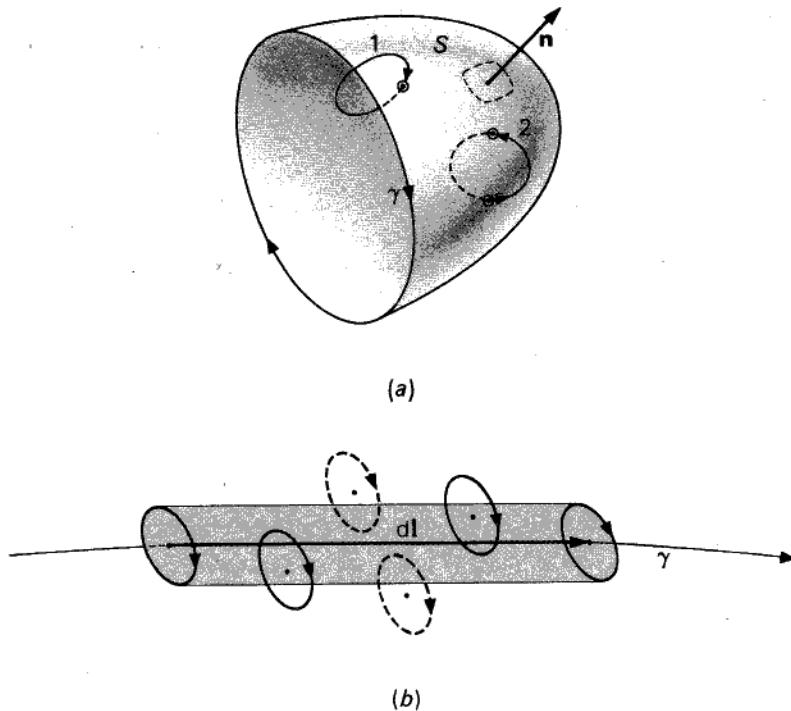


Figura 8.1

Questa relazione, valida in tutti i punti di regolarità del mezzo, non è applicabile in corrispondenza della superficie esterna del materiale magnetico, poiché \mathbf{M} è ivi discontinuo e $\text{rot } \mathbf{M}$ non è definibile (almeno con il suo significato elementare). In questi casi la forma locale della [8.2.5] è diversa dalla [8.2.6] e può essere ottenuta come segue. Consideriamo una linea elementare di tipo "T", in parte contenuta nel materiale magnetizzato e in parte esterna ad esso (vedi fig. 8.2), e sia L la lunghezza dei lati paralleli a \mathbf{M} . Applicando la [8.2.5] a questa linea, si conclude che sulla superficie del mezzo si localizza una distribuzione di corrente superficiale con densità (lineare) \mathbf{J}_s ,

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad [8.2.7]$$

dove \mathbf{n} è la normale alla superficie, rivolta verso l'esterno.

Infine, nel caso generale di discontinuità tra due mezzi materiali diversamente magnetizzati, la [8.2.7] può essere estesa facilmente, e risulta

$$(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s, \quad [8.2.8]$$

dove \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 sono le intensità di magnetizzazione dai due lati della superficie e \mathbf{n} è la normale, rivolta da "1" verso "2".

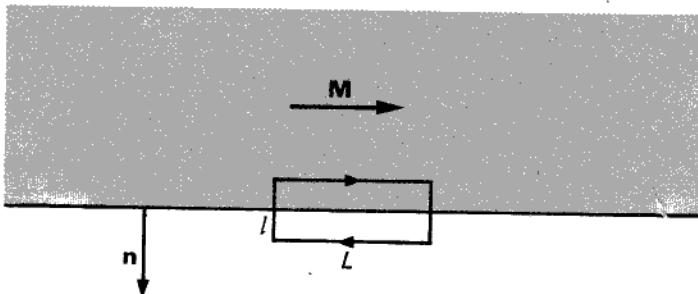


Figura 8.2

Un mezzo materiale magnetizzato può dunque essere considerato equivalente a un sistema di correnti costituito da:

- una distribuzione di correnti di volume, con densità data dalla [8.2.6];
- una distribuzione di correnti superficiali, con densità (lineare) data dalle [8.2.7] e [8.2.8].

8.3 Estensione delle leggi della magnetostatica e classificazione dei materiali

Estendiamo ora le leggi della magnetostatica, enunciate per il vuoto, al caso in cui sia presente un generico mezzo materiale.

Come per i dielettrici, occorre innanzitutto definire i vettori macroscopici \mathbf{B} e \mathbf{J} , e allo scopo si ricorre alle medie dei corrispondenti campi microscopici (vedi § 5.1); dopodiché si possono estendere le due leggi fondamentali. Per quanto riguarda la solenoidalità, ciò è immediato: infatti, anche in presenza di correnti molecolari, *il campo \mathbf{B} è solenoidale* (poiché tale è il campo di ogni corrente molecolare).

Per quanto riguarda la seconda legge, ricordiamo che la densità di corrente macroscopica \mathbf{J} è in generale somma di un contributo *di conduzione* \mathbf{J}_{cond} , dovuto al moto orientato dei portatori liberi, e di un contributo *molecolare* \mathbf{J}_{mol} , dovuto alla magnetizzazione del mezzo e descritto dalle [8.2.6]÷[8.2.8]. La seconda legge può quindi essere estesa facilmente al caso dei mezzi materiali: in forma locale si ha

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_{\text{cond}} + \mathbf{J}_{\text{mol}}), \quad [8.3.1]$$

in forma integrale (equivalente)

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{tot}} = \mu_0 I_{\text{cond}} + \mu_0 I_{\text{mol}}, \quad [8.3.1']$$

dove I_{tot} è la corrente totale (somma di quella di conduzione I_{cond} e di quella molecolare I_{mol}) concatenata con la linea chiusa γ .

Sostituendo la [8.2.6] nella [8.3.1], si ha

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_{\text{cond.}} \quad [8.3.2]$$

Introducendo il vettore *intensità di campo magnetico* \mathbf{H} , definito dalla relazione

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad [8.3.3]$$

la [8.3.2] può essere riscritta nella forma

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{cond.}}, \quad [8.3.2']$$

o, equivalentemente, in forma integrale:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = I_{\text{cond.}} \quad [8.3.2'']$$

L'unità di misura di H è, pertanto, A/m. Notiamo l'analogia tra \mathbf{H} e il vettore \mathbf{D} dei dielettrici: come $\operatorname{div} \mathbf{D}$ è dovuta alle sole cariche libere, $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ è dovuto alle sole correnti di conduzione.

Dalla prima legge,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad [8.3.4]$$

si ha subito

$$\operatorname{div} \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0, \quad [8.3.5]$$

e quindi

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M}. \quad [8.3.5']$$

In presenza di mezzi materiali, \mathbf{B} rimane dunque solenoidale, mentre \mathbf{M} e \mathbf{H} in genere *non* lo sono (vedi § 8.5). Non è possibile in genere, calcolare il campo \mathbf{H} sulla base della conoscenza delle sole correnti di conduzione: infatti esso è determinato anche dalle sue sorgenti (cioè dai punti in cui la divergenza del campo è diversa da zero) e queste dipendono dalla geometria del sistema e dalle disuniformità dei mezzi materiali. Come si vede, anche in questo si può notare l'analogia con il campo del vettore \mathbf{D} .

Vedremo nei prossimi paragrafi i modi in cui un mezzo materiale può polarizzarsi sotto l'azione di un campo magnetico; per il momento ci limitiamo a dire che, per descrivere il comportamento magnetico di un mezzo materiale da un punto di vista macroscopico, è sufficiente assegnare il tipo di legame che intercorre tra l'intensità di campo magnetico e il campo di induzione nel mezzo (cioè tra i vettori \mathbf{H} e \mathbf{B}). Resta inteso che anche in questo caso, come per i dielettrici, il campo agente, ai fini

della magnetizzazione, è prodotto non soltanto dalle correnti esterne al materiale, ma anche dalle stesse correnti di magnetizzazione.

Volendo determinare sperimentalmente la *caratteristica magnetica* $B=B(H)$ di un mezzo occorre, in esso, misurare separatamente H e B in diverse condizioni di magnetizzazione. Il modo più semplice è quello di fare ricorso a un solenoide toroidale assisimmetrico (vedi § 7.3, esercizio 4) avvolto su un campione (anch'esso toroidale e assisimmetrico) del materiale in esame. Se questo è omogeneo e isotropo, le linee vettoriali del campo \mathbf{H} , per motivi di simmetria, sono circolari e coassiali; l'intensità del campo distanza r dall'asse z (vedi fig. 7.10) per la [8.3.2''] è pari a

$$H = \frac{NI}{2\pi r}, \quad [8.3.6]$$

dove N è il numero di spire dell'avvolgimento e I è la corrente che le percorre. A causa della particolare simmetria, H è in questo caso indipendente dal mezzo e può essere variato a piacere semplicemente agendo sulla corrente I che circola nell'avvolgimento. Pertanto, facendo uso della [8.3.6] e misurando B , è possibile rilevare la caratteristica magnetica di un qualunque mezzo materiale.

Dai risultati di queste esperienze, è possibile classificare i materiali in tre grandi categorie: *diamagnetici* (come il rame, l'argento, il bismuto, la grafite), *paramagnetici* (come l'aria, l'alluminio, il platino), *ferromagnetici* (come il ferro, il nichel, il cobalto).

Le prime due categorie sono caratterizzate da un comportamento lineare; ciò significa che si ha

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad [8.3.7]$$

ove μ è una costante, caratteristica del mezzo, che prende il nome di *permeabilità magnetica*.³ La [8.3.7] determina un legame lineare anche fra \mathbf{M} e \mathbf{B} : dalla [8.3.3] si ha infatti

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \mu_0 \mathbf{M},$$

e quindi

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B}. \quad [8.3.7']$$

Per i materiali diamagnetici risulta

$$\mu < \mu_0, \quad [8.3.8]$$

e per i paramagnetici

$$\mu > \mu_0. \quad [8.3.9]$$

³ Le dimensioni di μ sono quelle di B/H , la relativa unità di misura è il Tm/A.

Introducendo la *permeabilità relativa*

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad [8.3.10]$$

le [8.3.8] e [8.3.9] possono essere riscritte nella forma

$$\mu_r < 1, \quad \text{e} \quad \mu_r > 1.$$

Va comunque sottolineato che le permeabilità relative dei materiali dia- e paramagnetici si discostano ben poco dall'unità (sono dell'ordine di $1 - 10^{-5}$ per i primi e di $1 + 10^{-4}$ per i secondi) e che perciò nella grande maggioranza dei casi non si tiene conto della presenza di questi materiali, ma li si considera alla stregua del vuoto.

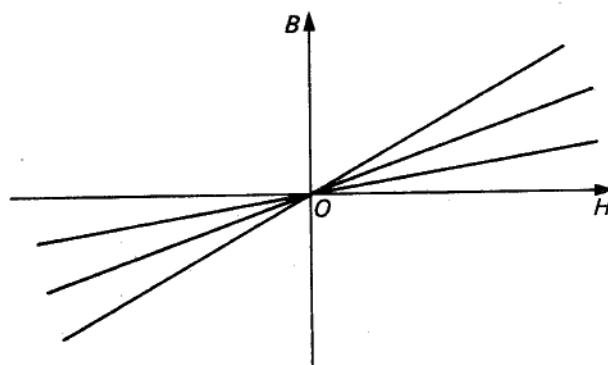
Nella figura 8.3a è riportato qualitativamente l'andamento delle "caratteristiche magnetiche" $B=B(H)$ per i materiali dia- e paramagnetici, mettendole a confronto con la $B=\mu_0 H$, relativa al vuoto.

Ben diverso è il comportamento dei materiali ferromagnetici, i quali, a parità di H , presentano valori di B estremamente più alti (fino a 10^6 volte). Per essi, inoltre, la relazione $B=B(H)$ ha un andamento marcatamente non lineare (in fig. 8.3b è riportato il grafico qualitativo della caratteristica magnetica di un tipico materiale ferromagnetico). Si aggiunga infine che in presenza di magnetizzazione ciclica (dovuta a valori di H alternativamente positivi e negativi) la caratteristica $B=B(H)$ diviene addirittura non univoca: per un dato valore di H , possono cioè avversi valori diversi di B a seconda della "storia" degli stati di magnetizzazione del materiale. Nella figura 8.3c è riportato qualitativamente l'andamento di un tipico *ciclo di isteresi* di un materiale ferromagnetico: partendo dal punto P , caratterizzato dai valori H_{\max} e B_{\max} , e riducendo progressivamente i valori di H nel materiale, i valori di B descrivono la curva $PRCP'$, nel verso segnato, fino al punto P' (simmetrico di P rispetto a O). Dopodiché, se si fa crescere H dal valore $-H_{\max}$ a $+H_{\max}$, i valori di B descrivono la curva $P'R'C'P$ nel verso indicato fino a ritornare in P .

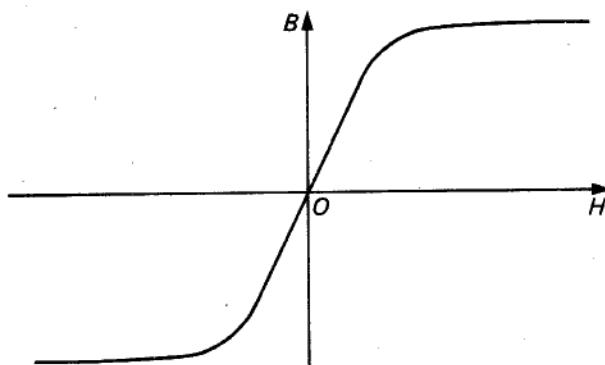
A uno stesso valore di H corrispondono dunque due valori distinti di B . Osservando poi che per valori diversi di H_{\max} i cicli di isteresi sono diversi, se ne conclude che *non* è possibile specificare per un materiale ferromagnetico la caratteristica $B=B(H)$, poiché a uno stesso valore di H possono corrispondere addirittura infiniti valori di B .⁴

Particolarmente interessante è il punto R (vedi fig. 8.3c), in cui il materiale è magnetizzato ($B \neq 0$), pur non essendovi alcuna corrente esterna ad agire su esso ($H=0$). Si tratta di un fenomeno di magnetizzazione permanente che si presenta in materiali abbastanza diffusi: tipico è il caso della magnetite (Fe_3O_4), che costituisce le comuni calamite (per una trattazione più dettagliata del comportamento dei materiali ferromagnetici vedi §§ 8.10 sg.).

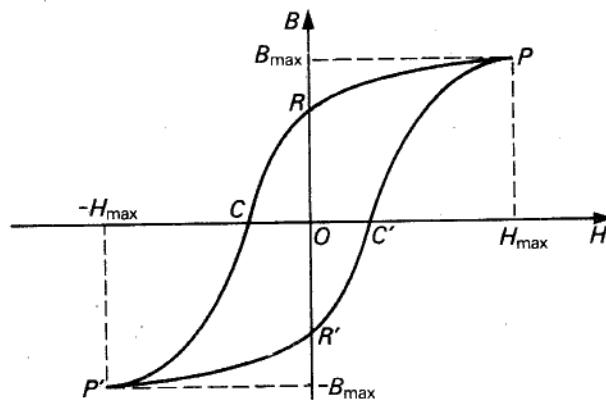
⁴ A meno che ci si limiti a considerare fenomeni *non* ciclici di magnetizzazione, come nel caso rappresentato dalla fig. 8.3b.



(a)



(b)



(c)

Figura 8.3

In (a) e (b), rappresentazione qualitativa della caratteristica magnetica per vari tipi di materiali; in (c), ciclo di isteresi di un materiale ferromagnetico.

8.4 Condizioni al contorno per **B** e **H**

Vogliamo ora considerare le condizioni di continuità per i campi **B** e **H** nel passaggio da un mezzo a un altro.

Alla superficie S di separazione tra due mezzi 1 e 2, si consideri una superficie cilindrica elementare di tipo "M" (vedi fig. 8.4). Nel calcolo del flusso di **B** attraverso S è possibile, come sempre, trascurare il contributo della superficie laterale. Dette B_{n1} e B_{n2} le componenti di **B** normali a S nei due mezzi, si ha

$$d\Phi = (B_{n1} - B_{n2}) dS.$$

D'altra parte, essendo nullo il flusso uscente dalla superficie chiusa, risulta

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad [8.4.2]$$

Per quanto riguarda **H** consideriamo, al solito, una linea chiusa di tipo "T" con due lati infinitesimi, di lunghezza dl , paralleli alla superficie di separazione e giacenti da parti opposte di questa, e gli altri due lati infinitesimi di ordine superiore (vedi fig. 8.5). Calcolando la circuitazione di **H**, il contributo di questi ultimi si può trascurare perché infinitesimo di ordine superiore. In virtù della seconda legge della magnetostatica e tenendo presente che la corrente di conduzione concatenata è anch'esso un termine infinitesimo di ordine superiore,⁵ si ha

$$H_{t1} dl - H_{t2} dl = 0,$$

e quindi

$$H_{t1} = H_{t2},$$

dove l'indice t indica la componente tangenziale.

Consideriamo il caso di due mezzi separati da una superficie S , nei cui punti sia nulla la densità superficiale di corrente di conduzione. Se entrambi sono lineari, si può dedurre dalle [8.3.2] e [8.3.3] una legge di rifrazione delle linee vettoriali di **B** e **H** simile a quella valida in elettrostatica per le linee di **E** e **D**.

Dalla [8.4.2] si ha

$$\mu_{r1} \mu_0 H_{n1} = \mu_{r2} \mu_0 H_{n2}, \quad [8.4.3]$$

ove μ_{r1} e μ_{r2} indicano le permeabilità magnetiche relative dei due mezzi. Per la

⁵ Naturalmente, se sulla superficie S scorre una corrente di conduzione superficiale, la circuitazione di **H** non è nulla e le sue componenti tangenziali risultano discontinue su S .

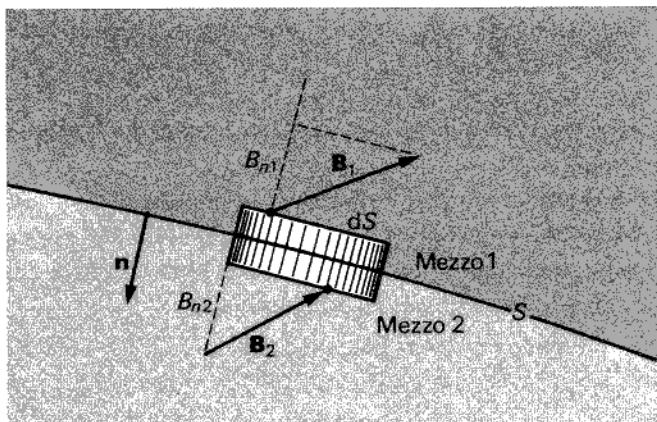


Figura 8.4

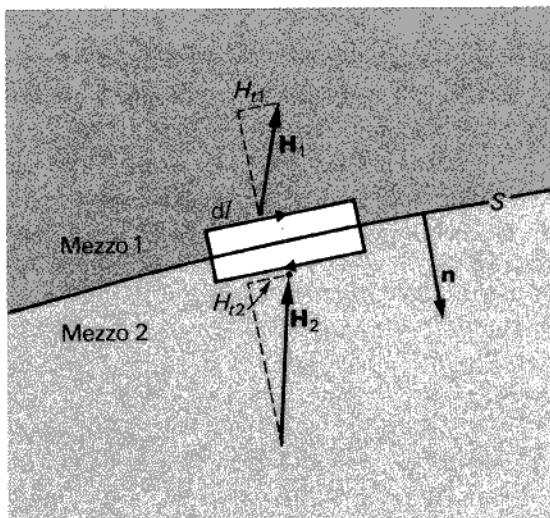


Figura 8.5

[8.4.3], si ottiene

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \cdot \frac{H_{t1}}{H_{t2}} = \frac{\mu_r 1}{\mu_r 2}, \quad [8.4.4]$$

dove α_1 e α_2 sono gli angoli formati con la normale alla superficie dalle linee di forza di \mathbf{H} , ovvero di \mathbf{B} (vedi fig. 8.6).

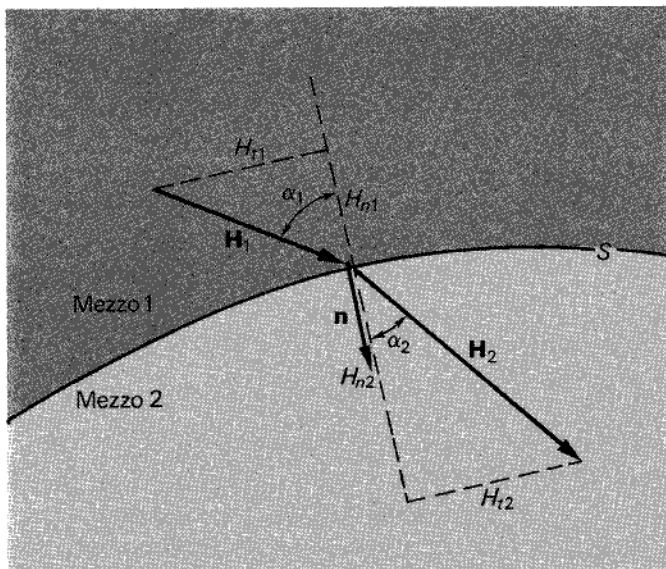


Figura 8.6

Se uno dei due mezzi ha permeabilità magnetica più elevata dell'altro (ad esempio $\mu_1 > \mu_2$) si vede che le linee di forza uscenti da esso si avvicinano alla normale, cioè $\operatorname{tg} \alpha_1 > \operatorname{tg} \alpha_2$.

8.5 Magnetizzazione di corpi omogenei e isotropi

La magnetizzazione \mathbf{M} di un materiale omogeneo e isotropo è funzione del campo di induzione \mathbf{B} , somma del campo \mathbf{B}_0 prodotto dalle correnti esterne e del campo \mathbf{B}_1 prodotto dalla distribuzione delle stesse correnti di magnetizzazione. In ogni punto, il valore di \mathbf{M} è funzione del campo \mathbf{B} ivi esistente (e non del solo \mathbf{B}_0). Di conseguenza un campo \mathbf{B}_0 uniforme non produce in genere una magnetizzazione uniforme in un materiale: perché ciò accada, occorre che ivi sia uniforme anche il campo \mathbf{B}_1 prodotto dalla magnetizzazione.

Esaminiamo in primo luogo qualche esempio di campo \mathbf{B}_1 prodotto da distribuzioni di \mathbf{M} assegnata, supponendo di disporre di materiali *magneticamente rigidi*, in cui cioè \mathbf{M} non dipenda da \mathbf{B} (è questo un caso ideale, poiché in realtà in tutti i materiali \mathbf{M} dipende da \mathbf{B} , anche se in taluni di essi tale dipendenza è molto lieve).

Esempio 1

Si abbia un magnete permanente *cilindrico, di lunghezza finita, uniformemente magnetizzato lungo l'asse*. Per renderci conto dell'andamento delle linee vettoriali di \mathbf{B} ricordiamo che l'assegnata distribuzione di \mathbf{M} equivale a una corrente superfi-

ciale distribuita uniformemente sulla superficie laterale del cilindro con densità (lineare) $J_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ (vedi § 8.2). Pertanto, le linee di \mathbf{B} sono quelle di un solenoide coincidente con la superficie laterale del cilindro (vedi fig. 8.7). All'esterno del materiale, le linee di \mathbf{H} coincidono con quelle di \mathbf{B} , poiché ivi risulta

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

All'interno del materiale, le linee di \mathbf{H} possono essere ottenute mediante la relazione

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

In corrispondenza delle due basi del magnete le divergenze di \mathbf{M} e di \mathbf{H} sono *diverse da zero*, e di conseguenza le linee di \mathbf{H} cambiano verso nell'attraversare tali basi (vedi fig. 8.7). All'interno del materiale, \mathbf{H} ha verso opposto a quello di \mathbf{M} e di \mathbf{B} .

Il fatto che \mathbf{B} e \mathbf{H} , prodotti da una magnetizzazione rigida \mathbf{M} , siano in generale di senso opposto all'interno del materiale magnetizzato può essere dedotto anche in altro modo. Consideriamo un magnete cilindrico di lunghezza *infinita*; esso equivarrà a un solenoide indefinito. Le linee di \mathbf{B} sono rettilinee e \mathbf{B} è uniforme ed equiverto a \mathbf{M} all'interno, nullo all'esterno del solenoide. Le linee di \mathbf{B} sono tutte interne al solenoide e si chiudono a distanza indefinita.

Il valore di \mathbf{B} all'interno si deduce considerando una linea chiusa rettangolare (vedi fig. 8.8). Applicando la legge di Ampère, si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{td}l = \mu_0 I,$$

e per quanto detto sopra, si ottiene

$$Bl = \mu_0 J_s l = \mu_0 Ml.$$

All'interno del materiale risulta dunque

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}, \\ \mathbf{H} = 0. \end{cases} \quad [8.5.1]$$

In questa particolare configurazione, una magnetizzazione \mathbf{M} uniforme produce un campo \mathbf{B} uniforme all'interno del magnete.

E' chiaro che se il magnete, e quindi il solenoide equivalente, è di lunghezza *finita*, il campo \mathbf{B} prodotto è minore, mancando il contributo positivo corrispondente a parte delle correnti del solenoide indefinito equivalente.

Quella del solenoide indefinito rappresenta dunque la configurazione di massima efficienza ai fini della creazione del campo \mathbf{B} da parte di una magnetizzazione uni-

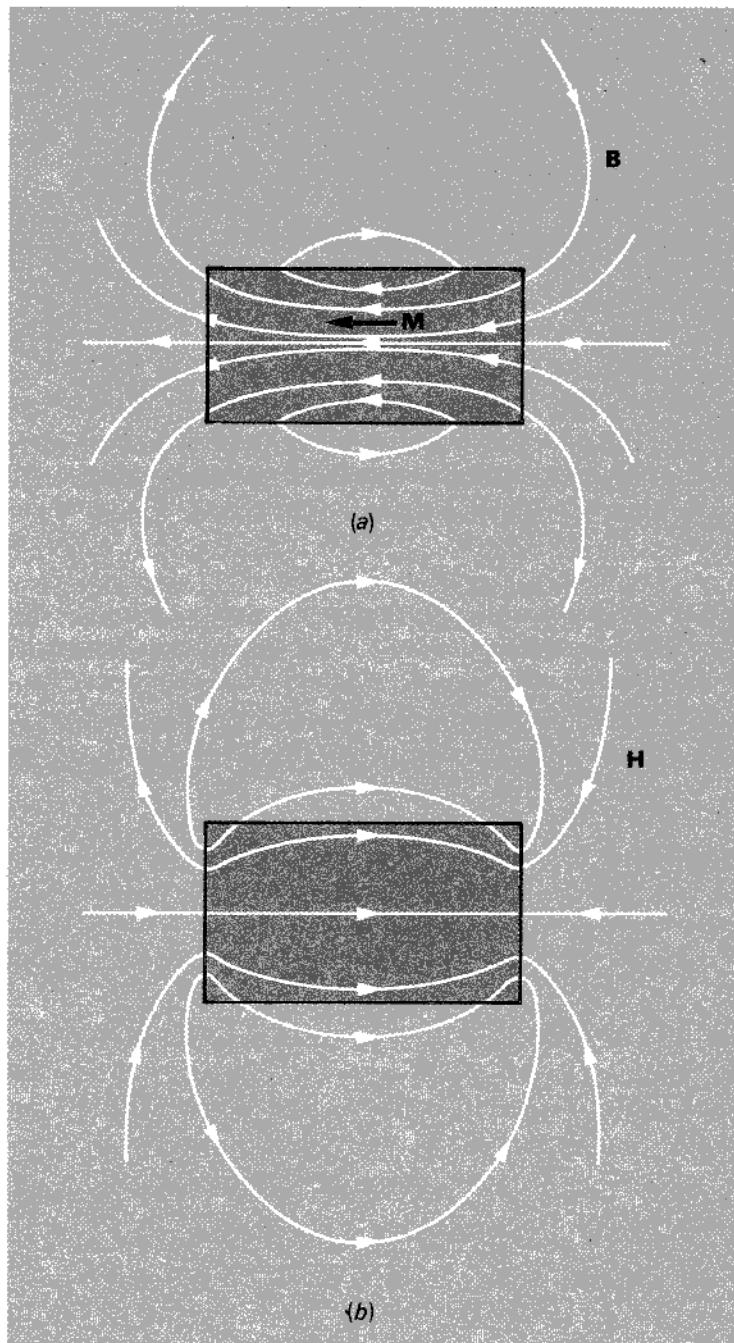


Figura 8.7

Linee vettoriali (a) dell'induzione magnetica \mathbf{B} e (b) dell'intensità del campo magnetico \mathbf{H} in un magnete permanente cilindrico uniformemente magnetizzato.

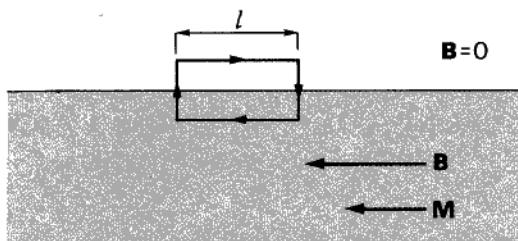


Figura 8.8

forme \mathbf{M} ; in generale si ha

$$|\mathbf{B}| < \mu_0 |\mathbf{M}|. \quad [8.5.2]$$

Se ne conclude, per la [8.3.3], che una magnetizzazione uniforme produce, nell'interno del materiale, vettori \mathbf{H} e \mathbf{B} di verso opposto.

Esempio 2

Si può dimostrare che un *ellissoide* uniformemente magnetizzato produce nel suo interno un campo \mathbf{B} uniforme; inoltre, nel caso in cui il vettore \mathbf{M} sia parallelo a uno dei tre assi principali, \mathbf{B} risulta parallelo a \mathbf{M} e di intensità ad esso proporzionale, con coefficiente dipendente dall'asse considerato. Il cilindro indefinito può considerarsi come un caso limite di ellissoide.

Esempio 3

Un altro caso interessante è quello di un *disco* uniformemente magnetizzato in direzione parallela all'asse, di raggio molto grande (al limite infinito). Il campo \mathbf{B} prodotto da \mathbf{M} è nullo, sia all'interno che all'esterno del materiale, perché le densità di corrente equivalenti, di valore finito, hanno sede soltanto nello strato periferico, a distanze infinite. Di conseguenza,

$$\begin{cases} \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{H} = -\mathbf{M}. \end{cases} \quad [8.5.3]$$

Esempio 4

Una *sfera* di raggio R , magnetizzata uniformemente, produce nel suo interno un campo \mathbf{B} uniforme e parallelo a \mathbf{M} . Precisamente, si dimostra che

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \\ \mathbf{H} = -\frac{1}{3} \mathbf{M}. \end{cases} \quad [8.5.4]$$

All'esterno della sfera, invece, il campo \mathbf{B} è uguale a quello di un dipolo magnetico,

di momento $(4/3)\pi R^3 M$, posto nel centro (vedi fig. 8.9). Detto \mathbf{r} il raggio vettore che va dal centro della sfera al generico punto esterno ad essa, si ha

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad [8.5.5]$$

E' immediato verificare che il campo \mathbf{B} , dato dalla [8.5.4] e dalla [8.5.5], è solenoidale e soddisfa la condizione di continuità [8.4.2] sulla superficie della sfera.

Materiali in cui \mathbf{M} è funzione di \mathbf{B}

Sia data ad esempio una sfera di raggio R , costituita di un materiale di permeabilità magnetica μ , immersa in un campo \mathbf{B} uniforme. Da quanto detto, si può mostrare che la sfera è uniformemente magnetizzata. All'esterno si ha, come risultante della sovrapposizione di \mathbf{B}_0 e del campo generato dalla distribuzione di \mathbf{M} ,

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \end{cases} \quad [8.5.6]$$

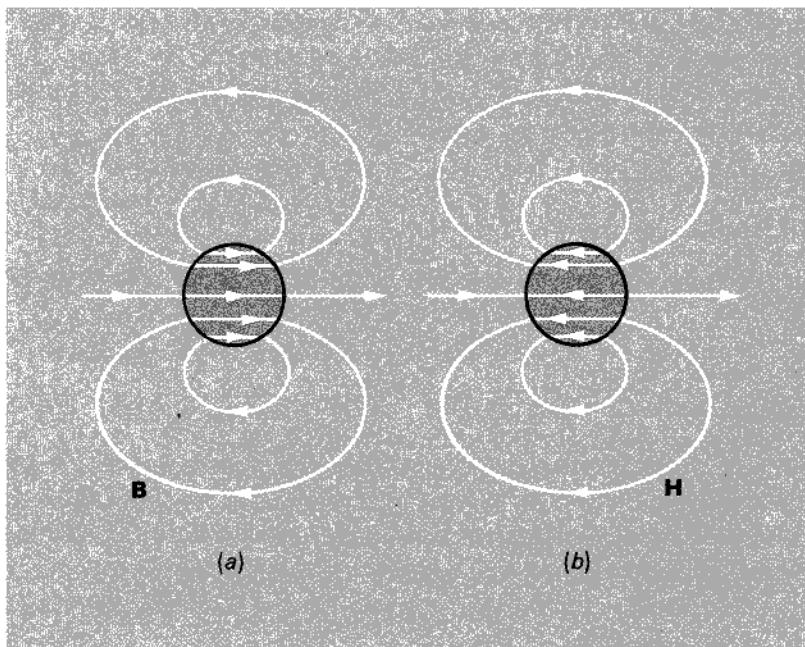


Figura 8.9

Linee vettoriali (a) dell'induzione magnetica e (b) dell'intensità del campo magnetico in una sfera uniformemente magnetizzata.

e all'interno

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{3} \mathbf{M}, \end{cases} \quad [8.5.7]$$

avendo posto $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$.

Il valore di \mathbf{M} è determinato dalla natura del materiale e dal campo \mathbf{B} . Abbiamo supposto che il materiale sia caratterizzato da una relazione lineare tra \mathbf{B} e \mathbf{H} (ovvero tra \mathbf{B} e \mathbf{M}), cioè da una permeabilità relativa μ_r tale che

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}. \quad [8.5.8]$$

Eliminando \mathbf{H} e \mathbf{B} tra le [8.5.7] e [8.5.8], si ha

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \frac{3(\mu_r - 1)}{2 + \mu_r}. \quad [8.5.9]$$

Se la sfera è costituita di materiale a bassa permeabilità (al limite il vuoto), è $\mu_r \approx 1$, e di conseguenza $\mathbf{M} \approx 0$, e $\mathbf{H} \approx \mathbf{B}_0/\mu_0$. Se invece è costituita di materiale ad altissima permeabilità (al limite, $\mu_r \rightarrow \infty$), si ha $\mathbf{M} \rightarrow 3\mathbf{B}_0/\mu_0$, e $\mathbf{B} \rightarrow 3\mathbf{B}_0$.

Riportiamo l'andamento qualitativo delle linee vettoriali nel caso di una sfera ad alta permeabilità (vedi fig. 8.10): come si vede, le linee tendono a infittirsi nella sfera, poiché la permeabilità magnetica è ivi più alta che nel vuoto.

Analogamente, nel caso di un cilindro di lunghezza infinita, con l'asse parallelo alle linee vettoriali, in un campo uniforme \mathbf{B}_0 , si ha

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0, \end{cases} \quad [8.5.10]$$

e per un disco piano di raggio infinito, disposto in un campo \mathbf{B} uniforme normale al suo piano,

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{M}. \end{cases} \quad [8.5.11]$$

Il caso di un'ellissoide di materiale magnetizzabile disposto in un campo uniforme \mathbf{B} , diretto secondo uno degli assi, è un po' più complicato. I vettori \mathbf{B} e \mathbf{H} , nel materiale, risultano paralleli e soddisfano le diseguaglianze $B > B_0$ e $H < H_0 = B_0/\mu_0$. Introducendo due fattori adimensionali positivi, di valore < 1 , dipendenti dalla forma del solido, γ (*efficienza di magnetizzazione*) e S (*fattore di smagnetizzazione*), poniamo

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \gamma \mu_0 \mathbf{M} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - S \mathbf{M}. \end{cases} \quad [8.5.12]$$

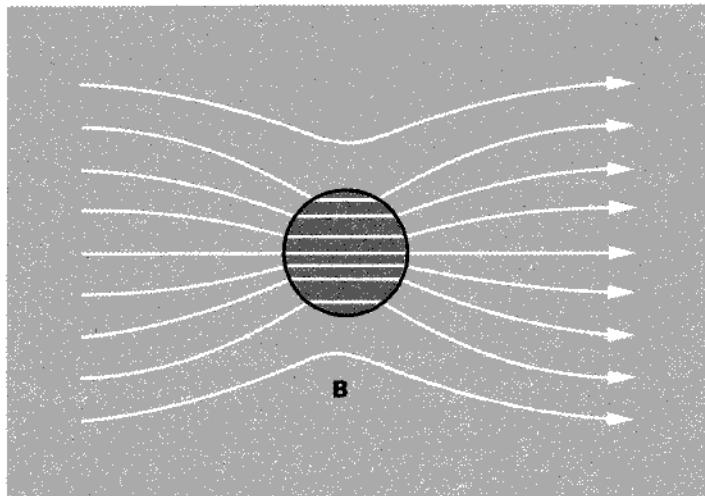


Figura 8.10

Essendo per definizione $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$, γ e S non sono indipendenti, ma legati dalla relazione

$$S = 1 - \gamma. \quad [8.5.13]$$

Riassumendo i risultati fin qui ottenuti, abbiamo:

- | | |
|------------------------------|---|
| a) cilindro indefinito: | $\begin{cases} S = 0, \\ \gamma = 1, \end{cases}$ |
| b) disco di raggio infinito: | $\begin{cases} S = 1, \\ \gamma = 0, \end{cases}$ |
| c) sfera: | $\begin{cases} S = 1/3, \\ \gamma = 2/3. \end{cases}$ |

Nella tecnica si usa spesso definire un fattore di smagnetizzazione S anche per configurazioni geometriche nelle quali \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} non risultano paralleli, benché a rigore ciò non sia giustificabile.

*8.6 Definizione operativa dei vettori \mathbf{B} e \mathbf{H} nell'interno dei materiali

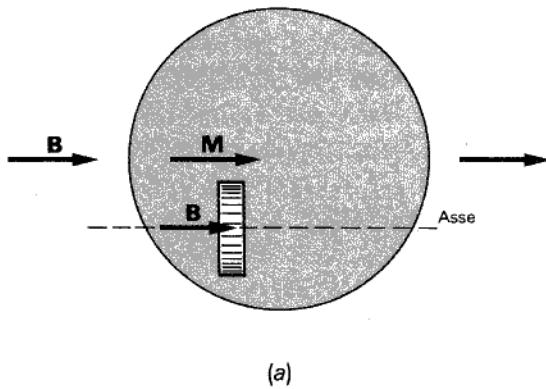
Analogamente a quanto fatto in elettrostatica per i vettori \mathbf{E} e \mathbf{D} , anche \mathbf{B} e \mathbf{H} possono essere definiti in modo operativo all'interno dei materiali.

Data ad esempio una sfera di materiale magnetizzabile, posta nel campo \mathbf{B}_0 di un

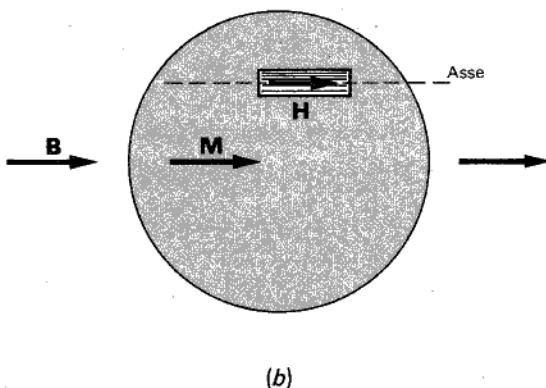
solenoide indefinito, vediamo come sia possibile, praticando entro la sfera opportune cavità e misurando in esse (cioè *nel vuoto*) \mathbf{B} e \mathbf{H} , determinare, in base ai valori così ottenuti, \mathbf{B} e \mathbf{H} *nel mezzo*.

Pratichiamo inizialmente entro la sfera una cavità cilindrica con le basi normali a \mathbf{M} e con altezza molto piccola (assimilabile a un infinitesimo) rispetto al diametro di base (vedi fig. 8.11a).

Poiché nel materiale \mathbf{B} è diretto secondo la normale alla superficie della cavità, dalla condizione di continuità [8.4.2] si deduce che il valore \mathbf{B}_{cav} , misurato entro la cavità, è uguale a quello, \mathbf{B} , nell'interno del materiale. Ciò si può spiegare anche considerando la rappresentazione della magnetizzazione a mezzo delle correnti equivalenti; il campo \mathbf{B}_{cav} nell'interno della cavità è quello prodotto dalle correnti equivalenti localizzate nello strato superficiale esterno della sfera e dalle correnti localizzate nello strato superficiale laterale della cavità (oltre che, naturalmente, da quelle che producono \mathbf{B}_0). Essendo lo strato di altezza infinitesima, queste ultime



(a)



(b)

Figura 8.11

Definizione operativa di \mathbf{B} e \mathbf{H} in una sfera uniformemente magnetizzata.

correnti non danno contributo finito al campo \mathbf{B}_{cav} nella cavità e questo risulta perciò uguale a quello esistente nel materiale.

Consideriamo ora una cavità cilindrica con l'asse parallelo a \mathbf{M} , avente base di dimensioni molto piccole (praticamente infinitesime) rispetto all'altezza (vedi fig. 8.11 b). Essendo \mathbf{H} , nel materiale, diretto parallelamente alla superficie laterale, dalla condizione di continuità [8.4.9] si deduce che il suo valore, misurato nella cavità, è uguale a quello nell'interno del materiale.

Considerando le correnti equivalenti, la cavità cilindrica equivale a un solenoide indefinito (essendo la sua lunghezza molto grande rispetto alle dimensioni della sezione) con densità di corrente $\mathbf{J}_s = \mathbf{M}$. Perciò, nella cavità, dato il senso di circolazione di \mathbf{J}_s , si ha

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{\text{cav}} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} \\ \mathbf{H}_{\text{cav}} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \mathbf{H}. \end{cases} \quad [8.6.1]$$

Nel caso generale, in cui non sia nota a priori la direzione di \mathbf{B} e \mathbf{H} entro il materiale, si praticano delle cavità della forma suddetta e si misurano le componenti di \mathbf{B} e di \mathbf{H} in direzione normale alle basi e parallela all'asse rispettivamente. Per determinare completamente \mathbf{B} e \mathbf{H} , sarà sufficiente conoscere le rispettive componenti per tre direzioni non complanari.

8.7 Le masse magnetiche e il teorema di equivalenza

Nei paragrafi precedenti si è già fatto cenno a quei materiali che presentano effetti di magnetizzazione permanente. Il fenomeno, noto sin dall'antichità, dette origine allo studio del magnetismo: i primi studi sull'argomento (nel sedicesimo secolo) si riferivano soltanto a questo genere di fenomeni, non essendo stati ancora scoperti, all'epoca, gli effetti magnetici delle correnti elettriche.

La vecchia teoria del magnetismo, cui accenniamo brevemente per il suo valore storico (e per motivi che saranno più chiari in seguito; vedi anche § 8.7.1) moveva dal concetto di *massa magnetica* (o *polo magnetico*), avente un ruolo del tutto analogo a quello svolto dalla "carica elettrica" nell'elettrostatica. L'esperienza mostrava infatti che un piccolo campione di materiale magnetizzato produce nello spazio circostante un campo magnetico (definito come forza agente sulla massa magnetica unitaria) il cui andamento è del tutto simile a quello del campo elettrostatico prodotto da un dipolo elettrico. Fu naturale, dunque, assimilare il pezzetto di materiale magnetizzato a un "dipolo magnetico" di *momento magnetico* pari a

$$\mathbf{m} = \mathcal{m} \mathbf{d}, \quad [8.7.1]$$

dove \mathcal{m} indica il valore assoluto delle due masse magnetiche (di nome contrario) che costituiscono il dipolo, \mathbf{d} è un vettore di modulo pari alla distanza tra le due masse,

diretto come la loro congiungente, con verso dalla negativa (polo sud) alla positiva (polo nord).

Il campo magnetico \mathbf{B} prodotto dal dipolo ammette un potenziale scalare Φ e può quindi essere posto nella forma

$$\mathbf{B} = -\nabla \Phi, \quad [8.7.2]$$

con⁶

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \nabla \frac{1}{r}. \quad [8.7.3]$$

A questo punto, l'argomento potrebbe essere sviluppato in stretta analogia con l'elettrostatica: si potrebbero introdurre una "legge di Coulomb per le masse magnetiche", un "principio di sovrapposizione" ecc. In questo modo la trattazione del magnetismo sarebbe del tutto indipendente da quella delle correnti.

Il punto debole di una impostazione basata sulle "masse magnetiche" è dato dal fatto che è impossibile, diversamente da quanto accade per le cariche elettriche, isolare la singola massa magnetica (il cosiddetto *monopolio magnetico*): come mostra il noto fenomeno della "calamita spezzata", le masse magnetiche si presentano sempre in coppia (polo nord e polo sud). (A questo proposito vedi anche § 8.7.1.)

Fu principalmente A. M. Ampère, all'inizio del secolo scorso, a chiarire la natura unitaria dei fenomeni magnetici ed elettrodinamici. Suo è il ben noto *principio di equivalenza*, che si pone a fondamento della moderna teoria del magnetismo:

Il campo magnetico prodotto da un dipolo magnetico di momento magnetico \mathbf{m} coincide (all'esterno del dipolo) con quello prodotto da una spira elementare (piana) di area A percorsa da una corrente I tale che

$$\mathbf{m} = A \mathbf{I} \mathbf{n}, \quad [8.7.4]$$

dove \mathbf{n} è il versore della normale alla spira (orientata in maniera congruente con il verso di percorrenza della spira stessa).⁷

Osservando che una generica porzione di materia magnetizzata può essere scomposta in dipoli e che ciascuno di questi può essere sostituito, per la [8.7.4], da una spira elementare, l'equivalenza fra il comportamento della materia magnetizzata e di opportune distribuzioni di corrente è pienamente congruente con quanto già stabilito nel paragrafo 8.2.

⁶ Vedi l'analogia espressione per il dipolo elettrico.

⁷ Proprio a causa dell'equivalenza espressa dalla [8.7.4], la quantità a secondo membro di questa relazione è denominata momento magnetico della corrente.

*8.7.1 Monopoli magnetici

La possibile esistenza di monopoli è stata oggetto di accurate indagini sperimentali negli ultimi decenni, soprattutto a seguito di un importante lavoro di Paul Dirac, del 1931, in cui si mostra che l'esistenza di anche un solo monopolio magnetico sarebbe sufficiente a spiegare l'origine della quantizzazione della carica elettrica. Non è certamente questa la sede in cui affrontare simili argomenti; osserviamo invece che, più che parlare di ricerca dei monopoli magnetici, è corretto parlare di ricerca di una particella in cui il rapporto tra carica elettrica e massa magnetica (definita come sopra) sia diverso da quello della maggioranza delle altre particelle. Infatti, mostreremo che soltanto la scoperta di una tale particella costringerebbe a modificare le leggi dell'elettromagnetismo, che rimarrebbero invece invariate se tutte le particelle cariche elettricamente fossero dotate di massa magnetica proporzionale alla carica.

Per illustrare questa affermazione, riprendiamo in esame le leggi dell'elettrostatica e della magnetostatica e riscriviamole nella forma che esse assumerebbero qualora si dimostrasse sperimentalmente l'esistenza dei monopoli magnetici.⁸ E' naturale pensare, in base a considerazioni di simmetria formale, che le eventuali "correnti magnetiche" associate al moto delle masse magnetiche produrrebbero un campo elettrico, così come le correnti elettriche producono un campo magnetico (ciò è d'altronde confermato dai fenomeni di induzione elettromagnetica, che saranno studiati nel capitolo che segue). Tenendo conto di tutto ciò e indicando con ρ_e e ρ_m , rispettivamente, le densità di volume di carica elettrica e di massa magnetica e con \mathbf{J}_e e \mathbf{J}_m le relative densità di volume di corrente, le equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica possono essere presentate nella seguente forma:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m \end{cases} \quad [8.7.5]$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e. \end{cases} \quad [8.7.5']$$

Osserviamo che la dissimmetria nelle equazioni ai rotori dipende dal fatto che nella descrizione dei fenomeni elettromagnetici è necessario servirsi di *due* vettori. Introducendo i vettori $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ e $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, le [8.7.5], [8.7.5'] possono essere riscritte nella forma, più simmetrica,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m \end{cases} \quad [8.7.6]$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = \rho_m \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e. \end{cases} \quad [8.7.6']$$

⁸ Lo sviluppo dell'argomento segue la trattazione di J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York 1975).

Consideriamo la seguente trasformazione lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = \mathbf{E}' \cos \xi + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{B}' \sin \xi \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}' \cos \xi - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{E}' \sin \xi \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}' \cos \xi + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{H}' \sin \xi \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}' \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{D}' \sin \xi, \end{array} \right. [8.7.7]$$

dove ξ è un parametro reale arbitrario.

Applichiamo ora la stessa trasformazione alle sorgenti elettriche e magnetiche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_e = \rho'_e \cos \xi + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \rho'_m \sin \xi \\ \rho_m = \rho'_m \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \rho'_e \sin \xi \\ \mathbf{J}_e = \mathbf{J}'_e \cos \xi + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{J}'_m \sin \xi \\ \mathbf{J}_m = \mathbf{J}'_m \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{J}'_e \sin \xi. \end{array} \right. [8.7.8]$$

Sostituendo le [8.7.7] e [8.7.8] nelle [8.7.5], [8.7.5'], si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{D}' = \rho'_e \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}' = -\mu_0 \mathbf{J}'_m, \end{array} \right. [8.7.9]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{H}' = \rho'_m \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}'_e, \end{array} \right. [8.7.9']$$

Si constata dunque che le relazioni cui soddisfano i campi \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{H}' , \mathbf{D}' sono identiche alle [8.7.5], [8.7.5'], a patto di sostituire le nuove sorgenti alle vecchie. Si verifica inoltre, calcolando la forza totale

$$\mathbf{F} = \rho_e \mathbf{E} + \rho_m \mathbf{B} + \mathbf{J}_e \times \mathbf{B} - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{J}_m \times \mathbf{E}, [8.7.10]$$

e sostituendo le [8.7.7] e [8.7.8] nella [8.7.10], che

$$\mathbf{F}' = \rho'_e \mathbf{E}' + \rho'_m \mathbf{B}' + \mathbf{J}'_e \times \mathbf{B}' - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{J}'_m \times \mathbf{E}' = \mathbf{F}.$$

La conclusione di tutto ciò è che, se tutte le particelle materiali avessero lo stesso rapporto tra carica elettrica e massa magnetica, sarebbe possibile, scegliendo opportunamente ξ , attribuire al rapporto ρ_e/ρ_m un valore arbitrario, sì da ottenere $\rho_m = 0$, $\mathbf{J}_m = 0$.

Si potrebbe dunque ancora sostenere la *non-esistenza* delle singole masse magnetiche.

II. POLARIZZAZIONE MAGNETICA: IL PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO⁹

*8.8 Diamagnetismo

Come per i fenomeni di polarizzazione elettrica, anche per quelli magnetici una trattazione esauriente e rigorosa del punto di vista microscopico richiederebbe il ricorso alla meccanica quantistica. Tuttavia, la teoria classica (essenzialmente dovuta a Langevin) che qui ci limitiamo a presentare è sufficiente per dare una spiegazione elementare dei fatti sperimentali e per fornire previsioni quantitative che concordano ragionevolmente con l'esperienza.

Come si è visto, per le sostanze diamagnetiche risulta

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad [8.8.1]$$

con $\mu_r < 1$. La ragione per cui, in queste sostanze, μ_r è minore di uno è da ricercarsi nel fenomeno della cosiddetta *precessione di Larmor*, che ora illustreremo in un caso semplice.

Si consideri un atomo costituito da un nucleo, con carica $+e$, e da un solo elettrone, con carica $-e$, rotante con velocità angolare ω_0 su un'orbita circolare di raggio R (vedi fig. 8.12). Per l'equilibrio tra la forza centrifuga e quella coulombiana, si ha

$$m_e \omega_0^2 R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad [8.8.2]$$

dove m_e è la massa dell'elettrone. In direzione ortogonale all'orbita, applichiamo ora un campo magnetico $\mathbf{B}(t)$, che faremo variare dal valore zero a un valore finale \mathbf{B}_{fin} . L'applicazione di \mathbf{B} produce una duplice forza sull'elettrone: una di tipo tangenziale, prodotta dal campo elettrico associato alla variazione del campo magnetico, e una radiale (*forza di Lorentz*), data da

$$\mathbf{F}_L = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad [8.8.3]$$

essendo \mathbf{v} la velocità dell'elettrone. Se assimiliamo l'orbita elettronica a una spira percorsa da corrente, la legge dell'induzione (vedi, più avanti, eq. [9.2.2]) fornisce la forza elettromotrice \mathcal{E} , conseguente alla variazione del flusso di B concatenato con la spira:

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{\gamma} \frac{\mathbf{F}}{e} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad [8.8.4]$$

dove $d\mathbf{l}$ è un tratto elementare della spira e \mathbf{F} la forza totale agente sull'elettrone.

⁹ Lo studio di questa parte del capitolo presuppone la conoscenza degli argomenti svolti nel capitolo seguente.

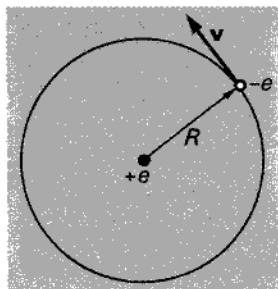


Figura 8.12

Supponendo che il raggio dell'orbita non varii al variare di \mathbf{B} (vedremo poi la validità di tale approssimazione), dalla [8.8.4], essendo $d\Phi = \pi R^2 dB$, segue

$$F_\gamma = \frac{eR}{2} \frac{dB}{dt}, \quad [8.8.5]$$

dove F_γ è la componente di \mathbf{F} secondo dI . Dal teorema del momento della quantità di moto segue che l'elettrone subisce una variazione di velocità angolare $\Delta\omega$ tale che

$$m_e R \Delta\omega = \int_0^T F_\gamma dt, \quad [8.8.6]$$

dove T è il tempo a cui $B(T) = B_{\text{fin}}$. Si ha quindi

$$\Delta\omega = \frac{eB_{\text{fin}}}{2m_e}. \quad [8.8.7]$$

Da quanto detto, il vettore $\Delta\omega$ risulta concorde con il vettore \mathbf{B}_{fin} , ortogonale all'orbita. Pertanto l'applicazione di \mathbf{B}_{fin} produce una variazione della velocità angolare dell'elettrone di verso concorde con \mathbf{B}_{fin} e di modulo dato dalla [8.8.7]. E' questo il *teorema di Larmor*.¹⁰ (Ovviamente, $\Delta\omega$ è da aggiungere o da sottrarre alla velocità iniziale dell'elettrone a seconda del verso di rotazione di questo.)

Come già precisato, i ragionamenti svolti si basano sull'ipotesi che il raggio dell'orbita non dipenda da \mathbf{B} . Verifichiamo ora la fondatezza di tale ipotesi mostrando (a posteriori) che la forza radiale di Lorentz (che potrebbe dar luogo a una variazione di R) è bilanciata dalla sola variazione di forza centrifuga derivante dalla variazione (con R costante) di ω .

Supponendo infatti $\Delta\omega \ll \omega$ (il che è senz'altro lecito per i campi magnetici che si riescono a produrre in laboratorio), si ottiene per la variazione considerata di forza centrifuga un valore

$$m_e \Delta(\omega^2 R) = 2m_e \omega_0 R \Delta\omega = 2m_e \omega_0 e \frac{RB_{\text{fin}}}{2m_e} = e\omega_0 RB_{\text{fin}},$$

uguale cioè alla forza di Lorentz data dalla [8.8.3].

¹⁰ Se il campo magnetico non è normale all'orbita dell'elettrone, questa presenta un moto di precessione (*precessione di Larmor*).

Ricordiamo ora che il momento magnetico associato a un elettrone in moto con velocità angolare ω è dato da (vedi § 8.1)

$$\mathbf{m}_e = \pi R^2 \frac{e}{T} = \frac{e\omega R^2}{2}, \quad [8.8.8]$$

dove $T = 2\bar{\mu}/\omega$. Il verso di \mathbf{m}_e è inoltre opposto a quello di ω per via del segno della carica dell'elettrone, e pertanto

$$\mathbf{m}_e = -\frac{eR^2}{2} \omega. \quad [8.8.9]$$

Per la [8.8.7] si può allora dire che, a causa della precessione di Larmor, all'atto dell'applicazione di \mathbf{B}_{fin} , si genera un momento magnetico¹¹

$$\mathbf{m}_L = -\frac{eR^2}{2} \Delta\omega = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \mathbf{B}_{\text{fin}}.$$

Nel caso generale di un sistema comunque complesso, si può dimostrare che l'influenza del campo magnetico è tale che l'intero sistema elettronico (senza che si produca alcuna variazione dei suoi movimenti interni) assume un movimento di rotazione attorno alla direzione del campo con velocità angolare data dalla [8.8.7]. In un sistema di assi cartesiani avente origine nel nucleo e asse z parallelo a \mathbf{B} , indicando con x_k, y_k, z_k le coordinate del k -esimo elettrone dell'atomo, il contributo medio di un tale elettrone al momento magnetico dovuto alla precessione di Larmor è, in base alla [8.8.10],

$$\mathbf{m}_{kL} = -\frac{e^2 \overline{x_k^2 + y_k^2}}{4m_e} \mathbf{B}_{\text{fin}}, \quad [8.8.11]$$

dove $\overline{x_k^2 + y_k^2}$ indica la media di $x_k^2 + y_k^2$ sull'orbita del k -esimo elettrone. Estendendo questo ragionamento a tutti gli Z elettroni dell'atomo, il momento totale risulta

$$\mathbf{m}_L = -\frac{e^2}{4m_e} \sum_{k=1}^Z \overline{x_k^2 + y_k^2} \mathbf{B}_{\text{fin}} = -\frac{Ze^2}{4m_e} \mathbf{B}_{\text{fin}} \sum_{k=1}^Z \left(\frac{\overline{x_k^2}}{Z} + \frac{\overline{y_k^2}}{Z} \right). \quad [8.8.12]$$

Se la distribuzione degli elettroni è a simmetria sferica si ha

$$\sum_{k=1}^Z \frac{\overline{x_k^2}}{Z} = \sum_{k=1}^Z \frac{\overline{y_k^2}}{Z} = \sum_{k=1}^Z \frac{\overline{z_k^2}}{Z} = \frac{1}{3} \overline{r^2}, \quad [8.8.13]$$

dove r è il raggio della molecola. Dalla [8.8.12] si ha quindi

$$\mathbf{m}_L = -\frac{Ze^2 \overline{r^2}}{6m_e} \mathbf{B}_{\text{fin}}.$$

Per una sostanza contenente N molecole per unità di volume, indicando con \mathbf{B}_{eff} il campo magnetico efficace agente sulla singola molecola, la precessione di Larmor

¹¹ Si noti che \mathbf{m}_L è opposto a \mathbf{B}_{fin} : ciò può ricondursi alla legge di Lenz, secondo cui il momento magnetico indotto è tale da opporsi alla variazione di campo magnetico che lo genera.

produce un vettore "intensità di magnetizzazione" pari, per la [8.8.13], a

$$\mathbf{M}_L = -\frac{NZe^2 \overline{r^2}}{6m_e} \mathbf{B}_{\text{eff}}. \quad [8.8.14]$$

In analogia con il caso elettrico, \mathbf{B}_{eff} tiene conto del contributo medio di tutte le molecole tranne quella in esame; si ha pertanto

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_{\text{mol}}, \quad [8.8.15]$$

dove \mathbf{B} è il campo totale e \mathbf{B}_{mol} il contributo al campo della molecola in esame.

Consideriamo ora sostanze che *non* hanno momento magnetico proprio: quelle, cioè, per cui è nulla, in assenza di campo magnetico esterno, la somma vettoriale dei momenti magnetici prodotti dalla rotazione dei singoli elettroni. All'atto dell'applicazione di un campo magnetico esterno, esse presentano una magnetizzazione, dovuta alla precessione di Larmor, data dalla [8.8.14].

Più avanti dimostreremo che per le sostanze diamagnetiche si può trascurare \mathbf{B}_{mol} rispetto a \mathbf{B} , e si ha quindi

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} \approx \mathbf{B},$$

e

$$\mathbf{M}_L = -\alpha_d \mathbf{B}, \quad [8.8.16]$$

dove

$$\alpha_d = \frac{NZe^2}{6m_e} \overline{r^2}. \quad [8.8.17]$$

Dalla [8.8.16] e dalla definizione di \mathbf{H} segue

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{1 + \alpha_d \mu_0} \mathbf{H}. \quad [8.8.18]$$

Confrontando la [8.8.18] con la [8.8.1], si vede che, per sostanze prive di momento magnetico proprio,

$$\mu_r = \frac{1}{1 + \alpha_d \mu_0} < 1. \quad [8.8.19]$$

In conclusione, tutte le sostanze che non posseggono un momento magnetico proprio sono diamagnetiche, e l'effetto diamagnetico (cioè il fatto che $\mu_r < 1$) è dovuto alla precessione di Larmor, che produce una magnetizzazione opposta al campo esterno.

I valori sperimentali di μ_r , per le sostanze diamagnetiche, indicano che tale costante differisce sempre di poco rispetto all'unità; si può porre cioè $\mu_r = 1 - \epsilon$. Risulta, per varie sostanze, $\epsilon = 10^{-3} \div 10^{-5}$. Dalla [8.8.19] si ricava

$$\mu_r = \frac{1}{1 + \alpha_d \mu_0} \approx 1 - \alpha_d \mu_0, \quad [8.8.20]$$

e risulta $\mu_0 \alpha_d = 10^{-3} \div 10^{-5}$.

Torniamo al calcolo del campo \mathbf{B}_{mol} . Consideriamo a tale scopo una molecola del mezzo e rappresentiamola schematicamente con una sferetta magnetizzata (*nocciolo*) di raggio r^* . Se N è il numero di molecole per unità di volume, si può pensare che a ciascuna di esse competa in media un volume $1/N$, rappresentabile come una sfera τ di raggio R , tale che

$$\frac{1}{N} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Ciascuna molecola ha momento magnetico

$$m_{\text{mol}} = \frac{M}{N} = \frac{4}{3} \pi R^3 M; \quad [8.8.21]$$

dove M è la magnetizzazione del materiale.

Supponendo che la molecola sia magnetizzata uniformemente, la magnetizzazione del nocciolo ha in essa il valore

$$M_{\text{mol}} = \frac{m_{\text{mol}}}{(4/3) \pi r^{*3}} = M \left(\frac{R}{r^*} \right)^3. \quad [8.8.22]$$

Calcoleremo \mathbf{B}_{mol} come media, nella sfera di raggio R , del campo magnetico \mathbf{B}^* generato dal nocciolo uniformemente magnetizzato della molecola, scrivendo

$$\mathbf{B}_{\text{mol}} = \frac{\iiint_{\tau} \mathbf{B}^* d\tau}{(4/3) \pi R^3}. \quad [8.8.23]$$

Il campo \mathbf{B}^* , all'interno del nocciolo, è quello di una sfera uniformemente magnetizzata e vale (vedi la [8.5.4])

$$\mathbf{B}^* = \frac{2}{3} \mu_0 M_{\text{mol}}. \quad [8.8.24]$$

Al di fuori del nocciolo, il campo magnetico è quello di un dipolo di momento

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3} \pi r^{*3} M_{\text{mol}},$$

posto al centro della sfera. Si può facilmente vedere in questo caso che la componente di \mathbf{B}^* secondo la direzione di \mathbf{m} vale

$$B_{\text{mol}}^* = \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3}, \quad \text{con } r^* < r < R, \quad [8.8.25]$$

dove θ è indicato nella figura 8.13. Si è considerata la sola componente di \mathbf{B}^* secondo la direzione di \mathbf{m} , giacché la componente normale a \mathbf{m} è a media nulla, per ovvie ragioni di simmetria.

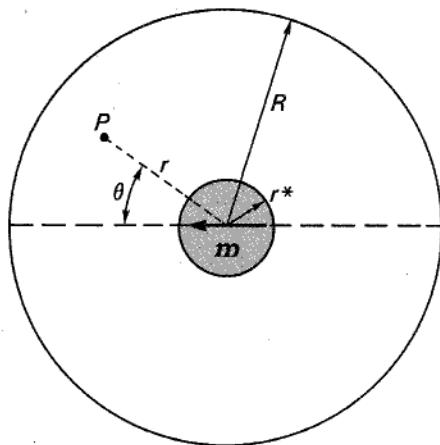


Figura 8.13

Sostituendo la [8.8.24] nella [8.8.23], si ha

$$B_{\text{mol}} = \frac{\iiint_{\tau(r^*)} \frac{2}{3} \mu_0 M_{\text{mol}} d\tau + \iiint_{\tau(R-r^*)} B^* d\tau}{\frac{4}{3} \pi R^3}, \quad [8.8.26]$$

dove $\tau(r^*)$ indica la sfera di raggio r^* e $\tau(R-r^*)$ la corona sferica di raggi R e r^* . E' facile verificare, in base alla [8.8.25], che

$$\iiint_{\tau(R-r^*)} B^* d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} m \int_{r^*}^R dr \int_0^\pi \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = 0;$$

di conseguenza

$$B_{\text{mol}} = \frac{2}{3} \mu_0 M_{\text{mol}} \left(\frac{r^*}{R} \right)^3,$$

e, per la [8.8.22],

$$B_{\text{mol}} = \frac{2}{3} \mu_0 M_{\text{mol}} \mathbf{M}. \quad [8.8.27]$$

Nel caso diamagnetico la magnetizzazione \mathbf{M} è dovuta alla precessione di Larmor; dalle [8.8.27] e [8.8.16] risulta dunque

$$B_{\text{mol}} = \frac{2}{3} \mu_0 \alpha_d \mathbf{B}. \quad [8.8.28]$$

Essendo, come detto, $\mu_0 \alpha_d = 10^{-3} \div 10^{-5}$, si ha $B_{\text{mol}} \ll B$.

*8.9 Paramagnetismo

Si è visto, nel paragrafo precedente, che gli atomi e le molecole di un generico mezzo materiale, sotto l'azione di un campo magnetico esterno, acquistano un momento magnetico di verso opposto al campo inducente. In qualunque mezzo, dunque, è presente un effetto diamagnetico. Se però gli atomi o le molecole posseggono, di per sé, un momento magnetico permanente, all'effetto diamagnetico se ne sovrappone un altro, in genere preponderante, di segno contrario: l'*effetto paramagnetico*.

Per analizzarlo, rappresentiamo un mezzo, i cui costituenti elementari posseggano un momento magnetico permanente, come una "folla" di dipoli magnetici. In assenza di campo magnetico esterno e in condizioni di equilibrio termodinamico, data l'orientazione puramente casuale dei magneti elementari, il vettore magnetizzazione per unità di volume, M , è ovunque nullo. In presenza di un campo magnetico esterno, si stabiliscono le condizioni di equilibrio statistico tra la tendenza dei dipoli a orientarsi secondo il campo (vedi § 7.9, esempio 2) e l'azione disorientatrice dell'agitazione termica. Ciò dà luogo a una magnetizzazione del mezzo avente la stessa direzione e lo stesso verso del campo. E' questo, appunto, l'effetto paramagnetico.

Detto m_0 il momento magnetico permanente di un dipolo (si suppongono tutti i dipoli uguali fra loro) e θ l'angolo formato da tale vettore con il vettore induzione magnetica, il contributo di un generico dipolo al momento magnetico totale, cioè la componente di m_0 nella direzione del campo, è $m_0 \cos \theta$.

Si tratta ora di determinare la ripartizione della folla dei dipoli secondo l'angolo θ e calcolare poi il valore medio di $m_0 \cos \theta$.

A tale scopo, trattiamo la folla di dipoli mediante la statistica di Boltzmann, la quale fornisce la ripartizione secondo l'energia (e quindi secondo un qualsiasi parametro univocamente legato all'energia). Nel nostro caso, l'energia di un generico dipolo, immerso nel campo di induzione magnetica B_{eff} , è (vedi §§ 7.7 e 3.8)

$$-\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}} = -m_0 B_{\text{eff}} \cos \theta. \quad [8.9.1]$$

La trattazione può essere condotta ora esattamente come nel caso dei dipoli elettrici. Basta sostituire al parametro $\gamma = E_{\text{eff}} p / kT$ il parametro $\alpha = B_{\text{eff}} m_0 / kT$, il quale rappresenta, a parte un fattore numerico, il rapporto tra l'energia potenziale di un dipolo orientato secondo il campo e l'energia di agitazione termica. Si ottiene così

$$\overline{m_0 \cos \theta} = m_0 \mathcal{L}(\alpha), \quad [8.9.2]$$

dove

$$\mathcal{L}(\alpha) = \operatorname{ctgh} \alpha - \frac{1}{\alpha} \quad [8.9.3]$$

è la *funzione di Langevin*.

Il momento magnetico per unità di volume è allora

$$M = N m_0 \mathcal{L}(\alpha), \quad [8.9.4]$$

dove N è il numero di dipoli per unità di volume. Direzione e verso di \mathbf{M} coincidono con quelli del campo orientante.

Come nel caso del diamagnetismo, nel paramagnetismo la differenza fra B_{eff} e B può venire trascurata, perché assai piccola. Infatti, gli effetti di magnetizzazione per orientamento sono estremamente piccoli, anche se in genere superiori di un fattore 10 agli effetti diamagnetici. Di conseguenza, si può porre $B_{\text{eff}} \approx B$, e quindi $\alpha = B m_0 / kT$. In generale, negli esperimenti su sostanze paramagnetiche (quelle cioè in cui l'effetto paramagnetico prevale su quello diamagnetico) condotti alle temperature ordinarie, e per i campi usuali della tecnica, ci si trova nella prima parte, pressoché rettilinea, della curva di Langevin. Si ha cioè

$$\alpha = \frac{B m_0}{k T} \ll 1,$$

per cui si può scrivere

$$\mathcal{L}(\alpha) \approx \frac{\alpha}{3},$$

e quindi

$$\mathbf{M} = N m_0 \frac{B m_0}{3 k T} = M_{\text{sat}} \left(\frac{1}{3} \frac{m_0 B}{k T} \right), \quad [8.9.5]$$

dove si è posto $M_{\text{sat}} = N m_0$, e M_{sat} rappresenta il momento magnetico di saturazione corrispondente al caso limite in cui tutti i dipoli sono orientati parallelamente al campo ($\mathcal{L}(\alpha) = 1$). La [8.9.5] mostra allora che la magnetizzazione paramagnetica è proporzionale al campo esterno e inversamente proporzionale alla temperatura assoluta.

A posteriori, si può verificare la validità della approssimazione $B_{\text{eff}} = B$. Basta, a questo scopo, verificare che $B_{\text{mol}} = (2/3)\mu_0 M \ll B$, cioè, dalla [8.9.5], che

$$\frac{2}{9} \mu_0 \frac{N m_0^2}{k T} \ll 1.$$

Sostituendo i valori numerici delle costanti universali (nel sistema di unità S.I.) si ottiene

$$2,035 \times 10^{16} \frac{N m_0^2}{T} \ll 1.$$

Dato che N è dell'ordine di $10^{27} \div 10^{29} \text{ m}^{-3}$, e m_0 dell'ordine di 10^{-23} (unità S.I.), la diseguaglianza è certamente verificata alle temperature normali. Per avere α non trascurabile, o addirittura superiore all'unità, bisogna operare con campi magnetici estremamente elevati e a temperature molto basse. Si può così verificare sperimentalmente l'andamento di M rispetto a α .

La teoria svolta si basa sulla statistica classica di Boltzmann, ma un'impostazione più corretta del problema utilizza statistiche non classiche (cosiddette quantistiche) e conduce a funzioni diverse dalla funzione di Langevin classica.

Nella tecnica, è usuale considerare i vettori \mathbf{B} e \mathbf{H} al posto dei vettori \mathbf{B} e \mathbf{M} . Dalla relazione $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ e dalla [8.9.5], si ottiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{H}}{1 - \mu_0 \frac{M_{\text{sat}} m_0}{3kT}}. \quad [8.9.6]$$

Posto

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad [8.9.7]$$

si ottiene

$$\mu_r = \frac{1}{1 - \mu_0 \frac{M_{\text{sat}} m_0}{3kT}}. \quad [8.9.8]$$

Dato che, come si è visto, in condizioni ordinarie $\mu_0 M_{\text{sat}} m_0 / 3kT \ll 1$, la [8.9.8] può essere riscritta, in prima approssimazione, nella forma

$$\mu_r \approx 1 + \mu_0 M_{\text{sat}} \frac{m_0}{3kT}. \quad [8.9.9]$$

Evidentemente, nel caso del paramagnetismo è sempre $\mu_r > 1$ (magnetizzazione nella direzione e nel verso del campo), mentre nel caso del diamagnetismo è sempre $\mu_r < 1$ (magnetizzazione nella direzione del campo, ma in verso opposto). Come ordine di grandezza, si ha, per il paramagnetismo

$$\mu_r \approx 1 + 10^{-4},$$

e per il diamagnetismo

$$\mu_r \approx 1 - 10^{-5};$$

di conseguenza l'effetto diamagnetico è mascherato, in genere, da quello paramagnetico.

*8.10 Ferromagnetismo

Alcune sostanze sono caratterizzate da una magnetizzazione eccezionalmente elevata: per valori del campo ancora piuttosto bassi, il momento magnetico è praticamente quello di saturazione. Esse presentano inoltre una "magnetizzazione spontanea", ossia un momento magnetico per unità di volume diverso da zero anche in assenza di campo esterno. Questi materiali (ferro, cobalto, nichelio, gadolino, disprosio e varie leghe) sono detti *ferromagnetici*.

La trattazione del ferromagnetismo può essere svolta, da un punto di vista puramente formale, secondo le linee generali della teoria del paramagnetismo. Non si possono però trascurare i termini di ordine superiore al primo nello sviluppo in serie di potenze di α della funzione di Langevin. Inoltre, al campo \mathbf{B}_{eff} bisogna aggiungere un

termine B_W , denominato *campo interno di Weiss*. Infatti, il solo campo esterno applicato non può rendere ragione della intensa magnetizzazione sperimentalmente osservata. In altre parole, la coppia orientante che agisce sul dipolo è di gran lunga superiore a quella dovuta al campo esterno e gli altri magneti elementari. Si postula allora l'esistenza di una coppia orientante addizionale, sulla cui origine non si fanno ipotesi nell'ambito della teoria classica, ma che comunque *non* è di natura magnetica. Questa coppia è appunto attribuita alla presenza di un ipotetico campo di induzione B_W , di origine *non* magnetica.

La situazione è analoga a quella del campo elettromotore in un generatore: come questo, pur avendo le dimensioni di un campo elettrostatico, è di natura fisica diversa, così il campo di induzione interna, pur avendo le stesse dimensioni di quello di induzione magnetica, ne differisce sostanzialmente. L'origine e la natura di B_W possono essere dedotte soltanto da considerazioni strutturistiche fondate sui risultati della meccanica quantistica. Per questo motivo ricorderemo alcune elementari nozioni tratte dalla teoria quantistica.

Gli elettroni che circondano il nucleo di un atomo sono caratterizzati da un momento angolare meccanico (*spin*) e da un momento magnetico (*magnetone di Bohr*), oltre che da altri tre parametri descriventi la loro orbita, o meglio, il loro stato. Questi ultimi sono dati da *numeri quantici*; un quarto numero caratterizza lo spin e può assumere soltanto i valori $\pm 1/2$. A tali valori corrispondono due orientazioni opposte del momento magnetico dell'elettrone in un campo esterno: una parallela a questo e una antiparallela. Il *principio di esclusione di Pauli* richiede che non possano coesistere nell'atomo due o più elettroni caratterizzati dagli stessi numeri quantici. Ogni orbita elettronica, assegnata mediante i primi tre numeri quantici, può essere occupata dunque da non più di *due* elettroni aventi spin opposti.

Dati due atomi di idrogeno, avviciniamoli in modo da costituire una molecola. Gli spin degli elettroni possono essere paralleli oppure antiparalleli. A seconda dell'orientamento relativo degli spin si hanno due configurazioni diverse, cui corrispondono diverse energie di legame. Una di queste configurazioni ha energia minore, ed è quella che il sistema tende a occupare. Dal caso semplice dell'idrogeno si può passare ai casi più complessi. I materiali ferromagneticci sono quelli per cui la configurazione di minima energia si ha per spin paralleli. Perciò, i momenti magnetici associati agli spin di alcuni degli elettroni degli atomi del reticolo tendono a disporsi paralleli gli uni agli altri. Al crescere del numero di spin orientati cresce anche la tendenza dei rimanenti a orientarsi: il campo di Weiss, che descrive questa tendenza all'orientamento, cresce pertanto al crescere della magnetizzazione M .

Una relazione di semplice proporzionalità tra campo interno di Weiss e magnetizzazione M , del tipo

$$B_W = \mu_0 \lambda M, \quad [8.10.1]$$

con λ costante dipendente dal materiale (e sempre $\gg 1$), rende bene conto dei risultati sperimentali.

In base alla [8.10.1] e alle [8.8.27] e [8.8.15], il campo efficace può essere espresso nella forma

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{B} - \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} + \mathbf{B}_W, \quad [8.10.2]$$

da cui

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} \approx \mathbf{B} + \mu_0 \gamma \mathbf{M}, \quad [8.10.3]$$

con $\gamma = \lambda$, poiché $\lambda \gg 1$. Essendo poi $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, la [8.10.3] diviene

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mu_0 \mathbf{H} + (1 + \gamma) \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 S \mathbf{M},$$

con $S = 1 + \gamma$. Risolvendo rispetto a \mathbf{M} , si ottiene

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\mathbf{B}_{\text{eff}}}{\mu_0} - \mathbf{H} \right) \frac{1}{S}. \quad [8.10.4]$$

Per motivi di praticità si preferisce esprimere \mathbf{B}_{eff} in funzione di \mathbf{H} , e considerare la relazione tra \mathbf{M} e \mathbf{H} , anziché quella tra \mathbf{M} e \mathbf{B} .¹²

Nei casi più comuni si ha inoltre $H \ll M$; a piccoli valori di H corrispondono cioè notevoli magnetizzazioni, e si ha $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \approx \mu_0 \mathbf{M}$. Imponendo, quindi, piccoli valori di \mathbf{H} , si ottengono grandi valori di \mathbf{M} e di \mathbf{B} . In definitiva, si può dire che \mathbf{H} costituisce una "variabile di comando" assai efficiente.

Oltre alla [8.10.4], utilizzeremo la [8.9.4], che riscriviamo nella forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{sat}} \mathcal{L}(\alpha), \quad [8.10.5]$$

con $\alpha = B_{\text{eff}} m_0 / kT$.

Dall'interpretazione del campo interno dianzi esposta discende che non tutte le orientazioni dei magneti elementari sono ugualmente possibili; al posto della statistica classica di Boltzmann, che conduce alla [8.9.5], si dovrebbe allora usare una statistica quantistica.

Qui svolgeremo invece la trattazione secondo lo schema classico di Weiss, considerando il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \left(\frac{\mathbf{B}_{\text{eff}}}{\mu_0} - \mathbf{H} \right) \frac{1}{S} \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{sat}} \mathcal{L}(\alpha). \end{cases} \quad [8.10.6]$$

Ci proponiamo di studiare l'andamento della magnetizzazione \mathbf{M} in funzione del campo \mathbf{H} , che, come si è detto, è la variabile più facilmente controllabile. A tale scopo, eliminiamo \mathbf{B}_{eff} dal sistema delle due equazioni [8.10.6]. Per la non-linearità di $\mathcal{L}(\alpha)$,

¹² E' ad \mathbf{H} infatti che è più facile attribuire un valore determinato: basti pensare che in opportune condizioni di simmetria \mathbf{H} dipende soltanto dalle correnti di conduzione (vedi § 8.8).

ciò verrà fatto per mezzo di un metodo grafico. Nella figura 8.14, è rappresentato in un diagramma l'andamento delle due curve espresse dalle [8.10.6]. La prima fornisce una retta di pendenza $1/S$, che taglia l'asse orizzontale in un punto P , tale che $OP = H$. La seconda è la curva di Langevin, indipendente da H . È importante notare che la pendenza $1/S$ della retta nei casi usuali e a temperature ordinarie è inferiore alla pendenza nell'origine della seconda delle [8.10.6] (che vale $\mu_0 M_{\text{sat}} m_0 / 3kT$). Fissato H (cioè OP), la intercetta delle due curve in figura fornisce i corrispondenti valori di M e B_{eff} .

Volendo considerare, per completezza, anche valori negativi di M e B_{eff} , occorre ragionare invece sulla figura 8.15.

Studiamo dunque le variazioni di M e B_{eff} al mutare di H . Supponiamo inizialmente di fissare il campo H in modo che la retta [8.10.4] tagli la curva di Langevin nella zona di saturazione (punto A): allora $M = M_{\text{sat}}$. Facciamo decrescere gradualmente H : la retta si sposta parallelamente a sé stessa verso sinistra, il punto intersezione delle due curve si muove sulla curva di Langevin e M decresce lentamente. Il punto intersezione continua a muoversi con continuità anche quando H , passato per il valore 0, si inverte; per un particolare valore negativo, $-H_0$, di H , la retta diviene tangente alla curva nel punto B . Non appena il campo H cresce (in valore assoluto) oltre questo valore critico, il punto intersezione si sposta bruscamente da B a C , con discontinuità caratteristica, e M cambia segno. Facendo crescere ancora H nel senso negativo, M tende nuovamente al valore di saturazione M_{sat} . Raggiunto un valore negativo del campo H per cui $M = M_{\text{sat}}$ (punto D), facciamo decrescere H in valore assoluto. Il punto intersezione si sposta lungo il ramo inferiore della curva di Langevin sino a giungere in E quando ormai H , cambiato nuovamente segno, è ridiventato positivo. A questo punto, al crescere ulteriore di H , M presenta una nuova discontinuità, e diviene bruscamente positiva: il punto di intersezione passa bruscamente da E a F . Facendo ancora crescere H si torna nel punto A , in cui $M = M_{\text{sat}}$.

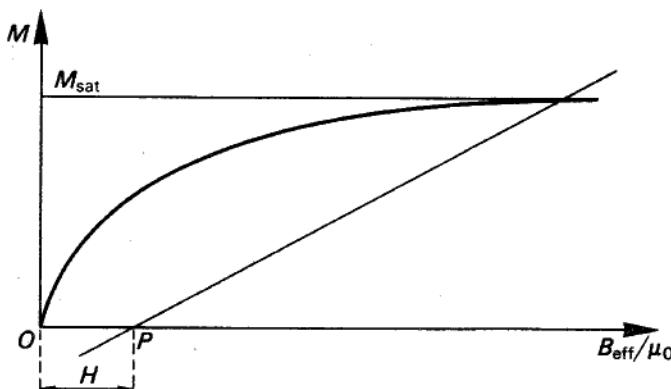


Figura 8.14

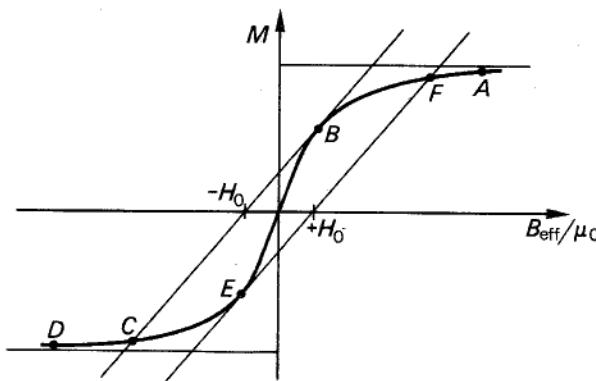


Figura 8.15

Si può riportare quanto detto in un diagramma di M in funzione di H (vedi fig. 8.16). E' questa la *curva di magnetizzazione*, e si dice che il materiale presenta *isteresi* quando essa, come nella figura, racchiude un'area non nulla. La quantità H_0 è chiamata *forza coercitiva*, essendo il campo magnetico che è necessario applicare per costringere il materiale ad avere magnetizzazione nulla. La quantità M_0 è detta *magnetizzazione residua* (o *permanente*), perché è la magnetizzazione del materiale a campo $H=0$.

Per $|H| < H_0$, si hanno tre punti di intersezione tra la retta e la curva di Langevin (vedi fig. 8.16) cioè altrettanti valori possibili per la magnetizzazione M . Infatti, la retta rappresenta il legame tra la magnetizzazione M e il campo B_{eff} imposto dalle caratteristiche fisiche del materiale, mentre la curva di Langevin dà la configurazione di equilibrio termodinamico (cioè i valori di M) a temperatura T e per un campo B_{eff} . Il punto di intersezione intermedio rappresenta uno stato di equilibrio *instabile*. Verifichiamolo graficamente, per incrementi finiti (vedi fig. 8.17).¹³

Supponiamo che la M subisca una piccola variazione, ΔM , a partire dal punto di equilibrio P . In conseguenza di ciò, nel materiale il campo B_{eff} subisce una variazione ΔB_{eff} , e si passa da P a P' . Il punto P' non è una posizione di equilibrio, non essendo sulla curva di Langevin: con il campo B_{eff} corrispondente a P' , la magnetizzazione dovrebbe avere all'equilibrio il valore corrispondente a P'' , e tendere quindi ad aumentare ancora; ma un aumento di magnetizzazione accresce B_{eff} , e così via. Il sistema perturbato evolve, quindi, fino a portarsi nella posizione di equilibrio corrispondente al punto Q .

Ripetendo il ragionamento precedente per Q , si vede che esso, invece, corrisponde a una posizione di equilibrio *stabile*.

Mostriamo ora che per ogni materiale ferromagnetico esiste una temperatura, di

¹³ Ricordiamo che se si perturba un sistema in stato di equilibrio instabile (instabile), esso tende a ritornarvi (ad allontanarsene ulteriormente).

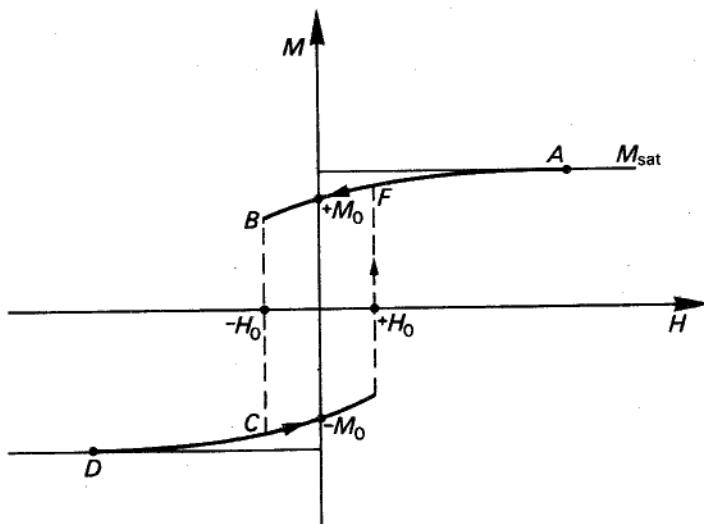


Figura 8.16

valore diverso a seconda della sostanza considerata, al di sopra della quale il comportamento muta.

Abbiamo finora considerato i materiali ferromagnetici a temperature ordinarie o basse. Al crescere della temperatura, la pendenza iniziale della curva [8.10.5], data da

$$\frac{\mu_0}{3} \frac{m_0 M_{\text{sat}}}{k T},$$

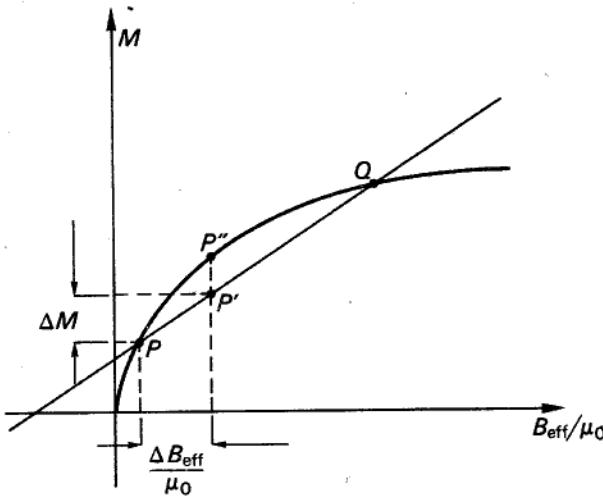


Figura 8.17

va diminuendo. La pendenza della curva [8.10.4] è, come si è detto, pari a $1/S$, indipendentemente dalla temperatura. Pertanto, al crescere di T , si perverrà a una temperatura caratteristica T_C , in corrispondenza della quale le due pendenze risulteranno uguali. In queste condizioni, le curve [8.10.4] e [8.10.5] sono tangenti nell'origine, per $H=0$, e per $H \neq 0$ si tagliano in un punto solo. Per temperature superiori alla temperatura caratteristica, manca la tangenza nell'origine, e le due curve si intersecano, per qualsiasi valore di H , in un sol punto. La curva di magnetizzazione, allora, non presenta più isteresi: essa è monodroma.

Per determinare la temperatura caratteristica T_C basta porre

$$\frac{\mu_0}{3} \frac{m_0}{k T_C} M_{\text{sat}} = \frac{1}{S},$$

da cui

$$T_C = \frac{\mu_0 S}{3k} m_0 M_{\text{sat}}. \quad [8.10.7]$$

T_C prende il nome di *temperatura di Curie*; al di sotto di essa il materiale si comporta come ferromagnetico, al di sopra come paramagnetico.

Esaminiamo ora questa ultima zona ($T > T_C$). Per temperature elevate (o campi deboli) si può approssimare la funzione di Langevin col primo termine del suo sviluppo in serie di potenze e si ha:

$$M = M_{\text{sat}} \frac{1}{3} \frac{m_0 B_{\text{eff}}}{k T}. \quad [8.10.8]$$

La [8.10.8], unitamente alle [8.10.4] e [8.10.7], fornisce la relazione

$$M = \frac{T_C}{T - T_C} \frac{H}{S}. \quad [8.10.9]$$

Come si vede, la [8.10.9] è lineare come nel caso del paramagnetismo. Non è però esatto affermare che il materiale si comporta come se fosse paramagnetico, perché la dipendenza dalla temperatura è del tipo $1/(T - T_C)$, mentre nel caso del paramagnetismo è del tipo $1/T$. Si può invece affermare che la sostanza si comporta come se fosse paramagnetica, pur di assumere, come zero per le temperature, la temperatura di Curie.

Il legame tra B e H si ricava semplicemente

$$B = \mu_0 \left(1 + \frac{T_C}{T - T_C} \frac{1}{S} \right) H; \quad [8.10.10]$$

ponendo

$$B = \mu_r \mu_0 H,$$

si ha quindi

$$\mu_r = 1 + \frac{T_C}{T - T_C} \frac{1}{S}. \quad [8.10.11]$$

Diamo qui di seguito una tabella con le principali costanti magnetiche per il Fe e il Ni:

Tabella 8.1

1	T_C (K)	S	%	M_{sat} (A/m)
Fe	1047	3 500	2,2	$1,7 \times 10^6$
Ni	631	14 000	0,64	$0,5 \times 10^6$

Se si introducono ora i valori della tabella 8.1 nella formula [8.10.7], questa *non* risulta verificata: ciò perché la funzione di Langevin è stata calcolata secondo la statistica classica e non secondo quella quantistica.

Le temperature di Curie, per i 5 elementi ferromagnetici, sono:

Ferro	1047 K,
Cobalto	1400 K,
Nichelio	631 K,
Gadolinio	289 K,
Disprosio	105 K.

Come si vede, gli ultimi due (Gd e Dy) sono ferromagnetici solo a temperature piuttosto basse.

*8.11 Magnetizzazione di materiali ferromagnetici policristallini

Il comportamento di un campione di materiale ferromagnetico polisicristallino (o anche monocristallino) è in genere differente da quello di un singolo monocristallo uniformemente magnetizzato. Inoltre, la teoria fin qui sviluppata consente di interpretare correttamente il comportamento dei singoli monocrystalli uniformemente magnetizzati, ma fallisce negli altri casi.

Ad esempio, per un monocristallo di acciaio al silicio i dati sperimentali, in buon accordo con la teoria, forniscono

$$M_{sat} = 1,36 \times 10^6 \text{ A/m}, \quad H_0 = 1 \text{ A/m},$$

$$M_0 = 1,31 \times 10^6 \text{ A/m}.$$

Come si vede, in questo caso la magnetizzazione permanente M_0 è praticamente uguale a quella di saturazione.

Anche per una calamita (*magnete permanente*) in acciaio al tungsteno (al 6%) il materiale si trova spontaneamente in condizioni prossime alla saturazione, a temperatura ambiente. Si ha infatti

$$B_0 = 1,05 \text{ T}, \quad M_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 0,84 \times 10^6 \text{ A/m},$$

$$H_0 = 5000 \text{ A/m}, \quad M_{sat} = 0,9 \times 10^6 \text{ A/m}.$$

Per un *materiale policristallino* (ad esempio il ferro dolce), si ha invece

$$M_{\text{sat}} = 1,7 \times 10^6 \text{ A/m}, \quad H_0 = 30 \div 40 \text{ A/m}$$

e la magnetizzazione residua M_0 è trascurabile (la saturazione si raggiunge soltanto a valori di H molto elevati, dell'ordine di 40 000 A/m). In questo caso, cioè, in assenza di campo esterno, il materiale è praticamente smagnetizzato, in contrasto con le previsioni teoriche fin qui possibili.

Per interpretare questo comportamento, occorre ricordare innanzitutto che un campione di materiale ferromagnetico è costituito da un numero estremamente elevato di piccole regioni, dette *domini di Weiss*, che si comportano ciascuna come un *monocristallo uniformemente magnetizzato*. Il fatto che il materiale, in assenza di un campo esterno, appaia smagnetizzato, dipende dall'orientazione casuale dei vari domini (per cui il vettore somma dei singoli momenti magnetici è nullo). Un campo esterno, anche debole, è sufficiente ad orientare nella direzione del campo molti domini, senza variare praticamente lo stato di magnetizzazione di ciascuno di essi.

Più esattamente, si può dare la seguente descrizione del fenomeno della magnetizzazione. I monocristalli uniformemente magnetizzati presentano una curva di magnetizzazione (curva $M-H$) profondamente diversa, a seconda della direzione secondo la quale si tenta di magnetizzarli. Ad esempio, per il Fe, nelle tre direzioni cristallografiche principali (indicate con 100, 110, 111), si hanno andamenti come quelli indicati nella figura 8.18.

Le curve presentano un'isteresi trascurabile e sono indicati, quindi, soltanto i percorsi di andata, per H crescente; il tratto della curva vicino all'origine è rappresentato a parte nella figura 8.19.

Come si vede, se il campo agisce secondo la direzione (100), la magnetizzazione cresce rapidamente e raggiunge la saturazione per campi piccolissimi. Invece, lungo le altre due direzioni cristallografiche principali, si ha una magnetizzazione che dapprima cresce rapidamente, poi più lentamente, e raggiunge infine la saturazione,

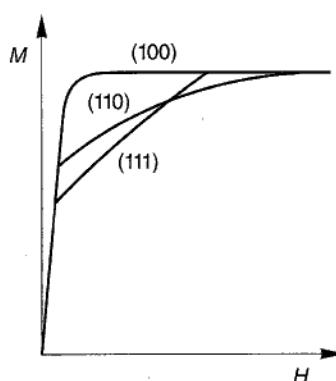


Figura 8.18

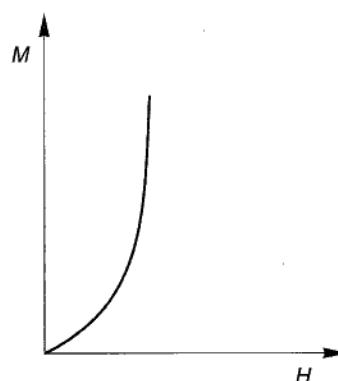


Figura 8.19

per H abbastanza elevati. Esiste dunque una direzione privilegiata per la magnetizzazione: per magnetizzare il cristallo nella direzione (100) è necessario un lavoro minore che non in altre direzioni. L'andamento delle curve nell'esempio citato si può allora spiegare nel modo seguente. Nel primo tratto (assai ripido, quale che sia la direzione del campo esterno) M cresce fino a M_{sat} nella direzione (100). In tal modo, nella direzione del campo esterno si ha una magnetizzazione inferiore a M_{sat} (essendo pari alla componente di M_{sat} secondo la direzione scelta). Al crescere ulteriore di H , il vettore \mathbf{M}_{sat} , diretto come (100), ruota fino a disporsi parallelo alla direzione del campo. Ciò avviene lentamente, perché il moto è ostacolato da forze interne, della cui natura non ci occupiamo; pertanto, solamente per valori di H relativamente elevati si raggiunge la saturazione nella direzione scelta.

In un materiale *ferromagnetico policristallino*, o anche *monocristallino ma non uniformemente magnetizzato*, ogni dominio di Weiss si comporta nel modo sopra descritto. Perciò, la magnetizzazione del mezzo è dovuta dapprima a quella secondo la direzione di magnetizzazione facile, in quei domini che avevano componente della magnetizzazione diretta in senso opposto al campo applicato; successivamente, si ha la rotazione dei domini, che vengono a orientarsi secondo il campo (la direzione caratteristica dei domini va intesa come quella di più facile magnetizzazione).

In realtà, la rotazione spiega soltanto una parte della curva di magnetizzazione tecnica, e precisamente quella relativa alla saturazione lenta in corrispondenza ad alti valori di H . Proseguendo nella discussione qualitativa iniziale, è opportuno descrivere l'andamento di tale curva, che è quella dei materiali nelle condizioni in cui vengono di solito impiegati, divisi cioè in più domini di Weiss (vedi fig. 8.20).

Il tratto OA della curva, partente dall'origine, viene percorso all'atto della prima magnetizzazione usando un campione inizialmente smagnetizzato, e prende pertanto

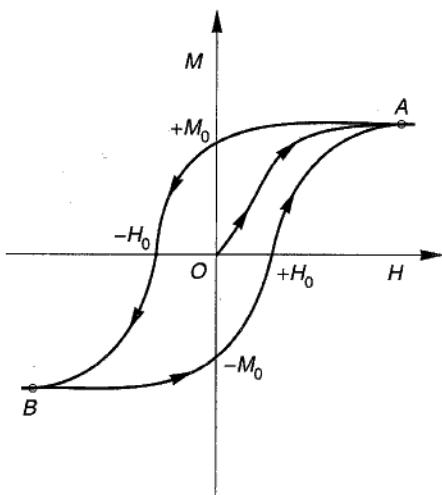


Figura 8.20

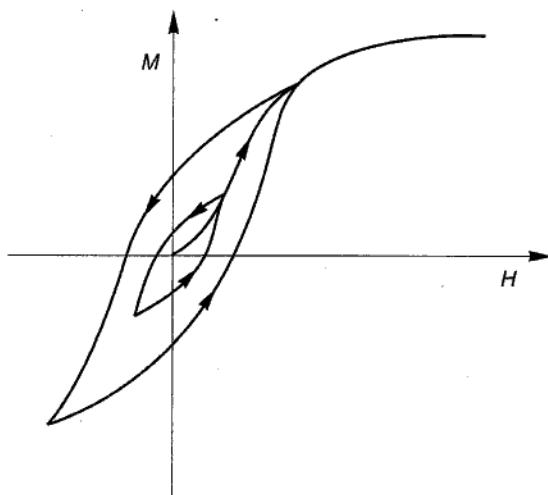


Figura 8.21

il nome di *curva di prima magnetizzazione* o *curva vergine*. Effettuata una prima volta la magnetizzazione, si percorrono cicli come quello indicato nella figura 8.21. La saturazione non è netta e si raggiunge solo per campi estremamente elevati. Sono possibili, come punti di lavoro, tutti i punti interni al ciclo disegnato. Infatti, se si interrompe tale ciclo prima di giungere nei punti *A* o *B*, e si riduce H , facendolo oscillare tra valori estremi inferiori a quelli corrispondenti a *A* e *B*, si possono percorrere cicli interni a quello disegnato e aventi i vertici all'incirca sulla curva di prima magnetizzazione, come indicato nella figura 8.21. Il ciclo di isteresi percorso dipende, in definitiva, dalla storia precedente del materiale, e in particolare dai cicli già percorsi.

Esaminiamo ora la curva di prima magnetizzazione. Nel tratto superiore, a bassa pendenza, come meccanismo della magnetizzazione si può assumere quello dell'orientamento, secondo il campo, dei domini di Weiss per effetto di rotazione. Nella parte iniziale e intermedia, invece, tale interpretazione è inaccettabile, perché *non* spiegherebbe l'elevata pendenza della curva. In queste situazioni, sulla posizione delle superfici di separazione dei vari domini influiscono le tensioni interne del materiale, sempre presenti a causa delle impurità, dei difetti e delle distorsioni della struttura cristallina. Sotto l'azione di un campo magnetico esterno alcuni domini tendono a estendersi a spese di altri, provocando una rapida crescita della magnetizzazione. Per piccoli campi lo spostamento delle pareti dei domini è *reversibile*: infatti, il primo tratto della curva di prima magnetizzazione *AB* (vedi fig. 8.22) è reversibile (viene cioè percorso in senso opposto, se si fa decrescere H prima di aver raggiunto *B*). Nel tratto *BC*, lo spostamento è *irreversibile*; infatti, una variazione ciclica di H , con valori massimi maggiori di H_B , porta a percorrere cicli di isteresi. Al di là del punto *C*, si ha rotazione dei domini.

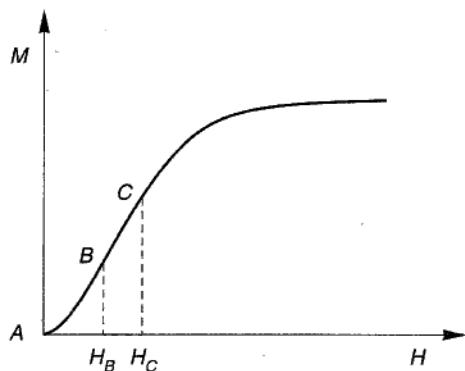


Figura 8.22

Esercizi

1. Un sottile anello di ferro ha raggio maggiore R e raggio minore (il raggio della sezione circolare del ferro) a ; sull'anello è realizzato un avvolgimento uniforme di N spire. Assumendo, per il ferro, un comportamento lineare, con permeabilità μ , calcolare il flusso concatenato con l'avvolgimento quando questo è percorso da una corrente i .

2. Con riferimento all'esercizio precedente, svolgere i calcoli numerici, per: $R=10\text{ cm}$, a $\sqrt{10/\pi}\text{ cm}$, $N=600$, $i=1\text{ A}$, $\mu_r=500$, assumendo costante il campo magnetico sulla sezione del ferro.

3. Se l'anello dell'esercizio 1 è interrotto da un traferro (taglio) di lunghezza $\delta \ll 2\pi R$, quanto vale il flusso concatenato con l'avvolgimento? Confrontare i risultati con quelli dell'esercizio.

(*Suggerimento.* Si assumano circolari le linee del campo magnetico, come nell'esercizio 1; si ha, allora $\mu H_{\text{Fe}} = \mu_0 H_{\text{aria}}$, per la solenoidalità di \mathbf{B} , e $(2\pi R - \delta)H_{\text{fe}} + \delta H_{\text{aria}} = N i$, per la legge di Ampère.)

4. Assumendo $\delta=1\text{ mm}$ e gli altri parametri come nell'esercizio 2, calcolare il flusso Φ ; confrontare il risultato con quello dell'esercizio 2.

5. Un magnete permanente ha forma toroidale, interrotta da un traferro di lunghezza δ ; la caratteristica magnetica del ferro è del tipo indicato in figura 8.23. Supponendo noti i parametri geometrici (sezione S , raggio R del toro), determinare i valori di B e H nel ferro e nel traferro.

(*Suggerimento.* Le incognite sono quattro: B_{Fe} , H_{Fe} , B_{aria} , H_{aria} ; la solenoidalità fornisce $B_{\text{Fe}}=B_{\text{aria}}$; la legge di Ampère fornisce: $H_{\text{Fe}}(2\pi R - \delta) + H_{\text{aria}}\delta = 0$, poiché non ci sono correnti libere; le relazioni costitutive sono $B_{\text{aria}}=\mu_0 H_{\text{aria}}$, e la caratteristica grafica di fig. 8.24. Abbiamo a disposizione 4 equazioni per le 4 incognite.)

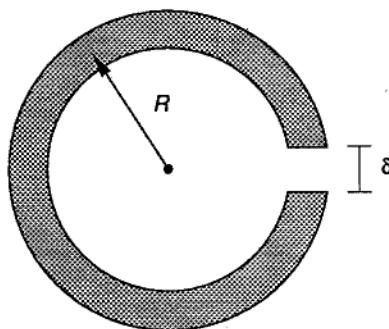


Figura 8.23

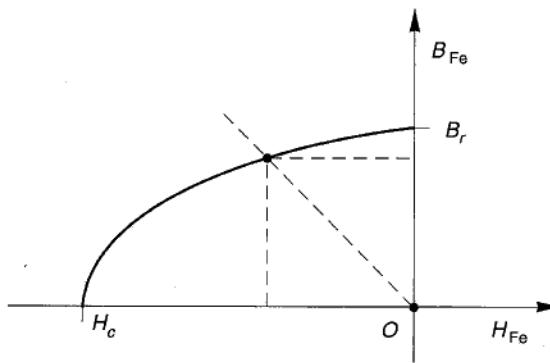


Figura 8.24

Capitolo 9

Il campo elettromagnetico

9.1 Le leggi fondamentali nel vuoto, per linee e superfici ferme rispetto a un riferimento inerziale

Note le leggi che governano il campo elettrico e quello magnetico nei casi stazionari, consideriamo il caso più generale, in cui i due campi variano nel tempo. Lo studio di questo argomento mostrerà chiaramente come essi non siano indipendenti, bensì intimamente legati, sì da costituire un'unica entità, che va sotto il nome di *campo elettromagnetico*.

Come si è visto, la forza agente su una carica q dotata di velocità \mathbf{v} , in un riferimento inerziale, è

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

relazione che consente di definire \mathbf{E} e \mathbf{B} . Le leggi cui tali campi sono soggetti quando variano nel tempo dovranno, naturalmente, essere più generali di quelle che governano i fenomeni stazionari e consentire di riguardare questi ultimi come casi particolari. La loro scoperta è derivata dall'analisi di un insieme di fatti sperimentali (che saranno descritti in questo capitolo e in quelli successivi) che trovarono una compiuta sintesi nella teoria elettromagnetica di Maxwell, che ancora oggi rende pienamente conto di tutti i fenomeni elettromagnetici macroscopici.

Ciò ci induce a presentare l'elettromagnetismo nel vuoto a partire proprio dalla sintesi maxwelliana, la quale si compone di cinque leggi fondamentali. Di queste, tre possiamo dire di conoscerle già:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho d\tau, \quad (\text{teorema di Gauss}) \quad [9.1.1]$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (\text{solenoidalità di } \mathbf{B}) \quad [9.1.2]$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau, \quad (\text{conservazione della carica}) \quad [9.1.3]$$

dove Σ è una generica superficie chiusa, ferma nel riferimento inerziale nel quale si considerano i campi, e Ω è la regione delimitata da tale superficie.

In particolare, il teorema di Gauss (che, a questo punto, sarà più opportuno chiamare *legge di Gauss*) continua a valere anche quando le cariche si muovono all'interno di Σ ; anche la proprietà di solenoidalità di \mathbf{B} continua a valere quando le correnti-sorgente del campo variano nel tempo, eventualmente anche muovendosi, e altrettanto può dirsi per la conservazione della carica.

Le due leggi rimanenti riguardano le circuitazioni di \mathbf{E} e \mathbf{B} lungo una generica linea chiusa γ , *ferma* nel riferimento inerziale considerato. Esse possono essere presentate nella seguente forma:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dI = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{legge di Faraday-Neumann}) \quad [9.1.4]$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dI = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS + \mu_0 \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{legge di Ampère-Maxwell}) \quad [9.1.5]$$

dove S è una qualsiasi superficie, *ferma* nel riferimento inerziale, che abbia come orlo la linea chiusa γ (orientata in modo congruente a S).

Osservazione 1. Trasportando la derivata temporale fuori dagli integrali,¹ le [9.1.3] ÷ [9.1.5] possono essere riscritte nella forma equivalente:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, d\tau, \quad [9.1.3']$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dI = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad [9.1.4']$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dI = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS + \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad [9.1.5']$$

Osservazione 2. Nelle [9.1.4], [9.1.5], è implicito che il valore assunto dal secondo membro sia indipendente dalla particolare superficie S (che abbia γ come orlo); ne deriva (vedi § A.13) che i campi $\partial \mathbf{B} / \partial t$ e $\mathbf{G} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ sono solenoidali. Si ha cioè, per ogni superficie chiusa Σ ,

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \quad [9.1.6]$$

$$\iint_{\Sigma} \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0. \quad [9.1.7]$$

¹ Ciò è possibile poiché il dominio di integrazione non varia nel tempo. Si noti inoltre che nelle [9.1.3] ÷ [9.1.5] la derivata rispetto al tempo è denotata come derivata parziale in quanto le funzioni integrande dipendono generalmente anche dal punto, mentre nelle [9.1.3'] ÷ [9.1.5'] gli integrali doppi dipendono soltanto dal tempo e la derivata è da considerare come ordinaria. L'argomento verrà approfondito nel § 9.4.

Osservazione 3. La [9.1.6] implica

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0;$$

di conseguenza,

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \text{cost. rispetto al tempo.} \quad [9.1.8]$$

Analogamente, la [9.1.7] dà

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{\Sigma} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS,$$

la quale, sostituita nella [9.1.3], fornisce

$$-\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iint_{\Sigma} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS,$$

e ancora

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\tau = \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Si ha quindi

$$\iint_{\Sigma} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_{\Omega} \rho d\tau = \text{cost. rispetto al tempo.} \quad [9.1.9]$$

Notiamo che le [9.1.8] e [9.1.9] sono state ricavate dalla [9.1.3]÷[9.1.5], senza far uso delle [9.1.1] e [9.1.2]; queste ultime si limitano ad aggiungere l'ulteriore informazione che, per un certo valore di t , le costanti a secondo membro delle [9.1.8] e [9.1.9] sono uguali a zero. Il fatto poi che ciò sia vero per ogni t è conseguenza delle stesse [9.1.8] e [9.1.9].

Per questi motivi, è possibile considerare le [9.1.3], [9.1.4] e [9.1.5] come leggi fondamentali dell'elettromagnetismo nel vuoto, e le [9.1.1], [9.1.2] come equazioni esprimenti semplici condizioni iniziali.

9.2 L'induzione elettromagnetica

Per quanto si è visto poc'anzi, le equazioni che esprimono la solenoidalità di \mathbf{B} e la legge di Gauss vengono solitamente presentate come condizioni aggiuntive alle tre leggi fondamentali espresse dalle [9.1.3], [9.1.4] e [9.1.5]. Di queste ultime, la prima, che esprime la conservazione della carica, è stata già esaminata nel capitolo 6 e non richiede ulteriori commenti.

La seconda esprime il fatto che, in presenza di campi magnetici variabili nel tempo, la circuitazione del campo elettrico è, in generale, diversa da zero. E' questo un feno-

meno nuovo: finora, infatti, sia in elettrostatica che in presenza di correnti stazionarie, si era detto che il campo elettrico è irrotazionale. Conseguenza immediata della [9.1.4] è che l'integrale di \mathbf{E} esteso a una linea aperta γ_{AB} (integrale che prende il nome di *tensione elettrica lungo γ_{AB}*), in presenza di un campo magnetico variabile dipende, oltre che dagli estremi A e B , dal cammino di integrazione.

In precedenza (vedi § 6.8) avevamo introdotto una grandezza fisica, detta "forza elettromotrice" (f.e.m.), il cui valore è dato dalla circuitazione del campo elettromotore lungo una linea chiusa γ . E' consuetudine introdurre anche per il campo elettrico una f.e.m. agente lungo una generica linea chiusa γ .²

Indicando con \mathcal{E}_γ tale f.e.m., definita dalla

$$\mathcal{E}_\gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl, \quad [9.2.1]$$

la [9.1.4'] assume la forma

$$\mathcal{E}_\gamma = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{d\Phi_\gamma}{dt}. \quad [9.2.2]$$

ove Φ_γ indica il flusso del campo magnetico concatenato con γ .

Tale relazione, nota come *legge di Faraday-Neumann*, esprime il fatto che la f.e.m. agente lungo una linea chiusa è pari (a meno del segno) alla derivata nel tempo del flusso magnetico concatenato con la linea stessa. Il fenomeno prende il nome di *induzione elettromagnetica*, e la f.e.m. \mathcal{E}_γ viene indicata usualmente come *f.e.m. indotta dalla variazione del campo magnetico*. E' questo uno dei fenomeni più importanti dell'elettromagnetismo: ognqualvolta in una regione dello spazio esiste un campo magnetico variabile nel tempo, ad esso si associa un campo elettrico *rotazionale*, la cui f.e.m. lungo una generica linea chiusa è data dalla [9.2.2]. In modo forse non molto appropriato, si dice spesso che un campo magnetico variabile nel tempo "produce" un campo elettrico rotazionale.

Esempio 1

Dato un circuito filiforme (vedi fig. 9.1), immaginiamo che un generatore G determini in esso una corrente variabile i_1 . Questa corrente determina a sua volta un campo magnetico, anch'esso variabile nel tempo. Considerata una generica linea chiusa orientata γ , anche il flusso $\Phi_{\gamma 1}$ del campo magnetico concatenato con γ varia nel tempo: in conseguenza di ciò, lungo γ si origina una f.e.m., conformemente alla [9.2.2]. Consideriamo ora, in luogo di γ , un conduttore C_2 : la f.e.m. produrrà in esso la circolazione di una corrente indotta i_2 .

² Tale estensione è delicata, ed è importante notare che, mentre finora i concetti di campo elettromotore e f.e.m. riguardavano soltanto campi di forza di origine non elettrica, d'ora innanzi il termine "f.e.m." potrà indicare anche gli integrali di linea relativi ai campi elettrici.

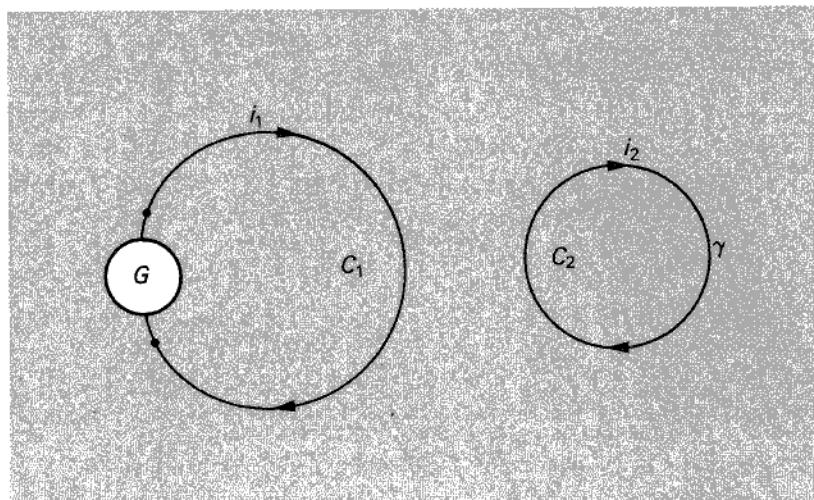


Figura 9.1

La sequenza di cause ed effetti è in realtà più complessa: infatti, quando in C_2 circola una corrente i_2 , questa, a sua volta, produce un campo magnetico, e pertanto il flusso concatenato con γ non è prodotto soltanto dalla corrente i_1 , ma anche dalla i_2 . E inoltre la stessa corrente i_1 risulta determinata non dal solo generatore, ma anche dalla f.e.m. indotta dalle variazioni di i_2 . Resta comunque vero che, per la legge di Faraday-Neumann, la f.e.m. agente lungo γ (cioè in C_2) è data (a meno del segno) dalla derivata temporale del flusso del campo magnetico “globale” concatenato con γ . Con tale specificazione intendiamo che il flusso Φ_γ , nella [9.2.2], è da considerarsi come flusso del campo magnetico risultante (da tutte le possibili cause), agente nella regione spaziale che interessa γ .

Esempio 2

Nella situazione descritta dalla figura 9.2, un magnete viene avvicinato a una spira chiusa conduttrice γ , ferma nel nostro riferimento inerziale. Pur essendo il campo del magnete costante nel tempo (nel riferimento del magnete), il campo che interessa la spira è variabile, a causa del moto del magnete, e cresce all'avvicinarsi di quest'ultimo alla spira. Il flusso concatenato con γ varia nel tempo e di conseguenza si origina, lungo la spira, una f.e.m. che, a sua volta, produce una corrente. Anche in questo caso, la corrente è prodotta dalla variazione del flusso globale concatenato con la spira.

Questi esempi evidenziano un ulteriore aspetto della legge di Faraday-Neumann, contenuto nel suo stesso enunciato. Con riferimento all'esempio 2, supponiamo che il magnete si avvicini alla spira; per valutare la f.e.m. indotta, cominciamo con l'orientare in maniera arbitraria la linea γ . Considerata, poi, una superficie S che poggi su γ , orientiamone la normale \mathbf{n} in modo coerente con il verso prefissato su γ . Se il ma-

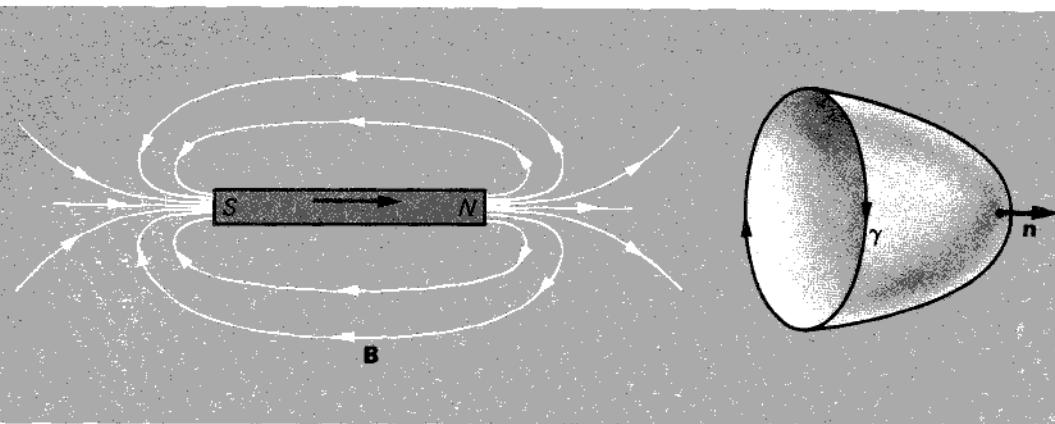


Figura 9.2

gnete è disposto come nella figura 9.2, il flusso Φ_γ risulta positivo, poiché \mathbf{B} forma un angolo acuto con \mathbf{n} ; tale flusso cresce quando il magnete si avvicina alla spira. La funzione Φ_γ è dunque crescente nel tempo, e la sua derivata temporale è positiva: pertanto la f.e.m. indotta nella spira, per la [9.2.2], è negativa. Ciò significa che il campo elettrico "indotto" lungo la linea γ agisce in verso opposto a quello assunto per orientare γ . D'altra parte, poiché la corrente indotta nella spira ha lo stesso segno della f.e.m., il campo magnetico da essa prodotto fornisce un contributo negativo al flusso concatenato con la spira: la corrente indotta produce un campo che tende a opporsi alla "causa" (variazione di campo) che la genera (*legge di Lenz*).

Negli esempi trattati abbiamo visto che la f.e.m. indotta nella spira conduttrice agisce alla stregua di un generatore inserito in un circuito: come un generatore, essa produce nella spira una corrente

$$i = \frac{E_\gamma}{R_\gamma},$$

dove R_γ è il valore della resistenza della spira. La differenza più importante rispetto ai casi trattati nel capitolo 6 è la seguente: allora la sede del campo elettromotore era unicamente limitata al generatore, ora il campo elettrico indotto, che funge da campo elettromotore, agisce in tutti i punti del circuito. In questo senso la f.e.m. indotta può pensarsi "distribuita" lungo la spira. In altre parole, tutto avviene come se, lungo la spira, esistessero tanti generatori elementari, in serie l'uno all'altro, le cui f.e.m. si sommassero,³ dando come f.e.m. totale agente lungo la spira

$$\mathcal{E}_\gamma = - \frac{d\Phi_\gamma}{dt}.$$

³ La legge di Faraday-Neumann non dà informazioni circa il modo in cui tali f.e.m. elementari sono distribuite nello spazio: vedremo nel seguito come ciò avviene.

Siamo ora in grado di esaminare e interpretare due ulteriori esempi di notevole significato.

Esempio 3

La situazione è analoga a quella trattata nell'esempio 2, con la differenza che in questo caso la spira conduttrice è interrotta. Anche in questo caso, quando il magnete si muove, nasce un campo elettrico, nel sistema di riferimento in cui la spira è ferma, che agisce sui portatori di carica del conduttore, ponendoli in moto. Contrariamente ai casi precedenti, la corrente non può chiudersi nella spira. La situazione è cioè simile a quella di un generatore a morsetti aperti (vedi § 6.8). Continuando nell'analogia, si può immaginare che tutti i tratti elementari della spira siano sede di generatori elementari posti in serie, e che l'intero conduttore si presenti come un unico generatore, lungo il quale sia distribuita una f.e.m. pari alla somma di tutte le f.e.m. dei generatori elementari, cioè all'integrale di linea (lungo il conduttore) del campo elettrico indotto (campo elettromotore). Anche in questo caso, sulla superficie limite del conduttore, all'interfaccia con l'ambiente circostante, si localizza una distribuzione di cariche che, a sua volta, produce un campo elettrico sovrapposto a quello elettromotore. Se la configurazione fisica del sistema è tale che il campo elettrico indotto nel conduttore risulti costante nel tempo,⁴ nel circuito non può circolare corrente e la situazione si presenta simile a quella del paragrafo 6.8. Il campo elettrico prodotto dalla distribuzione di cariche nel conduttore è tale da bilanciare, punto per punto, l'azione del campo elettrico indotto. La differenza più importante tra i due casi è, come già detto, la seguente: mentre il campo elettromotore è, nel caso del generatore, presente soltanto nella regione del generatore, qui esso è presente in ogni punto, cosicché si ha ovunque la sovrapposizione fra campo elettromotore (campo elettrico indotto, rotazionale) e campo *di reazione* (irrotazionale).

Esempio 4. La ruota di Barlow⁵

Consideriamo un disco metallico di raggio a (vedi fig. 9.3) rotante attorno al proprio asse con velocità angolare ω costante: sulla superficie del disco e sul suo asse siano poggiati due contatti striscianti S e S' , collegati elettricamente agli elettrodi A e B . Immaginiamo ora di immergere il dispositivo in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme, perpendicolare al piano del disco e costante nel tempo. Nel riferimento del laboratorio non sono rilevabili fenomeni di induzione elettromagnetica, poiché il campo magnetico ivi esistente è costante nel tempo. D'altra parte, gli elettroni liberi presenti nel disco, trasportati dalla rotazione, sono soggetti a un campo di forze centrifughe, e inoltre, muovendosi in un campo magnetico, alla forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{u} \times \mathbf{B}.$$

⁴ L'ipotesi serve a garantire che non possano presentarsi correnti di spostamento (vedi § 9.3).

⁵ Pur non vertendo, a rigore, su fenomeni di induzione, l'esempio è utile perché illustra un'interessante estensione della legge di Faraday-Neumann, di cui parleremo più diffusamente nel paragrafo 9.4.

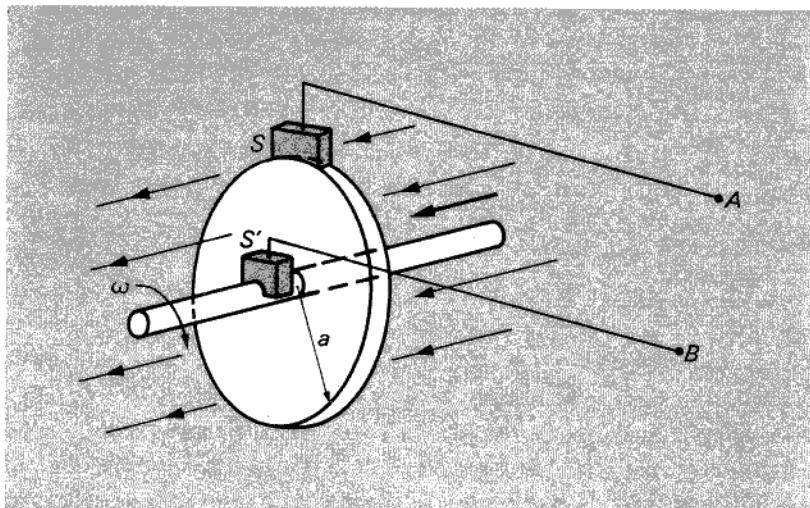


Figura 9.3

Rappresentazione schematica della ruota di Barlow.

Sotto l'azione di queste forze, gli elettroni si muovono, ridistribuendosi nel disco; si determina in tal modo una perturbazione della neutralità elettrica locale che dà luogo a un campo elettrico di reazione \mathbf{E} . In condizioni di regime, quando gli eletrodi A e B non sono collegati tra loro per mezzo di un conduttore esterno, si stabilisce uno stato di equilibrio tra le diverse forze agenti sugli elettroni, e si ha

$$m_e \omega^2 \mathbf{r} - e \mathbf{u} \times \mathbf{B} - e \mathbf{E} = 0; \quad [9.2.3]$$

m_e è la massa dell'elettrone, \mathbf{r} il raggio vettore spiccato dal centro del disco verso di esso, $e - e$ la sua carica (negativa). Il campo elettrico \mathbf{E} può scomporsi in due componenti, dei quali uno bilancia la forza centrifuga, l'altro la forza di Lorentz. Avendo già trattato il primo a proposito del disco di Nichols (vedi § 6.12) e avendo in quella sede visto che esso è di entità molto modesta, ci limitiamo qui a considerare il secondo. Indicando ancora, per semplicità, con \mathbf{E} tale componente, si ha

$$e \mathbf{u} \times \mathbf{B} + e \mathbf{E} = 0, \quad [9.2.4]$$

e quindi

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad [9.2.5]$$

All'equilibrio, sugli elettroni agisce un campo elettromotore "mozionale" \mathbf{E}_{moz} , bilanciato dal campo elettrico \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}_{\text{moz}} = -\mathbf{E} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad [9.2.6]$$

Consideriamo ora (vedi fig. 9.4) una linea chiusa γ costituita dal segmento SS' , solidale col disco e disposto radialmente, dai tratti di conduttori SA e $S'B$, e da un

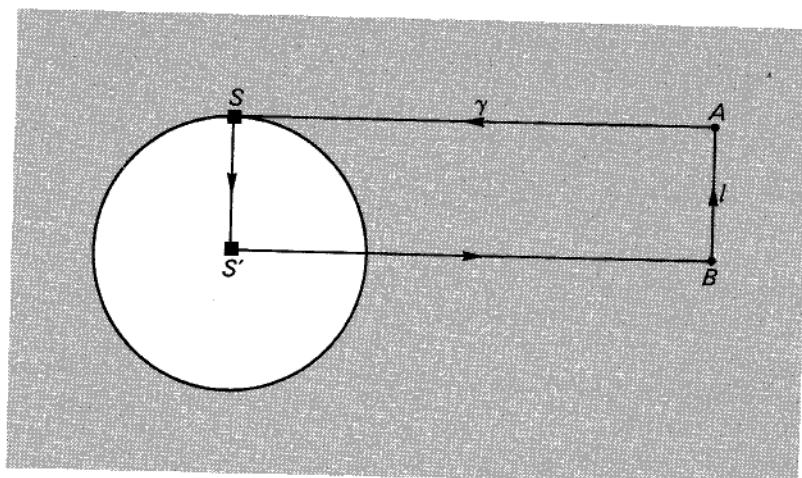


Figura 9.4

tratto (non conduttore) l collegante gli elettrodi A e B . La f.e.m. $\mathcal{E}_{\gamma \text{ moz}}$ associata al campo elettromotore \mathbf{E}_m , agente lungo γ , è data da

$$\mathcal{E}_{\gamma \text{ moz}} = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_{\text{moz}} \cdot \mathbf{t} dl = \int_0^a u B dr = \int_0^a \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B a^2. \quad [9.2.7]$$

Tale f.e.m. agisce lungo γ a patto che il disco ruoti, e con esso ruoti il tratto $S'S$ di γ (in caso contrario, non c'è forza di Lorentz e di conseguenza neppure f.e.m.). La [9.2.7] dunque può essere riguardata come f.e.m. agente lungo una linea chiusa *mobile* (almeno in un suo tratto) in un campo magnetico uniforme e costante nel tempo.⁶

Consideriamo ora la nuova disposizione di γ dopo un intervallo di tempo elementare dt (vedi fig. 9.5), quando cioè il raggio $S'S$ è ruotato di un angolo $d\alpha = \omega dt$. Osserviamo che, a causa della "deformazione" di γ , il flusso di \mathbf{B} con essa concatenato varia nel tempo (pur essendo \mathbf{B} costante); la variazione $d\Phi_{\gamma}$ di tale flusso, nel tempuscolo dt , risulta dunque pari (a meno del segno) al flusso attraverso il "triangolo" elementare $SS'S''$. Si ha perciò

$$d\Phi_{\gamma} = -\frac{1}{2} a B dl$$

dove dl è lunghezza dell'arco SS'' . Essendo d'altra parte

$$dl = ad\alpha = a\omega dt,$$

si ha

$$d\Phi_{\gamma} = -\frac{1}{2} a^2 \omega B dt. \quad [9.2.8]$$

⁶ Per facilitare l'intuizione, si può anche immaginare, in luogo del disco, una ruota a raggiera (costituita cioè da un insieme di fili uscenti radialmente dal centro) i cui raggi facciano contatto uno alla volta con la spazzola.

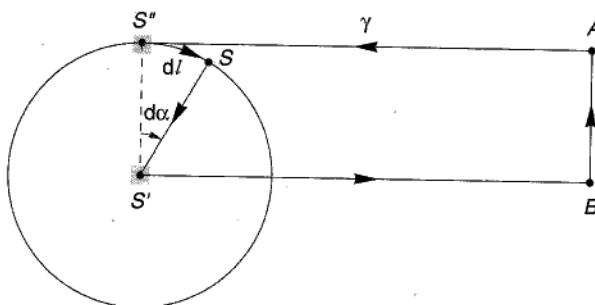


Figura 9.5

Confrontando la [9.2.8] con la [9.2.7], si ha

$$E_\gamma = - \frac{d\Phi_\gamma}{dt}. \quad [9.2.9]$$

Il risultato, molto importante, può così riassumersi:

La f.e.m. agente lungo una linea chiusa deformabile γ può ancora calcolarsi utilizzando la legge di Faraday-Neumann.

9.3 Corrente di spostamento

Passiamo ora a esaminare l'ultima delle leggi dell'elettromagnetismo nel vuoto, espressa dalle [9.1.5] e [9.1.5']. Essa riguarda la circuitazione del campo magnetico e costituisce una generalizzazione della legge di Ampère enunciata in magnetostatica. La novità essenziale è nel fatto che, mentre nella [7.2.3] la circuitazione del campo magnetico è proporzionale al flusso di \mathbf{J} (densità di corrente di conduzione) concatenato con γ , nella [9.1.5] compare un nuovo termine, costituito dal flusso del vettore $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$. Pertanto, mentre, nel caso magnetostatico, è solenoidale il campo di \mathbf{J} , ora solenoidale è il campo del vettore

$$\mathcal{G} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

I campi \mathbf{J} e $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, nei riguardi di \mathbf{B} , hanno ruoli simili: ciascuno contribuisce indipendentemente alla circuitazione del campo magnetico. In particolare, se in una

regione dello spazio risulta identicamente $\mathbf{J}=0$ (cioè non vi sono conduttori in cui circolino correnti), ma esiste un campo elettrico variabile nel tempo, in tale regione è rilevabile un campo magnetico, poiché la sua circuitazione, in base alla [9.1.5], risulta diversa da zero. Ad ogni campo elettrico variabile nel tempo si associa cioè un campo magnetico che soddisfa la [9.1.5]; questo fenomeno, l'*induzione magnetoellettrica*, costituisce il "duale" dell'induzione elettromagnetica.

Un campo elettrico variabile nel tempo può essere dunque riguardato alla stregua di una corrente, poiché, come questa, produce un campo magnetico. Per questo motivo, e per distinguerlo dal vettore \mathbf{J} (densità di corrente di conduzione), al vettore $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ si è dato il nome di *densità di corrente di spostamento*.

Consideriamo ora un tipico esempio in cui la corrente di spostamento svolge un ruolo essenziale.

Esempio 1

Sia dato un circuito costituito da un generatore di f.e.m. stazionaria \mathcal{E} e da un condensatore di capacità C , collegati attraverso un conduttore di resistenza R . Supponiamo che, nell'istante in cui il generatore viene collegato al condensatore, questo sia inizialmente scarico. Sotto l'azione del campo elettromotore agente nel generatore, i portatori di carica liberi in quest'ultimo e nel conduttore iniziano a muoversi. D'altra parte, essendo le armature del condensatore isolate tra loro (ad esempio, supponiamo che tra esse vi sia il vuoto) non può verificarsi alcun passaggio di cariche nello spazio tra le armature. Si determina pertanto un accumulo di cariche positive su un'armatura e un equivalente accumulo di cariche negative (o, se si vuole, una riduzione di cariche positive) sull'altra. Per effetto di queste cariche variabili nel tempo, nello spazio interposto tra le armature nasce un campo elettrico, anch'esso variabile nel tempo. In conclusione, mentre nel conduttore esiste una corrente di conduzione, tra le armature del condensatore si manifesta una corrente di spostamento. Inoltre, data una superficie chiusa Σ che racchiuda una sola armatura del condensatore (vedi fig. 9.6), il flusso del vettore

$$\mathcal{G} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

uscente da tale superficie chiuso è nullo. D'altra parte, si ha

$$0 = \iint_{\Sigma} \mathcal{G} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{\Sigma} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS. \quad [9.3.1]$$

In tutti i punti di Σ , tranne che all'intersezione S_c con il conduttore, risulta poi $\mathbf{J}=0$ (poiché non esistono cariche libere nel vuoto); pertanto

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = i,$$

dove i indica il valore della corrente di conduzione che circola nel conduttore. Dalla

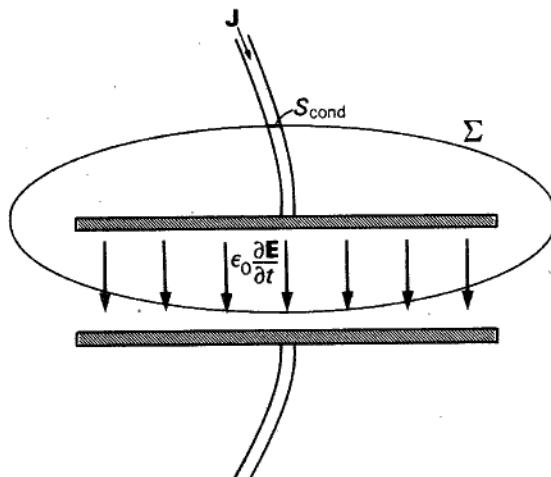


Figura 9.6

[9.3.1] si ricava perciò

$$\iint_{\Sigma} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = -i.$$

Nell'ipotesi che, come avviene di solito, all'esterno del condensatore il campo elettrico sia trascurabile, la corrente di conduzione nel conduttore risulta uguale al flusso della densità di corrente di spostamento nel condensatore.

9.4 Le leggi del campo elettromagnetico nel vuoto, per linee e superfici mobili e deformabili, in un riferimento inerziale

Nel paragrafo 9.1 abbiamo enunciato le leggi dell'elettromagnetismo nel vuoto, per linee e superfici ferme nel riferimento inerziale rispetto al quale sono misurate le grandezze che figurano nelle leggi stesse.

Ci proponiamo ora di estendere queste leggi al caso generale in cui le linee e le superfici possano muoversi (eventualmente anche deformandosi) in maniera arbitraria. In questo paragrafo, mostreremo che le leggi continuano a valere nella forma [9.1.1]÷[9.1.5].

Per quel che riguarda le [9.1.1], [9.1.2], è semplice rendersi conto che esse valgono per Σ e Ω comunque mobili. Infatti le [9.1.1] e [9.1.2] rappresentano relazioni che legano fra loro i valori assunti, in un dato istante t , dalle grandezze ρ , \mathbf{E} , \mathbf{B} nei diversi punti dello spazio. Ora, il valore assunto, ad esempio, dal flusso di \mathbf{E} uscente da Σ all'istante t dipende soltanto dalla distribuzione di \mathbf{E} nei punti dello spazio che sono "occupati", nello stesso istante t , dalla superficie Σ , e pertanto *non* può dipendere dalla "storia" passata di Σ , né tanto meno dal suo futuro. La stessa cosa può dirsi per

l'integrale di volume della densità di carica ρ nella regione Ω . Se ne conclude che se, in un dato campo elettromagnetico, la [9.1.1] è verificata, in un determinato istante t_1 , per una assegnata Σ e per la corrispondente Ω , essa deve valere, nell'istante t_1 , indipendentemente dal fatto che per $t \neq t_1$ la superficie Σ rimanga ferma o invece si muova in maniera arbitraria, eventualmente anche deformandosi. La stessa cosa vale ovviamente anche per la [9.1.2].

Per quel che riguarda le [9.1.3]÷[9.1.5], le cose possono apparire a prima vista più complicate a causa della presenza delle derivate temporali di ρ , \mathbf{B} , \mathbf{E} sotto segno di integrale; tuttavia è facile convincersi che i ragionamenti precedenti si applicano anche in questo caso, poiché $\partial\rho/\partial t$, $\partial\mathbf{B}/\partial t$, $\partial\mathbf{E}/\partial t$ sono anch'esse grandezze fisiche che assumono, all'istante t_1 , valori ben determinati, indipendentemente dal fatto che γ , Σ e Ω rimangano ferme per $t \neq t_1$, o invece si muovano in maniera arbitraria.

In conclusione, le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo nel vuoto, espresse nella forma [9.1.1]÷[9.1.5], valgono *in ogni caso*, sia che linee e superfici siano ferme, sia che si muovano nel riferimento inerziale prescelto.

Non altrettanto può dirsi, come vedremo subito, per le [9.1.3']÷[9.1.5']. Infatti, le derivate temporali che vi figurano operano sugli integrali e *non* sulle funzioni integrande: ciò comporta che in un dato istante i valori di tali derivate dipendono, oltre che dalla distribuzione spaziale di ρ , \mathbf{B} , \mathbf{E} , anche dal modo in cui varia il dominio di integrazione.

Ne segue che, se le [9.1.3']÷[9.1.5'] sono verificate quando le linee e le superfici sono ferme, *non* possono esserlo, in generale, quando queste si muovono. A chiarimento di tutto ciò, ricaviamo la forma che deve assumere la [9.1.4'] in presenza di linee mobili.

Consideriamo una linea chiusa γ la quale si muova nel nostro riferimento, assumendo negli istanti t e $t + \Delta t$ le configurazioni indicate in figura 9.7 con $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \Delta t)$; siano $S(t)$ e $S(t + \Delta t)$ due superfici aventi rispettivamente $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \Delta t)$ come orlo e sia δS_{lat} la superficie descritta dai punti di γ durante il moto. Con questi

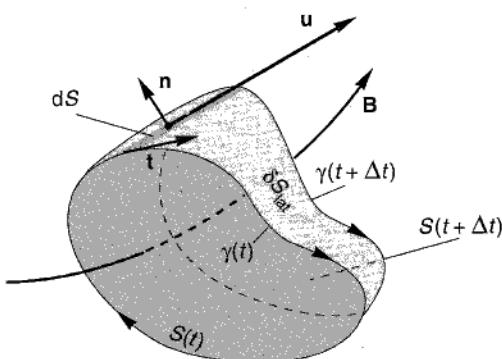


Figura 9.7

simboli

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta t}; \quad [9.4.1]$$

ma per la solenoidalità di \mathbf{B} , si ha

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{\delta S_{\text{lat}}} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS_{\text{lat}}.$$

Essendo poi, per Δt sufficientemente piccolo,

$$\mathbf{B}(t+\Delta t) = \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t,$$

si ha

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \left[\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \right] \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{\delta S_{\text{lat}}} \left[\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \right] \cdot \mathbf{n} dS_{\text{lat}}.$$

Trascurando il termine

$$\iint_{\delta S_{\text{lat}}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cdot \mathbf{n} dS,$$

perché infinitesimo di ordine superiore rispetto agli altri, si ha

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \left[\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{\delta S_{\text{lat}}} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS_{\text{lat}}.$$

Indicati con dl l'elemento di linea di γ e con \mathbf{u} la velocità istantanea di γ (variabile in generale da punto a punto), si può scrivere

$$\mathbf{n} dS_{\text{lat}} = \mathbf{t} dl \times \mathbf{u} \Delta t$$

e quindi

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \left[\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n} dS - \Delta t \oint_{\gamma(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{t} \times \mathbf{u} dl.$$

Applicando la regola ciclica del prodotto misto nell'integrale di linea, si ha

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \left[\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \right] \cdot \mathbf{n} dS - \Delta t \oint_{\gamma(t)} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl.$$

Sostituendo questa espressione nella [9.4.1], si ottiene

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS - \Delta t \oint_{\gamma(t)} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl}{\Delta t},$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_{\gamma(t)} \mathbf{u}(t) \times \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{t} dl. \quad [9.4.2]$$

(Come si vede, per $\mathbf{u}=0$ è possibile estrarre la derivata dall'integrale di superficie, mentre ciò non è possibile, in generale, per $\mathbf{u} \neq 0$.)

Ricavando, ora, il flusso di $\partial \mathbf{B}/\partial t$ dalla [9.4.2] e sostituendolo nella [9.1.4] (abbiamo già mostrato che essa continua a valere anche quando linee e superfici si muovano) otteniamo

$$\oint_{\gamma(t)} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{t} dl = - \frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS - \oint_{\gamma(t)} \mathbf{u}(t) \times \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{t} dl,$$

e infine

$$\oint_{\gamma(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl = - \frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS. \quad [9.4.3]$$

Questa è quindi la forma nuova che la [9.1.4'] deve assumere in presenza di linee e superfici mobili: osserviamo esplicitamente che essa coincide con la [9.1.4'] quando sia $\mathbf{u}=0$.

(E' bene sottolineare che tutte le grandezze che figurano nella [9.4.3] sono misurate nel nostro riferimento inerziale e *non* nel riferimento solidale con $\gamma(t)$).

Posto, come nella [9.2.1],

$$\mathcal{E}_{\gamma E} = \oint_{\gamma(t)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl, \quad [9.4.4]$$

e inoltre

$$\mathcal{E}_{\gamma moz} = \oint_{\gamma(t)} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl, \quad [9.4.5]$$

la [9.4.3] può essere riscritta nella forma

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_{\gamma E} + \mathcal{E}_{\gamma moz} = - \frac{d}{dt} \Phi_\gamma, \quad [9.4.6]$$

avendo indicato con Φ_γ il flusso di \mathbf{B} concatenato con la linea chiusa γ . Volendo conservare per la legge dell'induzione elettromagnetica la forma usuale (quella della [9.2.2]) anche quando γ si muove (eventualmente deformandosi), occorre aggiungere alla f.e.m. data dalla circuitazione del campo elettrico un altro termine, che dipende dalla velocità \mathbf{u} di γ e che è detto perciò *mozionale*.

A conclusioni analoghe si perviene anche per ciò che riguarda le [9.1.3'] e [9.1.5'], ma non sembra utile ricavare le relative espressioni, poiché esse sono poco utilizzate.

9.5 Le leggi del campo elettromagnetico in presenza di mezzi materiali

Nel caso in cui siano presenti mezzi materiali, l'estensione delle leggi dell'elettromagnetismo, inizialmente enunciate nel caso vuoto, è formalmente semplice:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q_{\text{lib}} \quad (\text{legge di Gauss}) \quad [9.5.1]$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{solenoidalità di } \mathbf{B}) \quad [9.5.2]$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{dQ_{\text{lib}}}{dt} \quad (\text{conservazione della carica}) \quad [9.5.3]$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{legge di Faraday-Neumann}) \quad [9.5.4]$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{legge di Ampère}). \quad [9.5.5]$$

ove Σ , S e γ hanno il significato più volte chiarito nei paragrafi precedenti.

Come si vede, l'equazione che esprime la solenoidalità di \mathbf{B} rimane inalterata, anche in presenza di mezzi materiali; lo stesso dicasi per la legge di Faraday-Neumann.

Le leggi di Gauss e di Ampère, invece, si modificano come, nel caso statico e in quello stazionario, si erano modificate le leggi omonime, relative al vuoto, per tener conto della presenza del mezzo. Così, nella [9.5.1], espressione della legge di Gauss, compare a primo membro il flusso del vettore spostamento, al secondo, la carica libera totale contenuta nella regione delimitata dalla superficie chiusa Σ ; e nella [9.5.5], esprimente la legge di Ampère, a primo membro compare la circuitazione del vettore \mathbf{H} e a secondo membro la somma della corrente di conduzione e di quella di spostamento concatenate con la linea chiusa γ . Si noti che quest'ultima è legata alla variazione temporale del vettore spostamento \mathbf{D} : donde il suo nome.

Infine, anche la legge di conservazione della carica si modifica in maniera da far figurare le sole cariche e correnti libere.

Riguardo alle relazioni costitutive dei mezzi materiali, le cose sono invece più complesse: infatti, quando i campi variano molto rapidamente nel tempo, esse non valgono nella forma vista nei casi statici, e devono essere sostituite con altre (ma di ciò parleremo nel cap. 11). Tuttavia finché i campi variano abbastanza lentamente (nel cap. 11 specificheremo quantitativamente cosa ciò significhi), le relazioni costitutive rimangono del tipo:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \text{per i dielettrici,}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \text{per i mezzi magnetici,} \quad [9.5.6]$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_m), \quad \text{per i conduttori } (\mathbf{E}_m \text{ è un eventuale campo elettromotore di origine non elettrica),}$$

e, nei casi lineari, assumono la forma classica:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{J} &= g (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m),\end{aligned}\quad [9.5.6']$$

ove i valori dei parametri ϵ , μ , g possono essere assunti pari a quelli dei casi statici.

Una ulteriore complicazione si ha quando i mezzi materiali si muovono nel sistema di riferimento inerziale rispetto al quale facciamo le nostre esperienze, soprattutto quando la velocità è molto alta (e cioè non trascurabile rispetto alla velocità della luce nel vuoto; vedi cap. 13). In questi casi, le relazioni costitutive fanno dipendere \mathbf{D} non soltanto da \mathbf{E} , ma anche da \mathbf{B} , e, analogamente, \mathbf{B} da \mathbf{E} , oltre che da \mathbf{H} : il loro studio, che presuppone una trattazione relativistica, esula però dai limiti del presente volume. Un semplice caso *non* relativistico va tuttavia esaminato, perché molto importante sul piano applicativo: è quello di un *conduttore in moto* con velocità $u \ll c$, il che si verifica, ad esempio, nelle macchine elettriche (motori e generatori). In questi casi la relazione costitutiva, con ottima approssimazione, è del tipo

$$\mathbf{J} = g (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad [9.5.7]$$

Si noti che le grandezze che figurano in questa relazione si intendono misurate tutte nel sistema di riferimento *del laboratorio* (e non in quello mobile solidale con il conduttore) e che, inoltre, il valore della conducibilità elettrica g è quello corrispondente al caso stazionario. Si vede così che nel conduttore in moto agisce un campo ozionale $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ che svolge lo stesso ruolo del campo elettromotore \mathbf{E}_m . Per questo motivo, può dirsi anche che, in un conduttore in moto con velocità \mathbf{u} , si induce una f.e.m. che, nel caso dei conduttori filiformi, può essere espressa dalla

$$\mathcal{E}_{\gamma \text{ mo}} = \int_{\gamma} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad [9.5.8]$$

dove γ è la linea che costituisce l'asse del conduttore filiforme. La [9.5.8] viene spesso espressa nella forma "elementare" equivalente:

$$d\mathcal{E}_{\gamma \text{ mo}} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dl. \quad [9.5.9]$$

La [9.5.8] chiarisce quanto era stato già detto a proposito della ruota di Barlow (§ 9.2).

La [9.5.7] chiarisce anche i motivi per cui spesso la legge dell'induzione elettromagnetica viene riportata nella forma [9.4.3], piuttosto che nella [9.1.4]. Se, infatti, si considera una spira conduttrice mobile (che materializza la linea chiusa $\gamma(t)$) e si applica ad essa la [9.4.3], sostituendo in essa il campo $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ dato dalla [9.5.7] (nel conduttore, si è supposto $\mathbf{E}_m = 0$), si ottiene

$$\oint_{\gamma(t)} \frac{\mathbf{J}}{g} \cdot \mathbf{t} \, dl = - \frac{d\Phi_{\gamma}}{dt}.$$

Moltiplicando e dividendo, sotto il segno di integrale, per l'area S_c della sezione retta del filo conduttore, si ha

$$\oint_{\gamma(t)} \frac{\mathbf{J}S_c}{gS_c} \cdot \mathbf{t} dl = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt};$$

il prodotto $\mathbf{J}S_c \cdot \mathbf{t}$ è pari all'intensità i della corrente che circola nella spira. Di conseguenza

$$\oint_{\gamma(t)} \frac{i}{gS_c} dl = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt}. \quad [9.5.10]$$

Quando i campi variano abbastanza lentamente da consentire di trascurare la corrente di spostamento attorno alla spira (è questo il caso delle macchine elettriche), la corrente i può essere ritenuta costante ed estratta dall'integrale:

$$i \oint_{\gamma(t)} \frac{dl}{gS_c} = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt}.$$

D'altra parte, l'integrale che figura in tale relazione è pari al valore della resistenza della spira (vedi § 6.10) e si ottiene, quindi:

$$Ri = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt}. \quad [9.5.11]$$

Questa relazione mostra che, per calcolare la corrente che si induce nella spira mobile, si può considerare agente in essa una f.e.m. \mathcal{E}_γ :

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_{\gamma E} + \mathcal{E}_{\gamma moz} = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt}, \quad [9.5.12]$$

nella quale il simbolo d/dt indica la derivata temporale *totale* del flusso Φ_γ concatenato con la spira.

9.6 Le leggi del campo elettromagnetico in forma locale: le equazioni di Maxwell

Per ciò che riguarda le prime tre leggi (teorema di Gauss, proprietà di solenoidalità del campo magnetico, principio di conservazione della carica) c'è poco da aggiungere a quanto detto nei capitoli precedenti (in particolare, nei §§ 2.6, 6.5 e 7.4). Restano da trattare le ultime due.

Esaminiamo inizialmente il caso in cui la regione nella quale si considerano i campi elettrici e magnetici sia regolare per i campi (non esistano, cioè, discontinuità nei campi). Applicando il teorema di Stokes ai primi membri delle [9.5.4] e [9.5.5], si

ricava

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS,$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove gli integrali superficiali sono estesi a una qualunque superficie aperta che abbia la linea chiusa γ come orlo. Con ciò, la legge di Faraday-Neumann e quella di Ampère assumono la forma equivalente

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove gli integrali a primo e secondo membro sono estesi alla stessa superficie di orlo γ . Poiché tali relazioni valgono per qualsiasi scelta della superficie di integrazione S , le funzioni integrande devono essere uguali. Si ha, cioè, in ogni punto di regolarità del campo,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [9.6.1]$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad [9.6.2]$$

Sono, queste, le *equazioni di Maxwell*, che esprimono in forma locale le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo; ad esse vanno aggiunte l'equazione che esprime il principio di conservazione della carica,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} = 0, \quad [9.6.3]$$

e le due condizioni supplementari

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{lib}, \quad [9.6.4]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad [9.6.5]$$

Nel vuoto, in assenza di cariche libere e di correnti di conduzione, le equazioni di Maxwell assumono la forma

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [9.6.6]$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad [9.6.7]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad [9.6.8]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad [9.6.9]$$

Ciò mette in particolare evidenza la simmetria di comportamento dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} .

E' chiaro a questo punto il motivo per cui, in condizioni variabili nel tempo, piuttosto che trattare separatamente il campo elettrico e quello magnetico, occorre riferirsi al campo elettromagnetico come a un'unica entità fisica: un campo si accompagna all'altro e viceversa, come due aspetti di un unico fenomeno.

Riportiamo infine le espressioni locali delle leggi dell'elettromagnetismo, *in presenza di cariche e correnti superficiali*. Con ragionamenti simili a quelli usati in elettrostatica e in magnetostatica, dalla legge di Gauss (per \mathbf{D}) e in virtù della proprietà di solenoidalità di \mathbf{B} , si ricava

$$[D_n] = \sigma_{\text{lib}}, \quad [9.6.10]$$

$$[B_n] = 0, \quad [9.6.11]$$

dove, al solito, il simbolo “[]” indica l'eventuale discontinuità di una componente del campo in corrispondenza di punti della superficie S su cui sono localizzate cariche e/o correnti superficiali, mentre σ indica la densità di carica superficiale su S .

Più complesso è il ragionamento per ciò che riguarda le leggi dell'induzione elettromagnetica e di quella magnetoelettrica.

Cominciando dalla prima, consideriamo una linea chiusa elementare γ di tipo “T” (vedi § 2.6) ferma, e applichiamo ad essa la legge dell'induzione elettromagnetica. Trascurando, al solito, i contributi alla circuitazione di \mathbf{E} forniti dai lati “corti” della linea γ , si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = E_{t1} dl - E_{t2} dl = - \frac{d\Phi_{\gamma}}{dt},$$

indicando con E_{t1} e E_{t2} i valori della componente di \mathbf{E} secondo la tangente a γ sui due lati affacciati della linea (dall'uno e dall'altro lato della superficie S) e con Φ_{γ} il valore del flusso di \mathbf{B} concatenato con essa. Φ_{γ} tende a zero quando γ viene “schiacciata” in modo da far tendere a zero i lati “corti”. Risulta

$$(E_{t1} - E_{t2}) dl = 0,$$

e quindi

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad \text{ovvero} \quad [E_t] = 0. \quad [9.6.12]$$

Anche nel caso di campi variabili nel tempo, dunque, *le componenti di \mathbf{E} secondo una direzione tangente a una superficie S su cui siano eventualmente presenti cariche e/o correnti superficiali si mantengono continue nel passaggio da un lato all'altro di S* .

Ragionando in maniera del tutto analoga per l'altra legge, si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = H_{t1} dl - H_{t2} dl = J'_s dl + \frac{d\Psi_{\gamma}}{dt},$$

indicando con H_{t1} e H_{t2} le componenti di \mathbf{H} secondo la tangente a γ dall'uno e dall'altro lato di S , con J'_s la componente della densità di corrente superficiale \mathbf{J}_s (fluente su S) secondo la normale alla superficie piana elementare delimitata da γ , e con Ψ_{γ} il flusso del campo $\epsilon_0 \mathbf{E}$ attraverso γ .

Infine, facendo tendere a zero i lati "corti" della linea γ , si conclude

$$(H_{t1} - H_{t2}) dl = J'_s dl$$

e quindi

$$[H_t] = J'_s. \quad [9.6.13]$$

In altre parole, *le componenti tangenziali del campo magnetico subiscono una discontinuità nel passaggio da un lato all'altro di una superficie S su cui circoli una corrente distribuita con densità superficiale J_s* .

Riassumendo, si ha il seguente quadro (ottenuto con semplici sviluppi dalle [9.6.10]-[9.6.13]):

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma_{lb} \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0 \\ (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = J_s, \end{cases} \quad [9.6.14]$$

dove \mathbf{n} indica il versore della normale a S orientata dal mezzo 2 al mezzo 1.

Un caso particolarmente interessante, cui possono applicarsi le [9.6.14], è quello di un campo elettromagnetico che investa la superficie esterna di un conduttore ideale (avente cioè resistività nulla). In tal caso, ricordando la legge di Ohm,

$$\eta \mathbf{J} = \mathbf{E},$$

si conclude agevolmente che, affinché la densità di corrente \mathbf{J} si mantenga ovunque finita (come è fisicamente necessario), occorre, quando la resistività η è nulla, che sia tale anche il campo elettrico \mathbf{E} . *In un conduttore ideale, il campo elettrico è dunque nullo non soltanto nel caso elettostatico, ma anche in presenza di campi comunque variabili nel tempo.*

Ricordando inoltre che anche nel conduttore deve valere la legge di Faraday-Neumann, si conclude che

$$\mathbf{0} = \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

cioè che il campo magnetico \mathbf{B} è costante nel tempo all'interno del conduttore ideale. In particolare, se esso è nullo in un istante rimarrà tale indefinitamente. Dunque, all'interno di un conduttore ideale, risulta identicamente

$$\begin{cases} \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad [9.6.15]$$

Le [9.6.14], applicate al caso di un conduttore, forniscono allora

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s, \end{cases} \quad [9.6.16]$$

dove \mathbf{E} e \mathbf{B} sono valutati sulla faccia esterna del conduttore: \mathbf{E} risulta normale e \mathbf{B} tangente ad essa. Su questo argomento, torneremo nel seguito.

*9.7 I potenziali elettromagnetici

Seguendo la linea espositiva adottata per i fenomeni elettrostatici e magnetostatici, presentiamo ora le leggi dell'elettromagnetismo utilizzando i potenziali del campo. Anche in questo caso non esporremo nuovi fatti fisici, ma ci limiteremo a trarre alcune conseguenze dalle leggi già enunciate.

Osserviamo anzitutto che la solenoidalità di \mathbf{B} implica ancora che esso ammette infiniti potenziali vettori; indicando con \mathbf{A} uno qualsiasi di essi, si ha

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad [9.7.1]$$

Ricordiamo qui che i potenziali vettori di \mathbf{B} sono legati tra loro dalla relazione

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi, \quad [9.7.2]$$

con ψ funzione scalare arbitraria.

Sostituendo la [9.7.1] nella prima equazione di Maxwell, si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

e, invertendo tra loro la derivata parziale rispetto al tempo con quelle spaziali, si può

scrivere

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

donde

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad [9.7.3]$$

Se ne conclude che il campo $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ è irrotazionale.

Supponendo che la regione occupata dal campo sia internamente connessa, la [9.7.3] può scriversi nella forma equivalente

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \operatorname{grad} \varphi,$$

dove φ è uno qualsiasi dei potenziali scalari (definiti, al solito, a meno di una costante) del campo $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$. Per comodità, si preferisce porre $V = -\varphi$:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V. \quad [9.7.4]$$

Vogliamo sottolineare che la funzione potenziale V qui introdotta non è il potenziale del campo elettrico \mathbf{E} (poiché questo, di per sé, non ammette potenziale scalare), bensì un potenziale del campo $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ (che invece, come si è visto, risulta irrotazionale).

Sostituendo la [9.7.4] nella legge di Gauss (per semplicità, ci riferiamo al caso del vuoto), otteniamo

$$\operatorname{div} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

e quindi

$$\nabla^2 V + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Analogamente, sostituendo la [9.7.1] e la [9.7.4] nella seconda equazione di Maxwell, si ha

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \left(-\operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right), \quad [9.7.5]$$

e in definitiva

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad [9.7.6]$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad [9.7.7]$$

Abbiamo scritto, così, due equazioni nelle quali non appaiono esplicitamente i campi **E** e **B**, ma il potenziale scalare V e il potenziale vettore **A**. Esse non sono però sufficienti a individuare univocamente, per una data distribuzione di sorgenti, V e **A**. Per convincersene, basta ragionare come segue.

Supponiamo di conoscere le sorgenti del campo elettromagnetico ρ e **J** (tali, naturalmente, da rispettare la condizione di continuità [9.6.3]); supponiamo inoltre di conoscere un potenziale scalare $V(P, t)$ e un potenziale vettore **A** (P, t) che verifichino le [9.7.6] e [9.7.7] in ogni punto P e in ogni istante t . Ci chiediamo ora se esistano altre funzioni V' e **A'** che soddisfino le [9.7.6] e [9.7.7] con le stesse distribuzioni di ρ e **J**. Per rispondere a questa domanda, poniamo

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi,$$

$$V' = V + \varphi,$$

con ψ e φ generiche funzioni scalari del punto e del tempo.

Verifichiamo se, sostituendo nelle [9.7.6] e [9.7.7] le A' e V' al posto di A e V , tali equazioni sono ancora soddisfatte.

Per ciò che riguarda i primi membri si ha

$$\nabla^2 V' + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A}' = \nabla^2 V + \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial V'}{\partial t} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \\ &+ \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{grad} \psi + \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che le funzioni V e \mathbf{A} soddisfano per ipotesi alle [9.7.6] e [9.7.7], si conclude che V' e \mathbf{A}' verificano anch'esse le stesse equazioni (con le stesse ρ e **J**) a patto che risulti

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = 0, \quad [9.7.8]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{grad} \psi + \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad [9.7.9]$$

Ponendo

$$\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

le [9.7.8] e [9.7.9] sono identicamente soddisfatte. Ciò significa che, scelta una qualsiasi funzione scalare $\psi(P, t)$ e costruite le funzioni

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi, \quad [9.7.10]$$

$$V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad [9.7.11]$$

queste soddisfano ancora le [9.7.6] e [9.7.7] e costituiscono dunque nuovi potenziali del campo: i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} che possono calcolarsi dai potenziali in base alle [9.7.1] e [9.7.4] sono identici per le due coppie di funzioni V, \mathbf{A} e V', \mathbf{A}' .

Le [9.7.10] e [9.7.11], che esprimono il vincolo cui le funzioni V', \mathbf{A}' , devono soddisfare per essere potenziali del campo, prendono il nome di *condizioni di compatibilità (gauge conditions)*.

Ci proponiamo ora, sfruttando l'arbitrarietà concessa alla funzione scalare ψ , di ricercare un'espressione del potenziale che sia facile da calcolare e fisicamente significativa. A tal fine, osserviamo che è sempre possibile scegliere una funzione ψ_0 tale che il corrispondente potenziale vettore

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi_0,$$

calcolato a particolare da un qualsiasi potenziale vettore \mathbf{A} , risulti solenoidale. Basta infatti scegliere la funzione ψ_0 in modo che

$$\nabla^2 \psi_0 = -\operatorname{div} \mathbf{A}; \quad [9.7.12]$$

ciò facendo, si ha infatti

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_0 = \operatorname{div} \mathbf{A} + \nabla^2 \psi_0 = 0, \quad \text{per ogni } P, t. \quad [9.7.12']$$

Una volta scelta la ψ_0 in modo da soddisfare la [9.7.12], i potenziali del campo assumono la forma

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi_0,$$

$$V_0 = V - \frac{\partial \psi_0}{\partial t}.$$

Vediamo ora se, sostituendo tali espressioni nelle [9.7.6] e nelle [9.7.7], queste si semplificano dal punto di vista analitico. Effettuando la sostituzione e ricordando l'identità vettoriale

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

si ottiene subito

$$\nabla^2 V_0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad [9.7.13]$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A}_0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_0}{\partial t^2} + \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial V_0}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad [9.7.14]$$

La scelta fatta per la funzione ψ_0 (e, quindi, per \mathbf{A}_0) consente dunque di arrivare a un potenziale scalare V_0 che soddisfa l'equazione di Poisson [9.7.13] e a un potenziale vettore \mathbf{A}_0 che verifica la [9.7.14]. L'espressione di V_0 è particolarmente semplice: si tratta in fondo del potenziale cui si arriverebbe per il campo elettrostatico prodotto da una distribuzione di cariche $\rho(P, t)$, considerate in ogni istante ferme

nelle loro posizioni (naturalmente, con i valori corrispondenti all'istante t considerato).

Supponendo nota la $\rho(P, t)$ in tutto lo spazio e per ogni t (e supponendo inoltre che la regione in cui ρ è non nulla sia limitata) il potenziale scalare $V_0(P_0, t)$ assume la forma coulombiana

$$V_0(P_0, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(P, t)}{r_{PP_0}} d\tau, \quad [9.7.15]$$

dove con r_{PP_0} si è indicata la distanza tra i punti P e P_0 .

Alla condizione [9.7.12'], necessaria perché V_0 abbia la forma coulombiana, si dà il nome di *condizione di Coulomb*.

Osservazione. Per la [9.7.15], il potenziale V_0 , nel generico punto P_0 e all'istante t , è determinato dalla distribuzione di cariche ρ valutata allo stesso istante t : ciò potrebbe far pensare a una trasmissione istantanea dell'"informazione" da P a P_0 . Ciò, non è vero, poiché, come si è visto, la funzione V_0 non è sufficiente, *da sola*, a determinare il campo elettrico \mathbf{E} (l'unica grandezza avente significato fisico operativo).

Un'altra scelta particolarmente utile è la cosiddetta *condizione di Lorentz*, che consiste nell'imporre che i due potenziali (indicati qui con V_1 e \mathbf{A}_1) verifichino l'equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_1 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0. \quad [9.7.16]$$

Perché ciò accada, è sufficiente scegliere una funzione ψ che soddisfi alla relazione⁷

$$\nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad [9.7.17]$$

Ciò va interpretato nel senso seguente: considerata una qualsiasi coppia di potenziali V e \mathbf{A} (che, in generale, non soddisfano la condizione di Lorentz), per costruire una nuova coppia di potenziali V_1 e \mathbf{A}_1 che verifichino tale condizione è sufficiente scegliere una funzione $\psi(P, t)$ che soddisfi la [9.7.17] e costruire i potenziali V_1 e \mathbf{A}_1 in base alle [9.7.10] e [9.7.11].

Vediamo ora che forma assumono le [9.7.6] e [9.7.7] quando si imponga la condizione di Lorentz; sostituendo in esse la [9.7.16] si ottiene

$$\nabla^2 V_1 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad [9.7.18]$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_1 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad [9.7.19]$$

Le due equazioni, notevolmente simmetriche, presentano la classica struttura dell'equazione d'onda: anche su questo, comunque, torneremo nel seguito.

⁷ Per dimostrarlo, basta sostituire le [9.7.10] e [9.7.11] nella [9.7.16].

9.8 Energia magnetica associata a un sistema di correnti

In precedenza abbiamo calcolato (vedi § 7.10) il lavoro compiuto dalle forze del campo magnetico quando un circuito percorso da corrente viene spostato da una posizione a un'altra; si fece, al riguardo, l'ipotesi che, nel corso dello spostamento, la corrente circolante nel circuito mobile si mantenesse costante; *non* si introdusse per altro il concetto di energia magnetica associata al sistema di correnti. A quel punto dell'esposizione non potevamo infatti fare riferimento ai fenomeni di induzione eletromagnetica, essenziali per esprimere l'energia magnetica associata a un sistema di correnti. Riprendiamo ora l'argomento, esaminando inizialmente alcuni semplici esempi.

Esempio 1. Circuito percorso da corrente

Sia data una spira conduttrice γ percorsa da una corrente i : se non esistono altri circuiti percorsi da corrente, l'unico campo magnetico presente è quello prodotto da i . In queste condizioni, detto L il coefficiente di autoinduzione di γ , il flusso magnetico concatenato con essa è pari a

$$\Phi_\gamma = Li. \quad [9.8.1]$$

Se la i varia nel tempo, anche Φ_γ varia e, per la legge di Faraday-Neumann, la spira è sede di una f.e.m. indotta di valore

$$E = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -L \frac{di}{dt}. \quad [9.8.2]$$

Tale f.e.m. detta *di autoinduzione*, ha (per la legge di Lenz) segno tale da opporsi alla variazione di i . A questo proposito, osserviamo che, nello scrivere la [9.8.2], si è supposto che il verso scelto su γ per valutare i coincida con quello assunto per valutare E . Infatti, nello scrivere la [9.8.1] (considerando il coefficiente L come intrinsecamente positivo), si è supposto di orientare la linea chiusa γ (per quel che riguarda la valutazione di i) e la normale n alla generica superficie orlata da γ (per quel che riguarda la valutazione di Φ_γ) in maniera congruente. Lo stesso criterio, inoltre, quando si scriva la legge dell'induzione magnetica nella forma [9.8.2], vale anche per ciò che riguarda il legame fra il verso positivo assunto su γ per la valutazione di E e il verso di n dell'induzione elettromagnetica nella forma [9.8.2].

Valutiamo ora l'energia magnetica associata a un circuito percorso da corrente. A tal fine, consideriamo una spira "filiforme", di sezione S , lunghezza l e resistività η , e immaginiamo di collegarla (vedi fig. 9.8) a un generatore di f.e.m. E_g , costante nel tempo (ad esempio una pila). Prima della chiusura dell'interruttore T , nella spira non può evidentemente circolare alcuna corrente: quando, all'istante $t=0$, si chiude l'interruttore, una corrente i inizia a fluire. Considerata ora la linea chiusa γ , costituita dalla spira e dai conduttori che collegano la spira al generatore, la f.e.m. totale che

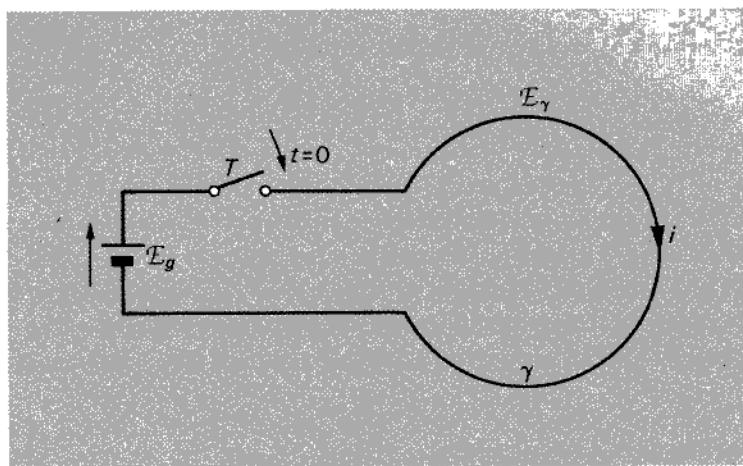


Figura 9.8

agisce lungo γ in un generico istante $t > 0$ risulta

$$\mathcal{E}_\gamma = \oint_{\gamma} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}_g - \frac{d\Phi_\gamma}{dt}, \quad [9.8.3]$$

ove Φ_γ indica il flusso concatenato con la γ al generico istante t e \mathbf{E}_m il campo eletromotore agente nel generatore.

Poiché, d'altra parte, in ogni punto della spira $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ e all'interno del generatore $\mathbf{J} = \sigma_g (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m)$, si ha

$$\int_{\gamma_{sp}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_{sp}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}, \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_g} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_g} \frac{1}{\sigma_g} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l},$$

dove γ_{sp} e γ_g sono i tratti di γ che si sviluppano rispettivamente nella spira e nel generatore, σ e σ_g i relativi valori di conducibilità, e $d\mathbf{l} = t d\mathbf{l}$.

Si ha allora

$$\mathcal{E}_\gamma = \oint_{\gamma} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_g} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_{sp}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_g} \frac{1}{\sigma_g} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_{sp}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}.$$

Moltiplicando e dividendo per l'area della sezione retta del conduttore, si ha

$$\mathcal{E}_\gamma = \int_{\gamma_g} \frac{1}{\sigma_g} \mathbf{J} \frac{S}{S} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_{sp}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \frac{S}{S} \cdot d\mathbf{l}.$$

Osservando poi che \mathbf{J} è diretto lungo $d\mathbf{l}$ e che JS rappresenta la corrente i , costante

in ogni sezione che fluisce lungo l'intero circuito,⁸ risulta

$$\mathcal{E}_\gamma = i \int_{\gamma_{sp}} \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{S} + i \int_{\gamma_g} \frac{1}{\sigma_g} \frac{dl}{S} = i(R_{sp} + R_g), \quad [9.8.4]$$

dove R_{sp} e R_g sono le resistenze dei tratti di circuiti costituiti rispettivamente dalla spira e dal generatore.

Infine, sostituendo la [9.8.4] nella [9.8.3], si ha

$$\mathcal{E}_g - \frac{d\Phi_\gamma}{dt} = (R_{sp} + R_g)i, \quad [9.8.5]$$

e, ricordando la [9.8.2],

$$\mathcal{E}_g = (R_{sp} + R_g)i + L \frac{di}{dt}. \quad [9.8.6]$$

Si è così ottenuta un'equazione differenziale del primo ordine, lineare e a coefficienti costanti, che governa la dinamica temporale della corrente nel circuito. Risolvendo tale equazione con la condizione iniziale

$$i(0) = 0,$$

si ha⁹

$$i(t) = I_0(1 - e^{-t/T}), \quad [9.8.7]$$

con

$$T = \frac{L}{R_{sp} + R_g}, \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_g}{R_{sp} + R_g}.$$

L'andamento temporale di $i(t)$ è del tipo riportato nella figura 9.9. Come si vede, per $t > 0$ la corrente cresce, tendendo asintoticamente al valore I_0 .

Valutiamo ora, mediante la [9.8.6], l'energia magnetica associata al circuito. Moltiplicando ambo i membri della [9.8.6] per i , si ha

$$\mathcal{E}_g i = (R_{sp} + R_g) i^2 + L i \frac{di}{dt}. \quad [9.8.8]$$

A primo membro compare la *potenza* erogata dal generatore di f.e.m. \mathcal{E}_g all'istante generico t (vedi § 6.10); a secondo membro, la somma di due termini: la potenza dissipata in calore (per effetto Joule) nelle resistenze R_{sp} e R_g ; il termine $L i \frac{di}{dt}$.

Osservando che

$$L i \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right),$$

⁸ Si è trascurata, nella spira, la corrente di spostamento rispetto a quella di conduzione.

⁹ L'integrale generale dell'omogenea associata alla [9.8.6] è del tipo: $i_0 = A e^{-t/T}$, con A costante arbitraria. Un integrale particolare dell'equazione completa è $i_p = \mathcal{E}_g / (R_{sp} + R_g)$. Dunque l'integrale generale dell'equazione completa è $i = A e^{-t/T} + \mathcal{E}_g / (R_{sp} + R_g)$: scegliendo poi A in modo che $i(0) = 0$, si ottiene la [9.8.7].

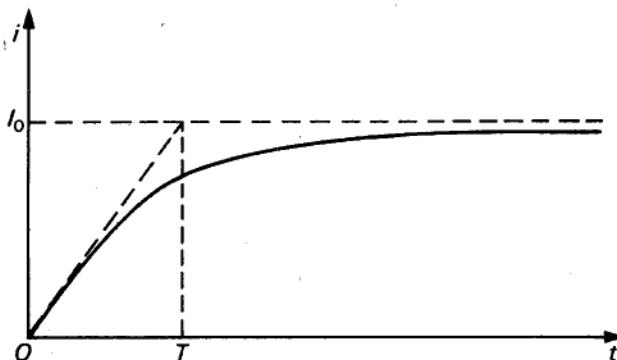


Figura 9.9

e integrando la [9.8.8] tra 0 e il generico t , si ha

$$\int_0^t \mathcal{E}_g i dt = \int_0^t (R_{sp} + R_g) i^2 dt + \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) dt. \quad [9.8.9]$$

La [9.8.9] mostra che l'*energia totale* erogata dal generatore nell'intervallo $(0, t)$ risulta pari alla somma dell'energia dissipata nel circuito per effetto Joule e dell'energia U_m ,

$$U_m = \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) dt = \frac{1}{2} L i^2; \quad [9.8.10]$$

quest'ultima è, per definizione, l'*energia magnetica* associata alla corrente i . Indipendentemente dal modo in cui è stata calcolata, U_m dipende soltanto dai valori di L e i ; in particolare, quando i è costante nel tempo, lo è anche U_m .

Per illustrare il significato fisico di U_m , immaginiamo di collegare un circuito percorso da una corrente I a un conduttore di resistenza R .

Ponendo $\mathcal{E}_g = 0$ nella [9.8.6], si ottiene

$$0 = R i + L \frac{di}{dt}, \quad [9.8.11]$$

con R resistenza totale del circuito. Integrando, si ha $i = A e^{-t/T}$, con $T = L/R$ e A costante arbitraria.

Scegliendo A in modo che $i(0) = I$, risulta

$$i = I e^{-t/T}.$$

L'andamento della corrente è del tipo rappresentato nella figura 9.10: essa tende asintoticamente a zero per t tendente all'infinito.

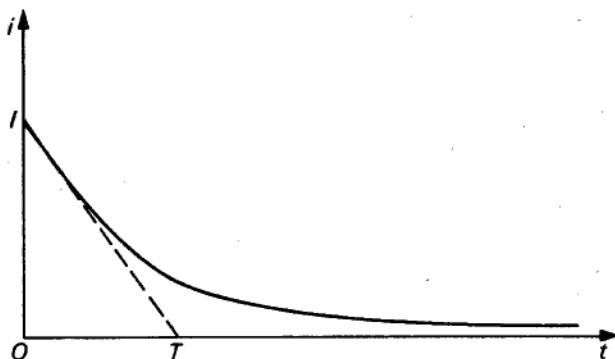


Figura 9.10

L'energia dissipata per effetto Joule in R , nel tempo $(0, \infty)$, non può che derivare dall'energia magnetica inizialmente immagazzinata nel circuito. Si ha infatti

$$\int_0^{\infty} R i^2 dt = \int_0^{\infty} R (I e^{-t/T})^2 dt = RI^2 \int_0^{\infty} e^{-2t/T} dt = RI^2 \left[-\frac{T}{2} e^{-2t/T} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} LI^2.$$

In conclusione, l'energia associata a un circuito con coefficiente di autoinduzione L , percorso da una corrente i , è data da

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2; \quad [9.8.12]$$

essa viene immagazzinata nel circuito nell'intervallo di tempo durante il quale la corrente cresce da zero al valore i e può essere restituita dal circuito stesso quando la corrente passi dal valore iniziale a zero.

Se R è nulla, la costante di tempo $T=L/R$ diventa illimitata: in questo caso il processo di caricamento dell'*induttore*¹⁰ non ha termine e la corrente cresce linearmente secondo la

$$i = \frac{E_g}{L} t.$$

Analogamente, quando si prova a "scaricare" l'induttore su una resistenza di valore nullo, la corrente si mantiene costante nel tempo, poiché l'energia immagazzinata non può dissiparsi nel circuito.

Esempio 2. Due circuiti percorsi da corrente

Dati due circuiti filiformi γ_1 e γ_2 percorsi rispettivamente dalle correnti i_1 e i_2 (vedi fig. 9.11), valutiamo l'energia magnetica associata al sistema di correnti così costituito.

¹⁰ Si indica con questo termine un circuito dotato di autoinduzione.

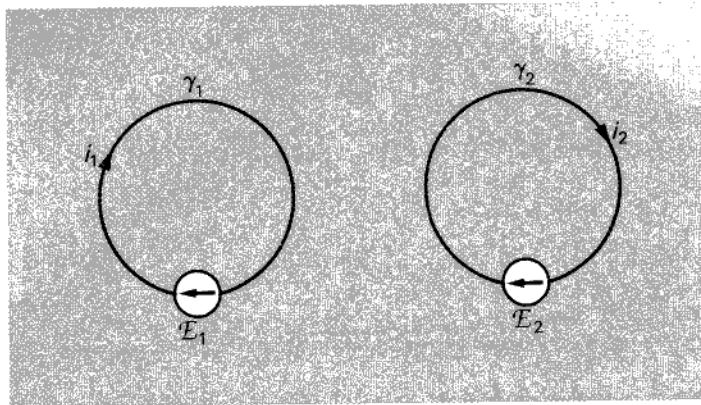


Figura 9.11

A tal fine, immaginiamo di alimentare i due circuiti rispettivamente con generatori di f.e.m. E_1 e E_2 . Ragionando come per il caso di un solo circuito, si può scrivere per il primo circuito γ_1

$$E_1 - \frac{d\Phi_1}{dt} = R_1 i_1; \quad [9.8.13]$$

Φ_1 è il flusso concatenato con il circuito, R_1 la resistenza totale di questo (somma della resistenza del generatore e di quella del conduttore) e i_1 la corrente in esso circolante.

Analogamente, per γ_2 si può scrivere

$$E_2 - \frac{d\Phi_2}{dt} = R_2 i_2, \quad [9.8.14]$$

con ovvio significato dei simboli. Osserviamo inoltre che

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2, \quad [9.8.15]$$

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1. \quad [9.8.16]$$

Sostituendo queste espressioni di Φ_1 e Φ_2 nelle due precedenti relazioni, si ha

$$E_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad [9.8.17]$$

$$E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad [9.8.18]$$

Moltiplicando la prima equazione per i_1 e la seconda per i_2 , si ottiene

$$E_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt}$$

$$E_2 i_2 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}.$$

Integrando queste equazioni fra $t=0$ e il generico istante t , e sommandole membro a membro si ha

$$\int_0^t (\mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_2 i_2) dt = \int_0^t (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt + \int_0^t L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt + \int_0^t L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} dt + \\ + \int_0^t \left(M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \right) dt$$

e quindi

$$\int_0^t (\mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_2 i_2) dt = \int_0^t (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) dt + \\ + \int_0^t \frac{d}{dt} (M i_1 i_2) dt.$$

L'integrale a primo membro rappresenta l'energia globalmente erogata dai due generatori nell'intervallo $(0, t)$, mentre il primo integrale a secondo membro rappresenta l'energia dissipata per effetto Joule nei due circuiti nello stesso intervallo. Dunque l'energia magnetica associata al sistema dei due circuiti all'istante t è pari a

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2, \quad [9.8.19]$$

dove i_1 e i_2 sono i valori assunti dalle correnti all'istante t .

La [9.8.19] mostra che per "caricare" i due circuiti in presenza l'uno dell'altro (quando cioè il coefficiente M di mutua induzione tra i due non è nullo), occorre fornire, oltre ai termini energetici di autoinduzione $(1/2)L_1 i_1^2$ e $(1/2)L_2 i_2^2$, anche un termine di mutua induzione pari a $M i_1 i_2$.

Il segno dei primi due termini è in ogni caso positivo (poiché positivi sono L_1 e L_2), quello del termine di mutua induzione può essere invece sia positivo che negativo, a seconda dei segni di M , i_1 e i_2 . L'energia magnetica totale associata al sistema dei due circuiti può risultare pertanto sia maggiore che minore della somma dei soli due termini di autoinduzione.

Come esempio in cui il termine di "mutua" è negativo, consideriamo due spire sovrapposte e percorse da correnti uguali e circolanti in verso opposto; se le due spire sono praticamente coincidenti, il sistema fisico da esse costituito si riduce a un'unica spira non percorsa da corrente, cui corrisponde un'energia magnetica nulla. In questo caso, è appunto il termine negativo di "mutua" che riesce a compensare la somma dei due termini di "auto"; infatti

$$L_1 = L_2 = M, \quad i_1 = -i_2 = i$$

e quindi

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - Li^2 = 0.$$

E' possibile pervenire in modo diverso all'espressione dell'energia magnetica associata a un sistema di due circuiti utilizzando i risultati del paragrafo 7.10.

A tal fine, immaginiamo presente, in un primo momento, il solo circuito γ_1 ; se esso viene "caricato" con la corrente i_1 , l'energia associata vale

$$U_{m_1} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2.$$

Supponiamo quindi di "caricare" il circuito γ_2 mantenendolo però a distanza molto grande (al limite, infinita) dal primo: in queste condizioni, l'influenza di γ_1 su γ_2 può essere trascurata e si ha

$$U_{m_2} = \frac{1}{2} L_2 i_2^2.$$

Immaginiamo infine di spostare γ_2 dall'infinito fino a una posizione prossima a γ_1 , in modo però che i_1 e i_2 si mantengano stazionarie.

Per portare γ_2 nella sua posizione finale, si dovrà compiere un lavoro meccanico, a causa dell'interazione fra le correnti, e un lavoro elettrico, per mantenere costanti le correnti durante l'avvicinamento. Il lavoro meccanico, per quanto detto nel paragrafo 7.10, risulta pari a¹¹

$$\mathcal{L} = -i_2 (\Phi'_2 - \Phi_2),$$

dove Φ_2 e Φ'_2 sono i valori del flusso Φ concatenato con il circuito γ_2 quando questo è rispettivamente all'infinito e in prossimità di γ_1 . Essendo

$$\Phi_2 = L_2 i_2,$$

$$\Phi'_2 = L_2 i_2 + Mi_1,$$

si ha

$$\mathcal{L} = -i_2 Mi_1 = -Mi_1 i_2.$$

Calcoliamo ora i lavori elettrici che dobbiamo fornire ai due circuiti (con opportuni generatori inseriti in essi) affinché le correnti non variino durante lo spostamento

¹¹ Il lavoro \mathcal{L} è per definizione quello compiuto dall'esterno contro le forze del campo e risulta perciò opposto a quello dato dalla [7.10.5].

di γ_2 . Il lavoro \mathcal{L}_1 del generatore inserito in γ_1 vale¹²

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^T i_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} dt = i_1 \Phi_{12} = M i_1 i_2,$$

indicando con T il tempo impiegato per riportare γ_2 nella sua posizione definitiva e con Φ_{12} il flusso concatenato con γ_1 e prodotto da i_2 . Analogamente, il lavoro elettrico \mathcal{L}_2 eseguito dal generatore inserito in γ_2 vale

$$\mathcal{L}_2 = \int_0^T i_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} dt = i_2 \Phi_{21} = M i_1 i_2.$$

Sommando tutti i termini di lavoro considerati e aggiungendoli alle energie U_{m_1} e U_{m_2} , si ottiene in definitiva

$$U_m = U_{m_1} + U_{m_2} + \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

Le considerazioni esposte evidenziano un nuovo significato del termine $M i_1 i_2$: esso è pari al lavoro elettrico fornito da ciascuno dei generatori inseriti nei circuiti per mantenervi costanti le correnti durante lo spostamento di γ_2 . Si noti che i due generatori forniscono complessivamente un lavoro pari a $2 M i_1 i_2$, di cui metà è trasformata in lavoro meccanico, metà immagazzinata sotto forma di energia magnetica.

L'energia magnetica U_m associata al sistema dei due circuiti può essere riscritta nella forma

$$U_m = \frac{1}{2} \Phi_{11} i_1 + \frac{1}{2} \Phi_{22} i_2 + \frac{1}{2} \Phi_{12} i_1 + \frac{1}{2} \Phi_{21} i_2,$$

con

$$\Phi_{11} = L_1 i_1, \quad \Phi_{12} = M i_2,$$

$$\Phi_{22} = L_2 i_2, \quad \Phi_{21} = M i_1.$$

Raggruppando i termini in i_1 e quelli in i_2 , si ha

$$U_m = \frac{1}{2} i_1 (\Phi_{11} + \Phi_{12}) + \frac{1}{2} i_2 (\Phi_{22} + \Phi_{21}). \quad [9.8.20]$$

Indicando infine con Φ_1 e Φ_2 i flussi, concatenati rispettivamente con γ_1 e γ_2 , prodotti contemporaneamente da tutte e due le correnti,

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21},$$

¹² Infatti per mantenere costante la corrente i_1 (al valore I_1) durante lo spostamento di γ_2 , occorre compensare, in γ_1 , la f.e.m. indotta dalla variazione del flusso Φ_{12} . A tal fine, è sufficiente inserire in γ_1 un generatore capace di fornire la f.e.m. $E = + d\Phi_{12}/dt$.

si ha

$$U_m = \frac{1}{2} (\Phi_1 i_1 + \Phi_2 i_2). \quad [9.8.21]$$

Esempio 3. N circuiti percorsi da corrente

Consideriamo ora, sulla base dei risultati esposti, il caso generico di un sistema di N circuiti, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$, percorsi dalle correnti i_1, i_2, \dots, i_N .

Ragionando come il caso precedente, immaginiamo di alimentare gli N circuiti con i generatori di f.e.m. $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_N$. Si ha allora

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_1 = R_1 i_1 + \frac{d\varphi_1}{dt} = R_1 i_1 + \frac{d}{dt} (L_1 i_1 + M_{12} i_2 + \dots + M_{1N} i_N) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \mathcal{E}_N = R_N i_N + \frac{d\varphi_N}{dt} = R_N i_N + \frac{d}{dt} (M_{N1} i_1 + M_{N2} i_2 + \dots + L_N i_N). \end{array} \right.$$

Moltiplichiamo la prima equazione per i_1 , la seconda per i_2 , e così via, sommando membro a membro tra loro; integriamo poi tra $t=0$ e il generico istante t . L'energia magnetica associata al sistema all'istante t risulta allora pari a

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \Phi_k, \quad [9.8.22]$$

ove i_k indica la corrente circolante nel circuito γ_k all'istante t e Φ_k il flusso (prodotto da *tutte* le N correnti) concatenato con tale circuito allo stesso istante. La [9.8.22] è l'estensione immediata della [9.8.21], dedotta nel caso di due soli circuiti.¹³

9.9 Densità di energia di un campo magnetico

In questo paragrafo estenderemo la [9.8.22] al caso di circuiti *non filiformi*, cercando di darne un'espressione in termini di campo.

Consideriamo un generico conduttore C percorso da corrente (vedi fig. 9.12), indicando con \mathbf{J} la densità di corrente in un suo punto generico. Immaginiamo di scomporre l'intero conduttore in tubi di flusso del vettore \mathbf{J} , di sezione infinitesima. Dette γ la linea mediana del generico tubo di flusso elementare, S_γ una superficie generica orlata da γ e di_γ la corrente elementare che percorre il tubo di flusso, applichiamo la [9.8.22] al caso in esame, trasformando la somma in un integrale esteso

¹³ Si noti la stretta analogia formale fra l'espressione [9.8.22] dell'energia magnetica associata a un sistema di correnti e l'espressione [4.9.3] dell'energia eletrostatica associata a un sistema di conduttori carichi.

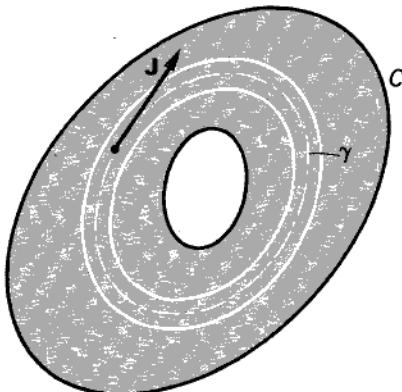


Figura 9.12

all'intero volume del conduttore. Si ha così

$$U_m = \frac{1}{2} \int d_i \gamma \iint_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \quad [9.9.1]$$

dove il primo integrale rappresenta una "somma" relativa all'insieme dei tubi di flusso elementari di \mathbf{J} e il secondo fornisce il flusso associato a ciascun tubo di flusso.

Utilizzando un potenziale vettore \mathbf{A} per descrivere il campo, si ha

$$\iint_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl$$

e quindi

$$U_m = \frac{1}{2} \int d_i \gamma \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl. \quad [9.9.2]$$

Indicando con $dS_{n\gamma}$ l'area della sezione retta del tubo di flusso γ , si ha

$$d_i \gamma = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS_{n\gamma},$$

dove \mathbf{n} è il versore della normale alla sezione retta del tubo di flusso e coincide, pertanto, con il versore \mathbf{t} utilizzato nella [9.9.2].

Risulta perciò

$$U_m = \frac{1}{2} \int J_t dS_{n\gamma} \oint_{\gamma} A_t dl,$$

indicando con J_t e A_t le componenti di \mathbf{J} e \mathbf{A} lungo \mathbf{t} , e quindi

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} J_t A_t d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d\tau, \quad [9.9.3]$$

dove τ è il volume della regione occupata dall'intero conduttore C ; la [9.9.3] ricorda l'analogia espressione usata per esprimere l'energia elettrostatica in termini di cariche e di potenziali.

Limitandoci per il momento ai casi stazionari, si ha inoltre

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

e quindi

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} d\tau. \quad [9.9.4]$$

Per una nota identità vettoriale (vedi § A.18)

$$\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{H} \times \mathbf{A} + \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{H} \times \mathbf{A} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B},$$

cosicché

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \text{div } \mathbf{H} \times \mathbf{A} d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau.$$

Applicando il teorema della divergenza al primo integrale, si ottiene

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \mathbf{H} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau, \quad [9.9.5]$$

dove Σ è la superficie che delimita τ . Per ipotesi, fuori di τ non esistono correnti e risulta pertanto

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0.$$

L'integrale nella [9.9.4] può essere dunque esteso all'intero spazio; nella [9.9.5], il primo integrale si estende allora alla "superficie all'infinito", e il secondo all'intero spazio. Osservando che, per $r \rightarrow \infty$, H tende a zero almeno come $1/r^3$ e A come $1/r^2$, si conclude che il primo integrale è nullo, cosicché

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau. \quad [9.9.6]$$

Si è ottenuta, con ciò, un'espressione dell'energia magnetica in termini di campo; anche in questo caso possiamo immaginare che l'energia sia distribuita con una densità di volume (energia per unità di volume)

$$u_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \quad [9.9.7]$$

che nel caso di mezzi lineari diventa

$$u_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}; \quad [9.9.8]$$

nel vuoto, in particolare,

$$u_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}. \quad [9.9.9]$$

9.10 Energia del campo elettromagnetico: il teorema di Poynting

Enunceremo ora, deducendola dalle equazioni di Maxwell, un'importante proprietà del campo elettromagnetico, che consente di estendere i risultati del paragrafo precedente. A tal fine, consideriamo le equazioni

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \end{cases}$$

moltiplichiamo scalarmente la prima per \mathbf{H} e la seconda per \mathbf{E} :

$$\begin{cases} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad [9.10.1]$$

Ricordando che

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

e sottraendo la seconda delle [9.10.1] dalla prima, si ottiene

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad [9.10.2]$$

Essendo, per i mezzi lineari,

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} (B^2),$$

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (E^2),$$

si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}.$$

Integrando questa equazione rispetto a un generico dominio τ , si ottiene

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\tau &= - \iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = \\ &= -\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \left(\frac{B^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau, \end{aligned}$$

e, applicando il teorema della divergenza all'integrale a primo membro,

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \left(\frac{B^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau, \quad [9.10.4]$$

dove Σ è la superficie chiusa che delimita τ . Immaginiamo ora che la regione di integrazione τ contenga anche una regione conduttrice nella quale siano presenti campi elettromotori \mathbf{E}_m (ad esempio, una pila); ricordando che ivi

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m)$$

(con g conducibilità elettrica del conduttore), si ha

$$\iiint_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = \iiint_{\tau} \eta J^2 d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} d\tau, \quad [9.10.5]$$

dove η è la resistività del mezzo.

Sostituendo tale relazione nella [9.10.4], si ottiene infine

$$\iiint_{\tau} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} d\tau = \iiint_{\tau} \eta J^2 d\tau + \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \right) d\tau + \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS. \quad [9.10.6]$$

E' questa l'espressione del *teorema di Poynting*¹⁴ secondo cui il lavoro compiuto (per unità di tempo) sulle cariche elettriche dai campi elettromotori presenti in una generica regione τ (integrale a primo membro) è uguale alla somma di tre termini: 1) la potenza dissipata per effetto Joule nel conduttore contenuto in τ ; 2) la variazione nel tempo di un termine che corrisponde alla somma delle energie associate al campo elettrico e a quello magnetico; 3) il flusso (uscente dalla superficie chiusa Σ che delimita la regione τ), del campo vettoriale

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

detto *vettore di Poynting*.

La quantità

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad [9.10.7]$$

rappresenta la densità di energia elettromagnetica (riferita al volume) come somma della densità di energia elettrica (§ 5.9) e della densità di energia magnetica (§ 9.9).

Il significato della [9.10.6], dal punto di vista energetico, può essere chiarito fa-

¹⁴ Nei casi non lineari, la [9.10.6] diventa

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_{\tau} \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau.$$

cendo riferimento al primo principio della termodinamica. A tale scopo consideriamo per semplicità il caso in cui i mezzi materiali contenuti nella regione τ non siano polarizzabili elettricamente e magneticamente ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$).

Il termine

$$\iint_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau$$

può essere interpretato come lavoro compiuto, per unità di tempo, dal campo elettrico sulle cariche libere contenute nella regione τ . La [9.10.4] può essere dunque riscritta, moltiplicando tutti i termini per dt , nella forma seguente:

$$\Phi_{\Sigma} dt + \delta \mathcal{L} + dU_{em} = 0, \quad [9.10.6']$$

dove Φ_{Σ} rappresenta il flusso di **P** uscente dalla superficie chiusa Σ , $\delta \mathcal{L}$ il lavoro effettuato dal campo elettrico, nell'intervallo di tempo elementare dt , sulle cariche contenute in τ , e dU_{em} la concomitante variazione dell'energia associata ai campi (elettrici e magnetici) presenti in τ . D'altra parte, applicando il primo principio della termodinamica alla materia contenuta in τ , si può scrivere

$$\delta \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}_g = \delta Q + dU, \quad [9.10.8]$$

dove $\delta \mathcal{L}_g$ è il lavoro compiuto nell'intervallo dt dai campi elettromotori (per ciò stesso, *non elettrici*) sui portatori di carica libera presenti in τ , $\delta \mathcal{L}$ il lavoro compiuto (sempre in dt) dal campo elettrico sulle cariche presenti in τ , e δQ e dU sono rispettivamente la quantità di calore uscente da τ nell'intervallo dt e la variazione dell'energia interna associata alla materia e quindi alle particelle contenute in τ .

Ricavando $\delta \mathcal{L}$ dalla [9.10.6'] e sostituendolo nella [9.10.8], si ottiene

$$-\Phi_{\Sigma} dt - dU_0 + \delta \mathcal{L}_g = \delta Q + dU.$$

Ponendo

$$dU_{tot} = dU + dU_{em}, \quad [9.10.9]$$

si ha

$$\delta \mathcal{L}_g = \delta Q + dU_{tot} + \Phi_{\Sigma} dt. \quad [9.10.10]$$

Tale relazione mostra che il lavoro compiuto, nel tempo dt , dai campi elettromotori agenti sui portatori di carica libera presenti nella regione τ è pari alla somma di: 1) una quantità di calore uscente, durante dt , dalla regione τ ; 2) una variazione dell'energia interna *totale* (somma dell'energia interna della materia U e dell'"energia interna" del campo U_{em}) associata a τ ; 3) un termine proporzionale (secondo il coefficiente dt) al flusso del vettore di Poynting uscente dalla superficie chiusa Σ che delimita τ .

Il flusso del vettore di Poynting corrisponde cioè a un vero e proprio termine di energia che nell'unità di tempo fuoriesce (in senso algebrico, naturalmente) dalla regione τ attraverso la sua superficie limite Σ .

Esempio

Consideriamo una semplice situazione stazionaria in cui una pila è collegata a un resistore tramite conduttori privi di resistenza. Supponiamo inoltre che il resistore sia costituito da un conduttore cilindrico di lunghezza l , sezione circolare di raggio a e resistività η . Applicando la [9.10.10] al resistore, si ha

$$0 = \delta Q + dU_{\text{tot}} + \Phi_{\Sigma} dt. \quad [9.10.11]$$

D'altra parte, il campo elettrico \mathbf{E} agente nel resistore è diretto lungo il suo asse e vale

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{J},$$

dove \mathbf{J} è la densità di corrente (supposta uniforme) nel conduttore.

Il campo magnetico \mathbf{B} è tangente alla superficie laterale del conduttore e vale, in corrispondenza di questa,

$$B(a) = \mu_0 \frac{J\pi a^2}{2\pi a} = \mu_0 \frac{Ja}{2};$$

il vettore di Poynting è quindi diretto radialmente verso l'interno del conduttore ed è pari a

$$\mathcal{P} = E \frac{B}{\mu_0} = \eta J^2 \frac{a}{2};$$

Integrando \mathcal{P} sulla superficie totale del cilindro conduttore, si ha

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = -\eta \pi a^2 I J^2 = -R I^2, \quad [9.10.12]$$

dove R indica la resistenza del conduttore e I la corrente che lo percorre.

Sostituendo la [9.10.12] nella [9.10.11], si ottiene infine

$$dt \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = R I^2 dt = \delta Q,$$

e il bilancio energetico si può considerare verificato pensando che il campo "alimenta" il conduttore mediante il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie chiusa che lo delimita. E' questo un caso in cui il flusso di \mathbf{P} uscente dalla superficie chiusa Σ è *negativo*, e ciò perché attraverso Σ il campo trasporta potenza verso *l'interno di Σ* .

Si intuisce che negli altri casi, quando cioè il flusso di \mathbf{P} uscente da Σ risulta positivo, esiste un vero e proprio termine di potenza "irradiata" verso l'esterno dal sistema fisico contenuto in τ .

*9.11 Quantità di moto del campo elettromagnetico

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, applicando il primo principio della termodinamica a un sistema fisico in cui si abbiano interazioni elettromagnetiche, occorre tener conto non soltanto dell'energia interna della materia contenuta nel sistema, ma anche di quella associata allo spazio vuoto, sede del campo elettromagnetico. Il campo assume cioè, dal punto di vista energetico, un ruolo simile a quello della materia.

Tale analogia non è però la sola: vedremo infatti in questo paragrafo che il campo è dotato anche di quantità di moto, alla stregua d'un corpo materiale.

Consideriamo un sistema costituito da un "continuo" di particelle materiali, dotate di carica elettrica, mobili in una regione Ω di spazio vuoto e supponiamo che esse interagiscano soltanto per via elettromagnetica. Dette ρ e \mathbf{J} , rispettivamente, le densità di volume di carica e di corrente, la forza specifica (per unità di volume) agente sulla materia contenuta in Ω può essere espressa come

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad [9.11.1]$$

dove \mathbf{E} e \mathbf{B} indicano il campo elettrico e il campo magnetico prodotti dalle cariche presenti entro Ω . Dimostreremo, in questo paragrafo (vedi p. 400) che la forza totale \mathbf{F} agente su tutta la materia contenuta in Ω può essere espressa come

$$\mathbf{F} = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} d\tau = - \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{P} d\tau + \iint_{\Sigma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS, \quad [9.11.2]$$

dove Σ è la superficie chiusa che delimita Ω , \mathbf{P} è il vettore di Poynting, e $\boldsymbol{\tau}$ è un opportuno tensore, detto *tensores degli sforzi elettromagnetico*, rappresentato dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \epsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) & \epsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y & \epsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} B_x B_z \\ \epsilon_0 E_y E_x + \frac{1}{\mu_0} B_y B_x & \epsilon_0 E_y^2 + \frac{1}{\mu_0} B_y^2 - \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) & \epsilon_0 E_y E_z + \frac{1}{\mu_0} B_y B_z \\ \epsilon_0 E_z E_x + \frac{1}{\mu_0} B_z B_x & \epsilon_0 E_z E_y + \frac{1}{\mu_0} B_z B_y & \epsilon_0 E_z^2 + \frac{1}{\mu_0} B_z^2 - \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \end{bmatrix}$$

o, sinteticamente, da

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \delta_{ij}, \quad [9.11.3]$$

dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker (vedi § A.6). Nella [9.11.2], il prodotto scalare tra $\boldsymbol{\tau}$ e il versore \mathbf{n} indica un vettore \mathbf{T} di componenti

$$T_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

L'integrale di superficie di $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ va inteso come flusso di \mathbf{T} . Per il momento, supponiamo dimostrata la [9.11.2], e cerchiamo di trarne alcune conseguenze.

La forza \mathbf{F} espressa dalla [9.11.2] non deve variare se il variare del dominio Ω (e della superficie Σ), purché Ω continui a racchiudere la stessa materia, senza includerne o escluderne altra. Ne deriva che in ogni caso è possibile estendere la regione Ω in misura tale che i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} diventino trascurabili sulla superficie Σ .¹⁵ La [9.11.2] diviene allora

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_{\infty}} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{P} d\tau, \quad [9.11.4]$$

dove l'integrale è esteso all'intero spazio (indicato con Ω_{∞}). Osserviamo che \mathbf{F} rappresenta la risultante di tutte le interazioni reciproche fra le particelle cariche costituenti il sistema. Com'è noto, la risultante delle forze agenti su un sistema eguala in ogni istante la derivata temporale della quantità di moto del sistema stesso; si ha cioè

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad [9.11.5]$$

dove

$$\mathbf{Q} = \iiint_{\Omega} \rho_{\text{mat}} \mathbf{v} d\tau,$$

con ρ_{mat} densità di volume di materia nei punti del sistema, e \mathbf{v} velocità di ciascun punto materiale.

Per il sistema in esame, si ha dunque

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_{\infty}} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{P} d\tau. \quad [9.11.6]$$

In generale, quando i campi variano nel tempo, il secondo membro della [9.11.6] è diverso da zero; soltanto nei casi statici (elettrostatici e magnetostatici) esso si annulla. Ciò significa che di solito, pur essendo il sistema fisico isolato (nel senso che non subisce l'influenza di alcun altro sistema), la quantità di moto totale della materia in esso contenuta non è costante nel tempo, cioè non si conserva. Ciò accade perché, come vedremo meglio nel prossimo capitolo, l'interazione elettromagnetica non rispetta il principio di uguaglianza fra azione e reazione che, come è noto, è alla base della conservazione della quantità di moto di un sistema isolato.

La [9.11.6] può essere riscritta nella forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{Q} + \iiint_{\Omega_{\infty}} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{P} d\tau \right) = 0. \quad [9.11.6']$$

¹⁵ A causa della propagazione delle onde elettromagnetiche (vedi cap. 10), i campi, in questo caso, non tendono a zero, per $r \rightarrow \infty$, "almeno come r^{-2} " (come avviene nei casi statici); tuttavia, tenendo conto della velocità finita di propagazione delle onde elettromagnetiche, è sempre possibile scegliere una superficie Σ di raggio così grande che il campo non vi sia ancora giunto.

E' naturale allora introdurre una *quantità di moto del campo elettromagnetico*

$$\mathbf{Q}_{\text{em}} = \iiint_{\Omega_{\infty}} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{P} d\tau, \quad [9.11.7]$$

ed enunciare un *principio esteso di conservazione della quantità di moto*, secondo cui *in un sistema isolato la somma delle quantità di moto della materia e del campo elettromagnetico è costante*:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{\text{em}}) = 0. \quad [9.11.8]$$

La realtà fisica della quantità di moto attribuita allo spazio vuoto, sede del campo elettromagnetico, è confermata dal fatto che un campo elettromagnetico, investendo un corpo, esercita su di esso una vera e propria pressione (*pressione di radiazione*), alla stregua di un fascio di particelle materiali (vedi § 10.9).

Osservazione. Riscrivendo la [9.11.2] nella forma

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} d\tau + \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{P} d\tau,$$

si nota che il tensore elettromagnetico \mathbf{T} agisce analogamente al tensore (meccanico) degli sforzi in un corpo materiale, determinando, mediante il suo flusso attraverso la superficie del sistema, la variazione della quantità di moto totale (pari a quella della materia più quella del campo) di quest'ultimo. Nei casi stazionari, il secondo termine si annulla e il flusso del tensore elettromagnetico coincide con la risultante delle forze applicate alla materia contenuta nel sistema. Ciò può essere un metodo efficace per calcolare tale risultante, nei casi in cui non si conosca in dettaglio la composizione del sistema racchiuso dalla superficie Σ , ma sia nota la distribuzione del campo su di essa.

Dimostriamo ora la [9.11.2]. Tenendo conto delle equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{cases}$$

la [9.11.1] può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B};$$

ne consegue

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \\ &= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} = \\ &= \epsilon_0 \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \epsilon_0 \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad [9.11.9]$$

Vale inoltre la seguente identità vettoriale (ricavata dall'espressione cartesiana di $\operatorname{div} \mathbf{E}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ ed estendibile a tutte le componenti):

$$E_x \operatorname{div} \mathbf{E} - (\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z)$$

Proiettando la [9.11.9] sull'asse x e facendo uso della precedente identità (e dell'analogia, scritta per \mathbf{B}), si ottiene

$$\begin{aligned} f_x = & -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \frac{\epsilon_0 E^2 + B^2}{2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} B_x B_z \right). \end{aligned}$$

Analoghe equazioni si otterranno proiettando la [9.11.9] sugli assi y e z . Risulta dunque

$$\mathbf{f} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{T},$$

dove \mathbf{T} è dato dalla [9.11.3]. Integrando al volume Ω , e applicando il teorema della divergenza, si ottiene la [9.11.2]. ■

9.12 Un teorema di unicità per il campo elettromagnetico

Il teorema di Poynting (vedi § 9.10), consente di dimostrare alcuni teoremi di unicità per le equazioni del campo elettromagnetico (equazioni di Maxwell e relazioni costitutive) di indubbia utilità nelle applicazioni.

Enunciamo in primo luogo il seguente teorema, valido per i mezzi materiali a comportamento lineare:

In una regione finita Ω , occupata da un mezzo lineare di caratteristiche fisiche (ϵ , μ , γ) note e delimitata da una superficie chiusa Σ , il campo elettromagnetico (espresso mediante i vettori \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H}) è univocamente determinato, per ogni istante $t > 0$, quando siano assegnate:¹⁶

- la distribuzione entro Ω , per ogni $t > 0$, dei campi elettromotori \mathbf{E}_m eventualmente presenti;*
- la distribuzione, per ogni $t > 0$, del componente tangente \mathbf{E}_t del campo elettrico sulla superficie Σ , oppure del componente tangente \mathbf{B}_t del campo magnetico, o ancora di \mathbf{E}_t su una parte di Σ e di \mathbf{B}_t sulla rimanente parte;*
- la distribuzione, all'istante $t = 0$, del campo elettromagnetico in tutti i punti di Ω .*

¹⁶ Si suppone che tutti i campi vettoriali citati siano continui entro Ω , per ogni $t > 0$, insieme con le loro derivate prime spaziali e temporali.

Per dimostrare il teorema, consideriamo due generiche soluzioni delle equazioni di Maxwell che soddisfino a tutte le condizioni enunciate, e verifichiamo che esse coincidono. Siano $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{H}_1$ e $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{H}_2$ le due soluzioni e

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{d} = \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{h} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1,$$

la loro differenza.

Si verifica subito che le equazioni di Maxwell e le relazioni costitutive sono soddisfatte anche dai campi "differenza"

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \\ \mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e} \\ \mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \\ \mathbf{j} = \gamma \mathbf{e} \end{array} \right. \quad [9.12.1]$$

dove $\mathbf{j} = \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1$ è la differenza fra le densità di corrente di conduzione nei due casi.¹⁷

I campi differenza verificheranno pertanto il teorema di Poynting nella forma seguente:

$$\iiint_{\Omega} \left(\mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) d\tau + \iiint_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J} d\tau + \iint_{\Sigma} \mathbf{e} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad [9.12.2]$$

Ricordando che le due soluzioni devono verificare entrambe la condizione (b) dell'enunciato, si conclude che \mathbf{e}_t (oppure \mathbf{b}_t) è nullo su Σ . D'altra parte,

$$\mathbf{e} \times \mathbf{h} = (\mathbf{e}_t + e_n \mathbf{n}) \times (\mathbf{h}_t + h_n \mathbf{n}),$$

e quindi

$$\mathbf{e} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t \cdot \mathbf{n} \quad [9.12.3]$$

(poiché gli altri prodotti misti sono nulli).

Dovendo, per ipotesi, essere $\mathbf{e}_t = 0$ su Σ (oppure, $\mathbf{h}_t = 0$), il flusso del vettore di Poynting nella [9.12.2] risulta nullo. Pertanto

$$\iiint_{\Omega} \left(\mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) d\tau = - \iiint_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J} d\tau,$$

e, utilizzando le relazioni costitutive,

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon e^2 + \frac{b^2}{\mu} \right) d\tau = - \iiint_{\Omega} \gamma e^2 d\tau. \quad [9.12.4]$$

¹⁷ Nel ricavare la $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{e}$, si è utilizzata per entrambe le soluzioni l'ipotesi (a) dell'enunciato (cioè che i campi \mathbf{E}_m siano identici nei due casi).

Essendo la regione Ω fissa, si ha infine

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\epsilon e^2 + \frac{b^2}{\mu} \right) d\tau = - \iiint_{\Omega} \gamma e^2 d\tau. \quad [9.12.4']$$

All'istante $t=0$, i campi differenza sono nulli; per la condizione (c) è nullo quindi il valore dell'integrale a primo membro. D'altra parte la derivata di tale integrale è, per ogni t , negativa o al più nulla (poiché il termine a secondo membro della [9.12.4'] è certamente negativo o nullo). In ogni istante, dunque, l'integrale a primo membro non può che essere negativo o nullo; non potendo d'altronde essere negativo, poiché la funzione integranda è non negativa, esso sarà nullo. In conclusione, per ogni $t > 0$,

$$e = 0, \quad h = 0,$$

da cui l'asserto. ■

Il teorema dimostrato può essere esteso al caso di mezzi non lineari, quando le funzioni $D(E)$ e $B(H)$, che esprimono le relazioni costitutive, sono funzioni crescenti dei rispettivi argomenti¹⁸ (omettiamo la dimostrazione).

Esso, infine, vale anche se la regione Ω è suddivisa in due (o più) regioni caratterizzate da parametri ϵ, μ, σ diversi, separate da una (o più) superficie di discontinuità S , purché E e H abbiano componenti tangenziali continue in corrispondenza di S .

Esperienze illustrate

1. Semplici esperienze di fenomeni di induzione elettromagnetica

a) Gli estremi di un solenoide S costituito da molte spire di filo conduttore isolato, uniformemente avvolte (vedi fig. 9.13) sono collegati a un galvanometro balistico G ;¹⁹ quando si avvicina al solenoide un magnete permanente, il flusso concatenato con il solenoide varia nel tempo e si genera in esso una f.e.m. indotta. Questa produce nel solenoide e nel galvanometro balistico una circolazione di corrente.

Lo stesso fenomeno si verifica se, in luogo del magnete permanente, si avvicina a S un altro solenoide percorso da corrente.

b) Ogniqualvolta, aprendo o chiudendo l'interruttore T , si interrompe o si consente in flusso di corrente nel solenoide S , il galvanometro G rivela il passaggio di una corrente nel solenoide S' (vedi fig. 9.14).

c) Per misurare il valore del campo di induzione magnetica B in un generico punto

¹⁸ Una funzione vettoriale $B(A)$ è *funzione crescente* dell'argomento vettoriale A quando, per ogni coppia di vettori A_1 e A_2 (con $A_1 \neq A_2$) si ha

$$[B(A_2) - B(A_1)] \cdot (A_2 - A_1) > 0.$$

¹⁹ Il galvanometro balistico è uno strumento capace di misurare l'integrale nel tempo (il cosiddetto *impulso*) della corrente che lo attraversa (cioè la carica).

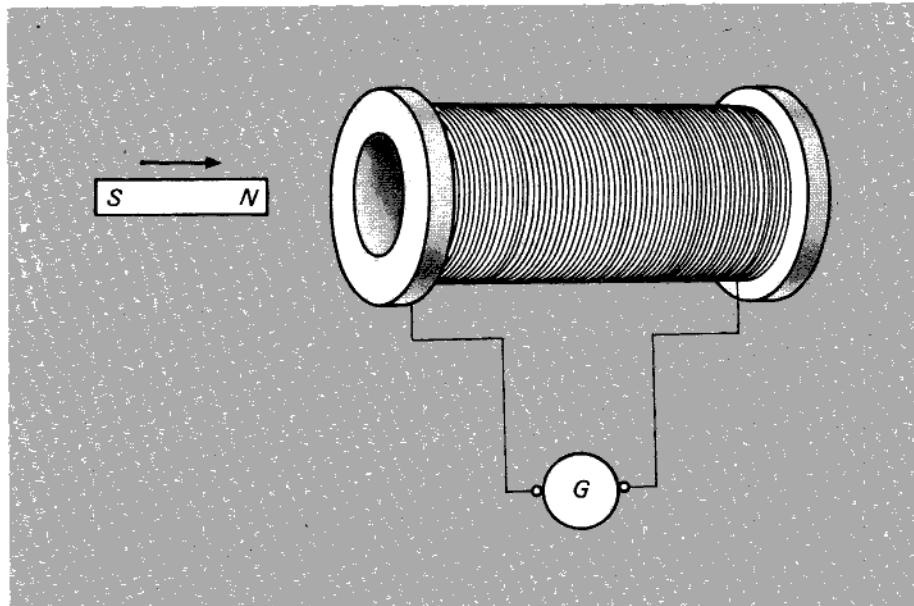


Figura 9.13

dello spazio, si possono sfruttare, anche quando \mathbf{B} è costante nel tempo, i fenomeni di induzione elettromagnetica.

Volendo determinare ad esempio il campo esistente tra le espansioni polari di un magnete (vedi fig. 9.15), inseriamo tra esse una piccola "sonda" magnetica, costituita da una bobinetta di molte spire di sezione ridotta (qualche centimetro quadro), collegata a un galvanometro balistico G . Estraendo rapidamente la bobinetta dal campo, lo strumento rivela il passaggio di un impulso di corrente. Detto $\Phi(t)$ il flusso concatenato con la sonda al generico istante t durante l'operazione di estrazione, la f.e.m. in essa indotta vale

$$e(t) = -\frac{d}{dt} \Phi(t).$$

Nella sonda (e nel galvanometro) circola dunque una corrente

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \Phi(t),$$

ove R è la resistenza del circuito comprendente la sonda e il galvanometro.

Supponendo che il movimento della sonda inizi al tempo 0 e termini al tempo τ , la carica Q misurata dallo strumento è

$$Q = \int_0^\tau i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \Phi(t) dt = -\frac{1}{R} [\Phi(\tau) - \Phi(0)].$$

Essendo $\Phi(\tau)$ nullo (perché all'istante τ la sonda è stata estratta completamente dal campo), si ha

$$Q = \frac{1}{R} \Phi(0). \quad [1]$$

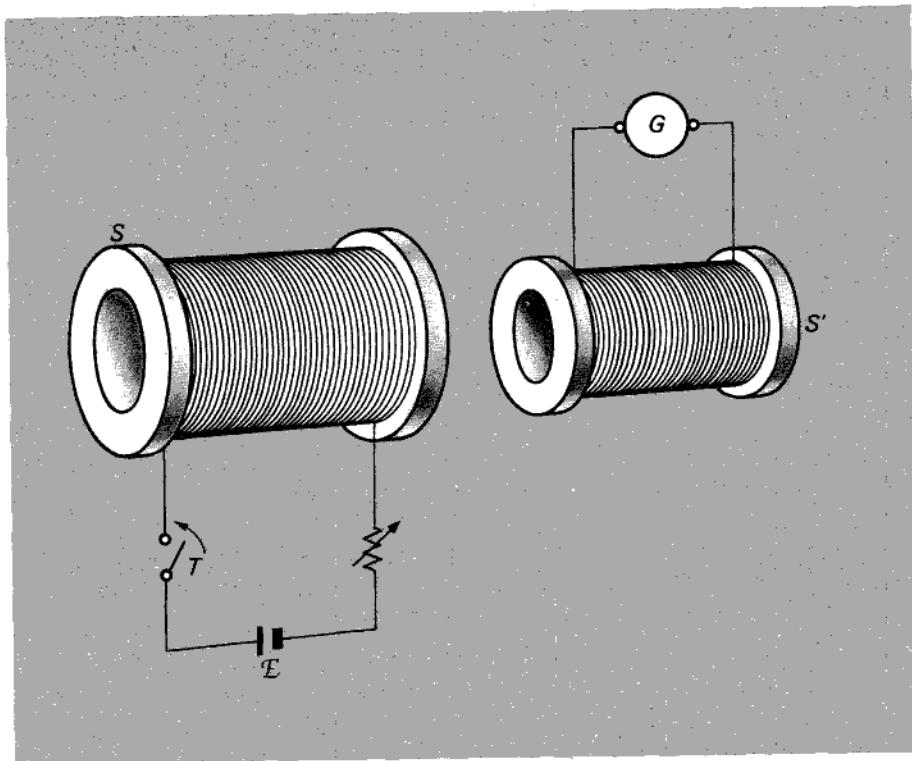


Figura 9.14

Dalla conoscenza di R e dalla lettura di Q sul galvanometro si può dunque ricavare il valore del flusso concatenato con la sonda quando questa era collocata tra le espansioni del magnete. Infine, nota l'area S della sonda, il valore di B si ottiene dalla relazione

$$B = \frac{\Phi(0)}{S}, \quad [2]$$

purché la sonda sia inizialmente perpendicolare alle linee del campo magnetico (cioè in modo da concatenarsi con il massimo flusso).

2. Il tensiometro magnetico

Sulla base dei fenomeni di induzione elettromagnetica, è possibile misurare l'integrale di linea del campo magnetico lungo una generica linea orientata, mediante un *tensiometro magnetico*.²⁰ L'uso di tale strumento consente, fra l'altro, di verificare agevolmente la legge di Ampère.

²⁰ Anche quando il campo magnetico da misurare è costante nel tempo, la misura può essere effettuata congiungendo le due estremità del tensiometro, sì da annullare Φ .

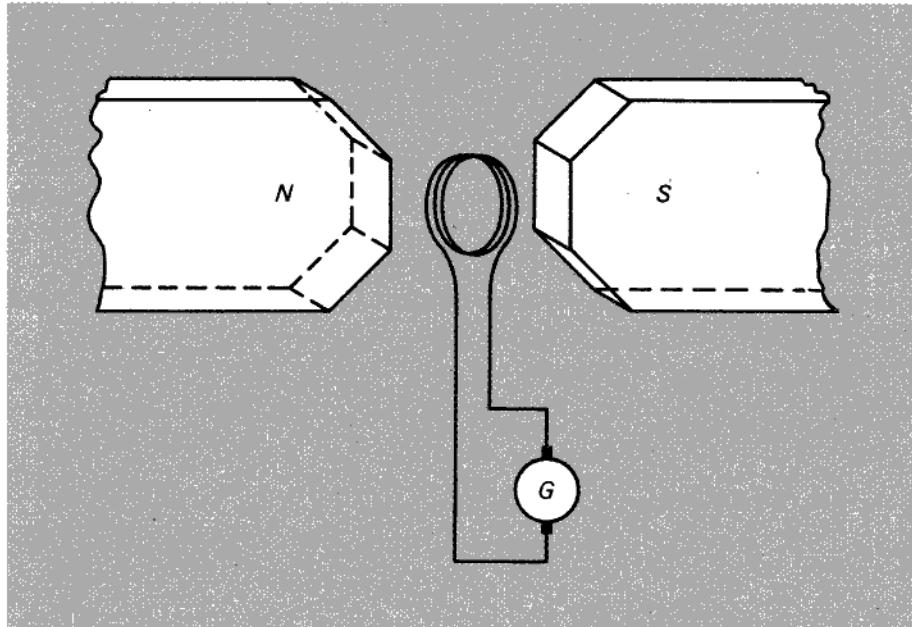


Figura 9.15

Il tensiometro magnetico è costituito da una striscia flessibile (ad esempio di cuoio), su cui è avvolto (vedi fig. 9.16) un solenoide con molte spire; queste sono avvolte uniformemente in doppio strato, in modo che gli estremi dell'avvolgimento si trovino al centro della striscia. Gli estremi dell'avvolgimento sono collegati a un galvanometro balistico. Per misurare l'integrale di linea del campo magnetico prodotto da un conduttore rettilineo percorso da corrente I lungo una generica linea γ di estremi A e B , disponiamo il tensiometro lungo di essa. In queste condizioni, l'avvolgimento dello strumento si concatena con un flusso Φ . Se la corrente viene interrotta, tale flusso si annulla e il galvanometro misura un impulso di corrente indotta:

$$Q = \int_0^\tau i(t) dt.$$

dove τ è la durata dell'intervallo di tempo in cui la corrente si estingue. Ragionando come per la misura di B , concludiamo che

$$Q = \frac{1}{R} \Phi, \quad [3]$$

dove R è la resistenza totale del circuito (comprendente tensiometro e galvanometro).

D'altra parte

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N,$$

ove Φ_k indica il flusso concatenato con la spira k -esima dell'avvolgimento. Poiché il

campo \mathbf{B} può ritenersi uniforme in ciascuna sezione del tensiometro (benché diverso da sezione a sezione), si ha

$$\Phi_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{s}_1, \quad \Phi_2 = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{s}_2, \dots, \quad \Phi_N = \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{s}_N,$$

essendo \mathbf{B}_k il vettore \mathbf{B} valutato in corrispondenza della k -esima spira e \mathbf{s}_k un vettore di modulo pari all'area S di ciascuna spira, orientato secondo la normale.

Risulta

$$\mathbf{s}_1 = S \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{s}_2 = S \mathbf{t}_2, \dots, \quad \mathbf{s}_N = S \mathbf{t}_N,$$

con \mathbf{t}_k versore della tangente all'asse del tensiometro in corrispondenza della spira k -esima e quindi

$$\Phi = S (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{t}_2 + \dots + \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{t}_N).$$

Detta infine Δl la distanza tra due spire adiacenti, si ha

$$\Phi = \frac{S}{\Delta l} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{t}_2 + \dots + \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{t}_N) \Delta l,$$

e

$$\Phi \approx \frac{S}{\Delta l} \int_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl.$$

Per la [3], si ha poi

$$\int_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \frac{\Delta l}{S} R Q; \quad [4]$$

tales espressione consente di ricavare, dalla conoscenza dei parametri geometrici del tensiometro ($\Delta l, S$) e dalla misura di Q (al galvanometro), l'integrale di linea del campo.²¹

Mediante il tensiometro magnetico si verifica agevolmente la legge di Ampère. Infatti, uniti fra loro gli estremi dell'avvolgimento in modo da realizzare una linea chiusa, è facile effettuare le seguenti esperienze.

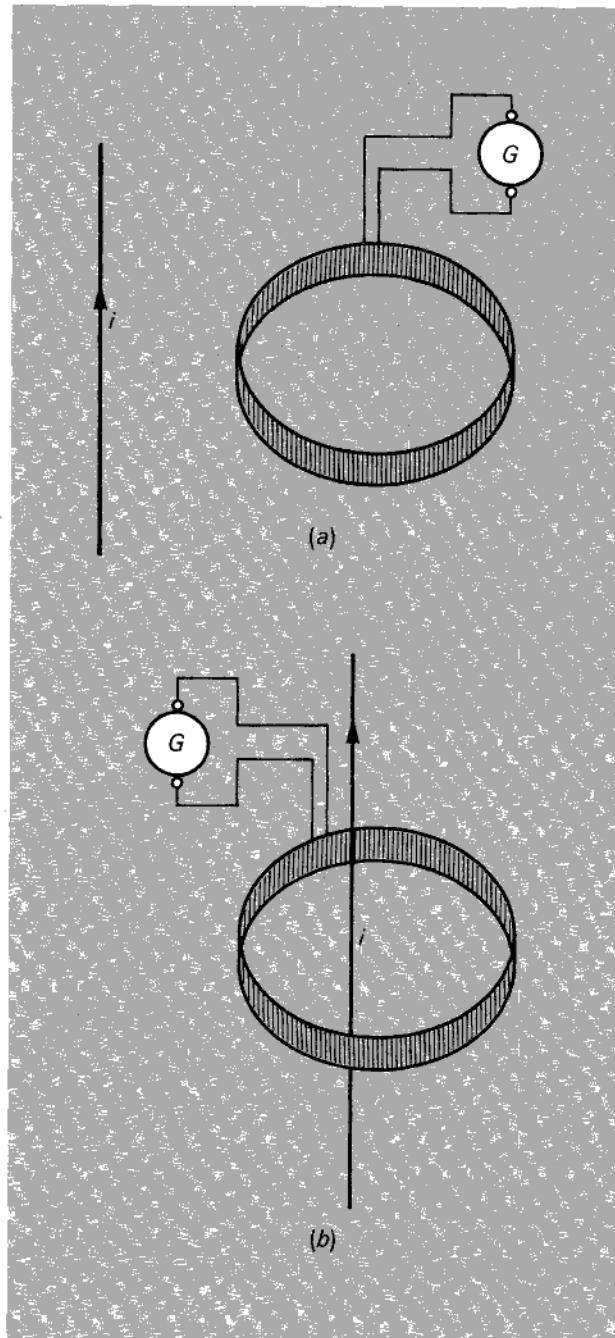
a) Se il tensiometro non è concatenato con la corrente i che crea il campo (vedi fig. 9.16a), l'annullamento di i non produce alcuno spostamento dell'indice del galvanometro G : l'integrale di linea del campo esteso a una linea chiusa non concatenata con correnti è dunque nullo.

b) Se il tensiometro è concatenato con la corrente i nel modo illustrato nella figura 9.16b, l'annullamento di i produce un impulso di corrente di valore

$$Q = \frac{\mu_0 i S}{\Delta l R}; \quad [5]$$

se ne deduce che l'integrale di linea di \mathbf{B} è pari a $\mu_0 i$.

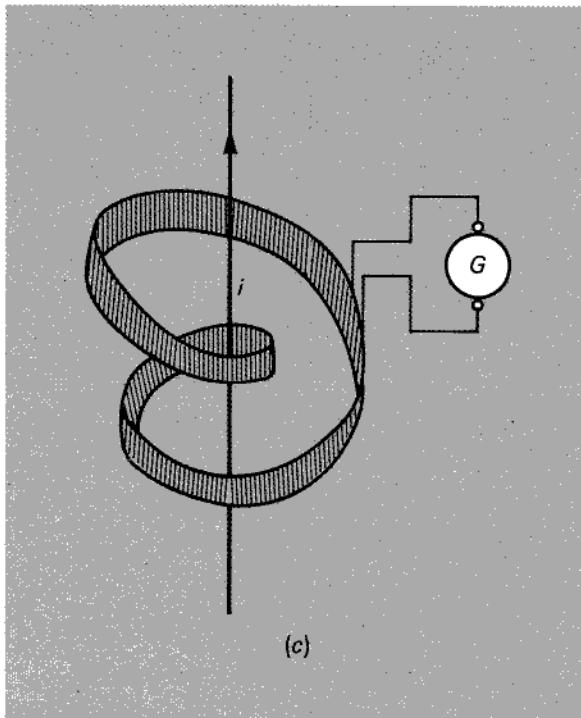
²¹ La quantità $\int_{\gamma} \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \mathbf{t} dl$ è detta *tensione magnetica* lungo la linea orientata γ .



(segue)

Figura 9.16

Verifica della legge di Ampère per mezzo di un tensiometro magnetico (a) non concatenato con i , (b) concatenato semplicemente, (c) concatenato in modo multiplo.



- c) Se il tensiometro è concatenato con la corrente i in maniera multipla (vedi fig. 9.16c), l'annullamento di i produce un impulso di corrente pari a nQ , indicando con Q il valore espresso dalla [5] e con n il numero dei concatenamenti del tensiometro con la corrente.

3. Correnti di Foucault

Quando un conduttore massiccio è investito da un campo magnetico variabile, oppure si muove in un campo (anche costante nel tempo), si generano in esso correnti indotte, dette *correnti di Foucault* (o *correnti parassite*), la cui azione è tale da opporsi alla causa che le genera. Il fenomeno è bene evidenziato dall'esperienza del *pendolo di Waltenhofen*. Un pendolo, costituito da una lastra di rame, viene posto in oscillazione tra le equazioni polari di un potente magnete (vedi fig. 9.17); non appena esso "entra" tra le espansioni, viene bruscamente frenato a causa delle correnti parassite che si inducono. Se invece il pendolo viene sagomato mediante opportuni tagli, come mostrato nella figura 9.18, l'effetto frenante si riduce drasticamente: i tagli effettuati nel conduttore riducono infatti notevolmente l'entità delle correnti parassite.

4. Un sistema oscillante

Consideriamo (vedi fig. 9.19) un sistema costituito da un avvolgimento di induttanza L e da un condensatore di capacità C collegati tra loro; supponiamo che, prima

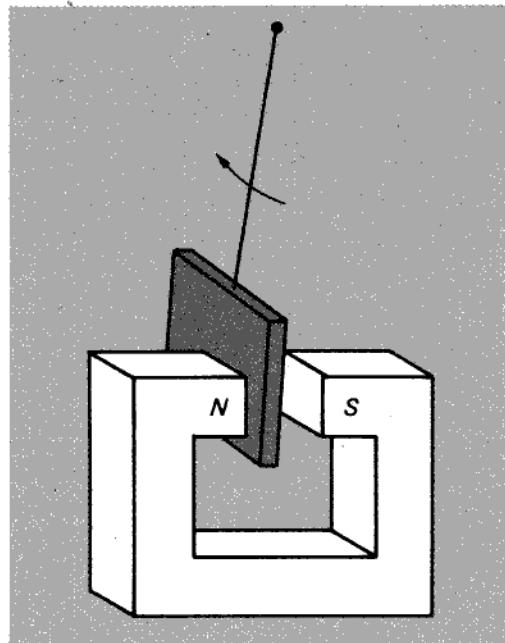


Figura 9.17

Rilevazione di correnti parassite mediante il pendolo di Waltenhofen.

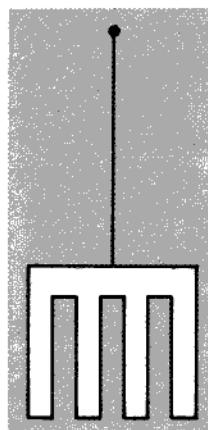


Figura 9.18

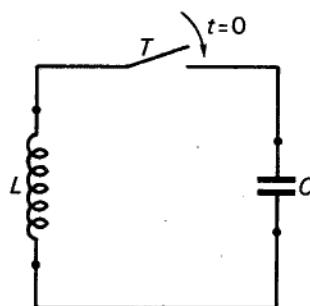


Figura 9.19
Circuito oscillante ideale.

della chiusura del tasto T , il condensatore sia carico alla tensione V_0 e l'induttore sia scarico. Ci proponiamo di studiare i fenomeni che si verificano nel circuito dopo la chiusura del tasto, trascurando gli effetti dissipativi dovuti alle resistenze presenti nel circuito.

Supponiamo inoltre di poter trascurare anche il campo magnetico fuori di L e la corrente di spostamento fuori del condensatore. Una volta chiuso il tasto, nasce nel circuito una corrente i , variabile nel tempo, che assume lo stesso valore, in un dato istante, in tutte le sezioni del circuito: essa circola come corrente di conduzione nell'induttore e nei fili di collegamento, mentre "circola" come corrente di spostamento nello spazio compreso fra le armature del condensatore.

Applichiamo la legge di Faraday-Neumann alla linea γ individuata dal circuito ("chiudendo" tale linea con un tratto che collega tra loro le armature del condensatore):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_{\gamma}}{dt}, \quad [6]$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico esistente lungo il circuito e Φ_{γ} il flusso concatenato con l'intero circuito.

D'altra parte \mathbf{E} in generale è somma di un termine rotazionale \mathbf{E}_m , dovuto ai fenomeni di induzione elettromagnetica, e di un termine irrotazionale, \mathbf{E}_q , dovuto alla distribuzione di cariche elettriche (vedi § 9.7):²²

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_q,$$

con

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_{\gamma}}{dt},$$

e

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E}_q \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Esaminiamo più dettagliatamente ciò che si verifica nel conduttore che costituisce l'avvolgimento L . Nell'ipotesi che esso sia ideale (avente cioè resistività nulla), la legge di Ohm, applicata in forma locale a un suo generico punto, fornisce

$$0 = \eta \mathbf{J} = \mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_q, \quad [7]$$

ove \mathbf{J} è la densità di corrente nel conduttore. Affinché \mathbf{J} possa mantenersi finita (come fisicamente ovvio), occorre che il campo elettrico nel conduttore sia nullo. In tutti i punti dell'induttore deve perciò essere

$$\mathbf{E}_m = -\mathbf{E}_q. \quad [8]$$

Immaginiamo ora di suddividere l'intera linea chiusa γ in due pezzi γ_1 e γ_2 : il primo corrispondente al tratto di circuito che comprende l'avvolgimento e i fili di collegamento, il secondo costituito soltanto dal tratto di linea che congiunge le armature A e B del condensatore.

Si ha subito

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

²² Il termine rotazionale corrisponde a $\partial \mathbf{A} / \partial t$, quello irrotazionale a $\text{grad } \psi$.

Nel conduttore, d'altra parte, per la [8], si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\gamma_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl,$$

e poiché, per ipotesi, fra le armature il campo indotto \mathbf{E}_m è trascurabile rispetto a \mathbf{E}_q , si conclude che

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\gamma_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\gamma_2} \mathbf{E}_q \cdot \mathbf{t} dl = V(A) - V(B), \quad [10]$$

dove $V(A)$ e $V(B)$ sono i valori del potenziale scalare associato a \mathbf{E}_q , valutato in corrispondenza delle armature A e B .

Posto

$$v_c = V(A) - V(B),$$

sostituendo la [10] nella [6], si ricava

$$v_c = - \frac{d\Phi_{\gamma}}{dt}.$$

Poiché Φ_{γ} è fornito dal campo magnetico prodotto dalla corrente nell'induttore, si ha

$$\Phi_{\gamma} = Li$$

e quindi

$$v_c = -L \frac{di}{dt}. \quad [11]$$

Detta inoltre Q la carica presente in un certo istante su un'armatura, la legge di continuità della carica (applicata a una generica superficie chiusa che racchiuda una sola armatura) fornisce

$$i(t) = \frac{dQ}{dt},$$

da cui, per definizione di "capacità",

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt}. \quad [12]$$

Sostituendo tale espressione nella [11] si ottiene

$$v_c(t) = -LC \frac{d^2 v_c}{dt^2}. \quad [13]$$

Tale equazione descrive l'andamento nel tempo della d.d.p. presente fra le armature, dopo la chiusura di T : si tratta, come si vede, della classica equazione dell'*oscillatore armonico*. Come è noto dall'analisi, il suo integrale generale può essere posto nella forma

$$v_0(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad [14]$$

con

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad [15]$$

e A e B costanti arbitrarie, da determinare in base alle condizioni iniziali del problema.
A tal fine, ricaviamo dalla [12], l'espressione della corrente $i_0(t)$ associata alla [14]

$$i_0(t) = C \frac{dv_0}{dt} = \omega CA \cos(\omega t) - \omega CB \sin(\omega t). \quad [15]$$

Imponiamo poi che (come richiesto dai dati del problema):

$$v_c(0) = V_0$$

$$i(0) = 0.$$

Si ha subito

$$v_c(0) = v_0(0) = B = V_0,$$

$$i(0) = i_0(0) = \omega CA = 0,$$

e quindi

$$A = 0,$$

$$B = V_0.$$

Sostituendo tali valori nelle [14] e [15], si ha infine

$$v_c(t) = V_0 \cos(\omega t),$$

$$i(t) = -\omega CV_0 \sin(\omega t).$$

Sia la corrente sia la d.d.p. alle armature del condensatore variano dunque periodicamente senza estinguersi nel tempo, e il sistema descritto costituisce un circuito oscillante ideale. Ciò risulta ovvio, del resto, quando si consideri che, essendo stata trascurata la resistività dei conduttori (nonché, come si vedrà meglio nel prossimo capitolo, l'energia irradiata dal sistema), l'energia elettrostatica inizialmente presente nel condensatore,

$$U_e = \frac{1}{2} CV_0^2, \quad [16]$$

deve conservarsi nel circuito. Ne deriva che, negli istanti in cui la d.d.p. alle armature si annulla (e con essa l'energia elettrostatica U_e), l'energia inizialmente presente nel circuito è localizzata nell'induttore, che deve pertanto essere "carico" (cioè percorso da corrente). Inversamente, quando l'induttore è scarico, deve risultare carico il condensatore, di modo che l'energia [16] si trasferisce continuamente dall'induttore al condensatore (e viceversa) con un periodo di oscillazione pari, per la [15], a

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad [17]$$

5. Studio di un circuito con resistenza, induttanza e capacità

Consideriamo il circuito della figura 9.20, in cui, oltre agli elementi L , C del circuito della figura 9.19, sono presenti un conduttore di resistività η finita, rappresentato in figura con il resistore R , e un generatore (vedi § 6.8) G , la cui f.e.m. E varia nel tempo con legge $E(t)$ assegnata.

Sia \mathbf{E}_m il campo elettromotore (di origine *non elettrica*) che dà origine alla f.e.m. del generatore G , si ha

$$\mathcal{E} = \int_{\gamma_G} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl, \quad [18]$$

avendo indicato con γ_G una linea, interna al generatore, che collega i suoi morsetti. Supponendo nulla la resistività η_G del mezzo contenuto nel generatore G , risulta, nei punti interni di questo (vedi [6.8.8]):

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_m = \eta_G \mathbf{J} = 0.$$

Sostituendo questa relazione nella [18], otteniamo

$$\mathcal{E} = - \int_{\gamma_G} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl. \quad [19]$$

Riprendiamo, ora, la legge di Faraday-Neumann

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = - \frac{d\Phi_{\gamma}}{dt}, \quad [20]$$

essendo γ una linea chiusa che costituisce l'asse dell'intero circuito. Suddividiamo γ in 5 parti:

γ_G , già definita,

γ_R , che costituisce il tratto di conduttore di resistività finita,

γ_L , che coincide con l'avvolgimento di induttanza L ,

γ_C , che collega le armature del condensatore (come la γ_1 dell'esperienza precedente)

γ_0 , che costituisce la restante parte del circuito, considerata di resistività nulla.

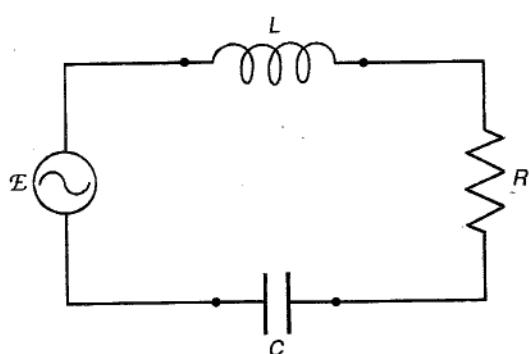


Figura 9.20

Si ha, quindi

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\gamma_G} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\gamma_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\gamma_L} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\gamma_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\gamma_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl.$$

Gli integrali estesi a γ_0 e γ_L sono nulli perché il campo \mathbf{E} è nullo in corrispondenza dei punti dei tratti di conduttore, considerati di resistività nulla; l'integrale esteso a γ_c è pari alla d.d.p. $V(A) - V(B)$ ai morsetti del condensatore (per le stesse ragioni del caso precedentemente trattato); l'integrale esteso a γ_G è pari a $-\mathcal{E}$; infine, l'ultimo integrale (esteso a γ_R) può essere riscritto, moltiplicando e dividendo per l'area S_c della sezione retta del conduttore, nella forma

$$\int_{\gamma_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\gamma_R} \frac{S_c \eta}{S_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} dl.$$

Poiché $S_c \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} = i$, essendo i l'intensità di corrente che attraversa S_c , e poiché tale corrente può essere ritenuta costante nelle diverse sezioni del circuito (al di fuori del condensatore, la corrente di spostamento è trascurabile), si ha

$$\int_{\gamma_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = i \int_{\gamma_R} \frac{\eta}{S_c} dl = R i,$$

avendo indicato con R la resistenza (vedi § 6.10) del tratto di conduttore γ_R .

Riassumendo, si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = -\mathcal{E} + R i + v_c,$$

e quindi, dalla [20],

$$-\frac{d\Phi_{\gamma}}{dt} = -\mathcal{E} + R i + v_c$$

ovvero

$$\mathcal{E} = R i + v_c + \frac{d\Phi_{\gamma}}{dt}. \quad [21]$$

Sostituendo, nella [21], $\Phi_{\gamma} = L i$, si ottiene

$$\mathcal{E} = R i + v_c + L \frac{di}{dt},$$

e, infine, ricordando la [12]:

$$\mathcal{E} = R C \frac{dv_c}{dt} + v_c + L C \frac{d^2 v_c}{dt^2}. \quad [22]$$

E', questa, l'equazione differenziale che governa il funzionamento del circuito: da essa, con opportune condizioni iniziali per v_c e dv_c/dt , è possibile determinare l'andamento della $v_c(t)$ e, da questa, a mezzo della [12], la $i(t)$.

Particolarmente interessante, per i suoi risvolti applicativi, è il caso di una $E(t)$ funzione sinusoidale del tempo:

$$E(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha). \quad [23]$$

In tal caso, la [22] diventa

$$E_M \cos(\omega t + \alpha) = LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + RC \frac{dv_c}{dt} + v_c. \quad [24]$$

Non è difficile mostrare (provvi il lettore a farlo) che l'integrale di questa equazione contiene due termini che si smorzano nel tempo, annullandosi praticamente dopo un intervallo di tempo che dipende dai valori di R , L , C , e un termine sinusoidale, alla stessa pulsazione ω del generatore, che invece non si smorza nel tempo. È chiaro, quindi, che dopo un transitorio iniziale la soluzione della [24] diventa di tipo sinusoidale. Per trovare la soluzione sinusoidale della [24], facciamo uso del *metodo simbolico* (vedi app. C).

Posto

$$E(t) = E_M e^{j(\omega t + \alpha)}, \quad [25]$$

scriviamo la funzione incognita $v_c(t)$ nella forma (simbolica)

$$\tilde{V}_c(t) = V_M e^{j(\omega t + \beta)}, \quad [26]$$

nella quale tanto V_M quanto β sono incognite.

Sostituendo le [25] e [26] nella [24], otteniamo

$$E_M e^{j(\omega t + \alpha)} = LC j \omega [j \omega V_M e^{j(\omega t + \beta)}] + RC j \omega V_M e^{j(\omega t + \beta)} + V_M e^{j(\omega t + \beta)}.$$

Eliminando il termine $e^{j\omega t}$, comune a tutti i termini, si ha

$$E_M e^{j\alpha} = -\omega^2 L C V_M e^{j\beta} + j \omega R C V_M e^{j\beta} + V_M e^{j\beta},$$

e ancora

$$V_M e^{j\beta} = \frac{E_M e^{j\alpha}}{1 - \omega^2 L C + j \omega R C} = \frac{E_M}{\sqrt{(1 - \omega^2 L C)^2 + (\omega R C)^2}} e^{j\left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{\omega R C}{1 - \omega^2 L C}\right)}.$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} V_M = \frac{E_M}{\sqrt{(1 - \omega^2 L C)^2 + (\omega R C)^2}}, \\ \beta = \alpha - \operatorname{arctg} \frac{\omega R C}{1 - \omega^2 L C}; \end{cases} \quad [27]$$

tornando nel dominio del tempo, la soluzione sinusoidale è data da

$$v_c(t) = V_M \cos(\omega t + \beta), \text{ con } V_M \text{ e } \beta \text{ date dalle [27].}$$

La corrente sinusoidale $i(t)$ è data dalla

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left[\omega t + \alpha - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \right]. \quad [28]$$

La potenza erogata dal generatore G è

$$p(t) = \mathcal{E}(t) \cdot i(t).$$

Il *valor medio nel periodo* della $p(t)$ può essere calcolato a mezzo della [C.1.14]:

$$\langle p \rangle = \mathcal{E}I \cos \varphi,$$

con

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_M}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

e φ pari all'angolo di sfasamento della corrente $i(t)$ rispetto alla $\mathcal{E}(t)$, considerato positivo quando la $i(t)$ è in ritardo rispetto alla $\mathcal{E}(t)$.

Il valor medio $\langle p \rangle$ prende il nome di *potenza attiva* (oppure, *reale*) erogata dal generatore; i valori \mathcal{E} e I sono, rispettivamente, i valori *efficaci* della $\mathcal{E}(t)$ e della $i(t)$; il $\cos \varphi$ prende il nome di *fattore di potenza* del circuito in esame.

Esercizi

9.1 Una bobina circolare costituita da 10 spire di rame è investita da un campo magnetico \mathbf{B} uniforme (vedi fig. 9.21). Il diametro D della bobina è pari a 10 cm, il diametro d del filo che la costituisce è di 1 mm e la componente di \mathbf{B} secondo la normale alla bobina varia nel tempo con legge sinusoidale:

$$B_n(t) = B_{\max} \sin(\omega t),$$

con

$$B_{\max} = 0,01 \text{ T}, \quad \omega = 314 \text{ s}^{-1}.$$

Calcolare la corrente indotta nella bobina (tralasciando il campo prodotto dalla corrente stessa).

9.2 Una bobina rettangolare di N spire ruota con velocità angolare ω costante tra le espansioni polari di un magnete (vedi fig. 9.22). Sapendo che il campo tra le espansioni polari è uniforme e ha modulo B , valutare la d.d.p. V_{AB} ai morsetti della bobina.

9.3 Una bobina di rame aperta, costituita da N spire rettangolari di lati b e h , viene fatta traslare con velocità costante v perpendicolarmente alle linee vettoriali di un campo uniforme \mathbf{B} esistente tra le espansioni polari di un magnete (vedi fig. 9.23).

Supponendo $b < L$ e $h < l$, calcolare la f.e.m. indotta nella bobina.

9.4 Il solenoide "lungo" S , formato da N spire di diametro D percorse dalla corrente

$$i(t) = I_{\max} \sin(\omega t),$$

produce al suo interno un campo pressoché uniforme. La bobina S_1 è composta da N_1 spire circolari disposte in un piano perpendicolare all'asse del solenoide. Calcolare la corrente i_1 indotta nella bobina S_1 , conoscendo il suo diametro D_1 e il diametro d_1 del filo di rame che la costituisce; trascurare il campo magnetico prodotto dalla stessa i_1 .

Confrontare inoltre in un grafico gli andamenti nel tempo della $i(t)$ e della $i_1(t)$.

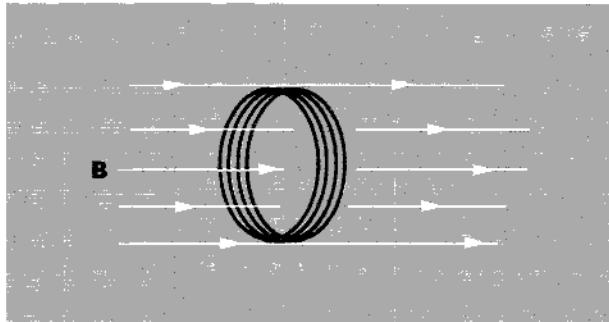


Figura 9.21

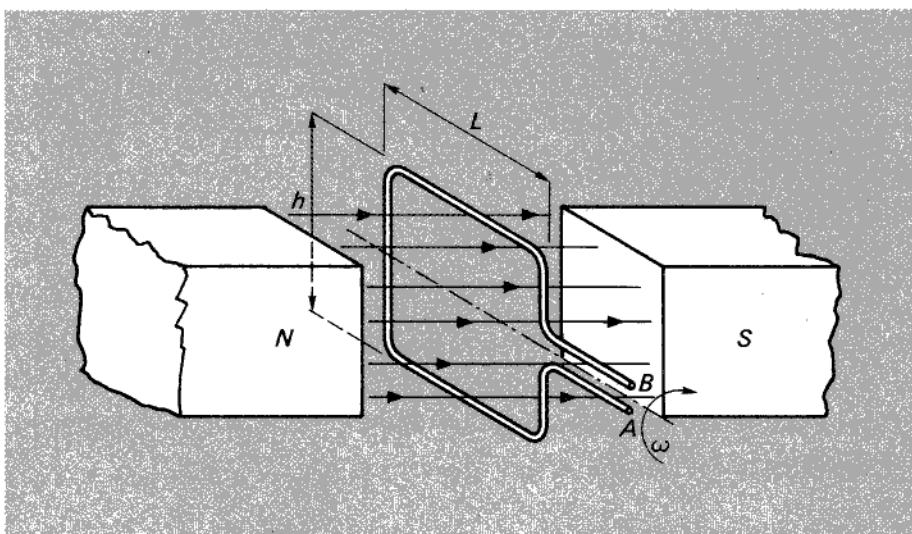


Figura 9.22

9.5 Il conduttore LL' scorre con velocità costante v sulle guide conduttrici AA' e BB' , mantenendosi perpendicolare ad esse (vedi fig. 9.24). Supponendo che perpendicolarmente al foglio agisca un campo magnetico B uniforme, calcolare:

- la f.e.m. e indotta nella spira $ALL'B$,
- la corrente i indotta nella spira stessa (supponendo costante la sua resistenza e trascurando il campo magnetico prodotto da i),
- la forza F che occorre vincere per tenere in moto il conduttore.

9.6 Un cilindro conduttore pieno, di raggio R , altezza h e resistività η è investito da un campo magnetico uniforme, diretto lungo l'asse del cilindro e di modulo B crescente linearmente nel tempo secondo la

$$B(t) = \frac{B_0}{T} t.$$

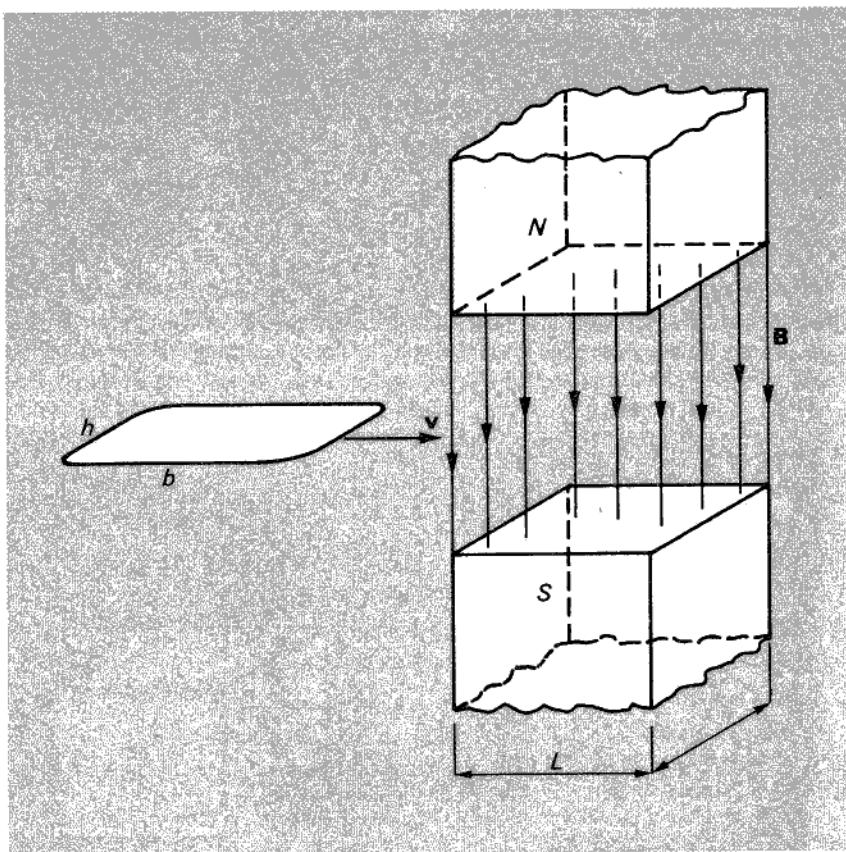


Figura 9.23

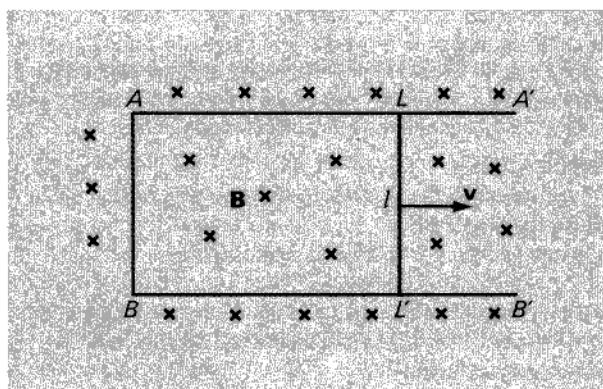


Figura 9.24

Calcolare la potenza dissipata nel cilindro per effetto Joule, a causa della circolazione in esso di correnti parassite (trascurare il campo magnetico da queste prodotto).

9.7 Dato un solenoide "lungo" costituito da N spire di sezione S , distribuite uniformemente su una lunghezza l , calcolare l'energia magnetica U_m immagazzinata nello spazio racchiuso dal solenoide quando le spire sono percorse dalla corrente i .

Esprimendo poi l'energia U_m nella forma

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2, \quad [1]$$

con L coefficiente di autoinduzione del solenoide, verificare che il valore di L deducibile dalla [1] coincide con quello che si può calcolare a partire dal flusso concatenato con il solenoide (vedi § 7.8).

9.8 Due circuiti, dotati rispettivamente di coefficienti di autoinduzione L_1 e L_2 e di mutua induzione M , si dicono *perfettamente accoppiati* quando, data la corrente i_1 in uno di essi, è possibile determinare nell'altro una corrente i_2 che renda nulla l'energia magnetica totale immagazzinata nei due circuiti. Quale condizione debbono rispettare i coefficienti L_1 , L_2 e M perché i due circuiti siano perfettamente accoppiati?

9.9 Calcolare la costante di tempo $\tau = L/R$ di un solenoide "lungo" costituito da 10 spire di diametro $D = 20$ cm, realizzate con un filo di rame di diametro $d = 1$ mm, avvolto uniformemente su una lunghezza $l = 1$ m.

Supponendo che all'istante $t=0$ nel solenoide (chiuso su sé stesso) circoli una corrente i di 1A, illustrarne con un grafico l'andamento temporale.

9.10 Nella regione cilindrica Ω indicata nella figura 9.25, riferita a un sistema di coordinate cilindriche r , z , φ , esiste un campo magnetico uniforme \mathbf{B} , che varia nel

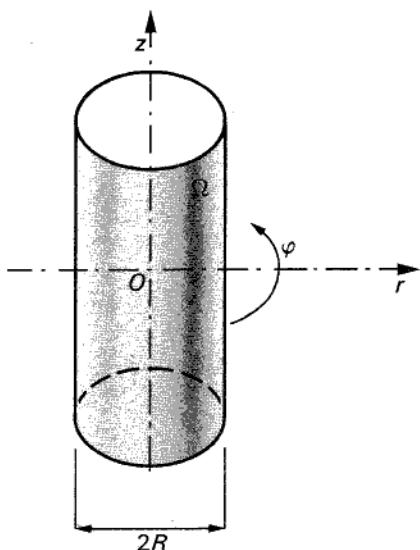


Figura 9.25

tempo secondo la legge

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{T} t \mathbf{k}$$

(con \mathbf{k} versore dell'asse z). Verificare che il campo elettrico \mathbf{E} espresso dalla

$$\mathbf{E} = \frac{B_0}{T} \pi r \mathbf{i}_\varphi$$

(con \mathbf{i}_φ versore della linea coordinata φ) soddisfa alle equazioni di Maxwell per $r \leq R$.

11. Il dielettrico di un condensatore piano ha costante dielettrica ϵ e conducibilità elettrica g . Esaminare l'andamento della d.d.p. ai morsetti del condensatore, quando questo sia lasciato isolato, dopo essere stato caricato alla tensione V_0 .

(*Suggerimento.* Essendo il condensatore isolato, non può esservi corrente ai morsetti; nel dielettrico, invece, possono esservi una corrente di conduzione e una corrente di spostamento uguali e opposte. Si ha dunque

$$gE = -\epsilon \frac{dE}{dt}.$$

L'integrale generale di questa equazione è del tipo $E = E_0 e^{-t/T}$, con $T = \epsilon/g$. Si trascura l'induzione elettromagnetica.)

12. Immaginando che le rotaie di una linea ferroviaria siano isolate tra loro e rispetto alla terra, calcolare la tensione che si manifesta tra esse al passaggio del treno; si assuma pari a $0,15 \times 10^{-4}$ T la componente verticale del campo magnetico terrestre, a 1,43 m la distanza fra le rotaie, a 120 km/h la velocità del treno.

13. Un anello di filo di rame di raggio R e sezione S ruota attorno a un asse orizzontale con velocità angolare ω , nel campo magnetico terrestre. Calcolare la potenza che si dissipa in esso per effetto Joule.

(*Suggerimento.* Tener conto della variabilità della velocità tangenziale nei diversi punti della spira.)

14. Con riferimento all'esercizio 4 del capitolo precedente, calcolare l'energia immagazzinata nel ferro e quella nell'aria.

15. Un circuito costituito da un conduttore di resistenza R e un induttore di induttanza L , posti in serie, è alimentato da un generatore di f.e.m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_M \cos \omega t$. Calcolare la corrente di regime sinusoidale che circola nel circuito.

(*Suggerimento.* Vedi esperienza illustrativa 5 di questo capitolo.)

16. Un condensatore di capacità C è caricato, attraverso una resistenza R (vedi fig. 9.26), da un generatore di f.e.m. \mathcal{E} costante nel tempo. Calcolare l'andamento nel tempo della corrente i nel circuito.

17. Una volta caricato alla tensione V_0 , il condensatore dell'esercizio precedente è chiuso su una resistenza R ; calcolare $i(t)$.

18. Calcolare l'energia W che si dissipa nel resistore durante tutto il tempo in cui circola in esso corrente (con riferimento all'esercizio 16).

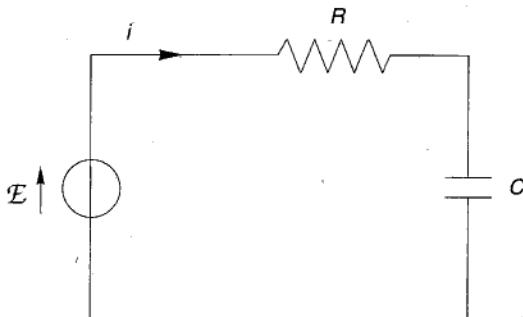


Figura 9.26

19. Il circuito della figura 9.26 è alimentato con un generatore di f.e.m. sinusoidale $E = E_M \cos \omega t$; calcolare la corrente di regime sinusoidale nel circuito e l'andamento nel tempo dell'energia immagazzinata nel condensatore (a regime).

20. Il dispositivo rappresentato schematicamente nella figura 9.27 è un *trasformatore*; supponendo di conoscere la sezione S del ferro, la sua lunghezza L , la permeabilità magnetica μ e i numeri di spire N_1 e N_2 dei due avvolgimenti, calcolare la f.e.m. E_{20} che si induce nel *secondario*, quando il *primario* è alimentato da un generatore di f.e.m. sinusoidale $E = E_M \cos \omega t$, e il secondario è aperto. Si trascuri la resistività dei fili.

(*Suggerimento*. La corrente circolante nel primario è pari a

$$i_{10}(t) = \frac{E_M}{\omega L_1} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{con } L_1 = \frac{\mu S N_1^2}{L}.$$

Essa produce un campo magnetico variabile che dà origine alla f.e.m. indotta nel secondario.)

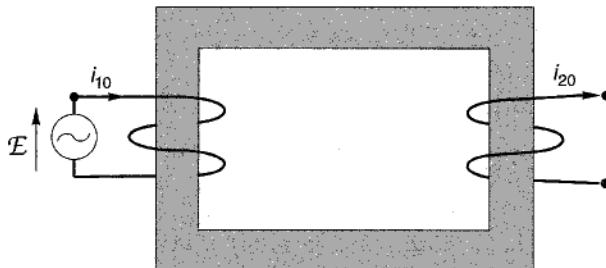


Figura 9.27

21. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare le correnti che circolano nei due avvolgimenti quando il secondario è chiuso su un resistore di resistenza R .

Capitolo 10

Onde elettromagnetiche nel vuoto

10.1 Equazione delle onde in assenza di sorgenti del campo

In questo capitolo non presenteremo nuove leggi del campo elettromagnetico, ma, facendo uso di quelle già enunciate, svilupperemo alcune considerazioni, che consentiranno da un lato di prevedere fenomeni elettromagnetici di tipo "nuovo", dall'altro di interpretare in maniera unitaria i fenomeni luminosi e quelli elettromagnetici. Il fenomeno nuovo di cui stiamo parlando è quello della *propagazione delle onde elettromagnetiche*. Come vedremo, le interazioni elettromagnetiche non sono istantanee, ma si propagano nello spazio con le caratteristiche di un'onda di velocità finita: se, in un certo punto e in un certo istante, una carica sorgente si muove, l'effetto del suo moto (se si preferisce, "l'informazione" ad esso associata) non viene avvertito in altri punti dello spazio nello stesso istante, ma solo dopo un intervallo di tempo proporzionale alla distanza dalla carica-sorgente. Tale propagazione si presenta formalmente come un'onda; essa è cioè governata da equazioni del tutto simili a quelle che descrivono la propagazione di un'onda acustica o di un'onda elastica trasversale lungo una corda tesa o, ancora, di un'onda sulla superficie di uno stagno.

L'onda elettromagnetica, tuttavia, a differenza delle altre, si propaga anche nel vuoto, dove non esiste alcun supporto materiale in grado di "vibrare". Che cos'è allora che si propaga in un'onda elettromagnetica? A questa domanda, fino alla fine del secolo scorso, si rispondeva invocando l'esistenza di un mezzo ad hoc, l'*etere cosmico*, che pervaderebbe l'intero universo. Tutte le esperienze volte a dimostrare l'esistenza dell'etere diedero però risultato negativo (famosa è rimasta l'esperienza di Michelson e Morley, del 1887; vedi capp. 12 e 13); a malincuore, si dovette accettare il fatto che un'onda elettromagnetica si propaga anche in assenza di un mezzo materiale. I fenomeni elettromagnetici si propagano "come se" esistesse un mezzo materiale, ma questo in realtà *non* esiste; a propagarsi, è soltanto il campo elettromagnetico (anche la presenza di questo è rivelabile soltanto dalla sua interazione con mezzi materiali). Si scoprì inoltre che la velocità dell'onda elettromagnetica nel vuoto è pari a

quella della luce; ciò contribuì (vedi cap. 2) a dare un'interpretazione unitaria di due tipi di fenomeni considerati fino ad allora distinti.

Per mostrare come si possa dedurre l'esistenza delle onde elettromagnetiche dalle equazioni di Maxwell, consideriamo una regione Ω dello spazio vuoto, priva di cariche libere e di correnti ($\rho = 0, \mathbf{J} = 0$, in ogni punto e in ogni istante); supponiamo inoltre che altrove esistano cariche e correnti che costituiscono le sorgenti di un campo elettromagnetico.

In ogni punto $P \in \Omega$, e per ogni t , si ha

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [10.1.1]$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad [10.1.2]$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad [10.1.3]$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad [10.1.4]$$

Applicando l'operatore "rotore" alla [10.1.2] si ha

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \text{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E},$$

e tenendo conto della [10.1.1], si ottiene

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad [10.1.5]$$

Effettuando la stessa operazione sulla [10.1.1], e sostituendo in essa l'espressione di $\text{rot } \mathbf{B}$ ricavata dalla [10.1.2], si ottiene

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad [10.1.6]$$

Ricordando inoltre l'identità vettoriale (vedi app. A)

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

e sostituendo le [10.1.3] e [10.1.4] nelle [10.1.5] e [10.1.6], arriviamo alle equazioni¹

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad [10.1.7]$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad [10.1.8]$$

¹ Tali equazioni non sono equivalenti alle [10.1.1]÷[10.1.4], in quanto ammettono soluzioni non solenoidali. Ciò deriva dal fatto che esse sono state ottenute effettuando operazioni di "rotore" (e, quindi, di derivazione) sulle equazioni di partenza. Per garantire a priori la solenoidalità di \mathbf{E} e \mathbf{B} occorre dunque completarle con l'aggiunta di ulteriori condizioni, direttamente deducibili dalle equazioni di Maxwell.

Considerato un sistema di coordinate cartesiane x, y, z , le [10.1.7] e [10.1.8] diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 E_x - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \vdots \\ \nabla^2 B_z - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right. \quad [10.1.9]$$

indicando con il simbolo ∇^2 l'operatore laplaciano (scalare) che agisce sulle componenti di \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Siamo arrivati così a un sistema di sei equazioni alle derivate parziali, formalmente identiche e indipendenti l'una dall'altra.

Per illustrare il comportamento di un campo che soddisfi alle [10.1.9], consideriamo una generica equazione del tipo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0; \quad [10.1.10]$$

supponiamo per semplicità che la funzione $f(x, y, z, t)$ assuma in ogni istante lo stesso valore in tutti i punti di un piano parallelo al piano coordinato yz , riducendosi a una funzione di x e t .² Si ha allora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad [10.1.11]$$

Ponendo

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \quad [10.1.12]$$

si giunge alla classica *equazione di D'Alembert* (detta anche *equazione delle onde*):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad [10.1.13]$$

con $c = 2,997924562 \times 10^8$ m/s. La costante c ha dunque le dimensioni di una velocità, ed è uguale in valore alla velocità della luce nel vuoto.

 Perché questa ipotesi sia verificata con buona approssimazione, è sufficiente che le sorgenti del campo siano abbastanza distanti dalla regione Ω in esame (vedi § 10.10).

Ricerchiamo ora le proprietà delle soluzioni dell'equazione d'onda. Consideriamo una generica funzione $f(\xi)$, il cui argomento (unico) ξ sia legato alle variabili x e t dalla relazione

$$\xi = x - ct,$$

(per fissare le idee, si pensi a funzioni del tipo $\sin(x - ct)$ oppure $\ln|x - ct|$).

Per tutte le coppie $(x, t), (x', t')$ tali che $x - ct = x' - ct'$ la funzione $f(x - ct)$ assume lo stesso valore:

$$f(x - ct) = f(x' - ct').$$

Calcoliamo le derivate parziali di $f(x - ct)$, vista come funzione di x e t :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t};$$

essendo

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) = -c,$$

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{df}{d\xi}.$$

Il calcolo delle derivate seconde fornisce

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{d\xi} \cdot 1 \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{d\xi} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d^2 f}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{df}{d\xi} (-c) \right] = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{df}{d\xi} (-c) \right] \frac{\partial \xi}{\partial t} = c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2}.$$

Sostituendo le espressioni ricavate per $\partial^2 f / \partial x^2$ e $\partial^2 f / \partial t^2$ nell'equazione di D'Alembert, si ha subito

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{c^2} \left(c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right) = 0.$$

L'equazione di D'Alembert è dunque verificata da *ogni* funzione di $x - ct$ che sia derivabile due volte. Lo stesso può dirsi, ragionando in modo analogo, per funzioni del tipo $f(x + ct)$.

Esempio

Posto $f(\xi) = \sin \xi$, si ha

$$\frac{df}{d\xi} = \cos \xi, \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2} = -\sin \xi,$$

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x - ct), \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -c \cdot \cos(x - ct),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x - ct), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -c^2 \sin(x - ct).$$

e la [10.1.3] è identicamente soddisfatta.

Nel seguito mostreremo che l'integrale generale della [10.1.13] è esprimibile nella forma

$$f(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct),$$

con φ e ψ funzioni arbitrarie dei rispettivi argomenti $x - ct$ e $x + ct$.

Prima, però, è utile illustrare una interessante proprietà di una generica funzione $\varphi(x - ct)$.

Immaginiamo ora che, all'istante $t = t_1$, la φ , considerata come funzione di x , abbia l'andamento riportato nella figura 10.1 (*curva tratteggiata*); in particolare φ è nulla all'esterno dell'intervallo (x_A, x_B) . Per ogni $t_2 > t_1$, ponendo $x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$, si ha

$$x_1 - ct_1 = x_1 - ct_1 + ct_2 - ct_2 = x_1 + c(t_2 - t_1) - ct_2 = x_2 - ct_2;$$

il valore dell'argomento di φ è dunque lo stesso negli istanti t_1 e t_2 , purché i corrispondenti valori di x differiscano della quantità

$$\Delta x = x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1).$$

Di conseguenza, all'istante t_2 il grafico di φ in funzione di x ha la stessa forma di quello relativo all'istante t_1 , eppero risultando traslato della distanza $\Delta x = c(t_2 - t_1)$ (vedi fig. 10.1 b): l'"onda" si sposta di moto uniforme, con velocità c .

Le stesse considerazioni possono ripetersi per la funzione $\psi(x + ct)$, solo che ora la traslazione avviene nel verso delle x *decrescenti*.³

Una rappresentazione visiva immediata del modo in cui si propaga un'onda di questo tipo è fornita da una corda tesa, fissa a un'estremità e scossa, all'altro suo estremo, con un rapido movimento della mano: si può mostrare, infatti, che il movimento trasversale dei punti della corda è retto dall'equazione di D'Alembert (con una velocità che è, ovviamente, ben diversa da c). L'esperienza mostra in maniera evidente che ciascun punto della corda oscilla trasversalmente anche se l'impressione visiva è quella di un moto longitudinale, diretto cioè lungo la corda. Analoga impressione si ha allo stadio, quando i tifosi "fanno l'onda", pur rimanendo ciascuno al suo posto.

³A conclusioni analoghe si sarebbe pervenuti considerando soluzioni della forma $\varphi(t - x/c)$ e $\psi(t + x/c)$. Nel seguito faremo riferimento indifferentemente ai due tipi di soluzioni.

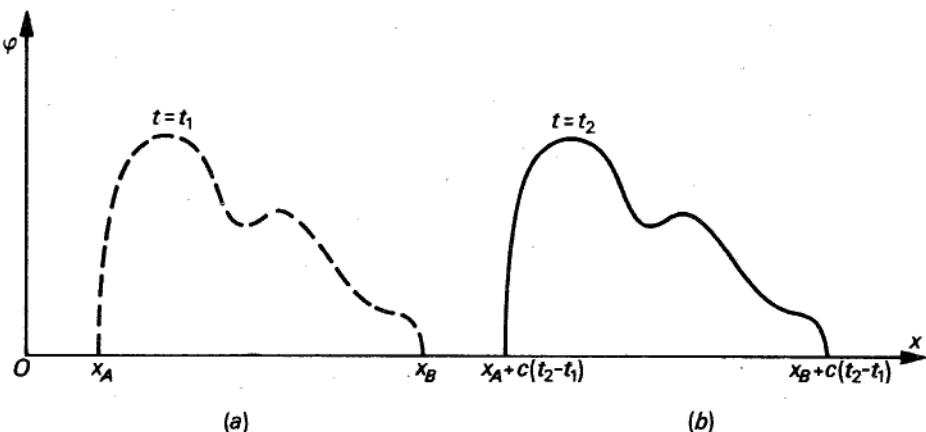


Figura 10.1

Consideriamo ora le funzioni

$$\begin{cases} \varphi_t(t, x_0) = \varphi(x_0 - ct) \\ \varphi_x(t_0, x) = \varphi(x - ct_0); \end{cases}$$

esse forniscono, rispettivamente, l'andamento temporale della φ a una data ascissa x_0 e la distribuzione spaziale della φ a un dato istante t_0 ; per questo motivo, esse sono dette rispettivamente *forma d'onda temporale* e *forma d'onda spaziale*. Si ha poi:

$$\begin{cases} \varphi_t(t, 0) = \varphi(-ct) \\ \varphi_x(0, x) = \varphi(x), \end{cases}$$

il che mostra che le due forme d'onda sono l'immagine speculare l'una dell'altra. Nel caso delle funzioni $\psi(x + ct)$, le due forme d'onda sono invece identiche.

Ricaviamo, ora, l'integrale generale dell'equazione di D'Alembert.

L'equazione delle onde [10.1.13], mediante un'opportuna trasformazione di variabili, può essere scritta in forma più semplice. Sia data infatti la trasformazione

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct, \end{cases} \quad [10.1.14]$$

insieme con la trasformazione inversa

$$\begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2} \\ t = \frac{\eta - \xi}{2c}. \end{cases} \quad [10.1.14']$$

Sostituendo, nella generica funzione $f(x, t)$, alle variabili x, t le loro espressioni [10.1.14'] in funzione di ξ, η si ottiene

$$f(x, t) = f[x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)] = g(\xi, \eta),$$

dove si sono indicati con $x(\xi, \eta)$ e $t(\xi, \eta)$ i secondi membri delle [10.1.14']. E' facile dimostrare che la [10.1.13] può essere posta nella *forma canonica*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad [10.1.15]$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{2c}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{2c} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{2c} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{2c} \right) \frac{\partial t}{\partial \eta} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{1}{2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \frac{1}{2c} \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{1}{2c} \right) \frac{1}{2c} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Di qui, l'asserto.

L'equazione [10.1.15] nelle variabili ξ e η costituisce dunque una nuova forma dell'equazione delle onde [10.1.13] che consente di esprimere immediatamente l'integrale generale. Ogni funzione $g(\xi, \eta)$ del tipo

$$g(\xi, \eta) = \hat{\varphi}(\xi) + \hat{\psi}(\eta) \quad [10.1.16]$$

(come $\hat{\varphi}$ e $\hat{\psi}$ arbitrarie) soddisfa infatti la [10.1.15]; e, reciprocamente, ogni soluzione della [10.1.15] è del tipo [10.1.16]. Di qui, sostituendo a ξ e η le loro espressioni [10.1.14] in funzione di x e t , si ottiene l'integrale generale della [10.1.13] nelle variabili x e t :

$$g[\xi(x, t), \eta(x, t)] = \hat{\varphi}[\xi(x, t)] + \hat{\psi}[\eta(x, t)] = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct), \quad [10.1.17]$$

con φ e ψ funzioni arbitrarie.

10.2 Onde piane

In questo paragrafo e nel prossimo studieremo soluzioni particolari delle [10.1.9] che presentano un forte grado di simmetria: le onde piane e le onde sferiche. Ciò, sia perché sono queste le più semplici da studiare sia perché da esse, per sovrapposizione, è possibile costruire soluzioni più generali e sia, infine, perché esse consentono di simulare con ottima approssimazione molte configurazioni sperimentali di onde elettromagnetiche.

Un'onda elettromagnetica è detta *piana* quando i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono uniformi in tutti i punti di ogni piano ortogonale a un asse fisso, detto *direzione di propagazione* dell'onda.

Per comodità, assumeremo tale asse coincidente con l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane.

L'ipotesi che l'onda sia piana implica che i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} non dipendano da due delle coordinate; ad esempio, x e y cosicché

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = 0, \quad [10.2.1]$$

in tutti i punti e in ogni istante. Sostituendo tali condizioni nelle [10.1.9], otteniamo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad [10.2.2]$$

La condizione di solenoidalità di \mathbf{E} e \mathbf{B} , espressa in coordinate cartesiane e tenendo conto delle [10.2.1], fornisce

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad [10.2.3]$$

Proiettando sull'asse z le altre due equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

e tendendo conto delle [10.2.1], si ha

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0. \quad [10.2.4]$$

In base alle [10.2.3] e [10.2.4], si conclude che le componenti E_x e B_z sono indipendenti, oltre che da x e da y (come discende dall'ipotesi di onda piana), anche da z e da t : in tutto lo spazio e in ogni istante, esse si riducono a costanti e non partecipano al fenomeno di propagazione. Pertanto, nella descrizione della propagazione delle onde piane *nel vuoto*, le componenti del campo nella direzione di propagazione possono essere ignorate: *in ogni punto e in ogni istante i vettori \mathbf{E} e \mathbf{B} sono ortogonali alla direzione di propagazione* (l'onda è puramente trasversale).

Questo notevole risultato, non contenuto nelle [10.2.3], è stato ricavato imponendo che i campi soddisfino alle equazioni di Maxwell (come precisato in § 10.1, n. 1).

Osservazione. Le quattro equazioni cui siamo pervenuti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right. \quad [10.2.5]$$

sono indipendenti. In base ad esse, sembrerebbe pertanto lecito immaginare un'onda elettromagnetica in cui esista, ad esempio, la sola componente E_x e le altre tre componenti siano nulle. Ciò non è invece possibile: per le equazioni di Maxwell, risulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} = - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}. \end{array} \right. \quad [10.2.6]$$

Dunque, se esiste una componente E_x deve esservi anche, per la prima delle [10.2.6], una componente B_y ; analogamente, se esiste una componente E_y , deve essere presente una componente B_x . Come si vede, anche questo importante risultato non poteva essere ricavato dalle sole [10.2.2]: per ottenerlo, è stato necessario ricorrere direttamente alle equazioni di Maxwell.

Data la linearità delle equazioni del campo elettromagnetico nel vuoto, la sovrapposizione di più soluzioni costituisce ancora una soluzione.

Se si sovrappongono due onde piane che si propagano in direzioni diverse, l'onda risultante non è in generale piana. Quando, invece, le due onde si propaghino nella stessa direzione, l'onda risultante rimane piana e si propaga anch'essa nella direzione delle due (provvi il lettore a dimostrarlo). In generale, una qualunque onda piana propagantesi, ad esempio, lungo l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane (e dotata di componenti E_x, E_y, B_x, B_y non nulle) può essere considerata come sovrapposizione di due onde piane, di cui la prima ha il vettore elettrico diretto lungo l'asse x e il vettore magnetico lungo l'asse y , la seconda il vettore elettrico diretto lungo l'asse y e il vettore magnetico lungo l'asse x . Analizziamo, per cominciare, la *prima* onda. Dovendo ciascuna componente del campo elettromagnetico soddisfare l'equazione di D'Alembert, gli integrali generali delle equazioni relative a E_x e B_y possono essere scritti nella forma

$$\begin{cases} E_x(z, t) = \varphi_E(z - ct) + \psi_E(z + ct) \\ B_y(z, t) = \varphi_B(z - ct) + \psi_B(z + ct), \end{cases} \quad [10.2.7]$$

con $\varphi_E, \psi_E, \varphi_B, \psi_B$ funzioni arbitrarie. D'altra parte, $E_x(z, t)$ e $B_y(z, t)$ devono verificare le [10.2.6]; pertanto, sostituendo le [10.2.7] nelle [10.2.6], si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_E}{d\xi} + \frac{d\varphi_E}{d\eta} &= - \left[\frac{d\varphi_B}{d\xi}(-c) + \frac{d\psi_B}{d\eta}(c) \right] \\ \frac{d\varphi_B}{d\xi} + \frac{d\psi_B}{d\eta} &= - \frac{1}{c^2} \left[\frac{d\varphi_E}{d\xi}(-c) + \frac{d\psi_E}{d\eta}(c) \right]. \end{aligned}$$

Ricavando $d\varphi_B/d\xi$ e $d\psi_B/d\eta$ da tali relazioni, si ha

$$\frac{d\varphi_B}{d\xi} = \frac{1}{c} \frac{d\varphi_E}{d\xi}, \quad \frac{d\psi_B}{d\eta} = - \frac{1}{c} \frac{d\psi_E}{d\eta}. \quad [10.2.8]$$

Integrando (e ignorando le costanti di integrazione, inessenziali) si ottiene

$$\varphi_B(\xi) = \frac{1}{c} \varphi_E(\xi), \quad \psi_B(\eta) = - \frac{1}{c} \psi_E(\eta).$$

Sostituendo queste relazioni nelle [10.2.7], si ha

$$\begin{cases} E_x(z, t) = \varphi_E(z - ct) + \psi_E(z + ct) \\ B_y(z, t) = \frac{1}{c} \varphi_E(z - ct) - \frac{1}{c} \psi_E(z + ct). \end{cases} \quad [10.2.9]$$

Ragionando analogamente, per la *seconda* onda, di componenti E_y, B_x , risulta

$$\begin{cases} E_y(z, t) = \Phi_E(z - ct) + \Psi_E(z + ct) \\ B_x(z, t) = - \frac{1}{c} \Phi_E(z - ct) + \frac{1}{c} \Psi_E(z + ct) \end{cases} \quad [10.2.10]$$

con Φ_E, Ψ_E arbitrarie.

Le [10.2.9] e [10.2.10], considerate nel loro complesso, rappresentano la più generale onda piana propagantesi nella direzione z .

Esaminiamo ora i diversi termini nelle [10.2.9] e [10.2.10]. In particolare, è interessante il caso dell'*onda progressiva*, individuata dalle seguenti componenti del campo:

$$\begin{cases} E_x(z, t) = \varphi_E(z - ct) \\ E_y(z, t) = \Phi_E(z - ct) \\ B_x(z, t) = -\frac{1}{c} \Phi_E(z - ct) \\ B_y(z, t) = \frac{1}{c} \varphi_E(z - ct). \end{cases} \quad [10.2.11]$$

e quello dell'*onda regressiva*, individuata dalle

$$\begin{cases} E_x(z, t) = \psi_E(z + ct) \\ E_y(z, t) = \Psi_E(z + ct) \\ B_x(z, t) = \frac{1}{c} \Psi_E(z + ct) \\ B_y(z, t) = -\frac{1}{c} \psi_E(z + ct). \end{cases} \quad [10.2.12]$$

I vettori **E** e **B** di ciascuna delle onde [10.2.11] e [10.2.12] sono ortogonali tra loro e alla direzione del moto (individuata, nel caso in esame, dal versore i_z dell'asse z): infatti il prodotto scalare tra i due vettori,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = E_x B_x + E_y B_y,$$

è nullo in entrambi i casi. I vettori **E**, **B** e i_z costituiscono inoltre, nell'ordine, una terna destrorsa.

Infine, il rapporto tra i moduli dei due vettori **E** e **B**, per ciascuno dei due tipi di onde, è costante e pari a c . Per le onde progressive si ha infatti

$$\frac{E^2}{B^2} = \frac{E_x^2 + E_y^2}{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\varphi_E^2(z - ct) + \Phi_E^2(z - ct)}{\frac{1}{c^2} \Phi_E^2(z - ct) + \frac{1}{c^2} \varphi_E^2(z - ct)} = c^2; \quad [10.2.13]$$

lo stesso dicasi per le onde regressive.

Dalla [10.2.13], si trae inoltre (ricordando la [10.1.12]):

$$\frac{E}{H} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

La quantità

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 377 \Omega$$

è detta *impedenza caratteristica* del vuoto.

Si noti che l'ortogonalità di \mathbf{E} e \mathbf{B} e la relazione

$$\frac{E}{H} = Z_0 \quad [10.2.13']$$

non valgono in generale per un'onda piana che sia costituita dalla sovrapposizione di un'onda progressiva e una regressiva.

Le cose dette circa le onde piane (progressive e regressive) propagantisì nella direzione z possono essere immediatamente estese alle onde che si propagano in una generica direzione orientata \mathbf{n} . Basta infatti sostituire, nelle equazioni, al posto di z la variabile $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$; avendo indicato con \mathbf{r} il raggio vettore spiccato dall'origine delle coordinate verso il punto-campo: in questo modo, una funzione del tipo $f(z - ct)$ diventa $f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - ct)$, una funzione $\varphi(t - z/c)$ diventa $\varphi(t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c)$, e così via.

10.2.1 Energia associata alle onde piane

Veniamo, ora, all'energia associata a un'onda piana; prima, però, faremo alcune considerazioni sull'energia associata a una generica onda elettromagnetica, anche *non* piana.

Riprendiamo il teorema di Poynting (§ 9.10) e ricordiamo che il flusso del vettore

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

uscente da una generica superficie *chiusa* Σ costituisce il termine che chiude il bilancio di energia relativo alla regione spaziale racchiusa da Σ . Può venire spontaneo, allora, considerare termine elementare

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$$

come l'energia che attraversa (in senso algebrico), nell'unità di tempo, la superficie elementare dS di normale orientata \mathbf{n} . In questo modo, il modulo di \mathbf{P} viene ad assumere il significato fisico di quantità di energia che attraversa, nell'unità di tempo e per unità d'area, una superficie ortogonale, nel punto-campo considerato, al vettore stesso. A tale grandezza si dà il nome di *intensità istantanea* dell'onda, ponendo

$$i_{\text{em}} = |\mathbf{P}|. \quad [10.2.14]$$

Essa varia nel tempo e nello spazio, mantenendosi comunque non negativa.

E' bene però osservare che questa attribuzione di un significato energetico locale al vettore di Poynting è in una certa misura arbitraria. Infatti, se si considera un campo

$$\mathbf{P}' = \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{P}_0$$

essendo \mathbf{P}_0 un *arbitrario* campo solenoidale, si ha subito

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{P}' \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS,$$

per una generica superficie chiusa Σ . Pertanto, anche \mathbf{P}' può chiudere il bilancio energetico relativo alla regione delimitata da Σ , allo stesso modo che il vettore di Poynting \mathbf{P} . A voler attribuire anche a \mathbf{P}' (come fatto per \mathbf{P}) un significato locale, ci si troverebbe costretti ad ammettere che attraverso un dato elemento di superficie dS pas-

sino due quantità d'energia

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{e} \quad \mathbf{P}' \cdot \mathbf{n} dS$$

diverse tra loro, il che è evidentemente privo di senso fisico. In conclusione, è del tutto legittimo applicare il teorema di Poynting a una superficie chiusa, ma occorre cautela nell'attribuire un significato energetico *locale* al vettore di Poynting, poiché ciò può portare a conclusioni fisiche inaccettabili.

Venendo ora alle onde piane (progressive o regressive), dalla [10.2.13] si trae:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0},$$

e quindi, ricordando la [9.10.7]:

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2. \quad [10.2.15]$$

Si ha inoltre:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH \mathbf{n} = \frac{E^2}{Z_0} \mathbf{n} = \epsilon_0 E^2 c \mathbf{n} = u_{\text{em}} c \mathbf{n}, \quad [10.2.16]$$

avendo indicato con \mathbf{n} il versore della direzione (ortogonale al piano contenente \mathbf{E} e \mathbf{H}) di propagazione dell'onda. La [10.2.16] consente di identificare, in questo caso, il vettore di Poynting con un vettore *densità di corrente di energia elettromagnetica* \mathbf{J}_{em} , definito dalla

$$\mathbf{J}_{\text{em}} = \mathbf{P} = u_{\text{em}} c \mathbf{n}. \quad [10.2.17]$$

E' possibile allora immaginare l'onda elettromagnetica come costituita da tanti volumetti elementari viaggianti alla velocità c , che trasportano l'energia.

In questa prospettiva, il teorema di Poynting, applicato a una regione di vuoto Ω priva di sorgenti, può essere riscritto nella forma

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} d\tau + \iint_{\Sigma} \mathbf{J}_{\text{em}} \cdot \mathbf{n}_1 dS = 0, \quad [10.2.18]$$

dove \mathbf{n}_1 è il versore della normale a Σ , oppure, in forma locale:

$$\text{div}(u_{\text{em}} c \mathbf{n}) + \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = 0, \quad [10.2.19]$$

che è la classica *equazione di continuità*, esprimente la conservazione locale dell'energia elettromagnetica.

E' bene però sottolineare che questa suggestiva interpretazione è possibile, a rigore, solo per le onde piane e in pochi altri casi (come vedremo più avanti).

10.3 Onde sferiche

Nei paragrafi precedenti, la propagazione delle onde elettromagnetiche è stata descritta in termini dei vettori \mathbf{E} e \mathbf{B} . E' naturale che agli stessi risultati si possa arrivare anche scrivendo le equazioni del campo in termini dei potenziali (scalari e vettori).

Sappiamo (vedi § 9.6) che imponendo ai potenziali del campo la condizione di Lorentz, si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J. \end{cases} \quad [10.3.1]$$

In questo paragrafo studieremo le soluzioni di queste equazioni nello spazio libero (cioè in assenza di sorgenti), imponendo ad esse di soddisfare una condizione aggiuntiva di simmetria sferica. Consideriamo, quindi, le soluzioni della

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad [10.3.2]$$

che dipendano soltanto dalla distanza da un punto fisso O (*centro* del campo).

Riferendosi a un sistema di coordinate sferiche r, θ, φ centrato in O , la condizione di simmetria è espressa da

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0.$$

Con tale restrizione, la [10.3.2], scritta in coordinate sferiche (per l'espressione del laplaciano scalare ∇^2 vedi § A.20), diventa

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad \text{per } r \neq 0.$$

Il secondo termine contiene soltanto operazioni di derivazione rispetto al tempo; si può scrivere pertanto

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) - \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rV) = 0, \quad \text{per } r \neq 0,$$

cioè

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rV) = 0. \quad [10.3.3]$$

La forma di tale equazione è quella, classica, di D'Alembert, a patto di considerare come funzione incognita il prodotto rV . L'integrale generale della [10.4.3] può essere dunque espresso nella forma

$$rV = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right), \quad [10.3.4]$$

ove f e g sono funzioni arbitrarie. Donde

$$V(r, t) = \frac{1}{r} \left[f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \right]. \quad [10.3.5]$$

Tra questa soluzione, tipica delle onde sferiche, e le soluzioni relative alle onde piane si nota una differenza: le funzioni f e g (che rappresentano rispettivamente un'onda progressiva e una regressiva) sono moltiplicate ora per il fattore $1/r$. Ciò significa che, man mano che l'onda si allontana dal punto O (oppure si avvicina ad esso), la sua ampiezza non rimane costante (come invece accade per le onde piane), ma varia proporzionalmente a $1/r$.

Osservazione. La [10.3.3] è stata dedotta solo per $r \neq 0$. Non si può escludere dunque la presenza, nell'origine, di una sorgente nel campo; il fatto anzi che la soluzione diverga per $r \rightarrow 0$ avvalora questa supposizione (vedi anche § 10.8).

Per quel che riguarda il potenziale vettore \mathbf{A} , non sarebbe difficile mostrare (lo omettiamo, per brevità), tenendo conto della simmetria sferica e della condizione di Lorentz [9.7.16], che le sole componenti non nulle, A_φ e A_r , hanno i seguenti integrali generali (indicando con un apice, per semplicità, le derivate rispetto agli argomenti $(t - r/c)$ e $(t + r/c)$):

$$A_\varphi = \frac{1}{r} \left[f_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + g_1 \left(t + \frac{r}{c} \right) \right], \quad [10.3.6]$$

$$A_r = \frac{c}{r^2} \left[f_2 \left(t - \frac{r}{c} \right) + g_2 \left(t + \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[f'_2 \left(t - \frac{r}{c} \right) + g'_2 \left(t + \frac{r}{c} \right) \right]. \quad [10.3.7]$$

In conclusione, le [10.3.5], [10.3.6] e [10.3.7] forniscono, in condizioni di simmetria sferica, gli integrali generali delle [10.3.1], con termini noti nulli, allo stesso modo in cui le [10.2.9] e [10.2.10] forniscono gli integrali generali delle equazioni d'onda in condizioni di simmetria piana. È bene dir subito, però, che mentre le soluzioni piane corrispondono a situazioni fisicamente realizzabili, la stessa cosa *non* può dirsi per le soluzioni sferiche; queste ultime, comunque, riescono utili per "costruire", per sovrapposizione, soluzioni corrispondenti a situazioni fisicamente realizzabili, come si vedrà più avanti.

10.4 Il fronte d'onda

Consideriamo l'onda piana progressiva descritta dalle [10.2.11]; se ammettiamo che, in corrispondenza del piano $z=0$, il campo sia nullo per $t < 0$ (il che equivale ad ammettere che l'onda *non* esista da sempre) deve essere

$$\begin{cases} \varphi_E(-ct) = 0 \\ \Phi_E(-ct) = 0, \end{cases} \quad \text{per } t < 0,$$

e quindi, ponendo $\xi = z - ct$,

$$\begin{cases} \varphi_E(\xi) = 0 \\ \Phi_E(\xi) = 0, \end{cases} \quad \text{per } \xi > 0.$$

Per $z > 0$ si ha allora

$$\begin{cases} \varphi_E(z-ct) = 0 \\ \Phi_E(z-ct) = 0, \end{cases} \quad \text{per } z-ct > 0.$$

Ciò implica che, per ogni $t > 0$, il campo è nullo nel semispazio $z > ct$ (vedi fig. 10.2), mentre è diverso da zero nell'altro semispazio.

Il piano π , di equazione $z = ct$, costituisce il *fronte dell'onda piana* considerata: esso avanza con velocità c nel verso positivo dell'asse z . In corrispondenza di π , i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono in generale discontinui, poiché sulla pagina positiva (quella che "guarda" nel verso positivo dell'asse z) sono nulli, mentre su quella negativa hanno valore finito e giacciono nel piano stesso (l'onda è puramente trasversale).⁴

Non si stupisca il lettore per la presenza di discontinuità dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , in corrispondenza del fronte d'onda, pure in assenza di cariche e correnti superficiali su di esso (vedi § 9.6). E' il moto di π a far sì che in corrispondenza dei punti "coperti" dal fronte d'onda, si riscontri, nell'istante in cui il fronte stesso "passa", una brusca variazione dei campi e , quindi, una $\partial \mathbf{E} / \partial t$ e una $\partial \mathbf{B} / \partial t$ di tipo impulsivo (vedi app. E).

Tutto ciò può essere esteso a qualunque onda elettromagnetica (anche non piana) la quale non esista da sempre (cosa che, invece, accade, ad esempio, per le onde sinusoidali, di cui parleremo nei paragrafi seguenti). Rinunciando, per brevità, alla dimostrazione⁵ affermiamo che:

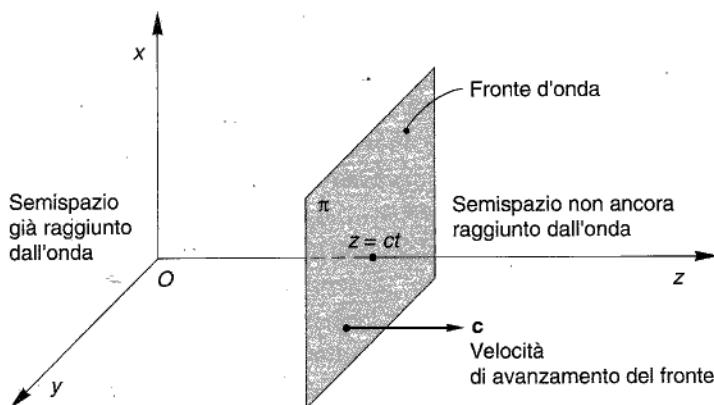


Figura 10.2

⁴ Talora può accadere che, in corrispondenza del fronte d'onda, siano le derivate (spaziali) del campo ad essere discontinue, e non il campo stesso.

⁵ Per una trattazione più approfondita vedi, ad esempio: G. Toraldo di Francia e P. Bruscalione, *Onde elettromagnetiche*, Zanichelli, Bologna 1988; M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, New York 1970.

- a) ad ogni onda elettromagnetica (che non esista da sempre) è associato, in ogni istante, un fronte, e cioè una superficie Σ che separa lo spazio in due parti: una già interessata dal campo, e l'altra che ancora non lo è;
- b) Σ avanza con velocità c diretta, in ciascun punto, lungo la normale a Σ (vedi anche § 11.3);
- c) i vettori \mathbf{E} e \mathbf{H} sono tangenti a Σ in corrispondenza della pagina negativa (rispetto al verso di avanzamento dell'onda) e nulli in corrispondenza di quella positiva: fra i loro moduli sussiste la relazione

$$\frac{E}{H} = Z_0,$$

- d) le affermazioni (a), (b), (c) sono valide *anche* in presenza di mezzi materiali.

10.5 Campi sinusoidali

Fin qui ci siamo limitati a descrivere le principali proprietà di onde elettromagnetiche caratterizzate da elevata simmetria, lasciando da parte il problema più arduo, che consiste nella determinazione dell'andamento spaziotemporale del campo in assegnate situazioni fisiche non simmetriche. Il calcolo del campo in una data regione dello spaziotempo a partire da assegnate sorgenti, e da assegnate condizioni iniziali e al contorno (vedi, ad esempio, § 9.12) è in genere tutt'altro che agevole, e spesso richiede l'uso di sofisticati strumenti matematici, la cui illustrazione esula dai limiti del presente volume.⁶ L'esame di alcuni casi semplici, ma di notevole interesse fisico, darà comunque modo al lettore di acquistare un minimo di familiarità con alcuni di questi importanti strumenti analitici.

Primo tra essi è certamente l'analisi di Fourier (vedi app. B), la quale consente di sviluppare le funzioni del tempo che rappresentano in ciascun punto le sorgenti (oppure le condizioni ai limiti) di un dato problema in una serie, o in un integrale, di funzioni sinusoidali. Qualora poi si riesca a determinare la distribuzione spaziotemporale del campo in corrispondenza di ciascuna di queste funzioni sinusoidali, si potrà costruire per sovrapposizione (data la linearità delle equazioni) la soluzione del problema di partenza. Di qui, l'importanza dei campi sinusoidali, il cui studio, fra l'altro, è facilitato in quanto: a) si può, per essi, far uso del metodo simbolico (vedi app. C), che semplifica notevolmente i calcoli; b) se si conosce l'espressione analitica del campo a una data frequenza, la si conosce anche per ogni altra frequenza.

Ricordiamo infine che la decomposizione di Fourier del campo acquista ulteriore rilievo (fisico, oltreché matematico) nello studio della propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi materiali. Su tutto ciò torneremo più diffusamente nel seguito di questo capitolo e nel successivo.

⁶ Vedi ad esempio Franceschetti, *Campi elettromagnetici* cit., cap. 3.

Precisiamo innanzitutto la nozione di campo (e onda) sinusoidale: un campo elettromagnetico è detto *in regime sinusoidale* quando le sue componenti variano sinusoidalmente nel tempo con un'unica pulsazione ω in tutti i punti della regione in cui il campo stesso è definito. Il più generale campo sinusoidale ha dunque componenti cartesiane della forma

$$\begin{cases} E_x(\mathbf{r}, t) = E_{Mx}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_x(\mathbf{r})] \\ E_y(\mathbf{r}, t) = E_{My}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_y(\mathbf{r})] \\ E_z(\mathbf{r}, t) = E_{Mz}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_z(\mathbf{r})], \end{cases} \quad [10.5.1]$$

nelle quali l'ampiezza e la fase di ciascuna componente sinusoidale (vedi app. B) sono da considerarsi funzioni arbitrarie del punto (individuato dal raggio vettore \mathbf{r} spiccato da una generica origine). Analoghe espressioni valgono per \mathbf{B} .

Osserviamo che le [10.5.1] rappresentano, in generale, un'onda che non presenta alcuna simmetria spaziale (piana, sferica o di qualsiasi altro tipo).

L'effettiva esistenza di campi elettromagnetici sinusoidali sarà dimostrata più avanti, in questo stesso paragrafo.

Apriamo ora una breve parentesi, per introdurre un nuovo tipo di oggetti matematici, i *vettori complessi*, necessari per poter far uso del metodo simbolico (vedi app. C). Tali vettori vengono definiti in modo analogo ai vettori reali (quelli dell'usuale algebra vettoriale): come un vettore reale è rappresentato, in un dato sistema di coordinate, da una terna ordinata di numeri reali (le sue componenti), allo stesso modo un vettore complesso può essere definito, nel sistema di coordinate considerato, come una terna ordinata di numeri complessi (componenti). Nel seguito indicheremo i vettori complessi con lettere in grassetto sormontate dal simbolo “~” (per distinguerli dai vettori reali); così, ad esempio, il vettore complesso $\tilde{\mathbf{u}}$ è definito dalle sue componenti $\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z$:

$$\begin{cases} \tilde{u}_x = a_x + j b_x \\ \tilde{u}_y = a_y + j b_y \\ \tilde{u}_z = a_z + j b_z. \end{cases} \quad [10.5.2]$$

Detti $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$, i versori degli assi coordinati, le [10.5.2] possono essere riscritte nella forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{u}_x \mathbf{i}_x + \tilde{u}_y \mathbf{i}_y + \tilde{u}_z \mathbf{i}_z = (a_x + j b_x) \mathbf{i}_x + (a_y + j b_y) \mathbf{i}_y + (a_z + j b_z) \mathbf{i}_z = \\ &= (a_x \mathbf{i}_x + a_y \mathbf{i}_y + a_z \mathbf{i}_z) + j(b_x \mathbf{i}_x + b_y \mathbf{i}_y + b_z \mathbf{i}_z) = \mathbf{a} + j \mathbf{b}, \end{aligned} \quad [10.5.3]$$

avendo posto:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_x \mathbf{i}_x + a_y \mathbf{i}_y + a_z \mathbf{i}_z, \end{cases} \quad [10.5.4]$$

$$\begin{cases} \mathbf{b} = b_x \mathbf{i}_x + b_y \mathbf{i}_y + b_z \mathbf{i}_z. \end{cases} \quad [10.5.5]$$

In questo modo, anche la rappresentazione geometrica dei vettori reali mediante segmenti orientati può essere estesa ai vettori complessi, poiché questi possono essere riguardati come coppie ordinate di vettori reali e possono essere quindi rappresentati da coppie ordinate di segmenti orientati.

Anche le principali nozioni dell'analisi vettoriale reale si estendono senza difficoltà ai vettori complessi, a cominciare da quella di campo vettoriale: se in un dominio Ω dell'ordinario spazio euclideo tridimensionale è definita una funzione $\tilde{\mathbf{A}}$ che associa ad ogni punto $P \in \Omega$ un vettore complesso $\tilde{\mathbf{A}}(P)$, diremo che in Ω è definito il campo vettoriale complesso $\tilde{\mathbf{A}}$. (Analoghe considerazioni valgono ovviamente anche per i campi scalari complessi.)

In stretta analogia con il caso reale, possono poi essere definiti gli *operatori vettoriali complessi*; in coordinate cartesiane avremo ad esempio:

$$\text{grad } \tilde{\varphi} = \nabla \tilde{\varphi} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \mathbf{i}_z,$$

$$\text{div } \tilde{\mathbf{A}} = \frac{\partial \tilde{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial z},$$

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} = \text{div grad } \tilde{\varphi},$$

[10.5.6]

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tilde{A}_x & \tilde{A}_y & \tilde{A}_z \end{vmatrix},$$

e così via.

A questo punto possiamo ritornare alle [10.5.1] e riscrivere i secondi membri in forma simbolica; ad esempio, la prima componente diventa (vedi app. C)

$$E_x(\mathbf{r}, t) \iff E_{Mx}(\mathbf{r}) e^{j[\omega t + \varphi_x(\mathbf{r})]} = E_{Mx}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_x(\mathbf{r})} e^{j\omega t} = \tilde{E}_x(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \quad [10.5.7]$$

ove si è posto

$$\tilde{E}_x(\mathbf{r}) = E_{Mx}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_x(\mathbf{r})}. \quad [10.5.8]$$

Analoghe espressioni valgono per le altre componenti del campo. Facendo uso della nozione di campo vettoriale complesso appena introdotto, possiamo scrivere

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \iff \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad [10.5.9]$$

nella quale si è indicato con $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ il campo vettoriale (complesso) le cui componenti $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z$ sono date dalla [10.5.8] e simili. Osserviamo esplicitamente che i moduli di queste componenti complesse $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z$ forniscono le ampiezze delle corrispondenti componenti reali di \mathbf{E} , mentre gli argomenti ne forniscono le fasi.

Per evitare ambiguità nelle notazioni, d'ora innanzi indicheremo con il simbolo $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ il campo complesso a destra della corrispondenza [10.5.9], mentre utilizzeremo

il simbolo $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ per indicare il campo complesso che si ottiene da questo ignorando il fattore temporale $e^{j\omega t}$. Ricordiamo inoltre che la corrispondenza [10.5.9] può essere resa esplicita scrivendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \} = \Re \{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \}, \quad [10.5.10]$$

dove il simbolo \Re indica la sola parte reale dell'espressione complessa racchiusa dalle parentesi.

Finora si è tacitamente ammessa l'*esistenza* di campi sinusoidali, e cioè di soluzioni delle equazioni di Maxwell che abbiano la forma [10.5.1]; è venuto ora il momento di dimostrarlo. A questo scopo, faremo uso della notazione simbolica e riscriveremo le equazioni di Maxwell sostituendo a ciascun campo vettoriale la sua corrispondente espressione complessa. In questo modo, l'equazione

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

diventa

$$\operatorname{rot} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] = - \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]$$

e quindi

$$e^{j\omega t} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega e^{j\omega t} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}),$$

e infine

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}), \quad [10.5.11]$$

nella quale, come si vede, la variabile temporale è scomparsa. Operando analogamente sull'equazione

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

si perviene alla

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \mu_0 \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) + j\omega \mu_0 \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}). \quad [10.5.12]$$

Le rimanenti equazioni di Maxwell assumono la forma

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\rho}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) + j\omega \tilde{\rho}(\mathbf{r}) = 0. \end{cases} \quad [10.5.13]$$

Ragionando poi come nel paragrafo 10.1, l'equazione delle onde per il campo elettrico, espressa in forma simbolica, diventa

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0, \quad [10.5.14]$$

dove il simbolo ∇^2 indica il laplaciano vettore (esteso nel solito modo ai campi vettoriali complessi). (Si noti che la derivata seconda rispetto al tempo è sparita e che al suo posto figura il prodotto per la quantità $(j\omega)^2 = -\omega^2$.)

Analoga equazione vale per il campo magnetico. La [10.5.14], che gioca un ruolo fondamentale nell'analisi dei campi sinusoidali, prende il nome di *equazione vettoriale di Helmholtz* e rappresenta sinteticamente un sistema di sei equazioni scalari reali, che si ottengono annullando, per ciascuna componente, separatamente, la parte reale e il coefficiente dell'immaginario.

Il fatto che la [10.5.14] ammetta effettivamente soluzioni può essere considerato abbastanza ovvio di per sé e ciò dimostra anche l'esistenza di campi sinusoidali (nel seguito troveremo alcune soluzioni particolari dell'equazione di Helmholtz).

Si comprende a questo punto che il problema della determinazione del campo elettromagnetico, in regime sinusoidale, in una data regione spaziale Ω , si traduce nella ricerca della particolare soluzione della [10.5.14] che soddisfi alle assegnate condizioni al contorno sulla frontiera di Ω ; il campo $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ può poi essere ricavato direttamente dalla [10.5.11].

Ammesso di aver trovato tale soluzione complessa $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$, è semplice poi determinare l'espressione reale del campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, giacché basta moltiplicare $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ per il fattore $e^{j\omega t}$ e prendere la sola parte reale dell'espressione complessa così ottenuta, come indicato nella [10.5.10].

10.5.1 Energia di un'onda sinusoidale

Veniamo ora all'energia associata a un'onda elettromagnetica sinusoidale. Per cominciare, osserviamo che la frequenza delle onde è in genere molto alta, ed è quindi impossibile misurare istante per istante le grandezze associate all'onda; assumono quindi particolare importanza i *valori medi* nel periodo (vedi app. C).

Cominciamo col calcolare il valor medio (nel periodo) della densità di energia elettromagnetica. Dalla [9.10.7] si ha subito

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle, \quad [10.5.15]$$

nella quale le parentesi $\langle \rangle$ indicano il valor medio nel periodo. In notazione simbolica (vedi app. C) si ha

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \rangle = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle + \langle E_z^2 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \Re(\tilde{E}_x \tilde{E}_x^*) + \frac{1}{2} \Re(\tilde{E}_y \tilde{E}_y^*) + \frac{1}{2} \Re(\tilde{E}_z \tilde{E}_z^*) = \frac{1}{2} (\tilde{E}_x \tilde{E}_x^* + \tilde{E}_y \tilde{E}_y^* + \tilde{E}_z \tilde{E}_z^*),$$

nella quale \tilde{E}_x , \tilde{E}_y , \tilde{E}_z sono le componenti (complesse) del vettore complesso $\tilde{\mathbf{E}}$ e l'asterisco indica i coniugati. Ragionando allo stesso modo per il campo magnetico, si ottiene infine

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 (\tilde{E}_x \tilde{E}_x^* + \tilde{E}_y \tilde{E}_y^* + \tilde{E}_z \tilde{E}_z^*) + \frac{1}{4\mu_0} (\tilde{B}_x \tilde{B}_x^* + \tilde{B}_y \tilde{B}_y^* + \tilde{B}_z \tilde{B}_z^*). \quad [10.5.16]$$

Osserviamo ora che le espressioni in parentesi rappresentano, per definizione, i prodotti scalari $\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*$ e $\tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^*$; se ne conclude quindi

$$\langle u_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* + \frac{1}{4\mu_0} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^*, \quad [10.5.17]$$

la quale mostra come il valor medio della densità di energia elettromagnetica possa essere calcolato a partire dai vettori complessi rappresentativi del campo sinusoidale.

Applichiamo ora il teorema di Poynting alle onde sinusoidali. Dalla [10.5.10] si trae (il lettore lo verifichi per una generica componente dei vettori)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) e^{-j\omega t}] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) e^{-j\omega t}] \end{array} \right.$$

ove le grandezze a primo membro sono reali. Sostituendo tali relazioni nella espressione del vettore di Poynting, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = & \frac{1}{4} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{j2\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) e^{-j2\omega t} + \\ & + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad [10.5.18]$$

Calcoliamo ora il valor medio:

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P} dt;$$

sostituendo la [10.5.18] in questa relazione e osservando che gli integrali contenenti gli esponenziali immaginari sono nulli perché estesi a un intero periodo, si ottiene

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{4} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})]. \quad [10.5.19]$$

E' semplice inoltre verificare (provvi il lettore a farlo, scrivendo le espressioni dei prodotti vettoriali in termini delle componenti) che è

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 2\Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})];$$

sostituendo questa espressione nella [10.5.19], si ottiene

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \rangle = \Re \left[\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \right]. \quad [10.5.20]$$

Siamo così indotti a definire un vettore di Poynting complesso

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}), \quad [10.5.21]$$

tale che

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \rangle = \Re \{ \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) \}. \quad [10.5.22]$$

Applichiamo ora il teorema di Poynting a una regione Ω dello spazio vuoto:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} d\tau + \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad [10.5.23]$$

dove Σ è la superficie chiusa che delimita Ω . Essendo, questa relazione, valida in ogni istante, essa rimane tale anche se riferita ai valori medi nel periodo dei due addendi integrali:

$$\left\langle \iiint_{\Omega} \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} d\tau \right\rangle + \left\langle \iint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \right\rangle = 0.$$

L'operazione di media temporale può essere trasportata sotto segno di integrale poiché il dominio di integrazione è indipendente dal tempo:

$$\iiint_{\Omega} \left\langle \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} \right\rangle d\tau + \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{P} \rangle \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad [10.5.24]$$

Essendo il primo integrale nullo per campi sinusoidali (provvi il lettore a dimostrarlo), si ottiene

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{P} \rangle \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Dalla [10.5.22] si trae poi

$$\Re \left\{ \iint_{\Sigma} \widetilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} dS \right\} = 0, \quad [10.5.25]$$

la quale può essere scritta in forma locale (applicando il teorema della divergenza):

$$\Re \{ \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) \} = 0. \quad [10.5.26]$$

10.6 Onde sinusoidali piane e loro polarizzazione

In questo paragrafo prenderemo in esame quelle onde elettromagnetiche che uniscono la proprietà di essere sinusoidali (vedi § 10.5) a quella di essere piane (vedi § 10.2).

Tali onde hanno importanza fisica preminente, poiché molti sono i casi in cui esse possono essere usate per rappresentare fenomeni fisici fondamentali: valga per tutti l'esempio della radiazione luminosa monocromatica di cui parleremo più diffusamente nei capitoli seguenti.

Anche sul piano analitico le onde sinusoidali piane hanno un ruolo particolarmente importante, poiché si può dimostrare che ogni onda sinusoidale può essere espressa come sovrapposizione di onde sinusoidali piane che si propagano in direzioni diverse. Se a ciò si aggiunge che l'analisi di Fourier consente di scomporre qualunque onda in

onde sinusoidali, si comprende che le onde trattate in questo paragrafo possono essere considerate i "mattoni" per mezzo dei quali costruire qualsiasi onda elettromagnetica.

Cominciamo col ricavare l'espressione analitica di un'onda sinusoidale piana; essa può ottersi direttamente dalle [10.2.9] e [10.2.10], che forniscono l'espressione della più generale onda piana, particolarizzandole per funzioni sinusoidali del tempo. Preferiamo invece far uso dell'equazione di Helmholtz [10.5.14], per familiarizzare il lettore con l'uso del metodo simbolico.

Abbiamo visto (§ 10.2) che in un riferimento cartesiano il cui asse z sia diretto lungo la direzione di propagazione, un'onda piana può essere scomposta in due onde, piane anch'esse, delle quali la prima ha il vettore elettrico diretto lungo l'asse x (e quello magnetico lungo y) e la seconda ha il vettore elettrico diretto lungo l'asse y (e quello magnetico lungo x). Consideriamo un'onda piana del primo tipo e supponiamo che essa sia sinusoidale; il suo vettore elettrico può essere rappresentato simbolicamente con un vettore complesso

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{E}_x(z) \mathbf{i}_x, \quad [10.6.1]$$

avendo indicato con \mathbf{i}_x il versore dell'asse x . Dalla ipotesi di planarità dell'onda discende inoltre

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial y} = 0.$$

Ne deriva che l'equazione di Helmholtz può essere scritta nella forma scalare semplificata:

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{E}_x(z) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E}_x(z) = 0, \quad [10.6.2]$$

la quale è un'equazione differenziale, in questo caso *ordinaria*, del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti, nella incognita complessa $\tilde{E}_x(z)$. Come è noto, l'integrale generale della [10.6.2] è del tipo

$$\tilde{E}_x(z) = \tilde{A}_1 e^{j \frac{\omega}{c} z} + \tilde{A}_2 e^{-j \frac{\omega}{c} z}, \quad [10.6.3]$$

con \tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 costanti complesse arbitrarie. Posto

$$\tilde{A}_1 = E_{1x} e^{j\varphi_1},$$

$$\tilde{A}_2 = E_{2x} e^{j\varphi_2},$$

la [10.6.3] diventa

$$\tilde{E}_x(z) = E_{1x} e^{j \left(\frac{\omega}{c} z + \varphi_1 \right)} + E_{2x} e^{j \left(-\frac{\omega}{c} z + \varphi_2 \right)}. \quad [10.6.4]$$

Per ottenere ora l'espressione reale del campo elettrico nel dominio del tempo, basta moltiplicare il secondo membro della [10.6.4] per $e^{j\omega t}$ e prenderne la parte

reale. Si ha, così

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \Re \left\{ \left[E_{1x} e^{j\left(\frac{\omega}{c}z + \varphi'_1\right)} + E_{2x} e^{j\left(-\frac{\omega}{c}z + \varphi'_2\right)} \right] e^{j\omega t} \right\} = \\ &= E_{1x} \cos \left(\omega t + \frac{\omega}{c}z + \varphi'_1 \right) + E_{2x} \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c}z + \varphi'_2 \right) = \\ &= E_{1x} \cos \left[\omega \left(t + \frac{z}{c} \right) + \varphi'_1 \right] + E_{2x} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi'_2 \right]. \end{aligned} \quad [10.6.5]$$

Si noti la comparsa degli argomenti $t \pm \frac{z}{c}$, tipici delle onde.

Il campo magnetico può essere ottenuto direttamente dalla

$$\text{rot } \tilde{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}),$$

e si ha

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega} \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \left[-\frac{1}{j\omega} \frac{d}{dz} \tilde{E}_x(z) \right] \mathbf{i}_y, \quad [10.6.6]$$

avendo indicato con \mathbf{i}_y il versore dell'asse y . Sostituendo la [10.6.4] nella [10.6.6], si ottiene poi:

$$\tilde{B}_y(z) = -\frac{E_{1x}}{c} e^{j\left(\frac{\omega}{c}z + \varphi'_1\right)} + \frac{E_{2x}}{c} e^{j\left(-\frac{\omega}{c}z + \varphi'_2\right)}, \quad [10.6.7]$$

e, infine, operando come per il campo elettrico:

$$B_y(z, t) = -\frac{E_{1x}}{c} \cos \left[\omega \left(t + \frac{z}{c} \right) + \varphi'_1 \right] + \frac{E_{2x}}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi'_2 \right]. \quad [10.6.8]$$

Come si vede, la particolare onda sinusoidale piana descritta dalle [10.6.5] e [10.6.8] è somma di due termini: uno progressivo (diretto nel verso delle z crescenti) e uno regressivo (diretto in verso opposto), così come previsto dalle [10.2.9] e [10.2.10]. A conclusioni analoghe si perviene considerando un'onda il cui vettore elettrico sia diretto lungo l'asse y e quello magnetico lungo l'asse x (provi il lettore a farlo, come utile esercizio):

$$\begin{cases} E_y(z, t) = E_{1y} \cos \left[\omega \left(t + \frac{z}{c} \right) + \varphi''_1 \right] + E_{2y} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi''_2 \right] \\ B_x(z, t) = \frac{E_{1y}}{c} \cos \left[\omega \left(t + \frac{z}{c} \right) + \varphi''_1 \right] - \frac{E_{2y}}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi''_2 \right]. \end{cases} \quad [10.6.9]$$

Riassumendo e separando i termini progressivi da quelli regressivi nelle [10.6.5], [10.6.8] e [10.6.9], concludiamo che *la più generale onda sinusoidale piana progressiva*

siva è rappresentata da relazioni del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(z, t) = E_{Mx} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi' \right] \\ E_y(z, t) = E_{My} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi'' \right] \end{array} \right. \iff \widetilde{\mathbf{E}}(z, t) = \widetilde{\mathbf{E}} e^{j\omega \left(t - \frac{z}{c} \right)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x(z, t) = -\frac{1}{c} E_y(z, t) \\ B_y(z, t) = \frac{1}{c} E_x(z, t). \end{array} \right. \iff \widetilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{i_z}{c} \times \widetilde{\mathbf{E}}(z, t)$$
[10.6.10]

Analoghe relazioni valgono per l'onda regressiva (eccezione fatta per uno scambio di segni tra le espressioni delle componenti del campo magnetico). È immediato verificare che le [10.6.10] verificano tanto l'ortogonalità di \mathbf{E} e \mathbf{B} , quanto la relazione

$$\frac{E}{H} = Z_0,$$

come già visto (§ 10.2) per tutte le onde piane.

Soffermiamoci ora sulle onde progressive per metterne in luce alcune importanti proprietà (analoghe proprietà valgono, ovviamente, anche per quelle regressive).

Cominciamo con l'osservare che la distribuzione spaziale di ciascuna componente del campo in un dato istante (per così dire, la "fotografia" dell'onda in quell'istante) è funzione sinusoidale di z con *pulsazione spaziale*

$$k = \frac{\omega}{c} \quad [10.6.11]$$

e *periodo spaziale* (detto *lunghezza d'onda*)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c = Tc, \quad [10.6.12]$$

avendo indicato con T il *periodo temporale* dell'onda.

Osserviamo inoltre che non è possibile, per le onde in esame, individuare un fronte d'onda (vedi § 10.4), poiché esse occupano l'intero spazio: la cosa non deve meravigliare, giacché si deve immaginare che tali onde esistano da tempo infinito. Ciò nondimeno, si può a buon diritto parlare di una velocità dell'onda: così, se, ad esempio, si prende in esame uno dei *ventri* dell'onda (e cioè uno dei punti in cui, in un dato istante, il campo elettrico è massimo), ci si convince agevolmente che esso avanza con velocità c . Infatti, la posizione spaziale z_0 di un ventre, in un dato istante t_0 , può essere ottenuta annullando l'argomento del coseno nelle [10.6.10]:

$$\omega \left(t_0 - \frac{z_0}{c} \right) + \varphi' = 0.$$

Si ha così

$$z_0 = ct_0 + \frac{c}{\omega} \varphi'; \quad [10.6.13]$$

ripetendo il ragionamento per l'istante $t = t_0 + \Delta t$, si ottiene

$$z = c(t_0 + \Delta t) + \frac{c}{\omega} \varphi', \quad [10.6.14]$$

e quindi:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{c \Delta t}{\Delta t} = c. \quad [10.6.15]$$

Il ragionamento fatto può essere applicato a qualsiasi punto della forma d'onda, individuando tale punto in ogni istante mediante il valore assunto in esso dall'argomento del coseno: giacché tale valore è detto solitamente *fase* dell'onda nel punto-istante considerato, la velocità espressa dalla [10.6.15] è per definizione la cosiddetta *velocità di fase* dell'onda, e cioè la velocità con cui avanzano i punti di ugual fase dell'onda stessa (vedi anche app. B.1, n. 1).

Veniamo ora a un argomento che assume particolare rilievo nella trattazione delle onde sinusoidali, a causa delle sue notevoli implicazioni fisiche: la *polarizzazione* delle onde sinusoidali piane.

Ritornando alle [10.6.10], che forniscono le espressioni delle componenti di una generica onda sinusoidale piana progressiva, osserviamo che gli angoli di fase φ' e φ'' sono in esse arbitrari: per convincersene, basta ricordare che, nella [10.6.3], le costanti \tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 sono arbitrarie anch'esse. Mostreremo ora che la scelta dei valori di φ' e φ'' ha conseguenze importanti per ciò che riguarda le direzioni assunte in ogni istante dal campo elettrico e da quello magnetico (fermo restando il fatto che essi debbono essere sempre ortogonali fra loro).

Cominciamo dal caso più semplice, che è quello per cui

$$\varphi_0 = \varphi' - \varphi'' = 0. \quad [10.6.16]$$

Le [10.6.10] mostrano che in questo caso le due componenti $E_x(z, t)$ e $E_y(z, t)$ sono in fase tra loro, e così pure le componenti del campo magnetico. Per avere informazioni circa la direzione istantanea del campo elettrico (e di quello magnetico), riscriviamo le [10.6.10] in forma vettoriale, tenendo conto della [10.6.16]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_x(z, t) \mathbf{i}_x + E_y(z, t) \mathbf{i}_y = \\ &= E_{Mx} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi' \right] \mathbf{i}_x + E_{My} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi' \right] \mathbf{i}_y = \\ &= (E_{Mx} \mathbf{i}_x + E_{My} \mathbf{i}_y) \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi' \right]. \end{aligned} \quad [10.6.17]$$

Posto

$$\mathbf{E}_M = E_{Mx} \mathbf{i}_x + E_{My} \mathbf{i}_y, \quad [10.6.18]$$

si ha

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_M \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi' \right]. \quad [10.6.19]$$

Poiché il vettore \mathbf{E}_M è costante (nel tempo e nello spazio), se ne conclude che il campo elettrico varia nel tempo, in ogni punto, mantenendo fissa la sua direzione spaziale. Ragionando analogamente per il campo magnetico, si ottiene

$$\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}_M \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi' \right], \quad [10.6.20]$$

con

$$\mathbf{B}_M = \left(-\frac{1}{c} E_{My} \right) \mathbf{i}_x + \left(\frac{1}{c} E_{Mx} \right) \mathbf{i}_y. \quad [10.6.21]$$

Osserviamo inoltre che è:

$$\mathbf{E}_M \cdot \mathbf{B}_M = E_{Mx} \left(-\frac{1}{c} E_{My} \right) + E_{My} \left(\frac{1}{c} E_{Mx} \right) = 0,$$

come già detto prima.

In queste condizioni, l'onda si dice *polarizzata linearmente*; nella figura 10.3 ne è rappresentato il diagramma spaziale in un certo istante.

Osserviamo inoltre che a risultati analoghi saremmo pervenuti scegliendo φ' e φ'' in modo che risultasse

$$\varphi_0 = \varphi' - \varphi'' = n\pi, \quad [10.6.22]$$

con n intero arbitrario.

Oltre a quella lineare, esistono altri tipi di polarizzazione, in cui i vettori elettromagnetici variano nel tempo con leggi semplici. Ad esempio, in certi casi \mathbf{E} (e quindi anche \mathbf{B}) ha modulo costante e varia soltanto in direzione ruotando con velocità angolare costante in senso destroso o sinistroso rispetto alla direzione di avanzamento dell'onda. Queste onde si dicono *polarizzate circolarmente, destre o sinistre*, a seconda del senso di rotazione. La condizione perché ciò accada è che risulti:

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi' - \varphi'' = (2n+1)\frac{\pi}{2} \\ E_{Mx} = E_{My}, \end{cases} \quad [10.6.23]$$

con n intero arbitrario (provi il lettore a dimostrarlo).

Nel caso più generale, con sfasamento $\varphi_0 = \varphi' - \varphi''$ arbitrario e valori arbitrari di E_{Mx} e E_{My} , il vettore elettrico \mathbf{E} varia nel tempo descrivendo con il suo estremo un'ellisse (e così pure il vettore magnetico): in questi casi, l'onda è *polarizzata ellitticamente*. Per dimostrarlo, indichiamo con x e y le coordinate (nel piano coordinato

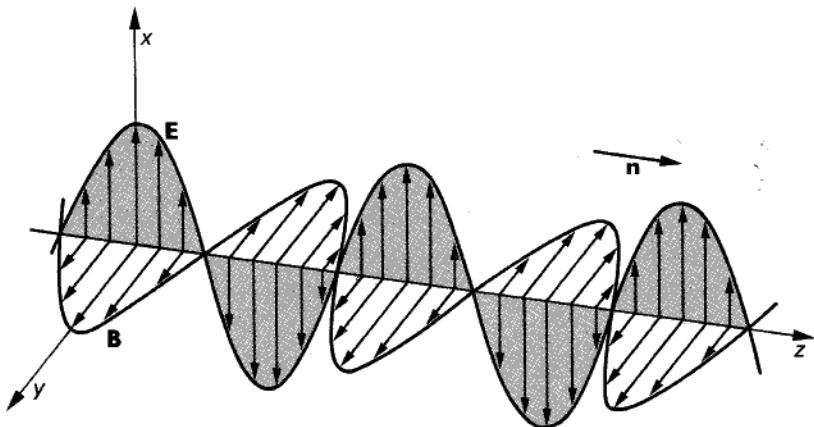


Figura 10.3

$z=0$) dell'estremo del vettore \mathbf{E} ; dalle [10.6.10], si ha

$$\begin{cases} x = E_{Mx} \cos(\omega t + \varphi') \\ y = E_{My} \cos(\omega t + \varphi''). \end{cases}$$

Ricavando ωt da entrambe le relazioni e uguagliando, si ha

$$\arccos\left(\frac{x}{E_{Mx}}\right) - \varphi' = \arccos\left(\frac{y}{E_{My}}\right) - \varphi''; \quad [10.6.24]$$

e quindi:

$$\arccos\left(\frac{x}{E_{Mx}}\right) - \arccos\left(\frac{y}{E_{My}}\right) = \varphi' - \varphi'';$$

prendendo il coseno di ambo i membri, si ha

$$\cos\left[\arccos\left(\frac{x}{E_{Mx}}\right) - \arccos\left(\frac{y}{E_{My}}\right)\right] = \cos(\varphi' - \varphi''). \quad [10.6.25]$$

Ricordando che

$$\cos(\arccos a) = a,$$

$$\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2},$$

la [10.6.25] diventa

$$\frac{x}{E_{Mx}} \frac{y}{E_{My}} + \sqrt{1-\left(\frac{x}{E_{Mx}}\right)^2} \sqrt{1-\left(\frac{y}{E_{My}}\right)^2} = \cos(\varphi' - \varphi'').$$

Elevando al quadrato ambo i membri, si ha poi

$$\left[1 - \left(\frac{x}{E_{Mx}}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{y}{E_{My}}\right)^2\right] = \left(\frac{x}{E_{Mx}}\right)^2 \left(\frac{y}{E_{My}}\right)^2 - \\ - 2 \frac{x}{E_{Mx}} \frac{y}{E_{My}} \cos(\varphi' - \varphi'') + \cos^2(\varphi' - \varphi''),$$

e infine

$$\left(\frac{x}{E_{Mx}}\right)^2 + \left(\frac{y}{E_{My}}\right)^2 - 2 \frac{x}{E_{Mx}} \frac{y}{E_{My}} \cos(\varphi' - \varphi'') + \cos^2(\varphi' - \varphi'') - 1 = 0. \quad [10.6.26]$$

Il discriminante della forma quadratica a primo membro è negativo (per $\varphi' \neq \varphi''$) e ciò implica che il luogo geometrico descritto dall'equazione è un'ellisse. Dalla ortogonalità di **E** e **B** discende infine che anche l'estremo di **B** descrive un'ellisse, i cui assi principali sono ortogonali a quelli della precedente.⁷

Ciò che abbiamo finora detto a proposito della polarizzazione di un'onda sinusoidale piana può essere esteso anche a onde *non* piane. A differenza del caso piano, però, lo stato di polarizzazione di una generica onda sinusoidale è generalmente variabile da punto a punto: esistono cioè onde che sono polarizzate linearmente in alcuni punti, circolarmente in altri ed ellitticamente nei rimanenti.⁷

Prima di concludere questo paragrafo, osserviamo che pur avendo fin qui fatto riferimento a onde propagantesi nella direzione *z*, le conclusioni cui siamo giunti possono essere immediatamente estese al caso più generale di onde propagantesi in una generica direzione orientata **n**. Le espressioni dei vettori d'onda complessi associati all'onda diventano in questo caso:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{j\omega\left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)} \\ \widetilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{n}}{c} \times \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad [10.6.27]$$

avendo indicato con $\widetilde{\mathbf{E}}_0$ un arbitrario vettore complesso (costante nel tempo e nello spazio) "giacente" in un piano ortogonale a **n**. Ricordando la [10.6.11], la prima delle [10.6.27] può essere riscritta nella forma

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{j[\omega t - k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})]},$$

introducendo il vettore

$$\mathbf{k} = k \mathbf{n}, \quad [10.6.28]$$

⁷ Per una descrizione più approfondita vedi Franceschetti, *op. cit.*, cap. 6.

denominato *vettore d'onda*, si ha infine l'espressione

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad [10.6.29]$$

nella quale sottolineiamo la simmetria formale fra t e \mathbf{r} .

Analogamente, per \mathbf{B} e \mathbf{H} può scriversi:

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \frac{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{c}, \quad [10.6.30]$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \frac{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{Z_0}. \quad [10.6.31]$$

10.7 Composizione di onde sinusoidali piane che si propagano nella stessa direzione

Nel paragrafo 10.5 abbiamo detto che uno dei motivi dell'interesse delle onde sinusoidali è la possibilità di scomporre un'onda qualunque nelle sue componenti sinusoidali mediante l'analisi di Fourier. In questo paragrafo intendiamo approfondire questo punto, ribaltando però, per così dire, il nostro punto di vista: mostreremo cioè come si possa, sovrapponendo onde sinusoidali, costruire onde che tali non sono.

Cominciamo con un esempio molto semplice, ma di notevole interesse teorico e applicativo: la sovrapposizione di due onde sinusoidali piane di pulsazioni diverse. Per non appesantire il formalismo, ci riferiremo a una generica componente scalare del campo, rinunciando al formalismo vettoriale: ciò d'altronde non limita la portata delle nostre conclusioni.

Per semplicità, consideriamo due onde sinusoidali piane propagantesi lungo l'asse z e aventi la stessa ampiezza, fase iniziale nulla e pulsazioni ω_1 e ω_2 diverse tra loro:

$$\begin{cases} a_1(z, t) = A_M \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \\ a_2(z, t) = A_M \cos \left[\omega_2 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]. \end{cases} \quad [10.7.1]$$

Sovrapponendo le due onde, si ha

$$a(z, t) = a_1(z, t) + a_2(z, t), \quad [10.7.2]$$

e, in forma simbolica,

$$\tilde{A}(z, t) = \tilde{A}_1(z, t) + \tilde{A}_2(z, t), \quad [10.7.3]$$

con

$$\tilde{A}_1(z, t) = A_M e^{j\omega_1 \left(t - \frac{z}{c} \right)} = A_M e^{j(\omega_1 t - k_1 z)}$$

$$\tilde{A}_2(z, t) = A_M e^{j\omega_2 \left(t - \frac{z}{c} \right)} = A_M e^{j(\omega_2 t - k_2 z)}.$$

Ponendo poi

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 \\ k = k_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \\ \Delta k = k_2 - k_1 \end{cases} \quad [10.7.4]$$

e introducendo i valori medi

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \\ \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} = k + \frac{\Delta k}{2}, \end{cases} \quad [10.7.5]$$

si ha

$$\tilde{A}(z, t) = A_M \left[e^{j \frac{1}{2} (t \Delta\omega - z \Delta k)} + e^{-j \frac{1}{2} (t \Delta\omega - z \Delta k)} \right] e^{j(\bar{\omega}t - \bar{k}z)},$$

e ancora, ricordando le formule di Eulero:

$$\tilde{A}(z, t) = 2A_M \cos \left[\frac{1}{2} (t \Delta\omega - z \Delta k) \right] e^{j(\bar{\omega}t - \bar{k}z)}.$$

Per ottenere infine la funzione reale $a(z, t)$, basta prendere la sola parte reale della $\tilde{A}(z, t)$:

$$a(z, t) = \Re \{ \tilde{A}(z, t) \} = 2A_M \cos \left[\frac{1}{2} (t \Delta\omega - z \Delta k) \right] \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z). \quad [10.7.6]$$

L'onda risultante è costituita dunque dal prodotto di due termini sinusoidali: il primo, di pulsazioni (temporale e spaziale) $\Delta\omega$ e Δk , è rappresentato nella figura 10.4a; il secondo, di pulsazioni $\bar{\omega}$ e \bar{k} è rappresentato nella figura 10.4b. Infine, nella figura 10.4c è riportato il grafico dell'onda risultante; come si vede, si tratta di un'onda piana propagantesi nella direzione z e costituita da una successione di *gruppi*, o *pacchetti, d'onde*. Le oscillazioni contenute in ciascuno di tali gruppi d'onde hanno pulsazione temporale pari a $\bar{\omega}$ e pulsazione spaziale pari a \bar{k} ; l'ampiezza di tali oscillazioni varia, invece, con pulsazioni

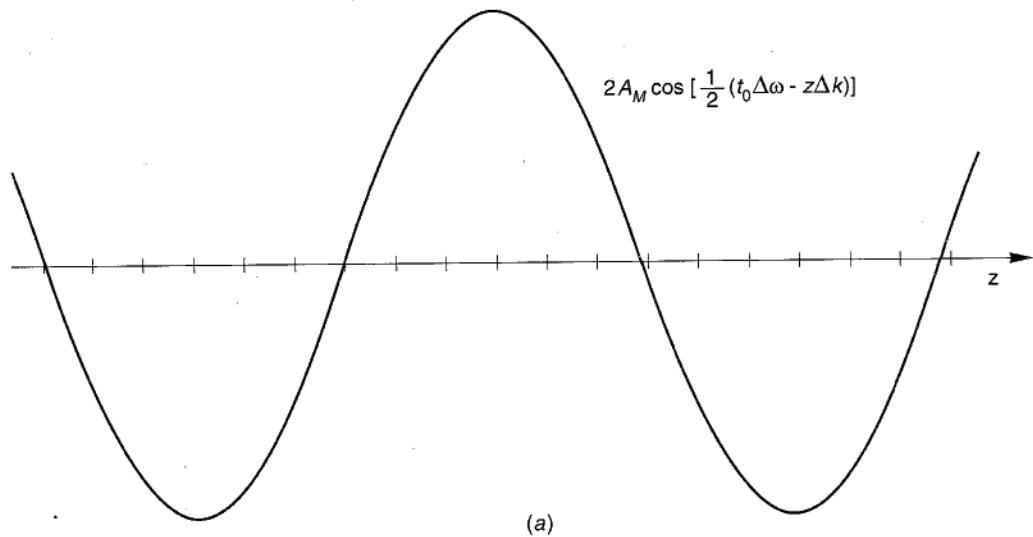
$$\begin{cases} \omega_g = \frac{1}{2} \Delta\omega \\ k_g = \frac{1}{2} \Delta k. \end{cases} \quad [10.7.7]$$

Per quel che riguarda la velocità di avanzamento dell'onda, possiamo ragionare come nel paragrafo 10.6; ci troviamo però, in questo caso, di fronte a una duplice possibilità: "seguire" il moto *di una data oscillazione* all'interno di un singolo pacchetto oppure seguire il moto *dell'intero pacchetto* (e cioè dell'inviluppo delle oscillazioni). Seguendo la prima via, e ricordando che le singole oscillazioni hanno pulsazioni $\bar{\omega}$ e \bar{k} , si conclude subito (come per la [10.6.11]) che la velocità che

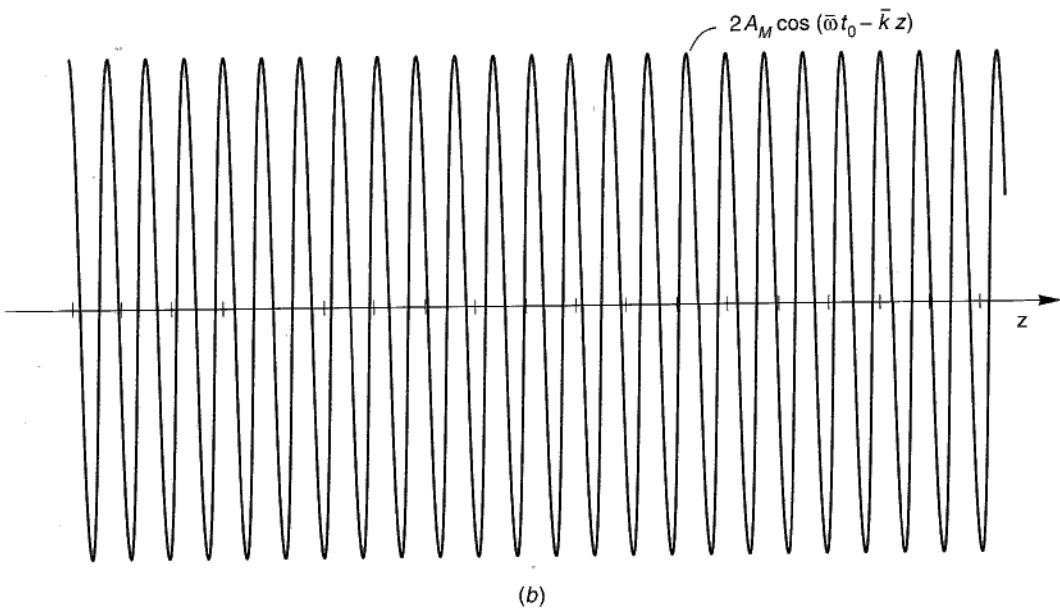
ne risulta è

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad [10.7.8]$$

Essa prende il nome, anche in questo caso, di *velocità di fase*.



(a)



(b)

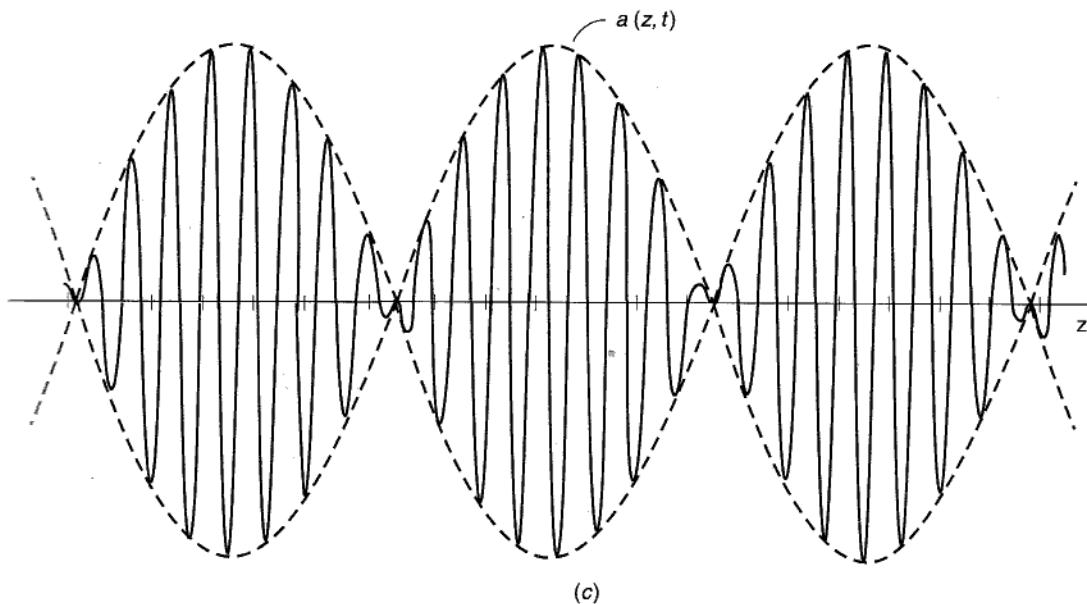


Figura 10.4

Seguendo, invece, la seconda via, occorre seguire il moto, ad esempio, del “massimo dei massimi” delle diverse oscillazioni, il quale, come si è detto prima, varia con pulsazioni ω_g e k_g date dalle [10.7.7]. Ragionando anche questa volta come per la [10.6.11], se ne deduce che la velocità di propagazione del gruppo d’onde (detta, appunto, *velocità di gruppo*) è pari a

$$v_g = \frac{\omega_g}{k_g} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad [10.7.9]$$

E’ facile calcolare v_f e v_g : per le [10.7.4], [10.7.5] si ha infatti

$$v_f = \frac{\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)}{\frac{1}{2}(\omega_1/c + \omega_2/c)} = c,$$

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2/c - \omega_1/c} = c.$$

Si vede così che *nel vuoto* (ove tutte le onde sinusoidali si propagano con velocità c , indipendentemente dalla loro pulsazione) velocità di fase e velocità di gruppo coincidono e sono pari a c . Ciò comporta che tanto le oscillazioni contenute in ciascun pacchetto quanto il pacchetto stesso, visto come inviluppo delle precedenti (*linee tratteggiate* in fig. 10.4c), viaggiano alla stessa velocità c : non esiste quindi alcuno

scorrimento delle prime rispetto al secondo. E' facile intuire, d'altra parte, che quando la velocità di un'onda sinusoidale varia al variare della pulsazione (cosa che accade, come vedremo nel capitolo seguente, nei cosiddetti mezzi dispersivi), la velocità di gruppo risulta diversa da quella di fase: in questo caso si verifica lo scorrimento delle oscillazioni contenute in un pacchetto rispetto al loro inviluppo e la distribuzione spaziotemporale dei pacchetti (la loro forma) si modifica nel corso della propagazione.

La procedura che abbiamo seguito nell'esempio trattato, e cioè quella di sovrapporre onde sinusoidali di pulsazioni diverse per ottenere un'onda non sinusoidale può essere facilmente estesa anche a un insieme illimitato di componenti sinusoidali, purché naturalmente tale sovrapposizione non dia luogo a risultati divergenti.

E' facile, in questo modo, costruire, ad esempio, la più generale onda piana progressiva propagantesi lungo l'asse z ; basta, infatti, scrivere

$$a(z, t) = \int_0^{\infty} A_M(\omega) \cos(\omega t - kz) d\omega, \quad [10.7.10]$$

con $\omega/k = c$, per ogni ω . Naturalmente, tale espressione ha significato soltanto a patto che la funzione $A_M(\omega)$ che figura sotto segno di integrale sia tale che l'integrale (improprio) converga. Ciò corrisponde alla condizione che la funzione $a(z, t)$ sia sviluppatibile in integrale di Fourier (vedi app. B).

Osserviamo infine che, mediante la notazione simbolica, la [10.7.10] può essere riscritta nella forma

$$a(z, t) = \Re e \left\{ \int_0^{\infty} A_M(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega \right\}. \quad [10.7.11]$$

In ultima analisi, le [10.7.10] e [10.7.11] costituiscono un'altra maniera di rappresentare la più generale onda piana progressiva (equivalente a quella fornita dalle [10.2.11]) che risulta particolarmente efficace quando si considerano onde (del tipo di un singolo pacchetto) che siano, in ogni istante, non nulle soltanto in una regione spaziale limitata (ad esempio, un impulso radar): tali onde svolgono un ruolo fondamentale in meccanica quantistica.

10.8 Soluzione delle equazioni del campo in presenza di sorgenti: i potenziali ritardati

Fino a questo punto abbiamo studiato le proprietà delle onde elettromagnetiche nello spazio vuoto, senza preoccuparci delle sorgenti (cariche e correnti) che le producono; è giunto ora il momento di studiare il legame che sussiste tra le onde e le loro sorgenti.

Riprendiamo in esame le equazioni del campo in presenza di sorgenti:

$$\begin{cases} \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J, \end{cases} \quad [10.8.1]$$

e cerchiamone una soluzione che presenti simmetria sferica attorno a un punto O .

Abbiamo visto (§ 10.3) che l'esistenza di soluzioni del tipo [10.3.5] per l'equazione omogenea [10.3.2] non esclude che in O possa essere localizzata una sorgente puntiforme del campo. Mostreremo ora che, scegliendo opportunamente la funzione f , la [10.3.5] è anche soluzione della prima delle [10.8.1], associata a un'onda prodotta da una sorgente puntiforme posta in O .

A tal fine, consideriamo l'equazione non omogenea

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t) \delta(\mathbf{r}), \quad [10.8.2]$$

indicando con $\delta(\mathbf{r})$ la funzione impulsiva (vedi app. E) centrata nell'origine O del sistema di coordinate e con $Q(t)$ una funzione esprimente la variazione nel tempo della carica puntiforme che costituisce la sorgente (unica) del campo. In realtà, la possibilità che una carica *puntiforme* varii nel tempo è in contraddizione con il principio di conservazione della carica. Per questo motivo, la soluzione della [10.8.2] cui ora perverremo non ha, di per sé, alcun significato fisico; essa consente però, come vedremo, di costruire per sovrapposizione onde generate da sorgenti che rispettano la conservazione della carica e che sono, quindi, fisicamente realizzabili.

Cerchiamo una soluzione della [10.8.2] che presenti simmetria sferica attorno al punto O ; a tal fine, consideriamo una sfera Σ di raggio R centrata in O e integriamo la [10.8.2] nel volume da essa racchiuso:

$$\iiint_{\tau} \nabla^2 V d\tau - \frac{1}{c^2} \iiint_{\tau} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} Q(t) \delta(\mathbf{r}) d\tau.$$

Per il teorema della divergenza, il primo integrale si trasforma in un integrale di superficie e si ottiene (ricordando le proprietà della $\delta(\mathbf{r})$):

$$\iint_{\Sigma} \text{grad } V \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{c^2} \iiint_{\tau} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} Q(t).$$

La condizione di simmetria imposta alla soluzione $V(r, t)$ fornisce

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{n};$$

essendo inoltre $\text{grad } V$ costante sulla superficie sferica Σ di raggio R , si ha

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} 4\pi R^2 - \frac{1}{c^2} \iiint_{\tau} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t). \quad [10.8.3]$$

Chiediamoci ora se esista una particolare funzione $(1/r) f(t-r/c)$ che verifichi la [10.8.3] per $R \rightarrow 0$. Calcoliamone anzitutto la derivata prima rispetto a r e seconda rispetto a t :⁸

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] = \frac{1}{r} \frac{df}{d\left(t - \frac{r}{c}\right)} \left(-\frac{1}{c}\right) - \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] = \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{d\left(t - \frac{r}{c}\right)^2}.$$

Sostituendo queste espressioni nella [10.10.3], si ha

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{df}{d\left(t - \frac{r}{c}\right)} - \frac{1}{r^2} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \cdot 4\pi R^2 + \\ & - \frac{1}{c^2} \int_0^R \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{d\left(t - \frac{r}{c}\right)^2} \cdot 4\pi r^2 dr = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t). \end{aligned} \quad [10.8.4]$$

Se le derivate prime e seconde di $f(t-r/c)$ sono finite (come è ragionevole supporre), facendo tendere R a zero si ha

$$\left[\frac{1}{r} \frac{df}{d\left(t - \frac{r}{c}\right)} \right]_{r=R} \cdot 4\pi R^2 \rightarrow 0,$$

$$\left[\frac{1}{r^2} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \right]_{r=R} \cdot 4\pi R^2 \rightarrow 4\pi f(t)$$

e

$$\int_0^R \frac{d^2 f}{d\left(t - \frac{r}{c}\right)^2} 4\pi r dr \rightarrow 0.$$

Per R tendente a zero risulta dunque, dalla [10.8.3],

$$f(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q(t). \quad [10.8.5]$$

Ciò implica che la funzione che si ottiene sostituendo l'argomento $(t-r/c)$ a t ,

$$V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad [10.8.6]$$

⁸ Con il simbolo $df/d(t-r/c)$ intenderemo qui la derivata della $f(t-r/c)$ rispetto all'argomento (unico) $t-r/c$.

è soluzione dell'equazione completa del potenziale scalare in presenza di una sorgente puntiforme di valore $Q(t)$. Confrontiamo questa espressione con quella del potenziale coulombiano elettrostatico

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

L'unica differenza è che nella [10.8.6], per calcolare il valore di V in un generico punto-campo P , all'istante t , occorre considerare il valore della carica-sorgente Q non nello stesso istante, ma all'istante precedente $t - r/c$. L'azione esercitata dalla carica-sorgente Q in un punto posto a distanza r da questa si fa dunque sentire con un ritardo pari a r/c , cioè pari al tempo impiegato dalla luce, nel vuoto, per percorrere la distanza r . Per questo motivo, all'espressione [10.8.6] si dà il nome di *potenziale ritardato*.⁹

Estendiamo ora la [10.8.6] a una generica distribuzione di cariche-sorgente variabili nel tempo; applicando il principio di sovrapposizione dei potenziali si ottiene, per un sistema di N cariche-sorgente puntiformi,

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i \left(t - \frac{r_i}{c} \right)}{r_i}, \quad [10.10.7]$$

e per una distribuzione di volume di carica, continua in una regione τ ,

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(Q, t - \frac{r_{QP}}{c})}{r_{QP}} d\tau. \quad [10.10.8]$$

Analoghe espressioni valgono per gli altri tipi di distribuzioni (superficiali e lineari).

La soluzione della seconda delle [10.8.1] si ottiene scrivendo la [10.8.8] per ciascuna delle equazioni scalari corrispondenti alle componenti cartesiane dell'equazione vettoriale; si ha quindi

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q, t - \frac{r_{QP}}{c})}{r_{QP}} d\tau. \quad [10.8.9]$$

Si osservi che i potenziali V e \mathbf{A} dati dalle [10.8.8] e [10.8.9] soddisfano alla condizione di Lorentz [9.7.16], purché le sorgenti ρ e \mathbf{J} verifichino, come è ovvio, la

⁹ Considerando, in luogo della soluzione $\varphi(t - r/c)$ per l'equazione del potenziale, l'altra, indipendente, del tipo $\psi(t + r/c)$, si giunge in modo analogo a una espressione del tipo

$$V_1(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \left(t + \frac{r}{c} \right)}{r}$$

(potenziale anticipato) cui però è difficile attribuire un significato fisico quando il dominio comprende l'origine.

condizione di continuità

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

che esprime la conservazione della carica in ogni punto-istante.

Assegnate dunque le sorgenti del campo in tutto lo spazio e per ogni t , cioè la distribuzione spaziotemporale di ρ e \mathbf{J} , è possibile calcolare i potenziali V e \mathbf{A} mediante le [10.8.8] e [10.8.9]; da questi poi si ricavano \mathbf{E} e \mathbf{B} attraverso le relazioni

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V,$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

I potenziali ritardati costituiscono perciò una soluzione particolare delle equazioni [10.8.1], così come il potenziale coulombiano è un integrale particolare dell'equazione di Poisson.

Nei casi più frequenti, però, non si conosce a priori la distribuzione delle sorgenti, mentre sono note altre grandezze fisiche, ad esempio le f.e.m. agenti in alcuni circuiti, oppure le correnti in essi circolanti; in questi casi le [10.8.8] e [10.8.9] non possono essere utilizzate e occorre risolvere le equazioni del campo con l'aggiunta di opportune condizioni al contorno e iniziali.

*10.9 I potenziali di Liénard e Wiechert

In questo paragrafo illustreremo alcuni tra i più notevoli risultati della teoria elettromagnetica: le espressioni dei potenziali (e dei campi) prodotti da una carica puntiforme che si muova di moto arbitrario in un riferimento inerziale. Tali espressioni, dette *potenziali di Liénard e Wiechert*, consentono, in base al principio di sovrapposizione, di esprimere i potenziali (e quindi i campi) prodotti da un qualsiasi sistema di cariche in moto arbitrario. Esse svolgono, nel caso generale di cariche in moto, lo stesso ruolo del potenziale coulombiano della carica puntiforme in elettrostatica.

Per calcolare il potenziale scalare V prodotto da una carica puntiforme in moto, applichiamo la [10.8.8], espressione del potenziale ritardato prodotto da una generica distribuzione di cariche-sorgente variabili nel tempo, al caso in cui la carica puntiforme sia costituita da un cubetto carico, in moto con velocità \mathbf{v} verso il punto P in cui si vuol valutare V (vedi fig. 10.5). Supponiamo inoltre che la lunghezza dello spigolo del cubetto a sia molto minore della distanza r fra il centro Q di questo e P .¹⁰

Vi è però una difficoltà: nel dedurre la [10.8.8], si è considerato un volume di integrazione τ fisso e, in esso, una densità di carica ρ variabile nel tempo. Nel caso in esame, invece, la regione occupata dalla carica varia nel tempo, poiché la carica stessa

¹⁰ Per gli argomenti tradotti in questo paragrafo, vedi R. Feynman, *La fisica di Feynman*, trad. it. a cura di Toraldo di Francia, Masson, Milano 1985.

si muove. Per superare la difficoltà, basta estendere l'integrazione a una regione τ' , fissa, molto più estesa di quella (τ) occupata in ciascun istante dalla carica, in modo da includere in ogni caso tutti i contributi delle diverse parti della carica, man mano che essa si muove.

Consideriamo allora (vedi fig. 10.6a) una regione τ' siffatta. Durante il moto della carica, alcune parti di τ' verranno occupate da essa, altre ne saranno prive (in esse sarà cioè nulla ρ). In questo modo, in ciascun punto di τ' , ρ varia nel tempo, a seconda che il punto sia "coperto" o meno dalla carica, ed è possibile quindi ricondurre il calcolo a quello del potenziale ritardato [10.8.8]. Suddividiamo τ' in tante "fettine" di spessore Δl , numerandole da 1 a N , e calcoliamo il contributo di ciascuna di esse.

Il primo contributo vale

$$\Delta V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(Q_1, t - \frac{r_1}{c}) \Delta \tau}{r_1},$$

dove r_1 è la distanza "ritardata" fra il punto (fisso) P e il punto (anch'esso fisso) Q_1 , centro dell'elemento "1", e $\rho(Q_1, t - r_1/c)$ è il valore della densità di carica esistente in Q_1 all'istante $t - r_1/c$ (t è l'istante in cui si valuta ΔV_1 in P).

Supponiamo che all'istante $t - r_1/c$ la carica si trovi nella posizione indicata nella figura 10.6b; si ha allora

$$\Delta V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho a^2 \Delta l}{r_1},$$

dove ρ è la densità di carica, supposta uniforme in τ .

Calcoliamo ora (vedi fig. 10.6c) il contributo ΔV_2 corrispondente all'elemento di volume "2"; si ha subito

$$\Delta V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(Q_2, t - \frac{r_2}{c}) \Delta \tau}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho a^2 \Delta l}{r_2}.$$

Si noti (figg. 10.6b e c) che nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) la carica si è spostata.

Continuando anche per gli altri elementi, si comprende che soltanto i volumetti di indice compreso fra 1 e un certo massimo $n < N$ danno effettivamente contributo al potenziale, mentre i restanti danno contributo nullo (perché non occupati dalla carica in moto). Il potenziale V può essere dunque espresso nella forma

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \rho \frac{a^2 \Delta l}{r_i}.$$

Essendo le distanze r_i molto prossime tra loro (nell'ipotesi che la larghezza a del cubetto sia molto minore della sua distanza dal punto P), possiamo scrivere

$$V(P, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} n \rho a^2 \Delta l,$$

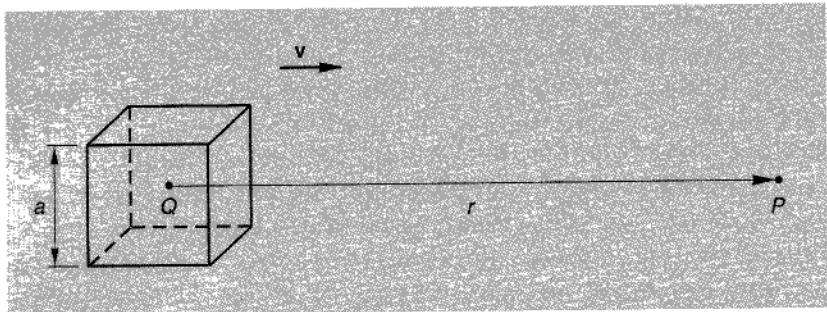


Figura 10.5

dove r' è il *valore medio* tra le r_i . Moltiplicando e dividendo per a , si ha

$$V(P, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho a^3}{r'} \frac{n \Delta l}{a}.$$

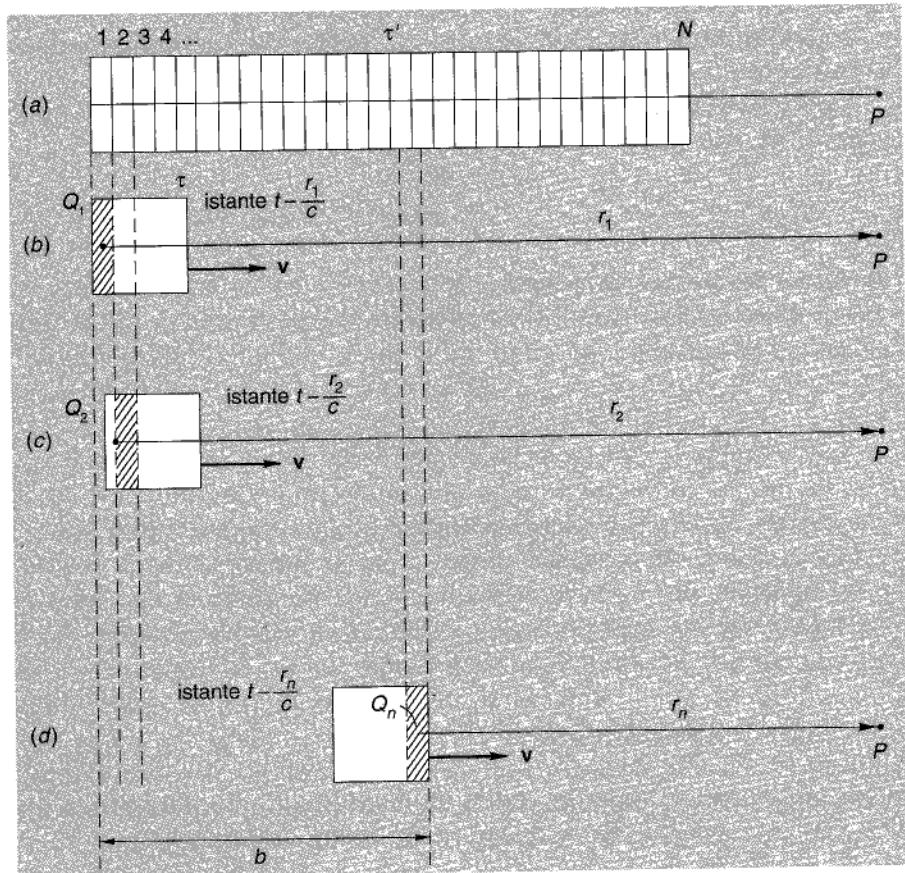


Figura 10.6

Poiché la carica totale del cubetto è

$$q = \rho a^3,$$

e

$$n \Delta l = b,$$

ove b è la distanza indicata nella figura 10.6d, si ha

$$V(P, t) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left(\frac{b}{a} \right). \quad [10.9.1]$$

Non resta che precisare il valore di b . Si verifica agevolmente che

$$b = a + \delta_{1,n} \quad [10.9.2]$$

avendo indicato con $\delta_{1,n}$ la distanza coperta dal baricentro della carica nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = t - r_1/c$ e $t_n = t - r_n/c$. Ricordando che la carica si muove con velocità v , si ha subito

$$\delta_{1,n} = v(t_n - t_1) = v \frac{r_1 - r_n}{c} = v \frac{b}{c}.$$

Sostituendo tale espressione nella [10.9.2], si ha

$$b = a + \frac{v}{c} b,$$

e quindi

$$b = \frac{a}{1 - \frac{v}{c}}.$$

In conclusione,

$$V(P, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}. \quad [10.9.3]$$

Nel caso limite di una q puntiforme, l'errore commesso nella valutazione dell'integrale diviene trascurabile, a patto di considerare la velocità v della carica all'istante $t - r'/c$; ciò consente, fra l'altro, di rimuovere l'ipotesi iniziale di una v costante.

Si ha dunque

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)_{\text{rit}}}, \quad [10.9.4]$$

ove il pedice indica che la velocità v è valutata all'istante "ritardato" $t' = t - r'/c$.

Nel caso in cui \mathbf{v} non sia diretta verso P , ma in un'altra direzione generica, la [10.9.4] diventa

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_r}{c}\right)_{\text{rit}}}, \quad [10.9.5]$$

dove v_r è la componente di \mathbf{v} nella direzione della congiungente QP .

I ragionamenti fatti possono essere estesi anche al caso in cui il volumetto di carica non abbia forma cubica; il risultato espresso dalla [10.9.5] è pertanto di portata assolutamente generale.

La [10.9.5] può essere posta nella forma equivalente

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)_{\text{rit}}}. \quad [10.9.5']$$

In questo modo l'espressione del potenziale V è particolarmente semplice: la distanza "ritardata" r_{rit} è infatti quella esistente fra il punto P in cui si valuta il potenziale all'istante t , e il punto in cui, nello stesso istante, l'osservatore "vede" la carica. Il potenziale V prodotto dalla carica in moto si ottiene perciò dall'espressione coulombiana

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0},$$

a patto di sostituire a r_0 il valore della distanza apparente r_{rit} diminuito della quantità $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)_{\text{rit}}$, valutata anch'essa con riferimento alla posizione "apparente" della carica al tempo t .

Il potenziale V può dunque essere espresso completamente in termini delle grandezze "apparenti" della carica: la posizione e la velocità che un osservatore in P attribuisce alla carica all'istante t , considerandola così come essa gli appare (mentre in tale istante essa si trova in realtà in una posizione diversa da quella osservata e ha una diversa velocità).

In maniera del tutto analoga si può ragionare per il potenziale vettore \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)_{\text{rit}}}, \quad [10.9.6]$$

dove, al solito, le quantità in parentesi vanno valutate al tempo ritardato $t' = t - r'/c$.

10.9.1 Formule di Feynman

Vogliamo ora presentare un'utile espressione, dovuta a Feynman, dei campi elettrico e magnetico prodotti da una carica in moto in un riferimento inerziale (per una breve dimostrazione, vedi app. 6):

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{e}_{r'} \right], \quad [10.9.7]$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}; \quad [10.9.8]$$

$\mathbf{e}_{r'}$ è il versore della direzione orientata verso la posizione apparente della carica, all'istante t , dal punto P in cui (nello stesso istante) si misura \mathbf{E} , e r' è la distanza apparente tra il punto P e la carica, all'istante t ; le derivate temporali sono effettuate rispetto al tempo t dell'osservatore in P . Le espressioni di Feynman consentono dunque di valutare i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} prodotti da una carica q in moto generico in base alle sole grandezze (distanze, tempi e direzioni) attribuite dall'osservatore alla carica (come essa gli appare all'istante t).

Osserviamo a questo proposito che l'espressione [10.9.7] di \mathbf{E} si compone di tre termini:

il primo, $\mathbf{e}_{r'}/r'^2$, corrisponde esattamente al campo che sarebbe prodotto secondo la legge di Coulomb dalla carica mobile q , qualora all'istante t (misurato dall'osservatore in P) essa si trovasse effettivamente (ferma) nel punto in cui l'osservatore la vede;

il secondo, $\frac{r'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right)$, è costituito dal prodotto della derivata rispetto al tempo del termine precedente per l'intervallo di tempo (r'/c) necessario perché l'informazione copra la distanza r' (viaggiando alla velocità c) ("come se la natura — afferma lo stesso Feynman — tendesse a correggere l'effetto del ritardo");

il terzo termine, $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{r'}}{\partial t^2}$, assume particolare importanza poiché è l'unico che *non va a zero* (per r tendente all'infinito) come $1/r^2$: esso è il vero termine di "radiazione", di cui parleremo più diffusamente nei paragrafi che seguono.

10.10 Campo di un dipolo elementare oscillante

10.10.1 Il dipolo elettrico

In questo paragrafo studieremo innanzitutto il campo elettromagnetico prodotto da un elemento di conduttore filiforme di lunghezza δ (fig. 10.7), percorso da una corrente sinusoidale $i = I_M \cos \omega t$; supporremo $\delta \ll \lambda$, essendo $\lambda = 2\pi c/\omega$ la lunghezza d'onda del campo. Già nel paragrafo 7.5, a proposito della legge elementare di Laplace, avevamo avuto modo di considerare un simile "elemento di corrente", ma avevamo sottolineato che, in regime stazionario, esso si riduce a un mero artificio di calcolo, privo di realtà fisica. Infatti una corrente stazionaria nell'elemento conduttore determinerebbe, agli estremi di questo, l'accumularsi di due cariche di segno opposto, crescenti (in modulo) nel tempo, in contraddizione con l'ipotesi di stazionarietà. Diversa

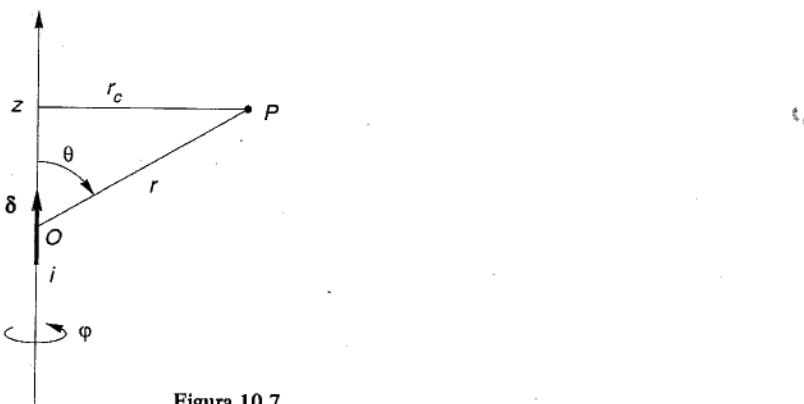


Figura 10.7

è la situazione quando si è in regime sinusoidale. In questo caso la corrente che circola nel conduttore determina agli estremi di questo l'accumulo di cariche di segno opposto variabili anch'esse sinusoidalmente:

$$q(t) = q(0) \pm \int_0^t i(t) dt = \pm \frac{I_M}{\omega} \sin \omega t,$$

avendo posto $q(0)=0$. L'elemento di corrente considerato è quindi equivalente a un dipolo elettrico elementare oscillante, di momento

$$\mathbf{p}(t) = q(t) \boldsymbol{\delta},$$

avendo indicato con $\boldsymbol{\delta}$ un vettore di modulo δ orientato nel verso assunto per specificare il segno di i (vedi fig. 10.7) e con $q(t)$ la carica esistente all'estremo verso cui punta $\boldsymbol{\delta}$.

Naturalmente, per far sì che una corrente sinusoidale circoli nel conduttore, occorre che questo sia alimentato da un opportuno generatore di f.e.m. variabile sinusoidalmente nel tempo; nel seguito indicheremo spesso un generatore di questo tipo con il termine equivalente di *oscillatore*.

Assunto un sistema di coordinate sferiche (vedi app. A) r, θ, φ , con origine O nel centro dell'elemento di corrente (vedi fig. 10.7) e asse z diretto lungo l'elemento stesso, il potenziale vettore \mathbf{A} del campo magnetico \mathbf{B} può essere scritto, conformemente alla [10.8.9] e indicando con i_z il versore dell'asse z , nella forma:¹¹

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta}{r} i_z I_M \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad [10.10.1]$$

In notazione simbolica (vedi app. C), la componente A_z (che è l'unica non nulla) di \mathbf{A} è esprimibile nella forma:

$$\tilde{A}_z(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta}{r} I_M e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}. \quad [10.10.1']$$

¹¹ Per convincersene si osservi che nella [10.8.9] il termine $J d\tau$ può essere scritto come $J i_z S \delta$, essendo S l'area della sezione retta del conduttore, e che inoltre il prodotto JS rappresenta la corrente i che circola nel conduttore stesso.

Per calcolare $\mathbf{B}(P, t)$, conviene ora utilizzare coordinate cilindriche (vedi app. A) r_c, φ, z per le quali risulta (vedi fig. 10.7):

$$r_c^2 = r^2 - z^2. \quad [10.10.2]$$

Dall'espressione del rotore in coordinate cilindriche, si trae subito che la sola componente non nulla di $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ è quella diretta lungo φ ; dalla [10.10.1'] si ottiene quindi, tralasciando il termine $e^{j\omega t}$,

$$\tilde{B}_\varphi(P) = (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_\varphi = -\frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial r_c} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \delta I_M \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial r_c}, \quad [10.10.3]$$

ove $k = \omega/c$. Ma, per la [10.10.2], risulta (vedi fig. 10.7)

$$\frac{\partial r}{\partial r_c} = \frac{\partial}{\partial r_c} \sqrt{r_c^2 + z^2} = \frac{1}{2\sqrt{r_c^2 + z^2}} 2r_c = \sin \theta,$$

e dunque

$$\tilde{B}_\varphi(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \delta I_M \left(\frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} \right) e^{-jkr} \sin \theta. \quad [10.10.4]$$

Noto \mathbf{B} , il campo elettrico \mathbf{E} può essere calcolato immediatamente ovunque (tranne che nella regione occupata dall'elemento di corrente) dalla relazione

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{B}} = j\omega \mu_0 \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}. \quad [10.10.5]$$

Poiché $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, si ha

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{Z_0}{jk} \text{rot } \tilde{\mathbf{H}},$$

con $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{B}}/\mu_0$.

Per calcolare il rotore di \mathbf{H} , conviene ritornare in coordinate sferiche (poiché la [10.10.4], in ultima analisi, è espressa in queste coordinate), ottenendo:

$$\begin{cases} \tilde{E}_\varphi = 0 \\ \tilde{E}_r(P) = \frac{Z_0}{jk} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{H}_\varphi \sin \theta) = Z_0 \frac{I_M \delta}{2\pi} \cos \theta \cdot \left(\frac{1}{jkr^3} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-jkr} \end{cases} \quad [10.10.6]$$

$$\begin{cases} \tilde{E}_\theta(P) = -\frac{Z_0}{jk} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{H}_\varphi \sin \theta) = Z_0 \frac{I_M \delta}{4\pi} \sin \theta \cdot \left(\frac{1}{jkr^3} + \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr}. \end{cases} \quad [10.10.7]$$

Per ritornare alle espressioni reali dei campi, basta moltiplicare le [10.10.4] ÷ [10.10.7] per $e^{j\omega t}$ e prenderne la parte reale: così, ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} B_\varphi(P, t) &= \Re \{ \tilde{B}_\varphi(P) e^{j\omega t} \} = \Re \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} I_M \delta \left(\frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} \right) \sin \theta \cdot e^{j(\omega t - kr)} \right\} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_M \delta \sin \theta \left[\frac{1}{r^2} \cos(\omega t - kr) - \frac{k}{r} \sin(\omega t - kr) \right]. \end{aligned} \quad [10.10.4']$$

Per familiarizzarsi con le espressioni del campo, conviene studiarle in due diverse regioni: quella "vicina" al dipolo, e quella "lontana". Nella prima ($r \ll 2\pi/k$), potremo considerare prevalenti i termini contenenti gli esponenti più alti di r e inoltre costante (e pari all'unità) l'esponenziale immaginario, ottenendo

$$\tilde{B}_\varphi(P) = \frac{\mu_0 I_M \delta}{4\pi} \frac{1}{r^2} \sin \theta, \quad [10.10.8]$$

$$\tilde{E}_r(P) = \frac{Z_0 I_M \delta}{2\pi j k} \frac{1}{r^3} \cos \theta, \quad [10.10.9]$$

$$\tilde{E}_\theta(P) = \frac{Z_0 I_M \delta}{4\pi j k} \frac{1}{r^3} \sin \theta. \quad [10.10.10]$$

Come si vede, la [10.10.8] coincide con la legge elementare di Laplace [7.5.7],¹² la quale viene così estesa ai casi tempo-varianti (almeno nelle regioni vicine agli elementi di corrente), acquistando significato fisico oltreché formale. Osserviamo inoltre che B_φ è in fase con la corrente i , mentre E_r e E_θ sono sfasati in ritardo di $\pi/2$ rispetto ad essa (a causa del fattore j a denominatore, che corrisponde a moltiplicare per $e^{-j\pi/2}$). In conseguenza di ciò, il vettore di Poynting associato a questo campo vicino ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa che contenga il dipolo (provi il lettore a dimostrarlo) e non contribuisce quindi alla radiazione di energia da parte del dipolo stesso.

Veniamo ora al campo nelle regioni lontane ($r \gg 2\pi/k$): i termini in $1/r$ prevalgono sugli altri, e si ha

$$\tilde{B}_\varphi(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_M \delta \frac{jk}{r} \sin \theta e^{-jkr}, \quad [10.10.11]$$

$$\tilde{E}_r(P) = 0, \quad [10.10.12]$$

$$\tilde{E}_\theta(P) = \frac{Z_0}{4\pi} I_M \delta \frac{jk}{r} \sin \theta e^{-jkr}. \quad [10.10.13]$$

E' proprio la presenza di questi termini che, per $r \rightarrow \infty$, vanno a zero come $1/r$ (e non come $1/r^2$), a dar luogo al fenomeno della *radiazione*, e cioè al fatto che le onde elettromagnetiche siano fisicamente rilevabili anche in regioni molto lontane dalle sorgenti che le producono.

Come si vede, il campo è puramente trasversale ($E_r = 0$) e inoltre i due vettori istantanei \mathbf{E} e \mathbf{B} sono ortogonali fra loro (nello spazio) e in fase (nel tempo). Essendo poi, dalle [10.10.11], [10.10.13],

$$\tilde{E}_\theta / \tilde{B}_\varphi = c,$$

se ne deduce che anche il rapporto $E_\theta(P, t)/B_\varphi(P, t)$ fra i valori istantanei reali delle due grandezze è costante e pari a c . Pertanto l'intensità istantanea dell'onda elettromagnetica è, come per le onde piane (vedi la [10.2.14]), pari a

$$i_{em}(P, t) = c \epsilon_0 E_\theta^2(P, t) = \frac{1}{Z_0} E_\theta^2(P, t).$$

¹² La cosa è evidente quando si osservi che, in questo caso, il termine $t \times r_{QP}$ che figura nella [7.5.7'] è diretto nella direzione φ ed è pari a $r \sin \theta$.

Anche in questo caso, quindi, il vettore di Poynting può essere considerato come "densità di corrente di energia" (vedi § 10.2.1).

Osserviamo che, dalle [10.10.11]÷[10.10.13], risulta

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\tilde{E}(\mathbf{r}) - Z_0 \tilde{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{i}_r] = 0 \quad [10.10.14]$$

questa condizione, relativa al comportamento all'infinito del campo del dipolo, prende il nome di *condizione di radiazione di Sommerfeld* ed è di fondamentale importanza nello studio delle onde elettromagnetiche: si dimostra infatti che essa è sufficiente (quando siano note le sorgenti) a garantire l'unicità del campo nell'intero spazio.

Particolarmente istruttivo è l'esame della figura 10.8, nella quale è riportata la distribuzione delle linee vettoriali di \mathbf{E} in un dato istante: si notino in particolare le linee tipiche del campo irrotazionale nella regione di campo vicino ($r \ll \lambda = 2\pi/k$) e quelle vorticose, tipiche del campo rotazionale nella regione di campo lontano ($r \gg \lambda$). In questa regione la figura riporta soltanto la metà superiore delle linee, le quali sono in realtà simmetriche rispetto all'asse orizzontale e hanno simmetria di rivoluzione attorno all'asse z .

*10.10.2 Derivazione del campo di radiazione delle formule di Feynman

Vogliamo ora mostrare come si possono ricavare le espressioni [10.10.11], [10.10.13] del campo nelle regioni lontane (il cosiddetto *campo di radiazione*) mediante le formule di Feynman [10.9.7], [10.9.8], che forniscono il campo generato da

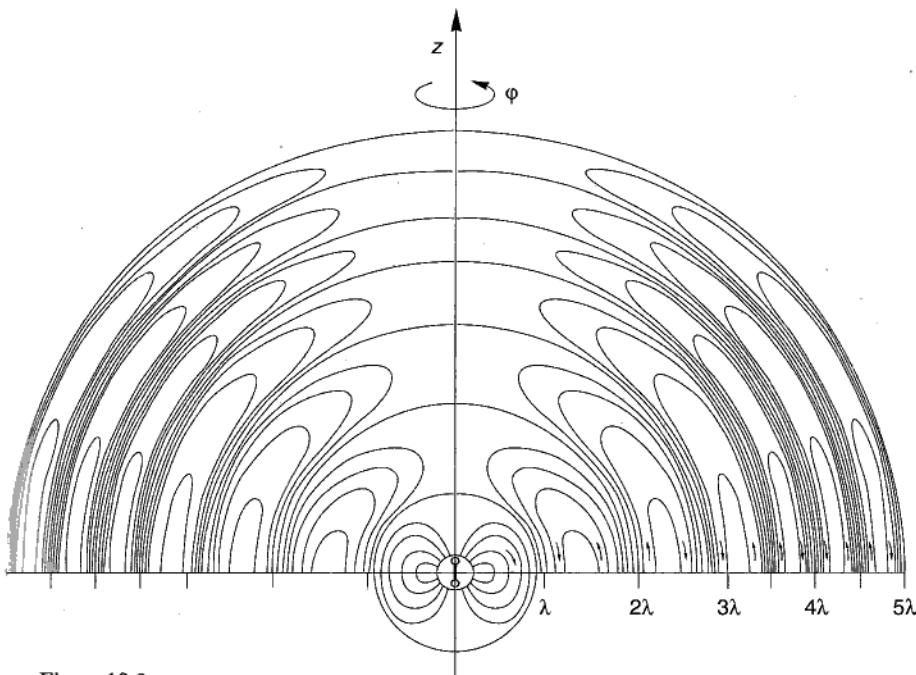


Figura 10.8

una carica puntiforme in moto generico. In particolare, consideriamo il solo terzo termine che figura nella [10.9.7], poiché, come si è detto, esso costituisce il vero termine di radiazione:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{e}_{r'}$$

Applichiamo questa relazione al dipolo oscillante della figura 10.9. Per far ciò sostituiamo la corrente sinusoidale che circola nel dipolo con una carica puntiforme q oscillante sinusoidalmente lungo l'asse del dipolo con velocità $u(t)$ tale da dar luogo alla assegnata corrente $i(t)$. Affinché la carica che attraversa per unità di tempo la sezione del conduttore sia pari a $i(t)$, dev'essere

$$i(t) \delta = q u(t).$$

Integrando nel tempo la $u(t)$, si ricava la coordinata $z(t)$ della carica oscillante:

$$z(t) = z(0) + \int_0^t u(t) dt = \frac{\delta}{q} \frac{I_M}{\omega} \sin \omega t,$$

avendo posto $z(0) = 0$. Facendo uso del metodo simbolico, possiamo scrivere

$$\tilde{Z}(t) = \frac{\delta}{q} \frac{I_M}{j\omega} e^{j\omega t}. \quad [10.10.15]$$

Con riferimento alla figura 10.9, poniamo inoltre

$$\mathbf{e}_{r'} = \mathbf{e}_{r'_0} + \Delta \mathbf{e}',$$

avendo indicato con $\mathbf{e}_{r'_0}$ il versore della direzione orientata dal punto-campo P verso il centro O del dipolo e con $\mathbf{e}_{r'}$ il versore orientato verso la posizione istantanea apparente della carica. Osserviamo che il vettore $\Delta \mathbf{e}'$ ha un estremo fisso (la coda) e l'altro mobile lungo l'arco della circonferenza di raggio unitario centrata in P e giacente nel piano della figura.

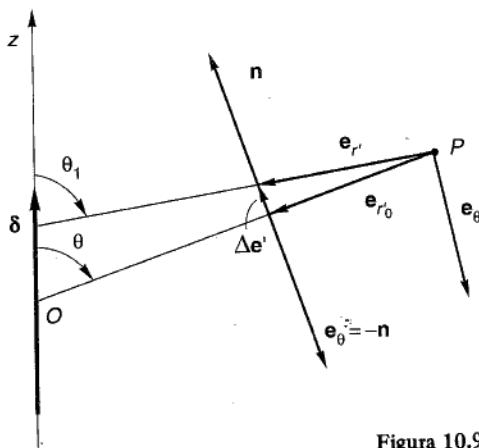


Figura 10.9

Poiché si suppone che il punto P sia nella regione di campo lontano, la distanza OP è molto maggiore di δ , e può scriversi, con ottima approssimazione,

$$\Delta \mathbf{e}' = |\Delta \mathbf{e}'| \mathbf{n} = \Delta e' \mathbf{n}, \quad [10.10.16]$$

avendo indicato con \mathbf{n} il versore della normale a OP . Si ha inoltre (vedi fig. 10.9)

$$\theta_1 \approx \theta$$

e

$$\frac{z \sin \theta}{|\Delta \mathbf{e}'|} \approx \frac{r}{1},$$

avendo indicato con r la distanza di P da O .

Tenendo conto poi del ritardo, pari (con ottima approssimazione) a r/c , con cui l'osservatore in P è informato del moto della carica q , possiamo scrivere, in notazione simbolica,

$$\tilde{\Delta} e'(t) = \frac{\sin \theta}{r} \tilde{Z}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\sin \theta}{r} \frac{\delta}{q} \frac{I_M}{j\omega} e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}. \quad [10.10.17]$$

Riprendendo l'espressione di Feynman del campo \mathbf{E}_{rad} , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}}(P, t) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{e}' = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta \mathbf{e}' + \mathbf{e}'_{r_0}) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta e'), \end{aligned} \quad [10.10.18]$$

avendo indicato con $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{n}$ il versore della linea coordinata θ del sistema di coordinate sferiche centrato in O . Si vede così che la sola componente non nulla di \mathbf{E}_{rad} è la componente E_θ :

$$E_\theta(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Delta e'(t)],$$

che, in notazione simbolica, può essere riscritta nella forma

$$\tilde{E}_\theta(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\tilde{\Delta} e'(t)].$$

Sostituendo la [10.10.17] in questa espressione, si ha quindi

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\theta(P, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{I_M \delta}{j\omega q} e^{j\omega t} e^{-jkr} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\sin \theta}{r} \frac{I_M \delta}{j\omega q} (j\omega)^2 e^{j\omega t} e^{-jkr} = \\ &= \frac{Z_0}{4\pi} I_M \delta j \frac{k}{r} \sin \theta e^{-jkr} e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

la quale coincide con la [10.10.13].

In maniera del tutto simile, la [10.9.8] consente di ricavare la [10.10.11].

10.10.3 Energia irradiata dal dipolo

Veniamo ora all'energia associata all'onda irradiata da un dipolo. Consideriamo I_{em} , il *valor medio*, nel periodo T , dell'intensità istantanea i_{em} :

$$I_{\text{em}}(P) = \langle i_{\text{em}}(P, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i_{\text{em}}(P, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_\theta^2(P, t)}{Z_0} dt;$$

tal grandeza viene di solito indicata come *intensità dell'onda* (sottointendendo "media"). Ricordando l'espressione del valor medio del prodotto di due funzioni sinusoidali (vedi app. C), si ha

$$I_{\text{em}}(P) = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} \Re \{ \widetilde{E}_\theta(P) \widetilde{E}_\theta^*(P) \} = \frac{|\widetilde{E}_\theta(P)|^2}{2 Z_0}. \quad [10.10.19]$$

Chiediamoci ora quanto valga la *potenza istantanea* irradiata dal dipolo; ricordando il teorema di Poynting (vedi § 9.10), si ha

$$\mathbf{P}_{\text{irr}}(t) = \iint_{\Sigma} \mathbf{P}(P, t) \cdot \mathbf{n} dS, \quad [10.10.20]$$

essendo Σ una generica superficie chiusa contenente il dipolo. Anche in questo caso, vista la grande rapidità di variazione nel tempo di $\mathbf{P}_{\text{irr}}(t)$, ciò che effettivamente interessa è il suo valor medio nel periodo, che viene solitamente denominato *potenza irradiata* P_{irr} (sottointendendo, anche qui "media"). Si ha dunque

$$P_{\text{irr}} = \langle \mathbf{P}_{\text{irr}}(t) \rangle = \left\langle \iint_{\Sigma} \mathbf{P}(P, t) \cdot \mathbf{n} dS \right\rangle; \quad [10.10.21]$$

l'operazione di media temporale può passare sotto il segno di integrale (poiché Σ è fissa):

$$P_{\text{irr}} = \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{P}(P, t) \rangle \cdot \mathbf{n} dS,$$

che ricordando la definizione di vettore di Poynting complesso [10.5.21], può scrisarsi nella forma

$$P_{\text{irr}} = \iint_{\Sigma} \Re \{ \widetilde{\mathbf{P}} \} \cdot \mathbf{n} dS = \Re \left\{ \iint_{\Sigma} \widetilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} dS \right\}. \quad [10.10.22]$$

Nel nostro caso,¹³ il vettore $\widetilde{\mathbf{P}}$ è reale, è diretto lungo r (vedi fig. 10.7) e ha modulo

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathbf{P}}| &= \left| \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{E}} \times \widetilde{\mathbf{H}}^* \right| = \left| \frac{1}{2} \widetilde{E}_\theta \widetilde{H}_\varphi^* \right| = \frac{Z_0 I_M^2 \delta^2}{2 \times 16 \pi^2} \frac{k^2}{r^2} \sin^2 \theta = \\ &= \frac{Z_0}{8} I_M^2 \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad [10.10.23]$$

¹³ Supponiamo che la superficie Σ sia posta nella regione di campo lontano, ove valgono le [10.10.11]÷[10.10.13].

Sostituendo questa espressione nella [10.10.22], applicata a una sfera centrata nell'origine, si ha

$$\begin{aligned} P_{\text{irr}} &= \frac{1}{2} \frac{Z_0 I_M^2 \delta^2}{16\pi^2} \frac{k^2}{r^2} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{Z_0 I_M^2 \delta^2 k^2}{12\pi} = \frac{\pi}{3} Z_0 I_M^2 \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2. \end{aligned} \quad [10.10.24]$$

Come si vede, la potenza irradiata dal dipolo è indipendente da r e rimane quindi invariata per distanze comunque grandi.

La [10.10.23] consente inoltre di tracciare il cosiddetto *diagramma di radiazione del dipolo*, che descrive il modo in cui varia la potenza irradiata in funzione della direzione. Infatti, considerando un elemento dS di Σ , centrato nel punto di coordinate sferiche r, θ, φ , la potenza elementare (media nel tempo) irradiata attraverso dS è pari a

$$dP_{\text{irr}} = \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \rangle = \mathbf{P} dS = \frac{Z_0}{8} I_M^2 \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta dS.$$

Dato che l'elemento di angolo solido $d\Omega$ è pari a dS/r^2 , se ne conclude che la *potenza media irradiata per unità d'angolo solido* è

$$P_\Omega = \frac{dP_{\text{irr}}}{d\Omega} = \frac{Z_0}{8} I_M^2 \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta. \quad [10.10.25]$$

Come si vede, essa varia con θ ed è indipendente da φ (come è naturale, vista la simmetria di rivoluzione del campo attorno al dipolo). Nella figura 10.10 si è illustrato l'andamento di P_Ω in funzione di θ , riportando, per ogni valore di θ , un segmento OP di lunghezza proporzionale a P_Ω : P_Ω è massima in corrispondenza del piano equatoriale ($\theta = \pi/2$) e nulla per $\theta = 0$, e cioè nella direzione stessa del dipolo.

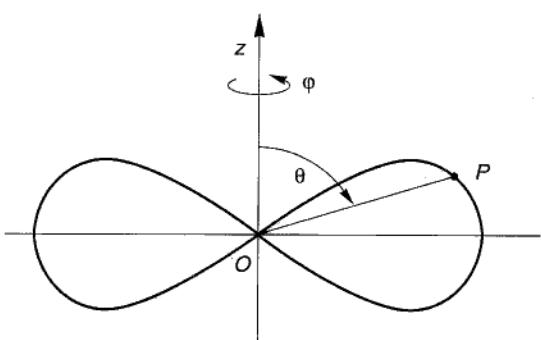


Figura 10.10

10.10.4 Il dipolo magnetico

Ci proponiamo ora di calcolare il campo elettromagnetico prodotto da un dipolo magnetico elementare oscillante, e cioè da una spira elementare percorsa da una corrente sinusoidale. Piuttosto che partire dalle espressioni dei potenziali ritardati, radio-

niamo in modo più sintetico. Cominciamo con l'osservare che, se si conosce la distribuzione del campo (prodotto da certe sorgenti) in una regione Ω priva di sorgenti, è possibile ricavare subito un altro campo (prodotto da altre sorgenti) che in Ω è soluzione delle equazioni di Maxwell. Supponendo infatti che il campo $\tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{B}}_0$ sia soluzione delle equazioni di Maxwell, dovrà essere identicamente

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}_0 = -j\omega \tilde{\mathbf{B}}_0 \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}}_0 = j \frac{\omega}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}_0. \end{cases} \quad [10.10.26]$$

Consideriamo il nuovo campo

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}'_0 = \alpha \tilde{\mathbf{B}}_0 \\ \tilde{\mathbf{B}}'_0 = \beta \tilde{\mathbf{E}}_0, \end{cases} \quad [10.10.27]$$

con α, β costanti e tali che

$$\frac{\alpha}{\beta} = -c^2. \quad [10.10.28]$$

Si verifica subito che $\tilde{\mathbf{E}}'_0, \tilde{\mathbf{B}}'_0$ sono anch'essi soluzione delle equazioni di Maxwell. Infatti sostituendo le [10.10.27] in tali equazioni, si ottiene

$$\begin{cases} \alpha \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}}_0 = -j\omega \beta \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \beta \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}_0 = j \frac{\omega}{c^2} \alpha \tilde{\mathbf{B}}_0, \end{cases}$$

e queste equazioni sono verificate, se α e β rispettano la [10.10.28].

A questo punto ricordiamo che, in condizioni stazionarie, un dipolo magnetico produce un campo magnetico che, a parte un fattore di scala, coincide con il campo elettrico prodotto da un dipolo elettrico posto nello stesso punto (vedi [7.7.7']); possiamo allora decidere di scegliere il fattore β in maniera che esso coincida con questo fattore di scala. Dal confronto della [7.7.7'] con la [3.7.4] si ricava la condizione

$$\beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} = \frac{1}{c^2};$$

sostituendo, infine, questo valore di β nella [10.10.28], si ha

$$\alpha = -1 \quad [10.10.29]$$

e ancora

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}'_0 = -\tilde{\mathbf{B}}_0 \\ \tilde{\mathbf{B}}'_0 = \frac{1}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}_0. \end{cases} \quad [10.10.30]$$

Basta ora sostituire, in queste relazioni, l'espressione del campo del dipolo elettrico per ottenere il campo del dipolo magnetico, a patto naturalmente di sostituire il simbolo del vettore "momento di dipolo magnetico" m a quello del momento di dipolo elettrico p .

10.11 Fenomeni di interferenza fra onde sinusoidali, nel vuoto

Sono detti "di interferenza" i fenomeni che si verificano quando due (o più) oscillazioni, di qualsivoglia natura, si sovrappongono in una data regione spaziale. Così, ad esempio, se lasciamo cadere due sassi contemporaneamente in punti diversi di uno specchio d'acqua, le onde che nascono si allargano via via, fino a sovrapporsi. Le oscillazioni risultanti possono essere anche molto complesse: esse costituiscono, appunto, l'effetto della *interferenza* fra i due sistemi di onde.

La dinamica dei fenomeni di interferenza è in larga misura indipendente dalla natura (meccanica, elettromagnetica, quantistica) delle oscillazioni e può essere illustrata nei suoi aspetti elementari da un primo esempio molto semplice, di natura meccanica. Immaginiamo che su una corda tesa viaggino, in versi opposti, due treni d'onde (oscillazioni trasversali della corda) sinusoidali di uguale pulsazione (vedi fig. 10.11); in un punto generico, di ascissa z , l'oscillazione risultante è data dalla somma delle due:

$$y(z, t) = Y_1 \cos(\omega t - kz) + Y_2 \cos(\omega t + kz),$$

avendo indicato con Y_1 e Y_2 le ampiezze massime delle oscillazioni componenti e con k la loro comune pulsazione spaziale. Ricordando le relazioni [C.1.3], [C.1.4] (p. 780) si ha subito

$$y(z, t) = Y \cos(\omega t + \gamma),$$

con

$$Y^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + 2 Y_1 Y_2 \cos(2kz),$$

$$\gamma = \arctg \frac{Y_2 \sin kz - Y_1 \sin kz}{Y_2 \cos kz + Y_1 \cos kz}.$$

Come si vede, l'oscillazione risultante è ancora sinusoidale e di pulsazione ω , ma la sua ampiezza massima Y dipende dal punto che si considera, poiché varia, al variare dell'ascissa z , lo sfasamento fra le due onde che si compongono. Così, nei punti per i quali è $2kz = 2n\pi$, con n intero, si ha $Y = Y_1 + Y_2$, e l'interferenza è detta *costruttiva*; nei punti, invece, in cui è $2kz = (2n+1)\pi$, con n intero, si ha $Y = Y_1 - Y_2$ e l'interferenza è detta *distruttiva* (in particolare, per $Y_1 = Y_2$, risulta $Y = 0$).

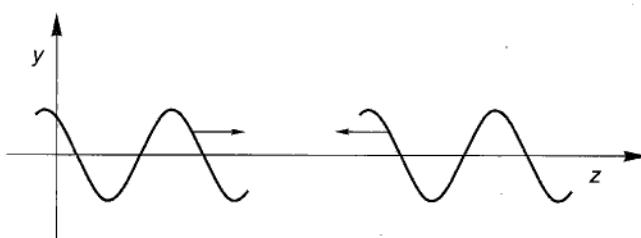


Figura 10.11

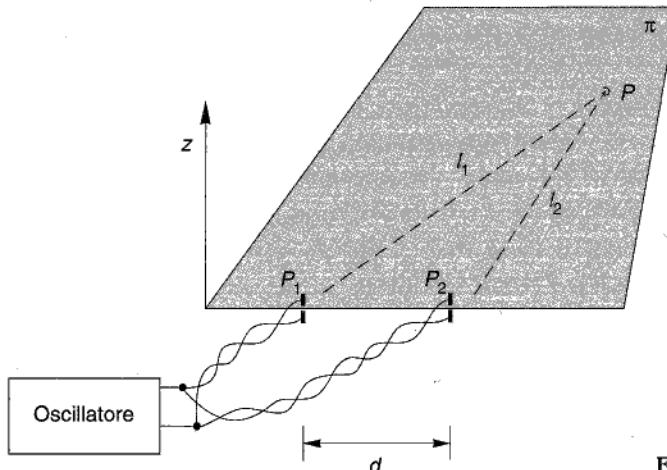


Figura 10.12

Riassumendo, nella regione di interferenza vi sono punti in cui l'ampiezza dell'onda risultante è massima, alternati a punti in cui essa è minima: in ciascun punto, l'intensità dell'onda risultante dipende dallo sfasamento che le due oscillazioni componenti presentano in quel punto.

Venendo ora al caso elettromagnetico, consideriamo l'interferenza fra le onde irraggiate da due dipoli elettrici elementari, alimentati da uno stesso oscillatore sinusoidale, di pulsazione ω (vedi fig. 10.12): i conduttori di collegamento fra questi e i dipoli siano di lunghezza variabile, in modo da poter introdurre uno sfasamento α arbitrario fra le correnti sinusoidali $i_1(t)$ e $i_2(t)$, circolanti nei due dipoli.¹⁴ Supponiamo inoltre che questi siano paralleli e posti a distanza d l'uno dall'altro. Consideriamo il campo elettrico "lontano", da essi irraggiato, in un generico punto P del piano equatoriale, ortogonale cioè ai dipoli e passante per i loro centri (indicato con π , in fig. 10.12); i campi elettrici \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 prodotti dai due dipoli nel punto P sono (vedi § 10.11) ortogonali al piano π .

Pertanto, indicando con z la direzione normale a π , si ha

$$\mathbf{E}_1(P, t) = E_1(P, t) \mathbf{i}_z,$$

$$\mathbf{E}_2(P, t) = E_2(P, t) \mathbf{i}_z,$$

e quindi

$$\mathbf{E}(P, t) = \mathbf{E}_1(P, t) + \mathbf{E}_2(P, t) = [E_1(P, t) + E_2(P, t)] \mathbf{i}_z, \quad [10.11.1]$$

avendo indicato con \mathbf{i}_z il versore dell'asse z .

¹⁴ La spiegazione tecnica di ciò esula dagli scopi di questo libro: per quel che segue è sufficiente sapere che è possibile, in qualche modo, assegnare ad arbitrio lo sfasamento fra le due correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

Nella figura 10.13, il piano del foglio coincide con il piano equatoriale π , i punti P_1, P_2 sono le tracce dei due dipoli e P è il punto in cui intendiamo valutare il campo. Posto

$$i_1 = I_M \cos \omega t,$$

$$i_2 = I_M \cos(\omega t - \alpha),$$

dalla [10.10.13] si trae (osservando che il valore di θ è $\pi/2$ per tutti i punti del piano π):

$$\tilde{E}_1 = \frac{Z_0}{4\pi} I_M \delta j \frac{k}{l_1} e^{-jkl_1},$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{Z_0}{4\pi} I_M \delta e^{-j\alpha} j \frac{k}{l_2} e^{-jkl_2}.$$

Infine, ponendo

$$\tilde{A} = \frac{Z_0}{4\pi} I_M \delta j k,$$

otteniamo

$$\tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = \tilde{A} \left(\frac{1}{l_1} e^{-jkl_1} + \frac{e^{-j\alpha}}{l_2} e^{-jkl_2} \right), \quad [10.11.2]$$

avendo indicato con l_1, l_2 le distanze di P da P_1, P_2 .

Poiché l_1 e l_2 sono molto maggiori della distanza d tra i due dipoli (stiamo infatti calcolando il campo nelle regioni "lontane"), possiamo porre, nei denominatori della [10.11.2],

$$l_1 \approx l_2 \approx l$$

e, negli esponenziali,

$$l_1 \approx l_2 + d \cos \varphi \approx l + d \cos \varphi, \quad [10.11.3]$$

essendo φ l'angolo tra P_1P (coincidente praticamente con P_2P) e P_1P_2 .

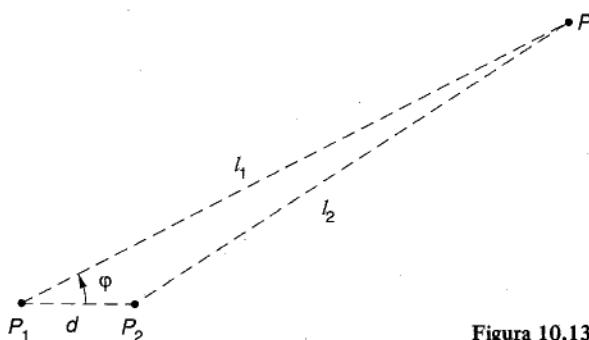


Figura 10.13

Osserviamo esplicitamente che non è possibile porre $l_1 \approx l_2 \approx l$ negli esponenziali, poiché ciò farebbe trascurare proprio la differenza di cammino che è alla base dei fenomeni di interferenza. Si noti inoltre che le distanze l_1 e l_2 sono moltiplicate per la pulsazione spaziale k , che è in genere molto grande: ciò implica che anche piccole differenze $l_1 - l_2$ hanno grande peso negli esponenziali.

Con ciò, la [10.11.2] diventa

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{A}}{l} e^{-jkl} (e^{-jkd \cos \varphi} + e^{-j\alpha}). \quad [10.11.4]$$

Per quel che riguarda il campo magnetico, si vede subito (dalla [10.10.11]) che i due vettori \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 giacciono nel piano equatoriale e sono ortogonali rispettivamente alle direzioni P_1P e P_2P (vedi fig. 10.13); pertanto, quando P è abbastanza lontano, le due direzioni tendono a coincidere e si ha

$$\tilde{B} \approx \frac{\tilde{E}_1}{c} + \frac{\tilde{E}_2}{c} = \frac{\tilde{E}}{c}. \quad [10.11.5]$$

Se ne conclude che, nei punti lontani, il campo elettromagnetico risultante coincide con il campo irraggiato da un *unico* dipolo posto a distanza l , a meno del fattore complesso

$$\tilde{\mathcal{F}} = e^{-jkd \cos \varphi} + e^{-j\alpha},$$

che tiene conto della differenza di *cammino elettromagnetico* $l_1 - l_2 \approx d \cos \varphi$ tra le due onde e dello sfasamento α tra le correnti nei due dipoli.

Osservando poi che i vettori \mathbf{E} e \mathbf{B} sono ortogonali fra loro e che il rapporto delle loro ampiezze è in ogni istante pari a c , se ne conclude che l'intensità (media nel periodo) I_{em} dell'onda risultante è (vedi [10.10.19]):

$$I_{\text{em}} = \frac{|\tilde{E}|^2}{2Z_0} = \frac{1}{2Z_0} \frac{|\tilde{A}|^2}{l^2} |\tilde{\mathcal{F}}|^2. \quad [10.11.6]$$

Ne deriva che l'intensità I_{em} dell'onda, a parità di l , varia con l'angolo φ , poiché il fattore $|\tilde{\mathcal{F}}|^2$ è pari a

$$|\tilde{\mathcal{F}}|^2 = |e^{-jkd \cos \varphi} + e^{-j\alpha}|^2 = |\cos(kd \cos \varphi) + \cos \alpha + \\ - j[\sin(kd \cos \varphi) + \sin \alpha]|^2 = 2[1 + \cos(kd \cos \varphi - \alpha)].$$

Si ha dunque

$$I_{\text{em}} = \frac{|\tilde{A}|^2}{Z_0 l^2} f(\varphi), \quad [10.11.7]$$

con

$$f(\varphi) = 1 + \cos(kd \cos \varphi - \alpha). \quad [10.11.8]$$

Dato che l'intensità $I_{1\text{em}}$ dell'onda irraggiata da uno soltanto dei due dipoli è

$$I_{1\text{em}} = \frac{|\tilde{A}|^2}{2Z_0 l^2},$$

l'espressione dell'intensità risultante I_{em} può scriversi nella forma

$$I_{\text{em}} = 2I_{1\text{em}} f(\varphi). \quad [10.11.9]$$

Si vede così che, quando la coordinata zenitale φ del punto è tale per cui

$$\cos(kd \cos \varphi - \alpha) = 1,$$

allora $f(\varphi) = 2$, $I_{\text{em}} = 4I_{1\text{em}}$ e nel punto stesso si ha interferenza costruttiva fra le due onde;¹⁵ quando, invece, la coordinata zenitale φ del punto P è tale per cui

$$\cos(kd \cos \varphi - \alpha) = -1,$$

ne risulta $f(\varphi) = 0$, $I_{\text{em}} = 0$ (interferenza distruttiva).

Per dare un'idea chiara di come varia l'intensità I_{em} in funzione di φ , si sono riportati nella figura 10.14 i diagrammi polari di $f(\varphi)$, per diversi valori del parametro $kd = 2\pi d/\lambda$ e per $\alpha = 0$: in questa rappresentazione l'ampiezza dell'angolo (*anomalia*) è misurata in senso antiorario a partire dalla semiretta orientata x assunta come asse di riferimento; il corrispondente valore di $f(\varphi)$ è dato dalla lunghezza del raggio vettore OP (nella scala per cui il raggio della circonferenza circoscritta alla figura (a) sia pari a 2).

Nel diagramma (a), il valore di kd passa da 0 (circonferenza esterna) a π (figura a "otto" più interna). Nel diagramma (b), kd varia tra π e 2π : ciascuna curva è composta di quattro lobi (due verticali e due orizzontali) e il parametro kd cresce passando dai lobi verticali esterni a quelli interni, mentre decresce passando dai lobi orizzontali esterni a quelli interni; pertanto, via via che i lobi verticali si stringono quelli orizzontali si espandono, e viceversa (i lobi verticali più esterni sono accoppiati a quelli orizzontali più interni che, al limite, si riducono a un punto). Osservazioni analoghe valgono per i diagrammi polari (c) ($2\pi \leq kd \leq 3\pi$) e (d) ($kd = 10\pi$). Si noti infine che, essendo $kd = 2\pi d/\lambda$, quando il parametro kd cresce la lunghezza d'onda λ corrispondente diminuisce; pertanto i diagrammi (a), (b), (c), (d) si riferiscono a valori decrescenti di λ .

Nei diagrammi polari della figura 10.15, i valori dei parametri kd e α sono scelti in modo da massimizzare la radiazione emessa *in avanti* (e cioè nella direzione $\varphi = 0$) e minimizzare quella emessa *all'indietro* ($\varphi = \pi$).

¹⁵ Si noti che l'intensità risultante *non* è il doppio dell'intensità della singola onda (come ingenuamente ci si sarebbe potuto attendere), ma il quadruplo: ciò in quanto l'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione.

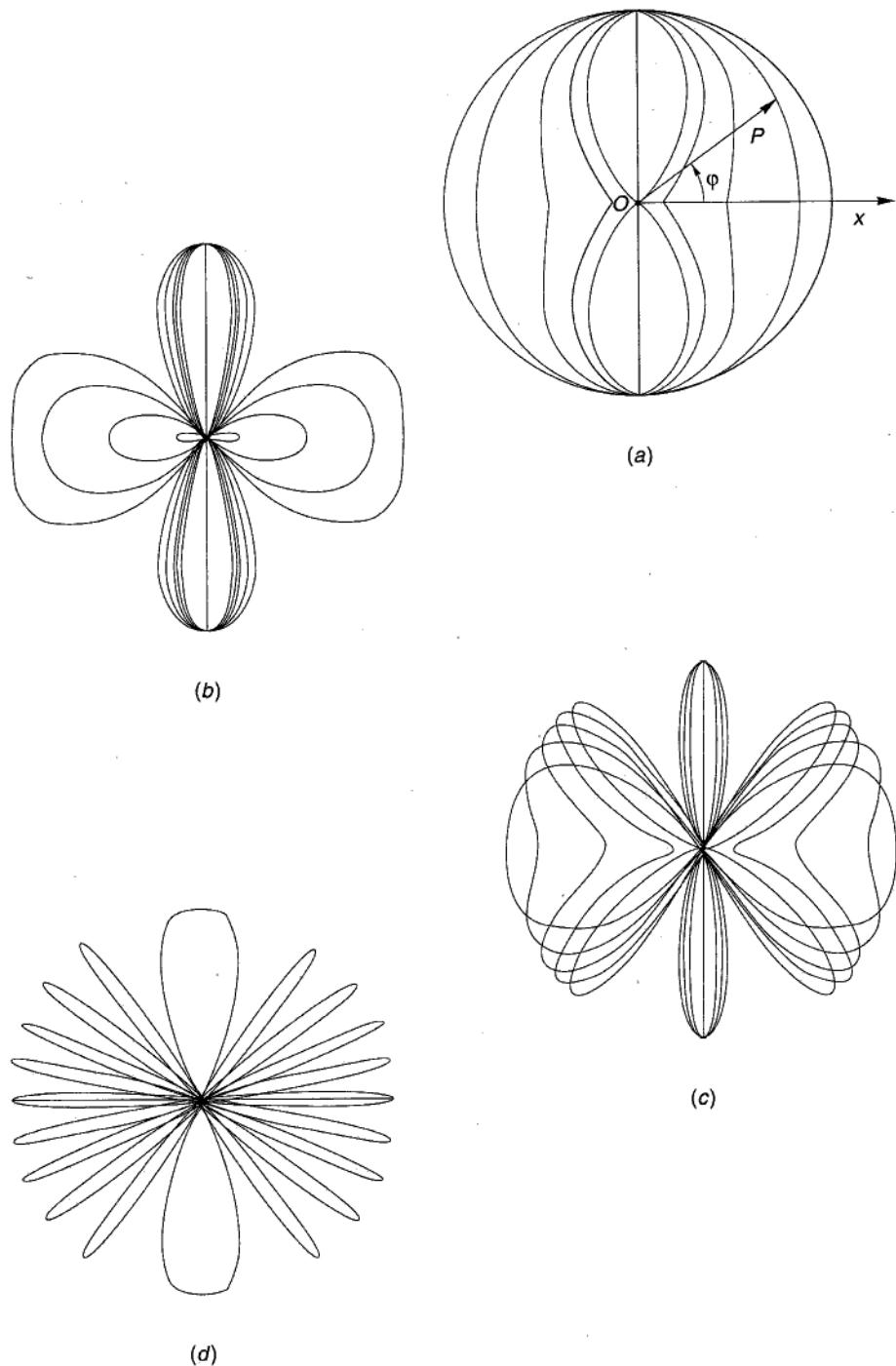


Figura 10.14

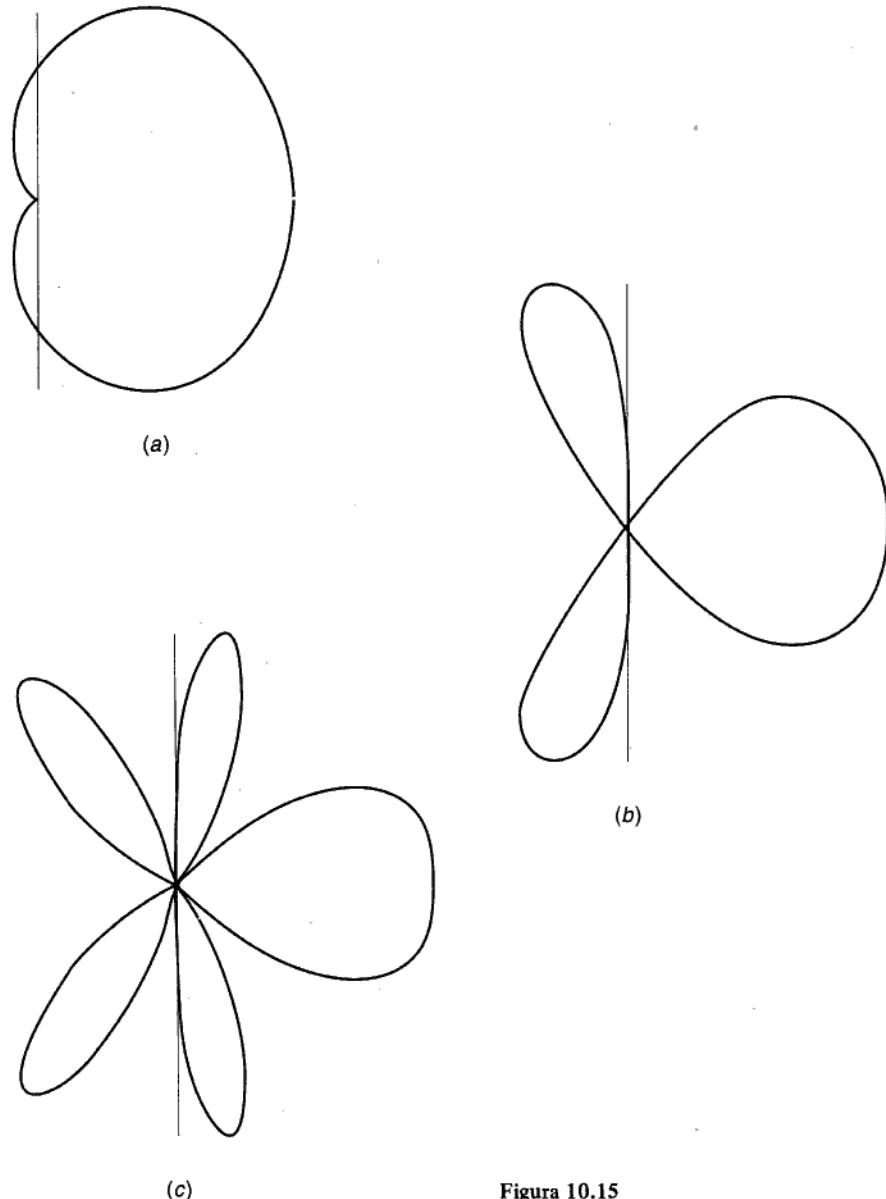


Figura 10.15

Ritornando ai diagrammi della figura 10.14, che si riferiscono a correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ in fase fra loro ($\alpha=0$), possiamo osservare che su un piano ortogonale alla direzione $\varphi=\pi/2$ (diagramma (d)), si susseguono, alternandosi fra loro, zone di intensità massima e zone di intensità minima. Nel caso delle radiazioni luminose — e qui anticipiamo uno dei risultati principali del prossimo capitolo, e cioè che la luce è una radia-

zione elettromagnetica di frequenza elevatissima — le zone di intensità massima e di intensità minima possono essere rivelate su uno schermo piano (ortogonale alla direzione $\varphi = \pi/2$) ove compaiono in forma di strisce luminose che si alternano a strisce oscure:¹⁶ sono, queste, le *frange di interferenza*, le quali si infittiscono al crescere del parametro kd (e cioè del rapporto fra la distanza d tra i dipoli e la lunghezza d'onda λ) e anche, per un banale effetto geometrico, all'avvicinarsi dello schermo al punto-sorgente O .

Siamo ora in grado di calcolare anche la *distanza tra due frange successive*; a tal fine consideriamo l'intersezione dello schermo piano di rilevamento con il piano equatoriale (che coincide con il piano di figura) e orientiamo questa retta (parallela all'asse x e posta a distanza L da esso) come l'asse x .

Assumendo un'origine, su tale retta, in corrispondenza della direzione $\varphi = \pi/2$ (punto O' in fig. 10.16), l'angolo φ corrispondente a un generico punto P (di ascissa x') è pari a

$$\varphi \approx \frac{\pi}{2} - \frac{x}{L}, \quad \text{con} \quad \frac{x}{L} \ll 1. \quad [10.11.10]$$

I massimi di intensità I_{em} si ottengono dalla [10.11.8], ponendo

$$\cos(kd \cos \varphi - \alpha) = 1,$$

la quale, per $\alpha = 0$ e φ dato dalla [10.11.10], fornisce

$$\cos \left[kd \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{L} \right) \right] = 1,$$

e, quindi

$$kd \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{L} \right) = 2n\pi,$$

con n intero arbitrario.

Pertanto, le ascisse x_n delle frange di intensità massima (intorno alla direzione $\varphi = \pi/2$) sono date dalla relazione

$$kd \sin \left(\frac{x_n}{L} \right) = 2n\pi, \quad [10.11.11]$$

la quale, confondendo $\sin(x_n/L)$ con x_n/L , fornisce

$$x_n = 2\pi \frac{L}{kd} n = L \frac{\lambda}{d} n. \quad [10.11.12]$$

¹⁶ Queste strisce sono rettilinee e parallele ai dipoli: naturalmente, se i dipoli sono puntiformi, la lunghezza delle strisce è limitata, poiché, via via che si percorre una di esse, la distanza dalle sorgenti cresce, e conseguentemente, l'intensità della frangia diminuisce fino a non essere osservabile.

Ne segue che la distanza $\Delta = x_{n+1} - x_n$ tra due frange successive è

$$\Delta = L \frac{\lambda}{d}, \quad [10.11.13]$$

la quale è facile da memorizzare quando si osservi che il prodotto fra le due distanze Δ e d ("orizzontali", in figura) è uguale al prodotto delle due distanze L e λ ("verticali").

Osserviamo inoltre che, se lo sfasamento α tra le due correnti è diverso da zero, la posizione delle frange si modifica, rispetto alla [10.11.12], e si ha

$$x_n = L \frac{\lambda}{d} n + \frac{\alpha}{2\pi} L \frac{\lambda}{d} = L \frac{\lambda}{d} \left(\frac{\alpha}{2\pi} + n \right); \quad [10.11.14]$$

la distanza Δ tra due frange adiacenti rimane, tuttavia, immutata.

Resta ora da dire qualcosa circa i fenomeni di interferenza che si verificano in corrispondenza di direzioni diverse da quelle fin qui considerate ($\varphi = \pi/2$). Un modo sintetico per individuare le frange di interferenza è quello di considerare, nello spazio, il luogo dei punti P per i quali la differenza di cammini elettromagnetici $l_1 - l_2$ (con riferimento alla [10.11.3] e alla fig. 10.13) sia pari a un numero intero di lunghezze d'onda. Questi luoghi sono, per definizione, iperbolidi di rotazione aventi le due sorgenti P_1 e P_2 come fuochi.¹⁷

Le intersezioni di queste famiglie di superfici con schermi piani di osservazione danno le famiglie di frange di interferenza. Nella figura 10.17 sono riportate le intersezioni degli iperbolidi con il piano equatoriale: le tracce delle due sorgenti (considerate ortogonali al piano di figura) sono indicate qui con P_1 , P_2 . Gli iperbo-

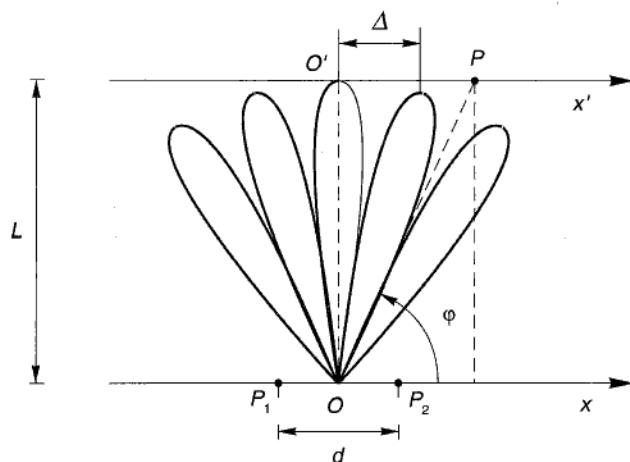


Figura 10.16

¹⁷ Ricordiamo che un *iperboloid* è definito come il luogo dei punti per i quali la differenza delle distanze rispetto a due punti fissi (fuochi) è costante.

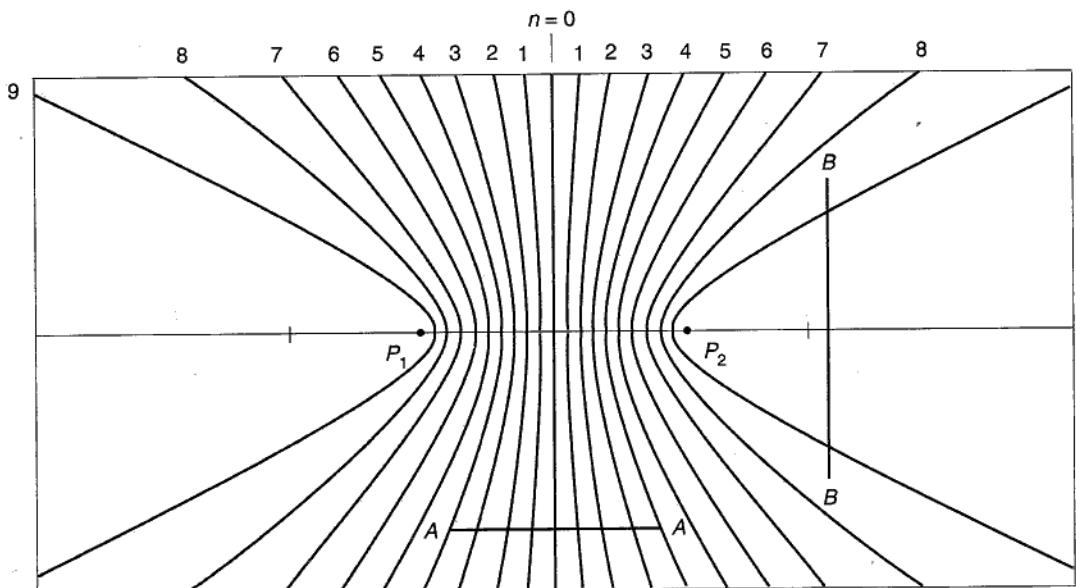


Figura 10.17

loidi si ottengono facendo ruotare le iperboli disegnate in figura attorno alla retta P_1P_2 ; chiaramente, le frange su un piano (perpendicolare al foglio) avente traccia $A-A$ ($\varphi=\pi/2$) sono abbastanza rettilinee, poiché gli iperbolidi corrispondenti sono molto "aperti", mentre le frange su un piano (perpendicolare al foglio) avente traccia $B-B$ ($|\varphi| \leq \pi/4$), sono circolari, poiché gli iperbolidi sono abbastanza "conici" in questa zona.

A conclusione di questo paragrafo, osserviamo che ci si è volutamente limitati, qui, ai fenomeni di interferenza più semplici: e cioè quelli prodotti da onde sinusoidali rigorosamente monocromatiche e di uguale polarizzazione. Per ciò che riguarda i fenomeni di interferenza fra radiazioni *luminose*, si rimanda il lettore al capitolo successivo, dove la trattazione sarà ripresa tenendo conto della natura statistica dei segnali luminosi e della conseguente "coerenza" parziale dei segnali stessi. In quella sede, si esamineranno pure alcune delle principali esperienze di interferenza luminosa (specchi di Fresnel, fori di Young, interferometro di Michelson, esperimento di Hanbury Brown e Twiss).

10.12 Diffrazione delle onde elettromagnetiche: introduzione

Nel paragrafo precedente abbiamo preso in esame una classe di fenomeni – quelli di interferenza – che sono tipici della propagazione per onde. Strettamente connessi

con questi sono i cosiddetti fenomeni di *difrazione*, che si verificano quando un'onda incontra sul suo cammino un ostacolo (oppure un foro) le cui dimensioni trasversali siano confrontabili¹⁸ con la lunghezza d'onda, oppure quando si osservi il comportamento dell'onda in punti la cui distanza dal bordo dell'ostacolo sia confrontabile con λ , oppure infine quando l'onda venga concentrata in una regione molto limitata, come accade nel fuoco di una lente (ma di ciò parleremo nel capitolo seguente).

Nella regione in cui si verifica la difrazione, l'intensità dell'onda varia notevolmente da punto a punto, dando luogo a *frange di diffrazione* analoghe a quelle di interferenza, e si ha inoltre una sensibile variazione della direzione di propagazione dell'onda.

La difrazione delle onde elettromagnetiche è tra i fenomeni più difficili da studiare rigorosamente, poiché gli ostacoli frapposti alla propagazione dell'onda divengono sede di distribuzioni di correnti e di cariche (come vedremo nel capitolo seguente), le quali contribuiscono anch'esse a determinare il campo elettromagnetico, ma non sono note a priori, poiché a loro volta dipendono da esso.

Ne deriva che la risoluzione dei problemi di difrazione richiede l'integrazione delle equazioni del campo in condizioni nelle quali non sono note a priori le sorgenti, e occorre determinare anche queste, insieme con il campo, a partire da condizioni ai limiti assegnate. Per questi motivi, si conoscono ancora oggi poche soluzioni esatte di problemi di difrazione: esistono, però, fin dal secolo scorso, efficaci tecniche di analisi approssimata che forniscono risultati più che soddisfacenti, quando applicate alla difrazione della luce.

In questo paragrafo, e nei due seguenti, esamineremo il caso della difrazione di un'onda elettromagnetica (non necessariamente luminosa) da un semipiano conduttore. E', questo, un problema di cui è nota la soluzione analitica (quella di Sommerfeld, 1896) e che ben si presta a illustrare gli aspetti più tipici della difrazione elettromagnetica. Piuttosto, però, che esporre il procedimento risolutivo di Sommerfeld, in verità molto complicato, si è preferito far ricorso a un metodo numerico che, se non dà la soluzione esatta, ha però il pregio di essere abbastanza semplice. Ciò darà modo di introdurre poi una tecnica analitica approssimata che apre la strada alla teoria classica della difrazione della luce (di Huygens-Fresnel-Kirchhoff) che sarà esposta nel capitolo successivo.

Conviene innanzitutto esaminare un caso molto semplice che, pur non dando luogo a tipici fenomeni di difrazione, riesce utile per il seguito: il caso di un'onda piana che incide ortogonalmente su un *piano* (non un semipiano) conduttore. Consideriamo un'onda piana sinusoidale, polarizzata linearmente, propagantesi lungo l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane xyz (fig. 10.18), con il vettore E_i diretto lungo l'asse x , e supponiamo che essa incida ortogonalmente su uno schermo piano conduttore ideale π (dotato, cioè di conducibilità infinita) disposto nel piano $z=0$ (ombreggiato in fig. 10.18).

¹⁸ Con ciò, intendiamo che il rapporto D/λ sia, ad esempio, non superiore a 10^2 o 10^3 .

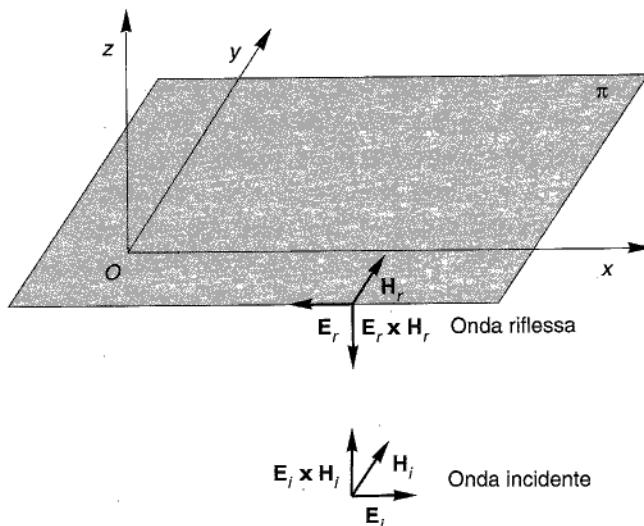


Figura 10.18

Per effetto dell'onda incidente, si induce nello schermo una distribuzione di corrente superficiale che, vista la simmetria del sistema, è parallela all'asse x ed è indipendente da x e y . Tale corrente, la cui densità superficiale indicheremo con \mathbf{J}_{S_0} , deve essere tale da produrre, a sua volta, un campo elettrico \mathbf{E}_r capace di annullare il campo incidente \mathbf{E}_i in tutti i punti del piano conduttore π (vedi § 9.6): $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = 0$, per $P \in \pi$.

La soluzione di questo problema si ottiene subito osservando che la corrente \mathbf{J}_{S_0} produce due onde elettromagnetiche piane che si allontanano dal piano π : quella che si propaga nella direzione delle z positive (e cioè al di sopra dello schermo) è tale da annullare l'onda incidente in ogni punto-istante, mentre l'altra, che si propaga nel verso delle z negative (e che è perciò detta *riflessa*), interverisce con l'onda incidente, dando luogo, come si vedrà, a un'onda stazionaria.

In notazione simbolica (e omettendo, come al solito, il fattore $e^{j\omega t}$) l'onda incidente è descritta da:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_i = \widetilde{E}_i \mathbf{i}_x = E_0 e^{-jkz} \mathbf{i}_x \\ \widetilde{\mathbf{H}}_i = \widetilde{H}_i \mathbf{i}_y = \frac{E_0}{Z_0} e^{-jkz} \mathbf{i}_y, \end{cases} \quad [10.12.1]$$

con $k = \omega/c$ e $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, mentre l'onda riflessa è del tipo

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_r = \widetilde{E}_r \mathbf{i}_x = E_r e^{+jkz} \mathbf{i}_x \\ \widetilde{\mathbf{H}}_r = \widetilde{H}_r \mathbf{i}_y = -\frac{E_r}{Z_0} e^{+jkz} \mathbf{i}_y. \end{cases} \quad [10.12.2]$$

Dovendo essere, per $z=0$, $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = 0$, si ottiene $E_r = -E_0$, e quindi

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}_i + \widetilde{\mathbf{E}}_r = (E_0 e^{-jkz} - E_0 e^{+jkz}) \mathbf{i}_x = (-2jE_0 \sin kz) \mathbf{i}_x \\ \widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{\mathbf{H}}_i + \widetilde{\mathbf{H}}_r = \frac{1}{Z_0} (E_0 e^{-jkz} + E_0 e^{+jkz}) \mathbf{i}_y = \frac{1}{Z_0} (2E_0 \cos kz) \mathbf{i}_y. \end{cases}$$

Tornando nel dominio del tempo, si ha, per $z < 0$,

$$\begin{cases} \mathbf{E}(P, t) = \Re \{ \widetilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \} = (2E_0 \sin kz \sin \omega t) \mathbf{i}_x \\ \mathbf{H}(P, t) = \Re \{ \widetilde{\mathbf{H}} e^{j\omega t} \} = \frac{1}{Z_0} (2E_0 \cos kz \sin \omega t) \mathbf{i}_y; \end{cases} \quad [10.12.3]$$

e per $z > 0$,

$$\mathbf{E}(P, t) = \mathbf{H}(P, t) = 0.$$

Che questa sia la soluzione (unica) del nostro problema appare evidente quando si osservi che i campi \mathbf{E} e \mathbf{H} così costruiti verificano le equazioni di Maxwell in ogni punto dello spazio che non appartenga allo schermo, rispettano la relazione costitutiva del conduttore ideale ($\mathbf{E}=0$) e soddisfano le condizioni al contorno (vedi § 9.6) del problema. La densità di corrente superficiale \mathbf{J}_{S_0} è data subito dall'ultima delle [9.6.16]:

$$\mathbf{J}_{S_0} = \mathbf{n} \times \mathbf{H},$$

essendo \mathbf{n} la normale al piano orientata nel verso delle z negative; si ha quindi

$$\mathbf{J}_{S_0} = \left(2 \frac{E_0}{Z_0} \sin \omega t \right) \mathbf{i}_x. \quad [10.12.4]$$

Come si vede, la densità di corrente indotta è uniforme in tutto lo schermo, è diretta come il campo elettrico inducente, e ha ampiezza pari a $2E_0/Z_0$. Si osservi inoltre che la soluzione, nel semispazio $z < 0$, non ha le caratteristiche di un'onda viaggiante, bensì quelle di un'onda stazionaria: nella sua espressione è infatti scomparsa la dipendenza dalla variabile $(\omega t - kz)$, tipica dell'onda viaggiante, mentre è rimasta una dipendenza da z e t del tipo $\sin kz \cdot \sin \omega t$, la quale mostra che in tutti i punti dello spazio il campo oscilla con la stessa fase e che inoltre l'ampiezza massima dell'oscillazione varia (sinusoidalmente) da punto a punto, presentando punti in cui l'oscillazione è costantemente nulla (i nodi dell'onda, che si hanno per $kz = n\pi$, con n intero positivo) e punti in cui essa è massima al variare di z (i ventri, che si hanno per $kz = n\pi/2$, con n intero positivo). In poche parole, la situazione è analoga a quella che si verifica tipicamente in una corda di chitarra, quando viene pizzicata.

Vale la pena soffermarci ancora qualche momento su questo caso, cogliendo l'occasione per far cenno a un argomento che, anche se collegato solo parzialmente con i fenomeni di diffrazione, è di notevole interesse fisico.

Osserviamo che, per effetto dell'interazione tra le correnti indotte nello schermo e il campo magnetico, nascono delle forze sul piano conduttore; la forza agente per unità d'area è pari (vedi § 7.9) a

$$\mathbf{p}_{\text{rad}} = \mathbf{J}_{S_0} \times \mathbf{B}^*, \quad [10.12.5]$$

con $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}/2$ (la presenza del fattore 1/2 deriva dal fatto che, per calcolare la forza agente su un elemento d'area, occorre considerare il campo prodotto dalle correnti superficiali, escludendo però quelle circolanti nell'elemento stesso, analogamente a quanto fatto in § 4.2 per il calcolo della pressione elettrostatica).

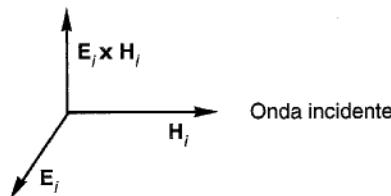
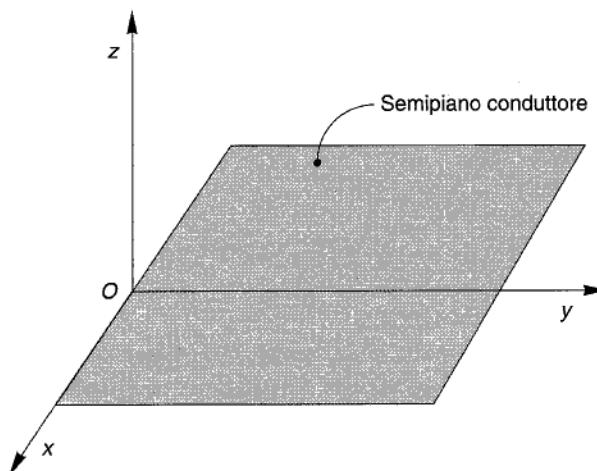
Sostituendo la [10.12.4] nella [10.12.5], si ha

$$\mathbf{p}_{\text{rad}} = \frac{2}{c} \mathbf{P}_i, \quad [10.12.6]$$

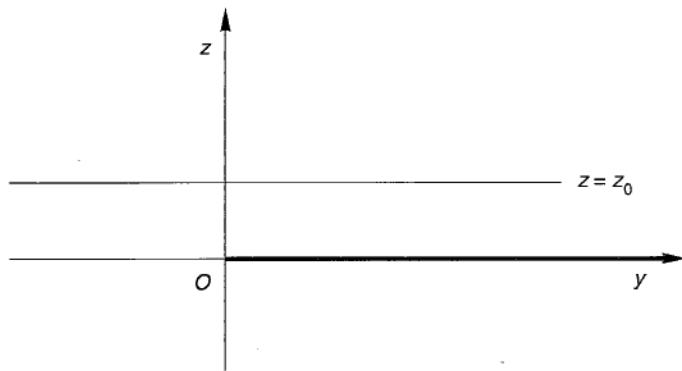
essendo \mathbf{P}_i il vettore di Poynting dell'onda incidente. La forza specifica \mathbf{p}_{rad} è ortogonale allo schermo ed è diretta come \mathbf{P}_i : essa agisce pertanto come una vera e propria pressione, che è detta, appunto *pressione di radiazione*.

Se ne conclude che l'onda elettromagnetica, investendo la superficie conduttrice, esercita su essa un'azione meccanica descritta da \mathbf{p} : risultato, questo, in perfetto accordo con l'attribuzione di una quantità di moto al campo elettromagnetico (vedi § 9.11). D'altra parte, la pressione di radiazione può essere spiegata facilmente anche in termini di una teoria corpuscolare della radiazione, immaginando che questa sia composta di particelle (*fotoni*), dotate di massa di riposo nulla (vedi § 13.10), che viaggiano alla velocità c , trasportando un *quanto* di energia pari a $h\nu$ (dove ν è la frequenza della radiazione e h è la *costante di Planck*: $h = 6,621618 \times 10^{-34} \text{ J s}$) e una quantità di moto pari a $h\nu/c$. Noto il numero di fotoni per unità di volume della radiazione incidente, è immediato calcolare l'azione meccanica che essi esercitano sullo schermo (provi il lettore a farlo, a titolo di esercizio).

Esaminiamo ora il caso della diffrazione da un *semipiano conduttore* ($z=0, y \geq 0$), investito dalla stessa onda piana del caso precedente (fig. 10.19a). Il problema è molto più difficile di quello già trattato, poiché le condizioni di simmetria consentono ora di dire soltanto che la soluzione è indipendente da x (ma non anche da y). Inoltre, in questo caso, l'onda si propaga anche al di là dello schermo (per $z > 0$), dando luogo, appunto, a fenomeni di diffrazione. Per dare subito un'idea di questi fenomeni, anticipiamo, almeno a livello qualitativo, le caratteristiche della soluzione. In sintesi, se consideriamo il campo in un piano parallelo al piano coordinato yz (ad esempio, il piano $x=0$), e, in particolare, su una retta $z=z_0$, di tale piano (con un valore z_0 abbastanza piccolo), come nella figura 10.19b (nella quale, si noti, lo schermo conduttore è "visto", in sezione, coincidente con il semiasse $y > 0$, ingrossato nel disegno), l'andamento dell'intensità I_{em} dell'onda (rapportata a quella, I_{emi} , dell'onda incidente) in funzione di y è descritto qualitativamente dal grafico di figura 10.20. Si vede, così, che:



(a)



(b)

Figura 10.19

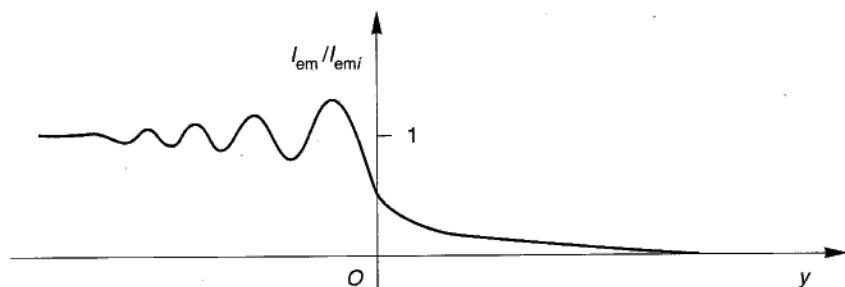


Figura 10.20

- 1) il campo elettromagnetico è diverso da zero, anche immediatamente dietro lo schermo conduttore, ma tende a zero via via che ci si addentri nello schermo (per valori crescenti di y);
- 2) in prossimità del bordo dello schermo, l'intensità dell'onda presenta zone alterne di massimi e minimi che si presentano come *frange* di diffrazione, analoghe a quelle di interferenza;
- 3) allontanandosi dal bordo dello schermo (e cioè per $y < 0$ crescenti in modulo), l'intensità dell'onda tende al valore di quella incidente.

Nel paragrafo che segue affronteremo quantitativamente il problema.

*10.13 Diffrazione da un semipiano conduttore: soluzione rigorosa

Procederemo per gradi: in un primo momento, calcoleremo il campo elettromagnetico prodotto da una distribuzione di correnti arbitrariamente assegnata nel semipiano $z=0, y \geq 0$ (fig. 10.19); poi, calcoleremo la effettiva distribuzione di corrente che si produce nello schermo conduttore investito dall'onda incidente; infine, calcoleremo il campo risultante, per sovrapposizione del campo dell'onda incidente e del campo prodotto dalle correnti indotte nello schermo.

Piuttosto che ricorrere al classico procedimento analitico di Sommerfeld, ci serviremo di un metodo numerico: ciò sia per dare un'idea delle tecniche di calcolo oggi più in uso, sia per introdurre il lettore, in maniera semplice, alle equazioni integrali. I risultati saranno poi confrontati con quelli analitici.

A. Campo prodotto da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente

Cominciamo col prendere in esame un caso particolarmente semplice: quello di un unico filo rettilineo, disposto lungo l'asse x e percorso da una corrente i , costante in funzione di x (e cioè nelle diverse sezioni del filo) e variabile sinusoidalmente nel tempo, con pulsazione ω e ampiezza I_0 .¹⁹

¹⁹ Il lettore non si preoccupi della fisica realizzabilità di una tale distribuzione di corrente, poiché essa è qui usata soltanto come strumento matematico atto a costruire, per sovrapposizione, la distribuzione effettiva del problema in esame. Comunque, non sarebbe difficile mostrare che essa è, in effetti, fisicamente realizzabile, con opportuni artifici.

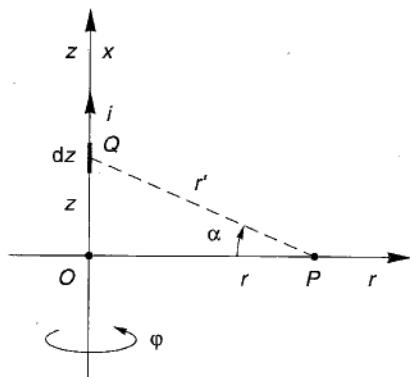


Figura 10.21

Il sistema presenta evidentemente simmetria di rotazione attorno all'asse x e di traslazione lungo x : conviene, quindi, introdurre un sistema di coordinate cilindriche con $z=x$ e le altre coordinate r, φ come nella figura 10.21. Il potenziale vettore \mathbf{A} ha, come unica componente non nulla, A_z , e vale, nel generico punto P , a distanza r dal filo (vedi [10.10.1']):

$$\tilde{A}_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}r'}}{r'} dz, \quad [10.13.1]$$

nella quale si è fatto uso del metodo simbolico, ponendo $\tilde{I} = I_0 e^{j\omega t}$ e omettendo, come al solito, il fattore $e^{j\omega t}$, e si è indicata con r' la distanza fra il punto-campo P e il punto-sorgente Q .²⁰

Ponendo $k = \omega/c$ e osservando che $r' = \sqrt{r^2 + z^2}$, la [10.13.1] può essere riscritta nella forma (essendo r indipendente da z)

$$\tilde{A}_z(r) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-jkr\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} dz = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-jkr}\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}} d\left(\frac{z}{r}\right),$$

e, introducendo l'angolo $\alpha = \operatorname{arctg}(z/r)$ (come in fig. 10.21):

$$\tilde{A}_z(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-jkr\sqrt{1+(\operatorname{tg}\alpha)^2}}}{\sqrt{1+(\operatorname{tg}\alpha)^2}} d(\operatorname{tg}\alpha) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-jkr \cdot \frac{1}{\cos\alpha}}}{\frac{1}{\cos\alpha}} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha.$$

²⁰ Si noti che, se nella [10.13.1] mancasse l'esponenziale complesso, se cioè la corrente fosse costante nel tempo, l'integrale divergerebbe a causa del fatto che le sorgenti si estendono all'infinito: è proprio l'esponenziale complesso che invece consente all'integrale di convergere.

Posto poi $u = 1/\cos \alpha$ e quindi

$$d\alpha = d\left(\arccos \frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{u}\right)^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) = \frac{du}{u} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}},$$

si ottiene

$$\tilde{A}_z(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_{u=1}^{u=+\infty} \frac{e^{-jkru}}{\sqrt{u^2-1}} du = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \left[\int_1^{+\infty} \frac{\cos(kru)}{\sqrt{u^2-1}} du - j \int_1^{+\infty} \frac{\sin(kru)}{\sqrt{u^2-1}} du \right]. \quad [10.13.2]$$

I due integrali (impropri) che figurano nella [10.13.2] sono funzioni della sola variabile kr ; posto

$$\begin{cases} J_0(kr) = \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(kru)}{\sqrt{u^2-1}} du, \\ Y_0(kr) = -\frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(kru)}{\sqrt{u^2-1}} du \end{cases} \quad [10.13.3]$$

la [10.13.2] può essere riscritta nella forma

$$\tilde{A}_z(r) = -\frac{\mu_0 I_0}{4} [Y_0(kr) + jJ_0(kr)]. \quad [10.13.2']$$

Posto

$$\tilde{H}_0(kr) = J_0(kr) - jY_0(kr), \quad [10.13.4]$$

la [10.13.2'] diventa

$$\tilde{A}_z(r) = -\frac{\mu_0 I_0}{4} j\tilde{H}_0(kr). \quad [10.13.2'']$$

Le funzioni $J_0(kr)$ e $Y_0(kr)$ sono dette, rispettivamente, *funzione di Bessel di prima specie-ordine zero* e *funzione di Bessel di seconda specie-ordine zero*, mentre la funzione $\tilde{H}_0(kr)$ è detta *funzione di Hankel di seconda specie-ordine zero* (frequentemente è indicata con il simbolo $\tilde{H}_0^{(2)}(kr)$).

I valori numerici di queste funzioni, al variare del loro argomento, sono riportati su ben note tabelle, mentre le figure 10.22 e 10.23 danno un'idea del loro andamento.²¹ Nelle figure sono riportati, insieme con i grafici delle J_0 e Y_0 , anche quelli delle funzioni di ordine superiore che, in questa sede, non vengono usate.

²¹ Il lettore... non si preoccupi eccessivamente della complessità delle [10.13.3], poiché, per quel che segue, sarà sufficientemente considerare *note* queste funzioni alla stregua delle funzioni elementari (sin, cos, ln ecc.). Nei diagrammi, l'argomento kr è indicato con x .

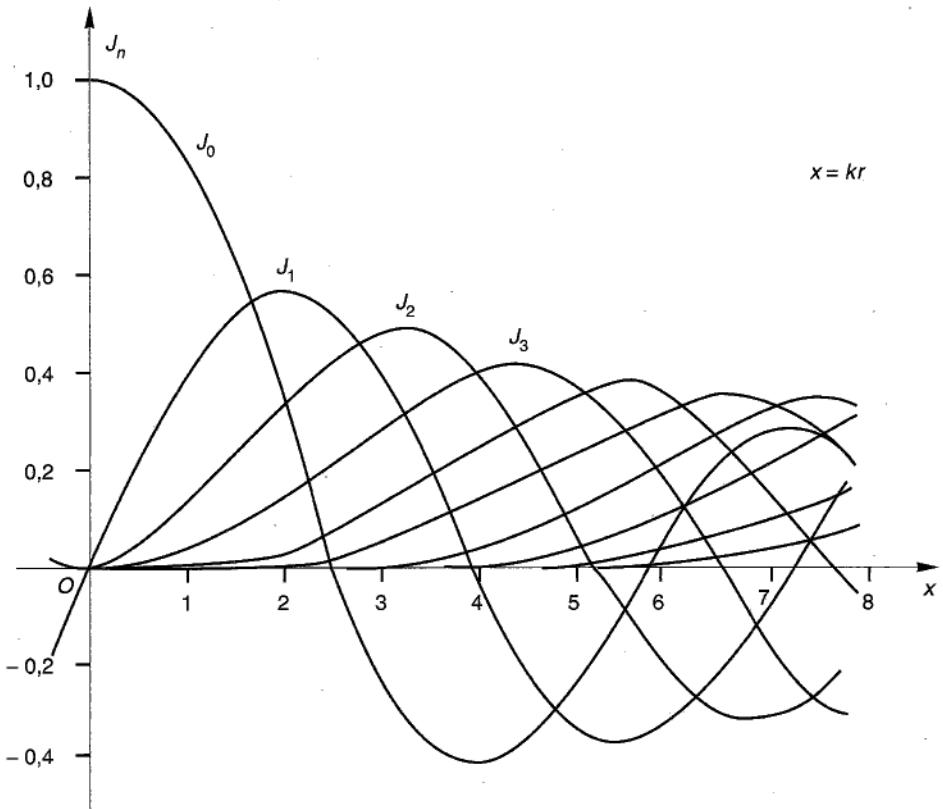


Figura 10.22

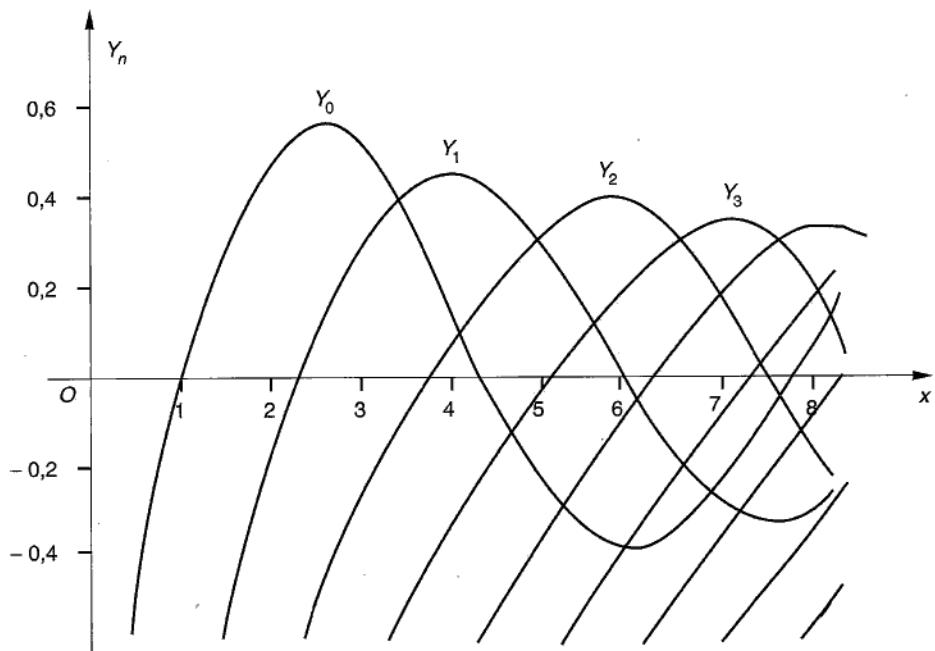


Figura 10.23

Lo studio di queste funzioni mostra che

1) per $kr \rightarrow \infty$, la funzione $\tilde{H}_0(kr)$ tende asintoticamente alla funzione

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{-j(kr - \frac{\pi}{4})}, \quad [10.13.5]$$

2) per $kr \ll 1$, la funzione $\tilde{H}_0(kr)$ tende asintoticamente alla $-jY_0(kr)$, la quale, a sua volta, tende alla

$$-j \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2} kr\right). \quad [10.13.6]$$

Per studiare il campo a grande distanza dal filo, sostituiamo la [10.13.5] nella [10.13.2'']; dalla $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ otteniamo inoltre

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{B}_\varphi \mathbf{i}_\varphi = -\frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial r} \mathbf{i}_\varphi \cong \frac{k\mu_0 I_0}{\sqrt{8\pi kr}} e^{-j(kr - \frac{\pi}{4})} \mathbf{i}_\varphi, \quad [10.13.7]$$

e dalla $\text{rot } \tilde{\mathbf{B}} = j\omega\mu_0\epsilon_0\tilde{\mathbf{E}}$, ricaviamo²²

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_z \mathbf{i}_z = -\frac{\mu_0 \omega I_0}{\sqrt{8\pi kr}} e^{-j(kr - \frac{\pi}{4})} \mathbf{i}_z. \quad [10.13.8]$$

Osserviamo che, anche in questo caso, si ha (per $r \rightarrow \infty$)

$$\frac{|\tilde{\mathbf{E}}|}{|\tilde{\mathbf{H}}|} = Z_0;$$

si noti inoltre la dipendenza $1/\sqrt{r}$, tipica della propagazione in geometria cilindrica.

Per $kr \ll 1$, si ottiene

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{B}_\varphi \mathbf{i}_\varphi = -\frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial r} \mathbf{i}_\varphi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \mathbf{i}_\varphi, \quad [10.13.9]$$

che è l'andamento tipico del campo magnetico del filo rettilineo e indefinito.

B. Campo prodotto da una distribuzione superficiale piana di corrente

Consideriamo ora una distribuzione superficiale di corrente nel piano xy e supponiamo che il vettore densità superficiale \mathbf{J}_S sia diretto lungo l'asse x e diverso da

²² Si noti che la [10.13.8] può essere ricavata anche dalla $\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A}$, la quale discende dalla $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi$, quando si osservi che, in questo caso, è $\text{grad } \varphi = 0$ per soddisfare la gauge di Lorentz [9.7.16].

zero in una striscia di ampiezza Δ (tratteggiata in fig. 10.24). Supponiamo, inoltre, che \mathbf{J}_S sia costante al variare di x , ma varii in maniera assegnata con y , in modo da potere scrivere (utilizzando il metodo simbolico):

$$\tilde{J}_S(y, t) = \tilde{J}_{S_0}(y) e^{j\omega t},$$

essendo $\tilde{J}_{S_0}(y)$ una funzione nota a priori. Una simile distribuzione di corrente può essere considerata come sovrapposizione di un sistema di fili rettilinei, diretti lungo x e percorsi da correnti elementari

$$d\tilde{I} = \tilde{J}_{S_0}(y) e^{j\omega t} dy.$$

A ciascuno di tali fili possono applicarsi le conclusioni cui siamo pervenuti in (A): possiamo quindi calcolare il campo prodotto dall'intera striscia di corrente sommando i contributi dati dai singoli filetti. Considerato il generico filetto, posto all'ascissa y' (più scuro in fig. 10.24), il suo contributo al potenziale vettore nel generico punto P di coordinate x, y, z è dato (ricordando la [10.13.2'']) da

$$d\tilde{A}_x(P) = -\frac{\mu_0}{4} j \tilde{J}_{S_0}(y') dy' \cdot \tilde{H}_0(kr'), \quad [10.13.10]$$

avendo indicato con r' la sua distanza dal punto P . Sostituendo in questa espressione il valore di r' dato (vedi fig. 10.24) dalla

$$r' = \sqrt{(y-y')^2 + z^2},$$

si ottiene

$$d\tilde{A}_x(y, z) = -\frac{\mu_0}{4} j \tilde{J}_{S_0}(y') dy' \cdot \tilde{H}_0(k \sqrt{(y-y')^2 + z^2}). \quad [10.13.10']$$

Integrando rispetto a y' (coordinata che contraddistingue i filetti) da 0 a Δ , si ha, infine

$$\tilde{A}_x(y, z) = -\frac{\mu_0}{4} j \int_0^\Delta \tilde{J}_{S_0}(y') \tilde{H}_0(k \sqrt{(y-y')^2 + z^2}) dy'. \quad [10.13.11]$$

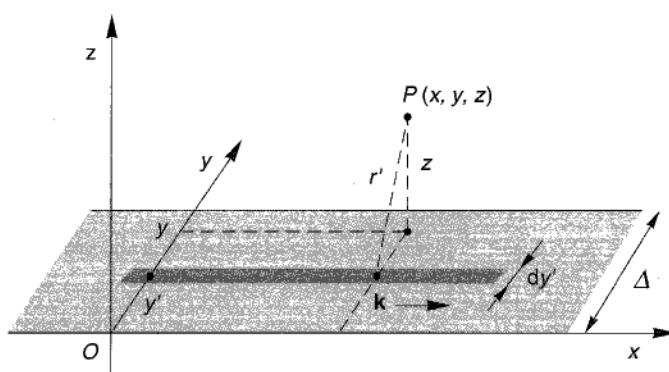


Figura 10.24

Una volta calcolato il potenziale vettore corrispondente a una assegnata $\tilde{J}_{S_0}(y')$, i campi **B** e **E** possono essere calcolati al solito modo, e il problema è risolto, almeno in linea di principio (al di là del calcolo dell'integrale [10.13.11]).

A titolo di esempio, riportiamo la soluzione (senza sviluppare i calcoli) del caso in cui sia

$$\tilde{J}_S(y') = J_{S_0} = \text{cost.}$$

e la striscia occupi l'*intero piano xy* (per cui l'integrale si estende da $-\infty$ a $+\infty$); in questo caso risulta

$$\tilde{\mathbf{A}}(P) = \tilde{\mathbf{A}}_x(z) \mathbf{i}_x = -j \frac{\mu_0}{2} \frac{J_{S_0}}{k} e^{-jk|z|} \mathbf{i}_x,$$

e quindi

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{B}} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = \frac{\partial \tilde{A}_x}{\partial z} \mathbf{i}_y = -\frac{\mu_0 J_{S_0}}{2} e^{-jk|z|} \mathbf{i}_y, \\ \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{Z_0}{2} J_{S_0} e^{-jk|z|} \mathbf{i}_x. \end{cases}$$

Si ottengono dunque due onde piane che si allontanano dallo strato di corrente, nella direzione z , in versi opposti (come si deduce dalla presenza del valore assoluto di z): si ritrova, così, il risultato ottenuto per l'*intero piano conduttore*.

C. Calcolo della distribuzione effettiva di corrente nel semipiano conduttore

Consideriamo ora una lamina conduttrice (di conducibilità elettrica infinita) che ricopra l'*intero semipiano $z=0, y \geq 0$* (vedi fig. 10.24) e immaginiamo che essa sia investita da un'onda piana che si propaghi lungo l'asse z e che abbia il vettore elettrico diretto lungo l'asse x (cioè, parallelo al bordo della lamina).

Ci proponiamo di calcolare la distribuzione di corrente che si induce nel semipiano conduttore per effetto del campo elettromagnetico dell'onda incidente.

Il sistema presenta simmetria di traslazione lungo l'asse x e ciò comporta che la distribuzione di corrente indotta sia diretta lungo l'asse x ; essa può, però, variare in funzione di y (e cioè via via che ci si allontana dal bordo del semipiano). Ci troviamo, quindi, in una situazione del tipo esaminato nel precedente caso (B), con due importanti differenze:

- 1) la distribuzione $\tilde{J}_{S_0}(y)$ è, questa volta, *incognita*;
- 2) $\Delta \rightarrow \infty$, poiché l'*intero semipiano* è investito dall'onda ed è, quindi, sede di correnti indotte.

Dal fatto che il semipiano abbia conducibilità infinita discende che il campo elettrico totale agente su esso è nullo: occorre, quindi, che il campo elettrico prodotto dalla

distribuzione incognita $\tilde{J}_{S_0}(y)$ annulli in ogni punto del semipiano il campo elettrico dell'onda incidente.

Calcoliamo il campo prodotto dalle correnti; dalla [10.13.11] si ottiene subito il potenziale vettore e dalla $\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A}$ (vedi la nota 22) si ricava

$$\tilde{E}_x(y, z)_{z=0} = -j\omega \tilde{A}_x(y, 0) = -\frac{\mu_0 \omega}{4} \int_0^{\infty} \tilde{J}_{S_0}(y') \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy'. \quad [10.13.12]$$

Questo campo, sommato a quello, E_{0x} , dell'onda incidente, deve annullarsi per $y \geq 0$ (e cioè in corrispondenza del semipiano conduttore); deve cioè essere

$$\frac{4}{\mu_0 \omega} E_{0x} = \int_0^{\infty} \tilde{J}_{S_0}(y') \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy', \quad [10.13.13]$$

per $0 \leq y < +\infty$.

La [10.13.13] è un'*equazione integrale*: un'equazione cioè, in cui la funzione incognita appare sotto integrale, moltiplicata per una funzione *nota* (che è detta *nucleo*, o *kernel*, dell'equazione), la quale è, in questo caso, la funzione di Hankel \tilde{H}_0 . L'integrale è funzione della sola variabile y (poiché la y' è "saturata" dall'operazione di integrazione) e l'equazione richiede che questa funzione di y uguagli il primo membro, per *ogni* $0 \leq y < +\infty$. Le equazioni integrali costituiscono un potente strumento dell'analisi moderna (analogo a quello delle equazioni differenziali), la cui teoria è stata sviluppata in questo e nel secolo scorso.

La [10.13.13] è però molto difficile da risolvere analiticamente: preferiamo quindi ricercare una soluzione numerica. Neanche in questo modo, però, la [10.13.13] è semplicissima da trattare, poiché l'operazione di integrazione si estende fino all'infinito e, d'altra parte, la funzione incognita $\tilde{J}_{S_0}(y')$ non si annulla per $y' \rightarrow \infty$; inoltre, la funzione \tilde{H}_0 diverge per $y' \rightarrow y$ e ciò comporta qualche difficoltà nel calcolare numericamente l'integrale, per un fissato valore della y . La ragione per cui l'incognita $\tilde{J}_{S_0}(y')$ *non* tende a zero per $y' \rightarrow \infty$ appare evidente quando si osservi che, al tendere di y' all'infinito, ci si allontana sempre più dal bordo del semipiano conduttore (addentrandosi *nel* semipiano): chiaramente, la distribuzione di corrente $\tilde{J}_{S_0}(y')$ tenderà a divenire, per $y' \rightarrow \infty$, coincidente con quella, J_{S_0} , che si otterrebbe nel caso in cui l'*intero piano xy* fosse investito dall'onda elettromagnetica (vedi § 10.12).

Forti di questa osservazione, possiamo, con un opportuno artifizio, tentare di risolvere numericamente la [10.13.13]. Infatti, possiamo introdurre una nuova funzione incognita $\tilde{K}_S(y')$, pari alla differenza tra la $\tilde{J}_{S_0}(y')$ e J_{S_0} :

$$\tilde{K}_S(y') = \tilde{J}_{S_0}(y') - J_{S_0}, \quad \text{per } y \geq 0,$$

la quale, in base a quanto prima detto, tende rapidamente a zero per $y' \rightarrow \infty$. Sostituendo nella [10.13.13]

$$\tilde{J}_{S_0}(y') = \tilde{K}_S(y') + J_{S_0},$$

otteniamo subito

$$\frac{4}{\mu_0 \omega} E_{0x} = \int_0^{\infty} \tilde{K}_S(y') \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy' + J_{S_0} \int_0^{\infty} \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy', \quad \text{per } y \geq 0. \quad [10.13.14]$$

Ricordando, ora, i risultati cui eravamo pervenuti per la riflessione di un'onda piana su un piano conduttore (vedi la [10.12.4]), possiamo scrivere

$$J_{S_0} = 2 \frac{E_{0x}}{Z_0},$$

e quindi

$$\frac{4}{\mu_0 \omega} E_{0x} = 2 \frac{J_{S_0}}{k},$$

la quale costituisce un necessario legame fra E_{0x} e J_{S_0} .

Sostituendo questa espressione a primo membro della [10.13.14] si ottiene

$$2 \frac{J_{S_0}}{k} - J_{S_0} \int_0^{\infty} \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy' = \int_0^{\infty} \tilde{K}_S(y') \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy', \quad \text{per } y \geq 0. \quad [10.13.15]$$

Il primo membro è una funzione nota, per J_{S_0} assegnato (o, equivalentemente, per E_{0x} assegnato), poiché la funzione \tilde{H}_0 è nota e tale è, quindi, anche il suo integrale; pertanto, la [10.13.15] costituisce un'equazione integrale nella funzione incognita $\tilde{K}_S(y')$, con nucleo \tilde{H}_0 .

La [10.13.15] può essere riscritta nella forma

$$\frac{2}{k} - \int_0^{\infty} \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy' = \int_0^y \frac{\tilde{K}_S(y')}{J_{S_0}} \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy' + \int_y^{\infty} \frac{\tilde{K}_S(y')}{J_{S_0}} \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy'.$$

Ponendo $\tilde{\alpha}(y') = \frac{\tilde{K}_S(y')}{J_{S_0}}$, e osservando che $\tilde{K}_S(y')$ può essere considerata approssimativamente nulla, per y' maggiore di un certo y_0 (poiché, come si è prima visto, $\tilde{K}_S(y') \rightarrow 0$ per $y' \rightarrow \infty$), si ha

$$\frac{2}{k} - \int_0^{\infty} \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy' = \int_0^{y_0} \tilde{\alpha}(y') \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy' + \int_{y_0}^{\infty} \tilde{\alpha}(y') \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy'.$$

Questa equazione può, ora, essere risolta numericamente in maniera abbastanza agevole, suddividendo l'intervallo $(0, y_0)$ in N intervallini di ampiezza $\Delta y'$ e considerando la funzione incognita $\tilde{\alpha}(y')$ costante all'interno di ciascun intervallino. Indicando con y'_i (per $i=0, 1, \dots, N$) gli estremi di tali intervalli, e ponendo $y'_h = y$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} - \int_0^{\infty} \tilde{H}_0(k|y-y'|) dy' &= \sum_{i=0}^h \tilde{\alpha}(y'_i) \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} \tilde{H}_0(k|y'_h - y'|) dy' + \\ &\quad + \sum_{i=h+1}^N \tilde{\alpha}(y'_i) \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} \tilde{H}_0(k|y'_h - y'|) dy'. \end{aligned}$$

Calcolando (analiticamente o numericamente) gli integrali definiti che vi compaiono,²³ questa relazione diventa un'equazione algebrica lineare nelle N incognite complesse $\tilde{\alpha}(y'_i)$. Di tali equazioni possono scriversene N : una per ogni y coincidente con uno degli estremi degli intervallini; si ottiene, così, un sistema di N equazioni algebriche lineari nelle N incognite $\tilde{\alpha}(y'_i)$, la cui soluzione numerica è abbastanza agevole. Nella figura 10.25 è riportato il modulo di $\tilde{\alpha}$ in funzione della ascissa y (moltiplicata per $2\pi/\lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda dell'onda piana incidente); il primo grafico mostra che, per $y^*=10$ (il che corrisponde a una y pari a circa due lunghezze d'onda), il modulo di $\tilde{\alpha}$ è praticamente nullo: ciò significa che già a poche lunghezze d'onda dal bordo, la corrente nel semipiano conduttore coincide con quella che si ottiene per l'intero conduttore. Invece, nelle immediate vicinanze del bordo (secondo grafico), $|\tilde{\alpha}|$ diverge: si noti però che la corrente totale (e cioè l'integrale di $|\tilde{\alpha}|$ su un piccolo tratto, di lunghezza finita Δy) si mantiene limitata.

In conclusione, possiamo dire che, con ottima approssimazione, la distribuzione effettiva di corrente nel semipiano conduttore investito dall'onda è quella che si avrebbe in presenza dell'intero piano conduttore (investito dalla stessa onda) cui si sovrapponesse, sul bordo del semipiano, un filo percorso da una corrente di valore limitato. Questo filo di corrente irraggia un'onda cilindrica la cui potenza per unità di lunghezza è abbastanza modesta: i calcoli mostrano che essa è dell'ordine di grandezza della densità di potenza dell'onda incidente, moltiplicata per l'area di un rettangolo di base unitaria e altezza pari alla lunghezza d'onda λ . Questa piccola potenza irraggiata dal bordo è, comunque, sufficiente a far sì che, quando l'onda incidente è un'onda luminosa, ponendosi in osservazione dietro il semipiano, si osservi distintamente un lembo molto luminoso, all'orlo del semipiano, il quale corrisponde proprio all'onda cilindrica irraggiata dal bordo. Questo fenomeno fu osservato per la prima volta nel secolo diciassettesimo da padre Grimaldi, un pioniere nello studio dei fenomeni di diffrazione.

I risultati numerici ottenuti relativi alla distribuzione di corrente nel semipiano conduttore possono essere confrontati con la soluzione analitica di Sommerfeld

$$\tilde{J}_{S_0}(y) = 2 \frac{E_{0x}}{Z_0} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{j\left(ky - \frac{\pi}{4}\right)} \left[2\tilde{G}(\sqrt{ky}) - j \frac{1}{\sqrt{ky}} \right] \right\}, \quad [10.13.16]$$

dove

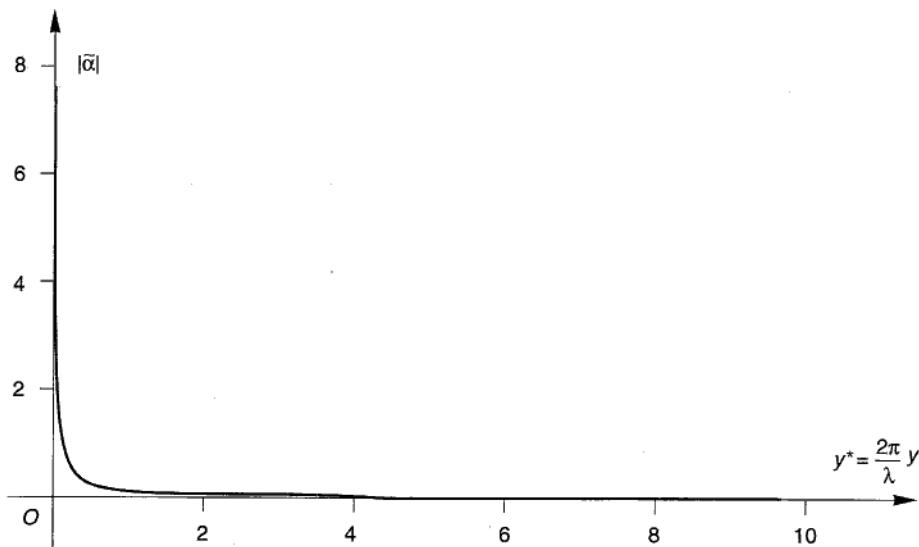
$$\tilde{G}(\sqrt{ky}) = e^{-jky} \tilde{F}(\sqrt{ky}) \quad [10.13.17]$$

e

$$\tilde{F}(\sqrt{ky}) = \int_{\sqrt{ky}}^{\infty} e^{j\mu^2} d\mu = \int_{\sqrt{ky}}^{\infty} \cos(\mu^2) d\mu + j \int_{\sqrt{ky}}^{\infty} \sin(\mu^2) d\mu. \quad [10.13.18]$$

Per ragioni che chiariremo fra un momento, riscriviamo la [10.13.18] nella forma

²³ Un'attenzione particolare va rivolta al termine per il quale $y' \rightarrow y$, poiché ivi la \tilde{H}_0 diverge.



(a)

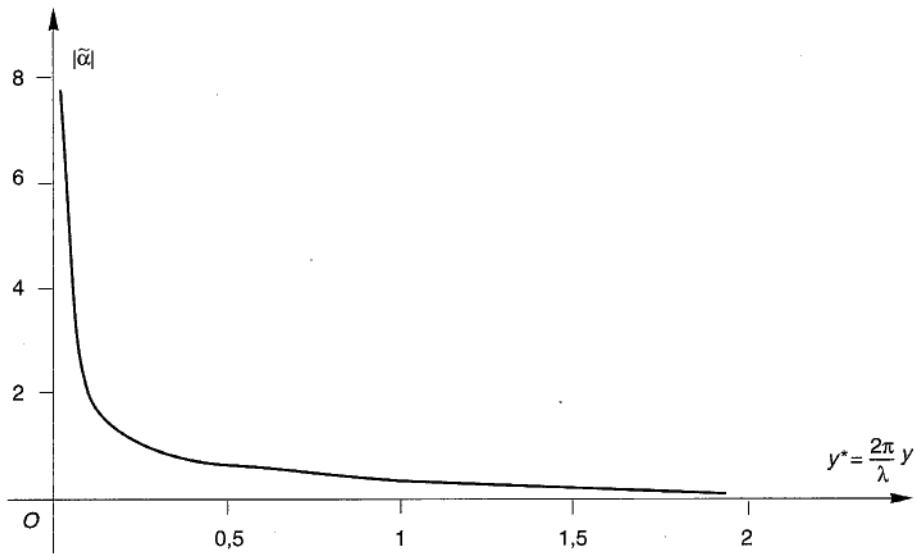


Figura 10.25

(b)

equivalente

$$\widetilde{F}(\sqrt{ky}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt + j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad [10.13.18']$$

la quale può ancora essere riscritta come:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\sqrt{ky}) = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt - \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{ky}} \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt + \\ & + j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt - \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{ky}} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \right].\end{aligned}$$

Ponendo ora

$$\begin{cases} C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \\ \mathcal{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \end{cases} \quad [10.13.19]$$

la funzione $\tilde{F}(\sqrt{ky})$ può essere scritta nella forma

$$\tilde{F}(\sqrt{ky}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[C(\infty) - C\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{ky}\right) \right] + j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\mathcal{S}(\infty) - \mathcal{S}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{ky}\right) \right].$$

Le funzioni $C(x)$ e $\mathcal{S}(x)$ sono dette *integrali di Fresnel* e sono molto utili nei problemi di diffrazione (come si vedrà più avanti): esse sono diffusamente tabellate, e i loro grafici sono riportati nella figura 10.26. Riesce molto comoda, inoltre, la rappresentazione di queste funzioni data dalla cosiddetta *spirale di Cornu* (vedi fig. 10.27); i punti di tale curva hanno coordinate:

$$\begin{cases} x = C(t) \\ y = \mathcal{S}(t), \end{cases} \quad [10.13.20]$$

e il valore di t è segnato sulla curva, come parametro.

I risultati numerici che si ottengono dalle [10.13.16], [10.13.18] concidono perfettamente con quelli riportati nei diagrammi della figura 10.25.

Una volta che sia nota la distribuzione di corrente nel semipiano conduttore, è abbastanza semplice calcolare il campo irraggiato da queste correnti: basta inserire nella [10.13.11] la effettiva $\tilde{J}_{S_0}(y')$ spostando all'infinito l'estremo superiore di integrazione e calcolare (analiticamente o numericamente) l'integrale. I risultati di questo calcolo, per ciò che riguarda l'intensità I_{em} dell'onda risultante (ottenuta sovrapponendo il campo dell'onda incidente (di intensità I_{emi}) a quello prodotto dalla $\tilde{J}_{S_0}(y')$) sono riportati nei diagrammi della figura 10.28 (curve γ_1), che mostrano quantitativamente la presenza delle frange di diffrazione in prossimità del bordo dello schermo. Ancora una volta, questi risultati coincidono con quelli analitici di Sommerfeld (che non si riportano, per brevità): il grafico (a) si riferisce a un piano posto a distanza $z=1,8$ lunghezze d'onda al di là dello schermo; il grafico (b), a $z=5$ lunghezze d'onda. Il significato dei grafici γ_2 sarà chiarito nel paragrafo che segue.

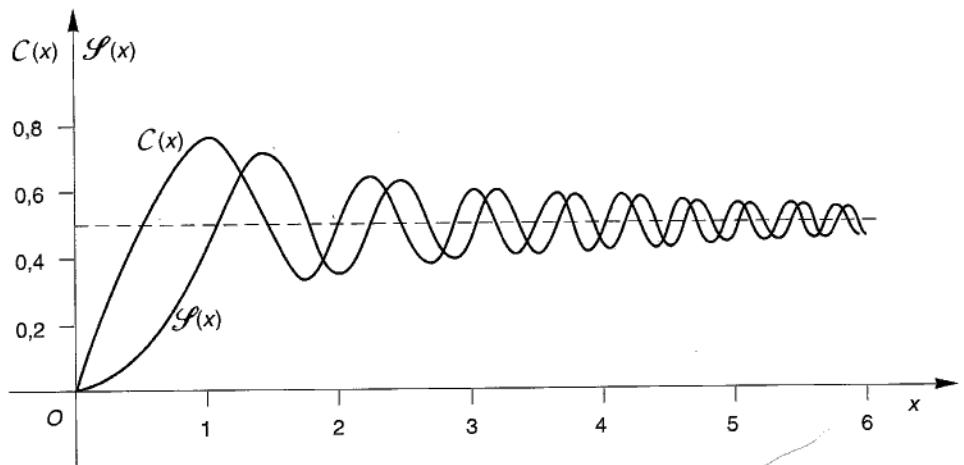


Figura 10.26

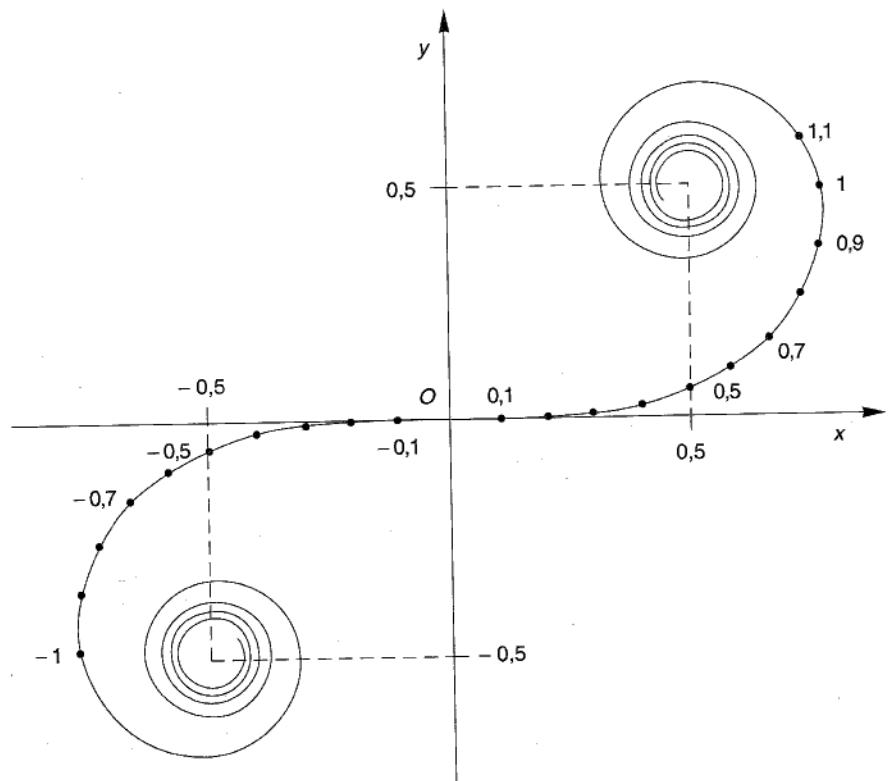
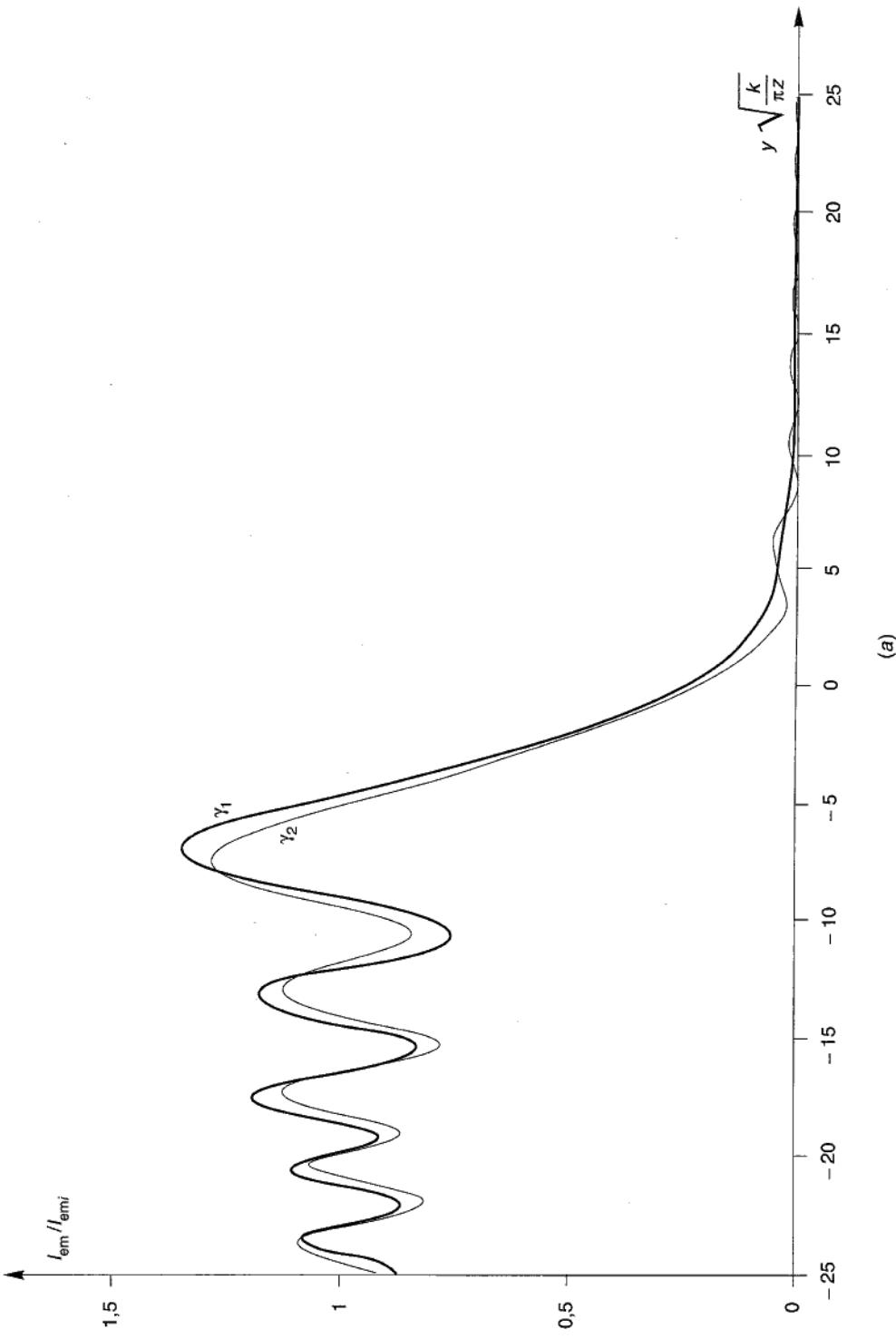


Figura 10.27



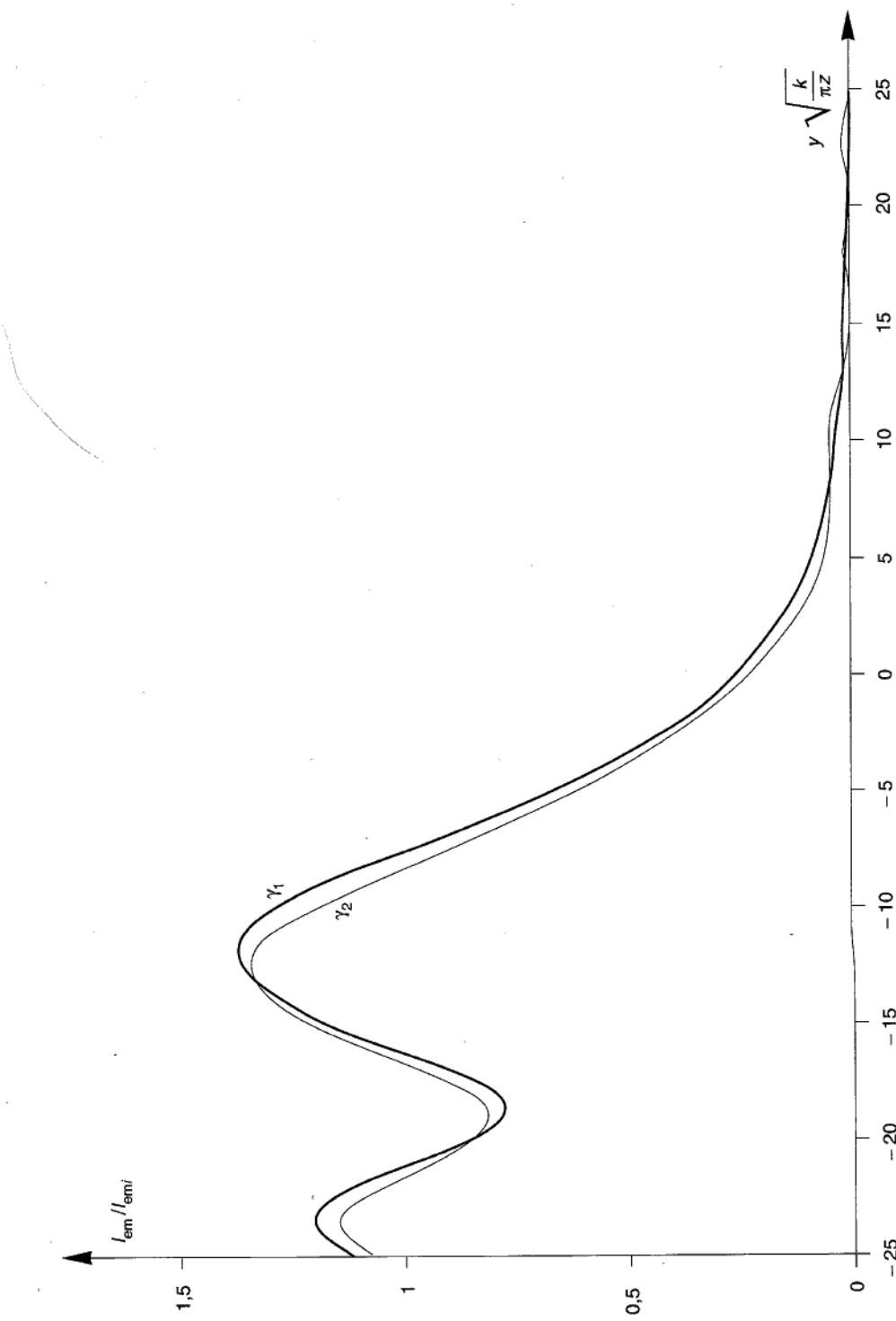


Figura 10.28

(b)

10.14 Diffrazione da un semipiano conduttore: soluzione analitica approssimata

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la distribuzione di corrente che si induce in un semipiano conduttore è praticamente coincidente, eccetto che nelle immediate vicinanze del bordo, con quella che si ha nel caso dell'intero piano. Ciò suggerisce di calcolare in maniera approssimata il campo irraggiato dalle correnti indotte di un semipiano $y > 0$, considerando, anche per esso, una distribuzione

$$J_{S_0} = 2 \frac{E_{0x}}{Z_0}, \quad [10.14.1]$$

Riprendendo la [10.13.11], e sostituendo in essa la costante I_0 , si ha

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x(y, z) &= -j \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} \int_0^{\infty} \tilde{H}_0(k \sqrt{z^2 + (y-y')^2}) dy' = \\ &= -j \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} \int_0^{\infty} \tilde{H}_0\left(k|z| \sqrt{1 + \left(\frac{y-y'}{|z|}\right)^2}\right) dy', \end{aligned}$$

e ponendo $\frac{y'-y}{|z|} = w$,

$$\tilde{A}_x(y, z) = -j \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} |z| \int_{-\frac{y}{|z|}}^{\infty} \tilde{H}_0(k|z| \sqrt{1+w^2}) dw;$$

sostituendo in questa relazione l'espressione asintotica [10.13.5] della funzione \tilde{H}_0 , si ottiene

$$\tilde{A}_x(y, z) \approx -j \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} |z| \int_{-\frac{y}{|z|}}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi|z|k \sqrt{1+w^2}}} e^{-j(k|z|\sqrt{1+w^2} - \frac{\pi}{4})} dw. \quad [10.14.2]$$

Esiste un importante teorema, detto "della fase stazionaria" (che qui, per brevità, non si riporta) che consente di sviluppare in serie di Maclaurin la $\sqrt{1+w^2}$, nel calcolo dell'integrale [10.14.2], arrestandosi ai primi due termini nell'esponenziale e al solo primo termine nella radice che moltiplica l'esponenziale stesso. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x(y, z) &\approx -j \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} |z| \sqrt{\frac{2}{\pi|z|k}} \int_{-\frac{y}{|z|}}^{\infty} e^{-j[k|z|\left(1+\frac{w^2}{2}\right) - \frac{\pi}{4}]} dw = \\ &= -j \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} \sqrt{\frac{2|z|}{k\pi}} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-jk|z|} \int_{-\frac{y}{|z|}}^{\infty} e^{-jk|z|\frac{w^2}{2}} dw. \end{aligned}$$

Ponendo poi $\mu = w \sqrt{\frac{k|z|}{\pi}}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_x(y, z) &\approx -j \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} \sqrt{\frac{2|z|}{k\pi}} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-jk|z|} \sqrt{\frac{\pi}{k|z|}} \int_0^\infty e^{-j\frac{\pi}{2}\mu^2} d\mu = \\ &= \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} \frac{\sqrt{2}}{k} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-jk|z|} \left[\int_0^\infty e^{-j\frac{\pi}{2}\mu^2} d\mu + \int_0^0 e^{-j\frac{\pi}{2}\mu^2} d\mu \right]; \\ &\quad -\frac{y}{|z|} \sqrt{\frac{k}{\pi}}\end{aligned}$$

e di qui, per le [10.13.19]:²⁴

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_x(y, z) &\approx \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} \frac{\sqrt{2}}{k} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-jk|z|} \left[C(\infty) - j\mathcal{G}(\infty) + C\left(\frac{y}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{|z|}}\right) - \right. \\ &\quad \left. - j\mathcal{G}\left(\frac{y}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{|z|}\right) \right].\end{aligned}$$

Dato che $C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$, si ottiene infine

$$\widetilde{A}_x(y, z) \approx \frac{\mu_0}{4} J_{S_0} \frac{\sqrt{2}}{k} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-jk|z|} \left[\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} + C\left(y \sqrt{\frac{k}{\pi|z|}}\right) - j\mathcal{G}\left(y \sqrt{\frac{k}{\pi|z|}}\right) \right].$$
[10.14.3]

E', questa, un'espressione approssimata del potenziale vettore, dalla quale, attraverso le $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A}$, è possibile ricavare il campo elettromagnetico irraggiato dalle correnti indotte nel semipiano conduttore.

Ora, ricordando che il campo elettrico dell'onda incidente vale

$$\widetilde{E}_i = E_{0x} e^{-jkz},$$

si ricava subito il potenziale vettore della stessa onda:

$$\widetilde{A}_i(z) = -\frac{1}{j\omega} \widetilde{E}_i = \frac{j}{\omega} E_{0x} e^{-jkz},$$

e, ricordando la [10.14.1]:

$$\widetilde{A}_i(z) = \frac{j}{\omega} \frac{Z_0 J_{S_0}}{2} e^{-jkz} = j \frac{\mu_0}{2} \frac{J_{S_0}}{k} e^{-jkz}.$$

Sommmando questa espressione alla [10.14.3], si ottiene il potenziale vettore risultante,

²⁴ Si osservi che in questo caso $\int_{-a}^0 = \int_0^a$.

che, per $z > 0$, vale

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(y, z) &= \widetilde{A}_x(y, z) + \widetilde{A}_i(z) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2} \frac{J_{S_0}}{k} e^{-jkz} e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \left[\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} + C \left(y \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \right) - j \mathcal{H} \left(y \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \right) \right] + \widetilde{A}_i(z) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{\widetilde{A}_i(z)}{j} \left[\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} + C \left(y \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \right) - j \mathcal{H} \left(y \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \right) \right] + \widetilde{A}_i(z) = \\ &= \widetilde{A}_i(z) \left\{ \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left[C \left(y \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \right) - j \mathcal{H} \left(y \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \right) \right] \right\};\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\widetilde{A}(y, z)}{\widetilde{A}_i(z)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - j \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left[C \left(y \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \right) - j \mathcal{H} \left(y \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \right) \right] \right\}.$$

Infine, ricordando che il potenziale vettore è proporzionale al campo elettrico e che l'intensità dell'onda è a sua volta proporzionale al quadrato del modulo del campo elettrico, si ottiene:

$$\frac{I_{\text{em}}(y, z)}{I_{\text{em}, i}(z)} = \frac{1}{4} \{ [1 - (C + \mathcal{H})]^2 + (\mathcal{H} - C)^2 \}, \quad [10.14.4]$$

avendo indicato con $I_{\text{em}}(y, z)$ e $I_{\text{em}, i}(z)$, rispettivamente, l'intensità dell'onda risultante e di quella incidente e con C e \mathcal{H} , per semplicità di scrittura, le funzioni $C(y \sqrt{k/\pi z})$ e $\mathcal{H}(y \sqrt{k/\pi z})$:

Nelle figure 10.28a e b (curve γ_2) sono messi a confronto i valori forniti dalla [10.14.4] e quelli del paragrafo precedente: come si vede, quando z/λ è maggiore di alcune unità, i due risultati sono praticamente coincidenti. Si comprende a questo punto, che, nel caso della radiazione luminosa, in cui (come si vedrà nel capitolo seguente) le lunghezze d'onda λ sono dell'ordine di $10^{-7} \div 10^{-6}$ m, tutte le esperienze che possono effettuarsi, misurando l'intensità dell'onda anche in prossimità del bordo del semipiano conduttore, danno risultati che confermano la [10.14.4] in maniera eccellente.

Esercizi

- La funzione $f(z, t) = Ce^{-(az+bt)^2}$, con C, a, b costanti, rappresenta un'onda viaggiante?
- Tracciare il grafico della $f(z, t)$ dell'esercizio 1 in corrispondenza di due istanti t_1, t_2 : qual è la velocità v dell'onda?

3. Determinare ampiezza A_M , frequenza ν , lunghezza d'onda λ , periodo T e velocità v dell'onda rappresentata dalla funzione $a(x, t) = 10^4 \cos \pi(2 \times 10^6 x - 6 \times 10^{14} t)$.
4. Un'onda elettromagnetica sinusoidale ha, nel vuoto, una frequenza di 100 MHz; calcolarne la lunghezza d'onda λ .
5. Scrivere l'espressione di un'onda piana sinusoidale che si propaghi lungo la biseatrice degli assi x, y .
6. Il campo elettrico associato a un'onda elettromagnetica piana e sinusoidale sia dato dalle relazioni

$$\begin{cases} E_x = 2 \times 10^2 \cos \pi(2 \times 10^6 z - 6 \times 10^{14} t) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0. \end{cases}$$

Determinare il campo magnetico associato a \mathbf{E} .

7. Un'onda elettromagnetica piana sinusoidale è polarizzata linearmente si propaga nella direzione delle z crescenti; scriverne l'espressione, sapendo che il piano di polarizzazione forma un angolo di $\pi/4$ con il piano coordinato xz .
8. Un'onda elettromagnetica piana sinusoidale è polarizzata circolarmente (destra) e si propaga nella direzione delle z crescenti; scriverne l'espressione.
9. Un'onda piana sinusoidale, nel vuoto, ha campo elettrico \mathbf{E} pari a $E_x = E_y = 0$, $E_z = 100 \cos \pi(4 \times 10^{14} t - 1,33 \times 10^6 x)$. Calcolarne l'intensità I_{em} .
10. La potenza depositata per unità d'area dalla radiazione solare sulla Terra è pari, all'equatore, a $1,53 \text{ kW/m}^2$. Calcolare i valori medi dei quadrati del campo elettrico \mathbf{E} e del campo magnetico \mathbf{B} .
11. Dimostrare che l'onda stazionaria rappresentata dalla funzione $f(z, t) = \Re[A e^{\gamma(kz + \pi/2)} \sin \omega t]$ soddisfa all'equazione delle onde.

Capitolo 11

Le onde elettromagnetiche nei mezzi materiali

11.1 Introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo mostrato l'esistenza delle onde elettromagnetiche e ne abbiamo studiato la propagazione nello spazio vuoto. Ci occuperemo qui della propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi materiali, con particolare riferimento a quelli più comuni, e cioè ai mezzi dielettrici e/o conduttori, *non ferromagnetici*.

Riprendiamo dunque le equazioni generali del campo [9.5.1]÷[9.5.5], e le relazioni costitutive che specificano, di volta in volta, il comportamento elettromagnetico del mezzo. Nel paragrafo 9.5, per semplicità, ci si era limitati a quei casi in cui le relazioni costitutive si riducono alle [9.5.6], e cioè a relazioni di proporzionalità (come nella maggior parte dei fenomeni trattati in elettrostatica e in magnetostatica).

Purtroppo, in presenza di campi rapidamente variabili nel tempo, le summenzionate relazioni *non* descrivono adeguatamente il comportamento dei mezzi materiali e, come vedremo, si rende necessario far ricorso a relazioni costitutive più complicate, anche per i mezzi più comuni.

Per il momento, comunque, ci limiteremo a studiare casi in cui le [9.5.6] continuano a valere anche in condizioni tempo-varianti; per prima cosa esamineremo la propagazione delle onde elettromagnetiche nell'ipotesi in cui l'intero spazio sia uniformemente riempito da un mezzo caratterizzato da una costante dielettrica $\epsilon \neq \epsilon_0$, da una permeabilità magnetica $\mu \neq \mu_0$ e da una conducibilità elettrica $\sigma = 0$ (mezzo non conduttore).

Considerando regioni di spazio prive di sorgenti libere (cariche e correnti), ci si convince subito che gli sviluppi formali utilizzati nel paragrafo 10.1 continuano ad essere validi, a patto di sostituire ϵ e μ al posto di ϵ_0 e μ_0 . Se ne conclude che valgono le seguenti equazioni:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad [11.1.1]$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad [11.1.2]$$

L'unica differenza tra queste e le corrispondenti [10.1.7] e [10.1.8], valide per lo spazio vuoto, è che il parametro $\mu\epsilon$ prende il posto di $\mu_0\epsilon_0$. Dato che per qualunque mezzo materiale è $\epsilon \geq \epsilon_0$ e che per i mezzi para- e dia-magnetici è $\mu \cong \mu_0$, risulta, in ogni caso, $\mu\epsilon \geq \mu_0\epsilon_0$. Posto

$$v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}, \quad [11.1.3]$$

si ha inoltre $v \leq c$.

Se ne conclude che tutto quanto detto nel capitolo precedente a proposito della propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto continua a valere anche quando l'intero spazio sia riempito di un mezzo materiale per il quale valgano le:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad [11.1.4]$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad [11.1.5]$$

$$\sigma = 0, \quad [11.1.6]$$

a patto di attribuire all'onda la velocità v (anziché c) e di considerare al posto di Z_0 , impedenza caratteristica del vuoto, un'impedenza caratteristica del mezzo (vedi § 10.2) $Z = \sqrt{\mu/\epsilon} = \sqrt{\mu_r/\epsilon_r}$.

Al rapporto

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\mu}{\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad [11.1.7]$$

si dà il nome di *indice di rifrazione* del mezzo considerato (i motivi di tale denominazione saranno chiariti nel seguito). Se ci si limita a considerare mezzi non ferromagnetici, $\mu_r \cong 1$, e la [11.1.7] assume la forma semplificata

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad [11.1.8]$$

Osserviamo infine, che, entro i limiti di validità delle [11.1.4]÷[11.1.6], l'avere ottenuto una velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche variabile con la natura del mezzo e minore di c è coerente con l'interpretazione elettromagnetica dei fenomeni luminosi.¹

E' però da dire anche che la [11.1.3] fornisce, per la luce, un valore che è in accordo con l'esperienza soltanto per quelle sostanze (come alcuni gas) che hanno una struttura chimica molto semplice, mentre, per sostanze più complesse, essa dà valori molto lontani dalla realtà: ad esempio, per l'acqua, il valore previsto per la velocità della luce, in base alla [11.1.3], è quasi sette volte più piccolo di quello reale. Nei paragrafi seguenti, vedremo come si spiega questa discrepanza.

¹ Le prime misurazioni della velocità di propagazione della luce in diversi mezzi materiali (aria e acqua) furono eseguite, alla metà del secolo scorso, da Fizeau e Foucault, e mostrarono appunto che essa è minore di quella nel vuoto.

11.2 Fenomeni di dispersione nei dielettrici

Nel paragrafo precedente si è già anticipato che, per un dielettrico, la semplice relazione costitutiva [11.1.4] perde validità quando i campi variino molto rapidamente nel tempo. Ci proponiamo ora, da un lato, di precisare l'ambito di validità di tale relazione, dall'altro di presentare un semplice modello teorico che consente di giustificare, anche quantitativamente, il comportamento dei dielettrici materiali in presenza di campi rapidamente variabili.

Consideriamo un dielettrico materiale composto di molecole non polari e cerchiamo di studiare quel che accade in una generica molecola quando il dielettrico sia sottoposto a un campo elettromagnetico variabile nel tempo (e *non* statico, come avevamo invece supposto nel cap. 5). Lo studio rigoroso dei moti, degli elettroni e dei nuclei degli atomici che compongono ciascuna molecola è, in queste condizioni, molto complesso e richiede il ricorso alla meccanica quantistica; ma fortunatamente, pur limitandoci ad un semplice modello classico, è possibile arrivare a conclusioni che sono confermate dall'esperienza in maniera soddisfacente. Il modello elementare da noi considerato è quello di un atomo costituito da un nucleo positivo, puntiforme e praticamente immobile sotto l'azione del campo (per effetto della sua notevole inerzia), e di un insieme di elettroni mobili.

L'orbita di ciascun elettrone si modifica per effetto del campo elettromagnetico applicato, e ciascuna molecola viene ad assumere un momento di dipolo elettrico \mathbf{P}_{mol} . Il contributo dato a \mathbf{P}_{mol} da ciascuna carica q è pari a

$$\mathbf{p} = q \mathbf{r}, \quad [11.2.1]$$

avendo indicato con \mathbf{r} il raggio-vettore spiccato da una qualsiasi origine verso la carica in ogni istante (ricordiamo che \mathbf{P}_{mol} è indipendente dall'origine: vedi § 3.7). Supponendo per ora che le molecole siano monoatomiche e che in ciascuna di esse esista un solo elettrone, si ha (dalla [11.2.1], indicando con e il valore assoluto della carica dell'elettrone):

$$\mathbf{P}_{\text{mol}} = -e \mathbf{r}_e + e \mathbf{r}_n,$$

dove \mathbf{r}_e e \mathbf{r}_n sono i raggi vettori delle posizioni istantanee dell'elettrone e del nucleo. Ponendo

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_n,$$

si ha

$$\mathbf{P}_{\text{mol}} = -e \boldsymbol{\rho}, \quad [11.2.2]$$

e ancora (dalla [5.10.4])

$$\mathbf{P} = N \overline{\mathbf{P}_{\text{mol}}} = -e N \overline{\boldsymbol{\rho}} \quad [11.2.3]$$

avendo indicato con la soprallineatura la media dei vettori valutata fra tutte le molecole presenti in un elemento di volume. La forza agente su ciascun elettrone, per effetto del campo applicato, è (vedi §§ 6.2, 5.11 e 8.8):

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E}_{\text{eff}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{eff}});$$

se supponiamo che sia (come solitamente è) $v \ll c$, possiamo trascurare il termine magnetico: in un'onda piana, ad esempio, $B = E/c$, e ciò implica che il termine vB_{eff} è dell'ordine di E_{eff} soltanto quando v sia dell'ordine di c .

D'altra parte, è ragionevole supporre (ed è confermato da modelli teorici più sofisticati)² che l'elettrone sia soggetto anche a una forza "di richiamo" di tipo elastico esprimibile come²

$$\mathbf{F}_{\text{ri}} = -k_{\text{ri}} \mathbf{p} \quad [11.2.4]$$

e ad una forza di tipo "viscoso" (che tiene conto della energia cinetica persa continuamente dall'elettrone per effetto delle onde elettromagnetiche che esso stesso irradia, e degli urti che subisce dagli atomi vicini) esprimibile come

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = -k_{\text{visc}} \dot{\mathbf{p}} \quad [11.2.5]$$

(il puntino indica derivazione rispetto al tempo).

Se, ora, supponiamo che il campo elettrico efficace varii nel tempo con legge sinusoidale, con pulsazione ω , l'equazione del moto dell'elettrone (facendo uso del metodo simbolico) è

$$m_e \ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + k_{\text{visc}} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + k_{\text{ri}} \tilde{\mathbf{p}} = -e \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}, \quad [11.2.6]$$

dove

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{eff}} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}$$

(per semplicità, si è assunto \mathbf{E}_{eff} di fase nulla e, quindi, \mathbf{E}_0 reale). La soluzione sinusoidale di questa equazione è (vedi app. C):

$$\tilde{\mathbf{p}}(t) = \frac{-e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega k_{\text{visc}}} \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \quad [11.2.7]$$

con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\text{ri}}}{m_e}}; \quad [11.2.8]$$

ω_0 è detta *pulsazione di risonanza*.

² Una spiegazione qualitativa della [11.2.4] può esser data ricorrendo al modello elementare in cui il nucleo è costituito da una carica puntiforme fissa q e l'insieme degli elettroni dell'atomo forma una nube sferica, concentrica con il nucleo, in cui la carica $-q$ è distribuita con densità di volume uniforme. Quando la sfera negativa si sposta (rigidamente) rispetto al nucleo, sulla carica positiva q agisce una forza pari al prodotto di q per il campo elettrostatico prodotto, in corrispondenza del nucleo, dalla sola distribuzione negativa; poiché tale campo varia linearmente con la distanza dal centro della sfera, la [11.2.4] resta confermata.

Osserviamo che la direzione spaziale di $\mathbf{p}(t)$ (e cioè la direzione lungo la quale l'elettrone si muove) coincide con quella di $\mathbf{E}_{\text{eff}}(t)$; pertanto, in una regione fisicamente infinitesima, tutti i momenti di dipolo delle diverse molecole sono allineati con il campo elettrico efficace e si ha

$$\bar{\bar{\rho}} = \tilde{\rho}.$$

Dalla [11.2.3] si trae quindi

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = -eN\bar{\bar{\rho}} = \frac{Ne^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega k_{\text{visc}}} \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}. \quad [11.2.9]$$

Pertanto, la polarizzazione \mathbf{P} è diretta come \mathbf{E}_{eff} , ha ampiezza P_0 :

$$P_0 = \frac{Ne^2}{\sqrt{m_e^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 k_{\text{visc}}^2}} E_0 \quad [11.2.10]$$

ed è sfasata nel tempo, in ritardo, rispetto a \mathbf{E}_{eff} di un angolo φ :

$$\varphi = \arctg \frac{\omega k_{\text{visc}}}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad [11.2.11]$$

Ricordando la [5.12.17], possiamo dire che essa resta ancora valida, a patto di considerare una *polarizzabilità molecolare complessa* $\tilde{\alpha}$ pari a

$$\tilde{\alpha} = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega k_{\text{visc}}}. \quad [11.2.12]$$

Nei casi in cui (vedi § 5.12.2) \mathbf{E}_{dip} sia trascurabile, vale la relazione

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0},$$

essendo \mathbf{E} il campo elettrico applicato, e può porsi ancora

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\chi} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \quad [11.2.13]$$

con

$$\tilde{\chi} = \frac{N\tilde{\alpha}}{1 - \frac{N\tilde{\alpha}}{3\epsilon_0}}. \quad [11.2.14]$$

Poiché, inoltre,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

dalla [11.2.13] segue

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\epsilon} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad [11.2.15]$$

con

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 + \tilde{\chi}. \quad [11.2.16]$$

In conclusione, le relazioni di proporzionalità tra \mathbf{D} e \mathbf{E} e tra \mathbf{P} e \mathbf{E} che si erano riconosciute valide per i dielettrici lineari in condizioni statiche possono essere ancora ritenute valide, formalmente, in presenza di campi rapidamente variabili, a patto di considerare una *suscettività complessa* $\tilde{\chi}$ e una *costante dielettrica complessa* $\tilde{\epsilon}$ date dalle [11.2.14] e [11.2.16]. Tuttavia, il significato delle relazioni costitutive [11.2.13] e [11.2.15] è ben diverso da quello delle corrispondenti relazioni valide in condizioni statiche. Infatti esse non sono relazioni di proporzionalità fra i vettori \mathbf{E} , \mathbf{P} e \mathbf{D} , considerati per quel che sono, e cioè vettori reali, variabili nel tempo, ma stabiliscono, invece, legami di proporzionalità fra i vettori complessi rappresentativi di quelli reali. Ne deriva, ad esempio, che in genere \mathbf{E} e \mathbf{D} *non* sono in fase tra loro (e così pure \mathbf{P} ed \mathbf{E}), e ci sono quindi istanti in cui sono addirittura diretti in verso opposto. Inoltre, il fatto che $\tilde{\chi}$ e $\tilde{\epsilon}$ dipendano da ω implica che anche il rapporto tra le ampiezze di \mathbf{D} ed \mathbf{E} dipende da ω e che quindi lo stato di polarizzazione del dielettrico, a parità di ampiezza del campo elettrico applicato, varia al variare della pulsazione.

E' semplice a questo punto estendere le espressioni precedenti, e cioè le relazioni [11.2.15] e [11.2.16], al caso di campi variabili nel tempo non sinusoidalmente: basterà infatti scomporli secondo Fourier (vedi app. B) nei loro componenti sinusoidali e applicare le relazioni citate a ciascun componente. Si ottiene in tal modo la relazione costitutiva *nel dominio della pulsazione*:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad [11.2.17]$$

nella quale $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega)$ e $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ sono le trasformate di Fourier di $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, e la $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega)$ è data ancora dalle [11.2.16], [11.2.14] e [11.2.12] in funzione di ω .

Tornando alla relazione costitutiva tra i vettori reali \mathbf{D} e \mathbf{E} , si può dimostrare (non lo facciamo per brevità) che essa, per un mezzo isotropo, ha la forma³

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t h(\mathbf{r}, t-\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad [11.2.18]$$

dove $h(\mathbf{r}, t-\tau)$ è un'opportuna funzione scalare (reale). L'integrale [11.2.18] è detto *di convoluzione*; per esso vale il seguente, importante *teorema di Borel*:

La trasformata di Fourier di un integrale di convoluzione è pari al prodotto delle trasformate di Fourier delle due funzioni integrande.

Pertanto, trasformando secondo Fourier la [11.2.18] si ottiene

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{H}(\mathbf{r}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad [11.2.17']$$

³ Vedi ad esempio G. Franceschetti, *Campi elettromagnetici*, Bollati Boringhieri, Torino 1988, cap. 1.

dove $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega)$, $\tilde{H}(\mathbf{r}, \omega)$ e $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ sono, rispettivamente, le trasformate di Fourier di \mathbf{D} , h ed \mathbf{E} nel punto \mathbf{r} ; infine, dalle [11.12.17] e [11.12.17'] discende che $\tilde{H}(\mathbf{r}, \omega)$ coincide con $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega)$.

Sottolineamo però che, mentre la [11.2.15] si riferisce a campi variabili sinusoidalmente nel tempo con pulsazione ω assegnata (il che significa che nelle [11.2.12] ÷ [11.2.16], ω è un valore assegnato, non una variabile), la [11.2.17] è valida per qualsiasi andamento temporale dei campi, a patto di considerare ω come variabile indipendente e $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega)$ e $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ come trasformate di Fourier dei campi \mathbf{D} e \mathbf{E} nel punto \mathbf{r} .

~~Si comprende a questo punto che l'analisi di Fourier, per i dielettrici in esame, non costituisce soltanto un utile strumento di calcolo, ma ha un significato fisico importante.~~

Si intuisce a questo punto che l'analisi di Fourier, per i dielettrici in esame, non costituisce soltanto un utile strumento di calcolo, ma ha un significato fisico importante.

Prima di concludere questo paragrafo, è bene soffermarsi per qualche istante sugli ordini di grandezza dei vari parametri che figurano nelle relazioni precedenti, poiché ciò consente di dare un'idea quantitativa dei limiti entro cui la [11.1.4] può continuare ad essere ritenuta valida e spiega, inoltre, la discrepanza tra i valori teorici e quelli sperimentali, per la velocità della luce nei mezzi materiali, evidenziata alla fine del paragrafo precedente. Nella figura 11.1 è riportato l'andamento (ricavato dalla [11.2.12]) di $|\alpha|$ in funzione di ω : in corrispondenza della pulsazione di risonanza ω_0 (la quale spesso è dell'ordine di $10^{15} \div 10^{16} \text{ s}^{-1}$) esso presenta un massimo, solitamente molto pronunciato (più grande di $|\alpha(0)|$ per alcuni ordini di grandezza). Inoltre, per pulsazioni ω che non superino $10^{11} \div 10^{12} \text{ s}^{-1}$ le ordinate del diagramma coincidono praticamente con quella iniziale. Alle basse frequenze ($\leq 10^{11} \div 10^{12} \text{ s}^{-1}$) la [11.1.4] può dunque essere ritenuta valida, in genere, con buona approssimazione; quando, invece, le frequenze si approssimano al valore $\omega_0/2\pi$, come accade per le

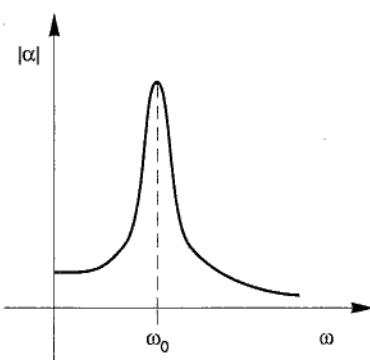


Figura 11.1

onde luminose, lo scarto tra il valore di α (e quindi di ϵ) corrispondente a queste frequenze e quello statico (per $\omega=0$) diventa notevole; ciò spiega la discrepanza ricordata nel paragrafo precedente a proposito del valore della velocità della luce. Osserviamo infine che, per $\omega \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$: ciò implica che $\tilde{\chi} \rightarrow 0$ e $\tilde{\epsilon} \rightarrow \epsilon_0$: per pulsazioni elevatissime ($\geq 10^{17} \div 10^{20} \text{ s}^{-1}$) il dielettrico tende a comportarsi come il vuoto.

Il comportamento dei dielettrici descritto in questo paragrafo è detto *dispersivo*, per motivi che saranno chiariti nel seguito.

11.3 Onde piane nei dielettrici dispersivi

Si è visto nel paragrafo precedente che la relazione costitutiva tra i vettori reali \mathbf{E} e \mathbf{D} , valida nel dominio del tempo, è del tipo [11.2.18].

Pertanto, volendo scrivere l'equazione delle onde elettromagnetiche partendo dalle equazioni di Maxwell e da questa relazione costitutiva, *non* si giunge alla classica forma [11.1.1] dell'equazione delle onde, ma a una complicata equazione integro-differenziale. Se, invece, scriviamo tanto le equazioni di Maxwell, quanto la relazione costitutiva utilizzando le trasformate di Fourier dei campi (vedi app. B), si ottiene, per una regione priva di sorgenti:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = j\omega \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \end{cases} \quad [11.3.1]$$

e nell'ipotesi di un mezzo non magnetico:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega). \end{cases} \quad [11.3.2]$$

Scritte in questa forma, le equazioni sono considerate *nel dominio della pulsazione*.

Osserviamo esplicitamente che le [11.3.1] hanno la stessa forma delle [10.6.7] e [10.6.8], scritte con riferimento a un regime sinusoidale nel vuoto. Anche in questo caso, però, occorre osservare che, mentre nelle [10.6.7], [10.6.8] ω ha un valore assegnato, nelle [11.3.1] e [11.3.2] ω è una variabile indipendente.

La coincidenza formale tra le equazioni sottolinea ancora una volta l'importanza dello studio dei campi in regime sinusoidale.

Ragionando come nel paragrafo 10.6, è semplice ricavare l'equazione delle onde nel dominio della pulsazione. Applicando, infatti, l'operatore rotore alle due equazioni a sinistra delle [11.3.1], e utilizzando le [11.3.2], si ottiene subito

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_0 \omega^2 \tilde{\epsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad [11.3.3]$$

che è, ancora una volta, la classica equazione di Helmholtz.

Da questa equazione possono trarsi importanti conseguenze riguardo alla propagazione delle onde elettromagnetiche in un mezzo dispersivo. Vista la identità formale fra la [11.3.3] e l'equazione che vale in regime sinusoidale, cominciamo col supporre, per semplicità, che l'onda sia *piana* e *sinusoidale* e che, inoltre, essa si propaghi lungo l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane.

In forma simbolica, l'equazione delle onde si scrive

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \mu_0 \omega^2 \tilde{\epsilon} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0. \quad [11.3.4]$$

Aggiungendo l'ipotesi che l'onda sia piana, si ha subito, per la componente secondo x ,

$$\frac{d^2 \tilde{E}_x}{dz^2} + \mu_0 \omega^2 \tilde{\epsilon} \tilde{E}_x(z) = 0. \quad [11.3.4']$$

Analoghe equazioni si ottengono per le altre componenti. L'integrale generale della [11.3.4'] è

$$\tilde{E}_x(z) = \tilde{A} e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\tilde{\epsilon}}z} + \tilde{B} e^{+j\omega\sqrt{\mu_0\tilde{\epsilon}}z},$$

con \tilde{A} e \tilde{B} costanti complesse arbitrarie (la radice è quella con coefficiente dell'immaginario negativo).

Limitandoci, per semplicità, al solo termine progressivo, si ha

$$\tilde{E}_x(z) = \tilde{E}_{0x} e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\tilde{\epsilon}}z}$$

avendo indicato con $\tilde{E}_{0x} = E_{0x} e^{j\varphi_{0x}}$ la costante \tilde{A} . Introducendo una *pulsazione spaziale complessa* \tilde{k} ,

$$\tilde{k} = \omega\sqrt{\mu_0\tilde{\epsilon}}, \quad [11.3.4'']$$

possiamo scrivere

$$\tilde{E}_x(z) = \tilde{E}_{0x} e^{-j\tilde{k}z} \quad [11.3.5]$$

e di qui, esprimendo \tilde{k} nella forma

$$\tilde{k} = \gamma - j\beta, \quad [11.3.4''']$$

$$\tilde{E}_x(z) = \tilde{E}_{0x} e^{-j(\gamma - j\beta)z}. \quad [11.3.5']$$

L'espressione reale di E_x è quindi

$$E_x(z, t) = \Re \{ \tilde{E}_x(z) e^{j\omega t} \} = E_{0x} e^{-\beta z} \cos(\omega t - \gamma z + \varphi_{0x}). \quad [11.3.5'']$$

In questa relazione, il parametro β è positivo, poiché il valore della radice che figura nella [11.3.4'] è quello dotato di coefficiente dell'immaginario negativo; in caso contrario, la [11.3.5''] fornirebbe un'onda che si amplifica man mano che si propaga nel verso delle z positive. Ricordando, poi, che, per l'onda piana in esame, è

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial y} = 0,$$

si ha subito (dalle equazioni di Maxwell "del rotore")

$$\begin{cases} \tilde{E}_z = \tilde{B}_z = 0, \\ \tilde{E}_x = -\frac{1}{j\omega\mu_0\tilde{\epsilon}} \frac{d\tilde{B}_y}{dz} \\ \tilde{E}_y = \frac{1}{j\omega\mu_0\tilde{\epsilon}} \frac{d\tilde{B}_x}{dz}, \\ \tilde{B}_x = \frac{1}{j\omega} \frac{d\tilde{E}_y}{dz} \\ \tilde{B}_y = -\frac{1}{j\omega} \frac{d\tilde{E}_x}{dz}. \end{cases}$$

E' immediato verificare che queste equazioni sono soddisfatte ponendo

$$\tilde{E}_y(z) = \tilde{E}_{0y} e^{-j\tilde{k}z}, \quad [11.3.6]$$

con $\tilde{E}_{0y} = E_{0y} e^{j\varphi_{0y}}$, e E_{0y}, φ_{0y} arbitrari, e

$$\begin{cases} \tilde{B}_x(z) = -\frac{1}{\omega} \tilde{k} \tilde{E}_{0y} e^{-j\tilde{k}z} \\ \tilde{B}_y(z) = \frac{1}{\omega} \tilde{k} \tilde{E}_{0x} e^{-j\tilde{k}z}. \end{cases} \quad [11.3.7]$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_x(z) = -\frac{1}{\omega} \tilde{k} \tilde{E}_{0y} e^{-j\tilde{k}z} \\ \tilde{B}_y(z) = \frac{1}{\omega} \tilde{k} \tilde{E}_{0x} e^{-j\tilde{k}z}. \end{cases} \quad [11.3.8]$$

In forma vettoriale, si scriverà:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-j\tilde{k}z}, \quad [11.3.9]$$

avendo indicato con $\tilde{\mathbf{E}}_0$ il vettore complesso di componenti \tilde{E}_{0x} e \tilde{E}_{0y} , e, per il campo magnetico,

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \frac{\tilde{\mathbf{B}}(z)}{\mu_0} = \frac{\mathbf{i}_z \times \tilde{\mathbf{E}}_0}{\tilde{Z}} e^{-j\tilde{k}z}, \quad [11.3.10]$$

avendo indicato con \mathbf{i}_z il versore dell'asse z e con

$$\tilde{Z} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\epsilon}}}, \quad [11.3.11]$$

l'impedenza caratteristica del mezzo, che è, in questo caso, un numero complesso (e non reale, come nel caso del vuoto) variabile al variare di ω .

Se l'onda si propaga lungo una generica direzione orientata \mathbf{n} , basterà, nelle [11.3.9], [11.3.10] sostituire a z l'ascissa $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ (componente di \mathbf{r} lungo la direzione \mathbf{n}):

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-j\tilde{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} \quad [11.3.9']$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}_0}{\tilde{Z}} e^{-j\tilde{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}. \quad [11.3.10']$$

Spesso riesce comodo introdurre il vettore d'onda complesso $\tilde{\mathbf{k}}$:

$$\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{k} \mathbf{n},$$

e scrivere

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-j\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} \quad [11.3.9'']$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}_0}{\tilde{Z}} e^{-j\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}. \quad [11.3.10'']$$

Ritornando nel dominio del tempo, ciascuna delle componenti di \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} può essere scritta nella forma [11.3.5''] con le dovute ampiezze e fasi.

Rispetto alla propagazione nel vuoto, emergono tre differenze importanti:

- 1) l'onda presenta una *attenuazione*, dovuta alla presenza del fattore $e^{-\beta z}$, presente in tutte le componenti del campo; inoltre, la *costante di attenuazione* β varia al variare della pulsazione;
- 2) i vettori \mathbf{E} e \mathbf{H} *non* sono in fase tra loro, perché nella [11.3.10''] \tilde{Z} è un numero complesso (e non reale come invece è per il vuoto);
- 3) la fase dell'onda (e cioè l'argomento del coseno) si propaga con velocità

$$v_f = \frac{\omega}{\gamma}; \quad [11.3.12]$$

infatti, la fase ha lo stesso valore in punti-istante (\mathbf{r}_1, t_1) e (\mathbf{r}, t) tali che (vedi la [11.3.5''])

$$\omega t - \gamma \xi = \omega t_1 - \gamma \xi_1,$$

avendo indicato con ξ l'ascissa $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ misurata lungo la retta \mathbf{n} ; considerando (\mathbf{r}_1, t_1) fisso e (\mathbf{r}, t) variabile, si ha

$$\xi = \frac{\omega}{\gamma} t + \xi_1 - \frac{\omega}{\gamma} t_1,$$

e quindi

$$v_f = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{\gamma}.$$

Osserviamo che, variando γ con ω con legge non lineare (come vedremo tra poco), la velocità di fase v_f varia al variare di ω . Ciò ha, come vedremo, conseguenze molto importanti.

Dobbiamo ora esaminare il modo in cui γ , β e v_f dipendono dalla pulsazione ω . Per non appesantire troppo i calcoli, sviluppiamo $\tilde{\epsilon}$ in serie e arrestiamoci ai primi due termini (il che è lecito quando la densità N sia modesta, come ad esempio nei gas). Ricordando le [11.2.12] e [11.2.14], e trascurando il termine $N\tilde{\alpha}/3\epsilon_0$ a denominatore della [11.2.14], si ha, dalla [11.3.4'']:

$$\tilde{k} \approx \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{N\tilde{\alpha}}{\epsilon_0}\right)} \approx \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Ne^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega k_{\text{visc}}} \right]. \quad [11.3.13]$$

Per $\omega \ll \omega_0$, si ha (ricordando la [11.3.4''])

$$\begin{cases} \gamma \approx \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_0^2} \right) \\ \beta \approx 0; \end{cases} \quad [11.3.14]$$

ciò mostra che, alle basse frequenze, la velocità v_f (data dalla [11.3.12]) è indipendente dalla frequenza, e, inoltre, l'onda non presenta attenuazione (il dielettrico è *trasparente*).

Per pulsazioni un po' più alte, ma ancora lontane da ω_0 , si ha

$$\begin{cases} \gamma \approx \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Ne^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \\ \beta \approx 0. \end{cases} \quad [11.3.15]$$

In queste condizioni, l'attenuazione è ancora trascurabile, ma la velocità v_f è funzione decrescente di ω : il dielettrico presenta *dispersione normale*.

Per $\omega \gg \omega_0$, si ha

$$\begin{cases} \gamma \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Ne^2}{m_e \omega^2} \right) \\ \beta \approx 0. \end{cases} \quad [11.3.16]$$

L'attenuazione è ancora trascurabile, ma la velocità v_f varia con ω . Inoltre, γ è unicamente funzione di N , indipendente sia da ω_0 che da k_{visc} , e cioè dalle caratteristiche della interazione degli elettroni con la struttura atomica; v_f diminuisce al crescere di ω , e la dispersione è ancora normale.

Infine, per $\omega \cong \omega_0$, non è più possibile arrestarsi ai primi due termini dello sviluppo di $\sqrt{\epsilon}$, e i calcoli diventano laboriosi, anche se concettualmente semplici. Ci limiteremo pertanto all'illustrazione qualitativa della figura 11.2, dove sono riportati gli andamenti in funzione di ω di β e di n^2 :

$$n^2 = \frac{c^2}{v_f^2} = \frac{c^2}{\omega^2} \gamma^2$$

(avendo indicato con n l'indice di rifrazione del dielettrico).

Come si vede, β presenta un massimo molto pronunciato in corrispondenza di ω_0 : ciò indica che, a questa frequenza, il mezzo è *opaco* all'onda (si dice anche che il mezzo presenta una *riga di assorbimento* alla pulsazione ω_0). In queste condizioni, il dielettrico sottrae energia all'onda elettromagnetica: finché l'attenuazione è dovuta soprattutto all'irraggiamento degli elettroni, l'energia sottratta all'onda è "diffusa" in tutte le direzioni; quando, invece, l'attenuazione è dovuta soprattutto agli urti che gli elettroni subiscono con gli atomi contigui (come avviene quando la densità è alta), l'energia sottratta all'onda si trasforma in calore e il dielettrico si riscalda.

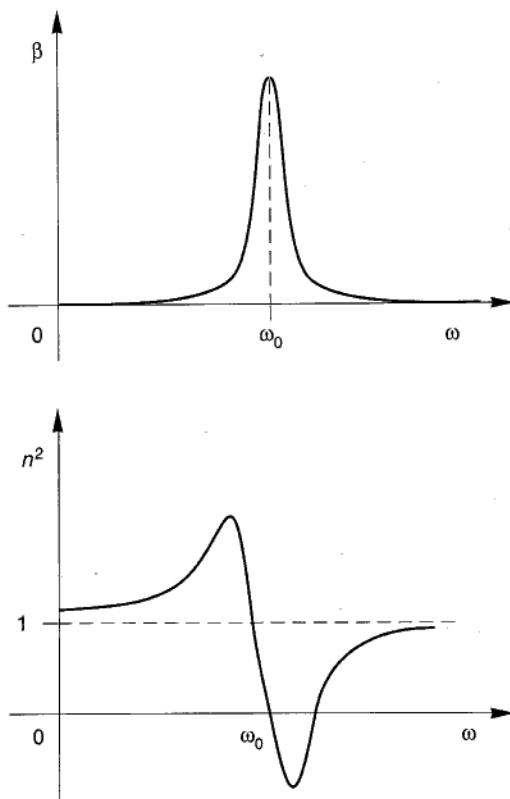


Figura 11.2

Nella figura 11.2 si vede pure che in un intorno di ω_0 la velocità v cresce al crescere di ω (poiché n diminuisce); ciò indica una *dispersione anomala*.

E' però difficile sperimentare questo tipo di dispersione in un dielettrico, proprio perché essa è accompagnata da una forte attenuazione; nonostante ciò, si è riusciti a realizzare prismi ottici (ne parleremo più avanti) che presentano dispersione anomala nel campo di frequenze tipico della luce. Essi presentano la curiosa proprietà (per motivi che saranno chiariti nei paragrafi seguenti) di fornire uno spettro della luce bianca in cui i colori non si susseguono nell'ordine abituale dell'arcobaleno, ma in ordine inverso.

Osserviamo infine che per valori di ω poco maggiori di ω_0 , n^2 diventa negativo, e se ne deduce che n è immaginario. Ciò significa che l'onda non può propagarsi nel mezzo in esame (vedremo in seguito perché). Per ω tendente all'infinito, n tende a 1 e la velocità v tende a c .

La trattazione fin qui svolta è basata sull'ipotesi che in ciascuna molecola (monatomica) esista un solo elettrone capace di vibrare. Senza pretendere di approfondire l'argomento, cercheremo di dare un'idea di ciò che accade quando si rimuova questa

ipotesi. Per il momento, però, manteniamola ancora e trascuriamolo, invece, nella [11.2.12] il coefficiente dell'immaginario (e cioè il termine legato alla forza viscosa [11.2.5], scrivendo

$$\tilde{\alpha} = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} = \alpha. \quad [11.3.17]$$

Dalla [11.2.14] si ha allora

$$\tilde{\chi} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} = \chi, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon_0 + \tilde{\chi} = \epsilon_0 + \chi = \epsilon,$$

e, dalle [11.3.4''] e [11.3.4''']:

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\mu_0 \tilde{\epsilon}} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} = k.$$

L'indice di rifrazione $n = c/v$ può allora essere scritto nella forma

$$n = \frac{c}{\omega} k = c \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \sqrt{\epsilon_r}, \quad [11.3.18]$$

come per i mezzi non dispersivi. Riprendendo, ora, la relazione di Clausius-Mossotti [5.12.23] e sostituendovi la [11.3.18], si ha

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}.$$

Infine, facendo uso della [11.3.17], si ottiene la *relazione di Lorentz-Lorenz*:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N}{3\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad [11.3.19]$$

la quale consente di prevedere l'andamento dell'indice di rifrazione in funzione di ω , per un dato mezzo, partendo dalla sola conoscenza della sua pulsazione di risonanza ω_0 .

Ammettiamo ora che in ciascuna molecola ci siano più elettroni vibranti e che questi possano essere suddivisi in vari gruppi, a ciascuno dei quali corrisponda una specifica pulsazione di risonanza ω_k . Sotto queste ipotesi, la [11.3.19] si modifica come segue

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N}{3\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2}, \quad [11.3.20]$$

dove f_k rappresenta la frazione di elettroni, in ciascuna molecola, cui sia associata la pulsazione di risonanza ω_k , e la sommatoria è estesa a tutte le ω_k (e cioè a tutti i gruppi di elettroni di ciascuna molecola).

Ricordiamo infine che per i gas per i quali n non sia molto discosto dall'unità, la [11.3.20] può essere semplificata nella forma

$$n^2 - 1 \approx \frac{N}{\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2}.$$

Per quel che riguarda l'andamento con ω dei fenomeni di dispersione, possono dirsi, per ciascuna ω_k , cose analoghe a quelle prima dette per la sola ω_0 .

Prima di concludere questo paragrafo, resta da dire qualcosa circa gli effetti che la dispersione ha sulla propagazione di un'onda *non sinusoidale*. A questo scopo, riprendiamo l'esempio dei gruppi d'onde analizzato nel paragrafo 10.7 e cerchiamo di capire cosa accade quando essi si propaghino in un dielettrico dispersivo, invece che nel vuoto. Alla luce delle [11.3.12] e seguenti, si comprende che due onde monocromatiche, di pulsazioni ω_1 e ω_2 , si propagano nel dielettrico dispersivo con velocità v_{f1} e v_{f2} diverse tra loro. Ne derivano tre conseguenze importanti:

- 1) la velocità di fase v_f e la velocità di gruppo v_g non sono uguali;
- 2) entrambe sono, in genere, diverse dal valore c : in particolare, quando la dispersione è anomala e l'indice di rifrazione n è minore dell'unità, la velocità di fase risulta *maggior*e di c ; anche la velocità di gruppo può risultare maggiore di c , in caso di dispersione anomala, ma su ciò torneremo più avanti;
- 3) le due onde monocromatiche, viaggiando, si spostano l'una rispetto all'altra: ne deriva che la configurazione spaziale dell'onda varia da istante a istante (e così pure, varia da punto a punto il suo andamento temporale), e l'onda, nel propagarsi, si modifica, si sparpaglia.

Da quanto detto, si deduce però che, se il mezzo *non* è molto dispersivo, l'onda può propagarsi a lungo senza subire una distorsione significativa; in questo caso, la velocità di gruppo rappresenta anche la velocità con cui si propaga l'energia associata all'onda. Ma ciò, in generale, non è vero: ad esempio, quando, in presenza di dispersione anomala, la velocità di gruppo supera il valore c (in altri casi, diventa addirittura negativa), essa perde significato fisico.

Tutto ciò lascia intravedere un importante problema, connesso con il fatto fisico fondamentale (che sarà ripreso nel cap. 13) che in natura non esiste segnale che trasporti informazione (ed energia) con velocità maggiore di c : che significato hanno queste velocità (di fase e di gruppo) che possono avere, invece, valori maggiori di c ? Il problema fu risolto agli inizi del secolo da Sommerfeld e Brillouin, i quali mostrarono che, quando un'onda elettromagnetica si propaga in un mezzo (di qualunque tipo) il fronte dell'onda viaggia *sempre* con velocità c . Il fronte d'onda è seguito da due "avanguardie" successive dell'onda, le quali viaggiano a velocità di poco minore di c , e trasportano con sé una frazione ancora trascurabile dell'energia associata all'onda. Subito dopo, arriva il vero e proprio segnale, che trasporta il grosso dell'energia, e che viaggia con una velocità, detta appunto *velocità di segnale*, diversa in generale sia dalla velocità di fase che da quella di gruppo, e in ogni caso, minore di c . Pertanto, in caso di forte dispersione, tanto la velocità di fase che quella di gruppo perdono significato fisico.

Riassumendo, possiamo concludere quanto segue. Ogni mezzo ha una *sua* relazione di dispersione, del tipo

$$\begin{cases} \beta = \beta(\omega) \\ v_f = v_f(\omega), \end{cases}$$

che fornisce l'andamento con ω dell'attenuazione β e della velocità v_f di un'onda piana sinusoidale.

Poiché, per definizione

$$v_f = \frac{k}{\omega},$$

dove k è la pulsazione spaziale e ω quella temporale, la relazione di dispersione

$$v_f = v_f(\omega)$$

fornisce, per ciascun mezzo, il legame

$$k = k(\omega)$$

[11.3.20]

tra k e ω . In virtù di quanto detto a proposito dell'analisi di Fourier, ciò consente di sovrapporre onde monocromatiche di pulsazioni diverse, fino ad ottenere la distribuzione spaziotemporale dell'onda (*non* sinusoidale) desiderata. La relazione di dispersione gioca dunque, nel dominio della pulsazione, un ruolo altrettanto importante di quello dell'equazione d'onda nel dominio del tempo, e di solito è molto più semplice di quest'ultima.

11.4 La propagazione nei mezzi conduttori

Lo studio delle onde elettromagnetiche è stato fin qui condotto con riferimento a mezzi che avessero conducibilità elettrica σ nulla. Se rimuoviamo questa ipotesi, e ammettiamo che le relazioni costitutive del mezzo siano, nel dominio del tempo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \end{array} \right. \quad [11.4.1]$$

le equazioni del campo, in regioni omogenee in cui *non* siano presenti campi elettromotori impressi, diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{array} \right. \quad [11.4.2]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon} \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \text{div} \left(\sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Osserviamo innanzitutto che in questo caso non è possibile, in linea di principio, escludere a priori la presenza di cariche libere (oltre che di correnti) poiché, nelle [11.4.2], la $\operatorname{div} \mathbf{E}$ può essere, come si vedrà, diversa da zero. Ragionando allo stesso modo che nel paragrafo 10.1, concludiamo che le equazioni delle onde elettromagnetiche hanno la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \\ \vdots \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \end{array} \right. \quad [11.4.3]$$

Come si vede, queste equazioni differiscono dalle [10.1.7], [10.1.8] per la presenza delle derivate prime rispetto al tempo (oltre che, naturalmente, per le ϵ e μ , diverse, in genere, da quelle del vuoto).

Studiamo, anche in questo caso, la propagazione di *onde piane*. Ragionando come nel paragrafo 10.2, ricaviamo subito che, dalle [10.2.1] e dalla solenoidabilità di \mathbf{B} , si ha

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad [11.4.4]$$

e, analogamente, dall'ultima delle [11.4.2], si ottiene:

$$\sigma \frac{\partial E_z}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} \right) = 0. \quad [11.4.5]$$

Dalle equazioni del rotore e dalle [10.2.1], si ottiene inoltre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \\ \sigma E_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0. \end{array} \right. \quad [11.4.6]$$

Dalla [11.4.4] e dalla prima delle [11.4.6] si conclude che una componente B_z può esistere soltanto se è costante nel tempo e uniforme nello spazio; essa viene quindi scartata perché estranea alla propagazione. Dalla seconda delle [11.4.6], si ottiene, invece, che in ciascun punto dello spazio deve essere

$$E_z(P, t) = E_0(P) e^{-t/\tau},$$

con $\tau = \epsilon/\sigma$. Di conseguenza, se la conducibilità σ ha un valore finito, la componente E_z decade esponenzialmente nel tempo in ciascun punto dello spazio, con una costante di tempo pari a τ (*tempo di rilassamento*). Poiché τ ha valori estremamente bassi anche nei cattivi conduttori (ad esempio, per l'acqua di mare, $\tau \approx 2,10^{-10}$ s), se ne conclude che nei mezzi conduttori la componente E_z può essere ignorata e che il

campo, nelle onde piane, è puramente trasversale (come nel vuoto). Osserviamo infine, dalla [11.4.5] e dalla legge di Gauss, che

$$\rho_{\text{lib}}(P, t) = \rho_{0\text{lib}}(P) e^{-t/\tau}.$$

Riassumendo, le equazioni che descrivono la propagazione delle onde piane nei mezzi conduttori sono (per ciascuna delle componenti trasversali del campo) del tipo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad [11.4.7]$$

Sfortunatamente, l'integrale generale di questa equazione non è esprimibile immediatamente in forma semplice come nel caso del vuoto. Conviene quindi passare nel dominio della pulsazione e calcolare la soluzione in regime sinusoidale con pulsazione ω assegnata. In notazione simbolica, l'equazione della propagazione dell'onda, ad esempio per la componente E_x , si scrive

$$\frac{d^2 \tilde{E}_x}{dz^2} + \mu\epsilon\omega^2 \tilde{E}_x - j\omega\mu\sigma \tilde{E}_x = 0,$$

ovvero

$$\frac{d^2 \tilde{E}_x}{dz^2} + \mu\omega^2 \tilde{\epsilon} \tilde{E}_x = 0, \quad [11.4.8]$$

avendo posto

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad [11.4.9]$$

Si perviene dunque a un'equazione che ha la stessa forma della [11.3.4'], valida per i dielettrici dispersivi, a patto di considerare una $\tilde{\epsilon}$ complessa, data dalla [11.4.9]: e ciò anche quando la ϵ e la μ non siano funzioni della frequenza (ricordiamo che l'aver supposto le [11.4.1] valide nel dominio del tempo implica che ϵ, μ, σ siano indipendenti da ω). Anche in questo caso, quindi, ponendo $\mu = \mu_0$ e

$$\tilde{k}' = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = \epsilon_r - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}, \quad [11.4.10]$$

$$\alpha - j\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{k}'}, \quad \text{con } \beta > 0, \quad [11.4.11]$$

la soluzione progressiva è del tipo

$$\tilde{E}_x(z) = \tilde{E}_0 e^{-j(\alpha - j\beta)z}. \quad [11.4.12]$$

Relazioni analoghe valgono, naturalmente, per le altre componenti di $\tilde{\mathbf{E}}$ e di $\tilde{\mathbf{B}}$ e queste sono legate tra loro ancora dalla [11.3.10]. Ritornando nel dominio del tempo,

si ha

$$E_x(z, t) = E_{0x} e^{-\beta z} \cos(\omega t - \alpha z + \varphi_0), \quad [11.4.12']$$

con α e β dati dalla relazione

$$\alpha - j\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}}. \quad [11.4.11']$$

Come si vede, tanto β che α dipendono da ω e ciò implica che la presenza di una conducibilità *non* nulla in un mezzo determina, di per sé, fenomeni di dispersione (anche se ϵ *non* è funzione di ω) oltreché, naturalmente, di attenuazione.

Occorre notare infine che se il mezzo è un buon conduttore, se cioè

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \gg \epsilon_r, \quad [11.4.13]$$

nella [11.4.10] è possibile trascurare ϵ_r e porre

$$\tilde{k}' = -j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}; \quad [11.4.14]$$

sicché risulta

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{k}'} = \frac{\omega}{c} \sqrt{-j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = \frac{\omega}{c} \left[\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} e^{-j\pi/4} \right] = \sqrt{\frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma} (1-j).$$

Dalla [11.4.11] si ha dunque

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma}; \quad [11.4.15]$$

dato che α e β hanno le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, è possibile introdurre un parametro d ,

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma}}, \quad [11.4.16]$$

che ha le dimensioni di una lunghezza, e si ha, in definitiva (dalla [11.4.12']):

$$E_x(z, t) = E_{0x} e^{-z/d} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi_0\right), \quad \text{con } \lambda = 2\pi d.$$

Se ne conclude che il campo nel conduttore subisce un'attenuazione molto intensa: già per distanze z pari a 4-5 volte la distanza d , il campo è praticamente nullo. Per questo motivo, il parametro d prende il nome di *profondità di penetrazione*. Dato che in un buon conduttore, come il rame, d è dell'ordine dei decimi di mil-

limetro anche per frequenze piuttosto basse (dell'ordine di 10^5 s^{-1}), si comprende il nome di *effetto pelle* che è stato dato al tipo di propagazione che si verifica in tali mezzi. Osserviamo, infine, che al tendere all'infinito di σ , la profondità di penetrazione tende a zero per ogni frequenza: e ciò corrisponde al fatto che un conduttore ideale ($\sigma \rightarrow \infty$) costituisce uno schermo per il campo elettromagnetico (così come vedemmo a proposito del campo elettrostatico). In queste condizioni, nelle [11.4.3] la derivata del secondo ordine rispetto al tempo può essere trascurata rispetto a quella del primo ordine, e l'equazione diventa analoga a quella di *diffusione* del calore.

Prima di concludere questo paragrafo è utile accennare ai fenomeni che si verificano in quei particolari conduttori nei quali, per effetto della bassissima densità, gli elettroni liberi presenti nel mezzo *non* risentono in misura significativa della presenza degli ioni positivi e degli altri elettroni: in altre parole, il *libero cammino medio* tra due urti successivi è così grande che gli elettroni si muovono per effetto del solo campo elettromagnetico agente nel mezzo. E', questo, il caso dei gas rarefatti ionizzati a temperature non molto alte (detti anche *plasmi freddi*): ed è, in particolare, il caso dell'alta ionosfera.

Nelle condizioni descritte, l'equazione fondamentale della dinamica per un elettrone dotato di velocità piccola rispetto a c , trascurando il termine di forza magnetica, è

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e \mathbf{E}. \quad [11.4.18]$$

Se \mathbf{E} varia sinusoidalmente nel tempo, la [11.4.18] ammette una soluzione sinusoidale che, in notazione simbolica, è del tipo

$$\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{e}{j\omega m_e} \tilde{\mathbf{E}}.$$

La densità di corrente \mathbf{J} è allora anch'essa sinusoidale, e pari a

$$\tilde{\mathbf{J}} = -Ne \tilde{\mathbf{v}} = \frac{Ne^2}{j\omega m_e} \tilde{\mathbf{E}}, \quad [11.4.19]$$

avendo indicato con N il numero di elettroni liberi per unità di volume.

Le equazioni di Maxwell, trascurando la polarizzazione delle molecole del gas, assumono la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} &= -j\omega \tilde{\mathbf{B}} \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{Ne^2}{j\omega m_e} \tilde{\mathbf{E}} + j\omega \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad [11.4.20]$$

Si noti che la divergenza di \mathbf{D} è nulla, poiché il gas è supposto neutro anche localmente (oltre che globalmente).

Ponendo

$$\epsilon' = \epsilon_0 - \frac{Ne^2}{\omega^2 m_e} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right), \quad [11.4.21]$$

si ha

$$\text{rot } \widetilde{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon' \widetilde{\mathbf{E}}, \quad [11.4.22]$$

e le equazioni del campo diventano quelle valide per i dielettrici, a patto di considerare una costante dielettrica ϵ' che può essere posta nella forma

$$\epsilon' = \epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right],$$

avendo posto

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}}. \quad [11.4.23]$$

La ω_p così definita prende il nome di *pulsazione di plasma*.

Come in un dielettrico (vedi § 11.3), un'onda piana sinusoidale progressiva è descritta dalla:

$$\widetilde{E}_x(z) = \widetilde{E}_{0x} e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon'}z}, \quad [11.4.24]$$

e analoghe.

Distinguiamo, ora, due casi:

$$1) \epsilon' > 0, \quad \text{e cioè} \quad \omega > \omega_p$$

Si ha (sempre con riferimento al § 11.3)

$$\beta = 0, \quad \text{e} \quad \gamma = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon'}.$$

Ne deriva

$$v_f = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right]}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}}. \quad [11.4.25]$$

In questo caso, l'onda si propaga senza attenuarsi e la velocità v_f è *sempre* maggiore di c .

$$2) \epsilon' < 0, \quad \text{e cioè} \quad \omega < \omega_p$$

In questo caso, la radice di $\mu_0\epsilon'$ diviene immaginaria e si può mostrare che un'onda che raggiunga la superficie di frontiera di un mezzo siffatto viene totalmente riflessa. Ciò assume particolare rilievo nelle applicazioni e spiega perché le onde radio (che hanno $\omega < \omega_p$) vengono riflesse dall'alta ionosfera e riescono, così, a superare la curvatura terrestre, giungendo fino a punti ben più distanti dell'orizzonte ottico. Al contrario, le onde di frequenza maggiore (come quelle TV) *non* vengono riflesse e attra-

versano anche gli strati alti della ionosfera. Ciò ha due importanti conseguenze: da un lato, infatti, si spiega in questo modo la necessità dei ripetitori TV dislocati, l'uno rispetto all'altro, entro l'orizzonte ottico; dall'altro, si spiega pure la possibilità di trasmissione di segnali verso e da satelliti.

11.5 Riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche al confine tra dielettrici diversi

11.5.1 Leggi della riflessione e rifrazione

Fin qui, si è sempre supposto che l'intero spazio fosse omogeneo, e cioè riempito di un mezzo materiale dotato di proprietà elettromagnetiche indipendenti dal punto. Ci proponiamo ora di rimuovere questa ipotesi, cominciando con un caso semplice.

Immaginiamo che l'intero spazio sia suddiviso da un piano π in due semispazi Ω_1 e Ω_2 , riempiti di due dielettrici diversi; supponiamo inoltre che tali dielettrici non presentino attenuazione nel campo di frequenze che ci interessa, pur potendo eventualmente presentare dispersione, e che, quindi, siano caratterizzati dalle costanti dielettriche (reali) ϵ_1 e ϵ_2 , eventualmente variabili con ω .

Ci proponiamo di verificare se esista una soluzione delle equazioni del campo che goda delle seguenti due proprietà: a) sia piana, ovunque; b) sia sinusoidale, con pulsazione ω assegnata, ovunque.

Anticipando le conclusioni diciamo subito (e lo mostreremo di qui a poco) che una tale soluzione, in generale, *non* esiste; mentre ne esiste invece un'altra, dotata dei seguenti requisiti: a) è piana e sinusoidale, con pulsazione ω , in *uno* dei due semispazi (diciamo, Ω_2); b) è costituita dalla sovrapposizione di *due* onde piane e sinusoidali, di direzioni di propagazione diverse (entrambe alla pulsazione ω) nell'*altro* semispa-
zio (Ω_1).

Esaminiamo le proprietà di questa soluzione (la cui esistenza è, per il momento, ammessa come ipotesi).

Indicando con i pedici 0 e 1 i campi che si sovrappongono nel mezzo Ω_1 , e con il pedice 2 il campo nel mezzo Ω_2 , possiamo scrivere (vedi § 10.6.31):

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} \\ \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{H}}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} = \frac{1}{|\mathbf{k}_0|} \frac{\mathbf{k}_0 \times \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}, t)}{Z_1}, \end{cases} \quad [11.5.1]$$

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{E}}_1 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \\ \widetilde{\mathbf{H}}_1(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{H}}_1 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} = \frac{1}{|\mathbf{k}_1|} \frac{\mathbf{k}_1 \times \widetilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}, t)}{Z_1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{E}}_2 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} \\ \widetilde{\mathbf{H}}_2(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{H}}_2 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} = \frac{1}{|\mathbf{k}_2|} \frac{\mathbf{k}_2 \times \widetilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t)}{Z_2}, \end{cases}$$

avendo indicato con \mathbf{r} il raggio-vettore spiccato da una origine O nel piano π verso il

generico punto-campo P , con $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ i vettori d'onda associati alle tre onde, e con Z_1 e Z_2 le impedenze caratteristiche dei due mezzi (supposti non magnetici):

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}},$$

e avendo posto inoltre

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0 e^{j\varphi_0}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_1 e^{j\varphi_1}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{E}_2 e^{j\varphi_2}. \quad [11.5.1']$$

(L'aver posto l'origine O nel piano π tornerà comodo, poiché i punti di tale piano vengono in questo modo individuati da vettori \mathbf{r} che giacciono nel piano π , e ciò semplificherà gli sviluppi successivi.)

Poiché i vettori d'onda hanno, per definizione, direzione coincidente con la direzione di propagazione dell'onda stessa (e sono pertanto ortogonali ai piani di uguale fase) e modulo pari al rapporto tra la pulsazione ω e la velocità v_f di propagazione, si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_0| &= |\mathbf{k}_1| = \frac{\omega}{v_{f1}} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}, \\ |\mathbf{k}_2| &= \frac{\omega}{v_{f2}} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}. \end{aligned} \quad [11.5.2]$$

In corrispondenza del piano π di separazione fra i due mezzi, i campi debbono verificare le condizioni di continuità per le componenti tangenti di \mathbf{E} e \mathbf{H} (vedi § 9.6); si ha quindi

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times [\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{n} \times [\tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{H}}_1(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_2(\mathbf{r}, t), \end{cases} \quad [11.5.3]$$

ove \mathbf{n} è il versore della normale al piano π , e \mathbf{r} il raggio vettore di un generico punto del piano π .

Poiché le [11.5.3] debbono essere verificate per *ogni* \mathbf{r} di π ed *ogni* t , sostituendo le [11.5.1] in queste relazioni, si ottiene (per $\mathbf{r}=0$)

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}}_0 + \tilde{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}_2 \\ \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}_0 + \tilde{\mathbf{H}}_1) = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_2 \end{cases} \quad [11.5.4]$$

e, inoltre

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}, \quad \text{per ogni } \mathbf{r} \in \pi. \quad [11.5.5]$$

Dalle [11.5.5], si ha subito

$$(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{r} \in \pi.$$

I vettori $(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1)$ e $(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2)$ sono cioè ortogonali al piano π e pertanto paralleli a \mathbf{n} . Ciò implica

$$(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1) \times \mathbf{n} = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2) \times \mathbf{n} = 0,$$

⁴ Si noti che le [11.5.5] impongono l'uguaglianza delle fasi delle tre onde in corrispondenza dei punti del piano π .

e quindi

$$\mathbf{k}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}. \quad [11.5.6]$$

Consideriamo ora il piano π' (*piano di incidenza*) determinato dalle direzioni di \mathbf{n} e \mathbf{k}_0 ; il vettore

$$\mathbf{n}' = \mathbf{k}_0 \times \mathbf{n} \quad [11.5.7]$$

è ortogonale a π' .

Calcoliamo le componenti di \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 nella direzione \mathbf{n}' . Ricordando le [11.5.6], si ha subito

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{n}) = 0 \\ \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{n}) = \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}) = 0 \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{n}) = \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}) = 0. \end{array} \right. \quad [11.5.8]$$

Se ne conclude che i tre vettori \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 giacciono tutti nel piano π' . Inoltre, dalla prima delle [11.5.6] e dalla prima delle [11.5.2] si trae

$$\sin \theta_0 = \sin \theta_1 \quad [11.5.9]$$

avendo indicato con θ_0 e θ_1 , rispettivamente, gli angoli formati da \mathbf{k}_0 e \mathbf{k}_1 con \mathbf{n} . Nella [11.5.9], occorre escludere il caso $\theta_0 = \theta_1$, poiché ciò comporterebbe la coincidenza di \mathbf{k}_0 e \mathbf{k}_1 e, conseguentemente, l'esistenza di un'unica onda piana (sovraposizione delle due considerate finora) anche nel mezzo Ω_1 , contrariamente a quanto preannunciato più sopra. Pertanto, deve avversi

$$\theta_0 = \pi - \theta_1 \quad [11.5.10]$$

(l'aggiunta di un multiplo di 2π non modifica, ovviamente, la posizione reciproca di \mathbf{k}_0 e \mathbf{k}_1). Se ne conclude che la posizione reciproca di \mathbf{k}_0 e \mathbf{k}_1 è come quella indicata nella figura 11.3a, dove il piano del foglio coincide con il piano π' , e la retta r è la traccia del piano π su π' . La figura rende immediatamente visibile il fatto che il vettore \mathbf{k}_1 è il simmetrico, nel piano π' , di \mathbf{k}_0 rispetto alla retta r : di qui, l'opportunità di considerare \mathbf{k}_1 come *vettore riflesso* di \mathbf{k}_0 e di indicare l'angolo $\theta_i = \pi - \theta_1$ come *angolo di incidenza* e θ_r come *angolo di riflessione*, θ_r . Con ciò, la [11.5.10] diventa

$$\theta_i = \theta_r, \quad [11.5.10']$$

che è l'usuale forma della legge della riflessione.

Ritornando alle [11.5.6], per ciò che riguarda la coppia di vettori \mathbf{k}_0 e \mathbf{k}_2 , si ha

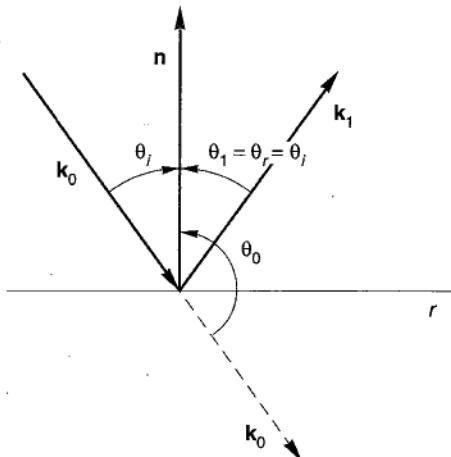
$$|\mathbf{k}_0| \sin \theta_0 = |\mathbf{k}_2| \sin \theta_2,$$

avendo indicato con θ_2 l'angolo fra \mathbf{k}_2 e \mathbf{n} . Ricordando le [11.5.2], si ha

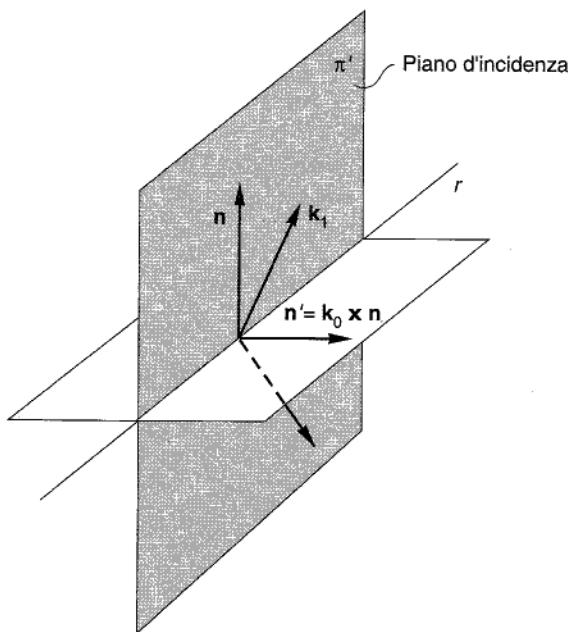
$$\frac{\omega}{v_{f1}} \sin \theta_0 = \frac{\omega}{v_{f2}} \sin \theta_2,$$

e quindi

$$\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_2} = \frac{v_{f1}}{v_{f2}}, \quad [11.5.11]$$



(a)



(b)

Figura 11.3

ovvero

$$\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} . \quad [11.5.12]$$

La situazione è del tipo rappresentato nella fig. 11.4. Denotando con θ_t l'angolo di rifrazione:

$$\theta_t = \pi - \theta_2 ,$$

la [11.5.12] può essere riscritta nella classica forma della legge di rifrazione:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_{f1}}{v_{f2}} = \frac{c/v_{f2}}{c/v_{f1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad [11.5.13]$$

avendo indicato con n_1 l'indice di rifrazione, rispetto al vuoto, del mezzo Ω_1 , con n_2 quello di Ω_2 e con n_{21} quello di Ω_2 rispetto a Ω_1 .

Riassumendo, se si ammette che esistano in Ω_1 un'onda caratterizzata dal vettore \mathbf{k}_0 (onda incidente) e una caratterizzata da \mathbf{k}_1 (onda riflessa), e in Ω_2 un'onda caratterizzata da \mathbf{k}_2 (onda rifratta), le tre onde debbono soddisfare alle relazioni [11.5.8], [11.5.10'] e [11.5.13], come conseguenza delle [11.5.5]. Ciò però non basta a garantire la continuità dei componenti tangenti di \mathbf{E} e \mathbf{H} su π , poiché non si è ancora imposto che i campi verifichino le [11.5.4]. Quando avremo fatto ciò, otterremo relazioni che legano tra loro i campi delle tre onde (incidente, riflessa e rifratta), e che sono note come leggi di Fresnel, le quali costituiscono una condizione *necessaria* affinché siano rispettate le condizioni di continuità su π : di qui, concluderemo che l'assenza anche di una soltanto delle tre onde non consente, in generale, di rispettare le condizioni al contorno, e ciò dimostra il nostro assunto iniziale (che, cioè, non è in generale possibile trovare una soluzione che sia piana e sinusoidale ovunque).

*11.5.2 Le leggi di Fresnel

Ritorniamo, ora, alle [11.5.4]: in esse, i vettori (complessi) che vi figurano hanno, almeno per ciò che concerne i vettori elettrici, orientazioni arbitrarie. Per comodità,

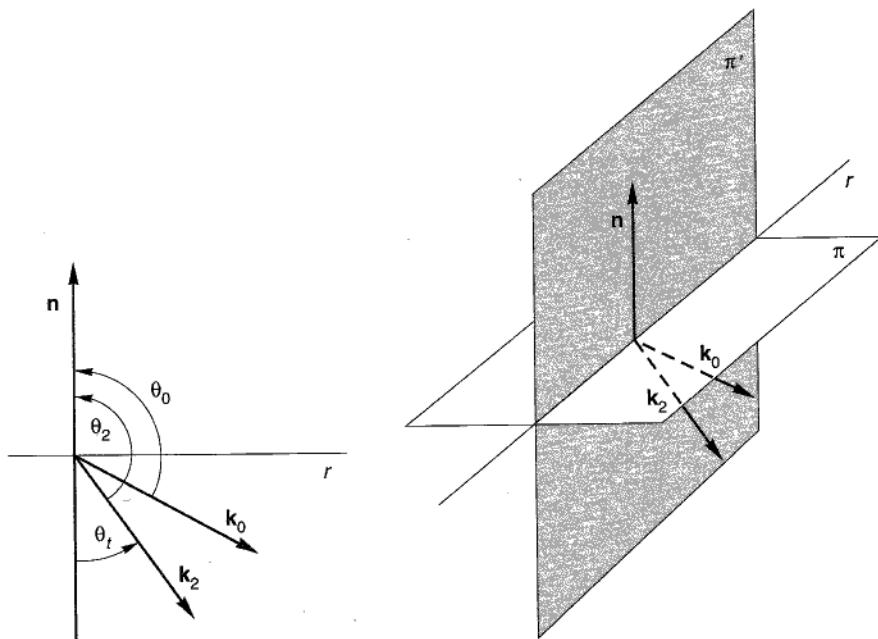


Figura 11.4

scomponiamo ciascuno di essi in due vettori: uno, indicato con il pedice “ \perp ”, parallelo a \mathbf{n}' , e dunque ortogonale al piano di incidenza π' e l’altro, indicato con il pedice “ \parallel ”, giacente in tale piano (di qui il simbolo di parallelismo, nel pedice).

Occupiamoci separatamente di tali componenti.

1) Campi elettrici ortogonali al piano di incidenza

La prima delle [11.5.4] diventa

$$\tilde{\mathbf{E}}_{0\perp} + \tilde{\mathbf{E}}_{1\perp} = \tilde{\mathbf{E}}_{2\perp}; \quad [11.5.14]$$

la seconda, scritta in termini dei vettori elettrici, è

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{k}_0 \times \tilde{\mathbf{E}}_0 - \mathbf{k}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1) \frac{1}{|\mathbf{k}_0|} \frac{1}{Z_1} = \mathbf{n} \times (\mathbf{k}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2) \frac{1}{|\mathbf{k}_2|} \frac{1}{Z_2}. \quad [11.5.15]$$

Essendo ora i vettori elettrici ortogonali al piano di incidenza, essi sono anche ortogonali a \mathbf{n} ; perciò, moltiplicando scalarmente la [11.5.15] per \mathbf{n} e sviluppando i tripli prodotti misti, si ottiene

$$(\tilde{\mathbf{E}}_{0\perp} - \tilde{\mathbf{E}}_{1\perp}) \cos \theta_i = \frac{v_1}{v_2} \tilde{\mathbf{E}}_{2\perp} \cos \theta_t. \quad [11.5.16]$$

Le [11.5.14] e [11.5.16] forniscono $\tilde{\mathbf{E}}_{1\perp}$ e $\tilde{\mathbf{E}}_{2\perp}$ in funzione di $\tilde{\mathbf{E}}_{0\perp}$; utilizzando i pedici “ i ” (incidente) al posto di “0”, “ r ” (riflesso) al posto di “1” e “ t ” (trasmesso) al posto di “2”, si ha

$$\tilde{\mathbf{E}}_{r\perp} = -\frac{\frac{v_{f1}}{v_{f2}} \cos \theta_t - \cos \theta_i}{\frac{v_{f1}}{v_{f2}} \cos \theta_t + \cos \theta_i} \tilde{\mathbf{E}}_{i\perp} \quad [11.5.17]$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{t\perp} = \frac{2 \cos \theta_t}{\frac{v_{f1}}{v_{f2}} \cos \theta_t + \cos \theta_i} \tilde{\mathbf{E}}_{i\perp}. \quad [11.5.18]$$

Naturalmente, l’angolo di rifrazione θ_t può, ove occorra, essere espresso in funzione di quello di incidenza θ_i mediante la [11.5.13].

Le corrispondenti relazioni per i campi magnetici possono essere ricavate subito dalle [11.5.1], ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{H}}_i = \frac{1}{|\mathbf{k}_i|} \frac{\mathbf{k}_i \times \tilde{\mathbf{E}}_i}{Z_1} \\ \tilde{\mathbf{H}}_r = \frac{1}{|\mathbf{k}_r|} \frac{\mathbf{k}_r \times \tilde{\mathbf{E}}_r}{Z_1} \\ \tilde{\mathbf{H}}_t = \frac{1}{|\mathbf{k}_t|} \frac{\mathbf{k}_t \times \tilde{\mathbf{E}}_t}{Z_2}. \end{array} \right.$$

A causa dei prodotti vettoriali, però, i campi magnetici associati ai campi elettrici ortogonali a π' risultano invece paralleli a questo piano (le formule si tralasciano, per semplicità).

2) Campi elettrici paralleli al piano di incidenza

Ragionando in maniera analoga a quella del caso precedente, si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{r\parallel} = \frac{\frac{v_{f1}}{v_{f2}} \cos \theta_i - \cos \theta_t}{\frac{v_{f1}}{v_{f2}} \cos \theta_i + \cos \theta_t} \tilde{\mathbf{E}}_{i\parallel} \quad [11.5.19]$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{t\parallel} = \frac{2 \cos \theta_i}{\frac{v_{f1}}{v_{f2}} \cos \theta_i + \cos \theta_t} \tilde{\mathbf{E}}_{i\parallel}, \quad [11.5.20]$$

e analoghe per i campi magnetici, normali a π' .

Introducendo un *coefficiente di riflessione* e un *coefficiente di trasmissione*, definiti come rapporti tra le ampiezze dei campi corrispondenti e quella del campo incidente, dalle [11.5.17] ÷ [11.5.20] (e analoghe per i campi magnetici), si trae

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{E\perp} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_\perp = -r_{H\parallel} \\ t_{E\perp} = \left(\frac{E_t}{E_i} \right)_\perp = \frac{Z_2}{Z_1} t_{H\parallel} \end{array} \right. \quad [11.5.21]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{E\parallel} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_\parallel = -r_{H\perp} \\ t_{E\parallel} = \left(\frac{E_t}{E_i} \right)_\parallel = \frac{Z_2}{Z_1} t_{H\perp} \end{array} \right. \quad [11.5.21']$$

Per quanto riguarda l'energia associata all'onda, ricordando il significato del vettore di Poynting \mathbf{P} , di cui consideriamo il valor medio $\langle \mathbf{P} \rangle$ in un periodo, possiamo scrivere

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{P} \rangle \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad [11.5.22]$$

essendo Σ una qualsiasi superficie chiusa entro la quale non vi siano sorgenti impresse. Scegliendo, come superficie Σ una superficie elementare di tipo "M" a cavallo del piano π , la [11.5.22] fornisce (trascurando, come sempre, gli infinitesimi di ordine superiore al primo):

$$(\langle \mathbf{P}_i \rangle + \langle \mathbf{P}_r \rangle) \cdot \mathbf{n} dS + \langle \mathbf{P}_t \rangle \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

e quindi

$$-\frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z_1} \cos \theta_i + \frac{1}{2} \frac{E_1^2}{Z_1} \cos \theta_i + \frac{1}{2} \frac{E_2^2}{Z_2} \cos \theta_t = 0, \quad [11.5.23]$$

dove E_0 , E_1 e E_2 sono definiti dalle [11.5.1']. La [11.5.23] può essere riscritta nella forma:

$$\frac{E_0^2 - E_1^2}{Z_1} \cos \theta_i = \frac{E_2^2}{Z_2} \cos \theta_t,$$

la quale è ancora equivalente alla

$$R + T = 1,$$

[11.5.23']

avendo posto

$$\begin{cases} R = \frac{\langle \mathbf{P}_r \rangle \cdot \mathbf{n}}{\langle \mathbf{P}_i \rangle \cdot \mathbf{n}} = \frac{E_1^2}{E_0^2} \\ T = \frac{\langle \mathbf{P}_t \rangle \cdot \mathbf{n}}{\langle \mathbf{P}_i \rangle \cdot \mathbf{n}} = \frac{E_2^2}{E_0^2}. \end{cases}$$

[11.5.24]

I coefficienti R e T sono detti, rispettivamente, *riflettività* e *rifrattività*.

11.5.3 Fenomeni di rifrazione e riflessione totale. Onde evanescenti

Dalle formule di Fresnel si vede che le ampiezze del campo riflesso e del campo rifratto sono diverse a seconda che il campo incidente sia normale oppure parallelo al piano di incidenza. Nel primo caso, si vede subito, dalla [11.5.17] e dalla [11.5.13], che l'onda riflessa può non essere presente, ciò accade soltanto se $\theta_i = \theta_t$, cioè se i due mezzi hanno lo stesso valore di ϵ (ma in questo caso si tratta, in pratica, di un *unico* mezzo). Nel secondo caso, invece, l'onda riflessa può annullarsi anche quando risulti

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2},$$

[11.5.25]

e cioè quando i due vettori \mathbf{k}_r e \mathbf{k}_t siano tra loro perpendicolari. Ricordando la [11.5.13], si ricava subito che l'angolo di incidenza θ_i^B (detto *angolo di Brewster*) per il quale la [11.5.25] risulta soddisfatta è dato dalla

$$\operatorname{tg} \theta_i^B = \frac{v_1}{v_2}.$$

[11.5.26]

Se, ora, consideriamo un'onda incidente il cui vettore \mathbf{k}_i formi con \mathbf{n} proprio l'angolo θ_i^B , potremo scomporre il suo vettore elettrico nel componente $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}$ e in quello $\tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}$: dei due, il secondo non viene riflesso, il primo sì. Ne deriva che il vettore elettrico dell'onda riflessa è diretto come \mathbf{n}' , ortogonale al piano di incidenza, e che, quindi, l'onda è polarizzata linearmente in questa direzione. E' dunque possibile, mediante una lamina di dielettrico, ottenere un'onda polarizzata linearmente a partire da un'onda polarizzata diversamente o addirittura non polarizzata.

Riprendiamo ora la legge di rifrazione e riscriviamola nella forma:

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i.$$

[11.5.27]

Dati ϵ_1 e ϵ_2 , e supponendo $\epsilon_1 > \epsilon_2$ (e cioè che l'onda provenga dal mezzo di costante dielettrica maggiore), si ha che in corrispondenza di un angolo di incidenza θ_i^* (*angolo limite*) pari a

$$\theta_i^* = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}},$$

[11.5.28]

risulta

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = 1.$$

Ciò significa che l'onda rifratta "emerge" nel mezzo Ω_2 con il suo vettore \mathbf{k}_t tangente al piano π di separazione fra i due dielettrici. E' chiaro, quindi, che per angoli di incidenza maggiori di θ_i^* , la [11.5.27] darebbe $\sin \theta_t > 1$, il che è ovviamente impossibile. Ne deriva che, in queste condizioni, dovrebbe mancare l'onda rifratta nel mezzo Ω_2 , e l'onda dovrebbe essere totalmente riflessa nel mezzo Ω_1 : si ha, appunto, un fenomeno di *riflessione totale*. D'altra parte, si è visto in precedenza che, in mancanza di un'onda rifratta, non è possibile soddisfare alle condizioni al contorno sulla superficie di separazione fra i due mezzi: come si supera, allora, questa apparente contraddizione?

Facciamo una breve parentesi e ricordiamo l'espressione dell'onda rifratta (vedi [11.5.1]):

$$\tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} \quad [11.5.29]$$

(e analoga per $\tilde{\mathbf{H}}_2$). Sceglieremo ora un sistema di coordinate cartesiane che abbia (vedi fig. 11.5) il piano xy coincidente con π e il piano xz coincidente con il piano di incidenza π' ; il vettore \mathbf{k}_2 giace allora nel piano xz , e si ha

$$k_{2x} = |\mathbf{k}_2| \sin \theta, \quad k_{2z} = |\mathbf{k}_2| \cos \theta, \quad [11.5.30]$$

avendo indicato con ϑ l'angolo che \mathbf{k}_2 forma con l'asse z . Se k_{2x} cresce, fino al valore 1, anche ϑ cresce, fino al valore $\pi/2$. Se ora, formalmente, consideriamo $k_{2x} > 1$, e k_{2z} tale che sia $k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = 1$, otteniamo

$$\begin{cases} k_{2x} > 1 \\ k_{2z} = \pm j \sqrt{k_{2x}^2 - 1}. \end{cases} \quad [11.5.31]$$

Se sostituiamo queste espressioni nella [11.5.29], otteniamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{j\omega t} e^{-j(k_{2x}x + k_{2z}z)} = \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{j\omega t} e^{-jk_{2x}x} e^{\pm j\sqrt{k_{2x}^2 - 1}z} = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{\pm j\sqrt{k_{2x}^2 - 1}z} e^{j(\omega t - k_{2x}x)}, \end{aligned} \quad [11.5.32]$$

Questa funzione soddisfa ancora alle equazioni del campo ed è, pertanto, un'onda elettromagnetica fisicamente possibile. Essa si propaga lungo l'asse x , ma ha un'ampiezza che (contrariamente a quanto accade per una normale onda piana) si attenua nella direzione z (scartiamo la radice positiva, poiché darebbe luogo a un'onda che si esalta nella direzione z , la quale è priva, in questo caso, di significato fisico): onde di questo

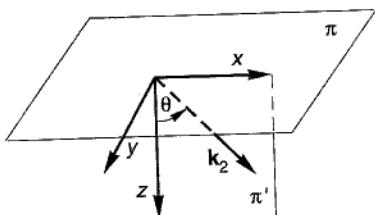


Figura 11.5

tipo sono dette "evanescenze", poiché hanno in genere ampiezza praticamente nulla già a poche lunghezze d'onda di distanza dal piano π .

A questo punto, l'apparente contraddizione cui eravamo pervenuti esaminando il caso della riflessione totale è risolta: è evidente, infatti, che in questo caso l'onda rifratta è un'onda evanescente, la quale fa sì che le condizioni al contorno su π siano rispettate.

Un'ultima osservazione: tutto quanto detto in questo paragrafo si basa sull'ipotesi che la superficie di separazione π fra i due mezzi sia piana e che piana sia anche l'onda incidente. Nella pratica, le conclusioni cui siamo pervenuti rimangano valide anche se la superficie di separazione e l'onda incidente non sono piane, purché i rispettivi raggi di curvatura siano molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda. Quando ciò non sia vero, i semplici ragionamenti utilizzati in questo paragrafo cadono in difetto, e occorre esaminare i complessi fenomeni di diffrazione che in tal caso si producono (vedi §§ 10.12 ÷ 10.14 e 12.11 sg.).

*11.6 Riflessione e rifrazione al confine tra dielettrico e conduttore

Ricordiamo innanzitutto (vedi § 11.4) che la propagazione di un'onda piana sinusoidale in un mezzo dotato di conducibilità elettrica σ può essere descritta da relazioni (come la [11.4.12]) che sono formalmente simili a quelle valide per un dielettrico, a patto di considerare un vettore d'onda complesso

$$\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{k} \mathbf{n}, \quad [11.6.1]$$

essendo \mathbf{n} la direzione di propagazione e

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}}; \quad [11.6.2]$$

si può cioè scrivere

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{j(\omega t - \tilde{k} \cdot \mathbf{r})} \quad [11.6.3]$$

(e analogamente per $\tilde{\mathbf{H}}$).

Segue da ciò che gli sviluppi formali che hanno condotto alle [11.5.6] continuano a valere anche quando il mezzo Ω_2 è dotato di conducibilità elettrica σ , a patto di considerare *reali* i vettori \mathbf{k}_0 e \mathbf{k}_1 e *complesso* il vettore \mathbf{k}_2 , come specificato dalle [11.6.1], [11.6.2].

Di conseguenza anche la legge della riflessione [11.5.10] rimane valida, mentre la legge della rifrazione può essere scritta nella forma

$$k_0 \sin \theta_0 = \tilde{k}_2 \sin \theta_2, \quad [11.6.4]$$

con \tilde{k}_2 dato dalla [11.6.2]. Anche le formule di Fresnel [11.5.17] ÷ [11.5.20] possono essere considerate ancora valide, con la precisazione fatta circa il vettore $\tilde{\mathbf{k}}_2$.

E' chiaro però che, proprio a causa della presenza del vettore complesso $\tilde{\mathbf{k}}_2$, l'interpretazione della [11.6.4] e delle formule di Fresnel è ora più complicata. Per non

appesantire l'esposizione con calcoli, lunghi anche se concettualmente semplici, ci limiteremo qui a presentarne alcune delle conclusioni più significative.

A. Onda rifratta

Assumendo un sistema di coordinate cartesiane con l'asse x diretto lungo la normale al piano π di separazione tra i due mezzi (vedi fig. 11.6) e l'asse z nel piano di incidenza π' (che coincide con il piano di figura), il vettore elettrico dell'onda rifratta può essere scritto nella forma:

$$\tilde{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_t e^{-px + j(\omega t + qx - \alpha_1 z \sin \theta_0)}, \quad [11.6.5]$$

nella quale p, q, α_1 sono parametri reali che dipendono in maniera non semplice dalle caratteristiche dei due mezzi Ω_1 e Ω_2 , e θ_0 è l'angolo di incidenza. Notiamo innanzitutto, dalla [11.6.5], che le superfici di ampiezza costante sono i piani $x = \text{cost.}$, mentre le superfici di fase costante sono i piani $qx - \alpha_1 z \sin \theta_0 = \text{cost.}$, e queste due famiglie di piani sono in genere distinte. L'onda si propaga in direzione normale ai piani di fase costante.

Indicando con θ_t l'angolo di rifrazione, la legge di Snell può essere scritta nella forma

$$\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_t} = n(\theta_0) = \frac{1}{\alpha_1} \sqrt{\alpha_1^2 \sin^2 \theta_0 + q^2}, \quad [11.6.6]$$

la quale mostra che ora l'indice di rifrazione n viene a dipendere dall'angolo di incidenza θ_0 . Nel caso in cui risulti, per il mezzo Ω_2 , $\sigma \gg \omega \epsilon$, le espressioni di p, q e α_1 si semplificano, diventando

$$\begin{cases} p \approx q \approx \frac{1}{d} \\ \alpha_1 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}, \end{cases} \quad [11.6.7]$$

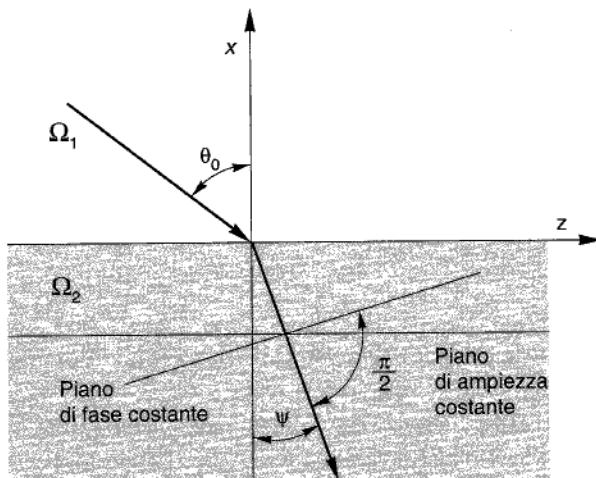


Figura 11.6

dove d è lo spessore di penetrazione definito dalla [11.4.16]. Ne possiamo concludere che, quando il mezzo Ω_2 è un buon conduttore, l'angolo di rifrazione diventa molto piccolo, e l'onda riferita si propaga, con forte attenuazione, lungo una direzione praticamente coincidente con la normale al piano di separazione tra i due mezzi.

B. Onda riflessa

Anche in questo caso, rinunciamo agli sviluppi lunghi e noiosi e riportiamo i risultati più significativi. Posto

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{r\perp} = \rho_{\perp} e^{-j\delta_{\perp}} \widetilde{\mathbf{E}}_{i\perp}$$

e

$$\mathbf{n}_r \times \widetilde{\mathbf{E}}_{r\parallel} = \rho_{\parallel} e^{-j\delta_{\parallel}} \mathbf{n}_i \times \widetilde{\mathbf{E}}_{i\parallel}, \quad [11.6.8]$$

dove \mathbf{n}_i e \mathbf{n}_r sono i versori delle direzioni di propagazione dell'onda incidente e dell'onda riflessa, si ha, per un buon conduttore ($\sigma \gg \omega \epsilon_2$):

$$\rho_{\perp}^2 \approx 1 - 2\xi \cos \theta_0$$

$$\operatorname{tg} \delta_{\perp} \approx -2\xi \cos \theta_0$$

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{2 \cos^2 \theta_0 - 2\xi \cos \theta_0 + \xi^2}{2 \cos^2 \theta_0 + 2\xi \cos \theta_0 + \xi^2}, \quad [11.6.9]$$

$$\operatorname{tg} \delta_{\parallel} = \frac{2\xi \cos \theta_0}{\xi^2 - \cos^2 \theta_0},$$

dove si è posto

$$\xi = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_1\mu_2}{\mu_1\sigma}}.$$

Come si vede, i coefficienti di riflessione risultano praticamente indipendenti dall'angolo di incidenza θ_0 , almeno fino a frequenze dell'ordine di 10^{13} s^{-1} e sono inoltre molto prossimi all'unità.

Particolarmente interessante è il caso limite della riflessione su un conduttore ideale ($\sigma \rightarrow \infty$). In questo caso, lo spessore di penetrazione d tende a zero e l'onda riferita scompare: l'onda eletromagnetica *non* si propaga in un conduttore ideale. Tutta l'energia trasportata dall'onda incidente viene riflessa dalla superficie del conduttore, che si comporta pertanto come uno specchio perfetto.

11.7 Cenni sulla propagazione nei mezzi anisotropi

Abbiamo già accennato in precedenza (vedi § 5.5) all'esistenza di dielettrici anisotropi, per i quali la direzione del vettore \mathbf{D} è, in generale, diversa da quella del campo

elettrico applicato \mathbf{E} : si tratta di cristalli, come la calcite e la tormalina, oppure di materiali plastici trattati opportunamente (come vedremo alla fine di questo paragrafo).

Un pezzo di dielettrico anisotropo (ad esempio, un cristallo di calcite) è caratterizzato da tre direzioni, ortogonali fra loro e individuate univocamente nel corpo, che godono della seguente proprietà: quando si fa agire un campo elettrico diretto in una di tali direzioni, il vettore \mathbf{D} risulta allineato con \mathbf{E} , e si ha

$$D_i = \epsilon_i E_i, \quad \text{con } i=1, 2, 3, \quad [11.7.1]$$

avendo indicato con gli indici 1, 2, 3 le tre direzioni. Quando, invece, il campo \mathbf{E} ha direzione generica, \mathbf{D} non è parallelo a \mathbf{E} . Le tre direzioni citate sono dette *direzioni principali di polarizzazione* e i valori corrispondenti $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sono detti *costanti dielettriche principali*. In alcuni casi, si ha

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3;$$

in altri

$$\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3.$$

La propagazione delle onde elettromagnetiche nei dielettrici anisotropi dà luogo a un insieme di fenomeni particolarmente interessanti: primo fra tutti, quello cosiddetto della *doppia rifrazione*, per cui un'onda piana (anche non polarizzata) che incida sul materiale in esame ne emerge divisa in due onde che hanno direzioni di propagazione diverse e sono polarizzate in direzioni ortogonali l'una all'altra.

L'analisi di questi fenomeni esula dai limiti di questo libro: ci limiteremo qui ad analizzare ciò che accade quando si faccia uso di una lamina di dielettrico anisotropo che abbia due delle direzioni principali (ad esempio, 1 e 2, in fig. 11.7) giacenti nel piano della lamina e tali che

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3.$$

Assunto un sistema di coordinate cartesiane con l'asse x coincidente con la direzione 1, l'asse y con la direzione 2 e l'asse z con la direzione 3, consideriamo un'onda piana sinusoidale polarizzata che si propaghi nella direzione z e che abbia il vettore elettrico diretto lungo l'asse x (come quella di fig. 10.4): una tale onda è detta anche *polarizzata nel piano xz* (riferendosi al piano determinato dalla direzione di polarizzazione e da quella di propagazione).⁵ Si verifica immediatamente che

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = E_{01} e^{-jk_x z}, & \text{con } k_x = \sqrt{\mu_0 \epsilon_x} \\ \tilde{H}_y = \frac{E_{01}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_x}}} e^{-jk_x z} \end{cases} \quad [11.7.2]$$

è soluzione delle equazioni del campo, nel mezzo considerato.

⁵ In ottica si usa dire che questa onda è polarizzata nel piano yz , poiché si fa riferimento al vettore \mathbf{H} , invece che ad \mathbf{E} .

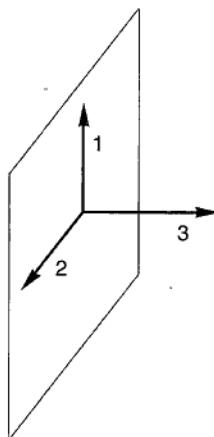


Figura 11.7

Similmente,

$$\begin{cases} \tilde{E}_y = E_{02} e^{-j k_y z}, \\ \tilde{H}_x = -\frac{E_{02}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_y}}} e^{-j k_y z} \end{cases} \quad \text{con } k_y = \sqrt{\mu_0 \epsilon_y} \quad [11.7.3]$$

rappresenta un'onda polarizzata nel piano xz (utilizzando il linguaggio dell'ottica).

Le due onde hanno pulsazioni spaziale k_x e k_y diverse, e si propagano con velocità di fase diverse, nel mezzo anisotropo considerato.

Un'onda polarizzata linearmente nel piano xz , che entri nel mezzo anisotropo propagandosi lungo z , esce da questo ancora come onda polarizzata linearmente allo stesso modo; la stessa cosa dicasi per un'onda polarizzata nel piano yz . Esaminiamo, però, cosa accade quando nel mezzo entra un'onda polarizzata linearmente il cui vettore \mathbf{E} giace nel piano bisettore dei piani coordinati xz e yz (vedi fig. 11.8). Quest'onda può essere rappresentata sovrapponendo le [11.7.2] e [11.7.3]:

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = E_0 e^{-j k_x z} \\ \tilde{H}_y = -\frac{E_0}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_x}}} e^{-j k_x z} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{E}_y = E_0 e^{-j k_y z} \\ \tilde{H}_x = -\frac{E_0}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_y}}} e^{-j k_y z}, \end{cases} \quad [11.7.4]$$

avendo supposto che le due onde abbiano la stessa ampiezza. Per $z=0$, le [11.7.4] danno le relazioni di fase esistenti fra i quattro vettori: E_x è in fase con E_y , H_y è in opposizione a H_x . Dopo aver attraversato la lamina (considerata di spessore d), si ha

$$\begin{cases} \tilde{E}_x(d) = E_0 e^{-j k_x d} \\ \tilde{E}_y(d) = E_0 e^{-j k_y d}; \end{cases} \quad [11.7.5]$$

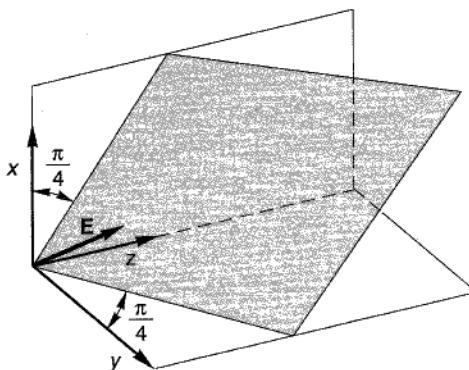


Figura 11.8

E_x e E_y non sono quindi in fase tra loro, e l'onda risulta polarizzata, in generale, ellitticamente (e non più linearmente, come era prima di avere attraversato la lamina).

Lo sfasamento di E_y rispetto a E_x vale $(k_y - k_x)d$; pertanto, se d è tale che

$$(k_y - k_x)d = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{con } n \text{ intero,} \quad [11.7.6]$$

la polarizzazione dell'onda, all'uscita della lamina, è divenuta circolare.

Quando la lamina soddisfa alla [11.7.6] in corrispondenza di una data frequenza (si ricordi che, per effetto della dispersione, ϵ_x e ϵ_y , in genere, variano con la frequenza) è detta *lamina a quarto d'onda* per la frequenza data.

In questo caso, se la lamina verifica la [11.7.6] per $n=0$, e se $k_y - k_x > 0$, E_y risulta ritardato di $\pi/2$ rispetto a E_x : pertanto \mathbf{E} ruota passando dal verso positivo dell'asse x al verso positivo dell'asse y (ruota cioè in verso orario, guardando verso le z positive) e l'onda è detta *sinistra*, con il linguaggio dell'ottica (che suppone di guardare verso le z negative).

Se invece lo spessore d è tale per cui

$$(k_y - k_x)d = (2n + 1)\pi, \quad \text{con } n \text{ intero,} \quad [11.7.7]$$

allora E_y è in ritardo di π rispetto a E_x (E_y è cioè in opposizione rispetto a E_x): l'onda esce dalla lamina polarizzata ancora linearmente, ma in direzione ortogonale a quella di ingresso. Le lame che soddisfano alla [11.7.7], a una certa frequenza, sono dette *lamine a mezza onda* per quella frequenza.

E' abbastanza semplice realizzare lame dei tipi sopracitati: infatti, una lamina di materiale plastico trasparente, ottenuta per laminazione, ha generalmente costante dielettricità nella direzione dei rulli che lo laminano diversa da quella ortogonale (direzione di avanzamento della lamina, fra i rulli). Ciò in quanto l'operazione di laminazione esercita un'intensa azione meccanica sulla lamina e orienta le lunghe catene di

macromolecole che costituiscono il materiale plastico. Si intuisce quindi che tali macromolecole allineate presentano polarizzabilità diversa, nella direzione delle catene, rispetto a quella delle direzioni ortogonali.

Una tecnica analoga consente pure di ottenere lamine, dette *polaroidi*, capaci di polarizzare linearmente una radiazione (in genere, luce) non polarizzata. Partendo infatti da una lamina ottenuta, come prima detto, per laminazione, la si immerge in una soluzione di iodio: questo si lega alle macromolecole, fornendo loro elettroni di conduzione, che sono mobili nella direzione delle macromolecole allineate. La lamina, in questo modo, equivale a una rete fittissima di conduttori filiformi paralleli alla direzione delle macromolecole. Quando una tale lamina è investita da un'onda piana il cui campo elettrico sia parallelo ai "fili", si inducono in essa delle correnti che riflettono l'onda (come accade per uno specchio argentato); quando, invece, il campo elettrico dell'onda incidente è ortogonale ai "fili", non induce apprezzabili correnti nel materiale, e l'onda attraversa indisturbata la lamina. Pertanto, quando la lamina è attraversata da un'onda (anche non polarizzata) essa lascia passare soltanto la componente che ha il vettore elettrico ortogonale alla direzione delle macromolecole; ne segue che l'onda emergente è polarizzata linearmente in tale direzione.

Un altro modo, anch'esso molto usato, per ottenere luce polarizzata a partire da luce non polarizzata, è quello di far passare la radiazione entro prismi (vedi cap. 12) di calcite, detti *nicol*, i quali, come si è detto, scompongono l'onda incidente in due onde polarizzate in direzione ortogonale; sopprimendo, poi, una di tali onde, si ottiene la desiderata radiazione polarizzata.

Ricordiamo, infine, che quando si fa agire in un mezzo isotropo un intenso campo elettrico (o magnetico) stazionario, il comportamento elettromagnetico del mezzo diviene anisotropo (effetti Kerr e Faraday); la trattazione di tali effetti esula dai limiti di questo libro.

Esercizi

1. Un'onda elettromagnetica piana e sinusoidale ha, nel vuoto, una lunghezza d'onda $\lambda_0 = 1 \text{ m}$; ammesso che essa incida ortogonalmente su un mezzo di indice di rifrazione $n = 1,5$ (vetro), calcolare la velocità (di fase) v e la lunghezza d'onda λ nel mezzo.

2. Un'onda elettromagnetica piana e sinusoidale ha il vettore elettrico dato dalla

$$\begin{cases} E_x = \Re e [E_0 e^{j2\pi(10^6 y - 1,5 \times 10^{14} t)}], \\ E_y = E_z = 0. \end{cases}$$

Determinare l'indice di rifrazione del mezzo omogeneo nel quale si propaga.

3. Determinare la direzione con cui emerge un'onda elettromagnetica piana che incide su una lastra di vetro di spessore finito e la attraversa completamente.

4. Determinare i valori dei coefficienti di riflessione per un'onda piana e sinusoi-

dale che, provenendo dal vuoto, incide su una lastra di vetro, con un angolo di incidenza pari a $\pi/6$ (si assuma $n=1,5$).

5. Si consideri un mezzo costituito da un insieme di N lastre piane di indici di rifrazione n_1, n_2, \dots, n_N , giacenti l'una sull'altra; un'onda piana incide sul mezzo 1 con un angolo di incidenza θ_i ; determinare la direzione dell'onda all'uscita dal mezzo stratificato. Confrontare con il risultato dell'esercizio 4.

Capitolo 12

Elementi di ottica

12.1 La luce e l'ottica geometrica

Le leggi della riflessione e della rifrazione delle onde piane, ricavate nei paragrafi precedenti dalle equazioni di Maxwell, coincidono con quelle che, fin dai tempi di Snell e Descartes, erano state considerate le leggi fondamentali dell'ottica (intesa come branca della fisica che si occupa della propagazione della luce). Queste leggi, che erano state sufficienti nel corso dei secoli a studiare e progettare specchi, lenti e tanti altri dispositivi ottici, non ebbero fino alla fine del secolo scorso un solido fondamento teorico, poiché si basavano su un concetto — quello di “raggio luminoso” — che (come vedremo tra breve) non era ben precisato.

Si assumeva che la luce si propagasse secondo “raggi” che si mantengono rettilinei nel vuoto e nei mezzi omogenei e possono, invece, curvare nei mezzi non omogenei (conformemente alle leggi della riflessione e della rifrazione), ma non si chiariva la natura fisica di tali raggi.

La teoria *corpuscolare* della luce (sostenuta “in primis” da Newton) immaginava che la luce fosse costituita da sciami di corpuscoli microscopici viaggianti a velocità elevatissima, e che i raggi luminosi altro non fossero che le traiettorie di tali corpuscoli.

La teoria *ondulatoria*, invece (autorevolmente rappresentata da Huygens), concepiva la luce come una vibrazione longitudinale, propagantesi con velocità elevatissima in un non meglio precisato *etere cosmico*. Essa ammetteva che ogni sorgente luminosa puntiforme irraggiasse onde sferiche e che i raggi luminosi fossero le linee ortogonali in ogni punto ai fronti d'onda.

In questo quadro, particolare rilievo assumeva (e assume tutt'oggi) il *principio di Huygens*, secondo cui: *ogni punto di un fronte d'onda può essere considerato come sorgente (puntiforme) di onde sferiche; in ogni istante, il fronte dell'onda luminosa è costituito dall'inviluppo di tutti questi fronti d'onda secondari*.

La teoria corpuscolare spiegava, sia pure con qualche forzatura — si doveva, ad esempio, ammettere che la velocità dei corpuscoli luminosi fosse maggiore nei mezzi

più densi — le leggi della riflessione e della rifrazione. La teoria ondulatoria, per contro, consentiva di ricavare le stesse leggi in maniera più semplice, ed ebbe chiaramente la meglio quando (nella prima metà del secolo scorso) fornì la spiegazione di fenomeni, quali quelli di interferenza e diffrazione, che avevano messo in serio imbarazzo la teoria corpuscolare. Alla fine del secolo scorso, la teoria elettromagnetica di Maxwell consentì (come vedremo nel prossimo paragrafo) di dare un'interpretazione ondulatoria unitaria e soddisfacente dei fenomeni elettromagnetici e di quelli luminosi inquadrandoli assieme nella prima, grande "teoria di campo" della storia della scienza.

Successivamente, venne in qualche modo ristabilito l'equilibrio fra le due teorie, corpuscolare e ondulatoria, con l'introduzione del concetto di quanto di luce (detto anche *fotone*), concepito come particella di massa a riposo nulla, viaggiante nel vuoto alla velocità c e capace di trasportare un quanto di energia $h\nu$ e una quantità di moto $h\nu/c$. Questa rinnovata teoria corpuscolare è necessaria per interpretare fenomeni, quali l'effetto Compton e quello fotoelettrico, che non sarebbero altrimenti spiegabili. Allo stato attuale delle conoscenze, quindi, anche ai fotoni, come a tutte le particelle, si applica il principio generale secondo cui essi manifestano carattere ondulatorio oppure corpuscolare, a seconda del tipo di interazione che hanno con i dispositivi sperimentali con i quali li riveliamo.

Rimandando al prossimo paragrafo un esame più dettagliato dei motivi che consentono di inquadrare la luce nell'ambito dei fenomeni elettromagnetici, cominciamo ora col richiamare, rapidamente, i concetti e le leggi fondamentali dell'ottica geometrica, considerandola per il momento come disciplina autonoma, del tutto indipendente dall'elettromagnetismo.

Il concetto fondamentale è quello di raggio luminoso. Di esso si può cercare di dare una definizione operativa partendo dall'esperienza comune: la luce che entra in un ambiente oscuro (e polveroso), attraverso un foro sottile (del diametro, ad esempio, di qualche mm) praticato in una delle pareti, disegna una traccia luminosa rettilinea di sezione S , abbastanza uniforme lungo la traccia stessa. Immaginando di poter restringere a piacimento la sezione di questo "pennello" di luce, arriviamo a definire, con un processo al limite per $S \rightarrow 0$, un *raggio luminoso*. In realtà, questo processo al limite non è lecito, perché l'esperienza mostra che quando si cerchi di assottigliare il pennello di luce (restringendo il foro attraverso cui esso passa) al di sotto di certi limiti (ad esempio, diametri inferiori al decimo di millimetro), accade che esso, invece di assottigliarsi ulteriormente, comincia a "sfrangiarsi", producendo frange di diffrazione su uno schermo opaco, interposto sul suo cammino per rivelarne la traccia.

Se ne conclude che la definizione operativa proposta può essere ritenuta soddisfacente soltanto a patto che le dimensioni trasversali del raggio luminoso non siano inferiori ai limiti indicati; si tratta dunque di una definizione abbastanza grossolana. Ciò nonostante, essa consente di enunciare le *leggi fondamentali dell'ottica geometrica*.

Esse sono le seguenti:

- 1) In un mezzo isotropo e omogeneo, i raggi luminosi sono rettilinei.

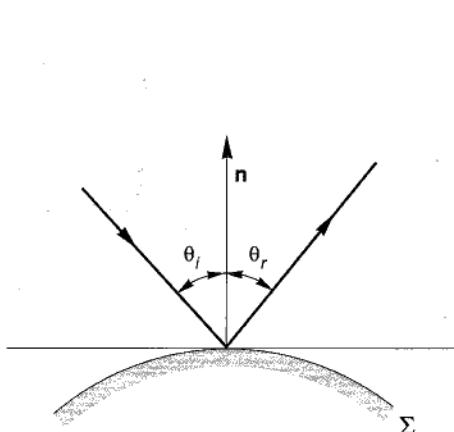


Figura 12.1

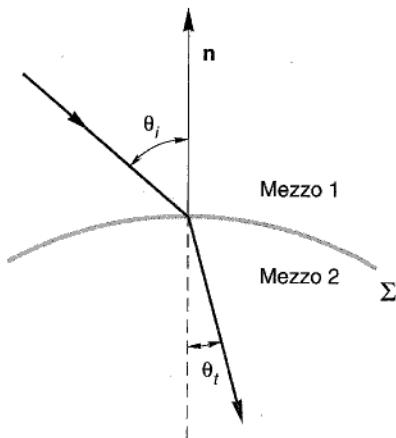


Figura 12.2

2) *Legge di riflessione*: quando un raggio luminoso incide sopra una superficie riflettente Σ (anche non piana, come in fig. 12.1), il raggio incidente, quello riflesso e la normale n a Σ nel punto di incidenza giacciono in uno stesso piano (*piano di incidenza*); inoltre, l'*angolo di incidenza* formato dal raggio incidente con n , e l'*angolo di riflessione*, formato dal raggio riflesso con la medesima normale, sono uguali:

$$\theta_i = \theta_r. \quad [12.1.1]$$

3) *Leggi di rifrazione*: quando un raggio luminoso attraversa la superficie di separazione Σ tra due mezzi trasparenti di proprietà fisiche diverse (vedi fig. 12.2), la sua direzione cambia bruscamente (si dice che il raggio “si rifrange”); raggio incidente, raggio rifratto e normale n nel punto di incidenza giacciono in uno stesso piano, e si ha inoltre

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = n_{12}, \quad [12.1.2]$$

dove θ_t è l'*angolo di rifrazione*, formato dal raggio rifratto con n , e n_{12} è un parametro, caratteristico dei due mezzi e a contatto,¹ che prende il nome di *indice di rifrazione del mezzo 2 rispetto al mezzo 1*. Quando vi siano tre mezzi a contatto, sussiste la relazione (vedi p. 562)

$$n_{12} n_{23} = n_{13}$$

con ovvio significato dei simboli. In particolare risulta $n_{12} n_{21} = 1$.

4) I raggi luminosi possono incrociarsi senza subire deviazioni nei loro percorsi.

¹ Si noti che n_{12} dipende anche dal colore della luce incidente: questa proprietà è all’origine del fenomeno della *dispersione luminosa*, di cui tratteremo più diffusamente nel seguito.

Come già detto, queste quattro leggi consentono di analizzare il funzionamento di dispositivi ottici anche complessi: dagli specchi (piani e curvi), ai prismi (che producono i suggestivi spettri luminosi), alle lenti, ai sistemi di lenti (microscopi, telescopi ecc.), e così via (alcuni di questi dispositivi sono presi in esame nelle Esperienze illustrate, al termine di questo capitolo).

Tra gli enunciati che possono dedursi dalle leggi fondamentali dell'ottica geometrica particolare rilievo ha il seguente teorema, dovuto a Fermat (che, per brevità, non dimostreremo):

La traiettoria γ_0 che un raggio luminoso percorre per andare da un punto A a un punto B di un mezzo (anche inomogeneo) avente indice di rifrazione n è tale da rendere minimo il cosiddetto cammino ottico:

$$\lambda_{A\gamma B} = \int_{A\gamma B} n dl \quad [12.1.3]$$

*rispetto ai valori che esso assume quando è valutato lungo una qualsiasi linea γ congiungente A e B e contenuta in un opportuno intorno regolare di γ_0 .*²

L'importanza di tale risultato è sottolineata dal fatto che in molte trattazioni esso è assunto come principio fondamentale (*principio di Fermat*) dal quale dedurre le leggi dell'ottica.

Una conseguenza diretta di questo teorema è il cosiddetto *teorema di invertibilità del cammino luminoso*, secondo cui: *se un raggio luminoso emesso da una sorgente puntiforme A passa per il punto B, un raggio emesso da una sorgente puntiforme B passa per A.*

12.2 L'unificazione fra elettromagnetismo e ottica: equazione dell'iconale

In questo paragrafo ci proponiamo di mostrare come si possano ricavare le leggi dell'ottica geometrica dalle equazioni di Maxwell. I ragionamenti sviluppati nel paragrafo 11.5 non possono essere ritenuti sufficienti a questo scopo poiché si riferiscono al caso particolare di onde piane incidenti su superfici piane, mentre, come si è visto, le leggi dell'ottica valgono anche per superfici non piane. Prima di entrare nel vivo della questione, è opportuno anticipare per un attimo le conclusioni cui perverremo, e cioè che la luce è una radiazione elettromagnetica di frequenza molto alta; per dare un'idea quantitativa del campo di frequenze in cui spaziano le onde elettromagnetiche, riportiamo la seguente tabella.

² L'aggettivo "regolare" significa qui che per ogni punto dell'intorno considerato passa uno e un solo raggio luminoso; volendo escludere questa limitazione, il teorema va enunciato dicendo che il percorso γ_0 del raggio rende stazionario (e non più minimo) il valore dell'integrale.

Tabella 12.1

	Lunghezza d'onda λ (m)	Frequenza ν (Hz)
Audio frequenze	10^7	$30 \div 3 \cdot 10^4$
Portante radio (MF)	$200 \div 10^4$	$10^6 \div 10^4$
Portante televisiva	$3 \div 10$	$10^8 \div 10^7$
Microonde	10^{-2}	10^{10}
Infrarosso	10^{-6}	10^{14}
Luce visibile	5×10^{-7}	$10^{15} \div 10^{14}$
Raggi X	10^{-8}	10^{16}
Raggi γ	10^{-12}	10^{22}
Raggi X da frenamento (Bremsstrahlung)	10^{-14}	10^{24}

Come si vede, le onde luminose, pur non costituendo l'estremo limite noto di frequenza, hanno comunque frequenze molto alte e, corrispondentemente, lunghezze d'onda molto piccole.

Partendo dalle equazioni di Maxwell e passando al limite per $\omega \rightarrow \infty$, ricaveremo ora un'equazione, detta *dell'iconale*, che oltre a fornire una definizione soddisfacente di raggio luminoso, riassume in sé le leggi dell'ottica geometrica.³

Consideriamo il più generale campo elettromagnetico sinusoidale, di pulsazione ω assegnata, in un mezzo isotropo, non conduttore ed eventualmente non omogeneo. Siano

$$\begin{cases} E_x(\mathbf{r}, t) = E_x(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g_1(\mathbf{r})] \\ E_y(\mathbf{r}, t) = E_y(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g_2(\mathbf{r})], \end{cases} \quad [12.2.1]$$

e analoghe per le altre componenti di \mathbf{E} e \mathbf{H} , le relazioni che forniscono il campo nel dominio del tempo. In notazione simbolica, le [12.2.1] possono essere compattate nella forma

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) e^{j\omega t}, \end{cases} \quad [12.2.1']$$

dove $\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$ e $\tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r})$ sono funzioni vettoriali complesse di \mathbf{r} le cui componenti sono date dalle

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0x}(\mathbf{r}) = E_{0x}(\mathbf{r}) e^{-jg_1(\mathbf{r})} \\ \tilde{E}_{0y}(\mathbf{r}) = E_{0y}(\mathbf{r}) e^{-jg_2(\mathbf{r})} \end{cases} \quad [12.2.1'']$$

e analoghe per $\tilde{\mathbf{H}}$.

Nel caso, particolarmente semplice, delle *onde piane*, le funzioni $\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$ e $\tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r})$ si

³

³ La trattazione segue qui quella classica di Born e Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, New York 1970.

riducono alle (vedi § 10.6)

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) = \widetilde{\mathbf{H}}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \end{cases} \quad [12.2.2]$$

dove $\widetilde{\mathbf{E}}_0$ e $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ sono vettori complessi indipendenti da \mathbf{r} , e \mathbf{k} è il vettore d'onda:

$$\mathbf{k} = k \mathbf{n} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n}, \quad [12.2.3]$$

avendo indicato con v la velocità (di fase) dell'onda nel mezzo e con \mathbf{n} il versore della direzione di propagazione.

Per gli sviluppi che seguono, conviene riscrivere la [12.2.3] nella forma

$$\mathbf{k} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \mathbf{n}, \quad [12.2.3']$$

e le [12.2.2] nella forma

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{-j\omega \sqrt{\epsilon \mu} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} \\ \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) = \widetilde{\mathbf{H}}_0 e^{-j\omega \sqrt{\epsilon \mu} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}. \end{cases} \quad [12.2.2']$$

In questo caso, le funzioni $g_1(\mathbf{r}), g_2(\mathbf{r})$ ecc. che figurano nelle [12.2.1''] si riducono all'unica funzione lineare

$$g(\mathbf{r}) = -\omega \sqrt{\epsilon \mu} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}. \quad [12.2.4]$$

Verifichiamo ora se esistono *soluzioni sinusoidali* delle equazioni di Maxwell, più generali delle [12.2.2'], che possano essere poste nella forma [12.2.1'], con

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = \widetilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega \varphi(\mathbf{r})} \\ \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) = \widetilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega \varphi(\mathbf{r})} \end{cases} \quad [12.2.5]$$

nelle quali $\widetilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$ e $\widetilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r})$ sono funzioni vettoriali complesse di \mathbf{r} e $\varphi(\mathbf{r})$ è una funzione scalare reale di \mathbf{r} . (Osserviamo che le [12.2.5] sono, comunque, meno generali delle [12.2.1''], poiché le funzioni $g_1(\mathbf{r}), g_2(\mathbf{r})$ ecc. sono state assunte tutte uguali all'unica funzione $\varphi(\mathbf{r})$.)

Le equazioni del campo, in forma simbolica, sono

$$\begin{cases} \text{rot } \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = -j\omega \mu \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) \\ \text{rot } \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) = j\omega \epsilon \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \\ \text{div } \epsilon \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = 0 \\ \text{div } \mu \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) = 0, \end{cases} \quad [12.2.6]$$

avendo supposto che non esistano sorgenti nella regione considerata e che ϵ e μ siano in generale funzioni di \mathbf{r} .

Per vedere se queste equazioni ammettono soluzioni della forma ipotizzata, proviamo a sostituire le [12.2.5] nelle [12.2.6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} [\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega\varphi(\mathbf{r})}] = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega\varphi(\mathbf{r})} \\ \text{rot} [\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega\varphi(\mathbf{r})}] = j\omega\epsilon\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega\varphi(\mathbf{r})} \\ \text{div} [\epsilon\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega\varphi(\mathbf{r})}] = 0 \\ \text{div} [\mu\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega\varphi(\mathbf{r})}] = 0. \end{array} \right.$$

Ricordando (vedi app. A) che è

$$\text{rot} (\psi \mathbf{A}) = \psi \text{ rot } \mathbf{A} + \text{grad } \psi \times \mathbf{A}$$

$$\text{div} (\psi \mathbf{A}) = \psi \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } \psi,$$

e quindi

$$\text{rot} [\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega\varphi(\mathbf{r})}] = [\text{rot } \tilde{\mathbf{e}} - j\omega \text{ grad } \varphi \times \mathbf{e}] e^{-j\omega\varphi}$$

$$\text{div} [\epsilon\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) e^{-j\omega\varphi(\mathbf{r})}] = [\epsilon \text{ div } \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}} \cdot \text{grad } \epsilon - j\omega\epsilon\tilde{\mathbf{e}} \cdot \text{grad } \varphi] e^{-j\omega\varphi}$$

(e analoghe per le altre due equazioni di campo), si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } \varphi \times \tilde{\mathbf{e}} - \mu\tilde{\mathbf{h}} = \frac{1}{j\omega} \text{ rot } \tilde{\mathbf{e}} \\ \text{grad } \varphi \times \tilde{\mathbf{h}} - \epsilon\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{j\omega} \text{ rot } \tilde{\mathbf{h}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \cdot \text{grad } \varphi = \frac{1}{j\omega} [\text{div } \tilde{\mathbf{h}} + \tilde{\mathbf{h}} \cdot \text{grad } (\ln \mu)] \\ \tilde{\mathbf{e}} \cdot \text{grad } \varphi = \frac{1}{j\omega} [\text{div } \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}} \cdot \text{grad } (\ln \epsilon)]. \end{array} \right. \quad [12.2.7]$$

A questo punto, se siamo interessati in particolare a soluzioni caratterizzate da pulsazione *molto elevata* (come è per le radiazioni luminose), facciamo tendere all'infinito il parametro ω nelle [12.2.7], ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } \varphi \times \tilde{\mathbf{e}} - \mu\tilde{\mathbf{h}} = 0 \\ \text{grad } \varphi \times \tilde{\mathbf{h}} + \epsilon\tilde{\mathbf{e}} = 0 \\ \tilde{\mathbf{h}} \cdot \text{grad } \varphi = 0 \\ \tilde{\mathbf{e}} \cdot \text{grad } \varphi = 0. \end{array} \right. \quad [12.2.8]$$

Osserviamo, innanzitutto, che le due ultime equazioni sono contenute nelle prime due: basta infatti moltiplicare scalarmente per $\text{grad } \varphi$ la prima equazione per ottenere la terza, e la seconda per ricavare la quarta. Osserviamo inoltre che le prime due equazioni comprendono, in forma vettoriale, un sistema di sei equazioni scalari omo-

genee del tipo

$$\tilde{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \tilde{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \tilde{h}_x = 0, \quad [12.2.8']$$

e analoghe per le altre componenti.

Riassumendo, possiamo dire che condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni del tipo [12.2.5] con pulsazione molto elevata è che le funzioni complesse \tilde{e}_x , \tilde{e}_y , \tilde{e}_z , \tilde{h}_x , \tilde{h}_y , \tilde{h}_z e la funzione reale φ verifichino le [12.2.8']. Affinché questo sistema omogeneo nelle componenti complesse del campo ammetta soluzioni diverse da quella banale, occorre che il determinante dei coefficienti sia nullo. Per evitare lo sviluppo, semplice ma laborioso, del determinante, è preferibile ricavare \mathbf{h} dalla prima delle [12.2.8] e sostituirlo nella seconda. Otteniamo così

$$\operatorname{grad} \varphi \times \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \varphi \times \tilde{\mathbf{e}} \right) + \epsilon \tilde{\mathbf{e}} = 0.$$

Ricordando che $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$, si ha

$$(\operatorname{grad} \varphi \cdot \tilde{\mathbf{e}}) \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \varphi - \left(\operatorname{grad} \varphi \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \varphi \right) \tilde{\mathbf{e}} + \epsilon \tilde{\mathbf{e}} = 0,$$

e quindi (tenendo conto della quarta delle [12.2.8])

$$\tilde{\mathbf{e}}[(\operatorname{grad} \varphi)^2 - \epsilon \mu] = 0.$$

Escludendo il caso banale che $\tilde{\mathbf{e}}$ sia identicamente nullo, deve essere

$$(\operatorname{grad} \varphi)^2 = \epsilon \mu \quad [12.2.9]$$

oppure, in forma esplicita:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \epsilon(x, y, z) \mu(x, y, z). \quad [12.2.9']$$

Ricordando che l'indice di rifrazione n è dato da

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r},$$

la [12.2.9] può essere riscritta nella forma

$$(\operatorname{grad} \Phi)^2 = n^2, \quad [12.2.9'']$$

avendo posto

$$\Phi(\mathbf{r}) = c \varphi(\mathbf{r}); \quad [12.2.10]$$

la funzione $\Phi(\mathbf{r})$ così definita prende il nome di *iconale*. Possiamo concludere che ogni soluzione dell'equazione (alle derivate parziali) [12.2.9''] è una soluzione sinusoidale (delle equazioni di campo) del tipo [12.2.5] con pulsazione ω molto alta.

Una volta che, in relazione a una data situazione fisica, sia nota la funzione $\Phi(\mathbf{r})$, possiamo costruire la famiglia delle superfici di livello di tale funzione:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \text{cost.}, \quad [12.2.11]$$

che prendono il nome di *superfici d'onda* (o *fronti d'onda geometriche*). Possiamo inoltre costruire una famiglia di linee che siano, in ciascun loro punto, ortogonali alla superficie d'onda passante per quel punto: esse sono dette *raggi geometrici*. Pertanto, l'equazione dell'iconale [12.2.9"] consente di determinare la configurazione dei raggi geometrici a partire dalla conoscenza dell'indice di rifrazione (in generale, variabile da punto a punto) del mezzo in cui la radiazione si propaga.

Resta ora da dimostrare che i raggi geometrici così definiti ubbidiscono alle leggi dell'ottica geometrica, e che, quindi, coincidono geometricamente con i raggi luminosi (così come definiti operativamente).

Cominciamo col ricavare l'equazione che descrive i raggi geometrici. Considerato un raggio, e assunta su esso un'ascissa curvilinea s (misurata a partire da un punto assegnato P), il versore \mathbf{t} della tangente al raggio in un suo punto generico è esprimibile come

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}.$$

D'altra parte, essendo $\text{grad } \Phi$, per definizione, ortogonale alle superfici $\Phi = \text{cost.}$, la sua direzione coincide in ogni punto con quella di \mathbf{t} ; ricordando inoltre che, per la [12.2.9"], è

$$|\text{grad } \Phi| = n, \quad [12.2.12]$$

si ricava

$$\mathbf{t} = \frac{1}{n} \text{grad } \Phi,$$

e quindi

$$n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \text{grad } \Phi. \quad [12.2.12']$$

Questa è l'equazione che descrive l'andamento dei raggi geometrici; essa può, però, essere riscritta in una forma in cui non figuri la funzione Φ . A tale fine, osserviamo innanzitutto che per un qualunque campo vettoriale \mathbf{A} risulta

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} = \text{grad } |\mathbf{A}|, \quad [12.2.13]$$

avendo indicato con $\partial/\partial s$ la derivata calcolata lungo la direzione dello stesso vettore \mathbf{A} , in un punto generico. La [12.2.13] si dimostra subito osservando che risulta

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (A_x \mathbf{i}_x + A_y \mathbf{i}_y + A_z \mathbf{i}_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{i}_x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \mathbf{i}_y + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \mathbf{i}_z,$$

e che $\partial x/\partial s$, $\partial y/\partial s$, $\partial z/\partial s$ sono semplicemente i coseni direttori della direzione individuata dal vettore \mathbf{A} :

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{A_x}{|\mathbf{A}|}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{A_y}{|\mathbf{A}|}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{A_z}{|\mathbf{A}|}.$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left(A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \mathbf{i}_x + A_y \frac{\partial A_y}{\partial y} \mathbf{i}_y + A_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \mathbf{i}_z \right).$$

D'altra parte, si ha pure

$$\begin{aligned} \text{grad } |\mathbf{A}| &= \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{A}| \mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} |\mathbf{A}| \mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} |\mathbf{A}| \mathbf{i}_z = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \mathbf{i}_x + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \mathbf{i}_z = \\ &= \frac{1}{2|\mathbf{A}|} \left(2A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \mathbf{i}_x + 2A_y \frac{\partial A_y}{\partial y} \mathbf{i}_y + 2 \frac{\partial A_z}{\partial z} \mathbf{i}_z \right). \end{aligned}$$

Di qui, la [12.2.13].

Applicando la [12.2.13] alla [12.2.12], si ha

$$\text{grad } n = \text{grad}(|\text{grad } \Phi|) = \frac{\partial}{\partial s} \text{grad } \Phi,$$

e quindi, dalla [12.2.12'],

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) = \text{grad } n \quad [12.2.14]$$

che è l'equazione differenziale vettoriale che governa l'andamento spaziale dei raggi geometrici. Da essa si ricava subito la prima legge dell'ottica geometrica. Infatti, in un mezzo omogeneo, n è costante da punto a punto, e pertanto risulta

$$n \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) = 0,$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2} = 0.$$

Se ne conclude che \mathbf{r} è funzione lineare (vettoriale) di s :

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}s + \mathbf{b},$$

con \mathbf{a} e \mathbf{b} vettori assegnati, per un dato raggio. Ciò significa che il raggio è una retta

che ha la direzione del vettore \mathbf{a} e passa per il punto individuato dal raggio vettore \mathbf{b} (per $s=0$).

Per mostrare, ora, che i raggi geometrici ubbidiscono alla legge della rifrazione, riprendiamo la relazione

$$\mathbf{t} = \frac{1}{n} \operatorname{grad} \Phi;$$

da essa si deduce che

$$\operatorname{rot}(n\mathbf{t})=0,$$

e cioè che il campo $n\mathbf{t}$ è irrotazionale. Ragionando come per il campo elettrostatico (vedi § 2.6), se ne conclude che, all'interfaccia fra due mezzi di caratteristiche fisiche diverse, si conservano le componenti tangenziali del vettore $n\mathbf{t}$. Si ha quindi

$$\mathbf{n} \times (n_2 \mathbf{t}_2 - n_1 \mathbf{t}_1) = 0, \quad [12.2.15]$$

dove \mathbf{n} è il versore della normale alla superficie di separazione Σ , orientata dal mezzo 1 al mezzo 2 (vedi fig. 12.3). Dalla [12.2.15] si ricava subito

$$n_2 \mathbf{n} \times \mathbf{t}_2 = n_1 \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 \quad [12.2.15']$$

e quindi

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i. \quad [12.2.16]$$

Le [12.2.15'] e [12.2.16] mostrano che raggio incidente, raggio rifratto e normale \mathbf{n} giacciono nello stesso piano e, inoltre, che vale la classica legge di rifrazione tra gli indici di rifrazione e i seni degli angoli.

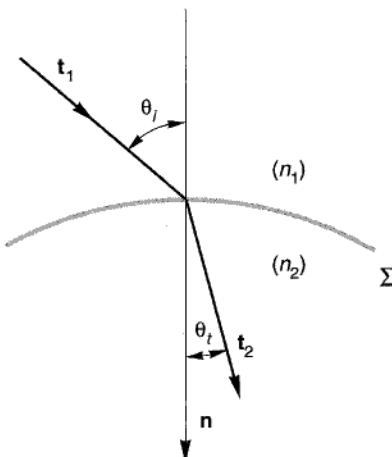


Figura 12.3

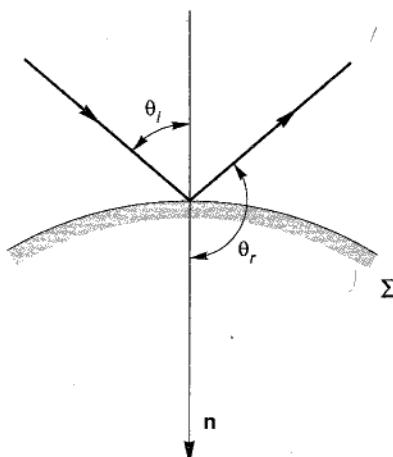


Figura 12.4

Per quel che riguarda la legge della riflessione, basta osservare che la continuità delle componenti tangenziali del vettore $n\hat{t}$ deve essere verificata anche tra raggio incidente e raggio riflesso: essendo entrambi relativi allo stesso mezzo, si ha

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r$$

e quindi (vedi fig. 12.4)

$$\theta_r = \pi - \theta_i.$$

[12.2.17]

Dalla $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ discende poi

$$n_{12} n_{23} = \frac{n_1}{n_2} \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_1}{n_3} = n_{13}.$$

Infine, per quel che riguarda la quarta legge, essa è certamente verificata, fatta eccezione della regione in cui le due onde interferiscono.

12.3 I sistemi ottici e le loro principali proprietà

Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato che i fenomeni luminosi possono essere spiegati in termini elettromagnetici e che le leggi dell'ottica geometrica hanno il loro fondamento in quelle del campo elettromagnetico. A questo punto, possiamo far ricorso con fiducia alle semplici leggi dell'ottica geometrica, per analizzare il funzionamento dei sistemi ottici.

Per *sistema ottico* si intende un insieme di mezzi di proprietà ottiche diverse, affiancati l'uno all'altro; le superfici di separazione fra mezzi contigui sono dette *riflettenti* se in corrispondenza di esse i raggi luminosi si riflettono, più che rifrangansi, *rifrangenti* se avviene il contrario. In sintesi, possiamo dire che un sistema ottico è costituito da una successione di superfici riflettenti e/o rifrangenti. Se queste superfici sono porzioni di sfere i cui centri sono allineati su una retta (fig. 12.5),⁴ il sistema ottico è detto *centrato* e la retta che passa per i centri è l'*asse ottico del sistema*. D'ora innanzi considereremo soltanto sistemi di questo tipo.

Ogni oggetto puntiforme S da cui si diparta un fascio di raggi luminosi è detto *punto-oggetto reale*. Se i raggi del fascio, attraversato il sistema ottico, convergono tutti in un punto S' (come in fig. 12.5), questo è un *punto-immagine reale* corrispondente al punto S . A causa della invertibilità del cammino ottico (vedi § 12.1), se si pone una sorgente in S' , i raggi che attraversano il sistema si intersecano in S : in questo caso, S' è il punto-oggetto e S il punto-immagine (ed entrambi sono reali). Pertanto, S e S' sono detti *coniugati* rispetto al sistema; e coniugati sono detti pure i raggi che escono dal punto-oggetto e quelli corrispondenti che passano per il punto-immagine (come r e r' in fig. 12.5).

⁴ Naturalmente, anche i piani possono essere considerati sfere (di raggio infinito).

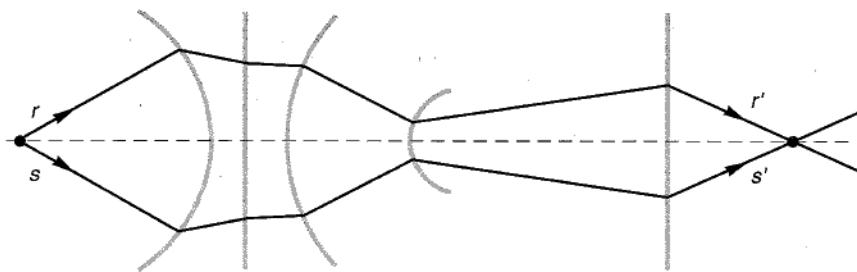


Figura 12.5

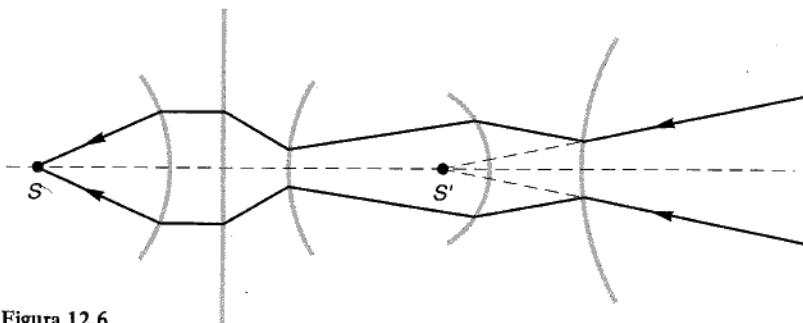


Figura 12.6

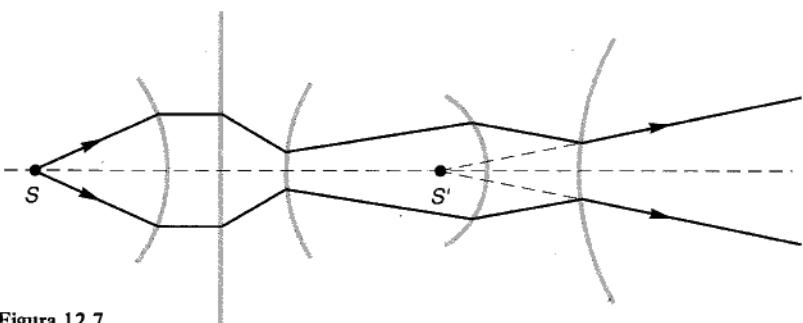


Figura 12.7

Naturalmente, i raggi che emergono da un sistema ottico possono divergere (vedi fig. 12.6); in questo caso, se i loro prolungamenti convergono ancora in un punto S' , questo è detto *punto-immagine virtuale* del punto S (poiché i raggi *non* passano effettivamente per S' , pur sembrando provenire da esso). Sempre a causa dell'invertibilità del cammino ottico, se i raggi sono diretti verso S' (come in fig. 12.7), emergendo si concentrano in S , e allora S' è *punto-oggetto virtuale* e S *punto-immagine reale*. Anche in questo caso S e S' sono detti *coniugati* rispetto al sistema; lo stesso dicasì dei raggi corrispondenti.

In tutti i casi in cui esista una coppia di punti coniugati S, S' ,⁵ il sistema è detto *stigmatico* rispetto a questi punti.

Se il sistema è stigmatico rispetto a tutti i punti dello spazio, allora è *generalmente stigmatico*; a rigore, soltanto gli specchi piani ed i sistemi di specchi piani sono generalmente stigmatici, ma con una certa approssimazione, molti sistemi ottici possono essere considerati tali.

L'insieme dei punti-oggetto appartiene al cosiddetto *spazio-oggetti*, l'insieme dei punti-immagine allo *spazio-immagini*; un raggio che incida su un sistema ottico è considerato appartenente allo spazio-oggetti, un raggio che emerge dal sistema è considerato appartenente allo spazio-immagini.

Se il sistema è generalmente stigmatico, produce una immagine ben definita in corrispondenza di ogni oggetto di dimensioni limitate: questa immagine è costituita da tutti i punti-immagine associati ai punti-oggetto di cui è composto l'oggetto-sorgente.⁶

Obiettivo dei paragrafi che seguono è appunto quello di mostrare come si possano determinare (analiticamente, graficamente o numericamente) le immagini prodotte da un assegnato sistema ottico. A tal fine, occorre innanzitutto stabilire un insieme di convenzioni che consentano di individuare in maniera non ambigua la corrispondenza tra ciascun punto-oggetto e il punto-immagine coniugato, e quella tra ciascun raggio e il raggio coniugato.

Per completezza, riportiamo qui di seguito le convenzioni generalmente adottate nella maggior parte dei testi classici; nel seguito, comunque, ne adotteremo altre più semplici:

- 1) nei disegni, salvo esplicita indicazione, i raggi luminosi si intendono orientati da sinistra verso destra;
- 2) la normale n ad ogni superficie rifrangente Σ è orientata concordemente ai raggi (e quindi da sinistra verso destra, se non è specificato altrimenti);
- 3) la normale n ad ogni superficie riflettente Σ è orientata coerentemente con il raggio incidente quando è considerata appartenente allo spazio-oggetti, coerentemente con quello riflesso quando è considerata appartenente allo spazio-immagini;
- 4) i punti-oggetto sono riferiti a un sistema di assi cartesiani x, y orientati come nella figura 12.8;⁷ i punti-immagine sono riferiti agli assi x', y' ; le origini O e O' possono essere distinte oppure coincidenti;
- 5) dati due raggi orientati a, b (considerati in questo ordine) appartenenti allo spazio oggetti, considereremo come angolo positivo tra a e b quello descritto da a per andare a sovrapporsi a b ruotando in senso antiorario (come α in fig. 12.8); per lo spazio-immagini, vale la convenzione opposta (α' è positivo in fig. 12.8).

⁵ Si noti che questa è una condizione molto restrittiva, poiché generalmente non avviene che tutti i raggi emessi da un punto-oggetto vadano poi a convergere esattamente in un unico punto.

⁶ Le immagini reali (se piane) possono essere raccolte su uno schermo interposto sul cammino dei raggi e ivi osservate; le immagini virtuali non possono essere raccolte, ma sono, ciò nonostante, visibili (si pensi alle immagini di uno specchio).

⁷ Ovviamente, essendo il sistema simmetrico rispetto all'asse ottico, tutto ciò che vale per il piano rappresentato nella figura 12.8 vale anche per ogni altro piano passante per l'asse ottico.

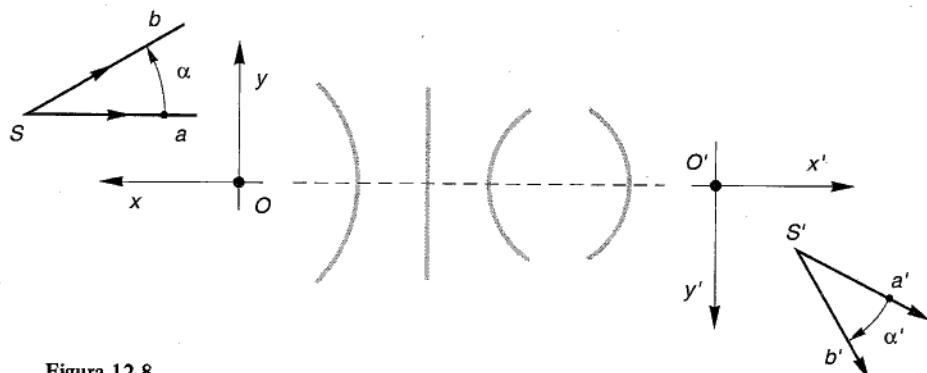


Figura 12.8

L'archetto con freccia indica quale sia il raggio da considerare per primo (quello indicato dalla *coda* della freccia), e non il senso di rotazione assunto come positivo!

Consideriamo ora un sistema stigmatico rispetto a tutti i punti di un piano π e del suo coniugato π' ; se *ogni* figura-oggetto giacente su π ha come immagine in π' una figura simile, il sistema è *ortoscopico* rispetto ai piani π e π' . In tale caso, se A, A' e B, B' sono due coppie di punti coniugati, il rapporto

$$G_l = \frac{l'}{l} \quad [12.3.1]$$

tra la distanza l' dei punti A', B' e la distanza l dei punti A, B è detto *ingrandimento lineare* relativo ai piani coniugati π, π' ; esso coincide con il rapporto di similitudine tra le figure coniugate.

Se i piani π, π' sono ortogonali all'asse ottico del sistema (caso, questo, di particolare interesse applicativo) consideriamo un segmento-oggetto AB che sia diretto come l'asse y nel piano della figura 12.8, e la sua immagine coniugata $A'B'$; definiamo *ingrandimento trasversale* il rapporto

$$G_y = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{y_B - y_A} \quad [12.3.2]$$

con ovvio significato dei simboli; esso è da considerare positivo (con riferimento alle convenzioni fatte) quando l'immagine $A'B'$ è capovolta rispetto all'oggetto AB , negativo in caso contrario. Notiamo che il valore assoluto di G_y coincide con l'ingrandimento lineare.

Se il sistema è stigmatico per tutti i punti dell'asse x (o di una retta parallela a x), si può definire un *ingrandimento assiale*:

$$G_x = \frac{dx'}{dx}, \quad [12.3.3]$$

come rapporto tra la differenza $dx' = x'_{B'} - x'_{A'}$ tra le ascisse di due punti-immagine

infinitamente prossimi sull'asse x' e la differenza $dx = x_B - x_A$ fra le ascisse dei corrispondenti punti-oggetto.

Infine, per ciò che riguarda gli angoli, se a e b sono due raggi uscenti da un punto S dello spazio-oggetti e a' , b' sono i rispettivi raggi coniugati incidenti nel punto S' dello spazio-immagini, il rapporto

$$G_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad [12.3.4]$$

tra l'angolo α' formato dai raggi a' , b' (considerati in questo ordine) e l'angolo α tra i corrispondenti raggi a , b è detto *ingrandimento angolare* relativo ai punti S , S' .

Con riferimento alla figura 12.9, G_α è da considerarsi positivo in base alle convenzioni fatte. Se G_α è indipendente da α il sistema è detto *ortorifrangente* per i punti S , S' .

Infine, ricordando che l'indice di rifrazione dipende dal colore della luce, si comprende che le immagini di uno stesso punto-oggetto possono essere diverse per raggi luminosi di colore diverso; in tal caso il sistema è detto *cromatico*. Se invece accade che le immagini coincidano, indipendentemente dal colore della luce, il sistema è detto *acromatico*.

Come già detto a proposito dello stigmatismo, i sistemi ottici in genere verificano le proprietà di ortoscopia e ortorifrangenza soltanto in maniera approssimata; pertanto, le immagini che essi formano sono più o meno sfocate e distorte, a seconda della cura con cui sono stati progettati e realizzati. In ogni caso, anche un sistema ideale (che non sia uno specchio piano o un sistema di specchi piani) presenta inevitabilmente scostamenti dalle condizioni di stigmatismo, ortoscopia, ortorifrangenza e acromaticità. Sono, queste, *aberrazioni* che trovano origine nel modo stesso di funzionare di ogni sistema ottico; la loro trattazione esula dai limiti di questo libro.

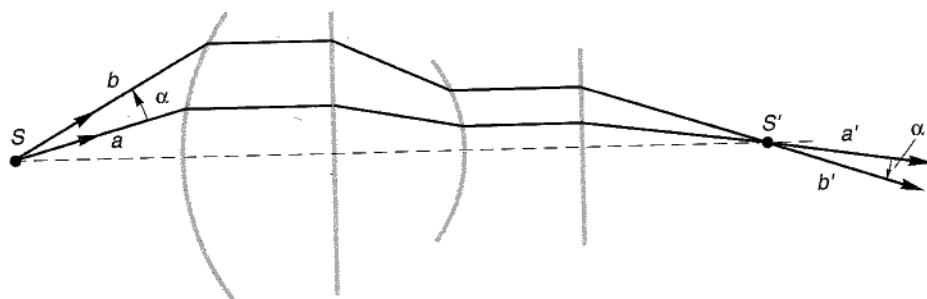


Figura 12.9

12.4 Sistemi ottici semplici

Esamineremo ora alcuni esempi di sistemi ottici, di particolare interesse applicativo, costituiti da una sola superficie, riflettente o rifrangente, piana o sferica.

Specchio piano

E' costituito da una superficie riflettente piana (realizzata solitamente con una sottile lastra di vetro, argentata su una delle due facce), la cui traccia è indicata con Σ nella figura 12.10. Indicando con θ_i l'angolo di incidenza, formato tra la normale n_i (considerata appartenente allo spazio-oggetti) e il raggio incidente, e con θ_r l'angolo di riflessione, formato tra la normale n_r (considerata appartenente allo spazio-immagini) e il raggio riflesso, si ha

$$\theta_i = \theta_r, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \theta_i > 0 \\ \theta_r > 0. \end{cases}$$

I prolungamenti dei raggi riflessi si incontrano tutti in S' , simmetrico di S rispetto a Σ : S' è, quindi, immagine virtuale di S . La stessa cosa vale per ogni altro punto-oggetto: pertanto, il sistema è generalmente stigmatico. Dette x, y e x', y' le coordinate di S e S' (con le convenzioni descritte nel paragrafo precedente), si ha (fig. 12.10):

$$x' = x, \quad \text{con} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x' > 0; \end{cases} \quad [12.4.1]$$

inoltre:

$$G_y = -1, \quad [12.4.2]$$

poiché l'immagine di un segmento parallelo all'asse y ha la direzione e il verso del segmento-oggetto (non è capovolta); e ancora:

$$G_x = 1, \quad [12.4.3]$$

$$G_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \quad [12.4.4]$$

con $\alpha > 0, \alpha' > 0$.

Il sistema è dunque ortoscopico per tutti i piani e ortorifrangente per tutti i punti; inoltre, poiché le leggi della riflessione sono indipendenti dal colore della luce, il sistema è anche acromatico. L'immagine di un oggetto è costituita dall'insieme dei punti simmetrici (di quelli dell'oggetto) rispetto allo specchio: essa è, ovviamente, virtuale.

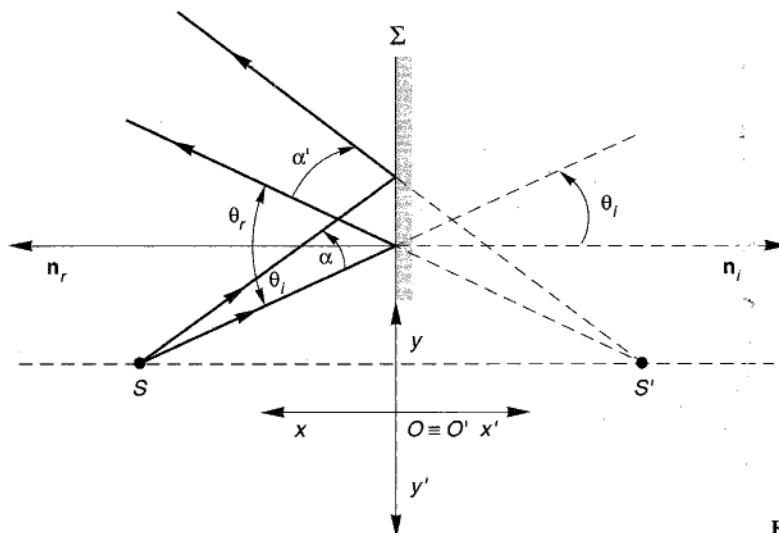


Figura 12.10

Ci si convince agevolmente, infine, che anche i *sistemi* di specchi piani godono di tutte le proprietà elencate per lo specchio singolo.

Dietro piano

Un dietro piano è costituito (fig. 12.11) da un'unica superficie piana Σ che separa due semispazi di indici di rifrazione n_1 e n_2 , diversi fra loro (ad esempio aria e vetro). Il sistema è centrato e ogni retta perpendicolare a Σ è asse ottico. Per verificare se il sistema è stigmatico, consideriamo un punto oggetto reale S e due raggi a , b uscenti da S : il primo, ortogonale a Σ , non è deviato da Σ (e pertanto a' coincide con a); il

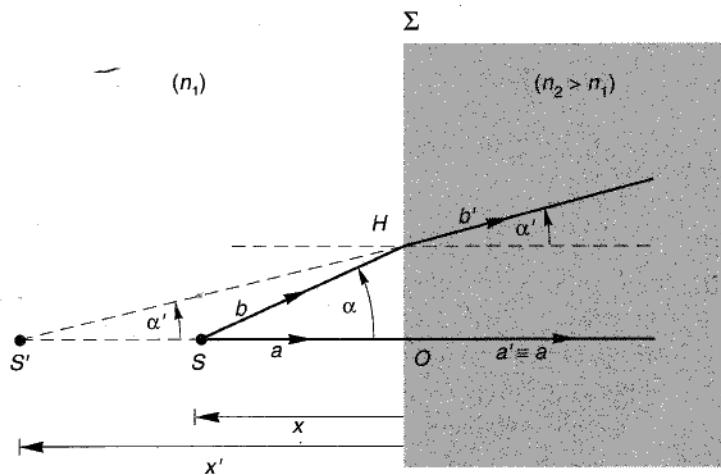


Figura 12.11

secondo è deviato in b' , e il prolungamento di questo incontra l'asse passante per S in un punto S' . Scelti gli assi x, y e x', y' come indicato nel paragrafo precedente, con origine comune nel punto O , le ascisse x e x' di S e S' sono rispettivamente positiva e negativa; analogamente, l'angolo α tra a e b è positivo, α' tra a' , b' è negativo. Si ha quindi

$$x \operatorname{tg} \alpha = x' \operatorname{tg} \alpha';$$

posto, poi (tenendo conto delle convenzioni fatte per gli angoli):

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}, \quad \text{e ricordando che } \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha'}},$$

si ottiene

$$\frac{x'}{x} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} = -\sqrt{\frac{n_{12}^2 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}}. \quad [12.4.5]$$

Se ne conclude che per una data coppia di mezzi (e cioè per un dato n_{12}) x' dipende da α : ciò significa che i diversi raggi emergenti da Σ non provengono tutti dalla stessa immagine S' , e pertanto il sistema è *astigmatico* (cioè, non stigmatico). Poiché, inoltre, n_{12} dipende dal colore, il sistema è anche cromatico.

Tuttavia, se ci limitiamo a considerare raggi *parassiali*, e cioè poco inclinati rispetto all'asse ottico, si ha, con ottima approssimazione:⁸

$$\sqrt{\frac{n_{12}^2 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}} \approx n_{12}, \quad [12.4.6]$$

e quindi

$$\frac{x'}{x} \approx -n_{12}. \quad [12.4.6']$$

Il valore di x' , per un dato x , è indipendente da α (per raggi parassiali): ciò significa che tutti i raggi parassiali emergenti da Σ , prolungati, passano, con ottima approssimazione, per lo stesso punto S' , e questo è quindi l'immagine virtuale di S : in conclusione, il diottro piano può essere considerato generalmente stigmatico per i raggi parassiali (poiché le considerazioni precedenti si applicano a tutti i punti al finito).

Per chi guarda dalla parte del mezzo 2 (come indicato in fig. 12.11), l'unico effetto del diottro piano è quello di spostare il punto-immagine rispetto al punto-sorgente, in direzione ortogonale a Σ . In particolare, se $n_1 < n_2$, e dunque $n_{12} > 1$ (come in

⁸ Ciò equivale ad arrestarsi al primo termine negli sviluppi in serie di $\sin x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$, assumendo $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$, $\operatorname{tg} x \approx x$. In questa approssimazione per $\alpha \leq 15^\circ$, l'errore è $\leq 3\%$; per $\alpha \leq 25^\circ$, l'errore è ancora $\leq 10\%$.

fig. 12.11), l'immagine (virtuale) S' appare più lontana all'osservatore di quanto sia la sorgente S ; il contrario si verifica se $n_1 > n_2$, come quando, ad esempio, da una barca si guarda il fondo del mare ($n_{\text{acqua}} > n_{\text{aria}}$).

Poiché ciò vale per *ogni* punto-sorgente S , e poiché lo spostamento dell'immagine è costante per tutti i punti che abbiano la stessa ascissa x , se ne conclude che il sistema è ortoscopico rispetto ai piani ortogonali all'asse ottico; e per l'ingrandimento trasversale si ha inoltre

$$G_y = \frac{y'_B}{y_B} = -1, \quad [12.4.7]$$

il che corrisponde al fatto che l'immagine $A'B'$ *non* è capovolta rispetto all'oggetto (fig. 12.12).

Se, invece, la sorgente è un segmento AB diretto lungo l'asse ottico (come in fig. 12.13), la sua lunghezza si modifica, e l'ingrandimento lineare assiale G_x è pari a

$$G_x = \frac{x'_{B'} - x'_{A'}}{x_B - x_A} = \frac{-n_{12}x_B + n_{12}x_A}{x_B - x_A} = -n_{12}. \quad [12.4.8]$$

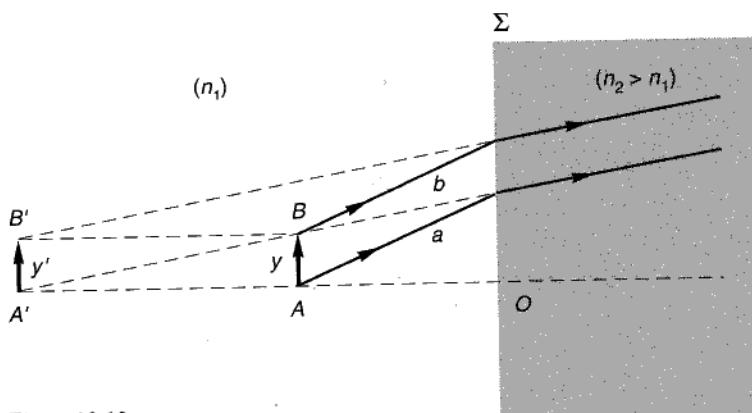


Figura 12.12

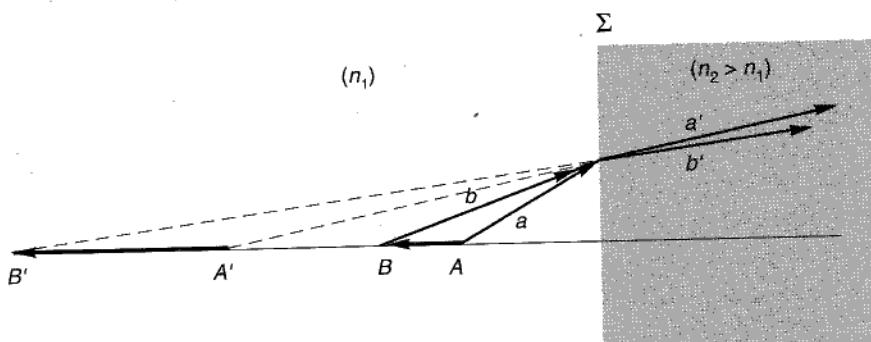


Figura 12.13

Questo è il motivo per cui gli oggetti sul fondo del mare ci appaiono anche meno "spessi", oltre che più vicini.

Per quel che riguarda gli angoli, si ha subito (nell'approssimazione dei raggi paralleli):

$$G_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = -\frac{1}{n_{12}}, \quad [12.4.9]$$

e se ne conclude che il sistema è ortorifrangente per tutti i punti.

Osserviamo, infine, che le relazioni [12.4.2]÷[12.4.4], valide per lo specchio piano possono essere ottenute dalle [12.4.7]÷[12.4.9], a patto di attribuire al diottro un indice di rifrazione fittizio n_{12} , pari a -1 ; ciò vale anche per lo specchio sferico, e perciò studieremo il diottro sferico primo dello specchio corrispondente.

Diottro sferico

E' costituito da una calotta sferica Σ che separa due mezzi di indici di rifrazione n_1 e n_2 , diversi fra loro (ad esempio, aria e vetro). Il sistema è centrato e il suo asse ottico è la retta che passa per il centro C sull'asse e per il vertice O della calotta (fig. 12.14). Consideriamo un punto-oggetto reale A e due raggi r, s , uscenti da A : il primo, ortogonale a Σ , non è deviato da Σ (e pertanto r' coincide con r), il secondo è deviato in s' , che incontra l'asse ottico in A' .

Indicando con θ_1 e θ_2 gli angoli di incidenza e di rifrazione (il primo > 0 , in fig. 12.14, e il secondo < 0), si ha

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = -\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$$

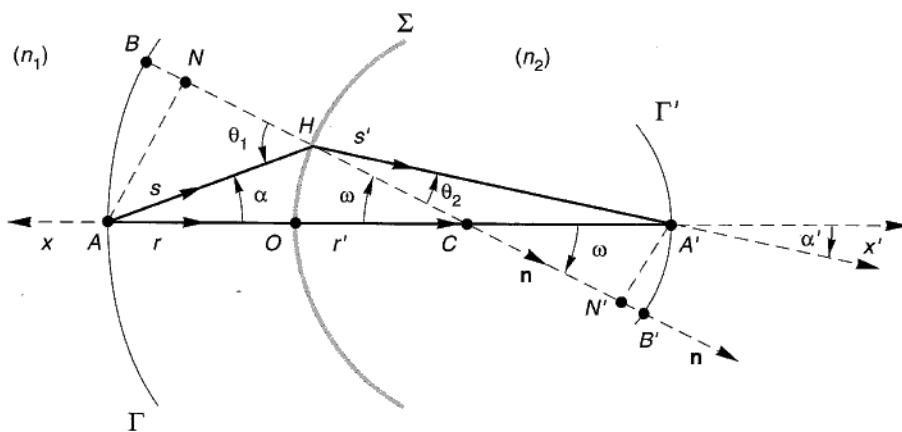


Figura 12.14

Indicando con N e N' i piedi delle perpendicolari abbassate da A e A' sulla normale \mathbf{n} a Σ per H , si ha (essendo ω l'angolo tra r e \mathbf{n}):

$$\begin{aligned} AN &= AH \sin \theta_1 = CA \sin \omega \\ A'N' &= -HA' \sin \theta_2 = CA' \sin \omega. \end{aligned} \quad [12.4.10]$$

Considerando positivo il raggio R della calotta sferica, si ha inoltre

$$CA = x + R, \quad CA' = x' - R,$$

avendo indicato con x e x' le ascisse dei punti A e A' (con le convenzioni indicate nel paragrafo precedente). Limitandoci ai soli raggi parassiali, possiamo ritenere

$$HA \approx x$$

$$HA' \approx x';$$

dalle [12.4.10] si ha allora

$$\frac{n_2}{n_1} = -\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{x'(x+R)}{x(x-R)},$$

e quindi:

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{x'} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad [12.4.11]$$

Per fissati valori di n_1 , n_2 , R e x , il valore di x' è fissato univocamente, indipendentemente da α : pertanto, il sistema è stigmatico per i punti dell'asse ottico (e per i raggi parassiali). Consideriamo ora un secondo punto B sulla superficie sferica Γ di centro C e passante per A ; ripetendo i ragionamenti fatti e considerando come nuovo asse ottico la retta BC , concludiamo che il coniugato di B è il punto B' (allineato con B e C) giacente sulla superficie sferica Γ' centrata in C e passante per A' ; pertanto, una figura-oggetto su Γ ha per immagine una figura simile su Γ' . Osservando inoltre che, nell'approssimazione dei raggi parassiali, è lecito confondere Γ e Γ' con i piani tangenti alle due superfici in A e A' , se ne conclude che il sistema è stigmatico e ortoscopico per i piani ortogonali all'asse.

La [12.4.11] può essere riscritta in forma equivalente, più semplice da ricordare, ponendo

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R, \quad f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \quad [12.4.12]$$

e, per simmetria di notazioni, $x_1 = x$, $x_2 = x'$, si ha

$$\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1, \quad [12.4.13]$$

la quale è detta *formula di Huygens*.

Osserviamo che, ponendo nella [12.4.11], $x = \infty$, si ha

$$x' = x_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R = f_2,$$

e, analogamente, ponendo $x' = \infty$, si ha

$$x = x_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R = f_1.$$

Se ne conclude che f_1 e f_2 sono le ascisse dei due *fuochi* F_1 , F_2 , che sono i punti in cui convergono, dopo essere stati rifratti dal diottro sferico, i raggi paralleli all'asse provenienti rispettivamente dal mezzo di indice n_2 e dal mezzo di indice n_1 (fig. 12.15). Osserviamo infine che è:

$$f_2 - f_1 = R$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

I piani ortogonali all'asse e passanti per F_1 e F_2 sono detti rispettivamente *primo* e *secondo piano focale*.

Ponendo

$$\xi_1 = x_1 - f_1, \quad \xi_2 = x_2 - f_2, \quad [12.4.14]$$

la [12.4.13] assume la forma equivalente (detta *di Newton*)

$$\xi_1 \xi_2 = f_1 f_2. \quad [12.4.15]$$

Siamo ora in condizioni di costruire molto facilmente l'immagine di una figura-oggetto e di calcolare l'ingrandimento trasversale del diottro sferico. Supponiamo di conoscere le due distanze focali f_1 e f_2 del diottro (misurate dal vertice O della calotta

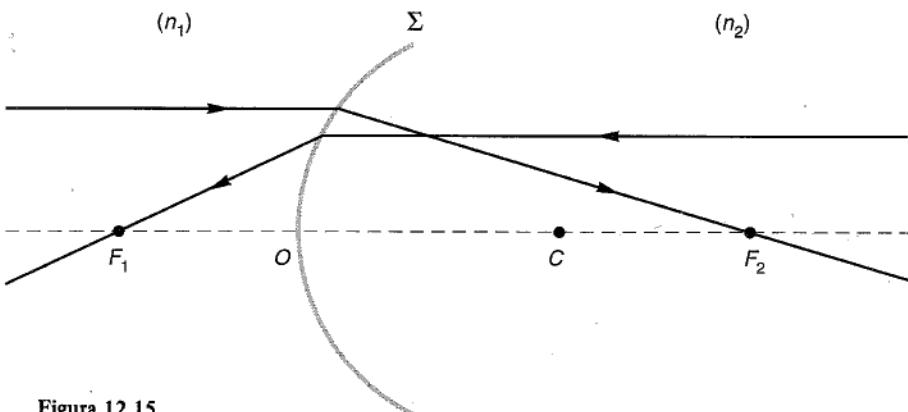


Figura 12.15

sferica) e, quindi, i due fuochi F_1 e F_2 (fig. 12.16). Con l'approssimazione dei raggi parassiali, la calotta sferica che costituisce il diottro può essere confusa con il piano π ad essa tangente nel vertice O . Volendo costruire l'immagine del segmento orientato AB , consideriamo il raggio s uscente da B e parallelo all'asse ottico; esso viene deviato nel raggio s' , passante per il fuoco F_2 . Il raggio r , che passa per il fuoco F_1 , viene deviato in r' , parallelo all'asse; pertanto, i due raggi r', s' , coniugati di r, s , si incontrano in B' , che è coniugato di B . Essendo il sistema stigmatico, tutti i raggi parassiali uscenti da B si incontrano in B' e pertanto B' è l'immagine di B . Ricordando inoltre che il sistema è anche ortoscopico per i piani ortogonali all'asse, se ne conclude che l'immagine di AB è data dal segmento orientato $A'B'$. L'ingrandimento trasversale è

$$G_y = \frac{y_2}{y_1} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OK}{AB}, \quad [12.4.16]$$

avendo indicato, per simmetria di notazioni, con y_1, y_2 le ordinate dei punti B e B' ; tenendo conto poi della similitudine fra i triangoli F_1AB e F_1OK , si ha

$$G_y = \frac{f_1}{x_1 - f_1} \quad [12.4.16']$$

e, analogamente:

$$G_y = \frac{x_2 - f_2}{f_2}. \quad [12.4.16'']$$

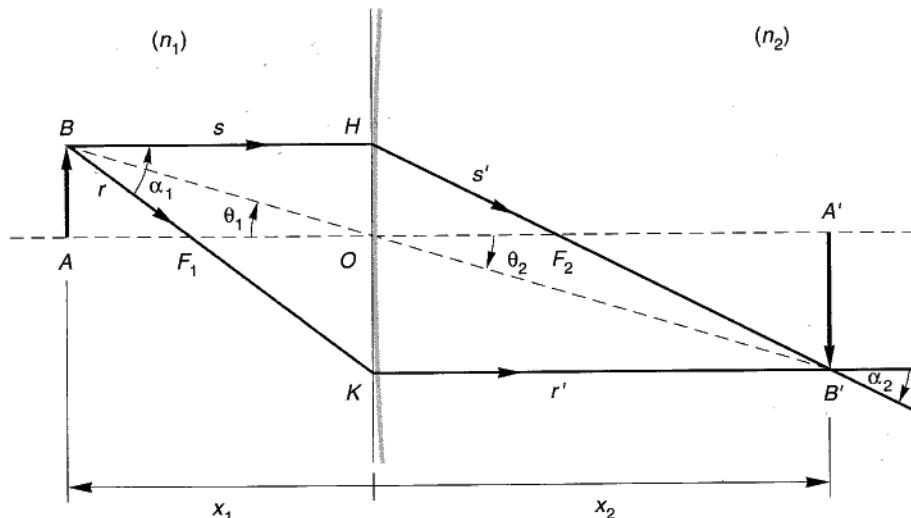


Figura 12.16

Riassumendo, le [12.4.9], noti n_1, n_2 e R , consentono di valutare le distanze focali f_1, f_2 ; note queste, le [12.4.13] e [12.4.16] ÷ [12.4.16''] consentono di calcolare x_2, y_2 in funzione di x_1, y_1 , e cioè di determinare le coordinate di B' , immagine di B . Se, poi, l'oggetto AB è posto tra il fuoco F_1 e il vertice O del diottro, l'immagine $A'B'$ è virtuale (fig. 12.17) e non capovolta.

Come si vede, rispetto al diottro piano che consente di ottenere soltanto immagini virtuali, di ingrandimento trasversale unitario, il diottro sferico consente di ottenere immagini sia virtuali che reali (a seconda della posizione dell'oggetto), di ingrandimento anche diverso dall'unità.

Per quel che riguarda le sorgenti che siano segmenti diretti lungo l'asse ottico, dette dx_1 la lunghezza del segmento-oggetto e dx_2 quella del segmento-immagine, si ha

$$G_x = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{d\xi_2}{d\xi_1}$$

e, quindi, ricavando ξ_2 dalla formula di Newton e derivando rispetto a ξ_1 ,

$$G_x = -\frac{f_1 f_2}{\xi_1^2} = -\frac{f_1 f_2}{(x_1 - f_1)^2}.$$

Come il diottro piano, anche il diottro sferico altera la "profondità" degli oggetti, oltre che le loro dimensioni trasversali.

Per quel che riguarda l'ingrandimento angolare G_α , si ha (con la solita approssimazione dei raggi parassiali):

$$G_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

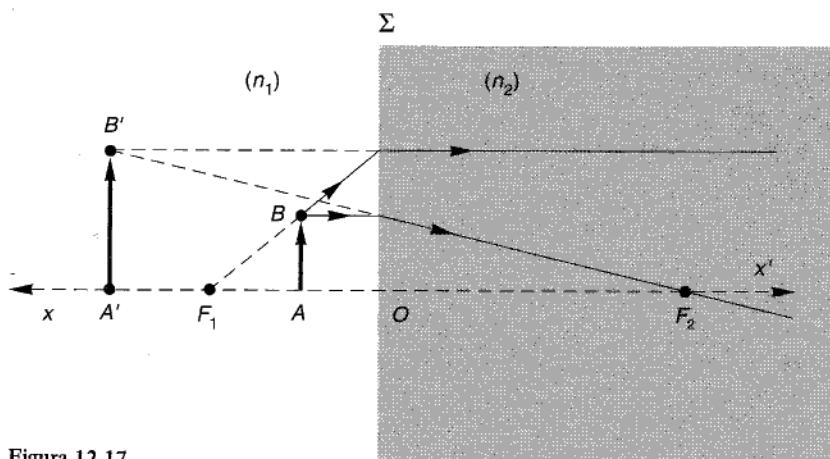


Figura 12.17

avendo indicato con α_1 l'angolo tra i raggi r e s , e con α_2 l'angolo fra r' , s' . D'altra parte

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{HK}{x_1} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{HK}{x_2}, \end{array} \right. \quad [12.4.17]$$

e quindi

$$G_\alpha = \frac{x_1}{x_2}. \quad [12.4.18]$$

Osserviamo, poi, riprendendo le [12.4.17], che è

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{x_1}{x_2}; \quad [12.4.19]$$

d'altra parte, ricordando che B' è immagine di B , il raggio BO deve rifrangersi in OB' , e si ha quindi (fig. 12.16):

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Essendo poi (nella solita approssimazione di raggi parassiali)

$$x_1 \sin \theta_1 = y_1, \quad x_2 \sin \theta_2 = y_2,$$

avendo indicato con y_1, y_2 le ordinate di B, B' , si ha

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{y_1}{y_2} \frac{n_1}{n_2},$$

e, infine, dalla [12.4.14]:

$$n_1 y_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = n_2 y_2 \operatorname{tg} \alpha_2. \quad [12.4.20]$$

Se ne conclude che il prodotto $ny \operatorname{tg} \alpha$, detto *invariante di Lagrange-Helmholtz*, è costante da ambo le parti di un diottro sferico. Ciò consente di calcolare l'ingrandimento trasversale $G_y = y_2/y_1$ quando siano noti n_1/n_2 e $\operatorname{tg} \alpha_1/\operatorname{tg} \alpha_2 \approx G_\alpha = x_1/x_2$. Pertanto, la [12.4.20] è equivalente alla [12.4.16'] (oppure [12.4.16'']).

Osservazione. Se il diottro rivolge la sua *concavità* (invece che *convessità*) ai raggi emessi dalla sorgente, tutte le relazioni ottenute rimangono valide a patto di considerare negativo il raggio di curvatura del diottro. (Provi il lettore a verificarlo.)

Specchio sferico

E' costituito da un'unica superficie sferica riflettente. Come già detto, le relazioni valide per lo specchio sferico possono essere ottenute da quelle del diottro ponendovi $n_{12} = -1$ (provvi il lettore a verificarlo). Si ha, così:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R = -\frac{R}{2}, & f_2 = +\frac{R}{2}, \\ \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1 \\ \frac{y_2}{y_1} = \frac{f_1}{x_1 - f_1}. \end{cases} \quad [12.4.21]$$

Nelle figure 12.18 e 12.19 sono riportate le costruzioni delle immagini in due casi tipici.

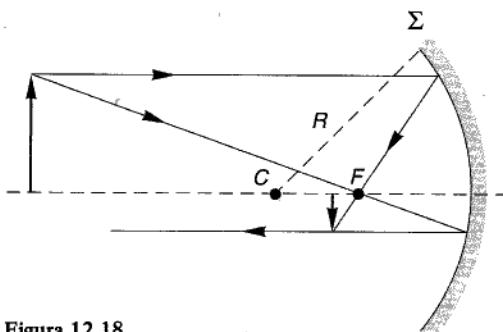


Figura 12.18

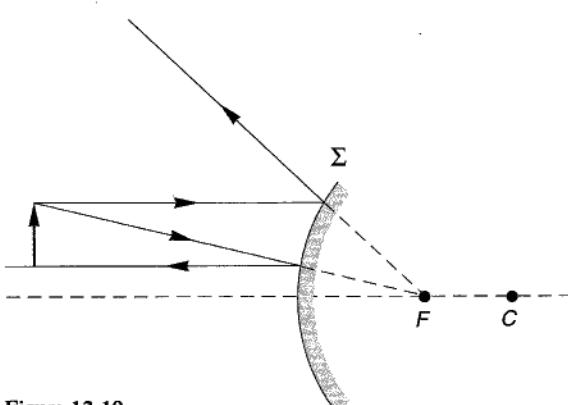


Figura 12.19

12.5 Il metodo matriciale nello studio dei sistemi ottici

Lo studio di un generico sistema ottico, costituito da una successione di superfici rifrangenti e/o riflettenti $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N$, può essere condotto analiticamente applicando a ciascuna superficie Σ_k le formule ricavate nel paragrafo precedente; le relazioni che così si ottengono, opportunamente "raccordate", forniscono il legame tra le coordinate dei punti-oggetto e quelle dei punti-immagine. Il procedimento è però abbastanza laborioso (anche se concettualmente semplice) e le espressioni cui si perviene sono tanto complicate da sconsigliare di seguire questa via. Nei testi più tradizionali, per aggirare la difficoltà, si preferisce dimostrare per via geometrica alcune proprietà generali dei sistemi ottici e fare, quindi, ricorso a semplici metodi grafici di costruzione delle immagini basati su tali proprietà, analoghi a quelli che abbiamo utilizzato per i sistemi semplici (costituiti da un'unica superficie).

Noi preferiamo qui seguire un approccio più moderno basato sul formalismo matriciale, che consente di analizzare in maniera semplice qualunque tipo di sistema ottico e, allo stesso tempo, si presta molto bene all'impiego delle moderne tecniche di calcolo numerico.

Per cominciare, semplifichiamo le convenzioni fatte nei paragrafi precedenti, e assumiamo un unico sistema di coordinate x, y (nel piano di fig. 12.20) sia per lo spazio-oggetti sia per lo spazio-immagini, con asse x coincidente con l'asse ottico del sistema e origine in un suo punto qualsiasi (solitamente esterno al sistema ottico).

Per quanto riguarda gli angoli, valga — sia per lo spazio-oggetti che per lo spazio-immagini — la seguente convenzione: dati due raggi orientati a, b , considerati in questo ordine, considereremo come angolo positivo tra a e b quello descritto da a per sovrapporsi a b ruotando in senso *antiorario*. Inoltre, l'archetto con freccia indica quale sia il raggio da considerare per primo (quello indicato dalla coda della freccia).

Nel piano di figura, un raggio luminoso passante per un generico punto P_0 è univocamente individuato quando si assegnino le coordinate x_0, y_0 di P_0 e l'angolo α_0 (in-

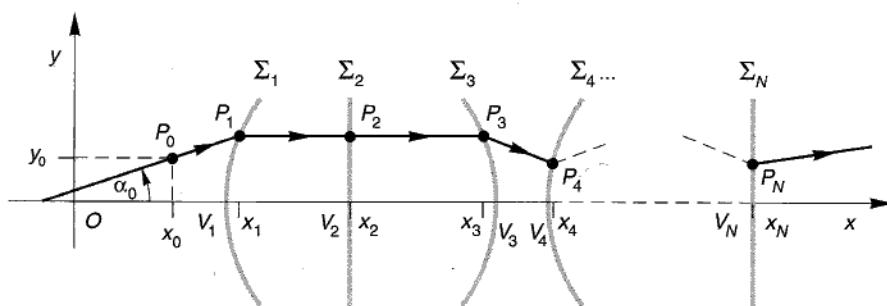


Figura 12.20

clinazione) tra l'asse x e il raggio. Osserviamo, poi, che il percorso di un raggio che attraversa il sistema ottico è costituito da una linea spezzata (fig. 12.20) che ha i suoi punti cuspidali P_k in corrispondenza delle superfici rifrangenti Σ_k (per il momento, escludiamo la presenza di superfici riflettenti); nell'ambito della approssimazione parassiale, le ascisse x_k dei punti P_k coincidono con quelle dei vertici V_k delle superfici Σ_k (punti di intersezione con l'asse ottico).

Ci proponiamo ora di mostrare come si possano determinare in maniera semplice (e facilmente programmabile), per un generico raggio r , i valori di y e α in corrispondenza di un suo punto $P(x, y)$ qualsiasi, a partire dalla conoscenza dei valori y_0 e α_0 relativi a un altro suo punto $P_0(x_0, y_0)$ prefissato. Cominciamo con l'osservare che il percorso del raggio è costituito da: 1) tratti rettilinei (tra una Σ_k e la seguente), in cui varia (generalmente) la coordinata y , ma non l'angolo α ; 2) punti di rifrazione (in corrispondenza di ciascuna Σ_k), in cui varia l'angolo α , ma non la ordinata y (passando da una pagina all'altra della superficie Σ).

Esaminiamo separatamente i due casi (nell'approssimazione per raggi parassiali).

1) *Tratti rettilinei.* Detti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti generici di un segmento di raggio rettilineo (fig. 12.21), e indicati con α_1, α_2 i corrispondenti angoli di inclinazione del raggio r , si ha

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + (x_2 - x_1) \operatorname{tg} \alpha_1 \approx y_1 + (x_2 - x_1) \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1. \end{cases} \quad [12.5.1]$$

2) *Punti di rifrazione.* Indicando rispettivamente con P_1 e P_2 il punto di rifrazione, considerato come appartenente, in un caso alla pagina negativa, nell'altro alla pagina positiva di Σ (fig. 12.22) e indicando con R il raggio di curvatura di Σ (assunto

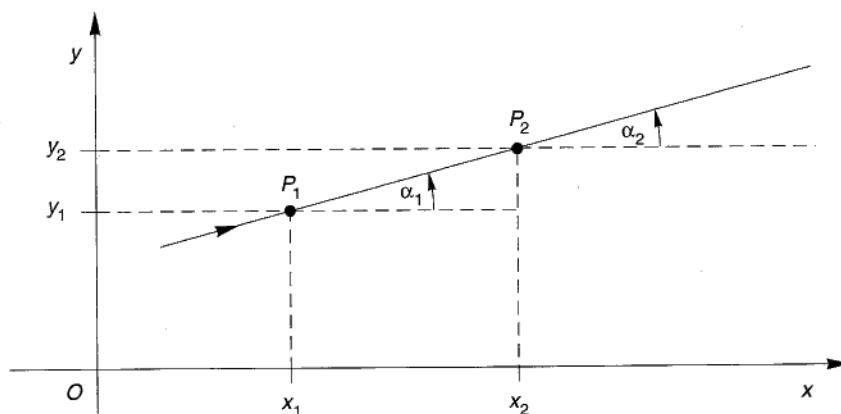


Figura 12.21

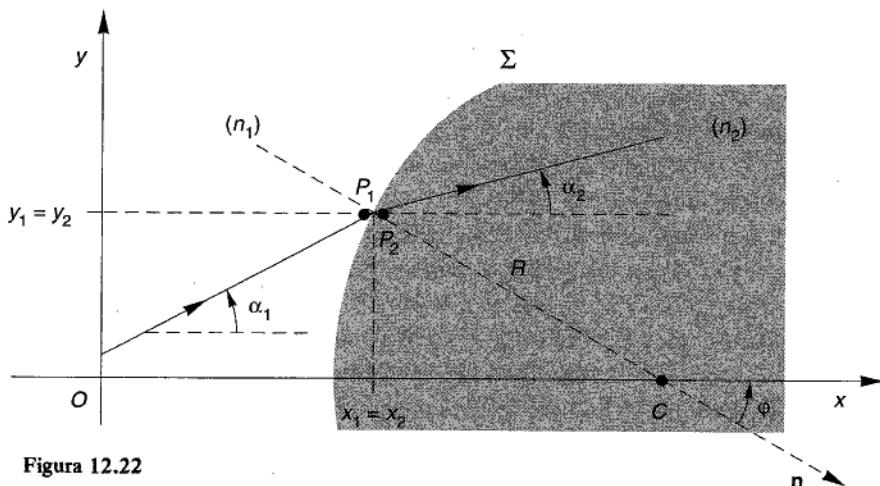


Figura 12.22

positivo quando Σ offre la sua convessità ai raggi incidenti, come in fig. 12.23), si ha, dalle leggi della rifrazione,

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ n_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) = n_2 \sin(\alpha_2 + \varphi) \end{cases} \quad [12.5.2]$$

dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi, e φ è l'angolo tra la normale \mathbf{n} a Σ e l'asse x .

Nell'ambito dell'approssimazione parassiale, si ha

$$\sin(\alpha_1 + \varphi) \approx \alpha_1 + \varphi, \quad \sin(\alpha_2 + \varphi) \approx \alpha_2 + \varphi,$$

$$\varphi \approx \frac{y_1}{R} = \frac{y_2}{R}$$

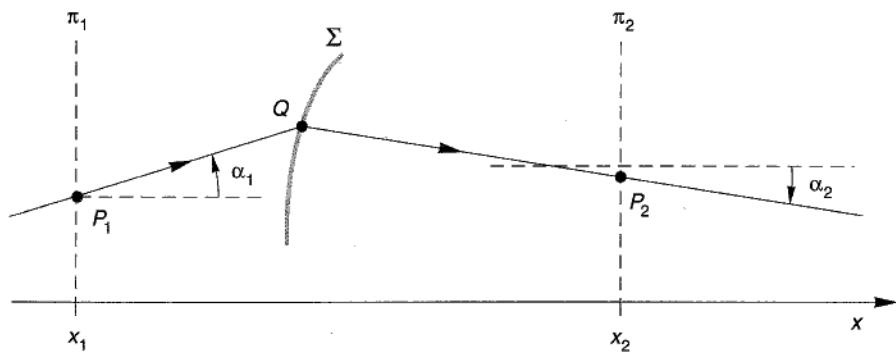


Figura 12.23

e quindi

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ n_2 \alpha_2 = n_1 \alpha_1 - \frac{n_2 - n_1}{R} y_1. \end{cases} \quad [12.5.3]$$

Ponendo

$$\hat{\alpha}_1 = n_1 \alpha_1, \quad \hat{\alpha}_2 = n_2 \alpha_2,$$

le [12.5.1], [12.5.3] possono essere riscritte nella forma

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + \frac{x_2 - x_1}{n} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1 \end{cases} \quad [12.5.4]$$

e

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1 - \frac{n_2 - n_1}{R} y_1 \end{cases} \quad [12.5.5]$$

avendo indicato nelle [12.5.4] con n l'indice di rifrazione del mezzo (unico) in cui è considerato il tratto rettilineo $P_1 P_2$ del raggio r .

Le [12.5.4], [12.5.5] possono essere ancora riscritte *in forma matriciale*, come segue:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta(x_1, x_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix} \quad [12.5.6]$$

e

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P(n_1, n_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix} \quad [12.5.7]$$

avendo posto

$$\begin{cases} \delta(x_1, x_2) = \frac{x_2 - x_1}{n} \\ P(n_1, n_2) = -\frac{n_2 - n_1}{R}. \end{cases} \quad [12.5.8] \quad [12.5.9]$$

In conclusione, se conveniamo di caratterizzare un raggio luminoso mediante un vettore (colonna) di *coordinate generalizzate* (y, α), è possibile esprimere il vettore corrispondente a un punto P_2 in funzione di quello corrispondente a un punto P_1 , moltiplicando a sinistra (righe per colonne) quest'ultimo vettore per una opportuna

matrice quadrata, la quale è rispettivamente del tipo

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & \delta(x_1, x_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se si passa da P_1 a P_2 per traslazione lungo il raggio r , oppure

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P(n_1, n_2) & 1 \end{bmatrix}$$

se si passa da P_1 a P_2 per rifrazione dal mezzo di indice n_1 al mezzo di indice n_2 .

\mathcal{T} è detta, ovviamente, *matrice di traslazione*, \mathcal{R} è detta *matrice di rifrazione*. Osserviamo che i determinanti di \mathcal{T} e \mathcal{R} sono entrambi pari all'unità; le due matrici sono quindi unitarie.

E' facile, a questo punto, comprendere che è possibile "passare" da un generico punto P_1 di un raggio luminoso a un altro suo punto P_2 applicando successivamente operazioni di traslazione e rifrazione al vettore delle coordinate generalizzate di P_1 . Così, con riferimento, ad esempio, alla figura 12.23, si ha

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \mathcal{T}_2 \mathcal{R} \mathcal{T}_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \quad [12.5.10]$$

avendo indicato con \mathcal{T}_1 la matrice di traslazione dal punto P_1 al punto Q , con \mathcal{R} la matrice di rifrazione nel punto Q e con \mathcal{T}_2 la matrice di traslazione da Q a P_2 .

Si noti che l'ordine in cui sono scritte le tre matrici nella [12.5.10] è inverso rispetto a quello con cui le operazioni geometriche corrispondenti (traslazioni e rifrazioni) si susseguono lungo il cammino del raggio luminoso (da P_1 verso P_2).⁹

E' inoltre immediato verificare che la matrice

$$\mathcal{S} = \mathcal{T}_2 \mathcal{R} \mathcal{T}_1 \quad [12.5.11]$$

è una matrice quadrata di ordine due, anch'essa unitaria (poiché il determinante del prodotto di matrici è uguale al prodotto dei determinanti delle singole matrici). Osserviamo, inoltre, che la matrice \mathcal{S} definita dalla [12.5.11] si riferisce ai piani π_1 e π_2 :

essa, pertanto, consente di valutare il vettore $\begin{bmatrix} y_2 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix}$ associato al raggio, nel punto in cui questo interseca il piano π_2 (di ascissa x_2), in funzione del vettore $\begin{bmatrix} y_1 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix}$ associato allo stesso raggio nel punto in cui interseca il piano π_1 (di ascissa x_1). Al variare di $\begin{bmatrix} y_1 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix}$, e cioè del punto P_1 nel piano (fisso) π_1 e dell'inclinazione α_1 , si ottengono $\begin{bmatrix} y_2 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix}$ diversi, e cioè punti P_2 (nel piano π_2) e inclinazioni α_2 diversi.

⁹ Si ricorda che il prodotto tra due matrici non gode, in generale, della proprietà commutativa ($AB \neq BA$): pertanto, è importante specificare l'ordine con cui le matrici vanno moltiplicate.

La generalizzazione al caso di un qualunque sistema ottico è immediata: numerando, infatti, i punti cuspidali P_k del raggio come indicato nella figura 12.24, e cioè "sdoppiando" ciascuno di essi in due punti infinitamente prossimi, appartenenti alle due pagine della superficie, si ottiene l'espressione

$$\begin{bmatrix} y \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}_{2N+1} = \mathcal{T}_{N+1} \mathcal{R}_N \mathcal{T}_N \mathcal{R}_{N-1} \cdots \mathcal{T}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{T}_1 \begin{bmatrix} y \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}_0, \quad [12.5.12]$$

avendo indicato con il pedice "0" il vettore relativo a P_0 , con il pedice "2_N+1" il vettore relativo a P_{2N+1} , con \mathcal{T}_k la matrice di traslazione dal punto P_{2k} al punto P_{2k+1} e con \mathcal{R}_k la matrice di rifrazione associata alla superficie Σ_k . La matrice

$$\mathcal{S} = \mathcal{T}_{N+1} \mathcal{R}_N \mathcal{T}_N \cdots \mathcal{T}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{T}_1$$

prende il nome di *matrice globale del sistema ottico* tra i piani π_0 (di ascissa x_0) e π_{2N+1} (di ascissa x_{2N+1}).

Essa può essere riscritta nella forma:

$$\mathcal{S} = \mathcal{T}_{N+1} \mathcal{S}_0 \mathcal{T}_1, \quad [12.5.13]$$

avendo posto

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{R}_N \mathcal{T}_N \mathcal{R}_{N-1} \cdots \mathcal{T}_2 \mathcal{R}_1. \quad [12.5.14]$$

La matrice \mathcal{S}_0 così definita consente di passare dalla pagina sinistra della superficie Σ_1 alla pagina destra di Σ_N : è, cioè, la matrice "ingresso-uscita" del sistema ottico vero e proprio (senza tener conto delle traslazioni da P_0 a Σ_1 e da Σ_N a P_{2N+1}). Si verifica facilmente che \mathcal{S}_0 è ancora del secondo ordine e unitaria, e cioè del tipo:

$$\mathcal{S}_0 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad [12.5.15]$$

con $AD - BC = 1$; i valori di A, B, C, D sono caratteristici del sistema ottico cui \mathcal{S}_0 si riferisce e non dipendono dai punti P_0 e P_{2N+1} di volta in volta considerati.

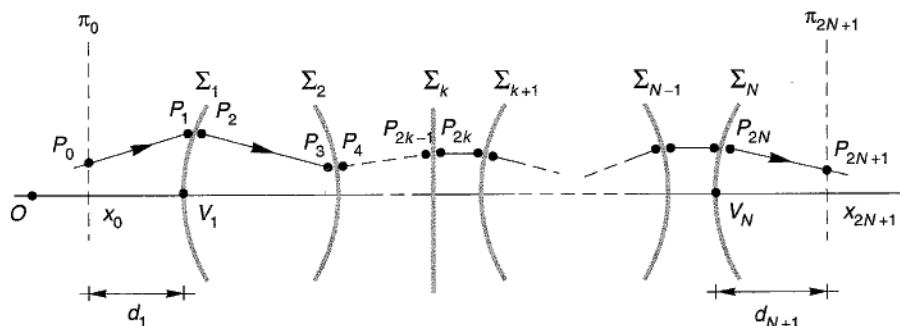


Figura 12.24

Resta ora da dire come si possa tener conto anche delle superfici riflettenti eventualmente presenti nel sistema ottico. Supporremo, per convenzione, che in corrispondenza di ogni riflessione (fig. 12.25) valga quanto segue:

- l'asse delle ascisse viene orientato in verso opposto a quello che ha nei raggi incidenti (nella fig. 12.25, x è l'asse per i raggi incidenti, x' quello per i raggi riflessi);
- dati due raggi riflessi orientati a' , b' (considerati in questo ordine) consideriamo come angolo positivo tra essi quello descritto da a' quando vada a sovrapporsi a b' ruotando in senso inverso rispetto a quello scelto per i raggi incidenti (in fig. 12.25, il verso assunto per i raggi incidenti è quello antiorario, mentre per i raggi riflessi è orario).

Per una superficie riflettente sferica Σ , si ha dunque

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ \alpha' = \alpha + 2\varphi \approx \alpha + \frac{2y}{R} \end{cases}$$

e quindi (ponendo $\hat{\alpha} = n\alpha$):

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ \hat{\alpha}' = \hat{\alpha} + \frac{2n}{R} y_1 \end{cases}$$

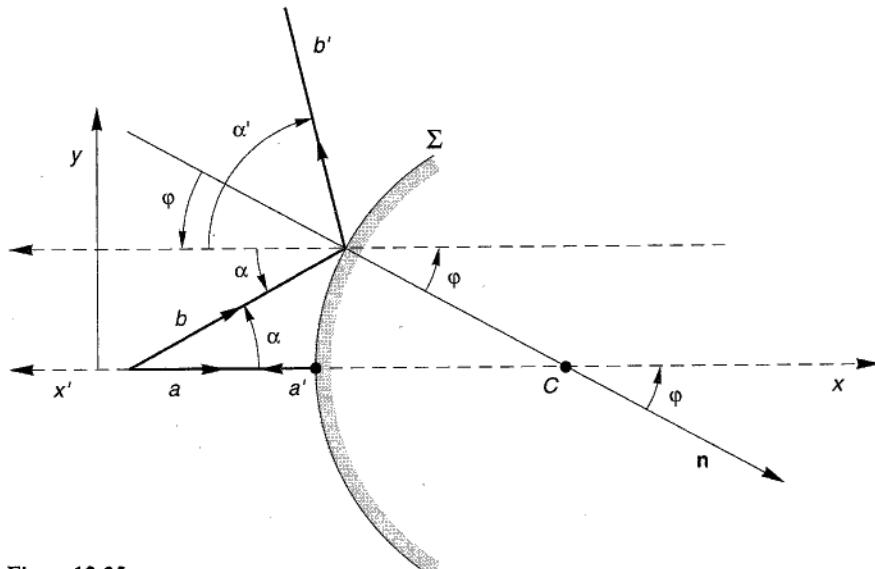


Figura 12.25

e ancora

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix}. \quad [12.5.16]$$

Si definisce così una *matrice di riflessione*, \mathcal{F} , analoga a quella di rifrazione, la quale consente (tenendo conto delle convenzioni aggiunte) di tener conto anche della presenza di superfici riflettenti.

12.6 Formazione delle immagini nei sistemi ottici centrati

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che ogni sistema ottico è caratterizzato da una matrice quadrata unitaria del secondo ordine, \mathcal{S}_0 (definita dalla [12.15.14]), i cui elementi A, B, C, D variano da sistema a sistema. Ammettendo di conoscere la matrice \mathcal{S}_0 di un dato sistema, ci proponiamo di studiare il suo funzionamento, ricavandone le principali proprietà e mostrando come si possa determinare l'immagine di qualunque oggetto da esso prodotta.

Cominciamo col dimostrare il seguente *teorema*:

Nell'ambito dell'approssimazione parassiale, ogni sistema ottico centrato è generalmente stigmatico.

A tal fine, consideriamo un punto-oggetto P_0 , posto a distanza d_1 da Σ_1 , e calcoliamo, in corrispondenza di un piano π a distanza d_{N+1} da Σ_N (fig. 12.26), il vettore delle coordinate generalizzate di un raggio r uscente da P_0 .¹⁰

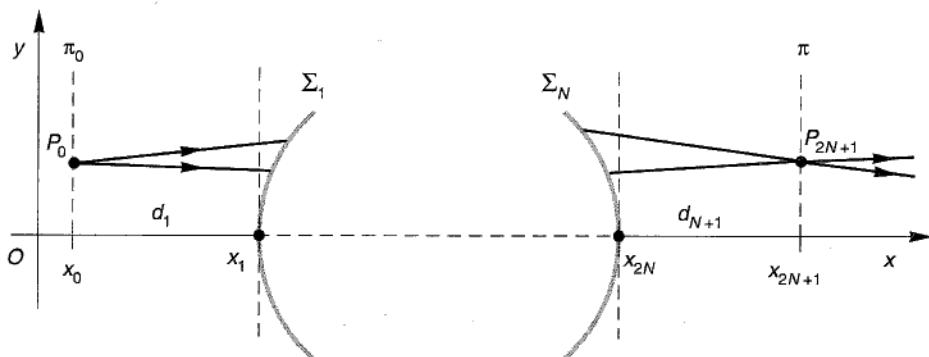


Figura 12.26

¹⁰ Qui e nel seguito, indicheremo con d_1 e d_{N+1} le distanze $d_1 = x_1 - x_0$, $d_{N+1} = x_{2N+1} - x_{2N}$, considerate con il loro segno.

Introducendo le matrici di traslazione \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_{N+1} :

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \delta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_{N+1} = \begin{bmatrix} 1 & \delta_{N+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ove si è posto $\delta_1 = d_1/n_1$, $\delta_{N+1} = d_{N+1}/n_{N+1}$ (n_1 e n_{N+1} sono gli indici di rifrazione dei mezzi posti, rispettivamente, a sinistra di Σ_1 e a destra di Σ_N), si ha

$$\begin{bmatrix} y \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}_{2N+1} = \mathcal{T}_{N+1} \mathcal{S}_0 \mathcal{T}_1 \begin{bmatrix} y \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}_0,$$

e quindi (facendo uso della [12.5.15]):

$$\begin{bmatrix} y \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}_{2N+1} = \begin{bmatrix} A + C\delta_{N+1} & A\delta_1 + B + \delta_{N+1}(C\delta_1 + D) \\ C & C\delta_1 + D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}_0. \quad [12.6.1]$$

Scegliendo il piano π (e quindi la distanza d_{N+1}) in modo che sia

$$A\delta_1 + B + \delta_{N+1}(C\delta_1 + D) = 0, \quad [12.6.2]$$

otteniamo

$$y_{2N+1} = (A + C\delta_{N+1})y_0. \quad [12.6.3]$$

Ciò significa che l'ordinata y_{2N+1} del punto P_{2N+1} è, in questo caso, indipendente dall'inclinazione α_0 dei raggi che escono da P_0 (fig. 12.26): ne consegue che tutti i raggi che escono da P_0 , dopo aver attraversato il sistema, passano anche per P_{2N+1} , e pertanto P_{2N+1} è immagine reale di P_0 . La distanza d_{N+1} del punto-immagine P_{2N+1} dalla superficie Σ_N è ottenibile dalla [12.6.2]:

$$d_{N+1} = n_{N+1}\delta_{N+1} = -n_{N+1} \frac{A\delta_1 + B}{C\delta_1 + D}. \quad [12.6.4]$$

Il segno di d_{N+1} può essere positivo o negativo, a seconda dei segni di A, B, C, D ; ricordiamo che

$$d_{N+1} = x_{2N+1} - x_{2N}$$

e che, pertanto, d_{N+1} è positivo se il punto P_{2N+1} si trova alla destra di Σ_N (negativo in caso contrario).

I ragionamenti fatti valgono, evidentemente, per ogni punto-oggetto P_0 , e pertanto il sistema è generalmente stigmatico. La [12.6.4] consente di calcolare la distanza d_{N+1} del punto-immagine P_{2N+1} dalla superficie Σ_N e la [12.6.3] ne fornisce l'ordinata y_{2N+1} . Nota dunque la matrice \mathcal{S}_0 del sistema, sappiamo determinare l'immagine di ogni punto-oggetto.

Osserviamo inoltre, dalla [12.6.4], che tutti i punti del piano π_0 posto a distanza d_1 da Σ_1 hanno immagini nel piano π , posto a distanza d_{N+1} da Σ_N : ne deriva, dalla

[12.6.3], che figure piane giacenti su π_0 hanno per immagini figure simili giacenti su π e che, quindi, il sistema è ortoscopico per i piani π_0, π , con ingrandimento trasversale

$$G_y = A + C\delta_{N+1} = A - C \frac{A\delta_1 + B}{C\delta_1 + D}. \quad [12.6.5]$$

Lo stesso dicasi, ovviamente, per ogni coppia di piani coniugati π_0, π .

Infine, per ciò che riguarda gli angoli, dalla [12.6.1] si ha

$$\hat{\alpha}_{2N+1} = Cy_0 + (C\delta_1 + D)\hat{\alpha}_0,$$

e quindi

$$\alpha_{2N+1} = \frac{C}{n_{N+1}}y_0 + \frac{n_1}{n_{N+1}}(C\delta_1 + D)\alpha_0. \quad [12.6.6]$$

Essendo il termine $\frac{C}{n_{N+1}}y_0$ costante per tutti i raggi uscenti da uno stesso punto P_0 , l'ingrandimento angolare

$$G_\alpha = \frac{n_1}{n_{N+1}}(C\delta_1 + D) \quad [12.6.7]$$

è indipendente dall'angolo; pertanto, il sistema è anche ortorifrangente per ogni coppia di punti coniugati (ma l'ingrandimento angolare è funzione della posizione del punto-oggetto).

Abbiamo con ciò dimostrato che, nei limiti dell'approssimazione parassiale, tutti i sistemi ottici centrati godono delle stesse proprietà di stigmatismo, ortoscopia e ortorifrangenza che valgono per i sistemi ottici semplici e abbiamo, inoltre, mostrato come si determinano le immagini prodotte da un dato sistema ottico e come si calcolano gli ingrandimenti, a partire dalla conoscenza della matrice \mathcal{S}_0 del sistema.

In pratica, per individuare le caratteristiche di un sistema ottico non si assegnano, di solito, gli elementi della matrice \mathcal{S}_0 , bensì di parametri equivalenti, e cioè le posizioni (lungo l'asse ottico) dei cosiddetti *piani cardinali* del sistema. Vediamo cosa sono.

1. Primo e secondo piano focale

Ritorniamo alla [12.6.1] e scegliamo il punto P_0 in maniera che risulti

$$C\delta_1 + D = 0,$$

e cioè per $C \neq 0$ (il caso $C=0$ sarà trattato di qui a poco)

$$\delta_1 = -\frac{D}{C}$$

e quindi

$$d_1 = -n_1 \frac{D}{C}. \quad [12.6.8]$$

Ricordando che è $d_1 = x_1 - x_0$, risulta $d_1 > 0$ quando P_0 è a sinistra di Σ_1 . Si ha allora

(sempre dalle [12.6.1])

$$\hat{\alpha}_{2N+1} = Cy_0$$

e quindi

$$\alpha_{2N+1} = \frac{1}{n_{N+1}} Cy_0. \quad [12.6.9]$$

L'inclinazione dei raggi emergenti dal sistema è dunque, con questa scelta di P_0 , indipendente dall'inclinazione dei raggi emessi (fig. 12.27); se, in particolare, P_0 appartiene all'asse ottico (e quindi $y_0 = 0$) i raggi emergono paralleli all'asse stesso. Il P_0 è detto allora *primo fuoco* del sistema ed è solitamente indicato con F_1 . La [12.6.8] fornisce la distanza di F_1 da Σ_1 (positiva, se F_1 è a sinistra di Σ_1). Il piano per F_1 ortogonale all'asse è detto *primo piano focale*. Analogamente, se nella [12.6.1] si impone che sia

$$A + C\delta_{N+1} = 0$$

e cioè (per $C \neq 0$)

$$d_{N+1} = -n_{N+1} \frac{A}{C}, \quad [12.6.10]$$

si ottiene il *secondo fuoco* del sistema: i raggi che incidono parallelamente all'asse ottico sulla superficie Σ_1 emergono concentrandosi nel punto F_2 , posto a distanza d_{N+1} dalla superficie Σ_N . Il piano ortogonale all'asse per F_2 è il *secondo piano focale* del sistema (fig. 12.28).

2. Primo e secondo piano principale

Consideriamo ancora un fascio di raggi paralleli all'asse ottico ($\alpha_0 = 0$) che incidono su Σ_1 (fig. 12.29); dalle [12.6.3] si ha

$$y_{2N+1} = (A + C\delta_{N+1})y_0.$$

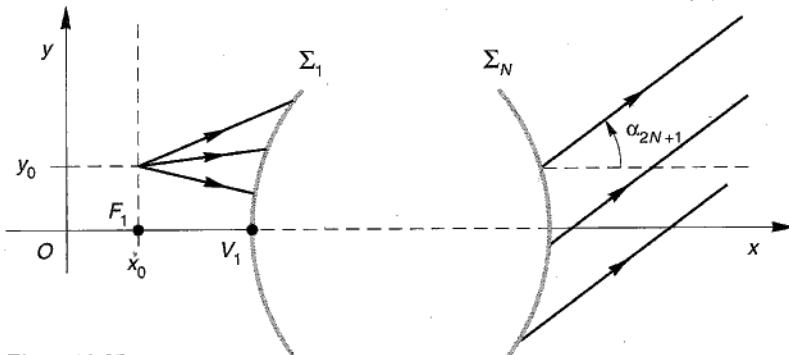


Figura 12.27

Scegliamo, ora, il punto P_{2N+1} in maniera che risulti

$$A + C\delta_{N+1} = 1,$$

e cioè a distanza

$$d_{N+1} = n_{N+1} \frac{1-A}{C} \quad [12.6.11]$$

dalla superficie Σ_N . In queste condizioni, l'ordinata del punto P_{2N+1} è uguale a y_0 e cioè a quella di P_0 : si ha cioè ingrandimento trasversale 1 passando dal piano π_0 (che può essere collocato ovunque) al piano π_2 . Il piano π_2 è detto *secondo piano principale* del sistema ottico.

Analogamente, considerando un fascio di raggi paralleli all'asse che incidano su Σ_N (provenendo da destra), come nella figura 12.30, si determina un piano π_1 in corrispondenza del quale l'ingrandimento trasversale è unitario: il *primo piano principale*. La sua distanza dalla superficie Σ_1 è

$$d_1 = \frac{n_1(1-D)}{C}. \quad [12.6.12]$$

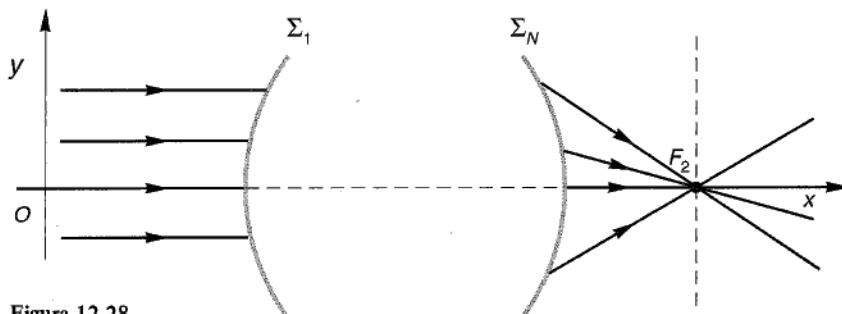


Figura 12.28

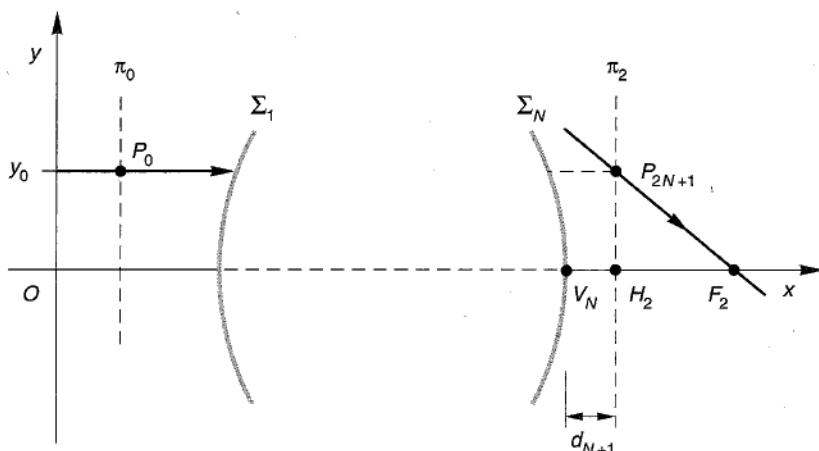


Figura 12.29

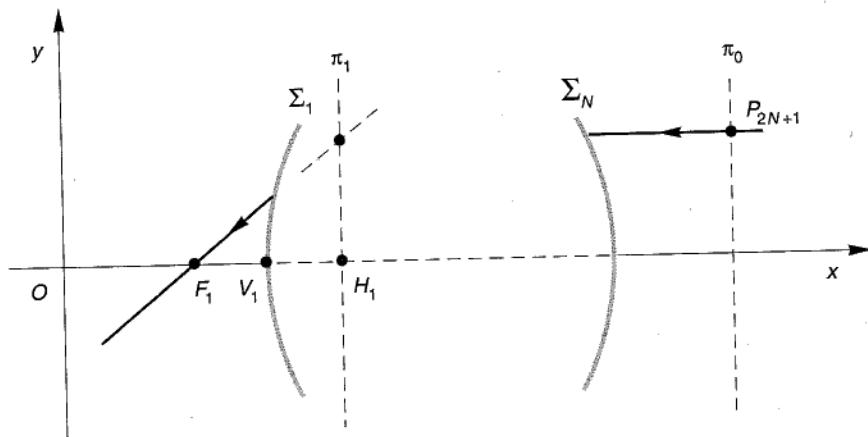


Figura 12.30

Si osservi che, nei due casi ora esaminati, i raggi emergenti dal sistema passano per i fuochi F_2, F_1 : ciò consente (come si vedrà) una semplicissima costruzione grafica delle immagini.

Si osservi, inoltre, che quando – come in questo caso – si considerano i raggi che provengono da destra (invece che da sinistra), occorre considerare il vettore di pedice “0” come incognito e quello di pedice “ $2N+1$ ” come noto; corrispondentemente, la matrice del sistema è l'inversa della matrice \mathcal{S} .

3. Primo e secondo piano nodale

Sceglieremo ora il punto P_0 in maniera che l'ingrandimento angolare G_α dato dalla [12.6.7] risulti pari all'unità:

$$\frac{n_1}{n_{N+1}}(C\delta_1 + D) = 1;$$

di qui

$$d_1 = n_1 \delta_1 = \frac{n_{N+1} - n_1 D}{C}. \quad [12.6.13]$$

Pertanto, ad ogni raggio r incidente su Σ_1 , il cui prolungamento intersechi l'asse ottico in un punto X_1 (fig. 12.31) che dista d_1 da Σ_1 , corrisponde un raggio r' ad esso parallelo, emergente da Σ_N ; questo raggio interseca l'asse ottico nel punto X_2 che dista

$$d_{N+1} = \frac{n_1 - A n_{N+1}}{C} \quad [12.6.14]$$

dalla superficie Σ_N . (Provvi il lettore a verificarlo.)

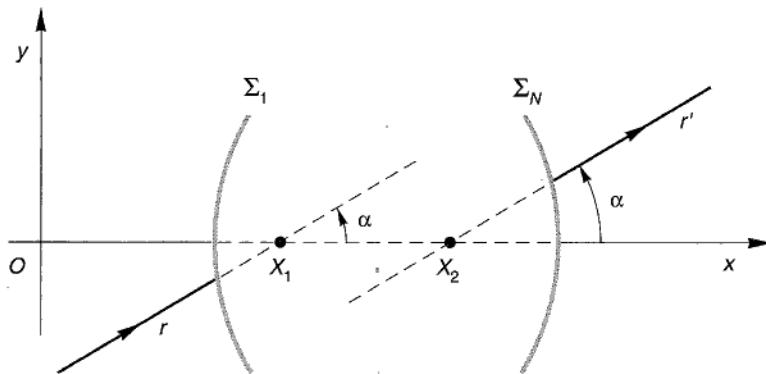


Figura 12.31

Sussiste anche la proprietà inversa: ad ogni raggio incidente su Σ_N , diretto verso X_2 , corrisponde un raggio emergente da Σ_1 , il cui prolungamento passa per X_1 .

I due piani ortogonali all'asse per i punti X_1 e X_2 sono, rispettivamente, *primo e secondo piano nodale*.

Ricapitolando, abbiamo visto che per ogni sistema ottico vi sono sei piani (due focali, due principali e due nodali) caratteristici, dotati di notevoli proprietà: essi sono detti *piani cardinali* del sistema.

Conoscendo gli elementi della matrice \mathcal{S}_0 , e gli indici di rifrazione n_1 e n_{N+1} dei mezzi (in generale, diversi) a sinistra di Σ_1 e a destra di Σ_N , è possibile calcolare le ascisse di questi sei piani. Inversamente, note le posizioni dei piani, è possibile ricavare gli elementi di \mathcal{S}_0 e i due indici di rifrazione.¹¹

Notiamo infine che le precedenti relazioni si semplificano quando

$$n_1 = n_{N+1} = 1,$$

quando cioè il sistema ottico è immerso nell'aria. In tal caso, le distanze dei fuochi F_1 e F_2 da Σ_1 e Σ_N (ecc. [12.6.8] e [12.6.10]) diventano

$$\begin{cases} d_1 = -\frac{D}{C} \\ d_{N+1} = -\frac{A}{C}; \end{cases} \quad [12.6.15]$$

analogamente, le distanze da Σ_1 e Σ_N del primo e del secondo piano principale (equazioni [12.6.11] e [12.6.12]) diventano

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1-D}{C} \\ d_{N+1} = \frac{1-A}{C}; \end{cases} \quad [12.6.16]$$

¹¹ Si noti che i parametri indipendenti sono in realtà cinque, e non sei, poiché tra gli elementi di \mathcal{S}_0 vale la relazione $AB - BC = 1$. Ciò implica che anche le sei ascisse dei piani cardinali non possono essere assegnate indipendentemente.

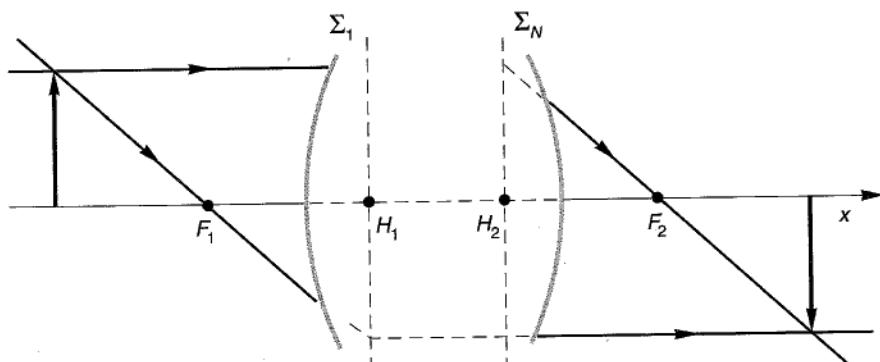


Figura 12.32

e le distanze (da Σ_1 e Σ_N) dei piani nodali (equazioni [12.6.13] e [12.6.14]):

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1-D}{C} \\ d_{N+1} = \frac{1-A}{C}. \end{cases} \quad [12.6.17]$$

In questo caso, dunque, i piani principali coincidono con quelli nodali; inoltre, le distanze dei due fuochi F_1 e F_2 dai piani principali risultano uguali fra loro e pari a

$$f = -\frac{1}{C} \quad [12.6.18]$$

che prende, appunto, il nome di *distanza focale*.

Una volta noti i punti cardinali, la costruzione grafica delle immagini è molto semplice: nella figura 12.32, ad esempio, è riportata una costruzione che utilizza i fuochi F_1 , F_2 e i punti principali H_1 , H_2 . (Si noti che i punti principali H_1 , H_2 possono essere esterni al sistema ottico.)

Consideriamo ora il cassone che era stato escluso nella determinazione dei punti principali del sistema, e cioè quello in cui sia abbia

$$C = 0. \quad [12.6.19]$$

Dalla [12.6.1] ricaviamo

$$\hat{\alpha}_{2N+1} = D\hat{\alpha}_0$$

e, quindi:

$$\alpha_{2N+1} = \frac{n_1}{n_{N+1}} D\alpha_0. \quad [12.6.20]$$

Ciò significa che tutti i raggi che entrano nel sistema con una data inclinazione α_0 (e cioè paralleli fra loro) ne emergono con un'inclinazione α_{2N+1} , e cioè anch'essi paralleli (fig. 12.33). Questi sistemi, che non possiedono punti focali al finito, sono detti

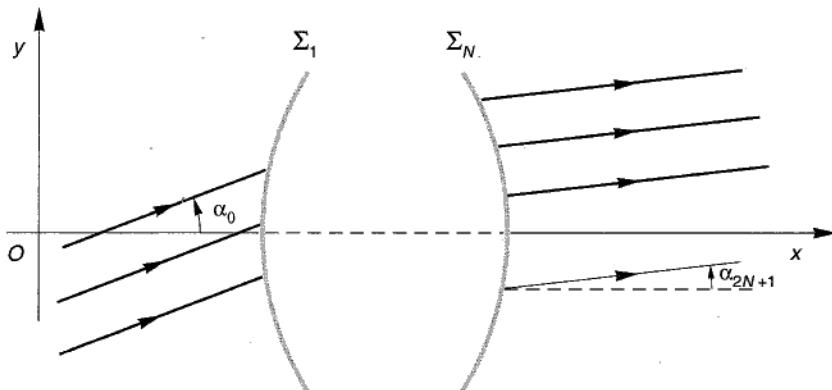


Figura 12.33

afocali, o *telescopici*. In questi casi, l'ingrandimento angolare G_α è pari a

$$G_\alpha = \frac{n_1}{n_{N+1}} D. \quad [12.6.21]$$

12.7 Lenti e sistemi di lenti

Una *lente* può essere definita come un sistema ottico centrato costituito da due sole superfici rifrangenti Σ_1, Σ_2 , ciascuna delle quali può essere convessa, piana o concava. Esistono quindi (fig. 12.34) diversi tipi di lenti: biconvessa, biconcava, piano-convessa, convesso-concava ecc.

Gli elementi della matrice \mathcal{S}_0 di una lente possono essere calcolati facilmente dalla relazione

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{R}_2 \mathcal{T} \mathcal{R}_1. \quad [12.7.1]$$

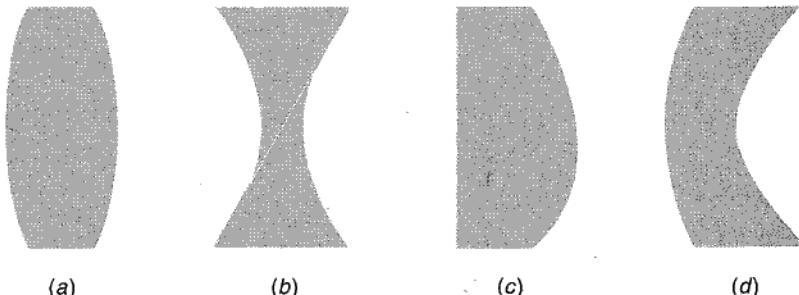


Figura 12.34

Alcuni tipi di lenti: (a) biconvessa; (b) biconcava; (c) piano-convessa; (d) convesso-concava.

Limitandoci al caso in cui la lente sia immersa in aria si ha

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [12.7.2]$$

con

$$P_1 = -\frac{n-1}{R_1}, \quad P_2 = -\frac{1-n}{R_2}, \quad \delta = \frac{\Delta}{n}, \quad [12.7.3]$$

dove n è l'indice di rifrazione del materiale di cui è fatta la lente, R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura rispettivamente di Σ_1 e Σ_2 , Δ è lo spessore della lente. Risulta quindi

$$\mathcal{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 + \delta P_1 & \delta \\ P_1 + (1 + \delta P_1) P_2 & 1 + \delta P_2 \end{bmatrix}. \quad [12.7.4]$$

Di qui, applicando le [12.6.15] ÷ [12.6.17], è immediato calcolare le posizioni dei piani cardinali.

Se lo spessore Δ della lente è molto piccolo rispetto ai raggi di curvatura R_1, R_2 (è il caso, di particolare interesse, delle *lenti sottili*) risulta

$$\begin{cases} |\delta P_1| = \frac{\Delta}{R_1} \frac{n-1}{n} \ll 1, \\ |\delta P_2| = \frac{\Delta}{R_2} \frac{n-1}{n} \ll 1 \end{cases} \quad [12.7.5]$$

e quindi

$$\mathcal{S}_0 \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_1 + P_2 & 1 \end{bmatrix}. \quad [12.7.6]$$

Pertanto, le rispettive distanze dei fuochi F_1, F_2 dalle superfici Σ_1, Σ_2 (i cui vertici sono supposti qui praticamente coincidenti) sono entrambe uguali a

$$d = -\frac{1}{P_1 + P_2} = -\frac{1}{\frac{1-n}{R_1} - \frac{1-n}{R_2}}. \quad [12.7.7]$$

Analogamente, le distanze dei punti principali H_1, H_2 da Σ_1, Σ_2 sono uguali tra loro e pari a

$$d = 0 \quad [12.7.8]$$

e, pertanto, i punti in questione coincidono con il vertice (unico) della lente; ne segue che le distanze focali $H_1 F_1$ e $H_2 F_2$ sono date dalle [12.7.7].

Infine, anche i punti nodali coincidono con quelli principali, e quindi con il vertice della lente. Pertanto, la matrice \mathcal{S}_0 di una lente sottile può essere posta nella sem-

plice forma

$$\mathcal{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}, \quad [12.7.9]$$

essendo f la distanza focale della lente.

L'analisi del funzionamento di un *sistema composto da più lenti sottili* è, a questo punto, molto semplice. A titolo di esempio, consideriamo il sistema della figura 12.35: esso è costituito da una lente biconvessa L_1 , di distanza focale $f_1 = 5$ cm, e da una lente biconcava L_2 , di distanza focale $f_2 = -10$ cm, poste a distanza $\delta = 7$ cm l'una dall'altra. Si vuole determinare la posizione e l'altezza dell'immagine di un oggetto PQ alto 2 cm e posto a una distanza $d = 16$ cm da L_1 . (Svolgiamo numericamente i calcoli, per chiarezza.)

Calcoliamo innanzitutto la matrice \mathcal{S}_0 (vedi equazione [12.6.2]) del sistema composto:

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_{02} \mathcal{T}_2 \mathcal{S}_{01},$$

dove: \mathcal{S}_{01} è la matrice-sistema della lente L_1 , \mathcal{T}_2 è la matrice di traslazione da L_1 a L_2 , \mathcal{S}_{02} è la matrice-sistema della lente L_2 .

Si ha subito dalla [12.7.9]:

$$\mathcal{S}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_{02} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +0,1 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi (effettuando i prodotti)

$$\mathcal{S}_0 = \begin{bmatrix} -0,4 & 7 \\ -0,24 & 1,7 \end{bmatrix}.$$

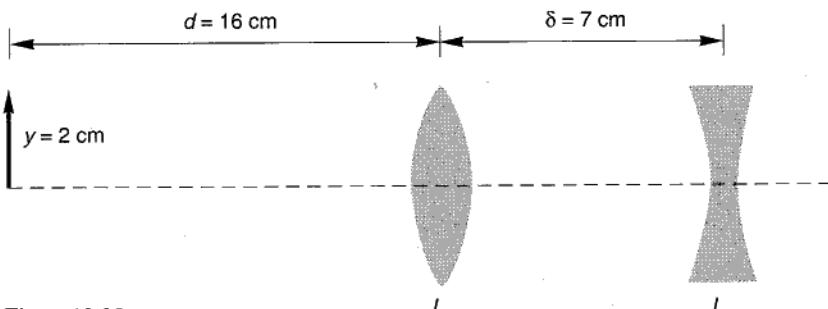


Figura 12.35

Ricordando ora la [12.6.4], e che $n_1 = n_{N+1} = 1$, si ricava subito la distanza d' tra l'immagine e la lente L_2 :

$$d' = -\frac{Ad_1 + B}{Cd_1 + D} = 0,26 \text{ cm.}$$

Essendo $d' > 0$, l'immagine si forma a destra (in fig. 12.35) della lente L_2 . Dalla [12.6.5], si calcola poi l'ingrandimento G_y , che è

$$G_y \approx -0,46$$

il che fornisce un'immagine non capovolta e di altezza (dalla [12.6.3])

$$|P'Q'| \approx 0,92 \text{ cm.}$$

12.8 Coerenza delle radiazioni luminose: premesse statistiche

Nel capitolo 10, studiando i fenomeni di interferenza, ci eravamo basati sull'ipotesi fondamentale che le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ circolanti nei due dipoli avessero esattamente la stessa frequenza e che, pertanto, lo sfasamento tra le due fosse costante nel tempo: in questi casi, diciamo che le correnti (e le onde elettromagnetiche da esse prodotte) sono *totalmente coerenti*. Ben più complicato si presenta lo studio dell'interferenza tra radiazioni luminose. La luce emessa da una sorgente si origina dagli atomi della sorgente stessa, i quali emettono brevi *treni d'onde* di data frequenza ogni volta che si verifica una transizione tra due livelli energetici corrispondenti a quella frequenza.¹² Ciascuna di queste transizioni (e quindi anche ciascun treno d'onde) ha tipicamente una durata di $10^{-12} \div 10^{-9}$ s, mentre la frequenza delle oscillazioni contenute nel treno è dell'ordine di 10^{15} Hz; ne deriva che ciascun treno contiene tipicamente $10^3 \div 10^6$ periodi. D'altra parte, le transizioni avvengono in genere in modo del tutto casuale: ne consegue che i treni d'onde emessi dai diversi atomi della sorgente si sovrappongono e si susseguono nel tempo in maniera anch'essa casuale. Ad esempio, i treni d'onde emessi da due atomi distinti (i quali, in una descrizione idealizzata dei fenomeni, possono essere assimilati a dipoli elettrici elementari), hanno fase e polarizzazione del tutto casuali e variabili da treno a treno, pur volendo ammettere che i singoli treni abbiano la stessa frequenza. Pertanto, le frange di interferenza prodotte dai due atomi si spostano (sullo schermo) continuamente, su una scala di tempi dell'ordine di $10^{-9} \div 10^{-8}$ s. Se si pensa che l'occhio umano non riesce a distinguere variazioni di luminosità che si verifichino in tempi inferiori a 10^{-1} s, si comprende che non v'è alcuna possibilità di distinguere ad occhio nudo le frange prodotte dai due atomi (pur ammettendo di amplificare adeguatamente i segnali emessi). Né è sperabile ottenere

¹² Ciò accade, ad esempio, quando un elettrone salta da un'orbita a un'altra: in tal caso, la differenza tra le energie \mathcal{E} corrispondenti alle due orbite è $\Delta \mathcal{E} = h\nu$, dove h è la costante di Planck e ν è la frequenza della radiazione emessa.

risultati significativi con altri tipi di rivelatori ottici (diversi dall'occhio), poiché nemmeno i più rapidi tra questi riescono ad avere tempi di risposta così brevi da consentire di distinguere le frange prodotte. (Diversamente stanno le cose quando le sorgenti luminose siano dei *laser*, poiché questi, facendo uso di processi di "emissione stimolata" da parte degli atomi, determinano una correlazione fra i segnali emessi da atomi distinti; ma di ciò non possiamo occuparci in questa sede.) Cerchiamo qui, invece, di precisare un po' meglio il concetto di *correlazione* fra due emissioni distinte e quello, ad esso collegato, di *coerenza parziale* fra radiazioni elettromagnetiche.

Un atomo emettitore può essere assimilato (come già detto) a un dipolo elettrico elementare, ammettendo, però, che la corrente in esso circolante *non* sia sinusoidale, bensì sia del tipo riportato nella figura 12.36; sia, cioè, costituita da una successione di treni d'onde sinusoidali di durata, frequenza, ampiezza e fase variabili *a caso*, da treno a treno.

Se fosse possibile rivelare l'onda elettromagnetica che raggiunge un generico punto P (misurando ad esempio, istante per istante, il campo elettrico $E(t)$ agente in P), si osserverebbe un segnale di andamento simile (nella scala opportuna) a quello della $i(t)$, ma ritardato di $\Delta t = l/c$, essendo l la distanza fra l'atomo emettitore e il punto P . Consideriamo ora l'insieme degli atomi contenuti in un elemento di volume fisicamente infinitesimo (vedi § 2.2.1) della sorgente; sovrapponendo i campi prodotti in P da tali atomi, otteniamo un segnale $f(t)$ del tipo riportato nella figura 12.37, segnale che non è in alcun modo prevedibile a priori e che viene perciò detto *aleatorio*.

Se poi immaginiamo di sostituire la sorgente con un'altra fisicamente identica (e cioè costruita allo stesso modo) e di rilevare il campo prodotto in P dall'elemento di volume che prende il posto di quello precedente, otterremo ancora un segnale aleatorio, diverso, però, da quello della figura 12.37. Se ripetiamo l'esperienza ideale con tante altre sorgenti, otterremo ogni volta un segnale aleatorio diverso da tutti quelli precedenti. L'insieme di tutti questi segnali aleatori, prodotti da un grandissimo numero (N) di sorgenti fisicamente identiche, costituisce un *processo aleatorio*,

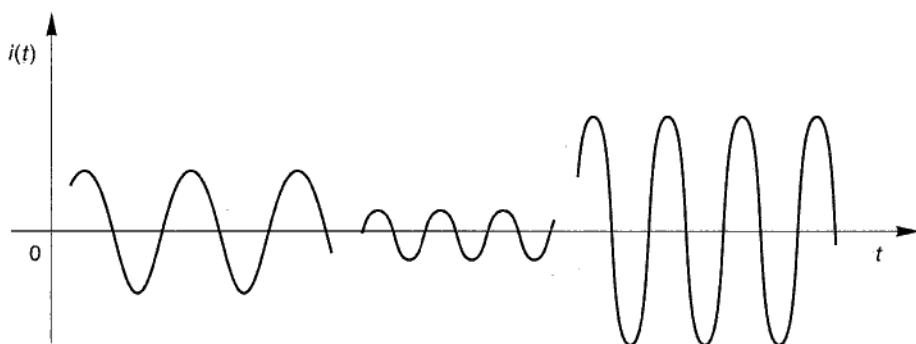


Figura 12.36

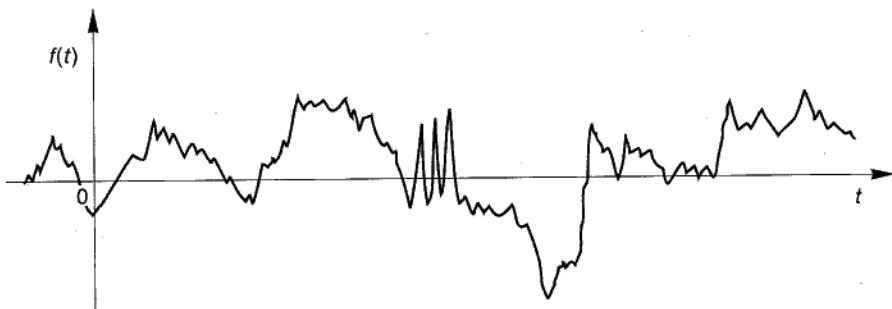


Figura 12.37

che indicheremo con il simbolo

$$\{f_i(t)\}, \quad i=1, \dots, N$$

essendo $f_i(t)$ il segnale associato all' i -esima sorgente.

Naturalmente, per descrivere un tale processo non è pensabile di specificare in ogni istante i valori di ogni singola $f_i(t)$, sia perché non è possibile rilevare istante per istante (come si è già detto) le $f_i(t)$ sulla scala di tempi, piccolissima, in cui esse variano in maniera casuale, sia perché, quand'anche ciò fosse possibile, il singolo segnale non sarebbe comunque prevedibile e non sarebbe, quindi, di utilità alcuna per uno studio preventivo dei fenomeni connessi. Si rende perciò necessaria una descrizione *statistica* dei processi aleatori: a questo fine, ricordiamo brevemente le definizioni di alcune grandezze statistiche elementari.

Si definisce *media d'insieme* del processo aleatorio $\{f_i(t)\}$, e si indica con il simbolo

$$g(t) = \overline{f_i(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t), \quad [12.8.1]$$

la funzione il cui valore, in ogni istante, è pari alla media aritmetica dei valori assunti dalle $f_i(t)$ che compongono il processo.

In genere, però, la media *non* è sufficiente a caratterizzare, da sola, il comportamento statistico di un processo aleatorio. Conviene, quindi, introdurre anche altre grandezze: in primo luogo, il *valore quadratico medio* (oppure, la sua radice quadrata)

$$h(t) = \overline{f_i^2(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2(t), \quad [12.8.2]$$

ed inoltre la *funzione di autocorrelazione* (detta anche *momento del secondo ordine*)

$$K(t_1, t_2) = \overline{f_i(t_1) f_i(t_2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t_1) f_i(t_2), \quad [12.8.3]$$

che si ottiene considerando i valori assunti da ciascuna $f_i(t)$ in due istanti t_1 e t_2 , facendone il prodotto, ed effettuando, infine, la media di insieme sui prodotti $f_i(t_1)f_i(t_2)$.¹³

In maniera analoga si definisce la *funzione di mutua correlazione* tra due processi aleatori $\{x_i(t)\}$ e $\{y_i(t)\}$, ponendo

$$\Gamma(t_1, t_2) = \overline{x_i(t_1)y_i(t_2)}, \quad [12.8.4]$$

con significato dei simboli analogo al precedente.

Per chiarire il significato delle funzioni di correlazione introdotte, consideriamo un insieme casuale di N numeri reali ≥ 0 (ad esempio i valori delle $f_i(t)$ all'istante t_1):

$$A_1, A_2, \dots, A_N$$

e un altro insieme, anch'esso di numeri casuali (ad esempio i valori $f_i(t_2)$):

$$B_1, B_2, \dots, B_N.$$

Possiamo chiederci se i due insiemi di numeri siano in qualche modo correlati fra loro, oppure no. La massima correlazione si ha quando sia, per ogni i , $A_i = B_i$ (oppure $A_i = kB_i$, con k indipendente da i); viceversa, l'assenza completa di correlazione si ha quando a ciascun A_i può corrispondere, con uguale probabilità, un valore di B_i positivo oppure negativo.

Un modo semplice per controllare se esista una qualche correlazione fra i due insiemi è il seguente. Consideriamo l'espressione

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{N} |A_1B_1 + A_2B_2 + \dots + A_NB_N| = \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N A_iB_i \right| = |\overline{A_iB_i}|. \end{aligned} \quad [12.8.5]$$

Se $A_i = B_i$, per ogni i , allora

$$S' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i^2.$$

Se invece i prodotti A_iB_i sono, con uguale probabilità, positivi o negativi (come quando ai diversi A_i corrispondono, con uguale probabilità, B_i dei due segni), si ha, per N sufficientemente grande,

$$S' \approx 0.$$

Riesce utile definire un *fattore di correlazione* γ :

$$\gamma = \frac{S'}{S}, \quad [12.8.6]$$

¹³ Nel caso in cui $f_i(t)$ siano funzioni complesse di t , il prodotto $f_i(t_1)f_i(t_2)$ va sostituito con $f_i(t_1)f_i^*(t_2)$, essendo $f_i^*(t)$ la coniugata di $f_i(t)$.

dove

$$S = \frac{1}{N} \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_N^2} \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + \dots + B_N^2} = \sqrt{\overline{A_i^2}} \sqrt{\overline{B_i^2}}, \quad [12.8.7]$$

avendo indicato anche qui con una soprassegnatura l'operazione di media di insieme. In base alle cose dette, risulta:

- nel caso di massima correlazione, $S' = (1/N) \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_N^2}$, e quindi $\gamma = 1$;
- nel caso di assenza totale di correlazione, $S' = 0$, e quindi $\gamma = 0$;
- nei casi intermedi, $S' < S$ (come è facile verificare), e quindi $\gamma < 1$.

Interpretando gli scalari A_i e B_i come componenti, rispettivamente, di un vettore **A** e di un vettore **B** in uno spazio a N dimensioni, è possibile riscrivere le espressioni precedenti in forma più concisa:

$$S' = \frac{1}{N} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|, \quad S = \frac{1}{N} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

e quindi

$$\gamma = \frac{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|}. \quad [12.8.6']$$

Quando $\gamma = 1$, **A** e **B** sono uguali (o, comunque, allineati); quando $\gamma = 0$, sono ortogonali fra loro; quando, infine, $\gamma < 1$, ciascuno dei due vettori ha una componente non nulla nella direzione dell'altro.

Tornando ora ai processi aleatori, riesce conveniente introdurre un *coefficiente di autocorrelazione* per il processo $\{f_i(t)\}$, che tenga conto del grado di correlazione esistente, per il processo aleatorio considerato, in due istanti t_1 e t_2 :

$$k(t_1, t_2) = \frac{|\overline{f_i(t_1)f_i(t_2)}|}{\sqrt{\overline{f_i^2(t_1)}} \sqrt{\overline{f_i^2(t_2)}}} \quad [12.8.8]$$

e un *coefficiente di mutua correlazione* tra i processi $\{x_i(t)\}$ e $\{y_i(t)\}$:

$$\gamma(t_1, t_2) = \frac{|\overline{x_i(t_1)y_i(t_2)}|}{\sqrt{\overline{x_i^2(t_1)}} \sqrt{\overline{y_i^2(t_2)}}}. \quad [12.8.9]$$

I fondamentali concetti statistici introdotti troverebbero, però, scarsa utilizzazione nella teoria dei processi aleatori, se questi non godessero di frequente di due importanti proprietà: la "stazionarietà" e la "ergodicità":

Diremo che un processo aleatorio è *stazionario*, quando:

- 1) la media $g(t)$ è costante nel tempo: $g(t) = G$;
- 2) la funzione di autocorrelazione $K(t_1, t_2)$ non dipende dalla scelta dell'origine di t , per cui

$$K(t_1, t_2) = K(t_1 + t_0, t_2 + t_0), \quad \text{per ogni } t_0. \quad [12.8.10]$$

Nel qual caso, per $t_0 = -t_1$, si ha

$$K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_1, t_2 - t_1) = K(0, \tau),$$

avendo posto:

$$\tau = t_2 - t_1.$$

[12.8.11]

Se ne conclude che K è funzione della sola variabile τ ; l'espressione a denominatore della [12.8.8] può dunque scriversi nella forma

$$\sqrt{f_i^2(t_1)} \sqrt{f_i^2(t_2)} = \sqrt{f_i(t_1) f_i(t_1)} \sqrt{f_i(t_2) f_i(t_2)} = \sqrt{K(0)} \sqrt{K(0)} = K(0).$$

e il coefficiente di autocorrelazione k è dato da

$$k(\tau) = \frac{|K(\tau)|}{|K(0)|} \quad [12.8.8']$$

ed è anch'esso funzione della sola τ .

Considerazioni analoghe per ciò che riguarda la funzione e il coefficiente di mutua, correlazione, si applicano al caso di *due* processi stazionari. Nel seguito, considereremo soltanto processi stazionari a media nulla.

Consideriamo ora la generica $f_i(t)$ di un processo aleatorio (eventualmente anche non stazionario) e prendiamone la *media temporale*

$$\langle f_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_i(t) dt. \quad [12.8.12]$$

L'aver considerato il limite per $T \rightarrow \infty$ presuppone che la $f_i(t)$ sia definita da $-\infty$ a $+\infty$; quando, invece, come accade in pratica, la $f_i(t)$ è definita soltanto in un intervallo di ampiezza finita $2T$ (ovvero è nulla al di fuori di tale intervallo), si conviene di non effettuare l'operazione di limite (il cui risultato sarebbe, in ogni caso, nullo), purché, l'intervallo $2T$ sia molto grande rispetto alla scala di tempi in cui si verificano le variazioni aleatorie della $f_i(t)$.

Diremo che un processo aleatorio stazionario è *ergodico* quando, per ogni funzione $f_i(t)$ del processo, risulta¹⁴

$$\langle f_i(t) \rangle = \overline{f_i(t)}, \quad [12.8.13]$$

$$\langle f_i(t) f_i(t + \tau) \rangle = \overline{f_i(t) f_i(t + \tau)} = K(\tau). \quad [12.8.14]$$

Ciò significa che il *risultato della operazione di media di insieme*, effettuata in un dato istante, su tutte le funzioni che compongono il processo aleatorio stazionario in esame (o su espressioni che contengono tali funzioni), coincide con quello che si

¹⁴ A volte, la definizione viene data in forma più debole, accontentandosi che le [12.8.13] e [12.8.14] valgano *non* per ogni $f_i(t)$, ma soltanto per $f_i(t)$ "tipiche".

ottiene prendendo una sola di tali funzioni (o di espressioni che la contengono) ed effettuandone la media temporale. Il requisito dell'ergodicità è importante, poiché dà modo di valutare, nella pratica, le diverse grandezze statistiche di un processo aleatorio.

A titolo di esempio (peraltro, particolarmente importante per gli sviluppi successivi) calcoliamo le funzioni di autocorrelazione in due casi:

A) Processo aleatorio (stazionario ed ergodico) costituito da un insieme di funzioni sinusoidali di ampiezza unitaria e uguale frequenza, sfasate in modo casuale tra loro; si ha subito:

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos \omega t \cdot \cos \omega(t+\tau) dt = \frac{1}{2} \cos \omega \tau. \quad [12.8.15]$$

B) Processo aleatorio (stazionario ed ergodico) costituito da un insieme di treni d'onda di durata T assegnata, contenenti ciascuno n periodi, di ampiezza unitaria, distribuiti a caso nel tempo (fig. 12.38); semplici sviluppi forniscono, per $|\tau| < T$ e

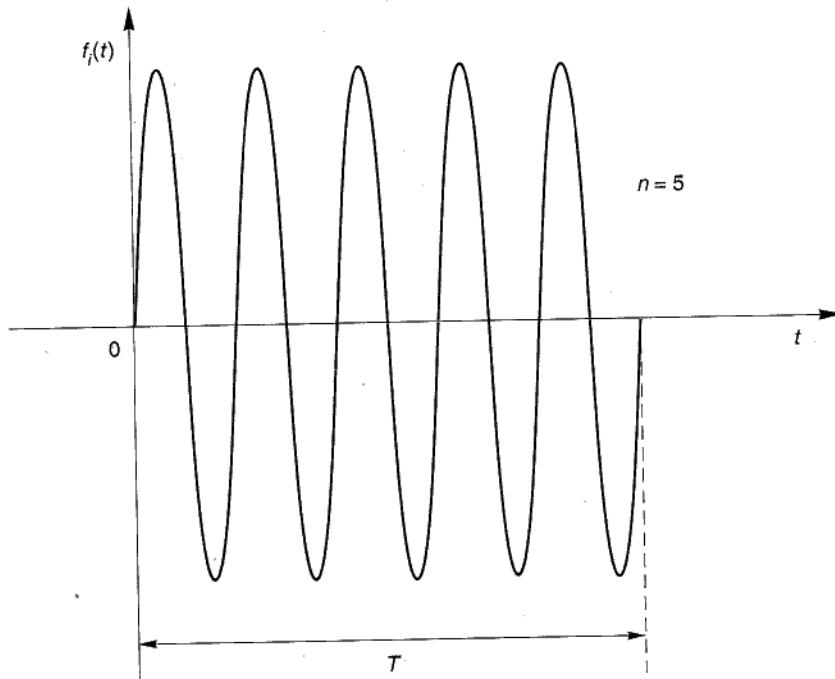


Figura 12.38

n abbastanza grande:

$$K(\tau) = \frac{1}{2T} \int_0^{T-|\tau|} \cos \omega t \cos \omega(t+\tau) dt = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cos \left(2\pi n \frac{\tau}{T}\right) - \\ - \frac{1}{8\pi n} \sin \left(2\pi n \frac{\tau}{T}\right) \approx \frac{1}{4} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cos \left(2\pi n \frac{\tau}{T}\right), \quad [12.8.16]$$

e $K(\tau) = 0$, per $|\tau| > T$.

Nella figura 12.39 sono riportati i grafici delle due funzioni di autocorrelazione.

Ricordando la [12.8.8'], ricaviamo il coefficiente di autocorrelazione $k(\tau)$, per i processi considerati:

$$A) \quad k(\tau) = \frac{|K(\tau)|}{|K(0)|} = |\cos \omega \tau|$$

$$B) \quad k(\tau) = \frac{|K(\tau)|}{|K(0)|} \approx \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cos 2\pi n \frac{\tau}{T} \right|.$$

Infine, per quel che segue, è utile introdurre un nuovo parametro legato al coefficiente $k(\tau)$, la cosiddetta *durata di coerenza* di un processo aleatorio. Il modo più semplice per definirla è quello di assumerla pari al valore τ_1 in corrispondenza del quale il coefficiente di autocorrelazione $k(\tau_1)$ è pari a $1/2$. Nei due casi considerati si ha:

$$A) \quad k(\tau_1) = \cos \omega \tau_1 = \frac{1}{2}, \quad \text{e quindi} \quad \tau_1 = \frac{\pi}{3\omega},$$

$$B) \quad k(\tau_1) = \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) \cos 2\pi n \frac{\tau_1}{T} = \frac{1}{2}, \quad \text{da cui si può calcolare } \tau_1.$$

Il significato fisico di τ_1 è evidente: esso è l'intervallo di tempo durante il quale un processo aleatorio può essere ritenuto coerente. In altre parole, durante τ_1 il processo ha "memoria" dei valori assunti in istanti precedenti, appartenenti allo stesso τ_1 ; quando, invece, si considerino istanti t_1 e t_2 separati da un intervallo molto maggiore di τ_1 , i valori assunti dal processo in t_2 sono totalmente indipendenti da quelli assunti in t_1 .

12.9 Interferenza fra radiazioni luminose correlate

Le nozioni fornite nel paragrafo precedente trovano larga applicazione nello studio dell'interferenza fra radiazioni luminose. Infatti, il segnale (ad esempio, il campo elettrico \mathbf{E}) emesso da una sorgente luminosa e raccolto in un punto P è costituito — come

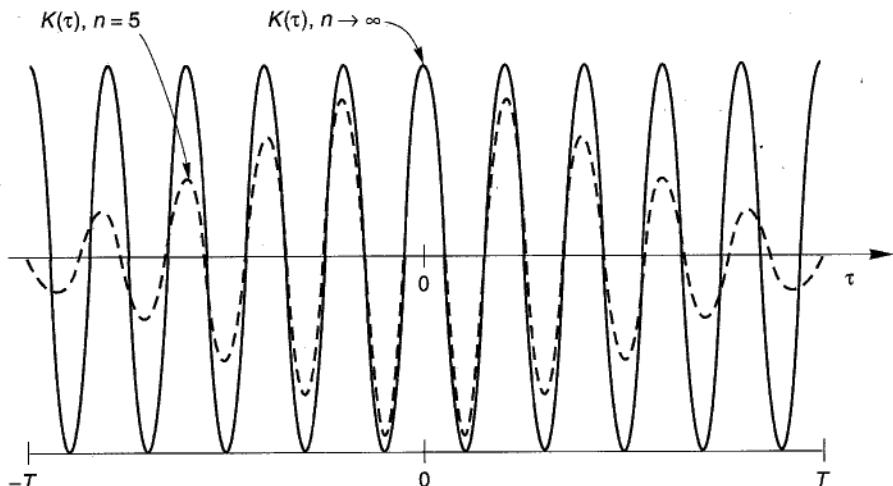


Figura 12.39

già detto — dalla sovrapposizione delle emissioni luminose degli atomi che compongono la sorgente: pertanto esso è un segnale aleatorio e può essere ritenuto appartenente a un processo stazionario ed ergodico sulla scala dei tempi delle nostre esperienze. Quando facciamo interferire, in uno stesso punto, i segnali provenienti da due sorgenti, otteniamo un segnale risultante dalla sovrapposizione dei due; assume, allora, particolare importanza che i due segnali siano correlati oppure no.

Nel seguente paragrafo supporremo che i due segnali siano correlati (poiché sono, in realtà, emessi da un'unica sorgente) e prenderemo in esame due casi: quello di segnali ottenuti per *divisione del fronte d'onda* di un'unica radiazione luminosa, e quello di segnali ottenuti per *divisione di ampiezza* della radiazione.

Nel paragrafo successivo esamineremo, invece, segnali provenienti da *due* sorgenti distinte e pertanto *non* correlati fra loro.

12.9.1 Specchi di Fresnel (divisione del fronte d'onda)

Un dispositivo sperimentale atto ad osservare le frange di interferenza prodotte da radiazioni luminose è quello della figura 12.40. Esso è costituito da due specchi piani σ_1 e σ_2 (ortogonali al piano di figura) formanti un angolo diedro di grande apertura, e da una sorgente lineare costituita da una fenditura rettilinea F (anch'essa ortogonale al piano di figura) praticata in un involucro che racchiude una sorgente luminosa S . Gli specchi formano due immagini virtuali (vedi § 12.3) F_1 , F_2 della fenditura F , le quali possono essere considerate sorgenti distinte, ma correlate fra loro. In queste condizioni i segnali provenienti dalle due sorgenti virtuali F_1 , F_2 sono ottenuti dividendo in due parti — a mezzo degli specchi — il fronte d'onda della radiazione emessa dalla sorgente reale F .

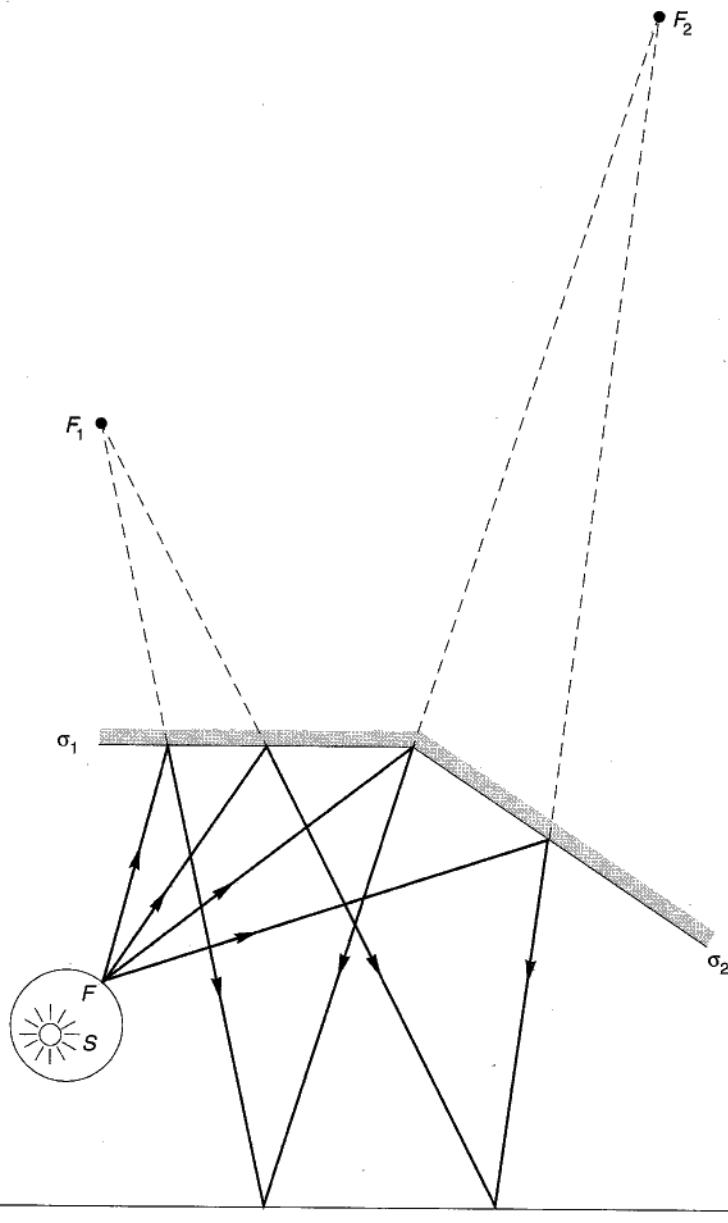


Figura 12.40

Consideriamo, ora, un singolo atomo emettitore Q_0 della sorgente reale F e le sue due immagini virtuali Q_1, Q_2 (fig. 12.41a): queste possono essere assimilate a due poli (ortogonali al piano di figura) percorsi da correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ le quali sono esattamente uguali fra loro in ogni istante, in quanto immagini dell'unica corrente $i(t)$ circolante nel dipolo reale Q_0 . Siamo, quindi, in una situazione analoga a quella esa-

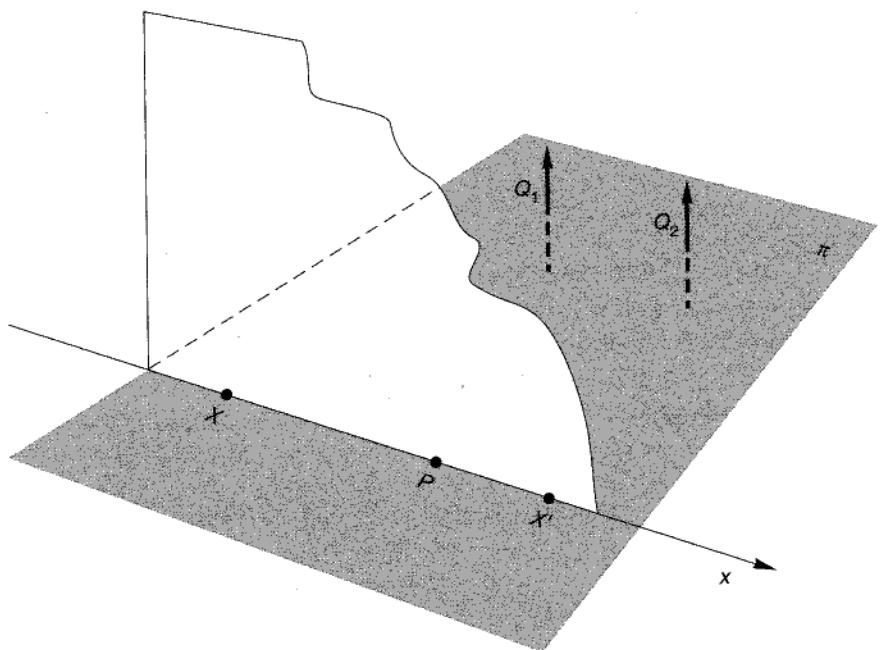
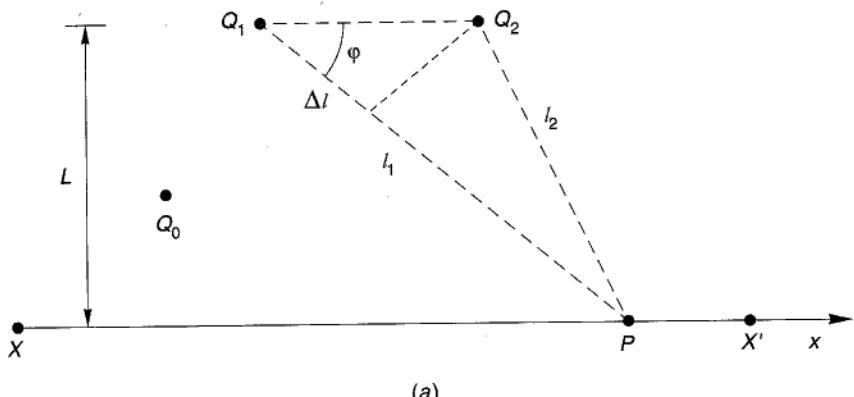


Figura 12.41

minata nel paragrafo 10.11, con la sola differenza che le correnti $i_1(t), i_2(t)$ non sono sinusoidali, ma aleatorie, costituite da una successione casuale di treni d'onde sinusoidali. Ci proponiamo di vedere come si modifichino le frange di interferenza, rispetto al caso studiato nel paragrafo 10.11, quando si tenga conto della aleatorietà dei segnali.

Consideriamo il punto-campo P sul segmento XX' , traccia, sul piano equatoriale π (piano di figura), di uno schermo piano ortogonale a π ; il campo elettrico prodotto dai due dipoli Q_1, Q_2 risulta ortogonale a π (e quindi al foglio; vedi fig. 12.41b) e

può essere descritto dalla sola componente scalare nella direzione della normale \mathbf{n} . Inoltre, i campi $E_1(t, P)$, $E_2(t, P)$ prodotti dai due dipoli sono del tipo (vedi § 10.11):

$$E_1(t, P) = \frac{A}{l_1} i \left(t - \frac{l_1}{c} \right)$$

$$E_2(t, P) = \frac{A}{l_2} i \left(t - \frac{l_2}{c} \right),$$

avendo indicato con $i(t)$ le correnti $i_1(t)$, $i_2(t)$, e con l_1 e l_2 le distanze di Q_1 e Q_2 da P . Il campo risultante in P è pertanto

$$E(t, P) = E_1(t, P) + E_2(t, P) = \frac{A}{l_1} i \left(t - \frac{l_1}{c} \right) + \frac{A}{l_2} i \left(t - \frac{l_2}{c} \right). \quad [12.9.1]$$

A grande distanza dai dipoli potremo porre $l_1 \cong l_2 \cong l$, ottenendo

$$E(t, P) = \frac{A}{l} \left[i \left(t - \frac{l_1}{c} \right) + i \left(t - \frac{l_2}{c} \right) \right];$$

che, introducendo la differenza di cammino ottico $\Delta l = l_1 - l_2$, può scriversi nella forma

$$E(t, P) = \frac{A}{l} \left[i \left(t - \frac{l + \Delta l}{c} \right) + i \left(t - \frac{l}{c} \right) \right]. \quad [12.9.1']$$

L'intensità della radiazione in P è proporzionale al quadrato di $E(t, P)$ mediato su un intervallo di tempo dell'ordine della durata delle nostre misure e, quindi, molto lungo rispetto alla scala delle variazioni aleatorie della corrente $i(t)$.

Si ha, quindi, indicando sinteticamente con C la costante di proporzionalità (evitiamo di darne l'espressione per non appesantire il formalismo):

$$I_{\text{em}}(P) = C \frac{1}{l^2} \left\langle \left[i \left(t - \frac{l + \Delta l}{c} \right) + i \left(t - \frac{l}{c} \right) \right]^2 \right\rangle, \quad [12.9.2]$$

dove l'operazione di media temporale va estesa alla durata delle nostre osservazioni. Sviluppando il quadrato, otteniamo

$$I_{\text{em}}(P) = C \frac{1}{l^2} \left\{ \left\langle \left[i \left(t - \frac{l + \Delta l}{c} \right) \right]^2 \right\rangle + \left\langle \left[i \left(t - \frac{l}{c} \right) \right]^2 \right\rangle + 2 \left\langle i \left(t - \frac{l + \Delta l}{c} \right) \cdot i \left(t - \frac{l}{c} \right) \right\rangle \right\}. \quad [12.9.3]$$

Supponendo che la $i(t)$ possa essere considerata appartenente a un processo aleatorio stazionario ed ergodico, le medie nel tempo possono essere sostituite da medie di insieme (per la ergodicità) e queste sono invarianti rispetto a una traslazione nel tempo (per la stazionarietà). Si ha pertanto

$$\left\langle \left[i \left(t - \frac{l + \Delta l}{c} \right) \right]^2 \right\rangle = \left\langle \left[i \left(t - \frac{l}{c} \right) \right]^2 \right\rangle = I_{\text{em}1}(P) \frac{l^2}{C}, \quad [12.9.4]$$

avendo indicato con $I_{\text{em}1}(P)$ l'intensità del segnale prodotto in P da uno solo dei due

dipoli. Si ha inoltre

$$\left\langle i\left(t - \frac{l + \Delta l}{c}\right) i\left(t - \frac{l}{c}\right) \right\rangle = K(\tau)$$

avendo posto $\tau = -\Delta l/c$, e avendo indicato con $K(\tau)$ la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio di cui la $i(t)$ fa parte. Si ha, dunque:

$$I(P) = 2I_{\text{em}1}(P) + 2K(\tau) \cdot \frac{C}{l^2}. \quad [12.9.5]$$

Ricordando, poi, l'espressione [12.8.16] della funzione di autocorrelazione per un treno d'onde di ampiezza unitaria, possiamo scrivere

$$K(\tau) = K' \frac{1}{4} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cos\left(2\pi n \frac{\tau}{T}\right), \quad \text{con } |\tau| < T, \quad [12.9.6]$$

dove K' è un'opportuna costante che tiene conto dell'ampiezza dei singoli treni d'onde e del numero medio di treni emessi per unità di tempo.

Per distanze grandi rispetto alla lunghezza d'onda (vedi fig. 12.41) può scriversi

$$\Delta l \approx d \cos \varphi,$$

$$\varphi \approx \frac{\pi}{2} - \frac{x}{L};$$

risulta allora

$$|\tau| = \frac{\Delta l}{c} \approx \frac{d}{c} \cos \varphi = \frac{d}{c} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{|x|}{L}\right) = \frac{d}{c} \sin \frac{|x|}{L} \approx \frac{d}{c} \frac{|x|}{L},$$

e, quindi:

$$K(\tau) = K' \frac{1}{4} \left(1 - \frac{d|x|}{cLT}\right) \cos\left(2\pi n \frac{xd}{cLT}\right), \quad [12.9.7]$$

con

$$\frac{d|x|}{cLT} < 1.$$

Sostituendo questa espressione nella [12.9.5], si ottiene infine

$$I_{\text{em}}(P) = 2I_{\text{em}1}(P) + K'' \frac{1}{4} \left(1 - \frac{d|x|}{cLT}\right) \cos\left(2\pi n \frac{xd}{cLT}\right), \quad [12.9.8]$$

con

$$\frac{d|x|}{cLT} < 1, \quad K'' = 2 \frac{C}{l^2} K'.$$

Vediamo così che anche in questo caso (come in § 10.11) l'intensità I_{em} varia al variare di x , presentando massimi e minimi: ora, però, l'ampiezza di queste oscillazioni non è costante, ma si riduce al crescere di $|x|$ a causa della perdita di correlazione,

corrispondente al primo termine in parentesi. La distanza $\Delta = x_{n+1} - x_n$ tra due frange adiacenti (dalla [12.9.8]) è tale che

$$2\pi n \frac{x_{n+1}d}{cLT} - 2\pi n \frac{x_nd}{cLT} = 2\pi,$$

e quindi

$$\Delta = \frac{cT}{n} \frac{L}{d};$$

dato che T/n è il periodo di una singola oscillazione del segnale all'interno del treno d'onda, si ha $cT/n = \lambda$ (λ è la lunghezza d'onda del segnale) e infine

$$\Delta = L \frac{\lambda}{d}, \quad [12.9.9]$$

proprio come nel paragrafo 10.11.

Per quel che riguarda l'intensità delle frange, vediamo subito che il termine in parentesi si annulla quando è

$$\frac{d|x|}{cLT} = 1.$$

Ne deriva che le frange sono visibili soltanto in un intervallo x_0 pari a

$$x_0 = \frac{cLT}{d} = \frac{L}{d} x_c,$$

dove $x_c = cT$ è detta *lunghezza di coerenza longitudinale*. Al di fuori di questo intervallo, il termine di autocorrelazione nella [12.9.8] è nullo, e sullo schermo si ha illuminazione uniforme, di intensità $2I_{em1}$. Per dare un'idea degli ordini di grandezza in gioco, osserviamo che, per $L=1$ m, $\lambda=5 \times 10^{-7}$ m, $d=5 \times 10^{-3}$ m, $T=10^{-11}$ s, si ha:

$$\Delta = 10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm}, \quad x_c = 3 \times 10^{-3} \text{ m} = 3 \text{ mm},$$

$$x_0 = 6 \times 10^{-1} \text{ m} = 600 \text{ mm}.$$

I risultati cui siamo pervenuti si riferiscono a un solo atomo emettitore, o meglio, alle sue due immagini virtuali, coerenti tra loro. Cosa accade quando si considerino tutti gli atomi che compongono la sorgente? Il problema è ovviamente molto complesso, ma possiamo cercare di dare almeno un'idea di ciò che accade.

Per semplicità, supponiamo che l'insieme degli atomi emettitori che costituiscono la sorgente sia distribuito nei vertici di un reticolo piano (come in fig. 12.42) e che tutti gli emettitori siano assimilabili a dipoli allineati e diretti come mostrato in figura. Possiamo, quindi, considerare due reticolati S, S' , del tutto simili a quello di fig. 12.42, che fanno da sorgenti virtuali. Ciascun emettitore di un reticolo è completamente scorrelato rispetto agli altri emettitori dello stesso reticolo, ma è totalmente coerente con l'emettitore corrispondente (che occupa, cioè, lo stesso posto) dell'altro reticolo. Se ora consideriamo due "colonne" corrispondenti dei due reticolati, ad esempio la h -esima colonna di S e la h' -esima colonna di S' (fig. 12.43), e osserviamo i fenomeni di interferenza su uno schermo parallelo al piano del reticolo, ci rendiamo conto subito che ciascuna coppia di emettitori coerenti (che appartengono alla stessa riga) dà luogo a frange di interferenza, del tipo di quelle trattate in questo paragrafo, la cui posizione sullo schermo non dipende dalla particolare coppia considerata.

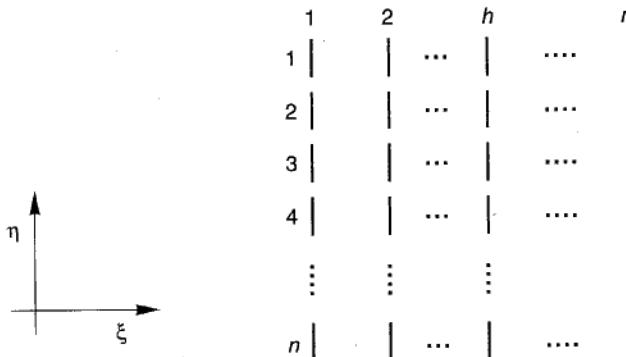


Figura 12.42

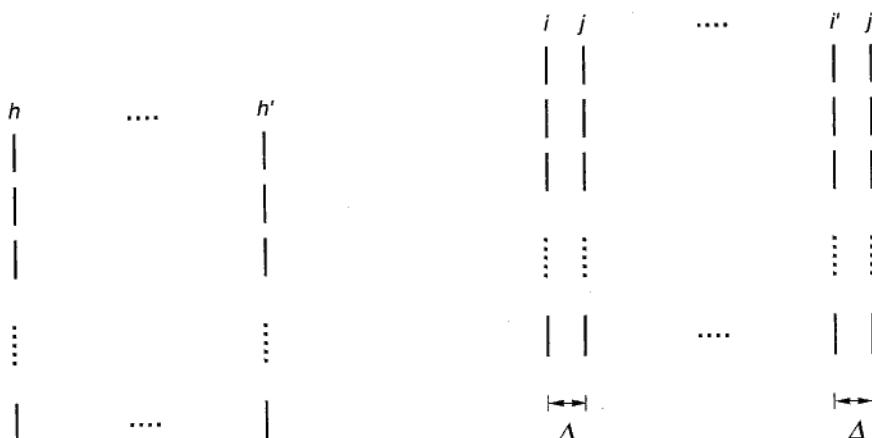


Figura 12.43

Figura 12.44

Ne deriva che le frange prodotte dalle diverse coppie si presentano incolonnate, dando luogo a un sistema di frange che è soltanto più "alto" (nella direzione η di fig. 12.42) di quello prodotto da una singola coppia. Prendiamo, ora, in esame *due* colonne di emettitori (i, j , in fig. 12.44) e le corrispondenti, i', j' : ciascuna coppia di colonne i, i' e j, j' dà luogo a frange di interferenza, ma la distanza (nella direzione ξ) tra le frange prodotte dalla coppia i, i' e quelle prodotte dalla coppia j, j' è uguale alla distanza Δ che separa la colonna i dalla j (fig. 12.44). Finché dunque Δ è piccola rispetto al semipasso interfrange, l'aspetto delle frange non si modifica in maniera significativa, poiché le frange prodotte dalle diverse colonne si sovrappongono. In caso contrario, quando cioè Δ sia dello stesso ordine del semipasso interfrange, i sistemi di frange prodotti dalle diverse colonne si mescolano tra loro e la *visibilità* delle frange (definita come scarto relativo tra massimi e minimi di intensità luminosa) si attenua notevolmente.

Riesce naturale quindi introdurre una *lunghezza di coerenza trasversale* Δ_c , tale che colonne di emettitori che distino meno di Δ_c diano luogo a sistemi di frange ben visibili.

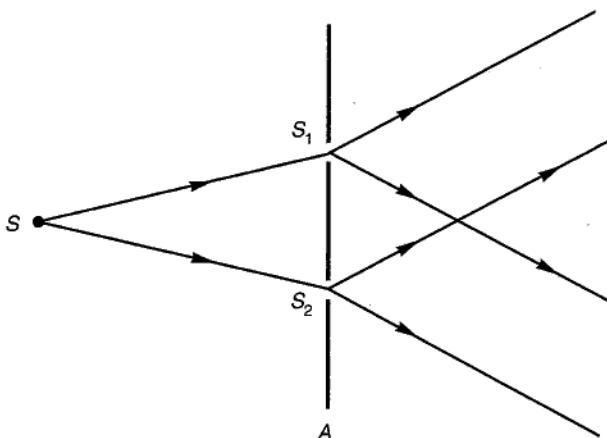


Figura 12.45

Un'ultima osservazione circa il sistema di frange prodotto dal dispositivo in esame: se la sorgente S non è monocromatica, ma emette, ad esempio, luce bianca (che, come è noto, è costituita dalla sovrapposizione di tutti i colori e, quindi, delle lunghezze d'onda corrispondenti), il sistema di frange appare policromo. In particolare, una frangia (detta *centrale*), per la quale i cammini ottici sono uguali, appare bianca, poiché, indipendentemente dalla lunghezza d'onda delle diverse componenti della luce bianca, si ha per essa interruzione costruttiva. Spostandosi da tale frangia, si incontra prima una frangia corrispondente alla componente luminosa di lunghezza d'onda minore, poiché questa (conformemente alla [11.16.9]) dà luogo a un sistema di frange più fitte di quelle prodotte dalle altre componenti; pertanto, la prima frangia tende al violetto (che è la componente di lunghezza d'onda minima), mentre quelle successive ripetono i colori dell'iride. Però, man mano che ci si allontana dalla frangia centrale, i massimi contigui si separano sempre più e, dopo poche frange, spariscono, poiché si sovrappongono i sistemi di frange di passo diverso prodotti dalle diverse componenti luminose, dando luogo a una illuminazione uniforme dello schermo.

A conclusioni del tutto analoghe conducono altre classiche esperienze di interruzione luminosa, tra cui quella detta dei *fori di Young*, realizzata nel 1802, vera pietra miliare di questo settore dell'ottica. Il dispositivo è semplicissimo: la luce (monocromatica) emessa dalla sorgente puntiforme S (fig. 12.45) giunge a due forellini S_1 , S_2 , praticati nello schermo A e ugual distanza da S (e molto vicini fra loro). S_1 e S_2 si comportano come sorgenti monocromatiche secondarie correlate fra loro; le radiazioni da esse emesse si sovrappongono nella regione al di là dello schermo A e interfruiscono.

12.9.2 Interferometro di Michelson (divisione di ampiezza)

L'interferometro di Michelson, strumento famoso nella storia della fisica per aver consentito di confermare il postulato fondamentale della teoria speciale della relatività (vedi cap. 13), è costituito essenzialmente (fig. 12.46) di due specchi piani M_1 , M_2 , ortogonali fra loro e al piano di figura, e da una terza superficie piana semiargentea $S_{r,t}$, che funge da divisore dell'ampiezza del fascio di raggi luminosi emessi dalla

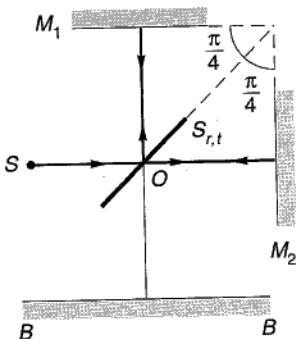


Figura 12.46

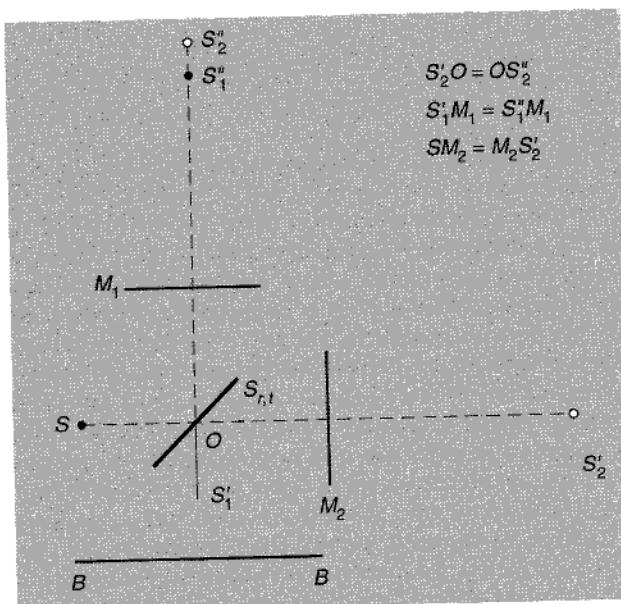


Figura 12.47

sorgente S riflettendo specularmente una frazione dell'intensità incidente e trasmettendone un'altra frazione; $S_{r,t}$ è inclinato di $\pi/4$ rispetto a M_1, M_2 .

Sul piano di osservazione BB , arrivano *due* contributi: il fascio che ha seguito il percorso $S-S_r-M_1-S_t-BB$ (indicando lo specchio semiargentoato $S_{r,t}$ con S_r quando funziona “in riflessione” e con S_t quando funziona “in trasmissione”) e quello che ha seguito il percorso $S-S_t-M_2-S_r-BB$. Si noti che, se i coefficienti di riflessione degli specchi M_1 e M_2 sono uguali, le intensità dei due fasci che giungono in BB sono anch’esse uguali, poiché ciascuno dei due fasci subisce lo stesso riflessioni e trasmissioni. Per studiare l’interferenza dei due fasci su BB , costruiamo le immagini virtuali della sorgente S (fig. 12.47): S'_1 è l’immagine virtuale di S relativa alla funzione di riflessione dello specchio semiargentoato $S_{r,t}$; a sua volta, S''_1 è l’immagine virtuale di S'_1 prodotta dallo specchio M_1 . Similmente, S'_2 è l’immagine virtuale di S prodotta dallo specchio M_2 e S''_2 è l’immagine virtuale di S'_2 , relativa alla funzione di riflessione dello specchio semiargentoato.

Sullo schermo BB si osservano frange di interferenza (circolari) dovute alle due sorgenti coerenti S_1'' e S_2'' : per esse si possono fare considerazioni analoghe a quelle relative agli specchi di Fresnel.

Le due sorgenti virtuali S_1'' e S_2'' possono essere avvicinate o allontanate tra loro, variando la distanza di M_2 da $S_{r,t}$.

Le misure interferometriche possono essere effettuate osservando le frange su BB , oppure disponendo un misuratore di intensità luminosa (ad esempio un fotomoltiplicatore)¹⁵ sull'asse $S_1''S_2''$ di allineamento delle due sorgenti (utilizzando un fotomoltiplicatore, occorrerà che l'area del fotocatodo sia minore di quella del cerchio centrale della figura di interferenza).

L'ampiezza del cerchio centrale di interferenza è abbastanza grande da consentire l'utilizzazione anche di sorgenti non puntiformi abbastanza estese: da questo punto di vista, l'interferometro di Michelson è dotato di grande luminosità. Si noti infine che, ponendo gli specchi M_1 e M_2 a uguale distanza da $S_{r,t}$ e ruotando leggermente M_2 , è possibile fare in modo che le due sorgenti virtuali S_1'' , S_2'' siano a uguale distanza da BB e allineate trasversalmente (e cioè parallelamente a BB); in questo modo, si ottengono, sullo schermo BB , le tipiche frange rettilinee già studiate a proposito degli specchi di Fresnel. In questo caso, però, la sorgente S non potrà più avere l'estensione trasversale che caratterizza la grande luminosità dell'interferometro di Michelson.

12.10 Interferenza tra radiazioni luminose fra loro incorrelate: esperienza di Hanbury Brown e Twiss

Consideriamo due sorgenti luminose quasi puntiformi, poste a distanza d l'una dall'altra, che emettono radiazioni tra loro *non* correlate e schematizzabili come sovrapposizioni di treni d'onde di pulsazione (media) ω e durata (media) T : si pensi, ad esempio, a due tubi a scarica contenenti lo stesso tipo di gas (tipico è il caso dei tubi al neon per l'illuminazione). Supponiamo inoltre che la radiazione emessa da ciascuna sorgente sia polarizzata perpendicolarmente al piano equatoriale della sorgente stessa (il vettore elettrico sia, cioè, parallelo ai tubi), come nel caso degli specchi di Fresnel, e che i fenomeni di interferenza siano studiati su un piano lontano, posto a distanza L dalle sorgenti e ortogonale (come per gli specchi di Fresnel) al piano equatoriale.

In queste condizioni, essendo le due sorgenti indipendenti, i fenomeni di interferenza non sono direttamente osservabili sullo schermo, poiché le frange — che pure si formano — si muovono continuamente e con grandissima rapidità dando luogo ad un illuminamento medio uniforme. Certo, se si riuscisse a “riprendere la scena al rallentatore”, tanto da osservare distintamente ciò che accade sullo schermo per tempi minori di T , le frange diventerebbero visibili. Ciò è praticamente impossibile,

¹⁵ Dispositivo dotato di una superficie (fotocatodo) che emette elettroni quando è investita da una radiazione luminosa; gli elettroni vengono raccolti da un elettrodo posto a un potenziale positivo rispetto al catodo, dando luogo a una corrente che è proporzionale all'intensità luminosa che investe il dispositivo.

anche perché la piccola energia trasportata dalla radiazione in un intervallo di tempo dell'ordine di T verrebbe inevitabilmente "coperta" dal rumore (e cioè, disturbo casuale) elettromagnetico dei dispositivi rivelatori.

Si può tuttavia aggirare la difficoltà con un brillante metodo di osservazione (esperienza di Hanbury Brown e Twiss, 1956) basato sulla correlazione tra le intensità, anziché tra i campi elettrici, delle due radiazioni.

Consideriamo due punti P e P' sullo schermo (fig. 12.48) e siano x e x' le loro ascisse misurate sull'asse che li congiunge. Siano $I_{\text{em}}(x, t)$ e $I_{\text{em}}(x', t)$ le intensità luminose prodotte *congiuntamente* dalle sorgenti S_1, S_2 , nei punti P e P' . Si ha

$$I_{\text{em}}(x, t) = C_1 \left[f_1 \left(t - \frac{l_1}{c} \right) + f_2 \left(t - \frac{l_2}{c} \right) \right]^2$$

$$I_{\text{em}}(x', t) = C_2 \left[f_1 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) + f_2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) \right]^2$$

dove f_1 e f_2 sono le funzioni che descrivono gli andamenti aleatori delle correnti circolanti nei due dipoli (fittizi) equivalenti alle due sorgenti e C_1 e C_2 sono opportune costanti di proporzionalità, che tengono conto delle caratteristiche delle sorgenti. Effettuiamo ora il prodotto delle due intensità e facciamone la media (su un intervallo di tempo dell'ordine di quello di misura, che è molto grande rispetto a T):

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{em}}(x, t) I_{\text{em}}(x', t) \rangle &= C_1 C_2 \left\langle \left[f_1^2 \left(t - \frac{l_1}{c} \right) + f_2^2 \left(t - \frac{l_2}{c} \right) + 2 f_1 \left(t - \frac{l_1}{c} \right) f_2 \left(t - \frac{l_2}{c} \right) \right] \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[f_1^2 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) + f_2^2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) + 2 f_1 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) f_2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) \right] \right\rangle = \\ &= C_1 C_2 \left\{ \left\langle f_1^2 \left(t - \frac{l_1}{c} \right) f_1^2 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) \right\rangle + \left\langle f_1^2 \left(t - \frac{l_1}{c} \right) f_2^2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) \right\rangle + \right. \\ &\quad + 2 \left\langle f_1^2 \left(t - \frac{l_1}{c} \right) f_1 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) f_2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle f_2^2 \left(t - \frac{l_2}{c} \right) f_1^2 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) \right\rangle + \left\langle f_2^2 \left(t - \frac{l_2}{c} \right) f_2^2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) \right\rangle + \\ &\quad + 2 \left\langle f_2^2 \left(t - \frac{l_2}{c} \right) f_2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) f_1 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) \right\rangle + \\ &\quad + 2 \left\langle f_1 \left(t - \frac{l_1}{c} \right) f_1^2 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) f_2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) \right\rangle + \\ &\quad + 2 \left\langle f_2 \left(t - \frac{l_2}{c} \right) f_2^2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) f_1 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) \right\rangle + \\ &\quad \left. + 4 \left\langle f_1 \left(t - \frac{l_1}{c} \right) f_1 \left(t - \frac{l'_1}{c} \right) f_2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) f_2 \left(t - \frac{l'_2}{c} \right) \right\rangle \right\}. \quad [12.10.1] \end{aligned}$$

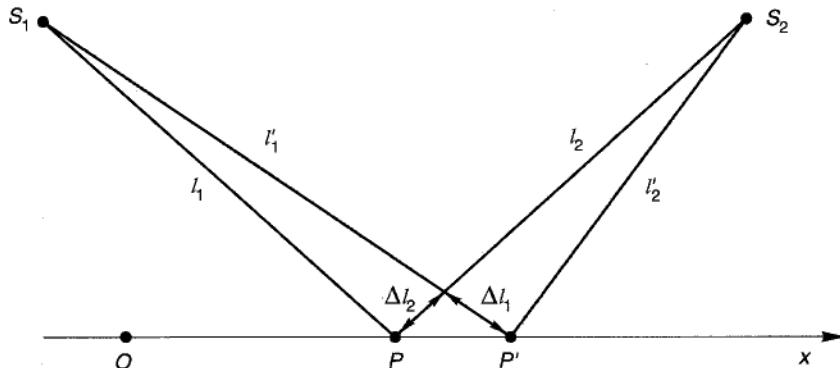


Figura 12.48

Si dimostra (anche se non è il caso di farlo in questa sede) che per variabili aleatorie del genere di quelle in esame (che sono dette *a distribuzione gaussiana*) vale la seguente proprietà:

$$\langle abcd \rangle = \langle ab \rangle \langle cd \rangle + \langle ac \rangle \langle bd \rangle + \langle ad \rangle \langle bc \rangle,$$

essendo a, b, c, d quattro variabili del genere suddetto. Ricordando poi la definizione di funzione di autocorrelazione (vedi § 12.8) e ponendo $\Delta l_1 = l'_1 - l_1$, $\Delta l_2 = l_2 - l'_2$, la [12.10.1] diventa (dopo qualche passaggio, ove si tiene conto della stazionarietà dei processi aleatori considerati):

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{em}}(x, t) I_{\text{em}}(x', t) \rangle &= \langle I_{\text{em}} \rangle^2 + 2 \langle I_{\text{em}} \rangle \langle I'_{\text{em}} \rangle + \langle I'_{\text{em}} \rangle^2 + 2K_1^2 \left(\frac{\Delta l_1}{c} \right) + \\ &+ 2K_2^2 \left(\frac{\Delta l_2}{c} \right) + 4K_1 \left(\frac{\Delta l_1}{c} \right) K_2 \left(\frac{\Delta l_2}{c} \right), \end{aligned}$$

avendo indicato con I_{em} e I'_{em} rispettivamente i valori $I_{\text{em}}(x, t)$ e $I_{\text{em}}(x', t)$ e con K_1, K_2 le funzioni di autocorrelazione dei processi aleatori cui appartengono le funzioni f_1 e f_2 .

Se inoltre supponiamo che sia

$$\langle I_{\text{em}} \rangle = \langle I'_{\text{em}} \rangle \quad \text{e} \quad \Delta l_1 = -\Delta l_2 = \Delta l,$$

otteniamo

$$\langle I_{\text{em}}(x, t) I_{\text{em}}(x', t) \rangle = 4 \langle I_{\text{em}} \rangle^2 + 8K^2 \left(\frac{\Delta l}{c} \right),$$

dove si è posto

$$K \left(\frac{\Delta l}{c} \right) = K_1 \left(\frac{\Delta l}{c} \right) = K_2 \left(-\frac{\Delta l}{c} \right)$$

(poiché K_1 e K_2 sono funzioni pari del proprio argomento).

Ora, se si assume per $K(\Delta l/c)$ un'espressione del tipo (vedi § 12.8)

$$K\left(\frac{\Delta l}{c}\right) = \langle I_{\text{em}} \rangle \cos\left(\omega \frac{\Delta l}{c}\right),$$

si ha

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{em}}(x, t) I_{\text{em}}(x', t) \rangle &= 4 \langle I_{\text{em}} \rangle^2 \left[1 + 2 \cos^2\left(\omega \frac{\Delta l}{c}\right) \right] = \\ &= 4 \langle I_{\text{em}} \rangle^2 \left[2 + \cos\left(2\omega \frac{\Delta l}{c}\right) \right]. \end{aligned}$$

Essendo poi $\Delta l = d \Delta x / L$, dove d è la distanza fra S_1 e S_2 , Δx quella fra P e P' e L quella tra le sorgenti e l'asse x , si ha in definitiva

$$\langle I_{\text{em}}(x, t) I_{\text{em}}(x', t) \rangle = 8 \langle I_{\text{em}} \rangle^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{d \Delta x}{L}\right) \right],$$

dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione. Nella figura 12.49 è riportato l'andamento di tale espressione, in funzione della variabile $d \Delta x / L$.

La misura di $\langle I_{\text{em}}(x, t) I_{\text{em}}(x', t) \rangle$ può essere effettuata moltiplicando, con semplici dispositivi elettronici, le correnti di uscita di due fotomoltiplicatori posti nei punti P e P' ; la moltiplicazione va effettuata molto rapidamente (e cioè su una scala di tempi inferiore alla durata T) e il risultato va poi mediato nel tempo (sempre con strumenti elettronici).

I risultati sperimentali che si ottengono mostrano con chiarezza l'andamento della figura 12.49, e cioè la tipica distribuzione di frange di interferenza. Questa tecnica è stata applicata con successo anche per esperienze di interferenza con luce proveniente dalle stelle.

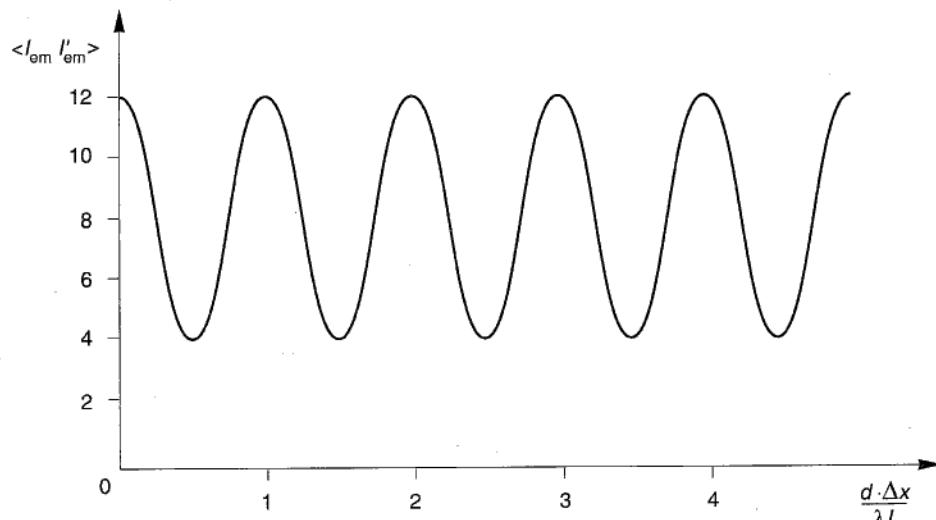


Figura 12.49

12.11 Diffrazione della radiazione luminosa: la teoria classica di Kirchhoff-Fresnel

Abbiamo visto (cap. 10) che i problemi di diffrazione delle onde elettromagnetiche sono in generale molto difficili da trattare in maniera rigorosa. Si è già detto, però, che, nel caso della radiazione luminosa, esiste una tecnica analitica semplificata che fornisce risultati approssimati in buon accordo con i dati sperimentali. In questo paragrafo e nel seguente, descriveremo questa tecnica e la applicheremo ad alcuni casi di notevole interesse fisico.

Cominciamo col ricordare che nel vuoto (o, comunque, in un mezzo omogeneo, lineare e isotropo) ciascuna componente del campo elettromagnetico soddisfa, in regime sinusoidale, l'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{U} + k^2 \tilde{U} = 0. \quad [12.11.1]$$

D'altra parte, se si considera per ciascuna componente del campo una soluzione della [12.11.1], il sistema di funzioni che così si ottiene *non* soddisfa, in genere, le equazioni di Maxwell (vedi § 10.1): su questa osservazione torneremo più avanti. Per ora, ci limiteremo a considerare la [12.11.1] per una delle componenti del campo, ricavando, per essa, un teorema (di Helmholtz-Kirchhoff) che pone su basi matematiche rigorose il principio di Huygens (vedi § 12.1). Prima ancora, però, dimostreremo un teorema (di Green) che è una diretta conseguenza del teorema della divergenza (vedi app. A) e che si rivelerà molto utile nel seguito.

Sia Ω una regione spaziale delimitata da una superficie chiusa Σ e siano $\tilde{U}(P)$ e $\tilde{V}(P)$ due funzioni scalari (in generale, complesse) continue in Ω fin sulla frontiera Σ e dotate ivi di derivate prime e seconde continue. Consideriamo, in Ω , i campi vettoriali $\tilde{\mathbf{A}}_1$ e $\tilde{\mathbf{A}}_2$ così definiti:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}_1 = \tilde{U} \operatorname{grad} \tilde{V} \\ \tilde{\mathbf{A}}_2 = \tilde{V} \operatorname{grad} \tilde{U} \end{cases} \quad [12.11.2]$$

e applichiamo a ciascuno di essi il teorema della divergenza:

$$\begin{cases} \iint_{\Sigma} \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}}_1 d\tau, \\ \iint_{\Sigma} \tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}}_2 d\tau. \end{cases} \quad [12.11.3]$$

Sostituendo le [12.11.2] nelle [12.11.3], otteniamo

$$\begin{cases} \iint_{\Sigma} (\tilde{U} \operatorname{grad} \tilde{V}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (\tilde{U} \operatorname{grad} \tilde{V}) d\tau, \\ \iint_{\Sigma} (\tilde{V} \operatorname{grad} \tilde{U}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (\tilde{V} \operatorname{grad} \tilde{U}) d\tau; \end{cases}$$

di qui, ricordando che

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial n},$$

$$\operatorname{div}(\tilde{U} \operatorname{grad} \tilde{V}) = \tilde{U} \nabla^2 \tilde{V} + \operatorname{grad} \tilde{U} \cdot \operatorname{grad} \tilde{V},$$

si ricava

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Sigma} \tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} \tilde{U} \nabla^2 \tilde{V} d\tau + \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} \tilde{U} \cdot \operatorname{grad} \tilde{V}) d\tau, \\ \iint_{\Sigma} \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} \tilde{V} \nabla^2 \tilde{U} d\tau + \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} \tilde{V} \cdot \operatorname{grad} \tilde{U}) d\tau. \end{array} \right.$$

Da queste, sottraendo membro a membro, otteniamo il seguente, importante *teorema di Green*:

$$\iiint_{\Omega} (\tilde{U} \nabla^2 \tilde{V} - \tilde{V} \nabla^2 \tilde{U}) d\tau = \iint_{\Sigma} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial n} - \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS, \quad [12.11.4]$$

valido per ogni coppia di funzioni scalari \tilde{U}, \tilde{V} definite in Ω e dotate ivi delle regolarità prima specificate.

Se ora sceglieremo le funzioni $\tilde{U}(P)$ e $\tilde{V}(P)$ in modo che esse siano soluzioni dell'equazione di Helmholtz [12.11.1], potremo porre, nella [12.11.4]:

$$\nabla^2 \tilde{U} = -k^2 \tilde{U}$$

$$\nabla^2 \tilde{V} = -k^2 \tilde{V},$$

ottenendo

$$\iint_{\Sigma} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial n} - \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS = 0. \quad [12.11.5]$$

In particolare sia \tilde{V} la soluzione a simmetria sferica (vedi § 10.3)

$$\tilde{V}_1(P) = \frac{1}{r} e^{-jkr}, \quad [12.11.6]$$

avendo scelto l'origine O del sistema di coordinate in un punto *interno* alla regione Ω , e avendo indicato con r la distanza del generico punto P da O . L'aver scelto $O \in \Omega$ complica le cose, ma è essenziale per quel che segue. Poiché la funzione [12.11.6] è

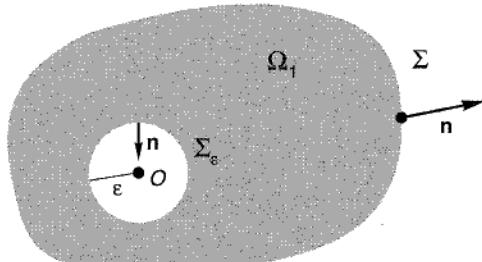


Figura 12.50

singolare per $r=0$ (e cioè in O), il teorema di Green non può essere applicato all'intera regione Ω , ma occorre escludere da essa l'origine O . Per far ciò, consideriamo una sferetta di raggio ϵ , centrata in O e applichiamo il teorema di Green alla regione Ω_1 (ombreggiata in fig. 12.50). La [12.11.5], applicata all'intera frontiera della regione Ω_1 , che è costituita dalla superficie Σ e dalla superficie Σ_ϵ della sferetta di raggio ϵ , fornisce

$$\iint_{\Sigma} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial n} - \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS + \iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial n} - \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS = 0, \quad [12.11.7]$$

nella quale la normale \mathbf{n} è considerata uscente da Ω_1 , per entrambe le superfici Σ e Σ_ϵ .

Concentrandoci sul secondo integrale, osserviamo che la normale \mathbf{n} è diretta come il raggio vettore \mathbf{r} (a parte il verso) e che, inoltre, l'elemento d'area dS può essere scritto come

$$dS = \epsilon^2 d\Omega$$

avendo indicato con $d\Omega$ l'elemento di angolo solido sotteso da dS . Si ha quindi

$$\iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial n} - \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS = \iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} - \tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial r} \right) \epsilon^2 d\Omega;$$

sostituendo in questa relazione la [12.11.6], otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial n} - \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS &= - \iint_{\Sigma_\epsilon} \left[\frac{1}{r} e^{-jkr} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} - \tilde{U} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} e^{-jkr} \right) \right] \epsilon^2 d\Omega = \\ &= - \iint_{\Sigma_\epsilon} \left(jk \tilde{U} + \frac{\tilde{U}}{r} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \epsilon^2 d\Omega, \end{aligned}$$

e ancora (ricordando che, in corrispondenza di Σ_ϵ , si ha $r=\epsilon$):

$$\iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial n} - \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS = -e^{-jke} \left[\iint_{\Sigma_\epsilon} \tilde{U} d\Omega + e \iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + jk \tilde{U} \right) d\Omega \right].$$

Questa relazione vale per ogni valore di ϵ : pertanto, se facciamo tendere ϵ a zero e teniamo conto del fatto che, per ipotesi, la funzione \tilde{U} è regolare in O , il primo integrale entro la parentesi quadra tende al valore $\tilde{U}(0) 4\pi$ (si ricordi che la variabile di integrazione è l'angolo solido), e il secondo termine tende a zero. Si ha quindi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial n} - \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS = -4\pi \tilde{U}(O). \quad [12.11.8]$$

Pertanto, facendo tendere a zero ϵ nella [12.11.17], si ottiene

$$\iint_{\Sigma} \left(\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial n} - \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right) dS - 4\pi \tilde{U}(O) = 0,$$

e ancora, tenendo conto della [12.11.6]:

$$\tilde{U}(O) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\tilde{U} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right] dS. \quad [12.11.9]$$

Ora, dato che il punto O (origine delle coordinate) è stato considerato all'interno della regione Ω , e che esso può, ovviamente, essere scelto ovunque in Ω , se ne conclude che la [12.11.9] fornisce il valore della funzione $\tilde{U}(P)$, soluzione dell'equazione di Helmholtz, in un qualsiasi punto interno a Ω quando siano noti i valori della stessa \tilde{U} e della sua derivata normale sulla frontiera Σ di Ω .

Questa importante relazione (*di Helmholtz-Kirchhoff*) si ricollega, in qualche modo, al principio di Huygens (vedi § 12.1) e costituisce la base degli sviluppi che seguono. E' bene sottolineare che essa vale soltanto per punti interni a Σ . Infatti, ove si tentasse di applicare i ragionamenti fatti per ricavare la [12.11.9] a un punto *esterno* a Σ , occorrerebbe porre uguale a zero il secondo membro della [12.11.8], poiché l'angolo solido su cui integrare sarebbe nullo, e ciò vanificherebbe il tentativo. D'altra parte, la cosa risulta evidente quando si applichi la [12.11.9] ad una regione Ω delimitata da una superficie chiusa Σ e suddivisa in due parti, Ω_1 e Ω_2 , da un setto interno (fig. 12.51): provi il lettore a dimostrarlo, a titolo di esercizio.

Cerchiamo ora di applicare la formula di Helmholtz-Kirchhoff a un tipico problema di diffrazione luminosa. Consideriamo una sorgente luminosa puntiforme Q (fig. 12.52), la quale illumini uno schermo piano π , opaco alla radiazione luminosa, che presenta un foro di forma e di dimensioni arbitrarie: ci proponiamo di determinare la distribuzione dell'intensità della radiazione luminosa al di là dello schermo (e cioè nel semispazio Ω_2 che non contiene la sorgente Q). Ammesso di essere in regime sinusoidale, ciascuna componente del campo elettromagnetico deve soddisfare, in Ω_2 , l'equazione di Helmholtz [12.11.1]. Ne deriva che, detta \tilde{U} una tale componente, il suo valore in un generico punto-campo $P \in \Omega_2$ deve soddisfare la [12.11.9] per ogni superficie chiusa Σ contenuta in Ω_2 . Consideriamo ora una superficie sferica centrata

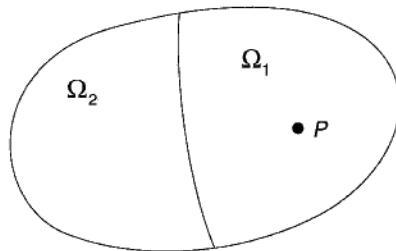


Figura 12.51

in P e di raggio R abbastanza grande (fig. 12.53) da intersecare lo schermo in una circonferenza γ che contenga interamente il foro; indichiamo con S_f la porzione del piano π interessata dal foro, e con S_0 la porzione del piano π delimitata dal contorno del foro e dalla circonferenza γ . Sia infine S' la parte di superficie sferica che appartiene al semispazio Ω_2 .

Consideriamo, ora, la superficie chiusa Σ costituita dalla unione di S_f , S_0 e S' , e applichiamo ad essa la formula di Helmholtz-Kirchhoff:

$$\tilde{U}(P) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{S_f} (\dots) dS + \iint_{S_0} (\dots) dS + \iint_{S'} (\dots) dS \right]. \quad [12.11.10]$$

Osserviamo ora che, a patto di scegliere una superficie sferica di raggio R abbastanza grande, l'integrale esteso a S' può essere trascurato rispetto agli altri due; infatti, si ha

$$\begin{aligned} \iint_{S'} \left[\tilde{U} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right] dS &= \\ &= \iint_{S'} \left[-\tilde{U} \left(-jk - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} + \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right]_{r=R} R^2 d\Omega = \\ &= e^{-jkr} \iint_{S'} \left[\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial R} + jk \tilde{U} \right) R + \tilde{U} \right] d\Omega, \end{aligned}$$

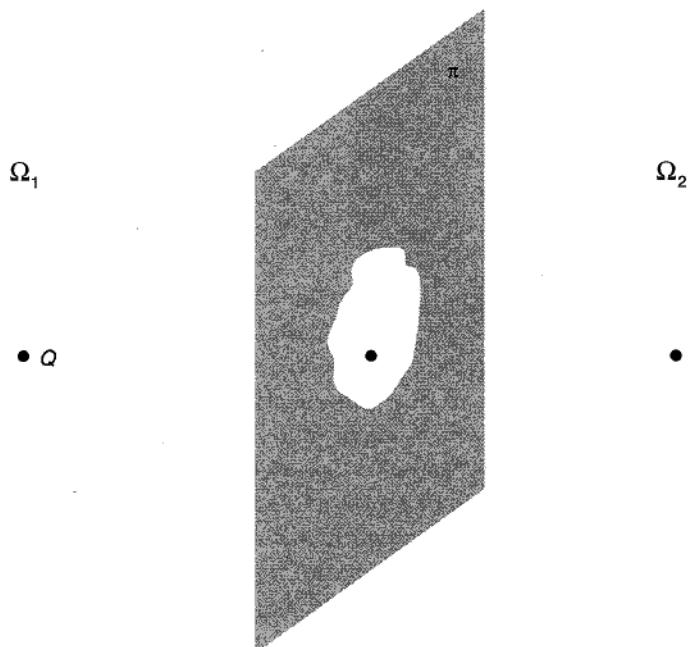


Figura 12.52

e, se si ammette che la funzione $\tilde{U}(P)$ vada a zero all'infinito in maniera da soddisfare la condizione di radiazione di Sommerfeld (vedi § 10.10), se ne conclude che l'integrale esteso a S' tende a zero per $R \rightarrow \infty$. Scegliendo dunque R abbastanza grande, possiamo riscrivere la [12.11.10] nella forma semplificata:

$$\tilde{U}(P) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{S_f} (\dots) dS + \iint_{S_0} (\dots) dS \right], \quad [12.11.11]$$

nella quale, naturalmente, la superficie S_0 è costituita da una porzione di schermo tanto più grande quanto più grande si sceglie R (a rigore, la [12.11.11] vale esattamente per $R \rightarrow \infty$).

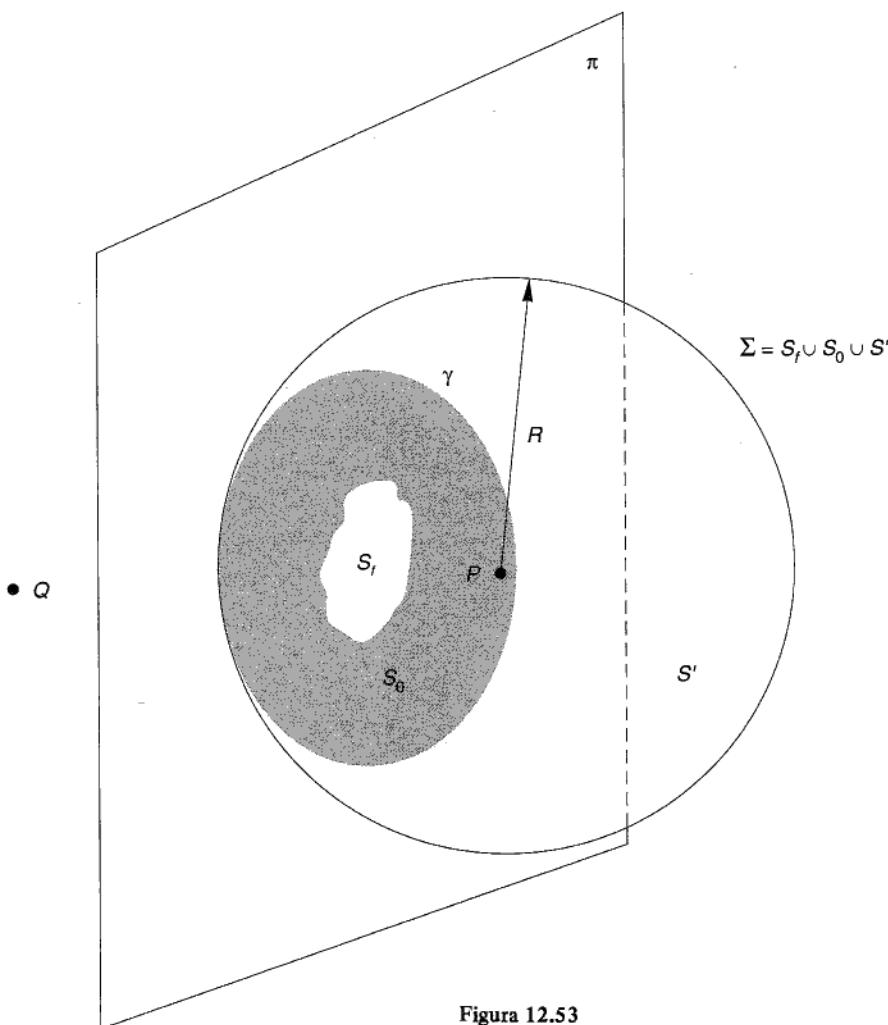


Figura 12.53

Ora, se le componenti del campo elettromagnetico (che abbiamo genericamente indicato con \tilde{U}) fossero note, insieme con le loro derivate normali, in tutti i punti di S_f e S_0 , e cioè immediatamente al di là del piano π , la [12.11.11] consentirebbe di calcolare ciascuna di esse in un qualsiasi punto $P \in \Omega_2$ (a parte, ovviamente, la eventuale complessità del calcolo), e il nostro problema sarebbe, in linea di principio, risolto. Purtroppo, il campo non è affatto noto su S_f e S_0 , poiché è ignota, a priori, la distribuzione delle sorgenti (cariche e correnti) che si inducono nello schermo per effetto dell'onda elettromagnetica irradiata dalla sorgente luminosa Q . E' a questo punto, che intervengono le drastiche ipotesi semplificatorie (dovute a Kirchhoff) che costituiscono la base della teoria classica della diffrazione luminosa (di Fresnel-Kirchhoff):

- 1) nei punti di S_0 , $\tilde{U} = \partial \tilde{U} / \partial n = 0$,
- 2) nei punti di S_f , i valori di \tilde{U} e $\partial \tilde{U} / \partial n$ sono uguali a quelli della sola onda incidente.

In altre parole, si ammette che le sorgenti che si inducono nello schermo siano tali da fornire al campo (e alle sue derivate normali) un contributo che è: uguale (in modulo) e contrario a quello dell'onda incidente, in corrispondenza della pagina posteriore dello schermo; nullo, in corrispondenza del foro.

Per quanto queste ipotesi semplificatorie possano apparire ragionevoli sul piano fisico, esse sono incongrue sotto il profilo matematico, per almeno due ragioni:

- a) si potrebbe dimostrare (non lo facciamo per brevità) che l'ipotesi che \tilde{U} e $\partial \tilde{U} / \partial n$ siano nulle su una porzione finita della superficie chiusa Σ implica, sulla base della [12.11.5], che \tilde{U} non è data dalla [12.11.9], ma è identicamente nulla nella regione racchiusa da Σ ;
- b) il campo che si costruisce calcolandone le componenti mediante la [12.11.9], sulla base delle condizioni al contorno semplificate di Kirchhoff, *non* soddisfa le equazioni di Maxwell in Ω_2 .

Si osservi, inoltre, che le condizioni di Kirchhoff non tengono conto delle relazioni costitutive del materiale che costituisce lo schermo: esse presuppongono semplicemente che lo schermo sia completamente assorbente nei confronti della radiazione incidente.

Nonostante tutte queste obiezioni, la teoria classica della diffrazione luminosa di Kirchhoff-Fresnel porta a risultati che si rivelano in buon accordo con l'esperienza nella maggior parte dei casi di interesse fisico. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che, nel caso della diffrazione della luce, la lunghezza d'onda λ della radiazione è molto piccola rispetto alle dimensioni trasversali del foro: ne deriva che le misure sono effettuate, in ogni caso, a distanze dai bordi del foro che sono molto maggiori di λ . Inoltre, data l'altissima frequenza della radiazione luminosa, ciò che si misura è l'intensità dell'onda, mediata su un numero molto grande di periodi. Queste considerazioni consentirebbero di mostrare (non lo facciamo per brevità) che la teoria classica di Kirchhoff-Fresnel, applicata ad esempio al caso del semipiano conduttore trattato nel capitolo precedente, porta a risultati che coincidono con quelli che si sono ottenuti con la tecnica semplificata illustrata nel paragrafo 10.14.

In ultima analisi, possiamo dire che la teoria di Kirchhoff-Fresnel porta a risultati corretti fin quando ci si limita a valutare l'intensità della radiazione in punti che siano a distanze dal bordo del foro dell'ordine di molte lunghezze d'onda, sia nella zona coperta dallo schermo, sia in quella del foro.

Riprendiamo, ora, la [12.11.11] ed applichiamo ad essa le condizioni al contorno di Kirchhoff, considerando come onda incidente emessa dalla sorgente Q , nei punti della superficie S_f del foro, l'onda sferica

$$\tilde{U}(P) = \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad [12.11.12]$$

moltiplicata eventualmente per una costante U_0 . Con riferimento alla figura 12.54, indicate rispettivamente con ρ e r le distanze del generico punto $A \in S_f$ dal punto-sorgente Q e dal punto-campo P , la [12.11.11] diventa (orientando ora \mathbf{n} verso l'interno di Σ , come in fig. 12.54):

$$\tilde{U}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_f} \left[\tilde{U} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \right] dS. \quad [12.11.13]$$

Osservando poi che è

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r},$$

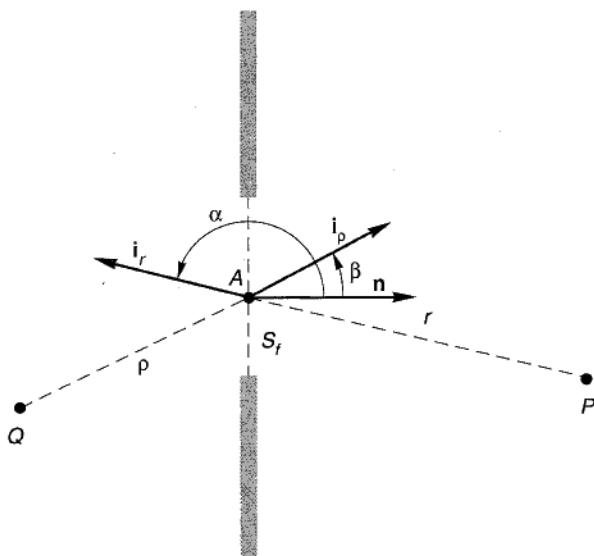


Figura 12.54

essendo α l'angolo formato tra la normale \mathbf{n} e il versore \mathbf{i}_r della direzione da P verso A , si ha

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \cos \alpha = \left(-jk - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \cos \alpha.$$

Poiché per ipotesi è $r \gg \lambda$, e quindi $1/r \ll k$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \approx -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \alpha. \quad [12.11.14]$$

La funzione \tilde{U} , nei punti di S_f , è esprimibile come

$$\tilde{U} = U_0 \frac{e^{-jkr}}{\rho}.$$

Per quel che riguarda infine il termine $\partial \tilde{U} / \partial n$ che figura nell'integrale [12.11.13], si ha (indicando con β l'angolo formato dalla normale \mathbf{n} con il versore \mathbf{i}_r della direzione orientata da Q verso A):

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} = \cos \beta \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho} = \cos \beta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(U_0 \frac{e^{-jkr}}{\rho} \right) = -\cos \beta \cdot U_0 \left(jk + \frac{1}{\rho} \right) \frac{e^{-jkr}}{\rho},$$

e, quindi, con la stessa approssimazione della [12.11.14]:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} \approx -jk U_0 \cos \beta \cdot \frac{e^{-jkr}}{\rho}. \quad [12.11.15]$$

Sostituendo la [12.11.14] e la [12.11.15] nella [12.11.13], si ha

$$\begin{aligned} \tilde{U}(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_f} \left[U_0 \frac{e^{-jkr}}{\rho} \left(-jk \cos \alpha \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-jkr}}{r} jk U_0 \cos \beta \frac{e^{-jkr}}{\rho} \right] dS = \\ &= jk \frac{U_0}{4\pi} \iint_{S_f} \frac{e^{-jk(r+\rho)}}{r\rho} (\cos \beta - \cos \alpha) dS. \end{aligned} \quad [12.11.16]$$

E' questa, la famosa formula di Kirchhoff-Fresnel, che fornisce l'onda diffratta dal foro S_f investito da un'onda sferica irradiata da una sorgente puntiforme; il fattore $(\cos \beta - \cos \alpha)$ è detto *fattore di inclinazione*, ed è pari all'incirca a 2, in molti casi pratici, poiché solitamente i fori hanno piccole dimensioni trasversali e inoltre $\alpha = \pi$, $\beta = 0$. E' semplice mostrare che, nel caso di un'onda incidente piana (invece che sferica), il fattore di inclinazione è pari a $(1 + \cos \alpha)$. (Provi il lettore a farlo.)

Un'ultima osservazione: si noti che la [12.11.16] fu ricavata da Fresnel e Kirchhoff quando ancora non era nota la natura elettromagnetica della radiazione luminosa!

12.12 Difrazione luminosa: le approssimazioni di Fraunhofer e di Fresnel

Riprendiamo l'integrale di Kirchhoff-Fresnel [12.11.16] e osserviamo innanzitutto che, essendo le dimensioni dei fori, nelle esperienze di diffrazione luminosa, dell'ordine delle frazioni di millimetro, ed essendo le distanze ρ e r che figurano nell'integrale dell'ordine almeno dei centimetri (o maggiori), è del tutto lecito considerare costante la funzione $1/r\rho$ ed estrarla dall'integrale, scrivendo

$$\tilde{U}(P) \approx jk \frac{U_0}{4\pi} \frac{1}{r\rho} \iint_{S_f} e^{-jk(r+\rho)} (\cos \beta - \cos \alpha) dS. \quad [12.12.1]$$

E' bene notare esplicitamente che non è possibile, invece, considerare costante l'esponenziale, poiché le distanze r e ρ sono moltiplicate per $k=2\pi/\lambda$, che è tipicamente dell'ordine di 10^7 m^{-1} : pertanto, anche piccolissime variazioni in r e ρ (dell'ordine, ad esempio, di 10^{-4} mm) determinano vistose variazioni nel valore dell'esponenziale.

Nel caso, assai frequente, in cui il fattore di inclinazione risulta pari a 2, la [12.12.1] diventa

$$\tilde{U}(P) \approx j \frac{k U_0}{2\pi} \frac{1}{r\rho} \iint_{S_f} e^{-jk(r+\rho)} dS = j \frac{U_0}{\lambda} \frac{1}{r\rho} \iint_{S_f} e^{-jk(r+\rho)} dS. \quad [12.12.2]$$

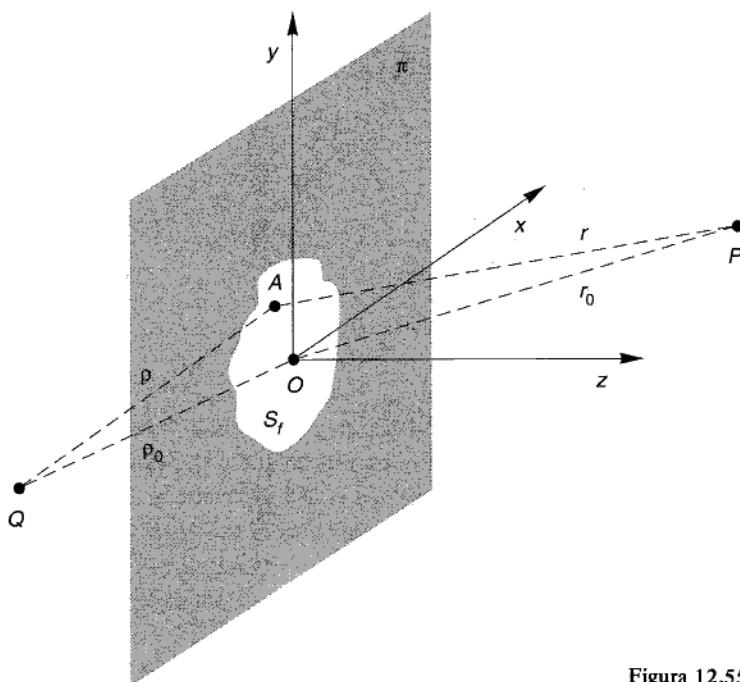


Figura 12.55

La risoluzione dei problemi di diffrazione è così ricondotta al calcolo dell'integrale di superficie [12.12.2], cosa non sempre facile, a meno che non si faccia ricorso ad opportune approssimazioni nell'espressione di r e ρ .

Per calcolare l'integrale [12.12.2], occorre innanzitutto esprimere il dS in funzione di due coordinate scelte per indicare il punto A variabile su S_f ; pertanto, scegliamo un sistema di coordinate cartesiane con il piano xy coincidente con il piano dello schermo (vedi fig. 12.55) e con origine in un punto O del foro S_f . Indichiamo con (x, y, z) le coordinate di P , con (x_Q, y_Q, z_Q) le coordinate di Q , con $(\xi, \eta, 0)$ le coordinate di A , e con ρ_0 e r_0 le distanze

$$\rho_0 = OQ, \quad r_0 = OP.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} r = PA &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2} = \\ &= \sqrt{r_0^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2} = r_0 \sqrt{1 - 2 \frac{x\xi + y\eta}{r_0^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{r_0^2}}, \end{aligned}$$

e analogamente

$$\rho = QA = \rho_0 \sqrt{1 - 2 \frac{x_Q \xi + y_Q \eta}{\rho_0^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{\rho_0^2}}.$$

Essendo ξ e η molto piccole rispetto a r_0 e ρ_0 , possiamo sviluppare in serie le radici, arrestandoci ai primi tre termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \approx r_0 - \frac{x\xi + y\eta}{r_0} + \left[-\frac{(x\xi + y\eta)^2}{2r_0^3} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r_0} \right], \\ \rho \approx \rho_0 - \frac{x_Q \xi + y_Q \eta}{\rho_0} + \left[-\frac{(x_Q \xi + y_Q \eta)^2}{2\rho_0^3} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2\rho_0} \right]. \end{array} \right. \quad [12.12.3]$$

Sostituendo queste espressioni approssimate di r e ρ nella [12.12.2], e introducendo, per comodità, le variabili adimensionali:

$$l = \frac{x}{r_0}, \quad m = \frac{y}{r_0}, \quad l_Q = -\frac{x_Q}{\rho_0}, \quad m_Q = -\frac{y_Q}{\rho_0}, \quad [12.12.4]$$

la [12.12.2] diventa (estraendo i termini, costanti, in r_0 e ρ_0)

$$\widetilde{U}(x, y, z) \approx j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0 \rho_0} \iint_{S_f} e^{jklf(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad [12.12.5]$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= \xi \cdot (l - l_Q) + \eta \cdot (m - m_Q) - \frac{1}{2} \left[(\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{\rho_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{r_0} - \frac{(l_Q \xi + m_Q \eta)^2}{\rho_0} \right]. \end{aligned} \quad [12.12.6]$$

Come si vede, la funzione $f(\xi, \eta)$ che figura nell'esponenziale dell'integrale [12.12.5] contiene termini lineari in ξ e η e termini quadratici nelle stesse variabili (si noti che i parametri l, l_Q, m, m_Q non dipendono da ξ e η e vanno considerati quindi costanti nella integrazione). Se r_0 e ρ_0 sono notevolmente più grandi di ξ e η , tanto che si possano trascurare i termini quadratici, la [12.12.5] assume la forma semplificata (detta *di Fraunhofer*):

$$\tilde{U}(x, y, z) \approx j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \iint_{S_f} e^{jk[(l - l_Q)\xi + (m - m_Q)\eta]} d\xi d\eta. \quad [12.12.7]$$

Quando, invece, i termini quadratici non possono essere trascurati, la [12.12.5] è del tipo *di Fresnel*. Sovente, la forma di Fraunhofer è sufficiente a trattare problemi di diffrazione luminosa: ciò si verifica specialmente quando la sorgente è posta nel fuoco di una lente che invia raggi paralleli sullo schermo (con ciò, $\rho_0 \rightarrow \infty$), e quando, inoltre, un'altra lente raccoglie i raggi diffratti e li concentra nel punto-campo P posto nel suo fuoco (con ciò, $r_0 \rightarrow \infty$).

Applicheremo ora la formula di Fraunhofer ad alcuni casi di notevole interesse fisico.

A. Diffrazione di Fraunhofer da un foro rettangolare

Consideriamo un foro rettangolare di base $2b$ e altezza $2h$ e applichiamo ad esso la [12.12.7]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, y, z) &= j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \int_{-b}^{+b} \int_{-h}^{+h} e^{jk[(l - l_Q)\xi + (m - m_Q)\eta]} d\xi d\eta = \\ &= j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \int_{-b}^{+b} \left[e^{jk(l - l_Q)\xi} \int_{-h}^{+h} e^{jk(m - m_Q)\eta} d\eta \right] d\xi = \\ &= j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{jk(l - l_Q)\xi}}{jk(m - m_Q)} \left[e^{jk(m - m_Q)h} + \right. \\ &\quad \left. - e^{-jk(m - m_Q)h} \right] d\xi = j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \cdot 4 \cdot \frac{\sin [k(m - m_Q)h]}{k(m - m_Q)} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sin [k(l - l_Q)b]}{k(l - l_Q)}. \end{aligned}$$

Ponendo

$$C = j 4 \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0},$$

si ha

$$\tilde{U}(x, y, z) = C b h \frac{\sin [k(l - l_Q)b]}{k(l - l_Q)b} \cdot \frac{\sin [k(m - m_Q)h]}{k(m - m_Q)h}. \quad [12.12.8]$$

Si noti che la dipendenza di \tilde{U} da z è contenuta nella r_0 che figura nella costante C , mentre la dipendenza da x e y è contenuta nei parametri l e m .

Poiché l'intensità dell'onda elettromagnetica è proporzionale al quadrato del modulo della \tilde{U} , si ha (indicando con I_{emo} la costante di proporzionalità):

$$I_{\text{em}} = I_{\text{emo}} \left\{ \frac{\sin [k(l-l_Q)b]}{k(l-l_Q)b} \right\}^2 \left\{ \frac{\sin [k(m-m_Q)h]}{k(m-m_Q)h} \right\}^2. \quad [12.12.9]$$

Il grafico della funzione $(\sin x/x)^2$ che figura in questa relazione è riportato nella figura 12.56: essa ha il primo massimo (pari all'unità) per $x=0$, e i massimi successivi (molto meno pronunciati) per $x \approx \pm 3/2\pi, \pm 5/2\pi, \dots$, i minimi (di valore nullo) si trovano in corrispondenza di $x \approx \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$

Dalla [12.12.9] si vede quindi che l'intensità luminosa sullo schermo π presenta zone alterne di massima e minima luminosità, tanto nella direzione x che nella y : nella figura 12.57 è riportata una classica immagine di diffrazione per un foro rettangolare.

Si noti, nella figura 12.57, che, mentre l'apertura è schiacciata verticalmente, la sua immagine di diffrazione è allungata verticalmente (provvi il lettore a spiegare la cosa, in base alla [12.12.9]). Naturalmente, quando la sorgente non è puntiforme, l'immagine di diffrazione può essere ottenuta per integrazione sulla sorgente estesa;

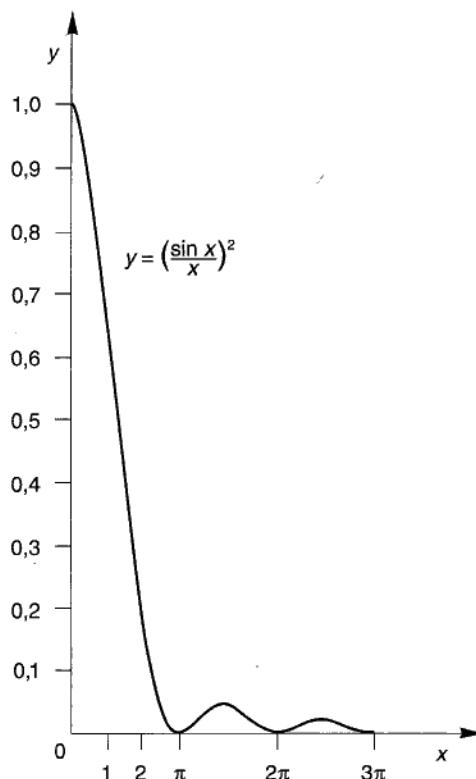


Figura 12.56

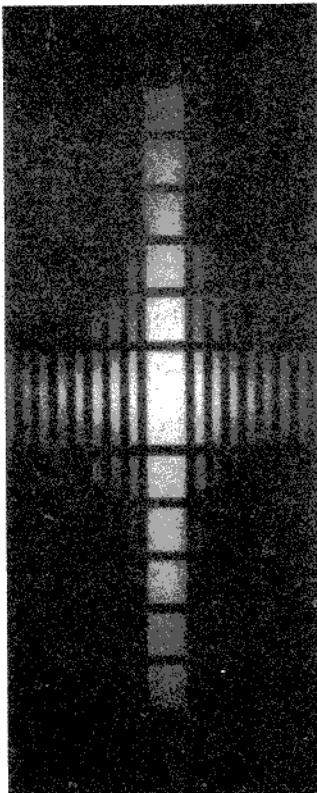


Figura 12.57

se le sorgenti elementari sono coerenti, si integrerà la \widetilde{U} ; in caso contrario, si integrerà la I_{em} .

Un esempio particolarmente interessante è quello di una sorgente costituita da un filo rettilineo molto lungo che illumina una fenditura di larghezza $2b$, anch'essa molto lunga e parallela al filo luminoso. Se si ammette che i diversi punti della sorgente emettano luce in maniera incoerente, l'intensità luminosa sullo schermo si ottiene integrando la [12.12.9]:

$$I_{\text{em}1} = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{em}}(P) dq,$$

nella quale si è posto $q = m - m_Q$ e la $I_{\text{em}}(P)$ è espressa dalla [12.12.9]. Si potrebbe dimostrare (non lo facciamo per brevità) che risulta

$$I_{\text{em}1} = I_{\text{em}10} \left[\frac{\sin k(l - l_Q)b}{k(l - l_Q)b} \right]^2, \quad [12.12.10]$$

con

$$I_{\text{em}10} = \frac{\lambda}{2h} I_{\text{em}0}.$$

L'immagine di diffrazione è costituita da una successione di frange luminose e oscure, parallele alla sorgente e alla fenditura.

B. Diffrazione di Fraunhofer da un foro circolare

Consideriamo un foro circolare di raggio a (fig. 12.58) e supponiamo, per semplicità, che la sorgente Q sia posta sull'asse del foro (e che questo passi per l'origine O). Dalle [12.12.4] si ha allora $l_Q = m_Q = 0$, e la [12.12.7] diventa

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(x, y, z) &= j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \iint_{S_f} e^{jk(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta = \\ &= j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \iint_{S_f} e^{j \frac{k}{r_0} (x\xi + y\eta)} d\xi d\eta.\end{aligned}\quad [12.12.11]$$

D'altra parte, indicando con \mathbf{r}_{OP} il vettore spiccato da O verso P e con \mathbf{r}_{OA} quello spiccato da O verso A , si ha

$$x\xi + y\eta = \mathbf{r}_{OP} \cdot \mathbf{r}_{OA} \quad [12.12.12]$$

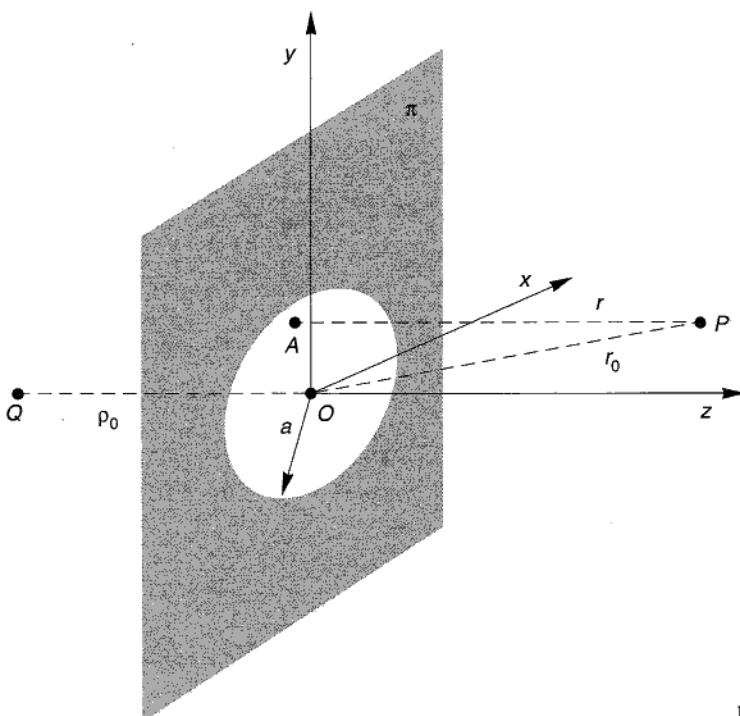


Figura 12.58

Introduciamo ora, nel piano π del foro, un sistema di coordinate polari, ρ^*, θ , come nella figura 12.59, scegliendo l'asse ζ rispetto al quale misurare gli angoli θ in maniera che il piano π' , ortogonale al foro e contenente l'asse ζ , passi anche per il punto P . In questo modo, le coordinate polari del punto P' , proiezione di P sul piano π , sono $(\rho_P^*, 0)$. Indicando poi con (ρ_A^*, θ_A) le coordinate polari di A , si ha

$$\mathbf{r}_{OA} = \rho_A^* \mathbf{i}_A$$

$$\mathbf{r}_{OP'} = \rho_P^* \mathbf{i}_\zeta = \rho_P^* \mathbf{i}_\zeta = r_0 \sin \delta \mathbf{i}_\zeta$$

avendo indicato con \mathbf{i}_A e \mathbf{i}_ζ rispettivamente, i versori delle direzioni orientate spiccate da O verso A e P' . Si ha inoltre $\mathbf{r}_{PP'} = z \mathbf{i}_z$, e quindi

$$x \xi + y \eta = \mathbf{r}_{OP} \cdot \mathbf{r}_{OA} = (\mathbf{r}_{OP} + \mathbf{r}_{PP'}) \cdot \mathbf{r}_{OA} = \mathbf{r}_{OP'} \cdot \mathbf{r}_{OA} = r_0 \rho_A^* \sin \delta \cos \theta_A. \quad [12.12.13]$$

L'elemento d'area $dS = d\xi d\eta$ può essere riscritto, nelle variabili (ρ_A^*, θ_A) , nella forma

$$dS = \rho_A^* d\rho_A^* d\theta_A. \quad [12.12.14]$$

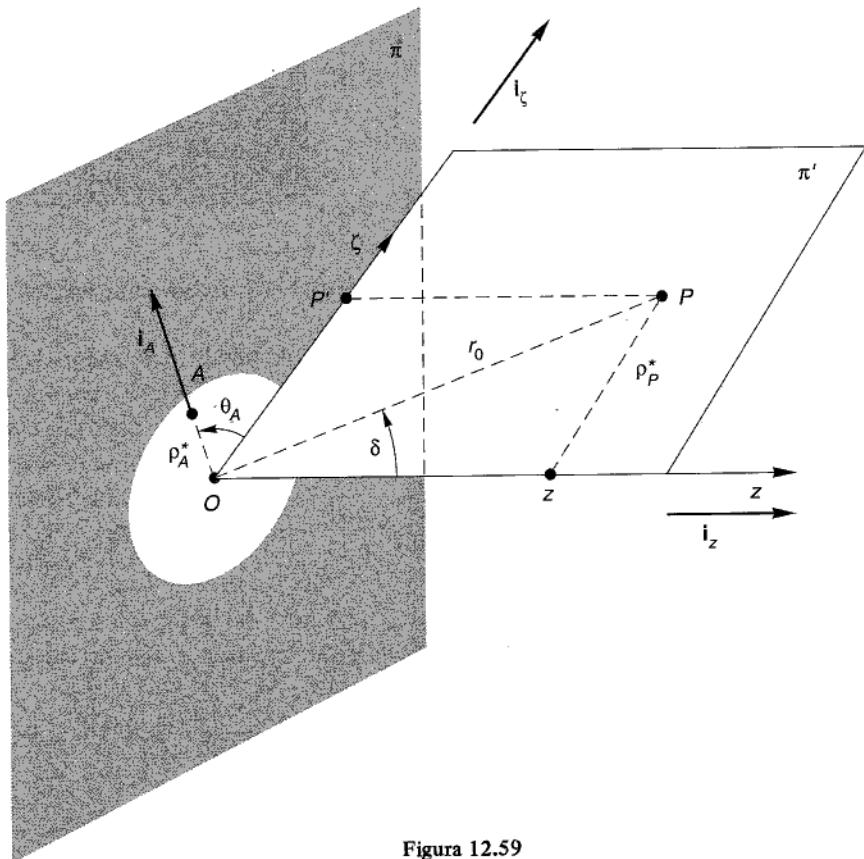


Figura 12.59

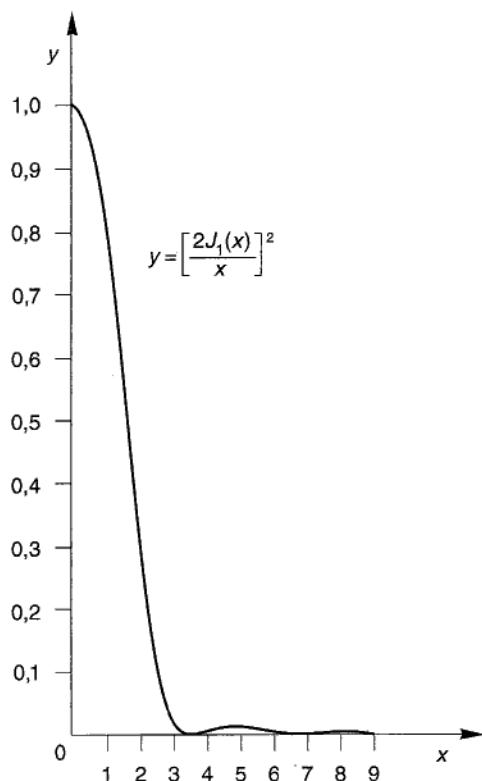


Figura 12.60

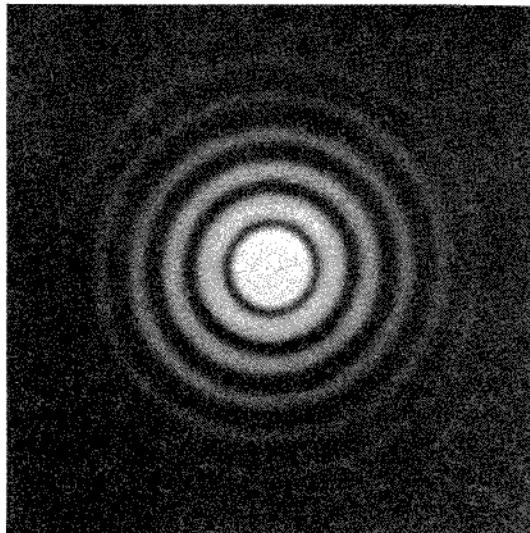


Figura 12.61

Sostituendo la [12.12.13] e la [12.12.14] nella [12.12.11], otteniamo

$$\tilde{U}(x, y, z) = j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \int_0^a \rho_A^* \left(\int_0^{2\pi} e^{jk\rho_A^* \sin \delta \cos \theta_A} d\theta_A \right) d\rho_A^*. \quad [12.12.15]$$

Calcolando l'integrale doppio (per brevità, tralasciamo gli sviluppi), si ottiene

$$\tilde{U}(x, y, z) = j \frac{U_0}{\lambda} \frac{e^{-jk(r_0 + \rho_0)}}{r_0 \rho_0} \cdot 2\pi a^2 \cdot \frac{J_1(ka \sin \delta)}{ka \sin \delta}, \quad [12.12.16]$$

dove la funzione J_1 dell'argomento $ka \sin \delta$ è detta *funzione di Bessel di prima specie ordine uno*. L'intensità luminosa, essendo proporzionale al quadrato del modulo di U , è quindi

$$I_{\text{em}} = I_{\text{emo}} \left[\frac{2J_1(ka \sin \delta)}{ka \sin \delta} \right]^2. \quad [12.12.17]$$

Nella figura 12.60 è riportato il grafico della funzione $[2J_1(x)/x]^2$: come si vede, rispetto a quello relativo al foro rettangolare (vedi fig. 12.56), i massimi successivi al primo sono ancor più attenuati. Nella figura 12.61 è riportata, poi, la fotografia della relativa immagine di diffrazione: la porzione centrale, luminosissima, è detta *disco di Airy*.

Il raggio R di tale disco è legato all'ascissa del primo punto di nullo della funzione rappresentata nella figura 12.60:

$$R = 1,22 \frac{\lambda}{2a} r_0. \quad [12.12.18]$$

Questa relazione è di particolare importanza in ottica, poiché fornisce il cosiddetto *potere risolutivo* di uno strumento ottico. Da essa infatti si deduce che una sorgente puntiforme che illumina un qualsiasi dispositivo ottico non può dar luogo a una immagine puntiforme, poiché il sistema di lenti che costituisce il dispositivo determina un'apertura massima (solitamente circolare) attraverso la quale passano i raggi luminosi. Questa apertura determina, a sua volta, il valore del raggio a da inserire nella [12.12.18]: ne deriva che due sorgenti luminose puntiformi che distano fra loro meno di R danno luogo a immagini circolari che si sovrappongono parzialmente e sono pertanto indistinguibili.

Esperienze illustrate

1. Il prisma a dispersione

E' costituito da un mezzo trasparente, di indice di rifrazione n_{21} rispetto all'aria (vedi § 12.1), che ha la forma di un prisma retto a basi triangolari, come nella figura 12.62, ove ne è disegnata una sezione parallela alle basi.

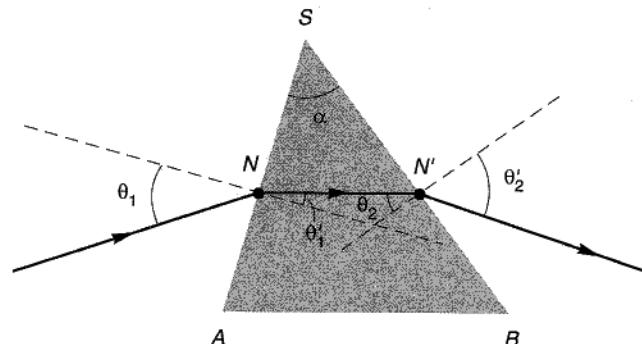


Figura 12.62

Quando un raggio luminoso incide su una delle due facce, ad esempio su SA , si ha (vedi § 12.1):

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta'_1} = n_{12};$$

il raggio rifratto (NN') incide, a sua volta, sulla faccia SB , ove, purché l'angolo di incidenza θ_2 sia minore dell'angolo limite θ^* (vedi § 11.5), si ha una nuova rifrazione, secondo la

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta'_2} = n_{21} = \frac{1}{n_{12}}.$$

Si dimostra facilmente (provi il lettore a farlo) che condizione necessaria affinché esista almeno un raggio incidente su SA che emerga da SB è che sia

$$\alpha \leq 2\theta^*$$

dove α è l'angolo formato dalle due facce del prisma.

Poiché l'indice di rifrazione n_{12} è (vedi § 11.3) funzione della frequenza della luce incidente, se ne deduce che, a parità di θ_1 , l'angolo θ'_2 viene a dipendere dalla frequenza. Poiché questa dipendenza è abbastanza significativa — ad esempio, per il vetro Crown, n_{12} passa dal valore 1,504 in luce rossa ($\lambda \cong 7600 \times 10^{-10}$ m), al valore 1,520 per luce violetta ($\lambda \cong 4300 \times 10^{-10}$ m) —, l'effetto di dispersione che si ottiene operando in luce bianca è vistoso. La luce bianca infatti è composta di radiazioni di ogni frequenza visibile, e ciascuna di esse subisce una sua specifica rifrazione, di entità diversa dalle altre; ne nasce così lo spettro luminoso a tutti ben noto. Un fenomeno analogo (dovuto alla dispersione prodotta dalle minute goccioline d'acqua sospese nell'aria dopo un temporale) si ha nel caso dell'arcobaleno.

2. Spettroscopi, spettrografi, monocromatori

La luce proveniente da una sorgente S (vedi fig. 12.63) viene fatta convergere, mediante un obiettivo O_1 (spiegheremo cos'è, di qui a poco) su una fenditura F_1 , normale al piano di figura; di qui, la luce raggiunge un secondo obiettivo O_2 che la trasforma in un fascio di raggi paralleli (per questo occorre che F_1 sia nel piano focale di O_2). I raggi incidono su un prisma P (in genere, a sezione non triangolare) che

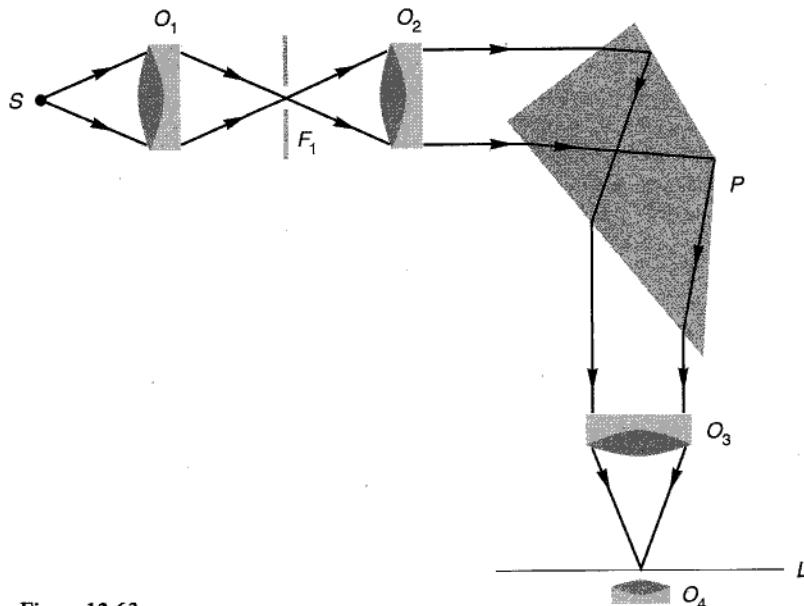


Figura 12.63

“disperde” la luce, come indicato in figura. Il fascio di luce dispersa che emerge da P viene fatto convergere nuovamente, mediante un terzo obiettivo O_3 , in maniera che ciascuna componente monocromatica dia un’immagine (ortogonale al piano della figura) della fenditura F_1 . Le diverse immagini, corrispondenti alle diverse frequenze, sono affiancate e parallele, dando, così, origine allo spettro continuo della luce incidente, che può essere osservato mediante l’oculare O_4 (vedi più avanti); in questo caso, il dispositivo prende il nome di *spettroscopio*. Se, in luogo dell’oculare O_4 , si dispone una lastra fotografica L , lo strumento diventa uno *spettrografo*. Se, infine, lo spettro è raccolto su uno schermo opaco, sul quale sia praticata una sottile fenditura (ortogonale al piano della figura), il dispositivo diventa un *monocromatore*, poiché dalla fenditura emerge un fascetto di raggi monocromatici (cioè, di una sola frequenza), mentre i raggi di frequenze diverse sono intercettati dallo schermo.

3. Obiettivi

Come si ricorderà (vedi equazione [12.7.7]) la distanza focale f di una lente sottile è data da

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

dove n è l’indice di rifrazione del materiale di cui la lente è fatta e R_1, R_2 sono i raggi di curvatura delle due superfici Σ_1 e Σ_2 . Poiché n dipende dalla frequenza, f risulta diversa per luci di colore diverso: per dispersione normale, f è minore per il violetto che per il rosso. Nella figura 12.64, i punti F_v e F_r rappresentano, appunto, i due fuochi della stessa lente per luce violetta e per luce rossa. Ciò dà luogo, evidentemente, a inconvenienti (detti di *aberrazione cromatica*) quando si usi la lente con luce bianca.

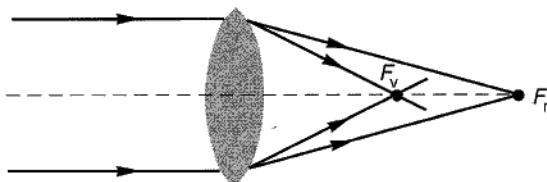


Figura 12.64

Per avere un'idea quantitativa della distanza tra i due fuochi, basta derivare la distanza focale f rispetto a n :

$$\frac{df}{dn} = -f \frac{1}{n-1};$$

si ha, quindi

$$\Delta f \approx -\frac{f}{n-1} \Delta n.$$

Considerando le due radiazioni di lunghezze d'onda $\lambda_C = 6563 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 1 \text{ \AAngström} = 10^{-10} \text{ m}$), corrispondente al rosso, e $\lambda_F = 4861 \text{ \AA}$, corrispondente al blu, risulta

$$\Delta f = f_F - f_C = -f_D \frac{1}{n_D - 1} (n_F - n_C),$$

avendo indicato con: f_D la distanza focale corrispondente alla lunghezza d'onda $\lambda_D = 5893 \text{ \AA}$ (gialla), compresa fra λ_F e λ_C ; n_D il valore di n in corrispondenza di λ_D ; n_F, n_C i valori di n corrispondenti a λ_F e λ_C ; f_F, f_C i valori di f corrispondenti a λ_F e λ_C .

Ponendo

$$\frac{1}{n_A} = \frac{1}{n_D - 1} (n_F - n_C),$$

(n_A è detto *numero di Abbe*), si ha

$$\Delta f = -f_D \frac{1}{n_A}.$$

Mediante un sistema di lenti che prende il nome di "doppietto acromatico", è possibile eliminare l'aberrazione cromatica in corrispondenza di due colori dello spettro, e cioè fare in modo che i fuochi corrispondenti a questi due colori coincidano: se l'obiettivo serve per osservare con l'occhio, conviene che i due colori siano quelli corrispondenti alle lunghezze d'onda λ_C e λ_F .

Doppietto acromatico. È costituito da due lenti sottili a contatto (fig. 12.65); la distanza focale f del sistema (vedi § 12.7) è data da

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{21}} \right) + (n_2 - 1) \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{22}} \right);$$

(i secondi pedici 1 e 2 di R indicano rispettivamente la prima e la seconda lente).



Figura 12.65

Per eliminare l'aberrazione cromatica in corrispondenza di λ_C e λ_F , occorre che risultino $f_C = f_F$, e quindi

$$(n_{1F} - n_{1C}) \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{21}} \right) + (n_{2F} - n_{2C}) \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{22}} \right) = 0,$$

che equivale alla

$$\frac{n_{1F} - n_{1C}}{n_{1D} - 1} (n_{1D} - 1) \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{21}} \right) + \frac{n_{2F} - n_{2C}}{n_{2D} - 1} (n_{2D} - 1) \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{22}} \right) = 0.$$

Introducendo, poi, i *numeri di Abbe* n_{1A} e n_{2A} :

$$\frac{1}{n_{1A}} = \frac{1}{n_{1D} - 1} (n_{1F} - n_{1C}),$$

$$\frac{1}{n_{2A}} = \frac{1}{n_{2D} - 1} (n_{2F} - n_{2C})$$

e le distanze focali f_{1D} e f_{2D} , corrispondenti a λ_D , si ottiene

$$\frac{1}{f_{1D} n_{1A}} + \frac{1}{f_{2D} n_{2A}} = 0,$$

e quindi

$$f_{1D} n_{1A} + f_{2D} n_{2A} = 0.$$

Affinché questa relazione sia verificata dal doppietto, occorre che una delle lenti sia convergente (distanza focale positiva) e l'altra divergente (distanza focale negativa). Per ottenere, inoltre, che il doppietto sia convergente, occorre che risulti

$$\frac{1}{f_D} = \frac{1}{f_{1D}} + \frac{1}{f_{2D}} > 0.$$

I doppietti acromatici più comuni utilizzano una lente di vetro *flint* ($n_{1A} = 35$) ed una di vetro *crown* ($n_{2A} = 60$).

Fin dal secolo scorso, per eliminare (o almeno attenuare) le aberrazioni di diverso tipo che limitano le prestazioni dei sistemi ottici si sono realizzati obiettivi a più di due lenti, di cui però non è qui il caso di parlare.

Sono detti *oculari* i sistemi ottici usati per osservare con l'occhio l'immagine reale fornita da un obiettivo: essi trasformano l'immagine reale in una virtuale, posta all'infinito (l'occhio è, in questo caso, in posizione di riposo), oppure a una distanza di circa 25 cm dall'occhio (in questo caso, si ha una visione ottimale).

4. L'occhio umano

Dal punto di vista fisico, l'occhio umano può essere considerato un sistema ottico concentrato i cui successivi mezzi rifrangenti sono (fig. 12.66): la cornea, l'umore acqueo, il cristallino, l'umore vitreo. La pupilla costituisce un *diaframma* (il cui diametro varia da ~ 2 mm a ~ 9 mm) che limita il fascio di raggi che entra nell'occhio.

La retina è la membrana posta nella parte posteriore dell'occhio: su essa si formano le immagini. Opportuni trasduttori trasformano l'immagine luminosa che si forma sulla retina in impulsi nervosi che vengono trasmessi a una specifica area del cervello.

Il cristallino è una lente convergente la cui distanza focale è variabile, per effetto di un muscolo che ne modifica i raggi di curvatura.

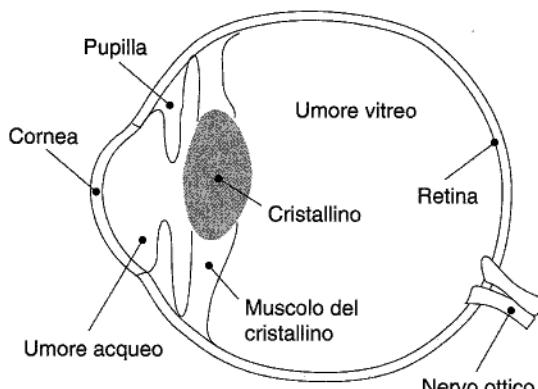


Figura 12.66

5. Lente di ingrandimento

Quando un oggetto è visto dall'occhio, esso appare più grande via via che viene avvicinato (fig. 12.67), poiché più grande è l'immagine che si forma sulla retina. Naturalmente, per ottenere ciò occorre che il cristallino cambi la sua distanza focale a seconda della distanza cui è posto l'oggetto dall'occhio. Questa distanza non può,

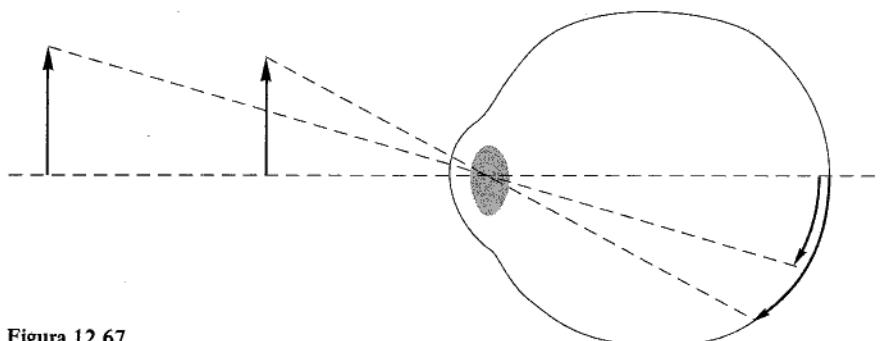


Figura 12.67

però, scendere al di sotto di un certo limite (tipicamente, 15÷20 cm) al di là del quale il cristallino non riesce a mettere a fuoco l'oggetto la cui l'immagine appare sfocata. Per ingrandire ulteriormente l'immagine, si può utilizzare una lente convergente posta tra l'oggetto e l'occhio; in questo modo, l'oggetto può essere avvicinato ulteriormente all'occhio, poiché la lente coopera con il cristallino per mettere a fuoco l'immagine. Il modo in cui la lente agisce è mostrato nella figura 12.68: l'oggetto AB , posto a distanza x_1 dalla lente (considerata qui sottile), determina un'immagine virtuale $A'B'$ posta a distanza $x'_1 > x_1$; l'occhio dell'osservatore è posto all'incirca in corrispondenza del secondo piano focale della lente. Provvi il lettore a dimostrare che, detto θ' l'angolo sotto cui è vista l'immagine virtuale (vedi fig. 12.68) e θ l'angolo sotto cui è visto l'oggetto reale AB (senza l'interposizione della lente), quando sia posto alla distanza di 250 mm dall'occhio, l'ingrandimento della lente è

$$G_\alpha = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{250}{f},$$

essendo f (in mm) la distanza focale della lente.

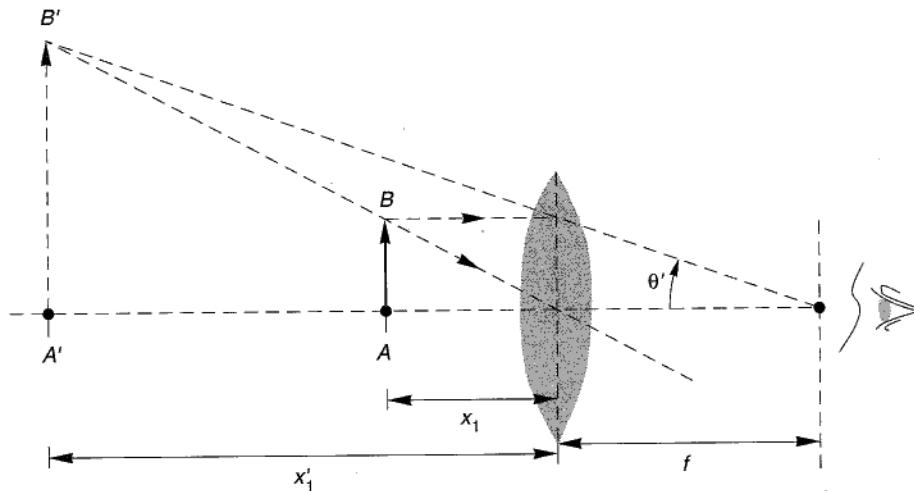


Figura 12.68

6. Microscopio

E' costituito, in linea di principio, da due sistemi di lenti (fig. 12.69): un obiettivo O_1 e un oculare O_2 , dotati di distanze focali all'incirca uguali e molto piccole rispetto alla distanza d tra essi (tipicamente $f=16$ mm, $d=192$ mm).

Nella figura 12.69, F_1 e F'_1 sono i fuochi dell'obiettivo, F_2 è il primo fuoco dell'oculare; ragionando come nel paragrafo 12.7 (provvi il lettore a farlo, a titolo di esercizio), si vede subito che il primo fuoco, F , del sistema composto è situato 1,6 mm a sinistra di F_1 . Un oggetto posto nel fuoco F dà luogo a un'immagine reale (capovolta) nelle immediate vicinanze di F_2 . Questa immagine reale funge da oggetto per l'oculare O_2 , il quale funziona da lente di ingrandimento, dando luogo a un'immagine virtuale (ancora capovolta rispetto all'oggetto reale) in prossimità di F_1 . L'ingrandimento del microscopio è pari al prodotto degli ingrandimenti di O_1 e O_2 .

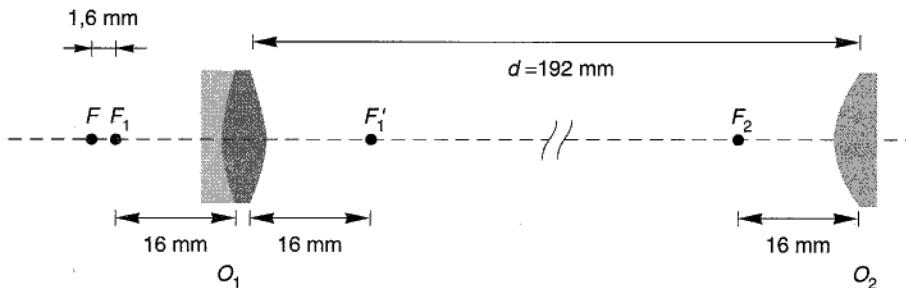


Figura 12.69

7. Grandezze fotometriche

Nel paragrafo 10.2 abbiamo visto come sia definita l'intensità i_{em} di una radiazione elettromagnetica in un generico punto-istante (P, t): essa è pari al modulo del vettore di Poynting nel punto-istante considerato. Si ha, dunque

$$i_{\text{em}} = |\mathbf{P}|; \quad [1]$$

i_{em} corrisponde all'energia che attraversa, per unità di tempo, l'unità di area di una superficie ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. Le dimensioni di i_{em} sono, dunque W/m^2 .

Altre grandezze energetiche di uso frequente sono le seguenti.

Il *flusso energetico* Φ_{em} attraverso una superficie S :

$$\Phi_{\text{em}} = \left| \iint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \right|; \quad [2]$$

esso corrisponde all'energia elettromagnetica che attraversa per unità di tempo la superficie e si misura, quindi, in watt.

L'*irraggiamento energetico* E_{em} in un punto di una superficie S :

$$E_{\text{em}} = |\mathbf{P}_n| \quad [3]$$

essendo \mathbf{P}_n la componente del vettore di Poynting in direzione normale alla superficie; si misura in W/m^2 . Quando S è ortogonale a \mathbf{P} , E_{em} coincide con i_{em} .

L'*intensità di emissione energetica* \mathcal{I}_{em} di una sorgente puntiforme: considerato un angolo solido elementare di valore $d\Omega$, con vertice nella sorgente puntiforme, si ha

$$\mathcal{I}_{\text{em}} = \frac{d\Phi_{\text{em}}}{d\Omega}, \quad [4]$$

essendo $d\Phi_{\text{em}}$ il flusso energetico attraverso una qualunque sezione dell'angolo solido considerato; \mathcal{I}_{em} si misura in W/sr ; in generale, \mathcal{I}_{em} varia con la direzione (vedi ad esempio § 10.10).

La *brillanza energetica* Σ_{em} di un punto di una sorgente in una direzione assegnata. Si consideri una superficie materiale S che emetta onde elettromagnetiche, e un suo punto Q : sia \mathbf{n} il versore della normale a S in Q e sia \mathbf{r} una qualunque direzione orientata spiccata da Q . Si consideri, infine, un angolo solido elementare $d\Omega$ attorno alla

direzione orientata \mathbf{r} , con vertice in Q . Si ha

$$\Sigma_{\text{em}} = \frac{d^2 \Phi_{\text{em}}}{dS \cos \alpha d\Omega}, \quad [5]$$

essendo α l'angolo formato tra \mathbf{n} e \mathbf{r} ; Σ_{em} si misura in $\text{W}/\text{m}^2 \text{sr}$.

Quando si ha a che fare con le radiazioni luminose, le grandezze fin qui definite non sono adatte a caratterizzare quantitativamente i fenomeni connessi con le sensazioni visive che si producono in noi. Infatti, l'occhio umano non è ugualmente sensibile alle radiazioni elettromagnetiche di lunghezze d'onda diverse; si è già visto che le sole radiazioni visibili sono quelle comprese tra $\lambda_{\min} \cong 4000 \text{ \AA}$ e $\lambda_{\max} \cong 8000 \text{ \AA}$, ma, anche all'interno di questo intervallo, l'occhio reagisce diversamente in corrispondenza dei diversi valori di λ .

Ciò significa che, a parità di energia che colpisce la retina per unità di tempo e di area, la sensazione di luminosità prodotta varia al variare della lunghezza d'onda. Conviene quindi introdurre grandezze specifiche, dette *fotometriche*, le quali corrispondono a quelle energetiche già definite, ma tengono conto della diversa sensibilità dell'occhio al variare di λ . La cosa è tutt'altro che semplice ed è soggetta a continui aggiornamenti: comunque, da esperienze condotte con tecniche specifiche (che non è qui il caso di illustrare) su un gran numero di persone, si è giunti a stabilire convenzionalmente una curva spettrale del fattore di visibilità relativa, per visione diurna, per l'occhio normale medio (fig. 12.70), che fornisce i valori di un coefficiente adimensionale V , detto di *visibilità relativa*, in funzione di λ . Posto, poi

$$K(\lambda) = K_{\max} V(\lambda), \quad [6]$$

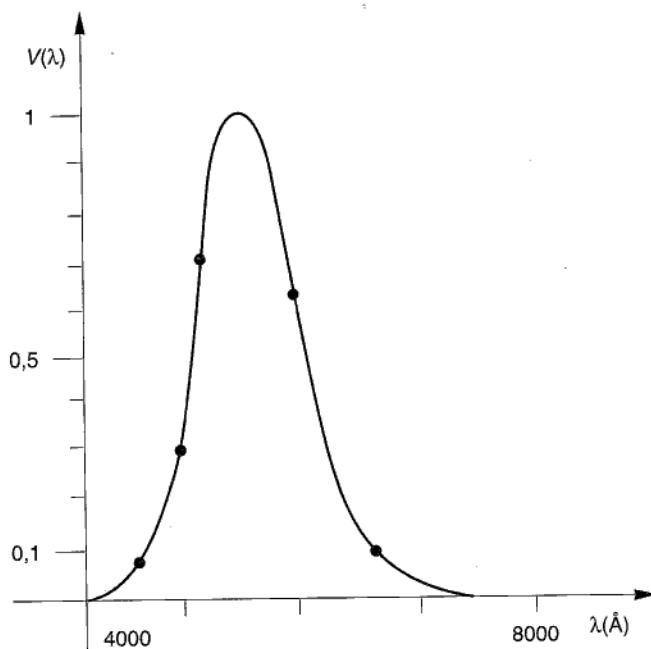


Figura 12.70

dove K_{\max} è un fattore numerico che tiene conto delle unità di misura scelte per le grandezze fotometriche, si danno le seguenti definizioni:

Il *flusso luminoso* Φ_{lum} , in corrispondenza di una radiazione monocromatica di lunghezza d'onda λ , è dato da

$$\Phi_{\text{lum}} = K(\lambda) \Phi_{\text{em}}. \quad [7]$$

Scegliendo come unità di misura di Φ_{lum} il lumen (lm), il parametro K_{\max} è

$$K_{\max} \approx \frac{2000}{3} \text{ lm/W}. \quad [8]$$

L'*irradiamento luminoso*, detto anche *illuminamento* E_{lum} :

$$E_{\text{lum}} = K(\lambda) E_{\text{em}}; \quad [9]$$

l'unità di misura corrispondente è il lux ($1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$).

L'*intensità di emissione luminosa*, detta anche *intensità luminosa* I_{lum} :

$$I_{\text{lum}} = K(\lambda) I_{\text{em}}; \quad [10]$$

l'unità di misura corrispondente è la candela ($1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/sr}$).

La *brillanza luminosa* Σ_{lum} :

$$\Sigma_{\text{lum}} = K(\lambda) \Sigma_{\text{em}}; \quad [11]$$

l'unità di misura corrispondente è la cd/m^2 .

Recentemente si è stabilita come unità fotometrica fondamentale, alla quale aggiungere le altre unità a mezzo delle [8]÷[11], la candela.

Esercizi

1. Ricavare la legge della riflessione per i raggi luminosi facendo uso del principio di Fermat.

(*Suggerimento*. Con riferimento alla fig. 12.71, considerare tutti i raggi del tipo APB , con P variabile sul piano di riflessione π , e mostrare che quello che verifica la legge di riflessione percorre il minimo cammino ottico.)

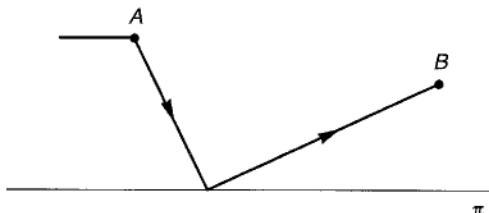


Figura 12.71

2. Ricavare la legge della rifrazione per i raggi luminosi, facendo uso del principio di Fermat.

(Ragionare in maniera analoga a quella dell'esercizio 1.)

3. Una bacchetta di vetro di indice di rifrazione $n=1,56$ ha una estremità arrotondata a forma di semisfera, di raggio $r=2,8 \text{ cm}$. Una sorgente luminosa S alta 2 cm è collocata (fig. 12.72) a una distanza di 15 cm dalla estremità sferica della bacchetta. Determinare l'altezza h dell'immagine S' e la sua distanza x dalla estremità.

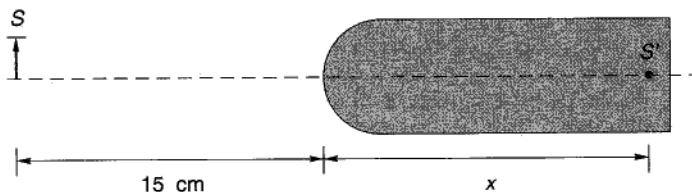


Figura 12.72

6. Si vuole proiettare l'immagine di una sorgente alta cm 5 su uno schermo piano posto a 320 cm dalla sorgente, facendo uso di una lente sottile che dia un ingrandimento trasversale dell'immagine pari a 20. Determinare la distanza x della lente dalla sorgente e la sua distanza focale f .

7. Una lente sottile convergente ha una distanza focale di 10 cm; una lente sottile divergente (distanza focale -10 cm) dista 5 cm dalla prima. Determinare la distanza focale del sistema.

8. Una lente di vetro spessa 3 cm (fig. 12.73) ha una faccia di raggio 5 cm e l'altra di raggio 2 cm; assumendo un indice di rifrazione del vetro $n = 1,5$, determinare le posizioni dei fuochi, dei punti principali, dei punti nodali e le distanze focali della lente.

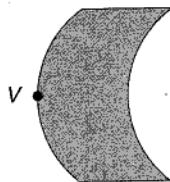


Figura 12.73

7. Si considerino due onde piane sinusoidali, polarizzate linearmente, che si sovrappongono su uno schermo. Dimostrare che, se le direzioni di polarizzazione delle due onde sono ortogonali fra loro, sullo schermo non si rilevano frange di interferenza.

Capitolo 13

Elementi di elettrodinamica e meccanica relativistiche

13.1 Introduzione

Se ripercorriamo mentalmente la strada seguita nell'esporre i fenomeni e le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo, incontriamo alcuni momenti fondamentali: primo, definizione di carica elettrica e descrizione delle interazioni tra cariche ferme in un riferimento inerziale; secondo, descrizione delle interazioni magnetiche tra correnti stazionarie in un riferimento inerziale; terzo, descrizione delle interazioni elettromagnetiche tra cariche e correnti variabili nel tempo, sempre in un riferimento inerziale.

In particolare, l'interazione magnetica tra correnti è stata presentata come un fatto sperimentale del tutto indipendente dall'interazione tra cariche ferme. Non è possibile, per questa via, spiegare i fenomeni magnetici in termini di quelli elettrici: anche quando si fa riferimento a campi variabili nel tempo, l'interazione elettromagnetica viene sì concepita come un fenomeno in cui le due interazioni sono inestricabilmente connesse, ma ciascuna conserva una sua realtà fisica non riconducibile all'altra. Nella esposizione classica da noi seguita i due fenomeni si verificano insieme, ma sono concettualmente distinti.

Da alcuni decenni, tuttavia, grazie alla teoria della relatività speciale, formulata da Albert Einstein nel 1905, i fenomeni magnetici sono spiegabili come effetti relativistici della interazione elettrica. Sarebbe stato possibile (e forse più rigoroso) presentare questo collegamento tra i due tipi di fenomeni anche prima, al momento di introdurre i fenomeni magnetici. Si è preferito invece seguire la via più tradizionale, rimandando all'ultimo capitolo l'esame relativistico dell'elettromagnetismo: e ciò sia perché l'esposizione classica è rigorosa anche dal punto di vista relativistico (e didatticamente più semplice),¹ sia perché in moltissime applicazioni di interesse tecnico l'interpretazione relativistica dell'elettromagnetismo non è indispensabile.

¹ Nel seguito si vedrà, anzi, che la teoria dell'elettromagnetismo si è rivelata una formulazione geniale dei fenomeni relativistici, che consente di affrontare con semplicità problemi tecnici anche complessi.

La teoria della relatività speciale si fonda su un esame critico dei nostri concetti fisici di spazio e di tempo, e su questa base arriva alla costruzione di un edificio teorico di grande rigore e semplicità. Alcuni suoi risultati si rivelano però in contrasto con i modelli fisici e con l'intuizione che ci siamo formati in base all'esperienza quotidiana: soltanto esperimenti raffinati mostrano la perfetta concordanza tra teoria ed esperienza. Per questi motivi è bene soffermarsi su alcuni aspetti della definizione delle grandezze fisiche corrispondenti alle nostre idee di spazio e tempo, in modo da porre dei punti fermi per l'indagine successiva.

Assumiamo senz'altro come primitivi (cioè non ulteriormente analizzabili in questo contesto) i concetti di spazio e di tempo e quelli ad essi associati (punto, linea, superficie; istante, intervallo di tempo ecc.). Assumiamo pure come primitivo il concetto di *evento fisico*, caratterizzato da un dato punto dello spazio e da un determinato istante (il cosiddetto *punto-istante*). Supponiamo inoltre di sapere definire e utilizzare in maniera non ambigua strumenti (regoli e orologi) che consentano di misurare rispettivamente la lunghezza di un segmento fisico, fermo rispetto a noi, e la durata di un fenomeno che si svolge nel punto in cui siamo. A scanso di equivoci, diciamo esplicitamente che i regoli e gli orologi di cui parliamo sono quelli cui siamo abituati nell'esperienza quotidiana, eventualmente spinti alla massima precisione consentita dalla fisica e dalla tecnologia odierne.

13.2 Confronto tra misure effettuate da osservatori diversi, fermi gli uni rispetto agli altri

In questo paragrafo ci proponiamo di confrontare misure di durata e di lunghezza effettuate da osservatori diversi che dispongano di strumenti identici, cioè orologi e regoli costruiti allo stesso modo. Questo confronto è possibile soltanto in base all'esperienza: non esiste alcuna ragione logica che consenta di prevedere i risultati che si otterranno.

A. Misure temporali

Consideriamo anzitutto due osservatori *fermi nello stesso punto*. Si verifica agevolmente — e questo, sì, è anche prevedibile logicamente — che i loro orologi sono sincroni, cioè indicano per la variabile temporale valori uguali in corrispondenza di ciascun evento; essi pertanto concordano anche sulla durata di ogni fenomeno.² Tra i due osservatori esiste quindi una completa concordanza nella misura del tempo.

Più complesso è il caso in cui i due osservatori siano *fermi in punti diversi*: vediamo perché. La maniera più semplice per essere sicuri che i due orologi siano sincroni anche quando si trovano in punti diversi sembrerebbe quella di garantirsi del loro sincronismo quando si trovano nello stesso punto e di portarli successivamente nei

² L'affermazione prescinde ovviamente da eventuali discordanze dovute a imperfezioni o a differenze costruttive tra gli strumenti.

rispettivi luoghi di osservazione. L'esperienza quotidiana sembra confermare questa supposizione: infatti, se, dopo aver trasportato i due orologi in punti diversi, li si riporta di nuovo insieme, sembra che essi continuino ad essere sincroni. A un esame più approfondito, si constata però che le cose non stanno così, per quanto strano ciò possa sembrare. E' questo, evidentemente un fatto di importanza fondamentale, e occorre chiarirlo. Esperienze ben più raffinate di quelle che facciamo quotidianamente mostrano che se lo spostamento dei due orologi e il loro ritorno alla posizione iniziale avvengono con velocità molto alta (non trascurabile rispetto a quella della luce), essi cessano di essere sincroni. Più precisamente, una volta ricondotti nello stesso punto, i due orologi continuano a indicare un'uguale durata per uno stesso fenomeno, ma non sono più concordi nell'indicare un ugual valore per la variabile t in ciascun istante. In altre parole, se su uno dei due si legge, in corrispondenza all'istante di inizio di un dato fenomeno, il valore t_1 , e in corrispondenza a quello finale il valore $t_1 + \tau$, sull'altro si leggeranno rispettivamente i valori t_2 e $t_2 + \tau$.³ Nei limiti dell'esperienza quotidiana, la differenza $t_1 - t_2$ non è percepibile, poiché gli spostamenti cui siamo abituati si verificano con velocità trascurabili rispetto a quella della luce. Come garantire dunque che due orologi siano sincroni (in senso forte) quando si trovano in punti diversi? La risposta, ricavata dall'esperienza, è abbastanza semplice: è sufficiente che, una volta sincronizzati nello stesso punto, essi vengano trasportati *molto lentamente* nei rispettivi punti di osservazione. Quanto più lento sarà il trasporto tanto più sicuri saremo che essi restino sincroni.

Un altro modo, più operativo, per garantirsi il sincronismo (in senso forte) tra due orologi posti in punti P_1 e P_2 diversi può essere quello di trasmettere "informazioni" da P_1 a P_2 e viceversa. Naturalmente, ciò sarebbe molto semplice se esistesse un mezzo capace di trasmettere informazioni con velocità infinita: in tal caso, infatti, basterebbe che nell'istante in cui il primo osservatore fa partire il suo orologio, egli comunicasse la cosa al secondo, in modo da consentirgli di fare altrettanto. Purtroppo, un mezzo capace di trasmettere informazioni a distanza finita in tempo nullo non esiste, e occorre perciò tener conto del tempo che l'informazione impiega ad andare da un osservatore all'altro. (Come veicolo dell'informazione, ad esempio, potrebbe essere scelto il suono, se i due osservatori sono abbastanza vicini.) Conviene naturalmente che il modo scelto presenti caratteristiche il più possibile indipendenti dal tempo e dalle circostanze in cui si sperimenta: in questo senso, la luce appare il mezzo più idoneo, anche perché, come è noto, è il più veloce veicolo di informazione esistente e non ha bisogno, per propagarsi, di alcun supporto materiale.

Sulla base di quanto detto, considerati due orologi posti nei punti P_1 e P_2 , disponiamo in P_2 , ad esempio, uno specchio che riflette i raggi luminosi provenienti da P_1 . Immaginiamo ora di inviare un segnale luminoso da P_1 a P_2 : il raggio colpisce lo specchio in P_2 e ritorna verso P_1 . L'esperienza mostra che tra l'istante in cui il raggio

³ In queste condizioni, diremo che i due orologi sono *sincroni in senso debole*, intendendo invece che sono *sincroni in senso forte* quando in ogni istante indicano lo stesso valore per la variabile t .

luminoso viene emesso da P_1 e quello in cui vi ritorna trascorre un intervallo di tempo τ (misurato dall'orologio in P_1) proporzionale, secondo il fattore $1/c$, alla distanza tra P_1 e P_2 . Si verifica inoltre, ed è, questo, un fatto di importanza fondamentale nella teoria della relatività, che τ è indipendente dalla direzione P_1P_2 (*principio di indipendenza della velocità della luce, nel vuoto, dalla direzione*).

Per sincronizzare i due orologi si può allora far partire l'orologio in P_1 nell'istante in cui il raggio luminoso parte da P_1 e attribuire il valore $t = \tau/2$ al secondo orologio nell'istante in cui il raggio lo raggiunge. Ciò fatto, diremo che i due orologi, fermi in P_1 e in P_2 , sono, per definizione, sincroni in senso forte.

Siamo ora in grado di confrontare le misure di tempo effettuate da osservatori in quiete gli uni rispetto agli altri: per fissare le idee, possiamo pensare di disporre tanti orologi, tutti sincronizzati nel modo descritto, nei diversi punti dello spazio. Ciascuno di essi misura il *tempo locale* nelle proprie immediate vicinanze, ma le diverse misure, per definizione, sono tra loro coerenti.

Resta aperto, a questo punto, il problema del confronto tra le misure effettuate da orologi in moto relativo, ma di ciò parleremo nei prossimi paragrafi.

B. Misure spaziali

Come nel caso precedente, la maniera più semplice per confrontare misure di lunghezza effettuate da osservatori fermi in punti distinti sembra essere quella di assicurarsi che due regoli abbiano la stessa lunghezza quando sono affiancati, e di trasportarli poi nelle rispettive posizioni. Anche in questo caso, per decidere se l'operazione è corretta si può soltanto effettuare una verifica sperimentale, spostare cioè i regoli e poi riaccostarli per confrontarli di nuovo. Ebbene, anche le misure più raffinate non rivelano alcuna differenza tra i regoli quando questi si ritrovano, fermi, nello stesso luogo. L'esperienza autorizza dunque ad affermare, per definizione, che i regoli, ovunque si trovino, conservano la stessa lunghezza.⁴

A questo punto, immaginiamo che in ciascun punto dello spazio di un osservatore (e di tutti quelli solidali con il suo sistema di riferimento) esistano un cartello, con le coordinate del punto, e un orologio che segna il tempo locale. Ogni evento fisico risulta così associato a una quaterna ordinata di numeri reali: i primi tre forniscono le coordinate del punto (lette sul relativo cartello), il quarto indica l'istante (letto sul relativo orologio) nel quale l'evento si verifica.

13.3 Confronto tra misure di osservatori in moto relativo: le trasformazioni galileiane

Ci proponiamo ora di confrontare le misure di lunghezza e di durata effettuate da un osservatore situato in un riferimento inerziale K con quelle di un osservatore

⁴ Si noti che non c'è asimmetria tra le misure spaziali e quelle temporali, poiché anche le "lunghezze" degli intervalli temporali (cioè le loro durate) coincidono.

situato in un riferimento, K' , in moto rettilineo e uniforme rispetto al primo. In altre parole, il problema è il seguente: dette (x, y, z, t) le coordinate spaziotemporali di un evento, misurate dall'osservatore solidale con K , e (x', y', z', t') le coordinate dello "stesso" evento misurate dall'osservatore solidale con K' ,⁵ quali sono le leggi di trasformazione che collegano le prime alle seconde?

La maniera più diretta per rispondere a questa domanda sarebbe probabilmente quella di illustrare il suddetto legame tra (x, y, z, t) e (x', y', z', t') tramite alcune tra le molte, raffinate esperienze oggi realizzabili. E' tuttavia più istruttivo procedere con gradualità, presentando inizialmente le leggi di trasformazione nella loro forma prerelativistica (o galileiana) e mostrando poi come esse debbano essere modificate per essere compatibili con l'odierna realtà sperimentale.

Siano K e K' (vedi fig. 13.1) due riferimenti inerziali; supponiamo che il secondo si muova con velocità costante v rispetto al primo, "scorrendo" con l'asse x' lungo l'asse x in modo che x' coincida con x . Supponiamo inoltre che nel momento in cui le origini O e O' coincidono (passando l'una sull'altra), gli orologi dei due sistemi siano fatti scattare, di modo che entrambi segnino

$$t' = t = 0,$$

e le origini dei tempi coincidano.

Per fissare le idee, pensiamo che il riferimento K sia rigidamente vincolato a un casello ferroviario posto in un punto di un lunghissimo tratto rettilineo di strada ferrata (che assumeremo come asse x) e che K' sia invece vincolato a un lungo treno che viaggi a velocità costante lungo il binario. Lungo le rotaie siano disposte pietre miliari recanti l'indicazione delle distanze dal casello (l'origine di K); accanto a ciascuna di esse vi sia un orologio sincronizzato (nel modo indicato nel paragrafo precedente) con quello dell'osservatore nel casello (il casellante). All'interno del treno siano, poi, collocati tanti cartelli con l'indicazione delle rispettive distanze dalla coda del convoglio (l'origine di K'), e, insieme con essi, altrettanti orologi, tutti sincronizzati con quello di un osservatore (il viaggiatore) seduto ad esempio in coda al treno.⁶ Come già detto, supponiamo che nel momento in cui il viaggiatore passa davanti al casellante entrambi facciano scattare il proprio cronometro.

Immaginiamo ora che, mentre il treno è in corsa, un fulmine lo colpisca in un punto (contrassegnato da un cartello) e si scarichi al suolo, in corrispondenza di una pietra miliare. Ambedue gli osservatori (casellante e viaggiatore) percepiscono l'evento fisico

⁵ Qualche parola a chiarimento del termine "stesso evento". Un esempio serve allo scopo. Quando osserviamo un oggetto, l'immagine che ci trasmette è certamente diversa da quella percepita da un altro osservatore collocato diversamente rispetto ad esso. Ciò nonostante, il confronto tra le nostre esperienze ci induce a ritenere le rispettive immagini visive come riferentisi a uno stesso oggetto fisico. Allo stesso modo, pur se le coordinate di un evento, misurate da un'osservatore Tizio, sono diverse da quelle che misura un osservatore Caio, l'esperienza induce a ritenere che esse corrispondano allo stesso evento fisico.

⁶ Gli orologi sono supposti sincronizzati nel modo illustrato nel paragrafo precedente: ciò è ancora possibile, in quanto nel treno gli strumenti sono fermi gli uni rispetto agli altri.

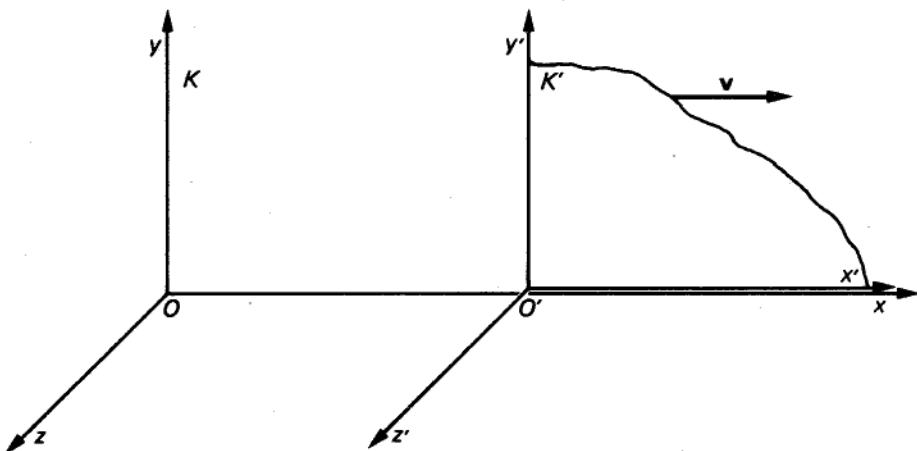


Figura 13.1

costituito dal fulmine e ne rilevano le coordinate spaziotemporalì. Il casellante individua la pietra miliare sulla quale il fulmine si è scaricato e legge il tempo corrispondente sul relativo orologio; il viaggiatore legge il numero segnato sul cartello che è stato colpito dal fulmine e legge l'indicazione del relativo orologio. I risultati delle misure effettuate dal viaggiatore siano i seguenti:

$$x' = L, \quad t' = \tau.$$

Quali sono i risultati delle misure effettuate dal casellante? L'esperienza quotidiana ci dice che anche l'orologio del casellante segna

$$t = \tau.$$

Sapendo che il treno viaggia a una velocità v , ne deduciamo che, al momento della scarica, la coda del treno aveva percorso una distanza

$$d = v\tau.$$

In conclusione, il risultato della misura di lunghezza effettuata dal casellante è

$$x = v\tau + L = v\tau + x'.$$

Analoghe misure mostrano che

$$y' = y, \quad z' = z.$$

Riassumendo, le relazioni che consentono di passare dalle coordinate (x, y, z, t) alle (x', y', z', t') , ricavate sulla base dell'esperienza quotidiana, sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t, \end{cases} \quad [13.3.1]$$

avendo indicato con v il modulo della velocità con la quale il riferimento K' si muove rispetto a K (misurata dall'osservatore solidale con K).⁷ Le [13.3.1] prendono il nome di *trasformazioni galileiane speciali*. L'aggettivo "speciali" si riferisce al fatto che il riferimento K' si muove lungo la direzione di uno degli assi di K (nel caso esaminato l'asse x). L'estensione al caso più generale, in cui K' si muova rispetto a K secondo una direzione generica, non presenta difficoltà. Provi il lettore a ricavarne le espressioni.

Fino alla fine del secolo scorso, la correttezza delle trasformazioni galileiane era fuori discussione, sia per la loro palese evidenza sperimentale sia per il loro accordo con il *principio di relatività galileiana*. Quest'ultimo, com'è noto, afferma che le leggi della meccanica sono formulate allo stesso modo in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In altre parole, con riferimento all'esempio precedente, il viaggiatore (supponendo che i finestrini del treno siano abbassati, che il treno stesso viaggi senza scosse ecc.) non ha alcun modo per sapere se il treno sia fermo oppure in moto rettilineo uniforme (ad esempio rispetto al casello): se egli lascia cadere un oggetto, questo cade secondo la sua verticale, con accelerazione pari a g ; se applica a un corpo di massa m una forza \mathbf{F} , questo acquista un'accelerazione $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ ecc.

Vedremo ora, con un esempio, perché le trasformazioni galileiane [13.3.1] sembrano confermate dal principio di relatività omonimo.

Siano m_0 e m due masse puntiformi, la prima fissa nel punto di coordinate $(x_0, 0, 0)$ di un riferimento inerziale K (vedi fig. 13.2), la seconda libera di muoversi sotto l'azione della forza di attrazione gravitazionale esercitata su essa dalla prima. Nel riferimento K , l'equazione newtoniana che governa il moto di m è la seguente:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = G \frac{m_0 m}{(x - x_0)^2}, \quad [13.3.2]$$

dove G è la costante gravitazionale.

Immaginando di osservare lo stesso fenomeno dal punto di vista di un riferimento inerziale K' che si muova, rispetto a K , con velocità costante v (diretta lungo l'asse x), chiediamoci quale sia la legge che descrive il moto di m nel riferimento K' . Osserviamo che quando le coordinate di m , rispetto a K , sono (x, y, z, t) , le sue coordinate rispetto a K' sono quelle fornite dalle trasformazioni galileiane [13.3.1]. Per avere l'espressione della legge del moto di m in K' è dunque sufficiente sostituire nella

⁷ Tutte le grandezze a secondo membro delle [13.3.1] sono misurate dall'osservatore solidale con K , le altre da quello solidale con K' .

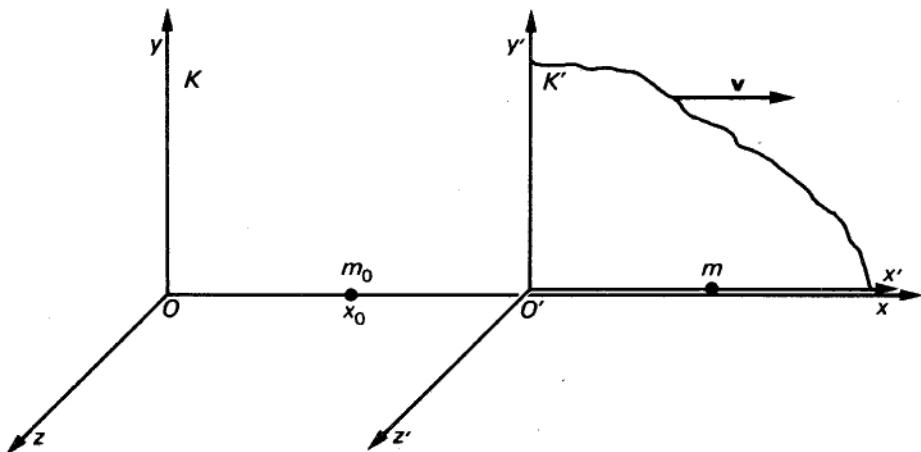


Figura 13.2

[13.3.2] le espressioni di x , t in funzione delle variabili con apice ricavate dalle [13.3.1].

Dalle relazioni

$$x = x' + vt, \quad x_0 = x'_0 + vt,$$

si ottiene

$$x - x_0 = x' + vt - x'_0 - vt = x' - x'_0. \quad [13.3.3]$$

Risulta inoltre

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (x' + vt) = \frac{dx'}{dt} + v,$$

e quindi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2}. \quad [13.3.4]$$

Sostituendo le [13.3.3] e [13.3.4] nella [13.3.2], si ha

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = G \frac{m_0 m}{(x' - x'_0)^2}.$$

Essendo $t' = t$, risulta

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'},$$

e concludiamo che la legge del moto di m in K' è data da

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = G \frac{m_0 m}{(x' - x'_0)^2}. \quad [13.3.2']$$

La legge si presenta quindi nella stessa forma che ha nel riferimento K (salvo, naturalmente, la sostituzione delle variabili (x', y', z', t') alle (x, y, z, t)).

L'esempio esposto conferma il principio di relatività galileiana e mostra inoltre come esso sia in accordo con le trasformazioni galileiane. Generalizzando questo risultato, possiamo affermare che *le leggi della meccanica newtoniana sono invarianti (o anche covarianti) rispetto alle trasformazioni galileiane*. Con ciò intendiamo quanto segue:

Se, nelle equazioni differenziali che governano il moto di un sistema di N punti materiali m_i in un riferimento inerziale K , si sostituiscono le espressioni, fornite dalle trasformazioni galileiane, delle rispettive coordinate $(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}, t)$ in funzione delle $(x^{(i)'}, y^{(i)'}, z^{(i)'}, t')$, si ottiene un sistema di equazioni, formalmente identico al precedente, che fornisce la legge del moto del sistema nel riferimento inerziale K' .

Alla luce di tutto ciò, si può ben comprendere che, sul finire del secolo scorso, le leggi newtoniane della meccanica, le trasformazioni galileiane e il principio di relatività galileiano si presentassero come un edificio teorico di rigorosa coerenza interna, corroborato da secoli di conferme sperimentali. A fronte della situazione, apparentemente chiara, dalla meccanica, si notava qualcosa di strano in elettromagnetismo. Quando, infatti, si volle verificare se anche le equazioni di Maxwell fossero invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane, si giunse inaspettatamente a conclusioni negative: sostituendo le trasformazioni galileiane nelle equazioni di Maxwell, queste ultime cambiano forma. Si direbbe che le leggi dell'elettromagnetismo non verifichino il principio di relatività galileiano, cioè siano diverse nei diversi sistemi inerziali. Ma, allora, in quale riferimento assumono la forma loro data da Maxwell? Nel secolo scorso, la risposta sembrava semplice: nel riferimento solidale con l'etere cosmico, il mezzo che avrebbe dovuto pervadere l'intero universo e consentire la propagazione delle onde elettromagnetiche. In particolare, visto che le equazioni di Maxwell consentono di interpretare i fenomeni luminosi in termini di quelli elettromagnetici, si dedusse che il valore "c", previsto dalle suddette equazioni per la velocità della luce, sarebbe corretto soltanto in un riferimento solidale con l'etere: in altri riferimenti, in moto rispetto a questo, la luce dovrebbe avere una velocità diversa da c . Inoltre, dovendo la Terra, nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, muoversi rispetto all'etere, la velocità della luce, misurata rispetto alla Terra, dovrebbe essere diversa nei diversi momenti dell'anno, e in generale diversa da c .

Per verificare ciò furono ideate e realizzate varie esperienze, che però, contrariamente alle attese, dettero risultato negativo: tutte concordavano nel portare alla conclusione che la velocità della luce rispetto alla Terra vale sempre c . La più celebre

di queste esperienze fu quella effettuata da Michelson e Morley a Chicago nel 1887, della quale si riporta una breve descrizione alla fine del capitolo.

Per interpretare questi risultati sperimentali furono proposte teorie "ad hoc": da quella che ipotizzava un possibile trascinamento dell'etere da parte della Terra nel suo moto, ad altre (*teorie emissive*) che partivano dall'ipotesi che la velocità della luce avesse il valore c soltanto rispetto alla sorgente (reale o virtuale) che la emette, ad altre ancora, secondo cui i regoli in moto subirebbero una contrazione nel senso della lunghezza (contrazione di Lorentz). Tali teorie si rivelarono peraltro inadatte a interpretare specifici fatti sperimentali, quali il fenomeno dell'aberrazione delle stelle fisse o la dinamica delle stelle binarie ecc. (Un breve cenno a queste teorie è fatto nelle Esperienze illustrate alla fine del capitolo.)

Le esperienze effettuate erano concordi nel mostrare che la velocità della luce nel vuoto è uguale a c rispetto ad ogni sistema di riferimento inerziale.

Fu allora, in una situazione per tanti aspetti contraddittoria, che apparve nel 1905 la classica memoria di Einstein *Sulla elettrodinamica dei corpi in movimento*. In essa veniva presentata una teoria (quella della relatività speciale) che, negando ogni significato fisico all'ipotesi dell'esistenza dell'etere cosmico, si rivela capace di interpretare contemporaneamente tutti i fatti sperimentali cui abbiamo fatto cenno in precedenza.

I postulati fondamentali sui quali essa si fonda sono i seguenti:

- 1) *tutte le leggi fisiche (non soltanto quelle della meccanica, ma anche quelle dell'elettromagnetismo) valgono nella stessa forma in tutti i riferimenti inerziali (principio di relatività);*
- 2) *in un riferimento inerziale, le leggi dell'elettromagnetismo sono espresse dalle equazioni di Maxwell;*
- 3) *le leggi della meccanica, in un riferimento inerziale, sono costituite dal principio di inerzia e dal secondo principio; quest'ultimo, per un punto materiale soggetto a interazioni elettromagnetiche con altri corpi, assume la forma:*

$$\frac{dp}{dt} = q(E + v \times B),$$

ove p è la quantità di moto dal punto materiale.

Da questi postulati discendono alcune conseguenze. La prima è quella che va sotto il nome di *principio della costanza della velocità della luce nel vuoto*, secondo cui *la luce nel vuoto si propaga con velocità c rispetto a tutti i riferimenti inerziali*. Per convincersene, basta ripercorrere i ragionamenti che, all'inizio nel capitolo precedente, hanno condotto all'equazione delle onde elettromagnetiche. Si vide infatti che le interazioni elettromagnetiche debbono propagarsi, nel vuoto, con velocità c rispetto a un riferimento inerziale nel quale valgono le equazioni di Maxwell. Poiché queste equazioni valgono nella stessa forma (per i postulati 1 e 2) in *tutti* i riferimenti inerziali, resta dimostrato l'enunciato precedente. Tale risultato può apparire sorprendente, poiché implica che le onde elettromagnetiche non rispettano la legge di com-

posizione delle velocità cui siamo abituati. In altre parole, se misuriamo la velocità di un'onda elettromagnetica rispetto a un riferimento K e rispetto a un riferimento K' che si muova con velocità v (nella stessa direzione orientata dell'onda) rispetto a K , il risultato della seconda misura *non* è, come ci si potrebbe aspettare, pari a $c - v$, bensì ancora uguale a c !

Ciò è di per sé sufficiente a far comprendere come le trasformazioni galileiane non siano compatibili con i postulati della relatività, poiché l'abituale legge di composizione delle velocità (quella appunto del "senso comune") è una diretta conseguenza di queste trasformazioni.

Inoltre, l'ammettere valido anche per l'elettromagnetismo il principio di relatività implica che le equazioni di Maxwell sono invarianti rispetto alle trasformazioni di coordinate spaziotemporali tra riferimenti inerziali. Tali trasformazioni non possono essere quelle galileiane, perché rispetto ad esse, come si è detto, le equazioni di Maxwell non sono invarianti.

Nel prossimo paragrafo, vedremo quale forma debbano avere.

13.4 Confronto tra misure di osservatori in moto relativo: le trasformazioni di Lorentz

Prima di presentare le nuove trasformazioni, soffermiamoci ancora su quelle galileiane, per meglio illustrare il significato di "trasformazione di coordinate spaziotemporali". Ritorniamo dunque ai due sistemi inerziali K e K' considerati nella figura 13.1 e, se si vuole, all'esempio del treno e del casello.

Immaginiamo che lungo la strada ferrata siano disposti tanti osservatori, fermi gli uni rispetto agli altri in corrispondenza delle diverse pietre miliari e che, anche nel treno, vi siano viaggiatori fermi gli uni rispetto agli altri in corrispondenza dei cartelli.

Indicate con x, y, z, t le coordinate spaziotemporali in K e con x', y', z', t' quelle di K' , le trasformazioni di coordinate che consentono di passare da un riferimento all'altro, indipendentemente dal fatto che siano galileiane oppure no, debbono permettere di rispondere alla seguente domanda:

"Se (x, y, z, t) sono le coordinate di un evento misurate da un osservatore solidale con K , quali sono le coordinate (x', y', z', t') dello stesso evento misurate da un osservatore solidale con $K'?$ "

Per un osservatore di K' (cioè un viaggiatore) un evento fisico è anche il proprio passaggio davanti a un casellante. Le trasformazioni tra x, y, z, t e x', y', z', t' , pertanto, devono consentire di rispondere anche a quest'altra domanda:

"Se, nell'istante in cui il casellante appare davanti al viaggiatore, quest'ultimo legge sul proprio cartello e sul proprio orologio le coordinate (x', y', z', t') , quali sono i valori indicati dalla pietra miliare e dall'orologio del casellante?"

In altre parole, le trasformazioni di coordinate spaziotemporali devono consentire di confrontare le indicazioni dei cartelli e degli orologi del viaggiatore con quelle delle

pietre miliari e degli orologi del casellante, nel momento in cui i due osservatori si incontrano. In particolare il viaggiatore legge il valore t' sul proprio orologio e il valore t sull'orologio del casellante che gli sta passando davanti; un'osservazione analoga vale per le altre coordinate x, y, z .

Se valessero le trasformazioni galileiane, le indicazioni degli orologi dei viaggiatori e del casellante coinciderebbero. In questo senso, *le misure di tempo risulterebbero assolute*, poiché ad ogni evento fisico corrisponderebbe lo stesso valore della variabile temporale, sia per il casellante che per i viaggiatori.

Una conclusione analoga varrebbe *anche per le misure di lunghezza*. Per convincercene, immaginiamo che lungo l'asse x di K (cioè lungo la strada ferrata) sia disposta una sbarra AB , che inizia alla pietra miliare di ascissa x_A e termina a quella di ascissa x_B . Gli osservatori di K (i casellanti) non hanno difficoltà a misurare la lunghezza della sbarra (che è ferma rispetto a loro), ottenendo:

$$L_{AB} = x_B - x_A.$$

Chiediamoci ora che cosa misurino gli osservatori di K' (i viaggiatori); la cosa è ora un po' più complicata, poiché rispetto ad essi la sbarra si muove con velocità $-v$. Per misurarne la lunghezza occorre che nell'istante t^8 in cui l'estremo A della sbarra passa per il punto in cui si trova uno dei viaggiatori (indicato con V_1), tutti gli altri viaggiatori controllino se davanti a loro sta passando (proprio all'istante t') l'altro estremo (B). Naturalmente, c'è un solo viaggiatore (indicato con V_2) per il quale ciò accade: la lunghezza della sbarra AB , misurata dai viaggiatori, è data dalla differenza tra le ascisse dei due viaggiatori V_1 e V_2 (lette sui cartelli del treno). Se valessero le trasformazioni galileiane, l'ascissa x'_1 del viaggiatore V_1 all'istante t' , sarebbe legata alla x_A della relazione

$$x_A = x'_1 + vt';$$

analogamente, per l'ascissa x'_2 del viaggiatore V_2 si avrebbe

$$x_B = x'_2 + vt',$$

e di conseguenza

$$L'_{AB} = x'_2 - x'_1 = x_B - x_A = L_{AB}.$$

Nell'ambito delle trasformazioni galileiane, anche le misure di lunghezza hanno dunque carattere assoluto, cioè valido per tutti i riferimenti inerziali.⁹

Questa è, appunto, la situazione che, in forma più o meno esplicita, ci si presenta sulla base delle esperienze quotidiane: siamo abituati ad attribuire valore assoluto alle nostre misure. E' importante, però, rendersi conto che in ciò non vi è nulla di

⁸ Misurato naturalmente dagli orologi sul treno.

⁹ Di fronte a questo banale risultato, il lettore non sorvoli..., ma rifletta, invece, sul fatto che, per misurare la lunghezza di una sbarra in moto occorre seguire la via indicata. Ciò sarà la base di importanti ragionamenti successivi.

logicamente necessario: la convinzione circa l'assoluzetza delle misure deriva esclusivamente dalla particolare natura della nostra esperienza.

A questo punto, non resta che presentare le nuove trasformazioni, ricavandole dai postulati assunti a fondamento della teoria relativistica. Per semplicità, ci limiteremo a considerare il caso delle "trasformazioni speciali", cioè quelle tra due riferimenti inerziali K e K' del tipo indicato nel paragrafo 13.3 (vedi fig. 13.1). Procederemo per gradi. Dimostriamo innanzitutto che le trasformazioni devono essere lineari. In entrambi i sistemi di riferimento deve valere il principio di inerzia (ciò è conseguenza dei postulati (1) e (3)); in altri termini, un corpo puntiforme, libero da forze, deve muoversi di moto rettilineo uniforme rispetto a entrambi i riferimenti e pertanto la sua *legge oraria*¹⁰ in entrambi i casi dev'essere lineare. D'altra parte, la legge oraria in K' può ottersi da quella in K semplicemente sostituendo alle variabili (x, y, z, t) le loro espressioni (date dalle trasformazioni cercate) in funzione delle variabili (x', y', z', t') . Di conseguenza le trasformazioni in parola debbono essere *lineari*: altrimenti, la legge oraria del corpo libero sarebbe non lineare in uno dei due riferimenti. Inoltre, esse debbono essere *omogenee* (non contenere cioè termini noti indipendenti dalle coordinate), poiché si è supposto che le origini dei due sistemi coincidano all'istante $t=t'=0$, segnato dagli orologi posti nelle origini stesse. Pertanto, le trasformazioni debbono essere del tipo

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t. \end{cases} \quad [13.4.1]$$

Volendo poi che gli assi x e x' si mantengano coincidenti occorre che, per $y=z=0$, le [13.4.1] forniscano pure $y'=z'=0$. A tal fine, occorre e basta che sia

$$a_{21} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = 0.$$

Dovendo inoltre il piano xy (di equazione $z=0$) coincidere con il piano $x'y'$ ($z'=0$) e il piano xz ($y=0$) con il piano $x'z'$ ($y'=0$), dev'essere $a_{32} = a_{23} = 0$. Pertanto, la seconda e la terza delle [13.4.1] si riducono alle relazioni

$$\begin{aligned} y' &= a_{22}y, \\ z' &= a_{33}z. \end{aligned}$$

D'altra parte, dalla simmetria dei due assi y e z segue necessariamente

$$a_{22} = a_{33},$$

¹⁰ Ricordiamo che la legge oraria di un corpo in moto è costituita dalle funzioni che ne descrivono il moto:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

e quindi

$$y' = a_{22}y, \quad z' = a_{22}z. \quad [13.4.2]$$

Dal principio di relatività (cioè dalla indistinguibilità dei due riferimenti K e K') segue subito $a_{22} = 1$, e quindi

$$y' = y, \quad z' = z. \quad [13.4.3]$$

Dimostrazione. Se fosse ad esempio $a_{22} > 1$, l'osservatore in K' attribuirebbe al regolo fisso in K (e, quindi, mobile rispetto a K') una lunghezza *maggior dell'unità*. Invertendo il ragionamento, e disponendo lo stesso regolo (fermo) lungo l'asse y' del sistema K' , l'osservatore in K misurerebbe per esso, sempre in base alla prima delle [13.4.2], una lunghezza $y = 1/a_{22}$, *minore dell'unità*. Ciò consentirebbe di distinguere tra loro i due riferimenti, in contrasto con il principio di relatività. ■

Restano da determinare i coefficienti delle formule di trasformazione per x e t .

Cominciamo con l'osservare che, per ipotesi, il sistema K' si muove con velocità v rispetto a K e che, viceversa, il sistema K si muove con velocità $-v$ rispetto a K' . Ciò implica che un punto di coordinate

$$x' = 0, \quad y' = \alpha, \quad z' = \beta$$

deve corrispondere, nella trasformazione, al punto

$$x = vt, \quad y = \alpha, \quad z = \beta,$$

e che, viceversa, un punto di coordinate

$$x = 0, \quad y = \alpha, \quad z = \beta$$

deve corrispondere al punto

$$x' = -vt', \quad y' = \alpha, \quad z' = \beta.$$

Perché ciò accada occorre e basta che sia

$$a_{12} = a_{13} = 0,$$

$$a_{14} = -va_{11},$$

$$a_{42} = a_{43} = 0,$$

$$a_{44} = a_{11},$$

cioè che le trasformazioni siano del tipo

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - a_{11}vt, \\ t' = a_{41}x + a_{11}t. \end{cases} \quad [13.4.4]$$

Dovendo essere i due riferimenti indistinguibili, le trasformazioni che danno x e t in funzione di x' e t' debbono essere identiche alle [13.4.4], a patto di sostituire la quantità $-v$ al posto di v (poiché K ha velocità $-v$ rispetto a K'). Per imporre questa condizione, risolviamo le [13.4.4] rispetto a x e t (considerando x' e t' come termini noti):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a_{11} + a_{41}v} x' + \frac{v}{a_{11} + a_{41}v} t' \\ t = -\frac{\frac{a_{41}}{a_{11}}}{a_{11} + a_{41}v} x' + \frac{1}{a_{11} + a_{41}v} t' \end{cases} \quad [13.4.4']$$

Affinché le [13.4.4'] e le [13.4.4] coincidano (come già detto a meno del segno di v), occorre e basta che sia

$$a_{41} = \frac{1 - a_{11}^2}{a_{11}v}.$$

Le trasformazioni hanno quindi la forma seguente:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - a_{11}vt \\ t' = \frac{1 - a_{11}^2}{a_{11}v}x + a_{11}t. \end{cases} \quad [13.4.5]$$

Resta soltanto da imporre che la velocità della luce sia pari a c in entrambi i riferimenti. Se un'onda elettromagnetica piana si propaga lungo l'asse x del riferimento K partendo dall'origine O all'istante $t=0$, l'equazione del fronte d'onda in K è

$$x = ct \quad [13.4.6]$$

D'altra parte, se la velocità del fronte è pari a c anche rispetto al riferimento K' , deve essere

$$x' = ct' \quad [13.4.7]$$

(poiché le due origini O e O' coincidono all'istante $t'=t=0$). Sostituendo la [13.4.6] nella [13.4.5], otteniamo

$$\begin{cases} x' = a_{11}ct - a_{11}vt \\ t' = \frac{1 - a_{11}^2}{a_{11}v}ct + a_{11}t. \end{cases}$$

Dividendo membro a membro, si ha

$$\frac{x'}{t'} = \frac{a_{11}(c-v)}{\frac{1 - a_{11}^2}{a_{11}v} c + a_{11}};$$

affinché il secondo membro sia pari a c , occorre e basta che sia:

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Le trasformazioni cercate (dette *trasformazioni di Lorentz*) sono quindi le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad [13.4.8]$$

Esse sono facilmente memorizzabili, introducendo il *tempo luce*

$$\tau = ct.$$

Si ha, infatti, ponendo $\beta = v/c$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - \beta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ \tau' = \frac{\tau - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right.$$

Si verifica immediatamente che esse sono simmetriche; risulta infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + \beta\tau'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x' - (-\beta)\tau'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ \tau = \frac{\tau' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tau' - (-\beta)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right. \quad [13.4.8']$$

Osserviamo poi che, per $v \ll c$, le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle galileiane; ciò spiega perché la nostra esperienza quotidiana concordi con queste ultime.¹¹

Dal fatto che le [13.4.8] rispettano il principio di costanza della velocità della luce nel vuoto deriva un'altra interessante conseguenza. Consideriamo un'onda elettromagnetica sferica che parta dall'origine O di K , all'istante $t=0$; il suo fronte d'onda ha in K l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad [13.4.9]$$

Per determinare l'equazione dello stesso fronte d'onda nel riferimento K' , basta sostituire alle x, y, z, t , nella [13.4.9], le loro espressioni [13.4.8'] in funzione delle variabili x', y', z', t' . Si ottiene:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad [13.4.9']$$

Se ne conclude che l'osservatore O' , nel riferimento K' , "vede" il fronte dell'onda come una superficie sferica centrata in O' , e che, allo stesso modo, l'osservatore in K vede lo stesso fronte d'onda come una superficie sferica centrata in O . Questo importante risultato può essere presentato anche in modo diverso. Se infatti, nell'espressione

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad [13.4.10]$$

sostituiamo, al posto delle variabili x, y, z, t le espressioni fornite dalle [13.4.8'], otteniamo l'espressione

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2,$$

formalmente identica alla [13.4.10], salvo la sostituzione delle variabili con apice a quelle senza apice. In questo senso, diciamo che *l'espressione* [13.4.10] è *invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz*.

Siamo finalmente in grado di confrontare tra loro le misure di lunghezza e di durata effettuate dagli osservatori situati nei riferimenti K e K' .

A. Contrazione delle lunghezze

Riprendiamo il ragionamento fatto a proposito delle trasformazioni galileiane, per determinare la lunghezza della sbarra AB , fissa in K , così come misurata dagli osservatori in K' . Indicate con x_A e x_B le ascisse delle pietre miliari che coincidono con gli estremi A e B della sbarra, e con x'_1 e x'_2 le ascisse (nel sistema di riferimento del treno) dei due viaggiatori V_1 e V_2 che, nello stesso istante t' , si trovano a passare rispettivamente

¹¹ Anche considerando velocità dell'ordine di 10^5 km/h, il termine correttivo v^2/c^2 è dell'ordine di 10^{-8} , quindi non percepibile dall'occhio umano.

mente davanti agli estremi A e B , si ha subito (dalle [13.4.8'])

$$x_A = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

e

$$x_B = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Sottraendo membro a membro risulta

$$x_B - x_A = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

e quindi

$$L'_{AB} = x'_2 - x'_1 = \sqrt{1-\beta^2} (x_B - x_A) = \sqrt{1-\beta^2} L_{AB}.$$

La lunghezza L'_{AB} della sbarra AB , misurata dall'osservatore in K' (rispetto al quale la sbarra è in moto), è dunque minore della lunghezza L_{AB} misurata dall'osservatore in K (rispetto al quale la sbarra è ferma). In altre parole, quando un regolo si muove rispetto a noi esso ci risulta più corto di quando è fermo;¹² il fattore di contrazione è

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Questa contrazione si verifica soltanto nella direzione del moto. Le formule delle trasformazioni di Lorentz mostrano infatti, che le coordinate y e z restano immutate. Così, se un regolo si muove con velocità \mathbf{v} perpendicolare al proprio asse (vedi fig. 13.3), esso non subisce alcuna contrazione.

Osservazione. La contrazione nella direzione del moto è un fenomeno reciproco per i due osservatori in K e K' : se ciascuno dei due tiene con sé un regolo, disposto nella direzione del moto relativo di K' rispetto a K , l'osservatore in K' constata che il regolo trasportato da K è più corto del proprio; reciprocamente, l'osservatore in K constata che il regolo trasportato da K' è più corto del proprio.

Concludiamo, sulla base delle trasformazioni di Lorentz, che la misura della lunghezza di un segmento non ha il carattere di assolutezza che le trasformazioni galileiane sembrano attribuirle. Per dare un significato non ambiguo al numero che esprime la lunghezza, occorre specificare il riferimento nel quale la misura è effettuata.

¹² La lunghezza del regolo misurata da un osservatore in quiete rispetto ad esso è la *lunghezza propria* dell'oggetto.

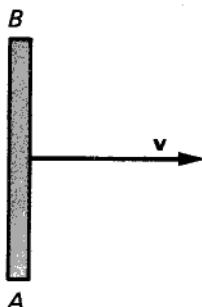


Figura 13.3

In questo caso $L_{AB} = L'_{AB}$.**B. Dilatazione degli intervalli temporali**

Confrontiamo ora le misure di durata effettuate da due osservatori in moto relativo. Immaginiamo, a titolo di esempio, che un pendolo si trovi in un punto della strada ferrata (all'ascissa x) e ivi oscilli con un periodo di T secondi. Detti t_1 e t_2 gli istanti di inizio e di fine di un'oscillazione, si ha

$$T = t_2 - t_1.$$

Ci proponiamo ora di valutare, in base alle trasformazioni di Lorentz, la durata T' attribuita allo stesso fenomeno dai viaggiatori sul treno. A tale scopo calcoliamo, per mezzo delle [13.4.8], i valori t'_1 e t'_2 letti sugli orologi di K' dai viaggiatori che si trovano a passare davanti al pendolo all'inizio e al termine dell'oscillazione (cioè, quando l'orologio del casellante segna i valori t_1 e t_2).

Si ha subito

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Sottraendo membro a membro,

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

e quindi

$$T' = t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} T = \gamma T.$$

La durata dell'oscillazione misurata dai viaggiatori sui propri orologi è data dunque da un numero di secondi T' maggiore di quello, T , che i viaggiatori stessi possono

leggere sull'orologio del casellante posto in prossimità del pendolo.¹³ I viaggiatori “vedono” gli orologi dei casellanti (che si muovono rispetto a loro con velocità $-v$) rallentare, e insieme con essi vedono rallentare tutti i fenomeni fisici.

Anche in questo caso il fenomeno è simmetrico: anche i casellanti vedono gli orologi dei viaggiatori rallentare rispetto ai propri, nello stesso rapporto.

13.5 Trasformazioni di velocità e accelerazioni

In questo paragrafo esamineremo come si trasformano alcune grandezze fisiche derivabili dalle coordinate spaziotemporali.

A. Trasformazione delle velocità

Consideriamo, al solito, i riferimenti K e K' , e inoltre un punto materiale P che si muova rispetto ad essi; siano

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

le equazioni che descrivono il modo di P rispetto a K . La velocità u di P , misurata rispetto a K , in un generico istante t , ha componenti

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Nel riferimento K' le equazioni del moto dello stesso punto P hanno la forma

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t'),$$

ove le coordinate spaziotemporali (x', y', z', t') sono legate alle (x, y, z, t) dalle trasformazioni di Lorentz. Vogliamo ora determinare le componenti u'_x, u'_y, u'_z della velocità attribuita a P dall'osservatore di K' . Considerato un tratto elementare della traiettoria di P , valutiamo le variazioni dx' e dt' corrispondenti a dt ; delle [13.4.8] si ricava

$$dx' = \frac{\frac{dx}{dt} dt - v dt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$dy' = \frac{dy}{dt} dt,$$

$$dz' = \frac{dz}{dt} dt,$$

¹³ L'intervallo di tempo misurato da un orologio fermo rispetto al pendolo è l'*intervallo di tempo proprio*, caratteristico del fenomeno in esame.

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} dt}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dividendo formalmente membro a membro otteniamo:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}},$$

e quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y = u_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_z = u_z \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \end{array} \right. \quad [13.5.1]$$

Come si vede, queste relazioni tendono a quelle galileiane (corrispondenti alla familiare legge di composizione delle velocità) quando $v \ll c$.

Osservazione. Le [13.5.1] si usano soltanto quando si vuol confrontare la velocità di un corpo (in particolare un punto materiale), misurata in un certo sistema di riferimento, con quella dello stesso corpo misurata in riferimento differente. Nel confrontare, invece, velocità di corpi diversi misurate in uno stesso riferimento, si deve usare l'abituale legge di composizione delle velocità. Pensando ad esempio a due automobili A_1 e A_2 che corrano sull'autostrada con velocità u_1 e u_2 (rispetto alla strada), possiamo porci due domande diverse:

- 1) Qual è la velocità attribuita dall'osservatore A_1 all'auto A_2 ? La risposta è data dalle [13.5.1].
- 2) Qual è la velocità relativa di A_2 rispetto ad A_1 , valutata da un osservatore solido con la strada? La risposta è semplicemente

$$u_r = u_2 - u_1.$$

B. Trasformazione delle accelerazioni

Ragionando come per le velocità, non è difficile arrivare alla legge di trasformazione delle accelerazioni (provvi il lettore a farlo). Indicando con a_x, a_y, a_z le componenti dell'accelerazione \mathbf{a} nel riferimento K e con a'_x, a'_y, a'_z quelle in K' , si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_x = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)^3} a_x \\ a'_y = \frac{1-\beta^2}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)^2} \left(a_y + \frac{\frac{v}{c^2} u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} a_x \right) \\ a'_z = \frac{1-\beta^2}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)^2} \left(a_z + \frac{\frac{v}{c^2} u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} a_x \right). \end{array} \right. \quad [13.5.2]$$

Osserviamo che a differenza di quanto accadeva con le trasformazioni galileiane, l'accelerazione non è invariante.

13.6 Le trasformazioni della densità di carica e della densità di corrente

Esaminiamo inizialmente la legge di trasformazione della densità di carica di volume ρ . Consideriamo un cubetto $\Delta\tau$, fisso nel riferimento K , con gli spigoli, di lunghezza Δl , disposti lungo gli assi x, y, z . Se Δq è la carica contenuta in $\Delta\tau$, la relativa densità di carica ρ , valutata nel riferimento K (rispetto al quale la carica è ferma) è

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta\tau}.$$

Consideriamo ora lo stesso cubetto dal punto di vista di un riferimento K' in moto uniforme, rispetto a K , con velocità v diretta lungo l'asse x (parallelo a x'). Lo spigolo parallelo all'asse x risulta contratto, presentando una lunghezza $\Delta l'$, pari a

$$\Delta l' = \Delta l \sqrt{1 - \beta^2},$$

mentre gli altri due spigoli, ortogonali alla direzione del moto, sono inalterati. Nel riferimento K' il volumetto *non* presenta dunque la forma di un cubo, ma quella di un parallelepipedo schiacciato nella direzione del moto. Il volume $\Delta\tau'$, misurato dal rife-

rimento K' , è pari a

$$\Delta\tau' = \Delta\tau \sqrt{1 - \beta^2},$$

cioè ridotto, rispetto a $\Delta\tau$, del solito fattore $1/\gamma$. Invece la carica Δq contenuta nel volumetto è invariante rispetto al cambiamento di riferimento.¹⁴ La densità di volume ρ' , misurata in K' , risulta perciò

$$\rho' = \frac{\Delta q'}{\Delta\tau'} = \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{\Delta q}{\Delta\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad [13.6.1]$$

Essa è dunque accresciuta per il fattore γ rispetto al valore misurato nel riferimento K , in cui la carica è ferma.

Consideriamo ora, nel riferimento K , un campo di corrente \mathbf{J} , e sia

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$$

la densità di corrente in un punto generico; ρ indica la densità di volume delle cariche in moto, \mathbf{u} la loro velocità nel punto e nell'istante considerati. Per la [13.6.1], la densità di carica ρ nel riferimento K è data da

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}}, \quad [13.6.2]$$

ove ρ_0 è la densità di carica valutata rispetto a un riferimento K_0 solidale con la carica. Analogamente, detta u'_x la componente secondo l'asse x' della velocità della carica misurata nel riferimento K' , si ha

$$\rho' = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u'_x^2}{c^2}}}, \quad [13.6.3]$$

dove ρ' indica la densità di carica misurata in K' . Ricordando infine la trasformazione tra le velocità u'_x e u_x ,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad [13.6.4]$$

non è difficile valutare la componente J'_x della densità di corrente in K' . Con semplici

¹⁴ Si ricordi quanto detto nel § 6.1.

passaggi si ottiene

$$J'_x = \rho' u'_x = \frac{J_x - \rho v}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad [13.6.5]$$

Ragionando analogamente, per le altre due componenti si ottiene

$$J'_y = J_y, \quad [13.6.6]$$

$$J'_z = J_z. \quad [13.6.7]$$

Le [13.6.5]-[13.6.7] forniscono le desiderate leggi di trasformazione per la densità di corrente.

Osserviamo che la relazione che esprime la densità di carica ρ' nel riferimento K' (rispetto al quale la carica è in moto) in funzione della densità ρ valutata nel riferimento K (rispetto al quale la carica è pure in moto) è *diversa* dalla [13.6.1]: quest'ultima relazione infatti esprime ρ in funzione di ρ_0 , cioè della densità valutata in un riferimento rispetto al quale la carica è ferma. La relazione tra ρ' e ρ può ottenersi dalle [13.6.2]-[13.6.4]; risulta

$$\rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2} J_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad [13.6.8]$$

Le [13.6.5]-[13.6.8] forniscono dunque le leggi di trasformazione della densità di corrente e della densità di carica nel passaggio dal riferimento K al riferimento K' , in moto rispetto a K con velocità v . Riscriviamo queste trasformazioni e confrontiamole con le trasformazioni di Lorentz [13.4.8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} J'_x = \frac{J_x - v\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ J'_y = J_y \\ J'_z = J_z \\ \rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2} J_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right.$$

Osserviamo che le quattro grandezze J_x, J_y, J_z, ρ si trasformano allo stesso modo delle quattro coordinate spaziotemporali x, y, z, t (su questa importante osservazione torneremo nel paragrafo seguente).

13.7 Lo spaziotempo di Minkowski e la formulazione quadridimensionale dell'elettrodinamica

Riscriviamo le trasformazioni di Lorentz [13.4.8], ponendo

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = jct. \end{cases} \quad [13.7.1]$$

Introduciamo cioè, formalmente, una quarta coordinata x_4 in corrispondenza della variabile immaginaria jct . Sostituendo le [13.7.1] nella [13.4.8], si ottiene subito

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{x_1 + j \frac{v}{c} x_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = \frac{x_4 - j \frac{v}{c} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad [13.7.2]$$

Queste relazioni sono equivalenti alle [13.4.8] e non contengono alcuna informazione ulteriore. La loro forma però suggerisce considerazioni interessanti: esse sono infatti del tipo

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{cases} \quad [13.7.3]$$

cioè lineari e omogenee, con

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = j \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= 0, & a_{22} &= 1, & a_{23} &= 0, & a_{24} &= 0, \\ a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 1, & a_{34} &= 0, \end{aligned} \quad [13.7.4]$$

$$a_{41} = -\frac{j\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Inoltre i coefficienti a_{ij} godono, com'è facile verificare, della proprietà

$$\sum_{i=1}^4 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, 4 \quad [13.7.5]$$

In uno spazio a quattro dimensioni, le trasformazioni di Lorentz si possono dunque riguardare (vedi app. A, formule [A.6.5] e [A.6.6]) come trasformazioni di coordinate $(x_i) \rightarrow (x'_i)$ corrispondenti a una rotazione di assi del sistema di riferimento.

Nell'ordinario spazio euclideo a tre dimensioni, una rotazione del sistema di assi coordinati lascia invariata l'espressione della distanza tra due punti. Analogamente, una rotazione nello spazio a quattro dimensioni in esame lascia invariata la distanza tra due punti $P_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $P_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, x_4 + \Delta x_4)$:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2. \quad [13.7.6]$$

Si ha infatti (come già detto in § 11.4):

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= (\Delta x'_1)^2 + (\Delta x'_2)^2 + (\Delta x'_3)^2 + (\Delta x'_4)^2 = \\ &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2. \end{aligned} \quad [13.7.7]$$

Nell'ordinario spazio tridimensionale, la distanza tra due punti, definita dalla *metrica pitagorica*

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2$$

ha un significato intrinseco, indipendente dal sistema di coordinate cartesiane scelto. Nello spazio a quattro dimensioni introdotto formalmente con le [13.7.1], la distanza tra due punti, definita dalla metrica pitagorica,

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2,$$

o *pseudopitagorica*

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - c^2 (\Delta t)^2, \quad [13.7.7']$$

ha anch'essa un significato intrinseco.¹⁵

¹⁵ Ciò è una conseguenza diretta del fatto che, come si è visto in precedenza, l'espressione $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$

è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Lo spazio a quattro dimensioni così introdotto prende il nome di *spaziotempo* (*cronotopo*) di Minkowski. I suoi punti corrispondono agli eventi del nostro ordinario spazio fisico, e sono caratterizzati da tre coordinate spaziali x_1, x_2, x_3 , corrispondenti alle coordinate cartesiane del punto in cui l'evento si verifica, e da una quarta coordinata immaginaria, $x_4 = c t$, che corrisponde all'istante in cui l'evento fisico si verifica. Osserviamo inoltre che, rispetto ai cambiamenti di riferimento descritti dalle trasformazioni di Lorentz, è la distanza quadridimensionale [13.7.7'] ad avere significato fisico invariante; invece la distanza spaziale $(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2$ e la durata Δt variano ciascuna al variare del riferimento.

Nello spaziotempo quadridimensionale due eventi determinano un *intervallo*.

Rispetto ai cambiamenti di riferimento inerziali, soltanto lo spazio a quattro dimensioni degli eventi ha realtà fisica indipendente dal riferimento. Esso presenta caratteristiche per certi versi simili a quelle dell'ordinario spazio tridimensionale, per altri assai differenti. Ad esempio, mentre nello spazio tridimensionale la distanza tra due punti distinti è, per definizione, positiva, nello spaziotempo esistono punti distinti la cui distanza è nulla. Basta infatti che

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2 = \\ &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - c^2 (\Delta t)^2 = 0. \end{aligned} \quad [13.7.8]$$

La condizione [13.7.8] può essere formulata nel modo seguente: due eventi hanno distanza quadridimensionale nulla se un raggio di luce emesso dal punto (dello spazio ordinario) (x_1, x_2, x_3) all'istante $t = x_4/c$ raggiunge il punto $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ nell'istante $t + \Delta t = 1/c(x_4 + \Delta x_4)$. In altre parole, tra due eventi la distanza è nulla se, quando ci poniamo nel punto (dello spazio ordinario) in cui si verifica il secondo evento, un raggio di luce emesso in corrispondenza del primo evento ci "informa" del verificarsi di esso contemporaneamente al verificarsi del secondo.

Nello spaziotempo è possibile considerare anche intervalli con distanza negativa. Basta, infatti, che

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2 = \\ &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - c^2 (\Delta t)^2 < 0. \end{aligned} \quad [13.7.9]$$

Gli intervalli caratterizzati da distanza quadridimensionale positiva sono detti *di tipo spaziale*, quelli caratterizzati da distanza negativa sono detti *di tipo temporale*.¹⁶ Se, in un certo riferimento, due eventi si verificano nello stesso punto dello spazio ordinario e in istanti diversi, la loro distanza quadridimensionale, definita dalla [13.7.9], è negativa e il relativo intervallo è di tipo temporale; se invece si verificano nello stesso istante e in punti diversi dello spazio ordinario, la loro distanza quadri-

¹⁶ Molti autori definiscono la metrica dello spaziotempo nella forma:

$$(\Delta s)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2.$$

Per loro, di conseguenza, gli intervalli di tipo spaziale hanno distanza negativa, quelli di tipo temporale hanno distanza positiva.

dimensionale è positiva e l'intervallo è di tipo spaziale. Tenendo conto dell'invarianza del Δs rispetto a tutti i riferimenti inerziali, si deduce che un intervallo di tipo spaziale è caratterizzato dal fatto che è sempre possibile trovare un riferimento rispetto al quale i due eventi si verifichino in punti diversi dello spazio ordinario e nello stesso istante. Analogamente, per un intervallo di tipo temporale è sempre possibile trovare un riferimento nel quale i due eventi si verifichino in istanti diversi, nello stesso punto dello spazio ordinario.

Riprendiamo in considerazione le leggi di trasformazione, riportate nel paragrafo precedente, per la densità di corrente e la densità di carica. Abbiamo osservato (vedi p. 668) che le grandezze J_x, J_y, J_z, ρ si trasformano, al variare del riferimento inerziale, come le coordinate spaziotemporali di un punto (x, y, z, t) . Ricordiamo che nell'ordinario spazio tridimensionale un vettore è caratterizzato da una terna ordinata di numeri reali (ottenuti come risultato di specifiche operazioni fisiche) che si trasformano, al variare del sistema di riferimento secondo relazioni (vedi le [A.3.1]) dello stesso tipo di quelle che definiscono il passaggio da un sistema di coordinate cartesiane a un altro (vedi § A.6); di conseguenza, nell'ordinario spazio tridimensionale, si definisce "vettoriale" ogni grandezza caratterizzata da una terna ordinata di numeri reali trasformantisi, al ruotare degli assi coordinati, come le coordinate di un punto.

E' naturale ora estendere la precedente definizione di "grandezza vettoriale" affermando che, nello spaziotempo a quattro dimensioni, sono vettoriali (o anche *quadrivettoriali*) grandezze caratterizzate da quattro numeri (risultanti da specifiche operazioni fisiche) che si trasformino, al ruotare degli assi coordinati (al variare cioè del riferimento inerziale), allo stesso modo delle quattro coordinate di punto (x_1, x_2, x_3, x_4) . In particolare, è possibile definire un quadrivettore "densità di corrente-densità di carica", indicato con il simbolo \mathcal{I} , le cui componenti, in un dato sistema di coordinate spaziotemporali x_1, x_2, x_3, x_4 (cioè in un dato riferimento inerziale) sono date dalle relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_1 = J_x \\ \mathcal{I}_2 = J_y \\ \mathcal{I}_3 = J_z \\ \mathcal{I}_4 = jc\rho. \end{array} \right. \quad [13.7.10]$$

Altri esempi di quadrivettori, tra i molti esistenti, saranno considerati nel seguito. Continuando nell'analogia formale tra spazio quadridimensionale e spazio ordinario e tra quadrivettori e vettori ordinari, estenderemo al caso quadridimensionale le operazioni tra vettori. Così, considerati due quadrivettori \mathcal{A} e \mathcal{B} , di componenti $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ e $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$ l'operazione di somma fra componenti,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1 \\ C_2 = \mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2 \\ C_3 = \mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_3 \\ C_4 = \mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4, \end{array} \right. \quad [13.7.11]$$

porta a definire un quadrivettore *somma*, $C = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, di componenti C_1, C_2, C_3, C_4 . Indicando con l'indice μ le componenti di \mathcal{A}, \mathcal{B} e C , le [13.7.11] possono essere riscritte in forma compatta:

$$C_\mu = \mathcal{A}_\mu + \mathcal{B}_\mu, \quad \mu = 1, \dots, 4. \quad [13.7.11']$$

Analogamente, si definisce il *prodotto di un quadrivettore \mathcal{A} per uno scalare α* (reale o complesso) mediante le relazioni:

$$C_\mu = \alpha \mathcal{A}_\mu, \quad \mu = 1, \dots, 4. \quad [13.7.12]$$

Il *prodotto scalare* tra due quadrivettori \mathcal{A} e \mathcal{B} è definito da¹⁷

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \sum_{\mu=1}^4 \mathcal{A}_\mu \mathcal{B}_\mu = \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3 + \mathcal{A}_4 \mathcal{B}_4. \quad [13.7.13]$$

Il *modulo* di un quadrivettore è, quindi, definito da

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}| = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{A})^{1/2} = \left(\sum_{\mu=1}^4 \mathcal{A}_\mu^2 \right)^{1/2} = (\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2 + \mathcal{A}_4^2)^{1/2}.$$

Osserviamo infine che nell'ordinario spazio tridimensionale, un'equazione vettoriale si conserva tra le componenti scalari relative a qualsiasi sistema di coordinate cartesiane. Così, se l'equazione è¹⁸

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad [13.7.14]$$

siamo certi che, in qualsivoglia sistema di coordinate cartesiane, risulta

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad [13.7.14']$$

essendo a_i e b_i le componenti dei due vettori nel sistema di coordinate prescelto. Osserviamo che vale anche la proprietà inversa: se, cioè, siamo arrivati a definire (operativamente) due terne ordinate di numeri a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 e abbiamo verificato che, in un dato sistema di coordinate cartesiane,

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

per sapere se tali equazioni valgono anche in altri sistemi di coordinate cartesiane è sufficiente verificare che le terne di numeri a_i e b_i si trasformino come le coordinate x_i .

Le precedenti osservazioni possono essere estese al caso quadridimensionale: se, in

¹⁷ Il prodotto scalare così definito è invariante rispetto ai cambiamenti di riferimento. Tale è anche il modulo di un quadrivettore.

¹⁸ Naturalmente, nella [13.7.14] i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} vanno intesi come risultanti di espressioni generiche a primo e secondo membro.

un certo sistema di coordinate quadridimensionali (e cioè in un certo sistema di riferimento) sussistono le equazioni

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{B}_\mu, \quad \mu = 1, \dots, 4,$$

esse valgono in ogni altro riferimento inerziale, a patto che le \mathcal{A}_μ e \mathcal{B}_μ siano componenti di due quadrirettori. Di conseguenza, se riusciamo a esprimere una legge fisica nella forma di un'uguaglianza tra quadrirettori, siamo certi che essa vale, nella stessa forma, in ogni sistema di riferimento inerziale, cioè che essa è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Può risultare conveniente, dunque, riscrivere le equazioni della fisica, e in particolare quelle dell'elettromagnetismo, in forma quadridimensionale: in questo modo, infatti, se ne mette in risalto il carattere di invarianza rispetto alle trasformazioni suddette. Occorre, a tal fine, estendere al caso quadridimensionale anche il formalismo tipico del calcolo vettoriale dell'ordinario spazio tridimensionale, estendere in altre parole le definizioni degli operatori vettoriali grad, div, rot, ∇^2 ecc.

Introduciamo in primo luogo il *gradiente quadridimensionale*. Dato, in un riferimento K , un campo scalare $\Phi(x, y, z, t)$, invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, si mostra facilmente che le quattro grandezze

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

si trasformano come le componenti di un quadrirettore. Per convincersene, si prenda in esame, ad esempio, il caso particolare in cui Φ dipenda soltanto da x e t . Consideriamo un nuovo riferimento K' , in moto rispetto al primo con velocità uniforme \mathbf{v} diretta lungo l'asse x . Osservato dal nuovo riferimento, il campo scalare può essere rappresentato dalla funzione $\Phi'(x', t')$:

$$\Phi'(x', t') = \Phi[x(x', t'), t(x', t')],$$

dove le x', t' sono legate alle x, t dalle trasformazioni speciali di Lorentz.

Posto, poi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & \mathcal{A}_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & \mathcal{A}_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}, & \mathcal{A}_t &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ \mathcal{A}'_x &= \frac{\partial \Phi'}{\partial x'}, & \mathcal{A}'_y &= \frac{\partial \Phi'}{\partial y'}, & \mathcal{A}'_z &= \frac{\partial \Phi'}{\partial z'}, & \mathcal{A}'_t &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t'}, \end{aligned} \quad [13.7.16]$$

si ha subito

$$\mathcal{A}'_x = \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} = \mathcal{A}_x \frac{\partial x}{\partial x'} - c^2 \mathcal{A}_t \frac{\partial t}{\partial x'},$$

$$\mathcal{A}'_t = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} \right) = -\frac{1}{c^2} \mathcal{A}_x \frac{\partial x}{\partial t'} + \mathcal{A}_t \frac{\partial t}{\partial t'}.$$

Ricordando le [13.4.63], si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_x &= \mathcal{A}_x \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{c^2 \mathcal{A}_t \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathcal{A}_x - v \mathcal{A}_t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathcal{A}'_y = \mathcal{A}_y, \quad \mathcal{A}'_z = \mathcal{A}_z, \\ \mathcal{A}'_t &= -\frac{1}{c^2} \mathcal{A}_x \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \mathcal{A}_t \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathcal{A}_t - \frac{v}{c^2} \mathcal{A}_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}$$

In conclusione, le grandezze \mathcal{A}_μ si trasformano effettivamente allo stesso modo delle coordinate spaziotemporali di punto (x, y, z, t) . Introducendo, al solito, le x_1, x_2, x_3, x_4 in luogo delle x, y, z, t , il quadrivettore "gradiente" del campo scalare Φ è definito da

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_x, \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_y, \quad \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_z, \quad \mathcal{A}_4 = jc \mathcal{A}_t. \quad [13.7.17]$$

L'operatore di gradiente quadridimensionale è solitamente indicato con il simbolo

$$\nabla_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, 4$$

e può esser scritto formalmente come

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, -\frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad [13.7.18]$$

e quindi, più semplicemente:

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right). \quad [13.7.19]$$

Analogamente si possono estendere al caso dei campi quadrivettoriali le nozioni di *divergenza* e di *rotore* di un campo vettoriale, ponendo

$$\operatorname{div} \mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial x_4}, \quad [13.7.20]$$

e

$$(\operatorname{rot} \mathcal{A})_{ik} = \frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_k}, \quad i, k = 1, \dots, 4. \quad [13.7.21]$$

La divergenza di un campo quadrivettoriale è un invariante scalare; il rotore è definito come un tensore emisimmetrico del second'ordine.¹⁹

¹⁹ Per quel che riguarda l'estensione al caso quadridimensionale della nozione di grandezza tensoriale, vedi la nota 20.

Applicando successivamente l'operatore di gradiente e quello di divergenza a un campo scalare, si ottiene l'estensione quadridimensionale del laplaciano. Tale operatore, detto *d'alembertiano*, viene solitamente indicato con il simbolo \square (oppure \square^2):

$$\square = \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad [13.7.22]$$

13.8 Formulazione quadridimensionale delle leggi dell'elettromagnetismo

Siamo ora in condizioni di formulare le equazioni dell'elettromagnetismo in forma quadridimensionale, utilizzando le nozioni e il formalismo introdotti nel paragrafo precedente. Cominciamo con l'equazione di continuità per la carica:

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad [13.8.1]$$

Ricordando l'espressione del quadrvettore "densità di corrente-densità di carica" \mathcal{J} , si ottiene subito:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{jc}{jc} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathcal{J}_4}{\partial x_4} = \text{div } \mathcal{J}. \end{aligned}$$

La [13.8.1] può quindi essere riscritta nella forma quadridimensionale

$$\text{div } \mathcal{J} = 0. \quad [13.8.2]$$

Consideriamo ora le equazioni dei potenziali:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad [13.8.3]$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad [13.8.4]$$

Introducendo un operatore *d'alembertiano vettore* (in modo formalmente analogo a quello seguito, in coordinate cartesiane, per il laplaciano vettore) mediante le relazioni

$$(\square \mathbf{A})_\mu = \square A_\mu, \quad \mu = 1, \dots, 4 \quad [13.8.5]$$

è facile verificare le [13.8.3], [13.8.4] in forma quadridimensionale. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\mu_0 J_x, & \nabla^2 A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= -\mu_0 J_y, \\ \nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\mu_0 J_z, & \nabla^2 \left(jc \frac{V}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(jc \frac{V}{c^2} \right) &= -\mu_0 (jc\rho) \end{aligned}$$

e quindi

$$(\square \mathcal{A})_\mu = -\mu_0 \mathcal{T}_\mu.$$

Poiché, in base al principio di relatività, tali equazioni debbono valere, nella stessa forma, in tutti i riferimenti inerziali, e inoltre a secondo membro figurano le componenti di un quadrvettore, $\mu_0 \mathcal{T}$, anche le espressioni a primo membro devono essere componenti di un quadrvettore "potenziale" \mathcal{A} :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = A_x \\ \mathcal{A}_2 = A_y \\ \mathcal{A}_3 = A_z \\ \mathcal{A}_4 = jc \frac{V}{c^2} \end{cases} \quad [13.8.6]$$

Da ciò si deducono le leggi di trasformazione per \mathcal{A}

$$\begin{cases} \mathcal{A}'_1 = \frac{\mathcal{A}_1 + j \frac{v}{c} \mathcal{A}_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \mathcal{A}'_2 = \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}'_3 = \mathcal{A}_3 \\ \mathcal{A}'_4 = \frac{\mathcal{A}_4 - j \frac{v}{c} \mathcal{A}_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}.$$

Passiamo infine alla rappresentazione quadridimensionale delle equazioni di Maxwell. Introducendo il *tensore elettromagnetico quadridimensionale*, le cui componenti scalari sono definite dagli elementi della matrice emisimmetrica²⁰

$$\Phi_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{j}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{j}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{j}{c} E_z \\ \frac{j}{c} E_x & \frac{j}{c} E_y & \frac{j}{c} E_z & 0 \end{bmatrix}, \quad [13.8.7]$$

²⁰ Anche la definizione delle grandezze quadritensoriali del second'ordine è la naturale estensione di quella delle analoghe grandezze nello spazio ordinario. Le componenti di un quadriten-

le quattro equazioni di Maxwell si possono riscrivere, in maniera compatta, nella forma:²¹

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_{rs}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_{sk}}{\partial x_r} + \frac{\partial \Phi_{kr}}{\partial x_s} = 0, \quad r, s, k = 1, \dots, 4 \quad (\text{diversi tra loro}) \\ \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_k} = \mu_0 J_i, \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right. \quad [13.8.9]$$

Il fatto che le Φ_{ik} siano le componenti di un quadritensore del secondo ordine (condizione necessaria affinché le [13.8.9] siano invarianti al variare del riferimento inerziale) consente di dedurre abbastanza semplicemente le leggi di trasformazione per il campo elettrico e per il campo magnetico. Applicando infatti le [13.8.8] (vedi nota 20) si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = B_x \\ B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad [13.8.10]$$

Siamo, con ciò, arrivati al momento centrale del processo di unificazione teorica dell'elettromagnetismo consentito della relatività speciale. Le [13.8.10], infatti, mostrano con particolare evidenza che il campo elettrico e il campo magnetico sono due aspetti della stessa realtà fenomenologica, e che l'uno si trasforma nell'altro quando si cambi il riferimento nel quale essi sono rilevati. Così, ad esempio, se in un riferimento K esiste soltanto un campo elettrico diretto lungo l'asse y , nel riferimento K'

sore del secondo ordine sono $4^2 = 16$ numeri (con $i, k = 1, \dots, 4$), risultanti da specifiche operazioni fisiche, che si trasformano, al variare del sistema di coordinate (cioè del sistema di riferimento), secondo le relazioni

$$\Phi'_{ik} = \sum_{r,s=1}^4 a_{ir} a_{ks} \Phi_{rs}, \quad i, k = 1, \dots, 4 \quad [13.8.8]$$

dove i coefficienti a_{im} sono quelli stessi della trasformazione di coordinate $x_k \rightarrow x'_k$.

²¹ La prima delle [13.8.9] equivale alle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} = 0; \end{array} \right.$$

la seconda, alle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho. \end{array} \right.$$

(in moto con velocità costante v rispetto a K) sono rilevabili sia un campo elettrico

$$E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

sia un campo magnetico

$$B'_z = \frac{-\frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nello spaziotempo a quattro dimensioni, campo elettrico e campo magnetico sono dunque componenti di un'unica grandezza tensoriale che consente di interpretare i fenomeni elettromagnetici nella loro unità. Nell'ordinario spazio euclideo tridimensionale si attribuisce scarso significato fisico alle singole componenti scalari (in un dato sistema di coordinate) di una grandezza vettoriale, poiché esse variano al variare del sistema di coordinate, mentre il vettore rappresentativo della grandezza ha un significato intrinseco, indipendente dal particolare sistema di coordinate; la stessa cosa può dirsi, nello spaziotempo quadridimensionale per il campo elettrico e il campo magnetico, a proposito del tensore Φ_{ik} dato dalle [13.8.7], l'unica grandezza fisica ad avere un significato indipendente dal particolare riferimento inerziale prescelto.

Data l'importanza delle relazioni [13.8.10], soffermiamoci ancora sull'argomento, mostrando come esse possano essere ricavate in una maniera fisicamente più intuitiva.

Consideriamo una situazione del tipo schematizzato nella figura 13.4: due piani

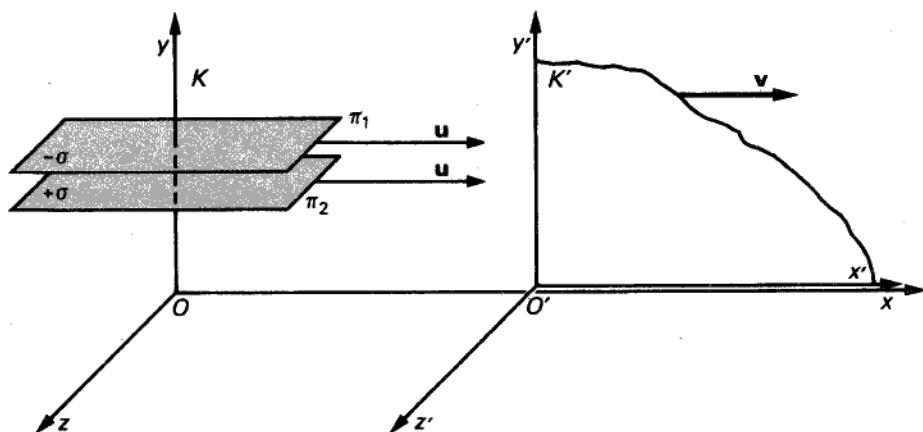


Figura 13.4

π_1 e π_2 , paralleli al piano coordinato xz di un riferimento inerziale K , sono uniformemente ricoperti da cariche distribuite con densità superficiale $+\sigma$ (su π_2) e $-\sigma$ (su π_1); immaginiamo inoltre che π_1 e π_2 scotrano lungo l'asse x con velocità u rispetto a K .

Ci proponiamo innanzitutto di valutare, in base alle leggi dell'elettromagnetismo, il campo elettrico \mathbf{E} e il campo magnetico \mathbf{B} misurabili da un osservatore solidale con K . Considerato poi un nuovo riferimento K' , in moto con velocità v rispetto al primo,²² determineremo, sempre in base alle leggi dell'elettromagnetismo (che, per il principio di relatività, valgono nella stessa forma sia in K che in K'), il campo elettrico \mathbf{E}' e il campo magnetico \mathbf{B}' rilevabili da un osservatore solidale con K' . Metteremo infine a confronto (\mathbf{E}, \mathbf{B}) ed $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$, mostrando che essi verificano le leggi di trasformazione [13.8.10].

Cominciamo col calcolare il campo \mathbf{E} esistente in K . Poiché il moto delle cariche è stazionario rispetto a K , in questo riferimento il campo \mathbf{E} verifica le leggi dell'elettrostatica ed è dunque pari al campo presente all'interno di un doppio strato piano di carica

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{i}_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{i}_y \quad [13.8.11]$$

dove, al solito, \mathbf{j} è il versore della direzione orientata dell'asse y .

Per quel che riguarda il campo magnetico, si verifica agevolmente, applicando la legge di circuitazione, che esso è uniforme nella regione compresa tra i due piani e pari a

$$\mathbf{B} = B_z \mathbf{i}_z = \mu_0 \sigma u \mathbf{i}_z, \quad [13.8.12]$$

\mathbf{i}_z essendo il versore della direzione orientata dell'asse z .

Passiamo ora al riferimento K' . La velocità u' di scorrimento delle cariche, misurata in K' , è (vedi § 13.5)

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}. \quad [13.8.13]$$

Per quel che riguarda il valore della densità di carica σ' rilevabile in K' , osserviamo innanzitutto che σ è il valore di densità misurato rispetto a K , cioè rispetto a un riferimento in cui le cariche sono in moto con velocità u . Pertanto, il valore σ_0 , misurato nel riferimento solidale con le cariche, è (vedi § 13.6)

$$\sigma_0 = \sigma \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

²² Al solito, l'asse x' di K' scorre lungo l'asse x di K .

Di conseguenza il valore σ' , misurato in K' , è dato da

$$\sigma' = \sigma \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{(u')^2}{c^2}}} . \quad [13.8.14]$$

La densità di corrente superficiale J'_S , misurata nel riferimento K' , risulta dunque pari a

$$J'_S = \sigma' u' = \sigma \frac{u - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad [13.8.15]$$

A questo punto, ripetendo per K' i ragionamenti che ci hanno portato a calcolare i campi in K , otteniamo

$$\mathbf{E}' = E'_y \mathbf{i}_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \mathbf{i}_y ,$$

$$\mathbf{B}' = B'_z \mathbf{i}_z = \mu_0 \sigma' u' \mathbf{i}_z .$$

Sostituendo in tali relazioni i valori di σ' e u' dati dalle [13.8.13]-[13.8.15], si ha

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \mu_0 \sigma u v \right), \quad B'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\mu_0 \sigma u - \frac{\sigma}{\epsilon_0} v \right) ,$$

e quindi

$$E'_y = \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

$$B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Si sono così riottenute due delle trasformazioni [13.8.10]. Considerando altri sistemi fisici, analoghi a quello esaminato, non sarebbe difficile ricavare anche le rimanenti relazioni di trasformazione tra i campi.

Prima di concludere questo paragrafo, riscriviamo le [13.8.10] in una forma equivalente che ci consentirà di fare alcune interessanti osservazioni sulla struttura dei

campi:

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \frac{(E + v \times B)_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ E'_z = \frac{(E + v \times B)_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = B_x \\ B'_y = \frac{(B - \frac{1}{c^2} v \times E)_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ B'_z = \frac{(B - \frac{1}{c^2} v \times E)_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad [13.8.10']$$

Applichiamo ora tali relazioni al caso in cui, nel riferimento K , uno dei due campi (E o B) sia ovunque nullo. Se $B=0$ si ha subito

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x, \\ E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = 0, \\ B'_y = -\frac{\frac{1}{c^2} (v \times E)_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ B'_z = -\frac{\frac{1}{c^2} (v \times E)_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Sostituendo, nelle espressioni che forniscono le componenti di \mathbf{B}' , le espressioni delle componenti di \mathbf{E} in funzione delle componenti di \mathbf{E}' , si ottiene

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}', \quad [13.8.16]$$

avendo, al solito, indicato con \mathbf{v} la velocità di K' rispetto a K . Indicando con $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ la velocità di K rispetto a K' , si ha infine

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}' \times \mathbf{E}'. \quad [13.8.17]$$

Ragionando analogamente, nel caso in cui $\mathbf{E}=0$ si ottiene

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'. \quad [13.8.18]$$

13.9 Campo elettromagnetico di una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme

Siamo ora in grado di calcolare i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} prodotti da una carica puntiforme q in moto rettilineo uniforme. Consideriamo innanzitutto la situazione in un riferimento K solidale con la carica. Supponendo la carica ferma nell'origine di K , il campo

elettrico \mathbf{E} da essa prodotto ha la classica espressione coulombiana

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{i}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

ove (x, y, z) indicano le coordinate del punto-campo considerato e $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ i versori degli assi coordinati. In K , il campo magnetico \mathbf{B} è evidentemente nullo. Passiamo ora al riferimento K' e supponiamo che in esso la carica si muova con velocità v nella direzione positiva dell'asse x' . Ciò equivale a dire che il riferimento K' si muove, rispetto a K , scorrendo con velocità $-v$ nella direzione negativa dell'asse x . Le trasformazioni di Lorentz forniscono allora

$$\begin{cases} x = \gamma(x' - c\beta t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' - \beta \frac{x'}{c}), \end{cases} \quad [13.9.1]$$

con

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

al solito, le origini O e O' dei due riferimenti coincidono nell'istante $t=t'=0$. La situazione è perciò del tipo riportato nella figura 13.5. Il campo \mathbf{E}' , visto dal riferimento K' , presenta evidentemente simmetria di rivoluzione attorno all'asse $x=x'$. Ciò significa che, per studiare la distribuzione di \mathbf{E}' , ci si può limitare ad analizzare la

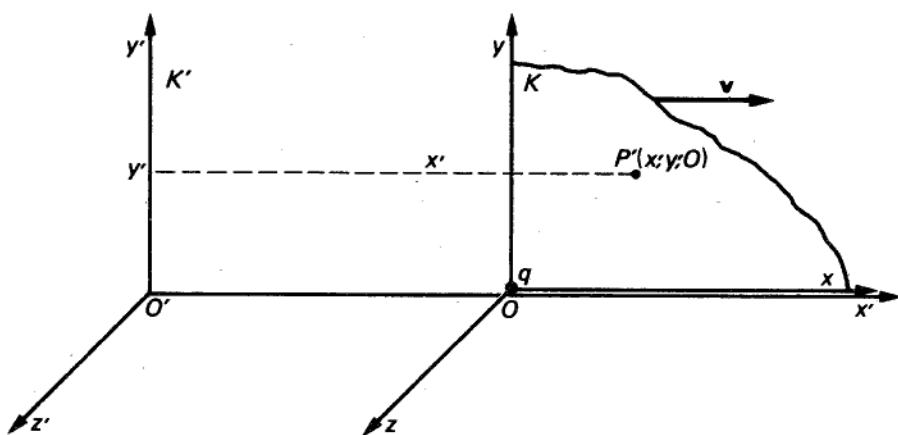


Figura 13.5

situazione in uno qualsiasi dei punti del fascio di asse $x=x'$. Consideriamo pertanto il campo \mathbf{E}' in un generico punto P' di coordinate $(x', y', 0)$, all'istante t' ; il punto-istante (P, t) , corrispondente in K a (P', t') ha coordinate $(x, y, 0, t)$, legate alle $(x', y', 0, t')$ delle trasformazioni di Lorentz. Tra le componenti E_x, E_y, E_z di \mathbf{E} in (P, t) e le componenti E'_x, E'_y, E'_z di \mathbf{E}' in (P', t') sussistono le relazioni di trasformazione [13.8.10]. Pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ E_z = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma E_y \\ E'_z = \gamma E_z = 0. \end{array} \right. \quad [13.9.2]$$

Osserviamo che anche in K' il campo \mathbf{E}' giace nel piano coordinato $x'y'$. Sostituendo a x e y le espressioni fornite dalle [13.9.1], particolarizzate per $t'=t=0$,²³ si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x'}{[(\gamma x')^2 + y'^2]^{3/2}} \\ E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y'}{[(\gamma x')^2 + y'^2]^{3/2}}, \end{array} \right. \quad [13.9.3]$$

e quindi

$$\frac{E'_y}{E'_x} = \frac{y'}{x'}. \quad [13.9.4]$$

Di conseguenza, anche nel riferimento K' il campo \mathbf{E}' è diretto lungo la semiretta spiccata dalla carica (coincidente, all'istante $t'=0$, con l'origine O') e passante per il punto-campo P' . Il modulo di \mathbf{E}' è dato da

$$E'^2 = E'_x^2 + E'_y^2 = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\gamma^2 (x'^2 + y'^2)}{[(\gamma x')^2 + (y')^2]^3}. \quad [13.9.5]$$

Ricordando che la distanza r' del punto $P'(x', y', 0)$ dall'origine O' è

$$r' = (x'^2 + y'^2)^{1/2},$$

e che l'angolo θ' formato tra il campo \mathbf{E}' e la velocità \mathbf{v} (la cui direzione coincide con l'asse $x=x'$) è tale che

$$\sin \theta' = \frac{y'}{r'},$$

²³ Essendo il moto della carica rettilineo e uniforme, la scelta dell'istante in cui valutare i campi è del tutto irrilevante.

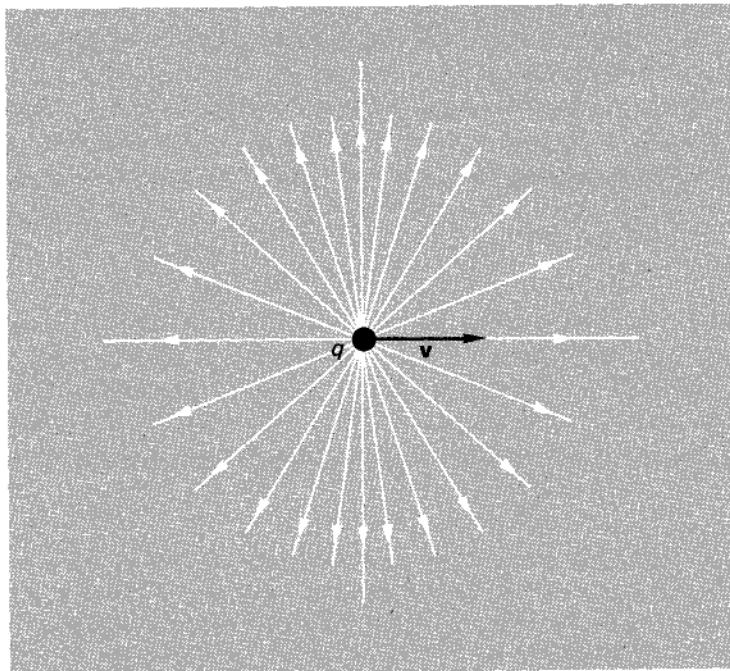


Figura 13.6
Campo elettrico di una carica in moto.

la [13.9.5] può essere riscritta nella forma equivalente:

$$E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}. \quad [13.9.5']$$

Questa relazione mostra con chiarezza che E' dipende non soltanto da v ,²⁴ ma anche dall'angolo θ' . Ciò significa che il campo elettrico della carica, visto dal riferimento K' , non è più isotropo come nel riferimento K . In particolare, il massimo di E' si riscontra in direzione perpendicolare a quella del moto della carica, il minimo nella direzione del moto. La situazione è dunque del tipo rappresentato schematicamente nella figura 13.6, nella quale, mediante un diradamento delle linee vettoriali, si è indicata una diminuzione del modulo del campo.

E' interessante, a questo punto, fare alcune osservazioni a proposito della struttura di questo campo. Cominciamo col notare che esso, pur non essendo di tipo coulombiano, soddisfa ugualmente al teorema di Gauss, come può verificarsi calcolando il flusso di E' uscente da una superficie sferica centrata nella carica. Inoltre, il campo E' non è irrotazionale: ciò si verifica immediatamente calcolandone la circuitazione estesa

²⁴ Si noti, a questo proposito, che per $v \ll c$, E' coincide con il campo coulombiano.

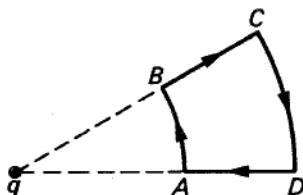


Figura 13.7

a una linea chiusa γ del tipo riportato nella figura 13.7. Mentre i contributi forniti dai tratti AB e CD sono nulli (poiché ivi il campo è normale alla linea γ), i contributi dei tratti AD e BD sono, in valore assoluto, diversi tra loro, a causa della anisotropia del campo.

Il campo magnetico \mathbf{B}' , nel riferimento K' , è esprimibile mediante la [13.8.16]:

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}'.$$

In ogni punto, il campo \mathbf{B}' è dunque perpendicolare sia a \mathbf{E}' sia a \mathbf{v} . Questa proprietà consente di dedurre immediatamente l'andamento delle linee vettoriali del campo magnetico. E' sufficiente considerare (vedi fig. 13.8) un cono circolare retto con vertice nella carica e asse diretto lungo la direzione del moto. Il campo \mathbf{E}' , in ogni punto della circonferenza di base di tale cono, è diretto lungo la generatrice del cono stesso. In ogni punto, allora, \mathbf{B}' risulta tangente alla circonferenza, che costituisce dunque una linea vettoriale del campo magnetico prodotto dalla carica in moto. Anche per \mathbf{B}' non sarebbe difficile verificare che soddisfa alle leggi dell'elettromagnetismo, e cioè che: 1) il flusso di \mathbf{B}' uscente da una qualsiasi superficie chiusa è nullo; 2) la circuitazione di \mathbf{B}' lungo una linea chiusa γ è proporzionale al flusso del campo $\partial \mathbf{E}' / \partial t'$ attraverso una generica superficie che abbia γ come orlo.

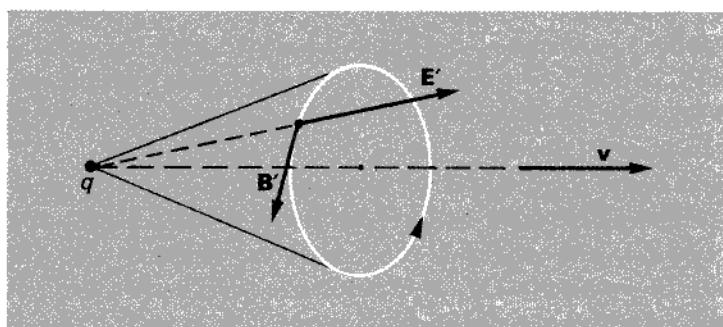


Figura 13.8

13.10 Elementi di meccanica relativistica

Si è detto precedentemente (vedi § 13.3) che uno dei postulati su cui si fonda la teoria della relatività speciale è costituito dal secondo principio della dinamica. Per un corpo puntiforme soggetto a interazioni elettromagnetiche con altri corpi, esso assume la forma:

$$\frac{dp}{dt} = q(E + v \times B), \quad [13.10.1]$$

dove p è la quantità di moto posseduta da corpo, q la sua carica, v la sua velocità, ed E e B sono i campi elettrico e magnetico agenti su di esso. Nulla, però, si è detto a proposito della relazione che lega p alla massa del corpo e alla sua velocità. Nell'ambito della meccanica newtoniana tale relazione assume la forma ben nota:

$$p = mv, \quad [13.10.2]$$

ove m indica la massa inerziale del corpo. Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, la [13.10.2] non è valida nell'ambito della meccanica relativistica. Per convincercene, sostituiamo la [13.10.2] nella [13.10.1]: poiché nella meccanica newtoniana la massa m è indipendente dallo stato di moto del corpo, otteniamo

$$m \frac{dv}{dt} = q(E + v \times B). \quad [13.10.3]$$

Se la relazione [13.10.3] fosse valida anche nella meccanica relativistica, essa dovrebbe rispettare il principio di relatività, cioè essere invariante rispetto ai cambiamenti di riferimento inerziale. D'altra parte, nei paragrafi precedenti sono state date le leggi di trasformazione per tutte le grandezze fisiche che vi compaiono, ad eccezione della massa m . Ebbene, non sarebbe difficile verificare che, nell'ipotesi che m sia invariante rispetto ai cambiamenti di riferimento, come si suppone nella meccanica classica, la [13.10.3] non può essere invariante rispetto ad essi. Occorre dunque cambiare la relazione di definizione di p in maniera che la legge della dinamica che ne consegue risulti invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. D'altra parte, si vuole anche che per velocità piccole rispetto a c le leggi della meccanica newtoniana siano verificate con buona approssimazione, poiché — è inutile dirlo — esse hanno ricevuto innumerevoli conferme sperimentali.

Si può dimostrare che ambedue le condizioni sopra enunciate sono rispettate se si assume, in luogo della [13.10.2], la seguente definizione di quantità di moto:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v; \quad [13.10.4]$$

dove si è indicata con m_0 la massa del corpo, misurata mantenendo *fermo* il corpo stesso nel riferimento inerziale nell'ambito del quale si introduce la [13.10.4]: a que-

sta grandezza si dà il nome di *massa di riposo* del corpo in esame. E' allora possibile utilizzare ancora la relazione

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$

come definizione di quantità di moto, a patto di introdurre una *massa dinamica* m , variabile con la velocità, data da

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad [13.10.5]$$

Sostituendo la [13.10.4] nella [13.10.1], si ottiene la legge della dinamica relativistica di un punto materiale soggetto a interazioni elettromagnetiche con altri corpi:

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad [13.10.6]$$

Questa equazione, per $v \ll c$, tende asintoticamente alla classica forma newtoniana

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

così come si voleva.

Non è difficile dimostrare che l'*equazione [13.10.6]* è *invariante rispetto ai cambiamenti di riferimento inerziali*. Per questo, apriamo una breve parentesi per introdurre l'*energia relativistica* \mathcal{E} . Per definizione, un punto materiale di massa di riposo m_0 , dotato di velocità \mathbf{v} in un dato riferimento inerziale, ha un'energia relativistica

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad [13.10.7]$$

Per comprendere il significato di questa definizione, ricordiamo che, nell'ambito della meccanica newtoniana, detta

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

l'*energia cinetica* posseduta dal punto materiale, risulta (*teorema delle forze vive*)

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dT}{dt}. \quad [13.10.8]$$

Proviamo ora a calcolare, anche in ambito relativistico, la quantità $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}/dt$. Posto $\mathbf{v} = vt$, dove t indica il versore della tangente alla traiettoria del punto,²⁵ si ha

²⁵ Da non confondere il versore t con la variabile temporale t !

subito

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{t} \right) = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{t} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{t}}{dt}. \quad [13.10.9]$$

Moltiplicando questa espressione scalarmente per \mathbf{v} e osservando che il vettore $d\mathbf{t}/dt$ è per definizione perpendicolare a \mathbf{t} (e quindi a \mathbf{v}), si ha subito

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad [13.10.10]$$

Questa relazione estende all'ambito relativistico il teorema delle forze vive, a patto naturalmente di considerare la [13.10.7] come espressione dell'energia posseduta dal corpo. Non a caso, alla \mathcal{E} si è dato il nome di energia relativistica, e non quello di "energia cinetica" (sia pure relativistica), che sarebbe apparso naturale a conclusione del ragionamento seguito. Infatti, anche quando il punto materiale è a riposo nel riferimento inerziale considerato, la sua energia relativistica non è nulla, ma risulta, giusta la [13.10.7], pari a

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2. \quad [13.10.11]$$

Al termine \mathcal{E}_0 così definito si dà il nome di *energia di riposo* del corpo: essa dipende dalla massa di questo. E' naturale allora definire un'*energia cinetica relativistica* \mathcal{T} nel modo seguente:

$$\mathcal{T} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad [13.10.12]$$

Sostituendo tale espressione nella [13.10.10], si ottiene

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathcal{T}}{dt}. \quad [13.10.10']$$

Osserviamo infine, ancora a proposito di \mathcal{T} , che sviluppando la [13.10.12] in serie di McLaurin in termini di v^2/c^2 , si ha

$$\mathcal{T} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

L'energia cinetica newtoniana costituisce dunque il primo termine di questo sviluppo e l'energia cinetica relativistica \mathcal{T} si riduce ad essa per velocità sufficientemente piccole rispetto a c .

Riprendiamo ora la dimostrazione dell'invarianza della [13.10.6], cominciando col ricavare le relazioni di trasformazione per la quantità di moto \mathbf{p} e per l'energia.

Ricordiamo (vedi § 13.4) che l'intervallo di tempo proprio $d\tau$, relativo a un punto materiale in moto con velocità \mathbf{v} nel riferimento K , è legato all'intervallo di tempo dt misurato dagli orologi di K dalla relazione

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Ciò implica che le componenti p_x, p_y, p_z di \mathbf{p} possono essere riscritte nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx}{dt} = m_0 \frac{dx}{d\tau} \\ p_y = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dy}{dt} = m_0 \frac{dy}{d\tau} \\ p_z = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dz}{dt} = m_0 \frac{dz}{d\tau}, \end{array} \right. \quad [13.10.13]$$

e l'energia \mathcal{E} può essere riscritta come

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau}. \quad [13.10.14]$$

E' immediato a questo punto ricavare le leggi di trasformazione di p_x, p_y, p_z e \mathcal{E} : infatti, dall'invarianza di m_0, c e $d\tau$ discende che tali quantità si trasformano rispettivamente come dx, dy, dz e dt . In altre parole, è possibile definire un nuovo quadriettore \mathbf{p} , detto *quantità di moto-energia*, le cui componenti p_1, p_2, p_3, p_4 sono

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_x \\ p_2 = p_y \\ p_3 = p_z \\ p_4 = jc \frac{\mathcal{E}}{c^2} \end{array} \right. \quad [13.10.15]$$

Di conseguenza, le leggi di trasformazione considerate sono espresse dalle relazioni

$$p'_x = \frac{p_x - v \frac{\mathcal{E}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p'_y = p_y,$$

$$p'_z = p_z,$$

$$\frac{\mathcal{E}'}{c^2} = \frac{\frac{\mathcal{E}}{c^2} - \frac{v}{c^2} p_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [13.10.16]$$

Osserviamo infine che l'invarianza del modulo del quadrivettore \mathbf{p} implica l'invarianza dell'espressione

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad [13.10.17]$$

(facile da memorizzare, facendo ricorso al triangolo riportato in fig. 13.9).

Siamo finalmente in grado di ricavare anche l'espressione delle leggi di trasformazione per la derivata della quantità di moto \mathbf{p} . Con calcoli abbastanza semplici (la derivazione rispetto al tempo è indicata con un puntino) si ha

$$\begin{aligned} \dot{p}'_x &= \dot{p}_x - \frac{\frac{v}{c^2} u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \dot{p}_y - \frac{\frac{v}{c^2} u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \dot{p}_z, \\ \dot{p}'_y &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \dot{p}_y, \\ \dot{p}'_z &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \dot{p}_z; \end{aligned} \quad [13.10.18]$$

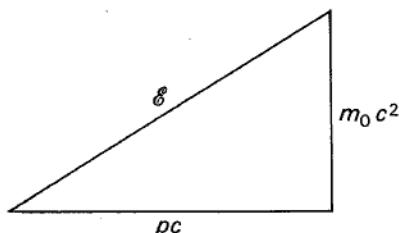


Figura 13.9

v indica la velocità del riferimento K' rispetto a K , u_x, u_y, u_z indicano le componenti della velocità \mathbf{u} posseduta dal corpo nel riferimento K . Sostituendo queste trasformazioni, insieme con le analoghe relazioni di trasformazione per \mathbf{E} e \mathbf{B} , nella [13.10.6], non è difficile mostrare l'invarianza dell'equazione fondamentale della dinamica relativistica (per non appesantire l'esposizione, si preferisce omettere quest'ultima parte degli sviluppi formali, lasciandola come esercizio al lettore). ■

Prima di concludere questo paragrafo, sembra utile sottolineare esplicitamente una delle più importanti conseguenze della [13.10.6], cioè che *nessun corpo materiale può raggiungere la velocità c* . Per convincersene, si consideri ad esempio il moto di una particella, di carica q e massa di riposo m_0 , soggetta a un campo elettrico uniforme \mathbf{E} (costante nel tempo) in un dato riferimento inerziale. La [13.10.6] fornisce subito

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E}.$$

Supponendo che la particella sia inizialmente a riposo, si ottiene

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qE,$$

ove v è il modulo della velocità della particella. Integrando, si ha

$$m_0 \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qEt. \quad [13.10.19]$$

Per studiare il comportamento della particella alle alte velocità, consideriamo la [13.10.19] per $t \gg m_0 c/qE$. Si ha allora

$$v \approx c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c}{qEt}\right)^2},$$

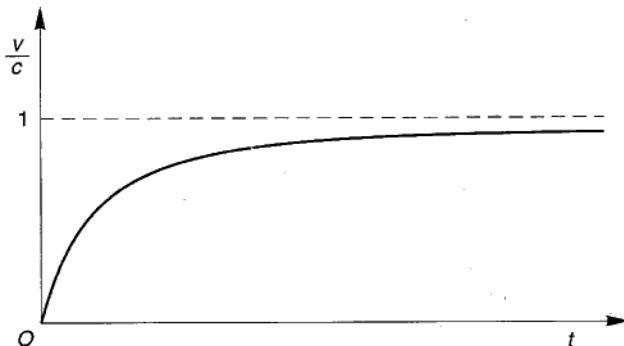


Figura 13.10

e ciò dimostra che, per $t \rightarrow \infty$, v si avvicina asintoticamente alla velocità c (come mostrato in fig. 13.10). In maniera analoga, si vede pure che, mentre la velocità della particella tende asintoticamente a c (come conseguenza del suo aumento di massa m), la sua energia, soggetta all'azione del campo, continua a crescere indefinitamente. Ricordando infatti l'espressione dell'energia \mathcal{E} , si ha, per $t \gg m_0 c/qE$,

$$\mathcal{E} \approx qEct.$$

13.11 Meccanica relativistica delle collisioni

Nei paragrafi precedenti abbiamo esaminato le leggi della dinamica relativistica per un punto materiale soggetto a interazioni elettromagnetiche con altri corpi. La relatività speciale non consente peraltro di trattare l'interazione gravitazionale, che, nella forma enunciata da Newton, presuppone un'interazione istantanea tra i corpi. E' soltanto in un quadro molto più ampio, quello della *relatività generale*, che le interazioni gravitazionali trovano la loro collocazione. La relatività generale non si limita infatti a considerare trasformazioni tra sistemi inerziali, ma prende in esame trasformazioni tra sistemi di riferimento qualsiasi (l'argomento esula però dagli scopi del libro). La relatività speciale consente invece di affrontare lo studio di un'altra importante classe di fenomeni, oltre a quelli elettromagnetici: quella delle collisioni (elastiche e inelastiche) tra punti materiali. Anzi, proprio nello studio di tali fenomeni, la teoria di Einstein si è mostrata feconda di risultati sorprendenti, anche sul piano applicativo.

Nel seguito, intenderemo per *collisione* tra due punti materiali un'interazione di durata trascurabile rispetto alla scala dei tempi in cui si studia il moto dei corpi, e nel corso della quale non vengano irraggiate quantità di moto ed energia, né venga sviluppato calore. L'esperienza mostra che, indipendentemente dalla particolare natura della interazione che si verifica nel corso della collisione, le quantità di moto dei due punti, espresse dalla [13.10.4], e le loro energie relativistiche, espresse dalla [13.10.7], si conservano nella collisione. In altre parole, dette p_1 , p_2 e \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , rispettivamente, le quantità di moto e le energie relativistiche dei due punti materiali, valutate in un riferimento inerziale K *prima* che inizi la collisione, e p_1^* , p_2^* , \mathcal{E}_1^* , \mathcal{E}_2^* le corrispondenti grandezze valutate ancora in K al termine della collisione, risulta

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_1^* + p_2^*, \\ \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_1^* + \mathcal{E}_2^*. \end{aligned} \tag{13.11.1}$$

Ammesso che queste relazioni valgano in un particolare riferimento inerziale, per il principio di relatività esse devono valere in ogni altro riferimento inerziale. Non sarebbe difficile, anzi, mostrare che, postulando che i principi di conservazione della quantità di moto e dell'energia valgano rispetto a *tutti* i riferimenti inerziali (pur

senza specificare a priori le definizioni relativistiche di \mathbf{p} ed \mathcal{E}) le espressioni [13.10.4] e [13.10.7] per \mathbf{p} ed \mathcal{E} restano univocamente determinate.

Le [13.11.1] si estendono immediatamente alle collisioni tra N punti materiali, scrivendo

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^*, \quad [13.11.2]$$

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^*.$$

Per illustrare il significato e la portata di quanto detto, consideriamo un semplice esempio di collisione inelastica fra due particelle. Supponiamo che le particelle siano identiche, e che, per effetto della collisione, si riuniscano in modo da costituire un'unica, nuova particella.²⁶ Ponendoci in un riferimento inerziale K nel quale, prima della collisione, risulti

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0,$$

(riferimento, per definizione, solidale con il baricentro del sistema delle due particelle), la quantità di moto \mathbf{p}_3^* della particella risultante dalla collisione dev'essere nulla, per la prima delle [13.11.1]. Di conseguenza

$$\mathbf{v}_3 = 0,$$

la particella risultante è cioè ferma nel riferimento K . Applicando il principio di conservazione dell'energia e tenendo conto del fatto che, prima della collisione, in K risulta

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E},$$

si ottiene subito

$$\mathcal{E}_3^* = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E},$$

avendo indicato con \mathcal{E}_3^* l'energia (valutata nel riferimento K) della nuova particella. Ricordando l'espressione [13.10.7] dell'energia relativistica e osservando che \mathcal{E}_3^* si riduce alla sola energia di riposo della particella, si ha subito

$$m_{03} c^2 = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad [13.11.3]$$

ove m_{03} è la massa di riposo della particella risultante, m_0 la massa di riposo di ciascuna delle due particelle collidenti, v il modulo della velocità (in K) di ciascuna particella prima della collisione.

²⁶ Un processo del genere si verifica nel corso delle reazioni nucleari di fusione.

La [13.11.3] ci dice che la massa di riposo m_{03} della nuova particella è maggiore della somma $2m_0$ delle masse di riposo delle due particelle collidenti. In altre parole, le masse di riposo *non* si conservano nel corso delle collisioni! Per comprendere l'origine di questo aumento di massa, ricordiamo che l'energia relativistica \mathcal{E} di un punto materiale può essere posta nella forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{T} = m_0 c^2 + \mathcal{T},$$

ove \mathcal{E}_0 è l'energia di riposo del corpo e \mathcal{T} la sua energia cinetica. Applicando questa relazione all'esempio in esame, si ha

$$\mathcal{E}_3^* = \mathcal{E}_{30}^* = m_{03} c^2 = 2\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 + 2\mathcal{T} = 2m_0 c^2 + 2\mathcal{T}, \quad [13.11.4]$$

dove \mathcal{E}_0 e \mathcal{T} si riferiscono a ciascuna delle due particelle, in K , considerate prima della collisione.

Dalla [13.11.4] si ottiene

$$m_{03} = 2m_0 + 2 \frac{\mathcal{T}}{c^2}. \quad [13.11.4']$$

Questa relazione mostra con chiarezza che l'aumento di massa di riposo della nuova particella è dovuto all'energia cinetica posseduta dalle due particelle prima della collisione. In altre parole, dopo la collisione, questa energia cinetica è scomparsa, e al suo posto si riscontra un aumento di massa della nuova particella, secondo la classica relazione

$$\Delta m_0 = \frac{\Delta \mathcal{T}}{c^2}, \quad [13.11.5]$$

con ovvio significato dei simboli.

Questo fondamentale risultato, che mostra la completa equivalenza tra massa di riposo ed energia cinetica di una particella, previsto teoricamente dalla relatività speciale, ha trovato eclatanti conferme sperimentali nelle reazioni nucleari di fissione dei nuclei pesanti e di fusione dei nuclei leggeri, nelle quali si riscontra la trasformazione in energia di una piccola frazione della massa di riposo di uno o più nuclei atomici.

Esperienze illustrate

1. Esperienza di Michelson e Morley

Questa classica esperienza fu effettuata per la prima volta da Albert Michelson nel 1881, e successivamente dallo stesso Michelson e da Edward Morley, nel 1887. Da allora è stata ripetuta numerose volte, utilizzando come sorgente luminosa anche la luce del Sole e la luce delle stelle; ogni volta i risultati ottenuti da Michelson e Morley sono stati confermati. L'esperienza fu ideata al fine di accertare l'eventuale esistenza

dell'etere cosmico, supposto uniformemente diffuso in tutto lo spazio e assolutamente immobile in esso. Il dispositivo sperimentale è rappresentato schematicamente nella figura 13.11.

La luce emessa dalla sorgente luminosa L attraversa in parte la lastra di vetro semiargentato S (inclinata di 45° rispetto al raggio incidente), dirigendosi verso lo specchio S_1 , e, nella restante parte, viene riflessa da S e si dirige verso lo specchio S_2 . I raggi che colpiscono S_1 vengono riflessi su S , e di qui, poi, da S nel cannocchiale C ; invece i raggi che colpiscono S_2 sono riflessi indietro, attraversano S e raggiungono il cannocchiale. Se i due raggi, seguendo percorsi diversi, impiegassero tempi diversi a raggiungere il cannocchiale, vi produrrebbero fenomeni di interferenza osservabili (*frange*).²⁷

Supponendo, per il momento, che l'intero dispositivo sia fermo nell'etere, i raggi luminosi che seguono il percorso SS_1SC , con velocità c , impiegherebbero un tempo t_1 :

$$t_1 = 2 \frac{L_1}{c} + \tau,$$

ove L_1 è la distanza tra S e S_1 e τ l'intervallo di tempo impiegato dalla luce per andare da S a C . Analogamente, il tempo impiegato dai raggi nel percorso SS_2SC sarebbe pari a

$$t_2 = 2 \frac{L_2}{c} + \tau,$$

avendo indicato con L_2 la distanza tra S ed S_2 . La differenza Δt fra t_2 e t_1 sarebbe allora

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} (L_2 - L_1).$$

Facendo rotare di 90° l'intero dispositivo (supponendo che anche nella nuova posizione esso sia fermo rispetto all'etere), la differenza Δt resterebbe evidentemente la stessa, e le frange d'interferenza, in C , non mostrerebbero alcun mutamento. In conclusione: se la Terra (e quindi il dispositivo) fosse ferma nell'etere, una rotazione di 90° del dispositivo non dovrebbe produrre alcun mutamento nelle frange d'interferenza.

Vediamo, invece, che cosa si verificherebbe se la Terra, nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, si movesse rispetto all'etere con velocità v indicata nella figura 11.11. Analizziamo separatamente i diversi percorsi dei raggi.

Percorso SS_1SC . In questo caso, occorre tener conto del fatto che, essendo c la velocità della luce rispetto all'etere, essa, misurata rispetto alla Terra (e quindi, rispetto al dispositivo), dev'essere pari a $c - v$ durante l'andata del segnale luminoso da S a S_1 , e a $c + v$ durante il ritorno da S_1 a S .²⁸ Di conseguenza l'intervallo di tempo t'_1 impiegato dal raggio a percorrere il cammino SS_1SC è

$$t'_1 = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} + \tau' = 2 \frac{L_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \tau',$$

²⁷ Ricordiamo che le frange di interferenza si presentano come un insieme di strisce luminose intercalate da strisce oscure.

²⁸ Con ciò, implicitamente, abbiamo applicato la composizione galileiana delle velocità, com'era naturale all'epoca dell'esperienza.

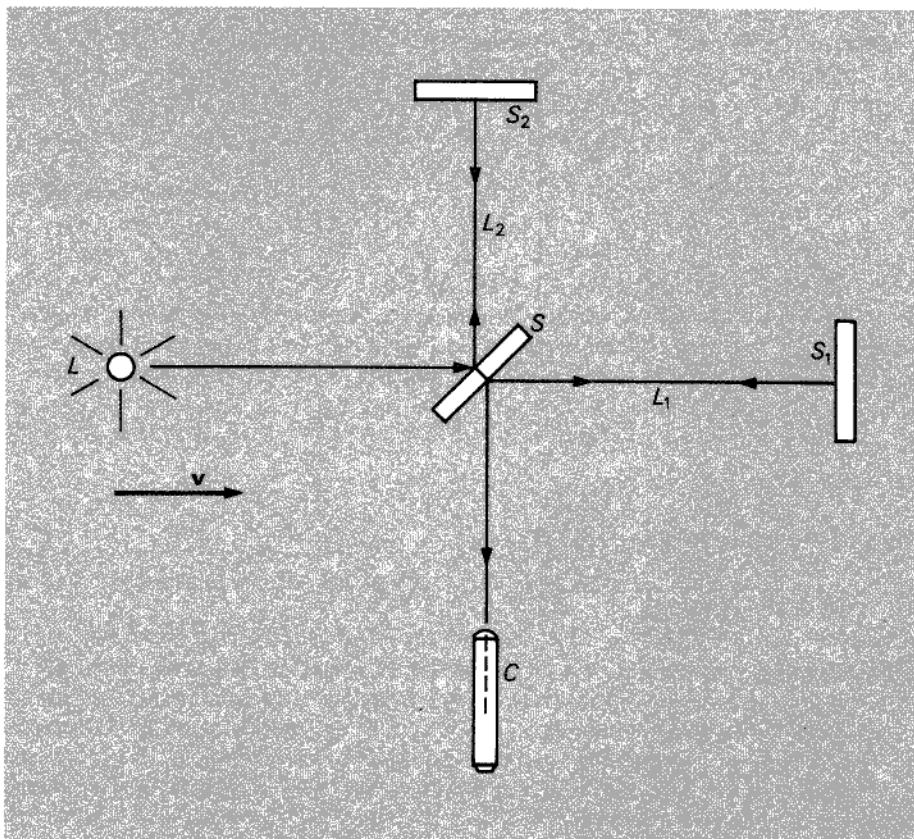


Figura 13.11

Schema del dispositivo utilizzato da Michelson e Morley.

avendo indicato con τ' il tempo impiegato dalla luce, in queste nuove condizioni, a percorrere il cammino SC .

Percorso $SS_2 SC$. Per calcolare l'intervallo di tempo t'_2 impiegato dalla luce a percorrere il cammino $SS_2 SC$, immaginiamo di osservare il percorso del raggio ponendoci in un riferimento solidale con l'etere. Il percorso ci appare in tal caso come nella figura 13.12, poiché nel tempo impiegato dalla luce a raggiungere S_2 e a ritornare su S la lastra S si sposta, per effetto del moto della Terra. La distanza percorsa dal raggio, in queste condizioni, per andare da A a C è

$$L_{AC} = \sqrt{L_2^2 + L_{AB}^2}. \quad [1]$$

Indicando con t'_0 il tempo impiegato dalla luce in tale tragitto, si ha

$$L_{AC} = ct'_0, \quad L_{AB} = vt'_0.$$

Sottraendo la [2] dalla [3], si ottiene

$$T = \Delta t'' - \Delta t' = \frac{2}{c} (L_1 + L_2) \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right); \quad [4]$$

infine, supponendo $v^2 \ll c^2$,

$$T \approx \frac{1}{c} (L_1 + L_2) \frac{v^2}{c^2}. \quad [4']$$

La differenza di tempi T dovrebbe produrre, rotando il dispositivo, un mutamento nelle frange di interferenza. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza del fenomeno previsto, si consideri che, se T fosse pari al periodo dell'oscillazione elettromagnetica che costituisce la luce, le frange dovrebbero spostarsi di un tratto pari alla larghezza di un'intera frangia. In tal caso, con $T = \lambda/c$ (λ è la lunghezza d'onda), si avrebbe

$$\frac{1}{c} (L_1 + L_2) \frac{v^2}{c^2} = \frac{\lambda}{c}.$$

Ponendo $v = 3 \times 10^4$ m/s e $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m, si vede che, per ottenere uno spostamento pari alla larghezza di una frangia, sarebbe sufficiente un percorso

$$L_1 + L_2 = 50 \text{ m}.$$

Facendo subire alla luce parecchie riflessioni, è possibile ottenere una lunghezza di questo ordine contenendo le dimensioni totali del dispositivo entro limiti d'ingombro ragionevoli. Ebbene, né l'esperienza originaria di Michelson e Morley né quelle di coloro che in seguito la ripeterono mostrarono mai uno spostamento apprezzabile delle frange di interferenza. In altre parole, le frange si comportano come se la Terra fosse ferma nell'etere. Per spiegare il risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley, senza abbandonare l'ipotesi dell'esistenza dell'etere, furono proposte varie teorie, che cercheremo in breve di riassumere.

Trascinamento dell'etere. La prima ipotesi proposta fu quella di immaginare che l'etere fosse trascinato dalla Terra nel suo moto, allo stesso modo in cui lo è l'atmosfera: la Terra apparirebbe ferma rispetto al manto d'etere che la circonda. Questa ipotesi è tuttavia in contrasto con i risultati di altre importanti esperienze (prima fra tutte, quella dell'*aberrazione delle stelle fisse*).

Teoria 'emissiva' di Ritz. Secondo tale teoria la velocità della luce nell'etere sarebbe pari alla somma (vettoriale) della velocità c e di quella della sorgente. Anche questa ipotesi si è rivelata però in contrasto con i risultati di altre esperienze (prima fra tutte, l'esperienza delle *stelle doppie* di De Sitter).

Contrazione di Lorentz-Fitzgerald. Una terza ipotesi, avanzata indipendentemente da Lorentz e Fitzgerald, richiedeva che nei corpi in movimento con velocità v (rispetto all'etere), tutte le lunghezze misurate nella direzione del moto si contraessero di un fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Fra tutte, questa è l'ipotesi che più si avvicina alle idee fondamentali della teoria della relatività; ciò nonostante, essa è in contrasto con questa teoria, poiché presuppone la possibilità di rivelare il moto assoluto di un corpo rispetto all'etere. Infatti, considerati due regoli, uno fermo rispetto all'etere e l'altro in moto,

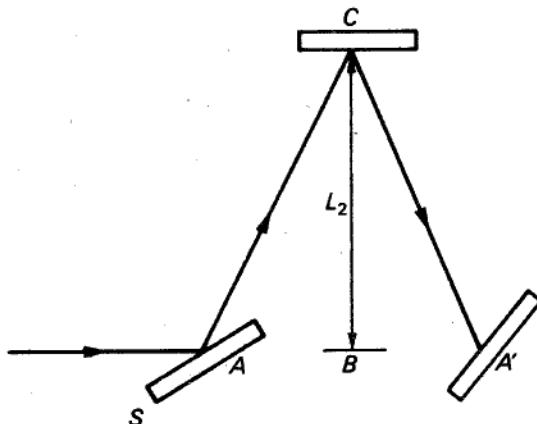


Figura 13.12

Sostituendo tali espressioni nella [1], si ha

$$ct'_0 = \sqrt{L_2^2 + (vt'_0)^2},$$

cioè

$$t'_0 = \frac{L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Di conseguenza t'_2 è pari a

$$t'_2 = 2t'_0 + \tau' = 2 \frac{L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \tau'.$$

La differenza $\Delta t'$ tra i tempi t'_2 e t'_1 risulta dunque

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \left(\frac{L_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad [2]$$

Immaginiamo di far ruotare, come prima, il dispositivo di 90° : questa volta la situazione è diversa, poiché si modifica l'orientamento dei due cammini rispetto al moto della Terra. La nuova differenza, $\Delta t''$, è

$$\Delta t'' = \frac{2}{c} \left(\frac{L_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{L_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad [3]$$

le misure di lunghezza effettuate da osservatori solidali con essi non sarebbero simmetriche: l'osservatore fermo nell'etere attribuirebbe al regolo in moto una lunghezza minore di quella del regolo fermo, mentre l'altro attribuirebbe al regolo fermo nell'etere una lunghezza maggiore di quella del proprio. Inoltre, la contrazione di Lorentz-Fitzgerald non consente di spiegare il fenomeno della dilatazione del tempo.²⁹

2. Un orologio 'a luce'

Illustreremo ora un interessante *esperimento di pensiero*,³⁰ atto a mettere in evidenza il fenomeno del rallentamento degli orologi.

Un semplice orologio "a luce" si può pensare costituito da un raggio luminoso che venga successivamente riflesso da due specchi S_1 e S_2 (vedi fig. 13.13), ortogonali alla direzione del raggio: ogni volta che il raggio colpisce, ad esempio, lo specchio S_1 , un contatore scatta di un'unità.

Immaginiamo ora di avere due orologi di questo tipo, assolutamente identici: uno, O_1 , fermo nel nostro sistema di riferimento (vedi fig. 13.14), l'altro, O_2 , in moto con velocità v rispetto a noi. Osserviamo che la distanza tra i due specchi dell'orologio O_1 è pari a L_0 , mentre quella tra gli specchi di O_2 , a causa del moto, è per noi

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Immaginiamo ora di poter osservare un segnale luminoso che parta dallo specchio S_1 , raggiunga S_2 e torni indietro verso S_1 . Mentre la luce si propaga da S_1 allo specchio S_2 , quest'ultimo si sposta con velocità v ; di conseguenza il tempo t_1 impiegato dalla luce a raggiungere S_2 dev'essere tale che

$$ct_1 = L + vt_1,$$

onde

$$t_1 = \frac{L}{c-v} .$$

Analogamente, il tempo t_2 che la luce impiega a ritornare da S_2 a S_1 è

$$t_2 = \frac{L}{c+v} .$$

L'intervallo di tempo tra due scatti consecutivi del contatore di O_2 (percepiti da noi, fermi nel riferimento Ox, y, z) è dunque

$$\Delta t' = t_1 + t_2 = L \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = 2 \frac{L}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2 \frac{L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

²⁹ La precisione oggi raggiunta dalle misure temporali ha consentito di verificare *direttamente* il fenomeno della dilatazione del tempo per mezzo di due orologi identici, dei quali uno è stato tenuto fermo a terra e l'altro è stato trasportato da un aereo intorno alla Terra (esperimento di Hafele e Keating del 1971).

³⁰ Con tale espressione si intende un'esperienza concepibile in linea di principio, anche se in pratica non realizzabile per difficoltà tecniche.

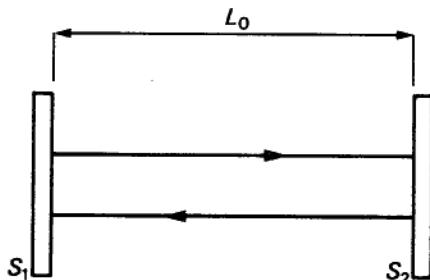


Figura 13.13

L'intervallo Δt tra due scatti del contatore dell'orologio O_1 è invece

$$\Delta t = 2 \frac{L_0}{c}.$$

L'intervallo tra due scatti consecutivi dell'orologio O_2 (come noi li percepiamo) è dunque più lungo di quello dell'orologio O_1 per il fattore $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

3. Rilevamento di muoni al livello del mare

Negli strati alti dell'atmosfera, la radiazione cosmica produce in continuazione particelle instabili, dette *muoni*, le quali decadono secondo la classica legge

$$n(\tau) = n_0 e^{-\tau/T},$$

in cui n_0 è il numero di particelle presenti nell'unità di volume al tempo $t=0$, $n(t)$ è l'analogico numero al tempo t , e T è la *vita media* delle particelle. Per i muoni in quiete, la vita media è di circa $2\text{ }\mu\text{s}$: ciò significa che un osservatore solidale con i muoni li vedrebbe "vivere" mediamente per circa $2 \times 10^{-6}\text{ s}$. D'altra parte, i muoni sono dotati di velocità altissime rispetto alla Terra, all'incirca pari a $0,998c$. Di conseguenza, per un osservatore solidale con la Terra la vita media dei muoni è, secondo la

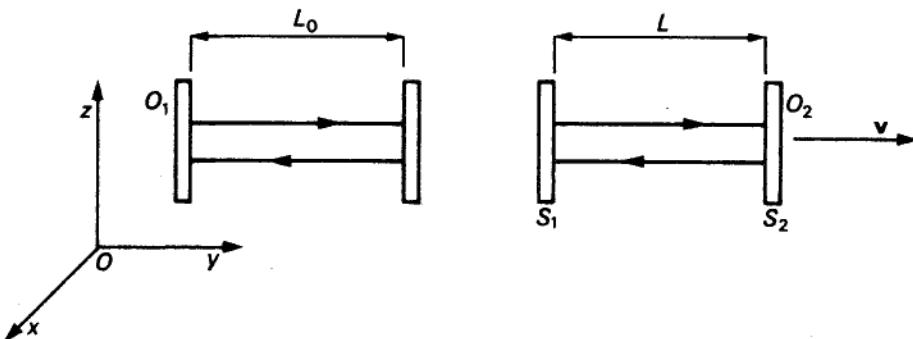


Figura 13.14

teoria relativistica, notevolmente più lunga; per $v = 0,998 c$ si ha

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 15 T = 30 \times 10^{-6} \text{ s.}$$

Gli osservatori sulla Terra attribuiscono dunque ai muoni una vita media di $30 \mu\text{s}$.

Supponiamo ora che a 10 000 m di altezza sopra il livello del mare si creino N_0 muoni. Per coprire la distanza che li separa dalla Terra, una di tali particelle, movendosi con velocità $v = 0,998 c$, dovrebbe impiegare un tempo $\bar{T} = 10^4 / 0,998 \approx 33 \mu\text{s}$. D'altra parte, con una vita media di soli $2 \mu\text{s}$, quasi nessun muone riuscirebbe a giungere a destinazione (per la legge di decadimento, la percentuale sarebbe $N(\bar{T})/N_0 = e^{-33/2} = e^{-16,5} < 3,05 \times 10^{-7}$). Con il valore relativistico di $30 \mu\text{s}$, invece, circa un terzo del totale dovrebbe essere rilevabile a livello del mare ($N(\bar{T})/N_0 = e^{-33/30} = e^{-1,1} \approx 0,33$). Le misure effettuate hanno confermato pienamente le previsioni della relatività speciale.

Analoghe esperienze sono state effettuate su particelle che orbitano all'interno di macchine acceleratrici, e che tornano quindi, periodicamente, in un punto fisso di osservazione; la loro vita media, paragonata a quella delle particelle ferme, è risultata più lunga, conformemente alle previsioni relativistiche.

4. Effetto Doppler

Consideriamo un'onda elettromagnetica piana, e applichiamo ad essa i risultati dell'elettrodinamica relativistica. Detti $\tilde{\mathbf{E}}$ e $\tilde{\mathbf{H}}$ i vettori simbolici rappresentativi dei campi elettrico e magnetico associati all'onda, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{E}_0 e^{j\omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right)}, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_0 e^{j\omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right)}; \end{aligned} \quad [5]$$

\mathbf{E}_0 e \mathbf{H}_0 sono due vettori costanti, perpendicolari fra loro ed entrambi perpendicolari al versore \mathbf{n} della direzione di propagazione dell'onda, \mathbf{r} è il raggio vettore che individua il generico punto dello spazio nel riferimento inerziale K nel quale si considera la propagazione dell'onda, t è la variabile temporale misurata in K , e ω la pulsazione dell'onda. Introducendo la fase Φ , definita dalla relazione

$$\Phi = \omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right), \quad [6]$$

le [5] possono essere riscritte nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{E}_0 e^{j\Phi}, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_0 e^{j\Phi}. \end{aligned} \quad [5']$$

Se ora si considera la propagazione della stessa onda elettromagnetica rispetto a un nuovo riferimento inerziale K' , in moto con velocità uniforme \mathbf{v} lungo l'asse x di K , i campi \mathbf{E}' e \mathbf{H}' , rilevabili nel nuovo riferimento, sono dati da

$$\tilde{\mathbf{E}}' = \mathbf{E}'_0 e^{j\Phi'},$$

$$\tilde{\mathbf{H}}' = \mathbf{H}'_0 e^{j\Phi'},$$

con

$$\Phi' = \omega' \left(t' - \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)$$

e ovvio significato dei simboli.

La fase Φ di un'onda elettromagnetica è invariante rispetto ai cambiamenti di riferimento inerziale. Per convincersene, basta pensare che se, in un determinato punto-istante dello spaziotempo, il campo elettromagnetico è nullo (cioè è nulla la fase) rispetto a un dato riferimento inerziale K , ciò continua a essere vero, in base alle leggi di trasformazione dei campi, rispetto ad ogni altro riferimento inerziale. Così pure, se, in un dato punto-istante, il campo elettrico raggiunge il suo massimo valore nel periodo, rispetto a K , nello stesso punto-istante il campo elettrico deve assumere il suo massimo valore anche rispetto a K' ; e così via. Si ha pertanto

$$\omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) = \omega' \left(t' - \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}'}{c} \right). \quad [7]$$

Indicando con n_x, n_y, n_z (e n'_x, n'_y, n'_z) le componenti del versore \mathbf{n} (e \mathbf{n}') nei due riferimenti, e introducendo, in luogo delle pulsazioni ω, ω' , le frequenze $\nu = \omega/2\pi, \nu' = \omega'/2\pi$, la [7] può essere riscritta nella forma

$$\nu \left(t - \frac{x n_x + y n_y + z n_z}{c} \right) = \nu' \left[\frac{t - \frac{v}{c^2} x}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} n'_x + y n'_y + z n'_z \right) \right], \quad [7']$$

dove, al solito, si sono utilizzate le trasformazioni speciali di Lorentz.

Dovendo la [7'] essere identicamente soddisfatta in ogni punto-istante dello spaziotempo, e quindi per ogni quaterna ordinata (x, y, z, t) , si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = \nu' \frac{1 + \frac{v}{c} n'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \nu n_x = \nu' \frac{\frac{v}{c} + n'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \nu n_y = \nu' n'_y \\ \nu n_z = \nu' n'_z. \end{array} \right. \quad [8]$$

Queste relazioni mostrano che la direzione di propagazione dell'onda, come la sua frequenza (e quindi, lunghezza d'onda), variano al variare del riferimento inerziale rispetto al quale l'onda elettromagnetica è considerata: in particolare, la luce appare di colore diverso nei diversi riferimenti (*effetto Doppler*). Quando i vettori \mathbf{n} e \mathbf{v}

sono paralleli tra loro si verifica il cosiddetto *effetto Doppler longitudinale* e risulta

$$\nu = \nu' \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad [9]$$

con il segno + oppure -, a seconda che \hat{n} e v siano concordi o discordi.

Quando, invece, il versore \hat{n} è perpendicolare a v , si ha l'*effetto Doppler trasversale*, e risulta

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \quad [10]$$

Osserviamo infine che, mentre l'effetto longitudinale era già noto nella fisica pre-relativistica (sia pure con la differenza dovuta al fatto che nella corrispondente espressione non compariva la radice a denominatore), quello trasversale ha potuto essere rivelato proprio sulla base della relatività speciale. Ciò non meraviglia, quando si osservi che questo effetto dipende da v^2/c^2 e non da v/c , come invece si verifica in quello longitudinale.

Appendici

Appendice A

A.1 Sistemi inerziali

Un *sistema* (o *spazio*) di riferimento è un insieme di corpi rigidi, posti a distanze fisse gli uni dagli altri, rispetto ai quali è possibile descrivere il moto di altri corpi per mezzo di un regolo (misura delle distanze) e di un orologio (misura degli intervalli di tempo). Particolare rilievo assumono i sistemi *inerziali* (o *galileiani*), definiti nel modo seguente: *un sistema di riferimento si dice di tipo inerziale se rispetto ad esso un qualsiasi corpo, purché sufficientemente lontano da ogni altro, permane indefinitamente in uno stato di moto rettilineo uniforme (in particolare, di quiete)*. In altre parole, sono inerziali quei sistemi che rispettano il primo principio della dinamica (detto, appunto, *principio di inerzia*).¹

La precedente definizione presenta peraltro qualche ambiguità ove si cerchi di precisare il significato della locuzione “sufficientemente lontano da ogni altro corpo”, con cui si richiede che il corpo in esame non risenta dell’influenza di altri corpi (l’unico modo per stabilirlo è quello di accertarsi che il corpo non abbia accelerazione rispetto al sistema di riferimento inerziale scelto.) Per quanto grandi siano le distanze, non è possibile liberarsi completamente dell’influenza esercitata da tutti gli altri corpi presenti nell’universo. L’enunciato del principio di inerzia e la definizione stessa di “sistema inerziale” devono essere dunque intesi *in senso asintotico*: in altre parole, un sistema di riferimento si dovrà considerare inerziale se, rispetto a esso, il moto di

¹ Il primo principio della dinamica o principio di inerzia afferma: *In un sistema di tipo inerziale un qualsiasi corpo, purché sufficientemente lontano da ogni altro, permane indefinitamente in uno stato di moto rettilineo uniforme (in particolare, di quiete)*. Così espresso, il primo principio sembra ridursi semplicemente alla definizione di “sistema inerziale”. Ma esiste un sistema siffatto? L’esistenza non è implicita nell’enunciato. Potremmo aver definito le proprietà di un oggetto inesistente; in tal caso il suddetto enunciato non avrebbe significato fisico. L’esperienza – unico giudice – però ci dice: “Esistono, in natura, sistemi inerziali.” Questo secondo enunciato completa quello del principio di inerzia, che risulta dunque fisicamente fondato. Si potrebbe allora riformulare il principio di inerzia dicendo: *Esistono in natura sistemi inerziali, tali cioè che rispetto ad essi un qualsiasi corpo, purché sufficientemente lontano, permane indefinitamente ecc.*

un corpo è tanto più prossimo a quello rettilineo uniforme (in particolare, allo stato di quiete) quanto più il corpo stesso è lontano dagli altri. E' difficile, se non impossibile, trovare un sistema di riferimento rigorosamente inerziale: infatti i sistemi fisici si presentano tali solo entro determinati limiti di precisione. Nell'ambito dell'esperienza quotidiana, le pareti del laboratorio si possono considerare un sistema inerziale, ma a un esame più approfondito, ci si accorge che così non è, a causa del moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse.

Solitamente si considera inerziale ogni sistema di riferimento associato alle cosiddette *stelle fisse*, le cui posizioni reciproche appaiono costanti nel tempo. L'esperienza mostra inoltre che sono da considerarsi inerziali tutti i sistemi di riferimento dotati di moto rettilineo uniforme rispetto a un riferimento assunto come inerziale.

A.2 Sistemi di coordinate

Dato un sistema di riferimento, esistono molti modi per descrivere la posizione di un punto. Ad ognuna delle corrispondenze biunivoche e continue² che possono stabilirsi tra i punti di un piano (o più in generale, dello spazio tridimensionale) e le coppie (o le terne) ordinate di numeri reali, in un dato sistema di riferimento, si dà il nome di *sistema di coordinate*.

In generale, dette $u(x, y)$ e $v(x, y)$ due generiche funzioni continue, le relazioni

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad [A.2.1]$$

consentono di passare dalla generica coppia ordinata di numeri reali (x, y) alla coppia ordinata (u, v) . Se le [A.2.1] sono tali che la corrispondenza risulti biunivoca e continua,³ si ottiene un nuovo sistema di coordinate u, v nel piano considerato.

L'estensione al caso tridimensionale

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad [A.2.2]$$

² Una corrispondenza è *continua* se la differenza tra le coordinate di due punti tende a zero quando essi vengono portati a coincidere, e viceversa.

³ Condizione necessaria e sufficiente per la biunivocità e continuità della corrispondenza nell'intorno di un punto (x_0, y_0) è che in tale punto il determinante jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

sia $\neq 0$.

è ovvia. Tra due diversi sistemi di coordinate esistono relazioni che consentono di passare da un sistema all'altro.

Nel caso semplice del piano, si vede subito (vedi fig. A.1) che, per passare dalle coordinate cartesiane ortogonali x, y , alle coordinate polari ρ, θ , è sufficiente porre

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, & \rho > 0 \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

e inversamente

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Consideriamo un generico punto P_0 di coordinate cartesiane (x_0, y_0) e polari (ρ_0, θ_0) . Nel piano xy le curve di equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \quad [A.2.3]$$

sono rette passanti per P_0 , rispettivamente parallele agli assi coordinati y e x ; esse prendono il nome di *linee coordinate*. Nel piano $\rho\theta$ le curve corrispondenti (anch'esse linee coordinate per P_0), di equazioni polari

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta = \theta_0, \end{cases} \quad [A.2.4]$$

sono rispettivamente una circonferenza di centro O e raggio ρ_0 e una semiretta del fascio di centro O . Come le rette [A.2.3], anche le curve [A.2.4] sono ortogonalì tra

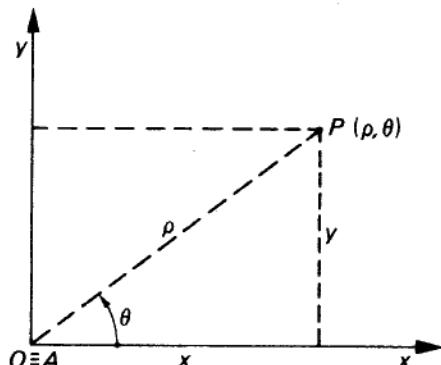


Figura A.1

loro in P_0 .⁴ Nel caso cartesiano, le linee coordinate di una stessa famiglia, al variare di P_0 , si mantengono parallele tra loro, nel caso polare ciò non accade.

Nello *spazio* tridimensionale, considerato un generico punto P_0 di coordinate cartesiane ortogonali (x_0, y_0, z_0) , le equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

rappresentano tre piani passanti per P_0 , rispettivamente paralleli ai piani coordinati: tali piani, le *superfici coordinate* per P_0 , si intersecano secondo tre rette che costituiscono le linee coordinate per tale punto.

Coordinate cilindriche: r, φ, z

Come mostra la figura A.2, tali coordinate sono legate alle coordinate cartesiane dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & r > 0 \\ z = z \end{cases}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e, inversamente,

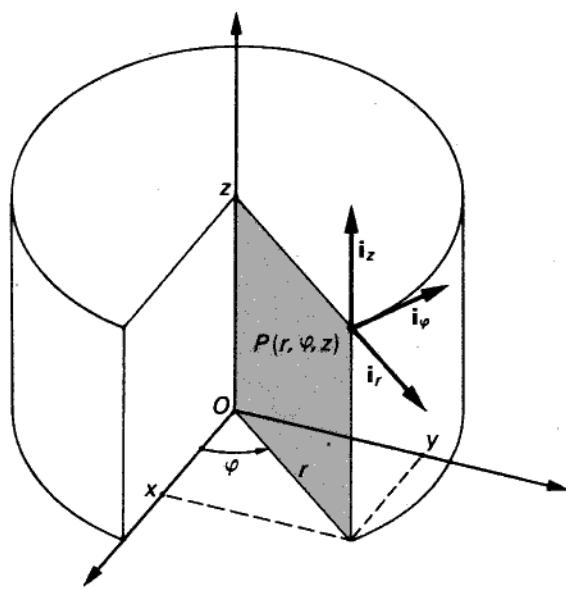
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Le superfici coordinate passanti per un qualunque punto P_0 , di equazioni

$$\begin{cases} z = z_0 \\ r = r_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases},$$

sono rispettivamente: un piano ortogonale a z , un cilindro di asse z , un semipiano del fascio di asse z . Esse risultano ortogonali tra loro in P_0 ; le coordinate cilindriche costituiscono dunque un sistema di coordinate ortogonali.

⁴ La perpendicolarità delle linee coordinate è caratteristica di un'importante classe di sistemi di coordinate (*coordinate ortogonali*); i più generali sistemi di coordinate non godono di tale proprietà.

**Figura A.2**

Coordinate cilindriche di un punto; i_r, i_φ, i_z sono i versori tangenti alle linee coordinate passanti per il punto.

Coordinate sferiche: r, θ, φ

Tali coordinate sono legate alle coordinate cartesiane x, y, z dalle relazioni (vedi fig. A.3)

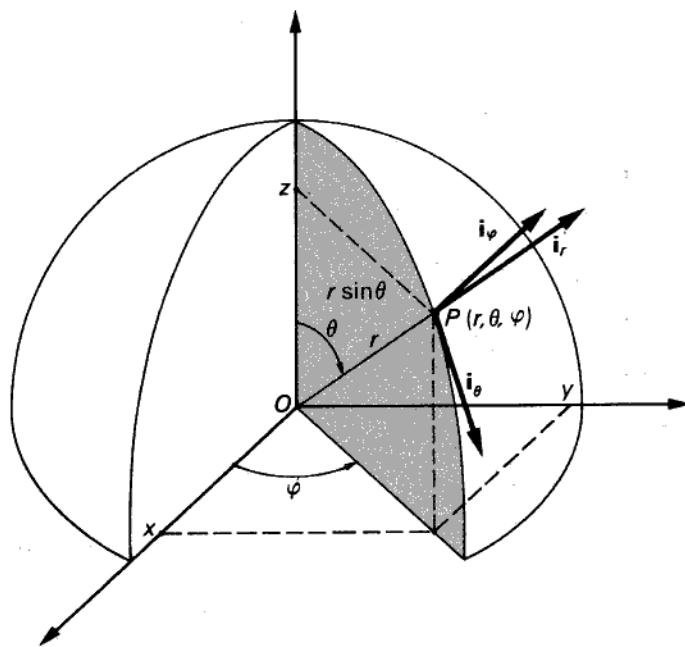
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & r > 0 \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

e, inversamente,

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Le superfici coordinate passanti per un qualunque punto P_0 , di equazioni

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \varphi = \varphi_0 \\ \theta = \theta_0, \end{cases}$$

**Figura A.3**

Coordinate sferiche di un punto; \mathbf{i}_r , \mathbf{i}_θ , \mathbf{i}_φ sono i versori tangenti alle linee coordinate passanti per il punto.

sono costituite rispettivamente da: una sfera di centro O ; un semipiano del fascio di asse z ; un cono avente vertice in O , asse coincidente con l'asse z e angolo di apertura θ_0 .

Poiché le superfici coordinate sono tra loro ortogonali, tale è anche il sistema delle coordinate sferiche.

A.3 Classificazione delle grandezze fisiche

Si incontrano di frequente, in fisica, grandezze introdotte mediante operazioni che danno come risultato un numero (valore della grandezza) indipendente dal sistema di coordinate scelto (nell'ambito di un dato sistema di riferimento): tali grandezze sono dette *scalari*. Esempi tipici sono la massa di un corpo, il volume, la temperatura, la carica elettrica ecc.

Altre grandezze sono introdotte mediante operazioni che danno come risultato non solo un numero, ma anche una direzione e un verso indipendenti dal sistema di coordinate scelto (nell'ambito del sistema di riferimento adottato); esse sono dette *vettoriali*.⁵ Esempi tipici sono gli spostamenti di un punto materiale, la velocità, le

⁵ Per distinguere graficamente da quelle scalari, si indicano di solito le grandezze vettoriali con lettere in grassetto (come in questo libro), oppure sopra- o sottolineate.

forze ecc. Chiariamo il significato di questa definizione con un semplice esempio. Dato un sistema di riferimento associato a un insieme di corpi C_1, C_2, \dots, C_n , fissi gli uni rispetto agli altri, consideriamo lo spostamento di un punto materiale dalla posizione P alla posizione Q . Detta r la retta passante per i due punti e orientata nel verso da P a Q , misuriamo su essa la lunghezza s del segmento PQ . La grandezza vettoriale "spostamento" $Q-P$ è caratterizzata da: un modulo (s); una direzione (quella della retta r);⁶ un verso (da P a Q). Anche in questo caso, come in quello del volume, della massa ecc., la grandezza fisica introdotta ha un suo significato intrinseco, indipendente dal sistema di coordinate. Mentre però le grandezze scalari sono definite da numeri, quelle vettoriali sono definite da entità matematiche più complesse, dette *vettori* (le principali proprietà dei vettori e le relative operazioni fondamentali verranno esaminate in § A.4).

Osserviamo che lo spostamento da P a Q (vedi fig. A.4) nel sistema di riferimento (C_1, C_2, \dots, C_n) è dato, in coordinate cartesiane x, y , dai due numeri

$$\begin{cases} \Delta x = x_Q - x_P \\ \Delta y = y_Q - y_P. \end{cases}$$

Essi sono le *componenti* dello spostamento secondo gli assi x e y e possono essere individuati misurando le lunghezze dei segmenti $P_x Q_x$ e $P_y Q_y$, proiezioni, sugli assi x e y , del segmento PQ .

Se, restando nel sistema di riferimento (C_1, C_2, \dots, C_n) , in luogo del sistema di coordinate x, y si sceglie un nuovo sistema x', y' , la proiezione dello stesso segmento PQ sui nuovi assi x' e y' fornisce due nuovi numeri:

$$\begin{cases} \Delta x' = x'_Q - x'_P \\ \Delta y' = y'_Q - y'_P, \end{cases}$$

evidentemente *diversi* da Δx e Δy . In particolare, se i nuovi assi sono rotati rispetto ai precedenti di un angolo α , si ha

$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha \\ \Delta y' = -\Delta x \sin \alpha + \Delta y \cos \alpha. \end{cases}$$

Quanto detto si estende in modo ovvio al caso tridimensionale: per individuare lo spostamento di un punto materiale in un assegnato sistema di riferimento occorre fornire una terna ordinata di numeri reali che variano, al variare del sistema di coordinate prescelto, secondo relazioni aventi, nel caso cartesiano, forma lineare e omogenea:

$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x \cos(x, \hat{x}') + \Delta y \cos(y, \hat{x}') + \Delta z \cos(z, \hat{x}') \\ \Delta y' = \Delta x \cos(x, \hat{y}') + \Delta y \cos(y, \hat{y}') + \Delta z \cos(z, \hat{y}') \\ \Delta z' = \Delta x \cos(x, \hat{z}') + \Delta y \cos(y, \hat{z}') + \Delta z \cos(z, \hat{z}'). \end{cases} \quad [A.3.1]$$

⁶ Individuata rispetto ai corpi del sistema di riferimento scelto.

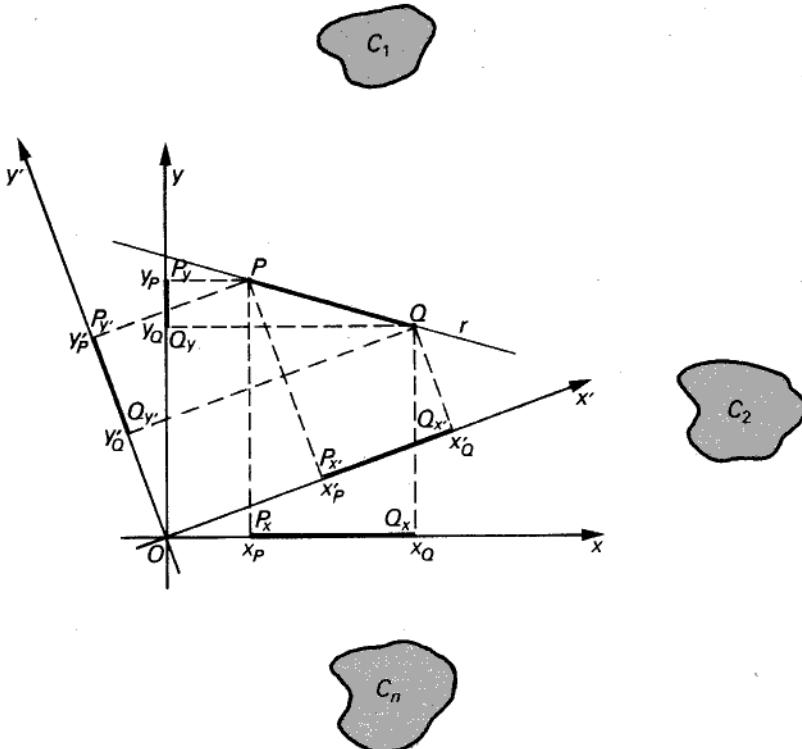


Figura A.4

Ciò chiarisce la fondamentale differenza tra grandezze scalari e grandezze vettoriali: le prime, definite attraverso operazioni fisiche invarianti rispetto al sistema di coordinate prescelto (nell'ambito del riferimento adottato), sono rappresentate da numeri anch'essi invarianti rispetto al sistema di coordinate; le seconde, benché parimenti definite attraverso operazioni fisiche invarianti rispetto al sistema di coordinate, sono rappresentate da terne ordinate di numeri reali che si trasformano, al variare di un sistema di coordinate cartesiane, secondo relazioni lineari e omogenee del tipo [A.3.1]. Tre numeri, dunque, non sono sufficienti a definire una grandezza vettoriale se non si specifica la legge con cui essi si trasformano al variare del sistema di coordinate.

Le grandezze scalari sono anche dette grandezze *tensoriali di ordine zero*, quelle vettoriali, grandezze *tensoriali di ordine uno*, con riferimento al fatto che le prime sono caratterizzate da $3^0 = 1$, le seconde da $3^1 = 3$ numeri reali. Si intuisce la possibilità di introdurre nuovi tipi di grandezze fisiche, tensoriali di ordine due, tre ecc., assegnando $3^2, 3^3, \dots$ numeri reali, trasformantisi, al variare del sistema di coordinate (cartesiane) secondo relazioni analoghe alle [A.3.1] (vedi § A.6).

A.4 I vettori: definizione e operazioni elementari

Si dice *spazio vettoriale* S sul campo \mathbf{R} dei numeri reali (o \mathbf{C} dei numeri complessi) un insieme di elementi (*vettori*) per i quali siano definite un'operazione (interna all'insieme) di *somma* e un'operazione di *prodotto per un numero reale* (o *complesso*), soddisfacenti le proprietà sotto elencate. (Ci riferiremo qui al caso particolare dei segmenti orientati, pur potendo tali proprietà essere enunciate in maniera assiomatica, senza alcun riferimento a esempi particolari.)

Somma

Per definizione, la somma di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} è il vettore \mathbf{c} che si ottiene dalla regola del parallelogramma (vedi fig. A.5):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Risulta

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{proprietà commutativa}).$$

Dati tre vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} si ha

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad (\text{proprietà associativa}).$$

Esiste (ed è unico) un *vettore nullo* $\mathbf{0}$ tale che, per ogni vettore \mathbf{a} ,

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

Per ogni vettore \mathbf{a} , esiste un vettore \mathbf{a}' (*simmetrico di* \mathbf{a}) tale che

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}.$$

Il vettore \mathbf{a}' è anche indicato con il simbolo $-\mathbf{a}$. Si definisce, poi, la *differenza* di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} come il vettore \mathbf{c} tale che

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

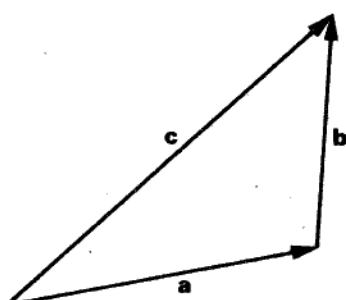


Figura A.5

Prodotto per un numero reale

Dato un vettore \mathbf{a} e un numero reale m , il loro prodotto è un vettore \mathbf{b} avente la stessa direzione di \mathbf{a} , modulo pari al modulo di \mathbf{a} per il valore assoluto di m , verso coincidente con quello di \mathbf{a} se m è positivo, opposto se m è negativo. Si scrive

$$\mathbf{b} = m\mathbf{a}.$$

Risulta

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a},$$

$$(m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$$

(proprietà distributiva)

$$m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}.$$

Insieme alle proprietà enunciate, tipiche di ogni spazio vettoriale, in fisica è utile introdurre (dove possibile) nuove operazioni fra vettori.⁷

Prodotto scalare (o interno)

Dati due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , il loro prodotto scalare, indicato con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ o (\mathbf{a}, \mathbf{b}) è, per definizione, il numero reale

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha,$$

indicando con a e b i moduli dei vettori e con α l'angolo (convesso) tra le loro direzioni. Il prodotto scalare di due vettori è nullo se almeno uno dei due è nullo o se essi sono perpendicolari fra loro. Risulta inoltre

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{proprietà commutativa})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{proprietà distributiva}).$$

Prodotto vettoriale (o esterno)

Una terna di assi cartesiani x, y, z è detta *destrogira* se i tre assi sono nella posizione reciproca indicata nella figura A.6a; la terna è detta invece *levogira* quando i tre assi sono nella posizione indicata nella figura A.6b. In una terna del primo tipo, il verso dell'asse z è quello di avanzamento di un cavatappi che con una rotazione di $\pi/2$ porti l'asse x a sovrapporsi all'asse y ; in una del secondo tipo, il verso dell'asse z è quello opposto.

Il prodotto vettoriale (o esterno) di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , indicato con il simbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ oppure $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, è un vettore \mathbf{c} definito da:⁸

a) modulo $c = ab \sin \alpha$, ove a e b sono i moduli di \mathbf{a} e \mathbf{b} e α è l'angolo (convesso) formato da \mathbf{a} e \mathbf{b} ;

⁷ Anche queste sarebbero definibili assiomaticamente; per semplicità, faremo comunque riferimento ai segmenti orientati.

⁸ In alcuni testi il prodotto vettoriale è indicato con il simbolo $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

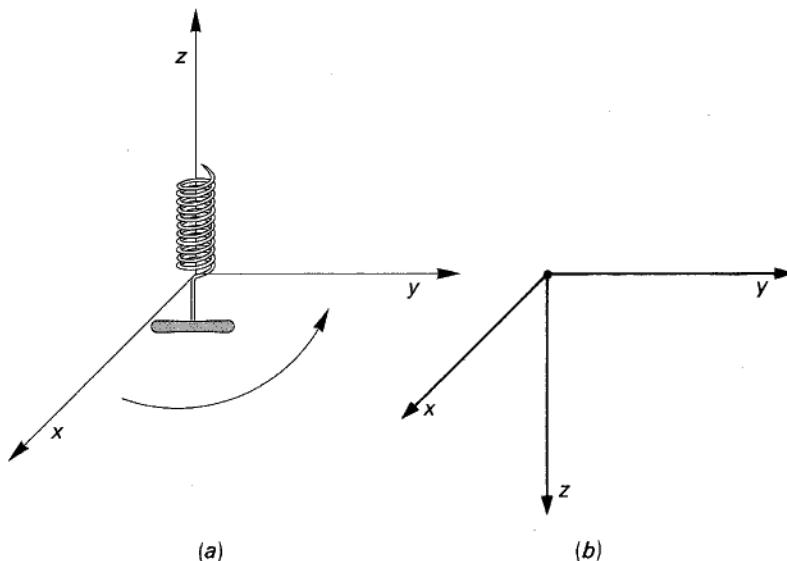


Figura A.6

- b) direzione ortogonale al piano individuato da \mathbf{a} e \mathbf{b} ;
 c) verso dato dalla regola del cavatappi (con \mathbf{a} che, rotando di un angolo α , si sovrappone a \mathbf{b}) se la terna di assi coordinati è destrogira (vedi fig. A.7a), oppure verso opposto se la terna è levogira (vedi fig. A.7 b).

Il prodotto vettoriale è dunque legato alla scelta del sistema di coordinate.⁹

Il prodotto vettoriale di due vettori è nullo se almeno uno dei due vettori è nullo, o se i due vettori sono paralleli.

Risulta inoltre

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{proprietà anticommutativa})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{proprietà distributiva}).$$

Componente secondo una direzione orientata

Dati un vettore \mathbf{a} e una direzione orientata r (vedi fig. A.8), si definisce *componente di \mathbf{a} secondo r* il numero reale

$$a_r = a \cos \alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_r,$$

indicando con \mathbf{i}_r il versore della direzione orientata r .¹⁰ Risulta perciò $a_r \geq 0$, a seconda che sia $\alpha \leq \pi/2$.

⁹ Pertanto esso non può essere considerato un vero e proprio vettore.

¹⁰ Il versore di una direzione orientata r è un vettore di modulo unitario orientato come r .

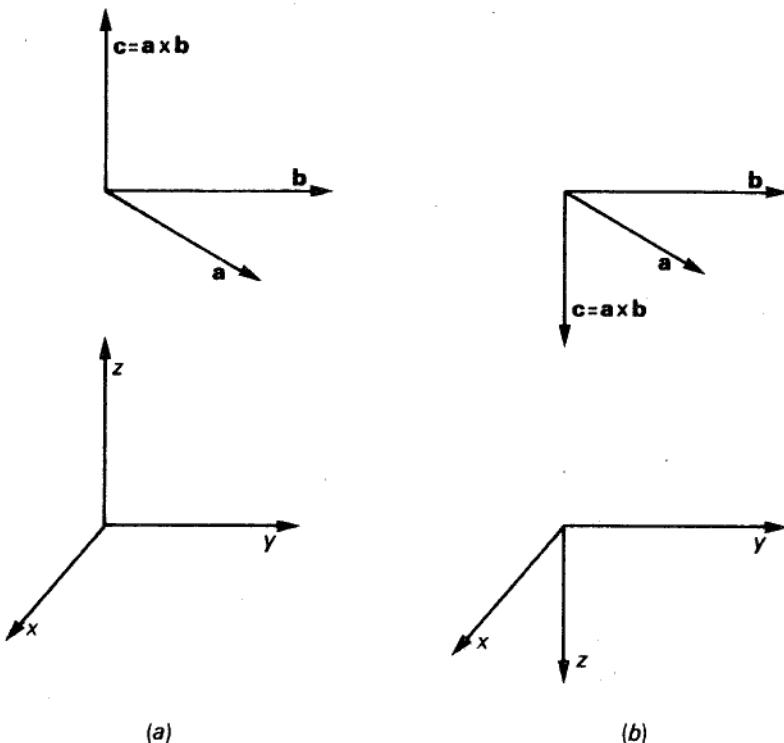


Figura A.7

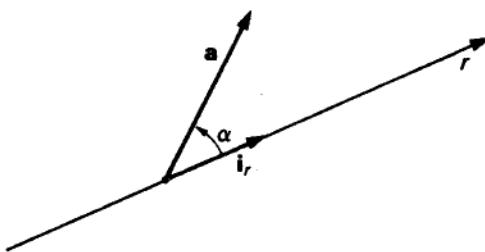


Figura A.8

A.5 Componenti di un vettore in un sistema di assi cartesiani ortogonali

Considerato un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z , sia a un generico vettore; le sue componenti a_x, a_y, a_z secondo le tre direzioni orientate x, y, z sono date da

$$\begin{cases} a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} \\ a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} \\ a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}, \end{cases}$$

avendo indicato rispettivamente con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} i versori dei tre assi coordinati x , y , z .
Risulta

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k};$$

ogni vettore \mathbf{a} è dunque univocamente individuato dalle sue tre componenti cartesiane. In termini di componenti le operazioni esaminate nel paragrafo precedente sono definite nel modo seguente.

Somma

Il vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ha componenti

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \\ c_z = a_z + b_z. \end{cases}$$

Prodotto per un numero reale

Il vettore

$$\mathbf{b} = m \mathbf{a}, \quad \text{con } m \in \mathbb{R},$$

ha componenti;

$$b_x = m a_x, \quad b_y = m a_y, \quad b_z = m a_z.$$

Prodotto scalare

Il prodotto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ è dato da

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Prodotto vettoriale

Il prodotto $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ha componenti

$$\begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x. \end{cases}$$

E' perciò possibile scrivere formalmente

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Questa rappresentazione del prodotto vettore vale sia quando la terna di assi coordinati è destogira sia quando è levogira.

A.6 Trasformazioni di coordinate cartesiane ortogonali e grandezze tensoriali del secondo ordine

Dato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Ox, y, z (vedi fig. A.9) consideriamo un secondo sistema Ox', y', z' (anch'esso cartesiano), con la stessa origine e con assi ruotati rispetto ai primi. Dato un generico punto P dello spazio, di coordinate (x, y, z) nel primo sistema di coordinate, vogliamo determinare le coordinate dello stesso punto rispetto al secondo sistema; in altre parole, vogliamo determinare formule di trasformazione che consentano di passare dalle variabili x, y, z alle x', y', z' . Tale trasformazione dev'essere anzitutto lineare in x, y, z . Se non lo fosse, all'equazione, per esempio, di un piano, lineare nelle coordinate x, y, z , non potrebbe corrispondere un'equazione lineare nelle coordinate x', y', z' .¹¹

Le relazioni desiderate hanno quindi la forma

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3, \end{cases} \quad [A.6.1]$$

dove i coefficienti a_{ij} e b_i sono indipendenti dal punto. Dovendo i due sistemi di coordinate avere la stessa origine, la [A.6.1] deve trasformare il punto $(0 \ 0 \ 0)$ in sé stesso. Perché ciò avvenga, occorre e basta che i tre coefficienti b_1, b_2, b_3 siano nulli.

Dobbiamo ora imporre alla trasformazione di conservare la proprietà di ortogonalità del sistema di coordinate. A tale scopo osserviamo che, detta r la distanza del generico punto P dall'origine O , nel sistema Ox, y, z , si ha

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad [A.6.2]$$

Se il sistema Ox', y', z' è anch'esso ortogonale, deve risultare, per lo stesso punto P ,

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad [A.6.3]$$

Supponiamo allora che il sistema Ox', y', z' verifichi la [A.6.3] e sostituiamo in tale relazione la [A.6.1] imponendo che sia verificata anche la [A.6.2]:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 + \\ &\quad + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2 = \\ &= a_{11}^2x^2 + a_{12}^2y^2 + a_{13}^2z^2 + 2a_{11}a_{12}xy + 2a_{11}a_{13}xz + \\ &\quad + 2a_{12}a_{13}yz + a_{21}^2x^2 + \dots + 2a_{22}a_{23}yz + \\ &\quad + a_{31}^2x^2 + \dots + 2a_{32}a_{33}yz. \end{aligned} \quad [A.6.4]$$

Perché il secondo membro non contenga prodotti misti delle coordinate (qualunque

¹¹ E un piano, in ciascuno dei due sistemi, non può che essere descritto da un'equazione lineare!

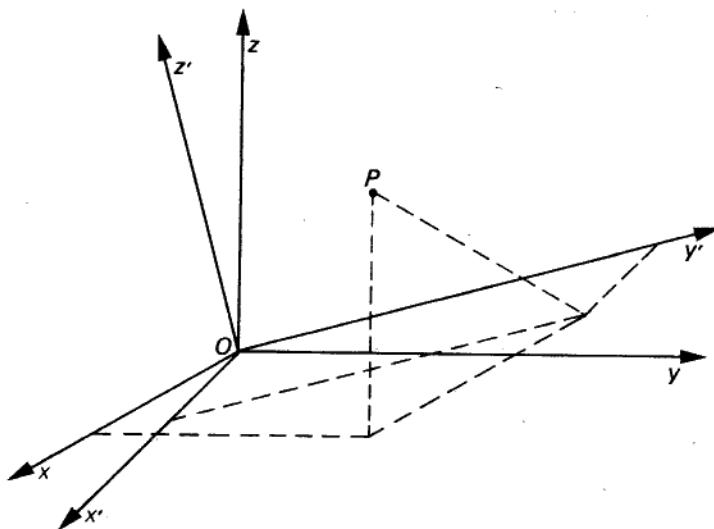


Figura A.9

sia P) dev'essere

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = 0,$$

per ogni coppia di indici j e k (con $j \neq k$). In tal caso, la [A.6.4] si riduce alla forma

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2)x^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2)y^2 + (a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2)z^2.$$

Imponendo poi, per ogni P ,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

si deduce che

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij}^2 = 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

In conclusione, una trasformazione tra due sistemi di coordinate cartesiane ortogonali Ox, y, z e Ox', y', z' è definita da un sistema di equazioni lineari del tipo [A.6.1] purché a_{ij} e b_i verifichino le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} b_i = 0, & i = 1, 2, 3 \\ \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = 0, & j, k = 1, 2, 3, \text{ con } j \neq k \\ \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ij} = 1, & j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad [\text{A.6.5}]$$

Introducendo il cosiddetto *simbolo di Kronecker*

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{per } j \neq k \\ 1, & \text{per } j = k, \end{cases}$$

le [A.6.5] possono essere scritte in forma più concisa:

$$\begin{cases} b_i = 0 \\ \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \end{cases} \quad [\text{A.6.5}']$$

La trasformazione inversa si ottiene risolvendo il sistema [A.6.1] rispetto alle incognite x, y, z . Si può dimostrare che essa ha la forma:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' \\ y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' \\ z = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'. \end{cases} \quad [\text{A.6.6}]$$

Le [A.6.1] e [A.6.6] possono essere riscritte in maniera compatta indicando le variabili coordinate, nel primo e nel secondo sistema, rispettivamente con x_1, x_2, x_3 e x'_1, x'_2, x'_3 . Si ha così

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad [\text{A.6.1}']$$

e

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} x'_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad [\text{A.6.6}']$$

Il determinante dei coefficienti a_{ij} è 1.

Vediamo ora come si trasformano le componenti di un vettore \mathbf{v} nel passaggio dal sistema di coordinate x_i al sistema di coordinate x'_i . Dette v_1, v_2, v_3 le componenti del vettore nel primo sistema, si ha

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}. \quad [\text{A.6.7}]$$

Indicando con v'_1, v'_2, v'_3 le componenti dello stesso vettore nel sistema Ox'_1, x'_2, x'_3 , si ha

$$\mathbf{v} = v'_1 \mathbf{i}' + v'_2 \mathbf{j}' + v'_3 \mathbf{k}', \quad [\text{A.6.8}]$$

ove $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sono i versori dei nuovi assi. Per ricavare la relazione tra le v'_i e le v_i , moltiplichiamo scalarmente la [A.6.7] per \mathbf{i}' :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}' = v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' + v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' + v_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}'.$$

Operando allo stesso modo sulla [A.6.8], si ottiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}' = v'_1 \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' + v'_2 \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}' + v'_3 \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}'. \quad [\text{A.6.9}]$$

Poiché, per definizione, $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$ e $\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}' = 0$, la [A.6.9] diventa

$$v'_1 = v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' + v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' + v_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}'.$$

Ragionando in maniera analoga per le altre componenti, otteniamo

$$v'_2 = v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' + v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' + v_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}'$$

$$v'_3 = v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' + v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' + v_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'.$$

Indicando i prodotti scalari tra versori¹² con i simboli

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' = a_{11}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' = a_{12}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' = a_{13},$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' = a_{21}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' = a_{22}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}' = a_{23},$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' = a_{31}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' = a_{32}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = a_{33},$$

le relazioni fra le componenti del vettore \mathbf{v} si scrivono nel modo seguente:

$$\begin{cases} v'_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3 \\ v'_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + a_{23} v_3 \\ v'_3 = a_{31} v_1 + a_{32} v_2 + a_{33} v_3 \end{cases} \quad [\text{A.6.10}]$$

o, in maniera più compatta,

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j, \quad i = 1, 2, 3; \quad [\text{A.6.10}']$$

analogamente,

$$v_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} v'_j \quad i = 1, 2, 3. \quad [\text{A.6.10}'']$$

Poiché le [A.6.10'], [A.6.10''] devono valere per ogni vettore \mathbf{v} , i coefficienti a_{ij} che vi compaiono coincidono necessariamente con quelli delle trasformazioni di coordinate [A.6.1'] e [A.6.6']: per verificarlo basta considerare, quale vettore cui applicare le [A.6.10'], il generico raggio vettore \mathbf{r} spiccato dall'origine O verso il punto P di coordinate x_1, x_2, x_3 . In coordinate cartesiane ortogonali, le componenti di un vettore si trasformano dunque allo stesso modo delle coordinate di un punto.¹³

Sarebbe facile, a questo punto, mostrare che tutte le operazioni introdotte tra i vettori, espresse in termini di componenti cartesiane, sono "invarianti" rispetto alle

¹² Questi prodotti rappresentano naturalmente i coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai primi.

¹³ Quanto si è detto ora in relazione alle trasformazioni delle componenti di un vettore sarebbe di per sé sufficiente per dedurre, come caso particolare, le relazioni di trasformazione fra le coordinate di punto; tuttavia si è preferito ricavare la trasformazione tra coordinate in maniera indipendente, poiché le argomentazioni usate si riveleranno utili nel seguito.

trasformazioni [A.6.10]. Ciò significa, ad esempio, che, dette a_i, b_i, c_i le componenti di tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nel sistema Ox_1, x_2, x_3 , se si ha

$$c_i = a_i + b_i, \quad i=1, 2, 3,$$

si ha pure, nel nuovo sistema Ox'_1, x'_2, x'_3 ,

$$c'_i = a'_i + b'_i, \quad i=1, 2, 3,$$

ove a'_i, b'_i, c'_i indicano le componenti degli stessi vettori nel nuovo sistema di coordinate.

Analogamente, è facile mostrare l'invarianza del prodotto scalare tra due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , cioè che

$$a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + a'_3 b'_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Tale proprietà di invarianza autorizza ad affermare che il prodotto scalare è effettivamente una grandezza scalare.

Possiamo ora introdurre le grandezze tensoriali di ordine superiore, di notevole interesse in molti settori della fisica. Diciamo che una grandezza fisica ha carattere *tensoriale del secondo ordine* se essa è definita tramite un insieme di operazioni fisiche che diano come risultato un insieme ordinato di nove numeri T_{ij} , trasformantisi, al variare di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali,¹⁴ secondo le relazioni

$$T'_{ij} = \sum_{h=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{hi} a_{kj} T_{hk}, \quad i, j=1, 2, 3, \quad [\text{A.6.11}]$$

dove i coefficienti sono quelli delle trasformazioni di coordinate [A.6.1'] e [A.6.6'].

Per illustrare la natura tensoriale di una grandezza può essere utile riferirsi a una rappresentazione geometrica. Consideriamo una generica quadrica nello spazio euclideo; sia

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_i x_j = 1 \quad [\text{A.6.12}]$$

l'equazione che la rappresenta in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Ox_1, x_2, x_3 con origine nel centro della quadrica. Ci proponiamo di determinare l'equazione della stessa curva in un nuovo sistema di coordinate, Ox'_1, x'_2, x'_3 , legate alle precedenti da una trasformazione di tipo [A.6.1']. Sostituendo le [A.6.6'] nella [A.6.12], si ottiene

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} \left(\sum_{k=1}^3 a_{ki} x'_k \right) \left(\sum_{k=1}^3 a_{kj} x'_k \right) = 1.$$

Sviluppando le somme contenute nelle parentesi e moltiplicando i termini fra loro

¹⁴ Le operazioni fisiche con cui si definiscono le componenti della grandezza rimangono le stesse nei diversi sistemi di coordinate: cambiano, com'è ovvio, i risultati di tali operazioni.

risulta

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} (a_{1i} a_{1j} x'_1 x'_1 + a_{1i} a_{2j} x'_1 x'_2 + a_{1i} a_{3j} x'_1 x'_3 + a_{2i} a_{1j} x'_2 x'_1 + a_{2i} a_{2j} x'_2 x'_2 + a_{2i} a_{3j} x'_2 x'_3 + a_{3i} a_{1j} x'_3 x'_1 + a_{3i} a_{2j} x'_3 x'_2 + a_{3i} a_{3j} x'_3 x'_3) = 1.$$

Nelle coordinate x'_i , l'equazione della quadrica assume dunque la forma

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c'_{ij} x'_i x'_j = 1,$$

dove i coefficienti c'_{ij} sono legati ai "vecchi" c_{ij} tramite relazioni del tipo

$$c'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} c_{kl}.$$

I coefficienti di una quadrica si trasformano come le componenti di una grandezza tensoriale del secondo ordine e forniscono pertanto una rappresentazione geometrica di questo tipo di grandezze. Molti altri esempi, fisicamente interessanti, possono essere riportati per illustrare la natura delle grandezze tensoriali del secondo ordine. Faciamo riferimento a uno solo di essi, peraltro abbastanza generale.

Accade spesso, in fisica, di incontrare grandezze vettoriali **A** e **B** legate fra loro da relazioni lineari e omogenee del tipo

$$\begin{cases} B_1 = c_{11} A_1 + c_{12} A_2 + c_{13} A_3 \\ B_2 = c_{21} A_1 + c_{22} A_2 + c_{23} A_3 \\ B_3 = c_{31} A_1 + c_{32} A_2 + c_{33} A_3, \end{cases} \quad [A.6.13]$$

dove i coefficienti c_{ij} sono costanti note. Si è soliti dire che "la grandezza **A** viene trasformata nella **B**", e a questo proposito si parla di *omografia vettoriale* per indicare la legge che consente di calcolare, per ogni vettore **A**, il corrispondente vettore trasformato **B**. L'omografia vettoriale viene spesso indicata, in forma più compatta, nel modo seguente:

$$\mathbf{B} = C\mathbf{A}.$$

La corrispondenza così stabilita è indipendente dal sistema di coordinate: indipendentemente dal sistema di coordinate prescelto, il vettore **B** corrispondente a un assegnato vettore **A** è univocamente definito. Per determinare la forma assunta dalle [A.6.13] quando ci si riferisce a un nuovo sistema di coordinate cartesiane ortogonali Ox'_1, x'_2, x'_3 , basta sostituire le [A.6.10"] nelle [A.6.13]. Si ha così

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} B'_k = \sum_{i=1}^3 c_{ij} \sum_{k=1}^3 a_{jk} A'_k.$$

Anche queste nuove relazioni sono lineari e omogenee, cioè del tipo

$$B'_i = \sum_{j=1}^3 c'_{ij} A'_j, \quad i=1, 2, 3.$$

E' facile a questo punto mostrare (provvi il lettore a farlo) che i coefficienti c'_{ij} , che caratterizzano l'omografia vettoriale C nel sistema Ox'_1, x'_2, x'_3 , sono legati ai coefficienti c_{ij} da relazioni del tipo

$$c'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} c_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad [\text{A.6.14}]$$

Tali coefficienti si trasformano dunque, al variare del sistema di coordinate cartesiane ortogonali, come le componenti di un tensore del secondo ordine.

Osservazione. Nel calcolo tensoriale, per alleggerire le notazioni, si omette, di solito, il simbolo di sommatoria relativo a un certo indice, quando questo compare due volte (convenzione dell'"indice ombra"). Così, ad esempio, le [A.6.14] diventano

$$c'_{ij} = a_{ik} a_{jl} c_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Come si vede, i simboli di sommatoria su k e l sono stati soppressi.

Un esempio particolarmente significativo di omografia vettoriale è fornito dall'operazione di prodotto vettoriale. Tale è infatti una relazione del tipo

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

dove \mathbf{A} va considerato come fissato una volta per tutte e \mathbf{V} è il corrispondente del vettore variabile \mathbf{B} . Ricordando l'espressione delle componenti del prodotto vettore, dette A_i , B_i e V_i (con $i=1, 2, 3$) le componenti dei tre vettori in un sistema di coordinate Ox_1, x_2, x_3 , si ha subito

$$\begin{cases} V_1 = -A_3 B_2 + A_2 B_3 \\ V_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ V_3 = -A_2 B_1 + A_1 B_2. \end{cases} \quad [\text{A.6.15}]$$

Indicando tale omografia con

$$\mathbf{V} = \mathbf{C} \mathbf{B},$$

le componenti c_{ij} del tensore ad essa associato sono date da

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0, & c_{12} &= -A_3, & c_{13} &= A_2, \\ c_{21} &= A_3, & c_{22} &= 0, & c_{23} &= -A_1, \\ c_{31} &= -A_2, & c_{32} &= A_1, & c_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Pertanto, esse verificano la condizione

$$c_{ij} = -c_{ji}, \quad \text{per ogni } i \text{ e } j.$$

Un tensore le cui componenti soddisfano queste condizioni viene detto *emisimmetrico*; è *simmetrico* invece un tensore tale che

$$c_{ij} = c_{ji}.$$

L'operazione di prodotto vettoriale può essere dunque riguardata come un'omografia vettoriale associata a un tensore emisimmetrico del secondo ordine.

Consideriamo ora una trasformazione di coordinate cartesiane ortogonali diversa da quelle finora prese in esame, cioè un'*inversione di assi*. Essa corrisponde (vedi fig. A.10) a considerare una terna di assi x' , y' , z' orientati in verso opposto a quelli del riferimento Ox, y, z . Una simile trasformazione muta una terna levogira in una destro-gira e viceversa e pertanto non può essere ottenuta con semplice rotazione degli assi. Le relazioni che definiscono un'inversione di assi sono

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z. \end{cases} \quad [\text{A.6.16}]$$

Le leggi che governano la trasformazione delle componenti di un generico vettore \mathbf{A} nel passaggio dal sistema Ox, y, z al sistema Ox', y', z' sono

$$\begin{cases} A'_x = -A_x \\ A'_y = -A_y \\ A'_z = -A_z. \end{cases} \quad [\text{A.6.17}]$$

Vediamo ora come si trasformano le componenti C_x , C_y , C_z del prodotto vettori-

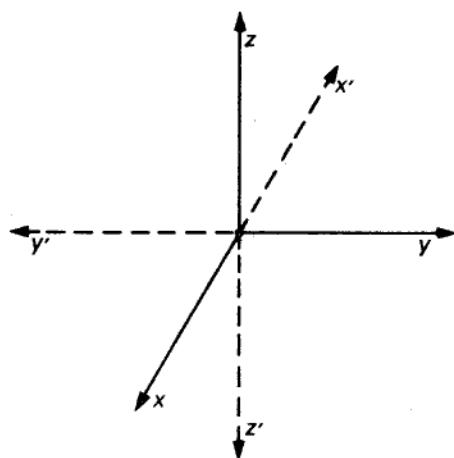


Figura A.10

riale di due vettori **A** e **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

Nel sistema Ox', y', z' risulta

$$\begin{cases} C'_x = A'_y B'_z - A'_z B'_y \\ C'_y = A'_z B'_x - A'_x B'_z \\ C'_z = A'_x B'_y - A'_y B'_x; \end{cases}$$

tenendo conto delle [A.6.17] si deduce

$$\begin{cases} C'_x = C_x \\ C'_y = C_y \\ C'_z = C_z. \end{cases}$$

Le componenti del prodotto vettoriale di due vettori si trasformano dunque, in corrispondenza di un'inversione di assi, in modo diverso da quelle di un vettore ordinario. Per questi motivi, il prodotto vettoriale è considerato uno *pseudovettore*, piuttosto che un vettore in senso stretto; ciò corrisponde al fatto che le operazioni da cui è definito non sono completamente indipendenti dal sistema di coordinate adottato (vedi § A.4).

A.7 Campi scalari e campi vettoriali

Il concetto di *campo* è tra i più importanti della fisica moderna e costituisce il fondamento dell'intera teoria elettromagnetica. Sia Ω un dominio dell'ordinario spazio euclideo tridimensionale e sia U una funzione, definita in Ω , che associa ad ogni punto P di tale dominio il valore $U(P)$ di una grandezza scalare; in queste condizioni, si dice che in Ω è definito un *campo scalare* U .

Analogamente, se in Ω è definita una funzione **A** che associa a ciascun punto P di Ω una grandezza vettoriale $\mathbf{A}(P)$, si dice che in Ω è definito un *campo vettoriale* **A**.

Ogni campo vettoriale $\mathbf{v}(P)$ può essere espresso mediante le tre funzioni scalari $v_1(P)$, $v_2(P)$ e $v_3(P)$ che ne forniscono le componenti rispetto a un sistema di assi coordinati cartesiani.¹⁵

Con riferimento a un sistema di coordinate cartesiane x , y , z , ogni punto P del campo è rappresentato dalla terna ordinata (x, y, z) delle sue coordinate; ogni campo scalare può quindi essere espresso mediante un'opportuna funzione scalare $U(x, y, z)$ delle tre variabili scalari x , y , z . Analogamente, ogni campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$ può essere

¹⁵ Le tre funzioni $v_1(P)$, $v_2(P)$ e $v_3(P)$ non costituiscono altrettanti campi scalari, poiché il loro valore in ciascun punto varia al variare del sistema di coordinate prescelto.

rappresentato mediante tre funzioni scalari, $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$ e $A_z(x, y, z)$.

E' possibile considerare anche campi definiti in regioni bidimensionali e unidimensionali: corrispondentemente, le funzioni rappresentative del campo si presentano come funzioni di due e di una variabile. Quanto detto si estende al caso di grandezze variabili nel tempo, considerando funzioni del tipo $U(P, t)$ e $\mathbf{A}(P, t)$. Il concetto di campo può essere infine esteso alle grandezze tensoriali (di qualunque ordine).

A.8 Rappresentazione analitica dei campi

L'aspetto delle funzioni rappresentative di un campo dipende, oltre che dalla distribuzione della grandezza fisica, anche dal sistema di coordinate scelto. Consideriamo, ad esempio, una grandezza scalare U che assuma, in ciascun punto P dello spazio euclideo tridimensionale, un valore proporzionale alla distanza da un punto fisso O . Con riferimento a un sistema di coordinate cartesiane di origine O , il campo suddetto può essere rappresentato dalla funzione

$$U = \frac{U_0}{R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

indicando con U_0 il valore di U alla distanza R .

In un sistema di coordinate sferiche r, θ, φ , centrato in O , il campo è rappresentato dalla funzione

$$U = \frac{U_0}{R} r.$$

La forma delle due funzioni è totalmente diversa, pur corrispondendo entrambe alla stessa distribuzione della grandezza fisica U , cioè allo stesso campo scalare $U(P)$.

Anche la rappresentazione di un campo vettoriale dipende dal sistema di coordinate prescelto. Consideriamo un semplice caso piano: quello di un campo vettoriale (vedi fig. A.11) che associa ad ogni punto P del piano un vettore \mathbf{A} di modulo costante e diretto secondo la semiretta spiccata da un punto fisso O e passante per P . In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y , con origine in O , si ha

$$\begin{cases} A_x(x, y) = A \cos \theta = A \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ A_y(x, y) = A \sin \theta = A \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

Considerando ora, in luogo delle coordinate cartesiane, quelle polari, ρ, θ , la rappresentazione analitica del campo si modifica completamente. Infatti, le componenti

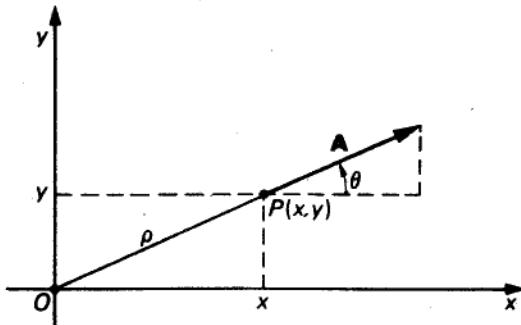


Figura A.11

di \mathbf{A} secondo le direzioni individuate dai versori \mathbf{i}_ρ e \mathbf{i}_θ in P sono

$$\begin{cases} A_\rho(\rho, \theta) = A \\ A_\theta(\rho, \theta) = 0, \end{cases}$$

e l'espressione di \mathbf{A} diventa

$$\mathbf{A}(\rho, \theta) = A \mathbf{i}_\rho.$$

L'esempio mostra come convenga, per la descrizione di un dato campo vettoriale, scegliere opportunamente il sistema di coordinate. In generale, infatti, i versori delle linee coordinate, per sistemi diversi da quello cartesiano, variano da punto a punto, e ciò può consentire di rappresentare analiticamente il campo in modo semplice.

A.9 Rappresentazione geometrica dei campi

Campi scalari

La struttura di un campo scalare U (supposto definito in un dominio spaziale Ω) può essere visualizzata mediante le cosiddette *superfici di livello*. Consideriamo un generico punto P_0 di Ω e il valore U_0 ivi assunto dalla U . Consideriamo, inoltre, in Ω , il luogo di tutti i punti in corrispondenza dei quali la funzione U assume il valore U_0 : esso definisce una superficie (superficie di livello) la cui espressione analitica, in coordinate cartesiane, è

$$U(x, y, z) = U_0. \quad [\text{A.9.1}]$$

Qui e nel seguito si suppone che $U(x, y, z)$ sia ovunque continua e derivabile in Ω con le sue derivate parziali prime (particolare cautela va usata quando questa ipotesi non sia verificata), e inoltre che non esistano punti di Ω in cui le tre derivate parziali prime siano simultaneamente nulle.¹⁶ Per ogni punto del campo passa una e una sola

¹⁶ In tale modo si esclude che il campo possa assumere valore costante in una intera regione dello spazio tridimensionale.

superficie di livello: pertanto la conoscenza di tutte le superfici di livello, contrassegnate dai corrispondenti valori U_0 , permette di descrivere completamente il campo $U(P)$.

Questo tipo di rappresentazione risulta particolarmente efficace quando il campo è definito in una regione piana, o comunque bidimensionale. In questi casi, infatti, esso può essere rappresentato da una funzione del tipo $U(x, y)$; l'equazione

$$U(x, y) = U_0$$

definisce la *linea di livello* corrispondente al valore U_0 .

Tipici esempi di rappresentazione mediante linee di livello sono le *isobare* (linee a uguale pressione) o le *isoterme* (linee a uguale temperatura) disegnate su una carta geografica.

Campi vettoriali

Considerato un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$, definito in una regione spaziale Ω , si dice *linea vettoriale* del campo ogni linea, contenuta in Ω , che sia tangente in ogni suo punto P_0 al vettore $\mathbf{A}(P_0)$ (vedi fig. A.12). Per ogni punto del campo passa una e una sola linea vettoriale: pertanto, la mappa delle linee vettoriali fornisce un modo per visualizzarne la struttura. Essa infatti consente di individuare subito, in ogni punto, la direzione – e se le linee sono orientate, anche il verso – del vettore \mathbf{A} . (Nessuna informazione fornisce invece, almeno in generale, sul modulo del campo, a meno che il vettore del campo non venga esplicitamente disegnato nei punti di maggiore interesse. In alcuni casi è possibile, con opportune convenzioni, avere da essa utili informazioni anche per ciò che riguarda la distribuzione del modulo del campo.)

Il tracciamento delle linee vettoriali di un campo assegnato non sempre è facile. Consideriamo, a titolo di esempio, un generico campo piano, definito su un piano e ivi dotato, con riferimento a un sistema di coordinate cartesiane x, y (vedi fig. A.13), di componenti $A_x(x, y)$ e $A_y(x, y)$ (che supporremo funzioni note). Sia γ la linea vettoriale

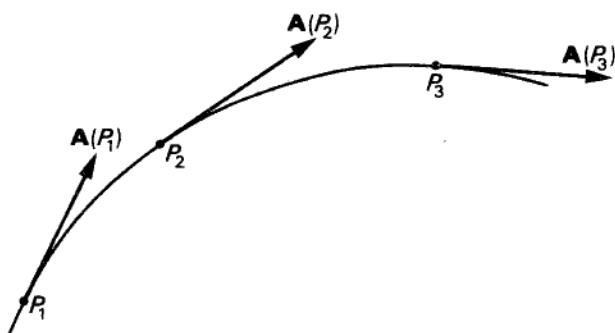


Figura A.12

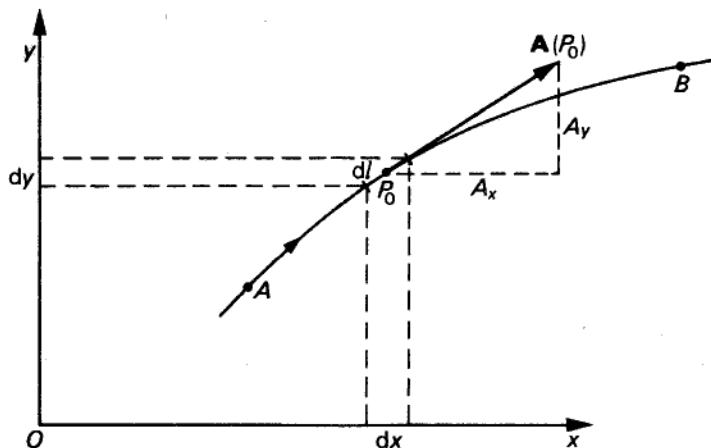


Figura A.13

riale passante per il generico punto $P_0(x_0, y_0)$ del campo. Dalla figura, detta dI la lunghezza del tratto elementare di curva orientata passante per P_0 , risulta

$$\frac{A_y(x_0, y_0)}{A_x(x_0, y_0)} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{P_0}, \quad [A.9.2]$$

indicando con $y = y(x)$ l'equazione di γ e con $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{P_0}$ il valore della derivata dy/dx in x_0 . Tutto ciò può essere ripetuto per ciascun punto della linea vettoriale γ , che pertanto si può riguardare come il luogo dei punti x, y soddisfacenti l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_y(x, y)}{A_x(x, y)} \quad [A.9.3]$$

e verificanti la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0.$$

Le considerazioni svolte si estendono agevolmente ai campi tridimensionali. Per determinare la linea vettoriale passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, in luogo dell'unica equazione [A.9.3], dobbiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{A_y(x, y, z)}{A_x(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{A_z(x, y, z)}{A_x(x, y, z)} \end{cases}$$

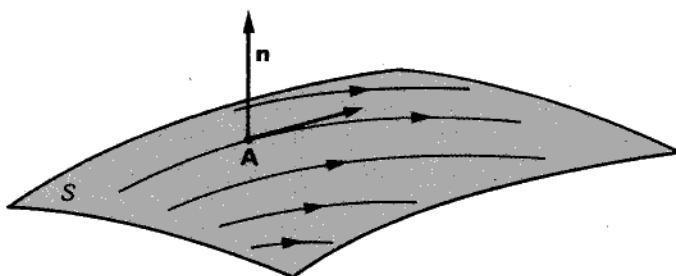


Figura A.14

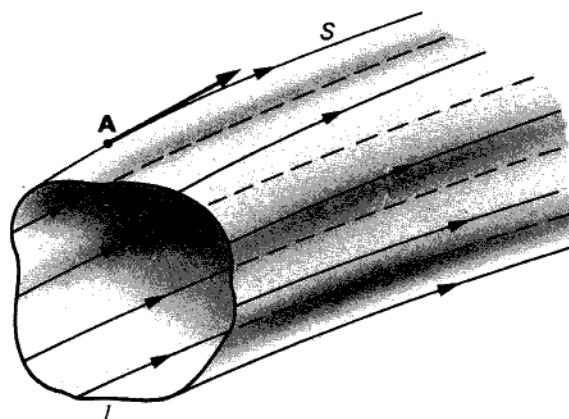


Figura A.15

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0. \end{cases}$$

Una superficie S contenuta in una regione spaziale in cui è definito un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$ è detta *superficie vettoriale* del campo se, in ogni suo punto P_0 , la normale \mathbf{n} è ortogonale al vettore $\mathbf{A}(P_0)$. Ogni superficie vettoriale S è dunque costituita di linee vettoriali (vedi fig. A.14), ciascuna delle quali giace interamente su una superficie vettoriale.¹⁷

Data infine una linea chiusa l non coincidente con alcuna linea vettoriale del campo, consideriamo l'insieme delle linee vettoriali passanti per i punti di l (vedi fig. A.15): esse individuano una superficie vettoriale S a struttura tubolare, che prende il nome di *tubo di flusso* associato alla linea chiusa l .

¹⁷ Infatti, se una linea vettoriale “forasse” una superficie vettoriale in un suo punto P_0 , il campo \mathbf{A} presenterebbe ivi una componente non nulla lungo la normale a S in P_0 , in contrasto con la definizione di superficie vettoriale.

A.10 Gradiente di un campo scalare

Dati un campo scalare $U(P)$, definito in una regione spaziale Ω , e un punto P_0 di Ω , studiamo il comportamento del campo in un generico intorno di P_0 . A tal fine, consideriamo una generica retta orientata r passante per P_0 e un punto P di essa. Considerato il rapporto incrementale

$$R(P, P_0) = \frac{U(P) - U(P_0)}{d(P, P_0)} \quad [\text{A.10.1}]$$

(dove $d(P, P_0)$ è la distanza tra P e P_0), facciamo tendere P a P_0 lungo r ; se $R(P, P_0)$ tende a un limite finito, quando $d(P, P_0)$ tende a zero, tale limite si dice *derivata direzionale* di U , nel punto P_0 , secondo la direzione orientata r . In simboli,

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{P_0} = \lim_{d(P, P_0) \rightarrow 0} R(P, P_0). \quad [\text{A.10.2}]$$

Data la superficie di livello S_0 passante per P_0 , sia \mathbf{n} la normale a S_0 nel punto P_0 , orientata nel verso dei valori crescenti di $U(P)$. Consideriamo, in P_0 , una grandezza vettoriale avente la direzione e il verso di \mathbf{n} e modulo pari alla derivata direzionale di $U(P)$ secondo la direzione orientata \mathbf{n} . Questo vettore è detto *gradiente* del campo scalare U nel punto P_0 e si indica con il simbolo $\text{grad}_{P_0} U$. Effettuando l'operazione di gradiente in ciascun punto di Ω , si arriva a definire un campo vettoriale, indicato con

$$\text{grad } U,$$

che può essere associato al campo scalare $U(P)$. In questo senso, il simbolo “grad” può essere riguardato come un operatore che trasforma un campo scalare in un campo vettoriale.

Analizziamo ora, con riferimento a un caso piano (vedi fig. A.16), le informazioni che possono trarsi dalla conoscenza del vettore $\text{grad } U$ in un generico punto P_0 del campo. Sia γ_0 la linea di livello passante per P_0 ; in tale punto il vettore $\text{grad } U$ è per definizione normale a γ_0 . Valutiamo la derivata direzionale di U lungo una generica direzione orientata r passante per P_0 . Conformemente alla definizione, considerato su r un generico punto P , costruiamo il rapporto incrementale

$$R = \frac{\Delta U}{d(P, P_0)},$$

dove

$$\Delta U = U(P) - U(P_0)$$

e $d(P, P_0)$ è la distanza tra P e P_0 . Indicata con Δl la lunghezza della proiezione del

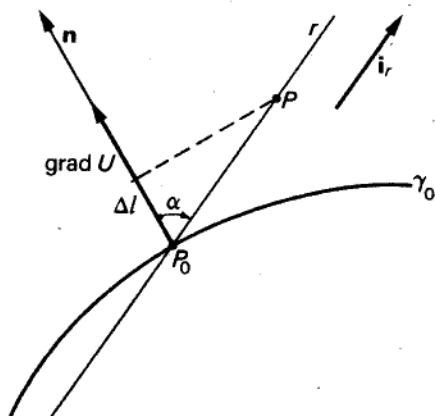


Figura A.16

segmento P_0P sulla direzione normale \mathbf{n} , si ha

$$\Delta l = d(P, P_0) \cos \alpha,$$

dove α è l'angolo formato dalla direzione orientata r e dal versore \mathbf{n} . Si ha dunque

$$\frac{\Delta U}{d(P, P_0)} = \frac{\Delta U}{\Delta l} \cos \alpha,$$

e, passando al limite per $d(P, P_0) \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial U}{\partial r} = |\text{grad } U| \cos \alpha. \quad [\text{A.10.3}]$$

Noto $\text{grad } U$ in un generico punto P_0 , la [A.10.3] consente dunque di valutare la derivata direzionale di U lungo una qualsiasi direzione orientata r . La formula precedente può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \text{grad } U \cdot \mathbf{i}_r = (\text{grad } U)_r, \quad [\text{A.10.3}']$$

dove \mathbf{i}_r indica il versore della direzione orientata r : la derivata direzionale $\partial U / \partial r$ coincide cioè con la componente del vettore $\text{grad } U$ nella direzione orientata r .

Esempio

Una immediata applicazione si ha nella ricerca di $\text{grad } r$, ove r è il modulo del vettore \mathbf{r} che individua un punto variabile P rispetto a un punto fisso O (precisamente, $\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{O}$). In tal caso $\alpha = 0$, e la [A.10.3] mostra che $\text{grad } r = \mathbf{i}_r$.

La definizione dell'operazione di gradiente prescinde completamente dalla particolare rappresentazione analitica del campo conseguente alla scelta di un dato sistema

di coordinate: in questo senso essa è una definizione di tipo *intrinseco*. D'altra parte, conoscendo la funzione $U(x, y, z)$ che rappresenta il campo, ad esempio, in un particolare sistema di coordinate cartesiane, le componenti del gradiente secondo gli assi x, y, z possono essere valutate immediatamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{grad } U)_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ (\text{grad } U)_y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ (\text{grad } U)_z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad [\text{A.10.4}]$$

L'operatore gradiente è lineare: detti U e V due generici campi scalari, risulta

$$\text{grad}(U + V) = \text{grad } U + \text{grad } V,$$

$$\text{grad}(\alpha U) = \alpha \text{ grad } U,$$

dove α è una generica costante.

Un'altra semplice proprietà del gradiente è quella espressa dalla seguente formula, ove g è una qualunque funzione del posto e F è una qualunque funzione di g :

$$\text{grad } F(g) = \frac{dg}{dF} \text{ grad } g.$$

A.11 Campi che ammettono potenziale

Un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$, definito in un dominio Ω , ammette potenziale se in Ω può essere considerato come il gradiente di un campo scalare:

$$\mathbf{A} = \text{grad } U; \quad [\text{A.11.1}]$$

il campo scalare U si dice allora *potenziale* (o *funzione potenziale*) del campo vettoriale \mathbf{A} .

Se un campo vettoriale \mathbf{A} ammette una funzione potenziale scalare U , ogni altro campo scalare $V(P)$, definito dalla relazione

$$V(P) = U(P) + V_0, \quad [\text{A.11.2}]$$

con V_0 costante arbitraria, è un potenziale del campo. Si ha infatti

$$\text{grad } V = \text{grad } U = \mathbf{A}.$$

Inversamente, se un campo vettoriale \mathbf{A} ammette due potenziali scalari $V(P)$ e $U(P)$, essi differiscono per una costante. Si ha infatti

$$\mathbf{A} = \text{grad } V = \text{grad } U,$$

dove

$$\operatorname{grad}(V-U)=0,$$

il che significa che la derivata direzionale di $V-U$, in ogni direzione, è nulla in ciascun punto di Ω , cosicché

$$V-U=\text{cost.}$$

Esaminiamo ora le condizioni cui devono soddisfare, in un dato riferimento, le componenti di un campo vettoriale perché esso ammetta potenziale. Consideriamo un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$, definito in un dominio Ω dello spazio euclideo tridimensionale, le cui componenti secondo le direzioni degli assi di un sistema di coordinate cartesiane siano date dalle funzioni $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$ e $A_z(x, y, z)$. Se il campo ammette una funzione potenziale $U(x, y, z)$ dev'essere, in ogni punto $P(x, y, z)$ di Ω ,

$$A_x(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_y(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad A_z(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Dovendo risultare

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y},$$

si ha pure

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}. \quad [\text{A.11.3}]$$

Condizione necessaria affinché un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$ ammetta potenziale è che le sue componenti verifichino, in ogni punto del loro dominio di definizione, le [A.11.3].

Vogliamo verificare se tali condizioni sono anche sufficienti. Consideriamo a tale scopo la cosiddetta *forma differenziale*

$$\delta C = A_x(x, y, z) dx + A_y(x, y, z) dy + A_z(x, y, z) dz, \quad [\text{A.11.4}]$$

associata a una qualsiasi scelta degli elementi differenziali dx , dy , dz .

E' naturale chiedersi se sia possibile considerare questa espressione come il differenziale di una qualche funzione $U(x, y, z)$, valutato in corrispondenza degli stessi dx , dy e dz . In generale ciò non è possibile: si dimostra però che se le funzioni $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$ e $A_z(x, y, z)$ verificano le [A.11.3] in ogni punto del loro dominio di definizione Ω , e se quest'ultimo è a connessione lineare semplice,¹⁸ è lecito porre

$$\delta C = dU, \quad [\text{A.11.5}]$$

¹⁸ Una regione dello spazio Ω si dice "a connessione lineare semplice" se, comunque si consideri una linea chiusa γ contenuta in Ω , questa può essere ridotta a un punto, mediante deformazione continua, senza "uscire" mai da Ω .

cioè

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Per l'arbitrarietà di dx , dy e dz si ottiene allora

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

e in definitiva

$$\mathbf{A} = \text{grad } U.$$

Se U verifica la [A.11.5], ogni altra funzione del tipo $V = U + \text{cost.}$ soddisfa tale condizione e si può pertanto considerare un potenziale di \mathbf{A} .

A.12 Integrale di linea di un campo vettoriale lungo una linea orientata

Consideriamo un campo vettoriale \mathbf{A} , definito in una regione spaziale Ω , e una curva regolare γ , di estremi M e N , contenuta in Ω (vedi fig. A.17). Dopo aver orientato γ scegliendo ad arbitrio un verso di percorrenza su di essa (ad esempio da M verso N), consideriamone la partizione ottenuta mediante i punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$. Esaminiamo quindi la spezzata $P_0 P_1 P_2 \dots P_n$. A ciascun segmento $P_k P_{k+1}$ associamo un vettore \mathbf{l}_k definito da: direzione della retta $P_k P_{k+1}$; verso concorde con quello scelto su γ ; modulo pari alla lunghezza l_k del segmento $P_k P_{k+1}$. Consideriamo poi le determinazioni assunte da \mathbf{A} in corrispondenza di $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, indicando i corrispondenti vettori con i simboli $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$. Effettuati i prodotti scalari

$$\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{l}_k, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1,$$

poniamo

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{l}_k,$$

e consideriamo la successione dei valori assunti da tale somma al crescere del numero n dei punti considerati sulla curva γ . Se la successione tende a un limite quando n tende all'infinito (in modo che tutte le lunghezze l_k tendano a zero), tale limite si dice *integrale di linea* del campo vettoriale \mathbf{A} lungo la curva orientata γ : in simboli,

$$T_\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad [\text{A.12.1}]$$

Per il modo in cui è stata definita, la grandezza scalare T_γ ha un segno che dipende dalla orientazione scelta per γ ; se infatti si orienta γ nel verso da N a M , tutti i vet-

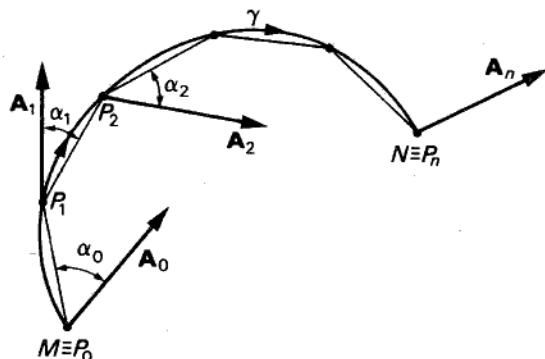


Figura A.17

tori \mathbf{l}_k cambiano verso e, di conseguenza, tutti gli addendi della somma T_n cambiano segno.

La definizione di integrale di linea può applicarsi anche al caso di una linea γ chiusa: esso viene allora indicato con il simbolo

$$C_\gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad [\text{A.12.2}]$$

e prende il nome di *circuitazione* del campo \mathbf{A} lungo γ . Gli integrali che compaiono nelle [A.12.1] e [A.12.2] vengono spesso indicati anche come segue:

$$T_\gamma = \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad \text{e} \quad C_\gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl, \quad [\text{A.12.3}]$$

ponendo cioè

$$d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl, \quad [\text{A.12.4}]$$

dove \mathbf{t} è il versore della tangente alla curva γ nel punto generico in cui si considera \mathbf{A} e dl è il modulo dello spostamento elementare (lungo la curva) dl . Le espressioni fornite per la definizione di C_γ e T_γ sono "intrinseche", nel senso che non dipendono dalla rappresentazione del campo in un particolare sistema di coordinate. Considerando invece le componenti di \mathbf{A} e dl secondo, ad esempio, un sistema di coordinate cartesiane, si può porre

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_x(x, y, z) dx + A_y(x, y, z) dy + A_z(x, y, z) dz, \quad [\text{A.12.5}]$$

ove dx , dy e dz sono le componenti dello spostamento elementare dl . Le espressioni per T e C assumono allora la forma

$$T_\gamma = \int_{\gamma} [A_x dx + A_y dy + A_z dz] \quad \text{e} \quad C_\gamma = \oint_{\gamma} [A_x dx + A_y dy + A_z dz]. \quad [\text{A.12.6}]$$

Servendoci di queste definizioni, possiamo aggiungere alcune considerazioni in merito ai campi che ammettono potenziale, trattati nel paragrafo precedente.

Date due curve γ e γ' tutte contenute nel dominio Ω e aventi gli estremi M e N in comune (vedi fig. A.18), orientiamole nel verso da M a N ; dopodiché consideriamo gli integrali

$$T_\gamma = \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{tdl} \quad \text{e} \quad T_{\gamma'} = \int_{\gamma'} \mathbf{A} \cdot \mathbf{tdl}.$$

Data l'arbitrarietà di \mathbf{A} , essi risultano in genere diversi tra loro:

$$T_\gamma \neq T_{\gamma'}.$$

Ci si può chiedere allora se esistano campi per i quali, comunque si scelgano γ e γ' (purché aventi gli estremi in comune, come in fig. A.18) risulti

$$T_\gamma = T_{\gamma'}. \quad [\text{A.12.7}]$$

La risposta è che di questa proprietà godono solo i campi che ammettono potenziale. Infatti, se un campo \mathbf{A} ammette potenziale, per la [A.11.1] si ha

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU,$$

e quindi

$$T_\gamma = \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \int_{\gamma} dU = U(N) - U(M);$$

il valore di T_γ è cioè pari alla differenza tra i valori assunti dalla funzione potenziale

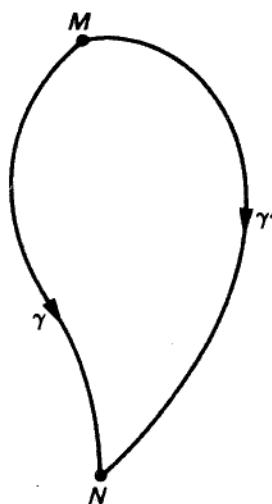


Figura A.18

nei punti N e M . Lo stesso ragionamento si applica a ogni altra curva γ' , per cui

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = U(N) - U(M).$$

Più complessa è la dimostrazione del fatto che i campi che ammettono potenziale sono gli unici per i quali valga la [A.12.7].

Riassumendo, le relazioni

$$\mathbf{A} = \text{grad } U$$

e

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad \text{per ogni coppia di curve } \gamma \text{ e } \gamma' \text{ che abbiano gli estremi in comune,} \quad [\text{A.12.8}]$$

sono tra loro equivalenti. L'ultima relazione è inoltre equivalente alla seguente:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \text{ contenuta nel campo.} \quad [\text{A.12.9}]$$

Per dimostrarlo, consideriamo un campo \mathbf{A} , definito in un dominio Ω , per il quale valgano le [A.12.8] e una generica curva chiusa γ contenuta in Ω (vedi fig. A.19); scelti comunque due punti M e N sulla curva, consideriamo i due archi in cui γ risulta da essi divisa. Indichiamo tali archi, orientati ambedue da M verso N , con i simboli (1) e (2).

In base alla [A.12.8], si ha

$$\int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}; \quad [\text{A.12.10}]$$

d'altra parte risulta¹⁹

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad [\text{A.12.11}]$$

e quindi

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Ragionando in maniera analoga, si dimostra che vale anche la proprietà inversa: se un campo \mathbf{A} verifica la [A.12.9], esso soddisfa necessariamente anche le [A.12.8]. Di qui la completa equivalenza tra le [A.12.8] e [A.12.9].

¹⁹ Il segno “-” è giustificato dal fatto che, orientata ad esempio l'intera curva in senso orario, il contributo fornito dal tratto di curva (2) è uguale ed opposto alla quantità che compare a secondo membro della [A.12.10].

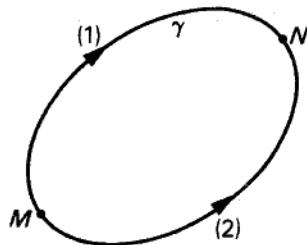


Figura A.19

Esempio

Consideriamo un campo vettoriale \mathbf{A} di tipo *centrale*, cioè diretto, in ciascun punto P della regione Ω di definizione, secondo la retta passante per P e uscente da un centro O (vedi fig. A.20); le linee vettoriali sono dunque semirette uscenti dal punto O . Supponiamo inoltre che tale campo presenti simmetria sferica, cioè che \mathbf{A} dipenda soltanto dalla distanza r di P da O :

$$\mathbf{A}(P) = f(r) \mathbf{i}_r,$$

ove \mathbf{i}_r è il versore della linea vettoriale passante per P , e $f(r)$ una funzione che descrive il modo in cui il modulo di \mathbf{A} varia con r . Consideriamo ora una linea chiusa $ABCD$ del tipo riportato in figura, dove AB e CD sono archi di circonferenze (di raggi r_1 e r_2) centrati in O . Si ha subito

$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}.$$

I termini relativi ad AB e CD sono nulli, in quanto lungo tali archi \mathbf{A} e \mathbf{i}_r sono ortogonali fra loro. Considerando ora il contributo relativo al segmento BC , si ha

$$\int_{BC} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{BC} f(r) \mathbf{i}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr.$$

Analogamente, per il tratto DA si ha

$$\int_{DA} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{DA} f(r) \mathbf{i}_r \cdot d\mathbf{l} = - \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr.$$

Risulta dunque

$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Pertanto, *ogni campo centrale a simmetria sferica ammette potenziale*.

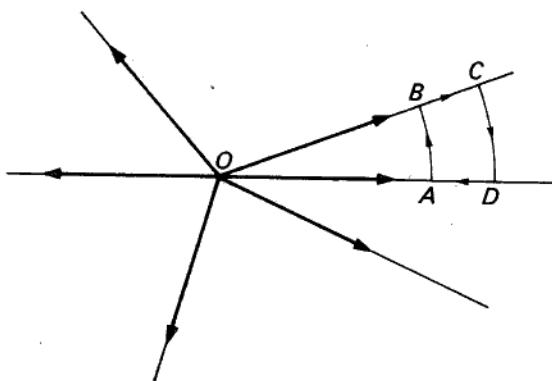


Figura A.20

A.13 Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie

Consideriamo un campo vettoriale \mathbf{A} definito in una regione Ω , e sia S una superficie regolare (non chiusa) contenuta in Ω (vedi fig. A.21). Sia γ la curva chiusa che “orla” tale superficie (cioè ne costituisce il bordo). Assegnato ad arbitrio un verso su γ , supponiamo di orientare in maniera *congruente* la superficie S : orientiamo cioè la normale \mathbf{n} a S , in ogni punto di questa, in maniera che il verso assunto su γ e quello di \mathbf{n} siano tra loro legati rispettivamente come il senso di rotazione e quello di avanzamento di una vite destrosgira (o di un cavatappi). Supponiamo, poi, di suddividere la superficie S in un numero n di parti, S_1, S_2, \dots, S_n , mediante curve regolari a tratti scelte arbitrariamente su S ; siano $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ le aree di tali superfici parziali. Consideriamo, per ogni superficie S_i , un punto M_i su di essa, e l’insieme delle determinazioni assunte dal campo vettoriale \mathbf{A} in corrispondenza di tali punti; siano $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ tali vettori. Detti $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_n$ i versori normali a S nei punti M_1, M_2, \dots, M_n ,

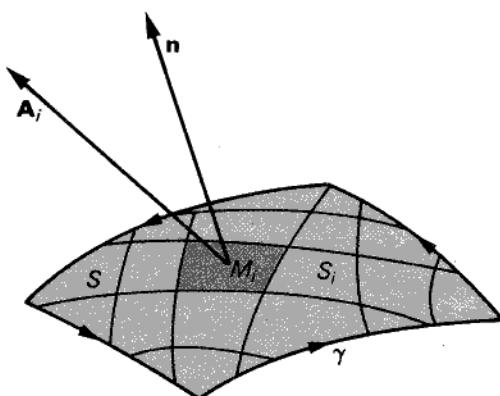


Figura A.21

poniamo

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{n}_k \sigma_k = \sum_{k=1}^n A_{kn} \sigma_k, \quad [A.13.1]$$

dove A_{kn} è la componente del vettore \mathbf{A}_k secondo la direzione di \mathbf{n}_k nel punto M_k . Consideriamo infine la successione dei valori Φ_n che si ottengono aumentando il numero n di parti in cui S è suddivisa. Se la successione Φ_n tende a un limite finito (quando n tende all'infinito in modo che *tutti* i diametri delle parti S_i tendano a zero), tale limite si dice *flusso* del campo \mathbf{A} attraverso la superficie orientata S e si scrive

$$\Phi_s = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n; \quad [A.13.2]$$

per la [A.13.1] si ha pure

$$\Phi_s = \iint_S A_n dS, \quad [A.13.2']$$

dove A_n è la componente di \mathbf{A} lungo la normale a S in ciascun punto di tale superficie.

Per il modo in cui è stata definita, la quantità scalare Φ_s ha un segno che dipende, per un assegnato campo vettoriale \mathbf{A} , dalla orientazione scelta per la normale alla superficie S . Se, infatti, in ogni punto di S la normale si considera orientata come il versore $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$, ciascuno degli addendi contenuti nella [A.13.1] cambia segno, e, conseguentemente, cambia il segno dello scalare Φ_s .

La nozione di flusso fornita dalle [A.13.2] o [A.13.2'] può essere estesa al caso in cui si abbia una superficie chiusa Σ . In questo caso, è possibile orientare la normale alla superficie in modo che in ogni suo punto il versore \mathbf{n} risulti entrante nel volume da essa racchiuso (fig. A.22b), oppure uscente (fig. A.22a). Nel primo caso parleremo di *flusso entrante* in Σ , nel secondo, di *flusso uscente* da Σ .

Osservazione. Tali espressioni non si riferiscono dunque al fatto che le linee vettoriali effettivamente entrino, oppure escano dal volume racchiuso da Σ , bensì soltanto al modo in cui è stata arbitrariamente orientata la normale \mathbf{n} (di solito, se non è specificato diversamente, la normale si suppone orientata verso l'esterno).

Analogamente a quanto si era fatto a proposito della circuitazione lungo una linea chiusa, consideriamo ora campi vettoriali *conservativi per il flusso*, tali cioè che il flusso uscente da una qualsiasi superficie chiusa Σ contenuta nel dominio sia nullo, ossia valga la relazione

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad [A.13.3]$$

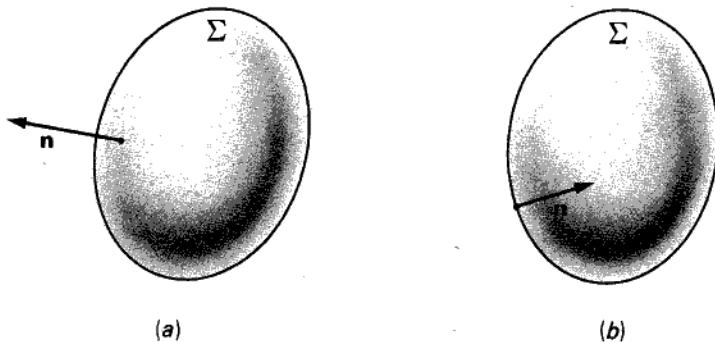


Figura A.22

Esempio

Consideriamo un campo vettoriale uniforme in una regione Ω dello spazio: esso sarà caratterizzato, in ogni punto P di Ω , da un vettore costante \mathbf{A} . Le sue linee vettoriali sono perciò rette parallele contenute in Ω . Consideriamo ora una superficie chiusa costituita da un parallelepipedo $ABCD A'B'C'D'$ (vedi fig. A.23). Il flusso di \mathbf{A} uscente da tale superficie può essere calcolato come somma dei contributi di tutte le facce del parallelepipedo. Il contributo dato dalla faccia $ABCD$ (la cui area è indicata qui con S_1) ad esempio è

$$\Phi_1 = \mathbf{A} S_1 \cos \alpha_1,$$

dove α_1 è l'angolo formato tra il vettore \mathbf{A} e la normale \mathbf{n}_1 .

Nel nostro esempio immaginiamo che sia

$$\Phi_1 > 0,$$

cioè che la componente di \mathbf{A} secondo \mathbf{n}_1 sia positiva. Consideriamo ora il contributo

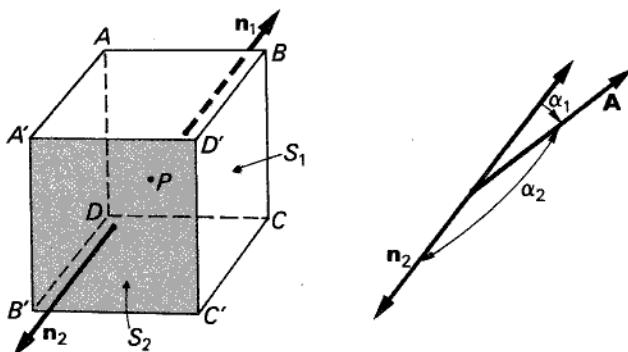


Figura A.23

dato dalla faccia $A'B'C'D'$ (di area $S_2 = S_1$):

$$\Phi_2 = AS_1 \cos \alpha_2;$$

essendo α_2 e α_1 angoli supplementari, risulta

$$\Phi_2 = -\Phi_1,$$

e quindi:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

Ragionando analogamente per le altre coppie di facce, si conclude che il flusso uscente dall'intero parallelepipedo è nullo.

La proprietà di conservazione del flusso può essere espressa, in forma equivalente, come segue. Consideriamo un campo definito in una regione spaziale Ω e, in Ω , due superfici aperte qualsiasi, S_1 e S_2 , orlate da una stessa linea chiusa γ , comunque prefissata (vedi fig. A.24). Orientata arbitrariamente γ , orientiamo in modo congruente S_1 e S_2 ; calcoliamo poi i flussi del campo \mathbf{A} attraverso S_1 e S_2 . Si ha

$$\Phi_{S_1} = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS, \quad \Phi_{S_2} = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS.$$

Consideriamo, ora, la superficie chiusa Σ costituita dall'unione di S_1 e S_2 (nel caso della figura, con S_1 e S_2 giacenti da una stessa parte rispetto a γ , Σ presenta uno "spigolo" in corrispondenza della curva) e applichiamo ad essa la proprietà di conservazione del flusso, supposta valida per \mathbf{A} . Orientando ad esempio la normale a Σ verso l'esterno, si ha

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

D'altra parte, nei punti di S_1 risulta $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$, per cui

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS = 0.$$

Si ha quindi

$$\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS.$$

[A.13.4]

Il flusso attraverso S_2 è dunque uguale a quello attraverso S_1 .

Riassumendo, se un campo vettoriale \mathbf{A} è conservativo per il flusso in un dato dominio, il flusso attraverso tutte le superfici (non chiuse) aventi come contorno una stessa linea chiusa γ , comunque scelta nel dominio, ha lo stesso valore. Non è pertanto

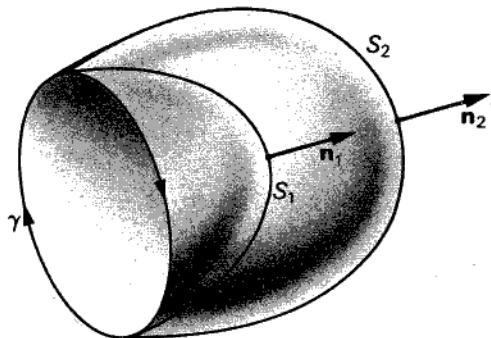


Figura A.24

necessario specificare la particolare superficie che si considera e si può parlare correntemente di *flusso associato alla linea chiusa* γ .²⁰

Viceversa si verifica che se un campo vettoriale soddisfa, in un dato dominio, la [A.13.4] per ogni linea chiusa γ , esso è ivi conservativo per il flusso. La proprietà di conservazione del flusso è perciò equivalente a quella espressa dalla [A.13.4].

A.14 Divergenza di un campo vettoriale; teorema della divergenza

Consideriamo un campo vettoriale \mathbf{A} , definito in una regione spaziale Ω , un dominio spaziale τ contenuto in Ω e limitato da una superficie chiusa regolare Σ ; il rapporto tra il flusso di \mathbf{A} uscente da Σ e il volume $V(\tau)$ della regione racchiusa da Σ è

$$\frac{\Phi_{\Sigma}}{V(\tau)} = \frac{\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{V(\tau)}.$$

Consideriamo ora il limite di tale rapporto quando il volume $V(\tau)$ sia fatto tendere a zero facendo contrarre la regione τ attorno a un punto fisso P_0 , se questo limite esiste ed è finito, indipendentemente dalla forma della superficie chiusa Σ , poniamo

$$\lim_{V(\tau) \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{V(\tau)} = \text{div}_{P_0} \mathbf{A} \quad [\text{A.14.1}]$$

e diciamo che la *divergenza del campo vettoriale* \mathbf{A} nel punto P_0 ha il valore indicato dalla [A.14.1]. Tale relazione è spesso presentata sotto la forma

$$\text{div}_{P_0} \mathbf{A} = \left. \frac{d\Phi}{dV} \right|_{P_0}, \quad [\text{A.14.1}']$$

²⁰ Ovvero, con riferimento al campo magnetico, *flusso concatenato con la linea chiusa* γ (vedi cap. 7).

ove dV indica il volume di una regione racchiusa da una superficie chiusa elementare $d\Sigma$ che circonda il punto P_0 in cui si valuta la divergenza, e $d\Phi$ il flusso elementare di \mathbf{A} uscente da $d\Sigma$. Questa definizione permette di associare a un campo vettoriale \mathbf{A} un campo scalare (la divergenza di \mathbf{A}). In questo senso, il simbolo "div" può essere riguardato come l'operatore che, agendo su \mathbf{A} , lo trasforma nel campo scalare $\text{div } \mathbf{A}$.

Quando \mathbf{A} è espresso attraverso le componenti cartesiane $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$, il calcolo della divergenza è particolarmente semplice. Dato un punto P_0 del campo, e ammesso che la divergenza di \mathbf{A} sia definibile in P_0 (cioè che in tale punto il limite [A.14.1] esista, finito, indipendentemente dalla forma della superficie chiusa Σ), consideriamo il flusso uscente da una superficie chiusa elementare a forma di cubetto, centrato in P_0 e con gli spigoli paralleli agli assi (vedi fig. A.25). Orientata la faccia anteriore ($ABCD$) verso l'esterno (cioè nello stesso verso dell'asse x), si ha

$$d\Phi_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS = A_x dS,$$

indicando con dS l'area della faccia e con A_x la componente secondo x di \mathbf{A} valutata nel suo centro. Analogamente, il flusso $d\Phi_2$ attraverso la faccia posteriore ($A'B'C'D'$), anch'essa orientata verso l'esterno (cioè in verso contrario all'asse x) è dato da

$$d\Phi_2 = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{n}_2 dS = -A'_x dS.$$

indicando con A'_x la componente secondo x di \mathbf{A} sulla nuova faccia. Poiché, a meno di infinitesimi di ordine superiore, risulta

$$A'_x = A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x} dx,$$

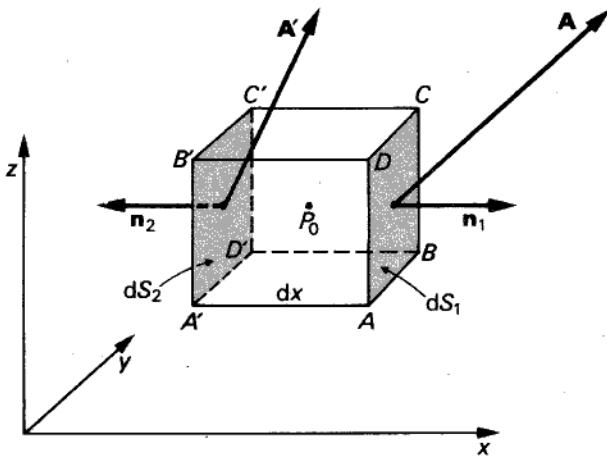


Figura A.25

si ha

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dS = \frac{\partial A_x}{\partial x} dV,$$

indicando con dV il volume del cubetto elementare.

Ragionando analogamente per le altre due coppie di facce, si conclude che il flusso elementare uscente dall'intero cubetto è

$$d\Phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV.$$

Per la [A.14.1'], si scrive

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad .^{21} \quad [\text{A.14.2}]$$

Il seguente teorema, di cui tralasciamo la dimostrazione, consente di ricondurre il calcolo di un integrale di volume a quello di un opportuno integrale di superficie:

Teorema della divergenza (di Gauss-Ostrogradskij) *Sia \mathbf{A} un campo vettoriale definito in una regione spaziale Ω , limitata dalla superficie chiusa Σ (o da un insieme di superfici chiuse Σ_i , con $i=1, 2, \dots, N$); se in ogni punto di Ω è definibile la divergenza di \mathbf{A} , risulta*

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad [\text{A.14.3}]$$

Soffermiamoci ancora sulle proprietà dei campi conservativi per il flusso. Poiché per definizione un tale campo ha flusso nullo attraverso *qualsiasi* superficie chiusa, il teorema della divergenza fornisce

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad [\text{A.14.4}]$$

dove Σ è una *qualsiasi* superficie chiusa e τ è il volume della regione da essa racchiusa. Per l'arbitrarietà di Σ , in ogni punto P di Ω risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad [\text{A.14.5}]$$

Un campo che verifichi tale relazione in ogni punto del suo dominio di definizione è detto *solenoidale*. Condizione *necessaria* affinché un campo sia conservativo per il flusso in un dominio Ω è pertanto che esso verifichi la [A.14.5] in ogni punto di Ω sia cioè solenoidale.

Occorre chiedersi, a questo punto, se la [A.14.5] sia anche *sufficiente* a garantire la proprietà di conservazione del flusso. Si può dimostrare che la risposta è positiva a

²¹ Essendo P_0 , centro del cubetto, un punto qualunque, non lo si è indicato esplicitamente nel simbolo "div".

patto che la regione in cui è definito il campo sia a connessione superficiale semplice.²² In altre parole, se esistono "buchi" nella regione in cui $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, il flusso di \mathbf{A} attraverso una generica superficie chiusa è nullo per tutte le superfici chiuse che non li contengono, ma può essere diverso da zero per superfici chiuse che li contengano (nel seguito, comunque, si tornerà più diffusamente sull'argomento).

Osserviamo infine che l'operatore di divergenza è lineare: detti \mathbf{A} e \mathbf{B} due generici campi vettoriali, risulta cioè

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B}$$

nonché

$$\operatorname{div}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{A},$$

con α costante numerica arbitraria.

A.15 Rotore di un campo vettoriale; teorema di Stokes

Consideriamo un campo vettoriale \mathbf{A} definito in una regione spaziale Ω , e sia P un punto di tale regione. Data una qualsiasi superficie regolare S (aperta) passante per P , sia γ la linea chiusa che ne costituisce l'orlo; consideriamo, inoltre, il rapporto tra la circuitazione di \mathbf{A} estesa a γ e l'area $A(S)$ della superficie:

$$R = \frac{\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl}{A(S)}.$$

Immaginiamo ora di fare contrarre la superficie S attorno al punto P mantenendo fissa la normale \mathbf{n} a S in P , e consideriamo il limite del rapporto R per $A(S)$ che tende a zero, quando S si contrae attorno a P nel modo anzidetto. Se tale limite esiste ed è finito, indipendentemente dalla forma della superficie e del suo orlo γ , poniamo

$$R_n = \lim_{A(S) \rightarrow 0} R \quad [A.15.1]$$

dove il pedice n indica che l'operazione di limite va effettuata facendo contrarre S attorno a P mantenendo fissa la normale \mathbf{n} a S in P . Immaginiamo ora di ripetere le operazioni sopra descritte per una nuova superficie S' , passante per P , ma dotata di normale \mathbf{n}' diversa da \mathbf{n} ; se anche questo nuovo limite esiste ed è finito, indipendentemente dalla forma di S' e γ' , poniamo ancora

$$R_{n'} = \lim_{A(S') \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma'} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl}{A(S')}.$$

²² Ricordiamo che una regione spaziale è a connessione superficiale semplice se una qualunque superficie chiusa contenuta in essa può essere "ridotta" a un punto, senza uscirne.

E' possibile dimostrare che, ammesso che il limite suddetto sia definito per *tutte* le direzioni orientate \mathbf{n} , i relativi valori R_n , al variare di \mathbf{n} , corrispondono alle componenti, secondo le direzioni \mathbf{n} , di un vettore univocamente individuato.²³ Esso prende il nome di *rotore* del campo vettoriale \mathbf{A} nel punto P e si indica con il simbolo²⁴

$$\text{rot}_P \mathbf{A}.$$

Riassumendo, il rotore di \mathbf{A} nel punto P è il vettore la cui componente in una generica direzione orientata \mathbf{n} è data dalla

$$(\text{rot}_P \mathbf{A})_n = \lim_{A(S) \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl}{A(S)}. \quad [\text{A.15.2}]$$

L'operazione di rotore, applicata a un campo vettoriale \mathbf{A} , definisce un nuovo campo vettoriale, indicato con $\text{rot } \mathbf{A}$: per questo motivo, il simbolo "rot" può essere riguardato come l'operatore che, applicato ad \mathbf{A} , lo trasforma nel campo $\text{rot } \mathbf{A}$.

Enunciamo ora, senza darne dimostrazione, un'importante proprietà dei campi vettoriali:

Teorema di Stokes *Sia \mathbf{A} un campo vettoriale definito in una regione spaziale Ω e sia γ una linea chiusa contenuta in Ω ; detta S_γ una qualsiasi superficie (aperta) che abbia la linea chiusa γ quale orlo, se in tutti i punti di S_γ è definibile il rotore di \mathbf{A} , risulta*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_{S_\gamma} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad [\text{A.15.3}]$$

In altre parole, la circuitazione di \mathbf{A} estesa a γ è pari al flusso del campo $\text{rot } \mathbf{A}$ attraverso una qualsiasi delle superfici aventi γ come orlo. Se il campo \mathbf{A} ammette potenziale risulta, comunque si scelga la linea chiusa γ ,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl = 0,$$

e, dal teorema di Stokes,

$$\iint_{S_\gamma} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad [\text{A.15.4}]$$

Per l'arbitrarietà di S_γ , in ogni punto del dominio di definizione del campo risulta

$$\text{rot } \mathbf{A} = 0. \quad [\text{A.15.5}]$$

²³ Più esattamente, se \mathbf{A} ha carattere vettoriale, $\text{rot } \mathbf{A}$ è uno pseudovettore; viceversa, se \mathbf{A} ha carattere pseudovettoriale, $\text{rot } \mathbf{A}$ è un vero e proprio vettore.

²⁴ Nei testi anglosassoni viene spesso indicato come "curl \mathbf{A} ".

I campi che ammettono potenziale hanno dunque rotore nullo in tutti i punti, e pertanto sono anche detti *irrotazionali*. Sono invece *rotazionali* i campi il cui rotore è non nullo in almeno un punto.

Ci si può chiedere se la [A.15.5] sia anche una condizione sufficiente a garantire l'esistenza di un potenziale per il campo \mathbf{A} , cioè se, ammesso che \mathbf{A} verifichi in ogni punto di Ω la [A.15.5], si possa da ciò concludere che \mathbf{A} ammette ivi potenziale. La risposta è positiva, a patto che la regione Ω in cui \mathbf{A} è definito risulti a connessione lineare semplice. In tali condizioni le relazioni

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi$$

risultano tra loro equivalenti.

Si può dimostrare che, dette $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$ le componenti di \mathbf{A} secondo gli assi di un sistema di coordinate cartesiane, le componenti del rotore sono

$$\left\{ \begin{array}{l} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{array} \right. \quad [\text{A.15.6}]$$

La condizione di irrotazionalità [A.15.5], espressa attraverso l'annullamento delle tre componenti cartesiane di $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, coincide dunque con le condizioni [A.11.3] necessarie affinché \mathbf{A} ammetta potenziale. Indicati con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi coordinati, può scriversi formalmente

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \quad [\text{A.15.6}']$$

dove si intende che il "prodotto", ad esempio, tra i simboli $\partial/\partial y$ e A_z dia come risultato il termine $\partial A_z / \partial y$.

Confrontando la [A.15.6'] con l'analogia espressione del prodotto vettoriale, appare chiaro che il rotore ha carattere pseudovettoriale.

Osserviamo infine che il rotore è un operatore lineare: detti \mathbf{A} e \mathbf{B} due generici campi vettoriali, risulta cioè

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

e inoltre

$$\operatorname{rot}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

con α costante numerica arbitraria.

A.16 Il teorema di scomposizione di Helmholtz e il teorema di unicità

Enunciamo ora, senza darne dimostrazione, due importanti teoremi.

Teorema di scomposizione di Helmholtz

Esso si compone di due proposizioni distinte:

- a) *Sia Ω una regione spaziale delimitata da una superficie chiusa e regolare Σ , dotata, in ogni suo punto, di una normale univocamente definita e variabile con continuità sulla superficie stessa. Ogni campo vettoriale \mathbf{A} , definito in Ω , può essere scomposto nella somma di un campo vettoriale solenoidale e di un campo vettoriale irrotazionale. In formule,*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,$$

con

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_1 = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_2 = 0, \quad \text{in ogni punto di } \Omega.$$

- b) *Se di un campo vettoriale \mathbf{A} sono noti il rotore e la divergenza in tutti i punti dell'intero spazio, esso può essere espresso nel modo seguente:*

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \mathbf{U},$$

con

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau_\infty} \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{r} d\tau, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau_\infty} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}}{r} d\tau,$$

purché tali integrali (estesi all'intero spazio) esistano e siano finiti.

Teorema di unicità *Sia \mathbf{A} un campo vettoriale definito in una regione spaziale Ω delimitata da una superficie chiusa e regolare Σ (dotata in ogni punto di normale univocamente definita e variabile con continuità); se sono noti $\operatorname{div} \mathbf{A}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ in ogni punto di Ω e se, inoltre, è assegnata la distribuzione, su tutti i punti di Σ , della componente di \mathbf{A} normale a Σ , \mathbf{A} è univocamente determinato entro Ω .*

A.17 Campi che ammettono potenziale vettore

Affinché un generico campo vettoriale \mathbf{A} sia esprimibile come rotore di un altro campo vettoriale è necessario e sufficiente che esso sia solenoidale, cioè che in ogni punto si abbia

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Che la condizione sia necessaria appare chiaro osservando che, se risulta

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{U},$$

[A.17.1]

si ha anche²⁵

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

La dimostrazione della sufficienza, meno immediata, viene tralasciata.

Ogni campo \mathbf{U} che verifichi la [A.17.1] costituisce un *potenziale vettore* del campo \mathbf{A} .

Detto inoltre Φ un arbitrario campo scalare, si ha, per definizione,

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0.$$

Di conseguenza, se \mathbf{U} è un potenziale vettore di \mathbf{A} , tale è anche ogni altro campo \mathbf{V} del tipo

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \operatorname{grad} \Phi$$

con Φ campo scalare arbitrario. Si ha infatti

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{U} = \mathbf{A}.$$

Nel seguito torneremo in modo più approfondito su questi argomenti.

A.18 L'operatore laplaciano e altri operatori del secondo ordine

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto le nozioni di gradiente di un campo scalare e di divergenza e rotore di un campo vettoriale. Nella formulazione delle leggi e delle proprietà dell'elettromagnetismo si fa però anche uso di alcune loro combinazioni. Per quel che riguarda gli operatori agenti su campi scalari, le uniche combinazioni che hanno senso sono le seguenti:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U$$

e

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U,$$

con U generico campo scalare.

Per le definizioni di $\operatorname{grad} U$ e dell'operazione di rotore, risulta, qualunque sia il campo scalare U considerato,

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0;$$

[A.18.1]

infatti il campo vettoriale $\operatorname{grad} U$, ammettendo potenziale, è irrotazionale.

²⁵ Per la dimostrazione della [A.17.1], vedi la dimostrazione della [A.18.4] nel prossimo paragrafo.

Il secondo operatore, in generale non nullo, è detto *laplaciano* e si indica con²⁶
 $\nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U$. [A.18.2]

Tenendo conto delle espressioni degli operatori “grad” e “div” in coordinate cartesiane, otteniamo, nelle stesse coordinate, l'espressione del laplaciano

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad [\text{A.18.3}]$$

Per quel che riguarda gli operatori del secondo ordine applicati ai campi vettoriali, le combinazioni possibili sono le seguenti:

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A}$,

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$,

$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}$.

Com'è facile dimostrare, risulta in ogni caso

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 \quad [\text{A.18.4}]$$

Ricordando infatti le espressioni, in coordinate cartesiane, delle componenti del rotore e della divergenza di un campo vettoriale, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Gli operatori “rot rot” e “grad div” danno invece, almeno in generale, risultati non nulli. Tramite essi si definisce un tipo di operatore laplaciano applicabile ai campi vettoriali, il cosiddetto *laplaciano vettore* (per distinguerlo dall'altro, il *laplaciano scalare*). Per definizione:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad [\text{A.18.5}]$$

Il significato del laplaciano vettore è completamente diverso da quello dell'operatore [A.18.3], che opera su un campo scalare; se essi vengono indicati con lo stesso simbolo è perché le componenti di $\nabla^2 \mathbf{A}$, in coordinate cartesiane, sono date da

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_x = \nabla^2 A_x, \quad (\nabla^2 \mathbf{A})_y = \nabla^2 A_y, \quad (\nabla^2 \mathbf{A})_z = \nabla^2 A_z, \quad [\text{A.18.6}]$$

cioè coincidono con il laplaciano scalare delle componenti di \mathbf{A} . Tale proprietà non sussiste per sistemi di coordinate diverse da quelle cartesiane.

²⁶ Altri simboli usati per l'operatore “div grad” sono Δ , Δ_2 e, più raramente, Δ^2 .

A.19 L'operatore 'nabla'

In questo paragrafo non introdurremo nuovi operatori, ma presenteremo un metodo efficace per rappresentare, in coordinate cartesiane, quelli già definiti, e operare con essi. A tal fine introduciamo un nuovo operatore differenziale, che indichiamo con il simbolo ∇ (*nabla*), definito formalmente come un vettore:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad [\text{A.19.1}]$$

dove, al solito, i simboli \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} indicano i versori degli assi coordinati. Il simbolo introdotto non ha di per sé alcun significato; ponendo tuttavia

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) U,$$

con U funzione scalare, e operando formalmente come per il prodotto, si ottiene

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \text{grad } U. \quad [\text{A.19.2}]$$

L'operazione formale consistente nel moltiplicare (a sinistra) il simbolo definito dalla [A.19.1] per una funzione scalare U , secondo le regole indicate, definisce dunque un campo vettoriale.

L'operatore nabla può essere utilizzato efficacemente anche per rappresentare altre operazioni. Ad esempio,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k});$$

effettuando formalmente il prodotto scalare termine a termine, si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{A}. \quad [\text{A.19.3}]$$

Analogamente,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k});$$

effettuando formalmente i prodotti vettoriali indicati, si ricava (in coordinate cartesiane) l'espressione del rotore:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad [\text{A.19.4}]$$

Utilizzando l'operatore nabla, molti risultati dell'analisi vettoriale possono essere calcolati formalmente in maniera molto rapida. Ad esempio è immediato dedurre

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

in quanto il vettore $\nabla \times \mathbf{A}$, prodotto vettoriale tra il "vettore" ∇ e il vettore \mathbf{A} , è "normale" a ∇ . In maniera analoga, si verifica subito che

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = \nabla \times \nabla U = 0,$$

poiché il vettore ∇U , prodotto formale di ∇ per lo scalare U , è "parallelo a ∇ ".

Ancora a titolo di esempio si noti che

$$\nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla \cdot \nabla U$$

(il che giustifica l'uso del simbolo ∇^2 per il laplaciano).

Tuttavia tra l'operatore ∇ e un normale vettore non esiste completa analogia. Infatti ∇ può essere trattato come vettore soltanto in operazioni in cui non debba essere applicato a prodotti di campi (scalari o vettoriali). In caso contrario occorre usare regole particolari, che verranno indicate qui di seguito.

Consideriamo, come primo caso, il seguente: sia $U(x, y, z)$ un campo scalare e $\mathbf{A}(x, y, z)$ un campo vettoriale, ambedue riferiti a un sistema di coordinate cartesiane. L'operazione $\operatorname{div}(\mathbf{V}\mathbf{A})$, utilizzando l'operatore ∇ , ha la forma seguente:

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}\mathbf{A}) = \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{A}).$$

Ricordando il carattere differenziale attribuito per definizione all'operatore ∇ , applichiamo formalmente la regola di derivazione del prodotto di due funzioni, facendo operare il ∇ prima su U soltanto (per cui \mathbf{A} potrà essere anteposto a ∇) e poi su \mathbf{A} soltanto (U potrà essere anteposto a ∇):

$$\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla U + U \nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad [\text{A.19.5}]$$

Analogamente, data l'espressione $\operatorname{grad}(UV)$, si ha

$$\nabla(UV) = V \nabla U + U \nabla V = V \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} V. \quad [\text{A.19.6}]$$

Similmente, si ricava

$$\operatorname{rot}(\mathbf{U}\mathbf{A}) = \nabla \times (\mathbf{U}\mathbf{A}) = U \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} U \times \mathbf{A} + \nabla U \times \mathbf{A}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad [\text{A.19.7}]$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B};$$

i simboli del tipo $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ vanno letti nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \left[\left(B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \right] \mathbf{A} = \\ &= B_x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + B_y \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + B_z \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}. \end{aligned} \quad [\text{A.19.8}]$$

A.20 Le espressioni degli operatori vettoriali in diversi sistemi di coordinate ortogonali

Con riferimento ai simboli usati nel paragrafo A.2, riportiamo, senza ricavarle, le espressioni dei principali operatori vettoriali in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche.

Gradiente

Coordinate cartesiane:

$$(\text{grad } U)_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(\text{grad } U)_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$(\text{grad } U)_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Coordinate cilindriche:

$$(\text{grad } U)_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$(\text{grad } U)_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$(\text{grad } U)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Coordinate sferiche:

$$(\text{grad } U)_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$(\text{grad } U)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$(\text{grad } U)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Divergenza

Coordinate cartesiane:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordinate cilindriche:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Coordinate sferiche:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta).$$

Rotore

Coordinate cartesiane:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Coordinate cilindriche:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Coordinate sferiche:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi \sin \theta) \right]$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right].$$

Laplaciano scalare

Coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Coordinate cilindriche:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Coordinate sferiche:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right].$$

A.21 Funzioni armoniche: proprietà fondamentali

Una funzione scalare V , continua insieme con le sue derivate prime e dotata di derivate seconde limitate in un dominio spaziale Ω , si dice *armonica* in Ω se verifica (in ogni punto $P \in \Omega$) l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = \operatorname{div} \operatorname{grad} V = 0. \quad [\text{A.21.1}]$$

In coordinate cartesiane, tale equazione assume la forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad [\text{A.21.2}]$$

Osserviamo, ad esempio, che ogni funzione lineare

$$V(x, y, z) = Ax + By + Cz$$

è armonica in un qualsiasi dominio limitato.

Un secondo esempio di funzione armonica, fisicamente interessante, è costituito dalla funzione

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad [\text{A.21.3}]$$

definita in un qualsiasi dominio che escluda l'origine degli assi coordinati. Si ha infatti

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}.$$

Sostituendo tali espressioni nella [A.21.2], si verifica che la V è armonica in un qualsiasi dominio che escluda l'origine (ove non è definita). Alla stessa conclusione si

giunge più rapidamente utilizzando un sistema di coordinate sferiche. Infatti, essendo

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r,$$

la $V(x, y, z)$ si trasforma nella

$$U(r) = \frac{1}{r}. \quad [\text{A.21.4}]$$

D'altra parte, in coordinate sferiche, l'equazione di Laplace assume la forma (vedi § A.20)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] = 0. \quad [\text{A.21.5}]$$

Sostituendo la [A.21.4] nella [A.21.5], si ottiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) = 0,$$

la quale risulta identicamente soddisfatta.

Enunciamo ora alcune importanti proprietà delle funzioni armoniche.

Teorema della media *Sia V una funzione armonica in un dominio Ω : considerata una qualsiasi superficie sferica Σ contenuta in Ω , la media dei valori che la V assume nei punti di Σ è uguale al valore di V nel centro O della sfera.*

Dimostrazione. Il valore medio $\langle V_{\Sigma} \rangle$ della funzione V sui punti di Σ è, per definizione,

$$\langle V_{\Sigma} \rangle = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\Sigma} V dS,$$

ove r è il raggio della sfera. D'altra parte, assegnati la funzione V e il centro O , il valore medio $\langle V_{\Sigma} \rangle$ può dipendere soltanto da r . Assumendo allora un sistema di coordinate sferiche r, θ, φ con origine in O , e derivando sotto il segno di integrale (attenzione!), si ha

$$\frac{d}{dr} \langle V_{\Sigma} \rangle = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial r} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS, \quad [\text{A.21.6}]$$

dove n è la direzione della normale a Σ , ossia la direzione radiale spiccata da O . Essendo, per definizione,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} V,$$

si ha

$$\frac{d}{dr} \langle V_{\Sigma} \rangle = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\Sigma} \text{grad } V \cdot \mathbf{n} dS.$$

Applicando il teorema della divergenza a questo integrale, otteniamo

$$\frac{d}{dr} \langle V_{\Sigma} \rangle = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{\tau} \text{div grad } V d\tau,$$

dove τ indica il volume di Σ . Ricordando che in ogni punto di Ω

$$\text{div grad } V = 0,$$

si conclude che

$$\frac{d}{dr} \langle V_{\Sigma} \rangle = 0;$$

il valor medio di V sui punti di una superficie sferica Σ centrata in O è cioè indipendente dal raggio. Tale valore non può dunque che coincidere con quello assunto dalla funzione in O (come appare chiaro facendo tendere a zero il raggio di Σ). ■

Una conseguenza immediata del teorema è che anche il valor medio dei valori di V nei punti *interni* a Σ coincide con il valore assunto in O : per dimostrarlo è sufficiente calcolare il valor medio "per gusci sferici" centrati in O .

Un'altra importante conseguenza del teorema del valor medio è il seguente

Teorema del massimo (e del minimo) *Una funzione armonica in un dominio limitato Ω e continua anche sulla frontiera di esso²⁷ non può essere massima (o minima) in alcun punto interno di Ω .*

Dimostrazione. Se V assumesse, per esempio, valore massimo in un punto P_0 interno di Ω (non appartenente, quindi, alla frontiera), esisterebbe un intorno sferico τ di centro P_0 tale che

$$V(P) < V(P_0), \quad \text{per ogni } P \in \tau \text{ e diverso da } P_0.$$

Pertanto il valor medio di V in τ risulterebbe minore di $V(P_0)$, contrariamente a quanto affermato dal teorema della media. Analogamente si ragiona per il minimo.

Una funzione armonica in un dominio Ω assume perciò il massimo e il minimo valore sulla frontiera di esso. ■

La proprietà si estende anche al caso di domini illimitati, a patto di considerare i punti all'infinito come appartenenti alla frontiera del dominio stesso.

²⁷ Spesso, l'ipotesi che la V sia continua in tutti i punti di Ω (compresi quelli di frontiera) è aggiunta direttamente a quelle che definiscono la proprietà di "armonicità" per una funzione.

Una conseguenza importante del teorema del massimo è la seguente:

Se una funzione armonica V assume valore costante V_0 in tutti i punti di una superficie chiusa Σ , essa assume lo stesso valore V_0 in tutti i punti del dominio Ω limitato da Σ (e si riduce, pertanto, alla costante V_0). In particolare, se $V_0 = 0$, la funzione V è nulla in tutto Ω .

Quest'ultima proprietà può essere estesa anche al caso in cui Ω sia illimitato, a patto di fare alcune precisazioni sul comportamento all'infinito della funzione V . In particolare, si può dimostrare la seguente proprietà:

Sia V una funzione armonica in tutto lo spazio. Se V è tale che, comunque si fissi $\epsilon > 0$, sia possibile trovare una superficie sferica Σ abbastanza grande affinché su tutti i suoi punti risulti

$$V < \epsilon,$$

essa è identicamente nulla in tutto lo spazio.

(Per la dimostrazione vedi § 4.3.)

Possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Primo teorema di unicità *Se di una funzione V , armonica in un dominio limitato Ω e ivi continua fin sulla frontiera Σ , si assegnano i valori in tutti i punti di Σ , essa è univocamente determinata in Ω .*

Dimostrazione. Consideriamo due funzioni V_1 e V_2 , entrambe armoniche in Ω e tali da assumere gli stessi valori sulla frontiera Σ di Ω . Posto

$$V = V_1 - V_2,$$

si ha, in ogni punto di Ω ,

$$\nabla^2 V = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0.$$

La V è pertanto anch'essa armonica in Ω e continua fin sulla frontiera Σ . D'altra parte essa si annulla su Σ (poiché V_1 e V_2 , per ipotesi, coincidono su Σ). Di conseguenza si ha ovunque, in Ω ,

$$V = 0$$

e quindi

$$V_1 = V_2. \blacksquare$$

Il primo teorema di unicità si estende ai casi in cui il dominio Ω è costituito dalla

regione spaziale esterna a una superficie chiusa Σ , a patto che, oltre ad assegnare i valori di V sui punti di Σ , si richieda che la V abbia un comportamento regolare all'infinito nel senso precisato in precedenza.

Secondo teorema di unicità *Se di una funzione V , armonica in un dominio limitato Ω e ivi continua fin sulla frontiera Σ , si assegnano i valori della derivata normale $\partial V/\partial n$ sulla frontiera Σ , la V è determinata entro Ω a meno di una costante additiva arbitraria.*

Dimostrazione. Consideriamo l'integrale:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(V \operatorname{grad} V) d\tau.$$

Applicando il teorema della divergenza, si ha

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(V \operatorname{grad} V) d\tau = \iint_{\Sigma} (V \operatorname{grad} V) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} V \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Ricordando poi che

$$\operatorname{div}(V \operatorname{grad} V) = V \nabla^2 V + (\operatorname{grad} V)^2 = (\operatorname{grad} V)^2,$$

e sostituendo nella precedente relazione, si ha

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} V)^2 d\tau = \iint_{\Sigma} V \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad [\text{A.21.7}]$$

Se la derivata normale $\partial V/\partial n$ è nulla su tutti i punti di Σ , l'integrale a secondo membro è nullo, e così pure quello a primo membro. Dovendo risultare, d'altronde, in tutti i punti di Ω

$$(\operatorname{grad} V)^2 \geq 0,$$

dev'essere

$$\operatorname{grad} V = 0$$

e quindi

$$V = \text{cost.}$$

Abbiamo così dimostrato che se la V , armonica in Ω e ivi continua fin sulla frontiera, ha derivata normale nulla in tutti i punti di Σ , essa assume valore costante in tutti i punti di Ω ; nulla possiamo però dire su tale valore.

Date ora due funzioni V_1 e V_2 , entrambe armoniche in Ω e aventi gli stessi valori della derivata normale nei punti di Σ , mostriamo che esse differiscono al più per una

costante. Posto

$$V = V_1 - V_2,$$

si verifica subito che V è armonica in Ω e la sua derivata normale si annulla nei punti di Σ . Infatti

$$\left| \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\Sigma} = \left| \frac{\partial V_1}{\partial n} \right|_{\Sigma} - \left| \frac{\partial V_2}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0.$$

In base alla proprietà prima dimostrata, concludiamo che V si riduce a una costante in Ω . Di qui, l'asserto. ■

Anche il secondo teorema di unicità può essere esteso al caso di un dominio Ω costituito da tutta la regione dello spazio esterna a una superficie chiusa. Per questo, oltre ad assegnare i valori di $\partial V / \partial n$ nei punti di Σ , si richiede che, per ogni $\epsilon > 0$, esista una superficie sferica S tale che su tutti i suoi punti:

$$\left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| < \epsilon.$$

I teoremi di unicità enunciati per le funzioni armoniche assicurano l'unicità della soluzione dei classici problemi di Dirichlet e Neumann (per quest'ultimo a meno di una costante additiva).²⁸ Questi possono essere formulati nel modo seguente:

Problema di Dirichlet interno

Determinare una funzione V , armonica in un dominio limitato Ω e ivi continua fin sulla frontiera Σ , quando siano assegnati i valori di V su Σ .

Problema di Dirichlet esterno

Determinare una funzione V , armonica in un dominio illimitato Ω , costituito dalla regione spaziale esterna a una superficie chiusa Σ , e ivi continua fin sulla frontiera, quando siano assegnati i valori di V su Σ e la V sia regolare all'infinito (quest'ultima condizione significa che, per ogni $\epsilon > 0$, è possibile trovare una superficie sferica di raggio abbastanza grande perché, in tutti i suoi punti, sia $|V| < \epsilon$).

Problema di Neumann interno

Determinare una funzione V , armonica in un dominio limitato Ω e ivi continua fin sulla frontiera Σ , quando siano assegnati i valori della derivata normale $\partial V / \partial n$ su Σ .

Problema di Neumann esterno

Determinare una funzione V , armonica in un dominio illimitato Ω , costituito dalla

²⁸ I teoremi enunciati garantiscono per tali problemi l'unicità, ma non l'esistenza delle soluzioni, che comunque esistono (e sono pertanto uniche) nella quasi totalità dei casi di interesse fisico. I teoremi di esistenza relativi alle funzioni armoniche impongono infatti condizioni poco restrittive.

regione spaziale esterna a una superficie chiusa Σ e ivi continua fin sulla frontiera Σ , quando siano assegnati i valori di $\partial V/\partial n$ su Σ e la V sia regolare all'infinito.

I problemi precedenti possono essere formulati anche quando il dominio presenti frontiera multipla (costituita cioè da un numero finito di superfici chiuse Σ_i).

Osserviamo inoltre che quando la funzione V non dipende da una delle coordinate, ad esempio la z , l'equazione di Laplace assume la forma "piana" cartesiana

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad [A.21.8]$$

e le funzioni V corrispondenti si dicono *armoniche nel piano*.

Tutti i teoremi e le proprietà precedentemente enunciate continuano a valere con opportune modifiche.

Il teorema della media si enuncia ad esempio affermando che *la media dei valori assunti da una funzione armonica (nel piano) V sui punti di una circonferenza γ di centro O coincide col valore di V in O* .

In particolare, si modificano, in questo caso, le condizioni di regolarità all'infinito per la funzione (vedi anche app. F).

Appendice B

B.1 Funzioni periodiche e sinusoidali

Questa appendice costituisce una sorta di sommario dei principali risultati della cosiddetta *analisi di Fourier* e ha il solo scopo di fornire al lettore gli strumenti formali indispensabili per studiare le parti di questo libro che ne fanno uso: non ci preoccuperemo quindi di dimostrare le affermazioni che via via faremo, né di enunciare i teoremi nella loro forma più generale e rigorosa.

Una funzione reale f della variabile reale t è detta *periodica*, se esiste un numero reale T tale che, per ogni t (appartenente al dominio di definizione della f), risulti

$$f(t+T)=f(t);$$

T è il *periodo* della funzione, $\nu=1/T$ è la *frequenza*, $\omega=2\pi\nu=2\pi/T$ è la *pulsazione*.

Nella figura B.1 sono riportati i grafici di due semplici funzioni periodiche.

Una funzione *sinusoidale* è del tipo

$$a(t)=A_M \sin(\omega t + \alpha); \quad [B.1.1]$$

essa è periodica, con periodo T pari a

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

La costante (positiva) A_M è l'*ampiezza* della funzione sinusoidale; ω è la pulsazione; α è la *fase iniziale* (o, più semplicemente, la *fase*).¹ Nella figura B.2 è riportato il grafico di una funzione sinusoidale.

Ovviamente, ricordando che si ha: $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, la [B.1.1] può essere riscritta nella forma equivalente

$$a(t)=A_M \cos(\omega t + \beta),$$

con $\beta=\alpha-\pi/2$.

¹ Spesso si dà il nome di "fase" all'intero argomento $\omega t + \alpha$ della funzione: di qui l'aggettivo "iniziale" per indicare la sola α . Talvolta, inoltre, l'ampiezza A_M è indicata, più semplicemente, con una maiuscola priva di pedice.

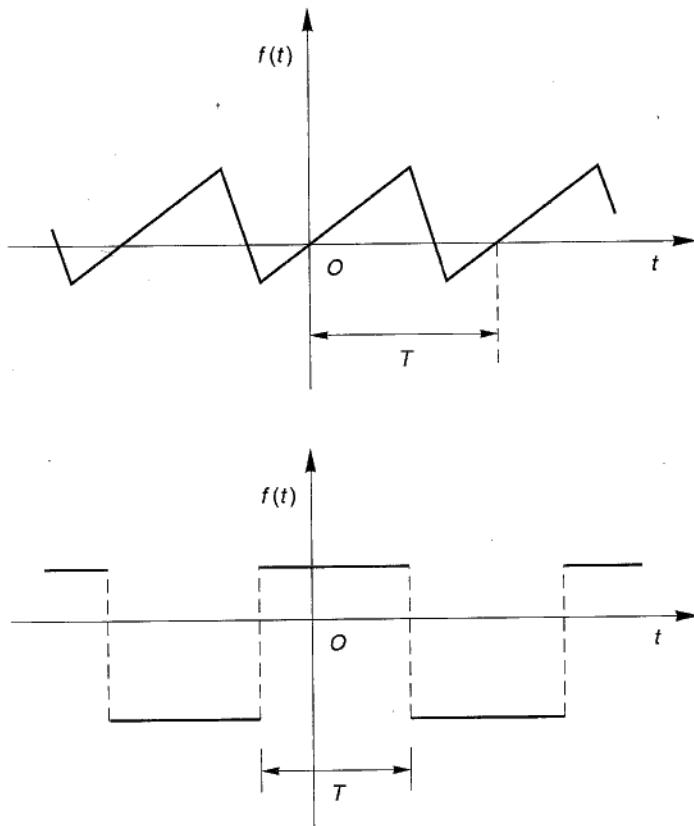


Figura B.1

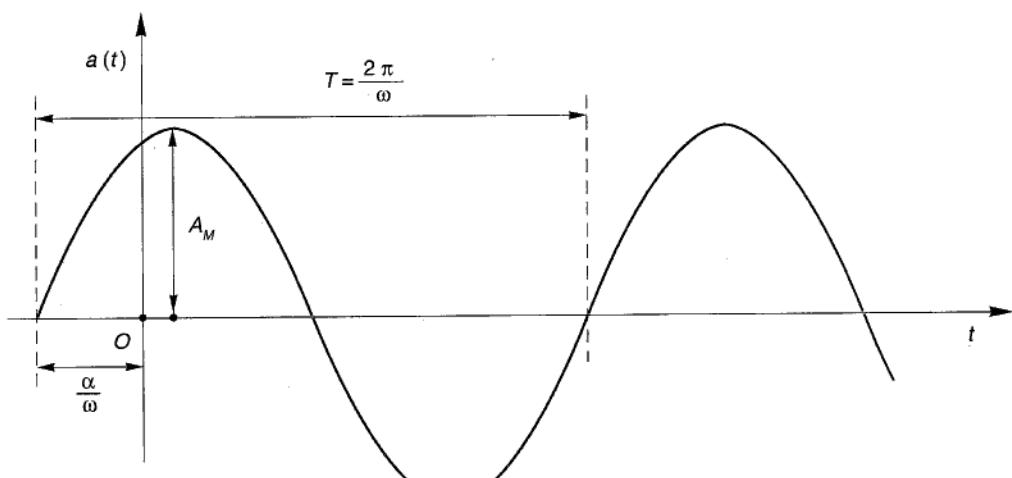


Figura B.2

B.2 Sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica

Teorema B.2.1 Se una funzione $f(t)$, periodica con periodo T , è continua nel periodo insieme con la sua derivata $f'(t)$, fatta eccezione eventualmente per un numero finito di punti in cui la $f(t)$ (o la $f'(t)$) ha discontinuità di prima specie, la $f(t)$ può essere rappresentata dalla seguente serie di Fourier:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\Omega t), \quad n=1, 2, \dots \quad [\text{B.2.1}]$$

con

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad [\text{B.2.2}]$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt, \quad [\text{B.2.3}]$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(n\Omega t) dt, \quad n=1, 2, \dots \quad [\text{B.2.4}]$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(n\Omega t) dt, \quad n=1, 2, \dots \quad [\text{B.2.5}]$$

La serie converge anche nei punti di discontinuità della $f(t)$ e assume ivi un valore pari alla media fra il limite sinistro e quello destro di $f(t)$. Si noti che le condizioni richieste alla $f(t)$ per la sviluppabilità in serie di Fourier sono soltanto *sufficienti*; ad esse si dà talvolta il nome di *condizioni di Dirichlet*. Si osservi inoltre che, negli integrali [B.2.3]÷[B.2.5], gli estremi di integrazione possono essere arbitrariamente modificati, purché differiscano tra loro di T . Il termine di pulsazione Ω è detto *fundamentale*; quelli di pulsazione $2\Omega, 3\Omega, \dots$ sono detti *armoniche*.

Esempio

Si verifica facilmente (lo lasciamo al lettore come esercizio) che la funzione rappresentata nella figura B.3 (detta *onda quadra*) ha il seguente sviluppo in serie di Fourier:

$$a(t) = \frac{4}{\pi} A \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right) = \frac{4}{\pi} A \sum_{n \text{ dispari}} \frac{1}{n} \sin(n\Omega t).$$

(Si calcolino, mediante le [B.2.3]÷[B.2.5], i coefficienti A_n e B_n dello sviluppo in serie.)

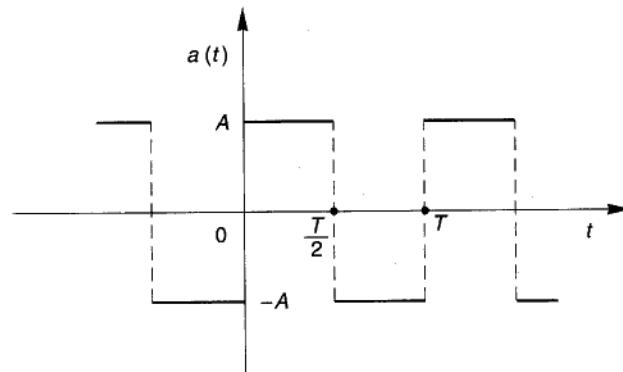


Figura B.3

La serie di Fourier può essere riscritta più concisamente nella forma seguente:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\Omega t - \varphi_n), \quad [B.2.6]$$

con

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad [B.2.7]$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{B_n}{A_n}, \quad n=1, 2, \dots \quad [B.2.8]$$

(Provvi il lettore a dimostrarlo.)

Osserviamo poi, che utilizzando le formule di Eulero,

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2},$$

ciascun termine della serie [B.2.6] può essere riscritto nella forma

$$\begin{aligned} C_n \cos(n\Omega t - \varphi_n) &= C_n \frac{e^{j(n\Omega t - \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega t - \varphi_n)}}{2} = \\ &= \frac{C_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{C_n}{2} e^{+j\varphi_n} e^{-jn\Omega t} = \\ &= \widetilde{F}_n e^{jn\Omega t} + \widetilde{F}_n^* e^{-jn\Omega t}, \end{aligned}$$

avendo indicato con \$\widetilde{F}_n\$ il numero complesso

$$\widetilde{F}_n = \frac{C_n}{2} e^{-j\varphi_n},$$

e con \tilde{F}_n^* il coniugato di \tilde{F}_n . Sostituendo queste espressioni nella [B.2.6], si ottiene la forma esponenziale della serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_n e^{jn\Omega t}, \quad [\text{B.2.9}]$$

avendo posto

$$\tilde{F}_0 = A_0, \quad [\text{B.2.10}]$$

$$\tilde{F}_n = \frac{C_n}{2} e^{-j\varphi_n}, \quad \text{per } n > 0 \quad [\text{B.2.11}]$$

$$\tilde{F}_n = \tilde{F}_{|n|}^*, \quad \text{per } n < 0. \quad [\text{B.2.12}]$$

Si noti che la sommatoria contenuta nella [B.2.9] è estesa da $-\infty$ a $+\infty$, mentre quella della [B.2.6] va da 1 a $+\infty$.

Osserviamo infine che i coefficienti \tilde{F}_n possono essere espressi direttamente (tramite le [B.2.7], [B.2.8]) nella forma

$$\tilde{F}_n = \frac{C_n}{2} e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2} (C_n \cos \varphi_n - j C_n \sin \varphi_n) = \frac{1}{2} (A_n - j B_n),$$

e quindi (mediante le [B.2.4], [B.2.5]) nella forma

$$\tilde{F}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt. \quad [\text{B.2.13}]$$

La [B.2.13] consente di associare ad una data $f(t)$ una successione di numeri complessi \tilde{F}_n , e questa permette a sua volta, tramite la [B.2.9], di "ricostruire" la $f(t)$. La [B.2.13] può dunque essere riguardata come una operazione che trasforma la funzione reale $f(t)$ della variabile continua t in una funzione complessa \tilde{F}_n della variabile discontinua n , mentre la [B.2.9] può essere interpretata come l'operazione inversa.

Ai fini delle applicazioni sono infine molto importanti i seguenti due teoremi (che enunciamo senza dimostrare).

Teorema 2.B.2 Se $f(t)$ è una funzione periodica di periodo T , continua sull'intero asse reale, e dotata in ciascun periodo di derivata prima che soddisfa le condizioni di Dirichlet, la serie di Fourier della $f(t)$ è derivabile termine a termine, e la serie derivata rappresenta lo sviluppo di Fourier della derivata $f'(t)$ della $f(t)$.

Posto, cioè:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\Omega t),$$

si ha

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\Omega A_n) \sin(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (n\Omega B_n) \cos(n\Omega t).$$

Teorema 2.B.3 Se $f(t)$ è una funzione periodica, generalmente continua nel periodo² (con eventuali discontinuità soltanto di prima specie), la serie di Fourier [B.2.1] della $f(t)$ è integrabile termine a termine, e la serie integrale converge uniformemente all'integrale della $f(t)$; si ha cioè

$$\int_{t_0}^t f(t) dt = A_0(t-t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n\Omega} (\sin n\Omega t - \sin n\Omega t_0) + \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\Omega} (\cos n\Omega t - \cos n\Omega t_0),$$

per ogni coppia di valori t_0, t contenuti in un periodo.

B.3 Rappresentazione di una funzione non periodica mediante l'integrale di Fourier

Tutto quanto finora detto a proposito delle funzioni periodiche può essere esteso a quelle *non* periodiche, sostituendo nelle varie espressioni: la variabile continua ω alla variabile discontinua $n\Omega$; il simbolo di integrale a quello di sommatoria; il simbolo “ ∞ ” al posto del simbolo “ T ” negli estremi di integrazione.

Osserviamo che condizione *sufficiente* affinché la suddetta estensione al caso delle funzioni non periodiche sia valida è che la funzione $f(t)$ verifichi le condizioni di Dirichlet in ogni intervallo limitato dell'asse reale e che, unoltre, esista e sia *finito* l'integrale del valore assoluto della $f(t)$ esteso all'intero asse reale (da $-\infty$ a $+\infty$).

Effettuando formalmente le sostituzioni sopra indicate, si ottiene (in luogo della [B.2.1]):

$$f(t) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad [\text{B.3.1}]$$

con

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad [\text{B.3.2}]$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad [\text{B.3.3}]$$

² Una funzione è *generalmente continua* in un intervallo se è ivi dotata di un numero limitato di punti di discontinuità.

(Osserviamo esplicitamente che il termine A_0 è formalmente scomparso nella [B.3.1], e l'integrazione è estesa da zero all'infinito.)

Analogamente, la [B.2.6] diventa

$$f(t) = \int_0^{\infty} C(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega, \quad [B.3.4]$$

con

$$C(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad [B.3.5]$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}; \quad [B.3.6]$$

e, infine, la [B.2.9] diventa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad [B.3.7]$$

con

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad [B.3.8]$$

L'integrale a secondo membro della [B.3.8] consente, quindi, di passare dalla funzione reale $f(t)$ alla funzione complessa $\tilde{F}(\omega)$: questa è detta *trasformata di Fourier* di $f(t)$.

Osserviamo infine che $\tilde{F}(-\omega) = \tilde{F}(\omega)$ e che pertanto la [B.3.7] può essere riscritta nella forma

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \{ \tilde{F}(\omega) e^{j\omega t} \} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\tilde{F}(\omega)| \cos [\omega t + \arg \tilde{F}(\omega)] d\omega, \quad [B.3.7']$$

avendo indicato con il simbolo “ \Re ” la parte reale e con “ \arg ” l’argomento del numero complesso. Confrontando l’ultima espressione con la [B.3.4], si ha subito

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} |\tilde{F}(\omega)| \quad [B.3.9]$$

$$\varphi(\omega) = -\arg \tilde{F}(\omega) \quad [B.3.10]$$

A $C(\omega)$ (oppure a $|\tilde{F}(\omega)|$) si dà il nome di *spettro di ampiezza* della $f(t)$; a $\varphi(\omega)$, quello di *spettro di fase*.

Esempio 1

La funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{per } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

(vedi fig. B.4), ha per trasformata di Fourier la funzione:

$$\tilde{F}(\omega) = F(\omega) = \tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}},$$

il cui grafico è riportato nella figura B.4.

Esempio 2

La funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\tau}|t|, & \text{per } |t| < \tau \\ 0, & \text{per } |t| > \tau \end{cases}$$

(vedi fig. B.5) ha come trasformata di Fourier la funzione

$$\tilde{F}(\omega) = F(\omega) = \tau \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right)^2.$$

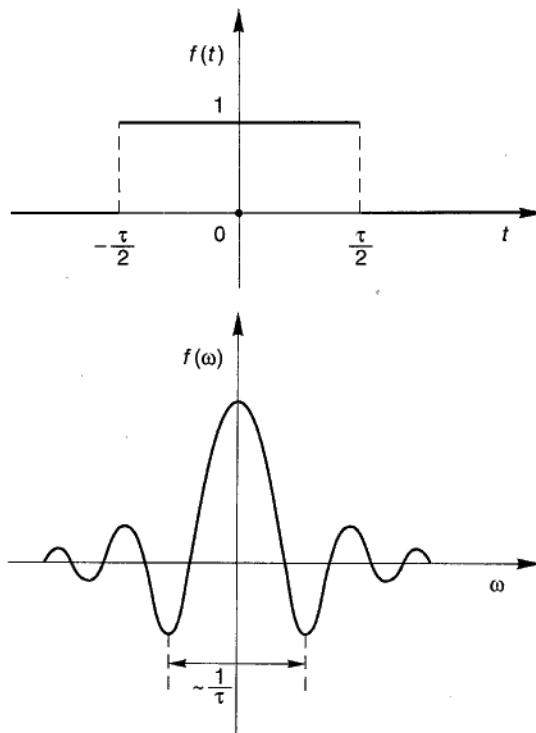


Figura B.4

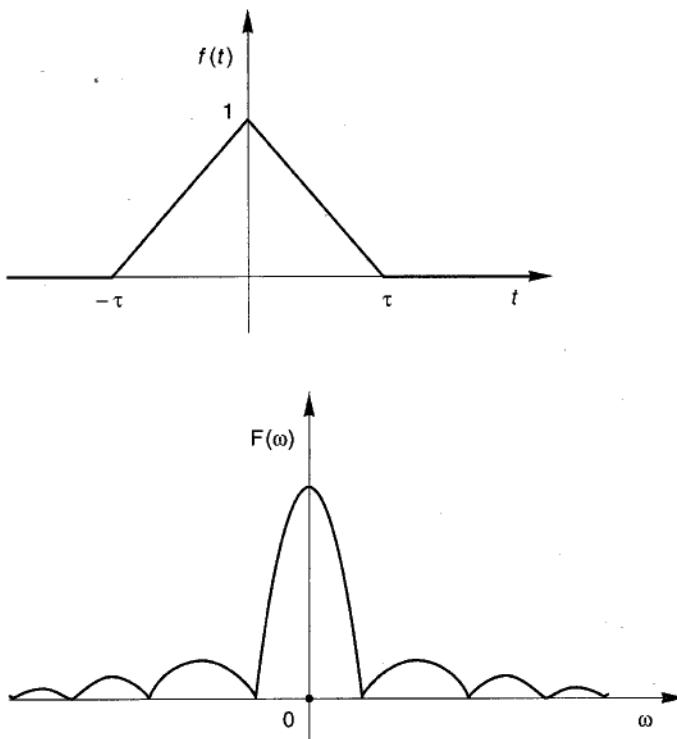


Figura B.5

B.4 Proprietà e applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier

Le proprietà che enunceremo con riferimento all'integrale di Fourier (e alla trasformata omonima) di una funzione aperiodica valgono, naturalmente, anche per la serie di Fourier di una funzione periodica.

Linearità. Se $\tilde{A}(\omega)$ e $\tilde{B}(\omega)$ sono rispettivamente le trasformate di Fourier di $a(t)$ e $b(t)$, la funzione $\tilde{C}(\omega) = \tilde{A}(\omega) + \tilde{B}(\omega)$ è la trasformata di $c(t) = a(t) + b(t)$; inoltre, se M è un numero reale, e $\tilde{A}(\omega)$ è la trasformata di $a(t)$, la funzione $\tilde{F}(\omega) = M\tilde{A}(\omega)$ è la trasformata di $f(t) = Ma(t)$.

Ne deriva che ogni combinazione lineare di funzioni ammette come trasformata la stessa combinazione lineare delle singole trasformate.

Trasformazione della derivata. Se $\tilde{F}(\omega)$ è la trasformata di $f(t)$, e se $f(t)$ è derivabile per ogni t , la trasformata $\tilde{G}(\omega)$ di $f'(t)$ è data da

$$\tilde{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \tilde{F}(\omega). \quad [\text{B.4.1}]$$

In altre parole: per ottenere la trasformata della derivata $f'(t)$ di una funzione $f(t)$, è sufficiente moltiplicare per $j\omega$ la trasformata della $f(t)$. Se la $f(t)$ non è derivabile per $t=t_0$, si ha, invece

$$\tilde{G}(\omega) = j\omega \tilde{F}(\omega) - [f(t_0^+) - f(t_0^-)] e^{-j\omega t_0}, \quad [\text{B.4.2}]$$

avendo indicato con $f(t_0^+)$ e $f(t_0^-)$ i limiti destro e sinistro di $f(t)$ (supposti esistenti) per t tendente a t_0 . Il risultato [B.4.2] si estende al caso di un numero arbitrario di punti di discontinuità di prima specie.

La soluzione di molti importanti problemi di analisi può essere facilitata dalla applicazione delle nozioni fin qui esposte: a titolo di esempio, cominciamo con lo studio di una semplice equazione differenziale (del primo ordine):

$$A \frac{dy}{dt} + By(t) = x(t), \quad [\text{B.4.3}]$$

con A e B coefficienti reali costanti, e sia $x(t)$ una funzione *periodica* nota; cerchiamo (se esiste) una soluzione particolare della [B.4.3] che sia anch'essa periodica.³

Ammettiamo che la $x(t)$ sia sviluppabile in serie di Fourier:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(n\Omega t - \varphi_n), \quad [\text{B.4.4}]$$

e immaginiamo di aver calcolato (utilizzando le [B.2.7], [B.2.8]) tutti i coefficienti X_n e φ_n che figurano in tale sviluppo. Ci proponiamo ora (problema più semplice di quello di partenza) di ricercare la soluzione *periodica* della [B.4.3] quando la $x(t)$ si riduca a *uno* soltanto dei termini dello sviluppo [B.4.4].

Sia

$$x_k(t) = X_k \cos(k\Omega t - \varphi_k),$$

con k , X_k e φ_k noti. La [B.4.3] diventa, allora

$$A \frac{dy}{dt} + By = X_k \cos(k\Omega t - \varphi_k). \quad [\text{B.4.5}]$$

La soluzione periodica di questa equazione è anch'essa sinusoidale, di pulsazione $k\Omega$ (come la $x_k(t)$) ed è data da

$$y_k(t) = \frac{X_k}{\sqrt{B^2 + k^2 \Omega^2 A^2}} \cos\left(k\Omega t - \varphi_k - \arctg \frac{k\Omega A}{B}\right) \quad [\text{B.4.6}]$$

³ Osserviamo esplicitamente che questo problema non è quello tipico per le equazioni differenziali ordinarie (problema di Cauchy), poiché non si va alla ricerca della soluzione particolare che verifichi assegnate condizioni iniziali: esso è però molto importante nella tecnica.

(per il momento, il lettore si limiti a verificare che la $y_k(t)$ soddisfa la [B.4.5]; più avanti, descriveremo un metodo, detto “simbolico”, che consente di determinare la soluzione sinusoidale di ogni equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti e termine noto sinusoidale, con estrema facilità).

Ci si rende conto facilmente, a questo punto, che la [B.4.6] fornisce la soluzione cercata per *ciascuno* dei termini dello sviluppo in serie di Fourier della $x(t)$, per ogni $k \neq 0$. La soluzione corrispondente a x_0 può, d'altra parte, essere assunta costante (come x_0) e pari a

$$Y_0 = \frac{X_0}{B}.$$

A questo punto, ponendo, per $k \neq 0$,

$$Y_k = \frac{X_k}{\sqrt{B^2 + k^2 \Omega^2 A^2}},$$

$$\psi_k = \varphi_k + \arctg \frac{K \Omega A}{B},$$

costruiamo formalmente la serie

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_k \cos(k \Omega t - \psi_k). \quad [\text{B.4.7}]$$

Dalla linearità della [B.4.3] discende che, essendo, ciascun termine della serie [B.4.7], soluzione della stessa [B.4.3], anche la somma della serie (ammesso che questa converga) è soluzione. Ci si convince agevolmente, infine, che la $y(t)$ è periodica (con lo stesso periodo della $x(t)$) e che la [B.4.7] ne fornisce lo sviluppo in serie di Fourier.

In conclusione, il calcolo della soluzione periodica di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, con termine noto periodico arbitrario, è stato ricondotto a quello della soluzione sinusoidale della stessa equazione con termine noto sinusoidale.

Naturalmente, questo stesso metodo si estende immediatamente al caso di un *sistema* di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, con termini noti periodici.

In maniera analoga può essere trattato un secondo tipo di problema, che può essere enunciato come segue: considerata ancora l'equazione [B.4.3], con un termine noto $x(t)$ *non* periodico, e identicamente nullo prima di un certo istante (che indicheremo con $t=0$), ricercarne la soluzione particolare definita per $t \geq 0$ tale che $y(0)=0$.

Ammesso che la $x(t)$ sia rappresentabile secondo Fourier, sia

$$\widetilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

la sua trasformata; ammettendo ora che anche la soluzione cercata, $y(t)$, sia rappresentabile secondo Fourier (oltreché nulla per $t < 0$) indichiamo con $\tilde{Y}(\omega)$ la sua trasformata. Dovendo entrambi i membri della [B.4.3] rappresentare due funzioni del tempo che coincidono per ogni $t \geq 0$, anche le loro trasformate debbono essere uguali; ricordando, poi, le proprietà di linearità e di derivabilità della trasformata di Fourier e osservando che, per ipotesi, la $y(t)$ è continua per $t = 0$, si ha

$$Aj\omega \tilde{Y}(\omega) + B\tilde{Y}(\omega) = \tilde{X}(\omega), \quad [\text{B.4.8}]$$

e quindi

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{\tilde{X}(\omega)}{B + j\omega A}. \quad [\text{B.4.9}]$$

Una volta calcolata la $\tilde{Y}(\omega)$, si risale alla $y(t)$ mediante la [B.3.7] (o la [B.3.7']).

Appendice C

C.1 Il metodo simbolico

In questo paragrafo descriveremo un metodo di calcolo, solitamente detto *simbolico*, molto utile nello studio dei circuiti elettrici. Esso consente di trattare in modo semplice le funzioni sinusoidali del tempo di pulsazione assegnata.

Cominciamo con l'osservare che ogni funzione sinusoidale

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

può essere scritta, ricordando le formule di Eulero, nella forma

$$\begin{aligned} a(t) &= \Re \{A_M \cos(\omega t + \alpha) + j A_M \sin(\omega t + \alpha)\} = \\ &= \Re \{A_M e^{j(\omega t + \alpha)}\} = \Re \{\tilde{A}_M e^{j\omega t}\}, \end{aligned} \quad [C.1.1]$$

avendo posto $\tilde{A}_M(\alpha) = A_M e^{j\alpha}$, e avendo indicato con il simbolo $\Re \{ \dots \}$ l'operazione che corrisponde al prendere la sola parte reale dell'espressione complessa contenuta nelle parentesi.

In ultima analisi, il metodo simbolico consiste semplicemente nel sostituire al posto di ogni funzione sinusoidale $a(t)$, negli sviluppi analitici in cui essa figuri, la funzione *complessa* della variabile reale t :

$$\tilde{A}(t) = A_M e^{j(\omega t + \alpha)} = \tilde{A}_M e^{j\omega t}; \quad [C.1.2]$$

una volta sviluppati i calcoli con queste funzioni complesse, e ottenuto il risultato finale (complesso), è sufficiente, per riottenere la funzione reale che costituisce il risultato finale dell'elaborazione, prendere, conformemente alla [C.1.1], la sola parte reale del risultato complesso. Occorre premettere che il metodo simbolico può essere vantaggiosamente applicato soltanto quando i calcoli consistano esclusivamente in:

- combinazioni lineari di funzioni sinusoidali con la stessa pulsazione,
- derivazioni (o integrazioni) in funzioni sinusoidali.

Il metodo è invece inutilizzabile (come sarà mostrato più avanti in questa stessa appendice), quando si abbia a che fare con prodotti di funzioni sinusoidali. Esso perde inoltre parte della sua utilità se applicato a funzioni sinusoidali di pulsazioni diverse tra loro.

Per giustificare il metodo descritto, cominciamo con l'osservare quanto segue: detto \mathcal{A} l'insieme delle funzioni sinusoidali $a(t)$ di pulsazione ω assegnata e \mathcal{B} l'insieme delle funzioni complesse $\tilde{A}(t)$ date dalla [C.1.2], il metodo simbolico stabilisce una corrispondenza f che associa, mediante la [C.1.1] ad ogni elemento $a(t) \in \mathcal{A}$, l'elemento $\tilde{A}(t) \in \mathcal{B}$, la cui parte reale coincide con $a(t)$.

La corrispondenza f così definita è *biunivoca*, poiché a ciascun $a \in \mathcal{A}$ corrisponde un unico $\tilde{A} \in \mathcal{B}$ e ciascun $\tilde{A} \in \mathcal{B}$ è il corrispondente di un unico $a \in \mathcal{A}$.

Essa conserva inoltre le operazioni di somma e prodotto per una costante. Consideriamo infatti due elementi a, b appartenenti all'insieme \mathcal{A} , cioè due funzioni sinusoidali

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha),$$

$$b(t) = B_M \sin(\omega t + \beta),$$

ed effettuiamone la somma:

$$c(t) = a(t) + b(t).$$

Anche $c(t)$ è una funzione sinusoidale di pulsazione ω , e può essere scritta nella forma

$$c(t) = C_M \sin(\omega t + \gamma),$$

con

$$C_M^2 = A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(\alpha - \beta), \quad [\text{C.1.3}]$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A_M \sin \alpha + B_M \sin \beta}{A_M \cos \alpha + B_M \cos \beta}. \quad [\text{C.1.4}]$$

Consideriamo poi i due elementi \tilde{A} e \tilde{B} corrispondenti (secondo f) ad a e b ,

$$\tilde{A}(t) = A_M e^{j(\omega t + \alpha)} \xrightleftharpoons{f} a(t)$$

$$\tilde{B}(t) = B_M e^{j(\omega t + \beta)} \xrightleftharpoons{f} b(t)$$

ed effettuiamone la somma:

$$\tilde{C}(t) = \tilde{A}(t) + \tilde{B}(t).$$

E' facile verificare che essa può essere posta nella forma

$$\tilde{C}(t) = C_M e^{j(\omega t + \gamma)}, \quad [\text{C.1.5}]$$

dove C_M e γ hanno i valori dati dalle [C.1.3], [C.1.4], cioè che la funzione corrispon-

dente (secondo f) alla somma di due funzioni di \mathcal{A} è pari alla somma (effettuata ovviamente in \mathcal{B}) delle due funzioni corrispondenti. In simboli:

$$c(t) = a(t) + b(t) \xrightarrow{f} \tilde{C}(t) = \tilde{A}(t) + \tilde{B}(t). \quad [\text{C.1.6}]$$

Essendo infatti, per definizione,

$$e^{u+jv} = e^u (\cos v + j \sin v),$$

si ha

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) + \tilde{B}(t) &= (A_M e^{j\alpha} + B_M e^{j\beta}) e^{j\omega t} = \\ &= [(A_M \cos \alpha + B_M \cos \beta) + j(A_M \sin \alpha + B_M \sin \beta)] e^{j\omega t} = C_M e^{j(\omega t + \gamma)}, \end{aligned}$$

con

$$C_M = [(A_M \cos \alpha + B_M \cos \beta)^2 + (A_M \sin \alpha + B_M \sin \beta)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma = \arctg \frac{A_M \sin \alpha + B_M \sin \beta}{A_M \cos \alpha + B_M \cos \beta},$$

che coincidono con le [C.1.3] e [C.1.4].

Anche l'operazione di prodotto di una funzione sinusoidale per una costante è conservata. Detta infatti α una costante arbitraria, e considerata la funzione

$$c(t) = \alpha a(t), \quad [\text{C.1.7}]$$

si ha anche

$$\tilde{C}(t) = \alpha \tilde{A}(t). \quad [\text{C.1.8}]$$

Mostriamo infine che si conserva l'operazione di derivazione. Detta $a(t)$ una generica funzione sinusoidale di pulsazione ω , si ha

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} [A_M \cos(\omega t + \alpha)] = -\omega A_M \sin(\omega t + \alpha) = \\ &= \omega A_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad [\text{C.1.9}]$$

Deriviamo rispetto a t la funzione $\tilde{A}(t)$, corrispondente di $a(t)$:

$$\dot{\tilde{A}}(t) = \frac{d\tilde{A}}{dt} = \frac{d}{dt} [A_M e^{j(\omega t + \alpha)}] = j\omega A_M e^{j(\omega t + \alpha)} = j\omega \tilde{A}(t).$$

Essendo

$$j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}},$$

si ha

$$\dot{\tilde{A}}(t) = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} \tilde{A}(t) = \omega A_M e^{j(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})}. \quad [\text{C.1.10}]$$

La funzione $d\tilde{A}(t)/dt$ è dunque la corrispondente, secondo f , della funzione $da(t)/dt$; di qui, l'asserto. In simboli, risulta:

$$\frac{d}{dt}[a(t)] \xrightarrow{f} j\omega \tilde{A}(t).$$

Per calcolare la derivata della funzione $\tilde{A}(t)$ è dunque sufficiente moltiplicare tale funzione per il fattore costante $j\omega$.

Per sottolineare la semplificazione formale introdotta dal metodo simbolico, osserviamo che un'equazione del tipo

$$\tilde{A}(t) = \tilde{B}(t)$$

può essere riscritta, eliminando il termine $e^{j\omega t}$ sia a primo che a secondo membro, nella forma

$$A_M e^{j\alpha} = B_M e^{j\beta}.$$

Con ciò, la corrispondenza f si è ulteriormente semplificata, in quanto alla generica funzione sinusoidale

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha),$$

è ora associato il numero complesso

$$\tilde{A} = A_M e^{j\alpha} = A_M (\cos \alpha + j \sin \alpha).$$

La variabile temporale t è così completamente eliminata dagli sviluppi formali.

Mostriamo ora, a titolo di esempio, come sia possibile ricavare la [B.4.6] dell'appendice B, in maniera immediata, facendo uso del metodo simbolico.

La rappresentazione simbolica della funzione $x_k(t)$ che figura a secondo membro della [B.4.5] è

$$\tilde{X}_k(t) = X_k e^{j(k\Omega t - \varphi_k)} = X_k e^{-j\varphi_k} e^{jk\Omega t},$$

indicando con

$$\tilde{Y}_k(t) = Y_k e^{j(k\Omega t - \psi_k)}$$

la rappresentazione simbolica della cercata soluzione sinusoidale (naturalmente Y_k e ψ_k sono al momento incogniti), e sostituendo tali espressioni nella [B.4.5], si ottiene formalmente

$$\begin{array}{c} A \frac{d}{dt} y(t) + By = x_k(t) \\ \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \\ Ajk\Omega \tilde{Y}_k(t) + B\tilde{Y}_k(t) = \tilde{X}_k(t); \end{array}$$

e ancora:

$$\tilde{Y}_k(t) = \frac{\tilde{X}_k(t)}{B + jk\Omega A}$$

[C.1.11]

e, infine:

$$Y_k e^{j(k\Omega t)} e^{-j\psi_k} = \frac{1}{B + jk\Omega A} X_k e^{j(k\Omega t)} e^{-j\varphi_k}.$$

La soluzione cercata $y_k(t)$ è data quindi da

$$y_k(t) = Y_k \cos(k\Omega t - \psi_k),$$

con

$$Y_k = \frac{X_k}{\sqrt{B^2 + k^2 \Omega^2 A^2}}$$

$$\psi_k = \varphi_k + \operatorname{arctg} \left(\frac{k\Omega A}{B} \right).$$

La [C.1.11] ha la stessa forma della [B.4.9] (a parte la ovvia differenza tra i simboli ω e $k\Omega$ usati per le pulsazioni, nei due casi); tuttavia tra le due equazioni esiste una fondamentale differenza: nella [C.1.11], la funzione incognita è la $Y_k(t)$ e la pulsazione $k\Omega$ è un numero reale assegnato, mentre, nella [B.4.9], l'incognita è la $\tilde{Y}(\omega)$ e la ω è una variabile indipendente. E', comunque, vero che le due equazioni si scrivono, formalmente, allo stesso modo e pertanto l'uso del metodo simbolico in regime sinusoidale fornisce anche le equazioni in termini di trasformate di Fourier.

Prima di concludere questa appendice, è utile fare ancora alcune osservazioni circa l'uso del metodo simbolico in relazione al prodotto di funzioni sinusoidali di uguale pulsazione.

Date due funzioni sinusoidali del tipo:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

$$b(t) = B_M \cos(\omega t + \beta),$$

il loro prodotto

$$c(t) = a(t) \cdot b(t) = \frac{A_M B_M}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{A_M B_M}{2} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \quad [\text{C.1.12}]$$

non è sinusoidale, in quanto è somma di un termine sinusoidale (di pulsazione doppia rispetto a ω) e di un termine *costante* (che dipende dallo sfasamento $\alpha - \beta$). Quest'ultimo termine è pari al valor medio nel periodo (o in un multiplo del periodo) della funzione prodotto $c(t)$: si ha infatti (indicando con le parentesi angolate il valor medio)

$$\langle c(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T c(t) dt = \frac{A_M B_M}{2} \cos(\alpha - \beta), \quad [\text{C.1.13}]$$

poiché l'integrale contenente il termine di pulsazione 2ω è nullo, essendo esteso al periodo T .

Osserviamo, inoltre, che anche il valor medio in un intervallo di tempo T' che non sia multiplo di T è ancora dato dalla [C.1.13], purché sia $T' \gg T$. Si ha infatti

$$\frac{1}{T'} \int_0^{T'} c(t) dt = \frac{1}{nT + (T' - nT)} \left[\int_0^{nT} c(t) dt + \int_{nT}^{T'} c(t) dt \right],$$

avendo indicato con nT il multiplo di T immediatamente inferiore a T' . Il primo integrale, in base alla [C.1.13], è pari a

$$nT \frac{A_M B_M}{2} \cos(\alpha - \beta),$$

e quindi cresce al crescere di n ; il secondo, invece, è indipendente da n , poiché è esteso a una frazione di un solo periodo e può quindi, al più, raggiungere il valore

$$T \frac{A_M B_M}{2} \cos(\alpha - \beta).$$

Se ne conclude per, per $n \gg 1$, esso è certamente trascurabile rispetto al primo. Essendo inoltre

$$T' - nT \ll nT,$$

se ne conclude:

$$\frac{1}{T'} \int_0^{T'} c(t) dt \approx \frac{1}{nT} \int_0^{nT} c(t) dt = \frac{A_M B_M}{2} \cos(\alpha - \beta).$$

Tornando ora al metodo simbolico, ci si convince subito che esso non è utilizzabile per rappresentare il prodotto di due funzioni $a(t)b(t)$. Infatti, moltiplicando le funzioni complesse corrispondenti si otterrebbe

$$\widetilde{A}(t)\widetilde{B}(t) = \widetilde{A}_M e^{j\omega t} \widetilde{B}_M e^{j\omega t} = \widetilde{A}_M \widetilde{B}_M e^{j2\omega t} = A_M B_M e^{j(2\omega t + \alpha + \beta)},$$

cui corrisponde, nel dominio del tempo, la funzione

$$A_M B_M \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

che non coincide, evidentemente, con la [C.1.12].

Ciò nonostante, l'uso delle funzioni complesse può riuscire comodo quando si oservi quanto segue: detta $\widetilde{B}^*(t)$ la funzione complessa coniugata di $\widetilde{B}(t)$, si ha

$$\widetilde{B}^*(t) = B_M e^{-j(\omega t + \beta)},$$

e quindi

$$\widetilde{A}(t)\widetilde{B}^*(t) = A_M B_M e^{j(\alpha - \beta)} = \widetilde{A}\widetilde{B}^*,$$

avendo posto

$$\widetilde{A} = A_M e^{j\alpha}, \quad \widetilde{B} = B_M e^{j\beta}.$$

Ne deriva

$$\langle c(t) \rangle = \frac{A_M B_M}{2} \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \Re \{ \widetilde{A}(t) \widetilde{B}^*(t) \} = \frac{1}{2} \Re \{ \widetilde{A} \widetilde{B}^* \}. \quad [\text{C.1.14}]$$

In conclusione, anche se il prodotto di due funzioni sinusoidali *non* è rappresentabile in notazione simbolica, il suo *valor medio lo è* (mediante la [C.1.14]).

Appendice D

D.1 Il potenziale elettrostatico nei punti occupati da distribuzioni continue di cariche

Prima di esaminare in dettaglio il comportamento del potenziale nelle regioni occupate da distribuzioni continue di cariche, premettiamo alcune nozioni elementari sugli integrali multipli *impropri*, estesi a regioni limitate.

Consideriamo una funzione $f(x, y, z)$, definita in un dominio limitato Ω dello spazio tridimensionale; e supponiamo che essa sia illimitata in *ogni intorno* di un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ appartenente a Ω (compresa, eventualmente la sua frontiera). Supponiamo inoltre che $f(x, y, z)$ sia limitata e integrabile in ogni dominio $\Omega - \omega_\delta$, avendo indicato con ω_δ un qualsiasi dominio contenuto in Ω e contenente il punto P_0 e con $\Omega - \omega_\delta$ la parte restante di Ω .¹ Si definisce *integrale improprio* della $f(x, y, z)$ in Ω il limite

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iiint_{\Omega - \omega_\delta} f(x, y, z) dx dy dz, \quad [D.1.1]$$

Se questo limite esiste, finito, ed è indipendente dal modo in cui il dominio ω_δ si contrae attorno al punto P_0 , l'integrale improprio [D.1.1] si dice *convergente*, altrimenti si dice *divergente*.

Vi sono casi in cui il limite indicato nella [D.1.1] non esiste in generale, ma esiste ed è finito quando si considerino domini ω_δ costituiti da sfere concentriche al punto P_0 . In questo caso il limite prende il nome di *valore principale* (secondo Cauchy) dell'integrale improprio [D.1.1].

Quando la funzione $f(x, y, z)$ assume valori ≥ 0 in tutti i punti del dominio Ω , vale per essa il seguente teorema (omettiamo la dimostrazione):

¹ Il pedice “ δ ” si riferisce al diametro del dominio ω_δ .

Teorema Considerata una successione arbitraria Σ_n di sfere (di diametri δ_n via via decrescenti) con centro nel punto P_0 , condizione necessaria e sufficiente affinché l'integrale improprio [D.1.1] sia convergente è che la successione

$$\iiint_{\Omega - \Sigma_1} f(x, y, z) dx dy dz, \quad \iiint_{\Omega - \Sigma_2} f(x, y, z) dx dy dz \dots, \quad \iiint_{\Omega - \Sigma_n} f(x, y, z) dx dy dz$$

risulti limitata.

Consideriamo in particolare la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{c}{r^\alpha}, \quad \text{con } c > 0, \quad r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2},$$

e α arbitrario. Dimostriamo che l'integrale improprio

$$\iiint_{\Omega} \frac{c}{r^\alpha} dx dy dz,$$

esteso a una sfera Ω di raggio R e centrata nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, è convergente per $\alpha < 3$, divergente per $\alpha \geq 3$. A tal fine, consideriamo una successione di sfere Σ_n contenute in Ω , centrate in P_0 e aventi diametri δ_n decrescenti con n . Consideriamo quindi l'integrale

$$\iiint_{\Omega - \Sigma_n} \frac{c}{r^\alpha} dx dy dz \quad [\text{D.1.2}]$$

Scegliendo un sistema di coordinate sferiche r, θ, φ centrato in P_0 , si ha

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega - \Sigma_n} \frac{c}{r^\alpha} dx dy dz &= \iiint_{\Omega - \Sigma_n} \frac{c}{r^\alpha} r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{\delta_n}^R \frac{c}{r^\alpha} r^2 dr = \\ &= \begin{cases} \frac{4\pi c}{3-\alpha} [R^{(3-\alpha)} - \delta_n^{(3-\alpha)}], & \text{per } \alpha \neq 3. \\ 4\pi c \ln \frac{R}{\delta_n}, & \text{per } \alpha = 3. \end{cases} \quad [\text{D.1.3}] \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si vede che la successione degli integrali [D.1.3] è limitata per $\alpha < 3$ e illimitata per $\alpha \geq 3$. Di qui, l'asserto.

Ciò premesso, è semplice dimostrare che il potenziale elettrostatico V (vedi [3.2.7]) è definito e continuo in tutti i punti interni a una generica distribuzione di volume di cariche. Infatti, indicato con ρ_0 il valore massimo assunto dalla densità di carica ρ nel

dominio τ in cui essa è definita, si ha

$$\frac{\rho(Q)}{r} = \frac{\rho(x_Q, y_Q, z_Q)}{[(x-x_Q)^2 + (y-y_Q)^2 + (z-z_Q)^2]^{1/2}} \leq$$

$$\leq \frac{\rho_0}{[(x-x_Q)^2 + (y-y_Q)^2 + (z-z_Q)^2]^{1/2}}.$$

Risulta dunque

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(Q)}{r} d\tau \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho_0}{[(x-x_Q)^2 + (y-y_Q)^2 + (z-z_Q)^2]^{1/2}} dx dy dz. \quad [D.1.4]$$

Quest'ultimo integrale improprio è senz'altro convergente, poiché è del tipo [D.1.2], con $\alpha=1$. Di qui, discende subito la convergenza dell'integrale al primo membro della [D.1.4] e quindi del potenziale V , anche nei punti occupati da distribuzioni di volume di carica. ■

In maniera analoga si dimostra che *il potenziale è definito e continuo anche nei punti occupati da distribuzioni superficiali di cariche.*

Appendice E

E.1 La funzione impulsiva

Nel capitolo 2 si è visto che una distribuzione di carica di volume può essere descritta da un'opportuna funzione, la “densità di carica di volume” ρ , variabile in genere da punto a punto, la quale fornisce il valore della carica presente per unità di volume in ciascun punto del volume considerato. In maniera analoga, le distribuzioni superficiali e lineari possono essere descritte a mezzo di funzioni opportune, le densità superficiali σ e lineari γ . Ci chiediamo ora se non sia possibile descrivere anche le cariche concentrate (*cariche puntiformi*) a mezzo di opportune funzioni “densità”. Il procedimento più ovvio sembrerebbe il seguente: partiamo da una assegnata distribuzione di carica di volume, ad esempio quella (uniforme) di una sfera Σ di raggio a , e immaginiamo, riducendo a , di “comprimere” uniformemente la carica totale Q contenuta in Σ fino a ridurre l’intera distribuzione a un punto. In tal modo, otterremo, ad ogni stadio del processo di compressione, una funzione densità del tipo schematizzato nella figura E.1: tale funzione è nulla in tutti i punti esterni a Σ , di valore costante pari a

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi a^3}$$

nei punti interni. Durante la compressione, la forma della funzione ρ si modifica, poiché la regione nella quale essa è nulla si estende progressivamente, mentre cresce, in corrispondenza, il suo valore nei punti interni alla sfera, dovendo restare inalterato il valore totale Q . Alla fine del processo di compressione la funzione “densità” cessa però di avere un chiaro significato matematico: infatti essa è ovunque nulla, per definizione, tranne che in un punto, quello occupato dalla carica, dove non ha alcun valore finito. L’entità matematica cui siamo pervenuti non può quindi essere considerata una funzione. La *teoria delle distribuzioni* (la cui trattazione esula dalle possibilità di questo

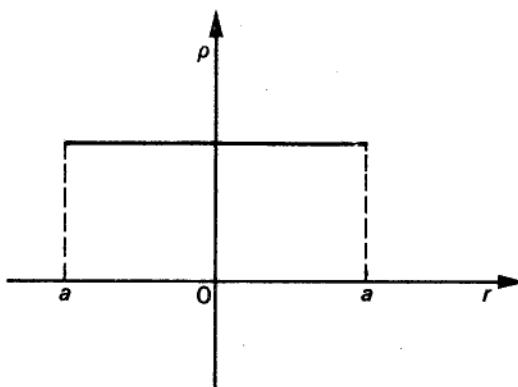


Figura E.1

libro) giustifica peraltro rigorosamente l'uso di entità siffatte, denominate (con espressione non molto felice) *funzioni impulsive*. In tale teoria si introduce un oggetto matematico, indicato solitamente con il simbolo $\delta(P)$,¹ definito formalmente come segue:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta(P)=0, & \text{per ogni punto } P \text{ diverso dall'origine del sistema di coordinate} \\ \iiint_{\tau} \delta(P) d\tau = 1, & \text{per ogni dominio } \tau \text{ che includa l'origine.} \end{array} \right. \quad [E.1.1]$$

La $\delta(P)$ è la ben nota *funzione impulsiva unitaria*, o *funzione di Dirac*; per i motivi accennati, neanche l'integrale di volume nella seconda delle [E.1.1] è da intendere nel senso usuale. Ora, la principale conclusione della teoria delle distribuzioni è proprio quella di consentire di trattare la $\delta(P)$ alla stregua di una comune funzione che verifichi le [E.1.1]. Ad esempio possiamo scrivere

$$\iiint_{\tau} \delta(P) f(P) d\tau = f(0), \quad [E.1.2]$$

dove $f(P)$ è una generica funzione definita nel dominio τ . Naturalmente, una funzione impulsiva può essere “centrata” anche in punti diversi dall’origine; in tal caso viene indicata con

$$\delta(P - P_0),$$

oppure

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

¹ O anche $\delta(r)$, r essendo il raggio vettore spiccato dall’origine verso il punto P .

ove P_0 è il punto nel quale la funzione impulsiva è diversa da zero, e \mathbf{r}_0 il raggio vettore spiccato dall'origine verso P_0 . Con questo formalismo la distribuzione di carica costituita da un'unica carica puntiforme di valore Q , posta nel generico punto P_0 , si può rappresentare come segue:

$$\rho(P) = Q\delta(P - P_0),$$

indicando con ciò che la densità ρ è nulla in tutti i punti diversi da P_0 , e tale inoltre da verificare la relazione

$$\iiint_{\tau} \rho(P) d\tau = \iiint_{\tau} Q\delta(P - P_0) d\tau = Q,$$

per ogni dominio τ che comprenda P_0 .

Una distribuzione di cariche costituita da un insieme di N cariche puntiformi, di valori Q_1, Q_2, \dots, Q_N , poste nei punti P_1, P_2, \dots, P_N , può essere rappresentata formalmente dalla densità

$$\rho(P) = \sum_{i=1}^N Q_i \delta(P - P_i);$$

essa è infatti nulla in tutti i punti non occupati da cariche, e tale che

$$\iiint_{\tau_i} \rho(P) d\tau = Q_i,$$

in ogni regione τ_i che contenga la sola carica Q_i .

Oltre alle funzioni impulsive appena introdotte (funzioni di punto in uno spazio tridimensionale, cioè di tre variabili coordinate) è possibile considerare funzioni impulsive di una sola variabile, oppure di due. Ad esempio, la funzione impulsiva $\delta(x - x_0)$, formalmente definita dalle relazioni

$$\begin{cases} \delta(x - x_0) = 0, & \text{per } x \neq x_0 \\ \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} \delta(x - x_0) dx = 1, & \text{per ogni } \epsilon. \end{cases}$$

Una definizione analoga viene data per le funzioni di due variabili.

Si verifica infine facilmente che

$$\delta(P - P_0) = \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0).$$

E' possibile cioè rappresentare $\delta(P - P_0)$ come prodotto delle tre funzioni impulsive associate a ciascuna delle variabili coordinate.

Appendice F

F.1 Potenziale prodotto da una distribuzione illimitata di cariche

Sappiamo (vedi § 3.2) che il potenziale prodotto nel vuoto da un sistema di N cariche puntiformi q_k può essere ottenuto sovrapponendo i potenziali prodotti da ciascuna carica. Si ha cioè

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \left(\frac{q_k}{r_k} + C_k \right), \quad [\text{F.1.1}]$$

dove le C_k sono N costanti arbitrarie.

Scelte le costanti, e posto

$$C = \sum_{k=1}^N C_k,$$

si ha

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_k} + C. \quad [\text{F.1.1}]$$

E' sempre possibile scegliere un valore di C tale che V si annulli in un assegnato punto (purché diverso da quelli occupati dalle cariche). In particolare, per $C=0$ il potenziale si annulla all'infinito.

Nei casi in cui il numero delle cariche è illimitato *non* è possibile scegliere le C_k in modo del tutto arbitrario: se si ponessero ad esempio tutte uguali a un'unica costante non nulla C_0 , l'espressione [F.1.1] sarebbe divergente per ogni valore di r . Né è possibile, in generale, porle tutte uguali a zero. Per dimostrarlo, immaginiamo ad esempio di avere un sistema di cariche puntiformi q , tutte uguali, disposte a distanza unitaria l'una dall'altra lungo una retta x ; calcoliamo il potenziale V in un generico punto P_0 di questa (non coincidente con alcuno dei punti occupati dalle cariche) mediante la [F.1.1] ponendo uguali a zero tutte le C_k .

Assunto sulla retta un sistema di ascisse x (con origine O coincidente con la carica immediatamente a sinistra di P_0), indichiamo con x_0 l'ascissa di P_0 (vedi fig. F.1). In base al principio di sovrapposizione

$$V = V_1 + V_2, \quad [\text{F.1.2}]$$

V_1 essendo il contributo fornito da tutte le cariche a sinistra di O (compresa la stessa origine) e V_2 quello delle cariche a destra di O . Dalla [F.1.1] si ha (per $C_k = 0$)

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0+1} + \frac{1}{x_0+2} + \dots \right)$$

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1-x_0} + \frac{1}{1-x_0+1} + \frac{1}{1-x_0+2} + \dots \right).$$

Sostituendo tali espressioni nella [F.1.2] risulta

$$V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x_0+k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-x_0+k} \right). \quad [\text{F.1.3}]$$

D'altra parte, detti a e b gli interi immediatamente maggiore e minore di x_0 , risulta

$$\frac{1}{x_0+k} \geq \frac{1}{a+k}, \quad \text{e} \quad \frac{1}{1-x_0+k} \geq \frac{1}{1-b+k}.$$

Le serie presenti nella [F.1.3] sono pertanto entrambe maggioranti della serie armonica e, come tali, divergenti. Se dunque si pongono uguali a zero tutte le costanti C_k nella [F.1.1], l'espressione del potenziale diverge anche nei punti *non* occupati da cariche. Per contro, si può mostrare che in tali punti il campo elettrico prodotto dalla distribuzione in esame si mantiene limitato e che da esso è perciò possibile determinare, per integrazione, un potenziale finito.

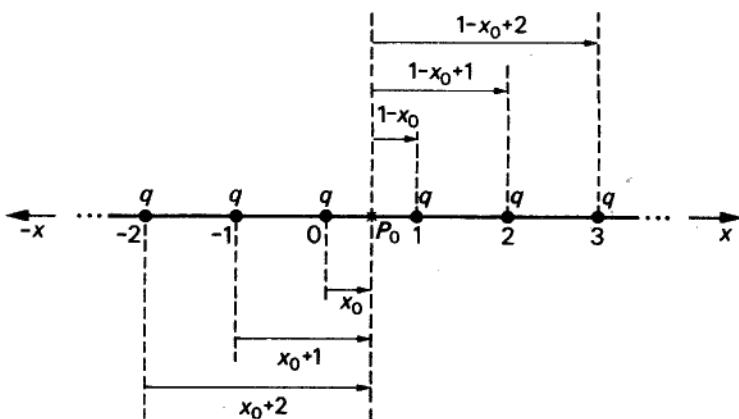


Figura F.1

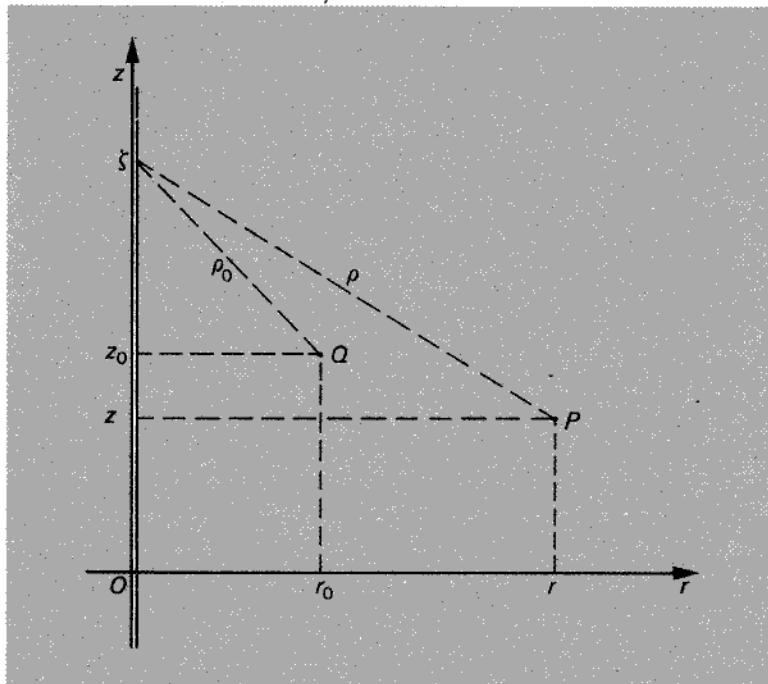


Figura F.2

Allo stesso risultato si può anche giungere direttamente, scegliendo ciascuna C_k in modo che il potenziale prodotto dalla carica k -esima (cui la C_k si riferisce) si annulli in un assegnato punto Q : il potenziale totale, somma di termini tutti nulli in Q , sarà allora anch'esso nullo in tale punto.

In conclusione, dovendo valere il principio di sovrapposizione dei potenziali, non è lecito porre uguali a zero tutte le C_k ; d'altra parte, nella situazione esaminata ciò equivarrebbe a imporre che il potenziale si annulli in un punto (l'infinito della retta) occupato da cariche,¹ il che, come si è detto, è impossibile.

I ragionamenti esposti si estendono agevolmente al caso delle distribuzioni continue di cariche. A titolo di esempio, consideriamo un sistema di cariche distribuite con densità lineare uniforme λ lungo una generica retta z (vedi fig. F.2). Assunto un sistema di coordinate r , z , consideriamo un elemento di carica centrato attorno al generico punto di ascissa ξ lungo la retta z ; per far sì che il contributo fornito da tale elemento sia nullo in un assegnato punto Q basta porre

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\xi}{\rho} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\xi}{\rho_0}, \quad [F.1.6]$$

¹ Il punto all'infinito della retta è anzi *punto di accumulazione* di cariche.

con

$$\rho = \sqrt{r^2 + (\xi - z)^2}, \quad \rho_0 = \sqrt{r_0^2 + (\xi - z_0)^2} \quad [F.1.7]$$

Sostituendo le [F.1.7] nelle [F.1.6] e integrando su tutto l'asse z , si ottiene

$$V(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{r^2 + (\xi - z)^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{r_0^2 + (\xi - z_0)^2}} \right] d\xi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}.$$

In questo modo, il potenziale è ottenuto come differenza tra due integrali, entrambi divergenti.

Appendice G

G.1 L'ipotesi di F. e H. London

Ci proponiamo qui di fornire una giustificazione all'equazione che costituisce la base della teoria di F. e H. London sulla supercondutività. A tal fine, esaminiamo il comportamento di un conduttore perfetto (non superconduttore) e mostriamo che esso non lascia prevedere la possibilità dell'effetto Meissner.

Consideriamo dunque un conduttore in cui il moto dei portatori di carica non sia ostacolato da alcuna forza resistente. Il secondo principio della dinamica (newtoniana), applicato al generico portatore, fornisce

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{E}, \quad [G.1.1]$$

ove m e \mathbf{v} sono rispettivamente la massa e la velocità del portatore, q è la sua carica ed \mathbf{E} il campo elettrico agente nel conduttore. Indicando poi con $\bar{\mathbf{v}}$ la velocità media dei portatori e con n la loro densità di volume, si ha

$$\mathbf{J} = q n \bar{\mathbf{v}}, \quad [G.1.2]$$

dove \mathbf{J} è la densità di corrente nel conduttore. Effettuando la media su n particelle, la [G.1.1] diventa

$$m \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}} = q \mathbf{E}.$$

Sostituendo la [G.1.2] in tale relazione, si ha

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{nq^2}{m} \mathbf{E}. \quad [G.1.3]$$

Prendendo il rotore di ambo i membri, si ottiene

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{nq^2}{m} \text{rot} \mathbf{E},$$

e ricordando che

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

si ottiene

$$\text{rot } \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\frac{nq^2}{m} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad [\text{G.1.4}]$$

Trascurando la corrente di spostamento, risulta

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J},$$

e quindi

$$\nabla^2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{nq^2}{m} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad [\text{G.1.5}]$$

Questa equazione è soddisfatta da qualsiasi campo magnetico costante nel tempo; assumendo dunque un modello classico (cioè non quantistico) di comportamento di un conduttore perfetto non si esclude la presenza di un campo magnetico nel conduttore.

Se però, in luogo della [G.1.4], si postula che

$$\text{rot } \mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{\lambda_l^2} \right) \mathbf{B}, \quad [\text{G.1.6}]$$

(con λ_l opportuna costante, caratteristica del materiale), si ottiene, in luogo della [G.1.5], l'equazione

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_l^2} \mathbf{B}. \quad [\text{G.1.7}]$$

Tale equazione, contrariamente alla [G.1.5], *non* ammette una soluzione uniforme e diversa da zero: in altre parole, se il superconduttore verifica la [G.1.6], esso non è sede di un campo magnetico nel suo interno.

La [G.1.6], infine, fornisce immediatamente la [7.12.1], quando vi si introduca il potenziale vettore \mathbf{A} del campo magnetico \mathbf{B} . Infatti

$$\text{rot } \mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{\lambda_l^2} \right) \text{rot } \mathbf{A},$$

e quindi

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\lambda_l^2} \mathbf{A}.$$

Appendice H

H.1 Derivazione delle formule di Feynman

Supponiamo di conoscere la legge oraria del moto di una carica q nel vuoto; con riferimento ai simboli della figura H.1, sia essa

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_Q(t), \quad [H.1.1]$$

ove abbiamo indicato con Q la posizione *attuale* della carica all'istante *attuale* t . Indichiamo poi con Q' la posizione *apparente* (o *ritardata*) della carica *vista* all'istante t da un osservatore posto nel punto-campo P ; l'istante t' è invece quello in cui la carica, nel corso del suo moto, è effettivamente passata per il punto Q' . Si ha dunque, con riferimento alla [H.1.1]:

$$\mathbf{r}_{Q'} = \mathbf{r}_Q(t') \quad [H.1.2]$$

Cominciamo col riscrivere le espressioni [10.9.5'] e [10.9.6] dei potenziali di Lienard e Wiechert con riferimento ai simboli della figura H.1 (che sono quelli usati nelle formule di Feynman). Poiché il raggio vettore \mathbf{r} della posizione ritardata che figura nelle [10.9.5'] e [10.9.6] è esprimibile come

$$\mathbf{r} = -r' \mathbf{e}_{r'}, \quad [H.1.3]$$

si ha

$$V(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_{r'}}{c}}, \quad [H.1.4]$$

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r'} \frac{\mathbf{v}'}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_{r'}}{c}}, \quad [H.1.5]$$

nelle quali \mathbf{v}' rappresenta la velocità ritardata della carica e r' rappresenta la distanza

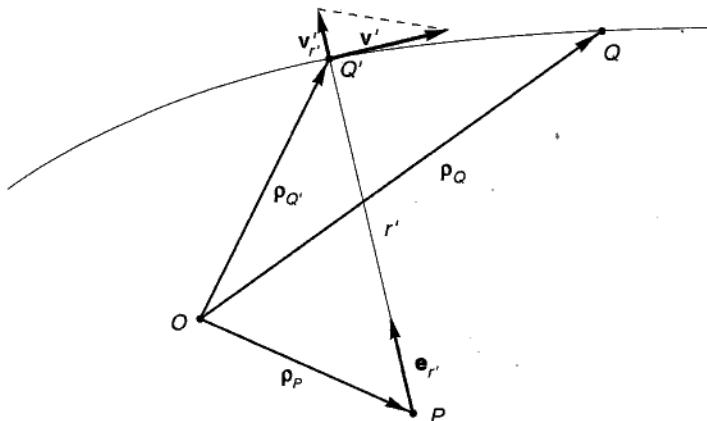


Figura H.1

Q' indica la posizione ritardata (istante t'), Q la posizione attuale (istante $t = t' + r'/c$). O è la generica origine dei vettori-posizione.

tra il punto-campo P e il punto-sorgente ritardato Q' :

$$r' = |\mathbf{r}_{Q'} - \mathbf{r}_P|. \quad [\text{H.1.6}]$$

Sostituendo la [H.1.2] nella [H.1.6], si ottiene

$$r' = |\mathbf{r}_Q(t') - \mathbf{r}_P|, \quad [\text{H.1.7}]$$

la quale mostra che, per una data legge del moto della carica, la distanza r' che figura nelle [H.1.4] e [H.1.5] è funzione delle coordinate $x_i (i=1, 2, 3)$ del punto-campo P e del tempo ritardato t' ; indichiamo con

$$r'(x_i, t') \quad [\text{H.1.8}]$$

tal funzione.

Consideriamo ora la relazione fra il tempo attuale t e il tempo ritardato t' :

$$t = t' + \frac{r'}{c}. \quad [\text{H.1.9}]$$

Osserviamo innanzitutto che risulta:

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial r'}{\partial t'},$$

e ancora (essendo $\partial r'/\partial t' = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_{r'}$):

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = 1 + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_{r'}. \quad [\text{H.1.10}]$$

Essendo, in ogni caso $|\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_{r'}| < c$, se ne trae

$$\frac{\partial t}{\partial t'} > 0.$$

Ciò ha conseguenze importanti poiché garantisce che l'equazione

$$t = t' + \frac{1}{c} r'(x_i, t'), \quad [\text{H.1.11}]$$

che si ottiene sostituendo la [H.1.8] nella [H.1.9], definisce implicitamente *in modo univoco* il tempo ritardato t' come funzione di x_i e t :

$$t' = t'(x_i, t). \quad [\text{H.1.12}]$$

Tenendo conto di tale relazione, tanto la r' che la $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_r = \partial r'/\partial t'$, che figurano nei potenziali di Lienard e Wiechert, possono essere espresse come funzioni delle coordinate x_i del punto-campo P e del tempo attuale t :

$$\begin{cases} r' = f[x_i, t'(x_i, t)], \\ \frac{\partial r'}{\partial t'} = g[x_i, t'(x_i, t)]. \end{cases} \quad [\text{H.1.13}]$$

Ne deriva che i secondi membri delle [H.1.4] e [H.1.5] sono a loro volta funzioni del tipo

$$F[x_i, t'(x_i, t)]. \quad [\text{H.1.14}]$$

Ora, per ricavare le espressioni dei campi **E** e **B** da quelle dei potenziali **V** e **A**, occorre derivare parzialmente rispetto alle coordinate x_i e al tempo t le espressioni dei potenziali. Calcoliamo, pertanto, tali derivate per una generica funzione del tipo [H.1.14] e applichiamo poi le espressioni cui perverremo a quelle dei potenziali.

Si ha subito

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t},$$

e quindi, ricordando la [H.1.10]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t'} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_r}{c}}. \quad [\text{H.1.15}]$$

Analogamente, si ha, per $i=1, 2, 3$:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t=\text{cost.}} = \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t'=\text{cost.}} + \frac{\partial F}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x_i},$$

nella quale la $\partial t'/\partial x_i$ è la derivata parziale rispetto a x_i della funzione espressa dalla [H.1.12]. Ricordando le regole di derivazione delle funzioni implicite, dalla [H.1.11] si ha subito

$$\left. \frac{\partial t'}{\partial x_i} \right|_{t=\text{cost.}} = -\frac{\frac{1}{c} \frac{\partial r'}{\partial x_i}}{1 + \frac{\partial r'}{\partial t'}} = -\frac{\frac{1}{c} \frac{\partial r'}{\partial x_i}}{\frac{\partial t}{\partial t'}},$$

e quindi

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t=\text{cost.}} = \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t'=\text{cost.}} - \frac{\frac{\partial F}{\partial t'} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial r'}{\partial x_i}}{\frac{\partial t}{\partial t'}} \Big|_{t'=\text{cost.}} = \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t'=\text{cost.}} - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial r'}{\partial x_i} \Big|_{t'=\text{cost.}}, \quad [\text{H.1.16}]$$

nella quale $\partial F / \partial t$ è data dalla [H.1.15].

Indichiamo con ∇ e ∇' gli operatori vettoriali di componenti cartesiane $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{t=\text{cost.}}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{t'=\text{cost.}}$; osservando che $\nabla' r' = -\mathbf{e}_{r'}$, dalla [H.1.16] si trae subito

$$\nabla F = \nabla' F + \frac{\mathbf{e}_{r'}}{c} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad [\text{H.1.17}]$$

e, indicando con \mathbf{F} un generico campo vettoriale $\mathbf{F}[x_i, t'(x_i, t)]$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla' \cdot \mathbf{F} + \frac{\mathbf{e}_{r'}}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \quad [\text{H.1.18}]$$

e infine

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla' \times \mathbf{F} + \frac{\mathbf{e}_{r'}}{c} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}. \quad [\text{H.1.19}]$$

Siamo ora in condizioni di ricavare le espressioni per \mathbf{E} e \mathbf{B} . A tal fine, cominciamo con l'osservare che risulta, dalla [H.1.10]:

$$\frac{1}{r'} \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_{r'}}{c}} = \frac{1}{r'} \frac{\partial t'}{\partial t},$$

e ancora:

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{r'} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial r'}{\partial t} \right).$$

Sostituendo tali espressioni nella [H.1.4], si ottiene

$$V(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{c} \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial t} \right). \quad [\text{H.1.20}]$$

Ragionando analogamente per $\mathbf{A}(P, t)$, si ha

$$\frac{1}{r'} \frac{\mathbf{v}'}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_{r'}}{c}} = \frac{\partial \mathbf{e}_{r'}}{\partial t} + \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial t} \mathbf{e}_{r'},$$

e quindi

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{r'}}{\partial t} + \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial t} \mathbf{e}_{r'} \right). \quad [\text{H.1.21}]$$

Il campo elettrico \mathbf{E} può ora essere ottenuto dalla relazione

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

tenendo conto delle [H.1.17] e [H.1.19]. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{c} \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{r'}}{\partial t} + \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial t} \mathbf{e}_{r'} \right) \right] = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla \left(\frac{1}{r'} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \ln r' - \frac{\mathbf{e}_{r'}}{c} \frac{\partial \ln r'}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{r'}}{\partial t^2} \right]. \end{aligned}$$

Ricordando le identità

$$\nabla' \left(\frac{1}{r'} \right) = \frac{\mathbf{e}_{r'}}{(r')^2},$$

e

$$\nabla' \ln r' = -\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'},$$

si ricava

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{(r')^2} + \frac{\mathbf{e}_{r'}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{r'} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{r'}}{\partial t^2} \right],$$

e infine

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{(r')^2} + \frac{r'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{e}_{r'}}{(r')^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{r'}}{\partial t^2} \right],$$

che è appunto la formula di Feynman per \mathbf{E} .

Analoghi sviluppi portano all'espressione per \mathbf{B} (provi il lettore a svolgere i calcoli).

Soluzioni degli esercizi

Capitolo 1

1. $F = 359 \text{ N}$.
2. $Q = 2,96 \times 10^{17} \text{ C}$.
3. $F \approx 155 \text{ N}$.
4. $F \approx 1,8 \text{ N}$, $C = 1,8 \times 10^{-2} \text{ N m}$.
5. L'equilibrio si ha quando i momenti della forza peso e della forza di repulsione coulombiana tra le cariche, rispetto a O , si bilanciano. Dette l e m la lunghezza e la massa di ciascuna lamina, il momento M_p della forza peso è dato da

$$M_p = mg \frac{l}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

il momento M_Q della forza elettrica è dato da

$$M_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} l \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

dove

$$r = 2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Di conseguenza

$$Q = \left[8\pi\epsilon_0 l^2 mg \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]^{1/2}.$$

6. L'equilibrio si ha quando la componente lungo il piano inclinato del peso di S è bilanciata dalla attrazione coulombiana tra le cariche. Si ha pertanto

$$mg \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2},$$

onde

$$q = (4\pi\epsilon_0 d^2 mg \sin \alpha)^{1/2}.$$

Capitolo 2

$$1. \quad \mathbf{E}(O) = \frac{3q}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{E}(O') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{d}{\left(\frac{d^2}{4} + h^2\right)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{\left(\frac{d^2}{4} + h^2\right)^{3/2}} \mathbf{k},$$

dove \mathbf{k} è il versore della congiungente OO' e \mathbf{j} quello della normale.

$$4. \quad Q = \int_0^L \lambda(x) dx = \int_0^L \lambda_0 \frac{x}{L} dx = \lambda_0 \frac{L}{2}.$$

$$5. \quad Q(x) = \int_0^x \lambda(x) dx = \frac{\lambda_0}{L} \frac{x^2}{2}.$$

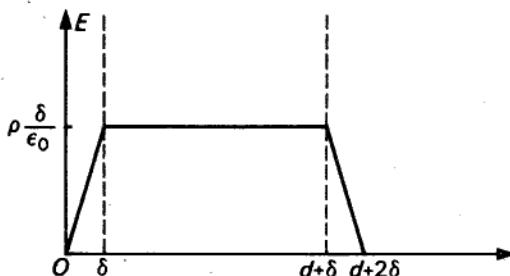
$$6. \quad Q = \int_0^R \sigma(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} \pi R^2 \sigma_0.$$

$$7. \quad Q = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = \pi \rho_0 R^3.$$

$$8. \quad \mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{i}_r, & r \geq R \\ \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \frac{r^2}{R} \mathbf{i}_r, & r < R, \end{cases}$$

dove \mathbf{i}_r è il versore della direzione radiale.

9. Se la circonferenza fosse completa, il campo in O sarebbe nullo. Nelle condizioni della figura 2.20 il campo in O è pari a quello che sarebbe prodotto da una sola carica negativa, posta tra A e B , di valore $1/100 \mu C$.
10. Il flusso attraverso le facce che contengono la carica è nullo; quello attraverso ogni altra faccia è $Q/24\epsilon_0$.
11. Sia x un asse perpendicolare ai due strati. Esternamente ad essi il campo \mathbf{E} è nullo, internamente è diretto secondo l'asse x e ha l'andamento riportato nella figura seguente



12. $L = \int_0^h \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{r_1^2 + x^2} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{h^2}{r_1^2} \right|.$

15. $\int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dl = 0.$

16. $\iint_{ACBO} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{3}{2}.$

17. $\iint_{ABC} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 1.$

19. $\mathbf{E}(r) = E(r) \mathbf{i}_r, \text{ con } E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 R^2} r^3, & \text{per } r \leq R, \\ \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0} \frac{1}{r}, & \text{per } r \geq R. \end{cases}$

20. $\mathbf{E}(r) = E(r) \mathbf{i}_r, \text{ con } E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{R_{\text{est}}(R_{\text{est}} - R_{\text{int}})}{r}, & \text{per } r \geq R_{\text{est}} \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{R_{\text{est}}(r - R_{\text{int}})}{r}, & \text{per } R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}}, \\ 0, & \text{per } r \leq R_{\text{int}}. \end{cases}$

21. $\sigma = \epsilon_0 \left(\frac{x^2}{2} - z^2 \right).$

23. $\mathbf{E}(r) = E(r) \mathbf{i}_r, \text{ con } E(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{R_{\text{est}}}{2\epsilon_0} \frac{R_{\text{est}}^2 - R_{\text{int}}^2}{r^2}, & r \geq R_{\text{est}} \\ \rho_0 \frac{R_{\text{est}}}{2\epsilon_0} \frac{r^2 - R_{\text{int}}^2}{r^2}, & R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}} \\ 0, & r \leq R_{\text{int}}. \end{cases}$

24. $E_z = -\frac{x^2 y}{z^2}.$

25. $\rho = 2 \frac{y}{z} \left(1 + \frac{x^2}{z^2} \right).$

26. No, a causa della irrotazionalità.

Capitolo 3

1. $V(O) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{d},$

$V(O') = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{d^2}{4} + h^2 \right)^{1/2}}.$

$$4. V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \int_0^L \frac{\xi}{x-\xi} d\xi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \int_0^L \frac{\xi-x+x}{\xi-x} d\xi = \\ = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \left(L + x \ln \left| \frac{L-x}{x} \right| \right).$$

$$7. V(x, y, z) = x^2y + 2yz^2 - 3xz + C,$$

$$V(r, \theta, \varphi) = r^2\theta - 2r\varphi + \theta^2\varphi + C.$$

$$8. \Delta V = 2.$$

$$9. U = 3,8 \times 10^{-14} \text{ J}.$$

$$10. \mathbf{E} = - \left(6xy - 2 \frac{y}{z} \right) \mathbf{i}_x + \left(-3x^2 + 2 \frac{x}{z} \right) \mathbf{i}_y + \left(-2 \frac{xy}{z^2} \right) \mathbf{i}_z.$$

$$11. \mathbf{E}(r, \varphi, z) = \left(-z - 2 \frac{r}{z} \sin \varphi \right) \mathbf{i}_r + \left(-\frac{r}{z} \cos \varphi \right) \mathbf{i}_\varphi + \left(-r + \frac{r^2}{z^2} \sin \varphi \right) \mathbf{i}_z.$$

$$12. V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{16\epsilon_0 R^2} (R^4 - r^4), & \text{per } 0 \leq r \leq R, \\ \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}, & \text{per } r \geq R. \end{cases}$$

$$13. V(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{1}{2} \frac{R_{\text{est}}}{\epsilon_0} (R_{\text{est}}^2 - R_{\text{int}}^2) \frac{1}{r}, & \text{per } r \geq R_{\text{est}} \\ \rho_0 \frac{R_{\text{est}}^2}{\epsilon_0} - \rho_0 \frac{R_{\text{est}}}{2\epsilon_0} \left(r + \frac{R_{\text{int}}^2}{r} \right), & \text{per } R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}} \\ \rho_0 \frac{R_{\text{est}}}{\epsilon_0} (R_{\text{est}} - R_{\text{int}}), & \text{per } r \leq R_{\text{int}}. \end{cases}$$

$$14. \rho(x, y, z) = 0, 4\epsilon_0.$$

Capitolo 4

$$1. C_s = \epsilon_0 \frac{1}{d-\delta}.$$

$$2. C_{\text{eq}} = 0,375 \mu\text{F}.$$

$$3. C_{\text{eq}} = 1 \mu\text{F}.$$

$$4. V_{AD} = \frac{2}{3} \times 100 \text{ V}, \quad V_{DB} = \frac{1}{3} \times 100 \text{ V}.$$

6. Poiché sulla sfera esterna l'equazione di Laplace non è soddisfatta, occorre considerare soluzioni distinte, V_1 e V_2 , per la regione compresa tra le sfere e per la regione esterna.¹

¹ Per ragioni di simmetria, il potenziale dipende solo da r .

$$V_1(r) = \frac{A}{r} + B, \quad R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}} \quad [1]$$

$$V_2(r) = \frac{C}{r} + D, \quad r > R_{\text{est}}. \quad [2]$$

Poiché $\lim_{r \rightarrow \infty} V_2(r) = 0$, si ha $D = 0$.

Per la continuità del potenziale si ha inoltre

$$V_1(R_{\text{est}}) = V_2(R_{\text{est}}), \quad [3]$$

e dunque

$$\frac{A}{R_{\text{est}}} + B = \frac{C}{R_{\text{est}}},$$

donde

$$B = \frac{C - A}{R_{\text{est}}}. \quad [4]$$

Per il teorema di Coulomb, la densità di carica sulla sfera interna è data da

$$\sigma_{\text{int}} = -\epsilon_0 \left. \frac{dV_1}{dr} \right|_{R_{\text{int}}} = \epsilon_0 \frac{A}{R_{\text{int}}^2}; \quad [5]$$

e poiché

$$Q_{\text{int}} = 4\pi R_{\text{int}}^2 \sigma_{\text{int}},$$

si deduce che

$$A = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0}. \quad [6]$$

Sostituendo la [6] nella [1], si ricava

$$V_1(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + B.$$

Sulla pagina interna della sfera esterna si localizza dunque una densità di carica:

$$\sigma_{\text{est}}^- = \epsilon_0 \left. \frac{dV_1}{dr} \right|_{R_{\text{est}}} = -\frac{Q_{\text{int}}}{4\pi R_{\text{est}}^2}. \quad [7]$$

D'altra parte, sulla sfera esterna è presente globalmente una carica Q_{est} : di conseguenza sulla pagina esterna di tale superficie si localizza una densità di carica

$$\sigma_{\text{est}}^+ = \frac{\sigma_{\text{int}} + Q_{\text{est}}}{4\pi R_{\text{est}}^2}. \quad [8]$$

Poiché per il teorema di Coulomb,

$$\sigma_{\text{est}} = -\epsilon_0 \frac{dV_2}{dr} \Big|_{R_{\text{est}}},$$

si ha

$$\frac{Q_{\text{int}} + Q_{\text{est}}}{4\pi R_{\text{est}}^2} = \epsilon_0 \frac{C}{R_{\text{est}}^2},$$

donde

$$C = \frac{Q_{\text{int}} + Q_{\text{est}}}{4\pi \epsilon_0} \quad [9]$$

e, per la [4],

$$B = \frac{Q_{\text{est}}}{4\pi \epsilon_0 R_{\text{est}}} \quad [10]$$

Sostituendo le [6], [9] e [10] nelle [1] e [2], si ricavano le seguenti espressioni:

$$V_1(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{Q_{\text{est}}}{4\pi \epsilon_0 \cdot R_{\text{est}}}, \quad R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}}$$

$$V_2(r) = \frac{Q_{\text{int}} + Q_{\text{est}}}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad r > R_{\text{est}}$$

nonché

$$\mathbf{E}_1(r) = -\frac{dV_{\text{int}}}{dr} \mathbf{i}_r = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{i}_r, \quad R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}}$$

$$\mathbf{E}_2(r) = -\frac{dV_{\text{est}}}{dr} \mathbf{i}_r = \frac{Q_{\text{int}} + Q_{\text{est}}}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{i}_r, \quad r > R_{\text{est}}.$$

Nei punti interni alla sfera di raggio minore, infine, il potenziale è costante e il campo \mathbf{E} nullo. Il valore della costante, per la continuità del potenziale, è $V_{\text{int}}(R_{\text{int}})$.

Si noti che i precedenti risultati si possono ottenere, molto più semplicemente, applicando il teorema di Gauss

7. Posto, ad esempio, $V=0$ in corrispondenza del cilindro esterno,² risulta

$$V_1(r) = -\frac{Q_{\text{int}}}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_{\text{est}}}\right), \quad R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}}$$

$$V_2(r) = -\frac{Q_{\text{int}} + Q_{\text{est}}}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_{\text{est}}}\right), \quad r > R_{\text{est}}$$

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \mathbf{i}_r, \quad R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}}$$

$$\mathbf{E}_2(r) = \frac{Q_{\text{int}} + Q_{\text{est}}}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \mathbf{i}_r, \quad r > R_{\text{est}}.$$

² Osserviamo che, in questo caso, non è più possibile porre il potenziale uguale a zero all'infinito, poiché le due armature cilindriche si estendono all'infinito e tra loro sussiste certamente una d.d.p: ne segue che non tutti i punti della "sfera all'infinito" possono essere allo stesso potenziale.

8. $C \approx 2 \times 10^{-8} \text{ F/m.}$

9. $F \approx 4,4 \text{ N.}$

10. $q = 8,25 \times 10^{-9} \text{ C.}$

11. $R \cong 0,9 \times 10^7 q.$

12. $\mathbf{E}(r) = E(r) \mathbf{i}_r, \text{ con } E(r) = \frac{1000}{\ln 200} \cdot \frac{1}{r}. \quad (r = \text{distanza dall'asse})$

13. $V(r) = \frac{1000}{\ln 200} \cdot \ln r + K \quad (K \text{ costante arbitraria})$

$$q = 0,55 \times 10^{-10} / \ln 200 \quad (\text{c/m}).$$

14. $C = \frac{300}{7} \text{ pF.}$

15. $\sigma = \epsilon_0 E \cos \theta.$

16. Per effetto dell'induzione elettrostatica.

18. Il potenziale V è

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q'}{r^2} \right),$$

essendo r_1 e r_2 le distanze di P dalle due cariche; il campo è dato da $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Capitolo 5

2. 1) $E_{\text{aria}} = \epsilon V / [\epsilon(d-\delta) + \epsilon_0 \delta]; \quad E_{\text{vetro}} = (\epsilon_0/\epsilon) E_{\text{aria}}.$

2) come in (1), con $V_1 = V[\epsilon_0 \delta + \epsilon(d-\delta)]/\epsilon d$ al posto di V .

3. 1) $E_{\text{aria}} = 1,66 \times 10^6 \text{ V/m}; \quad E_{\text{vetro}} = 0,33 \times 10^6 \text{ V/m.}$

2) $E_{\text{aria}} = 10^6 \text{ V/m}; \quad E_{\text{vetro}} = 0,2 \times 10^6 \text{ V/m.}$

Si noti che, prima dell'inserimento della lastra, $E_{\text{aria}} = 10^6 \text{ V/m.}$

4. Prima dell'inserimento: $\sigma_{\text{lib}} = \epsilon_0 \frac{V}{d}; \quad \sigma_{\text{pol}} = 0;$

dopo l'inserimento: $\sigma_{\text{lib}} = \epsilon_0 E_{\text{aria}}; \quad \sigma_{\text{pol}} = \epsilon_0 (E_{\text{aria}} - E_{\text{vetro}});$

(i valori da assegnare ai campi sono quelli corrispondenti ai due casi dell'esercizio 3).

5. $p \cong 4,42 \text{ N/m}^2.$

6. $p \cong 2,21 \text{ N/m}^2.$

7. $p \cong 8,84 \text{ N/m}^2.$

8. $\Delta V_1 = V C'_2 \left(\frac{\epsilon_r}{C'_1 + \epsilon_r C_2} - \frac{1}{C'_1 + C_2} \right),$

$\Delta V_2 = -\Delta V_1.$

(ΔV_1 e ΔV_2 sono le variazioni di d.d.p. sui due condensatori, C_1 e C_2 le rispettive capacità iniziali, ϵ_r la costante dielettrica relativa del dielettrico che si aggiunge al secondo condensatore.)

9. $\sigma_{\text{pol}} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} E \cos \theta.$

Capitolo 6

1. $R \approx 0,22 \Omega.$

2. $R \approx 3,67 \times 10^{10} \Omega.$

3. $\frac{2\pi}{h\eta \ln \left(\frac{R_{\text{est}}}{R_{\text{int}}} \right)}.$

4. $R \approx \frac{\eta}{A} \ln \left| 1 + \frac{AL}{B} \right|, \quad \text{con } A = h \frac{D-d}{L}, \quad B = hd.$

5. $R = \frac{\eta}{4\pi} \left(\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R_{\text{est}}} \right).$

6. $R_{\text{eq}} = 3,5 \Omega.$

7. $R_{\text{eq}} = 0,6 \Omega.$

8. $R_{\text{eq}} = 1 \Omega.$

10. $V_{AB} = 0.$

11. $d \approx 9 \text{ cm.}$

12. $L \approx 30 \text{ cm.}$

13. $L \approx 1 \text{ m.}$

14. $P = \frac{\pi}{2} \eta R^2 J_0^2 L.$

15.
$$\begin{cases} \mathbf{J}(P) = \frac{1}{\eta} \frac{RV_0}{r^2} \mathbf{i}_r, & \mathbf{E}(P) = \eta \mathbf{J}(P) \\ V(P) = RV_0 \frac{1}{r}, & \end{cases}$$

essendo r la distanza di P dal centro della sfera.

16. $\mathbf{J}(P) = \frac{1}{2} \frac{RV_0}{\eta r^2} \mathbf{i}_r.$

17. $i = \pi \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 j_0.$

18. $P_l = \frac{1}{3} \eta \pi R^2 J_0$ (si noti che P_l è $1/3$ del valore che avrebbe se J fosse uniforme e pari a J_0).

19. $R_l = 4/3(\eta 1/\pi R^2)$; essa è $4/3$ del valore corrispondente al caso uniforme.

20. $\begin{cases} E_1 = V \frac{g_2}{d_1 g_1 + d_2 g_2} \\ J_1 = g_1 E_1 \end{cases}$ $\begin{cases} E_2 = \frac{g_1}{g_2} E_1 \\ J_2 = g_2 E_2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} D_1 = \epsilon_1 E_1 \\ D_2 = \epsilon_2 E_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \sigma_{\text{lib}} = D_2 - D_1 \\ \sigma_{\text{pol}} = \epsilon_0 (E_2 - E_1) \end{cases}$

22. $\Delta V = 23,8$ V.

Capitolo 7

1. Il campo ha linee vettoriali a forma di circonferenze ortogonali all'asse del conduttore e centrate sull'asse stesso. Il modulo del campo dipende soltanto dalla distanza r dall'asse e vale

$$B(r) = \begin{cases} 0, & r \leq R_{\text{int}} \\ \frac{\mu_0}{2} J \frac{r^2 - R_{\text{int}}^2}{r}, & R_{\text{int}} < r \leq R_{\text{est}} \\ \frac{\mu_0}{2} J \frac{R_{\text{est}}^2 - R_{\text{int}}^2}{r}, & r > R_{\text{est}}. \end{cases}$$

2. Le linee vettoriali del campo sono costituite da circonferenze giacenti in piani ortogonali all'asse del cavo e centrate su di esso. Il modulo del campo dipende soltanto dalla distanza r dall'asse e vale:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R_{\text{int}}^2} r, & 0 \leq r \leq R_{\text{int}} \\ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}, & R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{est}} \\ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \left(1 - \frac{r^2 - R_{\text{est}}^2}{\delta^2 + 2R_{\text{est}}\delta}\right), & R_{\text{est}} < r \leq R_{\text{est}} + \delta \\ 0, & r > R_{\text{est}} + \delta. \end{cases}$$

3. Il campo \mathbf{B} è diretto lungo l'asse della spira e ha modulo

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + r^2)^{3/2}},$$

dove r indica la distanza dal centro della spira.

5. Il campo \mathbf{B} è diretto lungo l'asse del solenoide e ha modulo

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2l} (\cos \epsilon + \cos \epsilon'),$$

dove N è il numero totale di spire del solenoide e ϵ e ϵ' sono gli angoli indicati in figura.

7. $\int_{A \gamma B} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 J h \sqrt{R^2 - h^2}.$

9. $L_I = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R_{\text{est}}}{R_{\text{int}}} \right).$

11. Detto \mathbf{n} il versore della normale a S (orientato ad arbitrio), il campo magnetico \mathbf{B} è uniforme nel semispazio verso cui punta \mathbf{n} e vale

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J}_s \times \mathbf{n}.$$

Nell'altro semispazio il campo è ancora uniforme e vale

$$\mathbf{B}_2 = -\mathbf{B}_1.$$

12. All'esterno delle due lamine il campo è nullo, mentre all'interno è uniforme e vale

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s \times \mathbf{n},$$

ove \mathbf{n} indica il versore della normale a una delle due lastre, orientata verso l'altra.

13. La forza, perpendicolare alle lastre, è diretta verso l'esterno (come la pressione di un fluido attorno alle lastre) e ha modulo

$$p = \mu_0 \frac{J_s^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Per dimostrarlo, si tenga conto del fatto che la forza agente su un elemento di corrente *non* è dovuta all'intero campo esistente in corrispondenza di tale elemento, ma a quello che si ottiene sottraendo il campo prodotto dall'elemento stesso (si veda l'analogo problema elettrostatico).

15. $L = 0,4\pi$ henry.

16. $|M| = 0,1\pi$ (henry); $M > 0$ se i due circuiti sono orientati nello stesso verso; $M < 0$, in caso contrario.

17. a) $F = 0$, b) $F = 40$ N, c) $F = 10\sqrt{2}$ N.

18. $B = 2,2\pi \times 10^{-7} Q/R$.

19. $B = 2(\sqrt{2}/\pi)\mu_0 i/h$.

20. a) $B = 0$, per i_k tutte dello stesso segno;

b) $B = 0$, per $\text{segn}(i_1) = \text{segn}(i_4)$ e $\text{segn}(i_2) = \text{segn}(i_3)$;

c) $B = \mu_0 i/2\pi h$, per $i_1 = i_2 > 0$, $i_3 = i_4 < 0$.

Capitolo 8

1. $\Phi \cong (\mu N^2 a^2 / 2R) i.$

2. $\Phi \cong 3,6 \times 10^{-1}$ weber.

3.
$$\Phi \cong \frac{\pi \mu_0 N^2 a^2 i}{\delta + \frac{\mu_0}{\mu} (2\pi R - \delta)}.$$

4. $\Phi \cong 2 \times 10^{-1}$ weber.

5. B_{Fe} e H_{Fe} si determinano graficamente al punto di incontro della caratteristica di figura 8.24 con la retta di equazione:

$$B_{Fe} = -\mu_0 \frac{2\pi R - \delta}{\delta} H_{Fe}$$

(tratteggiata in fig. 8.24).

Capitolo 9

1. $i = \frac{\epsilon'}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\eta N^4 \frac{D^2}{d^2}} N \omega B_{max} \pi \frac{D^2}{4} \cos(\omega t) \approx -3,6 \cos(314 t)$ A.

2. $V_{AB} = \epsilon' = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega S B N \sin(\omega t),$

ove S è l'area di ciascuna spira.

3.
$$\epsilon' = \begin{cases} Bhv, & 0 \leq t \leq \frac{b}{v}, \\ 0, & \frac{b}{v} < t \leq \frac{L}{v}, \\ -Bhv, & \frac{L}{v} < t \leq \frac{L}{v} + \frac{b}{v}, \end{cases}$$

5. a) $\epsilon' = vLB$, b) $i = \frac{\epsilon'}{R}$, c) $F = ilB$,

ove l è la lunghezza del conduttore mobile.

6. $P = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{B_0^2}{T^2} h R^4.$

7. $L = \mu_0 \frac{S}{l} N^2.$

8. $L_1 L_2 = M^2.$

9. $\tau \approx 28$ ms, $i(t) = e^{-t/\tau}.$

11. $V(t) = V_0 e^{-t/T}.$
12. $V \cong 7,2 \times 10^{-3}$ V.
13. $\dot{W}_{\text{diss}} = (\pi/2\eta) \omega^2 R^3 B^2 S$, avendo indicato con η la resistività del filo e con B la componente verticale del campo magnetico terrestre.
14. $W_{\text{aria}} = \frac{10}{72\pi} \mathbf{J};$
 $W_{\text{ferro}} = \frac{1}{18} \mathbf{J}.$
15. $i(t) = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right).$
16. $i(t) = E (1 - e^{-t/T})$, con $T = RC$.
17. $i(t) = V_0/R e^{-t/T}$, con $T = RC$.
18. $W = \int_0^\infty R i^2 dt = \frac{1}{2} C E^2.$
19. $i(t) = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left(\omega t + \arctg \frac{1}{\omega CR} \right),$
 $W_C(t) = \frac{1}{2} C V_C^2(t), \quad \text{con } V_C(t) = \frac{1}{\omega C} \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left(\omega t + \arctg \frac{1}{\omega CR} - \frac{\pi}{2} \right).$
20. $E_{20} = \frac{N_2}{N_1} E_M \cos \omega t.$
21. Con riferimento ai versi scelti per le correnti della figura 9.26, si ha
- $$i_1(t) = \frac{E_M N_2^2}{RN_1^2} \cos \omega t + \frac{E_M}{\omega L_1} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$
- $$i_2(t) = \frac{E_M N_2}{RN_1} \cos \omega t.$$

Capitolo 10

- Si, perché verifica l'equazione delle onde.
- $v = -b/a$; per $b/a > 0$ l'onda viaggia nel verso delle z decrescenti.
- $A_M = 10^4$; $\nu = 3 \times 10^{14}$ Hz; $\lambda = 10^{-6}$ m;
 $T = 0,33 \times 10^{-14}$ s; $v = 3 \times 10^8$ m/s.

4. $\lambda = 3 \text{ m.}$
5. $f(x, y, t) = A \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)$,
con A e $k > 0$.
6. $\begin{cases} B_y(z, t) = 0,66 \times 10^6 \cos \pi (2 \times 10^6 z - 6 \times 10^{14} t), \\ B_x = 0 \\ B_z = 0. \end{cases}$
7. $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i}_y \right) \cos(kz - \omega t + \alpha)$,
con E_0, k, ω positivi e α arbitraria.
8. $\mathbf{E}(z, t) = E_0 [\mathbf{i}_x \cos(kz - \omega t) + \mathbf{i}_y \sin(kz - \omega t)]$.
9. $I = 13,3 \text{ W/m}^2$.
10. $\langle E^2 \rangle \approx 0,6 \times 10^6 \text{ V}^2/\text{m}^2$
 $\langle B^2 \rangle \approx 6,25 \times 10^{-12} \text{ T}^2$.

Capitolo 11

1. $v = \frac{c}{2} = 1,5 \times 10^8 \text{ m/s}; \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{2} = 0,5 \text{ m.}$
2. $n = 2$.
3. La stessa direzione dell'onda incidente.
4. $r_{\parallel} \approx 0,16; \quad r_{\perp} \approx -0,24$.
5. $\sin \theta = \frac{n_0}{n_{N+1}} \sin \theta_i$, avendo indicato rispettivamente con n_0 e n_{N+1} gli indici di rifrazione del mezzo da cui l'onda proviene prima di incidere sul mezzo stratificato e quello del mezzo in cui emerge.

Capitolo 12

3. $h = 1 \text{ cm}$ (invertita); $x = 11,7 \text{ cm.}$
4. $x \approx 15 \text{ cm}, \quad f \approx 14,5 \text{ cm.}$
5. $f = 20 \text{ cm.}$
8. La matrice dell'intera lente è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-1,5)}{+2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{1,5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1,5-1)}{+5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 2 \\ 0,1 & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Distanza dal vertice V (in cm):

primo fuoco, $F_1 : 15$;

primo punto principale, $H_1 : 5$

primo punto nodale, $X_1 : 5$

prima distanza focale, $f_1 : -10$

secondo fuoco, $F_2 : -8$

secondo punto principale, $H_2 : 2$

secondo punto nodale, $X_2 : 2$

seconda distanza focale, $f_2 : -10$.

Glossario

A	potenziale vettore
$\tilde{\mathbf{A}}(P)$	campo vettoriale complesso
α	polarizzabilità molecolare totale
α_d	coefficiente di temperatura in un conduttore
α_e	polarizzabilità per orientamento di polare
α_i	polarizzabilità elettronica
B	polarizzabilità ionica
B	induzione magnetica
$\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_{\text{est}}$	induzione magnetica prodotta da correnti esterne
\mathbf{B}_{cav}	induzione magnetica in una cavità
\mathbf{B}_{tor}	componente toroidale del campo magnetico
\mathbf{B}_{eff}	induzione magnetica efficace
\mathbf{B}_{pid}	componente poloidale del campo magnetico
C	capacità
C_{eq}	capacità equivalente
D	spostamento elettrico
\mathbf{D}_0	spostamento elettrico nel vuoto
\mathbf{D}_d	spostamento elettrico nel dielettrico
$\Delta \mathbf{m}$	momento magnetico della materia contenuta in un volumetto $\Delta \tau$
$\Delta \mathbf{p}$	momento di dipolo elettrico associato a un elemento di volume
$\Delta \Pi = \sum_N \mathbf{p}_i$	momento di dipolo elettrico complessivo di un volumetto contenente N dipoli ideali
e	carica dell'elettrone (in valore assoluto)
E	modulo del vettore campo elettrico
$[E_n]$	discontinuità superficiale della componente normale del campo elettrico
$[E_t]$	discontinuità superficiale di una componente tangenziale del campo elettrico

E	campo elettrico
E_0	campo elettrico in una cavità
E_d	campo elettrico nel dielettrico
E_{est}	campo elettrico di cariche-sorgente esterne
E_{Ium}	illuminamento
E_{em}	irraggiamento energetico
E_m	campo elettromotore
E_r	campo elettrico di reazione
e	forza elettromotrice indotta in una spira
E_γ	forza elettromotrice del campo elettrico (lungo una linea γ)
\mathcal{E}	energia relativistica
\mathcal{E}_0	energia di riposo (relativistica)
ϵ_0	costante dielettrica del vuoto
ϵ_r	costante dielettrica relativa
 η	 resistività elettrica
 f	 forza per unità di volume
F_L, F	forza di Lorentz
F_m	forza non elettrica agente sulle cariche
F_q	forza agente su un portatore di carica q
 G	 conduttanza elettrica; costante di gravitazione
g	conducibilità elettrica
γ	efficienza di magnetizzazione
Γ	costante di torsione di una molla
Γ	momento (meccanico) risultante agente su un circuito
H_{cav}	intensità del campo magnetico in una cavità
 i	 corrente elettrica
	corrente elettrica elementare
I	corrente stazionaria
I_{em}	intensità (media) dell'onda elettromagnetica
I_{lum}	intensità luminosa
I_{mol}	corrente molecolare
i_{em}	intensità (media nel periodo) dell'onda elettromagnetica
\mathcal{I}_{em}	intensità di emissione energetica di una corrente puntiforme
 J	 densità di volume di corrente
J_{cond}	densità di corrente di conduzione
J_{mol}	densità di corrente molecolare
J_{pld}	componente poloidale del campo J
J_s	densità superficiale di corrente
J_{tor}	componente toroidale del campo J
J_{em}	densità di corrente d'energia elettromagnetica

k	numero d'onda
l_-	spostamento "piccolo" del baricentro delle cariche negative
l_+	spostamento "piccolo" del baricentro delle cariche positive
L	lavoro
L(α)	funzione di Langevin
λ	densità lineare di carica
λ_f	lunghezza di penetrazione
M₁₂, M₂₁, M	coefficienti di mutua induzione
m̄	momento atomico medio
m	momento di dipolo magnetico di una distribuzione di corrente
M	intensità di magnetizzazione
m_B	magnetone di Bohr
m	momento di dipolo magnetico di un dipolo ideale
m_L	momento magnetico dovuto alla precessione di Larmor
m̄	massa magnetica
μ	permeabilità magnetica
μ₀	permeabilità del vuoto
μ_r	permeabilità relativa
p	pressione di radiazione
p_{es}	pressione elettrostatica
p_m	pressione magnetica
P	potenza elettrica
{P_{irr}	potenza media irradiata da un dipolo
{P_{irr}	potenza istantanea irradiata da un dipolo
P_τ	potenza elettrica specifica
P_Ω	potenza media irradiata per unità di angolo solido
p	momento di dipolo elettrico di una distribuzione qualsiasi di cariche
P = lim_{Δτ → 0} Δp / Δτ	intensità di polarizzazione
P_{micr}	momento di dipolo elettrico atomico
P_{mol}⁽ⁱ⁾	momento di dipolo elettrico della <i>i</i> -esima molecola
P	vettore di Poynting
q, Q	carica elettrica
q_e, -e	carica dell'elettrone (con segno)
q_{est}	carica esterna
q_p	carica del protone
Q_{ps}	carica di polarizzazione su una superficie
Q_{tot}, Q	carica totale
Q_{em}	quantità di moto del campo elettromagnetico

R	resistenza
R_{eq}	resistenza equivalente
R_{est}	raggio esterno
R_g	resistenza interna della pila
R_{int}	raggio interno
ρ	densità di volume di carica elettrica
ρ_{lib}	densità (di volume) di carica libera
ρ_m	densità di massa
ρ_p	densità di volume di carica di polarizzazione
S	fattore di smagnetizzazione
σ	densità superficiale di carica
Σ_{em}	brillanza energetica
σ_{lib}	densità superficiale di carica libera
σ_p	densità superficiale di carica di polarizzazione
T	energia cinetica
	temperatura
T_c	temperatura critica
T_C	temperatura di Curie
T	tensori degli sforzi elettromagnetici
\mathcal{T}	energia cinetica relativistica
U	energia associata alla materia
U_e	energia potenziale elettrostatica
U_{e-}	energia elettrostatica della carica negativa di un dipolo immerso in un campo elettrico
U_{e+}	energia elettrostatica della carica positiva di un dipolo immerso in un campo elettrico
U_{em}	energia elettromagnetica
u_{em}	densità di energia elettromagnetica
U_m	energia magnetica
u_m	densità di energia magnetica
U_{tot}	energia totale
u_e	densità di energia elettrostatica
Φ_{sp}	flusso del campo magnetico concatenato con una spira di un solenoide
Φ_γ	flusso del campo magnetico concatenato con una linea chiusa γ
Φ_Σ	flusso del campo elettrico crescente da una superficie chiusa
χ	suscettività elettrica
V	potenziale elettrostatico
$\langle v \rangle$	velocità media degli elettroni in un conduttore
V_{ind}	potenziale prodotto dalla distribuzione di cariche indotte

W	energia
W_g	lavoro compiuto dai campi elettromotori
\dot{W}	potenza meccanica
\dot{W}_{diss}	potenza meccanica dissipata
Z_0	impedenza caratteristica del vuoto

Indice analitico

- Aberrazioni, 566
Ampère, legge di, 254
Ampere (A), unità di corrente, 288
Anisotropi, propagazione nei mezzi, 545 sgg.
Armoniche, funzioni:
 teorema della media per le, 761
 teorema del massimo (e minimo) per le, 762
 teoremi di unicità per le, 763
- Barlow, ruota di, 365
Belli, duplicatore di, 137
Bessel, funzioni di, 496
Bohr, magnetone di, 317
Bottiglia di Leyda, 141
- Cammino:
 elettromagnetico, 482
 ottico, 554
Campi scalari, 712
Campi vettoriali, 712
 centrali, 742
 irrotazionali, 752
 rotazionali, 752
 solenoidali, 749
Campo di corrente stazionario:
 condizioni al contorno per un, 222
 legge di solenoidalità per un, 209
 proprietà di irrotazionalità per un, 211
Campo elettrico:
 definizione di, nei mezzi materiali, 158
 definizione di, nel vuoto, 26
 efficace, 183
 macro- e microscopico, 150
Campo elettromotore, 215
Campo magnetico:
 definizione di, nei mezzi materiali, 333
 definizione di, nel vuoto, 200
 efficace, 341
- Capacità:
 di un condensatore, 119
 di un conduttore isolato, 108
Carica elettrica:
 conservazione della, 21
 definizione di, 3, 198
 dell'elettrone e del protone, 19
 densità lineari, superficiali, di volume di, 33
 quantizzazione della, 21
Cauchy, valore principale secondo, di un integrale
 improprio, 786
Ciclotrone, 304
Circuitazione di un campo vettoriale, 739
Circuito oscillante, 412
Clausius-Mossotti, equazione di, 195
Coefficiente(i):
 di auto- e mutua induzione, 279
 di temperatura, 247
Coerenza:
 durata di, 603
 lunghezza di, longitudinale, 609
Condensatore(i):
 a carta, 141
 ceramici, 142
 definizione di, 115
 in parallelo e in serie, 125
Condizioni al contorno:
 per il campo elettrico, 175
 per il campo magnetico, 325
Condizioni di regolarità all'infinito:
 per il campo magnetico, 257
 per il potenziale elettrico, 104
Conducibilità elettrica, 212
Conduttanža, 224
Connessione lineare, domini a, 737
Coordinate:
 cartesiane, 709
 cilindriche, 710
 sferiche, 711

- Correlazione:**
 coefficienti di auto- e mutua, 598 sgg.
 funzioni di auto- e mutua, 538 sgg.
- Corrente elettrica:**
 di conduzione, 204
 di convezione, 204
 di spostamento, 369
 intensità di, 203
- Coseno integrale, *vedi* Integrale di Fresnel**
- Costante dielettrica:**
 assoluta e relativa, 164
 del vuoto, 17
- Coulomb:**
gauge di, 384
 legge di, 16
 teorema di, 100
- Coulomb (C), unità di carica, 203**
- Curie, temperatura di:**
 per i dielettrici, 196
 per i mezzi magnetici, 353
- Curva di sensibilità dell'occhio umano, 648**
- D'Alembert, equazione di, 428**
- D'alembertiano, operatore, 676**
- Densità di carica di polarizzazione, 154**
- Densità di corrente:**
 di volume, 205
 molecolare, o di polarizzazione magnetica, 317
 superficiale, 206
- Derivata direzionale, 734**
- Diamagnetismo, 339**
- Difrazione:**
 di Fraunhofer da un foro circolare, 631 sgg.
 di Fraunhofer da un foro rettangolare, 628 sgg.
 di Fresnel, 617 sgg.
 di Sommerfeld, 503
 fenomeni di, 488 sgg.
 frange di, 489 sgg.
- Diodo a vuoto, 243**
- Diotto:**
 piano, 568 sgg.
 sferico, 571 sgg.
- Dipolo:**
 elettrico ideale, 85
 magnetico ideale, 275
 oscillante, 469 sgg.
 diagramma di radiazione di un, 477
 energia irradiata da un, 476
- Dirac, funzione impulsiva di, 790**
- Dirichlet:**
 condizioni di, 769
 problema di, esterno, 765
 problema di, interno, 765
- Dispersione:**
 anomala, 525
 normale, 524
- Distanza focale, 592**
- Divergenza di un campo vettoriale:**
 definizione di, 747
 teorema della, 749
- Doppler, effetto, 702**
- Durata propria di un intervallo temporale, 664**
- Effetti piro- e piezoelettrici, 195**
- Effetto pelle, 532**
- Efficienza di magnetizzazione, 332**
- Elettrizzazione, fenomeni di, 11**
- Elettrodinamometro assoluto, 307**
- Elettrometro assoluto, 135**
- Elettronvolt (eV), unità di energia, 191**
- Elettroskopio a foglie, 22**
- Energia del campo elettromagnetico:**
 densità di, 398
 densità di, valor medio temporale della, 446
 densità di corrente di, 438
- Energia elettrostatica:**
 densità di, 79
 di un sistema di cariche, 75
 di un sistema di conduttori carichi, 130
- Energia magnetica:**
 densità di, 396
 di un sistema di correnti, 385
- Energia relativistica:**
 cinetica, 689
 di riposo, 689
- Equazioni integrali, 501**
- Equilibrio:**
 elettrostatico, 98
 magnetoidrostatico, 295
- Etere cosmico, 551, 653**
- Farad (F), unità di capacità, 108**
- Faraday:**
 gabbia di 109
 -Neumann, legge di, 360
- Fase stazionaria, teorema della, 509**
- Fattore di smagnetizzazione, 322**
- Fermat, teorema (o principio) di, 554**
- Ferroelettricità, 196**
- Ferromagnetismo, 347 sgg.**
- Feynman, formule di, 469**
- Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie, 743**
- Forma d'onda:**
 spaziale, 431
 temporale, 431
- Forza:**
 coercitiva, 351
 elettromotrice, 215
 di autoinduzione, 385
 indotta, 362

- specifica prodotta da un campo magnetico sulle correnti, 287
- Fotone, 492
- Foucault, correnti di, 412
- Fourier:
- integrale di, 773
 - serie di, 769
- Fresnel, integrale di, 505
- Fronte d'onda, 441
- Funzione sinusoidale, 767
- ampiezza di una, 767
 - fase iniziale di una, 767
 - frequenza di una, 767
 - pulsazione di una, 767
- Galvanometro magnetelettrico, 308 sg.
- Gauss:
- legge di, per il campo elettromagnetico, 360
 - legge (o teorema) di, per il campo elettrostatico, 40
 - Ostrogradskij, teorema di, 749
- Gradiente:
- di un campo scalare, 734
 - di un campo vettoriale, 88
- Grandezze:
- classificazione delle, 712 sgg.
 - fotometriche, 643
- Green, teorema di, 618
- Hafele e Keating:
- esperimento di, 700
- Hall, effetto, 309
- Hanbury Brown e Twiss, esperienza di, 614
- Hankel, funzioni di, 496
- Helmholtz:
- equazione di, 445 sg.
 - teorema di scomposizione di, 753
- Henry (H), unità di induttanza, 280
- Huygens, principio di, 551
- Iconale, equazione dell', 556
- Impedenza caratteristica:
- del vuoto, 436
 - di un mezzo, 514
- Indice di rifrazione di un mezzo, 514, 538
- Induzione:
- elettromagnetica, 362
 - elettrostatica, distribuzione di cariche di, 111
 - elettrostatica, fenomeni di, 22
 - magnetica, *vedi* Campo magnetico
 - magnetelettrica, 369
- Ingrandimento:
- angolare, 566
 - assiale, 565
 - lineare, 565
 - trasversale, 565
- Integrale di linea di un campo vettoriale, 738
- Intensità:
- del campo magnetico, 321
 - di magnetizzazione, 317
 - di polarizzazione elettrica (o vettore di polarizzazione), 150
- Interferenza:
- di onde sinusoidali nel vuoto, 479 sg.
 - di radiazioni luminose correlate, 603 sg.
 - di radiazioni luminose incorrelate, 613
 - esperienza di, di Michelson-Morley, 611 sg.
 - esperienza di, di Young, 611
 - frange di, 486
- Intervallo spaziotemporale, 671
- Invariante di Lagrange-Helmholtz, 576
- Invarianza delle leggi fisiche, 653
- Ionosfera, propagazione nella, 532
- Irrazionalità, legge di, per il campo elettrostatico, 44
- Isteresi:
- dielettrica, 196
 - magnetica, 323
- Joule, legge di:
- in forma integrale, 226
 - in forma locale, 213
- Kelvin, elettrometro di, 135
- Kolbe, elettrometro di, 136
- Kronecker, simbolo di, 722
- Lamina:
- a mezza onda, 548
 - a quarto d'onda, 548
- Langevin, funzione di, 191
- Laplace:
- equazione di, 73
 - legge elementare di, 271
- Laplaciano:
- di un campo scalare, 755
 - di un campo vettoriale, 755
- Larmor:
- precessione di, 340
 - teorema di, 340
- Lente elettrostatica, 244
- Lenti ottiche, 593
- Lenz, legge di, 364
- Linee e superfici di livello, 730 sg.
- Linee vettoriali (o di flusso), 731
- Liénard-Wiechert, potenziali di, 464
- London e London, equazione di, 796
- Lorentz:
- contrazione di, 654
 - gauge* di, 384
 - Lorenz, relazione di, 526
 - trasformazioni di, 655

- Lunghezza:
di penetrazione, 300
propria di un regolo, 662
- Magnetizzazione residua, 351
- Massa(e):
di riposo, 688
dinamica relativistica, 688
magnetiche, 335
- Matrice:
di riflessione, 585
di rifrazione, 582
di traslazione, 582
globale del sistema ottico, 583
- Maxwell:
equazioni di, 377
tensore di, 401
- Meissner, effetto, 300
- Metodo simbolico, 779
- Michelson-Morley, esperienza di, 695
- Microscopio ottico, 640
- Millikan, esperienza di, 54
- Minkowski, spaziotempo di, 485
- Momento elettrico:
di multipolo, 81
di una molecola (o atomo), 187
di un dipolo, 85
- Momento magnetico:
atomico medio, 318
di multipolo, 271
di una molecola (o atomo), 343
di un dipolo, 275
- Monopoli magnetici, 337
- Muoni, rilevamento dei, 701
- Nabla, operatore, 756
- Neumann, problemi di, 765
- Newton, equazione ottica di, 573
- Nichols, disco di, 235
- Numeri quantici, 348
- Obiettivi, 636
- Ohm, legge di:
in forma integrale, 224
in forma locale, 211
- Ohm (Ω), unità di resistenza, 224
- Omografia vettoriale, 725
- Onde elettromagnetiche nei mezzi materiali:
equazione delle, in assenza di sorgenti, 513
“evanescenze”, 543
plane nei dielettrici dispersivi, 520 sgg.
attenuazione di, 523
plane nei mezzi conduttori, 529 sgg.
propagazione di, nei mezzi anisotropi, 545 sgg.
riflessione e rifrazione di, 534 sgg.
vedi anche Onde elettromagnetiche nel vuoto
- Onde elettromagnetiche nel vuoto:
equazione delle, in assenza di sorgenti, 427
plane, 433
energia associata a, 437
intensità istantanea di, 437
sferiche, 438
sinusoidali, 442
energia associata a, 446
plane, polarizzazione di, 452
velocità delle, 428
di fase di, 452, 458
di gruppo di, 459
- Operatori quadridimensionali, 674
- Ottica geometrica, leggi dell', 552 sg.
- Paramagnetismo, 345
- Pauli, principio di esclusione di, 348
- Permeabilità magnetica:
assoluta e relativa, 322
del vuoto, 254
- Plimpton e Lawton, esperienza di, 54
- Poisson, equazione di, 73
- Polarizzabilità:
atomica o ionica, 188
elettronica, 187
molecolare complessa, 517
molecolare totale, 192
per orientamento bipolare, 191
- Potenza attiva (o reale) erogata da un generatore, 420
- Potenziale(i):
elettromagnetico, 380
elettrostatico, definizione di, 63
elettrostatico, differenza di, 65
magnetico scalare, 255
magnetico vettore, 268
ritardati, 449
- Poynting:
teorema di, 398
vettore di, 398
- Pressione:
di radiazione, 492
elettrostatica, 103
magnetica, 289
- Principio:
di costanza della velocità della luce nel vuoto, 654
di relatività, 654
- Prisma ottico (a dispersione), 634
- Prodotto:
scalare (o interno) di vettori, 716
vettoriale (o esterno), 716
- Pulsazione:
complessa, 521
di risonanza, 516

- Punti coniugati, 562
Punto-immagine:
 reale, 562
 virtuale, 563
Punto-oggetto:
 reale, 562
 virtuale, 563

Quadrivettori, 672
Quantità di moto:
 del campo elettromagnetico, 403
 -energia, quadrivettore, 690
 relativistica, 687
Quanto di energia, 492
Quark:
 definizione di, 22
 ricerca dei, 56

Raggi parassiali, 569
Raggio luminoso, 552
Resistenza elettrica, 224
Resistività elettrica, 212
Resistori in parallelo e in serie, 230
Rifrazione, indice di, 514
Rotore di un campo vettoriale, 750
Rowland, esperienza di, 307

Seno integrale, *vedi* Integrale di Fresnel
Sistema ottico:
 acromatico, 566
 afocale (o telescopico), 593
 cromatico, 566
 fuochi di un, 588
 piani focali di un, 588
 piani nodali di un, 591
 piani principali di un, 589
 proprietà di un, 562 sgg.
Sistemi inerziali, 707
Sommerfeld, condizione di radiazione di, 473
Sovrapposizione, principio di:
 per i campi elettrostatici, 29
 per i campi magnetostatici, 257
 per le forze elettrostatiche, 19
Specchi di Fresnel, 604 sgg.
Spin, 348

Spostamento:
 densità di corrente di, 369
 vettore, 162
Stokes, teorema di, 750
Superfici vettoriali di un campo vettoriale, 733

Tensiometro magnetico, 408
Tensione:
 elettrica, 362
 magnetica, 410
Tensore:
 degli sforzi e.m., 401
 elettromagnetico quadridimensionale, 677
Torema di unicità per il campo elettromagnetico,
 404
Teoria corpuscolare e teoria ondulatoria della luce,
 55
Tesla (T), unità di induzione magnetica, 201
Trascinamento dell'etere, 699
Trasformatore, 425
Trasformazioni:
 di accelerazioni, 666
 di campi elettrici e magnetici, 678
 di densità di carica e di corrente, 666
 di velocità, 664
 galileiane speciali, 651
Tubo:
 catodico, 302
 di flusso, 691

Van de Graaf, generatore di, 137
Velocità media degli elettroni in un conduttore,
 204
Vettore d'onda, 456
Vettore, polarizzazione nei dielettrici, 150
Volt (V), unità di tensione elettrica, 66
Volta, pila di, 232
Voltmetro elettrostatico, 139

Waltenhofen, pendolo di, 412
Weber (Wb), unità di flusso magnetico, 254
Weiss:
 campo interno di, 348
 domini di, 355
Weston, pila di, 232