

Esercitazione 6: Gravitazione

1. Un corpo celeste a distanza R dal sole si muove verso di esso con una velocità che forma un angolo di 45° rispetto alla retta che lo congiunge con il sole. L'energia totale è nulla (se si assume che l'energia potenziale all'infinito sia nulla). Quale è la forma della traiettoria che il corpo compie intorno al sole? Si calcoli la distanza r_p di massimo avvicinamento.

Parabolica; $r_p = R/2$.

2. Un pianeta sferico ha massa M e raggio R . Dalla sua superficie viene lanciato un proiettile con una velocità iniziale $v_0 = 3/4\sqrt{2\gamma M/R}$. Si calcoli la massima distanza raggiunta dal proiettile dal centro del pianeta nel caso in cui venga lanciato:
 - (a) in direzione radiale;
 - (b) in direzione tangenziale.

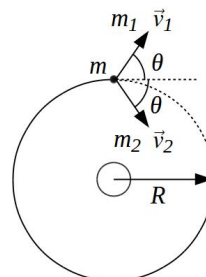
$$(a) d_{\max} = \frac{16}{7}R; \quad (b) d_{\max} = \frac{9}{7}R.$$

3. A quale distanza dalla superficie terrestre si trova un satellite geostazionario in orbita intorno alla Terra? Supponendo che la base di lancio si trovi all'equatore e che la massa del satellite sia $m = 800$ kg, qual è l'energia necessaria per porlo in orbita?

$$r = 35858 \text{ km}; \quad E = 4.28 \times 10^{10} \text{ J}$$

4. Un satellite di massa m sta orbitando attorno alla terra con traiettoria circolare di raggio R . Ad un certo punto esplode e si separa in due frammenti di massa $m_1 = \frac{3}{4}m$ e m_2 nelle direzioni indicate in figura, con $\theta = \pi/3$.

- (a) Con che velocità v_1 e v_2 si muovono inizialmente i due frammenti?
- (b) Che traiettoria ha ciascuno dei due?
- (c) Quale dei due frammenti si avvicina di più alla terra?



$$v_1 = \frac{4}{3}v, \quad v_2 = 4v; \quad m_1: \text{ellittica}, \quad m_2: \text{iperbolica}; \quad m_1 \text{ si avvicina di più.}$$

5. Due particelle sferiche di massa m ed M e di raggio r e R , soggette unicamente alla mutua interazione gravitazionale, sono inizialmente ferme, a distanza d_0 . Si calcoli la velocità di ciascuna delle due particelle quando si toccano.

$$v = M\sqrt{\frac{2\gamma}{m+M}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0}\right)}, \quad \text{con } d = r + R; \quad V = \frac{m}{M}v$$

Esercizi aggiuntivi

6. Un satellite artificiale di massa m sta ruotando attorno alla Terra lungo un'orbita circolare di raggio $r = 2R$, dove R è il raggio della Terra. Ad un certo istante il satellite viene urtato in modo perfettamente anelastico da un meteorite avente massa $m/3$ che viaggia con la stessa velocità e direzione opposta. Determinare l'orbita del satellite dopo l'urto.

Orbita ellittica, perigeo $r_p = 2/7 R$: il satellite collide con la Terra.

7. Che raggio r_S dovrebbe avere il sole affinché neppure la luce riesca a sfuggirvi? Supporre la massa del sole costante, pari a $M_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg. E la terra? (Massa della terra: $M_T = 5.972 \times 10^{24}$ kg, velocità della luce $c = 299792458$ m/s).

$$r_S < 2949 \text{ m} ; r_T < 8.86 \text{ mm}$$

8. Un razzo viene lanciato verticalmente dalla Terra per essere messo in orbita. Calcolare la velocità minima iniziale del razzo per poter sfuggire all'attrazione gravitazionale (trascurare ogni interazione con altri corpi in orbita), e l'altezza massima raggiunta nel caso venga lanciato con una velocità dimezzata rispetto a quella calcolata. Trascurare la rotazione terrestre. Considerare: $R_T = 6.231 \times 10^6$ m; $M_T = 5.972 \times 10^{24}$ kg; $\gamma = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg².

$$v = 40706 \text{ km/h}; r = R + R/3$$

9. Una cometa di massa m sta viaggiando con velocità $v_0 = 52$ km/s verso il Sole quando si trova ad una distanza $d = 10^{11}$ m inclinata di un angolo $\alpha = 45^\circ$ rispetto alla retta congiungente la cometa al sole. Trovare l'energia della cometa, il suo momento angolare e la distanza minima di avvicinamento al Sole. Considerare $M_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg.

$$E = 2.51m \times 10^7 \text{ J/kg}; L = 3.7m \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}; r_{\min} = 5.05 \times 10^{10} \text{ m}$$