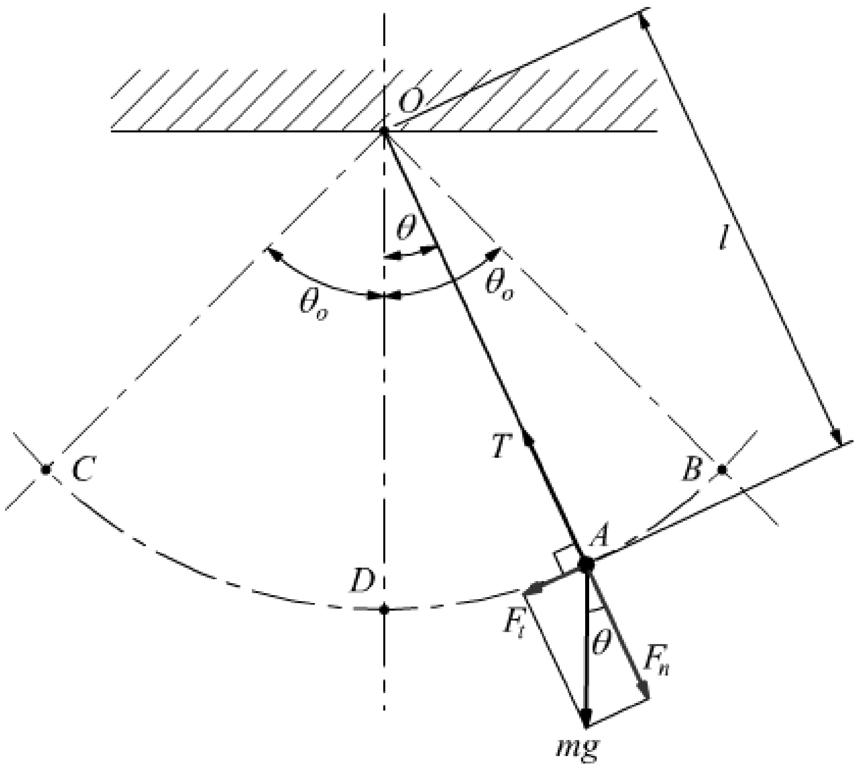
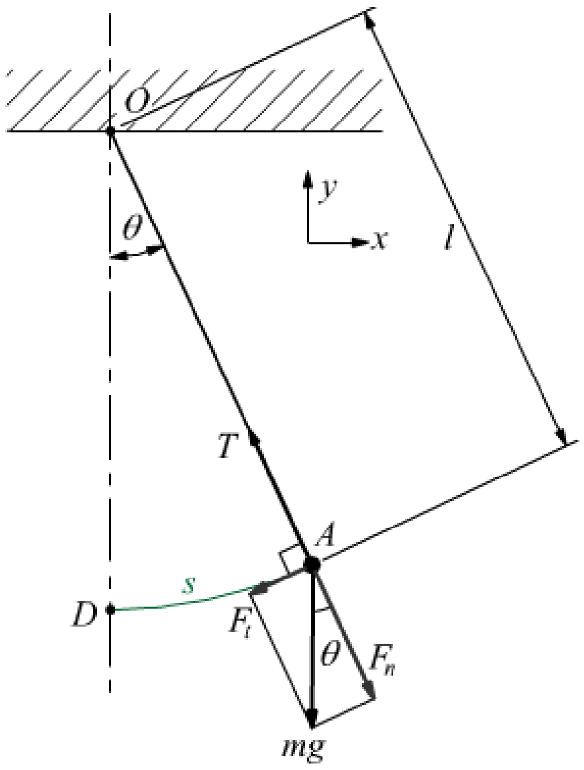
Pendolo semplice

Il pendolo semplice è definito come una particella di massa m, sospesa ad un punto O ad un filo inestensibile di lunghezza l e di massa trascurabile



In condizione di equilibrio statico il corpo occupa la posizione D,in modo che il proprio baricentro si trovi sulla retta verticale passante per il punto di sospensione O.
Scostando il corpo puntiforme dalla sua posizione di equilibrio, fino a portarlo al punto B, esso tende a tornare in D, ma per inerzia non si ferma in quel punto, bensì prosegue fino alla posizione C,simmetrica al punto B di partenza.
Poi, invertito il moto, ritornerà in B compiendo una serie di oscillazioni che se si trascurano le resistenze passive saranno tutte uguali e continueranno indefinitivamente nel tempo.
La presenza delle resistenze passive altera in realtà lo stato di cose appena descritte: le oscillazioni diverranno sempre meno ampie (oscillazioni smorzate) e pian piano il pendolo ritornerà nella sua condizione di equilibrio in D.



Identificando con s l'arco di circonferenza AD cerchiamo adesso, di studiare il moto della massa m tenendo conto del sistema di riferimento cartesiano adottato.

$$s = l\theta \longrightarrow \dot{s} = l\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{s} = l\ddot{\theta}$$

$$F_t = -p\sin\theta = -mg\sin\theta \qquad F_n = -p\cos\theta = -mg\cos\theta$$

La componente F_n si elide col tiro T del filo che abbiamo detto è indeformabile. La componente F_t produce il moto del corpo verso la sua posizione di equilibrio ma la sua intensità in funzione del seno dell'angolo decresce fino ad annullarsi nel punto D in cui $\theta=0$.
Per la seconda legge della dinamica

$F_t = ma_t$ ma se un moto si svolge lungo una traiettoria circolare di raggio R si avrebbe

$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$ perchè $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ con ω: velocità angolare

nel nostro caso R=l=lunghezza del filo

$$F_t = -mg\sin\theta \longrightarrow ma_t = -mg\sin\theta \longrightarrow ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

quindi l'equazione del moto è $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

dunque bisogna risolvere l'equazione differenziale omogenea di secondo grado a coefficienti costanti che se manteniamo in questa forma è molto laboriosa da risolvere e porta a considerare degli integrali ellittici. Limitiamoci allora a valutare questa relazione solo per le piccole oscillazioni ponendo

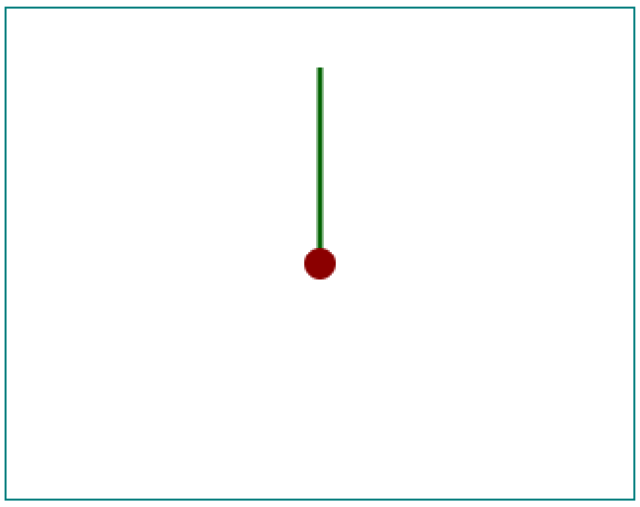
$\theta \cong \sin\theta \longrightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ con $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

quest'ultima può essere ricondotta all'equazione del moto armonico che ha soluzione $\theta = \theta_o \cos(\omega t + \phi)$

con θ_o e φ costanti di integrazione dipendenti dalle condizioni iniziali, in cui il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Si vede che il periodo è indipendente dalla massa del pendolo e dall'ampiezza delle oscillazioni.



: angolo 45°

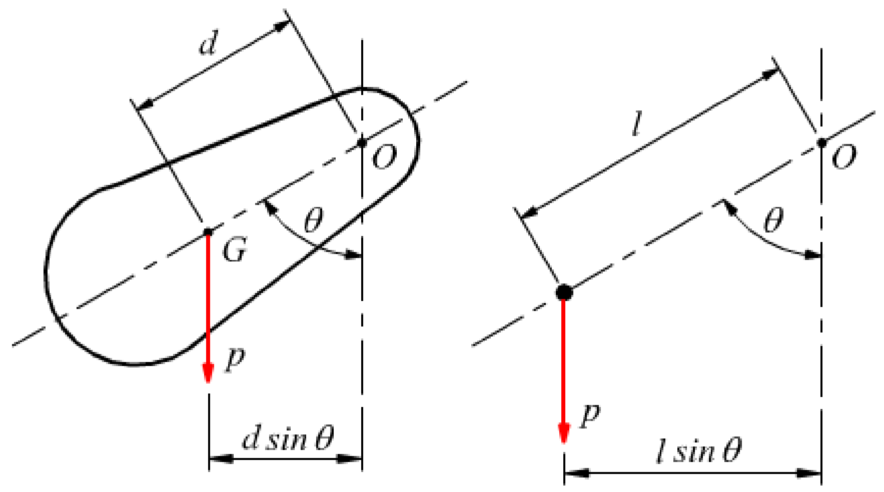
: lunghezza 100px

: smorzamento 5

oK reset

Pendolo composto

Supponiamo di vincolare parzialmente un corpo di forma qualsiasi,ponendo una cerniera (O) in un punto diverso dal suo baricentro



il corpo soggetto esclusivamente al peso proprio, è in equilibrio solo quando la retta d'azione del peso passa per la cerniera O.
Se viene spostato da tale posizione, inizia una serie di oscillazioni,esattamente come un pendolo.

E' chiaro però che ad esso non possono essere applicate le leggi del pendolo, ricavate nel caso precedente del pendolo semplice, a causa della diversa distribuzione dei pesi parziali. Un sistema oscillante come quello descritto viene solitamente chiamato pendolo composto .

Lo studio dinamico di un pendolo composto è notevolmente semplificato, se si ricorre all'artificio di ricondurre il suo moto a quello di un pendolo semplice di lunghezza l (lunghezza ridotta).
Il corpo rigido costituente il pendolo composto è soggetto ad un momento

$M = p d \sin\theta$ Applicando il principio di D'Alembert $M = J\varepsilon$

con J : momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione ed ε : accelerazione angolare; si ha

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{pd\sin\theta}{J} \longrightarrow \varepsilon = \frac{mgd\sin\theta}{J}$$

J può essere ottenuto dal momento di inerzia baricentrico J_G con la formula di trasposizione

$$J = J_G + md^2 \quad \text{con} \quad J_G = m\rho^2$$

con ρ : raggio di inerzia rispetto al baricentro del corpo; ne consegue

$J = m\rho^2 + md^2 = mK$ con $K = \rho^2 + d^2$ raggio giratore ; si ha in definitiva

$$\varepsilon = g\left(\frac{d\sin\theta}{\rho^2 + d^2}\right)$$

Invece, il pendolo semplice equivalente, è soggetto ad un momento

$M = pl\sin\theta = mgl\sin\theta$ per questo $J = ml^2$ per il principio di D'Alembert

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{mgl\sin\theta}{ml^2} \longrightarrow \varepsilon = g\left(\frac{\sin\theta}{l}\right)$$

dato che per i due pendoli devono valere le stesse regole dinamiche, le accelerazioni angolari ε devono essere uguali

$g\left(\frac{\sin\theta}{l}\right) = g\left(\frac{d\sin\theta}{\rho^2 + d^2}\right) \longrightarrow l = \frac{\rho^2 + d^2}{d}$ Il periodo delle oscillazioni sarà dunque

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \longrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho^2 + d^2}{gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}}$$

Si nota come il periodo del pendolo composto sia indipendente dalla sua massa e dalla sua forma geometrica.
Alle stesse conclusioni si potrebbe arrivare inquadrando il sistema nel sistema di coordinate già usando in precedenza

$$\begin{cases} M = -mgd\sin\theta \\ \varepsilon = \ddot{\theta} \end{cases}$$ usando l'equazione $M = J\varepsilon \longrightarrow -mgd\sin\theta = J\ddot{\theta}$

sempre usando l'approssimazione sinθ~θ

$$J\ddot{\theta} + mgd\theta = 0 \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J}\theta = 0$$

essendo $J = mK^2$ diventa $\ddot{\theta} + \left(\frac{gd}{K^2}\right)\theta = 0$ risolvendo in modo analogo alll'equazione precedente si avrebbe

$$\omega^2 = \frac{gd}{K^2} \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{gd}{K^2}} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2}{gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho^2 + d^2}{gd}}$$