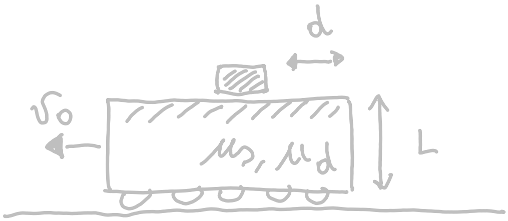
ESERCIZIO 1



$d = L/4$

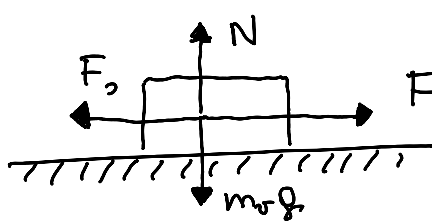
$\mu_s = 0.3$

$\mu_d = 0.2$

ad un certo istante, il treno accelera con accelerazione pari a A (verso sinistra)

(a) a_{min} perché la valigia cominci a muoversi

Nel sistema di riferimento solidale con il treno, durante il moto accelerato, se la valigia resta ferma rispetto al treno, allora:



$F_{app} = m_v A$

dove ho definito m_v la massa della valigia. Risolvo l'eq. di Newton per trovare F_s e verifico in quale caso

$F_s \le F_s^{MAX}$

EQ. NEWTON $\begin{array}{c|l} x & m_v a - F_s = 0 \\ y & N - m_v g = 0 \end{array}$

$$\begin{cases} F_s = m_v A \\ N = m_v g \end{cases} \Rightarrow F_{s\,max} = \mu_s N = \mu_s m_v g$$

Allora la valigia resta solidale al treno se

$$F_s = m_v A \leq F_{s\,max} = \mu_s m_v g$$

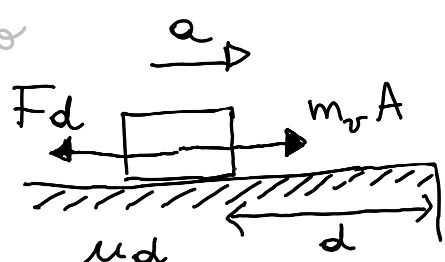
OVVERO $\quad A \leq \mu_s g$

La valigia invece comincia a muoversi se

$$A > A_{min} = \mu_s g$$

(b) Si assuma ora $A = 4 A_{min} = 4 \mu_s g$

calcolare velocità della valigia nel SdR (Sistema di Riferimento) solidale con il treno quando raggiunge il bordo del treno



Dato che la volpe si muove, su di essa agisce la forza d'attrito dinamico.

EQ. NEWTON
$$\begin{cases} x & m_v A - F_d = m_v a \\ y & N = m_v g \end{cases}$$

dove a è l'accelerazione della volpe nel SdR relativo.

$$F_d = \mu_d m_v g$$

$$x: \quad m_v A - \mu_d m_v g = m_v a$$

$$\Rightarrow \quad a = A - \mu_d g = 4 A_{min} - \mu_d g =$$

$$= 4 \mu_s g - \mu_d g = g(4\mu_s - \mu_d)$$

Nota l'accelerazione, posso trovare la legge oraria della velocità e della posizione

$$v(t) = a \cdot t \qquad x(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

Quando raggiungo il bordo (al tempo t_s)

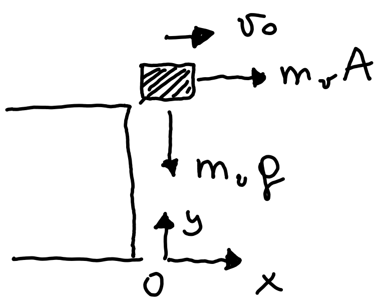
$$\begin{cases} v(t_s) = a \cdot t_s = a\sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{2da} \\ x(t_s) = d = \frac{1}{2} a t_s^2 \qquad t_s = \sqrt{\frac{2d}{a}} \end{cases}$$

Da cui si ricava la velocità al momento del distacco:

$$v(t_0) = \sqrt{2da} = \sqrt{2dg(\mu_0 - \mu_d)} = \sqrt{\frac{L}{2}g(1.2-0.2)} = \sqrt{\frac{Lg}{2}}$$

(c) Calcolare la distanza tra la volpe e il bordo posteriore del treno quando la volpe tocca terra.

Anche in questo caso conviene rimanere nel SdR solidale con il treno.



Sulla volpe, che si stacca dal treno con velocità $v_0 = \sqrt{\frac{Lg}{2}}$, agiscono la forza di gravità e la forza apparente $m_v A$

EQ NEWTON

$$\begin{cases} m_v A = m_v a_x \\ -m_v g = m_v a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = A \\ a_y = -g \end{cases}$$

Ho dunque le seguenti leggi orarie lungo x e lungo y

$$\begin{cases} v_x(t) = A \cdot t + v_0 \\ x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} A t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y(t) = -g t \\ y(t) = L - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Quando tocco terra, mi trovo a distanza D dalla coda del treno, che è la mia incognita. Cado a terra al tempo t_f

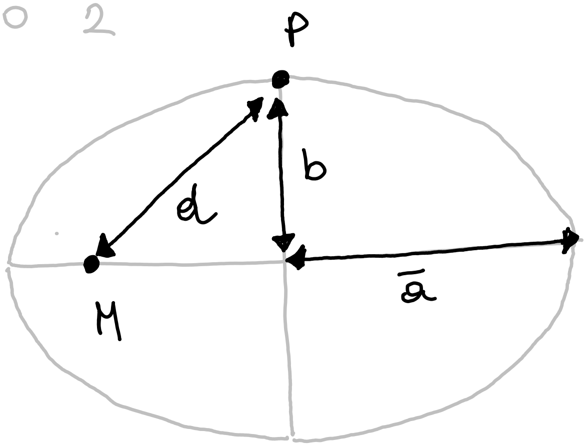
$$\begin{cases} x(t_f) = D = v_0 t_f + \frac{1}{2} A t_f^2 \\ y(t_f) = 0 = L - \frac{1}{2} g t_f^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ t_f = \sqrt{\frac{2L}{g}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = v_0 \sqrt{\frac{2L}{g}} + \frac{1}{\cancel{2}} A \frac{\cancel{2}L}{g} = \frac{LA}{g} + v_0 \sqrt{\frac{2L}{g}} \\ \dots \end{cases}$$

$$D = L\frac{A}{g} + v_0 \sqrt{\frac{2L}{g}} = L \frac{4 \mu_s \cancel{g}}{\cancel{g}} + \sqrt{\frac{L\cancel{g}}{\cancel{2}}} \sqrt{\frac{\cancel{2}L}{\cancel{g}}} =$$

$$= 4 \cdot \mu_s \cdot L + L = 1.2 L + L = 2.2 L$$

ESERCIZIO 2



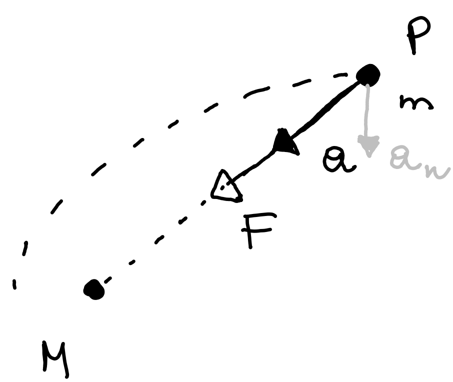
(ho rinominato il semiasse maggiore)

$\bar{a} = 4 \cdot 10^{11}$ m

$b = a/2 = 2 \cdot 10^{11}$ m

$d = \bar{a} = 4 \cdot 10^{11}$ m

(a) determinare in P l'accelerazione totale e la componente normale dell'accel.



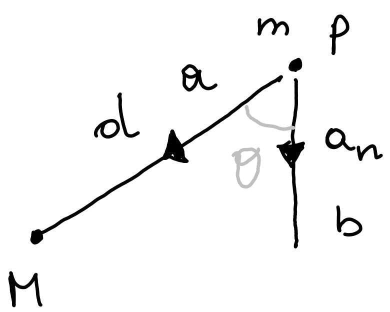
L'accelerazione tot. a è sempre diretta come la forza totale agente su m (in questo caso forza di interazione gravitazionale)

$$F = \frac{\gamma\, m M}{d^2} \qquad a = \frac{F}{m} = \frac{\gamma M}{d^2}$$

$$a = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1.989 \cdot 10^{30} \cancel{kg}}{(4 \times 10^{11} \cancel{m})^2}$$

$$= 0.83 \cdot \frac{10^{19}}{10^{22}} \frac{m}{s^2} = 8.3 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s^2}$$

Per trovare la componente normale, proietto l'accelerazione lungo la direzione normale



$$d \cos\theta = b$$

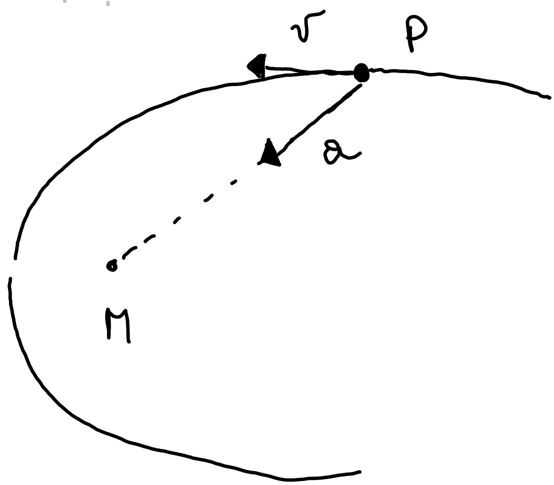
$$\cos\theta = \frac{b}{d}$$

$$a_n = a \cos\theta = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{\bar{a}/2}{d} = \frac{\bar{a}}{2d} = \frac{1}{2}$$

$(\bar{a} = d)$

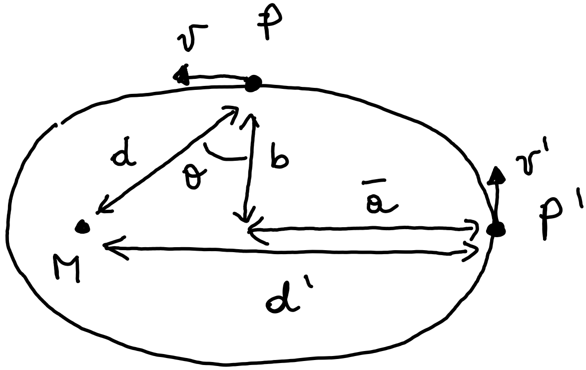
(b) Trova la velocità del pianeta in P.



Potrei scrivere $\frac{v^2}{R} = a_n$, dove R

è il raggio del cerchio osculatore, ovvero il raggio di curvatura della traiettoria, che però non conosco. Potrei cercare di calcolare R, dato che conosco tutti i parametri dell'ellisse, ma voglio seguire una strada diversa che utilizzi dei principi fisici.

↳ scelgo un altro punto della traiettoria e applico CONS. ENERGIA + CONS. MOMENTO ANGOLARE



CONS. ENERGIA TRA P e P'

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma m M}{d} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{\gamma m M}{d'}$$

dove $d' = \bar{a} + d\sin\theta = d(1+\sin\theta)$

dove $\cos\theta = \frac{b}{d} = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = 60^\circ$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d' = d\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

CONS. MOM. ANGOLARE TRA P e P'

$$d'v' = d\cos\theta \, v = bv$$

$$v' = \frac{bv}{d'} = \frac{dv}{2d'} = v/(2+\sqrt{3})$$

DUNQUE OTTENGO:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{\gamma \cancel{m} M}{d} = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{d^2 v^2}{4d'^2} - \frac{\gamma \cancel{m} M}{d'}$$

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - \frac{v^2}{(2+\sqrt{3})^2}\right) = \frac{\gamma M}{d}\left(1 - \frac{2}{2+\sqrt{3}}\right) =$$

$$\frac{v^2}{2}\left(\frac{4+3+4\sqrt{3}-1}{(2+\sqrt{3})^{\cancel{2}}}\right) = \frac{\gamma M}{d}\left[\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2+\sqrt{3}}}\right] =$$

$$v^2\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{\gamma M}{d}\sqrt{3}$$

$$v^2\cancel{\sqrt{3}}\underbrace{\left(\frac{3/\sqrt{3}+2}{2+\sqrt{3}}\right)}_{=1} = \frac{\gamma M}{d}\cancel{\sqrt{3}} \Rightarrow v^2 = \frac{\gamma M}{d}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma M}{m}}}$$

(c) trovare il raggio di curvatura.

Ora che conosco v, posso sfruttare la relazione che lega l'accelerazione normale a v per trovare il raggio di curvatura

$$\frac{v^2}{R} = a_n = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{R = \frac{v^2 \cdot 2}{a}}$$

RISULTATI NUMERICI:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{d}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\,\cancel{kg}}{4 \cdot 10^{11}\,\cancel{m}}}$$

$$= \sqrt{3.317 \cdot 10^8}\sqrt{\frac{\cancel{kg}\,m}{s^2}}\sqrt{\frac{m}{\cancel{kg}}} =$$

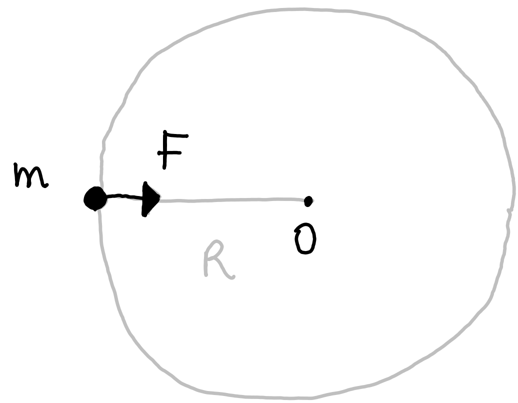
$$= 1.82 \cdot 10^4 \frac{m}{s} = 18.2 \frac{km}{s}$$

$$R = \frac{2v^2}{a} = \frac{2\gamma M}{d\,a} \leftarrow \frac{\gamma M}{d^2} = a$$

$$= \frac{2d\cancel{a}}{\cancel{a}} = 2d = 8 \cdot 10^{11}\,m$$

ESERCIZIO 3

$F = k/r^3$



nel caso rappresentato $r = R$, dunque

$$F = \frac{k}{R^3}$$

(a) calcolare il periodo del moto

$$F = m a_n \qquad a_n = \frac{F}{m} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_n}{R}} = \sqrt{\frac{F}{mR}}$$

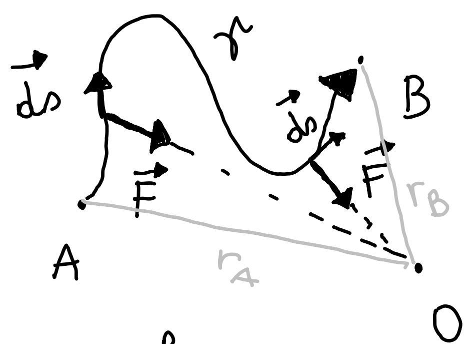
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mR}{F}} = 2\pi \sqrt{\frac{mR \cdot R^3}{k}} =$$

$$= 2\pi R^2 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\boxed{T = 2\pi R^2 \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

(b) EN. POTENZIALE in funzione di r

Il campo è conservativo se esiste U tale che $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ o se si dimostra che il lavoro lungo qualsiasi γ dipende solo dalla posizione iniziale e finale.

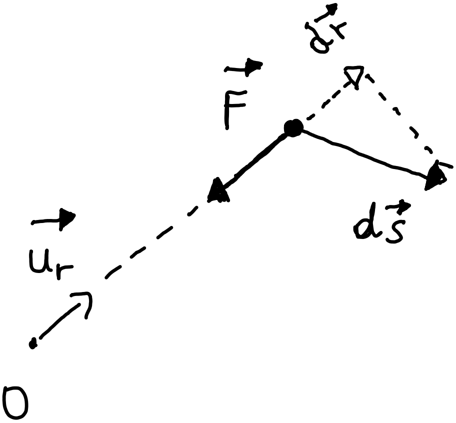


$$L_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

SOLO LA COMPONENTE di $\vec{ds}$ lungo la direzione normale contribuisce al lavoro

Definisco un sistema di riferimento con origine nel centro fisso O. Definisco $\vec{u_r}$ il versore radiale. Allora :

$$\vec{F} = -\vec{u_r}\,\frac{k}{r^3}$$



la componente di $d\vec{s}$ lungo $\vec{u_r}$ è

$$d\vec{r} = dr\,\vec{u_r}$$

Allora:
$$L = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} \overset{(A)}{=} -\int \frac{k}{r^3}\,\vec{u_r}\cdot dr\,\vec{u_r}$$

$$L = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{k}{r^3}\,dr \quad (B)$$

L'integrale curvilineo (A) è stato ridotto ad integrale semplice. Allora per il 2° teorema del calcolo integrale, se l'integrando ammette primitiva G su $[r_A, r_B]$, allora

$$L = G(B) - G(A)$$

la primitiva esiste ed è $G = \dfrac{k\,r^{-2}}{2}$

Ho dimostrato dunque che indipendentemente dal percorso, il lavoro dipende solo da posizione iniziale e finale, e dunque la forza è conservativa.

Ho anche trovato una primitiva di

$$f = \frac{-k}{r^3} \Rightarrow G = \frac{kr^{-2}}{2}$$

Se definisco $U = -G = -\frac{k}{2r^2}$, ricavo

$$L = U(A) - U(B) = -\Delta U_{AB}$$

Dunque ΔU_{AB} è la variazione di en. potenziale, e ho trovato l'energia potenziale

$$\boxed{U = -G = -\frac{k}{2r^2}}$$

(c) Durante il moto lungo la circonferenza, trovare E_{pot} e E_{cin}

$$E_{pot} = U(R) = -\frac{k}{2R^2}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{v^2}{R} = a_n = \frac{F}{m} = \frac{k}{R^3 m} \Rightarrow v^2 = \frac{k}{mR^2}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{k}{\cancel{m} R^2} = \frac{k}{2R^2}$$

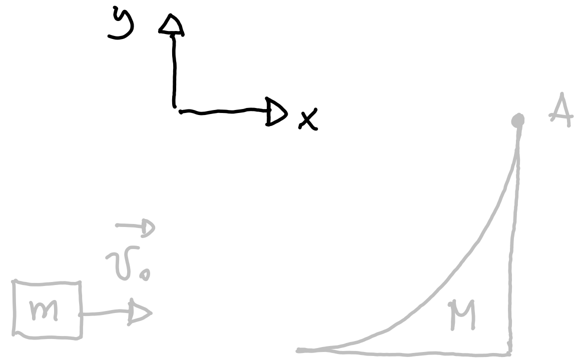
$$\boxed{E_{pot} = -\frac{k}{2R^2}} \qquad \boxed{E_{cin} = \frac{k}{2R^2}}$$

ESERCIZIO 4

$m = 1\ kg$

$M = 4\ kg$

$v_0 = 10\ \frac{m}{s}$



nel punto A, il profilo è verticale

(a) calcolare velocità di M, quando m raggiunge il punto A

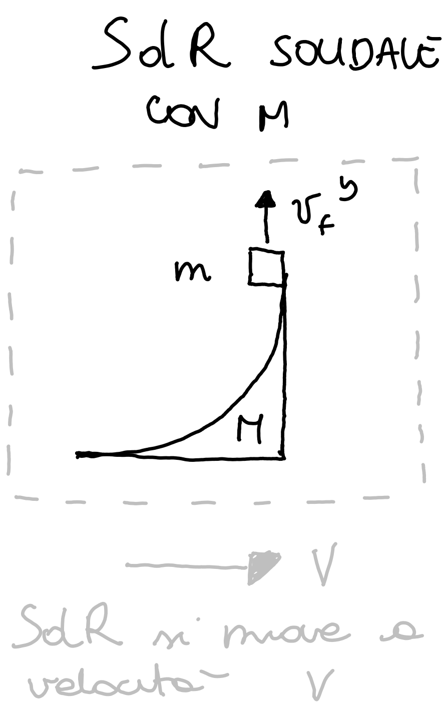
Deve valere CONS. Q. MOTO lungo x, dato che non ci sono forze esterne in orizzontale.

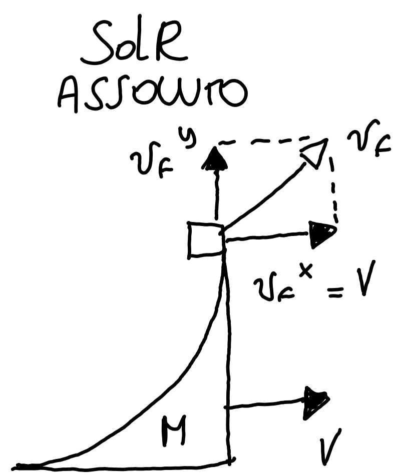
La q. moto iniziale è $\vec{p}_{in} = p_{in}^x \vec{u}_x$
con $p_{in}^x = m v_0$

Per capire come scrivere la q. moto finale conviene mettersi inizialmente nel SdR della massa M.

Dato che il profilo in A è verticale,

allora nel SdR solidale con M,
m avrà solo componente verticale v_f^y
Se SdR solidale con M si muove alla stessa velocità finale di M, pari a V.
Se torniamo nel SdR di un osservatore fermo sul piano, allora sia m che M hanno alla fine una componente orizzontale della velocità pari a V, come rappresentato nell'immagine.





Dunque la quantità di moto totale finale è pari a:

$$\vec{P}_{fin} = P_{fin}^{x}\, \vec{u}_x + P_{fin}^{y}\, \vec{u}_y$$

$$P_{fin}^{x} = mV + MV$$

$$P_{fin}^{y} = m v_f^{y}$$

Applicando cons. q. moto lungo x:

$$P_{in}^{x} = P_{fin}^{x}$$

$$m v_0 = (m+M)\, V \Rightarrow \boxed{V = \frac{m}{m+M} v_0}$$

$$V = \frac{1\,kg}{(1+4)\,kg}\, 10\,\frac{m}{s} = 2\,\frac{m}{s}$$

(b) velocità di m quando raggiunge la quota massima.

Quando raggiunge quota massima, resta solo la componente lungo x, che è pari a V.

(c) massima quota H raggiunta dal corpo.

UTILIZZO CONS. ENERGIA MECCANICA.

$$E_{mecc}^{in} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_{mecc}^{fin} = mgH + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m V^2$$

$$= mgH + \frac{1}{2} \cancel{(M+m)} \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)^{\cancel{2}}}$$

dato che quando m raggiunge la quota massima, entrambi i corpi hanno velocità orizzontale di modulo pari a $V = \frac{m}{m+M} v_0$. Applicando la CONS. EN.:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} \left[v_0^2 - \frac{m v_0^2}{(M+m)} \right] = \cancel{m} g H$$

$$H = \frac{1}{2g} \frac{M v_0^2}{(M+m)}$$

$$H = \frac{1}{2g} \frac{M}{(m+M)} v_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} \frac{4}{5} \left(10 \frac{m}{s}\right)^2 =$$

$$= 4{,}08 \ m$$