Lunedì 29 novembre 2021

lunedì 29 novembre 2021 10:26

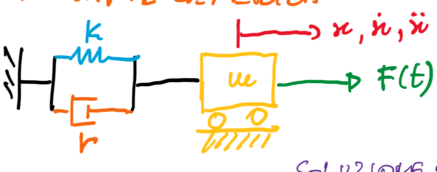
SISTEMI VIBRANTI AD 1 G.d.L. CON FORZAMENTO

↳ SISTEMI CON FORZANTE COSTANTE

↳ SISTEMI CON FORZANTE ARMONICA $\begin{cases} F_0 \cos \Omega t \\ Re(F_0 e^{i\Omega t}) \end{cases}$ $\Big\rangle$ $\begin{cases} \text{RISONANZA} \\ \text{RISPOSTA IN FREQUENZA} \end{cases}$

↳ SISTEMI CON FORZANTI PERIODICHE

FORZANTE GENERICA



EQ DI MOTO DEL SISTEMA

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$ ← FORZANTE (FUNZIONE DEL TEMPO) SISTEMA LINEARE

EQ DIFFERENZIALE ...... NON OMOGENEA

SOLUZIONE: $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

EQUAZIONE LINEARE → VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

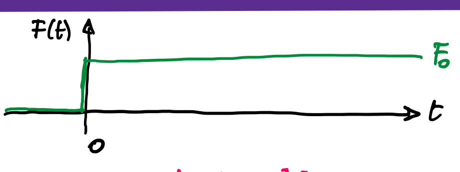
$x_g(t)$: INTEGRALE GENERALE, SOLUZIONE DELL'EQ. MOTO OMOGENEA; $\lim_{t\to\infty} x_g(t) = 0$

$x_p(t)$: INTEGRALE PARTICOLARE: DIPENDE DAL TIPO DI FORZANTE

- IN TRANSITORIO ("t" PICCOLO, SONO "VICINO" A $t=0$): LA SOLUZIONE $x(t)$ É CARATTERIZZATA DAL CONTRIBUTO SIA DELL'INTEGRALE GENERALE $x_g(t)$ SIA DALL'INTEGRALE PARTICOLARE $x_p(t)$
- A REGIME ("t" GRANDE, $t\to\infty$): $\lim_{t\to\infty} x_g(t) = 0 \to \lim_{t\to\infty} x(t) = x_p(t)$: L'INTEGRALE PARTICOLARE DIVENTA LA SOLUZIONE A REGIME

FORZANTE COSTANTE

↳ FORZANTE "A GRADINO"



TEORIA DELLE EQ. DIFFERENZIALI: $x_p(t) = \text{costante} = X_0$

$\frac{d}{dt}$: $\dot{x}_p(t) = 0$

$\frac{d}{dt}$: $\ddot{x}_p(t) = 0$

SOSTITUISCO NELL'EQ. DI MOTO

$$m\cancel{\ddot{x}_p} + r\cancel{\dot{x}_p} + kx_p = F_0$$

$$kX_0 = F_0$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \delta_{st}$$

SPOSTAMENTO DOVUTO ALL'APPLICAZIONE "STATICA" DELLA FORZANTE

SOLUZIONE DELL'EQ. DI MOTO

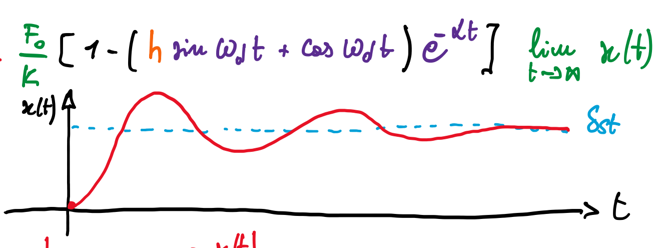
$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

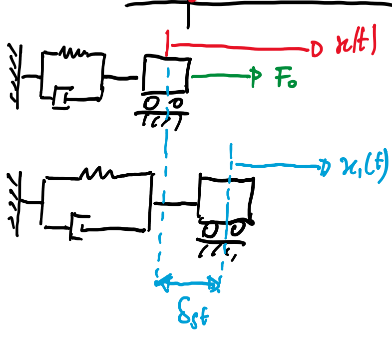
$$x(t) = e^{-\alpha t}[A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t] + \frac{F_0}{k}$$

PER DETERMINARE A e B: IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ $\to 0 = e^{-\alpha 0}[A\cos\omega_d 0 + B\sin\omega_d 0] + \frac{F_0}{k}$; $\to \dot{x}(0) = 0 = \dots\dots$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(h\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)e^{-\alpha t}\right] \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{F_0}{k} = \delta_{st}$$

CON h = SMORZAMENTO ADIMENSIONALE $h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2\omega m}$





ESEMPIO DI FORZANTE STATICA: PESO

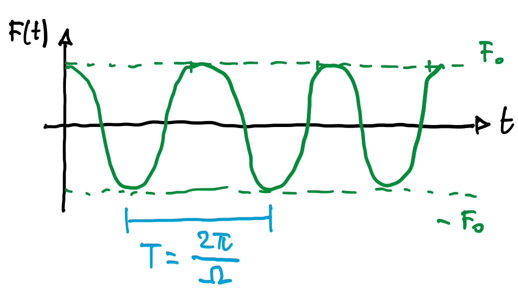
POSSO CONSIDERARE CHE "DOPO UN PÒ DI TEMPO" IL SISTEMA RAGGIUNGE UNA NUOVA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO

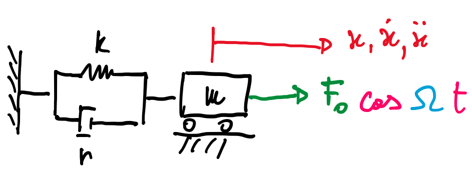
SE DOVESSI CONSIDERARE L'APPLICAZIONE DI UN'ALTRA FORZANTE POSSO PASSARE AD UN NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE IN $x = \delta_{st} \to x_1(t)$

FORZANTE ARMONICA

- $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

F_0: AMPIEZZA DELLA FORZANTE; Ω: PULSAZIONE DELLA FORZANTE





TEORIA EQ. DIFFERENZIALI:

$x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$

X_0: AMPIEZZA INTEGRALE PARTICOLARE; $\cos$: STESSO TIPO DI FUNZIONE DELLA FORZANTE; ϕ: FASE

$$x_p(t) = X_0\cos(\Omega t + \phi)$$
$$\dot{x}_p(t) = -\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi)$$
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0\cos\Omega t$$

$$-m\Omega^2 X_0\cos(\Omega t+\phi) - r\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi) + kX_0\cos(\Omega t + \phi) = F_0 \cos\Omega t$$

→ APPLICARE LE FORMULE TRIGONOMETRICHE PER $\cos(\Omega t + \phi)$ E $\sin(\Omega t + \phi)$

→ RACCOGLIERE I TERMINI IN $\cos\Omega t$ E IN $\sin\Omega t$

I $(-m\Omega^2\cos\phi - r\Omega\sin\phi + k\cos\phi)X_0 \cos\cancel{\Omega t} = F_0\cos\cancel{\Omega t}$

II $(-m\Omega^2\sin\phi - r\Omega\cos\phi - k\sin\phi)\cancel{X_0}\sin\cancel{\Omega t} = 0$

DALLA II → $\tan\phi = -\frac{r\Omega}{k - m\Omega^2} \to \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{r\Omega}{k-m\Omega^2}\right)$ III

SOSTITUENDO ϕ NELLA I → $X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (r\Omega)^2}}$ IV

FORMA ADIMENSIONALE

DIVIDO NUMERATORE E DENOMINATORE DI III E IV PER k

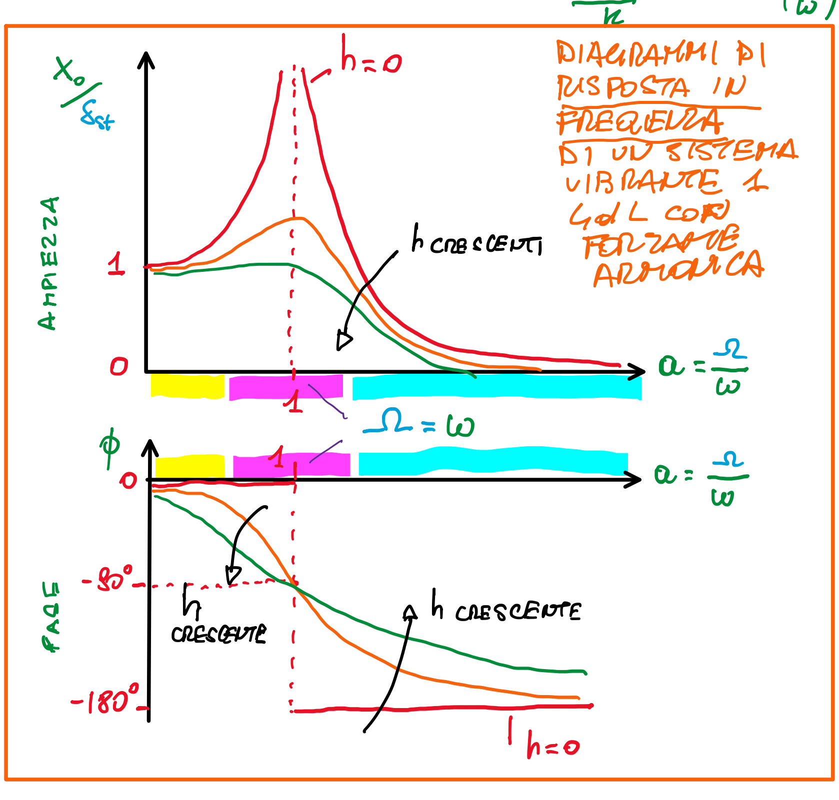
$$X_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\left(\frac{r}{r_c}\right)^2}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}}$$

$F_0/k \to \delta_{st}$; ω: PULSAZIONE NATURALE; RAPPORTO TRA LE PULSAZIONI $a = \frac{\Omega}{\omega}$; FATTORE DI SMORZAMENTO $h = \frac{r}{r_c}$

$$\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}}$$

$$\tan\phi = -\frac{r\Omega/k}{\frac{k - m\Omega^2}{k}} = -\frac{2\frac{\Omega}{\omega}\frac{r}{r_c}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = -\frac{2ah}{1-a^2}$$

RAPPRESENTAZIONI ADIMENSIONALI DI AMPIEZZA E FASE DELLA RISPOSTA FORZATA $x_p = X_0\cos(\Omega t + \phi)$



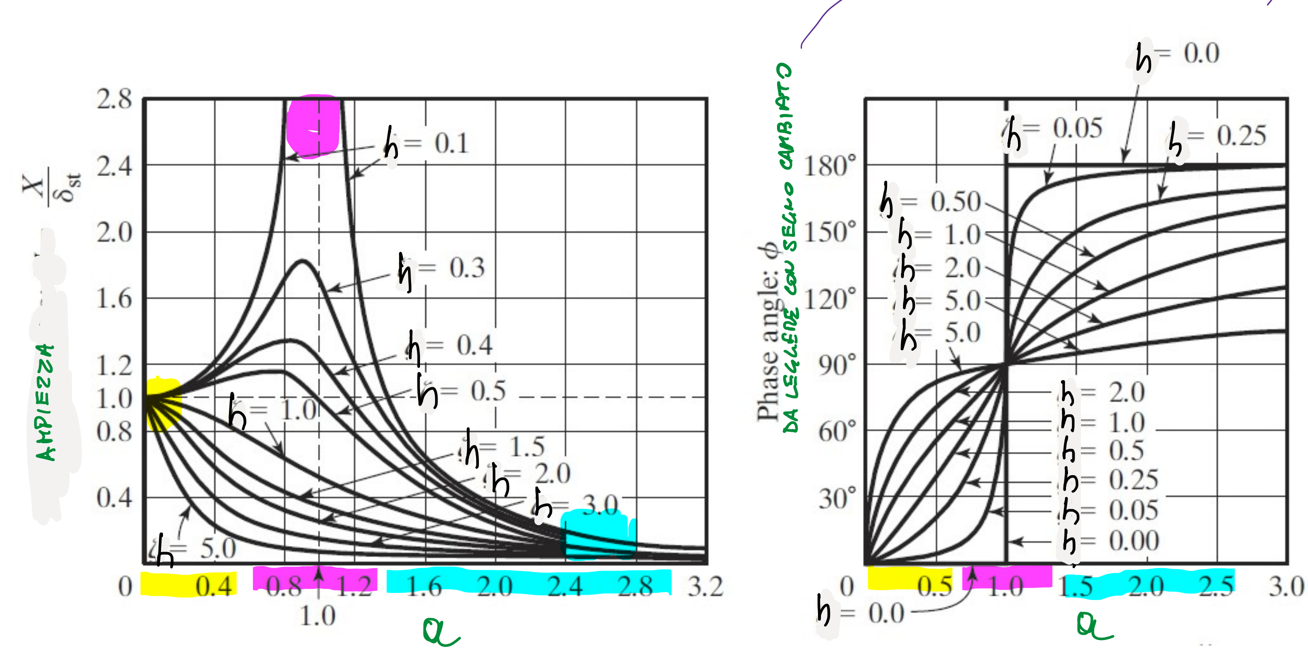
SE $h=0 \to \frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-a^2}$ $\lim_{a\to1}\frac{X_0}{\delta_{st}} = \lim_{a\to1}\frac{1}{1-a^2} = \infty$

SI VERIFICA QUANDO $\Omega = \omega$ CONDIZIONE DI RISONANZA

ω: PULSAZIONE NATURALE $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

SE $h=0$ E $\Omega = \omega$ → "SALTO DI FASE"

NEL LIBRO DA CUI É TRATTO IL DIAGRAMMA $x_p(t) = X_0\cos(\Omega t - \phi)$



CLASSIFICAZIONE IN "ZONE" DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

$a \ll 1 \Rightarrow \Omega \ll \omega$: ZONA QUASI STATICA

$a = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$: ZONA DI RISONANZA

$a \gg 1 \Rightarrow \Omega \gg \omega$: ZONA ELASTICA O SISMOGRAFICA O "SOSPESA"

IN TUTTI I CASI: $X_0 = \delta_{st}$ PER $\Omega = 0$

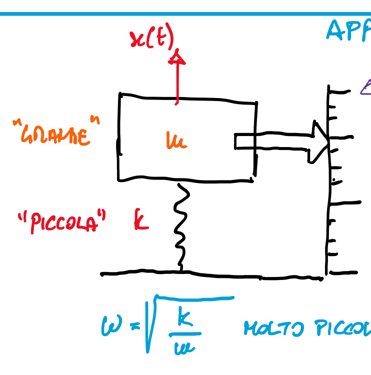
$$\lim_{a\to\infty}\frac{X_0}{\delta_{st}} = 0$$

SE $h \neq 0$ $\phi = -90°$ PER $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

SE $h \neq 0$ $\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{2h}$ PER $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

AMPIEZZA IN RISONANZA SE $h \neq 0$

APPLICAZIONE: SISMOGRAFO

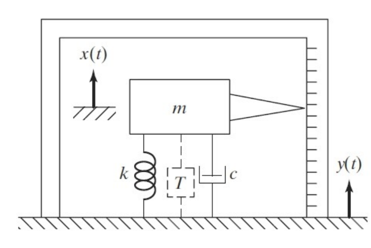


LA MASSA STA FERMA

SULLA SCALA LEGGO LO SPOSTAMENTO DEL TERRENO

TERREMOTO TERRENO SI SPOSTA CON UNA Ω QUALSIASI MA COMUNQUE $a = \frac{\Omega}{\omega} \gg 1$

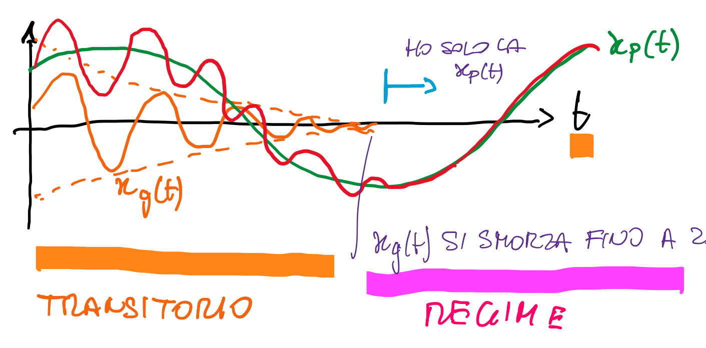
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ MOLTO PICCOLA



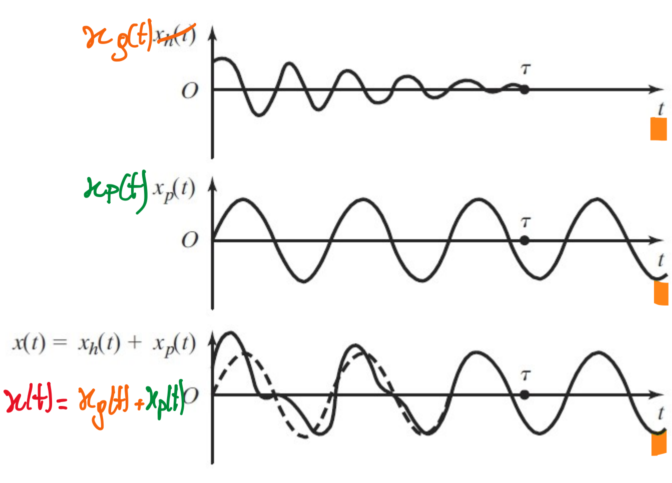
SOLUZIONE DEL MOTO DEL SISTEMA

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) + X_0\cos(\Omega t + \phi)$$

↳ DOVRÒ IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI PER DETERMINARE A E B $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \end{cases}$



RISPOSTA NEL TEMPO



- $F(t) = F_0\cos\Omega t = Re(F_0 e^{i\Omega t})$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = Re(F_0 e^{i\Omega t})$$

$$x_p(t) = X_0^* e^{i\Omega t}$$
$\frac{d}{dt}$: $$\dot{x}_p(t) = i\Omega X_0^* e^{i\Omega t}$$
$\frac{d}{dt}$: $$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0^* e^{i\Omega t}$$

TRASCURO, MA SOTTOINTENDO L'OPERATORE $Re(\ )$

$$(-m\Omega^2 + i\Omega r + k)X_0^*\cancel{e^{i\Omega t}} = F_0\cancel{e^{i\Omega t}} \to \boxed{X_0^*} = \frac{F_0}{(-\Omega^2 m + i\Omega r + k)}$$

DEVO FARE UN'OPERAZIONE DI RAZIONALIZZAZIONE E POI CALCOLARE AMPIEZZA E ARGOMENTO (FASE) DI X_0^*

$$X_0^* = \frac{F_0}{(-\Omega^2 m + k + i\Omega r)}\frac{(-\Omega^2 m + k - i\Omega r)}{(-\Omega^2 m + k - i\Omega r)}$$

$$|X_0^*| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \qquad \tan\phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2}$$

DISEGNO MODULO E FASE IN FUNZIONE DI Ω ↳ DIAGRAMMI DI BODE

$$x_p(t) = Re(X_0^* e^{i\Omega t}) = |X_0^*|\cos(\Omega t + \phi)$$

FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

$$G(i\Omega) = \frac{X_0^*}{F_0}$$

↔ FORZANTI PERIODICHE

J.B. FOURIER