MECCANICA APPLICATA

Ing. Fisica AA.2016-2017 prova del 23-02-2016 n. compito 001

NOME:..
COGNOME:..
MATRICOLA:.......................................

☐ II parziale (no Prob. 1)
☐ appello completo

Ai fini della valutazione, consegnare: il presente foglio compilato con nome, cognome, matricola e risultati numerici negli appositi spazi **e** i fogli protocollo con lo svolgimento dei calcoli.

Problema 1

Il rotismo epicicloidale, ad 1 grado di libertà, schematizzato in Fig.1 consiste di: una ruota “sole” (ruota 1, di raggio R_1) incernierata a terra; una ruota “satellite” (ruota 2); un anello circolare fissato a terra (ruota 3). La ruota 2 è composta da due dischi solidali (costituiscono un unico corpo rigido) con due diametri differenti, uno interno $R_{2,IN}$ ed uno esterno $R_{2,ES}$.

La ruota 2 è accoppiata con la ruota 1 sul diametro esterno, mentre è accoppiata con la ruota 3 sul diametro interno. Inoltre un'asta rigida AB collega i centri delle ruote 1 e 2. I contatti tra le ruote sono da considerarsi di puro rotolamento (punti C e D).

La ruota 1 ha momento di inerzia ripetto al centro di rotazione pari a J_1; La ruota 2 ha momento di inerzia ripetto al baricentro B pari a J_2 e massa m_2. L'asta AB è di massa e momento di inerzia trascurabile. Il sistema è soggetto alle seguenti forze esterne: forza peso; forza F applicata in B e perpendicolare all'asta AB; coppia C_m applicata alla ruota 1.

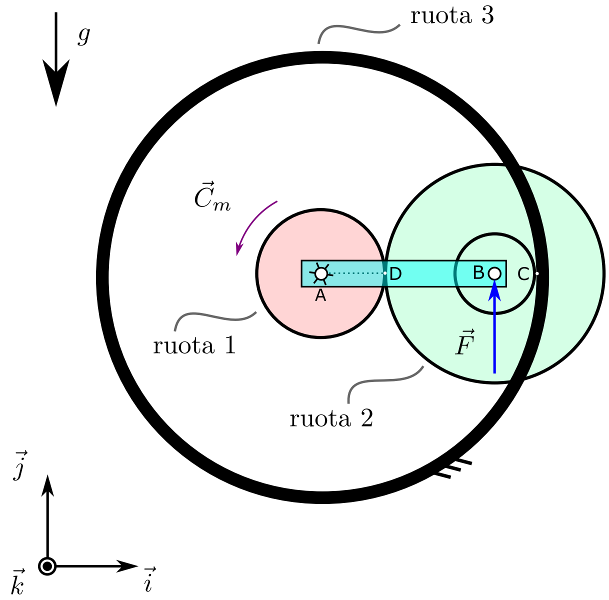


Figura 1:

Nell'atto di moto rappresentato in figura l'asta AB è orizzontale. Noti la velocità e l'accelerazione angolare della ruota 1, $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$ e $\vec{\dot{\omega}}_1 = \dot{\omega}_1\vec{k}$, e la coppia $\vec{C}_m = C_m\vec{k}$, calcolare:

1. La velocità del punto D, $\vec{v}_D$ e la accelerazione del punto D, $\vec{a}_D$
2. La velocità e l'accelerazione angolare della ruota 2, $\vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{k}$ e $\vec{\dot{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2\vec{k}$
3. La velocità del punto B, $\vec{v}_B$, e la velocità angolare dell'asta AB , $\vec{\omega}_3 = \omega_3\vec{k}$
4. l'accelerazione angolare dell'asta AB , $\vec{\dot{\omega}}_3 = \dot{\omega}_3\vec{k}$, e la accelerazione del punto B, $\vec{a}_B$
5. l'energia cinetica del sistema, E_c
6. la potenza delle forze di inerzia $W_{in} = -\frac{dE_c}{dt}$
7. la potenza della forza peso W_g
8. il valore di $\vec{F}$, usando il bilancio di potenze
9. La velocità angolare relativa della ruota 2, $\vec{\omega}_{2,rel}$, rispetto ad una terna mobile rotante con origine in A e solidale all'asta AB (usare terna mobile $\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$, con $\vec{i}'//\vec{AB}$ e $\vec{k}' = \vec{k}$)

Dati

$\omega_1 = 2.1\ rad/s$, $\dot{\omega}_1 = -2.5\ rad/s^2$, $C_m = 5\ N/m$, $m_2 = 6.2\,kg$, $J_2 = 4.1\,kgm^2$, $J_1 = 8.1\,kgm^2$, $AB = R_1 + R_{2,es} = 1.2$ m, $BC = R_{2,in} = 0.2$ m, $AD = R_1 = 0.3$ m, $CD = R_{2,in} + R_{2,es} = 1.1$ m, $AC = R_3 = 1.4$ m.

Risposte

1. $\vec{v}_D = \dots\dots\dots\vec{i} + \dots\dots\dots\vec{j}$ m/s; $\vec{a}_D = \dots\dots\dots\vec{i} + \dots\dots\dots\vec{j}\ m/s^2$
2. $\vec{\omega}_2 = \dots\dots\dots\vec{k}$ rad/s; $\vec{\dot{\omega}}_2 = \dots\dots\dots\vec{k}\ rad/s^2$
3. $\vec{v}_B = \dots\dots\dots\vec{i} + \dots\dots\dots\vec{j}$ m/s; $\vec{\omega}_3 = \dots\dots\dots\vec{k}$ rad/s
4. $\vec{\dot{\omega}}_3 = \dots\dots\dots\vec{k}\ rad/s^2$; $\vec{a}_B = \dots\dots\dots\vec{i} + \dots\dots\dots\vec{j}\ m/s^2$
5. $E_c = \dots\dots\dots$ Joule

6. $W_{in} = -\frac{dE_c}{dt} = \ldots\ldots\ldots$ Watt
7. $W_g = \ldots\ldots\ldots$ Watt
8. $\vec{F} = \ldots\ldots\ldots \vec{j}$ N;
9. $\vec{\omega}_{2,rel} = \ldots\ldots\ldots \vec{k}$ rad/s;

Problema 2

Il sistema di corpi rigidi rappresentato in figura 2 si muove nel piano orizzontale ed è composto da 2 corpi rigidi: 1 disco omogeneo di massa m_1, momento di inerzia baricentrale J e raggio R; un corpo rigido rettangolare di massa m_2.

I corpi sono soggetti ai seguenti vincoli cinematici: carrello orizzontale in E; contatto di puro rotolamento in B e C. Si utilizza la coordinata $x(t)$ (traslazione del punto D) per descrivere il grado di libertà del sistema. Quando $x = 0$ e $y_A = 0$ il sistema si trova in equilibrio statico.

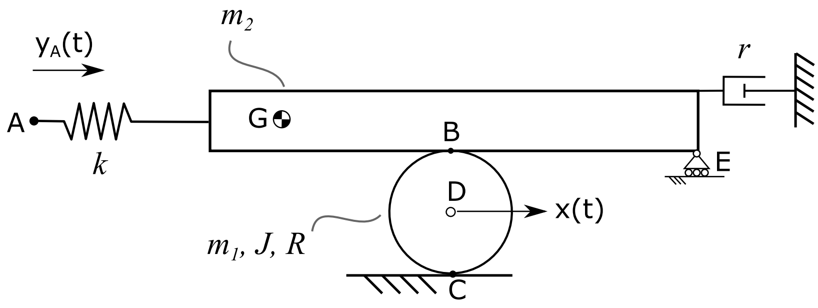


Figura 2:

Il rettangolo, che trasla in orizzontale, è connesso a terra anche tramite uno smorzatore lineare di caratteristica r. Una molla di rigidezza k ha un estremo collegato al rettangolo, mentre l'altro estremo (punto A) subisce un moto imposto orizzontale $y_A(t) = Y_A \cos(\Omega t)$.

Si chiede di calcolare:

1. l'equazione di moto del sistema, usando come coordinata libera $x(t)$
2. la pulsazione propria del sistema non smorzato ω_0 ed il coefficiente di smorzamento h
3. l'ampiezza di vibrazione a regime $|X_0|$, quando $\Omega = \omega_0$
4. la legge di moto $x(t)$ nel caso in cui sia $y_A(t) = Y_A$ (costante), a partire da condizioni iniziali nulle ($x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$).

Dati

$m_1 = 8.3$ kg, $m_2 = 1.5$ kg, $R = 1.2$ m, $J = 6.0\,kgm^2$, $r = 41\,Ns/m$, $k = 3211\,N/m$, $Y_A = 0.1\,m$,

Risposte

1. eq. di moto: $\ldots\ldots\ldots \ddot{x} + \ldots\ldots\ldots \dot{x} + \ldots\ldots\ldots x = \ldots\ldots\ldots$
2. $\omega_0 = \ldots\ldots\ldots\ rad/s$; $\qquad h = \ldots\ldots\ldots$
3. $|X_0| = \ldots\ldots\ldots$ m;
4. $x(t) = \ldots\ldots\ldots$

Domanda di teoria

Rispondere ad **UNA** delle tre domande di teoria a scelta:

1. Ricavare il teorema di Rivals per le velocità e le accelerazioni di un corpo rigido e discutere il concetto di centro di istantanea rotazione;
2. Ricavare l'equazione di moto di un pendolo e discutere la risposta nel tempo di un sistema vibrante non smorzato eccitato in risonanza da una forzante armonica;
3. Descrivere i metodi per la soluzione delle equazioni di moto di sistemi vibranti a 2 gradi di libertà forzati da forzanti armoniche.

Es 1

1)

$$\begin{cases} \underline{V}_D = \underline{\omega}_1 \wedge (D-A) + \underset{\underset{0}{\|}}{\underline{V}_A} \quad 0 \rightarrow \underset{\text{DISCO 1}}{\text{CIR}} \\ \underline{V}_D = \underset{\underset{\underline{0}\ (\underset{\text{DISCO 2}}{\text{CIR}})}{\|}}{\underline{V}_C} + \underline{\omega}_2 \wedge (D-C) \end{cases}$$

$$\underline{\omega}_2 \wedge (D-C) = \underline{\omega}_1 \wedge (D-A) \qquad DC = R_{2IN} + R_{2ES}$$

$$\omega_2 \underline{k} \wedge -DC\, \underline{i} = \omega_1 \underline{k} \wedge R_1 \underline{i}$$

$$-\omega_2 DC\, \underline{j} = \omega_1 R\, \underline{j} \rightarrow \omega_2 = \frac{-R_1}{DC} \omega_1$$

$$\rightarrow \dot{\omega}_2 = \frac{-R_1}{DC} \dot{\omega}_1$$

2)

$$\begin{cases} \underline{V}_B = \underline{\omega}_2 \wedge (B-C) \\ \underline{V}_B = \underline{\omega}_3 \wedge (B-A) \end{cases} \qquad AB = R_1 + R_{2,ES}$$

$$\omega_2 \underline{k} \wedge -R_{2IN}\, \underline{i} = \omega_3 \underline{k} \wedge AB\, \underline{i}$$

$$\rightarrow -\omega_2 R_{2IN}\, \underline{j} = \omega_3 AB\, \underline{j} = \underline{V}_B$$

$$\omega_3 = -\omega_2 \frac{R_{2IN}}{AB}$$

3)

$$\dot{\omega}_3 = -\dot{\omega}_2 \frac{R_{2IN}}{AB}$$

$$\vec{a}_B = \underbrace{\cancel{\vec{a}_A}}_{\substack{=0 \\ \text{CERNIERA}}} + \underline{\dot{\omega}}_3 \wedge (B-A) - \omega_3^2 (B-A)$$

$$\underline{a}_B = \dot{\omega}_3 \underline{k} \wedge AB\, \underline{i} - \omega_3^2 AB\, \underline{i}$$

$$= \underbrace{\dot{\omega}_3 AB\, \underline{j}}_{\text{TANGENZIALE}} + \underbrace{\left(-\omega_3^2 AB\right) \underline{i}}_{\text{NORMALE}}$$

4)

$$E_c = \left[\frac{1}{2} J_1\, \underline{\omega}_1 \cdot \underline{\omega}_1\right] + \left[\frac{1}{2} J_2\, \underline{\omega}_2 \cdot \underline{\omega}_2 + \frac{1}{2} m_2 \underline{V}_B \cdot \underline{V}_B\right]$$

5)

$$\frac{dE_c}{dT} = J_1\, \underline{\omega}_1 \cdot \underline{\dot{\omega}}_1 + J_2\, \underline{\dot{\omega}}_2 \cdot \underline{\omega}_2 + m_2\, \underline{a}_B \cdot \underline{V}_B$$

$$= J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + m_2 (\dot{\omega}_3 AB)(\omega_3 AB)$$

$$W_{IN} = -\frac{dE_c}{dT}$$

6)

$$W_g = -m_2 g\, \underline{j} \cdot \underline{V}_B = -m_2 g\, \omega_3 AB$$

7)

$$\frac{dE_c}{dT} = W_g + W_{C_m} + W_F$$

$$W_{C_m} \rightarrow \vec{C}_m \cdot \vec{\omega}_1 = C_m \omega_1$$

$$W_F \rightarrow \vec{F} \cdot \vec{V}_B = F\,\underline{j} \cdot \omega_3 AB\,\underline{j} = F\,\omega_3 AB$$

$$F = \frac{-C_m \omega_1 + m_2 g\, \omega_3 AB + \frac{dE_c}{dT}}{\omega_3 AB}$$

8)

SCRIVO LA VELOCITA' DI UN PUNTO DEL DISCO DUE COL TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

AD ESEMPIO:

$\underline{V}_C = \underline{0}$ (ASSOLUTA)

$\underline{V}_C = \underline{V}_{TR} + \underline{V}_{REL}$

$\underline{V}_{TR} = \underline{\omega}_3 \wedge (C-A) = \omega_3 AC\, \underline{j}$

$\underline{V}_{REL} = \underbrace{\underline{V}_B}_{\substack{=\underline{0} \\ \text{NEL SISTEMA} \\ \text{RELATIVO}}} + \underline{\omega}_{2,REL} \wedge (C-B) = \omega_{2,REL}\, \underline{k}' \wedge (+R_{2IN})\underline{i}' = +\omega_{2REL} R_{2IN}\, \underline{j}'$

$\underline{0} = \omega_3 AC\, \underline{j} + \omega_{2REL} R_{2IN}\, \underline{j}'$ ma $\underline{j} = \underline{j}'$

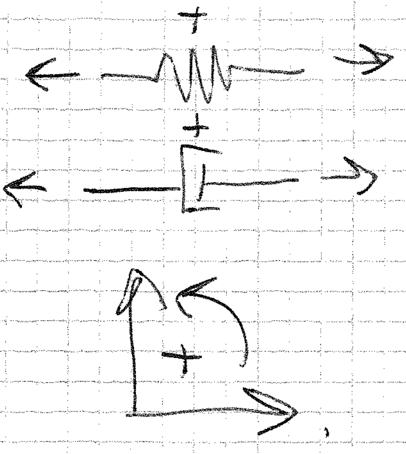
$$\Rightarrow \omega_{2,REL} = -\omega_3 \frac{AC}{R_{2IN}}$$

OPPURE: $\underbrace{\vec{\underline{\omega}}_2}_{\text{ASSOLUTA}} = \underbrace{\underline{\omega}_{2,REL}}_{\text{RELATIVA}} + \underbrace{\underline{\omega}_3}_{\text{TRASCINAMENTO}}$

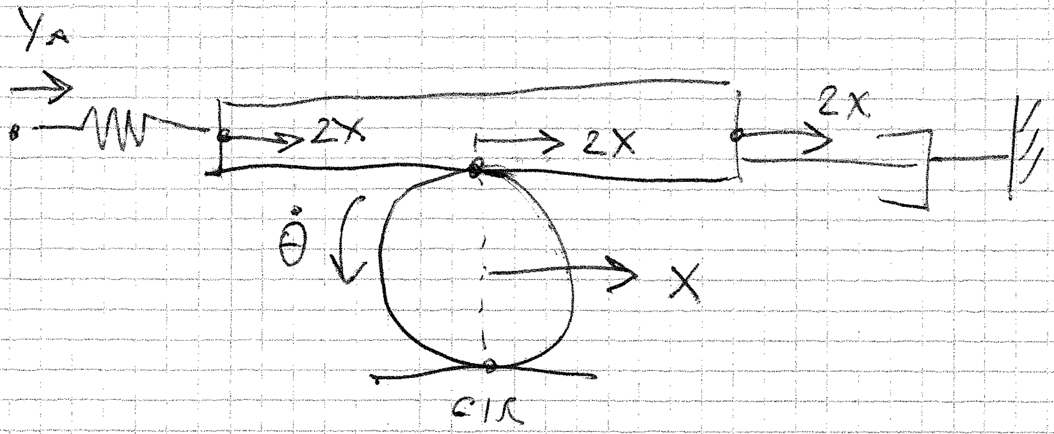
$$\rightarrow \omega_{2,REL} = \underline{\omega}_2 - \underline{\omega}_3$$

ES 2

CONVENZIONI



CINEMATICA



$$V_D = \dot{X}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{X}}{R}$$

$$V_G = 2\dot{X}$$

$$\Delta l_{MOLLA} = 2X - Y_A$$

$$\Delta \dot{l}_{SMORZ} = -2\dot{X}$$

1)

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 V_D^2 + \frac{1}{2} m_2 V_G^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 + 4m_2 + \frac{J}{R^2}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m^* \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} = m^* \ddot{x}$$

$$V = \frac{1}{2} K \, \Delta l_{MOLLA}^2 = \frac{1}{2} K (2x - y_A)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = K(2x - y_A)\, 2 = \underbrace{(4K)}_{K^*} x - 2K y_A$$

$$D = \frac{1}{2} r \, \Delta \dot{l}_{SMORZ}^2 = \frac{1}{2} r(-2\dot{x})^2 = \frac{1}{2}(4r)\dot{x}^2 = \frac{1}{2} r^* \dot{x}^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = r^* \dot{x}$$

$$\delta L = 0$$

EQ DI MOTO

$$m^* \ddot{x} + r^* \dot{x} + K^* x = 2K y_A$$

(2)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}}$$

(3)

$$h = \frac{r^*}{2 m^* \omega_0} < 1$$

4

$$|X| = \frac{\left(\frac{2KY_A}{K^*}\right)}{2h} = \frac{|X_{st}|}{2h}$$

5

$$\begin{cases} m^* \ddot{x} + r^* \dot{x} + K^* x = 2KY_A = \text{cost} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

SOL TEST PER INTEGRALE PARTICOLARE

$x_p = C$ (COSTANTE)

$\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$

$$x_p = \frac{2Y_A K}{K^*} = C = \frac{2KY_A}{4K} = \frac{Y_A}{2}$$

OMOGENEA $h < 1$

$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - h^2}$

$$x_{om} = e^{-h\omega_0 t}\left(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t\right)$$

GENERALE

$$x(t) = x_p + x_{om} = \frac{Y_A}{2} + e^{-h\omega_0 t}\left(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t\right)$$

APPLICO LE C.I.

$$x(0) = 0 = \frac{Y_A}{2} + B \rightarrow B = -\frac{Y_A}{2}$$

$$\dot{x} = e^{-h\omega_0 t}\left(A\omega_D \cos\omega_D t - B\omega_D \sin\omega_D t\right) +$$

$$-h\omega_0 e^{-h\omega_0 t}\left(A \sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = A\omega_D - h\omega_0 B$$

$$A = -\frac{h\omega_0}{\omega_D}\frac{Y_A}{2} = \frac{-h}{\sqrt{1-h^2}}\frac{Y_A}{2}$$

QUINDI

$$x(t) = \frac{Y_A}{2}\left(1 - e^{-h\omega_0 t}\left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega_D t + \cos\omega_D t\right)\right)$$