4 - Vibrazioni

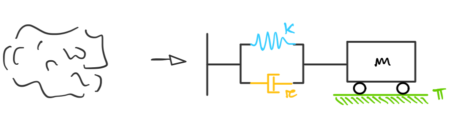
Tuesday, 14 December 2021 18:14

VIBRAZIONI MECCANICHE

RINUNCIAMO A CONSIDERARE TUTTO IL MONDO COME COMPOSTO SOLO DA CORPI RIGIDI

RAPPRESENTAZIONE A <u>PARAMETRI CONCENTRATI</u>

DEFORMABILITA' K
SMORZAMENTO r
ATTRITI π



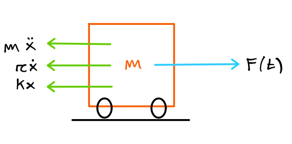
$\boxed{1 \text{ GDL}}$

VIBRAZIONI SISTEMA 1 GDL

- EQUAZIONE DIFFERENZIALE
- DERIVATE TOTALI
- LINEARE
- I ORDINE
- COEFFICIENTI COSTANTI
- NON OMOGENEA ($F(t)$)

EQUILIBRIO DINAMICO

$$F(t) = Kx + r\dot{x} + m\ddot{x}$$



EQUAZIONE DI LAGRANGE $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_K}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_K} + \frac{\partial V}{\partial q_K} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_K} = \frac{\delta^* L}{\delta^* q_K}$

CON $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ $V = \frac{1}{2}Kx^2$ $D = \frac{1}{2}rv$ $L = F(t)\,x$

MOTO LIBERO ($F(t)=0$) NON SMORZATO ($r=0$) $m\ddot{x} + Kx = 0$

$$\begin{cases} x(t) = X e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t} \end{cases} \rightarrow m\lambda^2 X e^{\lambda t} + KXe^{\lambda t} = 0 \qquad \boxed{X(m\lambda^2 + K) = 0} \qquad e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall t, \lambda$$

SOLUZIONI:

SE $X=0$ BANALE (NON SI MUOVE)

SE $X \neq 0$ CARATTERISTICA

$(m\lambda^2 + K) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{K}{m}} = \pm i\omega$

$x(t) = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t} = X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t}$ VETTORI ROTANTI IN $\mathbb{C}$

CON $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ OTTENIAMO:

$$x(t) = X_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + X_2(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$
$$= A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t + \varphi)$$

$\begin{cases} A = X_1 + X_2 \\ B = X_1 - X_2 \end{cases}$

COMBINAZIONE LINEARE DI FUNZIONI ARMONICHE

DOVE $C^2 = A^2 + B^2$, $\varphi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$

A, B SI DETERMINA PONENDO CONDIZIONI AL CONTORNO

$X(t)|_{t=0} = X_0 \qquad \dot{X}(t)|_{t=0} = v_0$

$\rightarrow x(t) = X_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

MOTO LIBERO ($F(t)=0$) CON SMORZAMENTO ($r \neq 0$) $m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = 0$

$$\begin{cases} x(t) = X e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t} \end{cases} \rightarrow (m\lambda^2 + r\lambda + K) X e^{\lambda t} = 0$$

SOLUZIONI:

SE $X=0 \rightarrow x(t)=0$ BANALE IL SISTEMA NON SI MUOVE

SE $X \neq 0$: $m\lambda^2 + r\lambda + K = 0$

$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$

$\Delta = 0 \rightarrow$ SMORZAMENTO CRITICO $\boxed{r_c = 2m\omega}$ $\left(\omega = \sqrt{\frac{m}{K}}\right)$

1	$r > r_c$	$\Delta > 0$	$h > 1$	SOVRASMORZATO
2	$r = r_c$	$\Delta = 0$	$h = 1$	MIGLIOR SMORZAMENTO
3	$r < r_c$	$\Delta < 0$	$h < 1$	SOTTOSMORZATO

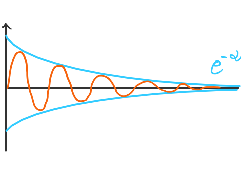
$\boxed{h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega} \quad \text{FATTORE DI SMORZAMENTO}}$

SISTEMA SOTTOSMORZATO

$X_{1,2} = -\underbrace{\frac{r}{2m}}_{\alpha} \pm i\sqrt{\underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega^2} - \underbrace{\left(\frac{r}{2m}\right)^2}_{\alpha^2}} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_d$

$\omega_d = \omega\sqrt{1-h^2}$ PULSAZIONE DEL SISTEMA SMORZATO

$$x(t) = X_1 e^{(-\alpha + i\omega_d)t} + X_2 e^{(-\alpha - i\omega_d)t} = e^{-\alpha t}(X_1 e^{i\omega_d t} + X_2 e^{-i\omega_d t})$$
$$= e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) \quad \text{FUNZIONE ARMONICA}$$



$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ ASINTOTICAMENTE NULLA

SISTEMA SOVRASMORZATO

$X_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta} = \begin{matrix}\rightarrow \lambda_1 \\ \rightarrow \lambda_2\end{matrix}$

$x(t) = X_1 e^{-\lambda_1 t} + X_2 e^{-\lambda_2 t} \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

SISTEMA CRITICO

SOLUZIONE CHE VA A 0 PIU' VELOCEMENTE

$r = r_c \qquad \Delta = 0 \qquad h = 1$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$

$x(t) = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t}$

SISTEMI VIBRANTI CON FORZANTE

EQUILIBRIO DINAMICO $F(t) = Kx + r\dot{x} + m\ddot{x}$

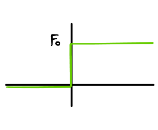
SOLUZIONE $x(t) = \underbrace{x_g(t)}_{\text{GENERALE}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{PARTICOLARE}}$

SOLUZIONE GENERALE RISOLVE L'OMOGENEA

<u>TRANSITORIO</u> (t PICCOLO $t \to 0$) SIA x_p CHE x_g

<u>REGIME</u> (t GRANDE, $t \to \infty$) SOLO x_p

1) FORZANTE A GRADINO



$F(t) = F_0 \, \mathbb{1}_{[0,+\infty]}$

SOLUZIONE PARTICOLARE

$x_p(t) = X_0 \rightarrow \dot{x}_p(t) = \ddot{x}_p(t) = 0$

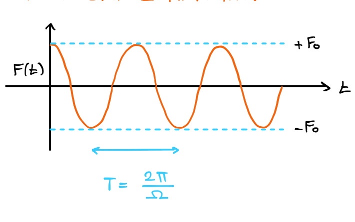
$\cancel{m\ddot{x}} + \cancel{r\dot{x}} + Kx = F_0 \qquad \boxed{X_0 = \frac{F_0}{K} = \delta_{ST}}$ SPOSTAMENTO DOVUTO ALL'AZIONE STATICA DELLA FORZA

SOLUZIONE: $x(t) = e^{-\alpha t}[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)] + F_0/K$

PER TROVARE A, B INTRODUCO LE CONDIZIONI AL CONTORNO

$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow x(t) = \frac{F_0}{K}[1 - (h\sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t))] \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{F_0}{K} = \delta_{ST}$

2) FORZANTE ARMONICA



$F(t) = F_0\cos(\Omega t)$

$x_p(t) = X_0\cos(\Omega t + \phi)$
$\dot{x}_p(t) = -\Omega X_0\sin(\Omega t + \phi) \rightarrow m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = F(t)$
$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0\cos(\Omega t + \phi)$

$\delta_{ST} = F_0/K$ SPOSTAMENTO SOTTO F STATICA

$a = \Omega/\omega$ RAPPORTO FRA PULSAZIONI

$h = r/r_c$ FATTORE DI SMORZAMENTO

$\tan\phi = -\frac{r\Omega}{K - m\Omega^2} = \frac{2ah}{1-a^2}$

$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\Omega^2)^2 + (r\Omega)^2}} = \frac{\delta_{ST}}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}}$

SE SMORZAMENTO MIGLIORE ($h=0$)

$\frac{X_0}{\delta_{ST}} = \frac{1}{1-a^2} \longrightarrow \lim_{a\to 1}\frac{X_0}{\delta_{ST}} = \infty$ QUANDO $\underline{\Omega = \omega}$

CLASSIFICAZIONE ZONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

PER $\boxed{h=0, \Omega = \omega}$ RISONANZA, SALTO DI FASE

$a \ll 1 \rightarrow \Omega \ll \omega$ QUASISTATICA

$a = 1 \rightarrow \Omega = \omega$ RISONANZA

$a \gg 1 \rightarrow \Omega \gg \omega$ ELASTICA, SISMOGRAFICA, SOSPESA

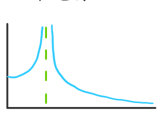
$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = e^{-\alpha t}[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)] + X_0\cos(\Omega t + \phi)$

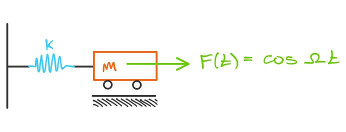
PER $t \to \infty$ VINCE SOLO $x_p(t)$, $x_g(t)$ SI SMORZA FINO A ZERO

RISONANZA

RISPOSTA SISTEMA 1GDL IN CONDIZIONI DI RISONANZA SENZA SMORZAMENTO

RISPOSTA IN FREQUENZA





$x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \frac{F_0}{K - m\Omega^2}\cos(\omega t)$

$\begin{cases} x(0) = X_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{X}_0 \end{cases} \qquad C_1 = X_0 - \frac{F_0}{K - m\Omega^2} \qquad C_2 = \dot{X}_0/\omega \qquad \delta_{ST} = F_0/K$

$x(t) = X_0\cos\omega t + \frac{\dot{X}_0}{\omega}\sin\omega t + \delta_{ST}\left(\frac{\cos\Omega t - \cos\omega t}{1 - (\Omega/\omega)^2}\right)$

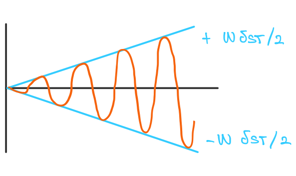
$\boxed{\text{IN RISONANZA: } \omega = \Omega}$

CHE SUCCEDE DURANTE LA RISONANZA?

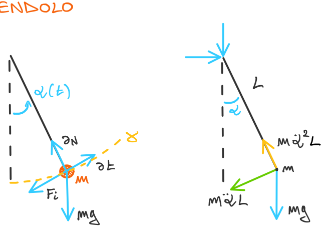
$\lim_{\Omega\to\omega}\frac{\cos\Omega t - \sin\omega t}{1 - (\Omega/\omega)^2} \overset{H}{=} \frac{\frac{d}{d\Omega}(\cos\Omega t - \sin\omega t)}{\frac{d}{d\Omega}(1 - (\Omega/\omega)^2)} = \frac{+t\sin\omega t}{+2\frac{\Omega}{\omega}} = \frac{\omega t}{2}\sin(\omega t)$

$x(t) = X_0\cos(\omega t) + \frac{\dot{X}_0}{\omega}\sin(\omega t) + \underline{\frac{\omega t}{2}\delta_{ST}\sin(\omega t)}$ RISPOSTA A REGIME DI RISONANZA $t\to\infty$

IL SISTEMA CI METTE $t=\infty$ A RISPONDERE COMPLETAMENTE
AMPIEZZA IN RISONANZA CRESCE LINEARMENTE A t



PENDOLO



$\sum M_o = 0$

$m\ddot{\alpha}\cancel{L} + \cancel{m}g\cancel{L}\sin\alpha = 0$

$\boxed{L\ddot{\alpha} + g\sin\alpha = 0}$

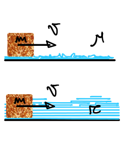
PICCOLE OSCILLAZIONI $\sin\alpha \sim \alpha$

LINEARIZZO EQN DI MOTO $L\ddot{\alpha} + g\alpha = 0$

$\alpha(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{g/L}$ ARMONICA

ISOCRONISMO, NON DIPENDE DALLA MASSA

SISTEMA LIBERO CON SMORZAMENTO PER ATTRITO RADENTE



ATTRITO RADENTE INTERPRETAZIONE MACROSCOPICA TRA SUPERFICI IN MOTO RELATIVO
AZIONE TANGENZIALE A SUPERFICI PROPORZIONALE ALLA NORMALE

LEGGI DI COULOMB SULL'ATTRITO $\boxed{F_A = \mu N}$

$\boxed{\vec{F}_A = -\underline{\text{SIGN}(\dot{x})}\,\mu m g \vec{i}} \qquad N = mg$

SEMPRE OPPOSTO ALLA DIREZIONE DI $\vec{v}$

$m\ddot{x} + \mu m g\,\text{SIGN}(\dot{x}) + Kx = 0$ DIFFERENZIALE LINEARE

SISTEMA FORZATO CON SMORZAMENTO PER ATTRITO RADENTE

PER SEMPLICITA' CONSIDERIAMO UNO SMORZAMENTO EQUIVALENTE

SMORZATORE VISCOSO

$\frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = -rv^2$

RISPOSTA DI UN SISTEMA LINEARE

$$\Delta W = \int_0^T rv^2\,dt = \int_0^T r\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 dt = \int_0^T rX^2\cos^2(\omega t)\,d(\omega t) = rX^2\omega\pi$$

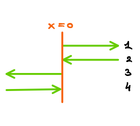
$\Delta W = rX^2\omega\pi$ ENERGIA DISSIPATA DA UNO SMORZATORE VISCOSO SOTTO SMORZAMENTO ARMONICO AGLI ESTREMI

SE IN PARALLELO C'E' UNA MOLLA, NON CAMBIA NULLA

SMORZATORE RADENTE

$m\ddot{x} + Kx \pm \mu N = F_0\sin(\Omega t)$

$\Delta W = 4\mu N X$ ENERGIA DISSIPATA IN UN CICLO



SMORZAMENTO EQUIVALENTE

$\Delta W_{RAD} = \Delta W_{VISC}$

$4\mu N X = r_{EQ}X^2\Omega\pi \longrightarrow \boxed{r_{EQ} = \frac{4\mu N}{\pi\Omega X}}$

SOLUZIONE DEL MOTO

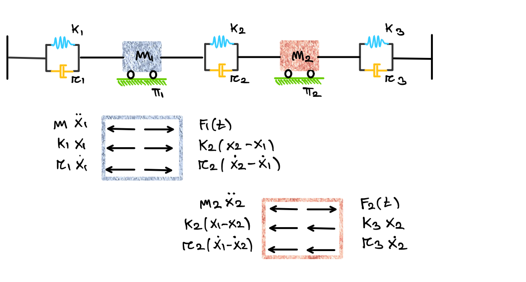
$x_p(t) = X\sin(\Omega t + \phi)$

$X = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\Omega)^2 + (r_{EQ}\Omega)}} = \frac{F_0}{K}\left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2}\right]^{1/2}$

$\phi = \arctan\left[\frac{\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}\right]$

$\xi_{EQ} = \frac{r_{EQ}}{r_c} = \frac{2\mu N}{\pi m\omega\Omega X}$

SISTEMI VIBRANTI N-GDL



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (r_1 + r_2)\dot{x}_1 - r_2\dot{x}_2 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - r_2\dot{x}_1 + (r_2 + r_3)\dot{x}_2 - K_2x_1 + (K_2 + K_3)x_2 = F_2(t) \end{cases}$$

SISTEMA DELLE EQN DI MOTO PER SISTEMA DI 2 CORPI SOTTO FORZAMENTO E SFORZAMENTO

$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ MASSA $\qquad \vec{F} = \begin{vmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{vmatrix}$ FORZANTI

$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix}$ RIGIDEZZA $\qquad \vec{x} = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}$ SPOSTAMENTI

$[R] = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_3 + r_2 \end{bmatrix}$ SMORZAMENTO

$\boxed{|M|\ddot{\vec{x}} + |R|\dot{\vec{x}} + |K|\vec{x} = \vec{F}}$ M, R, K SONO SIMMETRICHE $A = A^T$

CALCOLO DELLE FREQUENZE PROPRIE

$|M|\ddot{\vec{x}} + |K|\vec{x} = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - K_2x_1 + (K_2 + K_3)x_2 = 0 \end{cases}$

$x_N(t) = X_N\cos(\omega t + \varphi)$
$\ddot{x}_N(t) = -\omega^2 X_N\cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad \forall N = 1, 2$ IPOTIZZO SOLUZIONE ARMONICA

$\ldots \quad \text{DET}\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + (K_1 + K_2) & -K_2 \\ -K_2 & -m_2\omega^2 + (K_2 + K_3) \end{vmatrix} = 0$

$(m_1m_2)\omega^4 - ((K_1 + K_2)m_2 + (K_2 + K_3)m_1)\omega^2 + ((K_1 + K_2)(K_2 + K_3) - K_2^2) = 0$

IL SISTEMA NON HA EQN LINEARMENTE INDIPENDENTI
NON POSSO DETERMINARE LE AMPIEZZE O PULSAZIONI DEI CORPI
POSSO CONOSCERNE SOLO I LORO RAPPORTI

$X_i^{(K)}$ $\rightarrow$ INDICE DI FREQUENZA (MODO DI VIBRARE) $\rightarrow$ INDICE RELATIVO AL GDL

$\mu_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (K_1 + K_2)}{K_2} = \frac{K_2}{-m_2\omega_1^2 + (K_2 + K_3)}$

$\mu_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (K_1 + K_2)}{K_2} = \frac{K_2}{-m_2\omega_2^2 + (K_2 + K_3)}$

DOVE

$\vec{x}^{(1)} = \begin{vmatrix} X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \mu_1 X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{vmatrix}$ #1 MODO

$\vec{x}^{(2)} = \begin{vmatrix} X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \mu_2 X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{vmatrix}$ #2 MODO

+ COORDINATE MODALI / PRINCIPALI