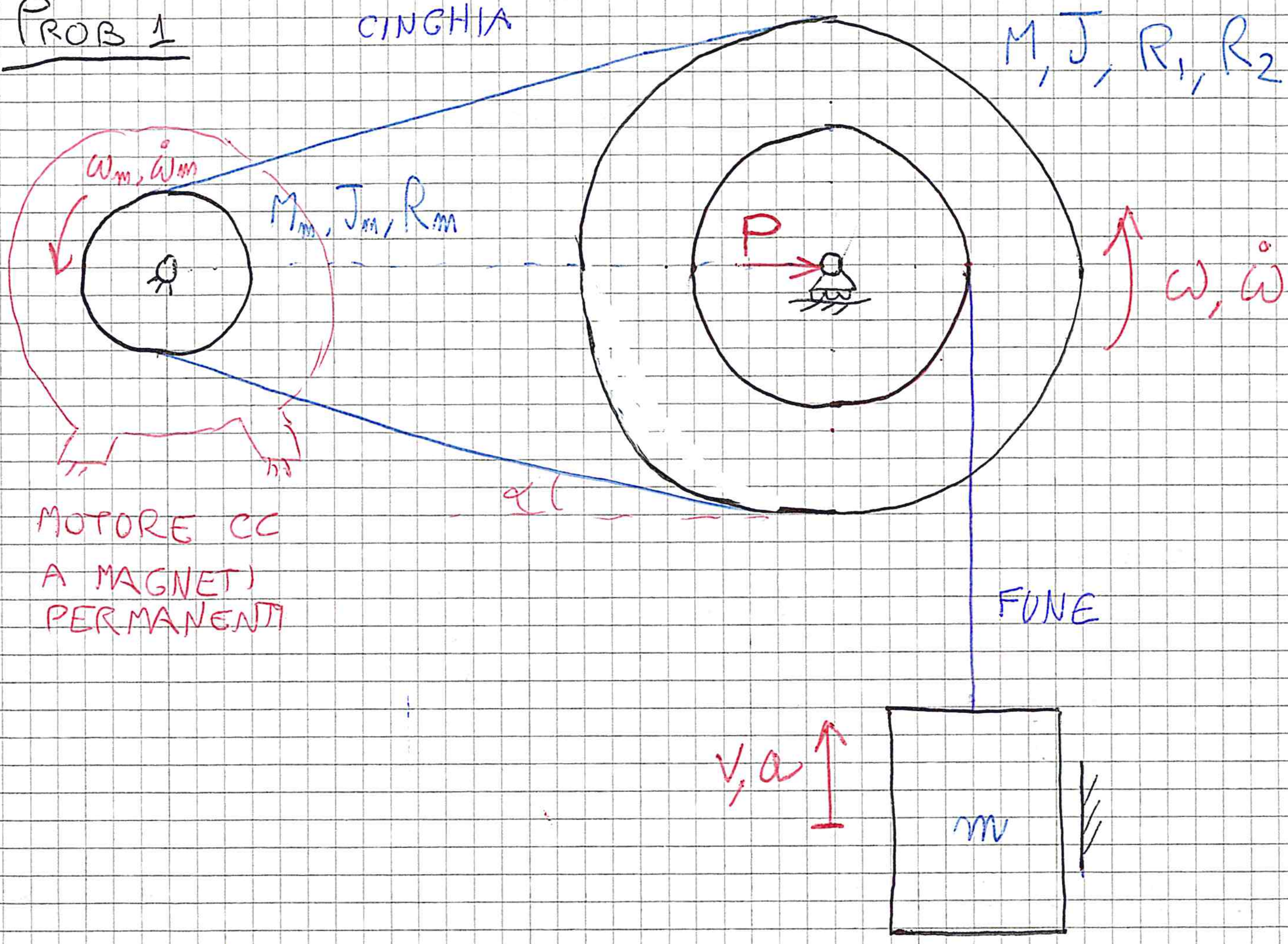
ESERCITAZIONE 3: DINAMICA - EQUILIBRI DINAMICI

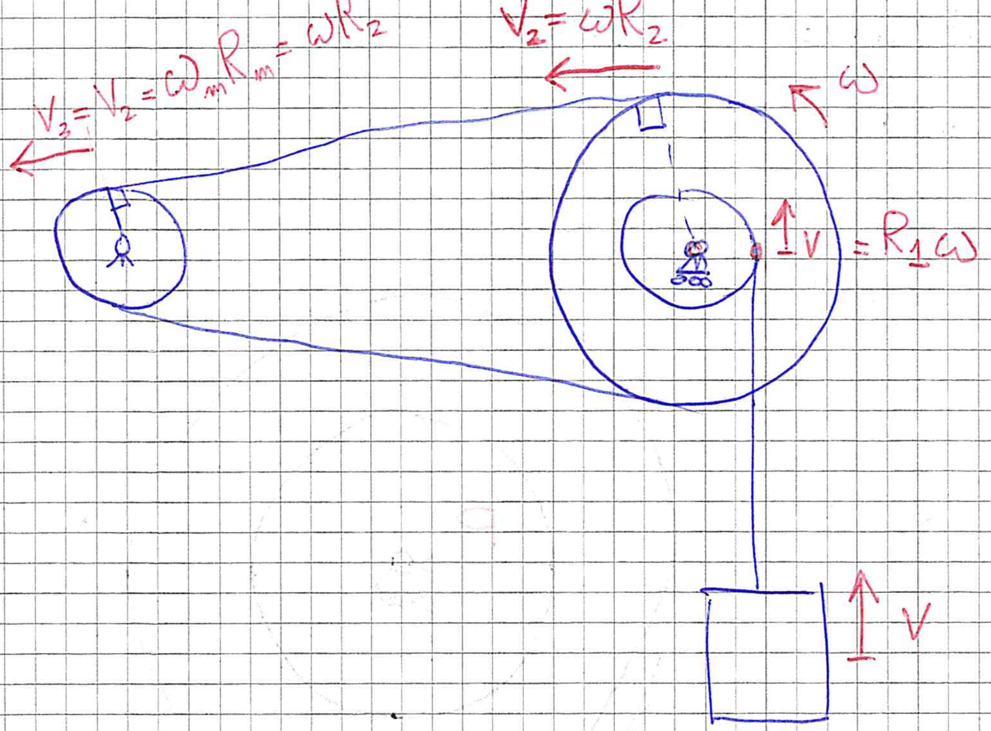
PROB 1



DOMANDE

- CALCOLARE LEGAME CINEMATICO TRA ω_m, ω E V (E TRA $\dot{\omega}_m$, $\dot{\omega}$, a)
- CALCOLARE L'EQUAZIONE DI MOTO DEL SISTEMA, NOTA LA CARATTERISTICA DELLA COPPIA MOTRICE $C_m = AV - B\omega_m$ (V: TENSIONE DI ALIMENTAZIONE)
- CALCOLARE LA LEGGE DI MOTO $V(t)$, PARTENDO DA $V(t=0) = 0$ m/s

1) LEGAME CINEMATICO



$$V = R_1 \omega$$

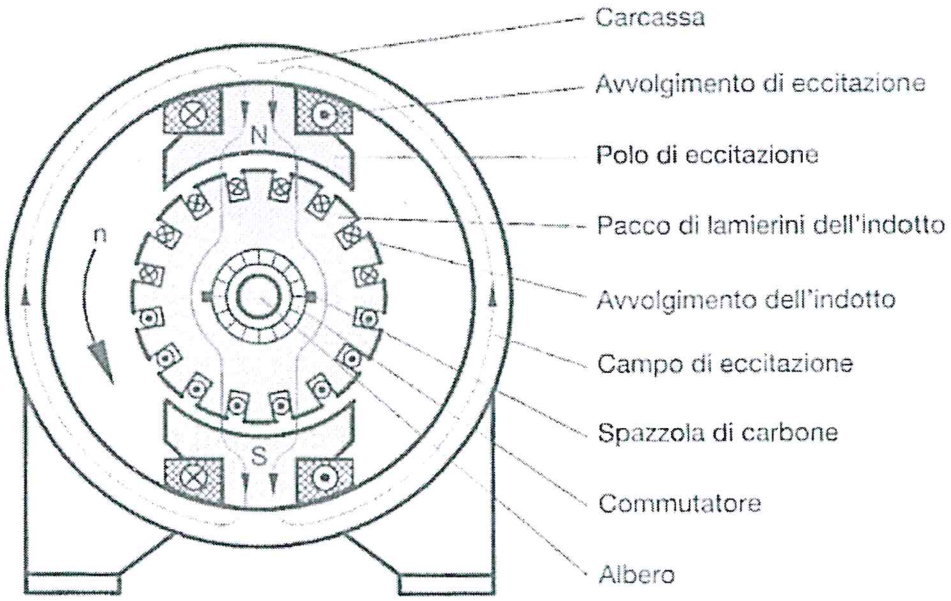
$$\omega = \frac{\omega_m R_m}{R_2} \implies V = \frac{R_1 R_m}{R_2} \omega_m$$

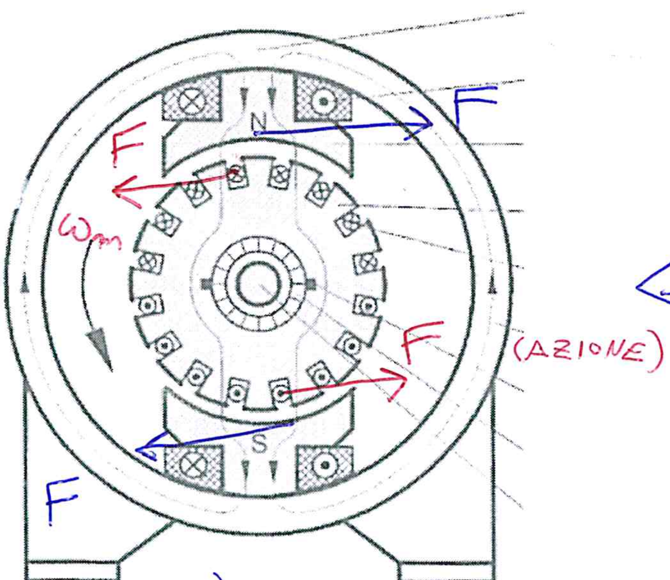
STESSO LEGAME CINEMATICO PER LE ACCELERAZIONI

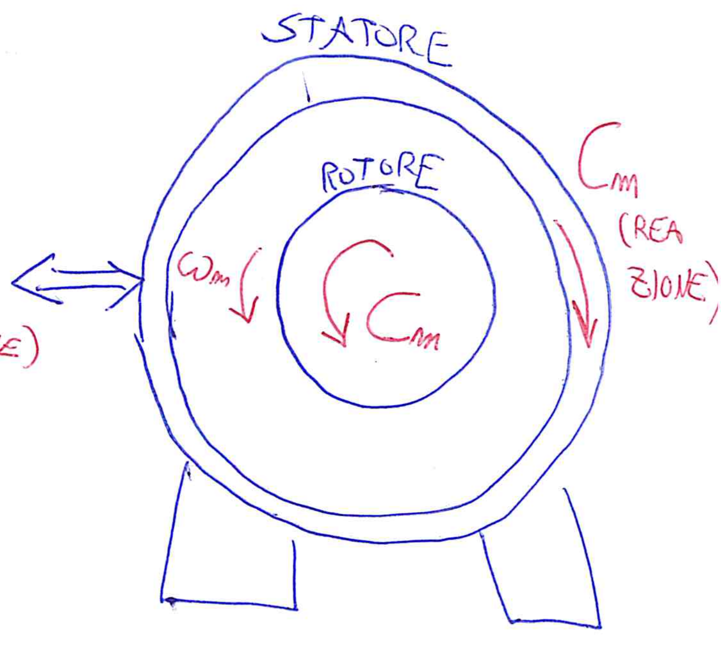
$$\dot{\omega} = \frac{R_m}{R_2} \omega_m \quad , \quad a = \frac{R_1 R_m}{R_2} \omega_m$$

2) DINAMICA

- MOTORE ELETTRICO IN C.C.





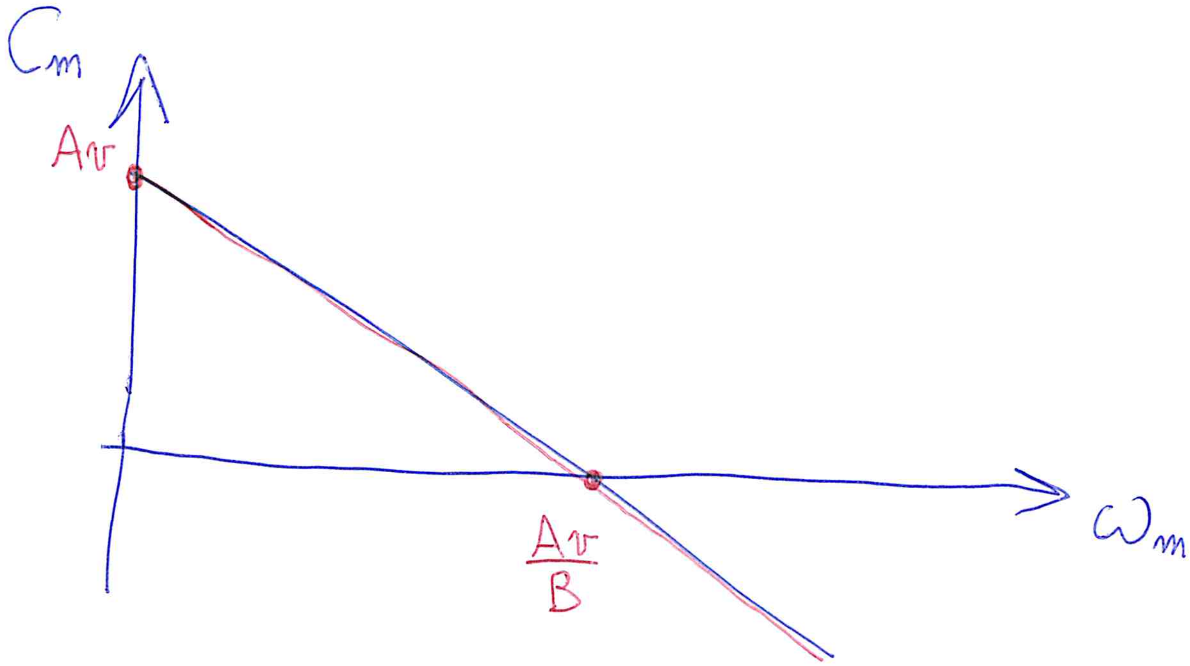


C_m COPPIA MOTRICE

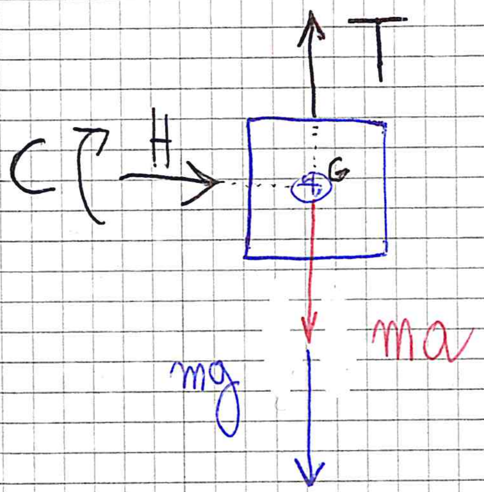
PER UN MOTORE C.C. A MAGNETI PERMANENTI, FISSATA LA TENSIONE DI ALIMENTAZIONE v, VALE

$$C_m = Av - B\omega_m$$

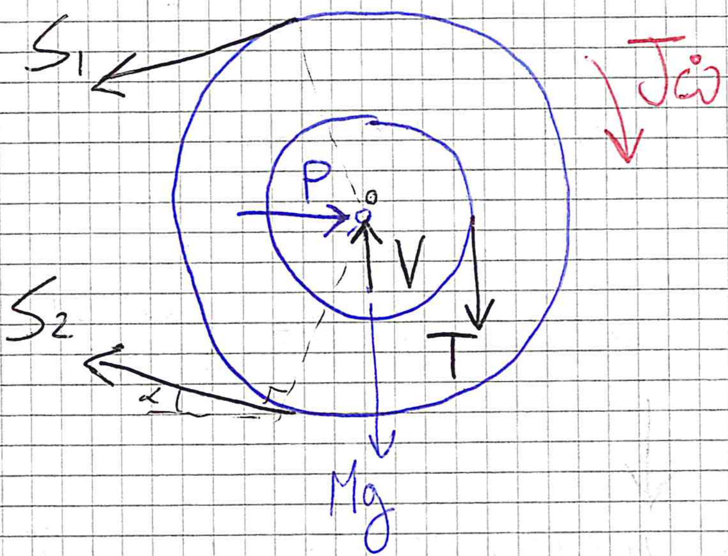
CON A, B COSTANTI > 0



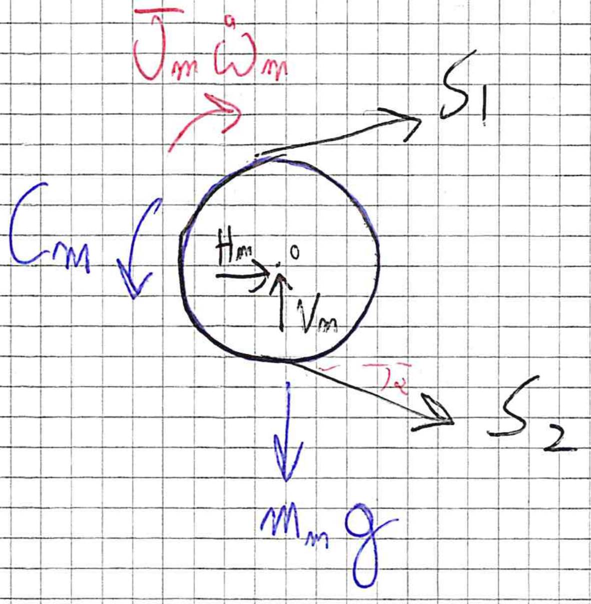
- ISOLO UN CORPO ALLA VOLTA E METTO IN EVIDENZA LE FORZE ESTERNE (ATTIVE E REATTIVE) E LE FORZE DI INERZIA
- SCRIVO 3 EQ DI EQUILIBRIO PER CIASCUN CORPO RIGIDO



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 & H = 0 & (1) \\ \Sigma F_y = 0 & T = ma + mg & (2) \\ \Sigma M_G = 0 & C = 0 & (3) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Sigma F_{x} = 0 & P - (S_1 + S_2)\cos\alpha = 0 & (4) \\ \Sigma F_y = 0 & V - Mg + (S_2 - S_1)\sin\alpha - T = 0 & (5) \\ \Sigma M_o = 0 & (S_2 - S_1)R_2 + J\dot{\omega} + T R_1 = 0 & (6) \end{cases}$$



$$\begin{cases} H_m - (S_1 + S_2)\cos\alpha = 0 & (7) \\ V_m - M_m g - (S_2 - S_1)\sin\alpha = 0 & (8) \\ C_m + (S_2 - S_1) R_m - J_m \dot{\omega}_m = 0 & (9) \end{cases}$$

9 EQUAZIONI

9 INCOGNITE : $H, T, C, S_1, S_2, V, H_m, V_m$

8 REAZIONI VINCOLARI

1 ACCELERAZIONE $(a, \dot{\omega}, \dot{\omega}_m)$ $\leftrightarrow$ EQ DI MOTO

$\downarrow$

SONO 3, MA SOLO 1 È INDIPENDENTE IN QUANTO VALE IL LEGAME CINEMATICO

$$\dot{\omega} = \frac{R_m}{R_2}\dot{\omega}_m \quad , \quad a = \frac{R_1 R_m}{R_2}\dot{\omega}_m$$

CALCOLO L'EQUAZIONE DI MOTO

COMBINO LE EQ 2, 6, 9 + LEGAMI CINEMATICI

$$\begin{cases} T = ma + mg & (2) \\ (S_2 - S_1) R_2 + J\dot{\omega} + T R_1 = 0 & (6) \\ C_m + (S_2 - S_1) R_m - J_m \dot{\omega}_m = 0 & (9) \\ \dot{\omega} = \dfrac{R_m}{R_2} \dot{\omega}_m \\ a = \dfrac{R_1 R_m}{R_2} \dot{\omega}_m \end{cases}$$

$$-(S_2 - S_1) = + \frac{J}{R_2} \frac{R_m}{R_2} \dot{\omega}_m + \frac{R_1}{R_2}\left(mg + m \frac{R_1}{R_2} R_m \dot{\omega}_m\right)$$

$$J_m \dot{\omega}_m + \left(\frac{R_m}{R_2}\right)^2 J \dot{\omega}_m + m \left(\frac{R_1 R_m}{R_2}\right)^2 \dot{\omega}_m + \underbrace{\frac{R_1 R_m}{R_2} mg}_{C_R} = C_m$$

$$\underbrace{\left[J_m + \left(\frac{R_m}{R_2}\right)^2 J + m \left(\frac{R_1 R_m}{R_2}\right)^2\right]}_{J^*} \dot{\omega}_m = C_m - C_R$$

EQ DI MOTO

$$J^* \dot{\omega}_m = C_m - C_R$$

- LEGGE DI MOTO

$$C_m = Av - B\omega_m$$

$$J^* \dot{\omega}_m = C_m - C_R$$

$$J^* \dot{\omega}_m + B\omega_m = \underbrace{Av - C_R}_{D > 0}$$

(PER IPOTESI)

$$\begin{cases} J\dot{\omega}_m + B\omega_m = D \\ \omega_m(t=0) = 0 \end{cases}$$

PROB. DI CAUCHY

EQ. DIFF. I ORDINE NON OMOGENEA A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\omega_m(t) = \omega_{OMOGENEA} + \omega_{PARTICOLARE}$$

$$\omega_P = \frac{D}{B}$$

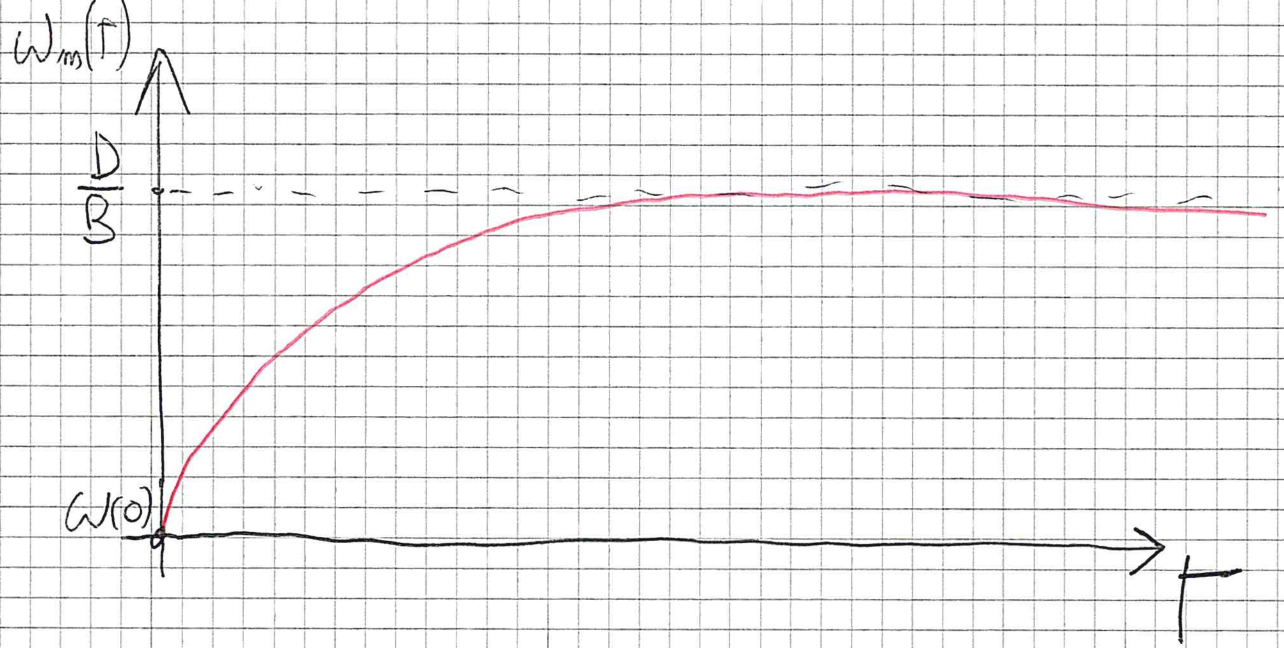
$$\omega_{omo} = Ce^{\lambda t} \longrightarrow (J^*\lambda + B)Ce^{\lambda t} = 0$$

$$\longrightarrow \lambda = -\frac{B}{J^*}$$

INTEGRALE GENERALE

$$\begin{cases} \omega_m = \frac{D}{B} + Ce^{-\frac{B}{J^*}t} \\ \omega_m(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow C = -\frac{D}{B}$$

$$\omega_m(t) = \frac{D}{B}\left(1 - e^{-\frac{B}{J^*}t}\right)$$

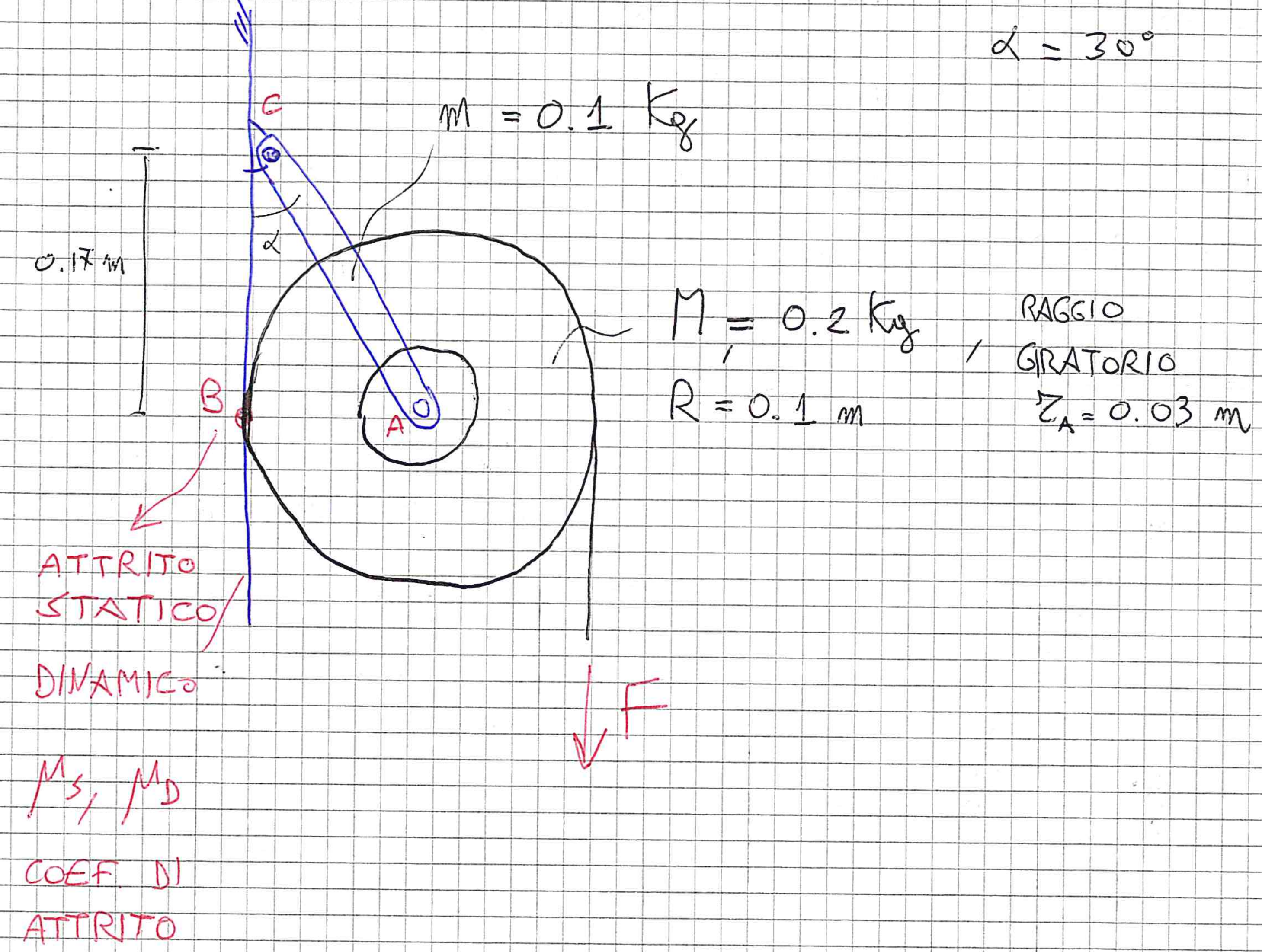


<u>NOTA</u>

UNA VOLTA CALCOLATA $\omega_m(t)$ È NOTA $\dot{\omega}_m$
(DALL'EQUAZIONE DI MOTO, OPPURE DERIVANDO ω_m)

POSSO QUINDI CALCOLARE TUTTE LE REAZIONI VINCOLARI

PROB 2



DOMANDA

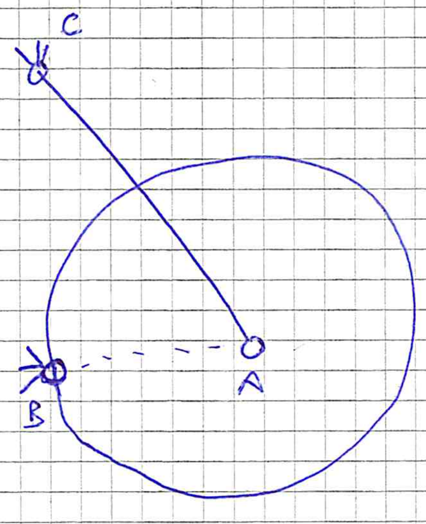
- CALCOLARE IL VALORE MINIMO DI F_{LIM} AFFINCHÉ IL ROTOLO SI METTA IN MOTO, NOTO IL VALORE DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO $\mu_S = 0.3$

- CALCOLARE L'ACCELERAZIONE ANGOLARE E LE REAZIONI VINCOLARI IN C QUANDO $F = 1.2 F_{LIM}$ E $\mu_D = 0.2$

CASO $F < F_{LIM}$

GRAZIE ALL'ATTRITO STATICO, IN B C'E' UN VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO.
IL SISTEMA NON SI PUO' MUOVERE IN QUANTO HA ZERO GRADI DI LIBERTA'

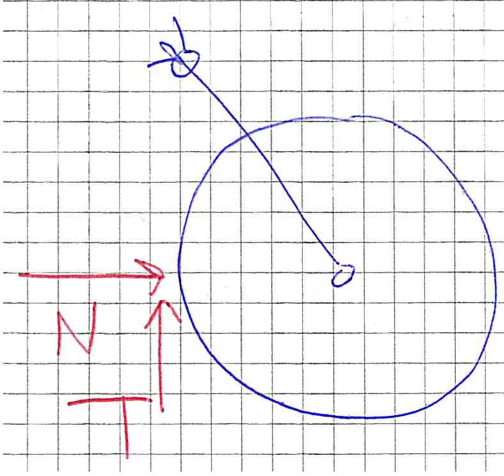
SCHEMA CINEMATICO



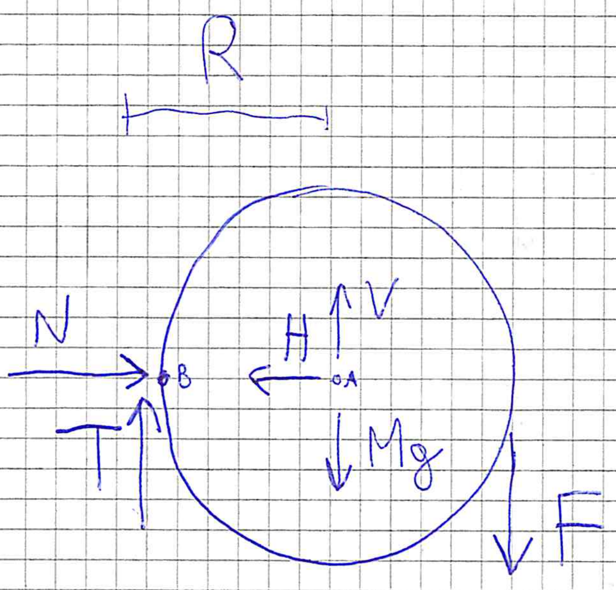
	GDL
2 CORPI RIGIDI :	$3 \times 2 = 6$
3 CERNIERE :	$-2 \times 3 = -6$
TOTALE	0 GDL

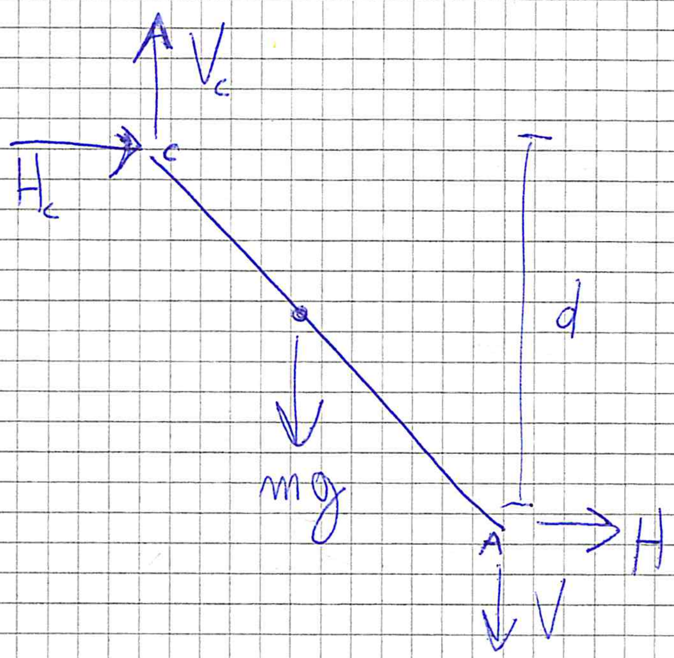
AFFINCHÉ IN B CI SIA UNA CERNIERA DEVE VERIFICARSI LA CONDIZIONE

$$\left| \frac{T}{N} \right| < \mu_s$$



SCHEMA FORZE





$$\begin{cases} N = H \\ T = Mg + F - V \\ \Sigma M_A \quad TR + FR = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow mg\frac{R}{2} + VR - Hd = 0$$

4 INCOGNITE: T, N, V, H

4 EQUAZIONI

$$\begin{cases} T = -F \\ V = Mg + 2F \\ N = \left(\dfrac{mg}{2} + Mg + 2F\right)\dfrac{R}{d} \\ H = N \end{cases}$$

DA CUI:

$$|T| = \mu_s |N| \qquad \text{CONDIZIONE LIMITE}$$

$$|-F| = \mu_s \left| \left(\frac{mg}{2} + Mg + 2F \right) \frac{R}{d} \right|$$

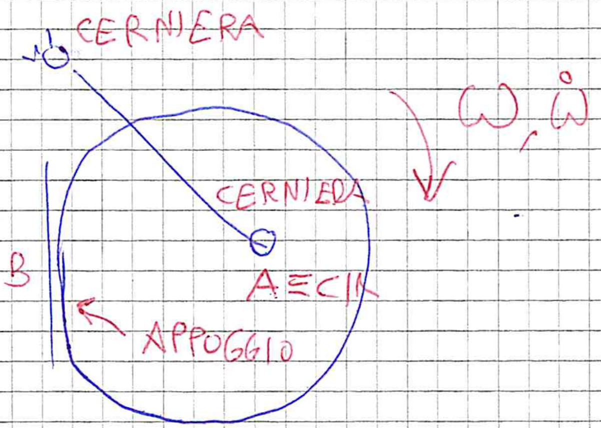
$$F = \mu_s \left(\frac{mg}{2} + Mg + 2F \right) \frac{R}{d}$$

$$F \left(1 - \mu_s \frac{2R}{d} \right) = \mu_s \left(\frac{m}{2} + M \right) g$$

$$F_{LIM} = \frac{\mu_s \left(\frac{m}{2} + M \right) g}{1 - \mu_s 2 \frac{R}{d}} = 1.14 \text{ N}$$

CASO $F = 1.2\, F_{LIM}$, IL ROTOLO ROTOLA CON STRISCIAMENTO IN B, NASCE UNA FORZA DI ATTRITO RESISTENTE DINAMICO (ATTRITO RADENTE) CHE SI OPPONE ALLA VELOCITÀ DI STRISCIAMENTO

SCHEMA CINEMATICO

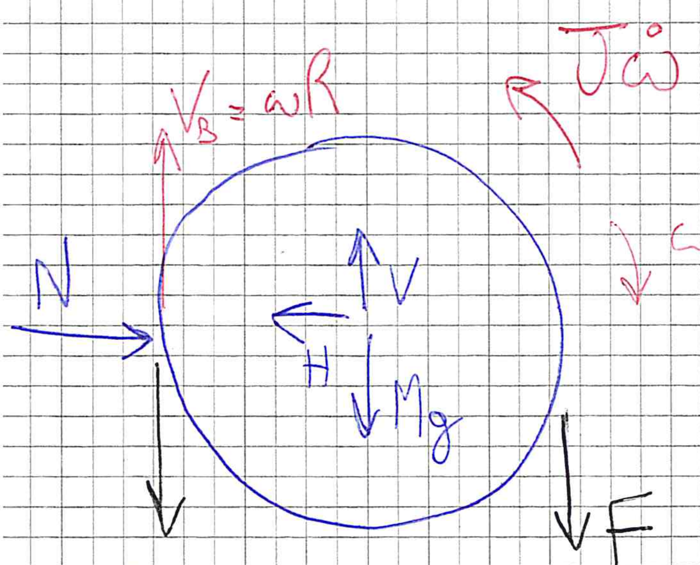


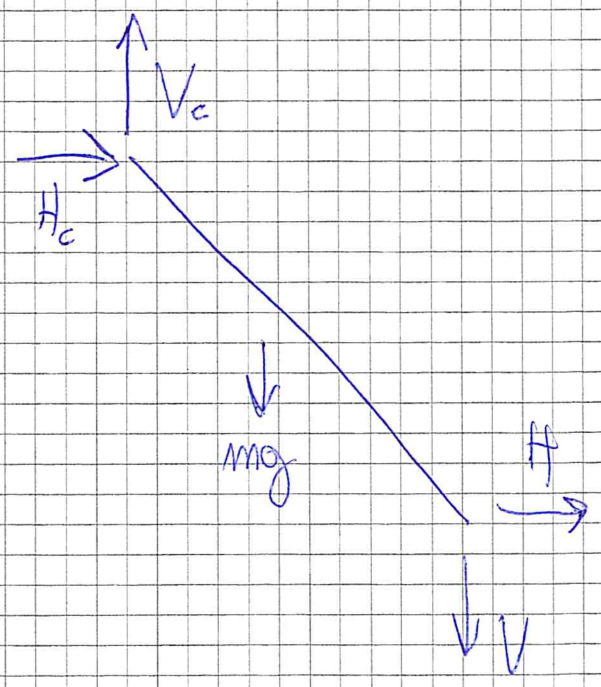
ADESSO IL SISTEMA HA 1 GDL (ω)

CON $A \equiv$ CENTRO DI ROTAZIONE

$\underline{V}_A = \underline{0}$, $\underline{a}_A = \underline{0}$

FORZE





$T = \mu_D |N|$

(OPPOSTO A V_B)

EQ. DI EQUILIBRIO

DISCO

$$\begin{cases} N = H \\ V = \mu_D |N| + F + Mg \\ \mu_D |N| R - FR + J\dot{\omega} = 0 \end{cases}$$

ASTA

$$\begin{cases} --- \\ --- \\ mg\frac{R}{2} + VR - Hd = 0 \end{cases}$$

$$mg\frac{R}{2} + R(\mu_D |N| + F + Mg) - Nd = 0$$

$N > 0$ (HP. DA VERIFICARE)

$$\frac{mg}{2} + \mu_D N + F + Mg - N\frac{d}{R} = 0$$

$$N\left(\frac{d}{R} - \mu_D\right) = Mg + F + \frac{mg}{2} \Rightarrow N = 2.5 \ N$$

EQ DI MOTO

$$J\dot{\omega} = FR - \mu_D RN$$

$$J = M r^2 = 1.8 \cdot 10^{-4} \ kg\,m^2$$

$$\dot{\omega} = \frac{(F - \mu_D N)R}{J} = 477 \ \frac{rad}{s^2}$$

LE REAZIONI IN C SI CALCOLANO DALL' EQUILIBRIO DELL'ASTA IN DIREZIONE X e Y