1 - Cinematica

Saturday, 6 November 2021 18:27

PUNTO MATERIALE

ROTOTRASLAZIONI

$$P(t) = \begin{cases} x = x(t) = a\cos(\omega t) \\ y = y(t) = b\sin(\omega t) \end{cases} \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = +1$$

ASCISSA CURVILINEA

$P(t) = P(s(t))$

$P(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$ CARTESIANA

$P(t) = x(t) + i\,y(t)$ GAUSSIANA CON $i\,P(t)$ ROTAZIONE $\pi/2$ ANTIORARIA

$P(t) = R(t)\cdot e^{i\theta(t)}$ POLARE CON $R = \sqrt{x^2+y^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

VELOCITA'

$$v = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \vec{t}\cdot\dot{s}$$

CON t VERSORE $\perp$ TRAIETTORIA $\qquad \vec{t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta P|}{|\Delta s|}$

$v(t) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$

ACCELERAZIONE

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dP}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2P}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)^2}{R}$$

$\exists\, a_t$ SE $\ddot{s} \neq 0$ $\quad$ ($v_{cost} \to a_t = 0$)

$\exists\, a_n$ SE $R < \infty$ $\quad$ (TRAIETTORIA NON RETTILINEA)

$a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$

$a = \dot{v}e^{i\alpha} + i\dot{\alpha}v e^{i\alpha}$

CURVATURA $\to$ $\exists\, a_n \neq 0$

POSSO SCOMPORRE a IN BASE $\binom{a_x}{a_y}$ OPPURE $\binom{a_t}{a_n}$

IL RISULTATO E' LO STESSO, $|\vec{a}|$ E' LA SOMMA PITAGORICA DELLE COMPONENTI LUNGO I DIVERSI VERSORI

CORPO RIGIDO

INSIEME DI PUNTI LOCALIZZATI

LA DISTANZA TRA PUNTI NON CAMBIA

$A\,(x_A, y_A)$ $\qquad d = \vec{B} - \vec{A} = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$

$B\,(x_B, y_B)$ $\qquad \overline{AB}$ COSTANTE NEL TEMPO

RIGIDITA' $\to$ 3 PARAMETRI INDIPENDENTI
$\to$ 3 GRADI DI LIBERTA'

PUO' MUOVERSI (x,y) RUOTARE (θ) MA NON SI DEFORMA

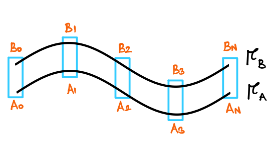
x_A, y_A, x_B, y_B NON SONO INDIPENDENTI POICHE' $d = cost$

PUO' ESSERE DESCRITTO DA UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA COSTANTE

MOTO TRASLATORIO

LE TRAIETTORIE DEI DIVERSI PUNTI SONO TUTTE PARALLELE

PUNTI OMOLOGHI COMPIONO SPOSTAMENTI UGUALI



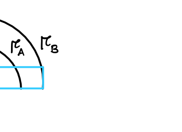
$r_B \parallel r_A$

$\overline{A_0A_1} = \overline{B_0B_1}, \dots$

MOTO ROTATORIO

UN PUNTO DEL CORPO E' FISSO (CENTRO)

TUTTE LE ALTRE TRAIETTORIE SONO CIRCONFERENZE



MOTO ROTOTRASLATORIO

NESSUN PUNTO E' SEMPRE FISSO NEL PIANO

TRAIETTORIE IN GENERALE NON $\parallel$

ATTO DI MOTO

FOTOGRAFIA DEL MOVIMENTO DEL CORPO RIGIDO

INTRINSICAMENTE COLLEGATO CON IL CONCETTO DI VELOCITA' $\qquad v = \frac{\delta x}{\delta t}$

SPOSTAMENTI INFINITESIMI $\qquad dS_A, dS_B$

SPOSTAMENTI VIRTUALI $\qquad \delta S_A, \delta S_B$ $\qquad$ (VINCOLI)

ATTO DI MOTO TRASLATORIO

LE VELOCITA' DI TUTTI I PUNTI SONO UGUALI

MODULO, DIREZIONE, VERSO

$v_A = v_B = v_C$

ATTO DI MOTO ROTATORIO

$\exists!$ PUNTO (INTERNO O RIGIDAMENTE COLLEGATO AL CORPO)

CHE NELL'ISTANTE CONSIDERATO HA v NULLA

CENTRO D'ISTANTANEA ROTAZIONE (CIR) PUNTO DOVE $v(P) = 0$

IN GENERALE NON E' UN PUNTO FISSO DEL PIANO

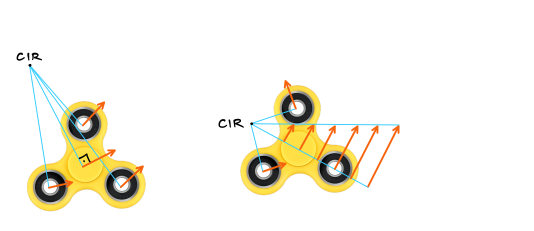
HA SEMPRE $\vec{v} = 0$ MA NON NECESSARIAMENTE $\vec{a} = 0$

MOTO ROTATORIO $\qquad C \equiv CIR \qquad a = 0,\ v = 0$

MOTO TRASLATORIO $\qquad \nexists\, CIR$

TEOREMA DI CHALES

ESSENDO IL CIR UNICO, POSSIAMO USARLO PER TROVARE LA DIREZIONE DELLA VELOCITA' $\forall$ PUNTO DEL CORPO RIGIDO



$v_P \perp$ CONGIUNGENTE r_{CIR-P}

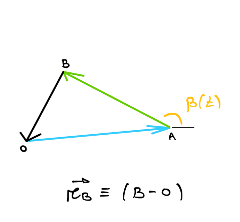
CIR E' FISSO SOLO SE MOTO E' ROTATORIO

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

$x_A(t), y_A(t), \beta(t)$ INDIPENDENTI $\qquad$ (3GDL)

ANGOLO DI $\overline{AB}$ RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO

$(B-O) = (A-O) + (B-A)$ $\qquad$ EQUAZIONE DI CHIUSURA



$\vec{r}_B \equiv (B-O)$

$$\vec{r}_B = x_B + iy_B = \underbrace{x_A + iy_A}_{r_A} + \underbrace{\overline{AB}e^{i\beta}}_{r_{BA}}$$

$$\vec{v}_B = \underbrace{\dot{x}_A + i\dot{y}_A}_{v_A} + \underbrace{\dot{\beta}\,\overline{AB}\,e^{i(\beta+\pi/2)}}_{v_{AB}} \qquad \text{RELATIVA}$$

$$\vec{a}_B = \underbrace{\ddot{x}_A + i\ddot{y}_A}_{a_A} \underbrace{- \overline{AB}\,\omega^2 e^{i\beta}}_{a_{BA_n}} + \underbrace{i\,\overline{AB}\,\dot{\omega}\,e^{i\beta}}_{a_{BA_t}}$$

TEOREMA DI RIVALS

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times(B-A) = \vec{\omega}\times(B-CIR)}$$

$v_{CIR} = 0$ SEMPRE

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A + \dot{\omega}\times(B-A) + \omega\times\omega(B-A)}$$

LA VELOCITA' ANGOLARE E' UNICA IN UN CORPO RIGIDO

CORPO RIGIDO $\to$ $\vec{\omega} = \hat{k}\omega = \hat{k}\dot{\beta} = \frac{v_P}{r_{CP}}$ COSTANTE $\forall P$ $\qquad \vec{v}_{CIR} = 0$

SE CONOSCO LA VELOCITA' DI UN PUNTO E LA VELOCITA' ANGOLARE ALLORA POSSO CONOSCERE LA VELOCITA' DI TUTTI I PUNTI IN UN CORPO RIGIDO

LO STESSO VALE PER L'ACCELERAZIONE

VINCOLO

CERNIERA	x, y
PATTINO	y, θ
MANICOTTO	y, θ
CARRELLO	y
INCASTRO	x, y, θ
ROTOLAMENTO	$v = \omega R$

GRADI DI LIBERTA'

$\forall$ CORPO RIGIDO $\exists$ 3 GDL (x, y, θ)

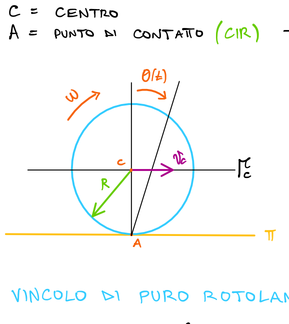
GDL RIMASTI = GDL CORPI − GDL VINCOLI

$\underbrace{2\times 3}_{\text{CORPI}} - \underbrace{2}_{\text{VINCOLI}} = 4$ GDL RIMASTI

CINEMATICA DELLA RUOTA

C = CENTRO

A = PUNTO DI CONTATTO (CIR) $\to$ $v_A = 0$ SEMPRE

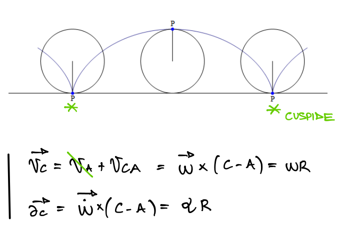


VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO

$\boxed{x_C = R\theta}$ $\to$ $v_C = R\omega$ $\qquad v_C, r_C \perp \pi$

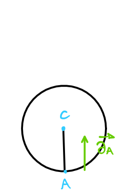
$\to$ $a_C = R\dot{\omega}$ $\qquad a_N = 0$ SOLO TANGENZIALE

CICLOIDE



$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \cancel{v_A} + v_{CA} = \vec{\omega}\times(C-A) = \omega R \\ \vec{a}_C = \dot{\vec{\omega}}\times(C-A) = \dot{\omega}R \end{cases}$$



APPLICANDO RIVALS PER IL PUNTO A

$$\begin{cases} \vec{v}_A = 0 & \text{CENTRO D'ISTANTANEA ROTAZIONE} \\ \vec{a}_A = \cancel{a_C} - \omega^2 R - \cancel{\dot{\vec{\omega}}\times(C-A)} = \underline{-\omega^2 R} & \text{COMPONENTE NORMALE OPPURE CENTRIPETA} \end{cases}$$

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

FORMULE DI POISSON

DERIVATE RISPETTO AL TEMPO DEI VERSORI DEGLI ASSI

SE DUE SDR SONO IN ROTOTRASLAZIONE L'UNO RISPETTO ALL'ALTRO I VERSORI NON HANNO DERIVATA NULLA

$S\,(x\,O\,y)$ FISSO IN O

$S\,(x_1 O\, y_1)$ ROTANTE

$S'\,(x_1' O\, y_1')$ SISTEMA DOPO dT

$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{i}_1 \qquad \frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{j}_1$

POSIZIONE $\qquad (P-O_0) = \underbrace{(O_1-O_0)}_{\text{POSIZIONE IN P}} + \underbrace{(P-O_1)}_{\text{POSIZIONE RELATIVA}} = (x_0\hat{i}_0 + y_0\hat{j}_0) + (x_1\hat{i}_1 + y_1\hat{j}_1)$

VELOCITA' $\qquad v_P = \underline{v_{TRASC}} + v_{REL} = \underbrace{(\dot{x}_0\hat{i}_0 + \dot{y}_0\hat{j}_0)}_{\text{VELOCITA' CENTRO } O_1} + \underbrace{\vec{\omega}\times(x_1\hat{i}_1 + y_1\hat{j}_1)}_{\text{VELOCITA' ROTAZIONE SISTEMA } S_1} + \underbrace{(\dot{x}_1\hat{i}_1 + \dot{y}_1\hat{j}_1)}_{\text{VELOCITA' RELATIVA}}$

ACCELERAZIONE $\qquad a_P = a_{O_1} + \underbrace{\underbrace{\dot{\omega}\times(P-O_1)}_{\text{TANGENZIALE}} + \underbrace{\omega\times\omega\times(P-O_1)}_{\text{NORMALE}}}_{\text{TRASCINAMENTO}} + \underbrace{a_{REL}}_{\text{RELATIVA}} + \underbrace{2\,\omega\times v_{REL}}_{\text{CORIOLIS}}$

$$\underbrace{(\ddot{x}_0\hat{i}_0 + \ddot{y}_0\hat{j}_0)}_{\frac{d}{dt}v_{O_1}} + \underbrace{\dot{\omega}\times(x_1\hat{i}_1 + y_1\hat{j}_1) + \omega\times\omega\times(x_1\hat{i}_1 + y_1\hat{j}_1) + \omega\times(\dot{x}_1\hat{i}_1 + \dot{y}_1\hat{j}_1)}_{\frac{d}{dt}\omega\times(P-O_1)} + \underbrace{(\ddot{x}\hat{i}_1 + \ddot{y}\hat{j}_1) + \omega\times(\dot{x}_1\hat{i}_1 + \dot{y}_1\hat{j}_1)}_{\frac{d}{dt}v_{REL}}$$

SISTEMI MECCANICI

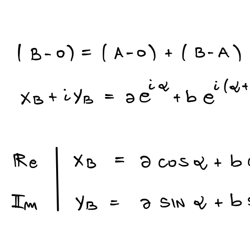
COLLEZIONE DI CORPI RIGIDI E VINCOLI

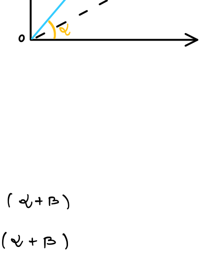
MECCANISMO	GDL > 0
STRUTTURA ISOSTATICA	GDL = 0
STRUTTURA IPERSTATICA	GDL < 0

WORKSPACE $\qquad$ PORZIONE DEL PIANO RAGGIUNGIBILE DAL MIO MANIPOLATORE

CINEMATICA DI UN ROBOT INDUSTRIALE $\qquad$ MANIPOLATORE

CATENA CINEMATICA (APERTA)





$(B-O) = (A-O) + (B-A)$

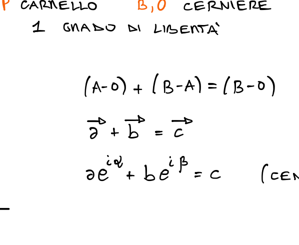
$x_B + iy_B = a e^{i\alpha} + b e^{i(\alpha+\beta)}$

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{Re} & x_B = a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta) \\ \mathrm{Im} & y_B = a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) \end{array}$$

MECCANISMI BASE $\qquad$ 1GDL

CATENE CINEMATICHE CHIUSE

MANOVELLISMO (MACCHINE ALTERNATIVE)



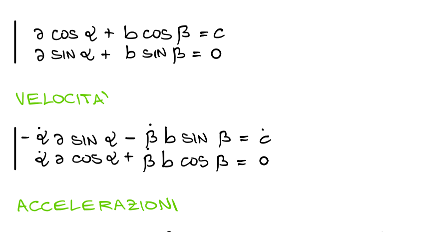
MOTORI A COMBUSTIONE INTERNA

COMPRESSORI, POMPE, PISTONI

TRASFORMA MOTI ROTATORI IN TRASLATORI E VICEVERSA

P CARRELLO $\qquad$ B, O CERNIERE

1 GRADO DI LIBERTA'



$(A-O) + (B-A) = (B-O)$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c$ $\qquad$ (CENTRATO)

POSIZIONI

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = c \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = 0 \end{cases}$$

VELOCITA'

$$\begin{cases} -\dot{\alpha}a\sin\alpha - \dot{\beta}b\sin\beta = \dot{c} \\ \dot{\alpha}a\cos\alpha + \dot{\beta}b\cos\beta = 0 \end{cases}$$

ACCELERAZIONI

$$\begin{cases} -\ddot{\alpha}a\sin\alpha - \dot{\alpha}^2 a\cos\alpha - \ddot{\beta}b\sin\alpha - \dot{\beta}^2 b\cos\beta = \ddot{c} \\ \ddot{\alpha}a\cos\alpha - \dot{\alpha}^2 a\sin\alpha + \ddot{\beta}b\cos\beta - \dot{\beta}^2 b\sin\beta = 0 \end{cases}$$

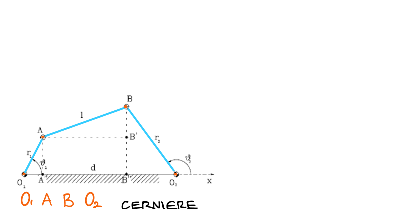
QUADRILATERO ARTICOLATO

BIOMECCANICA

SOSPENSIONI AUTO

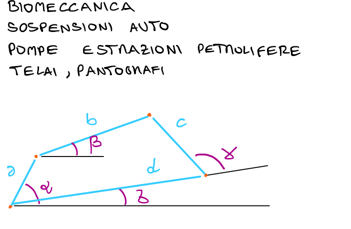
POMPE ESTRAZIONI PETROLIFERE

TELAI, PANTOGRAFI



O_1 A B O_2 CERNIERE

1 GRADO DI LIBERTA'



$(B-A) + (C-B) = (D-A) + (C-D)$

$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = d e^{i\delta} + c e^{i\gamma}$

AB, CD MANOVELLE SE COMPIONO GIRI COMPLETI, ALTRIMENTI BILANCERI

POSIZIONI

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = d\cos\delta + c\cos\gamma \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = d\sin\delta + c\sin\gamma \end{cases}$$

VELOCITA'

$$i\dot{\alpha}a e^{i\alpha} + i\dot{\beta}b e^{i\beta} = i\dot{\gamma}c e^{i\gamma} + i\dot{\delta}d e^{i\delta}$$

ACCELERAZIONI

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = d e^{i\delta} + c e^{i\gamma}\right]$$