Lunedì 15 novembre

lunedì 15 novembre 2021 09:36

EQUAZIONE DI LAGRANGE (THE "ULTIMATE" PER LA DINAMICA)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

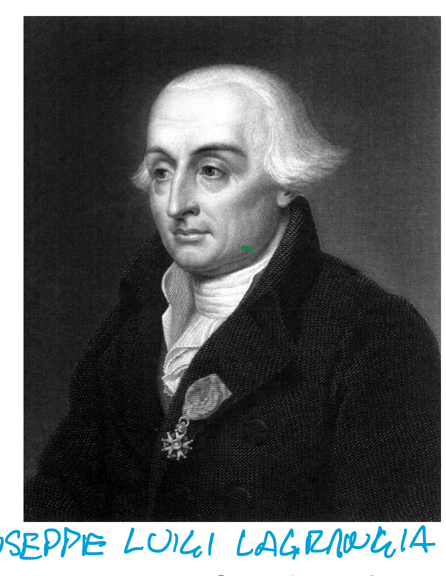
E_c : ENERGIA CINETICA

V : ENERGIA POTENZIALE

Q_k : COMPONENTE LAGRANGIANA $= \frac{\delta L}{\delta q_k}$

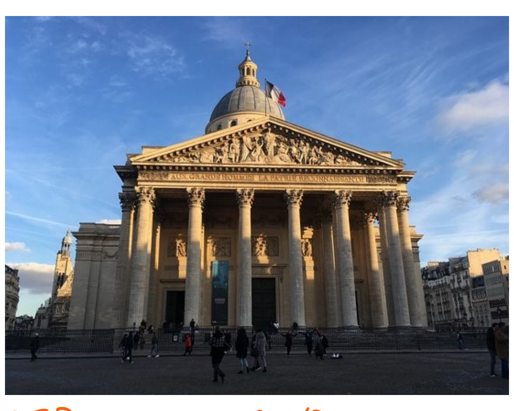
L : LAVORO DELLE FORZE ESTERNE (E DELLE FORZE INTERNE NON CONSERVATIVE)

q_k : COORDINATE INDIPENDENTI



GIUSEPPE LUIGI LAGRANGIA (NATO A TORINO)

AKA JOSEPH LOUIS LAGRANGE 1736-1813



SEPOLTO PANTHEON

DIMOSTRAZIONE EQ. LAGRANGE

→ PRINCIPIO DI D'ALEMBERT + PLV

$$\sum_1^N {}_i \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i\right) \times \delta \vec{x}_i = 0 \quad \text{per } i = 1,2,\dots,N \quad \text{COORDINATE FISICHE}$$

LA DESCRIZIONE DEL MOTO LA POSSO FARE ANCHE MEDIANTE LE COORDINATE GENERALIZZATE INDIPENDENTI q_k CON $k = 1,2,\dots,n$

$\vec{x}_i$ NON SONO ESPLICITAMENTE DIPENDENTI DAL TEMPO

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{PER } i = 1,2,\dots,N$$

CALCOLO DELLE VELOCITÀ DELLE $\vec{x}_i$

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n = \sum_1^n {}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad \text{per } i = 1,2,\dots,N \rightarrow \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots$$

DATO CHE $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$ NON DIPENDONO DA $\dot{q}_k$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \quad \text{per } i = 1,2,\dots,N \text{ e per } k = 1,2,\dots,n$$

$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_k)$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_k}\right) + \partial q_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k}}_{=1} + \partial q_k \cancel{\frac{d}{dt}}(0) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$$

SPOSTAMENTI VIRTUALI DELLE $\vec{x}_i$

$$\delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_1^n {}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad k = 1,2,\dots,n$$

SOSTITUISCO $\delta \vec{x}_i$ NELLA II PARTE DEL PLV

$$\sum_1^N {}_i\, m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_1^N {}_i\, m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \left(\sum_1^n {}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right) = \sum_1^n {}_k \left(\sum_1^N {}_i\, m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k$$

OGNI TERMINE DELL'EQ. PRECEDENTE LO POSSO SCRIVERE

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right) - m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)$$

① ②

BARBATRUCCO !!

$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}$

$$\Rightarrow m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\boxed{m_i \dot{\vec{x}}_i} \times \frac{\partial \boxed{\dot{\vec{x}}_i}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \boxed{m_i \dot{\vec{x}}_i} \times \frac{\partial \boxed{\dot{\vec{x}}_i}}{\partial q_k} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\right]\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_k \times \dot{\vec{x}}_k\right)\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i\right) = -m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \dot{\vec{x}}_k}{\partial q_k}$$

$$\sum_1^N {}_i\, m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_1^n {}_k \left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\right]\left(\sum_1^N {}_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i\right)\right\}\delta q_k =$$

$$= \sum_1^n {}_k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k}\right]\delta q_k \quad ①$$

CONSIDERO LE FORZE ESTERNE $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t)$

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ESTERE (I TERMINE DEL PLV)

$$\delta L = \sum_1^N {}_i \vec{F}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_1^N {}_i \vec{F}_i \times \sum_1^n {}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_1^n {}_k \left(\sum_1^N {}_i \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = \sum_1^n {}_k Q_k \delta q_k \quad ②$$

CONSIDERO IL LAVORO DI FORZE INTERNE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

→ $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ LE FORZE CONSERVATIVE HANNO UN'ENERGIA POTENZIALE

$$\sum_1^N {}_i \vec{F}_{I_i} \times \delta \vec{x}_i = \underbrace{\delta L_c}_{\text{CONSERVATIVE}} + \underbrace{\delta L_{nc}}_{\text{NON CONSERVATIVE}} = -\delta V + \sum_1^n {}_k Q_{nc_k}\delta q_k =$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n}\delta q_n\right) + \sum_1^n {}_k Q_{nc_k}\delta q_k = -\sum_1^n {}_k\left(\frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc_k}\right)\delta q_k \quad ③$$

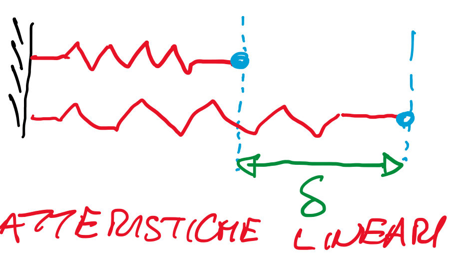
SOSTITUISCO ①②③ ALL'INTERNO DEL PLV:

$$-\sum_1^n {}_k\left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc_k} - Q_k\right]\delta q_k = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{nc} + Q}$$

- FORZE ELASTICHE / GRAVITAZIONALI NELL'EQ. DI LAGRANGE
- FORZE VISCOSE DISSIPATIVE NELL'EQ. DI LAGRANGE

FORZE ELASTICHE → MOLLA

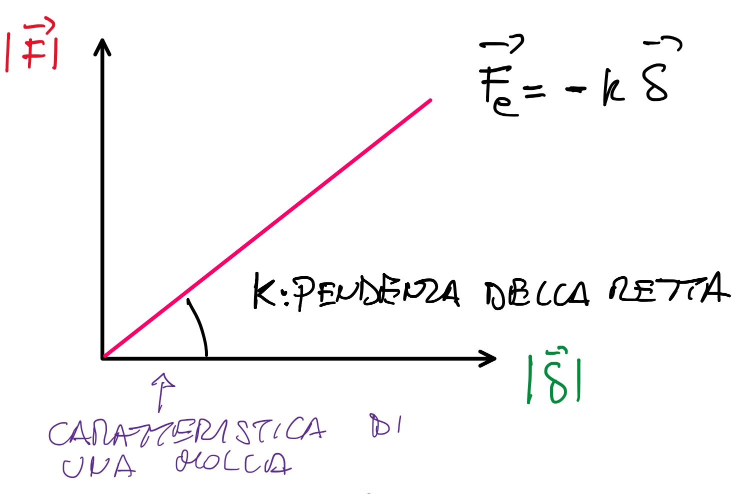


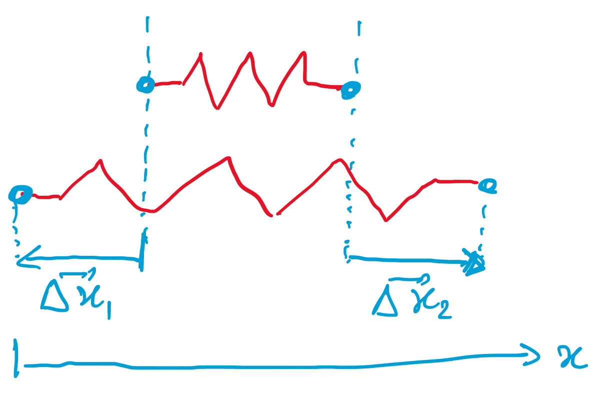
$\vec{F}_e = -k\vec{\delta}$ ← VARIAZIONE DI LUNGHEZZA DELLA MOLLA

FORZA ELASTICA

RIGIDEZZA (PARAMETRO CARATTERISTICO DELLA MOLLA)

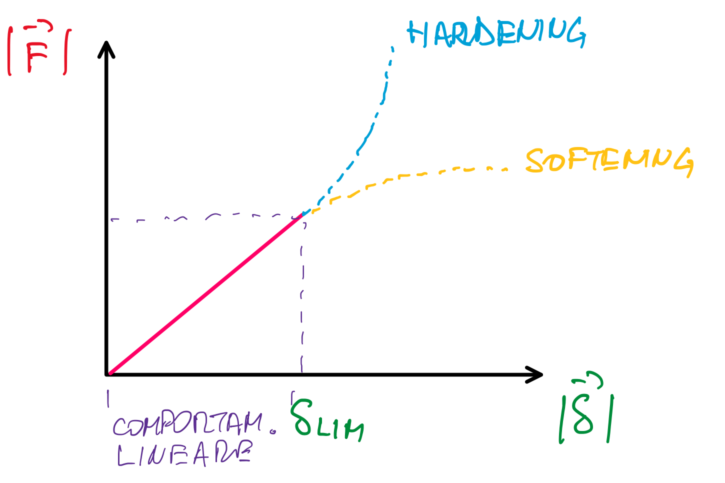
LA MOLLA VIENE CONSIDERATA CON CARATTERISTICHE LINEARI → LEGGE DI HOOKE





$$\vec{\delta} = \Delta\vec{x}_2 - \Delta\vec{x}_1$$

NELLA REALTÀ LE MOLLE SONO LINEARI SOLO IN UN CERTO INTERVALLO DI DEFORMAZIONE



δ_{lim} : DEFORMAZIONE LIMITE (SOGLIA DI LINEARITÀ)

- LAVORO DI DEFORMAZIONE DI UNA MOLLA → ENERGIA POTENZIALE DELLA MOLLA

$$L_{def} = \int_0^\delta \vec{F}_e \times d\eta = \int_0^\delta -k\eta\, d\eta = -\frac{1}{2}k\delta^2 \rightarrow V_e = -L_{def} = \frac{1}{2}k\delta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

FORZE GRAVITAZIONALI

$$L_g = \int_0^h m\vec{g} \times d\vec{y} = -mgh \quad \downarrow \vec{g} \quad \uparrow d\vec{y} \quad \longrightarrow \quad V_g = -L_g = mgh$$

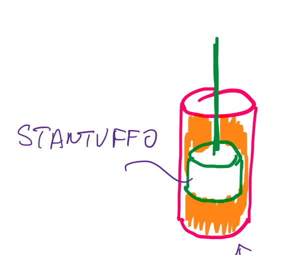
ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

FORZE DISSIPATIVE DI TIPO VISCOSO

- IN GENERALE GLI EFFETTI DISSIPATIVI SONO NON-LINEARI

→ CASO PARTICOLARE: DISSIPATORE VISCOSO

- ESEMPIO TIPICO: AMMORTIZZATORE



IL FLUIDO SI PUÒ MUOVERE TRA LE DUE CAMERE SEPARATE DALLO STANTUFFO

PER $\dot{\delta}$ VALE QUANTO GIÀ DETTO PER GLI SPOSTAMENTI DELLA MOLLA NEL CASO CHE LE DUE ESTREMITÀ SIANO ENTRAMBE MOBILI

$\vec{F}_d = -r\dot{\vec{\delta}}$ ← VELOCITÀ CON CUI AVVIENE LO SPOSTAMENTO (RELATIVA)

FORZA DISSIPATIVA O SMORZANTE

COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO VISCOSO

COMPONENTE LAGRANGIANA DELLO SMORZATORE VISCOSO

$$Q_{d_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial q_k}$$

→ DIPENDENZA DI δ DALLE COORDINATE LIBERE

$$\delta = \delta(q_k) \rightarrow \dot{\delta} = \sum_k \frac{\partial \delta}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \delta}{\partial q_k}$$

(VEDI DIMOSTRAZIONE EQ. LAGRANGE)

$$Q_{d_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial q_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}r\dot{\delta}^2\right)$$

$$D = \frac{1}{2}r\dot{\delta}^2$$

FUNZIONE DISSIPATIVA (PER SMORZAMENTO VISCOSO)

$$Q_{d_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}D$$

→ POSSO "MODIFICARE" L'EQ. DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}D + Q_k$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k}$$

INTRODUZIONE DELLA DERIVATA DELLA FUNZIONE DISSIPATIVA NEL LATO SX DELL'EQ. DI LAGRANGE

TUTTE LE COMPONENTI LAGRANGIANE DELLE FORZE ESTERNE CHE LAVORANO

IL VENERDÌ PASSATE DALL'AULA 25.0.2 ALLA 2.0.1