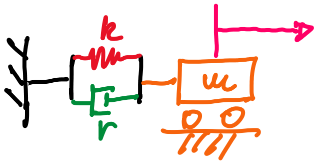
Lezione venerdì 20 novembre 2020

venerdì 20 novembre 2020 11:18

VIBRAZIONI DEL SISTEMA: MOTO LIBERO CON SMORZAMENTO



NON C'È LA FORZANTE

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

EQ. DIFFERENZIALE, DERIVATE TOTALI II ORDINE, COMPLETA, OMOGENEA, COEFFICIENTI COSTANTI

$$x(t) = X e^{\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t} \quad (d/dt)$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t} \quad (d/dt)$$

$$m\lambda^2 X e^{\lambda t} + r\lambda X e^{\lambda t} + k X e^{\lambda t} = 0$$

$$(m\lambda^2 + r\lambda + k) X e^{\lambda t} = 0$$

SOLUZIONE BANALE

$X = 0 \Rightarrow x(t) = 0$

IL SISTEMA NON SI MUOVE

SE $X \neq 0$

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$$

EQ. II GRADO ALGEBRICA

EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL SISTEMA

$$\lambda_{1e2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}_{\lambda \text{ DIPENDE DAL DISCRIMINANTE } \Delta}} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

$\longrightarrow \Delta = 0$

$$\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ PULSAZIONE NATURALE DEL SISTEMA

$$r_c = 2m\omega$$

r_c: SMORZAMENTO CRITICO

SE
$r > r_c \quad \Delta > 0 \quad h > 1$
$r < r_c \quad \Delta < 0 \quad h < 1$
$r = r_c \quad \Delta = 0 \quad h = 1$

$$h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega}$$

FATTORE DI SMORZAMENTO (SMORZAMENTO ADIMENSIONALE)

1) $r < r_c \quad \Delta < 0 \quad h < 1$

$$\lambda_{1,2} = -\underbrace{\boxed{\frac{r}{2m}}}_{\alpha} \pm i\sqrt{\underbrace{\boxed{\frac{k}{m}}}_{\omega^2} - \underbrace{\boxed{\left(\frac{r}{2m}\right)^2}}_{\alpha^2}} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\,\omega_d$$

$\omega_d = \omega\sqrt{1-h^2}$

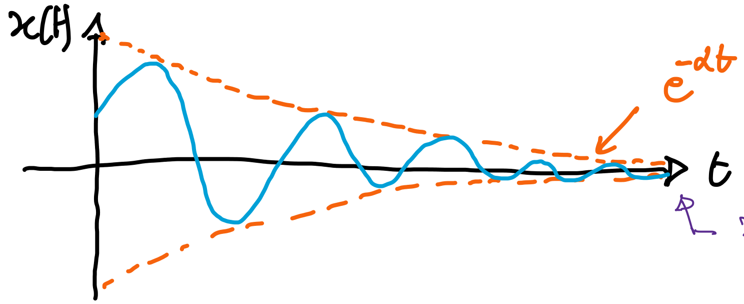
PULSAZIONE SISTEMA SMORZATO $\omega_d < \omega$

$$x(t) = X_1 e^{(-\alpha + i\omega_d)t} + X_2 e^{(-\alpha - i\omega_d)t} = e^{-\alpha t}\left(X_1 e^{i\omega_d t} + X_2 e^{-i\omega_d t}\right) =$$

FORMULA DI EULERO $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$= \underbrace{\boxed{e^{-\alpha t}}}_{\text{TERMINE MODULANTE}} \underbrace{\boxed{\left[A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right]}}_{\text{FUNZIONE ARMONICA}}$$

A, B: DA DETERMINARE IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$



$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

$x(t)$ È ASINTOTICAMENTE NULLA

SISTEMA SMORZATO $r < r_c$, $h < 1$

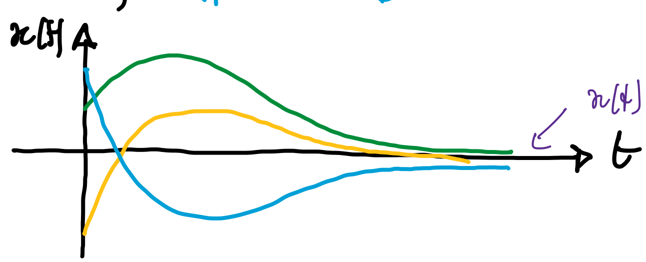
2) $r > r_c$, $\Delta > 0$, $h > 1$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta} \begin{cases} \lambda_1 = -\alpha_1 \\ \lambda_2 = -\alpha_2 \end{cases}$$

NB: $\alpha > \sqrt{\Delta}$

$$x(t) = X_1 e^{-\alpha_1 t} \; X_2 e^{-\alpha_2 t}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$



$x(t)$ È ASINTOTICAMENTE NULLA

SISTEMA SOVRASMORZATO $r > r_c$, $h > 1$

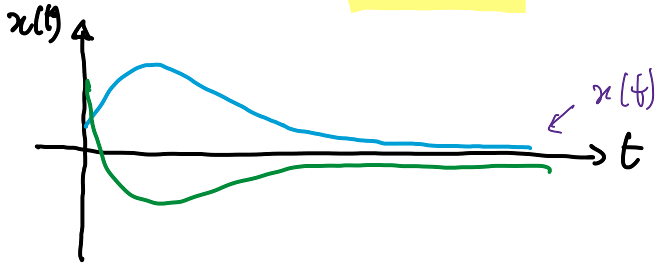
3) $r = r_c$, $\Delta = 0$, $n = 1$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$$

$$x(t) = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t}$$

"LA SOLUZIONE CHE VA A ZERO PIÙ VELOCEMENTE"

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$



x(t) È ASINTOTICAMENTE NULLO