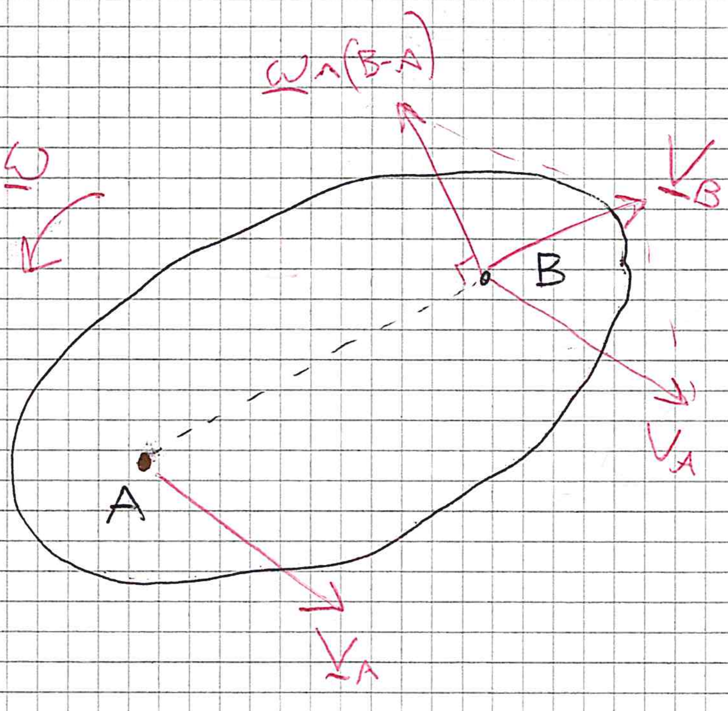
ESERCITAZIONE 2

CINEMATICA CORPO RIGIDO

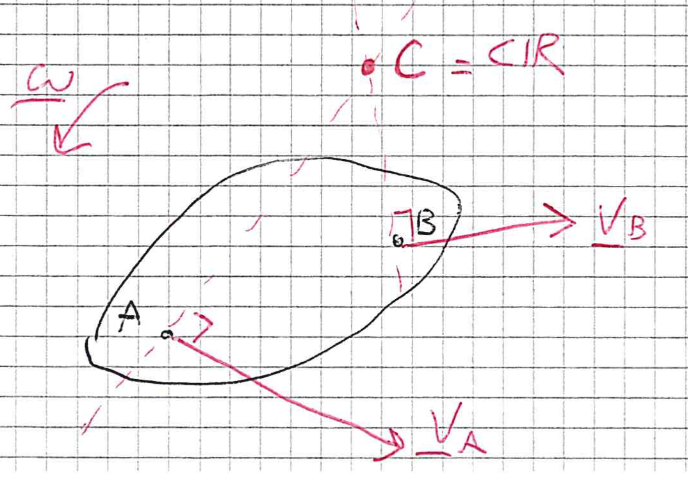
FORMULE UTILI

- RIVALS PER LE VELOCITÀ

$$\boxed{\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega}_{AB} \wedge (B-A)}$$



- C.I.R



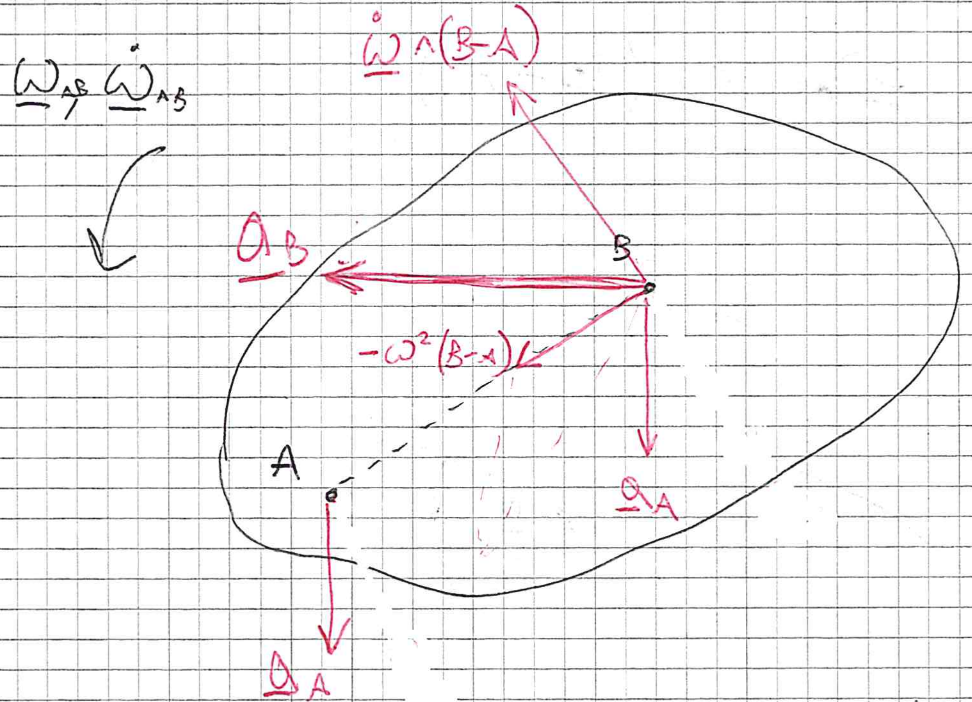
$$\underline{V}_C = \underline{0}$$

$$\underline{V}_A = \underline{\omega} \wedge (A-C)$$

$$\underline{V}_B = \underline{\omega} \wedge (B-C)$$

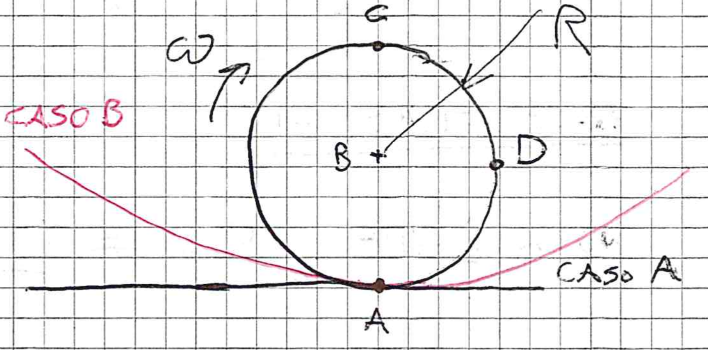
- RIVALS PER LE ACCELERAZIONI

$$\boxed{\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}}_{AB} \wedge (B-A) - \omega_{AB}^2 (B-A)}$$



PROB 1

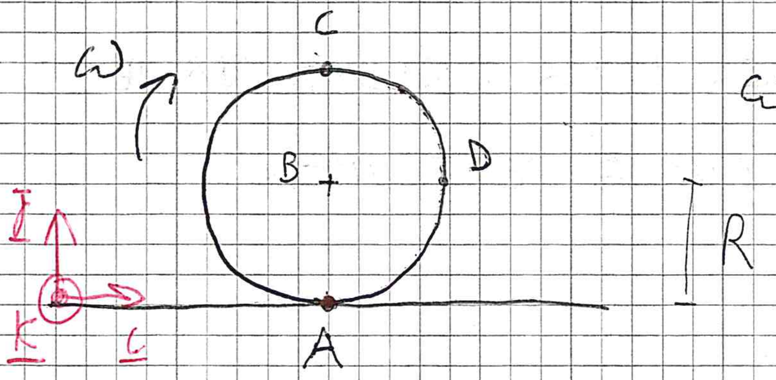
CALCOLARE VELOCITÀ e ACCELERAZIONE DEI PUNTI A, B, C, D APPARTENENTI AL DISCO CHE ROTOLA SENZA STRISCIARE CON ω COSTANTE NEI SEGUENTI DUE CASI



A) STRADA RETTILINEA

B) STRADA CIRCOLARE (raggio DI CURVATURA R_E)

CASO A



ω = COSTANTE

VELOCITÀ

IN "A" C'È UN VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO

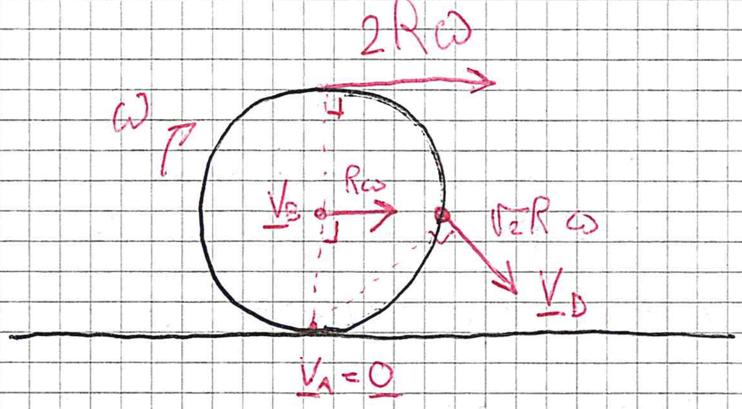
$\Rightarrow \underline{V}_A = \underline{0}$ (A ≡ C.I.R CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE)

$\underline{\omega} = -\omega \underline{K}$, $\dot{\underline{\omega}} = \underline{0}$

$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega} \wedge (B-A) = \underline{0} - \omega \underline{K} \wedge R \underline{J} = R\omega \underline{i}$

$\underline{V}_C = \underline{V}_A + \underline{\omega} \wedge (C-A) = -\omega \underline{K} \wedge 2R \underline{J} = 2R\omega \underline{i}$

$\underline{V}_D = \underline{V}_A + \underline{\omega} \wedge (D-A) = -\omega \underline{K} \wedge (R\underline{i} + R\underline{J}) = \omega R \underline{i} - \omega R \underline{J}$

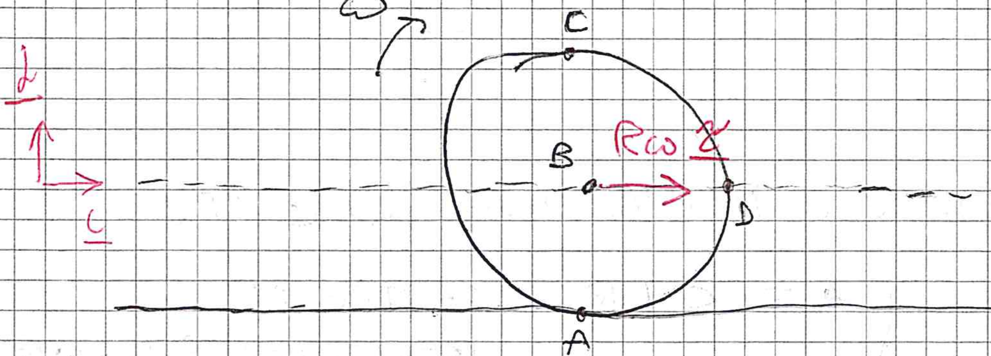


ACCELERAZIONI

NOTA BENE: $\underline{a}_A \neq \underline{0}$

PER CUI NON POSSO USARE RIVALS A PARTIRE DA "A"

SFRUTTO LA CONOSCENZA DELLA TRAIETTORIA DEL CENTRO DEL DISCO "B", CHE È RETTILINEA



$$\underline{V}_B = R\omega\,\underline{i} = R\omega\,\underline{\tau} = \mathring{s}\,\underline{\tau}$$

$\ddot{s} = 0$ POICHÉ $\mathring{s} = \text{COST}$

$$\underline{a}_B = \ddot{s}\,\underline{\tau} + \cancel{\frac{\mathring{s}^2}{\rho}\,\underline{n}} = \ddot{s}\,\underline{\tau} = \underline{0}$$

$\rho = \infty$

QUINDI IN QUESTO CASO PARTICOLARE

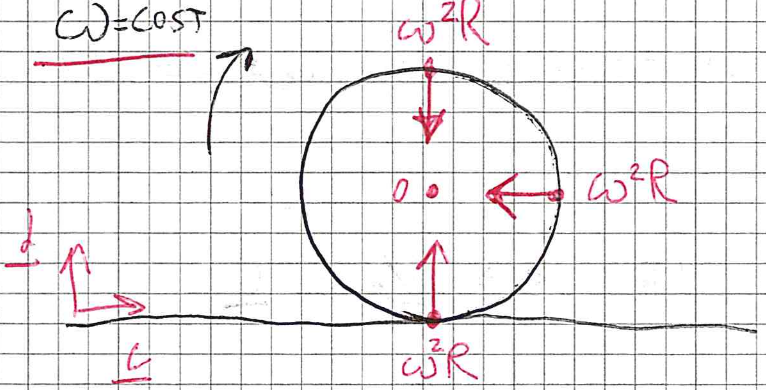
$\underline{a}_B = \underline{0}$, ALTRIMENTI SAREBBE $\underline{a}_B = R\dot{\omega}\,\underline{i}$

$$\underline{a}_A = \cancel{\underline{a}_B} + \cancel{\underbrace{\dot{\underline{\omega}}}_{\underline{0}} \wedge (A-B)} - \omega^2 (A-B) =$$

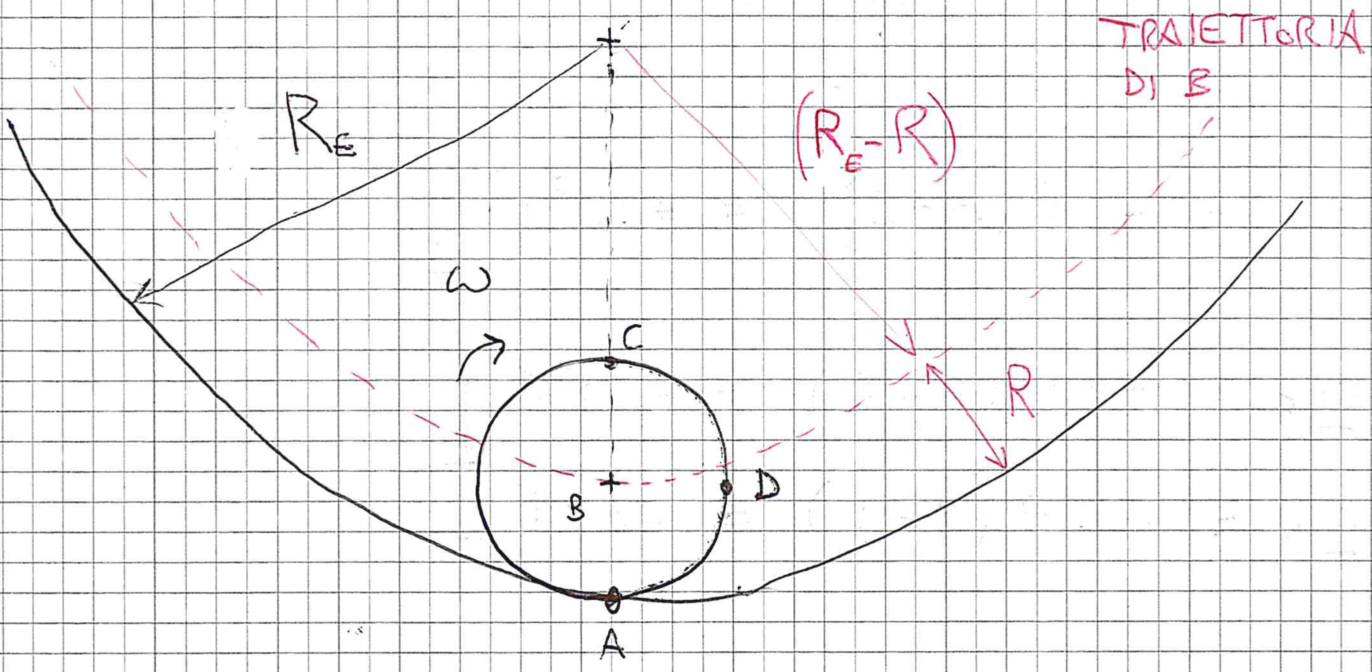
$$= -\omega^2 (A-B) = +\omega^2 R \, \underline{j}$$

$$\underline{a}_C = -\omega^2 (C-B) = -\omega^2 R \, \underline{j}$$

$$\underline{a}_D = -\omega^2 (D-B) = -\omega^2 R \, \underline{i}$$



CASO B



DIFFERENZA RISPETTO A PRIMA: IL CENTRO DEL DISCO HA UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE DI RAGGIO $(R_E - R)$

"A" E' SEMPRE IL CIR $\leftrightarrow$ $\underline{V}_A = \underline{0}$

VELOCITÀ

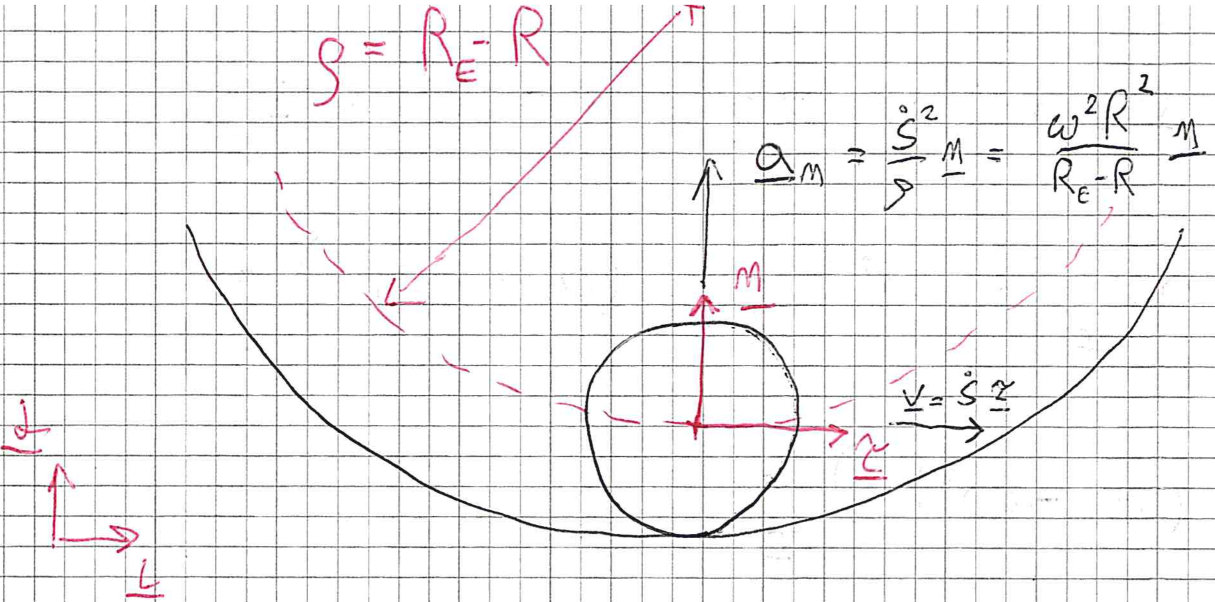
UGUALE AL "CASO A"

ACCELERAZIONE

$$\underline{a}_B = \ddot{S}\,\underline{\tau} + \frac{\dot{S}^2}{\rho}\,\underline{n} = \underline{a}_\tau + \underline{a}_n$$

$\ddot{S} = 0$ COME PRIMA $\rightarrow$ $\underline{a}_\tau = \underline{0}$

INVECE ORA $\underline{a}_n \neq 0$



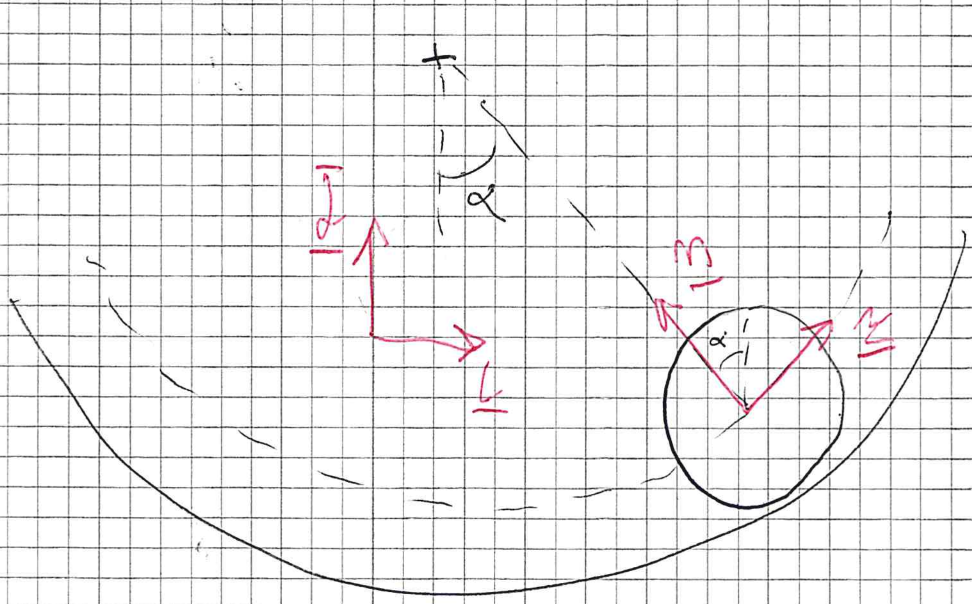
$$\underline{a}_M = \frac{\omega^2 R^2}{R_E - R}\,\underline{m}$$

IN QUESTO ATTO DI MOTO SPECIFICO

$$\underline{m} = \underline{J}$$

$$\underline{a}_B = \left(\frac{\omega^2 R^2}{R_E - R}\right)\underline{J} = a_m\,\underline{J}$$

IN GENERALE $\underline{m} \neq \underline{J}$

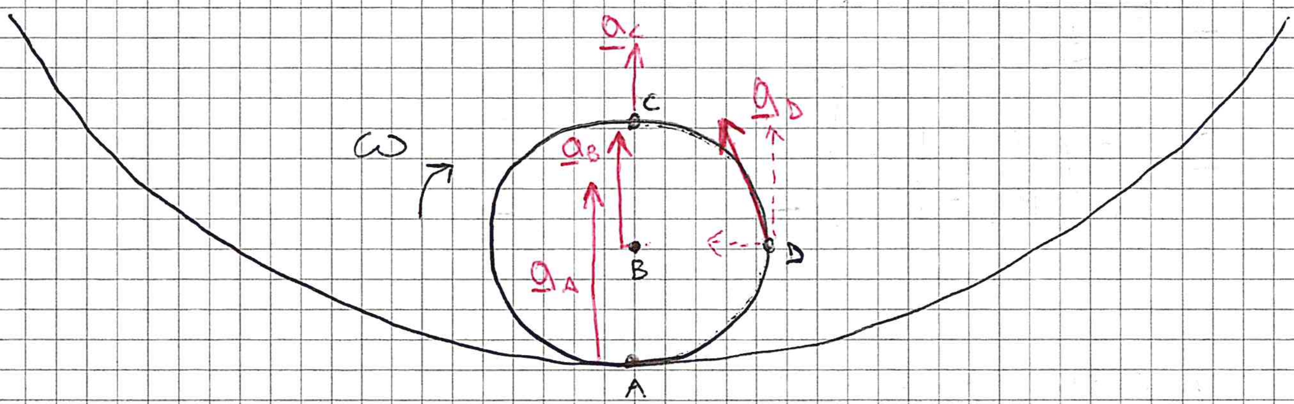


$$\underline{a}_A = \underline{a}_B + \cancel{\dot{\underline{\omega}} \wedge (A-B)} - \omega^2 (A-B)$$

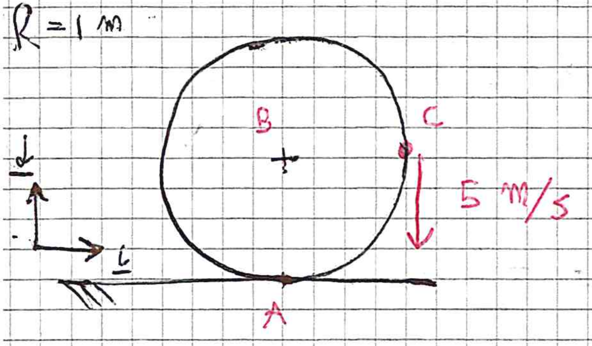
$$= a_m \underline{j} + \omega^2 R \, \underline{j} = (a_m + \omega^2 R)\, \underline{j}$$

$$\underline{a}_C = (a_m - \omega^2 R)\, \underline{j}$$

$$\underline{a}_D = a_m \underline{j} - \omega^2 R \, \underline{i}$$



PROB 2



NOTA LA VELOCITÀ DEL PUNTO C

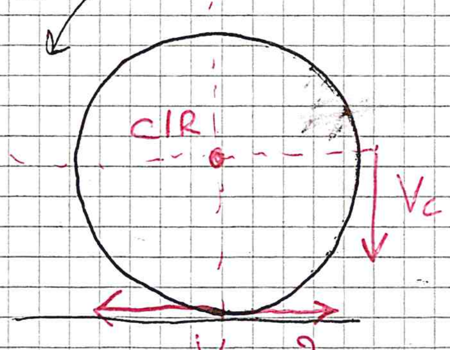
$\underline{V}_C = -5\ \underline{j}\ \ m/s$

CALCOLARE LA VELOCITÀ DEL CENTRO DEL DISCO B

NOTA BENE: AFFINCHÉ IL PUNTO C ABBIA LA VELOCITÀ INDICATA, IL PUNTO DI CONTATTO "A" NON PUÒ ESSERE IL C.I.R., QUINDI $\underline{V}_A \neq \underline{0}$

SOLUZIONE

INDIVIDUO IL C.I.R., SAPENDO CHE LA VELOCITÀ $\underline{V}_A = V_{Ax}\ \underline{i}$ (ALTRIMENTI LA RUOTA SI STACCHEREBBE DA TERRA), QUINDI PUÒ AVERE SOLO COMPONENTE ORIZZONTALE



$B \equiv CIR \rightarrow \underline{V}_B = 0$

QUINDI

$\underline{V}_C = \underline{\omega} \wedge (C - B) = -5\ \underline{j}$

$\rightarrow$ POSSO RICAVARE $\underline{\omega} = 5\ \frac{rad}{s}\ \underline{k}$

$\underline{V}_A = -5\ \underline{i}$

IN ALTERNATIVA

$$\underline{V}_A = V_{Ax}\,\underline{i} = \underline{V}_C + \underline{\omega} \wedge (A - C)$$

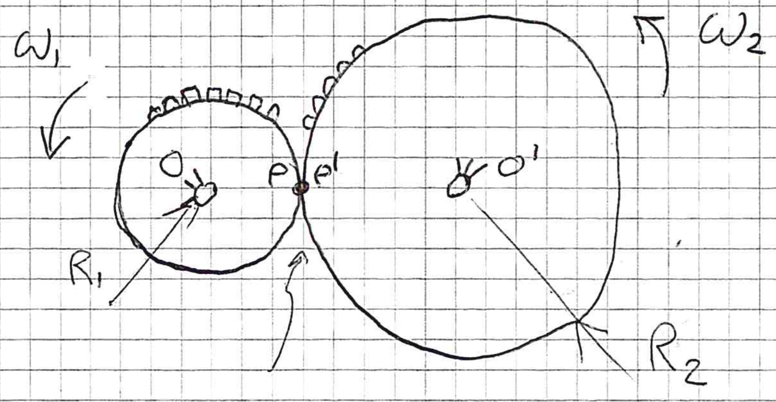
$$V_{Ax}\,\underline{i} = -5\,\underline{j} + \omega\,\underline{k} \wedge (-\underline{i} - \underline{j})$$

$$V_{Ax}\,\underline{i} = (-5 - \omega)\,\underline{j} + \omega\,\underline{i}$$

$$\begin{array}{l} \underline{i} \\ \underline{j} \end{array} \begin{cases} V_{Ax} = \omega & \longrightarrow V_{Ax} = -5 \ \ m/s \\ 0 = -5 - \omega & \longrightarrow \omega = -5 \ \ \frac{rad}{s} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \underline{V}_A = -5\,\underline{i} \\ \underline{\omega} = -5\,\underline{k} \end{array}$$

PROB 3



CONTATTO
DI PURO
ROTOLAMENTO
IN $P \equiv P'$

CALCOLARE
IL
RAPPORTO DI
TRASMISSIONE

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\underline{V}_P = \underline{V}_{P'}$$

$$\underline{V}_P = \cancel{\underline{V}_O} + \omega_1 \underline{k} \wedge \overbrace{(P-O)}^{R_1 \underline{i}} = \omega_1 R_1 \underline{j}$$

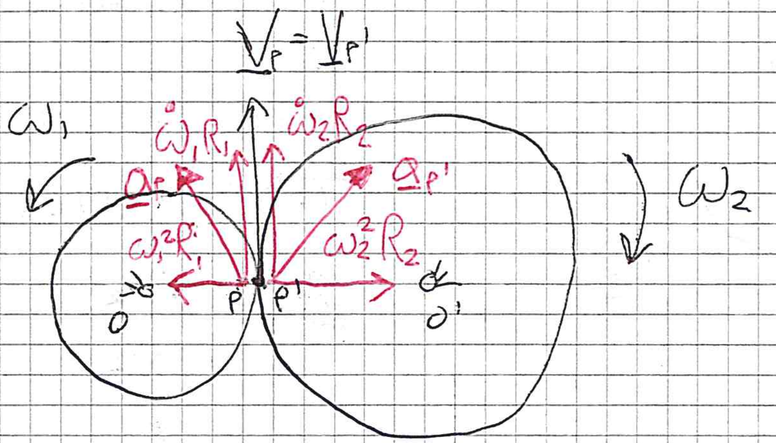
$$\underline{V}_{P'} = \cancel{\underline{V}_{O'}} + \omega_2 \underline{k} \wedge \underbrace{(P'-O')}_{-R_2 \underline{i}} = -\omega_2 R_2 \underline{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_2}$$

IL SEGNO "−" INDICA CHE SE UN DISCO RUOTA IN SENSO ORARIO, L'ALTRO RUOTA IN SENSO ANTIORARIO e VICEVERSA

NOTA BENE

$$\underline{a}_P \neq \underline{a}_{P'}$$



P e P' HANNO TRAIETTORIE DIVERSE

$$\frac{\dot{\omega}_2}{\dot{\omega}_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_2}$$

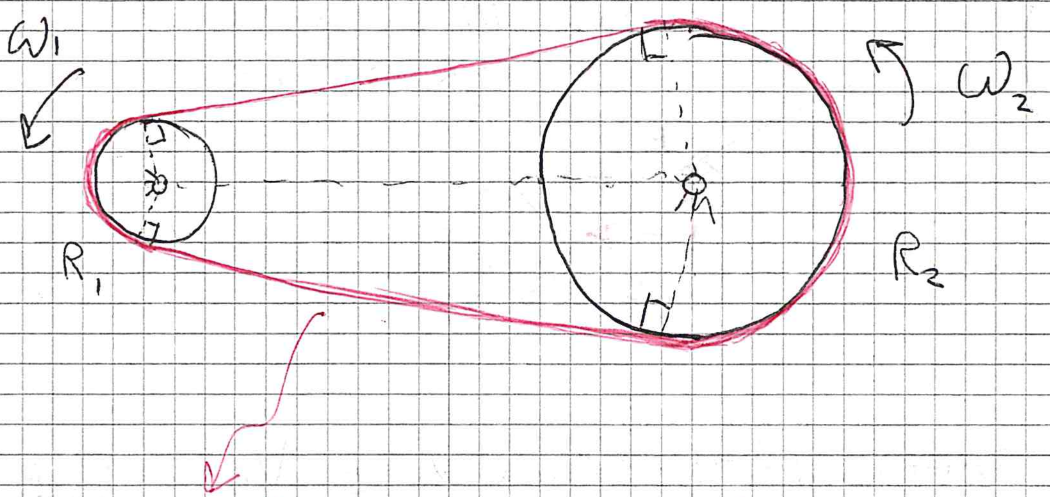
SOLO LA COMPONENTE TANGENZIALE È UGUALE PER I DUE PUNTI, QUELLA NORMALE NO.

$$\underline{a}_{P\tau} = \underline{a}_{P'\tau}$$

$$\underline{a}_{Pn} \neq \underline{a}_{P'n}$$

PROB 4

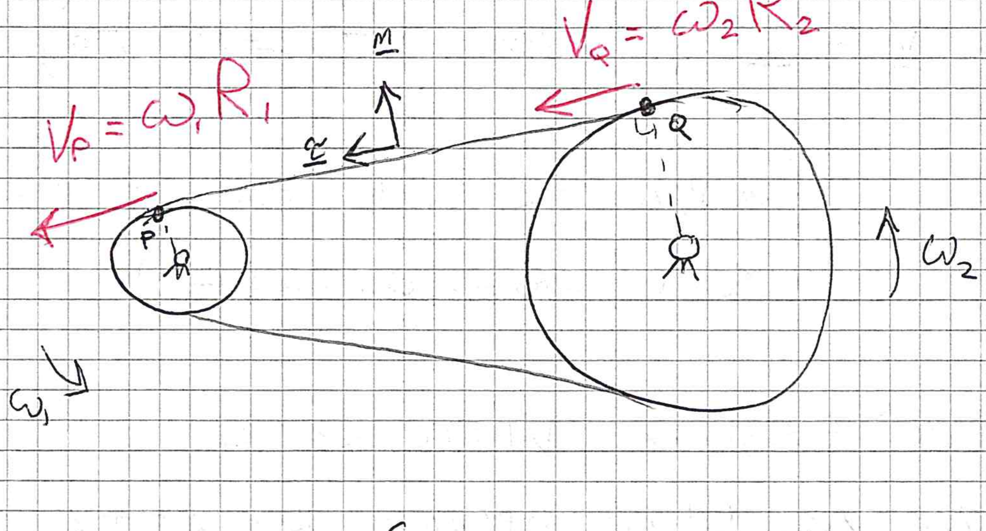
TRASMISSIONE A CINGHIA / CATENA



DOMANDA

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = ?$$

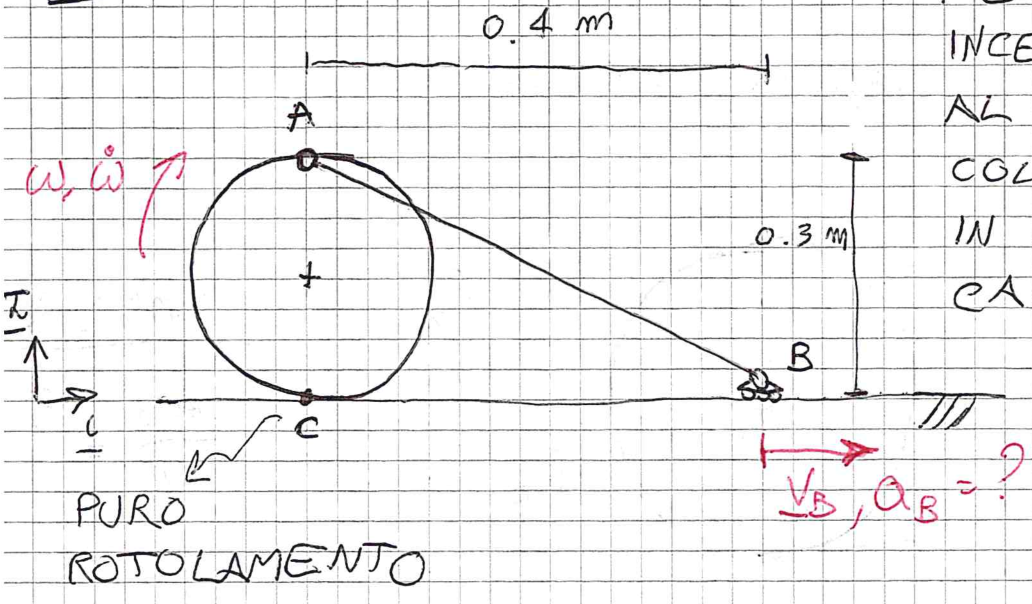
CHIGHIA / FUNE INESTENSIBILE : SI PIEGA A FLESSIONE, MA È RIGIDO ASSIALMENTE



$\underline{V}_P = \underline{V}_Q$ (FUNE INESTENSIBILE)

$$\underline{V}_P = \omega_1 R_1 \underline{\tau}$$
$$\underline{V}_Q = \omega_2 R_2 \underline{\tau} \quad \longrightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

PROB 5



AB ASTA RIGIDA INCERNIERATA IN A AL DISCO E COLLEGATA A TERRA IN B CON UN CARRELLO

NELL'ISTANTE RAFFIGURATO CALCOLARE $\underline{V}_B$ e $\underline{a}_B$

NOTI $\omega = 2 \frac{rad}{s}$ e $\dot{\omega} = 4 \frac{rad}{s^2}$

SOLUZIONE

- $C \equiv CIR \longleftrightarrow \underline{V}_C = \underline{0}$ (PURO ROTOLAMENTO)

- $\underline{V}_B = V_{Bx} \underline{i}$ (LA VELOCITÀ DI B PUÒ ESSERE SOLO ORIZZONTALE)

- IL PUNTO "A" PUÒ ESSERE VISTO COME APPARTENENTE AL DISCO OPPURE ALL'ASTA IN QUANTO ASTA E DISCO SONO COLLEGATI IN A MEDIANTE UNA CERNIERA

QUINDI POSSO SCRIVERE:

$$\begin{cases} \underline{V}_A = \cancel{\underline{V}_C}^{\,=0} + \underline{\omega}_{DISCO} \wedge (A-C) & [DISCO] \\ \underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{\omega}_{AB} \wedge (A-B) & [ASTA] \end{cases}$$

$$\underline{\omega}_{DISCO} \wedge (A-C) = \underline{V}_B + \underline{\omega}_{AB} \wedge (A-B)$$

con

$\underline{\omega}_{DISCO} = -2\ \underline{k}$

$(A-C) = 0.3\ \underline{j}$

$\underline{V}_B = V_{Bx}\ \underline{i}$ $\qquad$ V_{Bx} : INCOGNITA

$\underline{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\ \underline{k}$ $\qquad$ ω_{AB} INCOGNITA

$(A-B) = -0.4\ \underline{i} + 0.3\ \underline{j}$

SOSTITUISCO

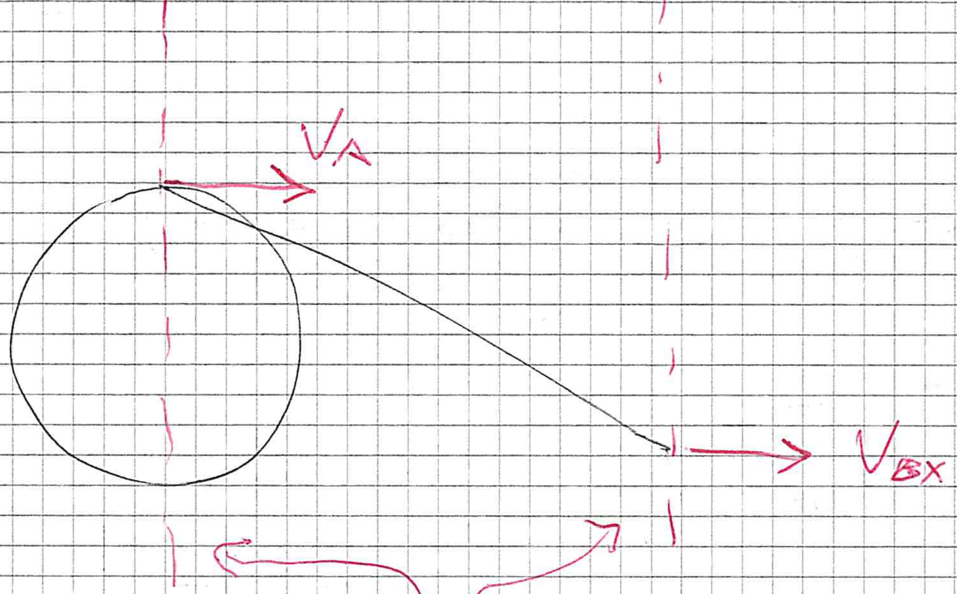
$$0.6\ \underline{i} = V_{Bx}\ \underline{i} - \omega_{AB}\ 0.4\ \underline{j} - 0.3\ \omega_{AB}\ \underline{i}$$

EQ VETTORIALE IN 2 INCOGNITE

SEPARO COMPONENTI $\underline{i}$ e $\underline{j}$

$$\begin{cases} \underline{i}: & 0.6 = V_{Bx} - 0.3\ \omega_{AB} \\ \underline{j}: & 0 = -\omega_{AB}\ 0.4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega_{AB} = 0 \ \frac{rad}{s} \\ V_B = 0.6\ m/s \end{cases}$$

$\omega_{AB} = 0$ POTEVO CALCOLARLO IMMEDIATAMENTE VEDENDO CHE IL CORPO TRASLA (CIOÈ IL CIR NON ESISTE)



LE DUE RETTE NON SI INTERSECANO

CALCOLARE IN MANIERA ANALOGA LE ACCELERAZIONI

[ATTENZIONE A CALCOLARE L'ACCELERAZIONE DI "A" VISTO COME APPARTENENTE AL DISCO: $\underline{a}_{CIR} \neq 0$!]

RISULTATO

$\underline{a}_B = 1.65 \, \underline{i} \, m/s^2$

$\underline{\dot{\omega}}_{AB} = 1.5 \, \underline{k} \, \frac{rad}{s^2}$