

# E SERCITAZIONE 4 : DINAMICA -

## APPROCCIO ENERGETICO

### PROB 1

$$F_{\text{aeris}} = KV^2$$

(RESISTENZA  
AERODINAMICA)

$$\frac{1}{2} \rho V^2 C_D L$$

$$m_R, J_R$$

$$R$$

$$w_R, \omega_R$$

$$F_{\text{aeris}}$$

$$V, a$$

$$\downarrow g$$

$M$  (MASSA MOTO  
+ PILOTA ESCLUSO  
SERUOTE)

$$m_R, J_R$$

$$R$$

MOTORE +  
CAMBIO

$$M_s$$

### SCHEMA TRASMISSIONE

[ FRIZIONE NON  
MODELATA ]

TRASMISSIONE  
PRIMARIA E INGRANAGGI

TRASMISSIONE  
SECONDARIA

$$\omega_R$$

$$\omega_p \leftarrow \omega_m$$



$$C_M$$

COPPIA  
MOTRICE  
(ALBERO)

$$J_M$$

momento di inerzia  
motore

$$\omega_c$$

## DOMANDE

1) CALCOLARE IL LEGAME CINEMATICO  
TRA  $\omega_m$  e  $V$

2) CALCOLARE L'EQ. DI MOTO CON  
METODO ENERGETICO

3) ACCELERAZIONE ALLO SPUNTO e VELOCITA'  
A REGIME

$C_{m, \text{lim}}$   
 $\gamma$   
 4) CALCOLARE LA COPPIA MOTRICE LIMITE PER  
NON IMPENNARE ALLO SPUNTO

• EFFETTUARE LA VERIFICA DI ADERENZA  
ALLO SPUNTO CON  $C_m =$

DATI (BMW S1000RR)

$$M = 280 \text{ Kg}$$

$$m_R = 10 \text{ Kg}$$

$$R = 0.32 \text{ m}$$

$$J_e = 0.65 \text{ Kg m}^2$$

$$C_m = 113 \text{ Nm}$$

$$J_M = 0.1 \text{ Kg m}^2$$

$$k = 0.28 \left( \frac{\text{N}}{(\text{m/s})^2} \right)$$

$$\zeta_p = \frac{\omega_p}{\omega_m} = \frac{1}{1.65}$$

$$\zeta_s = \frac{\omega_R}{\omega_c} = \frac{1}{2.5}$$

$$\zeta_m = \frac{\omega_c}{\omega_p} = \begin{cases} \rightarrow \text{IN } 1^\alpha : \frac{1}{2.65} \\ \rightarrow \text{IN } 6^\alpha : \frac{1}{1.26} \end{cases}$$

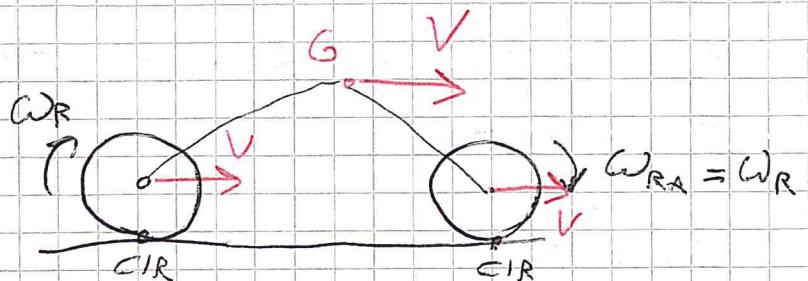
$$M_s = 1 \quad \text{COEFFICIENTE DI}$$

ATTRITO STATICO

QUOTA - PNEUMATICO

# ① CINEMATICA

$$V = \omega_R R$$



$$\omega_R = \sum_s \omega_c$$

$$\omega_c = \sum_m \omega_p \quad \text{CON } \sum_m = \sum_{1, 2, 3, 4, 5, 6}$$

A SECONDA DELLA MARCIA  
INSERITA

$$\omega_p = \sum_p \omega_m$$

$$\omega_R = \sum_p \sum_s \sum_m \omega_m$$

$$V = R(\sum_p \sum_s \sum_1) \omega_m = R \hat{\sum} \omega_m$$

$$\hat{\sum}_1 = \sum_p \sum_s \sum_1 = \frac{1}{11.6} = 0.086$$

$$\hat{\sum}_6 = \sum_p \sum_s \sum_1 = \frac{1}{5.5} = 0.18$$

CONSIDERANDO CHE  $\omega_m = [1000, 14000]$  rev/min

→ IN PRIMA MARCIA:

$$V = [1000, 14000] \frac{2\pi}{60} R \hat{\sum}_1 3.6 = [10, 145] \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

→ IN SESTA MARCIA

$$V = [22, 306] \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

PER ACCELERAZIONE STESSO LEGAME

CINEMATICO:

$$\alpha = R \hat{\omega} \dot{\omega}_M , \quad \alpha = R \dot{\omega}_R$$

(2) EQ. DI MOTO

BILANCIO DI POTENZE (TEOREMA EN. CINETICA)

$$\frac{dE_c}{dt} = W_{\text{ATTIVE}} + W_{\text{ESTERNE}}$$

$$+ W_{\text{REATTIVE}} \\ (\text{ATTRITO}, \text{VINCOLI})$$

= 0 IN  
QUESTO  
CASO

ENERGIA CINETICA  $E_c$

$$E_c = \sum_i^{N_{\text{CORPI}}} \left( \frac{1}{2} m_i \underline{V}_{G_i} \cdot \underline{V}_{G_i} + \frac{1}{2} J_{G_i} \underline{\omega}_i \cdot \dot{\underline{\omega}}_i \right)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \left( m_i \underline{V}_{G_i} \cdot \underline{\alpha}_{G_i} + J_{G_i} \underline{\omega}_i \cdot \dot{\underline{\omega}}_i \right)$$

NEL PROBLEMA IN ESAME CI SONO 4 CORPI  
RIGIDI DOTATI DI MASSA e/o MOMENTO DI  
INERZIA

• RUOTA ANTERIORE  $m_R, J_R$

• RUOTA POSTERIORE  $m_R, J_R$

• MOTO :  $M$   
+  
PILOTA

• MOTORE :  $J_M$

$$\frac{dE_c}{dt} = 2 \left( m_R \underline{V}_R \cdot \underline{\alpha}_R + J_R \underline{\omega}_R \cdot \dot{\underline{\omega}}_R \right) +$$

↓  
2 ROTI

$$M \underline{\alpha}_c \underline{V}_c + J_M \dot{\underline{\omega}}_M \cdot \underline{\omega}_M$$

CON

$$\underline{V}_R = V \underline{L}, \quad \underline{\alpha}_R = \underline{\alpha} \underline{L}$$

$$\underline{V}_G = \underline{V}_R, \quad \underline{\alpha}_G = \underline{\alpha}_R$$

$$\underline{\omega}_R = -\underline{\omega}_R \underline{K}, \quad \dot{\underline{\omega}}_R = -\dot{\underline{\omega}}_R \underline{K}$$

$$\underline{\omega}_M = -\underline{\omega}_M \underline{K}, \quad \dot{\underline{\omega}}_M = -\dot{\underline{\omega}}_M \underline{K}$$

QUINDI

$$\frac{dE_c}{dt} = (M + 2m_R) \underline{\alpha} \underline{V} + J_R \underline{\omega}_R \dot{\underline{\omega}}_R + J_M \dot{\underline{\omega}}_M \underline{\omega}_M$$

SOSTITUISCO I LEGAMI CINEMATICI

$$\frac{dE_c}{dt} = \left[ M + 2M_r + \frac{J_r}{R^2} + \frac{J_m}{(R\hat{\omega})^2} \right] a \cdot V$$

$$= M^* a \cdot V$$

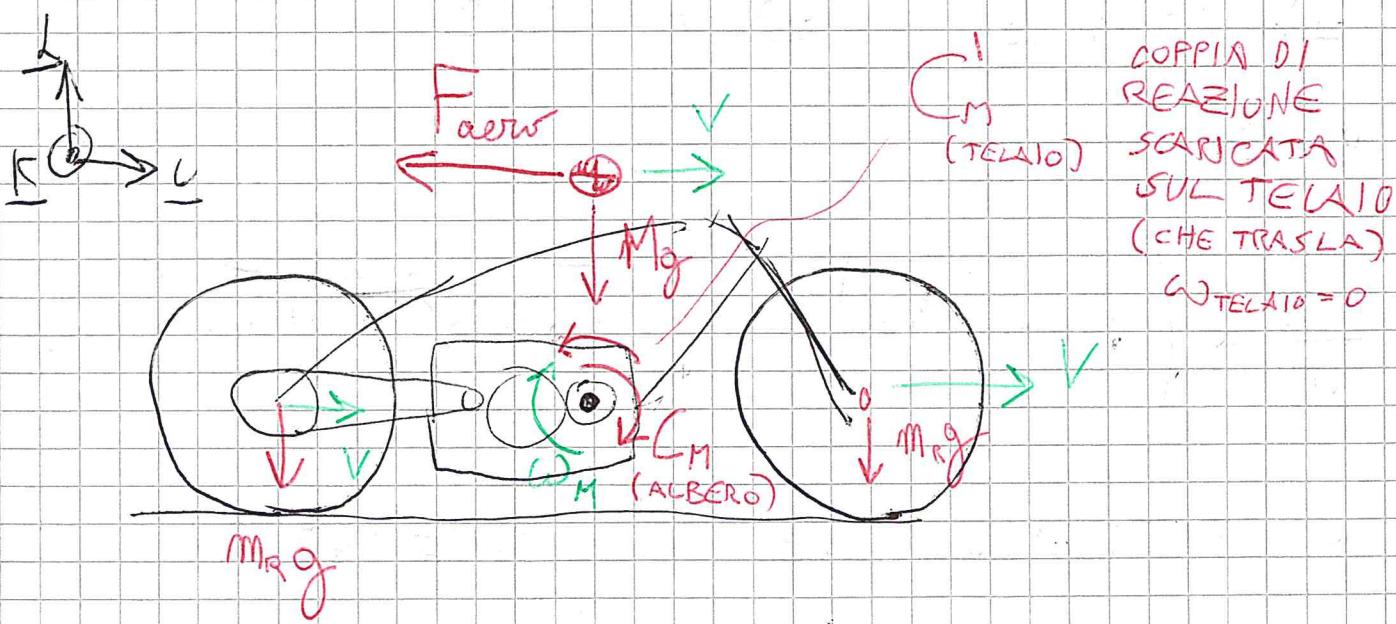
MASSA RIDOTTA DEL SISTEMA

NOTA: IL VALORE DI  $M^*$  DIPENDE DA  $\hat{\omega}$ , QUINDI DALLA MARCIA INSERITA

$$M_1^* = 424 \text{ Kg}$$

$$M_6^* = 323 \text{ Kg}$$

$$W_{ATTIVE} = ?$$



$$W_{ATTIVE} = W_{PESO} + W_{AERO} + W_{MOTORE}$$

$$W_{PESO} = Mg \cdot \underline{V} + 2M_{R}g \cdot \underline{V} = 0$$

INFATTI SONO 1

$$\begin{aligned} W_{AERO} &= F_{AERO} \circ \underline{V} = -KV^2 \underline{L} \cdot V \underline{L} \\ &= -KV^2 V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{MOTORE} &= C_M \cdot \underline{\omega}_m + C_{M(TELEIO)} \cdot \underline{\omega}_{TELEIO} \\ &= C_M \underline{K} \cdot -\underline{\omega}_m \underline{K} + \cancel{C_M \underline{K} \cdot \emptyset \underline{K}} \\ &= C_M \omega_M = \frac{C_M}{R \hat{\epsilon}} V \end{aligned}$$

BILANCIO POTENZE:

$$M^* a_V = \left( \frac{C_M}{R \hat{\epsilon}} - KV^2 \right) V$$

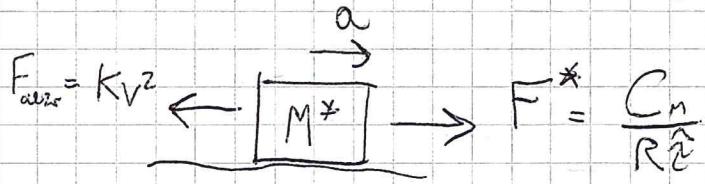
$$\left( M^* a + KV^2 - \frac{C_M}{R \hat{\epsilon}} \right) V = 0$$

$$\hookrightarrow M^* a + KV^2 = \frac{C_M}{R \hat{\epsilon}}$$

EQ. DI  
MOTO

$$M^* \frac{dv}{dt} + Kv^2 = \frac{C_m}{R^2}$$

EQ. DIFFERENZIALE  
NON LINEARE



↓  
INTEGRAZIONE  
NUMERICA

③

• SPUNTO ( $v = 0$ )

$$Kv^2 = 0$$

IN 1<sup>a</sup>  
MARCHA

$$a_1 = \frac{C_m}{R^2 M_1} = 9.6 \frac{m}{s^2}$$

$$M^* a = \frac{C_m}{R^2}$$

IN 6<sup>a</sup>

$$a_6 = \frac{C_m}{R^2 M_6} = 6 \frac{m}{s^2}$$

• REGIME ( $v = \text{cost}$ ,  $a = 0$ )

$$Kv^2 = \frac{C_m}{R^2}$$

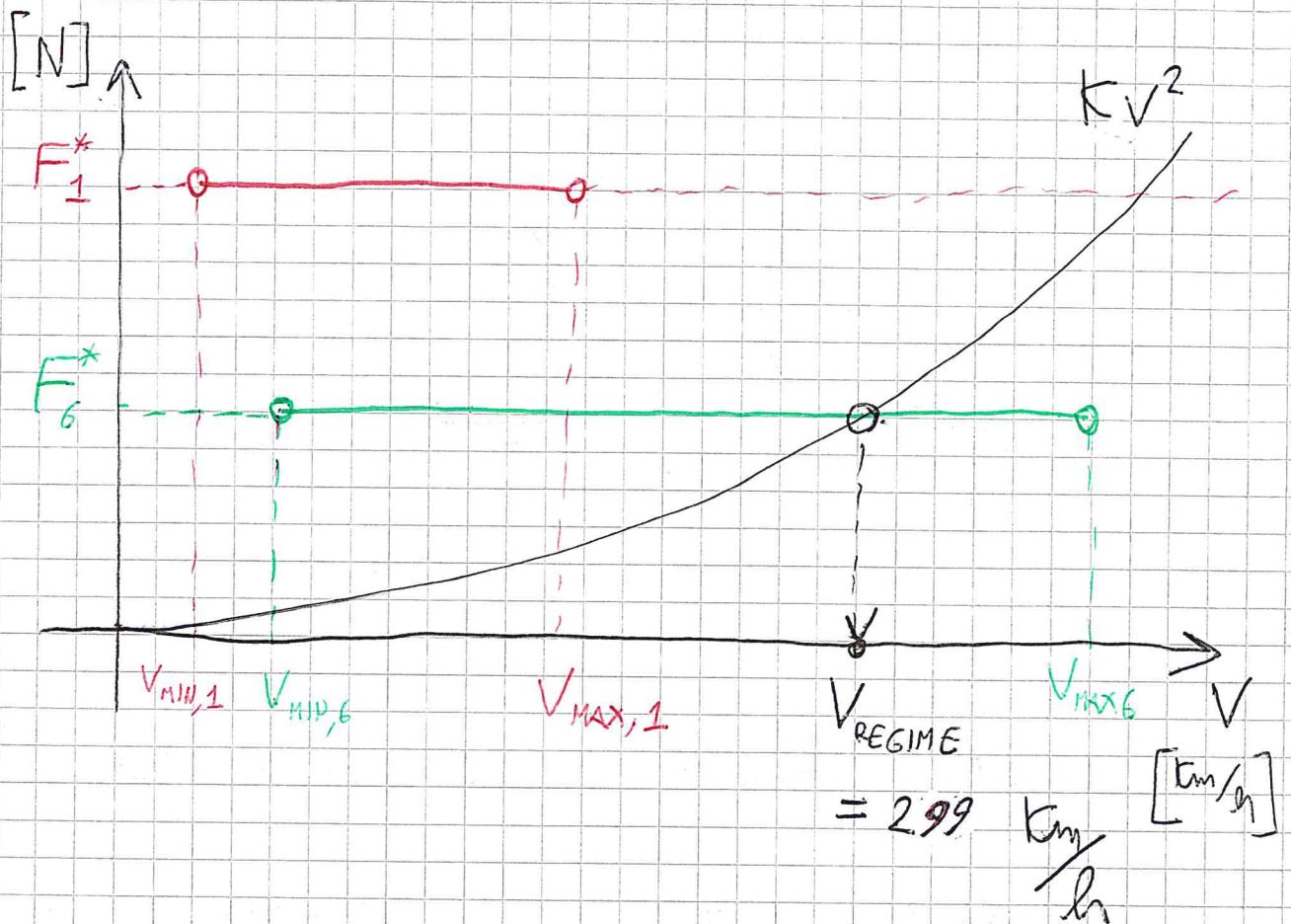
$$v = \sqrt{\frac{C_m}{R^2 K}} = \sqrt{\frac{F^*}{K}}$$

IN 1<sup>a</sup> 434  $\frac{km}{h}$   
IN 6<sup>a</sup> 299  $\frac{km}{h}$

$$\frac{C_m}{R^2 a_1} = F_1^* = 4092 N$$

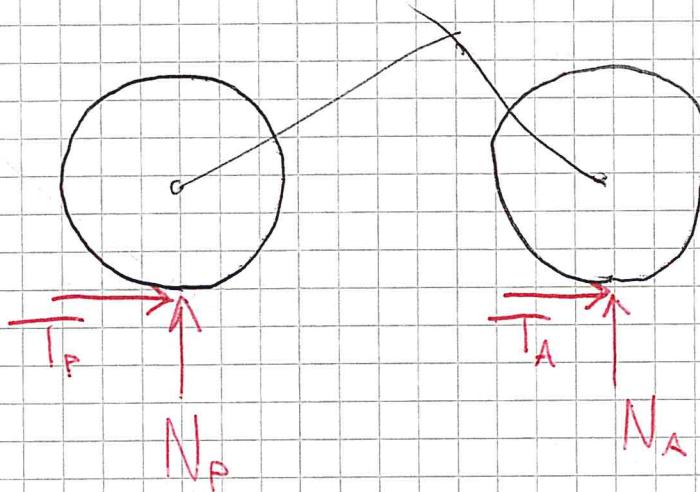
$$\frac{C_m}{R^2 a_6} = F_6^* = 1945 N$$

ATTENZIONE AL CAMPO DI VELOCITA'  
RAGGIUNGIBILE IN CIASCUNA MARCIA!



4

ISOLE LA MOTO DA TERRA EVIDENZIANDO LE  
REAZIONI VINCOLARI



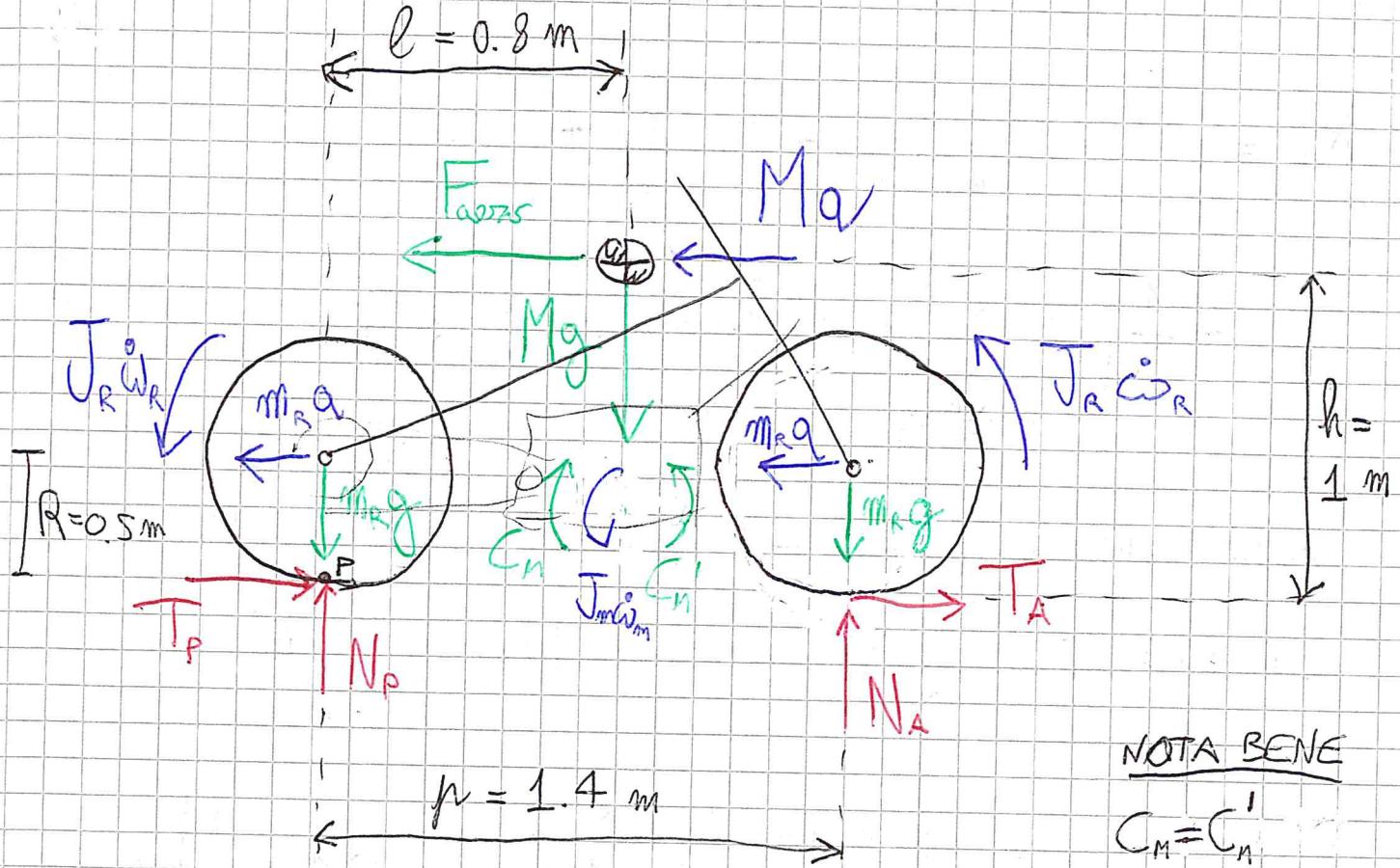
- LA MOTO INIZIA A IMPENNARE QUANDO  $N_A = 0$
- LA VERIFICA DI ADERENZA CONSISTE NELL'  
VERIFICARE LE DISEQUAZIONI

$$\frac{|T_F|}{|N_P|} < M_s \quad \text{E} \quad \frac{|T_A|}{|N_A|} < M_s$$

BISOGNA CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI

→ EQUILIBRI DINAMICI

ISOLE LA MOTO DA TERRA



NOTA BENE

$$C_m = C_n$$

SI ANNULLANO  
NELL'EQ. GLOBALE

PER QUESTO SISTEMA DI CORPI RIGIDI E' POSSIBILE  
SCRIVERE 3 EQ DI EQUILIBRIO DINAMICO

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_p = 0 \end{cases}$$

PER CALCOLARE  $N_A$  BASTA USARE  $\sum M_p = 0$

$$\begin{aligned} N_A p - m_A g p + m_A a R + J_A \ddot{\omega}_A + Ma h + F_{aers} h + J_m \ddot{\omega}_m \\ - Mg l + m_p a R + J_p \ddot{\omega}_p = 0 \end{aligned}$$

LE ACCELERAZIONI SONO NOTE DALL'EQ. DI MOTO

$$a = \frac{C_m}{R^2 M^*}$$

ALLO SPUNTO ( $v=0$ )

$$a = \dot{\omega}_R R \rightarrow \dot{\omega}_R = \frac{a}{R} = \frac{C_m}{R^2 M^*}$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{a}{R^2} = \frac{C_m}{R^2 M^*}$$

QUINDI POSSO ESPRIMERE  $N_A$  IN FUNZIONE DI  $C_M$

$$N_A = \left( m_R + M \frac{b}{n} \right) g - F_{aer} \frac{h}{n} + \dots$$

$$- \frac{1}{n} \left( 2m_R + M \frac{h}{R} + 2 \frac{J_R}{R^2} \right) \frac{C_M}{\hat{\epsilon} M^*}$$
$$+ \frac{J_M}{R^2 \hat{\epsilon}}$$

(A)

ALLO SPUNTO ( $V=0 \rightarrow F_{aer}=0$ ), LA COPPIA  
LIMITE PER IMPENNARE ( $N_A=0$ ) È  $\rightarrow$  IN I MARCIA

$$C_M = \frac{\left( m_R + M \frac{b}{n} \right) g \hat{\epsilon}_1 M_1^* n}{2m_R + M \frac{h}{R} + 2 \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_M}{R^2 \hat{\epsilon}}} = 92 \text{ Nm}$$

CHE È MINORE DELLA COPPIA MAX EROGABILE DAL  
MOTORE (113 Nm)

• PER EFFETTUARE LE VERIFICHE DI ADERENZA  
DEVO CALCOLARE LE RESTANTI REAZIONI  
VINCOLARI  $N_p, T_p, T_A$ . ( $N_A$  LA SO DA EQ. A)

HO SOLO 2 EQ DI EQUILIBRIO DA USARE SE  
CONSIDERO TUTTO IL SISTEMA.

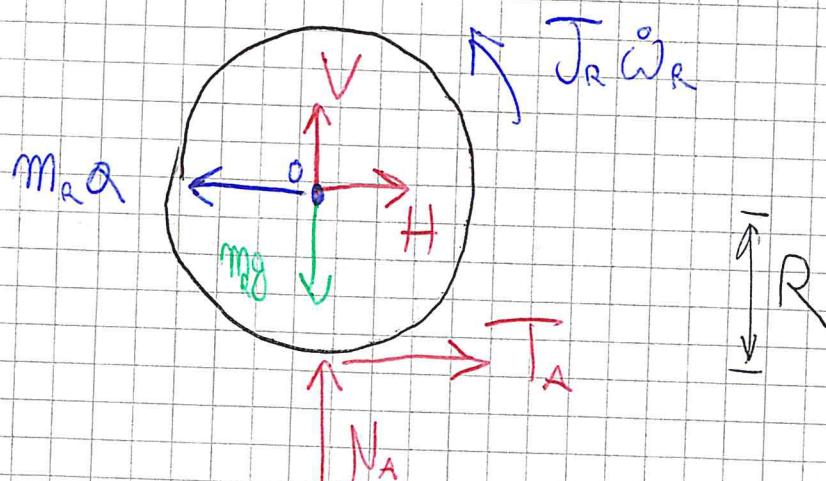
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum T_A + \sum T_p - 2m_R a - Ma - F_{\text{aero}} = 0 \\ \sum N_A + N_p - 2m_R g - Mg = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(B)} \\ \text{(C)} \end{array}$$

MANCA 1 EQUAZIONE.

ISOLE LA RUOTA ANTERIORE DA TERRA E DAL  
RESTO DELLA MOTO



DELLE 3 EQUAZIONI A DISPOSIZIONE,  
SCELGO  $\sum M_o = 0$

QUESTA SCELTA MI PERMETTE DI AGGIUNGERE  
 1 EQUAZIONE DI EQUILIBRIO SENZA  
 INTRODURRE NUOVE INCOGNITE (LE REAZIONI  
 H e V)

$$\sum M_o = 0$$

$$J_R \ddot{\omega}_R + T_A R = 0 \quad (5)$$

POSSO ALLORA CALCOLARE  $N_p, T_A, T_p$  ED  
 EFFETTUARE LA VERIFICA DI ADERENZA

QUANDO  $C_m = 0.9 \quad C_{n, \text{LIM}} = 82 \text{ Nm}$

ALLO SPUNTO, IN 1° MARCIA

$$N_A = 223 \text{ N} \rightarrow \left| \frac{T_A}{N_A} \right| = 0.2 < \mu_s = 1.1$$

$$T_A = -44 \text{ N}$$

$$N_p = 2720 \text{ N} \rightarrow \left| \frac{T_p}{N_p} \right| = 0.79 < \mu_s = 1.1$$

$$T_p = 2143 \text{ N}$$

→ ADERENZA VERIFICATA