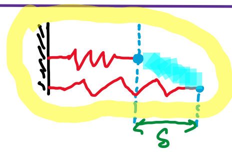
Lezione lunedì 16 novembre 2020

lunedì 16 novembre 2020 10:16

- FORZE ELASTICHE / GRAVITAZIONALI NELL'EQ. DI LAGRANGE
- FORZE VISCOSE DISSIPATIVE NELL'EQ. DI LAGRANGE
- VIBRAZIONI MECCANICHE

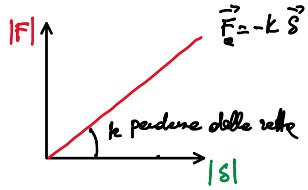
FORZE ELASTICHE → MOLLA

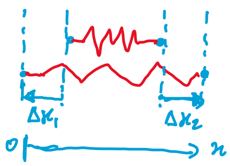


$\vec{F}_e = -k\vec{\delta}$

FORZA ELASTICA; VARIAZIONE DI LUNGHEZZA DELLA MOLLA; RIGIDEZZA (PARAMETRO CARATTERISTICO DELLA MOLLA)

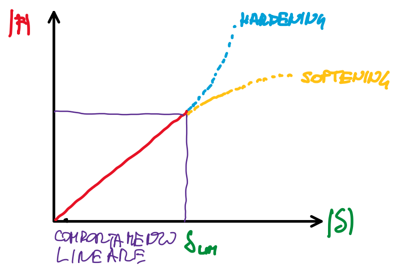
LA MOLLA HA IN GENERALE CARATTERISTICHE LINEARI →
→ LEGGE DI HOOKE





$\vec{\delta} = (\Delta\vec{x}_1 - \Delta\vec{x}_2)$

NELLA REALTA' LE MOLLE SONO LINEARI SOLO IN UN CERTO INTERVALLO DI DEFORMAZIONE



δ_{lim} : DEFORMAZIONE LIMITE (SOGLIA DI LINEARITA')

- LAVORO DI DEFORMAZIONE DI UNA MOLLA → ENERGIA POTENZIALE DELLA MOLLA

$$L_{def} = \int_0^{\delta} \vec{F}_e \times d\eta = \int_0^{\delta} -k\eta\, d\eta = -\frac{1}{2}k\delta^2 \qquad V_e = -L_{def} = \frac{1}{2}k\delta^2$$

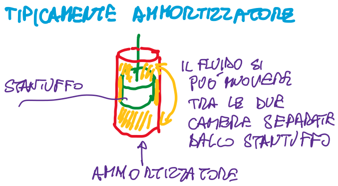
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

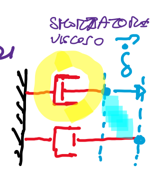
FORZE GRAVITAZIONALI

$$L_g = \int_0^h -m\vec{g} \times d\vec{y} = -mgh \qquad g\downarrow \quad \uparrow dy \quad O \qquad V_g = -L_g = mgh$$

FORZE DISSIPATIVE DI TIPO VISCOSO

- IN GENERALE EFFETTI DISSIPATIVI SONO NON LINEARI
  - ↳ CASO PARTICOLARE : DISSIPATORE VISCOSO
    - TIPICAMENTE AMMORTIZZATORE





PER $\dot{\delta}$ VALE QUANTO DISCUSSO PER LA MOLLA NEL CASO DI SPOSTAMENTO DELLE ESTREMITA' DELLO SMORZATORE VISCOSO

$\vec{F}_d = -r\dot{\vec{\delta}}$

FORZA SMORZANTE; COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO VISCOSO; VELOCITA' DELLO SPOSTAMENTO

COMPONENTE LAGRANGIANA DELL'EFFETTO DELLO SMORZAMENTO VISCOSO

$$Q_{d_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial q_k}$$

→ DIPENDENZA DI δ DALLE COORDINATE LIBERE

$$\delta = \delta(q_k) \rightarrow \dot{\delta} = \sum_k \frac{\partial\delta}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad \frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\delta}{\partial q_k}$$

SE CONSIDERO SOLO IL TERMINE k-esimo

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\dot{\delta}\right] = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{\partial\delta}{\partial q_k}\dot{q}_k\right]$$

$$\frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\delta}{\partial q_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{q}_k} \quad (=1)$$

$$\frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\delta}{\partial q_k}$$

$$Q_{d_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial q_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{q}_k} = -\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}r\dot{\delta}^2\right) \qquad D = \frac{1}{2}r\dot{\delta}^2$$

'FUNZIONE DISSIPATIVA (PER SMORZAMENTO VISCOSO)

$\partial \dot{\varphi}_k \quad \partial \varphi_k$

$$Q_{dk} = -\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_k} D$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_k} D + Q_k$$

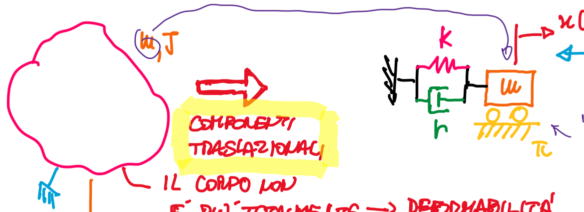
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_k} = Q_k$$

INTRODUZIONE DELLA FUNZIONE DISSIPATIVA NEL LATO SX DELL'EQ. DI LAGRANGE

COME COMPONENTI LAGRANGIANE RESTANO TUTTE LE ALTRE FORZE ESTERNE CHE LAVORANO

VIBRAZIONI MECCANICHE

- RINUNCIAMO A CONSIDERARE "TUTTO" IL MONDO COME COMPOSTO DA C.R.
- "CONCENTREMO" I CORPI RIGIDI (RAPPRESENTAZIONE A PARAMETRI CONCENTRATI)



SISTEMA CON 1 G.d.L. $x(t)$

"CARRELLINO" PER NON CONSIDERARE LA PRESENZA DI ATTRITI

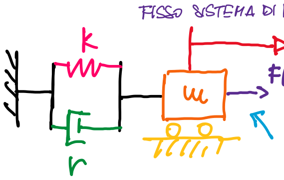
IL CORPO NON È PIÙ TOTALMENTE RIGIDO → DEFORMABILITÀ
↳ CARATTERIZZO CON k

DISSIPAZIONI ENERGETICHE → SMORZAMENTO
↳ CARATTERIZZARE CON r

– VIBRAZIONI DI SISTEMA 1 GdL

↳ SCRITTURA DELL'EQUAZIONE DI MOTO → EQUILIBRIO DINAMICO
→ EQ. DI LAGRANGE

FISSO SISTEMA DI RIFERIMENTO

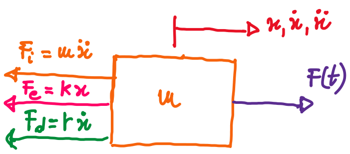


$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$

$F(t)$: FORZA ESTERNA

1 G.d.L. → SPOSTAMENTO $x(t)$

– EQUILIBRIO DINAMICO DELLA MASSA



CONSIDERO SOLO LA TRASLAZIONE IN DIREZIONE ORIZZONTALE

EQUILIBRIO DINAMICO → $-F_i - F_e - F_d + F(t) = 0$

$$F_i + F_e + F_d = F(t)$$

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F(t)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$ → EQUAZIONE DI MOTO DEL SISTEMA

– EQUAZIONE DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_k} = \frac{\delta^* L}{\delta \varphi_k} \rightarrow Q_k$$

$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$V = \frac{1}{2} k x^2$

$D = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$

$L = \vec{F}(t) \times \vec{x} = F(t)\,x$

$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial V}{\partial x} = kx$

$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = r\dot{x}$

$\frac{\delta^* L}{\delta x} = F(x)$

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F(t)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$ → EQUAZIONE DI MOTO DEL SISTEMA

— VIBRAZIONI DEL SISTEMA : MOTO LIBERO NON SMORZATO

MANCA LO SMORZAMENTO $F_d = 0 \Leftrightarrow r = 0$

NON HO FORZANTI ESTERNE $F(t) = 0$

$m\ddot{x} + kx = 0$ EQ. DIFFERENZIALE, DERIVATE TOTALI, INCOMPLETA, OMOGENEA, COEFFICIENTI COSTANTI

INTEGRALE GENERALE $x(t) = X e^{\lambda t}$ $\downarrow d/dt$

$\dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t}$ $\downarrow d/dt$

$\ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t}$

$$m\lambda^2 X e^{\lambda t} + k X e^{\lambda t} = 0 \qquad (m\lambda^2 + k) X e^{\lambda t} = 0$$

$e^{\lambda t}$: DIVERSO DA 0

$X = 0 \rightarrow$ SOLUZIONE BANALE $\rightarrow$ IL SISTEMA NON SI MUOVE

SE $X \neq 0$ $(m\lambda^2 + k) = 0 \rightarrow$ EQ ALGEBRICA DI II GRADO $\rightarrow$ EQUAZIONE CARATTERISTICA

SOLUZIONI EQ. CARATTERISTICA $\rightarrow$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$

i: UNITÀ IMMAGINARIA

ω: POLSAZIONE NATURALE DEL SISTEMA

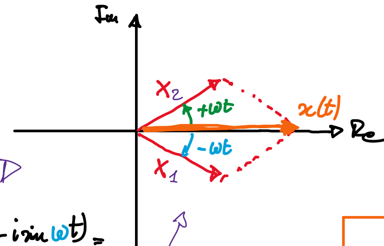
$[\omega] = rad/s$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ $[f] = Hz$

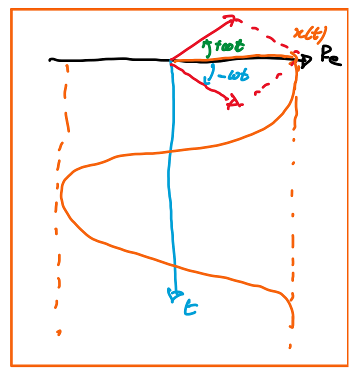
f: FREQUENZA PROPRIA

$$x(t) = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t} = X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t}$$

VETTORI ROTANTI NEL PIANO COMPLESSO $\longrightarrow$



LA SOMMA DEI 2 VETTORI ROTANTI GENERA UNA FUNZIONE ARMONICA



FORMULA DI EULERO $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$x(t) = X_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + X_2(\cos\omega t - i\sin\omega t) =$$

$$= \underbrace{(X_1 + X_2)}_{A}\cos\omega t + i\underbrace{(X_1 - X_2)}_{B}\sin\omega t =$$

$X_1 = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$

$X_2 = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$

INTEGRALI GENERALI

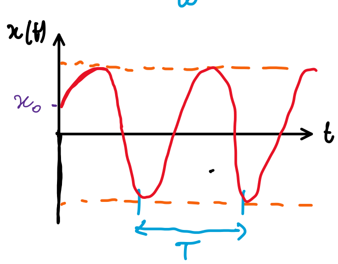
$= A\cos\omega t + B\sin\omega t$ $\leftarrow$ COMBINAZIONE LINEARE DI 2 FUNZIONI ARMONICHE

$= C\cos(\omega t + \phi)$ $\leftarrow$ FUNZIONE ARMONICA CON AMPIEZZA C E FASE ϕ

$C^2 = A^2 + B^2$ $\tan\phi = -\frac{B}{A}$

PER DETERMINARE A e B IMPONE CONDIZIONI INIZIALI $x(t)|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}(t)|_{t=0} = v_0$

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$



$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

T: PERIODO