Esercitazione 8: sistemi lineari a 1-gdl: moto imposto

Meccanica Applicata (Ing. Fisica)

13 gennaio 2017

Es. 1

Il sistema a 1-gdl rappresentato in Figura 1 è un modello semplificato di un autoveicolo che viaggia a velocità costante v su una strada con fondo irregolare. L'irregolarità stradale è modellata con un profilo sinusoidale con lunghezza d'onda λ e ampiezza Y_0.

Determinare:

- l'equazione di moto del sistema (z: variazione rispetto alla posizione di equilibrio statico)
- la legge di moto in funzione della velocità v

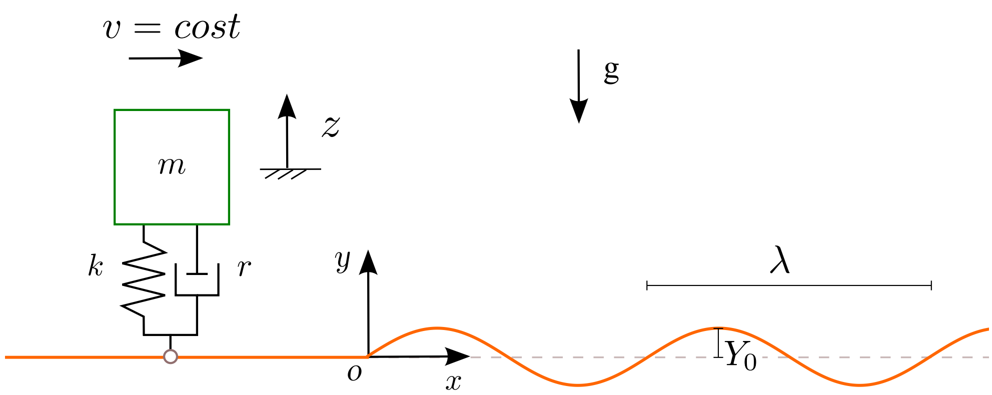
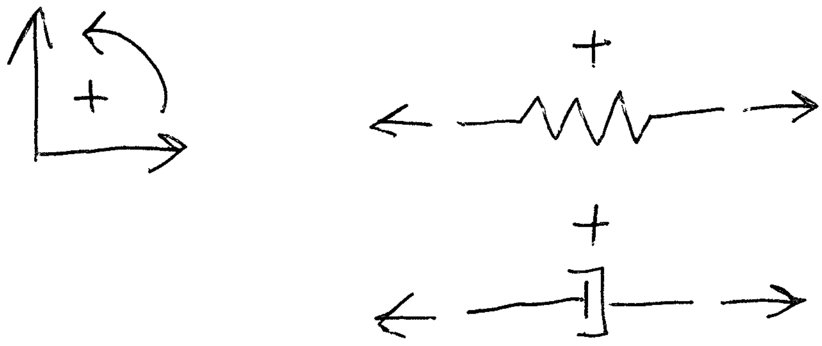
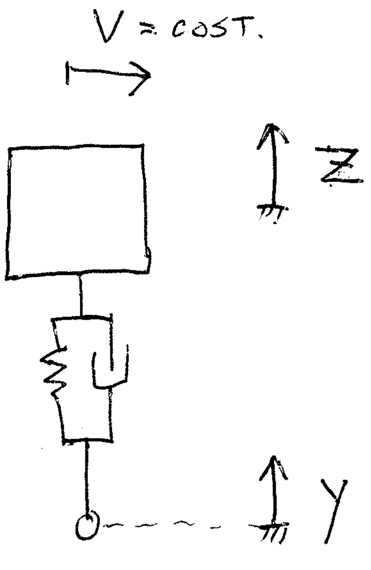


Figura 1:

1) CONVENZIONI DI SEGNO



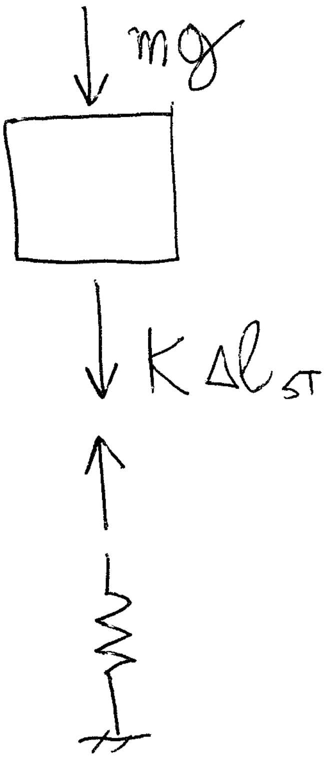
2) GDL E COORD. LIBERE



(TRASLAZIONE VERTICALE RISPETTO ALLA POS. DI EQUILIBRIO STATICO)

SPOSTAMENTO VERTICALE PUNTO DI CONTATTO

③ EQ. STATICO DEL SISTEMA

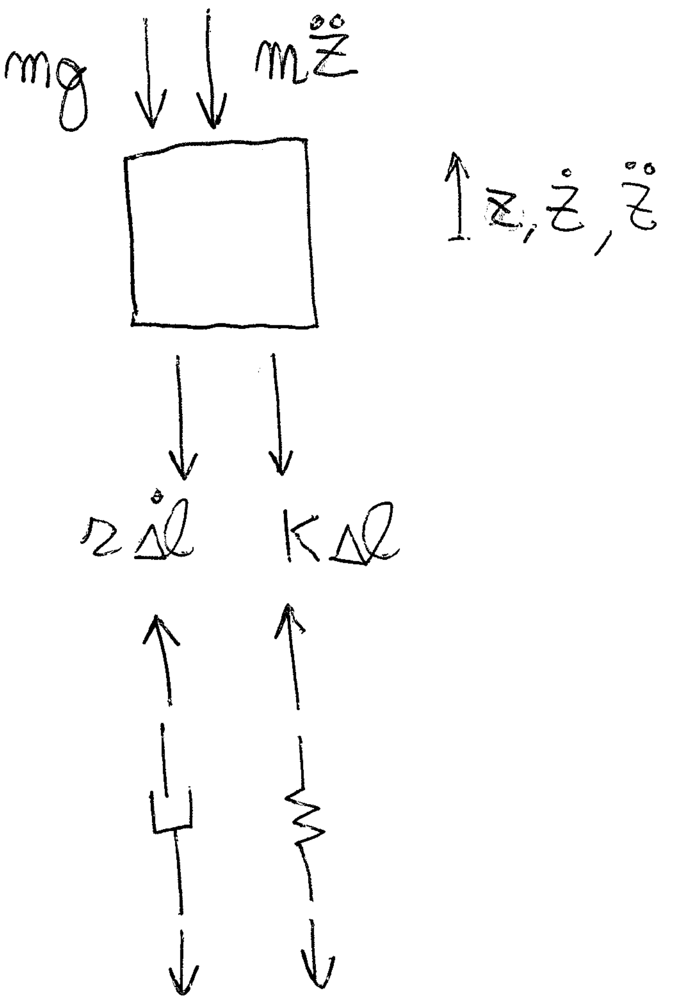


$$mg + K\Delta l_{ST} = 0$$

$$\Delta l_{ST} = -\frac{mg}{K}$$

IL SEGNO "−" INDICA CHE LA MOLLA SOTTO L'EFFETTO DELLA FORZA PESO SI COMPRIME

④ EQ DI MOTO



$$m\ddot{z} + r\Delta\dot{l} + K\Delta l + mg = 0$$

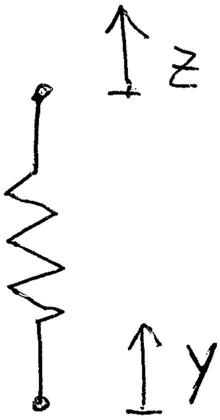
$$\Delta l = \Delta l_{ST} + \Delta l_{DINAMICO}$$

EFFETTO FORZA PESO

EFFETTO VARIAZIONE DI POSIZIONE RISPETTO ALL'EQ. STATICO

$$\Delta l_{ST} = -\frac{mg}{K}$$

$$\Delta l_{DIN} = z - y$$



(ALLUNGA LA MOLLA → SEGNO +)

(COMPRIME LA MOLLA → SEGNO −)

$$\rightarrow \quad \Delta l = -\frac{mg}{K} + (z - y)$$

$$\dot{\Delta l} = \dot{z} - \dot{y}$$

SOSTITUISCO NELL' EQ. DI MOTO

$$m\ddot{z} + r(\dot{z} - \dot{y}) + K(z - y) \cancel{- mg} \cancel{+ mg} = 0$$

LA FORZA PESO NON

APPARE NELL' EQUAZIONE DI MOTO, SCRITTA

NELL' INTORNO DELLA POSIZIONE DI EQ. STATICO ($z=0$ QUANDO IL SISTEMA È IN EQUILIBRIO)

L'EQ. DI MOTO È:

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + Kz = r\dot{y} + Ky$$

y È UN TERMINE NOTO, INFATTI.

$$y(x) = Y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

MA $x = vt$ ($t=0$ QUANDO LA MACCHINA È NELL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO)

$$\Rightarrow y(t) = Y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} v t\right) = Y_0 \sin(\Omega t)$$

CON

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} V$$

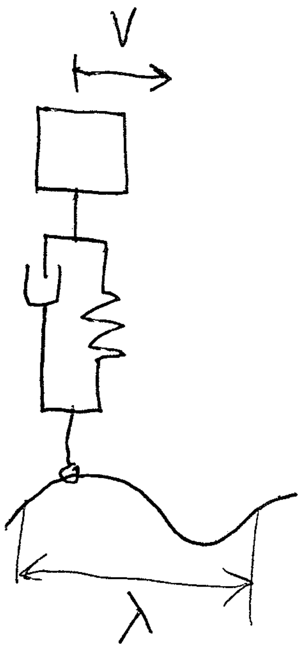
SOSTITUISCO NELL' EQ. DI MOTO

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + Kz = KY_0 \sin(\Omega t) + r\Omega Y_0 \cos(\Omega t)$$

essendo

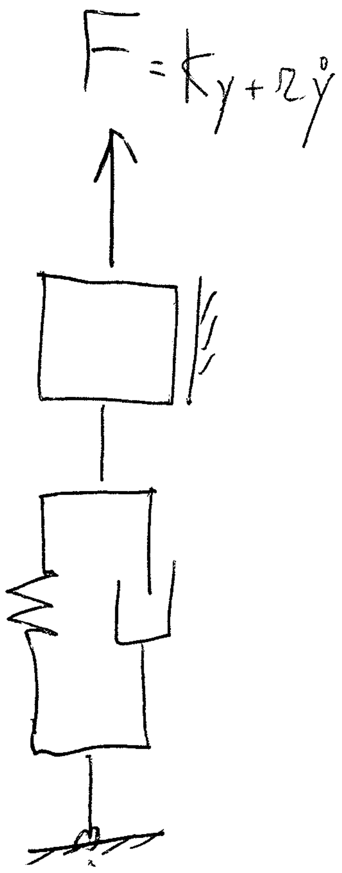
$$\dot{y} = \Omega Y_0 \cos(\Omega t)$$

<u>NOTA</u>



È EQUIVALENTE

A UN SISTEMA



5 LEGGE DI MOTO

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + kz = r\dot{y} + ky$$

LEGGE DI MOTO:

$$\begin{cases} X(t) = X_{omo} + X_p \\ \\ X(0) = 0 \\ \dot{X}(0) = 0 \end{cases}$$

INTEGRALE GENERALE

INTEGRALE GEN. OMOGENEA

INT. PARTICOLARE

CONDIZIONI INIZIALI

OMOGENEA

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + Kz = 0$$

$$\boxed{\ddot{z} + 2h\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = 0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ PULSAZIONE PROPRIA

$$h = \frac{r}{2m\omega_0}$$ COEFF. DI SMORZAMENTO

SOLUZIONE TEST

$$z = Ae^{\lambda t}$$

$$\dot{z} = A\lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{z} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$A(\lambda^2 + 2h\omega_0\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

$\uparrow$

EQ. CARATTERISTICA

$$\lambda^2 + 2h\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -h\omega_0 \pm \sqrt{(h\omega_0)^2 - \omega_0^2} =$$
$$= -h\omega_0 \pm i\,\omega_0\sqrt{1-h^2}$$

SOSTITUISCO NELLA SOLUZIONE TEST λ_1 e λ_1

$$X_{omo} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

SE $h < 1$

$$X_{omo} = A e^{-h\omega_0 t} \sin\left(\underbrace{\omega_0\sqrt{1-h^2}}_{=\omega}\, t + \beta\right)$$

A, β INCOGNITE

PULSAZIONE SMORZATA

INTEGRALE PARTICOLARE

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + kz = kY_0 \sin(\Omega t) + r\Omega Y_0 \cos(\Omega t)$$

PER RISOLVERE USO IL METODO DI SOMIGLIANZA, MA PRIMA MANIPOLO L'EQUAZIONE

1) $\sin(\Omega t) = \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

2) FORMULA DI EULERO

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\Omega t) = Re\left(e^{i\Omega t}\right)$$

$$\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = Re\left(e^{i\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\right) = Re\left(-i \cdot e^{i\Omega t}\right)$$

PER CUI LA FORZANTE DIVENTA

$$kY_0 \sin(\Omega t) + r\Omega Y_0 \cos(\Omega t) = Re\left(-kY_0 i e^{i\Omega t} + r\Omega Y_0 e^{i\Omega t}\right)$$

$$= Re\left[(r\Omega - ik) Y_0 \, e^{i\Omega t}\right]$$

POSSO SCRIVERE ALLORA CHE

$$\mathrm{Re}\left[m\ddot{z} + r\dot{z} + kz\right] = \mathrm{Re}\left[(r\Omega - ik)Y_0 e^{i\Omega t}\right]$$

PER RISOLVERE L'EQ. ANALIZZO L'EQ. COMPLESSA

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + kz = (r\Omega - ik)Y_0 e^{i\Omega t}$$

E UNA VOLTA RISOLTA NE PRENDO LA PARTE REALE DELLA SOLUZIONE

$$\ddot{z} + 2h\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = (2h\omega_0\Omega - i\omega_0^2)Y_0 e^{i\Omega t}$$

METODO DI SOMIGLIANZA

$$z = C e^{i\Omega t}$$

COSTANTE COMPLESSA

STESSA PULSAZIONE DELLA FORZANTE

$$\dot{Z} = i\Omega C e^{i\Omega T}$$

$$\ddot{Z} = -\Omega^2 C e^{i\Omega T}$$

SOSTITUISCO

$$\left(-\Omega^2 + 2h\omega_0 \Omega i + \omega_0^2\right) C \cancel{e^{i\Omega T}} = \left(2h\omega_0\Omega - i\omega_0^2\right) \cdot Y_0 \cancel{e^{i\Omega T}}$$

DIVIDO PER ω_0^2

$$\left(-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + 2h\frac{\Omega}{\omega_0} i + 1\right) C = \left(2h\frac{\Omega}{\omega_0} - i\right) Y_0$$

DEFINISCO

$$a = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

RAPPORTO PULSAZIONE FORZANTE / SISTEMA

$$C = \frac{2ha - i}{(1-a^2) + i(2ha)} Y_0$$

C è COMPLESSA, FUNZIONE DI $a = \frac{\Omega}{\omega_0}$ E h

$$C = \mathrm{Re}(C) + \mathrm{Im}(C) =$$

$$= |C| e^{i\varphi}$$

MODULO ANOMALIA

$$|C| = \sqrt{\mathrm{Im}^2 + \mathrm{Re}^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{-2ha^3}{\Delta}$$

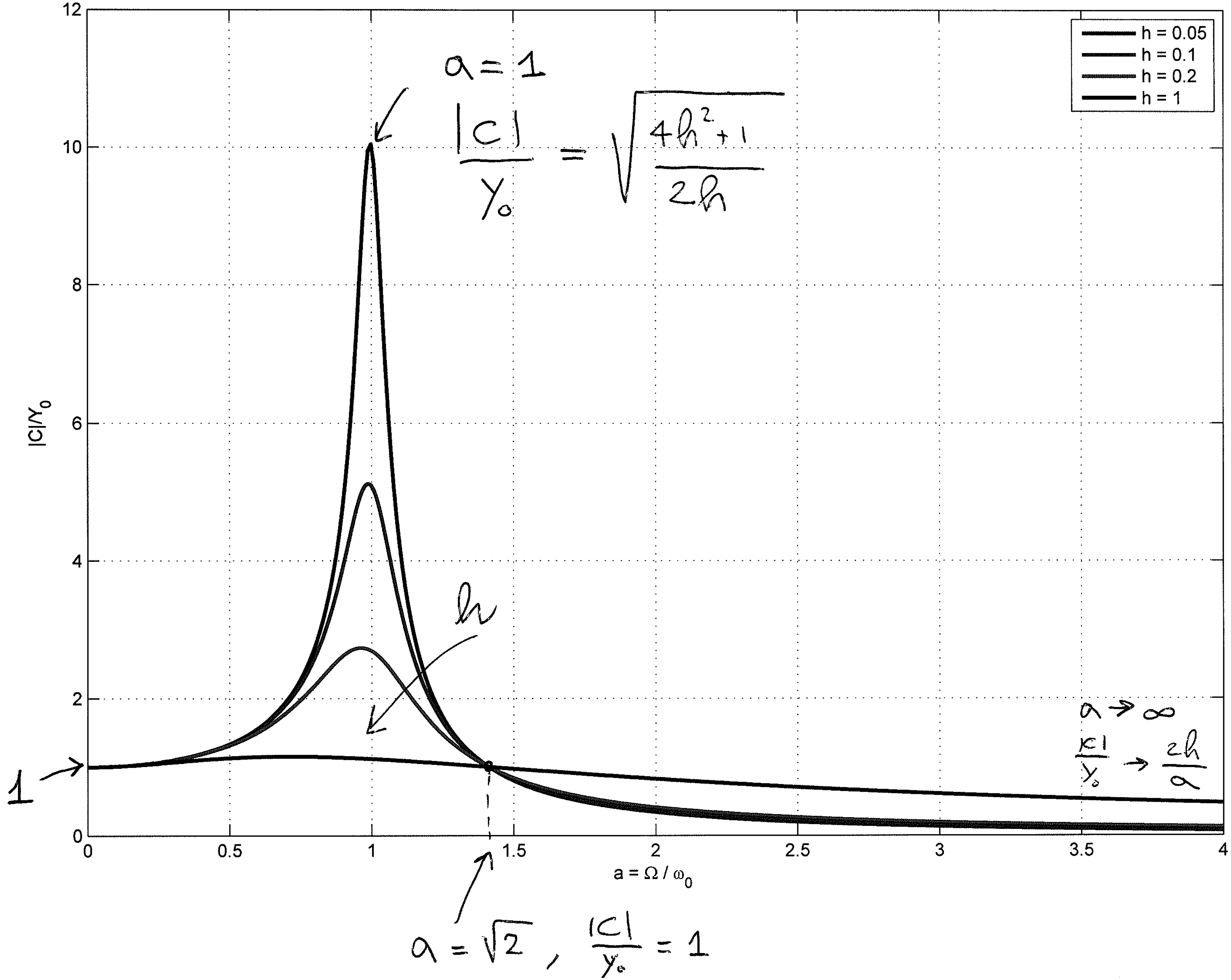
$$\Delta = (1-a^2)^2 + (2ah)^2$$

$$\mathrm{Im} = -\frac{1 + a^2(4h^2-1)}{\Delta}$$

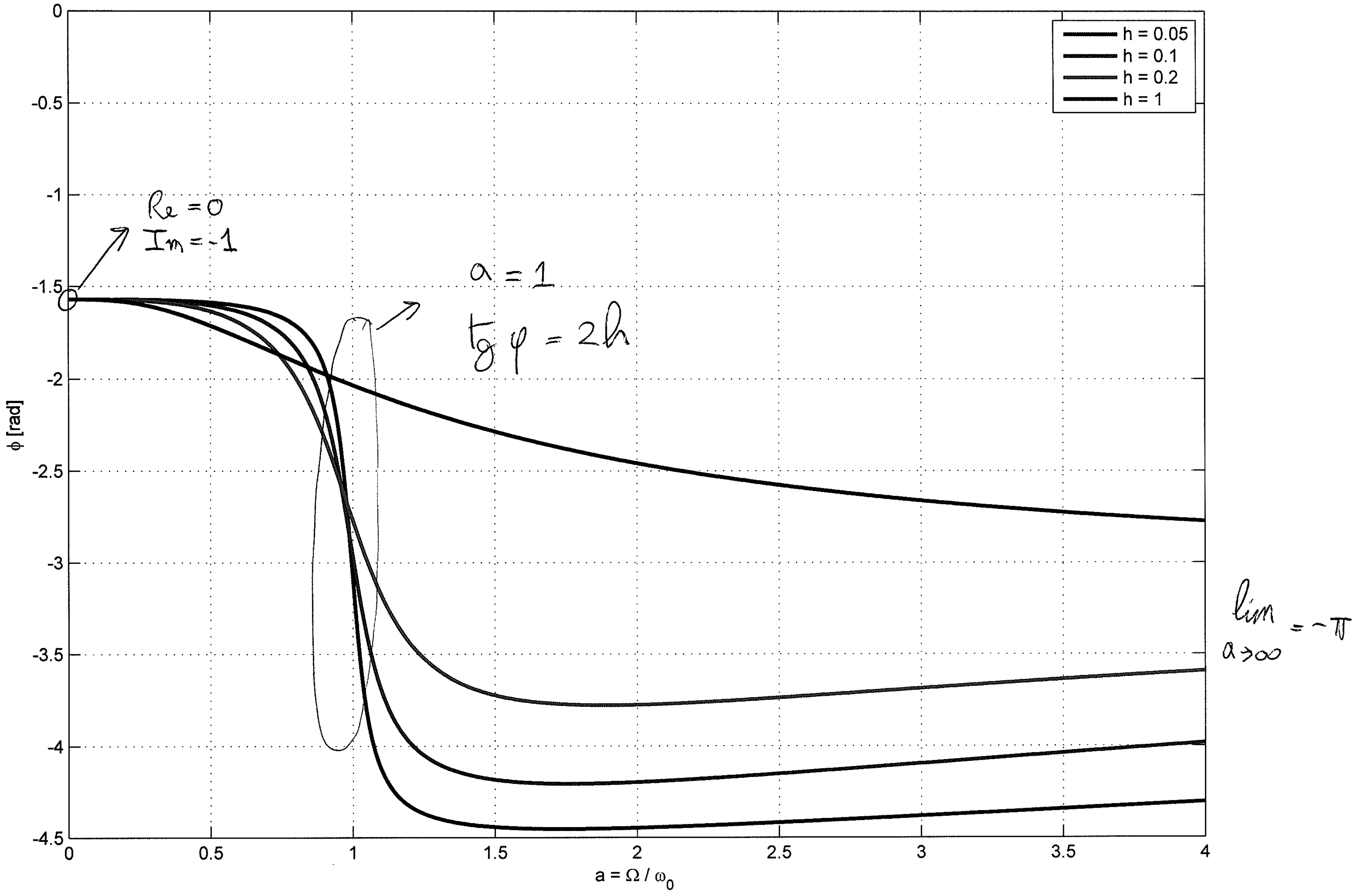
$$|C| = Y_0 \sqrt{\frac{1 + 4h^2a^2}{(1-a^2)^2 + (2ha)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\left(1 + a^2(4h^2 - 1)\right)}{-2a^3h}$$

VEDI GRAFICI AL VARIARE DI h e a



h = 0.05
h = 0.1
h = 0.2
h = 1
|C|/Y0
a = Ω / ω0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
2
4
6
8
10
12
$a = 1$
$\frac{|C|}{Y_0} = \sqrt{\frac{4h^2+1}{2h}}$
h
1
$a \to \infty$
$\frac{|C|}{Y_0} \to \frac{2h}{a}$
$a = \sqrt{2}\ ,\ \frac{|C|}{Y_0} = 1$


h = 0.05
h = 0.1
h = 0.2
h = 1
φ [rad]
a = Ω / ω0
Re = 0
Im = -1
a = 1
tg φ = 2h
lim a→∞ = -π

QUINDI

$$z = C\, e^{i\Omega t}$$

$$= |C|\, e^{i\varphi}\, e^{i\Omega t}$$

$$= |C|\, e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

MA DEVO PRENDERE LA PARTE REALE DELLA SOLUZIONE $\Rightarrow$

$$x_p = |C| \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x(t) = A e^{-h\omega_0 t} \sin(\omega t + \beta) + \\ \qquad + |C| \cos(\Omega t + \varphi) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

A e β LE RICAVO IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI

$$x(0) = 0 = A \sin\beta + |C| \cos\varphi \qquad (1)$$

DERIVO $x(t)$

$$\dot{x}(t) = A(-h\omega_0) e^{-h\omega_0 t} \sin(\omega t + \beta) +$$
$$+ A e^{-h\omega_0 t} \omega \cos(\omega t + \beta) +$$
$$+ |C| (-\Omega) \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -A h \omega_0 \sin\beta + A\omega \cos\beta + |C|(-\Omega)\sin\varphi \qquad (2)$$

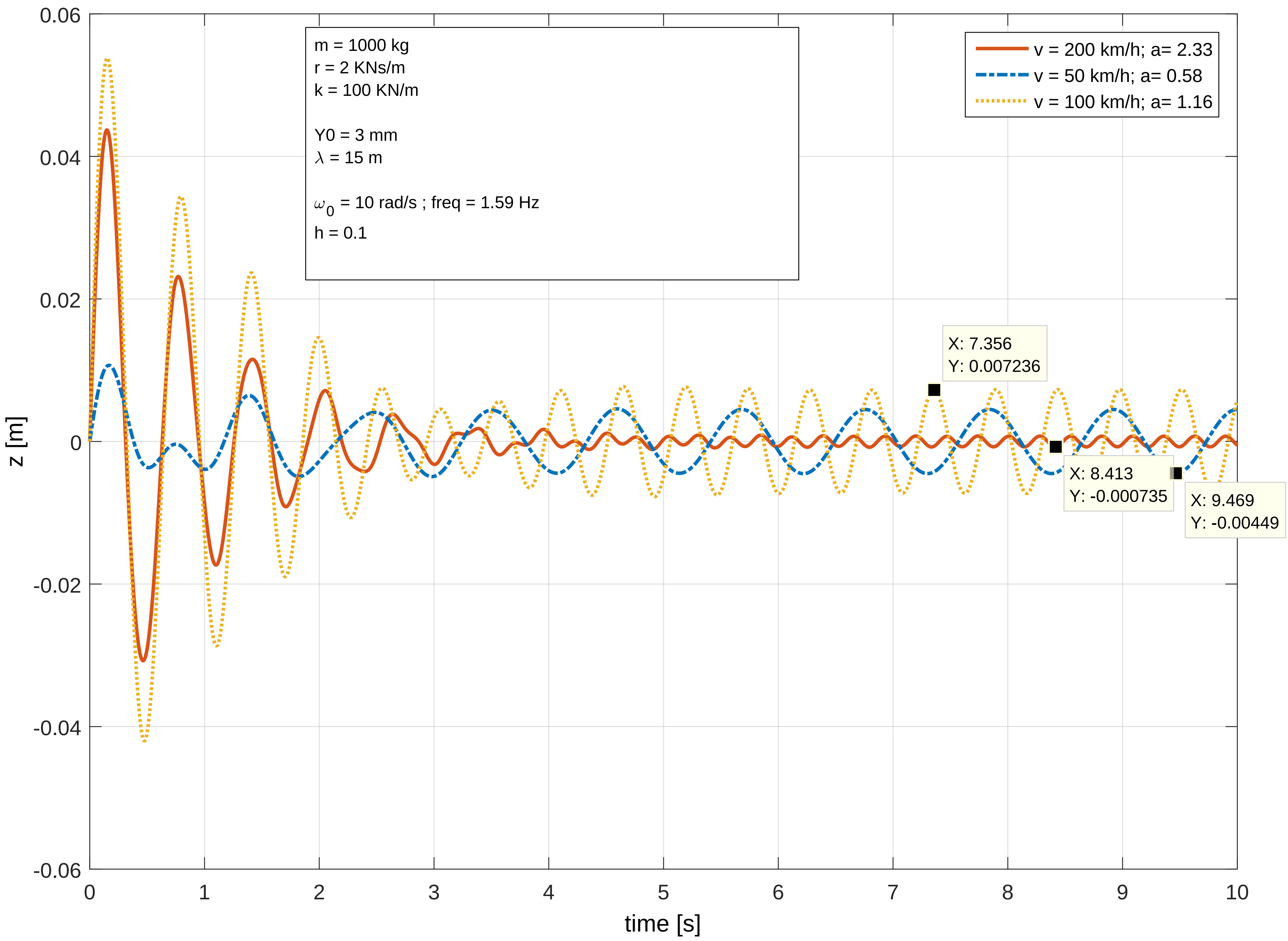
$$\begin{cases} A\sin\beta = -|C|\cos\varphi \\ A\cos\beta = \dfrac{A h \omega_0}{\omega}\sin\beta + |C|\dfrac{(-\Omega)}{\omega}\sin\varphi \end{cases} \qquad (3)$$

$$= -\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}|C|\cos\varphi - \frac{|C|\Omega}{\omega}\sin\varphi \qquad (4)$$

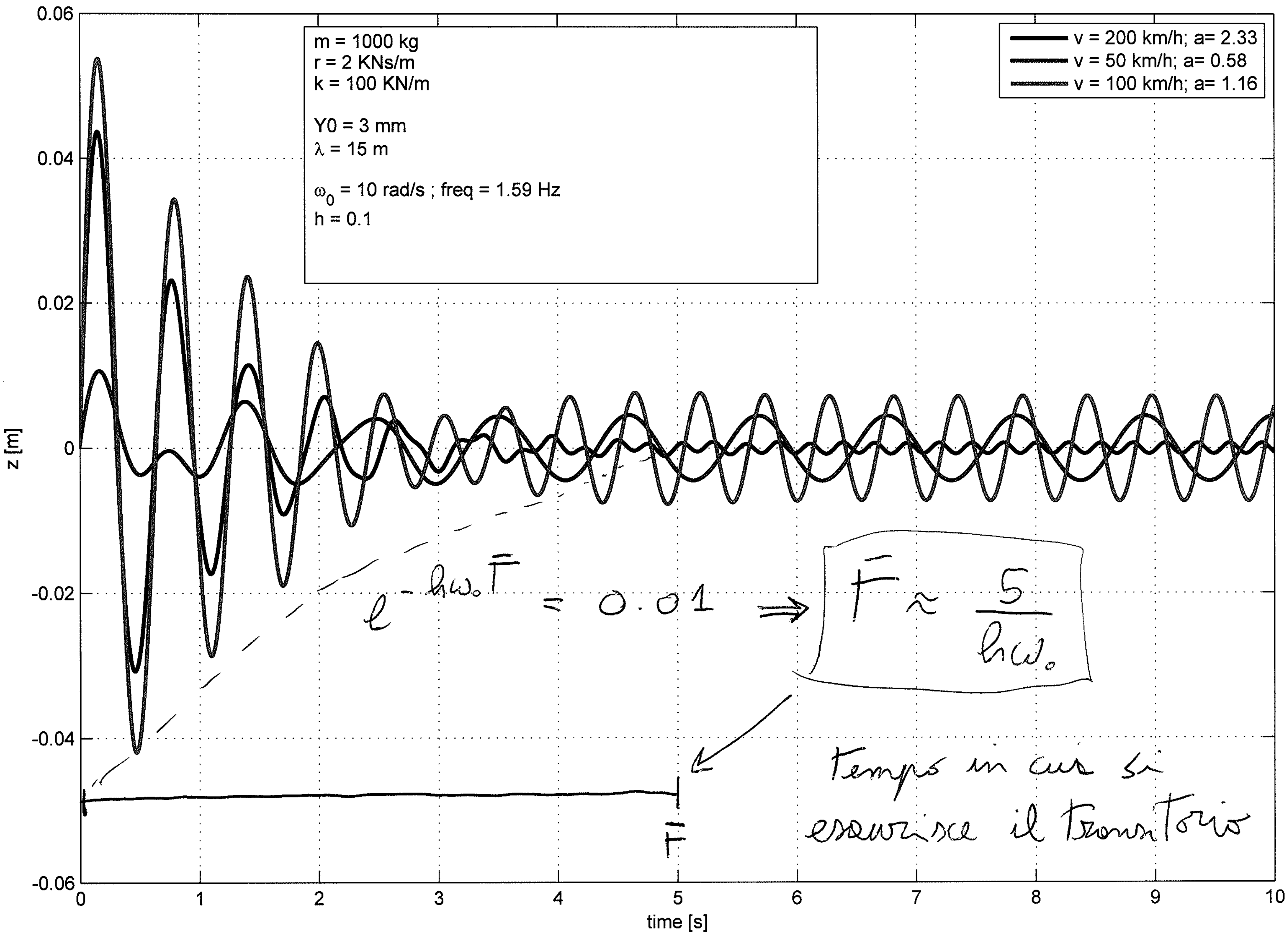
$$(3)^2 + (4)^2 = A^2 \rightarrow A$$

$$\frac{(3)}{(4)} = \operatorname{tg}\beta \rightarrow \beta$$

$\Rightarrow$ VEDI FIGURA .



m = 1000 kg
r = 2 KNs/m
k = 100 KN/m
Y0 = 3 mm
λ = 15 m
ω_0 = 10 rad/s ; freq = 1.59 Hz
h = 0.1
v = 200 km/h; a= 2.33
v = 50 km/h; a= 0.58
v = 100 km/h; a= 1.16
X: 7.356
Y: 0.007236
X: 8.413
Y: -0.000735
X: 9.469
Y: -0.00449
z [m]
time [s]
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10



m = 1000 kg
r = 2 KNs/m
k = 100 KN/m
Y0 = 3 mm
λ = 15 m
ω0 = 10 rad/s ; freq = 1.59 Hz
h = 0.1
v = 200 km/h; a= 2.33
v = 50 km/h; a= 0.58
v = 100 km/h; a= 1.16
z [m]
time [s]
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$e^{-h\omega_0 \bar{T}} = 0.01 \Rightarrow \boxed{\bar{T} \approx \frac{5}{h\omega_0}}$
$\bar{T}$
Tempo in cui si esaurisce il transitorio