ESERCITAZIONE 3 : PROTESI POLICENTRICA GINOCCHIO

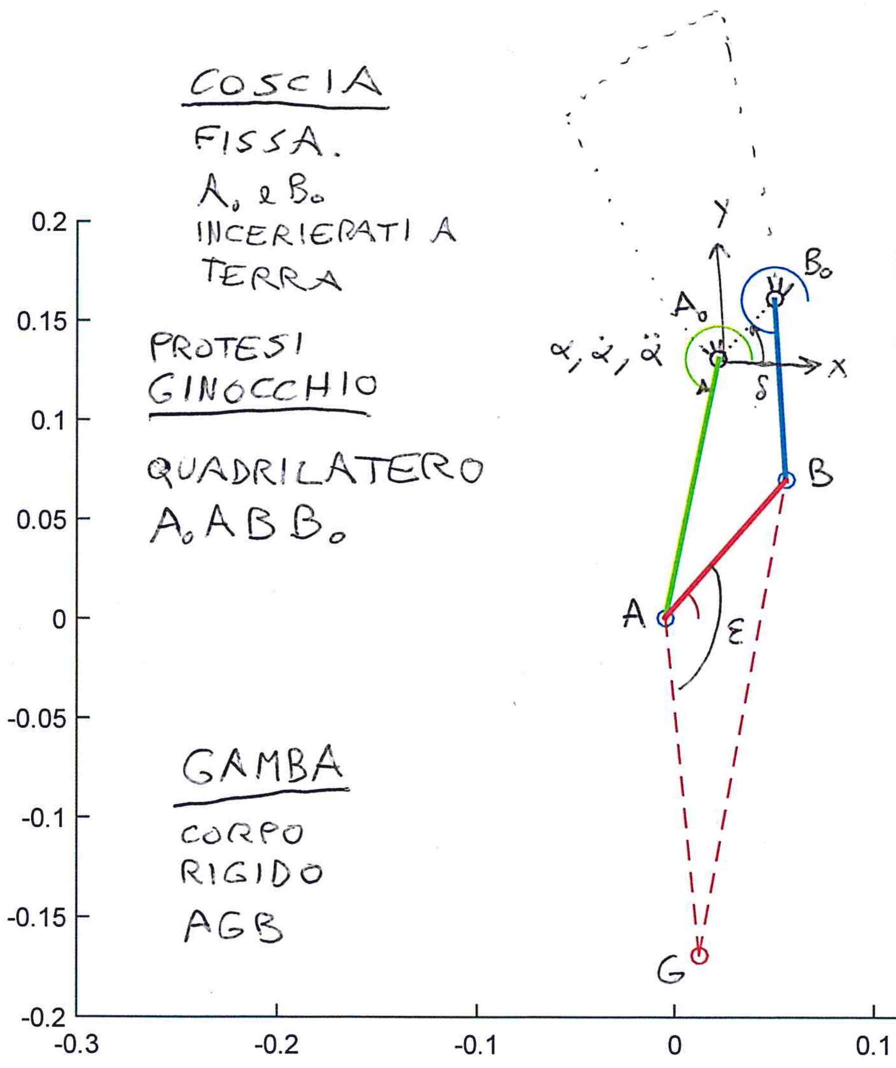
[CINEMATICA QUADRILATERO ARTICOLATO]

DETERMINARE VELOCITÀ E ACCELERAZIONE DEL BARICENTRO DELLA GAMBA (PUNTO G), NELL'ATTO DI MOTO IN CUI

$$\alpha = 260 \text{ deg}$$

$$\dot{\alpha} = 5 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\ddot{\alpha} = 0 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$



DATI

$\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ (COORD. LIBERA)

$|A-A_0| = a = 133$ mm

$|B-A| = b = 92$ mm

$|B-B_0| = c = 92$ mm

$|B_0-A_0| = d = 41$ mm

$\delta = 47$ deg

$\varepsilon = 133$ deg

$|G-A| = g = 171$ mm

OBIETTIVO

$$\underline{V}_G = \underline{V}_G(\alpha, \dot{\alpha})$$

$$\underline{a}_G = \underline{a}_G(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$$

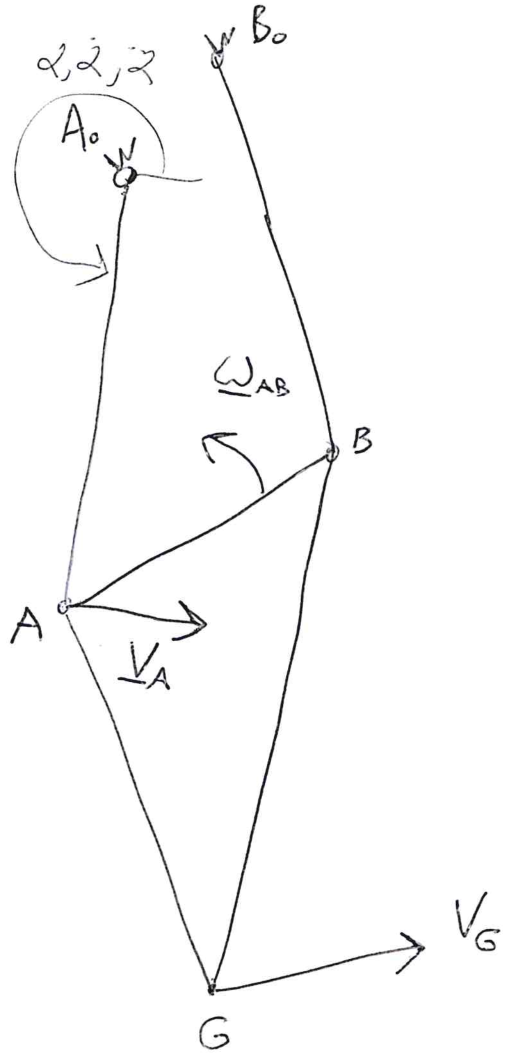
PROCEDIMENTO

USO IL TH. DI RIVALS

$$\underline{V}_G = \underline{V}_A + \underline{\omega}_{AB} \wedge (G - A)$$

ANALOGAMENTE PER LE ACCELERAZIONI

$$\underline{a}_G = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}}_{AB} \wedge (G - A) + - \omega_{AB}^2 (G - A)$$



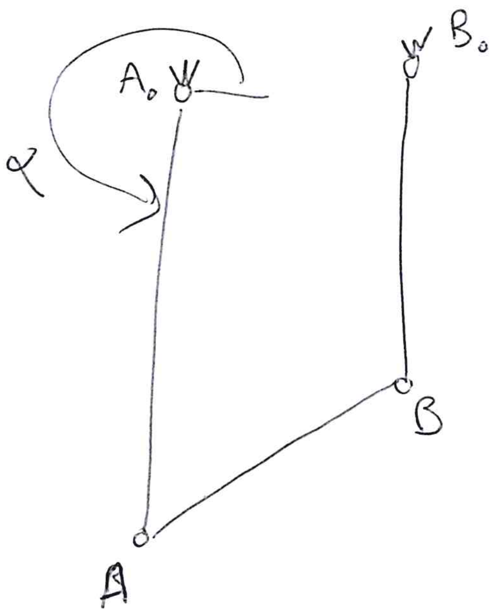
QUINDI DOBBIAMO RICAVARE

$\underline{V}_A$, $\underline{\omega}_{AB}$, $\underline{a}_A$, $\underline{\dot{\omega}}_{AB}$, in FUNZIONE DI $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$

PER CALCOLARE $\underline{\omega}_{AB}$ e $\underline{\dot{\omega}}_{AB}$ DOBBIAMO RISOLVERE LA CINEMATICA DEL QUADRILATERO ARTICOLATO A_0ABB_0

RISOLUZIONE CINEMATICA QUADRILATERO

1 CALCOLO GDL

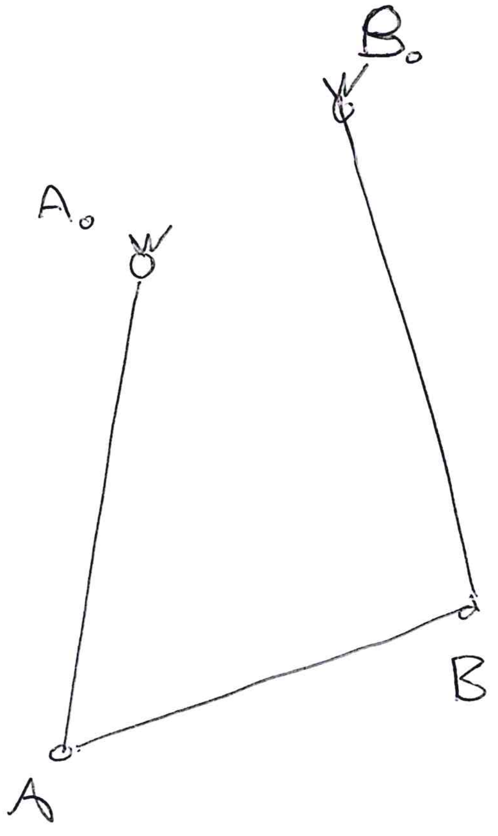


3 ASTE :	9	GDL
4 CERNIERE :	− 8	GDL
GDL RESIDUI :	1	GDL

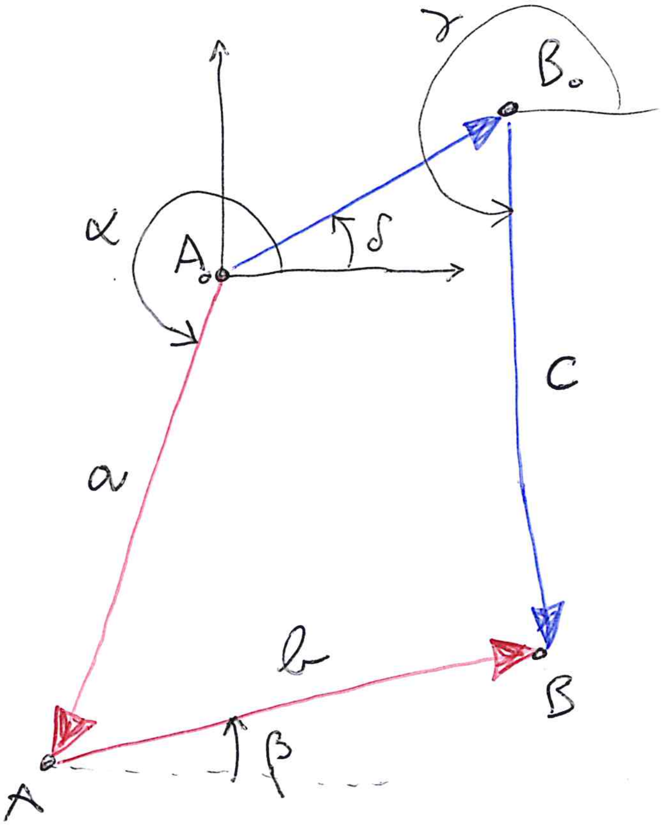
$\Updownarrow$

1 COORDINATA LIBERA: α

2 EQUAZIONE DI CHIUSURA (POSIZIONE)



$\Longrightarrow$



POSSO SCRIVERE LA SEGUENTE CHIUSURA IN B

$$(B-A)+(A-A_0) = (B-B_0)+(B_0-A_0) \quad (1)$$

CIOÉ SCRIVO LA POSIZIONE DI B ATTRAVERSO DUE DIFFERENTI "PERCORSI" $A_0 \to A \to B$ e $A_0 \to B_0 \to B$, USANDO DEI VETTORI

QUESTI VETTORI NON SONO SCELTI A CASO, MA SONO RAPPRESENTATIVI DEL MECCANISMO IN ANALISI.

INFATTI, POICHÉ PASSANO IN PUNTI NOTEVOLI DEL SISTEMA, POSSIAMO COMPILARE LA SEGUENTE TABELLA CON LE CARATTERISTICHE DEI 4 VETTORI IN TERMINE DI MODULO E DIREZIONE/VERSO

VETTORE	MODULO	DIREZIONE (IL VERSO É INDICATO DALLA FRECCIA DEL VETTORE)	
$(A-A_0)$	a = COST.	$\alpha(t)$	NOTA, COORD. LIBERA
$(B-A)$	b = COST.	$\beta(t)$	INCOGNITA
$(B-B_0)$	c = COST.	$\gamma(t)$	INCOGNITA
(B_0-A_0)	d = COST.	δ = COSTANTE	

$\Rightarrow$ ABBIAMO 2 INCOGNITE $(\beta(t), \gamma(t))$ E

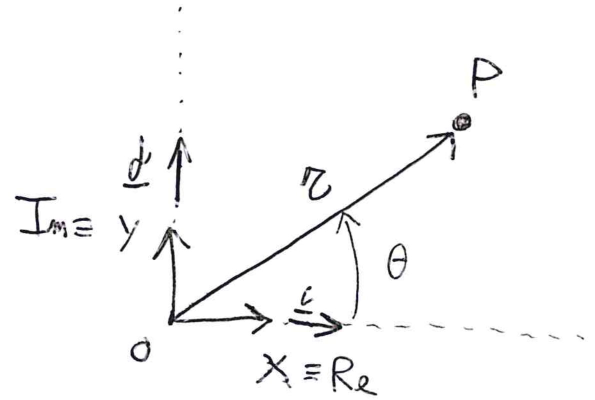
1 EQUAZIONE VETTORIALE (EQ 1)

RIESCO A CALCOLARE LE INCOGNITE POICHÉ

1 EQ VETTORIALE (NEL PIANO) $\Leftrightarrow$ 2 EQ. SCALARI

PER RISOLVERE IL PROBLEMA, É COMODO SCRIVERE I VETTORI IN COORDINATE POLARI (MODULO e ANOMALIA), USANDO LA RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE NUMERI COMPLESSI

ESEMPIO

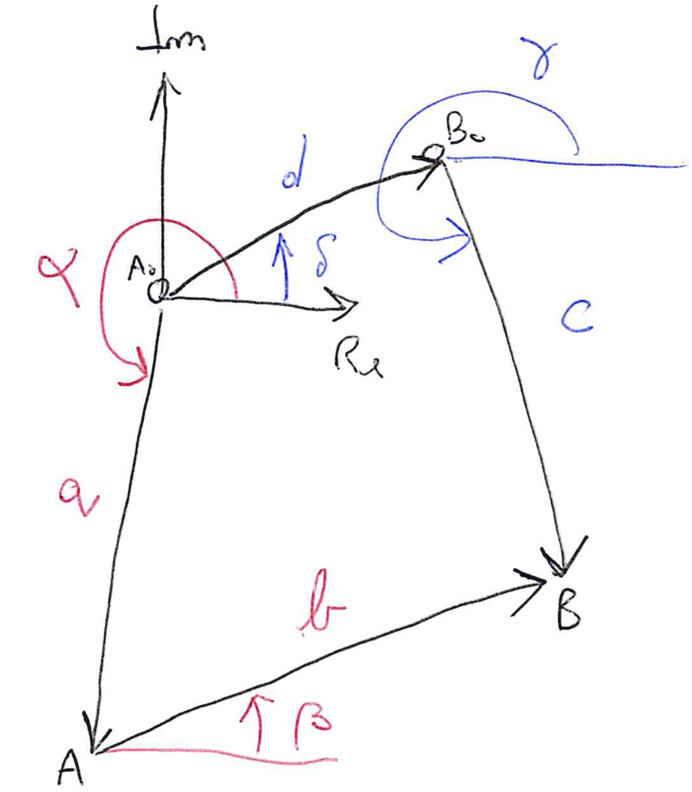


N.B.
θ SEMPRE ANTIORARIO, A PARTIRE DALL'ASSE Re (i.e. $\theta = 0 \rightarrow$ NUMERO REALE)

$$(P-O) = (r\cos\theta)\underline{i} + (r\sin\theta)\underline{j}$$

IN NOTAZIONE COMPLESSA DIVENTA

$$\overline{OP} = (r\cos\theta) + \underbrace{i}_{\sqrt{-1}}(r\sin\theta) = r\, e^{i\theta}$$



$$(A-A_0) = a\,e^{i\alpha}$$

$$(B-A) = b\,e^{i\beta}$$

$$(B-B_0) = c\,e^{i\gamma}$$

$$(B_0-A_0) = d\,e^{i\delta}$$

$$(B-A)+(A-A_0) = (B-B_0)+(B_0-A_0)$$

$$\Downarrow$$

$$a\,e^{i\alpha} + b\,e^{i\beta} = c\,e^{i\gamma} + d\,e^{i\delta} \qquad (2)$$

L'EQ. COMPLESSA CORRISPONDE A 2 EQ SCALARI.
CONSIDERO LA PARTE Re e QUELLA Im

$$\begin{array}{l} Re \\ \\ Im \end{array} \begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma + d\cos\delta \\ \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma + d\sin\delta \end{cases} \qquad (3)$$

2 EQ., 2 INCOGNITE (β, γ)

SICCOME È UN SISTEMA DI EQUAZIONI TRASCENDENTI, SI RISOLVE PER VIA NUMERICA (AD ES. CON METODO DI NEWTON-RAPHSON).

ESEMPIO

NELL'ATTO DI MOTO CONSIDERATO $\alpha = 260°$ (α 4.55 rad)

$\Rightarrow \beta = 50°$

$\gamma = 276°$

N.B. SE SOSTITUISCO IN (2), VEDO CHE EFFETTIVAMENTE L'EQUAZIONE DI CHIUSURA È VERIFICATA, CIOÈ OTTENGO $0 = 0$

---

3 VELOCITÀ

NOTA LA POSIZIONE, POSSO RICAVARE LE VELOCITÀ DEI VARI CORPI / PUNTI DEL QUADRILATERO

DERIVO RISPETTO AL TEMPO L'EQ. DI CHIUSURA IN POSIZIONE eq. (2) (OPPURE LA eq. (3))

N.B.

BISOGNA FARE MOLTA ATTENZIONE A QUALI TERMINI SONO COSTANTI E QUALI SONO VARIABILI NEL TEMPO

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} + d e^{i\delta}$$ POSIZIONE

$$\Downarrow \; d/dt$$

FUNZIONI DEL TEMPO

$$a i \dot{\alpha} e^{i\alpha} + b \dot{\beta} i e^{i\beta} = + c \dot{\gamma} i e^{i\gamma} \qquad (4)$$

$$a \dot{\alpha} e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} + b \dot{\beta} e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = c \dot{\gamma} e^{i\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)} \qquad (5)$$

ANCORA OTTENIAMO 2 EQ. SCALARI CON 2 INCOGNITE $(\dot{\gamma}, \dot{\beta})$

AD ESEMPIO DIVIDO L' eq. (4) PER i E PRENDO PARTE Re e Im

$$\begin{cases} a \dot{\alpha} \cos\alpha + b \dot{\beta} \cos\beta = c \dot{\gamma} \cos\gamma \\ a \dot{\alpha} \sin\alpha + \dot{\beta} b \sin\beta = c \dot{\gamma} \sin\gamma \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} c\cos\gamma & -b\cos\beta \\ c\sin\gamma & -b\sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{bmatrix} \dot{\alpha}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \times \\ \times \end{bmatrix} \dot{\alpha}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(\alpha, \dot{\alpha})$$

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}(\alpha, \dot{\alpha})$$

ESEMPIO

PER L'ATTO DI MOTO

$$\alpha = 260°$$

$$\dot{\alpha} = 5 \ \frac{rad}{s}$$

$$\dot{\gamma} = 5.15 \ \frac{rad}{s}$$

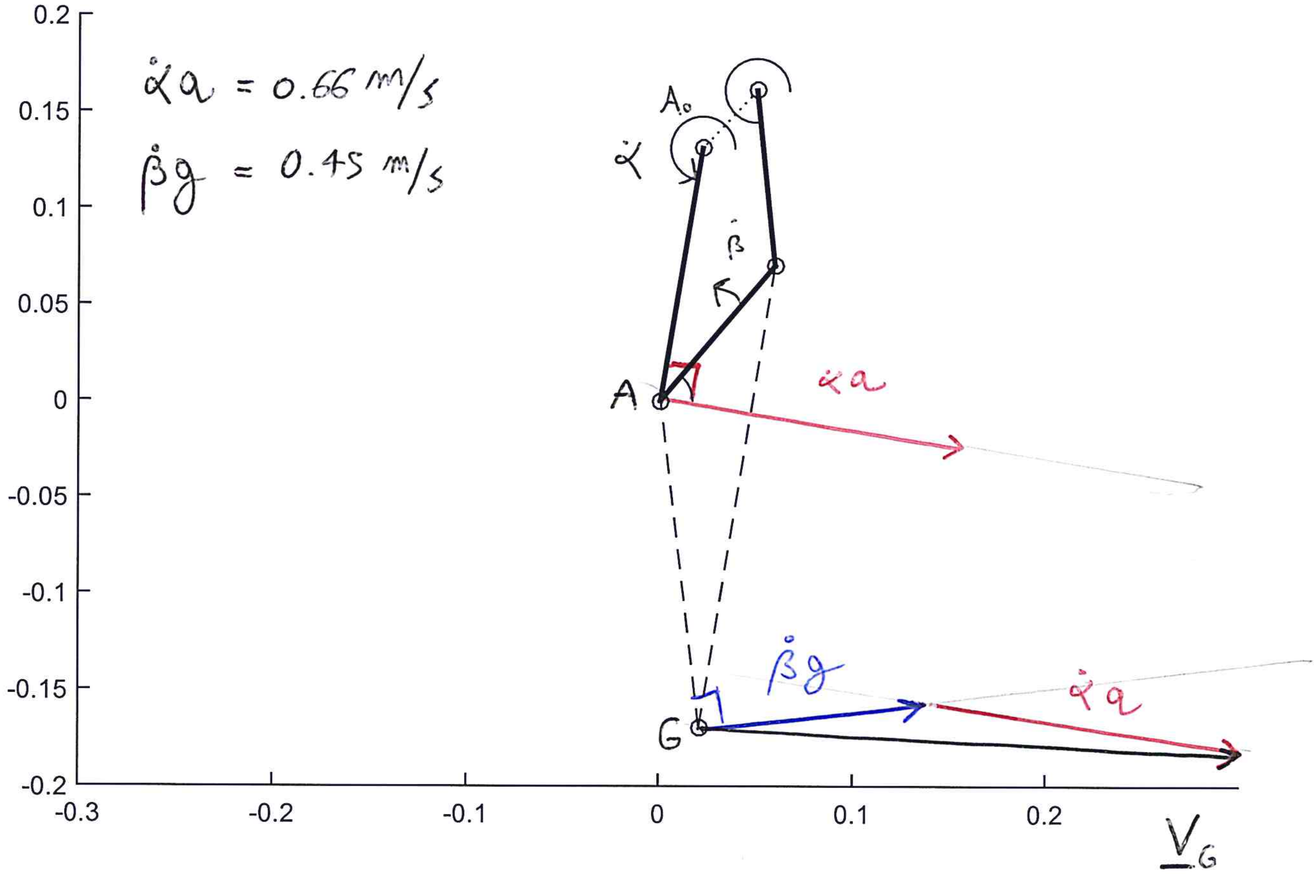
$$\dot{\beta} = 2.65 \ \frac{rad}{s}$$

4 VELOCITÀ PUNTO G

$$\underline{V}_A = \underline{\omega}_{AA_0} \wedge (A-A_0) = \dot{\alpha}\,\underline{k} \wedge (A-A_0)$$

MODULO $\dot{\alpha} a$

$$\underline{V}_G = \underline{V}_A + \underline{\omega}_{AB} \wedge (B-A) = \underline{V}_A + \underbrace{\dot{\beta}\,\underline{k} \wedge (G-A)}_{\text{MODULO: } \dot{\beta} g}$$



$$(A-A_0) = a\cos\alpha\,\underline{i} + a\sin\alpha\,\underline{j}$$

$$\underline{V}_A = a\dot{\alpha}\cos\alpha\,\underline{j} - a\dot{\alpha}\sin\alpha\,\underline{i} = 0.655\,\underline{i} - 0.11\,\underline{j}$$

N.B.

$$\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}\,, \quad \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$$

$$\dot\beta \underline{K} \wedge (G - A) =$$

$$\dot\beta \underline{K} \wedge \left(g \cos(\beta - \varepsilon)\, \underline{i} + g \sin(\beta - \varepsilon)\, \underline{j} \right) =$$

$$-\dot\beta g \sin(\beta - \varepsilon)\, \underline{i} + \dot\beta g \cos(\beta - \varepsilon)\, \underline{j} =$$

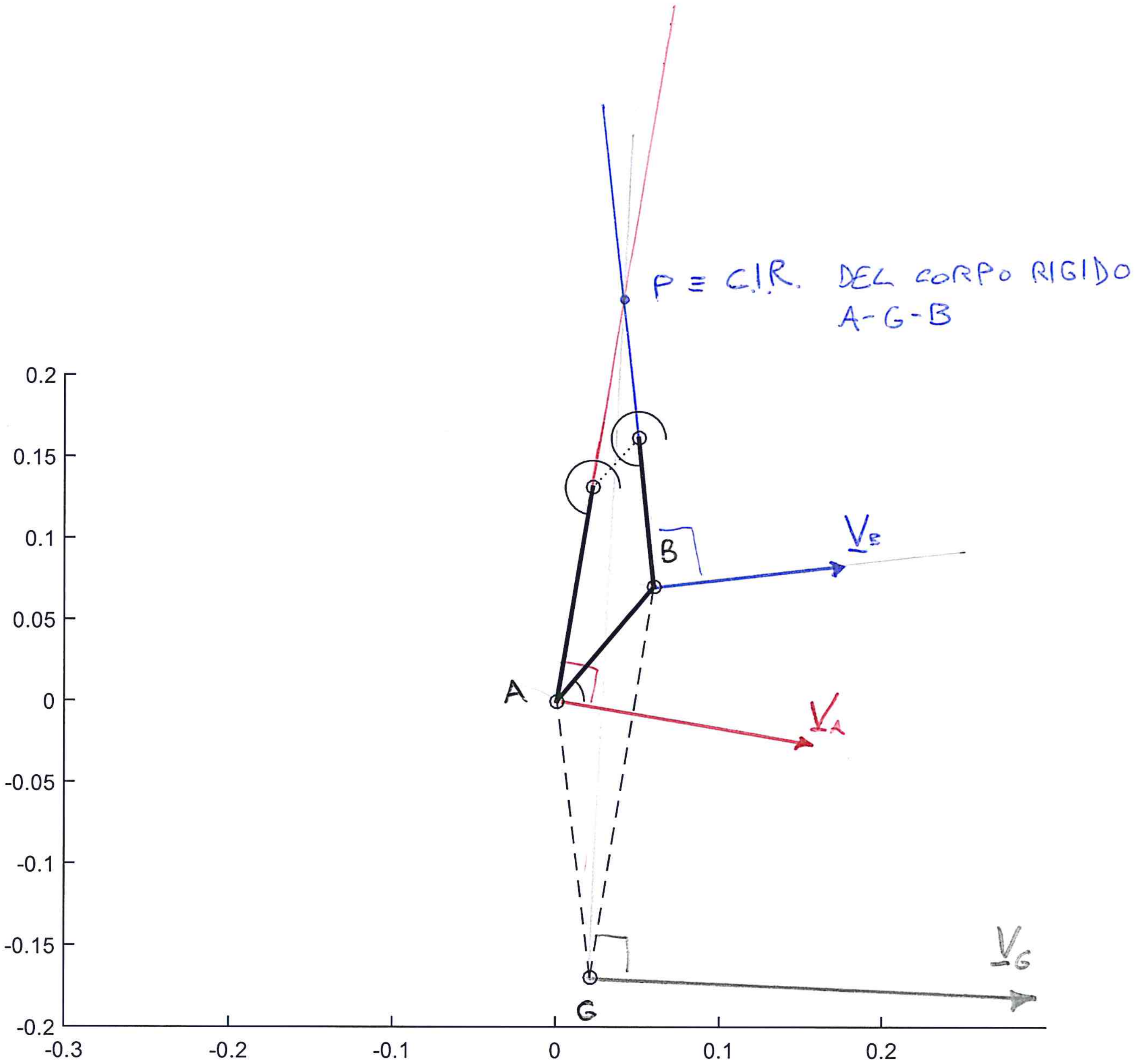
$$0.45\, \underline{i} + 0.054\, \underline{j}$$

$$\underline{V}_G = 1.1\, \underline{i} - 0.056\, \underline{j} \qquad m/s$$

$$\underline{V}_G = \left(-a\dot\alpha \sin\alpha - \dot\beta g \sin(\beta - \varepsilon) \right) \underline{i} +$$

$$\left(a\dot\alpha \cos\alpha + \dot\beta g \cos(\beta - \varepsilon) \right) \underline{j}$$

C.I.R. DELLA GAMBA NELL'ATTO DI MOTO CONSIDERATO



$$\underline{V}_A = \underline{\omega}_{AB} \wedge (A - P)$$

$$\underline{V}_B = \underline{\omega}_{AB} \wedge (B - P)$$

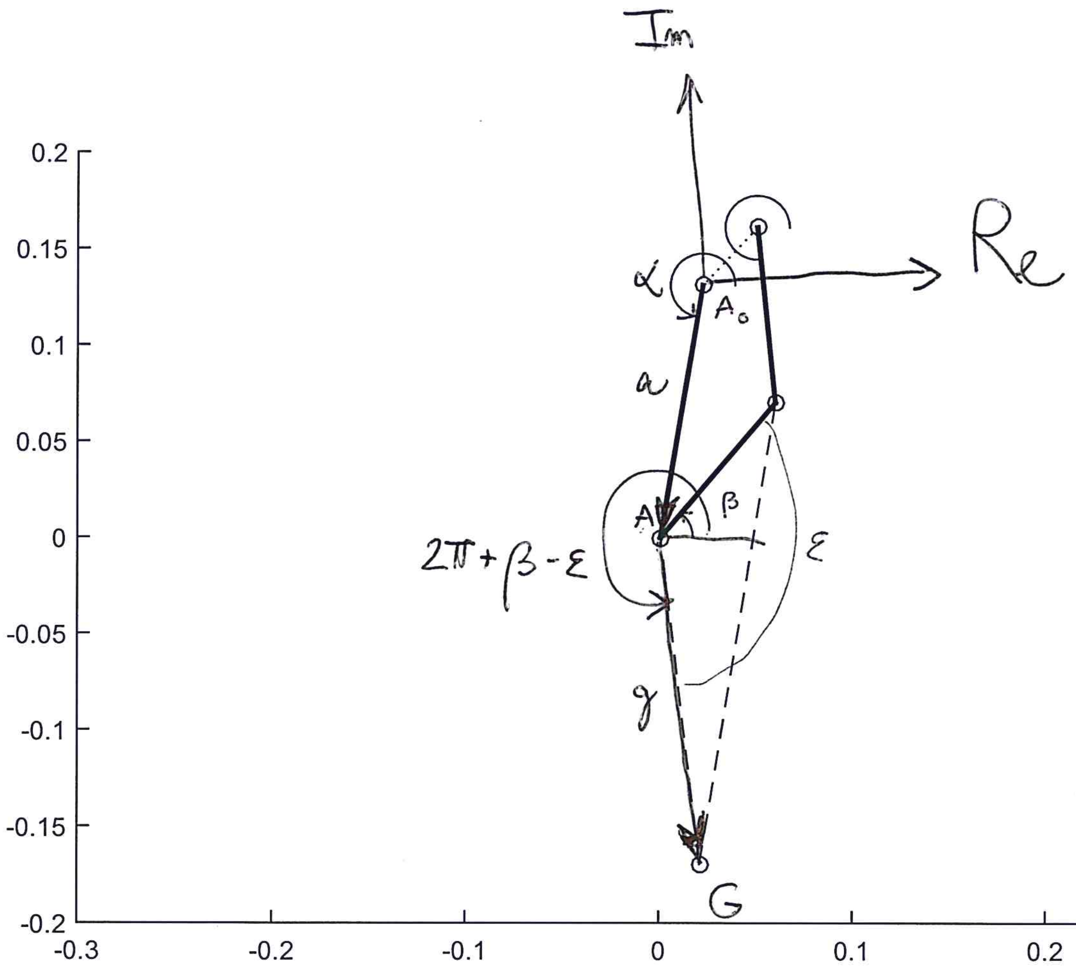
$$\underline{V}_G = \underline{\omega}_{AB} \wedge (G - P)$$

$\underline{V}_P = \underline{0}$ C.I.R

OPPURE USANDO I NUMERI COMPLESSI

POSIZIONE

$$\overline{A_0G} = \overline{A_0A} + \overline{AG} = a e^{i\alpha} + g e^{i(\beta - \varepsilon)}$$



VELOCITÀ

$$\overline{V_G} = a\dot{\alpha}\, e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} + g\dot{\beta}\, e^{i\left(\beta - \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \left(-a\dot{\alpha}\sin\alpha - g\dot{\beta}\sin(\beta - \varepsilon)\right) + i\left(a\dot{\alpha}\cos\alpha + g\dot{\beta}\cos(\beta - \varepsilon)\right)$$

5 ACCELERAZIONI QUADRILATERO

DERIVO L'EQ. DI CHIUSURA IN VELOCITÀ

$$a\dot{\alpha}\, i\, e^{i\alpha} + b\dot{\beta}\, i\, e^{i\beta} = c\dot{\gamma}\, i\, e^{i\gamma}$$

$$\Downarrow \frac{d}{dt}$$

FUNZIONI DEL TEMPO

$$a\ddot{\alpha}\, e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} - a\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} + \ddot{\beta} b\, e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} - b\dot{\beta}^2 e^{i\beta} = c\ddot{\gamma}\, e^{i\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right)} - c\dot{\gamma}^2 e^{i\gamma} \qquad (6)$$

OPPURE IN FORMA SCALARE

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = -c\ddot{\gamma}\sin\gamma - c\dot{\gamma}^2\cos\gamma \\ a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta = c\ddot{\gamma}\cos\gamma - \dot{\gamma}^2 c\sin\gamma \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} b\sin\beta & -c\sin\gamma \\ -b\cos\beta & c\cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\dot{\gamma}^2\cos\gamma - \dot{\beta}^2 b\cos\beta - \dot{\alpha}^2 a\cos\alpha - \ddot{\alpha} a\sin\alpha \\ c\dot{\gamma}^2\sin\gamma - \dot{\beta}^2 b\sin\beta - \dot{\alpha}^2 a\sin\alpha + \ddot{\alpha} a\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\beta} = \ddot{\beta}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$$

$$\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$$

<u>ESEMPIO</u> ATTO DI MOTO IN ESAME

$\alpha = 260°$

$\dot{\alpha} = 5 \quad rad/s$

$\ddot{\alpha} = 0 \quad rad/s^2$

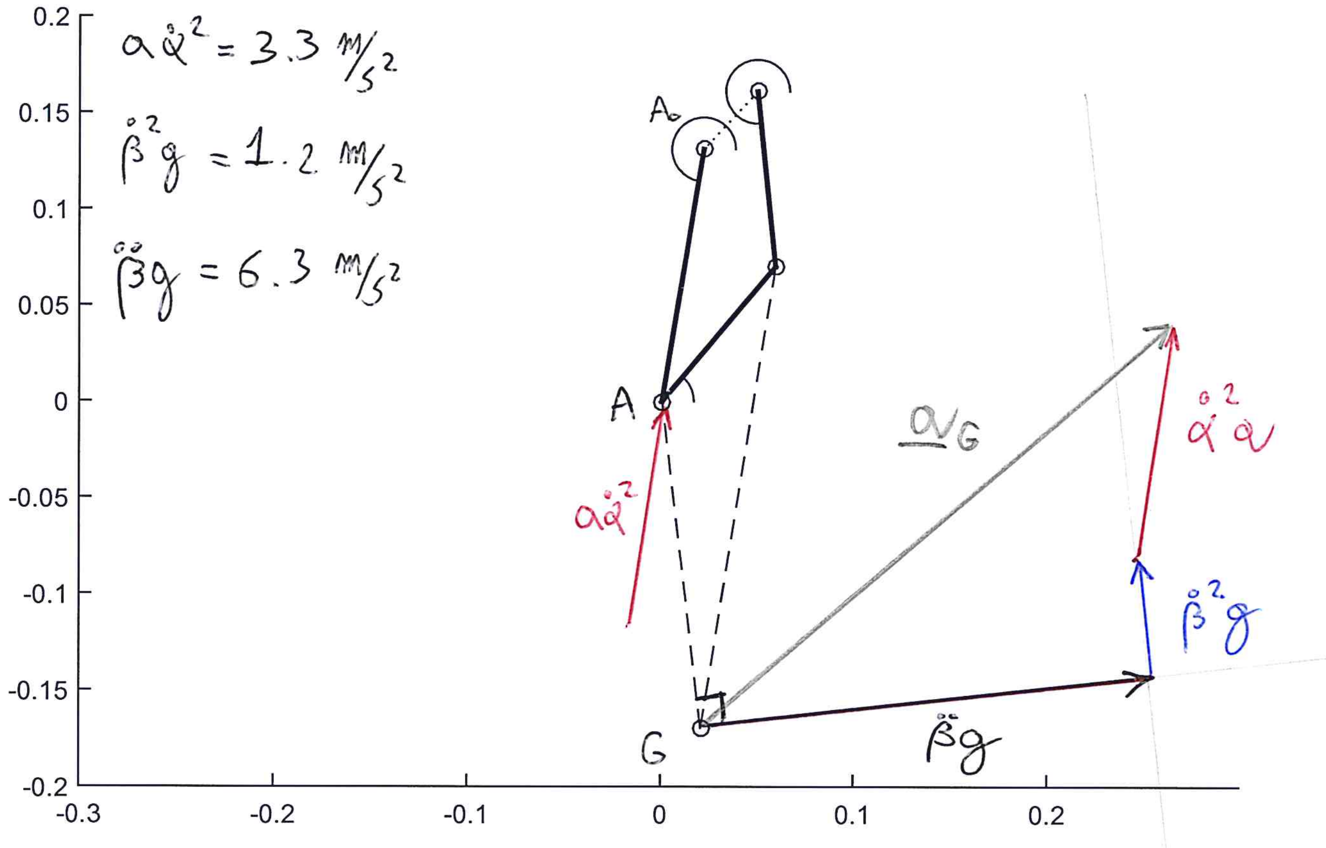
$\ddot{\beta} = 37 \quad rad/s^2$

$\ddot{\gamma} = -25.9 \quad rad/s^2$

$\boxed{6}$ ACCELERAZIONI DI G

$$\underline{a}_A = \underline{\dot{\omega}}_{AA_0} \wedge (A-A_0) - \omega^2_{AA_0}(A-A_0)$$

$$= \underbrace{\ddot{\alpha}\,\underline{k} \wedge (A-A_0)}_{\ddot{\alpha}=0} - \underbrace{\dot{\alpha}^2 (A-A_0)}_{\text{MODULO: } \dot{\alpha}^2 a}$$

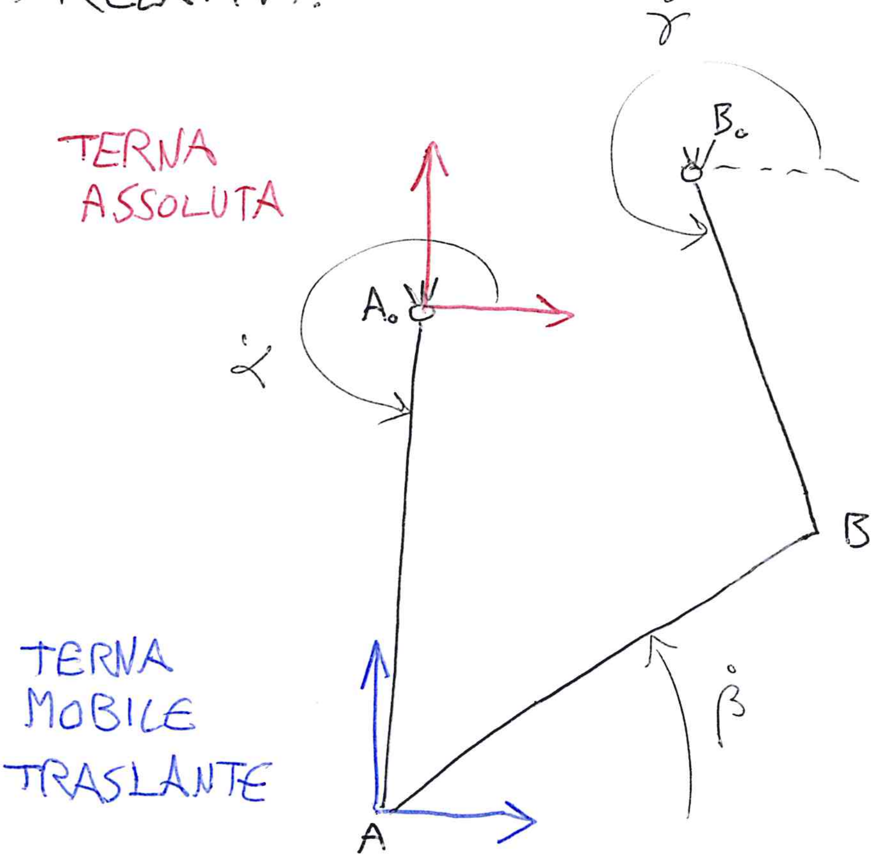


$$\underline{a}_G = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}}_{AB} \wedge (G-A) - \omega^2_{AB}(G-A)$$

$$= \underline{a}_A + \underbrace{\ddot{\beta}\,\underline{k} \wedge (G-A)}_{\text{MODULO } \ddot{\beta} g} - \underbrace{\dot{\beta}^2 (G-A)}_{\text{MODULO: } \dot{\beta}^2 g}$$

STUDIO CINEMATICA CON I MOTI RELATIVI

LA CHIUSURA IN VELOCITÀ, EQ. 5, SI PUÒ OTTENERE ANCHE USANDO IL TEOREMA DEI MOTI RELATIVI.



$$\underline{V}_B = \underline{V}_{TRASCINAMENTO} + \underline{V}_{RELATIVA}$$

$$\underline{V}_B = \dot{\gamma}\,\underline{k} \wedge (B - B_0)$$

$$\underline{V}_{TR} = \underline{V}_A = \dot{\alpha}\,\underline{k} \wedge (A - A_0)$$

$$\underline{V}_{REL} = \dot{\beta}\,\underline{k} \wedge (B - A)$$

$$\dot{\gamma}\,\underline{k} \wedge (B-B_0) = \dot{\alpha}\,\underline{k} \wedge (A-A_0) + \dot{\beta}\,\underline{k} \wedge (B-A)$$

CHE È EQUIVALENTE ALLA 5

$$\underbrace{c\dot{\gamma}\, e^{i\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right)}}_{\underline{V}_B} = \underbrace{a\dot{\alpha}\, e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}}_{\underline{V}_{TR}} + \underbrace{\dot{\beta}\, b\, e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}}_{\underline{V}_{REL}}$$

IN MANIERA ANALOGA PER LE ACCELERAZIONI

$$\underline{a}_B = \underline{a}_{TR} + \underline{a}_{REL} + \underline{a}_{CORIOLIS}$$

$$\underline{a}_B = \ddot{\gamma}\,\underline{k} \wedge (B-B_0) - \dot{\gamma}^2 (B-B_0)$$

$$\underline{a}_{TR} = \underline{a}_A = \cancel{\ddot{\alpha}\,\underline{k} \wedge (A-A_0)} - \dot{\alpha}^2 (A-A_0)$$

$$\underline{a}_{REL} = \ddot{\beta}\,\underline{k} \wedge (B-A) - \dot{\beta}^2 (B-A)$$

$\underline{a}_{COR} = \underline{0}$ INFATTI $\underline{a}_C = 2\,\underline{\omega}_{TERNA} \wedge \underline{V}_{REL}$

MA $\omega_{TERNA} = 0$ (TERNA TRASLANTE)

ANALOGAMENTE A PRIMA, ARRIVO A SCRIVERE UN'EQ. ANALOGA ALLA 6