Lezione lunedì 14 dicembre 2020

lunedì 14 dicembre 2020 09:58

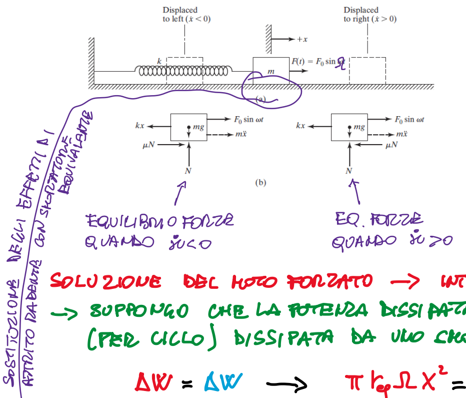
SISTEMI VIBRANTI A 1 GDL FORZATI CON SMORZAMENTO PER ATTRITO RADENTE

- POTENZA DISSIPATA PER CICLO IN UNO SMORZATORE VISCOSO

$$\Delta W = \pi r \Omega X^2$$

- POTENZA DISSIPATA PER CICLO IN PRESENZA DI ATTRITO RADENTE

$$\Delta W = 4 \mu N X$$



SISTEMA FORZATO CON FORZANTE

$F(t) = F_0 \sin \Omega t$

NON LINEARITÀ

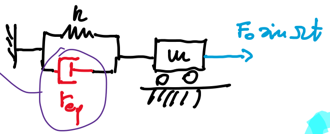
$$m \ddot{x} + k x \pm \mu N = F_0 \sin \Omega t$$

SOLUZIONE DEL MOTO FORZATO → INTEGRALE PARTICOLARE E A REGIME

→ SUPPONGO CHE LA POTENZA DISSIPATA PER ATTRITO VISCOSO SIA LA STESSA (PER CICLO) DISSIPATA DA UNO SMORZATORE EQUIVALENTE

$$\Delta W = \Delta W \rightarrow \pi r_{eq} \Omega X^2 = 4 \mu N X \rightarrow \boxed{r_{eq} = \frac{4 \mu N}{\pi \Omega X}}$$

DIPENDE DALL'AMPIEZZA DEL MOTO



$$x_p(t) = X \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (r_{eq}\Omega)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2 \zeta_{eq} \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}$$

RISPOSTA DI UN SISTEMA 1GDL A FORZANTE ARMONICA

$$\zeta_{eq} = \frac{r_{eq}}{r_c} = \frac{4 \mu N}{\pi \Omega X} \frac{1}{2 m \omega} = \frac{2 \mu N}{\pi m \omega \Omega X}$$

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{4 \mu N}{\pi k X}\right)^2}} \rightarrow X = \frac{F_0}{k} \left[\frac{1 - \left(\frac{4 \mu N}{\pi F_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2} \right]^{1/2}$$

VERIFICA CHE IL NUMERATORE SIA > 0

$$\circledast \quad 1 - \left(\frac{4 \mu N}{\pi F_0}\right)^2 > 0 \qquad \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi}$$

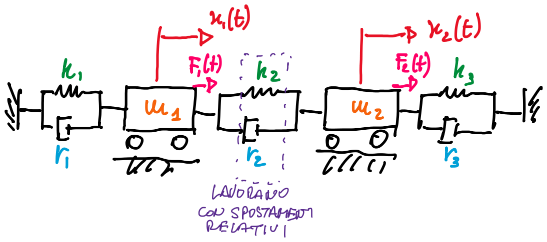
← L'EQUIVALENZA DI DISSIPAZIONE DI POTENZA VALE SOLO SE LA F_0 È MAGGIORE DI $4/\pi$ VOLTE LA FORZA D'ATTRITO μN

$$\varphi = \arctan\left(\frac{r_{eq}\Omega}{k - m\Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{4 \mu N}{\pi k X}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{4 \mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4 \mu N}{\pi F_0}\right)^2}}\right)$$

SE LA $\circledast$ NON È VERIFICATA → RISOLUZIONE NUMERICA DELL'EQ. NON LINEARE DI MOTO

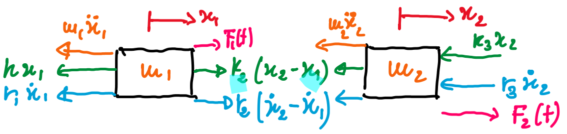
• SISTEMI VIBRANTI A 2-n GDL

UTILIZZEREMO UN APPROCCIO MATRICIALE, LO MOSTREREMO PER 2GdL. PER RAGIONI PRATICHE (OTTERREMO MATRICI 2X2), MA POTREMO ESTENDERLO A n GdL CON MATRICI n X n



SCRITTURA EQ MOTO < EQUILIBRI DINAMICI / EQ. DI LAGRANGE

→ EQUILIBRI DINAMICI ("CORPO LIBERO" CON TUTTE LE FORZE AGENTI) → EQUILIBRIO IN DIREZIONE ORIZZONTALE → PER OGNI MASSA



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (r_1 + r_2)\dot{x}_1 - r_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \end{cases}$$ | SISTEMA DELLE EQUAZIONI

$$\boxed{*} \; m_2\ddot{x}_2 - r_2\dot{x}_1 + (r_2+r_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = F_2(t)$$ DI MOTO DEL SISTEMA CON SMORZAMENTO E FORZAMENTO

DA $\boxed{*}$ POSSO CALCOLARE:

1) FREQUENZE PROPRIE (NATURALI) DEL SISTEMA → USO SISTEMA OMOGENEO NON SMORZATO

2) MODI DI VIBRARE → SISTEMA OMOGENEO E NON SMORZATO

$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ MATRICE DI MASSA

$[R] = \begin{bmatrix} r_1+r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2+r_3 \end{bmatrix}$ MATRICE DI SMORZAMENTO

$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$ MATRICE DI RIGIDEZZA

$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$ VETTORE DELLE FORZANTI

$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$ VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI

LA $\boxed{*}$ PUO' ESSERE SCRITTA COME:

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [R]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{F}$$

DAL PUNTO DI VISTA "FORMALE" IL SISTEMA DI EQ. DI MOTO E' UGUALE ALL' EQ DI MOTO DEL SISTEMA A 1 GdL.
IN NOTAZIONE MATRICIALE NULLA CAMBIA SE LE MATRICI O I VETTORI SONO $2\times2 \div 2\times1$ OPPURE $n\times n \div n\times 1$

OSSERVIAMO CHE LE MATRICI $[M]$, $[R]$ E $[K]$ SONO SIMMETRICHE:

$$[M]=[M]^T \quad [R]=[R]^T \quad [K]=[K]^T$$

1) CALCOLO FREQUENZE PROPRIE

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = 0 \longrightarrow (1) \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = 0 \end{cases}$$ SIST. DI EQ DIFF. OMOGENEE

IPOTIZZIAMO SOLUZIONE ARMONICA PER IL SISTEMA (1)

$x_1(t) = X_1\cos(\omega t + \varphi)$ (2)
$x_2(t) = X_2\cos(\omega t + \varphi)$ (3)

SOSTITUISCO (2) E (3) IN (1)

$\ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1\cos(\omega t+\varphi)$
$\ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2\cos(\omega t+\varphi)$

$$\begin{cases} \left(\left(-m_1\omega^2 + (k_1+k_2)\right)X_1 - k_2X_2\right)\cancel{\cos(\omega t+\varphi)} = 0 \\ \left(-k_2X_1 + \left(-m_2\omega^2 + (k_2+k_3)\right)X_2\right)\cancel{\cos(\omega t+\varphi)} = 0 \end{cases}$$

$X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$ ALTRIMENTI SOLUZIONE BANALE → SISTEMA CHE NON SI MUOVE

$$(4) \begin{cases} \left(-m_1\omega^2 + (k_1+k_2)\right)X_1 - k_2X_2 = 0 \\ -k_2X_1 + \left(-m_2\omega^2 + (k_2+k_3)\right)X_2 = 0 \end{cases}$$

SISTEMA ALGEBRICO OMOGENEO IN X_1 E X_2
PERCHE' POSSA AVERE UNA SOLUZIONE NON BANALE BISOGNA IMPORRE CHE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI SIA NULLO.

$$\det\begin{bmatrix} -m_1\omega^2+(k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+(k_2+k_3) \end{bmatrix} = 0$$

$$(m_1m_2)\,\omega^4 - \left((k_1+k_2)m_2 + (k_2+k_3)m_1\right)\omega^2 + \left((k_1+k_2)(k_2+k_3) - k_2^2\right) = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA → ORDINE 2N IN ω → PER NOI CON 2GdL → ORDINE 4° IN ω

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(k_1+k_2)m_2 + (k_2+k_3)m_1}{m_1m_2}\right) \mp \frac{1}{2}\left(\left(\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1m_2}\right)^2 - 4\left(\frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1m_2}\right)\right)^{1/2}$$

↳ ASSOCIATI AD ω_1 E ω_2 SONO I RAPPORTI TRA X_1 E X_2, IL SISTEMA (4) NON HA EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI DATO CHE HO IMPOSTO $\det(\cdot) = 0$. SE USO LA PRIMA EQ. →

$X_i^{(k)}$ — INDICE RELATIVO ALLA FREQ. CALCOLATA → ANCHE AL MODO DI VIBRARE (k); INDICE RELATIVO AL GRADO DI LIBERTA' (i)

VALORE DI ω_1

$$\gamma_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1+k_2)}{k_2}$$

$$\gamma_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1+k_2)}{k_2}$$

SE USO LA SECONDA EQ. →

$$\gamma_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2+k_3)}$$

$$\gamma_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2+k_3)}$$

LA SOLUZIONE DELL' EQ. DI MOTO E':

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)$$

$$\vec{x}_1 = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \gamma_1 X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{Bmatrix}$$ 1° MODO

MODI DI VIBRARE DEL SISTEMA

2) MODI DI VIBRARE

$$\vec{x}_2 = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dots \end{Bmatrix}$$

$X^{(1)}$ $X^{(2)}$ ...

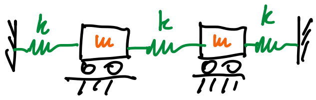
$$\left[\eta_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]\Big\}\ 2^\circ \text{MODO}$$

$\ldots, \ldots, \varphi_1, \varphi_2 \rightarrow$ DETERMINATI CON CONDIZIONI INIZIALI
$x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$
$x_2(0)$, $\dot{x}_2(0)$

ESEMPIO

$m_1 = m_2 = m$
$k_1 = k_2 = k_3 = k$

$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - k x_1 + 2k x_2 = 0 \end{cases} \quad (\circ\circ)$$



SOLUZIONE $x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \varphi)$ $\quad i = 1,2$

DETERMINANTE MATRICE DEI COEFFICIENTI

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0$$

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

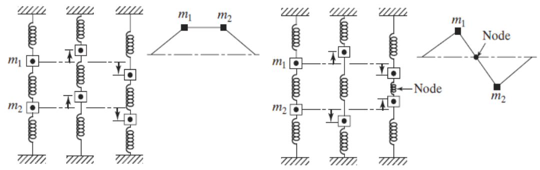
$$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1$$

$$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1$$

PRIMO MODO $\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) \end{Bmatrix}$

SECONDO MODO $\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right) \end{Bmatrix}$

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right)$$
$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right)$$



(a) First mode — LE MASSE SI SPOSTANO IN FASE

(b) Second mode — LE MASSE SI SPOSTANO IN CONTROFASE

PASSAGGIO IN COORDINATE PRINCIPALI

LE EQUAZIONI DI MOTO IN COORDINATE FISICHE $x_1(t)$ $x_2(t)$ SONO ACCOPPIATE.
PER LA TEORIA DEI SISTEMI LINEARI POSSO INTRODURRE UNA TRASFORMAZIONE DI "COORDINATE" CHE RENDE IL SISTEMA DISACCOPPIATO: LE NUOVE COORDINATE SI CHIAMANO COORDINATE "MODALI" O "PRINCIPALI"

CONSIDERO L'ESEMPIO PRECEDENTE E DEFINISCO:

$$q_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right)$$
$$q_2(t) = X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right)$$

SONO SOLUZIONI DI UN SISTEMA DI EQ DIFF. $\rightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{k}{m} q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{3k}{m} q_2 = 0 \end{cases}$$

HO OTTENUTO n EQUAZIONI AD 1 GdL INVECE DI UN SISTEMA DI n EQUAZIONI

$$\begin{cases} x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \end{cases} \quad (\circ\circ\circ)$$

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

SE USO $(\circ\circ\circ)$ NELLA $(\circ\circ)$ OTTENGO

$\hookrightarrow$ TRASFORMAZIONE INVERSA

$$\boxed{\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{2}\left[x_1(t) + x_2(t)\right] \\ q_2(t) &= \frac{1}{2}\left[x_1(t) - x_2(t)\right] \end{aligned}}$$