

6

Glifo

Del meccanismo riportato in Figura 6.1 sono note la geometria (lunghezza della manovella $O_1B = 2.5 \text{ m}$ e del telaio $OO_1 = 1.41 \text{ m}$), l'angolo di manovella $\alpha = 0$, l'inclinazione del telaio $\gamma = \frac{\pi}{4}$ nell'istante di tempo considerato ($t = 3 \text{ s}$) come riportato in Figura 6.1 e la legge con cui varia la lunghezza dell'attuatore oleodinamico OB in funzione del tempo.

$$OB(t) = b(t) = 3,385 + 0,07t + 0,005t^2$$

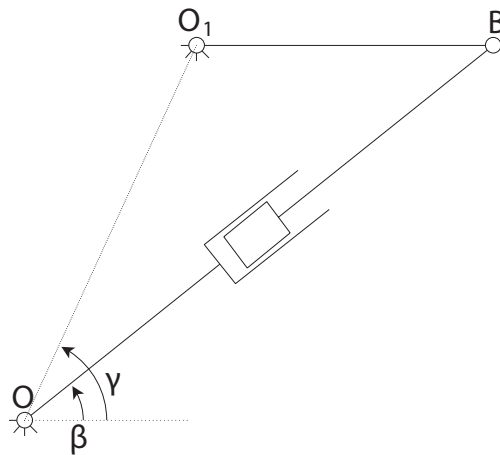


Figura 6.1: Glifo Oscillante

Nell'istante considerato, si chiede di determinare:

1. Il valore dell'angolo β dell'attuatore oleodinamico.
2. I valori dei vettori velocità angolare delle manovelle O_1B e OB .
3. I valori dei vettori accelerazione angolare delle manovelle O_1B e OB .

6.1 Analisi del moto

Il sistema costituito da 3 corpi rigidi (la manovella e le due aste dell'attuatore oleodinamico) che si muovono nel piano, disporrebbe, in assenza di vincoli, di 9 gradi di libertà. Per calcolare quelli effettivamente lasciati liberi dal sistema di vincoli è necessario considerare che:

- la presenza della cerniera a terra in O_1 rappresenta un vincolo alla traslazione (2 gradi di vincolo).
- la traslazione verticale e orizzontale dell'attuatore OB è impedita dalla cerniera a terra in O (vincolo doppio).
- lo spostamento dell'estremità B dell'asta O_1B è vincolata da una cerniera ad essere uguale allo spostamento dell'estremità B del pistone (vincolo doppio).
- l'accoppiamento tra cilindro e pistone dell'attuatore impone pari rotazione alle aste e un'unica possibilità di moto relativo lungo l'asse dell'attuatore (vincolo doppio).

Il computo dei gradi di libertà del sistema può quindi essere sintetizzato nella seguente tabella:

3 g.d.l. x 3 corpi rigidi + sfilo pistone =	9 g.d.l.	-
1 cerniera a terra in O =	2 g.d.v.	-
1 cerniera a terra in O_1 =	2 g.d.v.	-
1 cerniera (Asta/Asta) =	2 g.d.v.	-
1 vincolo pistone/cilindro =	2 g.d.v.	-
<hr/>		
Totale	1 g.d.l.	residuo

Tabella 6.1: Computo dei g.d.l. residui del sistema

6.2 Soluzione del quesito 1

6.2.1 Con i numeri complessi

Per svolgere l'esercizio si devono determinare innanzi tutto le grandezze cinematiche relative all'asta OB nell'istante di tempo considerato; derivando quindi rispetto al tempo la funzione $b(t)$ si ricavano le leggi di velocità e accelerazione di allungamento del pistone (da non confondere con la velocità e l'accelerazione assoluta del punto B).

$$\begin{cases} b(t=3) = 3,385 + 0,07t + 0,005t^2 = 3,64 \text{ m} \\ \dot{b}(t=3) = 0,07 + 0,01t = 0,1 \text{ m/s} \\ \ddot{b}(t=3) = 0,01 = 0,01 \text{ m/s}^2 \end{cases} \quad (6.1)$$

Scelto un sistema di riferimento nel piano immaginario contenente il meccanismo si definiscono i tre vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} così come riportato in Figura 6.1 e descritti formalmente con la notazione complessa (6.2).

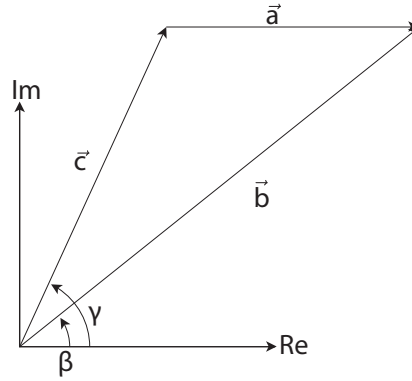


Figura 6.2: Poligono di chiusura vettori posizione

$$\begin{aligned} \vec{a} &= ae^{i\alpha} \\ \vec{b} &= be^{i\beta} \\ \vec{c} &= ce^{i\gamma} \end{aligned} \quad (6.2)$$

I vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} risultano in ogni istante di tempo allineati alle aste O_1B , OB e OO_1 e consentono di studiare il moto del sistema attraverso l'equazione di chiusura:

$$\vec{c} + \vec{a} = \vec{b} \quad (6.3)$$

L'equazione appena scritta definisce la posizione del punto B e può essere espressa utilizzando la notazione complessa come:

$$ce^{i\gamma} + ae^{i\alpha} = be^{i\beta} \quad (6.4)$$

Il valore di β può essere calcolato scomponendo l'equazione di chiusura in notazione complessa 6.4 nelle due equazioni scalari relative alla parte reale ed immaginaria mediante la relazione $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$.

$$\begin{cases} c \cos \gamma + a \cos \alpha = b \cos \beta \\ c \sin \gamma + a \sin \alpha = b \sin \beta \end{cases} \quad (6.5)$$

Dalla seconda equazione del sistema (6.5), tenendo presente che $\sin \alpha = 0$, si ottiene $c \sin \gamma = b \sin \beta \Rightarrow \beta = \arcsin(\frac{c}{b} \sin \gamma) = 0.27 \text{ rad}$ che sia verificata in ogni istante di tempo. L'equazione di chiusura (6.3) impone infatti l'uguaglianza delle componenti orizzontali e verticali tra la somma dei vettori $\vec{a}e\vec{c}$ ed il vettore \vec{b} , una forma molto compatta attraverso l'utilizzo dei numeri complessi. Tale uguaglianza dev'essere verificata $\forall t$. Per ricavare la velocità e l'accelerazione delle aste, si deve derivare rispetto al tempo l'equazione di chiusura (6.4) (oppure, in alternativa, si può derivare il sistema (6.5)). Tenendo presente che i moduli a e c sono costanti in quanto rappresentano le lunghezze della manovella e del telaio, che gli angoli α e β sono variabili in funzione del tempo (γ è costante in quanto rappresenta l'inclinazione del telaio) e che la lunghezza dell'asta OB varia secondo la legge assegnata (6.1), si ottiene la seguente equazione di chiusura dei vettori velocità.

$$ia\dot{\alpha}e^{\alpha} = \dot{b}e^{i\beta} + ib\dot{\beta}e^{i\beta} \quad (6.6)$$

Vettore	Modulo	Fase		
\vec{a}	costante	a	variabile	α°
\vec{b}	variabile (nota)	b	variabile	β°
\vec{c}	costante	c	costante	γ

Tabella 6.2

L'equazione (6.6) può essere riscritta nel seguente modo, ricordando che la moltiplicazione per l'operatore immaginario i corrisponde ad una rotazione del vettore di $\frac{\pi}{2}$, ovvero $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$a\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} = \dot{b}e^{i\beta} + b\dot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} \quad (6.7)$$

Proiettando l'equazione (6.7) sull'asse reale e immaginario, ricordando che $\sin(\vartheta + \frac{\pi}{2}) = \cos \vartheta$ e che $\cos(\vartheta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \vartheta$, è possibile ottenere il seguente sistema di equazioni nelle due incognite $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$.

$$\begin{cases} -a\dot{\alpha} \sin \alpha = \dot{b} \cos \beta - b\dot{\beta} \sin \beta \\ a\dot{\alpha} \cos \alpha = \dot{b} \sin \beta + b\dot{\beta} \cos \beta \end{cases} \quad (6.8)$$

Il sistema (6.7) può essere riscritto nella seguente forma matriciale.

$$\begin{bmatrix} -a \sin \alpha & b \sin \beta \\ a \cos \alpha & -b \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{b} \cos \beta \\ \dot{b} \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

Tale sistema può essere risolto mediante un qualsiasi metodo di risoluzione per sistemi lineari, come ad esempio il metodo di Cramer in cui:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \dot{b} \cos \beta & b \sin \beta \\ \dot{b} \sin \beta & -b \cos \beta \end{bmatrix}; [A_2] = \begin{bmatrix} -a \sin \alpha & \dot{b} \cos \beta \\ a \cos \alpha & \dot{b} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

da cui:

$$\dot{\alpha} = \frac{\det[A_1]}{\det[A]} = 0,146 \text{ rad/s} \quad (6.11)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\det[A_2]}{\det[A]} = 0,096 \text{ rad/s} \quad (6.12)$$

6.2.2 Con i moti relativi

Si mostra di seguito come sia possibile pervenire ai medesimi risultati analizzando la cinematica del sistema con le terne relative. Preso un sistema di riferimento assoluto XOY , con origine nella cerniera O e assi X e Y rispettivamente diretti in direzione orizzontale e verticale (come riportato in Figura 6.3), si studia il moto del punto B attraverso una terna rotante $X_1O_1Y_1$ solidale all'attuatore BO così come mostrato in 6.3.

I moti assoluto, di trascinamento e relativo sono rispettivamente:

- moto assoluto: il moto assoluto del punto B è di tipo rotatorio attorno ad O_1 (il punto B appartiene alla manovella O_1B).
- moto relativo: è il moto del punto B rispetto alla terna mobile, rettilineo secondo la direzione X_1 della terna mobile $X_1O_1Y_1$.

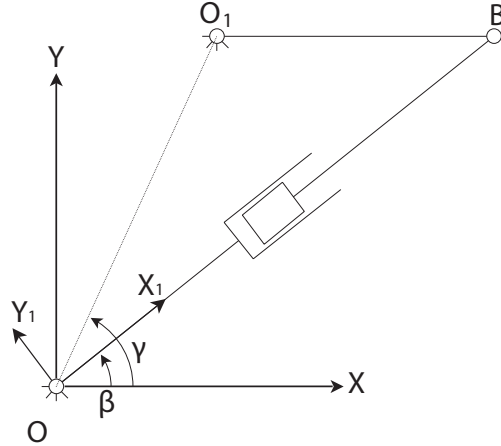


Figura 6.3: Posizionamento terna mobile

- moto di trascinamento: è il moto del punto B pensato solidale all'asse X_1 della terna relativa in moto rotatorio attorno ad O ; e risulta quindi essere rotatorio.

Prima di passare al calcolo delle velocità con il metodo delle terne relative è necessario ricavare l'angolo β dell'asta BO . Il valore di β può essere ricavato da semplici relazioni trigonometriche imponendo, ad esempio, l'uguaglianza della componente verticale dei vettori \vec{c} e \vec{b} , essendo l'asta O_1B orizzontale per l'atto di moto considerato.

$$c \sin \gamma = b \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{c}{b} \sin \gamma\right) = 0,27 \text{ rad} \quad (6.13)$$

Per le velocità, dal teorema di Galileo discende che: $\vec{v}_B^{(ass)} = \vec{v}_B^{(tr)} + \vec{v}_B^{(rel)}$, dove:

- $\vec{v}_B^{(Ass)}$ è la velocità assoluta del punto B , $\vec{\omega}_{O_1B} \wedge (B - O_1)$.
- $\vec{v}_B^{(Tr)}$ è la velocità di trascinamento del punto B , $\vec{\omega}_{OB} \wedge (B - O)$.
- $\vec{v}_B^{(Rel)}$ la velocità relativa del punto B , \dot{x}_1 .

E' possibile separare il modulo e la direzione di ciascun vettore secondo quanto riportato in Tabella 6.3.

Sono note le direzioni di ciascun vettore e la velocità di sfilo \dot{x}_1 , mentre sono incognite le velocità angolari $\vec{\omega}_{OB}$ e $\vec{\omega}_{O_1B}$ delle aste OB e O_1B . Sfruttando le informazioni note è possibile effettuare una rappresentazione grafica del polinomio di chiusura delle velocità, così come riportato in Figura 6.4.

	$\vec{v}_B^{(Ass)}$	$\vec{v}_B^{(Tr)}$	$\vec{v}_B^{(Rel)}$
Modulo	$\vec{\omega}_{O_1B}(BO_1)$	$\vec{\omega}_{OB}(BO)$	\dot{x}_1
Direzione	$\perp O_1B$	$\perp BO$	$\parallel BO$

Tabella 6.3: Componenti vettoriali equazione di chiusura delle velocità

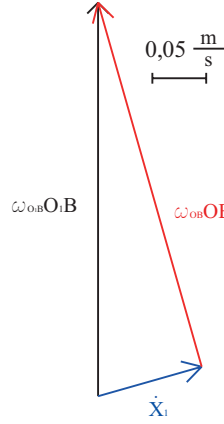


Figura 6.4: Poligono di chiusura sulle velocità

E' quindi possibile ritrovare per ciascun vettore velocità una analogia con l'equazione di chiusura scritta con notazione complessa (vedi 6.14).

$$\begin{aligned}\vec{v}_B^{(a)} &= a\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \\ \vec{v}_B^{(tr)} &= b\dot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} \\ \vec{v}_B^{(rel)} &= \dot{b}e^{i\beta}\end{aligned}\tag{6.14}$$

$$\omega_{O_1B} = \frac{|v_B^{ass}|}{O_1B} = \dots \frac{rad}{s}\tag{6.15}$$

$$\omega_{OB} = \frac{|v_B^{tr}|}{OB} = \dots \frac{rad}{s}\tag{6.16}$$

Vettorialmente è possibile scrivere:

$$\vec{\omega}_{O_1B} = \dots \vec{k}\tag{6.17}$$

$$\vec{\omega}_{OB} = \dots \vec{k}\tag{6.18}$$

Dal verso di v_B^{tr} e v_B^{ass} si può ricavare il verso delle velocità angolari.

6.3 Soluzione del quesito 2

6.3.1 Con i numeri complessi

Per ricavare le accelerazioni si deriva rispetto al tempo l'equazione (6.7), oppure in modo analogo il sistema di equazioni (6.8).

$$a\ddot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} = \ddot{b}e^{i\beta} + 2\dot{b}\dot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} + b\ddot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} - b\dot{\beta}^2e^{i\beta} \quad (6.19)$$

Proiettando l'equazione complessa (6.19) sui due assi reale ed immaginario e isolando i termini noti, è possibile giungere al seguente sistema di equazioni nelle due incognite $\ddot{\alpha}$ e $\ddot{\beta}$.

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha}\sin\alpha + b\ddot{\beta}\sin\beta = a\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \ddot{b}\cos\beta - 2\dot{b}\dot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta \\ a\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\ddot{\beta}\cos\beta = a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \ddot{b}\sin\beta + 2\dot{b}\dot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta \end{cases} \quad (6.20)$$

Il sistema (6.20) può essere riscritto nella seguente forma matriciale.

$$\begin{bmatrix} -a\sin\alpha & b\sin\beta \\ a\cos\alpha & -b\cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \ddot{b}\cos\beta - 2\dot{b}\dot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta \\ a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \ddot{b}\sin\beta + 2\dot{b}\dot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

Prima di procedere con la risoluzione numerica del sistema (6.21) si nota come la matrice dei coefficienti del sistema sia la medesima del sistema (6.9) scritto per il calcolo delle due velocità $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$. Utilizzando il metodo di Cramer per la risoluzione del sistema di equazioni è possibile riutilizzare il valore precedentemente calcolato per $\det[A]$ per il quale il sistema (6.20) ammette la seguente soluzione numerica.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,04 \text{ rad/s}^2 \\ 0,025 \text{ rad/s}^2 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

6.3.2 Con i moti relativi

Per il calcolo dell'accelerazione del centro del disco è possibile ricorrere all'utilizzo del teorema di Coriolis sotto riportato.

$$\vec{a}_B^{(Ass)} = \vec{a}_B^{(Tr)} + \vec{a}_B^{(Rel)} + \vec{a}_B^{(Co)} \quad (6.23)$$

dove:

- $\vec{a}_B^{(Ass)}$ è l'accelerazione assoluta del punto B , avente una componente normale $\vec{a}_{Bn}^{(Ass)} = \vec{\omega}_{O_1B} \wedge \vec{\omega}_{O_1B} \wedge (B - O_1)$ e una tangenziale $\vec{a}_{Bt}^{(Ass)} = \vec{\omega}_{O_1B} \wedge (B - O_1)$ (perché il moto assoluto è rotatorio).

- $\vec{a}_B^{(Tr)}$ è l'accelerazione di trascinamento del punto B , avente una componente normale $\vec{a}_{Bn}^{(Tr)} = \vec{\omega}_{OB} \wedge \vec{\omega}_{OB} \wedge (B - O)$ e una tangenziale $\vec{a}_{Bt}^{(Tr)} = \vec{\omega}_{OB} \wedge$ (perché il moto di trascinamento è rotatorio).
- $\vec{a}_B^{(Rel)}$ è l'accelerazione relativa del punto B , $\ddot{x}_1 \vec{i}_1$.
- $\vec{a}_B^{(Co)} = 2\vec{\omega}_{O_1B} \wedge \vec{v}_B^{(rel)}$ è l'accelerazione di Coriolis, calcolata in base alla velocità angolare della terna mobile $\vec{\omega}_{O_1B}$ e della velocità relativa $\vec{v}_B^{rel} = \dot{x}_1 \vec{i}_1$.

E' possibile, anche in questo caso, separare il modulo e la direzione di ciascun vettore, ottenendo quanto riportato in Tabella 6.4; oppure è possibile fornire una rappresentazione grafica del polinomio di chiusura delle velocità, così come riportato in Figura 6.5.

	$\vec{a}_{Bn}^{(Ass)}$	$\vec{a}_{Bt}^{(Ass)}$	$\vec{a}_{Bn}^{(Tr)}$	$\vec{a}_{Bt}^{(Tr)}$	$\vec{a}_B^{(Rel)}$	$\vec{a}_B^{(Cor)}$
Modulo	$\omega_{O_1B}^2(O_1B)$	$\dot{\omega}_{O_1B}(O_1B)$	$\omega_{OB}^2(OB)$	$\dot{\omega}_{OB}(OB)$	\ddot{x}_1	$2\omega_{O_1B}\dot{x}_1$
Direzione	$\parallel O_1B$	$\perp O_1B$	$\parallel OB$	$\perp OB$	$\parallel OB$	$\perp OB$

Tabella 6.4: Componenti vettoriali accelerazioni (eq. di chiusura)

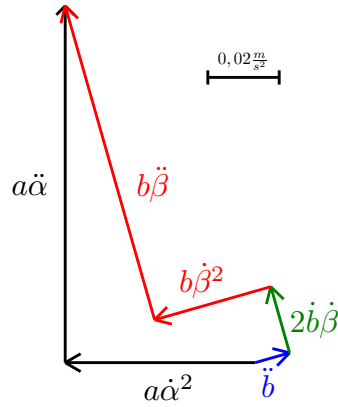


Figura 6.5: Poligono di chiusura sulle accelerazioni

E' quindi possibile scrivere per ciascun termine della Tabella 6.4 l'analogia con i termini scritti in notazione complessa 6.24.

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{Bn}^{(Ass)} &= -a\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} \\
\vec{a}_{Bt}^{(Ass)} &= a\ddot{\alpha} e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \\
\vec{a}_{Bn}^{(Tr)} &= -b\dot{\beta}^2 e^{i\beta} \\
\vec{a}_{Bt}^{(Tr)} &= b\ddot{\beta} e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} \\
\vec{a}_B^{(Rel)} &= \ddot{b} e^{i\beta} \\
\vec{a}_B^{(Co)} &= 2\dot{b}\dot{\beta} e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\dot{\omega}_{O_1B} = \frac{|a_B^{ass}|}{O_1B} = \dots \frac{rad}{s^2} \tag{6.25}$$

$$\dot{\omega}_{OB} = \frac{|a_B^{tr}|}{OB} = \dots \frac{rad}{s^2} \tag{6.26}$$

Vettorialmente è possibile scrivere:

$$\vec{\omega}_{O_1B} = \dots \vec{k} \tag{6.27}$$

$$\vec{\omega}_{OB} = \dots \vec{k} \tag{6.28}$$

Dal verso di a_B^{tr} e a_B^{ass} si può ricavare il verso delle accelerazioni angolari.