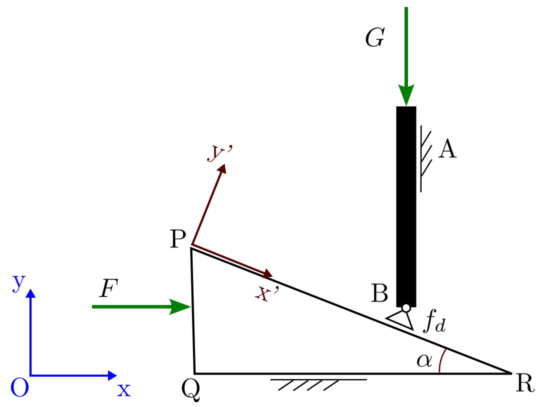
Problema 1.1

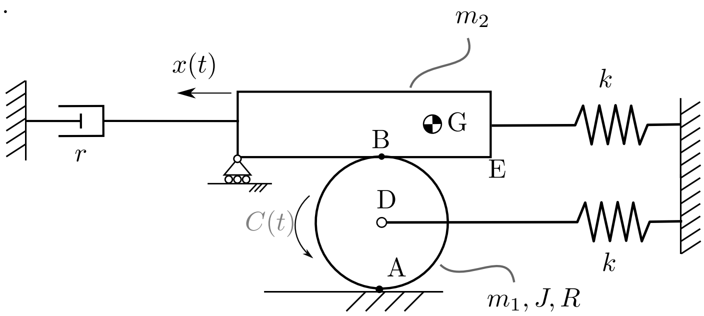
Si consideri la coppia cinematica cuneo-perno in figura. Il cuneo PQR, con piano inclinato di α=30 deg, trasla a velocità assoluta costante $\dot{x}_P = 4m/s$ ed è soggetto alla forza orizzontale F. Il perno AB invece trasla in verticale poiché è vincolato al cuneo mediante un carrello scabro in B (coeff. di attrito dinamico f_d) e a terra attraverso un pattino verticale in A. Inoltre è soggetto alla forza verticale G. Il sistema si muove nel piano orizzontale, quindi non si deve considerare la forza peso. Si chiede di:

1. usando il teorema dei moti relativi, calcolare la velocità assoluta e relativa di B (usando la terna relativa traslante Px'y').
2. calcolare il valore del coefficiente di attrito dinamico f_d tra perno e cuneo, sapendo che $F = 50$ N e $G = 160$ N.



Problema 1.2

Il sistema rappresentato in figura si muove nel piano orizzontale ed è composto da 2 corpi rigidi: 1 disco omogeneo di massa m_1, momento di inerzia baricentrale J e raggio R; un corpo rigido rettangolare di massa m_2. I corpi sono soggetti ai seguenti vincoli cinematici: carrello orizzontale in E; contatto di puro rotolamento in B e A. Si utilizza la coordinata $x(t)$, traslazione del rettangolo, per descrivere il grado di libertà del sistema. Quando $x(t) = 0$ il sistema si trova in equilibrio statico con le molle indeformate. Il rettangolo, che trasla in orizzontale, è connesso a terra anche tramite uno smorzatore lineare di caratteristica r e tramite una molla di rigidezza k. Inoltre, un'altra molla di rigidezza k collega a terra il centro del disco D. Il disco è soggetto ad una coppia $C(t) = C_0 \cos(\Omega t)$.

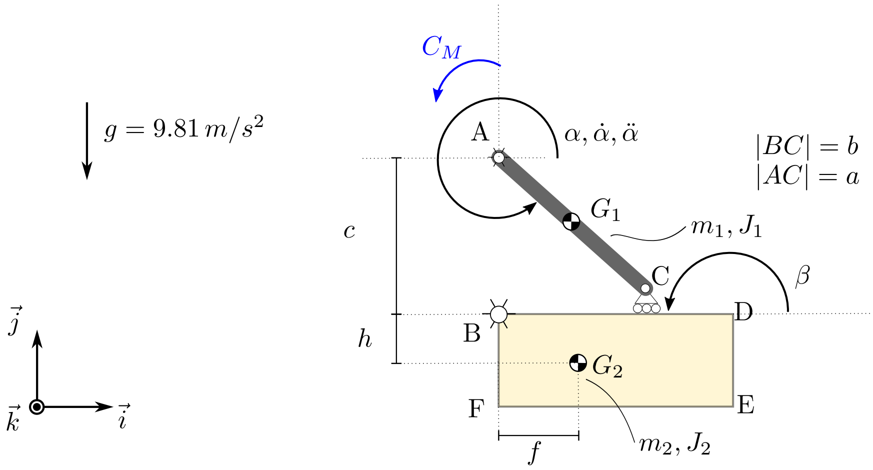


Si chiede di calcolare simbolicamente:

1. l'equazione di moto del sistema, usando come coordinata libera $x(t)$.
2. la pulsazione propria del sistema non smorzato ω_0 ed il coefficiente di smorzamento h
3. il valore numerico del modulo del coefficiente di amplificazione dinamica $|X_0/X_{st}|$, quando $\Omega/\omega_0 = 2$ e $h = 0.1$

Problema 2

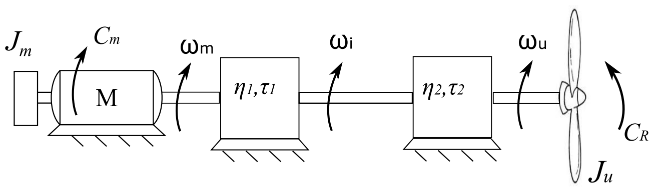
Il sistema articolato rappresentato in figura è costituito da 2 corpi rigidi: l'asta uniforme AC (baricentro G_1, massa m_1, momento di inerzia baricentrale J_1, lunghezza a) e il corpo rettangolare BFED (baricentro G_2, massa m_2, momento di inerzia baricentrale J_2), L'asta è incernierata a terra in A e vincolata con un carrello (di dimensioni trascurabili) al corpo rettangolare, mentre il corpo rettangolare è incernierato a terra in B. Una coppia esterna C_M (incognita) è applicata all'asta AC. Il sistema si muove nel piano verticale ed è soggetto alla forza di gravità. Nell'atto di moto raffigurato è nota la configurazione del sistema ($\alpha, \beta, |BC| = b$) e i valori di $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$.



Per l'atto di moto raffigurato, si chiede svolgere simbolicamente i seguenti calcoli:

1. calcolare la velocità e l'accelerazione angolare del corpo rettangolare, $\vec{\omega}_2$ e $\dot{\vec{\omega}}_2$;
2. calcolare la velocità e l'accelerazione di G_1 e G_2;
3. calcolare il valore di C_M, applicando il teorema dell'energia cinetica;
4. calcolare le reazioni vincolari in B.

Problema 3



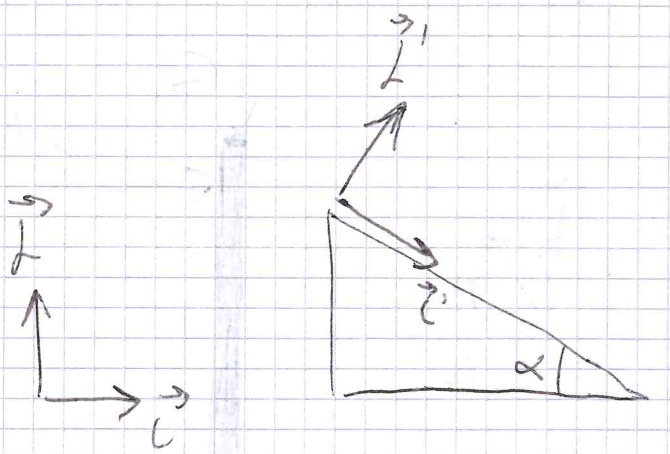
J_u	10	Kgm^2
J_m	1	Kgm^2
C_0	20	Nm
ω_s	40	rad/s
A	2	Nm
B	0.2	$Nm/(rad/s)^2$
$\tau_1 = \omega_i/\omega_m$	0.6	
$\tau_2 = \omega_u/\omega_i$	0.5	
η_{D1}	0.8	
η_{R1}	0.7	
η_{D2}	0.85	
η_{R2}	0.75	

Il sistema MTU in figura è costituito da un motore di caratteristica lineare $C_m(\omega_m) = C_0(1 - \omega_m/\omega_s)$ ed un utilizzatore che genera una coppia resistente funzione quadratica della velocità angolare $C_R = A + B\omega_u^2$ (la coppia resistente C_R ha sempre verso opposto alla velocità di rotazione). Motore e utilizzatore sono collegati da un doppio stadio di trasmissione con rapporti di trasmissione τ_1 e τ_2, rendimenti diretto η_{D1} e η_{D2} e retrogrado η_{R1}, η_{R2}. Considerando i dati numerici in tabella, e discutendo per ciascun punto la condizione di moto diretto o retrogrado, si calcolino:

1. la velocità di regime;
2. l'accelerazione ω_m, nell'ipotesi di annullare istantaneamente la coppia motrice Cm a partire dalla velocità di regime precedentemente calcolata (con l'inerzia J_m che rimane collegata);
3. con riferimento alla condizione di moto del punto 1, il momento torcente (azione interna) C^* dell'albero tra le due trasmissioni, che ruota con velocità angolare ω_i.

SOLUZIONI

P 1.1



1) $\vec{V}_B = \vec{V}_{TR} + \vec{V}_{REL}$

CON

$\vec{V}_B = \dot{y}_B \vec{j}$ INCOGNITA

$\vec{V}_{TR} = \dot{x}_P \vec{i}$ NOTA

$\vec{V}_{REL} = \dot{x}'_B \vec{i}'$ INCOGNITA

INOLTRE SAPPIAMO CHE

$$\vec{i}' = \cos\alpha\, \vec{i} - \sin\alpha\, \vec{j}$$

QUINDI

$$\dot{y}_B \vec{j} = \dot{x}_P \vec{i} + \dot{x}'_B (\cos\alpha\, \vec{i} - \sin\alpha\, \vec{j})$$

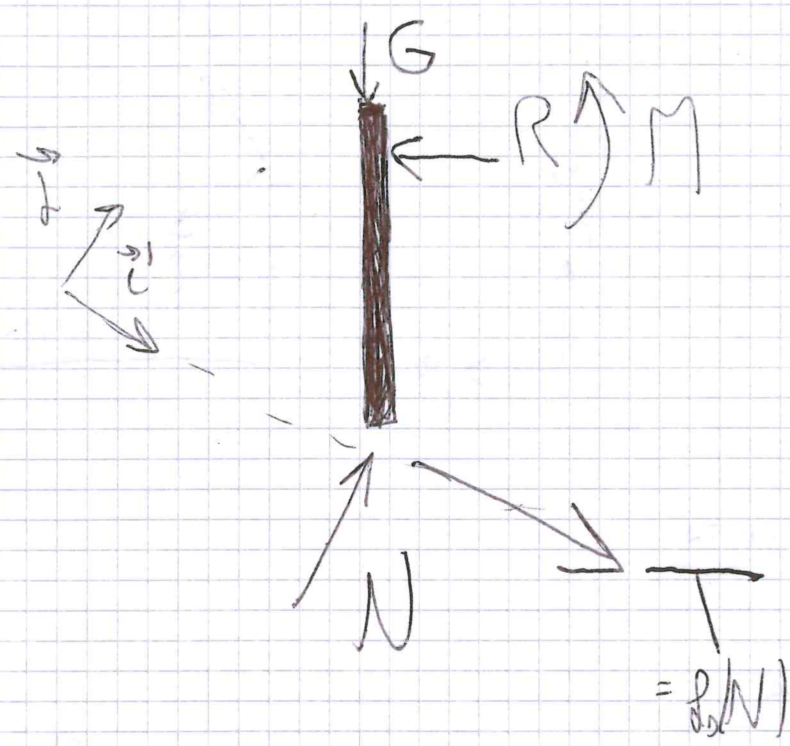
$$\begin{cases} \dot{y}_B = -\dot{x}'_B \sin\alpha & \longrightarrow \dot{y}_B = \dot{x}_P \operatorname{tg}\alpha \\ 0 = \dot{x}_P + \dot{x}'_B \cos\alpha & \longrightarrow \dot{x}'_B = \dfrac{-\dot{x}_P}{\cos\alpha} \end{cases}$$

2) BILANCIO DI POTENZE

$$F\dot{x}_P - G\dot{y}_B - f_D |N| \dot{x}'_B = 0$$

con N reazione del carrello
NORMALE

CALCOLO N



$\vec{T}$ OPPOSTA A $\vec{V}_{REL}$

QUINDI

$\vec{V}_{REL} = -\frac{\dot{x}_P}{\cos\alpha}\,\vec{i}'$

$\vec{T} = -f_D|N|\,\frac{\left(-\frac{\dot{x}_P}{\cos\alpha}\right)}{\frac{\dot{x}_P}{\cos\alpha}}\,\vec{i}'$

$= f_D|N|\,\vec{i}'$

EQ IN DIREZIONE VER

$-G + N\cos\alpha - f_D|N|\sin\alpha = 0$

$h_p\ N > 0$

$N = \frac{G}{\cos\alpha - f_D \sin\alpha}$

$\underbrace{F\dot{x}_P - G\dot{y}_B}_{A} - f_D \frac{G}{\cos\alpha - f_D\sin\alpha}\dot{x}_B' = 0$

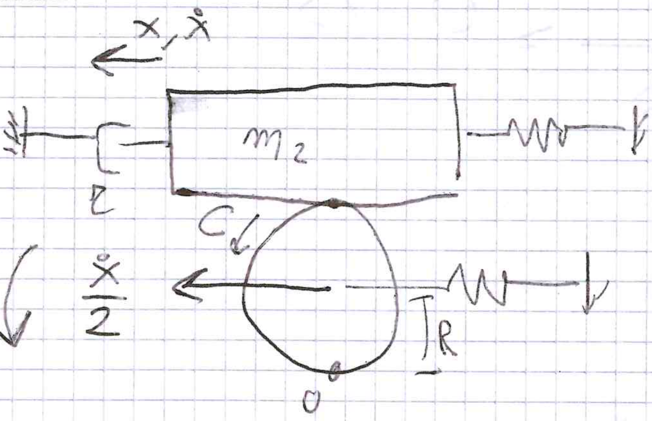
$$A\left(\cos\alpha - f_D \sin\alpha\right) - f_D\, G\dot{x}_B'^{\,} = 0$$

$$-f_D\left(A\sin\alpha + G\dot{x}_B'\right) = -A\cos\alpha$$

$$f_D = \frac{A\cos\alpha}{A\sin\alpha + G\dot{x}_B'} = 0.178$$

(VERIFICO $N = 206$ NEWTON > 0) OK

P 1.2



$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{2R}$ $\quad \frac{\dot{x}}{2}$

$$E_c = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + J\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 + m_2\dot{x}^2\right] = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m_1}{4} + m_2 + \frac{J}{4R^2}\right)}_{m^*}\dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}K\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(K\frac{5}{4}\right)}_{K^*}x^2$$

$$D = \frac{1}{2}r\dot{x}^2 \qquad \delta L = C\,\delta\theta = \frac{C}{2R}\,\delta x$$

$$m^* \ddot{x} + 2\dot{x} + k^* x = \frac{C}{2R}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \qquad h = \frac{2}{2 m^* \omega_0}$$

3)

$$X_{ST} = \frac{C}{2R\,k^*} \qquad a = 2$$

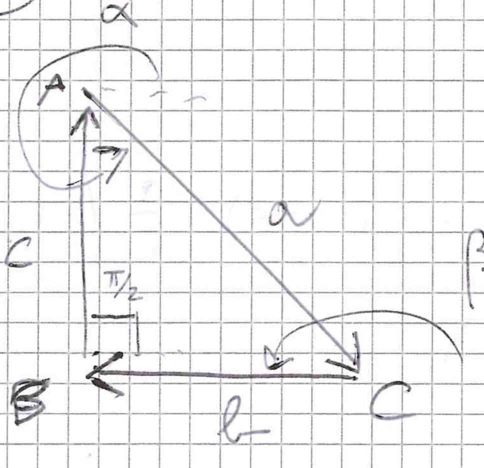
$$\left|\frac{X_0}{X_{ST}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + (4 \cdot 0.1)^2}}$$

$$= \frac{1}{3.027} = 0.33$$

SOLUZIONE

1

1



α COORD LIBERA

a, c COSTANTI

b, β VARIABILI

$$(A-B)+(B-C)+(C-A)=0$$

$$\begin{cases} 0 + b\cos\beta + a\cos\alpha = 0 \\ c + b\sin\beta + a\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ d/dt

$$\begin{cases} \dot{b}\cos\beta + b\dot{\beta}\sin\beta(-1) + a\dot{\alpha}(-\sin\alpha) = 0 \\ \cancel{\dot{c}} + \dot{b}\sin\beta + b\dot{\beta}\cos\beta + a\dot{\alpha}\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{\beta}, \dot{b}$$

con $\cos\beta = -1$
$\sin\beta = 0$

$\Downarrow$ d/dt

$$\begin{cases} \ddot{b}\cos\beta - 2\dot{b}\dot{\beta}\sin\beta - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta - a\ddot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha = 0 \\ \ddot{b}\sin\beta + 2\dot{b}\dot{\beta}\cos\beta + b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta + a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{\beta}, \ddot{b}$$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\beta}\,\vec{K}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\beta}\,\vec{K}$$

(2) $$\vec{V}_{G1} = \dot{\alpha}\,K \wedge (G_1 - A) \qquad \text{con } (G_1 - A) = \frac{a}{2}\left(\cos\alpha\, i + \sin\alpha\, j\right)$$

$$\vec{a}_{G1} = \ddot{\alpha}\,K \wedge (G_1 - A) - \dot{\alpha}^2 (G_1 - A)$$

$$\vec{V}_{G2} = \dot{\beta}\,\vec{K} \wedge (G_2 - B) \qquad \text{cos } (G_2 - B) = f\,\vec{i} - h\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_G = \ddot{\beta}\,\vec{K} \wedge (G_2 - B) - \dot{\beta}^2 (G_2 - B)$$

(3) $$W = \vec{C}_m \cdot \dot{\vec{\alpha}} + m_1 \vec{g} \cdot \vec{V}_{G1} + m_2 \vec{g} \cdot \vec{V}_{G2}$$

$$= C_m \dot{\alpha} - m_1 g\, V_{Gy} - m_2 g\, V_{G2y}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_{G1} \cdot \vec{V}_{G1} + \frac{1}{2} J_1 \dot{\vec{\alpha}} \cdot \dot{\vec{\alpha}} +$$

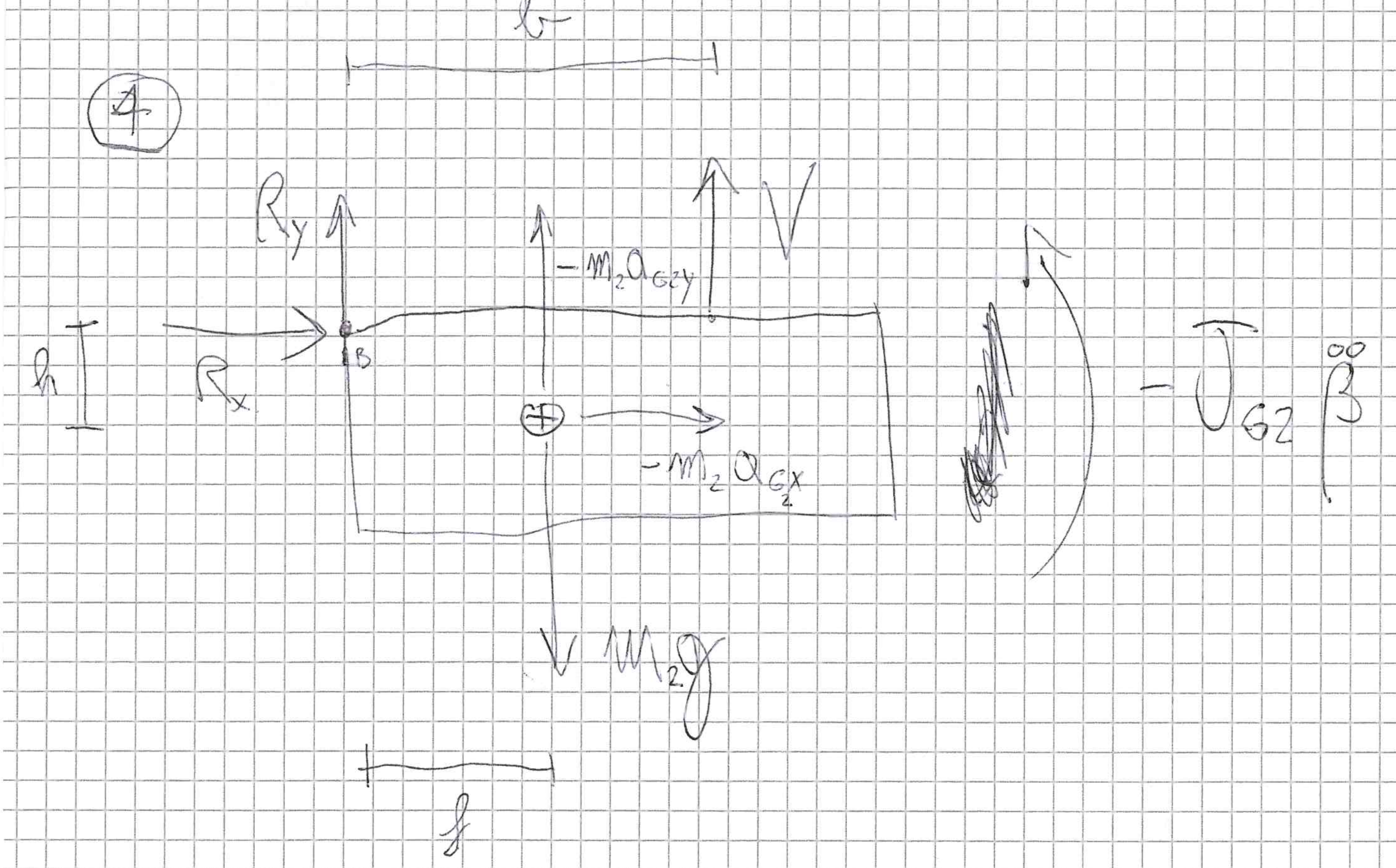
$$+ \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_{G2} \cdot \vec{V}_{G2} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = m_1 \left(V_{G1x}\, a_{G1x} + V_{G1y} \cdot a_{G1y} \right) + J_1 \dot{\alpha} \ddot{\alpha}$$

$$+ m_2 \left(a_{G2x} V_{G2x} + a_{G2y} V_{G2y} \right) + J_2 \ddot{\beta} \dot{\beta}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = W \rightarrow C_m \quad \text{UNICA INCOGNITA}$$

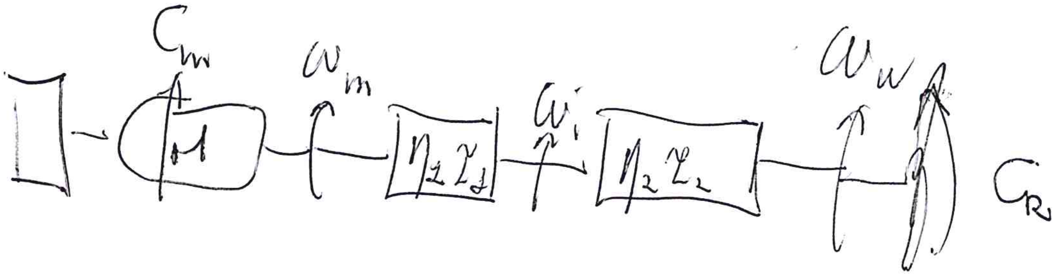
4



$$\begin{cases} \Sigma F_x & R_x = m_2 a_{G2x} \\ \Sigma F_y & R_y + V - m_2 a_{G2y} - m_2 g = 0 \\ \Sigma M_B & -J_2\ddot{\beta} + Vb - m_2 a_{G2y} f - m_2 g f - m_2 a_{G2x} h = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ RICAVO R_x, R_y, V

$$\vec{R}_B = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$



MOTO DIRETTO

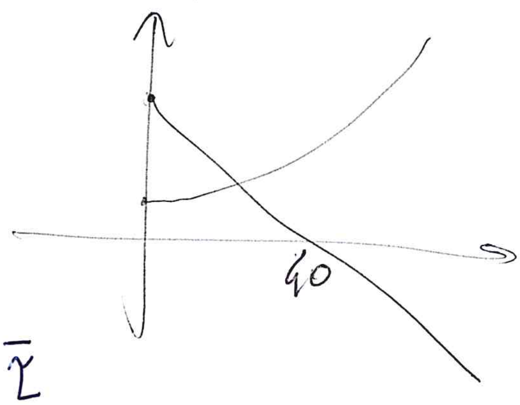
$$W_m = C_m\omega_m \qquad \omega_u = \bar{\tau}\,\omega_m$$

$$W_p = -\left(1-\bar{\eta}_D\right)C_m\omega_m$$

$$W_u = -C_R\,\omega_u = -\left(A + B\omega_u^2\right)\omega_u$$

$$\cancel{C_m\omega_m} - \left(\cancel{1} - \bar{\eta}_D\right)C_m\cancel{\omega_m} - \left(A + B\bar{\tau}^2\omega_m^2\right)\bar{\tau}\cancel{\omega_m} = 0$$

$$\begin{cases} \bar{\eta}_D C_m(\omega_m) = \left(A + B\bar{\tau}^2\omega_m^2\right)\bar{\tau} \\ C_m = C_0 - \dfrac{C_0}{\omega_s}\omega_m \end{cases}$$



$$\bar{\eta}_D\left(C_0 - \frac{C_0}{\omega_s}\omega_m\right) = \left(A + B\bar{\tau}^2\omega_m^2\right)\bar{\tau}$$

$$\bar{\eta}_D C_0 - \bar{\eta}_D\frac{C_0}{\omega_s}\omega_m = \left(A + B\bar{\tau}^2\omega_m^2\right)\bar{\tau}$$

$$-\bar{\eta}_D C_0 + A\bar{\tau} + \bar{\eta}_D\frac{C_0}{\omega_s}\omega_m + B\bar{\tau}^3\omega_m^2 = 0$$

$$\cancel{\eta_D C_0 - A = \omega_m\left(\eta_D\frac{C_0}{\omega_s} + B\bar{\tau}^2\omega_m\right)}$$

$$\omega_m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{rad}{s} \quad 26{,}81$$

$$\omega_u = \cancel{5{,}29}\ \frac{rad}{s} \quad 8{,}0445$$

5.2

$W_m = C_m = 0$ MOTO DIRETTO

$$W_u = -C_R \omega_u = -\left(A + B\omega_u^2\right)\omega_u$$

$$W_p = -\left(1 - \overline{\eta}_D\right)\left(-J_m \omega_m \dot{\omega}_m\right)$$

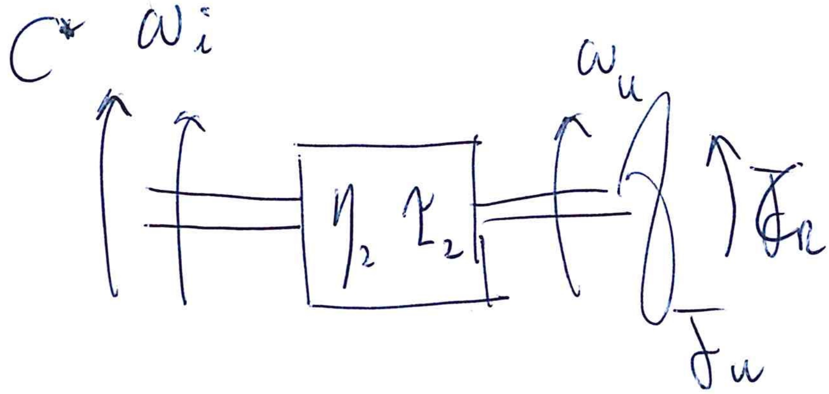
$$E_c = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_u \omega_u^2$$

$$-\left(\cancel{1} - \overline{\eta}_D\right)\left(-J_m \omega_m \dot{\omega}_m\right) - \left(A + B\omega_u^2\right)\omega_u = \cancel{J_m \omega_m} \dot{\omega}_m + J_u \omega_u$$

$$-\left(A + B\omega_u^2\right)\cancel{\omega}_u = \overline{\eta}_D J_m \frac{\cancel{\omega}_u \cdot \dot{\omega}_u}{\overline{\tau}^2} + J_u \cancel{\omega}_u \dot{\omega}_u$$

$$\dot{\omega}_u \left(\frac{\overline{\eta}_D J_m}{\overline{\tau}^2} + J_u\right) = -\left(A + B\omega_{u,REG}^2\right)$$

3.3



$$\cancel{C^* \omega_i} - (\cancel{1} - \eta_2) C^* \omega_i - C_R \omega_u = 0$$

$$\eta_2 C^* \frac{\cancel{\omega_u}}{\tau_2} - \left(A + B\omega_{u,REG}^2\right)\cancel{\omega_u} = 0$$

$$C^* = \frac{\tau_2}{\eta_2}\left(A + B\omega_{u,REG}^2\right)$$