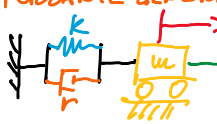
Lezione lunedì 23 novembre 2020

lunedì 23 novembre 2020 10:23

SISTEMI VIBRANTI 1 G.d.L. CON FORZAMENTO

- SISTEMI CON FORZANTE COSTANTE
- SISTEMI CON FORZANTE ARMONICA → $F_0 \cos \Omega t$, $Re\left(F_0 e^{i\Omega t}\right)$ → RISONANZA, RISPOSTA IN FREQUENZA
- SISTEMI CON FORZANTI PERIODICHE

FORZANTE GENERICA



EQ. MOTO DEL SISTEMA

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

FORZANTE (FUNZIONE SOLO DEL TEMPO)

EQ DIFFERENZIALE .... NON OMOGENEA

SOLUZIONE $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

$x_p(t)$: INTEGRALE PARTICOLARE: DIPENDE DAL TIPO DI FORZANTE

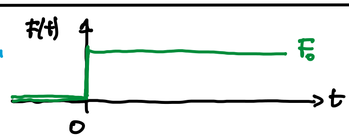
$x_g(t)$: INTEGRALE GENERALE, SOLUZIONE DELL'EQ DI MOTO OMOGENEA $\lim_{t\to\infty} x_g(t) = 0$

EQ. DI MOTO È LINEARE → PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

- IN TRANSITORIO ("t" piccolo): LA SOLUZIONE È CARATTERIZZATA DAL CONTRIBUTO SIA DELL'INTEGRALE GENERALE SIA DALL'INTEGRALE PARTICOLARE
- A REGIME ("t" GRANDE) $\lim_{t\to\infty} x_g = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x_p(t)$: L'INTEGRALE PARTICOLARE È LA SOLUZIONE A REGIME

FORZANTE COSTANTE

→ FORZANTE "A GRADINO"



TEORIA EQ. DIFFERENZIALI: $x_p(t) = \text{costante} = X_0$

$\frac{d}{dt}$: $\dot{x}_p(t) = 0$

$\frac{d}{dt}$: $\ddot{x}_p(t) = 0$

SOSTITUISCO NELL'EQ. DI MOTO

$$\cancel{m\ddot{x}} + \cancel{r\dot{x}} + kx = F_0$$

$$kX_0 = F_0$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \delta_{st}$$

SPOSTAMENTO DOVUTO ALL'APPLICAZIONE "STATICA" DELLA FORZANTE

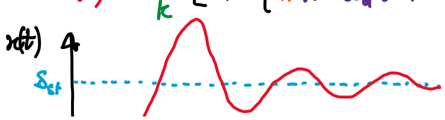
SOLUZIONE EQ. DI MOTO: $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

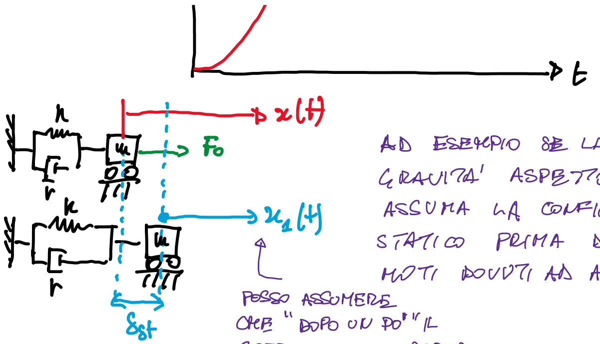
$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A\cos\omega_d t + B \sin\omega_d t\right] + \frac{F_0}{k}$$

PER DETERMINARE A E B IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI; AD ESEMPIO:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(h \sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)e^{-\alpha t}\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{F_0}{k} = \delta_{st}$$





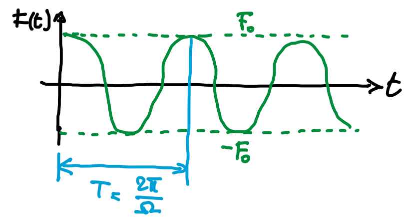
AD ESEMPIO SE LA FORZA COSTANTE È LA GRAVITA' ASPETTO CHE IL SISTEMA ASSUMA LA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO STATICO PRIMA DI STUDIARE ULTERIORI MOTI DOVUTI AD ALTRE FORZANTI

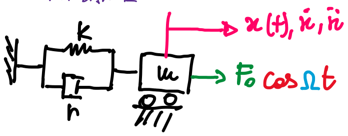
POSSO ASSUMERE CHE "DOPO UN PO'" IL SISTEMA SI MUOVE/REPORE SECONDO IL NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO $x_1(t)$

FORZANTE ARMONICA

- $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

AMPIEZZA DELLA FORZANTE (F_0) — PULSAZIONE DELLA FORZANTE (Ω)





$$x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

AMPIEZZA (X_0) — SOLUZIONE STESSO TIPO DI FUNZIONE — FASE (ϕ)

$$x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$
$$\dot{x}_p(t) = -\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi)$$
$$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$$-m\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi) - r\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi) + k X_0 \cos(\Omega t + \phi) = F_0 \cos \Omega t$$

→ APPLICARE LE FORMULE TRIGONOMETRICHE PER $\cos(\Omega t + \phi)$ E $\sin(\Omega t + \phi)$

→ RACCOGLIERE I TERMINI IN $\cos(\Omega t + \phi)$ E IN $\sin(\Omega t + \phi)$

$$\text{I} \quad \left(-m\Omega^2 \cos\phi - r\Omega \sin\phi + k\cos\phi\right) X_0 \cancel{\cos \Omega t} = F_0 \cancel{\cos \Omega t}$$

$$\text{II} \quad \left(m\Omega^2 \sin\phi - r\Omega \cos\phi - k \sin\phi\right) X_0 \cancel{\sin \Omega t} = 0$$

DALLA II $\quad \tan\phi = -\dfrac{\Omega r}{k - m\Omega^2} \longrightarrow \phi = \tan^{-1}\left(-\dfrac{\Omega r}{k - m\Omega^2}\right) \quad$ III

SOSTITUISCO LA II NELLA I

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \quad \text{IV}$$

FORMA ADIMENSIONALE

DIVIDO IL NUMERATORE ED IL DENOMINATORE

DEFORMATA STATICA

$$X_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\ldots}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\Omega}{\ldots}\right)^2 \left(\frac{r}{\ldots}\right)^2}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1 - \ldots)^2 + 4 \ldots}}$$

DI III E IV PER K

RAPPORTO TRA LE PULSAZIONI

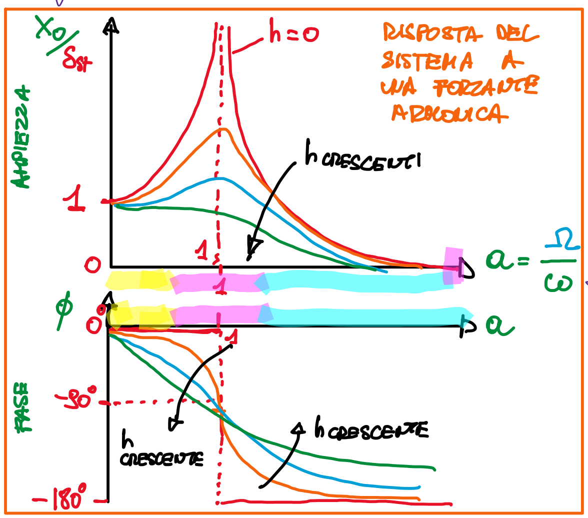
FATTORE DI SMORZAMENTO

COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA

$$\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2+4a^2h^2}}$$

$$\tan\phi = -\frac{cr/k}{(k-m\Omega^2)/k} = -\frac{2\frac{\Omega}{\omega}\frac{r}{r_c}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = -\frac{2ah}{1-a^2}$$

RAPPRESENTAZIONI ADIMENSIONALI DI AMPIEZZA E FASE DELLA RISPOSTA FORZATA $x_p(t) = X_0\cos(\Omega t+\phi)$



PULSAZIONE DELLA FORZANTE

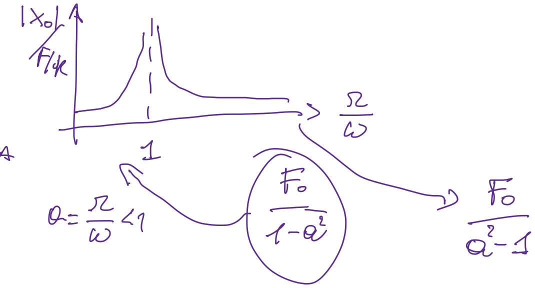
PULSAZIONE NATURALE

SE $h=0$ $\quad \frac{x_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-a^2}$ E SE $a=1 \rightarrow \Omega=\omega$

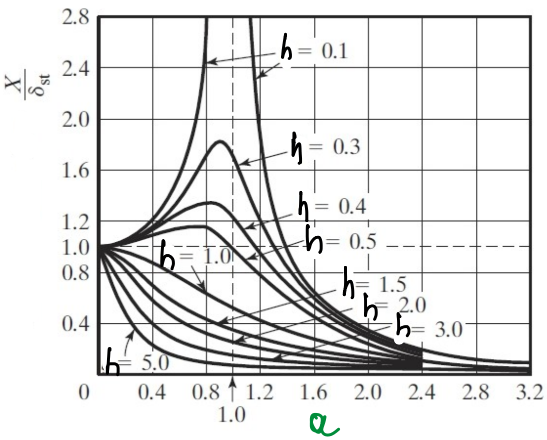
$\lim_{a\to 1} X_0 = \infty$

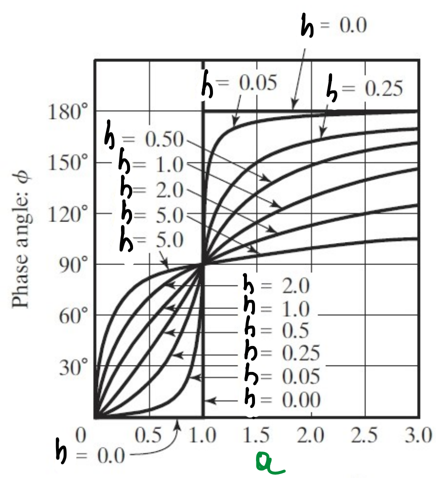
CONDIZIONE DI RISONANZA

$m\ddot{x} + kx = F_0\cos\Omega t$



SE $h=0$ $\quad \tan\phi = 0$ "SALTO DI FASE" IN CORRISPONDENZA DI $\Omega=\omega$





CLASSIFICAZIONE IN "ZONE" DELLA RISPOSTA DEL SISTEMA

- IN TUTTI I CASI: $X_0 = \delta_{st}$ PER $\Omega=0$

$\lim X_0/\delta_{st} = 0$

$a \ll 1 \Rightarrow \Omega \ll \omega$: ZONA QUASI STATICA

$a = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$: ZONA DI RISONANZA

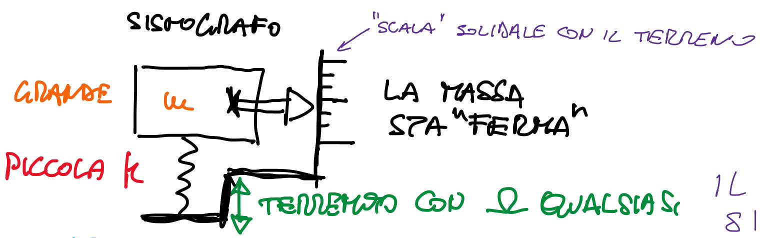
$a \gg 1 \Rightarrow \Omega \gg \omega$: ZONA ELASTICA O SISMOGRAFICA O "SOSPESA"

SE $h \neq 0$ $\phi = -90$ PER $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

SE $h \neq 0$ $\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{2h}$ PER $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

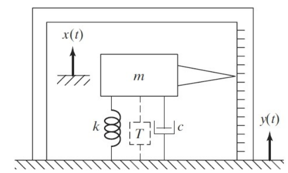
↑ AMPIEZZA DI $x_p(t)$ IN RISONANZA SE $h \neq 0$

SISMOGRAFO



$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ MOLTO PICCOLA

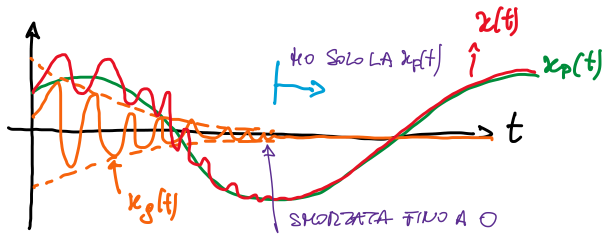
IL TERRENO SI MUOVE

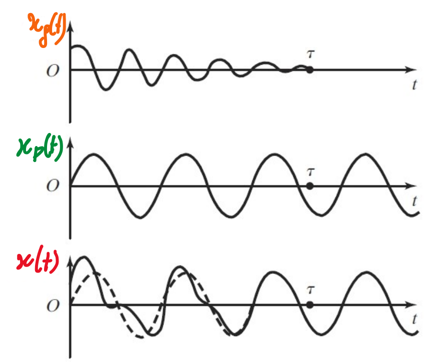


SOLUZIONE DEL SISTEMA

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) + X_0\cos(\Omega t + \phi)$$

↳ DOVRò IMPORRE LA CONDIZIONI INIZIALI PER OTTENERE A E B $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \end{cases}$





- $F(t) = F_0\cos\Omega t = Re(F_0 e^{i\Omega t})$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = Re(F_0 e^{i\Omega t}) \rightarrow x_p(t) = X_0^* e^{i\Omega t}$$

"TRASCURO" DI SCRIVERE L'OPERATORE Re(•) PER LA SOLUZIONE

$\frac{d}{dt}$ $\dot{x}_p(t) = i\Omega X_0^* e^{i\Omega t}$

$\frac{d}{dt}$ $\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0^* e^{i\Omega t}$

$$(-\Omega^2 m + i\Omega r + k) X_0 \cancel{e} = F_0 \cancel{e} \rightarrow X_0 = \frac{}{(-\Omega^2 m + i\Omega r + k)}$$

AVENDO i A DENOMINATORE

↳ POI CALCOLO MODULO E FASE

$$\boxed{|X_0^*| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \qquad \tan\phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2}}$$

← DISEGNO MODULO E FASE ↳ DIAGRAMMI DI BODE

$$x_p(t) = Re\left(X_0^* e^{i\Omega t}\right) = |X_0^*| \cos(\Omega t + \phi)$$

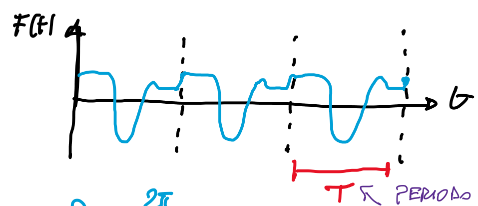
FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

$$G(i\Omega) = \frac{X_0^*}{F_0}$$

SISTEMI CON FORZANTI PERIODICHE

FUNZIONE PERIODICA DEF: $F(t) = F(t+T)$

↳ ESPANSIONE IN SERIE DI FOURIER



$$F(t) = F_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_k \left[A_k \cos(k\Omega_0 t) + B_k \sin(k\Omega_0 t) \right] \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt \qquad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt$$

J.B.J. FOURIER

SISTEMA VIBRANTE CON FORZANTE PERIODICA

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t) = F_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_k \left[A_k \cos(k\Omega_0 t) + B_k \sin(k\Omega_0 t)\right]$$ ← EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE

↓

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$x_p = x_{p_0} + \sum_{1}^{\infty}{}_k x_{p_{C_k}} + \sum_{1}^{\infty}{}_k x_{p_{S_k}}$$

$$m\ddot{x}_{p_0} + r\dot{x}_{p_0} + kx_{p_0} = F_0$$

$$m\ddot{x}_{p_{C_1}} + r\dot{x}_{p_{C_1}} + kx_{p_{C_1}} = A_1 \cos \Omega_0 t$$

$$\vdots$$

$$m\ddot{x}_{p_{C_n}} + r\dot{x}_{p_{C_n}} + kx_{p_{C_n}} = A_n \cos n\Omega_0 t$$

$$m\ddot{x}_{p_{S_1}} + r\dot{x}_{p_{S_1}} + kx_{p_{S_1}} = B_1 \sin \Omega_0 t$$

$$\vdots$$

CIASCUNA EQUAZIONE È LA SOLUZIONE DI 1 SISTEMA VIBRANTE A 1 G.d.L. ECCITATO DA FORZANTE ARMONICA

$$m\ddot{x}_{P_{s_n}} + r\dot{x}_{P_{s_n}} + k\,x_{P_{s_n}} = B_n \sin n\Omega_0 t$$

(NB NELLO SVILUPPO MI SONO FERMATO AL TERMINE "n")

$$|X_0^*| = \frac{A_k}{\sqrt{\left(k - m(k\Omega_0)^2\right)^2 + (k\Omega_0 r)^2}}$$

AUMENTANDO L'ORDINE k DELL'ARMONICA IL MODULO DIMINUISCE A PARITÀ DI AMPIEZZA