Lezione lunedì 19 ottobre 2020

lunedì 19 ottobre 2020 10:11

DINAMICA

↳ METODI PER LO STUDIO DELLA DINAMICA

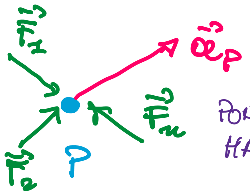
- PRINCIPIO DI D'ALEMBERT → ESTENDE I METODI DELLA STATICA CONSIDERANDO EQUAZIONI DI EQUILIBRIO "DINAMICHE"
  ESTENSIONE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA ALLA DINAMICA INTRODUCENDO FORZE D'INERZIA (FORZE E COPPIE)
- METODI "ENERGETICI" PRINCIPI DI TIPO CONSERVATIVO
  - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
  - BILANCIO DI POTENZE / EQUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA
  - EQUAZIONE DI LAGRANGE

PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

– II PRINCIPIO DELLA DINAMICA

PER UN PUNTO

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (*)$$



PUNTO MATERIALE HA MASSA m

COME È SCRITTA NON È UN'EQ. DI EQUILIBRIO (TERMINE A DX DELL' "=" PARI A 0)

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$$

DEFINISCO QUESTO "PRODOTTO" COME FORZA D'INERZIA

LA (*) DIVENTA $\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a} = \boxed{\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{in} = 0}$ UN'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO

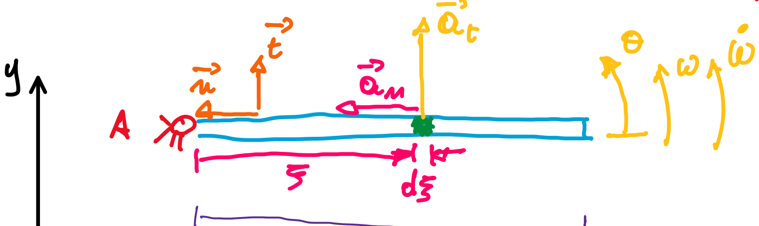
LA FORZA D'INERZIA È CONSIDERATA DAI FISICI UNA FORZA "APPARENTE"

D'ALEMBERT

– APPLICAZIONE AD 1 CORPO RIGIDO

↳ SISTEMA EQUIVALENTE DELLE FORZE D'INERZIA (1 FORZA + 1 COPPIA PER C.R.)

ESEMPIO: TRAVE INCERNIERATA IN A (MOTO ROTATORIO)



DATI: TRAVE È OMOGENEA

$$dm = m\frac{d\xi}{L}$$

MASSA ELEMENTO

MASSA TOTALE

$O \quad x$ $\quad L \quad d\xi$

$\theta, \; \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot\theta, \; \dot\omega = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot\theta$

PER DEFINIZIONE DI FORZA D'INERZIA, LA FORZA D'INERZIA DELL'ELEMENTO $d\xi$ È:

$$d\vec F_{in} = -dm\,\vec a$$

DEVO DETERMINARE $\vec a = \vec a_n + \vec a_t$

$\vec a_t(\xi) = \xi\ddot\theta\vec t$ COMPONENTE TANGENTE DELL'ACCELERAZIONE $\rightarrow$ $d\vec F_{in_t}(\xi) = -dm\,\vec a_t(\xi) = -m\frac{d\xi}{L}\xi\ddot\theta\vec t$

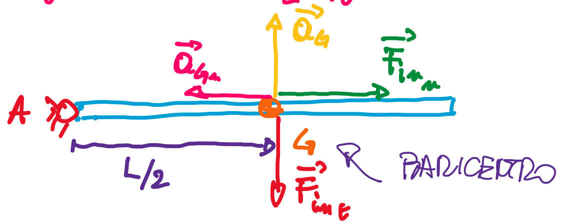
$\vec a_n(\xi) = \xi\dot\theta^2\vec n$ COMPONENTE NORMALE DELL'ACCELERAZIONE $\rightarrow$ $d\vec F_{in_n}(\xi) = -dm\,\vec a_n(\xi) = -m\frac{d\xi}{L}\xi\dot\theta^2\vec n$

COMPONENTI INFINITESIME DELLA FORZA D'INERZIA

$$\vec F_{in_t} = \int_0^L d\vec F_{in_t}(\xi) = -\frac{m\ddot\theta}{L}\int_0^L \xi\,d\xi\,\vec t = -m\underbrace{\boxed{\frac{L}{2}\ddot\theta\vec t}}_{\vec a_{Gt}}$$

$$\vec F_{in_n} = \int_0^L d\vec F_{in_n}(\xi) = -\frac{m\dot\theta^2}{L}\int_0^L \xi\,d\xi\,\vec n = -m\underbrace{\boxed{\frac{L}{2}\dot\theta^2\vec n}}_{\vec a_{Gn}}$$

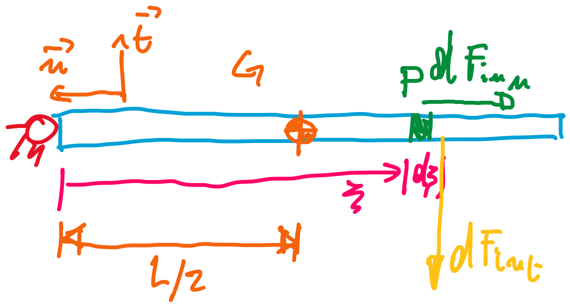
ACCELERAZIONE DI UN PUNTO POSTO A $L/2$ NELLA TRAVE $\Rightarrow$ BARICENTRO DELLA TRAVE



$$\left.\begin{aligned}\vec F_{in_t} &= -m\vec a_{Gt}\\ \vec F_{in_n} &= -m\vec a_{Gn}\end{aligned}\right\} \vec F_{in} = -m\vec a_G$$

RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA DI TUTTO IL CORPO RIGIDO È PARI ALL'ACCELERAZIONE DEL BARICENTRO PER LA MASSA DEL C.R. E VERSO OPPOSTO ALL'ACCELERAZIONE

COPPIA RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA (INFINITESIME)



MOMENTO DELLE $d\vec F_{in}$ RISPETTO AL BARICENTRO G

$d\vec F_{in_t} = -m\frac{d\xi}{L}\xi\ddot\theta\vec t$

$$\vec C_{in} = \int_0^L (P-G)\wedge d\vec F_{in} = \int_0^L (P-G)\wedge d\vec F_{in_t} =$$

$$= -\frac{m\ddot\theta}{L}\int_0^L \xi\left(\xi - \frac{L}{2}\right)d\xi\,\vec K =$$

$(P-G) = \left(\xi - \frac{L}{2}\right)\vec n$

$$= -\boxed{m}\,\ddot{\theta}\,\boxed{\frac{L^2}{12}}\,\vec{k} =$$ → MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO DELLA TRAVE J_G

$$\doteq -J_G\,\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

RISULTANTE DELLE COPPIE D'INERZIA È PARI AD UNA COPPIA DATA DA MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO PER ACCELERAZIONE ANGOLARE DEL CORPO RIGIDO, VERSO OPPOSTO ALL'ACCELERAZIONE E DIREZIONE ⊥ PIANO

PER OGNI CORPO RIGIDO:

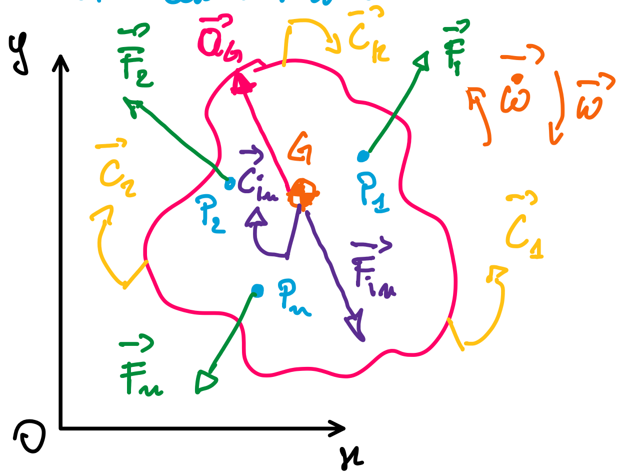
SISTEMA EQUIVALENTE DELLE FORZE D'INERZIA

MASSA DEL C.R.

$$\begin{cases} \vec{F}_{in} = -\boxed{m}\,\vec{a}_G \\ \vec{C}_{in} = -\boxed{J_G}\,\ddot{\vec{\theta}} = -J_G\,\dot{\vec{\omega}} \end{cases}$$

COME LA MASSA È DISTRIBUITA ATTORNO AL BARICENTRO → MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO

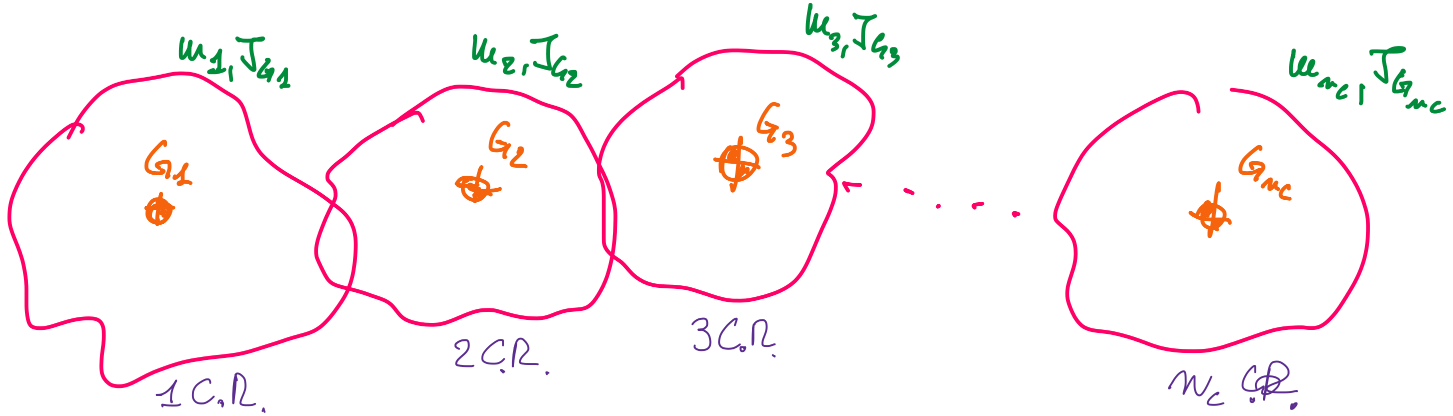
EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA PER UN CORPO RIGIDO



$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j + \vec{F}_{in} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} (P_j - O)\wedge \vec{F}_j + (G-O)\wedge \vec{F}_{in} + \sum_{r=1}^{m} \vec{C}_r + \vec{C}_{in} = 0 \end{cases}$$

POLO DEI MOMENTI NON NECESSARIAMENTE ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

SISTEMI DI CORPI RIGIDI



PER OGNI C.R.

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n}{}_j \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{in,i} = 0 \\ \sum_{1}^{n}{}_j (P_{i,j} - O) \wedge \vec{F}_{i,j} + \sum_{1}^{n_M}{}_r \vec{C}_{i,r} + (G_i - O) \wedge \vec{F}_{in,i} + \vec{C}_{in,i} = 0 \end{cases}$$ ✱

$j = 1, 2, \dots, n$ indice delle Forze esterne per ogni C.R

$i = 1, 2, \dots, n_c$ indice dei CORPI RIGIDI

$r = 1, 2, \dots, n_M$ indice delle coppie/momenti esterni per ogni C.R.

N.B.

$\wedge$: PRODOTTO VETTORIALE

$\times$: PRODOTTO SCALARE

- METODI ENERGETICI
  - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLA ✱

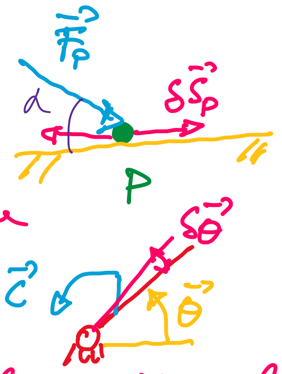
$$\delta L = \underbrace{\sum_{1}^{n_c}{}_i \sum_{1}^{n}{}_j \vec{F}_{i,j} \times \delta \vec{P}_{i,j}}_{\text{LAVORO FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_{1}^{n_c}{}_i \sum_{1}^{n_M}{}_r \vec{C}_{i,r} \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO MOMENTI/COPPIE ESTERNI}} +$$

LAVORO VIRTUALE

$\delta L = \vec{F}_P \times \delta \vec{S}_P$

$\delta \vec{S}_P$ è compatibile con il vincolo

$\delta L = \vec{C} \times \delta \vec{\theta}$



$\delta\theta$ è compatibile con il vincolo

$$+\sum_{1}^{n_c}{}_i \left(\underbrace{-m_i \vec{a}_{G_i} \times \delta \vec{G}_i}_{\text{LAVORO FORZA D'INERZIA}} \underbrace{- J_{G_i} \vec{\dot{\omega}}_i \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO COPPIA D'INERZIA}} \right) = 0$$

EVIDENZIO IL δL CON LE COORDINATE FISICHE

$$\delta L = \sum_{1}^{n_c}{}_i \sum_{1}^{n}{}_j \left(F_{x_{i,j}} \delta x_{i,j} + F_{y_{i,j}} \delta y_{i,j} \right) + \sum_{1}^{n_c}{}_i \sum_{1}^{n_M}{}_r C_i \delta \theta_i +$$

$$+\sum_{1}^{n_c}{}_i \left(-m_i a_{G_{i_x}} \delta x_{G_i} - m_i a_{G_{i_y}} \delta y_{G_i} - J_{G_i} \ddot{\theta}_i \delta \theta_i \right)$$

1 equazione

$$x_{G_i} = x_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$$
$$y_{G_i} = y_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$$
$$\theta_i = \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$$

LE q_s SONO LE COORDINATE CHE "DESCRIVONO" I GdL DEL SISTEMA DI C.R.

$$\begin{cases} \delta x_{G_i} = \sum_{s=1}^{n_{GdL}} \dfrac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta y_{G_i} = \sum_{s=1}^{n_{GdL}} \dfrac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta \theta_i = \sum_{s=1}^{n_{GdL}} \dfrac{\partial \theta_i}{\partial q_s} \delta q_s \end{cases}$$

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n_{GdL}} \left(\boxed{Q_s} + Q_{in,s} \right) \delta q_s = 0$$

1 equazione che è soddisfatta se tutti i termini tra parentesi sono uguali a 0

$$\begin{cases} Q_1 + Q_{in,1} = 0 \\ Q_2 + Q_{in,2} = 0 \\ \vdots \\ Q_{n_{GdL}} + Q_{in_{n_{GdL}}} = 0 \end{cases}$$

SISTEMA DI n_{GdL} EQUAZIONI

I "Q_s" SONO CHIAMATI "COMPONENTI LAGRANGIANE"

$$Q = \sum^{n_c} \left(-m_i a_{G_i} \frac{\partial x_{G_i}}{\dots} - m_i a_{G_i} \frac{\partial y_{G_i}}{\dots} - J_{G_i} \ddot{\theta}_i \frac{\partial \theta_i}{\dots} \right)$$

$$Q_{in,s} = \sum_{i=1} \Big(\ldots \frac{\ldots}{\partial q_s} \ldots \frac{\ldots}{\partial q_s} \ldots \frac{\ldots}{\partial q_s} \Big)$$

I "$Q_{in,s}$" SONO LE "COMPONENTI LAGRANGIANE" DELLE FORZE D'INERZIA

$$Q_{in,1} = \sum_{i=1}^{nc} \left(-m_i a_{Gix} \frac{\partial x_{Gi}}{\partial q_1} - m a_{Giy} \frac{\partial y_{Gi}}{\partial q_1} - J_{Gi} \ddot{\theta}_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_1} \right)$$

$\leftarrow$ ESEMPIO DI $Q_{in,s}$ PER LA PRIMA EQUAZIONE DI