Lezione lunedì 14 settembre 2020

lunedì 14 settembre 2020 10:08

ARGOMENTI DEL CORSO

- CINEMATICA (DESCRIZIONE DEL MOVIMENTO)
  - MOTO DI UN PUNTO (MATERIALE)
  - MOTO DI UN CORPO RIGIDO (CR)
  - MOTO DI SISTEMI DI CORPI RIGIDI

CINEMATICA PIANA

- DINAMICA (TROVARE LE CAUSE DEL MOVIMENTO: FORZE COPPIE)
  - DINAMICA DI UN PUNTO MATERIALE
    - SISTEMA DELLE FORZE D'INERZIA (NEWTON)
    - PRINCIPIO DI D'ALEMBERT
    - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (P.L.V.)
    - BILANCIO DI POTENZE / EQUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA

    ENERGIE

    - EQUAZIONE DI LAGRANGE
  - DINAMICA DEL CORPO RIGIDO / SISTEMI DI CORPI RIGIDI

- VIBRAZIONI MECCANICHE (RIGIDEZZA)
  - SISTEMI 1 GRADO DI LIBERTÀ (GdL)
    - MOTO LIBERO
    - MOTO FORZATO
  - SISTEMI A 2-n GdL
    - MOTO LIBERO
    - MOTO FORZATO

- ARGOMENTO FACOLTATIVO
  BILANCIAMENTO MOTORI ENDOTERMICI

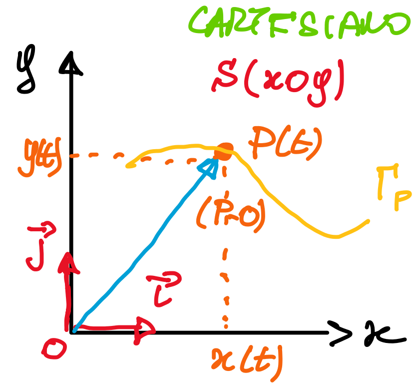
CINEMATICA DEL PUNTO (RIPASSO)

- VETTORE POSIZIONE
- VELOCITA'
- ACCELERAZIONE

— VETTORE POSIZIONE

1) $\vec{P}(t) = (P - O)$

2) $\vec{P}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$



$$\Gamma_p : \begin{cases} x_p = x(t) \\ y_p = y(t) \end{cases}$$

$$0 < t < \bar{T}$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA TRAIETTORIA

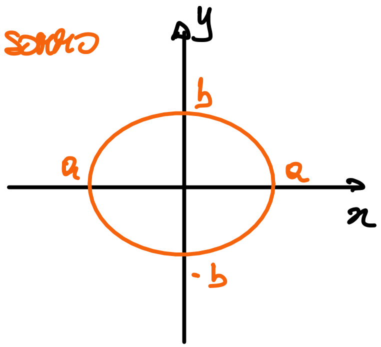
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \omega t \\ y(t) = b \sin \omega t \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} b^2 x^2 &= b^2 a^2 \cos^2 \omega t \\ a^2 y^2 &= a^2 b^2 \sin^2 \omega t \end{aligned}\right\} \text{SOMMO}$$

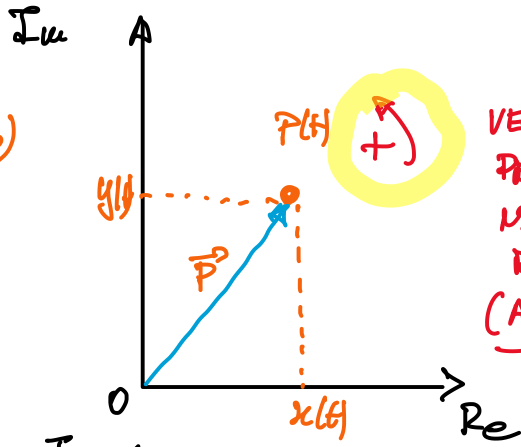
$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



3) USO DEL PIANO DI GAUSS (PUNTO COME NUMERO COMPLESSO)

$\vec{P}(t) = x + iy$



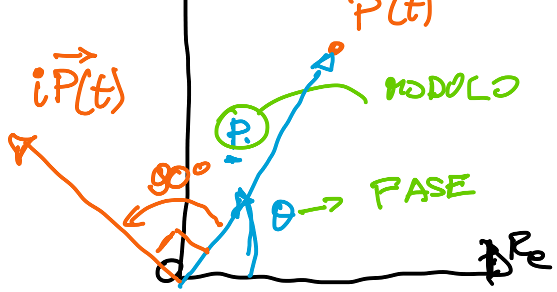
VERSO POSITIVO PER GLI ANGOLI NEL PIANO DI GAUSS (ANTIORARIO)

4) NOTAZIONE POLARE (NUMERO COMPLESSO)

$\vec{P}(t) = \rho\, e^{i\theta}$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$



FORMULA DI EULERO

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

NOTAZIONE ESPONENZIALE ⟷ NOTAZIONE CARTESIANA

$$\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

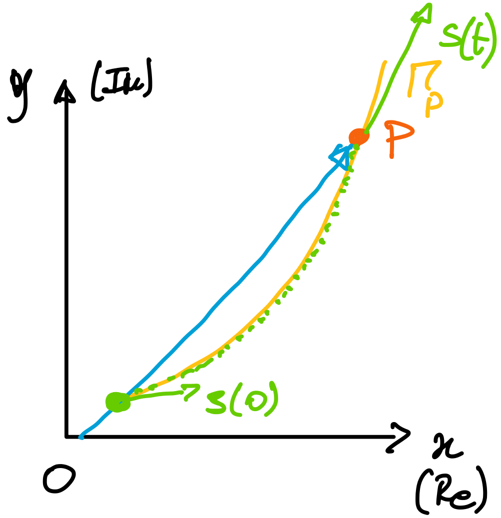
$$e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$$

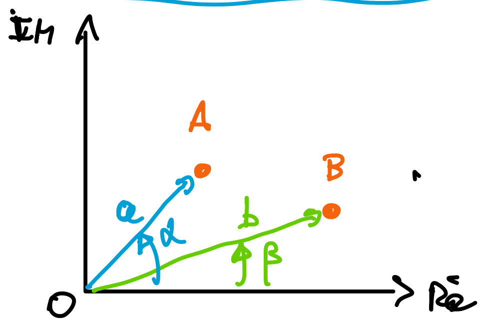
$$e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$$

$$P e^{i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} = P e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

- ASCISSA CURVILINEA

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(s) = \vec{P}(s(t))$$



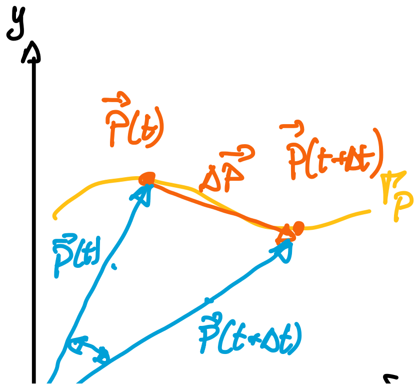


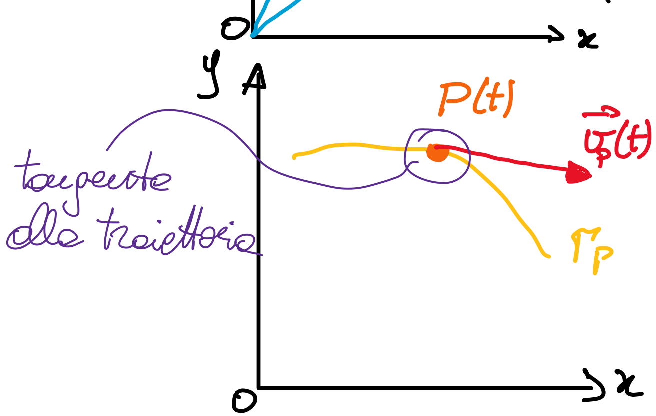
$$(A-O) = a\, e^{i\alpha}$$

$$(B-O) = b\, e^{i\beta}$$

- VELOCITA'

DEF. $$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}^{\Delta\vec{P}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

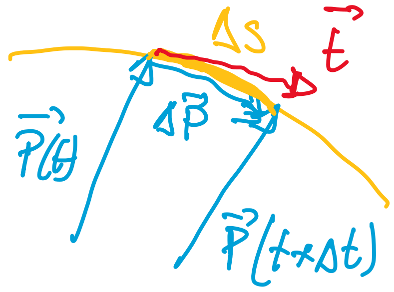




1) DEFINIZIONE ASCISSA CURVILINEA $\qquad \vec{P} = \vec{P}(s) \begin{cases} s = s(t) \\ \vec{P} = \vec{P}(s(t)) \end{cases}$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \boxed{\frac{d\vec{P}}{ds}}\,\frac{ds}{dt}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{P}|}{|\Delta s|} = 1$$



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s} = \vec{t}$$

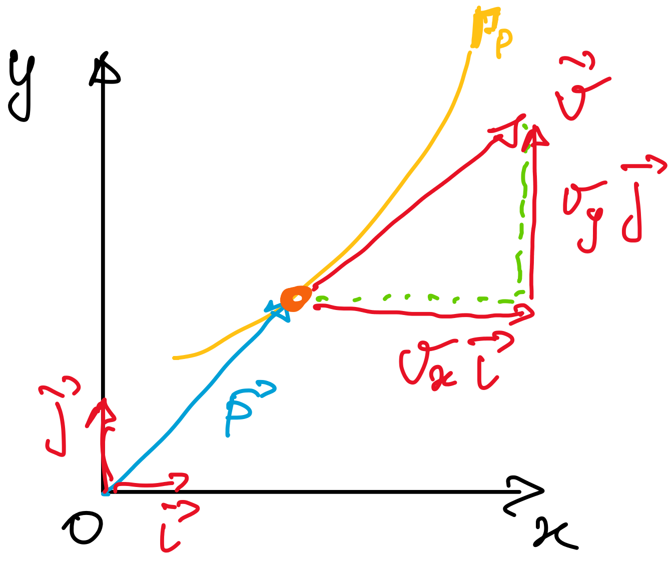
VERSORE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA

$$\vec{v} = \vec{t}\,\dot{s}$$

2) NOTAZIONE CARTESIANA

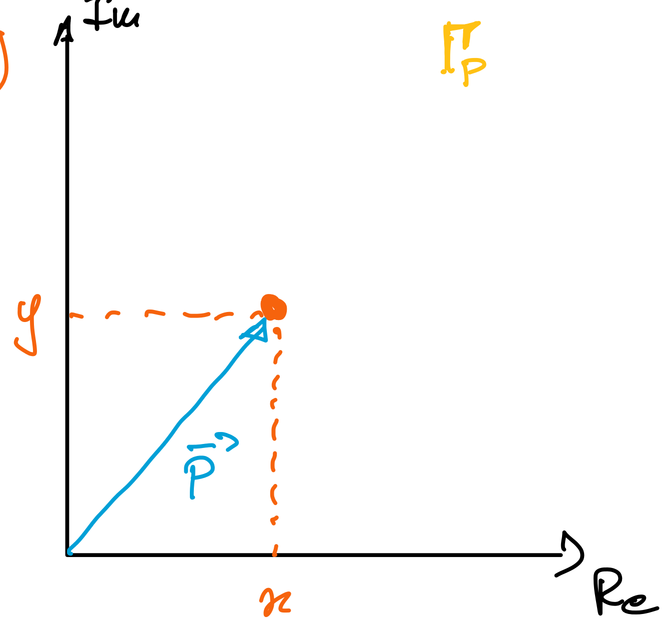
$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} =$$

$$= \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}$$



3) NOTAZIONE COMPLESSA (O NEL PIANO DI GAUSS)

$$\vec{v} = \dot{x} + i\,\dot{y} = v_x + i\,v_y$$



4) NOTAZIONE POLARE

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(P(t)\, e^{i\theta(t)} \right) = 1$$

Lezione martedì 15 settembre 2020

martedì 15 settembre 2020 15:14

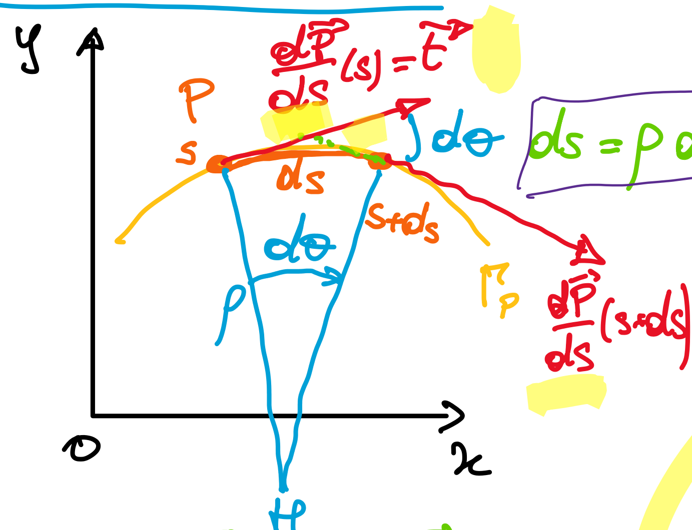
- IERI
  - VETTORE POSIZIONE } PUNTO
  - VELOCITA'

- ACCELERAZIONE

DEF: $\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} = \frac{d}{dt}\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt}}$

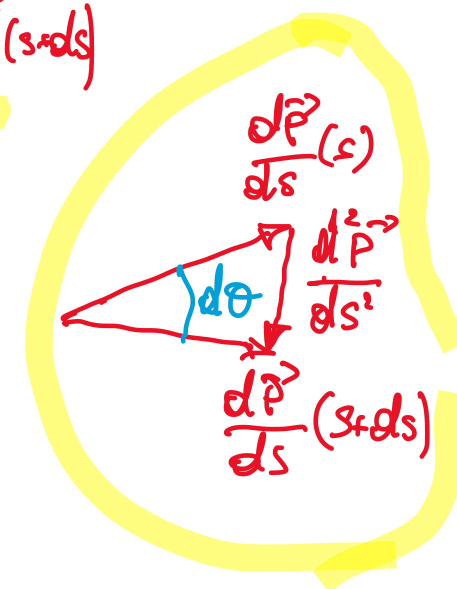
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{P}}{ds}\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\vec{a} = \underbrace{\boxed{\frac{d\vec{P}}{ds}}}_{\vec{t}}\ \underbrace{\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2}}}_{\ddot{s}} + \underbrace{\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}}_{\frac{1}{\rho}\vec{n}}\cdot\underbrace{\left(\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}\right)}_{\dot{s}\cdot\dot{s}\,=\,\dot{s}^2}$$



$\boxed{ds = \rho\, d\theta}$

$$\left|\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}\right| = \left|\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\frac{d\vec{P}}{ds}(s+\Delta s) - \frac{d\vec{P}}{ds}(s)}{\Delta s}\right| = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

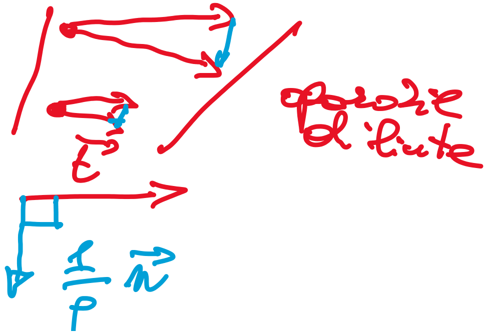


1° MODO

$$\vec{a} = \underbrace{\boxed{\ddot{s}\,\vec{t}}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\boxed{\frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}}}_{\vec{a}_n}$$

2 componenti distinte

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$



ATTENZIONE! $\vec a_t$ $\exists$ se $\ddot s \neq 0$

se $\vec v$ = costante $\Rightarrow$ $\vec a_t = 0$

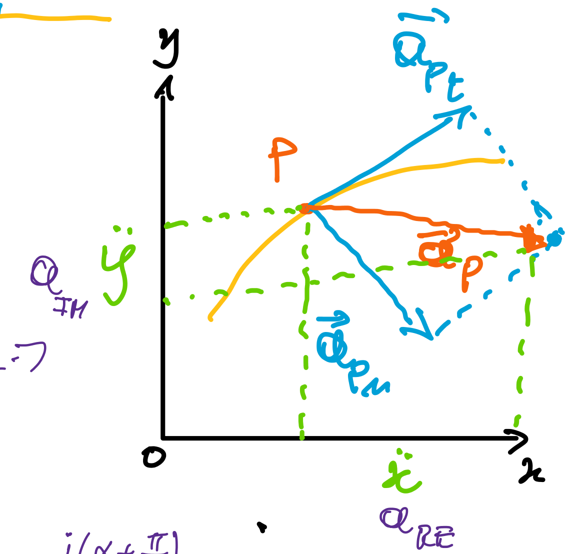
$\vec a_n$ $\exists$ se $\rho < \infty$

se $\rho \to \infty$ $\to$ $\frac{1}{\rho} = 0 \Rightarrow \vec a_n = 0$

↳ traiettoria rettilinea

2° MODO RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot x \vec i + \dot y \vec j\right) = \ddot x(t)\,\vec i + \ddot y(t)\,\vec j$$

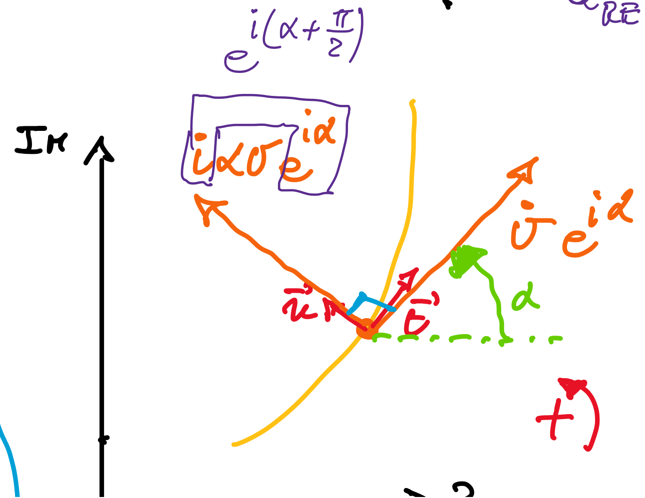


3° MODO RAPPREZIONE NEL PIANO DI GAUSS

$$\vec a = \vec a_{RE} + i\, a_{IM}$$

4° MODO NOTAZIONE POLARE

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v e^{i\alpha}\right) = \underbrace{\dot v\, e^{i\alpha}}_{\text{diretto}} + \underbrace{i\dot\alpha v}_{\text{ruotato di } \pi/2}\, e^{i\alpha}$$



come la ½ rispetto
Velocità alla velocità

HA UN SEGNO

0 Re

Lezione venerdì 18 settembre 2020

venerdì 18 settembre 2020 11:27

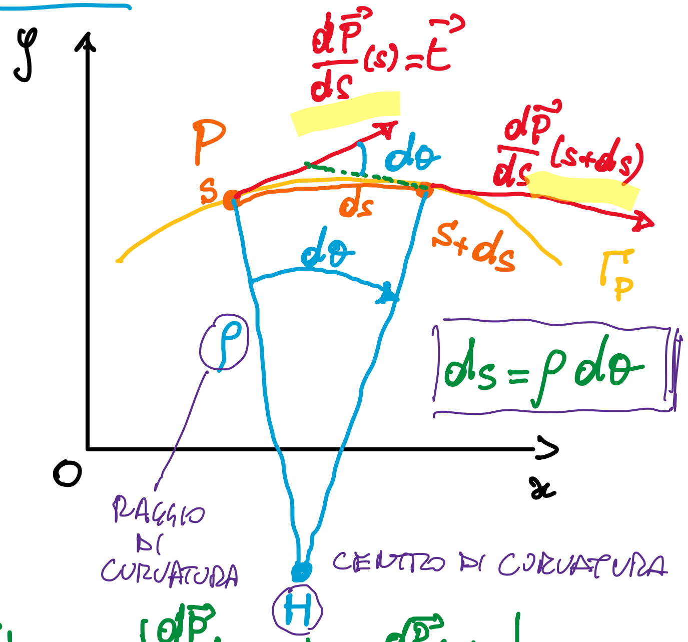
- ULTIMA LEZIONE
- VETTORE POSIZIONE } PUNTO
- VELOCITA'

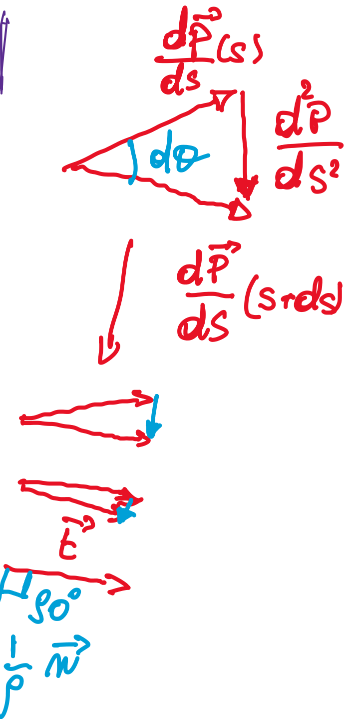
— ACCELERAZIONE

DEF: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{P}}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{P}}{ds}\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\vec{a} = \underbrace{\boxed{\frac{d\vec{P}}{ds}}}_{\vec{t}}\ \underbrace{\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2}}}_{\ddot{s}} + \underbrace{\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}}_{\frac{1}{\rho}\vec{n}}\ \underbrace{\left(\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\right)}_{\dot{s}\cdot\dot{s} = \dot{s}^2}$$





$$\left|\frac{d^2\vec{P}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\frac{d\vec{P}}{ds}(s+\Delta s) - \frac{d\vec{P}}{ds}(s)\right|}{\Delta s} = $$

$$= \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

1° MODO

$$\vec{a} = \boxed{\ddot{s}(t)\,\vec{t}} + \boxed{\frac{\dot{s}^2(t)}{\rho}\vec{n}}$$

2 componenti distinte

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

ATTENZIONE $\vec{a}_t$ $\exists$ se $\ddot{s} \neq 0$

Se v = costante $\Rightarrow \vec{a}_t = 0$

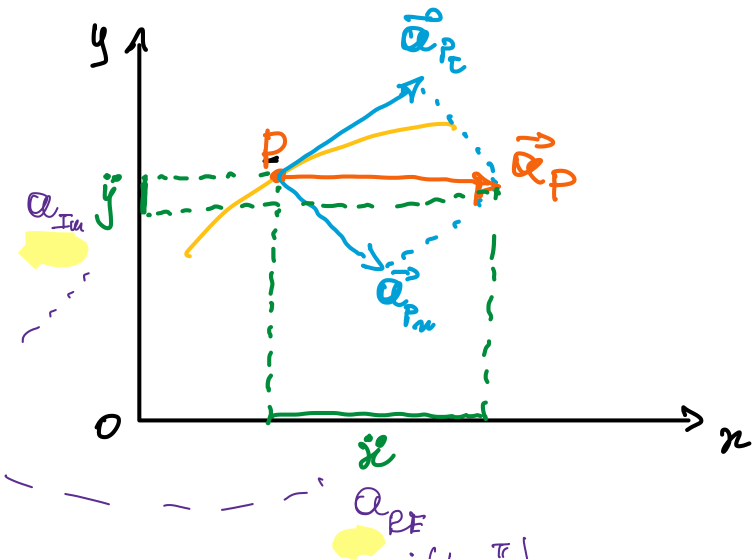
$\vec{a}_n \ \exists$ se $\rho < \infty$

Se $\rho \to \infty \Rightarrow \frac{1}{\rho} = 0 = \vec{a}_n = 0$

traiettoria rettilinea

2° MODO RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$



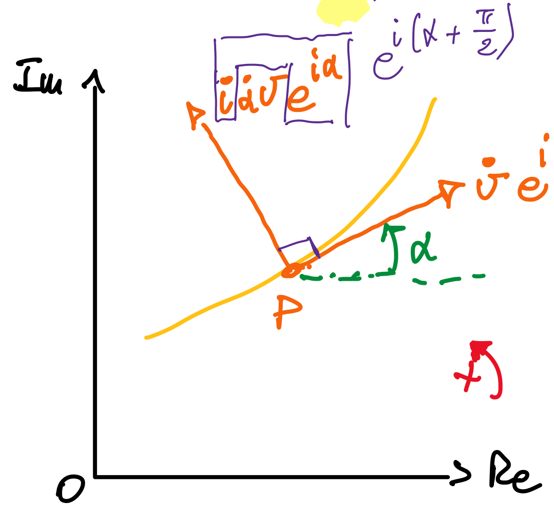
3° MODO RAPPRESENTAZIONE NEL PIANO DI GAUSS

$$\vec{a} = a_{RE} + i\, a_{Im}$$

4° MODO NOTAZIONE POLARE

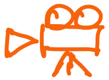
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v e^{i\alpha}) = \underbrace{\dot{v} e^{i\alpha}}_{\text{diretta come la velocità!}} + \underbrace{i\dot{\alpha} v e^{i\alpha}}_{\text{ruotata di } \frac{\pi}{2} \text{ rispetto alla velocità}}$$

→ HA UN SEGNO



Lezione lunedì 21 settembre 2020

lunedì 21 settembre 2020 10:12

- **CORPO RIGIDO**
  - PROPRIETA' DEL CORPO RIGIDO (C.R.)
    - ↳ DEFINIZIONE C.R.
    - ↳ GRADI DI LIBERTA' (NEL PIANO)
  - MOVIMENTO DEL CORPO RIGIDO
    - ↳ MOTO DEL C.R.  (VIDEO)
    - ↳ ATTO DI MOTO DEL C.R.  (FOTOGRAFIA)

↓

CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (C.I.R.)

INSIEME DI PUNTI

$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$

4 PARAMETRI :

$\underbrace{x_A, y_A, x_B, y_B}_{\text{VINCOLO DI CORPO RIGIDO}}$

$d = \pm\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \text{costante}$

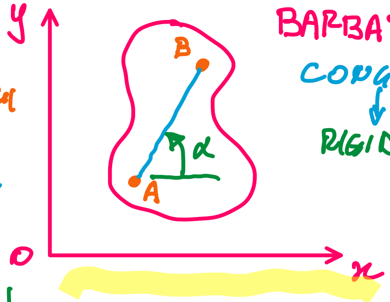
x_A, y_A, x_B, y_B non sono indipendenti

vincolati da d

A, B sono punti generici

$\overline{AB}$ = costante nel tempo

α = costante nel tempo



BARBAPAPAPOIDE

CONGELATO

↓

RIGIDO

SE CORPO E' RIGIDO

$\overline{AB}$ = costante

$\overline{BC}$ = costante

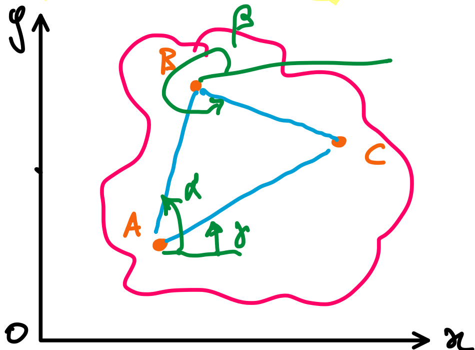
$\overline{AC}$ = costante

α = costante

β = costante

γ = costante

riferiti al corpo rigido

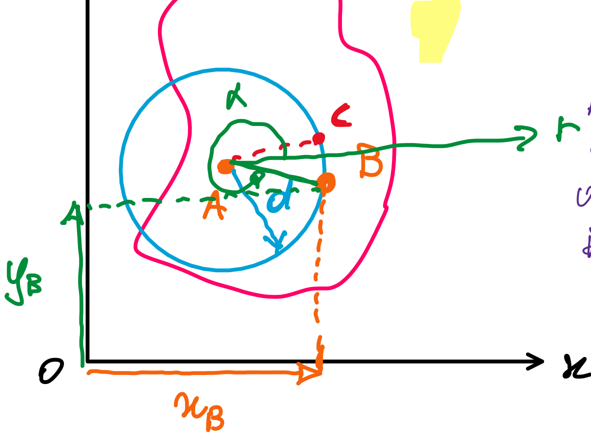


- CONDIZIONE DI "RIGIDITA'"
  - ↳ 3 PARAMETRI INDIPENDENTI PER DEFINIRE LA POSIZIONE DI UN C.R. IN UN PIANO

$A(x_A, y_A) \rightarrow$ 2 parametri indipendenti

$\overline{AB} = d = $ costante

$B(x_B, y_B) \to$ 1 parametro indipendente
1 parametro dipendente



ASSE SOLIDALE CON IL C.R.
USO PER RIFERIMENTO DEGLI ANGOLI

UN CORPO RIGIDO SI PUÒ MUOVERE NEL PIANO MA NON SI DEFORMA

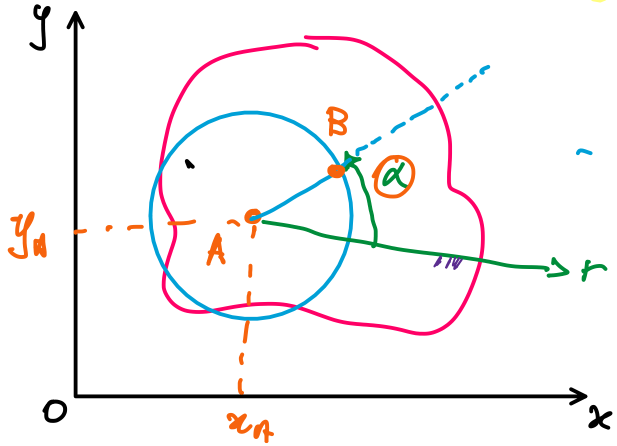
3 PARAMETRI INDIPENDENTI → C.R. (UN CORPO RIGIDO) NEL PIANO HA 3 GRADI DI LIBERTÀ

ALTRA SCELTA:

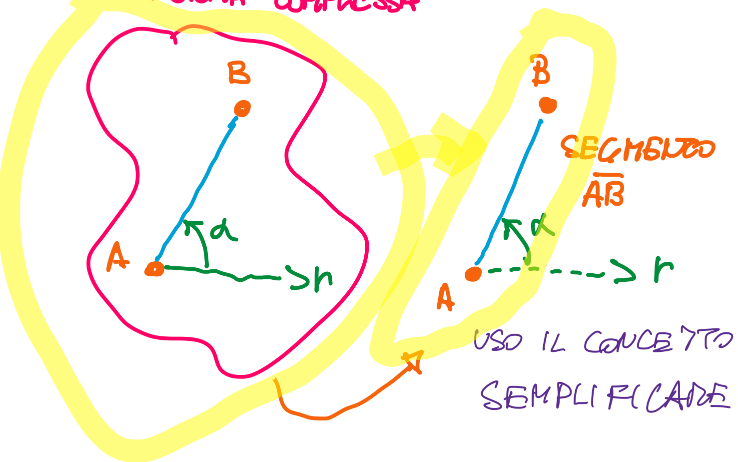
COORDINATE DI A E L'ANGOLO α

(x_A, y_A) ↓ 2

α ↓ 1

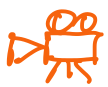


FORMA "COMPLESSA"



USO IL CONCETTO DI "RIGIDITÀ" PER SEMPLIFICARE LA GEOMETRIA DEL MIO C.R.

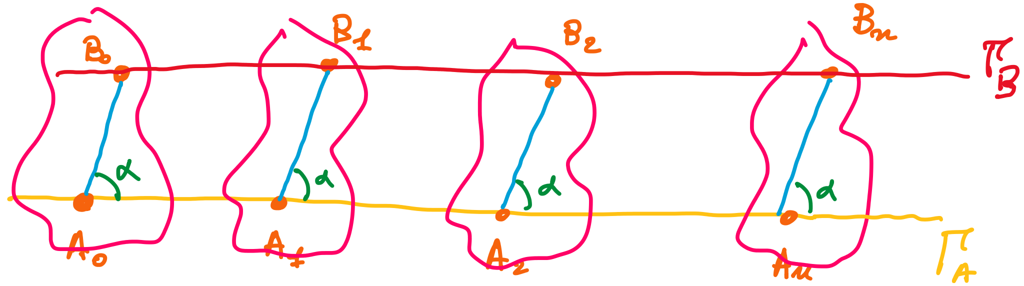
MOVIMENTO DEL C.R.

- MOTO ("IN GRANDE")  (VIDEO)
- ATTO DI MOTO ("IN PICCOLO")  (FOTO)

MOTO: 1) TRASLATORIO
2) ROTATORIO
3) ROTOTRASLATORIO

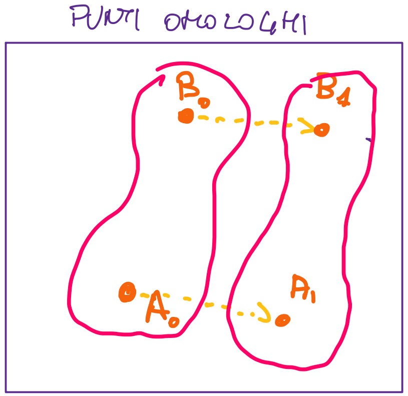
MOTO TRASLATORIO

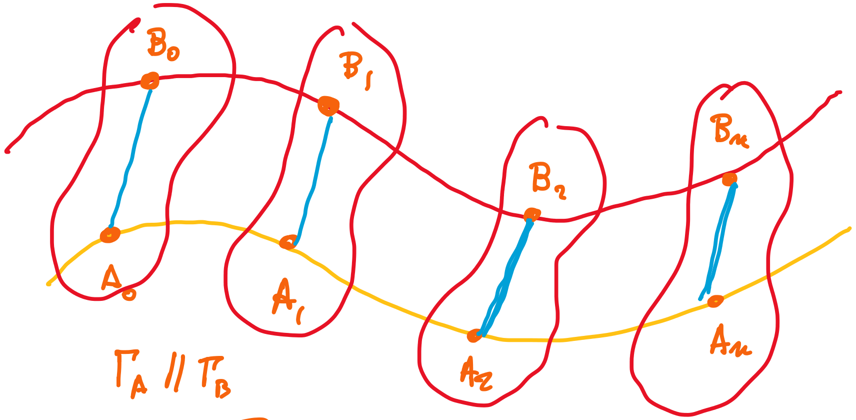
- LE TRAIETTORIE DEI PUNTI DEL C.R. SONO //
- PUNTI OMOLOGHI COMPIONO SPOSTAMENTI UGUALI



$\Gamma_A \parallel \Gamma_B$

$\overline{A_0A_1} = \overline{B_0B_1}, \ldots, \overline{A_nA_{n-1}} = \overline{B_nB_{n-1}}$





Γ_B traiettorie non rettilinee
Γ_A ma comunque //

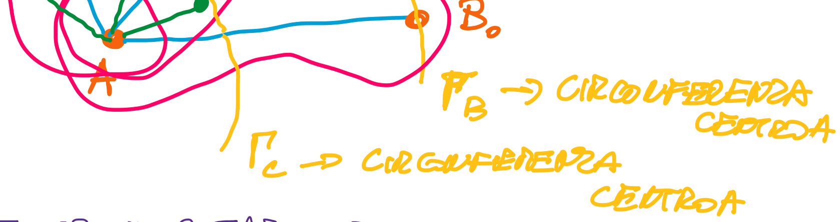
$\Gamma_A \parallel \Gamma_B$

$\overset{\frown}{A_1A_0} = \overset{\frown}{B_1B_0} \ldots \overset{\frown}{A_nA_{n-1}} = \overset{\frown}{B_nB_{n-1}}$

MOTO ROTATORIO

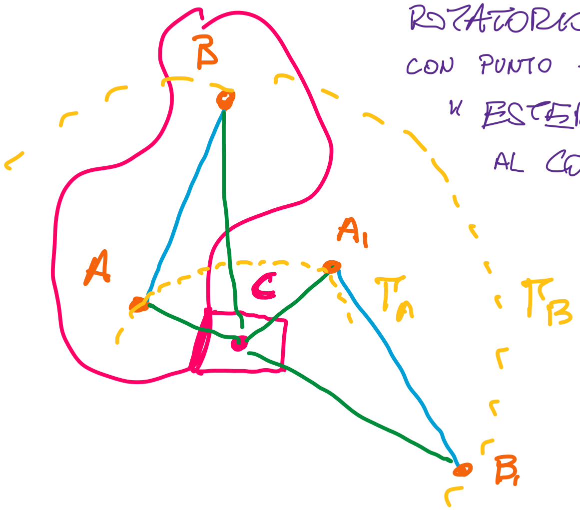
- 1 PTO DEL CORPO RIGIDO FISSO NEL PIANO
- LE TRAIETTORIE DI TUTTI ...

TUTTI GLI ALTRI PUNTI DEL C.R. SONO CIRCONFERENZE



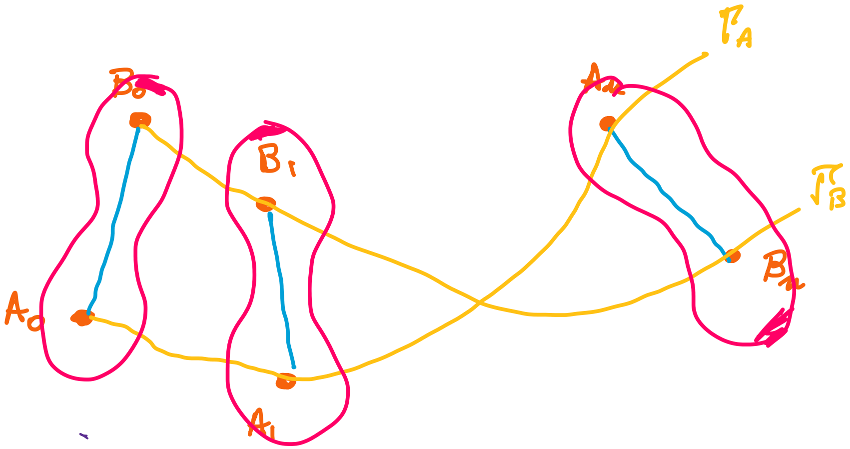
NOTA SULLA POSIZIONE DEL CENTRO DI ROTAZIONE

ESEMPIO MOTO ROTATORIO CON PUNTO FISSO "ESTERNO" AL CORPO



MOTO ROTO TRASLATORIO

- NESSUN PUNTO È SEMPRE FISSO NEL PIANO
- LE TRAIETTORIE DEI PUNTI NON SONO IN GENERALE // TRA LORO



ATTO DI MOTO

↳ FOTOGRAFIA DEL MOVIMENTO

↳ MOTO "IN PICCOLO" → SPOSTAMENTI SONO MOLTO PICCOLI

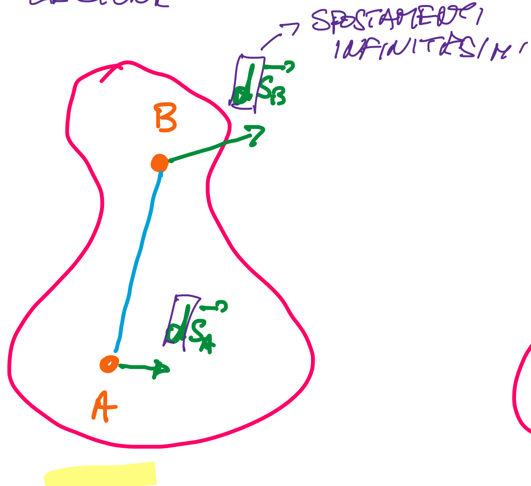
↳ SPOSTAMENTI INFINITESIMI TRA QUELLI PERMESSI AL C.R.
(IN QUESTO MOMENTO TUTTI GLI SPOSTAMENTI SONO PERMESSI)

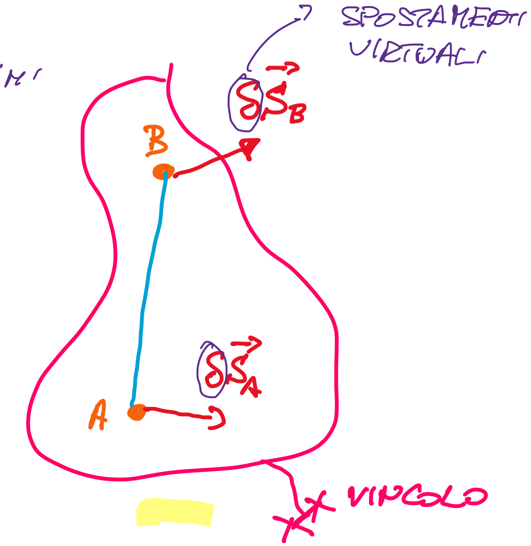
↳ SPOSTAMENTI VIRTUALI
(SPOSTAMENTI PERMESSI DAI VINCOLI*)

* I VINCOLI LI DISCUTEREMO TRA QUALCHE LEZIONE

GLI ATTI DI MOTO POSSIBILI SONO SOLO 2:

- ATTO DI MOTO TRASLATORIO
- ATTO DI MOTO ROTATORIO

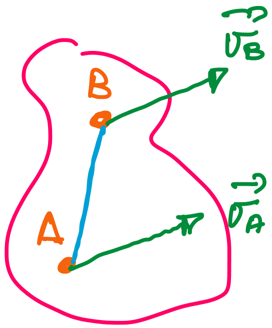




TRA LE DUE FOTO HO UN TEMPO PICCOLISSIMO dt

ATTO DI MOTO TRASLATORIO

↳ LE VELOCITÀ DI TUTTI I PUNTI (DEL C.R.) SO UGUALI (MODULO DIREZIONE VERSO)



$\vec v_A = \vec v_B$

IL CONCETTO DI ATTO DI MOTO È COLLEGATO AL CONCETTO DI VELOCITÀ

$\vec v_A = \frac{d\vec S_A}{dt}$ | $\vec v_A = \frac{\delta \vec S_A}{dt} = \frac{\delta \vec S_A}{\delta t}$

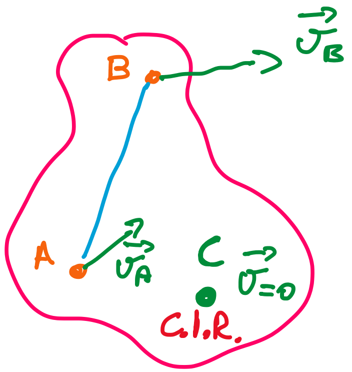
$d \to \delta$

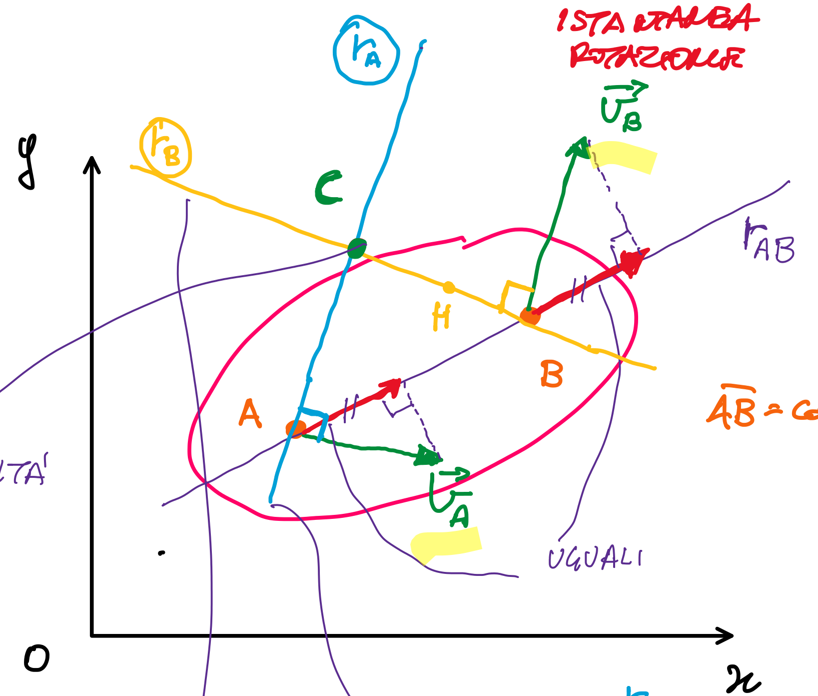
ATTO DI MOTO ROTATORIO

ATTO DI MOTO ROTATORIO

↳ ∃ UN PUNTO DEL C.R. (O COLLEGATO RIGIDAMENTE AD ESSO) CHE (NELL'ISTANTE CONSIDERATO) HA VELOCITÀ NULLA

IL PUNTO SI CHIAMA C.I.R. CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE





$\overline{AB}$ = costante

C HA VELOCITÀ NULLA

$\vec{v}_C = 0$

UGUALI

C È IL CENTRO DI ISTANEA ROTAZIONE

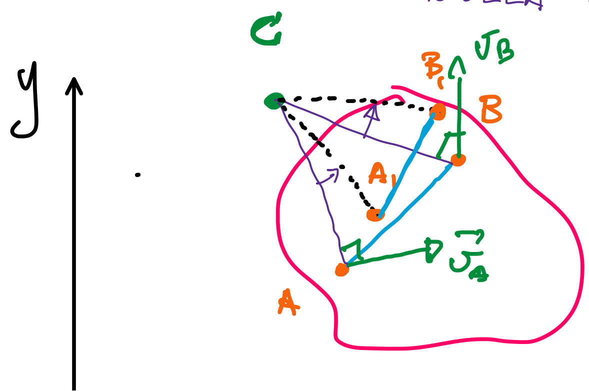
I PTI DELLA r_A HANNO COMPONENTE DI VELOCITÀ NULLA RISPETTO AD r_A

I PTI DELLA r_B HANNO COMPONENTE DI VELOCITÀ NULLA RISPETTO AD r_B

SICCOME PARLIAMO DI ATTO DI MOTO

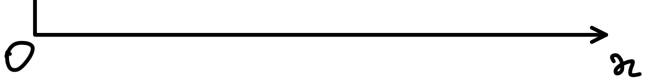
↳ C.I.R. IN GENERALE NON È UN PUNTO FISSO NEL PIANO

È UN PUNTO FISSO SOLO SE IL MOTO È ROTATORIO

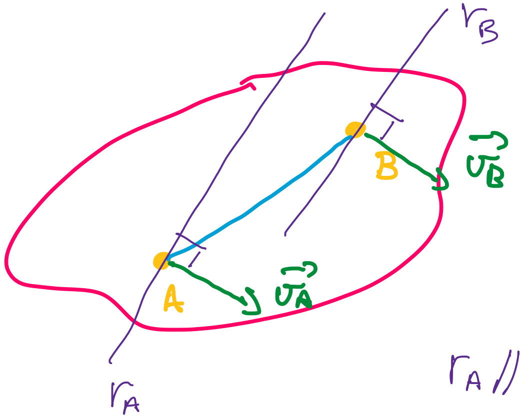


C.I.R. HA VELOCITÀ NULLA, MA IN GENERALE NON HA ACCELERAZIONE NULLA (A MENO CHE IL MOTO SIA ROTATATORIO)

IN QUESTO CASO IL CENTRO DI ROTAZIONE COINCIDE CON IL C.I.R.



ESISTE IL C.I.R. NEL CASO DI ATTO DI MOTO TRASLATORIO? NO!



$\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$

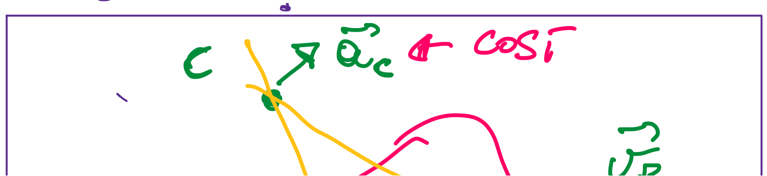
$r_A \parallel r_B \longrightarrow \boxed{C.I.R \to \infty}$

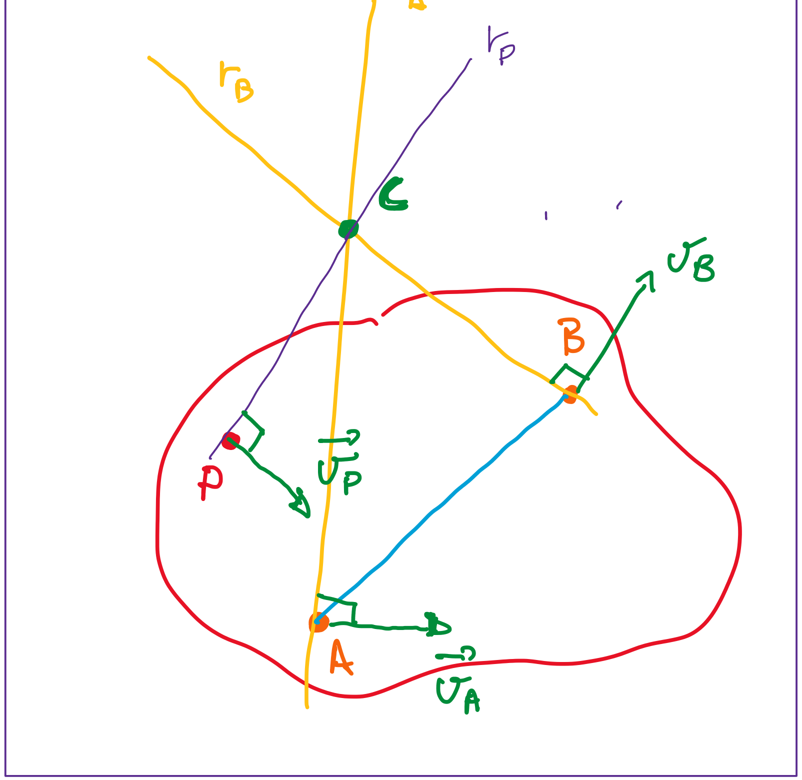
ESISTE PER UN C.R. IL "CENTRO DELLE ACCELERAZIONI" CHE UN PUNTO (DEL C.R. O COLLEGATO RIGIDAMENTE AD ESSO) CHE HA $\vec{a}=0$, MA NON HA UN IMPIEGO PRATICO, NEL MOMENTO IN CUI SI STUDIA LA CINEMATICA DEL C.R. CON METODI NUMERICI.

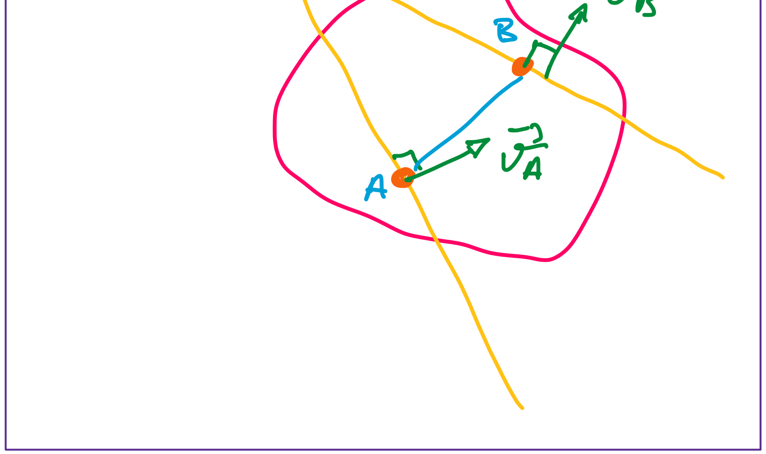
NB: SE IL CENTRO DI ROTAZIONE È ANCHE C.I.R., ALLORA HA ANCHE ACCELERAZIONE NULLA

DOMANDA: MA SE CONSIDERO UN PUNTO DEL C.R. DIVERSO DA A E B, OTTENGO UN C.I.R. DIFFERENTE? NO, IL C.I.R È UNICO

DOMANDA: COME SI INDICA L'ACCELERAZIONE DEL C.I.R?







ESSENDO UNICO IL C.I.R. POSSO USARLO PER TROVARE LA DIREZIONE DELLA VELOCITA' DI OGNI PUNTO DE C.R. - VEDI AD ESEMPIO IL PUNTO P IN FIGURA:

TRACCIO LA RETTA CHE PASSA PER C E PER P (r_P) E LA DIREZIONE DELLA $\vec{v}_P$ SARA' $\perp$ A r_P

Lezione martedì 22 settembre 2020

martedì 22 settembre 2020 15:17

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

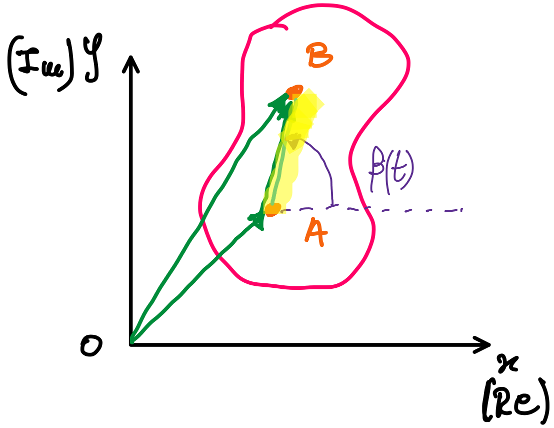
↳ TEOREMA DI RIVALS PER VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE

– RIFERIMENTO DI 2 PUNTI DEL C.R. MEDIANTE LORO VETTORE POSIZIONE

DATI : $x_A(t), y_A(t)$ POSIZIONE DI A

$\beta(t)$ ANGOLO DEL SEGMENTO $\overline{AB}$ RISPETTO AL RIFERIMENTO ANGOLARE : AD ES. ASSE ORIZZONTALE

3 PARAMETRI CHE "FISSANO" I 3 G.D.L. DEL C.R.

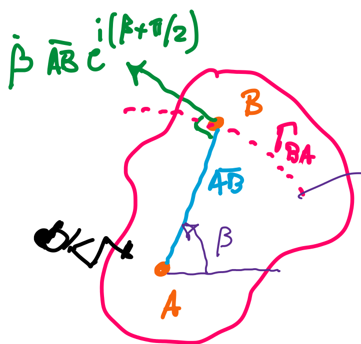


VETTORE POSIZIONE DI B

$$(B-O) = (A-O) + (B-A)$$ RELAZIONE TRA I VETTORI POSIZIONE

$$(B-O) = x_B + i y_B =$$
$$= x_A + i y_A + \overline{AB}\, e^{i\beta}$$

→ LUNGHEZZA È NOTA PERCHÉ IL CORPO È RIGIDO (N.B $\overline{AB}$ è costante)



TRAIETTORIA RELATIVA DI B RISPETTO AD A

VELOCITÀ DI B

APPLICO LA DEFINIZIONE DI VELOCITÀ

$$\frac{d}{dt}(B-O) = \frac{d}{dt}\left(x_A + i y_A + \overline{AB}\, e^{i\beta}\right)$$

$$\vec{v}_B = \underbrace{\dot{x}_A + i\dot{y}_A}_{\vec{v}_A} + i\dot\beta\, AB\, e^{i\beta} = \vec{v}_A + \dot\beta\, AB\, e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$\vec{v}_A$ ↑ VELOCITÀ DI A

$\vec{v}_{BA}$ ↑ VELOCITÀ RELATIVA DI B RISPETTO AD A

$\boxed{\dot\beta} = \frac{d\beta}{dt}$ ↳ velocità angolare (MODULO)

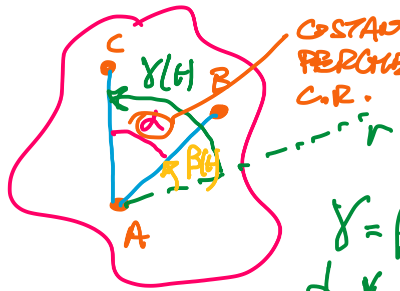
$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

TH. DI RIVALS PER LE VELOCITÀ ⟹ SE CONOSCO LA VELOCITÀ DI UN PTO DI UN C.R. E LA VELOCITÀ ANGOLARE ALLORA POSSO CONOSCERE LA VELOCITÀ DI TUTTI I PTI DEL C.R. (*)

LA VELOCITÀ ANGOLARE È UNICA!

PROPRIETÀ DEL C.R.

(GUAI A CHI DICE VELOCITÀ ANGOLARE DI UN PUNTO!)



$$\gamma = \beta + \alpha$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}(\beta+\alpha) = \dot\beta$$

∃ LETTERA SPECIALE PER INDICARE IL MODULO: $\boxed{\omega} = \dot\beta$

IL VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE È:

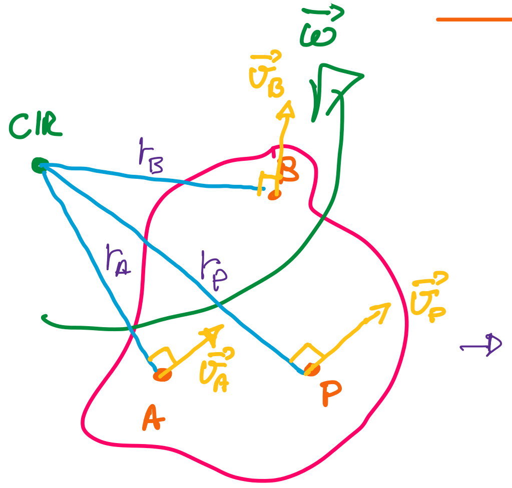
$$\vec{\omega} = \vec{k}\,\omega = \vec{k}\,\dot\beta$$

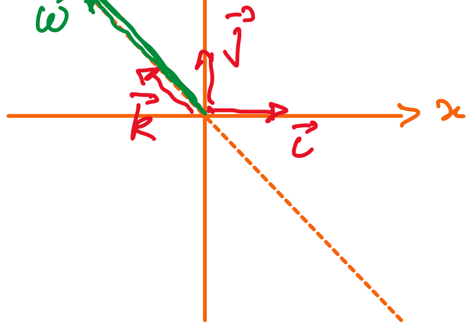
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B-A)$$

SAPPIAMO CHE NEL MOTO DI UN C.R. PUÒ ESISTERE UN C.I.R.

PROPRIETA' $\vec{v}_{CIR} = 0$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (P - CIR)$$





$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - CIR)$$

$$v_P = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v_P}{r_P}$$

VALE PER $\forall$ PTO

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B}$$

ACCELERAZIONE DEL PUNTO B

$$\vec{a}_B = \frac{d}{dt}\vec{v}_B = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_A + i\dot{y}_A + i\overline{AB}\,\omega\, e^{i\beta}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}_B = \underbrace{\ddot{x}_A + i\ddot{y}_A}_{} + i\overline{AB}\,\omega\left(i\omega e^{i\beta}\right) + i\overline{AB}\,\dot{\omega}\, e^{i\beta} =$$

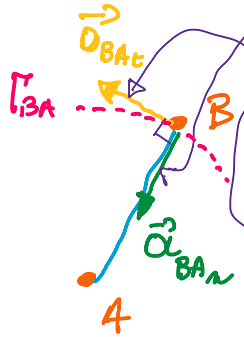
$$= \underbrace{\vec{a}_A}_{\text{ACCELERAZIONE DI A}} \underbrace{- \omega^2 \overline{AB}\, e^{i\beta} + i\overline{AB}\,\dot{\omega}\, e^{i\beta}}_{\text{ACCELERAZIONE DI B RISPETTO AD A}}$$

VALE ~~$\forall$~~ PER LE ACCELERAZIONI

(ACCELERAZIONE ANGOLARE $\Rightarrow \frac{d}{dt}\omega = \dot{\omega}$)

$$-\omega^2 \overline{AB}\, e^{i\beta} = \omega^2 \overline{AB}\, e^{i(\beta+\pi)}$$

$$i\overline{AB}\,\dot{\omega}\, e^{i\beta} = \overline{AB}\,\dot{\omega}\, e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}$$



ACCEL
B R
IN
NO

ACC
B R
IN
TAN

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}}$$

TH DI RIVALS PER LE ACCELERAZIONI

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge (B-A)}_{\vec{a}_{BA_t}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (B-A)}_{\vec{a}_{BA_n}}$$

VETTORE ACCELERAZIONE ANGOLARE:

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{k}$$

Lezione venerdì 25 settembre 2020

venerdì 25 settembre 2020 11:24

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

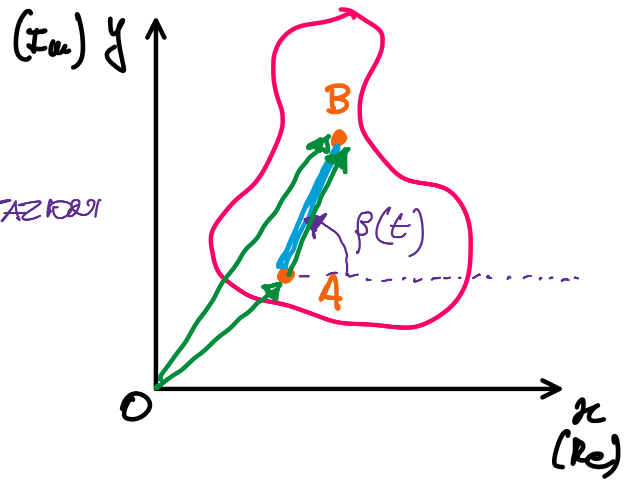
↳ TEOREMA DI RIVALS PER LA VELOCITÀ E L'ACCELERAZIONE

- SISTEMA DI RIFERIMENTO: POSIZIONE DI 2 PTI DEL C.R. MEDIANTE I LORO VETTORI POSIZIONE

DATI: $x_A(t)$ $y_A(t)$ POSIZIONE DI A

$\beta(t)$ ANGOLO DEL SEGMENTO $\overline{AB}$ RISPETTO AL RIFERIMENTO RELAZIONI (AD.ES. ASSE ORIZZONTALE)

3 PARAMETRI CHE "FISSANO" I G.d.L. DEL C.R.



POSIZIONE DI B RISPETTO AD A $(B-A)$

RISPETTO AL SIS.RIF. $(B-O)$

VETTORE POSIZIONE DI B

$$(B-O) = (A-O) + (B-A)$$

RELAZIONE VETTORIALE TRA I VETTORI POSIZIONE

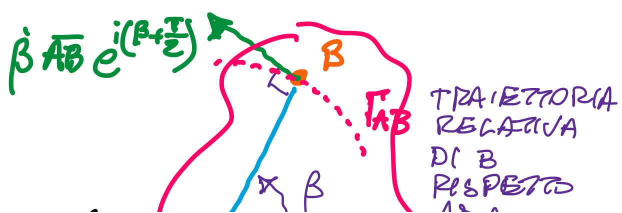
$$(B-O) = x_B + i\, y_B =$$

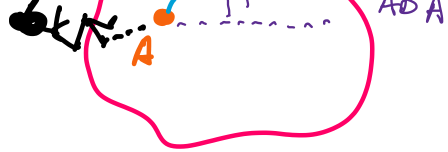
$$= x_A(t) + i\, y_A(t) + \overline{AB}\, e^{i\beta(t)}$$

VELOCITÀ DI B

APPLICO LA DEFINIZIONE DI VELOCITÀ

$$\frac{d}{dt}(B-O) = \frac{d}{dt}\left(x_A + i\, y_A + \overline{AB}\, e^{i\beta} \right)$$





$$\vec{v}_B = \dot{x}_A + i\,\dot{y}_A + i\dot{\beta}\,\overline{AB}\,e^{i\beta} = \vec{v}_A + \boxed{\dot{\beta}\,\overline{AB}\,e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}} =$$

$$= \underbrace{\vec{v}_A}_{\text{VELOCITÀ DI A}} + \underbrace{\vec{v}_{BA}}_{\text{VELOCITÀ DI B RISPETTO AD A}}$$

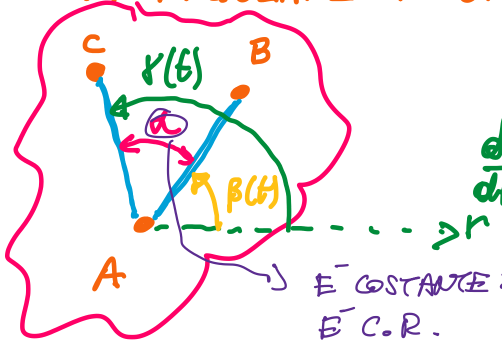
$$\boxed{\dot{\beta}} = \frac{d\beta}{dt}$$

↳ VELOCITÀ ANGOLARE (MODULO)

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

TH. DI RIVALS PER LE VELOCITÀ ⇒ SE CONOSCO LA VELOCITÀ DI 1 PTO DI UN C.R. E LA VELOCITÀ ANGOLARE ALLORA POSSO CONOSCERE LA VELOCITÀ DI TUTTI I PTI DEL C.R.

LA VELOCITÀ ANGOLARE È UNICA!



↳ È COSTANTE PERCHÉ È C.R.

$$\gamma = \beta + \alpha$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}\left(\beta(t)+\alpha\right) = \dot{\beta}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\beta}$$

LA VELOCITÀ ANGOLARE È DI TUTTO IL C.R.
(GUAI A CHI DIRÀ "VELOCITÀ ANGOLARE DI UN PUNTO")

∃ LETTERA SPECIALE PER INDICARE IL MODULO DELLA VELOCITÀ ANGOLARE $\boxed{\omega = \dot{\beta}}$

IL VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE È

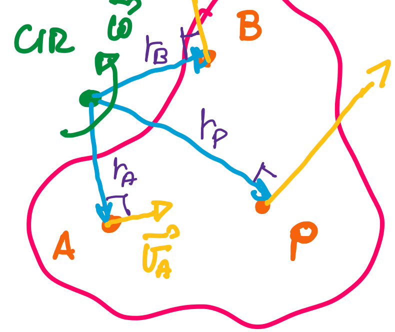
$$\vec{\omega} = \vec{k}\,\omega = \vec{k}\,\dot{\beta}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B-A)$$

SAPPIAMO CHE IN UN C.R. PUÒ ESISTERE UN C.I.R.

$\vec{v}_{CIR} = 0$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (P - CIR) = \vec{\omega} \wedge (P - CIR)$$



$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - CIR)$

$v_P = \omega r_P$

VALE PER $\forall$ PTO

$$\frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B} = \omega$$

ACCELERAZIONE DEL PUNTO B

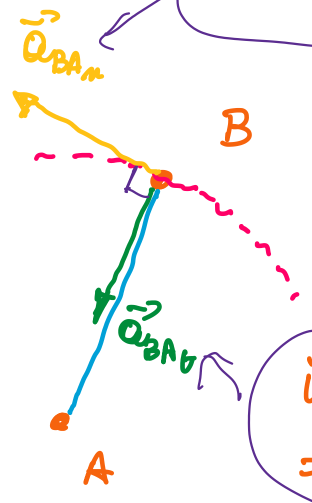
$$\vec{a}_B = \frac{d}{dt}\vec{v}_B = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B-A)\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_A + i\dot{y}_A + i\omega\overline{AB}\,e^{i\beta}\right)$$

$\Downarrow$

$$\vec{a}_B = \ddot{x}_A + i\ddot{y}_A + i\overline{AB}\,\omega(i\omega e^{i\beta}) + i\overline{AB}\,\dot{\omega}\,e^{i\beta} =$$

$$= \underbrace{\vec{a}_A}_{\text{ACCELERAZIONE DI A}} \underbrace{- \omega^2 \overline{AB}\,e^{i\beta} + i\dot{\omega}\overline{AB}\,e^{i\beta}}_{\text{ACCELERAZIONE DI B RISPETTO AD A}}$$

$-\omega^2\overline{AB}\,e^{i\beta} = \omega^2\overline{AB}\,e^{i(\beta+\pi)}$



$i\overline{AB}\,\dot{\omega}\,e^{i\beta} = \overline{AB}\,\dot{\omega}\,e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})}$

VALE $\cancel{\forall}$ PER ACCELERAZIONI

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}}$$

TH DI RIVALS PER LE ACCELERAZIONI

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge (B-A)}_{\vec{a}_{BA}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (B-A)}_{\vec{a}}$$

ACCELERAZIONE ANGOLARE $\rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$

$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k}$

CUBAN

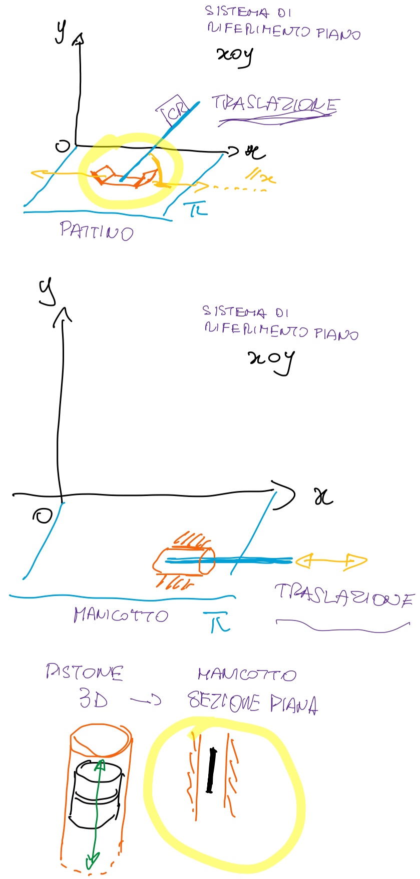
Lezione martedì 28 settembre 2020

lunedì 28 settembre 2020 10:25

- VINCOLI PER C.R. NEL PIANO
- TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

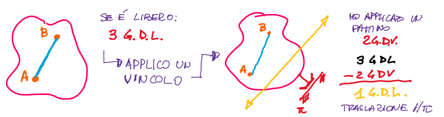
VINCOLI

	CERNIERA A TERRA	CERNIERA TRA 2 C.R.	PATTINO	MANICOTTO	CARRELLO	INCASTRO	PURO ROTOLAMENTO
SIMBOLO	A, C.R., ALTERNATIVE, A. PTO. FISSO C.R. RUOTA ATTORNO AD A	A, 1, 2	A, π: TRACCIA DI PIANO ⊥ AL PIANO DI RIFERIMENTO	A	A, π. CERNIERA + PATTINO = CARRELLO. CERNIERA, PATTINO	A, π, A	RUOTA O DISCO, C.R., C, A, π. A: PUNTO DI CONTATTO TRA DISCO E PIANO π. C: CENTRO DEL DISCO
GRADI DI VINCOLO	A. INIBITI GLI SPOSTAMENTI DI A ⇒ 2 G.D.V.	$x_{A[1]} = x_{A[2]}$, $y_{A[1]} = y_{A[2]}$, y_A, x_A, A, 1, 2. 2 G.D.V.	y_A, A, θ, π. y_A = costante, θ = costante. 2 G.D.V.	y_A, θ, A. y_A = costante, θ = costante. 2 G.D.V.	A, π. y_A = COSTANTE. 1 G.D.V.	A. x_A = costante, y_A = costante, θ = costante. 3 G.D.V.	$\theta(t)$, C, A, $x_c(t)$, $\boxed{x_c(t) = \theta(t)}$, π. 1) IL DISCO NON SI DISTACCA DAL PIANO. 2) LA COORDINATA x_c (spostamento centro del disco // π) NON È INDIPENDENTE DALLA ROTAZIONE DEL DISCO θ. 2 G.D.V.
GRADI DI LIBERTÀ RESIDUI	A, $\theta(t)$, r. 1 G.D.L: $\theta(t)$	1, 2, $\theta(t)$. PERMESSA LA ROTAZIONE RELATIVA. 1 G.D.L.: $\theta(t)$	A, $x_A(t)$, π. PERMETTE LA TRASLAZIONE IN DIREZIONE // AL PIANO π. 1 G.D.L: $x_A(t)$	A, $x_A(t)$. PERMESSA LA TRASLAZIONE NELLA DIREZIONE DEL MANICOTTO. 1 GDL: $x_A(t)$	A, $\theta(t)$, $x_A(t)$, π. PERMESSI TRASLAZIONE // PIANO π E ROTAZIONE ATTORNO AD A. 2 G.D.L: $x_A(t)$, $\theta(t)$	A. NESSUN MOVIMENTO PERMESSO. 0 G.D.L.	$\theta(t)$, C, $x_c(t) = \theta(t)$, A, π. MOTO ROTOTRASLATORIO. ATTO DI MOTO ROTATORIO ATTORNO AD $A \equiv$ C.I.R. 1 G.D.L.
REAZIONI VINCOLARI	C.R., A, H, V. DAL PTO DI VISTA CINEMATICO HO IL "VINCOLO". DAL PTO DI VISTA DINAMICO SOSTITUISCO IL "VINCOLO" CON LE SUE REAZIONI VINCOLARI EQUIVALENTI. DUE REAZIONI: V H	V, H, A[1], A[2]. $V^{[1]} = V^{[2]}$, $H^{[1]} = H^{[2]}$. DUE REAZIONI: V H	M, A, V. DUE REAZIONI: V H	M MOMENTO, A, V. DUE REAZIONI: V M	A, V. UNA REAZIONE: V	M, H, V. TRE REAZIONI: V H M	C, A, H → T, V. DUE REAZIONI: V → N, H → T. TRADIZIONALMENTE LA REAZIONE VERTICALE SI INDICA CON N E QUELLA ORIZZONTALE CON T



CALCOLO DEI GRADI DI LIBERTÀ (SISTEMI DI CORPI RIGIDI)

1 C.R.



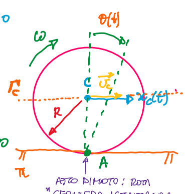
↳ CINEMATICA DELLA RUOTA (DISCO)

RUOTA o DISCO

UNICO C.R. → SI PUÓ USARE TH. RIVALS

C: CENTRO

A: PUNTO DI CONTATTO (CIR)



VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO → RUOTA ROTOLI SENZA STRISCIARE

$x_c = R\theta$ $\rightarrow \left(\frac{d}{dt}\right) \rightarrow$ $\dot{x}_c = v_c = R\dot{\theta} = R\omega$

VALE ANCHE

$\vec{v}_c = \vec{\omega} \wedge (C-A)$

SEMPRE // π

$\frac{d}{dt}$

Γ_c TRAIETTORIA DI C E' // π

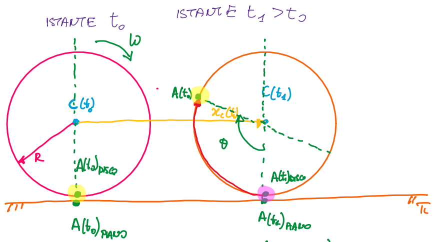
$v_A = 0$

GEOMETRIA ISTANTANEA IN A"

$a_c = \ddot{x}_c = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega}$

$\vec{a}_c = \vec{\dot{\omega}} \wedge (C-A)$

SOLO COMPONENTE TANGENTE

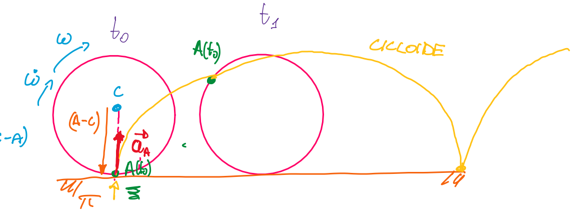


$x_c(t) = R\theta$ → $(A(t_1) - A(t_0))$

→ $\overset{\frown}{A(t_1)A(t_0)}$

A: CIR.

$v_A = 0$



$\vec{v}_c = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = 0 + \vec{\omega} \wedge (C-A)$

$\vec{v}_c =$

$\vec{a}_c = \vec{\dot{\omega}} \wedge (C-A)$

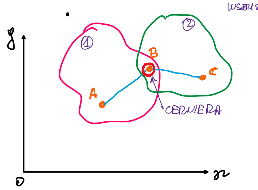
$\vec{a}_A = \vec{a}_c + \vec{a}_{AC} = \cancel{\vec{\dot{\omega}} \wedge (C-A)} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (A-C) + \cancel{\vec{\dot{\omega}} \wedge (A-C)} =$

$= \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (A-C) = -\omega^2 (A-C)$

$a_A = -\omega^2 R$

qua c'è il "−" per ricordare che è componente normale o altrimenti detta centripeta

INSERISCO UNA CERNIERA TRA 2 C.R.



CALCOLO DEI GRADI DI LIBERTA' DEL SISTEMA

2 C.R. × 3 G.D.L = 6 G.D.L. possibili

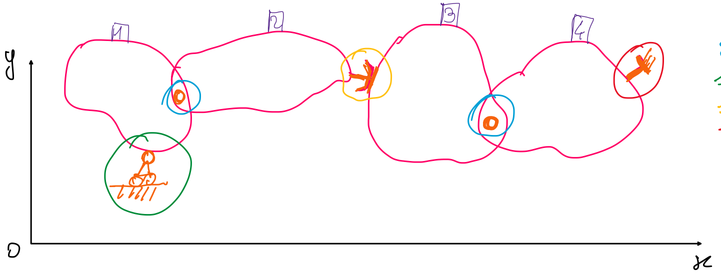
1 CERNIERA × 2 G.D.V. = −2 G.D.V.

$x_B^{①} = x_B^{②}$

$y_B^{①} = y_B^{②}$

4 GDL residui

$\underbrace{x_A, y_A, x_C, y_C}$



4 C.R. × 3 G.D.L. = 12 GDL possibili

2 CERNIERE × 2 GDV = 4

1 CARRELLO × 1 GDV = 1

1 PATTINO × 2 GDV = 2

1 INCASTRO × 3 GDV = 3 → 10 GDV

2 GDL residui

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

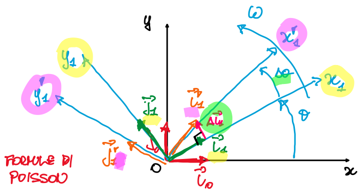
↳ FORMULE DI POISSON

→ Formule di Poisson

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{i}_1}{\Delta t} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{i}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 \end{aligned}}$$

FORMULE DI POISSON



S (xOy) SISTEMA FISSO

$S_1(x_1Oy_1)$ CON CENTRO IN O

$S_1'(x_1'Oy_1')$ S_1 DOPO dt

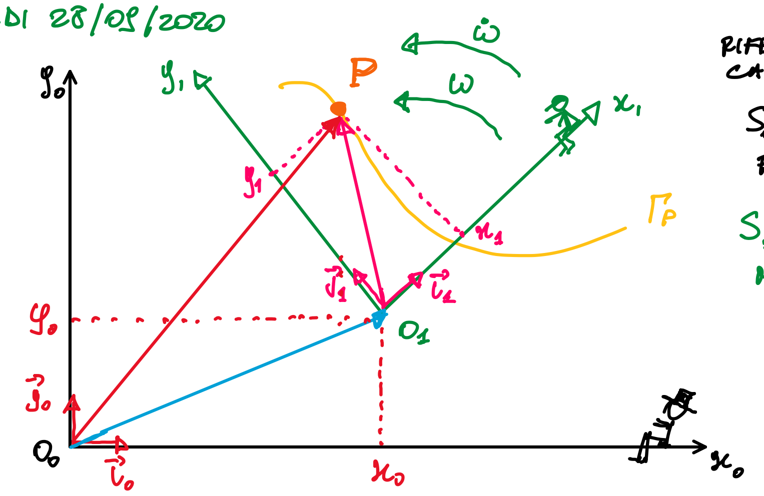
$$\left.\begin{aligned} \vec{i}_1 &= e^{i\theta} \\ \vec{j}_1 &= i e^{i\theta} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{aligned} \frac{d\vec{i}_1}{dt} &= i\dot{\theta} e^{i\theta} = \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} &= -\dot{\theta} e^{i\theta} \end{aligned}$$

Lezione lunedì 5 ottobre 2020

lunedì 5 ottobre 2020 10:25

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

→ RECUPERARE LE FORMULE DI POISSON DALLA LEZIONE DI LUNEDI 28/09/2020



RIFERIMENTI CARTESIANI

$S_0(x_0 O_0 y_0)$ FISSO (INERZIALE)

$S_1(x_1 O_1 y_1)$ MOBILE

- VETTORE POSIZIONE :

$$(P-O_0) = (O_1 - O_0) + (P - O_1)$$

ESPRIMENDO LA POSIZIONE DI P NEL SISTEMA S_0 COME POSIZIONE DI P IN S_1 + POSIZIONE RELATIVA DI O_1 RISPETTO AD O_0

- VELOCITA'

$\hookrightarrow$ $(P-O_0) = (x_0 \vec{i}_0 + y_0 \vec{j}_0) + (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P-O_0) = \frac{d}{dt}(x_0\vec{i}_0 + y_0\vec{j}_0) + \frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) =$$

$$= \dot{x}_0\vec{i}_0 + \dot{y}_0\vec{j}_0 + \boxed{\frac{d\vec{i}_1}{dt}} x_1 + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \boxed{\frac{d\vec{j}_1}{dt}} y_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1$$

$$\boxed{\vec{\omega}\wedge}\vec{i}_1 x_1 + \boxed{\vec{\omega}\wedge}\vec{j}_1 y_1 = \vec{\omega}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) = \vec{\omega}\wedge(P-O_1)$$

$$\vec{v}_P = \dot{x}_0\vec{i}_0 + \dot{y}_0\vec{j}_0 + \vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 =$$

$$= \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{v}_{P}$$

$\vec{v}_{O_1}$ → Velocità di trascinamento di O_1

$\vec{\omega}\wedge(P-O_1)$ → componente del moto rotatorio del sistema S_1

Velocità di trascinamento

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P_{tr}} + \vec{v}_{P_{rel}}$$

- **ACCELERAZIONE**

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\vec{v}_P = \frac{d^2}{dt^2}(P-O_0) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{v}_{P_{rel}}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\underset{①}{\dot{x}_0\vec{i}_0 + \dot{y}_0\vec{j}_0} + \underset{②}{\vec{\omega}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1)} + \underset{③}{\dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_0\vec{i}_0 + \dot{y}_0\vec{j}_0\right) = \ddot{x}_0\vec{i}_0 + \ddot{y}_0\vec{j}_0 \quad ①$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1)\right) = \dot{\vec{\omega}}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) + \vec{\omega}\wedge\frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{v}_{P_{rel}}\right) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{v}_{P_{rel}} \quad ②$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1\right) = \frac{d}{dt}\vec{v}_{P_{rel}} = \boxed{\frac{d\vec{i}_1}{dt}}\dot{x}_1 + \ddot{x}_1\vec{i}_1 + \boxed{\frac{d\vec{j}_1}{dt}}\dot{y}_1 + \ddot{y}_1\vec{j}_1 \quad ③$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{i}_1\,\dot{x}_1 + \vec{\omega}\wedge\vec{j}_1\,\dot{y}_1 = \vec{\omega}\wedge(\dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1) = \vec{\omega}\wedge\vec{v}_{P_{rel}} \quad ③_{bis}$$

$$\vec{a}_P = \ddot{x}_0\vec{i}_0 + \ddot{y}_0\vec{j}_0 + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + (\ddot{x}_1\vec{i}_1 + \ddot{y}_1\vec{j}) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{P_{rel}} =$$

$$= \vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{a}_{P_{rel}} + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{P_{rel}}$$

acc. di … componente … componente … accelerazione …

trascinamento di O_1 · tangenziale · normale · relativa di P · accelerazione complementare o di Coriolis (1835)

componente rotatoria di S_1

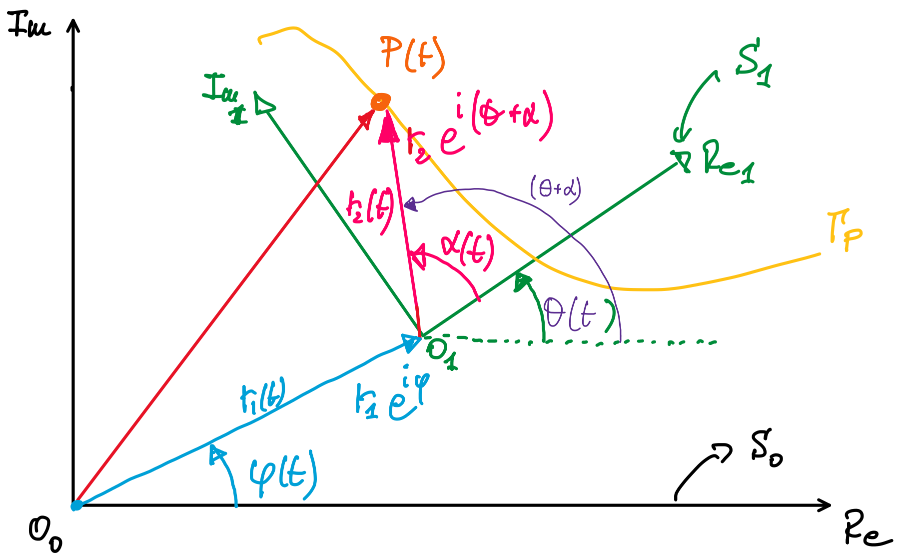
accelerazione di trascinamento

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_C}$$

- USO DEI NUMERI COMPLESSI PER LO STUDIO DEI SISTEMI MECCANICI

$$(O_1 - O_0) = r_1 e^{i\varphi}$$

$$(P - O_1) = r_2 e^{i(\theta+\alpha)}$$



$$(P - O_0) = (O_1 - O_0) + (P - O_1) =$$

$$= r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P - O_0) = \frac{d}{dt}\left(r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{i(\theta+\alpha)}\right)$$

$$\vec{v}_P = \dot{r}_1 e^{i\varphi} + i r_1 \dot{\varphi} e^{i\varphi} + \dot{r}_2 e^{i(\theta+\alpha)} + i r_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi}}_{\text{trascinamento di } O_1} + \underbrace{i r_2 \dot{\theta}\, e^{i(\theta+\alpha)}}_{\text{moto di rotazione di } S_1}} + \underbrace{(\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)}}_{\text{moto relativo di P}} =$$

$$= \vec{v}_{P_{tr}} + \vec{v}_{P_{rel}}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\vec{v}_P = \frac{d}{dt}\left((\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi} + i r_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)} + (\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} \right) =$$

$$= (\ddot{r}_1 + i \dot{r}_1 \dot{\varphi} + i r_1 \ddot{\varphi}) e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}(\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi} +$$

$$+ (i \dot{r}_2 \dot{\theta} + i r_2 \ddot{\theta}) e^{i(\theta+\alpha)} - (\dot{\theta}+\dot{\alpha}) r_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)} +$$

$$+ (\ddot{r}_2 + i \dot{r}_2 \dot{\alpha} + i r_2 \ddot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} + i(\dot{\theta}+\dot{\alpha})(\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(\ddot{r}_1 + 2i \dot{r}_1 \dot{\varphi} + i r_1 \ddot{\varphi} - r_1 \dot{\varphi}^2) e^{i\varphi}}_{\text{trascinamento di } O_1 = \vec{a}_{O_1}} \underbrace{\underbrace{- r_2 \dot{\theta}^2 e^{i(\theta+\alpha)} + i r_2 \ddot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1)}}_{\text{moto di rotazione di } S_1}}_{\vec{a}_{P_{tr}}} +$$

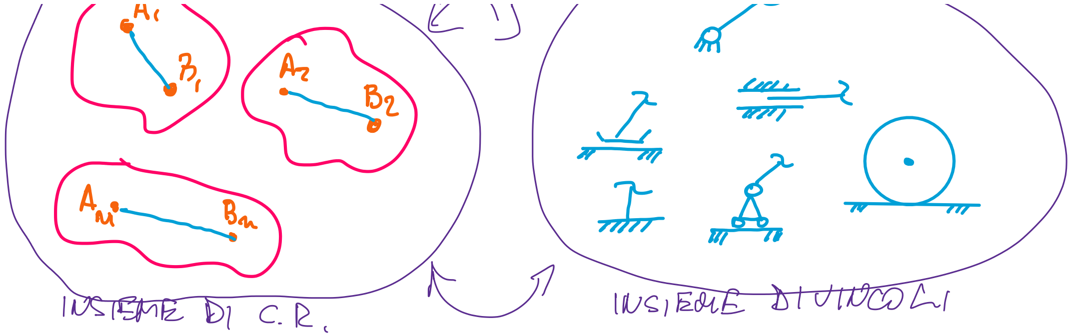
$$+ \underbrace{(\ddot{r}_2 + 2i \dot{r}_2 \dot{\alpha} + i r_2 \ddot{\alpha} - r_2 \dot{\alpha}^2) e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec{a}_{P_{rel}}} + \underbrace{i\, 2\dot{\theta}(\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec{a}_{P_{cor}}} =$$

$$= \vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{cor}}$$

• CINEMATICA DEI SISTEMI MECCANICI

STRUTTURE

G.d.L. < 0

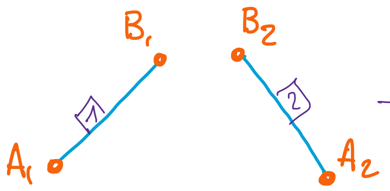


⇒

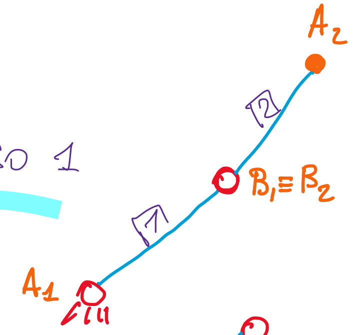
MECCANISMI

SISTEMI MECCANICI

G.d.L > 0



⟶ CASO 1

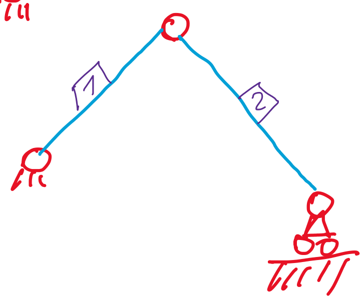


2 C.R. × 3 GdL = 6 GdL

2 CERNIERE × 2 GdV = −4 GdV

2 GdL → MECCANISMO

⟶ CASO 2



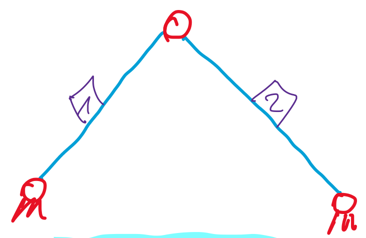
2CR × 3 GdL = 6 GdL

2 CERNIERE × 2 GdV = −4 GdV

1 CARRELLO × 1 GdV = −1 GdV

1 GdL → MECCANISMO

⟶ CASO 3



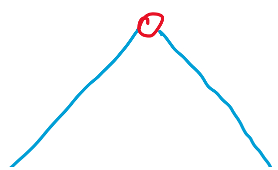
2CR × 3 GdL = 6 GdL

3 CERNIERE × 2 GdV = −6 GdV

0 GdL → STRUTTURA (ISOSTATICA)

STATICA ←

⟶ CASO 4



2 CR × 3 GdL = 6 GdL

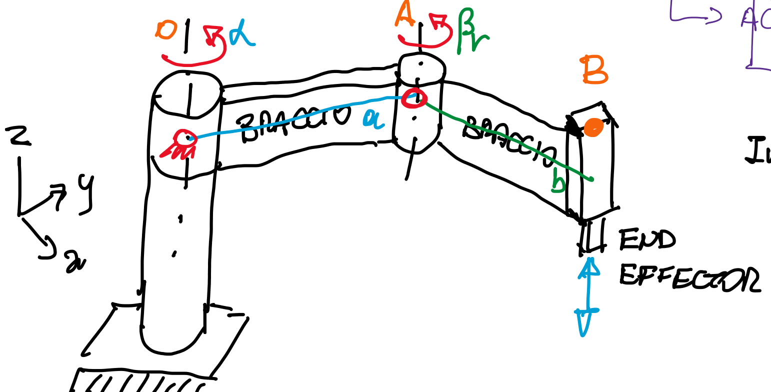
2 CERNIERE x 2 GdV = -4 GdV
1 INCASTRO x 3 GdV = -3 GdV

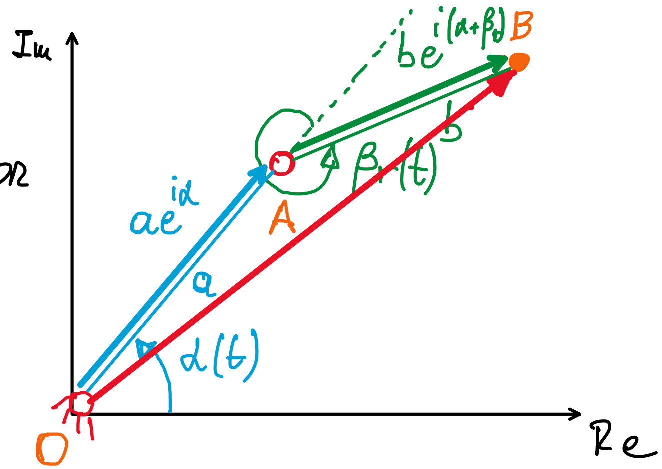
-1 GdL → STRUTTURA (IPERSTATICA)

CONSIDERARE I CORPI COME ELASTICI

CINEMATICA DI UN ROBOT RR(P)

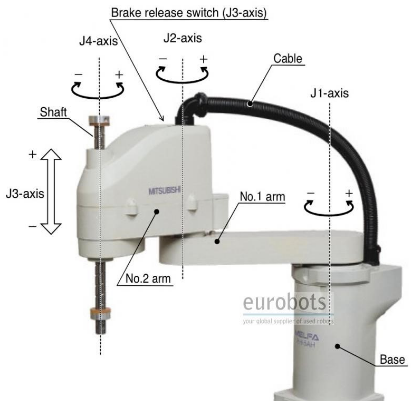
↳ ACCOPPIAMENTO ROTOIDALE (CERNIERA NEL PIANO)
↳ ACCOPPIAMENTO PRISMATICO (MOVIMENTO DI B ⊥ PIANO)





2 G.d.L

DATI:
$a, b, \alpha(t), \beta_r(t)$



EQUAZIONE DI CHIUSURA (SOMMA VETTORIALE)

$$\boxed{(B-O) = (A-O) + (B-A)}$$

$$x_B + i y_B = a e^{i\alpha} + b e^{i(\alpha+\beta_r)} \longrightarrow \text{2 EQ SCALARI (FORMULA DI EULERO)}$$

$$\begin{cases} x_B = a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta_r) \\ y_B = a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta_r) \end{cases}$$

$$\vec{v}_B = \frac{d}{dt}(x_B + i y_B) = \frac{d}{dt}\left(a e^{i\alpha} + b e^{i(\alpha+\beta_r)}\right) =$$

$$= i\dot{\alpha} a e^{i\alpha} + i(\dot{\alpha}+\dot{\beta}_r) b e^{i(\alpha+\beta_r)} \longrightarrow \text{FORMULA DI EULERO}$$

$$i\dot{\alpha} a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + i(\dot{\alpha}+\dot{\beta}_r) b\left(\cos(\alpha+\beta_r) + i\sin(\alpha+\beta_r)\right)$$

$\downarrow$

2 EQ SCALARI

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -\dot{\alpha} a\sin\alpha - (\dot{\alpha}+\dot{\beta}_r) b\sin(\alpha+\beta_r) \\ \dot{y}_B = \dot{\alpha} a\cos\alpha + (\dot{\alpha}+\dot{\beta}_r) b\cos(\alpha+\beta_r) \end{cases}$$

Lezione lunedì 12 ottobre 2020

lunedì 12 ottobre 2020 10:19

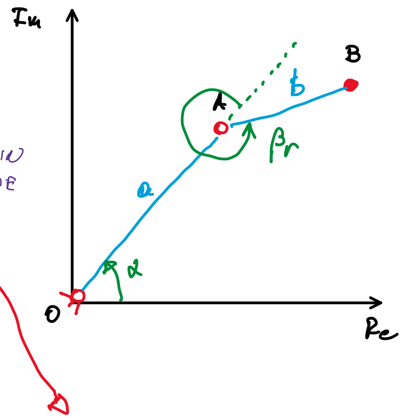
CATENE CINEMATICHE APERTE

↳ ROBOT PLANARI

↳ DEFINIZIONE DEL "WORKSPACE"

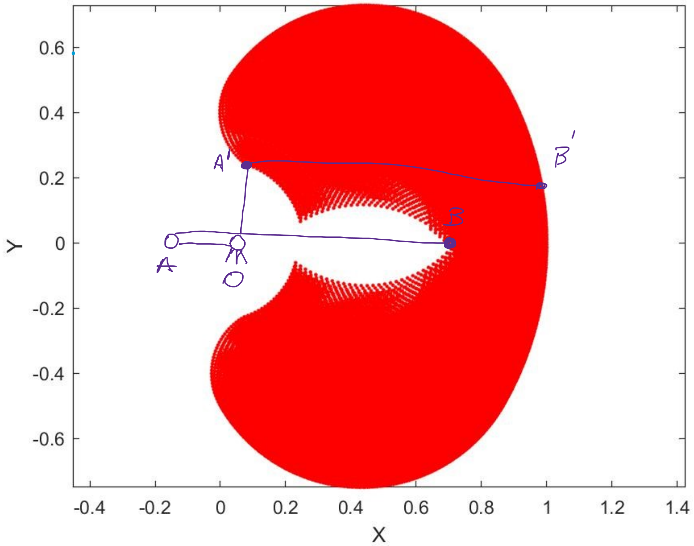
NON È DETTO IN GENERALE CHE
$0 \leq \alpha < 2\pi$
$0 \leq \beta_r < 2\pi$

"WORKSPACE" NEL PIANO: PORZIONE DI PIANO RAGGIUNGIBILE DAL MIO MANIPOLATORE VARIANDO α e β_r



PER CHI VOLESSE DIVERTIRSI A DISEGNARE WORKSPACE SEGUITE IL LINK!

Link a BeeP (installate prima il toolbox di Matlab, poi aprite lo script per vedere le istruzioni)

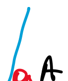


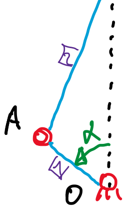
CATENE CINEMATICHE CHIUSE

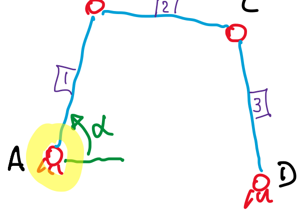
↳ BASE MECCANISMI TRADIZIONALI DELLA MECCANICA

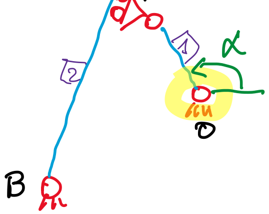
- MANOVELLISMO → MOTORI A COMBUSTIONE INTERNA / COMPRESSORE / POMPA ALTERNATIVA
- QUADRILATERO ARTICOLATO → BIOMECCANICA / TELAI / PANTOGRAFI / SOSPENSIONI AUTO (F1) / AZIONAMENTI SUP. CONTROLLO AERONAUTICHE
- GLIFO → MACCHINE UTENSILI /

TUTTI SISTEMI A 1 g.d.l.









[1] COLLEGATO AD UN MOTORE

MANOVELLISMO

2 CR × 3 GDL = 6 GDL

2 CERN × 2 GDV = −4 GDV

1 CARR. × 1 GDV = −1 GDV

1 GDL

QUADRILATERO ARTICOLATO

3 CR × 3 GDL = 9 GDL

4 CERN × 2 GDV = −8 GDV

1 GDL

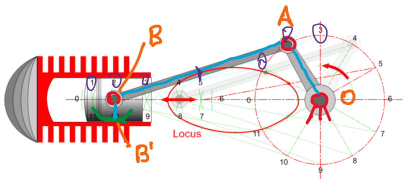
GLIFO

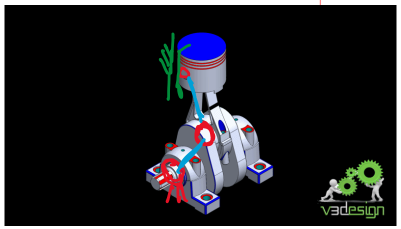
2 CR × 3 GDL = 6 GDL

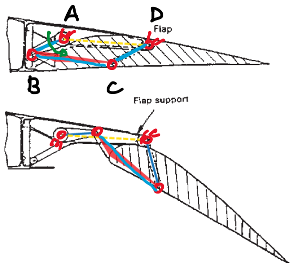
2 CERN × 2 GDV = −4 GDV

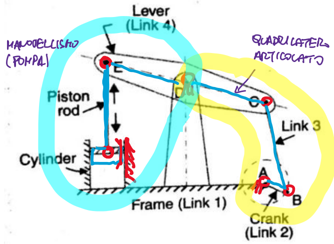
1 CARR. × 1 GDV = −1 GDV

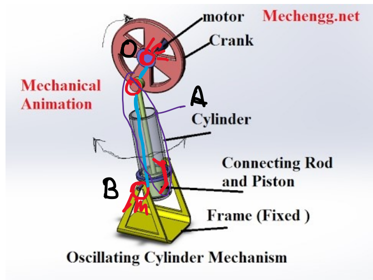
1 GDL

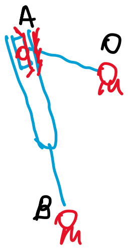


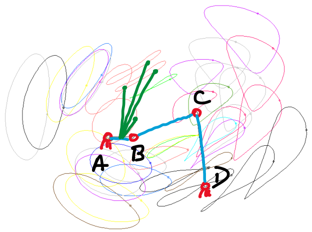


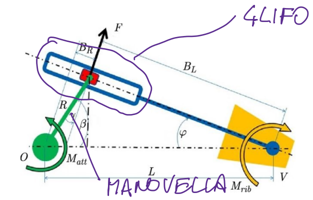


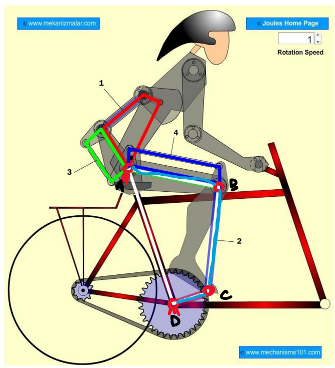


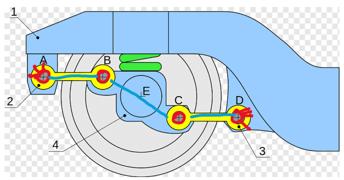


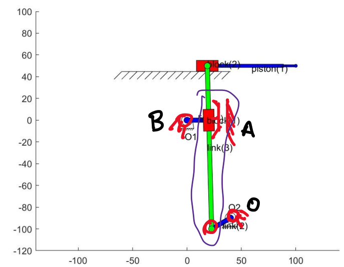












PER CHI VOLESSE UN SEMPLICE SIMULATORE DI SISTEMI ARTICOLATI IN AMBIENTE MATLAB

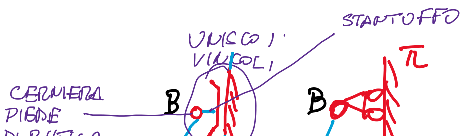
[Link al simulatore sistemi articolati (leggete il Readme.docx ed eseguite gli script suggeriti dopo aver estratto lo zip in una directory)]

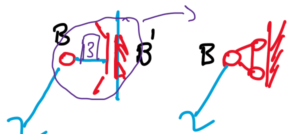
OVELLISMO

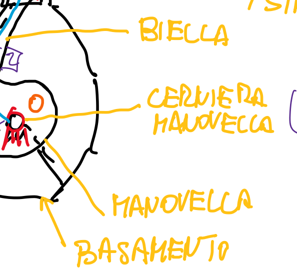
MOTORE A.C.I / POMPA / COMPRESSORE

ALTERNATIVI

PISTONE / ...



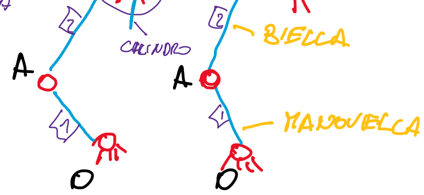




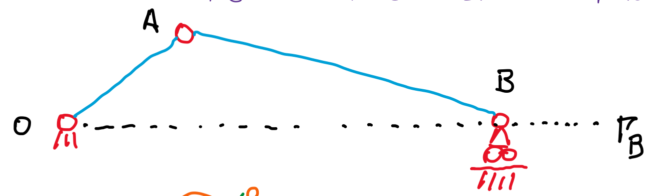
(TRACCIA NEL PIANO DELL'ALBERO A GOMITI)

MOTI DEI C.R. $\boxed{1}$: ROTATORIO

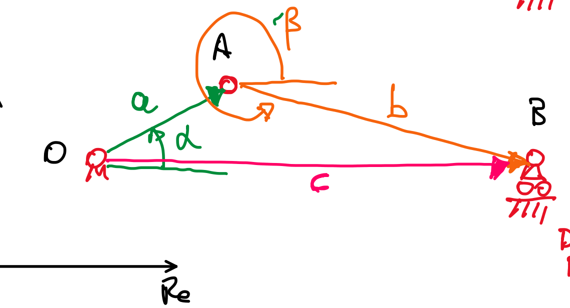
$\boxed{2}$: ROTOTRASLATORIO



(ROTAZIONE DI 90° DEL MECCANISMO PER RAGIONI PRATICHE



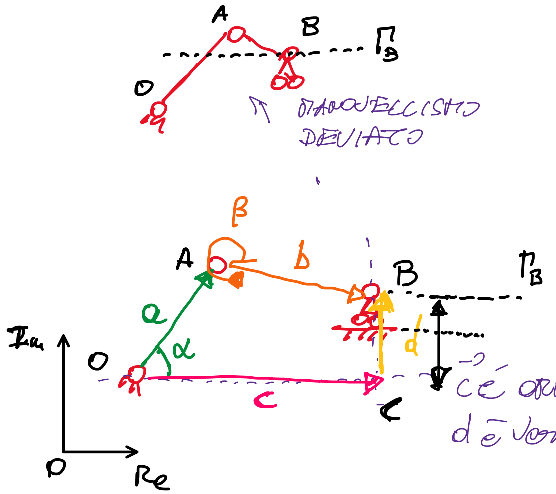
(SE r_B PASSA PER O ⇒ MANOVELLISMO CENTRATO)



$\vec{c}$ è orizzontale $\rightarrow c e^{i0} = c$

DATI DEL PROBLEMA

$a, b, \alpha(t)$



$\vec{c}$ è orizzontale $c e^{i0} = c$

d è verticale $d e^{i\pi/2} = id$

$$(A-O)+(B-A)=(C-O)+(B-C)$$

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c + id$$

DATI DEL PROBLEMA

$a, b, d, \alpha(t)$

$$a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + b(\cos\beta + i\sin\beta) = c + id$$

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\boxed{\beta} = \boxed{c} \\ a\sin\alpha + b\sin\boxed{\beta} = d \end{cases}$$

$$\sin\beta = \frac{d - a\sin\alpha}{b}$$

...ONE $(A-O)+(B-A)=(B-O)$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$ EQUAZIONE DI CHIUSURA

...ARE $a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c$ ⊛

$\hookrightarrow$ $a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + b(\cos\beta + i\sin\beta) = c$

...ZIONE
...E Re E Im

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} \begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\boxed{\beta} = \boxed{c} \\ a\sin\alpha + b\sin\boxed{\beta} = 0 \end{cases}$$

DETERMINO β e c

↳ SISTEMA DI EQ. TRASCENDENTI

DALLA II

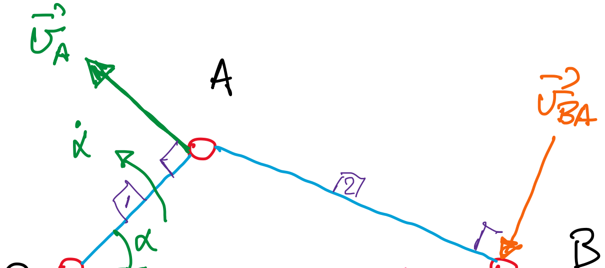
$$\beta(t) = \arcsin\left(-\frac{a\sin\alpha}{b}\right)$$

$$\sin\beta = -\frac{a\sin\alpha}{b}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$$

SOSTITUISCO β NELLA I

$$c(t) = a\cos\alpha + b\sqrt{1-\left(\frac{a\sin\alpha}{b}\right)^2} \quad \alpha(t)$$

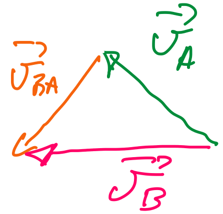


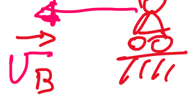
...OCITA'
...C
...O

$$i\dot{\alpha} a e^{i\alpha} + i\dot{\beta} b e^{i\beta} = \dot{c} \quad ⊛$$

CHIUSURA

$$\vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_B$$





$$i\dot{\alpha}a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + i\dot{\beta}b(\cos\beta + i\sin\beta) = \dot{c}$$

$$\begin{cases} \text{I} \quad -\dot{\alpha}a\sin\alpha + -\boxed{\dot{\beta}}b\sin\beta = \boxed{\dot{c}} \\ \text{II} \quad \dot{\alpha}a\cos\alpha + \boxed{\dot{\beta}}b\cos\beta = 0 \end{cases}$$

DETERMINARE $\dot{\beta}$ E $\dot{c}$

← SISTEMA ALGEBRICO

$$\dot{\beta}(t) = -\dot{\alpha}\,\frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta}$$

$$\dot{c}(t) = -\dot{\alpha}a(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\beta) \quad \boxtimes$$

ACCELERAZIONE

C

$$i\ddot{\alpha}a e^{i\alpha} - \dot{\alpha}^2 a e^{i\alpha} + i\ddot{\beta}b e^{i\beta} - \dot{\beta}^2 b e^{i\beta} = \ddot{c}$$

$$\vec{a}_{A_t} + \vec{a}_{A_n} + \vec{a}_{BA_t} + \vec{a}_{BA_n} = \vec{a}_B$$

$$\begin{cases} -\ddot{\alpha}a\sin\alpha - \dot{\alpha}^2 a\cos\alpha - \boxed{\ddot{\beta}}b\sin\beta - \dot{\beta}^2 b\cos\beta = \boxed{\ddot{c}} \\ \ddot{\alpha}a\cos\alpha - \dot{\alpha}^2 a\sin\alpha + \boxed{\ddot{\beta}}b\cos\beta - \dot{\beta}^2 b\sin\beta = 0 \end{cases}$$

DETERMINARE $\ddot{\beta}$ E $\ddot{c}$

← SISTEMA ALGEBRICO

JACOBIANO

PUO' ESSERE UTILE ESPRIMERE LA VELOCITÀ DI UN PUNTO IN FUNZIONE DELLA COORDINATA LIBERA: AD ESEMPIO $\vec{v}_B = \dot{c}$ COME FUNZIONE DI $\alpha(t)$

$$\dot{c} = \underbrace{\Lambda(\alpha)}_{\text{JACOBIANO}}\,\dot{\alpha}$$

"COME IL MECCANISMO TRASFORMA LA VELOCITÀ (ANGOLARE) $\dot{\alpha}$ NELLA VELOCITÀ DI B"

$$\dot{c}(t) = -\dot{\alpha}\,a\left[\sin\alpha - \cos\alpha\tan\left(\arcsin\left(\frac{-a\sin\alpha}{b}\right)\right)\right] = \Lambda(\alpha)\,\dot{\alpha}$$

CALCOLO ACCELERAZIONE $\frac{d}{dt}\dot{c}(t)$

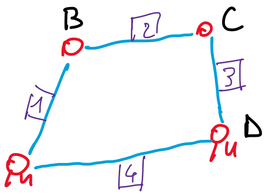
$$\ddot{c} = \frac{d}{dt}\Lambda(\alpha)\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}\Lambda(\alpha) + \frac{\partial\Lambda(\alpha)}{\partial\alpha}\dot{\alpha}^2$$

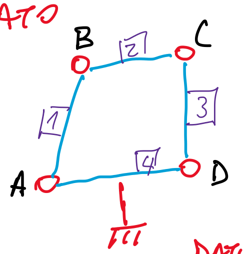
$$\ddot{\ } = \frac{d}{dt}\Lambda(\alpha)\,\dot\alpha = \ddot\alpha\,\Lambda(\alpha) + \frac{\partial \ }{\partial\alpha}\,\dot\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\Lambda(\alpha)\cdot\dot\alpha$$

$$\frac{\partial\Lambda(\alpha)}{\partial t}\cdot\frac{d\alpha}{dt}\cdot\dot\alpha = \frac{\partial\Lambda(\alpha)}{\partial t}\cdot\dot\alpha^2$$

QUADRILATERO ARTICOLATO

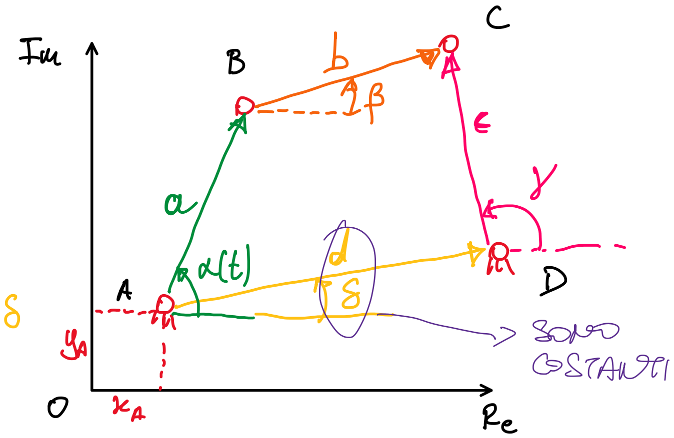




DATI DEL PROBLEMA

a, b, c, d, δ

$\alpha(t)$



ZIONE

$$(B-A)+(C-B)=(D-A)+(C-D)$$ EQUAZIONE DI CHIUSURA

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = d e^{i\delta} + c e^{i\gamma} \quad (*)$$

$$a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + b(\cos\beta + i\sin\beta) = d(\cos\delta + i\sin\delta) + c(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

$$a\cos\alpha + b\cos\boxed{\beta} = d\cos\delta + c\cos\boxed{\gamma}$$ → DETERMINARE β e γ

$$a\sin\alpha + b\sin\boxed{\beta} = d\sin\delta + c\sin\boxed{\gamma}$$ ↳ EQUAZIONI TRASCENDENTI

CITA'

TA

RA

$$i\dot\alpha a e^{i\alpha} + i\boxed{\dot\beta} b e^{i\beta} = i\boxed{\dot\gamma} c e^{i\gamma} \quad (*)$$

↳ 2 EQ SCALARI → DETERMINARE $\dot\beta$ E $\dot\gamma$

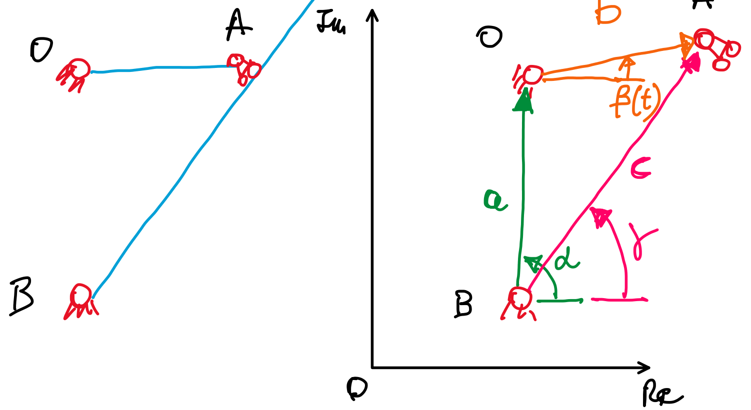
LERAZIONE

ATA

$$i\ddot\alpha a e^{i\alpha} - \dot\alpha^2 a e^{i\alpha} + i\boxed{\ddot\beta} b e^{i\beta} - \dot\beta^2 b e^{i\beta} = i\boxed{\ddot\gamma} c e^{i\gamma} - \dot\gamma^2 c e^{i\gamma}$$

↳ 2 EQ SCALARI → DETERMINARE $\ddot\beta$ E $\ddot\gamma$

LEO



DATI DEL PROBLEMA

$a, \alpha, b, \beta(t)$

POSIZIONE

$$(O-B)+(A-O)=(A-B)$$

$$a e^{i\alpha}+b e^{i\beta}=c e^{i\gamma}$$ EQ DI CHIUSURA

$$\begin{cases} a\cos\alpha+b\cos\beta=\boxed{c}\cos\boxed{\gamma} \\ a\sin\alpha+b\sin\beta=\boxed{c}\sin\boxed{\gamma} \end{cases}$$ $\rightarrow$ DETERMINARE c E γ

EQ TRASCENDENTI

VELOCITA'

ACCELERAZIONE

Lezione lunedì 19 ottobre 2020

lunedì 19 ottobre 2020 10:11

DINAMICA

↳ METODI PER LO STUDIO DELLA DINAMICA

- PRINCIPIO DI D'ALEMBERT → ESTENDE I METODI DELLA STATICA CONSIDERANDO EQUAZIONI DI EQUILIBRIO "DINAMICHE"
  ESTENSIONE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA ALLA DINAMICA INTRODUCENDO FORZE D'INERZIA (FORZE E COPPIE)
- METODI "ENERGETICI" PRINCIPI DI TIPO CONSERVATIVO
  - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
  - BILANCIO DI POTENZE / EQUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA
  - EQUAZIONE DI LAGRANGE

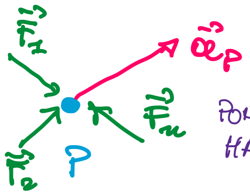
PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

- II PRINCIPIO DELLA DINAMICA

PER UN PUNTO

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (*)$$

COME È SCRITTA NON È UN'EQ. DI EQUILIBRIO (TERMINE A DX DELL'"=" PARI A 0)



PUNTO MATERIALE HA MASSA m

D'ALEMBERT

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$$

DEFINISCO QUESTO "PRODOTTO" COME FORZA D'INERZIA

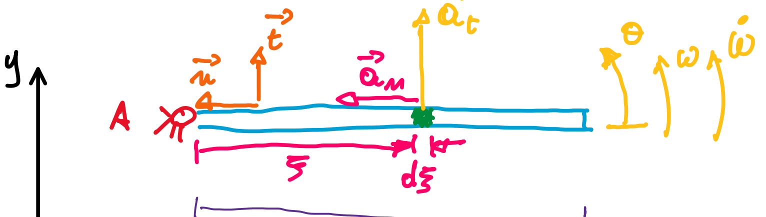
LA (*) DIVENTA $\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a} = \boxed{\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{in} = 0}$ UN'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO

LA FORZA D'INERZIA È CONSIDERATA DAI FISICI UNA FORZA "APPARENTE"

- APPLICAZIONE AD 1 CORPO RIGIDO

↳ SISTEMA EQUIVALENTE DELLE FORZE D'INERZIA (1 FORZA + 1 COPPIA PER C.R.)

ESEMPIO: TRAVE INCERNIERATA IN A (MOTO ROTATORIO)



DATI: TRAVE È OMOGENEA

$$dm = m\frac{d\xi}{L}$$

MASSA ELEMENTO

MASSA TOTALE

$O \rightarrow x$ $\qquad L$ $\qquad d\xi$

$\theta, \; \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot\theta, \; \dot\omega = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot\theta$

PER DEFINIZIONE DI FORZA D'INERZIA, LA FORZA D'INERZIA DELL'ELEMENTO $d\xi$ È:

$$d\vec{F}_{in} = -dm\,\vec{a}$$

DEVO DETERMINARE $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$

$\vec{a}_t(\xi) = \xi\ddot\theta\vec{t}$ COMPONENTE TANGENTE DELL'ACCELERAZIONE $\rightarrow$ $dF_{in_t}(\xi) = -dm\,\vec{a}_t(\xi) = -m\frac{d\xi}{L}\xi\ddot\theta\vec{t}$

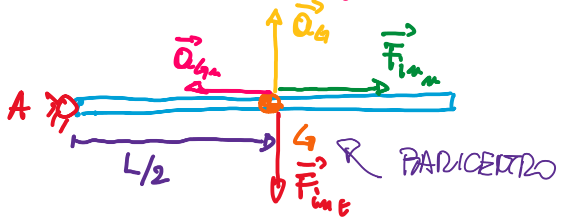
$\vec{a}_n(\xi) = \xi\dot\theta^2\vec{n}$ COMPONENTE NORMALE DELL'ACCELERAZIONE $\rightarrow$ $dF_{in_n}(\xi) = -dm\,\vec{a}_n(\xi) = -m\frac{d\xi}{L}\xi\dot\theta^2\vec{n}$

COMPONENTI INFINITESIME DELLA FORZA D'INERZIA

$$\vec{F}_{in_t} = \int_0^L d\vec{F}_{in_t}(\xi) = -\frac{m\ddot\theta}{L}\int_0^L \xi\,d\xi\,\vec{t} = -m\underbrace{\boxed{\frac{L}{2}\ddot\theta\vec{t}}}_{\vec{a}_{G_t}}$$

$$\vec{F}_{in_n} = \int_0^L d\vec{F}_{in}(\xi) = -\frac{m\dot\theta^2}{L}\int_0^L \xi\,d\xi\,\vec{n} = -m\underbrace{\boxed{\frac{L}{2}\dot\theta^2\vec{n}}}_{\vec{a}_{G_n}}$$

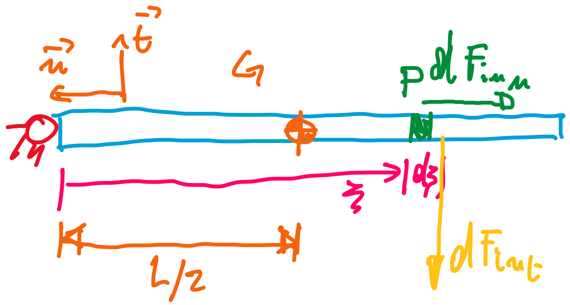
ACCELERAZIONE DI UN PUNTO POSTO A $L/2$ NELLA TRAVE $\Rightarrow$ BARICENTRO DELLA TRAVE



$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_{in_t} &= -m\,\vec{a}_{G_t}\\ \vec{F}_{in_n} &= -m\,\vec{a}_{G_n}\end{aligned}\right\} \vec{F}_{in} = -m\,\vec{a}_G$$

RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA DI TUTTO IL CORPO RIGIDO È PARI ALL'ACCELERAZIONE DEL BARICENTRO PER LA MASSA DEL C.R. E VERSO OPPOSTO ALL'ACCELERAZIONE

COPPIA RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA (INFINITESIME)



MOMENTO DELLE $d\vec{F}_{in}$ RISPETTO AL BARICENTRO G

$$d\vec{F}_{in_t} = -m\frac{d\xi}{L}\xi\ddot\theta\vec{t}$$

$$\vec{C}_{in} = \int_0^L (P-G)\wedge d\vec{F}_{in} = \int_0^L (P-G)\wedge d\vec{F}_{in_t} =$$

$$= -\frac{m\ddot\theta}{L}\int_0^L \xi\left(\xi - L/2\right)d\xi\,\vec{K} =$$

$$(P-G) = \left(\xi - \frac{L}{2}\right)\vec{n}$$

$$= -\boxed{m}\ddot{\theta}\boxed{\frac{L^2}{12}}\vec{k} =$$ → MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO DELLA TRAVE J_G

$$\doteq -J_G\ddot{\theta}\vec{k}$$

RISULTANTE DELLE COPPIE D'INERZIA È PARI AD UNA COPPIA DATA DA MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO PER ACCELERAZIONE ANGOLARE DEL CORPO RIGIDO, VERSO OPPOSTO ALL'ACCELERAZIONE E DIREZIONE ⊥ PIANO

PER OGNI CORPO RIGIDO:

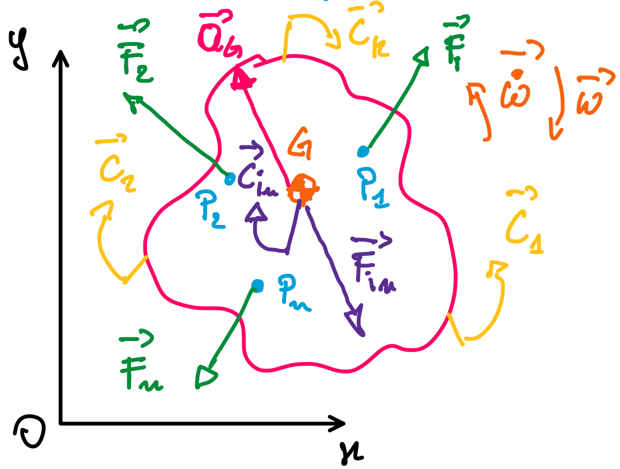
SISTEMA EQUIVALENTE DELLE FORZE D'INERZIA

MASSA DEL C.R.

$$\begin{cases} \vec{F}_{in} = -\boxed{m}\,\vec{a}_G \\ \vec{C}_{in} = -\boxed{J_G}\,\ddot{\vec{\theta}} = -J_G\,\dot{\vec{\omega}} \end{cases}$$

COME LA MASSA È DISTRIBUITA ATTORNO AL BARICENTRO → MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA PER UN CORPO RIGIDO

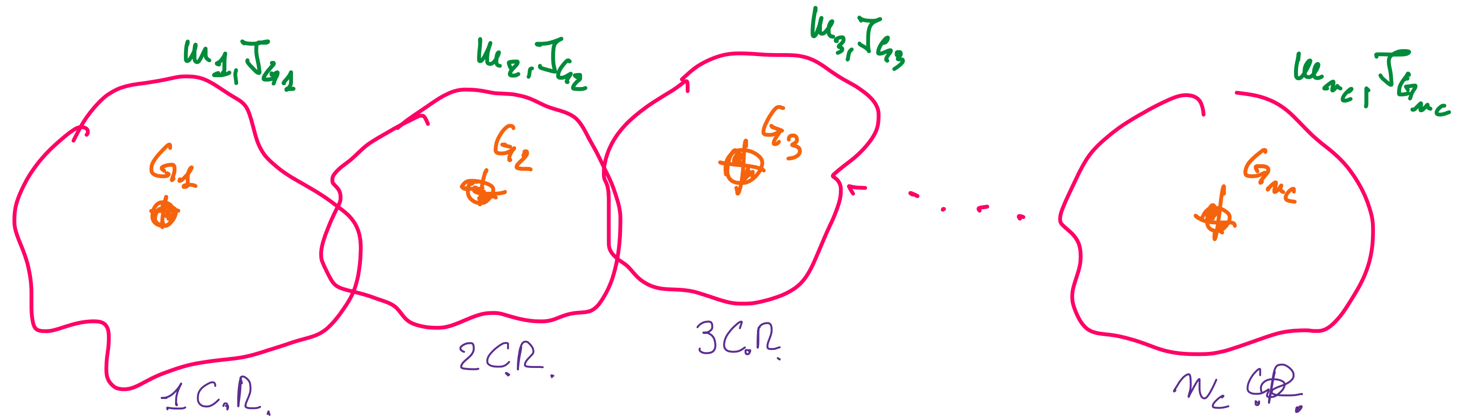


$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j + \vec{F}_{in} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} (P_j - O)\wedge\vec{F}_j + (G-O)\wedge\vec{F}_{in} + \sum_{r=1}^{n_{11}} \vec{C}_r + \vec{C}_{in} = 0 \end{cases}$$

POLO DEI MOMENTI NON NECESSARIAMENTE ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

SISTEMI DI CORPI RIGIDI

SISTEMI DI CORPI RIGIDI



PER OGNI C.R.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{in,i} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} (P_{i,j} - O) \wedge \vec{F}_{i,j} + \sum_{r=1}^{n_M} \vec{C}_{i,r} + (G_i - O) \wedge \vec{F}_{in,i} + \vec{C}_{in,i} = 0 \end{cases}$$

$j = 1,2,\dots,n$ indice delle forze esterne per ogni C.R

$i = 1,2,\dots,n_c$ indice dei CORPI RIGIDI

$r = 1,2,\dots,n_M$ indice delle coppie/momenti esterni per ogni C.R.

N.B.

$\wedge$: PRODOTTO VETTORIALE

$\times$: PRODOTTO SCALARE

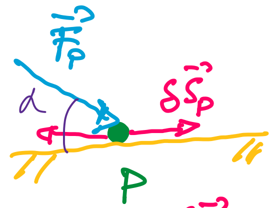
- METODI ENERGETICI
  - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLA ✱

$$\delta L = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} \times \delta \vec{P}_{i,j}}_{\text{LAVORO FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_c} \sum_{r=1}^{n_M} \vec{C}_{i,r} \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO MOMENTI/COPPIE ESTERNI}} + \dots$$

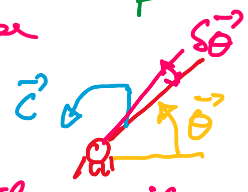
LAVORO VIRTUALE

$$\delta L = \vec{F}_P \times \delta \vec{S}_P$$



$\delta \vec{S}_P$ è compatibile con il vincolo

$$\delta L = \vec{C} \times \delta \vec{\theta}$$



$\delta\theta$ è compatibile con il vincolo

$$+\sum_{1}^{n_c}{}_i \Big(\underbrace{-m_i \vec{a}_{G_i} \times \delta \vec{G}_i}_{\text{LAVORO FORZA D'INERZIA}} \underbrace{- J_{G_i} \ddot{\vec{\omega}}_i \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO COPPIA D'INERZIA}} \Big) = 0$$

EVIDENZIO IL δL CON LE COORDINATE FISICHE

$$\delta L = \sum_{1}^{n_c}{}_i \sum_{1}^{n}{}_j \left(F_{x_{i,j}} \delta x_{i,j} + F_{y_{i,j}} \delta y_{i,j} \right) + \sum_{1}^{n_c}{}_i \sum_{1}^{n_M}{}_r C_i \delta\theta_i +$$

$$+ \sum_{1}^{n_c}{}_i \left(-m_i a_{G_{i_x}} \delta x_{G_i} - m_i a_{G_{i_y}} \delta y_{G_i} - J_{G_i} \ddot{\theta}_i \delta \theta_i \right)$$

1 equazione

$x_{G_i} = x_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$

$y_{G_i} = y_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$

$\theta_i = \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$

LE q_s SONO LE COORDINATE CHE "DESCRIVONO" I GdL DEL SISTEMA DI C.R.

$$\begin{cases} \delta x_{G_i} = \sum_{s=1}^{n_{GdL}} \dfrac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta y_{G_i} = \sum_{s=1}^{n_{GdL}} \dfrac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta \theta_i = \sum_{s=1}^{n_{GdL}} \dfrac{\partial \theta_i}{\partial q_s} \delta q_s \end{cases}$$

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n_{GdL}} \left(\boxed{Q_s} + Q_{in,s} \right) \delta q_s = 0$$

1 equazione che è soddisfatta se tutti i termini tra parentesi sono uguali a 0

$$\begin{cases} Q_1 + Q_{in,1} = 0 \\ Q_2 + Q_{in,2} = 0 \\ \vdots \\ Q_{n_{GdL}} + Q_{in_{n_{GdL}}} = 0 \end{cases}$$

SISTEMA DI n_{GdL} EQUAZIONI

I "Q_s" SONO CHIAMATI "COMPONENTI LAGRANGIANE"

$$Q_{\dots} = \sum^{n_c} \left(-m_i a_{G_{\dots}} \frac{\partial x_{G_i}}{\dots} - m_i a_{G_{\dots}} \frac{\partial y_{G_i}}{\dots} - J_{G_i} \ddot{\theta}_i \frac{\partial \theta_i}{\dots} \right)$$

$$Q_{in,s} = \sum_{i=1} \Big(\cdots \, \partial q_s \cdots \, \partial q_s \cdots \, \partial q_s \Big)$$

I "$Q_{in,s}$" SONO LE "COMPONENTI LAGRANGIANE" DELLE FORZE D'INERZIA

$$Q_{in,1} = \sum_{i=1}^{nc} \left(-m_i a_{Gix} \frac{\partial x_{Gi}}{\partial q_1} - m a_{Giy} \frac{\partial y_{Gi}}{\partial q_1} - J_{Gi} \ddot{\theta}_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_1} \right)$$

ESEMPIO DI $Q_{in,s}$ PER LA PRIMA EQUAZIONE DI

Lezione lunedì 2 novembre 2020

lunedì 2 novembre 2020 10:09

TEOREMI ENERGETICI

- BILANCIO DI POTENZE
- TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA
- EQUAZIONE DI LAGRANGE

BILANCIO DI POTENZE

RIPRENDIAMO IN ESAME IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$\delta L = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_c}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} \times \delta\vec{P}_{i,j}}_{\text{LAVORO DELLE FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_c}\sum_{r=1}^{n_M} \vec{C}_{i,r} \times \delta\vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO MOMENTI/COPPIE ESTERNI}} + \sum_{i=1}^{n_c}\Big(\underbrace{-m_i\vec{a}_{G_i} \times \delta\vec{G}_i}_{\text{LAVORO FORZE D'INERZIA}} \underbrace{- J_{G_i}\dot{\vec{\omega}}_i \times \delta\vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO COPPIE D'INERZIA}}\Big) = 0$$

d/dt ↳

$$\sum_{i=1}^{n_c}\sum_{j=1}^{n} F_{i,j} \times \underbrace{\frac{d\vec{P}_{i,j}}{dt}}_{\vec{v}_{P_{i,j}}} + \sum_{i=1}^{n_c}\sum_{r=1}^{n_M} \vec{C}_{i,r} \times \underbrace{\frac{d\vec{\theta}_i}{dt}}_{\vec{\omega}_i} + \sum_{i=1}^{n_c}\Big(-m_i\vec{a}_{G_i} \times \underbrace{\frac{d\vec{G}_i}{dt}}_{\vec{v}_{G_i}} - J_{G_i}\dot{\vec{\omega}}_i \times \underbrace{\frac{d\vec{\theta}_i}{dt}}_{\vec{\omega}_i}\Big) = 0 \quad \otimes$$

$$W_{i,j} = \vec{F}_{i,j} \times \frac{d\vec{P}_{i,j}}{dt} = \vec{F}_{i,j} \times \vec{v}_{P_{i,j}}$$ POTENZA DELLA FORZA F_{ij}

$$W_{i,r} = \vec{C}_{i,r} \times \frac{d\vec{\theta}_i}{dt} = \vec{C}_{i,r} \times \vec{\omega}_i$$ POTENZA DELLA COPPIA/MOMENTO $C_{i,r}$

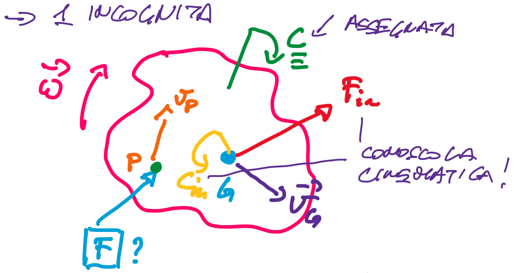
$$W_{in,i} = -m_i\vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} - J_{G_i}\dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}_i$$ POTENZA DEL SISTEMA EQUIVALENTE D'INERZIA DEL CORPO i-esimo

$i = 1, \dots, n_c$ (indice dei C.R.)
$j = 1, \dots, n$ (indice delle forze esterne agenti nel C.R. i-esimo)
$r = 1, \dots, n_M$ (indice delle coppie/momenti esterni agenti nel C.R. i-esimo)

$$\otimes \quad \sum_{i}^{n_c}\sum_{j}^{n} W_{i,j} + \sum_{i=1}^{n_c}\sum_{r=1}^{n_M} W_{i,r} + \sum_{i=1}^{n_c} W_{in,i} = 0$$ 1 EQUAZIONE → 1 INCOGNITA

$$\boxed{\sum W + \sum W_{in} = 0} \rightarrow$$

$\sum W$: POTENZA FORZE COPPIE/MOMENTI ESTERNI
$\sum W_{in}$: POTENZA FORZE COPPIE D'INERZIA



BILANCIO DI POTENZE (PER IL CALCOLO DI F)

$$\vec{F} \times \vec{v}_P + \vec{C} \times \vec{\omega} - m\,\vec{a}_G \times \vec{v}_G - J_G\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega} = 0$$

T UNICA INCOGNITA

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (DUALE DEL BILANCIO DI POTENZE)

- CALCOLO DELL'ENERGIA CINETICA DI UN C.R.

$$E_c = \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_P \times \vec{v}_P \, \rho \, dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_P^{\,2} \rho \, dV$$

$\vec{v}_P$, P, G, m

$\rho = \frac{dm}{dV}$

V volume infinitesimo
P punto generico
m massa del C.R

APPLICO TH DI RIVALS

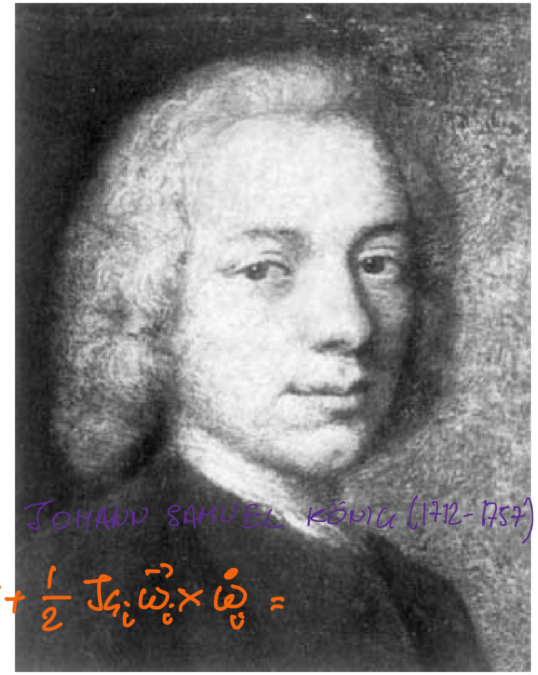
$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (P-G)$$

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{v}_G \times \vec{v}_G \underbrace{\int_V \rho \, dV}_{m} + \frac{1}{2}\vec{v}_G \times \left(\vec{\omega} \wedge \int_V (P-G)\rho \, dV\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{\omega} \wedge \int_V (P-G)\rho \, dV\right) \times \vec{v}_G + \boxed{\frac{1}{2}\,\omega^2 \int_V |P-G|^2 \rho \, dV}$$

MOMENTI STATICI RISPETTO AL BARICENTRO
G = 0

$$(\omega \wedge (P-G)) \times (\omega \wedge (P-G)) = \omega^2 |P-G|^2$$

$$\int_V |P-G|^2 \rho \, dV = J_G$$


JOHANN SAMUEL KÖNIG (1712-1757)

$$E_c = \frac{1}{2} m \, \vec{v}_G \times \vec{v}_G + \frac{1}{2} J_G \, \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \, v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \, \omega^2$$

TEOREMA DI KOENIG (KÖNIG)

SE DERIVO RISPETTO AL TEMPO LA E_{c_i} DEL C.R. i-esimo

d/dt

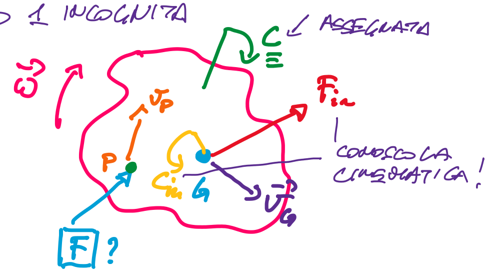
$$\frac{dE_{c,i}}{dt} = \frac{1}{2} m_i \vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} + \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{G_i} \times \vec{a}_{G_i} + \frac{1}{2} J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}_i + \frac{1}{2} J_{G_i} \vec{\omega}_i \times \dot{\vec{\omega}}_i =$$

$$= m_i \, \vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} + J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}_i = -W_i ;$$

$$W_{in,i} = -\frac{dE_{c,i}}{dt}$$ SE RIPRENDO L'ESPRESSIONE DEL BILANCIO DI POTENZE

$$\Sigma W + \Sigma W_{in} = 0 \Rightarrow \Sigma W = \frac{dE_c}{dt}$$ TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

1 EQUAZIONE → 1 INCOGNITA



BILANCIO DI POTENZE (PER IL CALCOLO DI F)

$$\vec{F} \times \vec{v}_P + \vec{C} \times \vec{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v}_G \times \vec{v}_G + \frac{1}{2} J_G \vec{\omega} \times \vec{\omega}\right) =$$

↑ UNICA INCOGNITA

$$= m \vec{a}_G \times \vec{v}_G + J_G \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega}$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE ("THE ULTIMATE" PER LA DINAMICA)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

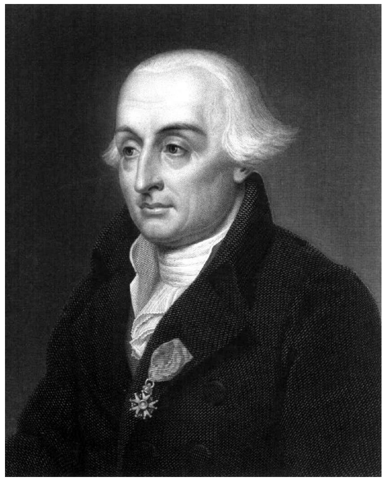
E_c : ENERGIA CINETICA

V : ENERGIA POTENZIALE

Q_k : COMPONENTE LAGRANGIANA $= \frac{\delta L}{\delta q_k}$

L : LAVORO FORZE ESTERNE
E DELLE INTERNE NON CONSERVATIVE

q_k : COORDINATE LIBERE INDIPENDENTI



GIUSEPPE LUIGI LAGRANGIA (NATO A TORINO)
AKA JOSEPH LUIS LAGRANGE 1736-1813

DIMOSTRAZIONE EQ. LAGRANGE

→ PRINCIPIO DI D'ALEMBERT + PLV

$$\sum_i^N \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i\right) \times \delta x_i = 0 \quad \text{per } i = 1,2,\dots,N$$ COORDINATE FISICHE

LA DESCRIZIONE DEL MOTO LA POSSO FARE ANCHE MEDIANTE LE COORDINATE GENERALIZZATE INDIPENDENTI q_k con $k=1,2,\dots,n$

$\vec{x}_i$ NON SONO ESPLICITAMENTE DIPENDENTI DAL TEMPO

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{per } i=1,2,\dots,N$$

SEPOLTO AL PANTHEON

CALCOLO LA VELOCITA' DELLE $\vec{x}_i$

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n = \sum_1^n{}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad \text{per } i=1,2,\dots,N$$

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots\dots$$

DATO CHE $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$ NON DIPENDE DA $\dot{q}_k \Rightarrow$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \quad \text{per } i=1,2,\dots,N \text{ e } k=1,2,\dots,n \quad ✱$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k}}_{1} + \dot{q}_k \cancel{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_k}} = 0 \rightarrow \vec{x}_i(q_k) \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$$

SPOSTAMENTI VIRTUALI DELLE $\vec{x}_i$

$$\delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_1^n{}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad k=1,2,\dots,n$$

SOSTITUISCO $\delta\vec{x}_i$ NELLA II PARTE DEL PLV

$$\sum_1^N{}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \delta\vec{x}_i = \sum_1^N{}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \sum_1^n{}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_1^n{}_k \left(\sum_1^N{}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k \quad \boxtimes$$

OGNI TERMINE DELL'EQ. PRECEDENTE LO SCRIVO COME

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right) - m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)$$

BARBATRUCCO!! $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\Rightarrow m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\boxed{m_i \dot{\vec{x}}_i} \times \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}}\right) - \boxed{m\,\dot{\vec{x}}_i} \times \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_k}} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\right]\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i\right) \quad ✱$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) \qquad - m\,\dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_k}$$

RIPRENDO LA $\boxtimes$ E SOSTITUISCO LA ✱

$$\sum_1^N{}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \delta\vec{x}_i = \sum_1^n{}_k \left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\right]\Big(\underbrace{\sum_1^N{}_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i}_{E_c}\Big)\right\}\delta q_k =$$

$$\sum_1^n \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\dots}\right) - \frac{\partial E_c}{\dots}\right]\delta q \dots$$

$$= \sum_{1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\right]\delta q_k \quad (1)$$

CONSIDERO LE FORZE ESTERNE $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t)$

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ESTERNE (PRIMO TERMINE DI ⊛)

$$\delta L = \sum_{1}^{N}{}_i \vec{F}_i \times \delta\vec{x}_i = \sum_{1}^{N}{}_i \vec{F}_i \times \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{1}^{n}{}_k\left(\sum_{1}^{N}{}_i \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = \sum_{1}^{n}{}_k Q_k \delta q_k \quad (2)$$

CONSIDERO IL LAVORO DI FORZE INTERNE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

$\hookrightarrow V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ LE FORZE CONSERVATIVE HANNO ENERGIA POTENZIALE

$$\sum_{1}^{N}{}_i \vec{F}_{I_i} \times \delta\vec{x}_i = \underbrace{\delta L_c}_{\text{CONSERVATIVE}} + \underbrace{\delta L_{nc}}_{\text{NON CONSERVATIVE}} = -\delta V + \sum_{1}^{n}{}_k Q_{nc_k}\delta q_k =$$

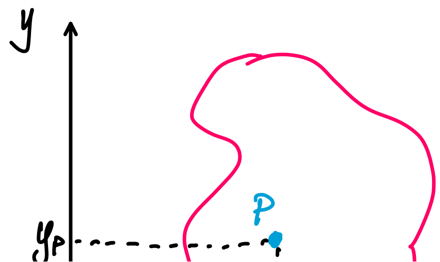
$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k\right) + \sum_{1}^{n}{}_k Q_{nc_k}\delta q_k = -\sum_{1}^{n}{}_k\left(\frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc_k}\right)\delta q_k \quad (3)$$

SOSTITUISCO (1) (2) (3) NELL'EQ DI D'ALAMBERT + PLV ⊛

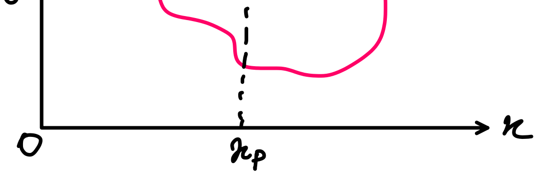
$$-\sum_{1}^{n}{}_k\left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc_k} - Q_k\right]\delta q_k = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{nc} + Q$$

NOTE:



DIMOSTRAZIONE DEL PERCHÉ IL MOMENTO STATICO RISPETTO AL BARICENTRO È NULLO



$$M^{(1)}_{Ox} = \int_V y_P \, \rho \, dV \qquad M^{(1)}_{Gx} = \int_V |y_P - y_G| \, \rho \, dV = 0$$

$$M^{(1)}_{Oy} = \int_V x_P \, \rho \, dV \qquad M^{(1)}_{Gy} = \int_V |x_P - x_G| \, \rho \, dV = 0$$

DEFINIZIONE DI MOMENTO STATICO RISPETTO AD O

DEF. $y_G = \dfrac{\int_V y_P \, \rho \, dV}{m} \Rightarrow y_G \int_V \rho \, dV = \int_V y_P \, \rho \, dV$

DEF $x_G = \dfrac{\int_V x_P \, \rho \, dV}{m} \Rightarrow x_G \int_V \rho \, dV = \int x_P \, \rho \, dV$

DEFINIZIONE DI BARICENTRO

NB: $\dfrac{d}{dt} L = W$

L: LAVORO W: POTENZA

EQUIVALENZA TH ENERGIA CINETICA

$$\Sigma W = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\downarrow \int_0^t dt$$

$$\int_0^t \Sigma W \, dt = \int_0^t \frac{dE_c}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$$

$$\Sigma L(t) - \underbrace{\Sigma L(0)}_{0} = \underbrace{E_c(t) - E_c(0)}_{\Delta E_c}$$

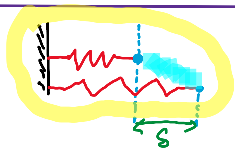
$$\Sigma L = \Delta E_c$$

Lezione lunedì 16 novembre 2020

lunedì 16 novembre 2020 10:16

- FORZE ELASTICHE / GRAVITAZIONALI NELL'EQ. DI LAGRANGE
- FORZE VISCOSE DISSIPATIVE NELL'EQ. DI LAGRANGE
- VIBRAZIONI MECCANICHE

FORZE ELASTICHE → MOLLA



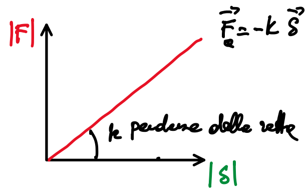
LA MOLLA HA IN GENERALE CARATTERISTICHE LINEARI →
→ LEGGE DI HOOKE

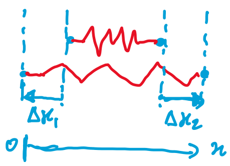
$\vec{F}_e = -k\vec{\delta}$

FORZA ELASTICA

RIGIDEZZA (PARAMETRO CARATTERISTICO DELLA MOLLA)

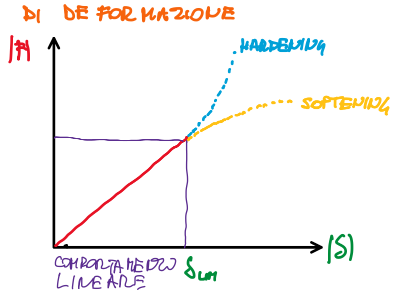
VARIAZIONE DI LUNGHEZZA DELLA MOLLA





$\vec{\delta} = (\Delta\vec{x}_1 - \Delta\vec{x}_2)$

NELLA REALTA' LE MOLLE SONO LINEARI SOLO IN UN CERTO INTERVALLO DI DEFORMAZIONE



δ_{lim} : DEFORMAZIONE LIMITE (SOGLIA DI LINEARITA')

• LAVORO DI DEFORMAZIONE DI UNA MOLLA → ENERGIA POTENZIALE DELLA MOLLA

$$L_{def} = \int_0^{\delta} \vec{F}_e \times d\eta = \int_0^{\delta} -k\eta\, d\eta = -\frac{1}{2}k\delta^2$$

$$V_e = -L_{def} = \frac{1}{2}k\delta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

FORZE GRAVITAZIONALI

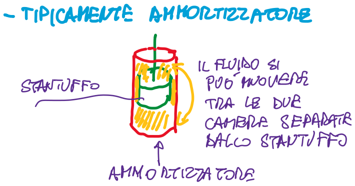
$$L_g = \int_0^h -m\vec{g} \times d\vec{y} = -mgh$$

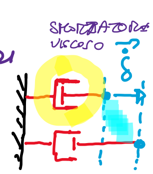
$g \downarrow$ $\uparrow dy$ O

$$V_g = -L_g = mgh$$

FORZE DISSIPATIVE DI TIPO VISCOSO

— IN GENERALE EFFETTI DISSIPATIVI SONO NON LINEARI
 ↳ CASO PARTICOLARE: DISSIPATORE VISCOSO
 - TIPICAMENTE AMMORTIZZATORE





PER $\dot{\delta}$ VALE QUANTO DISCUSSO PER LA MOLLA NEL CASO DI SPOSTAMENTO DELLE ESTREMITA' DELLO SMORZATORE VISCOSO

$\vec{F}_d = -r\dot{\vec{\delta}}$

FORZA SMORZANTE

COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO VISCOSO

VELOCITA' DELLO SPOSTAMENTO

COMPONENTE LAGRANGIANA DELL'EFFETTO DELLO SMORZAMENTO VISCOSO

$Q_{d_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial q_k}$ → DIPENDENZA DI δ DALLE COORDINATE LIBERE

$\delta = \delta(q_k)$ → $\dot{\delta} = \sum_k \frac{\partial\delta}{\partial q_k}\dot{q}_k$ $\quad \frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\delta}{\partial q_k}$ →

SE CONSIDERO SOLO IL TERMINE k-esimo

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\dot{\delta}\right] = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{\partial\delta}{\partial q_k}\dot{q}_k\right]$$

$$\frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\delta}{\partial q_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{q}_k} \quad = 1$$

$$\frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\delta}{\partial q_k}$$

$$Q_{d_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial q_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\dot{q}_k} = -\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}r\dot{\delta}^2\right)$$

$$D = \frac{1}{2}r\dot{\delta}^2$$

'FUNZIONE DISSIPATIVA (PER SMORZAMENTO VISCOSO)

$\partial \dot{\varphi}_k \quad \partial \varphi_k$

$$Q_{dk} = -\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_k} D$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_k} D + Q_k$$

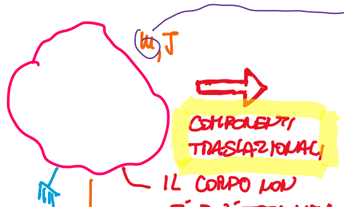
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_k} = Q_k$$

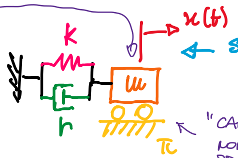
INTRODUZIONE DELLA FUNZIONE DISSIPATIVA NEL LATO SX DELL'EQ. DI LAGRANGE

COME COMPONENTI LAGRANGIANE RESTANO TUTTE LE ALTRE FORZE ESTERNE CHE LAVORANO

VIBRAZIONI MECCANICHE

- RINUNCIAMO A CONSIDERARE "TUTTO" IL MONDO COME COMPOSTO DA C.R.
- "CONCENTRIAMO" I CORPI RIGIDI (RAPPRESENTAZIONE A PARAMETRI CONCENTRATI)





← SISTEMA CON 1 G.d.L. $x(t)$

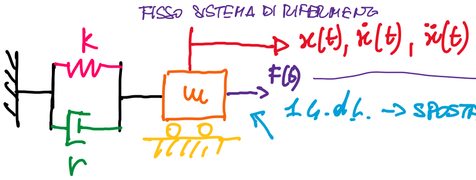
"CARRELLINO" PER NON CONSIDERARE LA PRESENZA DI ATTRITI

IL CORPO NON È PIÙ TOTALMENTE RIGIDO → DEFORMABILITÀ
↳ CARATTERIZZO CON k

DISSIPAZIONI ENERGETICHE → SMORZAMENTO
↳ CARATTERIZZARE CON r

- VIBRAZIONI DI SISTEMA 1 GdL
↳ SCRITTURA DELL'EQUAZIONE DI MOTO → EQUILIBRIO DINAMICO / → EQ. DI LAGRANGE

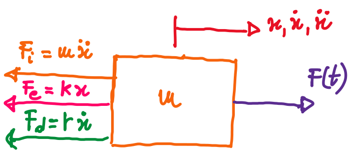
FISSO SISTEMA DI RIFERIMENTO



F(t): FORZA ESTERNA

1 G.d.L. → SPOSTAMENTO $x(t)$

- EQUILIBRIO DINAMICO DELLA MASSA



CONSIDERO SOLO LA TRASLAZIONE IN DIREZIONE ORIZZONTALE

EQUILIBRIO DINAMICO → $-F_i - F_e - F_d + F(t) = 0$

$$F_i + F_e + F_d = F(t)$$

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F(t)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$ → EQUAZIONE DI MOTO DEL SISTEMA

- EQUAZIONE DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_k} = \frac{\delta^* L}{\delta \varphi_k}$$ Q_k

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

$$D = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$$

$$L = \vec{F}(t) \times \vec{x} = F(t)\, x$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = r\dot{x}$$

$$\frac{\delta^* L}{\delta x} = F(x)$$

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F(t)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$ → EQUAZIONE DI MOTO DEL SISTEMA

— VIBRAZIONI DEL SISTEMA: MOTO LIBERO NON SMORZATO

MANCA LO SMORZAMENTO $F_d = 0 \Leftrightarrow r = 0$

NON HO FORZANTI ESTERNE $F(t) = 0$

$m\ddot{x} + kx = 0$ EQ. DIFFERENZIALE, DERIVATE TOTALI, INCOMPLETA, OMOGENEA, COEFFICIENTI COSTANTI

INTEGRALE GENERALE $x(t) = X e^{\lambda t}$

$\downarrow d/dt$

$\dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t}$

$\downarrow d/dt$

$\ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t}$

$m\lambda^2 X e^{\lambda t} + kXe^{\lambda t} = 0 \qquad (m\lambda^2 + k) X e^{\lambda t} = 0$

DIVERSO DA 0

$X = 0 \rightarrow$ SOLUZIONE BANALE

$\rightarrow$ IL SISTEMA NON SI MUOVE

SE $X \neq 0$ $(m\lambda^2 + k) = 0 \rightarrow$ EQ ALGEBRICA DI II GRADO $\rightarrow$ EQUAZIONE CARATTERISTICA

SOLUZIONI EQ. CARATTERISTICA $\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$

UNITA' IMMAGINARIA

POLSAZIONE NATURALE DEL SISTEMA

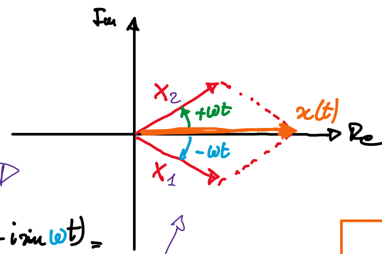
$[\omega] = rad/s$

$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad [f] = Hz$

FREQUENZA PROPRIA

$x(t) = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t} = \underbrace{X_1 e^{i\omega t}} + \underbrace{X_2 e^{-i\omega t}}$

VETTORI ROTANTI NEL PIANO COMPLESSO $\longrightarrow$



LA SOMMA DEI 2 VETTORI ROTANTI GENERA UNA FUNZIONE ARMONICA

FORMULA DI EULERO

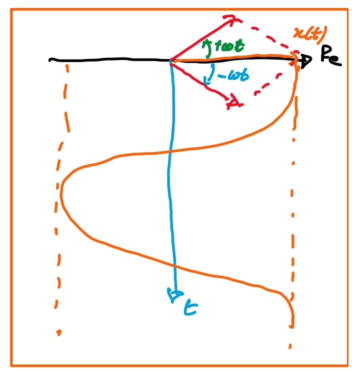
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$x(t) = X_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + X_2(\cos\omega t - i\sin\omega t) =$

$= \underbrace{(X_1 + X_2)}_{A}\cos\omega t + i\underbrace{(X_1 - X_2)}_{B}\sin\omega t =$

$X_1 = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$

$X_2 = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$



INTEGRALI GENERALI

$= A\cos\omega t + B\sin\omega t$ $\leftarrow$ COMBINAZIONE LINEARE DI 2 FUNZIONI ARMONICHE

$= C\cos(\omega t + \phi)$ $\leftarrow$ FUNZIONE ARMONICA CON AMPIEZZA C E FASE ϕ

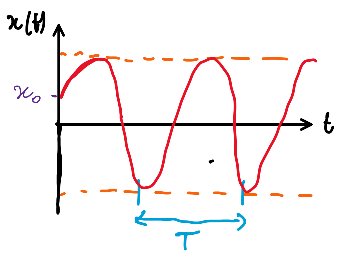
$C^2 = A^2 + B^2 \qquad \tan\phi = -\frac{B}{A}$

PER DETERMINARE A e B IMPORRE CONDIZIONI INIZIALI

$x(t)|_{t=0} = x_0$

$\dot{x}(t)|_{t=0} = v_0$

$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$



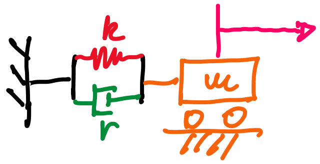
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

PERIODO

Lezione venerdì 20 novembre 2020

venerdì 20 novembre 2020 11:18

VIBRAZIONI DEL SISTEMA: MOTO LIBERO CON SMORZAMENTO



NON C'È LA FORZANTE

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

EQ. DIFFERENZIALE, DERIVATE TOTALI II ORDINE, COMPLETA, OMOGENEA, COEFFICIENTI COSTANTI

$$x(t) = X e^{\lambda t}$$

d/dt

$$\dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t}$$

d/dt

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t}$$

$$m\lambda^2 X e^{\lambda t} + r\lambda X e^{\lambda t} + k X e^{\lambda t} = 0$$

$$(m\lambda^2 + r\lambda + k) X e^{\lambda t} = 0$$

SOLUZIONE BANALE

$X = 0 \Rightarrow x(t) = 0$

IL SISTEMA NON SI MUOVE

SE $X \neq 0$

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$$

EQ. II GRADO ALGEBRICA

EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL SISTEMA

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

λ DIPENDE DAL DISCRIMINANTE Δ $\longrightarrow$ $\Delta = 0$

$$\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \qquad r_c = 2m\omega$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ PULSAZIONE NATURALE DEL SISTEMA

r_c: SMORZAMENTO CRITICO

SE	$r > r_c$	$\Delta > 0$	$h > 1$
	$r < r_c$	$\Delta < 0$	$h < 1$
	$r = r_c$	$\Delta = 0$	$h = 1$

$$h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega}$$

FATTORE DI SMORZAMENTO (SMORZAMENTO ADIMENSIONALE)

1) $r < r_c$ $\Delta < 0$ $h < 1$

$$\lambda_{1,2} = -\underbrace{\boxed{\frac{r}{2m}}}_{\alpha} \pm i\sqrt{\underbrace{\boxed{\frac{k}{m}}}_{\omega^2} - \underbrace{\boxed{\left(\frac{r}{2m}\right)^2}}_{\alpha^2}} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2-\alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_d$$

$\hookrightarrow \omega_d = \omega\sqrt{1-h^2}$

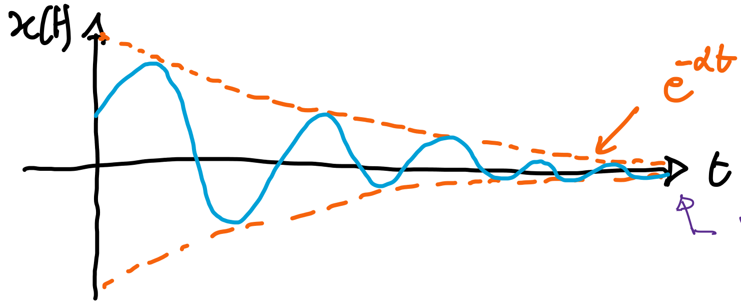
PULSAZIONE SISTEMA SMORZATO $\omega_d < \omega$

$$x(t) = X_1 e^{(-\alpha+i\omega_d)t} + X_2 e^{(-\alpha-i\omega_d)t} = e^{-\alpha t}\left(X_1 e^{i\omega_d t} + X_2 e^{-i\omega_d t}\right) =$$

FORMULA DI EULERO $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$= \underbrace{\boxed{e^{-\alpha t}}}_{\text{TERMINE MODULANTE}} \underbrace{\boxed{\left[A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right]}}_{\text{FUNZIONE ARMONICA}}$$

A, B: DA DETERMINARE IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$



$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

$x(t)$ È ASINTOTICAMENTE NULLA

SISTEMA SMORZATO $r<r_c$, $h<1$

---

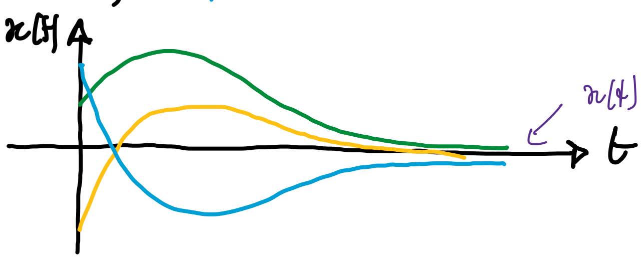
2) $r>r_c$, $\Delta>0$, $h>1$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta} < \begin{matrix} \lambda_1 = -\alpha_1 \\ \lambda_2 = -\alpha_2 \end{matrix}$$

NB: $\alpha > \sqrt{\Delta}$

$$x(t) = X_1 e^{-\alpha_1 t} \quad X_2 e^{-\alpha_2 t}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$



$x(t)$ È ASINTOTICAMENTE NULLA

SISTEMA SOVRASMORZATO $r>r_c$, $h>1$

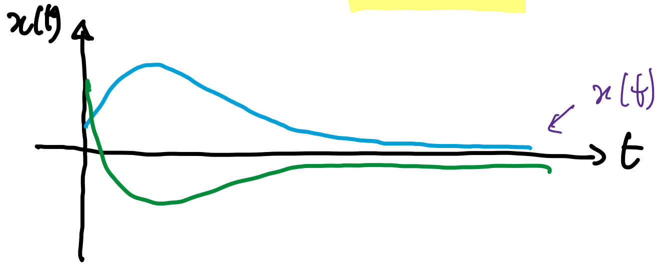
3) $r = r_c$, $\Delta = 0$, $n = 1$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$

$x(t) = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t}$

"LA SOLUZIONE CHE VA A ZERO PIÙ VELOCEMENTE"

$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$



$x(t)$ È ASINTOTICAMENTE NULLO

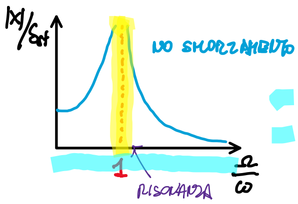
Lezione lunedì 30 novembre 2020

lunedì 30 novembre 2020 10:28

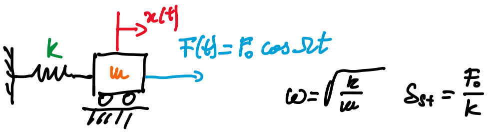
RISPOSTA DI SISTEMI A 1 GdL IN RISONANZA → RISPOSTA NEL TEMPO
SISTEMI NON LINEARI
→ PENDOLO → LINEARIZZAZIONE
→ SISTEMA LIBERO CON SMORZAMENTO DOVUTO AD ATTRITO RADENTE
→ SISTEMA FORZATO CON SMORZAMENTO DOVUTO AD ATTRITO RADENTE → SMORZAMENTO EQUIVALENTE

RISPOSTA SISTEMA A 1 G.d.L. IN CONDIZIONI DI RISONANZA SENZA SMORZAMENTO

→ RISPOSTA IN FREQUENZA → AMPIEZZA INT. PARTICOLARE È ∞ (QUESTO È UN COMPORTAMENTO "ASINTOTICO")
↳ CI DICE COSA SUCCEDE A REGIME



RISPOSTA IN FREQUENZA



$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad \delta_{st}=\frac{F_0}{k}$

$x(t)=x_g+x_p$

$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{F_0}{k-m\Omega^2}\cos\Omega t$

DETERMINO C_1 e C_2 CON CONDIZIONI INIZIALI

IN RISONANZA $\omega=\Omega \to k-m\Omega^2=0$

$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \end{cases}$ $\quad C_1=x_0-\frac{F_0}{k-m\Omega^2}$ $\quad C_2=\frac{\dot{x}_0}{\omega}$

$x(t)=\left(x_0-\frac{F_0}{k-m\Omega^2}\right)\cos\omega t+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)\sin\omega t+\frac{F_0}{k-m\Omega^2}\cos\Omega t$

$x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t+\delta_{st}\boxed{\left(\frac{\cos\Omega t-\cos\omega t}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}\right)}$

IN RISONANZA $\frac{\Omega}{\omega}=1$

↳ STUDIO QUESTA PARTE DELLA RISPOSTA: IN RISONANZA $\frac{0}{0}$

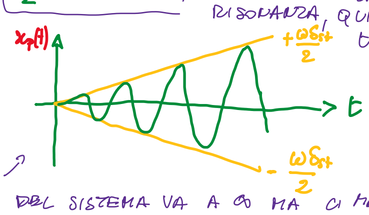
$\lim_{\Omega\to\omega}\frac{\cos\Omega t-\cos\omega t}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}=\lim_{\Omega\to\omega}\frac{\frac{d}{d\Omega}(\cos\Omega t-\cos\omega t)}{\frac{d}{d\Omega}\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]}=\lim_{\Omega\to\omega}\frac{+t\sin\Omega t}{+2\frac{\Omega}{\omega^2}}=\frac{\omega t}{2}\sin\omega t$

REGOLA DI DE L'HOPITAL

$x(t)=\underbrace{x_0\cos\omega t+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t}+\boxed{\frac{\omega t}{2}\delta_{st}\sin\omega t}$

RISPOSTA MOTO LIBERO ANCHE SE NON HO MESSO SMORZAMENTO, HO UNA RISPOSTA NEL TEMPO FINITA

$\times$ RISPOSTA A REGIME IN RISONANZA, QUINDI PER $t\to\infty$

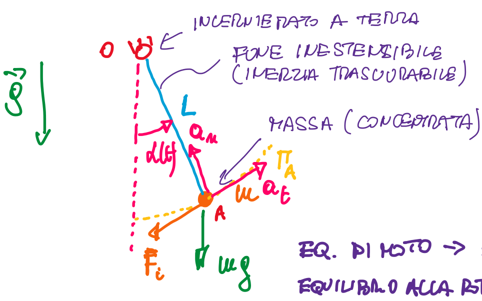


LA RISPOSTA DEL SISTEMA VA A ∞ MA CI METTE TEMPO INFINITO (PROPORZIONALE A t) → AMPIEZZA IN RISONANZA CRESCE LINEARMENTE CON t
(POSSO ECCITARE IL SISTEMA IN RISONANZA PER UN "PO'" DI TEMPO PRIMA DI ARRIVARE AD AMPIEZZE PERICOLOSE

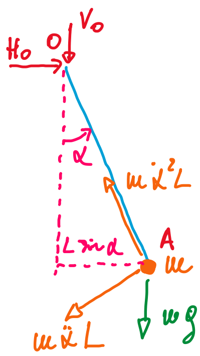
PENDOLO

GALILEO E IL PENDOLO

https://it.wikipedia.org/wiki/Cappella_Aulla?wprov=sfti1
https://www.treccani.it/enciclopedia/pendolo_(Enciclopedia-dei-ragazzi)/



1 G.d.L.



EQ. DI MOTO → EQUILIBRI DINAMICI
EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE IN O

$\sum M_0^*=0$

* INDICA CHE USIAMO TUTTE LE FORZE (INERZIE COMPRESE

$\cancel{m}\ddot{\alpha}L^{\cancel{2}}+\cancel{m}g\cancel{L}\sin\alpha=0$

$L\ddot{\alpha}+g\sin\alpha=0$ → EQ. DIFF. NON LINEARE IN α

SE CONSIDERO "PICCOLE OSCILLAZIONI" $\sin\alpha\simeq\alpha$ → LINEARIZZO L'EQ DI MOTO

$\ddot{\alpha}+\frac{g}{L}\alpha=0$ ... NEL PENDOLO LINEARIZZATO

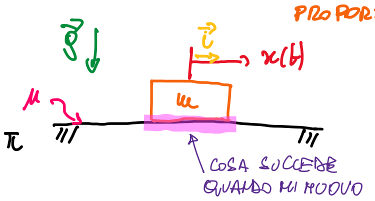
$L\ddot{\alpha} + g\alpha = 0 \to \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ ← PER PICCOLE OSCILLAZIONI
LA PULSAZIONE NON DIPENDE DALLA MASSA → DIPENDE DA g E DA L

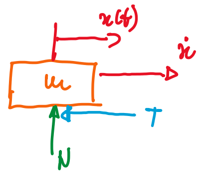
$\alpha(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
↳ SOLUZIONE ARMONICA

$T = \frac{\omega}{2\pi}$ ← È VERO CHE IL PERIODO È COSTANTE

SISTEMA LIBERO CON SMORZAMENTO PER ATTRITO RADENTE

→ ATTRITO RADENTE: INTERAZIONE MACROSCOPICA TRA SUPERFICI IN MOTO RELATIVO
→ SI GENERA UN'AZIONE TANGENZIALE ALLE SUPERFICI IN MOTO PROPORZIONALE ALLA REAZIONE NORMALE (LEGGI DI COULOMB SULL'ATTRITO)



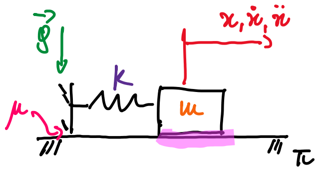


$N = mg$

PER LE LEGGI DI COULOMB:

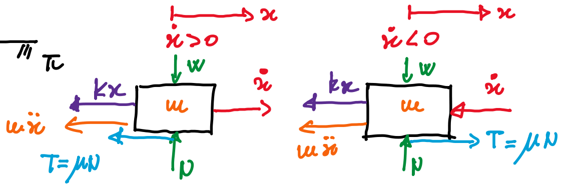
$T = \mu N$ ← MODULO REAZIONE NORMALE
MODULO REAZIONE TANGENZIALE; COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO

$\vec{T} = -\mathrm{sign}(\dot{x})\,\mu\, mg\, \vec{i}$



$N = mg$

SISTEMA LIBERO CON ATTRITO RADENTE (NO SMORZATORE VISCOSO)



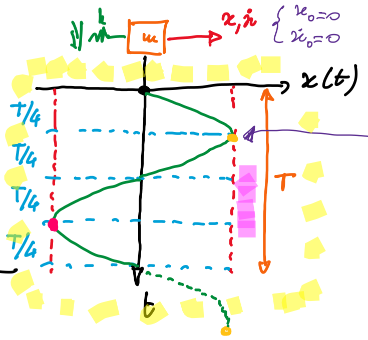
$m\ddot{x} + kx = -\mu N$ $\qquad$ $m\ddot{x} + kx = \mu N$

A SECONDA DEL VERSO DI $\dot{x}(t)$ HO EQ DI MOTO CHE CAMBIA

$$m\ddot{x} + \mu mg\,\mathrm{sign}(\dot{x}) + kx = 0$$ EQ DIFF. NON LINEARE

LINEARIZZAZIONE A "TRATTI" STUDIANDO $\mathrm{SIGN}(\dot{x})$

		x	$\dot{x}$
①	$0 \le t < \frac{T}{4}$	+	+
②	$\frac{T}{4} \le t < \frac{T}{2}$	+	−
	$\frac{T}{2} \le t < \frac{3T}{4}$	−	−
①	$\frac{3T}{4} \le t < T$	−	+



È COME SE FACESSI PARTIRE IL MOTO DA QUESTA POSIZIONE

EQUAZIONE VALIDA QUANDO $\mathrm{SIGN}(\dot{x}) = 1$

① $m\ddot{x} + kx = -\mu N$ ← FORZANTE (COSTANTE NEL TEMPO)
$x(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t + \left(-\frac{\mu N}{k}\right)$

② $m\ddot{x} + kx = \mu N$ ← VALIDA PER $\mathrm{SIGN}(\dot{x}) = -1$
$x(t) = A_3\cos\omega t + A_4\sin\omega t + \left(\frac{\mu N}{k}\right)$

DEVO SCEGLIERE LA SOLUZIONE A SECONDA DI $\mathrm{SIGN}(\dot{x})$ E IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI

CONSIDERIAMO UN CASO IN CUI ESISTE IL MOTO, AD ESEMPIO SE IMPONGO $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

↳ DEVO USARE LA SOLUZIONE ②

$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \to$ $\quad A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}$, $\quad A_4 = 0$

$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega t + \frac{\mu N}{k}$
$\dot{x}(t) = -\omega\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\sin\omega t$
SOLUZIONE VALIDA PER $0 \le t \le \frac{\pi}{\omega}$

QUANDO $t = \frac{\pi}{\omega}$

$x_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega\frac{\pi}{\omega} + \frac{\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$
$\dot{x}_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -\omega\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\sin\omega\frac{\pi}{\omega} = 0$

DIVENTANO LE NUOVE "CONDIZIONI INIZIALI" DA IMPORRE NELL'EQ ① QUANDO $\mathrm{SIGN}(\dot{x}) = 1$

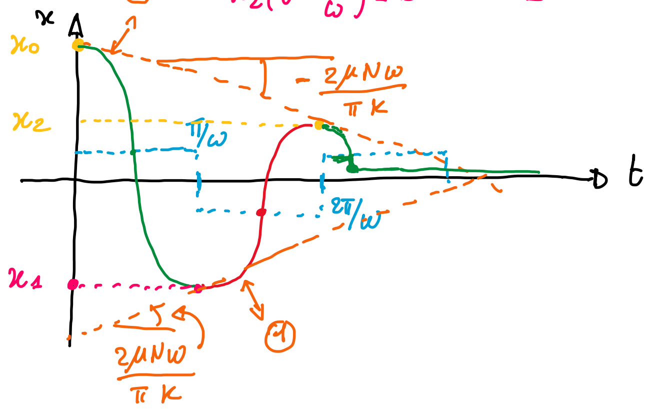
→ USO LA SOLUZIONE ①

$\begin{cases} x_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \\ \dot{x}_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \end{cases} \to$ $\quad A_1 = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right)$, $\quad A_2 = 0$

$x(t) = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right)\cos\omega t - \frac{\mu N}{k}$ SOLUZIONE VALIDA PER

$\dot{x}_1(t=\frac{\pi}{\omega})=0$ $\quad x_2 = 0$ $\quad \dot{x}(t) = +\omega\left(-x_0+\frac{3\mu N}{k}\right)\sin\omega t \quad) \; \frac{\pi}{\omega}\le t < \frac{2\pi}{\omega}$

$$\left.\begin{aligned} x_2\left(t=\frac{2\pi}{\omega}\right) &= x - \frac{4\mu N}{k} \\ \dot{x}_2\left(t=\frac{2\pi}{\omega}\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$$ NUOVE "CONDIZIONI INIZIALI" PER EQ. ② QUANDO $\text{sign}(\dot{x}) = -1$



POSSO ESPRIMERE LA RIDUZIONE DI AMPIEZZA PER OGNI PERIODO COME $|x_1 - x_0|$ O $|x_2 - x_1| = \frac{2\mu N}{k}$
IL MOTO CONTINUERÀ FINCHÈ LA FORZA ELASTICA SARÀ MAGGIORE DELLA FORZA D'ATTRITO → FINO A CHE LA RIDUZIONE DELLO SPOSTAMENTO INIZIALE NON SARÀ MINORE DELLO SPOSTAMENTO STATICO DELLA FORZA D'ATTRITO

$$x_0 - n\frac{2\mu N}{k} \le \frac{\mu N}{k} \qquad n \ge \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}$$

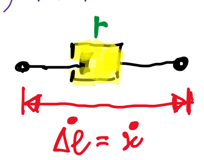
NUMERO DI SEMI PERIODI

SISTEMA FORZATO CON SMORZAMENTO DOVUTO AD ATTRITO RADENTE

↳ SMORZAMENTO EQUIVALENTE

↳ EQUIPAREREMO LA POTENZA PERSA/ENERGIA DISSIPATA DA UN FENOMENO DOVUTO A SMORZAMENTO (NON VISCOSO) ALL'ENERGIA DISSIPATA IN UN PERIODO DA UNO SMORZATORE VISCOSO

IN UNO SMORZATORE VISCOSO



$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}\times\vec{v} = -rv^2 = -r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad dW = -r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt \qquad \Delta W = \int \dots\dots$$

ENERGIA

→ STO CONSIDERANDO SISTEMA LINEARE VIBRANTE $x(t) = X\sin(\omega t + \varphi)$

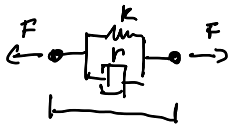
POSSO TRASCURARE LA FASE

$$\Delta W = \int_0^T r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} r\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} rX^2\omega\cos^2\omega t \, d(\omega t) = rX^2\omega\pi$$

ENERGIA DISSIPATA IN UN PERIODO DA SMORZATORE VISCOSO SOTTOPOSTO A MOTO ARMONICO

SE IN PARALLELO ALLO SMORZATORE C'È UNA MOLLA, NON CAMBIA NULLA



$$F = -r\dot{x} - kx \leftarrow x(t) = X\sin\omega t$$

$$F = -kX\sin\omega t - r\omega X\cos\omega t$$

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} F v \, dt \to \dots\dots \to rX^2\omega\pi$$

IN PRESENZA DI ATTRITO RADENTE

AMPIEZZA DI VIBRAZIONE SE IL MOTO È ALIMENTATO DA UNA FORZANTE ESTERNA

$$\Delta W = 4X\mu N \leftarrow \text{FORZA D'ATTRITO}$$

4 INTERVALLI IN CUI CONSIDERO LA FORZA D'ATTRITO

Lezione lunedì 14 dicembre 2020

lunedì 14 dicembre 2020 09:58

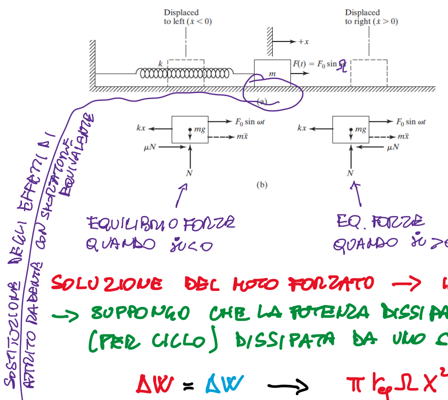
SISTEMI VIBRANTI A 1 GDL FORZATI CON SMORZAMENTO PER ATTRITO RADENTE

- POTENZA DISSIPATA PER CICLO IN UNO SMORZATORE VISCOSO

$$\Delta W = \pi r \Omega X^2$$

- POTENZA DISSIPATA PER CICLO IN PRESENZA DI ATTRITO RADENTE

$$\Delta W = 4 \mu N X$$



SISTEMA FORZATO CON FORZANTE $F(t) = F_0 \sin \Omega t$

NON LINEARITÀ

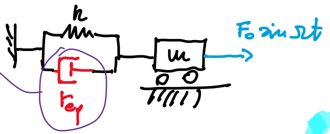
$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F_0 \sin \Omega t$$

SOLUZIONE DEL MOTO FORZATO → INTEGRALE PARTICOLARE E A REGIME

→ SUPPONGO CHE LA POTENZA DISSIPATA PER ATTRITO VISCOSO SIA LA STESSA (PER CICLO) DISSIPATA DA UNO SMORZATORE EQUIVALENTE

$$\Delta W = \Delta W \rightarrow \pi r_{eq} \Omega X^2 = 4 \mu N X \rightarrow \boxed{r_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \Omega X}}$$

DIPENDE DALL'AMPIEZZA DEL MOTO



$$x_p(t) = X \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (r_{eq}\Omega)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta_{eq}\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}$$

RISPOSTA DI UN SISTEMA 1GDL A FORZANTE ARMONICA

$$\zeta_{eq} = \frac{r_{eq}}{r_c} = \frac{4\mu N}{\pi \Omega X} \cdot \frac{1}{2m\omega} = \frac{2\mu N}{\pi m \omega \Omega X}$$

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi k X}\right)^2}} \rightarrow X = \frac{F_0}{k}\left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2}\right]^{1/2}$$

VERIFICA CHE IL NUMERATORE SIA >0

$$\circledast \quad 1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2 > 0 \qquad \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi}$$

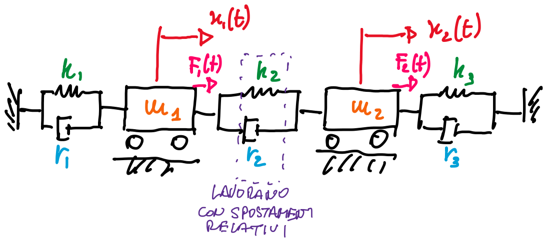
← L'EQUIVALENZA DI DISSIPAZIONE DI POTENZA VALE SOLO SE LA F_0 È MAGGIORE DI 4/π VOLTE LA FORZA D'ATTRITO μN

$$\varphi = \arctan\left(\frac{r_{eq}\Omega}{k - m\Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{4\mu N}{\pi k X}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}\right)$$

SE LA ⊛ NON È VERIFICATA → RISOLUZIONE NUMERICA DELL'EQ. NON LINEARE DI MOTO

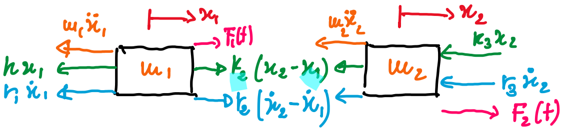
- SISTEMI VIBRANTI A 2-n GDL

UTILIZZEREMO UN APPROCCIO MATRICIALE, LO MOSTREREMO PER 2GdL. PER RAGIONI PRATICHE (OTTERREMO MATRICI 2x2), MA POTREMO ESTENDERLO A n GdL CON MATRICI n x n



SCRITTURA EQ MOTO < EQUILIBRI DINAMICI / EQ. DI LAGRANGE

→ EQUILIBRI DINAMICI ("CORPO LIBERO" CON TUTTE LE FORZE AGENTI) → EQUILIBRIO IN DIREZIONE ORIZZONTALE → PER OGNI MASSA



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (r_1 + r_2)\dot{x}_1 - r_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \end{cases}$$

SISTEMA DELLE EQUAZIONI

$$\boxed{*}\quad m_2\ddot{x}_2 - r_2\dot{x}_1 + (r_2+r_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = F_2(t)$$

DI MOTO DEL SISTEMA CON SMORZAMENTO E FORZAMENTO

DA $\boxed{*}$ POSSO CALCOLARE:

1) FREQUENZE PROPRIE (NATURALI) DEL SISTEMA → USO SISTEMA OMOGENEO NON SMORZATO

2) MODI DI VIBRARE → SISTEMA OMOGENEO E NON SMORZATO

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$ MATRICE DI MASSA

$$[R] = \begin{bmatrix} r_1+r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2+r_3 \end{bmatrix}$$ MATRICE DI SMORZAMENTO

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$$ MATRICE DI RIGIDEZZA

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$ VETTORE DELLE FORZANTI

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$ VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI

LA $\boxed{*}$ PUO' ESSERE SCRITTA COME:

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [R]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{F}$$

DAL PUNTO DI VISTA "FORMALE" IL SISTEMA DI EQ. DI MOTO E' UGUALE ALL' EQ DI MOTO DEL SISTEMA A 1 GdL.
IN NOTAZIONE MATRICIALE NULLA CAMBIA SE LE MATRICI O I VETTORI SONO $2\times2 \div 2\times1$ OPPURE $n\times n \div n\times 1$

OSSERVIAMO CHE LE MATRICI $[M]$, $[R]$ E $[K]$ SONO SIMMETRICHE:

$$[M]=[M]^T \quad [R]=[R]^T \quad [K]=[K]^T$$

1) CALCOLO FREQUENZE PROPRIE

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = 0 \longrightarrow (A)\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = 0 \end{cases}$$

SIST. DI EQ DIFF. OMOGENEE

IPOTIZZIAMO SOLUZIONE ARMONICA PER IL SISTEMA (A)

$$x_1(t) = X_1\cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$
$$x_2(t) = X_2\cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

SOSTITUISCO (2) E (3) IN (1)

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1\cos(\omega t+\varphi)$$
$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{cases} \left(\left(-m_1\omega^2 + (k_1+k_2)\right)X_1 - k_2X_2\right)\cancel{\cos(\omega t+\varphi)} = 0 \\ \left(-k_2X_1 + \left(-m_2\omega^2 + (k_2+k_3)\right)X_2\right)\cancel{\cos(\omega t+\varphi)} = 0 \end{cases}$$

$X_1 \neq 0$
$X_2 \neq 0$
ALTRIMENTI SOLUZIONE BANALE → SISTEMA CHE NON SI MUOVE

$$(B)\begin{cases} \left(-m_1\omega^2 + (k_1+k_2)\right)X_1 - k_2X_2 = 0 \\ -k_2X_1 + \left(-m_2\omega^2 + (k_2+k_3)\right)X_2 = 0 \end{cases}$$

SISTEMA ALGEBRICO OMOGENEO IN X_1 E X_2
PERCHE' POSSA AVERE UNA SOLUZIONE NON BANALE BISOGNA IMPORRE CHE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI SIA NULLO.

$$\det\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2+k_3) \end{bmatrix} = 0$$

$$(m_1m_2)\,\omega^4 - \left((k_1+k_2)m_2 + (k_2+k_3)m_1\right)\omega^2 + \left((k_1+k_2)(k_2+k_3) - k_2^2\right) = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA → ORDINE 2N IN ω →
PER NOI CON 2GdL → ORDINE 4° IN ω

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(k_1+k_2)m_2 + (k_2+k_3)m_1}{m_1m_2}\right) \mp \frac{1}{2}\left(\left(\frac{(k_1+k_2)m_2 + (k_2+k_3)m_1}{m_1m_2}\right)^2 - 4\left(\frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1m_2}\right)\right)^{1/2}$$

↳ ASSOCIATI AD ω_1 E ω_2 SONO I RAPPORTI TRA X_1 E X_2, IL SISTEMA (B) NON HA EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI DATO CHE HO IMPOSTO $\det(\cdot) = 0$. SE USO LA PRIMA EQ. →

$X_i^{(k)}$ — INDICE RELATIVO ALLA FREQ. CALCOLATA → ANCHE AL MODO DI VIBRARE; INDICE RELATIVO AL GRADO DI LIBERTA'

VALORE DI ω_1

$$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1+k_2)}{k_2}$$

$$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1+k_2)}{k_2}$$

SE USO LA SECONDA EQ. →

$$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2+k_3)}$$

$$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2+k_3)}$$

LA SOLUZIONE DELL' EQ. DI MOTO E':

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)$$

$$\vec{x}_1 = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)}\cos(\omega_1t+\varphi_1) \\ \eta_1X_1^{(1)}\cos(\omega_1t+\varphi_1) \end{Bmatrix}$$ 1° MODO

MODI DI VIBRARE DEL SISTEMA

2) MODI DI VIBRARE

$$\vec{x}_2 = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)}\cos(\omega_2t+\varphi_2) \\ \dots \end{Bmatrix}$$

$X^{(1)}$ $X^{(2)}$ ...

$$\left\{\eta_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right\} \; 2° \text{ MODO}$$

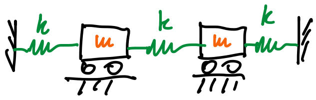
$X_1, X_1, \varphi_1, \varphi_2$ DETERMINATI CON CONDIZIONI INIZIALI $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_2(0)$

ESEMPIO

$m_1 = m_2 = m$

$k_1 = k_2 = k_3 = k$

$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$



SOLUZIONE $x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \varphi)$ $\quad i = 1,2$

DETERMINANTE MATRICE DEI COEFFICIENTI

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \qquad m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1$$

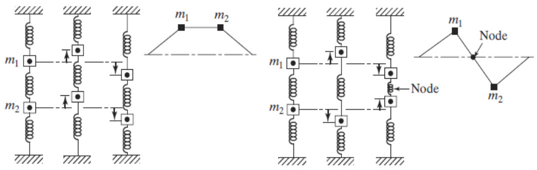
$$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1$$

PRIMO MODO $\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) \end{Bmatrix}$

SECONDO MODO $\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right) \end{Bmatrix}$

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right)$$



(a) First mode

LE MASSE SI SPOSTANO IN FASE

(b) Second mode

LE MASSE SI SPOSTANO IN CONTROFASE

PASSAGGIO IN COORDINATE PRINCIPALI

LE EQUAZIONI DI MOTO IN COORDINATE FISICHE $x_1(t)$ $x_2(t)$ SONO ACCOPPIATE.
PER LA TEORIA DEI SISTEMI LINEARI POSSO INTRODURRE UNA TRASFORMAZIONE DI "COORDINATE" CHE RENDE IL SISTEMA DISACCOPPIATO: LE NUOVE COORDINATE SI CHIAMANO COORDINATE "MODALI" O "PRINCIPALI"

CONSIDERO L'ESEMPIO PRECEDENTE E DEFINISCO:

$$q_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_1\right)$$

$$q_2(t) = X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \varphi_2\right)$$

SONO SOLUZIONI DI UN SISTEMA DI EQ DIFF. $\rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{k}{m} q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{3k}{m} q_2 = 0 \end{cases}$

HO OTTENUTO n EQUAZIONI AD 1 GdL INVECE DI UN SISTEMA DI n EQUAZIONI

$$\begin{cases} x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \end{cases} \quad (**)$$

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

SE USO (**) NELLA (*) OTTENGO

$\hookrightarrow$ TRASFORMAZIONE INVERSA

$$q_1(t) = \frac{1}{2}\left[x_1(t) + x_2(t)\right]$$

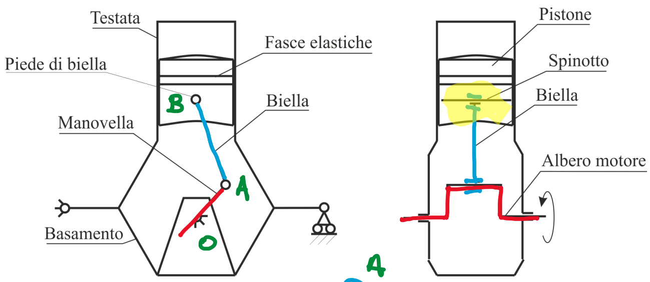
$$q_2(t) = \frac{1}{2}\left[x_1(t) - x_2(t)\right]$$

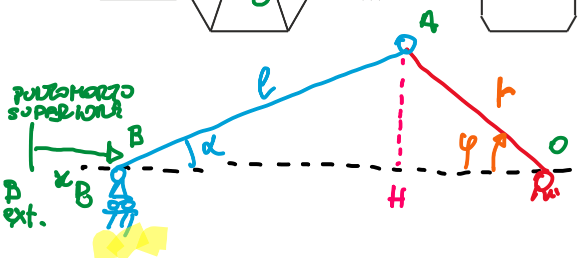
Lezione facoltativa martedì 22 dicembre

martedì 22 dicembre 2020 12:34

EQUILIBRAMENTO FORZE ALTERNATIVE

RIPRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE IL MANOVELLISMO
↓
SINGOLO CILINDRO





$x_B = \overline{OB}_{ext} - \overline{OH} - \overline{HB} = r + \ell - r\cos\varphi - \ell\cos\alpha$

$\overline{AH} = \ell\sin\alpha = r\sin\varphi \qquad \sin\alpha = \frac{r}{\ell}\sin\varphi = \lambda\sin\varphi$

$\frac{r}{\ell}$ — LUNGHEZZA MANOVELLA / LUNGHEZZA BIELLA; λ ← RAPPORTO

SOLITAMENTE $\lambda < 0{,}3$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{r^2}{\ell^2}\sin^2\varphi} = \sqrt{1\boxed{-\lambda^2\sin\varphi^2}}$

APPROSSIMARE → ε

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR $\quad (1+\varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2)$

$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$

$x_B = r + \ell - r\cos\varphi - \ell\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi\right) = r\left(1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\boxed{\sin^2\varphi}\right)$

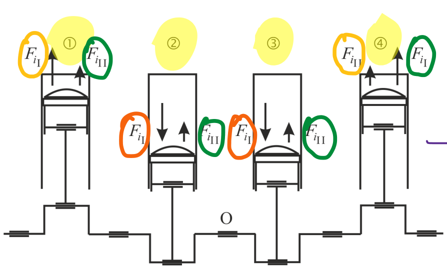
$\hookrightarrow v_B = \dot{x}_B = \omega r\left(\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right) \qquad \omega = \frac{d}{dt}\varphi$

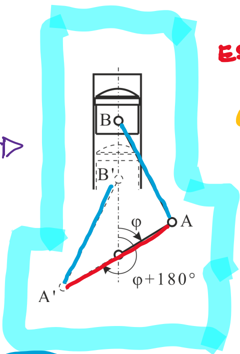
$\hookrightarrow a_B = \ddot{x}_B = \omega^2 r\left(\underbrace{\cos\varphi}_{\text{I ARMONICA, I ORDINE}} + \underbrace{\lambda\cos 2\varphi}_{\text{II ARMONICA, II ORDINE}}\right)$ ← ESPRESSIONE ACCELERAZIONE DEL PIEDE DI BIELLA → POSSO CALCOLARE FORZA D'INERZIA SUL PISTONE

I ARMONICA / I ORDINE: "GIRA" CON LA MANOVELLA

II ARMONICA / II ORDINE: "GIRA" A VELOCITÀ DOPPIA DELLA MANOVELLA

COME CALCOLARE LE FORZE D'INERZIA CHE AGISCONO SUI PISTONI DEI MOTORI A C.I.





ESEMPIO: 4 CILINDRI IN LINEA

$a_B^{①④} = \omega^2 r\left(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi\right)$

$a_{B'}^{②③} = \omega^2 r\left(\cos(\varphi+180°) + \lambda\cos 2(\varphi+180°)\right) =$
$= \omega^2 r\left(-\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi\right)$

$F_i^{①④} = -m\,a_B^{①④} = -m\omega^2 r\left(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi\right)$

$F_i^{②③} = -m\,a_{B'}^{②③} = -m\omega^2 r\left(-\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi\right)$

TERMINI DI I ORDINE — TERMINI DI II ORDINE

$\Sigma F_{i\,\text{I ORDINE}} = 0$

$\Sigma F_{i\,\text{II ORDINE}} \neq 0 = -4m\omega^2 r\lambda\cos 2\varphi$

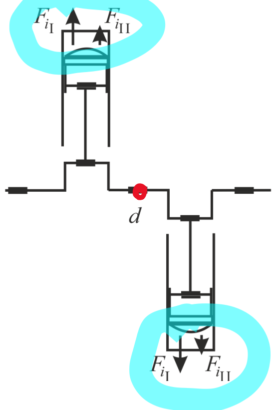
SONO OPPOSTI HANNO LO STESSO VERSO

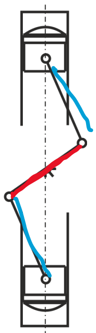
MOMENTO DELLE FORZE D'INERZIA RISPETTO AD O

$\sum M_{i_{I\,ORDINE}} = 0$

$\sum M_{i_{II\,ORDINE}} = 0$

MOTORE BOXER (2 CILINDRI ORIZZONTALI)



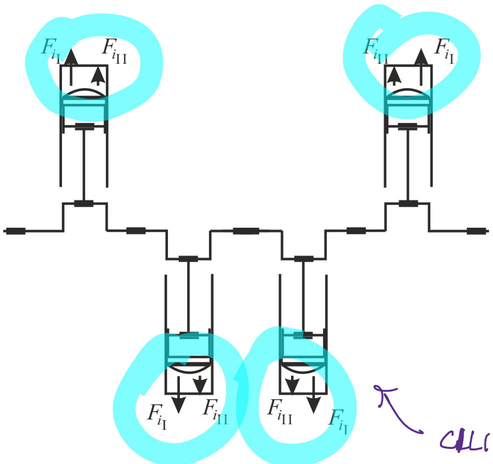


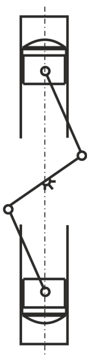
DISPOSIZIONE ORIZZONTALE

$\sum F_{i_{I\,ORDINE}} = 0$ $\sum M_{i_{I\,ORDINE}} \neq 0$

$\sum F_{i_{II\,ORDINE}} = 0$ $\sum M_{i_{II\,ORDINE}} \neq 0$

MOTORE BOXER 4 CILINDRI



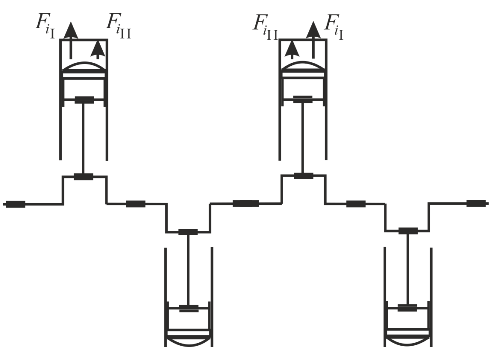


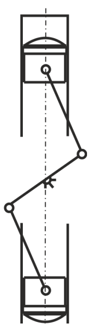
$\sum F_{i_{I\,ORDINE}} = 0$ $\sum M_{i_{I\,ORDINE}} = 0$

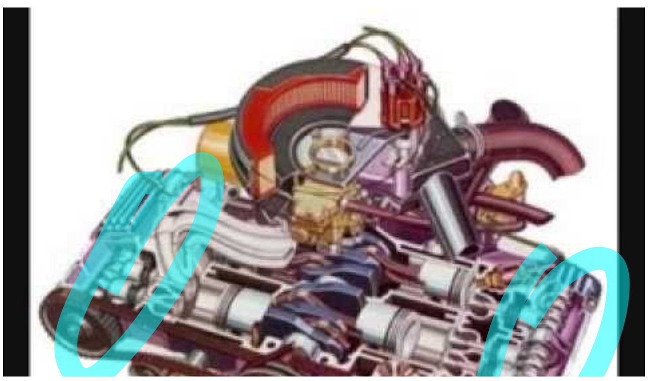
$\sum F_{i_{II\,ORDINE}} = 0$ $\sum M_{i_{II\,ORDINE}} = 0$

CILINDRI ADIACENTI
POSSO AVERE PROBLEMI DI RAFFREDDAMENTO

MOTORE BOXER 4 CILINDRI



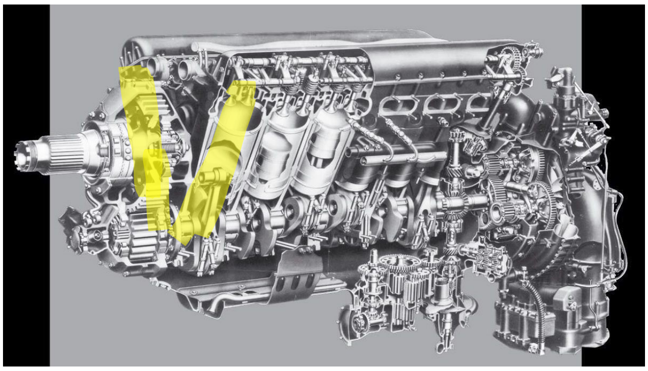




$\sum F_{i\,I\,ordine} = 0$ $\qquad$ $\sum M_{i\,I\,ordine} \neq 0$

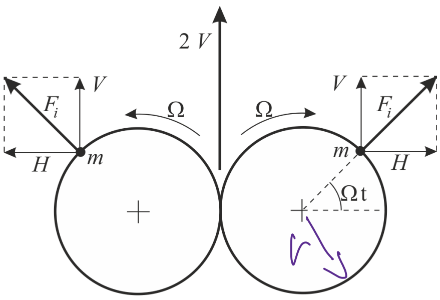
$\sum F_{i\,II\,ordine} = 0$ $\qquad$ $\sum M_{i\,II\,ordine} \neq 0$

ALTRE DISPOSIZIONE DI CILINDRI



← 12 CILINDRI A "V"

VIBRODINE → BILANCIAMENTO FORZE ALTERNATIVE

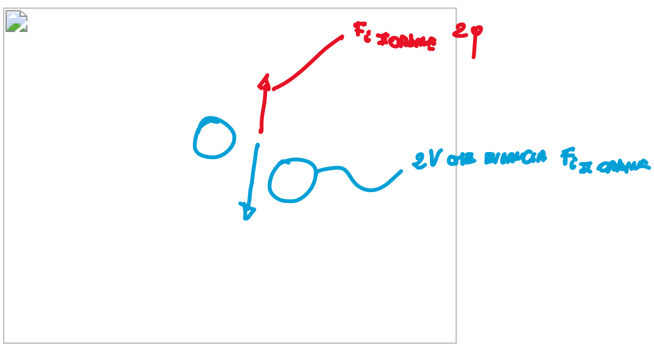


2 ALBERI CONTROROTANTI CON MASSA IN ECCENTRICA

→ SOMMA FORZE

$\sum H = 0$

$\sum V = 2V = 2 m \Omega^2 r$



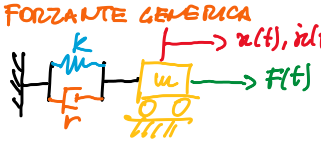
Lezione lunedì 23 novembre 2020

lunedì 23 novembre 2020 10:23

SISTEMI VIBRANTI 1 G.d.L. CON FORZAMENTO

- SISTEMI CON FORZANTE COSTANTE
- SISTEMI CON FORZANTE ARMONICA → $F_0 \cos \Omega t$; $Re(F_0 e^{i\Omega t})$ → RISONANZA, RISPOSTA IN FREQUENZA
- SISTEMI CON FORZANTI PERIODICHE

FORZANTE GENERICA



EQ. MOTO DEL SISTEMA

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

FORZANTE (FUNZIONE SOLO DEL TEMPO)

EQ DIFFERENZIALE .... NON OMOGENEA

SOLUZIONE $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

$x_p(t)$: INTEGRALE PARTICOLARE: DIPENDE DAL TIPO DI FORZANTE

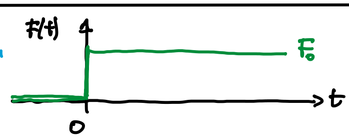
$x_g(t)$: INTEGRALE GENERALE, SOLUZIONE DELL'EQ DI MOTO OMOGENEA $\lim_{t\to\infty} x_g(t) = 0$

EQ. DI MOTO È LINEARE → PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

- IN TRANSITORIO ("t" piccolo): LA SOLUZIONE È CARATTERIZZATA DAL CONTRIBUTO SIA DELL'INTEGRALE GENERALE SIA DALL'INTEGRALE PARTICOLARE
- A REGIME ("t" GRANDE) $\lim_{t\to\infty} x_g = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x_p(t)$: L'INTEGRALE PARTICOLARE È LA SOLUZIONE A REGIME

FORZANTE COSTANTE

- FORZANTE "A GRADINO"



TEORIA EQ. DIFFERENZIALI: $x_p(t) = \text{costante} = X_0$

$\frac{d}{dt}$: $\dot{x}_p(t) = 0$

$\frac{d}{dt}$: $\ddot{x}_p(t) = 0$

SOSTITUISCO NELL'EQ. DI MOTO

$$\cancel{m\ddot{x}} + \cancel{r\dot{x}} + kx = F_0$$

$$kX_0 = F_0$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \delta_{st}$$

δ_{st}: SPOSTAMENTO DOVUTO ALL'APPLICAZIONE "STATICA" DELLA FORZANTE

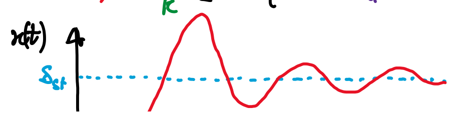
SOLUZIONE EQ. DI MOTO: $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

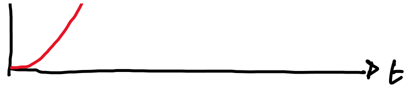
$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A\cos\omega_d t + B \sin\omega_d t\right] + \frac{F_0}{k}$$

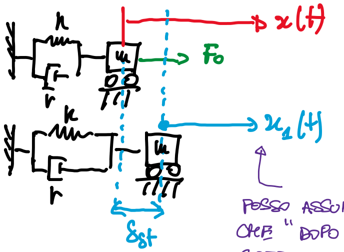
PER DETERMINARE A E B IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI; AD ESEMPIO:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(h \sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)e^{-\alpha t}\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{F_0}{k} = \delta_{st}$$







AD ESEMPIO SE LA FORZA COSTANTE È LA GRAVITA' ASPETTO CHE IL SISTEMA ASSUMA LA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO STATICO PRIMA DI STUDIARE ULTERIORI MOTI DOVUTI AD ALTRE FORZANTI

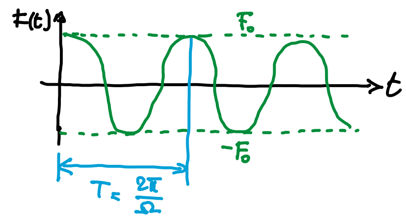
POSSO ASSUMERE CHE "DOPO UN PO'" IL SISTEMA SI MUOVEREBBE SECONDO IL NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO $x_1(t)$

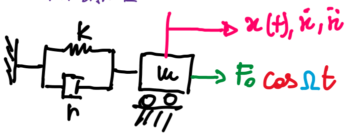
FORZANTE ARMONICA

- $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

AMPIEZZA DELLA FORZANTE (F_0)

PULSAZIONE DELLA FORZANTE (Ω)





$$x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

AMPIEZZA (X_0) — SOLUZIONE STESSO TIPO DI FUNZIONE — FASE (ϕ)

$$x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$
$$\dot{x}_p(t) = -\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi)$$
$$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$$-m\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi) - r\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi) + k X_0 \cos(\Omega t + \phi) = F_0 \cos \Omega t$$

→ APPLICARE LE FORMULE TRIGONOMETRICHE PER $\cos(\Omega t + \phi)$ E $\sin(\Omega t + \phi)$

→ RACCOGLIERE I TERMINI IN $\cos(\Omega t + \phi)$ E IN $\sin(\Omega t + \phi)$

$$\text{I} \quad \left(-m\Omega^2 \cos\phi - r\Omega \sin\phi + k\cos\phi\right) X_0 \cancel{\cos \Omega t} = F_0 \cancel{\cos \Omega t}$$

$$\text{II} \quad \left(m\Omega^2 \sin\phi - r\Omega \cos\phi - k \sin\phi\right) X_0 \cancel{\sin \Omega t} = 0$$

DALLA II $\quad \tan\phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2} \longrightarrow \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2}\right) \quad \text{III}$

SOSTITUISCO LA II NELLA I $\quad X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \quad \text{IV}$

FORMA ADIMENSIONALE

DIVIDO IL NUMERATORE ED IL DENOMINATORE

DEFORMATA STATICA

$$X_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\ldots}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\Omega}{\ldots}\right)^2\left(\frac{r}{\ldots}\right)^2}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\ldots}}$$

DI III E IV PER K

RAPPORTO TRA LE PULSAZIONI

FATTORE DI SMORZAMENTO

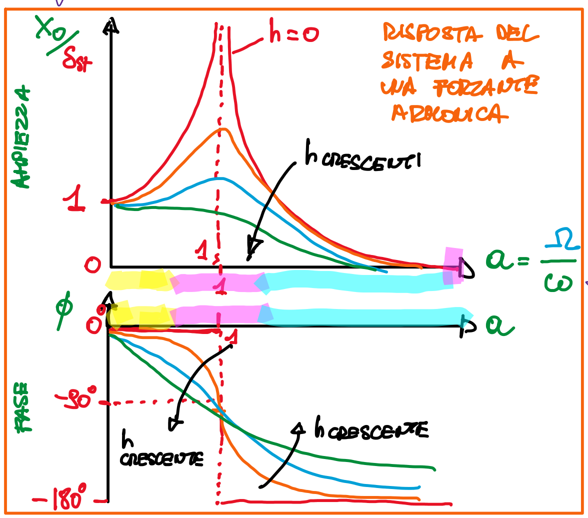
$$\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2+4a^2h^2}}$$

COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA

$$\tan\phi = -\frac{\Omega r/k}{(k-m\Omega^2)/k} = -\frac{2\frac{\Omega}{\omega}\frac{r}{r_c}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = -\frac{2ah}{1-a^2}$$

RAPPRESENTAZIONI ADIMENSIONALI DI AMPIEZZA E FASE DELLA RISPOSTA FORZATA

$x_p(t) = X_0\cos(\Omega t+\phi)$

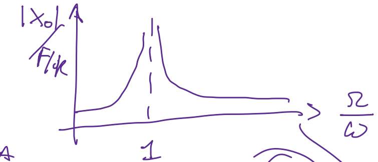


$a = \frac{\Omega}{\omega}$ ← PULSAZIONE DELLA FORZANTE / PULSAZIONE NATURALE

SE $h=0$ $\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-a^2}$ E SE $a=1 \to \Omega=\omega$ CONDIZIONE DI RISONANZA

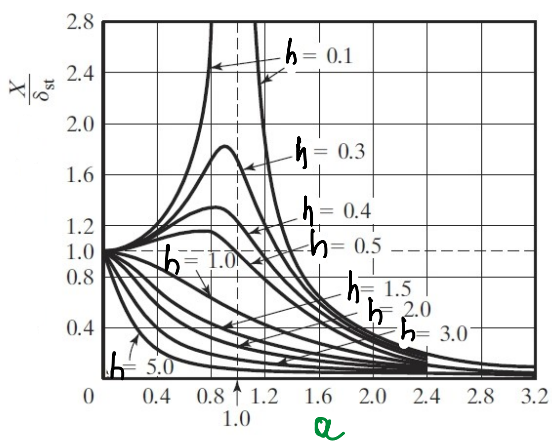
$\lim_{a\to 1} X_0 = \infty$

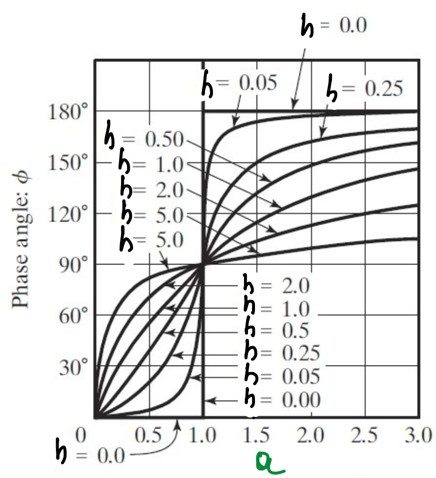
$m\ddot{x}+kx = F_0\cos\Omega t$



$a = \frac{\Omega}{\omega} < 1$ $\quad \frac{F_0}{1-a^2}$ $\quad \frac{F_0}{a^2-1}$

SE $h=0$ $\tan\phi = 0$ "SALTO DI FASE" IN CORRISPONDENZA DI $\Omega=\omega$





CLASSIFICAZIONE IN "ZONE" DELLA RISPOSTA DEL SISTEMA

- IN TUTTI I CASI: $X_0 = \delta_{st}$ PER $\Omega = 0$

$\lim X_0/\delta_{st} = 0$

$a \ll 1 \Rightarrow \Omega \ll \omega$: ZONA QUASI STATICA

$a = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$: ZONA DI RISONANZA

$a \gg 1 \Rightarrow \Omega \gg \omega$: ZONA ELASTICA O SISMOGRAFICA O "SOSPESA"

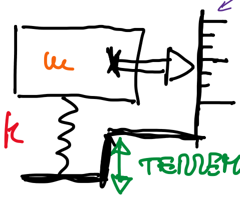
SE $h \neq 0$ $\phi = -90$ PER $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

SE $h \neq 0$ $\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{2h}$ PER $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

↑ AMPIEZZA DI $x_p(t)$ IN RISONANZA SE $h \neq 0$

SISMOGRAFO

"SCALA" SOLIDALE CON IL TERRENO



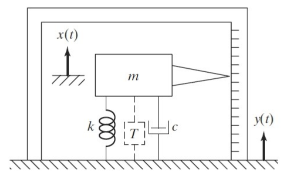
GRANDE m

PICCOLA k

LA MASSA STA "FERMA"

TERRENO CON Ω QUALSIASI

IL TERRENO SI MUOVE

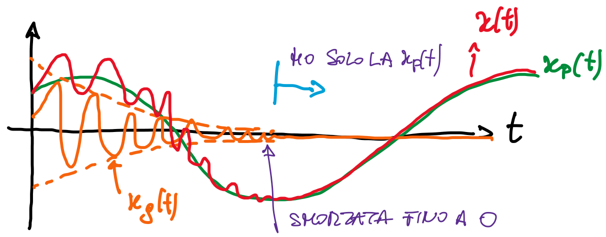


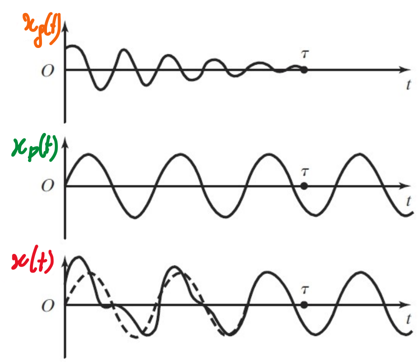
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ MOLTO PICCOLA

SOLUZIONE DEL SISTEMA

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

↳ DOVRÒ IMPORRE LA CONDIZIONI INIZIALI PER OTTENERE A E B $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \end{cases}$





- $F(t) = F_0 \cos \Omega t = Re(F_0 e^{i\Omega t})$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = Re(F_0 e^{i\Omega t}) \rightarrow x_p(t) = X_0^* e^{i\Omega t}$$

"TRASCURO" DI SCRIVERE L'OPERATORE $Re(\cdot)$ PER LA SOLUZIONE

$$\xrightarrow{d/dt} \dot{x}_p(t) = i\Omega X_0^* e^{i\Omega t}$$

$$\xrightarrow{d/dt} \ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0^* e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 m + i\Omega r + k)X_0 \cancel{e} = F_0 \cancel{e} \rightarrow X_0 = \frac{F_0}{(-\Omega^2 m + i\Omega r + k)}$$

AVENDO *i* A DENOMINATORE

↳ POI CALCOLO MODULO E FASE

$$\boxed{|X_0^*| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \qquad \tan\phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2}}$$

← DISEGNO MODULO E FASE ↳ DIAGRAMMI DI BODE

$$x_p(t) = \mathrm{Re}\left(X_0^* e^{i\Omega t}\right) = |X_0^*| \cos(\Omega t + \phi)$$

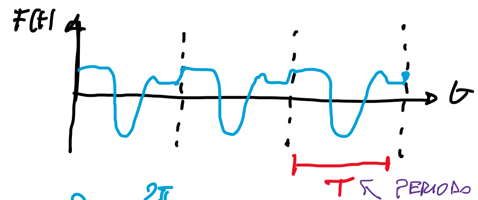
FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

$$G(i\Omega) = \frac{X_0^*}{F_0}$$

SISTEMI CON FORZANTI PERIODICHE

FUNZIONE PERIODICA DEF: $F(t) = F(t+T)$

↳ ESPANSIONE IN SERIE DI FOURIER



$$F(t) = F_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_k \left[A_k \cos(k\Omega_0 t) + B_k \sin(k\Omega_0 t) \right] \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt \qquad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt$$

J.B.J. FOURIER

SISTEMA VIBRANTE CON FORZANTE PERIODICA

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t) = F_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_k \left[A_k \cos(k\Omega_0 t) + B_k \sin(k\Omega_0 t) \right]$$

← EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE

↓

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$x_p = x_{p_0} + \sum_{1}^{\infty}{}_k x_{p_{c_k}} + \sum_{1}^{\infty}{}_k x_{p_{s_k}}$$

$$m\ddot{x}_{p_0} + r\dot{x}_{p_0} + kx_{p_0} = F_0$$

$$m\ddot{x}_{p_{c_1}} + r\dot{x}_{p_{c_1}} + kx_{p_{c_1}} = A_1 \cos \Omega_0 t$$

$$\vdots$$

$$m\ddot{x}_{p_{c_n}} + r\dot{x}_{p_{c_n}} + kx_{p_{c_n}} = A_n \cos n\Omega_0 t$$

$$m\ddot{x}_{p_{s_1}} + r\dot{x}_{p_{s_1}} + kx_{p_{s_1}} = B_1 \sin \Omega_0 t$$

$$\vdots$$

CIASCUNA EQUAZIONE È LA SOLUZIONE DI 1 SISTEMA VIBRANTE A 1 G.d.L. ECCITATO DA FORZANTE ARMONICA

$$m\,\ddot{x}_{P_{S_n}} + r\,\dot{x}_{P_{S_n}} + k\,x_{P_{S_n}} = B_n \sin n\Omega_0 t$$

(NB. NELLO SVILUPPO MI SONO FERMATO AL TERMINE "n")

$$|X_0^*| = \frac{A_k}{\sqrt{\left(k - m(k\Omega_0)^2\right)^2 + (k\Omega_0 r)^2}}$$

AUMENTANDO L'ORDINE k DELL'ARMONICA IL MODULO DIMINUISCE A PARITÀ DI AMPIEZZA