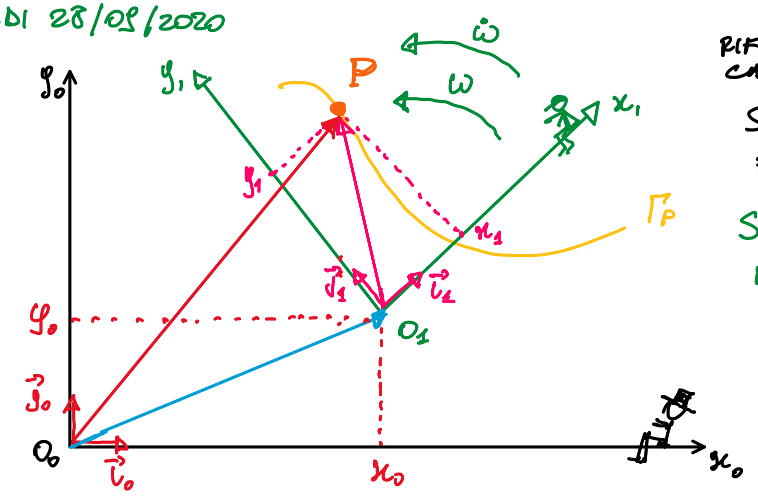
Lezione lunedì 5 ottobre 2020

lunedì 5 ottobre 2020 10:25

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

→ RECUPERARE LE FORMULE DI POISSON DALLA LEZIONE DI LUNEDÌ 28/09/2020



RIFERIMENTI CARTESIANI

$S_0(x_0 O_0 y_0)$ FISSO (INERZIALE)

$S_1(x_1 O_1 y_1)$ MOBILE

● VETTORE POSIZIONE :

$$(P-O_0) = (O_1-O_0) + (P-O_1)$$

ESPRIMENDO LA POSIZIONE DI P NEL SISTEMA S_0 COME POSIZIONE DI P IN S_1 + POSIZIONE RELATIVA DI O_1 RISPETTO AD O_0

● VELOCITÀ

↳ $(P-O_0) = (x_0\vec{i}_0 + y_0\vec{j}_0) + (x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1)$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P-O_0) = \frac{d}{dt}(x_0\vec{i}_0 + y_0\vec{j}_0) + \frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) =$$

$$= \dot{x}_0\vec{i}_0 + \dot{y}_0\vec{j}_0 + \boxed{\frac{d\vec{i}_1}{dt}}x_1 + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \boxed{\frac{d\vec{j}_1}{dt}}y_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1$$

$$\boxed{\vec\omega\wedge\vec{i}_1}\,x_1 + \boxed{\vec\omega\wedge\vec{j}_1}\,y_1 = \vec\omega\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) = \vec\omega\wedge(P-O_1)$$

$$\vec{v}_P = \dot{x}_0\vec{i}_0 + \dot{y}_0\vec{j}_0 + \vec\omega\wedge(P-O_1) + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 =$$

$$= \vec{v}_{O_1} + \vec\omega\wedge(P-O_1) + \vec{v}_r$$

Velocità di trascinamento di O_1 — componente del moto rotatorio del sistema S_1

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Velocità di trascinamento}}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P_{tr}} + \vec{v}_{P_{rel}}$$

● ACCELERAZIONE

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\vec{v}_P = \frac{d^2}{dt^2}(P-O_0) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{v}_{P_{rel}}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\underset{①}{\dot{x}_o\vec{i}_o + \dot{y}_o\vec{j}_o} + \underset{②}{\vec{\omega}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1)} + \underset{③}{\dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_o\vec{i}_o + \dot{y}_o\vec{j}_o) = \ddot{x}_o\vec{i}_o + \ddot{y}_o\vec{j}_o \quad ①$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1)\right) = \dot{\vec{\omega}}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) + \vec{\omega}\wedge\frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}\wedge(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1) + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{v}_{P_{rel}}\right) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{v}_{P_{rel}} \quad ②$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1) = \frac{d}{dt}\vec{v}_{P_{rel}} = \boxed{\frac{d\vec{i}_1}{dt}}\dot{x}_1 + \ddot{x}_1\vec{i}_1 + \boxed{\frac{d\vec{j}_1}{dt}}\dot{y}_1 + \ddot{y}_1\vec{j}_1 \quad ③$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{i}_1\,\dot{x}_1 + \vec{\omega}\wedge\vec{j}_1\,\dot{y}_1 = \vec{\omega}\wedge(\dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1) = \vec{\omega}\wedge\vec{v}_{P_{rel}} \quad ③_{bis}$$

$$\vec{a}_P = \ddot{x}_o\vec{i}_o + \ddot{y}_o\vec{j}_o + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + (\ddot{x}_1\vec{i}_1 + \ddot{y}_1\vec{j}) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{P_{rel}} =$$

$$= \vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(P-O_1) + \vec{a}_{P_{rel}} + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{P_{rel}}$$

acc. di … componente … componente … accelerazione …

trascinamento di O_1 — tangenziale — normale — relativa di P — accelerazione complementare o di Coriolis (1835)

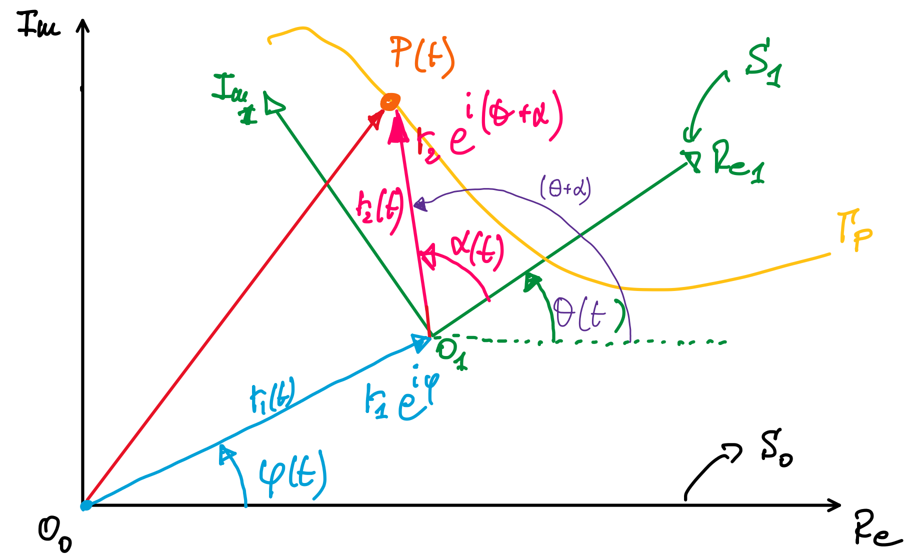
componente rotatoria di S_1

accelerazione di trascinamento

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_C}$$

- **USO DEI NUMERI COMPLESSI PER LO STUDIO DEI SISTEMI MECCANICI**

$$(O_1 - O_0) = r_1 e^{i\varphi}$$
$$(P - O_1) = r_2 e^{i(\theta+\alpha)}$$



$$(P - O_0) = (O_1 - O_0) + (P - O_1) =$$
$$= r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P - O_0) = \frac{d}{dt}\left(r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{i(\theta+\alpha)}\right)$$

$$\vec{v}_P = \dot{r}_1 e^{i\varphi} + i r_1 \dot{\varphi} e^{i\varphi} + \dot{r}_2 e^{i(\theta+\alpha)} + i r_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi}}_{\text{trascinamento di } O_1} + \underbrace{i r_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)}}_{\text{moto di rotazione di } S_1}}_{} + \underbrace{(\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)}}_{\text{moto relativo di P}} =$$

$$= \vec{v}_{P_{t_2}} + \vec{v}_{P_{rel}}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\vec{v}_P = \frac{d}{dt}\left((\dot r_1 + i r_1 \dot\varphi)e^{i\varphi} + i r_2 \dot\theta e^{i(\theta+\alpha)} + (\dot r_2 + i r_2 \dot\alpha)e^{i(\theta+\alpha)}\right) =$$

$$= (\ddot r_1 + i \dot r_1 \dot\varphi + i r_1 \ddot\varphi)e^{i\varphi} + i\dot\varphi(\dot r_1 + i r_1 \dot\varphi)e^{i\varphi} +$$

$$+ (i \dot r_2 \dot\theta + i r_2 \ddot\theta)e^{i(\theta+\alpha)} - (\dot\theta + \dot\alpha) r_2 \dot\theta e^{i(\theta+\alpha)} +$$

$$+ (\ddot r_2 + i \dot r_2 \dot\alpha + i r_2 \ddot\alpha)e^{i(\theta+\alpha)} + i(\dot\theta + \dot\alpha)(\dot r_2 + i r_2 \dot\alpha)e^{i(\theta+\alpha)} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(\ddot r_1 + 2i \dot r_1 \dot\varphi + i r_1 \ddot\varphi - r_1 \dot\varphi^2)e^{i\varphi}}_{\text{trascinamento di } O_1 = \vec{a}_{O_1}} \underbrace{- r_2 \dot\theta^2 e^{i(\theta+\alpha)} + i r_2 \ddot\theta e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec\omega \wedge \vec\omega \wedge (P-O_1) + \dot{\vec\omega} \wedge (P-O_1) \text{ — moto di rotazione di } S_1}}_{\vec{a}_{P_{tr}}} +$$

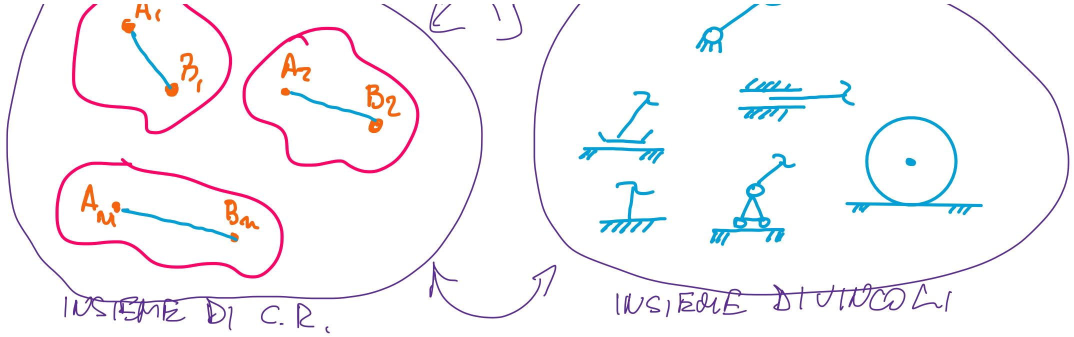
$$+ \underbrace{(\ddot r_2 + 2i \dot r_2 \dot\alpha + i r_2 \ddot\alpha - r_2 \dot\alpha^2)e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec{a}_{P_{rel}}} + \underbrace{\boxed{i}\, 2\dot\theta(\dot r_2 + i r_2 \dot\alpha)e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec{a}_{P_{cor}}} =$$

$$= \vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{cor}}$$

- **CINEMATICA DEI SISTEMI MECCANICI**

STRUTTURE

G.d.L. ≤ 0

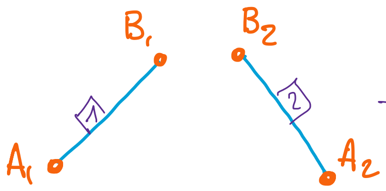


⇒

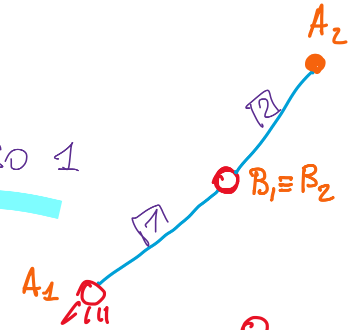
MECCANISMI

SISTEMI MECCANICI

G.d.L > 0



→ CASO 1

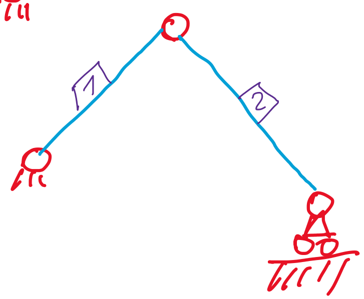


2 C.R. × 3 GdL = 6 G.d.L.

2 CERNIERE × 2 GdV = − 4 GdV

2 GdL → MECCANISMO

→ CASO 2



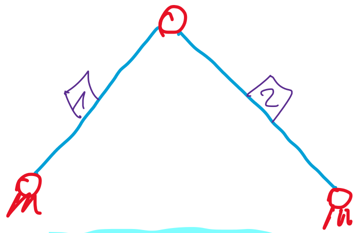
2 CR × 3 GdL = 6 GdL

2 CERNIERE × 2 GdV = − 4 GdV

1 CARRELLO × 1 GdV = − 1 GdV

1 GdL → MECCANISMO

→ CASO 3



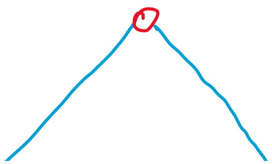
2 CR × 3 GdL = 6 GdL

3 CERNIERE × 2 GdV = − 6 GdV

0 GdL → STRUTTURA (ISOSTATICA)

STATICA ←

→ CASO 4



2 CR × 3 GdL = 6 GdL

2 CERNIERE $\times$ 2 GdV = -4 GdV

1 INCASTRO $\times$ 3 GdV = -3 GdV

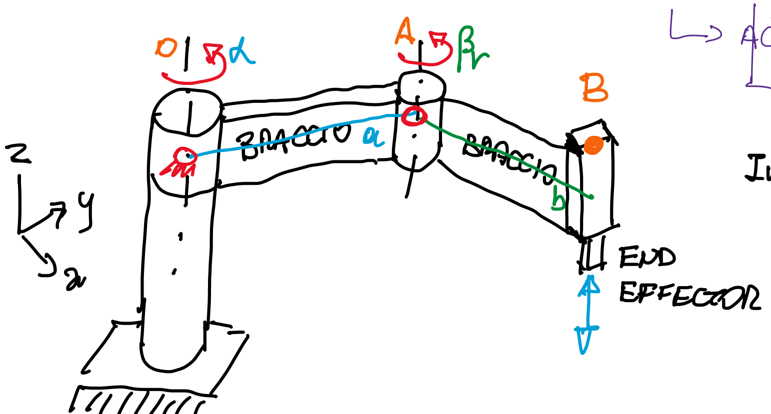
-1 GdL → STRUTTURA (IPERSTATICA)

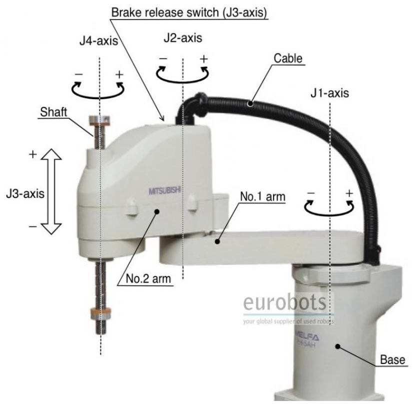
CONSIDERARE I CORPI COME ELASTICI

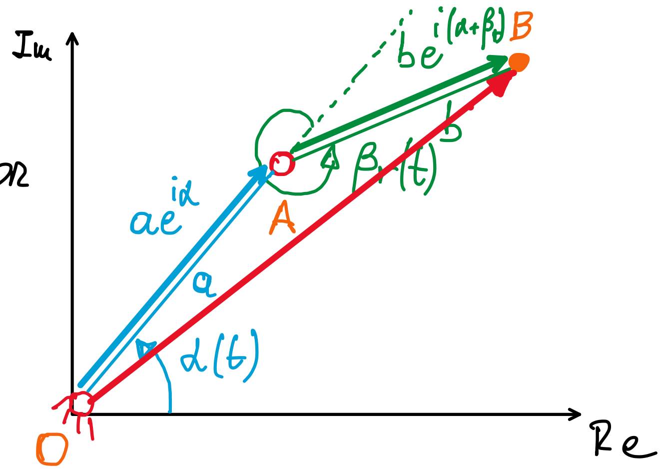
CINEMATICA DI UN ROBOT RR(P)

↳ ACCOPPIAMENTO ROTOIDALE (CERNIERA NEL PIANO)

↳ ACCOPPIAMENTO PRISMATICO (MOVIMENTO DI B ⊥ PIANO)







2 G.d.L

DATI:

$a, b, \alpha(t), \beta_r(t)$

EQUAZIONE DI CHIUSURA (SOMMA VETTORIALE)

$$\boxed{(B-O) = (A-O) + (B-A)}$$

$$x_B + i y_B = a e^{i\alpha} + b e^{i(\alpha+\beta_r)}$$

→ 2 EQ SCALARI (FORMULA DI EULERO)

$$\begin{cases} x_B = a \cos\alpha + b \cos(\alpha+\beta_r) \\ y_B = a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta_r) \end{cases}$$

$$\vec{v}_B = \frac{d}{dt}(x_B + i y_B) = \frac{d}{dt}\left(a e^{i\alpha} + b e^{i(\alpha+\beta_r)}\right) =$$

$$= i\dot\alpha a e^{i\alpha} + i(\dot\alpha+\dot\beta_r) b e^{i(\alpha+\beta_r)}$$

→ FORMULA DI EULERO

$$i\dot\alpha a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + i(\dot\alpha+\dot\beta_r) b\left(\cos(\alpha+\beta_r) + i\sin(\alpha+\beta_r)\right)$$

↓ 2 EQ SCALARI

$$\begin{cases} \dot x_B = -\dot\alpha a \sin\alpha - (\dot\alpha+\dot\beta_r) b \sin(\alpha+\beta_r) \\ \dot y_B = \dot\alpha a \cos\alpha + (\dot\alpha+\dot\beta_r) b \cos(\alpha+\beta_r) \end{cases}$$