Lunedì 25 ottobre

lunedì 25 ottobre 2021 09:54

- METODI ENERGETICI (PER LO STUDIO DELLA DINAMICA DI SISTEMI DI C.R.)
  - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)
    - ↳ BILANCIO DI POTENZE } DUALI
    - ↳ TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA } DUALI
    - ↳ EQUAZIONE DI LAGRANGE

N.B.

$\wedge$: PRODOTTO VETTORIALE
$\times$: PRODOTTO SCALARE

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

→ RIPRENDIAMO SISTEMA EQUAZIONI EQUILIBRIO DINAMICO PER SISTEMI DI CORPI RIGIDI

PER OGNI C.R.

$$\begin{cases} \sum_j^{n} \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{in,i} = 0 \\ \sum_j^{n} (P_{i,j} - O) \wedge \vec{F}_{i,j} + \sum_r^{n_M} \vec{C}_{i,r} + (G_i - O) \wedge \vec{F}_{in,i} + \vec{C}_{in,i} = 0 \end{cases}$$

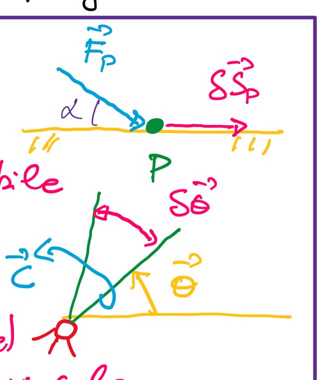
$j = 1, 2, \dots, n$ indice delle forze esterne per ogni C.R.
$i = 1, 2, \dots, n_c$ indice dei C.R.
$r = 1, 2, \dots, n_M$ indice delle coppie/momenti esterni per ogni C.R.

↳ CALCOLO DEL LAVORO VIRTUALE

$$\delta L = \underbrace{\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j \vec{F}_{i,j} \times \delta \vec{P}_{i,j}}_{\text{LAVORO DELLE FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r \vec{C}_{i,r} \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO MOMENTI/COPPIE ESTERNE}} +$$

$$+ \sum_1^{n_c}{}_i \Big(\underbrace{-m_i \vec{a}_{G_i} \times \delta \vec{G}_i}_{\text{LAVORO FORZE D'INERZIA}} \underbrace{- J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO COPPIE D'INERZIA}} \Big) = 0$$

LAVORO VIRTUALE



$\delta L = \vec{F}_P \times \delta \vec{S}_P$

$\delta \vec{S}_P$ spostamento compatibile con il vincolo

$\delta L = \vec{C} \times \delta \vec{\theta}$

$\delta \vec{\theta}$ spostamento (angolare) compatibile con il vincolo

SCRIVIAMO IL δL CON LE COORDINATE FISICHE

$$\delta L = \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j \left(F_{x_{i,j}} \delta x_{i,j} + F_{y_{i,j}} \delta y_{i,j} \right) + \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r C_{i,r} \delta \theta_i +$$

$$+ \sum_1^{n_c}{}_i \left(-m_i a_{G_{x}i} \delta x_{G_i} - m_i a_{G_y i} \delta y_{G_i} - J_{G_i} \ddot{\theta}_i \delta \theta_i \right)$$

↑ 1 EQUAZIONE SCALARE

$x_{G_i} = x_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$

$y_{G_i} = y_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$

$\theta_i = \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$

LE q_s SONO LE COORDINATE LIBERE INDIPENDENTI CHE "DESCRIVONO" COMPLETAMENTE I GdL DEL SISTEMA DI C.R.

(A VOLTE VENGONO DETTE ANCHE COORDINATE GENERALIZZATE)

$$\begin{cases} \delta x_{G_i} = \sum_1^{n_{GdL}}{}_s \dfrac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta y_{G_i} = \sum_1^{n_{GdL}}{}_s \dfrac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta \theta_i = \sum_1^{n_{GdL}}{}_s \dfrac{\partial \theta_i}{\partial q_s} \delta q_s \end{cases}$$

$$\boxed{\delta L = \sum_1^{n_{GdL}}{}_s \left(Q_s + Q_{in,s} \right) \delta q_s = 0}$$

← 1 EQUAZIONE SCALARE CHE È SODDISFATTA SE TUTTI I TERMINI TRA PARENTESI SONO UGUALI A ZERO

$$\begin{cases} Q_1 + Q_{in,1} = 0 \\ Q_2 + Q_{in,2} = 0 \\ \vdots \\ Q_{n_{GdL}} + Q_{in,n_{GdL}} = 0 \end{cases}$$

← SISTEMA DI n_{GdL} EQUAZIONI

I "Q_s" SONO CHIAMATI "COMPONENTI LAGRANGIANE"

$$Q_{in,s} = \sum_1^{n_c}{}_i \left(-m_i a_{G_x i} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} - m_i a_{G_y i} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} - J_{G_i} \ddot{\theta}_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_s} \right)$$

I "$Q_{in,s}$" SONO CHIAMATI "COMPONENTI LAGRANGIANE DELLE FORZE D'INERZIA"

AD ESEMPIO PER LA 1ª EQUAZIONE $Q_{in,s} \to Q_{in,1}$

$$Q_{in,1} = \sum_1^{n_c}{}_i \left(-m_i a_{G_x,i} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_1} - m_i a_{G_y,i} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_1} - J_{G_i} \ddot{\theta}_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_1} \right)$$

BILANCIO DI POTENZE

RIPRENDERE IL PLV

$$\delta L = \underbrace{\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j \vec{F}_{i,j} \times \delta \vec{P}_{i,j}}_{\text{LAVORO FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r \vec{C}_{i,r} \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO COPPIE/MOMENTI ESTERNI}} + \sum_1^{n_c}{}_i \Big(\underbrace{-m_i \vec{a}_{G_i} \times \delta \vec{G}_i}_{\text{LAVORO FORZE INERZIA}} \underbrace{- J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO COPPIE D'INERZIA}} \Big) = 0$$

d/dt

$$\frac{d}{dt} L = 0 \qquad \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j \vec{F}_{i,j} \times \frac{d\vec{P}_{i,j}}{dt} + \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r \vec{C}_{i,r} \times \frac{d\vec{\theta}_i}{dt} + \sum_1^{n_c}{}_i \left(-m_i \vec{a}_{G_i} \times \frac{d\vec{G}_i}{dt} - J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \frac{d\vec{\theta}_i}{dt} \right) = 0$$

$\frac{d\vec{P}_{i,j}}{dt} \to \vec{v}_{P_{i,j}}$, $\frac{d\vec{\theta}_i}{dt} \to \vec{\omega}_i$, $\frac{d\vec{G}_i}{dt} \to \vec{v}_{G_i}$, $\frac{d\vec{\theta}_i}{dt} \to \vec{\omega}_i$

$W_{i,j} = \vec{F}_{i,j} \times \dfrac{d\vec{P}_{i,j}}{dt} = \vec{F}_{i,j} \times \vec{v}_{P_{i,j}}$ POTENZA DELLA FORZA $\vec{F}_{i,j}$

$W_{i,r} = \vec{C}_{i,r} \times \dfrac{d\vec{\theta}_i}{dt} = \vec{C}_{i,r} \times \vec{\omega}_i$ POTENZA DELLA COPPIA/MOMENTO $\vec{C}_{i,r}$

$W_{in,i} = -m_i \vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} - J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}$ POTENZA DEL SISTEMA EQUIVALENTE D'INERZIA DEL C.R. i-ESIMO

$$\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j W_{i,j} + \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r W_{i,r} + \sum_1^{n_c}{}_i W_{in,i} = 0$$

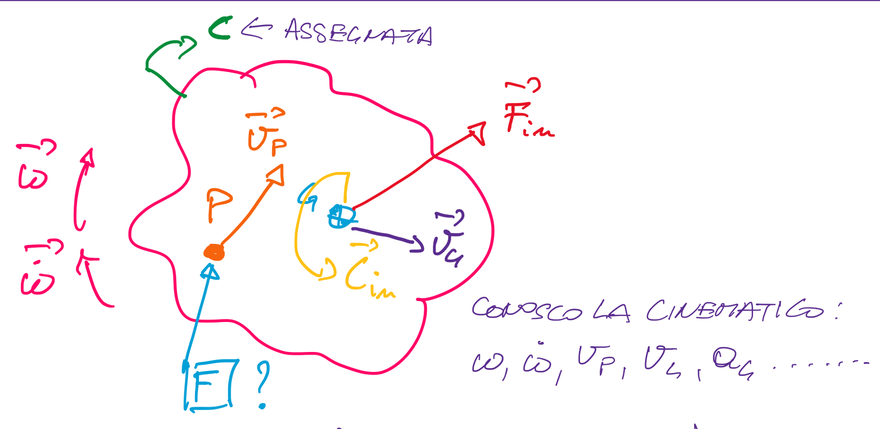
1 EQUAZIONE → 1 INCOGNITA

$$\boxed{\sum W + \sum W_{in} = 0}$$

BILANCIO DI POTENZE

POTENZE FORZE, COPPIE, MOMENTI ESTERNI — POTENZA FORZE COPPIE D'INERZIA

APPLICAZIONE



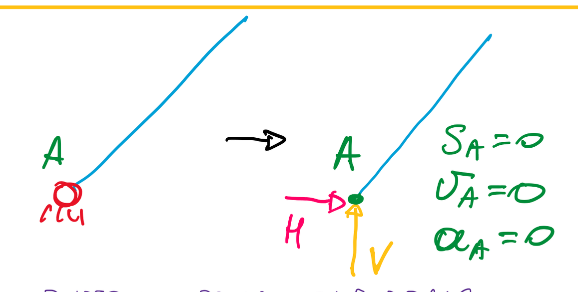
CONOSCO LA CINEMATICA: $\omega, \dot{\omega}, v_P, v_G, a_G \dots\dots$

BILANCIO DI POTENZE (PER IL CALCOLO DI F)

$$\vec{F} \times \vec{v}_P + \vec{C} \times \vec{\omega} - m \vec{a}_G \times \vec{v}_G - J_G \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega} = 0$$

↑ UNICA INCOGNITA

(SE HO REAZIONI VINCOLARI, IL LORO PUNTO DI APPLICAZIONE NON SI MUOVE)

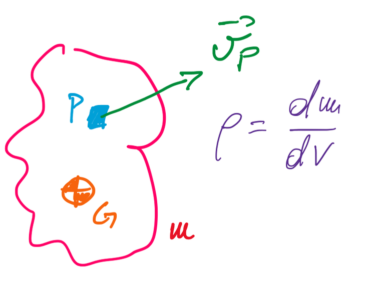


IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI NON SI "MUOVE" ERGO LE REAZIONI VINCOLARI NON LAVORANO

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (DUALE DEL BILANCIO DI POTENZE)

- CALCOLO DELL'ENERGIA CINETICA DI UN C.R.

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \vec{v}_P \times \vec{v}_P \rho \, dV = \frac{1}{2} \int_V v_P^2 \rho \, dV$$



$\rho = \dfrac{dm}{dV}$

APPLICO IL TH DI RIVALS

$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (P - G)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{v}_G \times \vec{v}_G \underbrace{\int_V \rho \, dv}_{m} + \frac{1}{2} \vec{v}_G \times \Big(\vec{\omega} \wedge \int_V (P-G) \rho \, dV \Big) + \frac{1}{2} \Big(\vec{\omega} \wedge \int_V (P-G) \rho \, dV \Big) \times \vec{v}_G + \frac{1}{2} \omega^2 \int_V |P-G|^2 \rho \, dV \longrightarrow$$

MOMENTI STATICI RISPETTO AL BARICENTRO $G = 0$

$$\left(\vec{\omega} \wedge (P-G) \right) \times \left(\vec{\omega} \wedge (P-G) \right) = \omega^2 |P-G|^2$$

$$\int_V |P-G|^2 \rho \, dV = J_G$$

$$\to E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_G \times \vec{v}_G + \frac{1}{2} J_G \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

TEOREMA DI KOENIG (KÖNIG)

JOHAN SAMUEL KÖNIG (1712 - 1757)

DERIVATA RISPETTO AL TEMPO DELLE E_{c_i} DEI MIEI i CORPI RIGIDI

d/dt

$$\frac{dE_{c_i}}{dt} = \frac{1}{2} m_i \vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} + \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{G_i} \times \vec{a}_{G_i} + \frac{1}{2} J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}_i + \frac{1}{2} J_{G_i} \vec{\omega}_i \times \dot{\vec{\omega}}_i =$$

$$= m_i \vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} + J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}_i = -W_{in,i}$$

$\otimes$ IL PRODOTTO SCALARE HA LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA

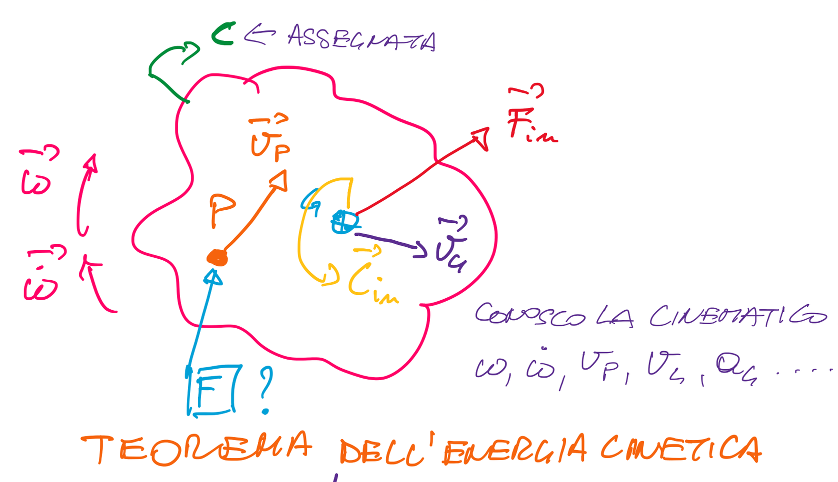
$$\boxed{W_{in,i} = -\frac{dE_{c_i}}{dt}}$$

$$\sum W + \sum W_{in} = 0 \rightarrow \boxed{\sum W = \frac{dE_c}{dt}}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

1 EQUAZIONE → 1 INCOGNITA

APPLICAZIONE



CONOSCO LA CINEMATICA: $\omega, \dot{\omega}, v_P, v_G, a_G \dots\dots$

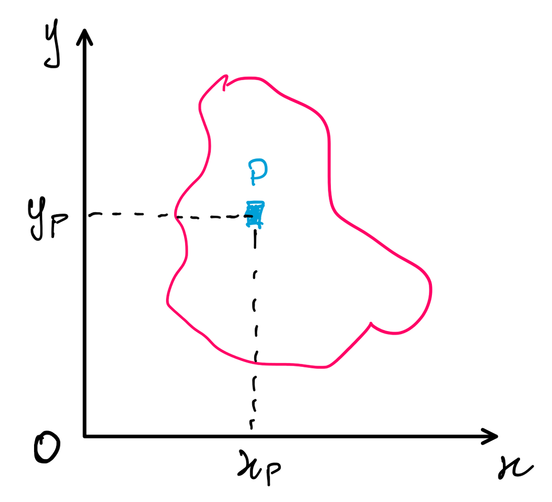
TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$\vec{F} \times \vec{v}_P + \vec{C} \times \vec{\omega} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}_G \times \vec{v}_G + \frac{1}{2} J_G \vec{\omega} \times \vec{\omega} \right) \nearrow m \vec{a}_G \times \vec{v}_G + J_G \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega}$$

↑ UNICA INCOGNITA

(SE HO REAZIONI VINCOLARI, IL LORO PUNTO DI APPLICAZIONE NON SI MUOVE)

MOMENTI STATICI RISPETTO AL BARICENTRO



$M_{Ox}^{(1)} = \int_V y_P \rho \, dV$ MOMENTO STATICO RISPETTO A x

$M_{Oy}^{(1)} = \int_V x_P \rho \, dV$ MOMENTO STATICO RISPETTO A y

DEF BARICENTRO

$$y_G = \frac{\int_V y_P \rho \, dV}{m} \qquad x_G = \frac{\int_V x_P \rho \, dV}{m}$$

$$M_{Gx}^{(1)} = \int_V |y_P - y_G| \rho \, dV = \left| \int_V y_P \rho \, dV - \frac{\int_V y_P \rho \, dV}{m} \int_V \rho \, dV \right| = 0$$

MOMENTO STATICO RISPETTO AL BARICENTRO (LUNGO x)

$$M_{Gy}^{(1)} = \int_V |x_P - x_G| \rho \, dV$$

" "