Lezione lunedì 2 novembre 2020

lunedì 2 novembre 2020 10:09

TEOREMI ENERGETICI

- BILANCIO DI POTENZE
- TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA
- EQUAZIONE DI LAGRANGE

BILANCIO DI POTENZE

RIPRENDIAMO IN ESAME IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$\delta L = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_c}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} \times \delta \vec{P}_{i,j}}_{\text{LAVORO DELLE FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_c}\sum_{r=1}^{n_M} \vec{C}_{i,r} \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO MOMENTI/COPPIE ESTERNI}} + \sum_{i=1}^{n_c}\Big(\underbrace{-m_i \vec{a}_{G_i} \times \delta \vec{G}_i}_{\text{LAVORO FORZE D'INERZIA}} \underbrace{- J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \delta \vec{\theta}_i}_{\text{LAVORO COPPIE D'INERZIA}}\Big) = 0$$

d/dt

$$\sum_{i=1}^{n_c}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} \times \underbrace{\frac{d\vec{P}_{i,j}}{dt}}_{\vec{v}_{P_{i,j}}} + \sum_{i=1}^{n_c}\sum_{r=1}^{n_M} \vec{C}_{i,r} \times \underbrace{\frac{d\vec{\theta}_i}{dt}}_{\vec{\omega}_i} + \sum_{i=1}^{n_c}\Big(-m_i \vec{a}_{G_i} \times \underbrace{\frac{d\vec{G}_i}{dt}}_{\vec{v}_{G_i}} - J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \underbrace{\frac{d\vec{\theta}_i}{dt}}_{\vec{\omega}_i}\Big) = 0 \quad \otimes$$

$$W_{i,j} = \vec{F}_{i,j} \times \frac{d\vec{P}_{i,j}}{dt} = \vec{F}_{i,j} \times \vec{v}_{P_{i,j}}$$ POTENZA DELLA FORZA $F_{i,j}$

$$W_{i,r} = \vec{C}_{i,r} \times \frac{d\vec{\theta}_i}{dt} = \vec{C}_{i,r} \times \vec{\omega}_i$$ POTENZA DELLA COPPIA/MOMENTO $C_{i,r}$

$$W_{in,i} = -m_i \vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} - J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}_i$$ POTENZA DEL SISTEMA EQUIVALENTE D'INERZIA DEL CORPO i-ESIMO

$i = 1, \dots, n_c$ (indice dei C.R.)

$j = 1, \dots, n$ (indice delle forze esterne agenti nel C.R. i-esimo)

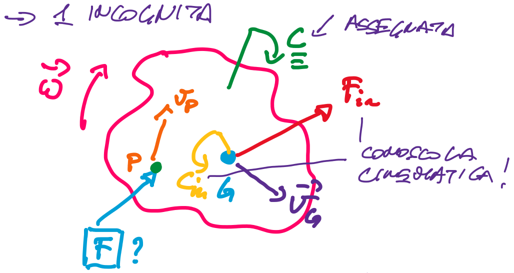
$r = 1, \dots, n_M$ (indice delle coppie/momenti esterni agenti nel C.R. i-esimo)

$$\otimes \quad \sum_{i=1}^{n_c}\sum_{j=1}^{n} W_{i,j} + \sum_{i=1}^{n_c}\sum_{r=1}^{n_M} W_{i,r} + \sum_{i=1}^{n_c} W_{in,i} = 0$$ 1 EQUAZIONE → 1 INCOGNITA

$$\boxed{\sum W + \sum W_{in} = 0} \longrightarrow$$

$\sum W$: POTENZA FORZE COPPIE/MOMENTI ESTERNI

$\sum W_{in}$: POTENZA FORZE COPPIE D'INERZIA



BILANCIO DI POTENZE (PER IL CALCOLO DI F)

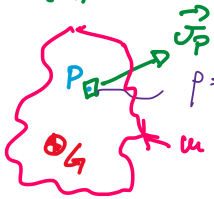
$$\vec{F} \times \vec{v}_P + \vec{C} \times \vec{\omega} - m\, \vec{a}_G \times \vec{v}_G - J_G \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega} = 0$$

↑ UNICA INCOGNITA

TEOREMA DELL' ENERGIA CINETICA (DUALE DEL BILANCIO DI POTENZE)

- CALCOLO DELL'ENERGIA CINETICA DI UN C.R.

$$E_c = \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_P \times \vec{v}_P \, \rho \, dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_P^{\,2} \rho \, dV$$



$\rho = \frac{dm}{dV}$

V volume infinitesimo
P punto generico
m massa del C.R.

APPLICO TH DI RIVALS

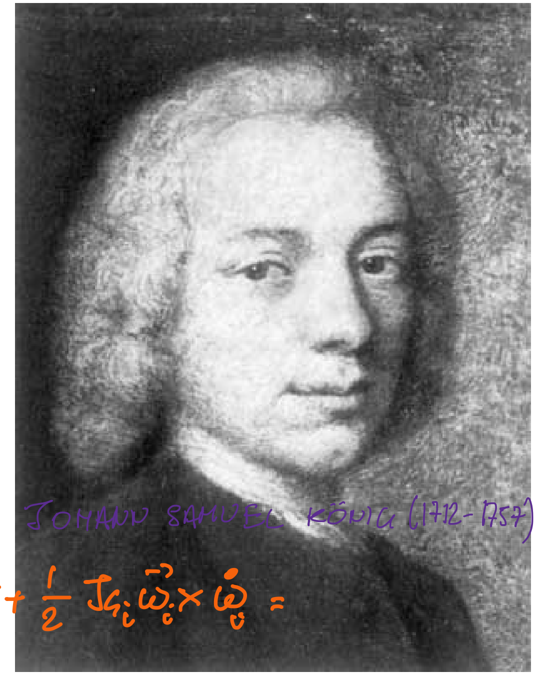
$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (P-G)$$

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{v}_G \times \vec{v}_G \underbrace{\int_V \rho \, dV}_{m} + \frac{1}{2}\vec{v}_G \times \left(\vec{\omega} \wedge \int_V (P-G)\rho \, dV\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{\omega} \wedge \int_V (P-G)\rho \, dV\right) \times \vec{v}_G + \boxed{\frac{1}{2}\omega^2 \int_V |P-G|^2 \rho \, dV}$$

MOMENTI STATICI RISPETTO AL BARICENTRO
$G = 0$

$$(\omega \wedge (P-G)) \times (\omega \wedge (P-G)) = \omega^2 |P-G|^2$$

$$\int_V |P-G|^2 \rho \, dV = J_G$$



$$E_c = \frac{1}{2} m \, \vec{v}_G \times \vec{v}_G + \frac{1}{2} J_G \, \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \, v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \, \omega^2$$

TEOREMA DI KOENIG (KÖNIG)

SE DERIVO RISPETTO AL TEMPO LA E_{c_i} DEL C.R. i-esimo

d/dt ↳

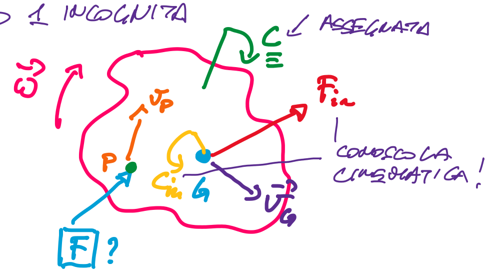
$$\frac{dE_{c,i}}{dt} = \frac{1}{2} m_i \vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} + \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{G_i} \times \vec{a}_{G_i} + \frac{1}{2} J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}_i + \frac{1}{2} J_{G_i} \vec{\omega}_i \times \dot{\vec{\omega}}_i =$$

$$= m_i \, \vec{a}_{G_i} \times \vec{v}_{G_i} + J_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{\omega}_i = -W_i$$

$$W_{in,i} = -\frac{dE_{c,i}}{dt}$$ SE RIPRENDO L'ESPRESSIONE DEL BILANCIO DI POTENZE

$$\sum W + \sum W_{in} = 0 \Rightarrow \sum W = \frac{dE_c}{dt}$$ TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

1 EQUAZIONE → 1 INCOGNITA



BILANCIO DI POTENZE (PER IL CALCOLO DI F)

$$\vec{F} \times \vec{v}_P + \vec{C} \times \vec{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \, \vec{v}_G \times \vec{v}_G + \frac{1}{2} J_G \, \vec{\omega} \times \vec{\omega}\right) =$$

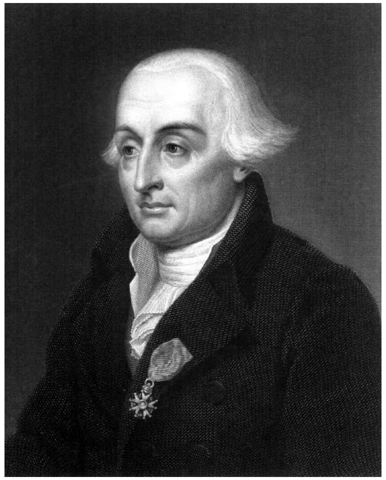
↑ UNICA INCOGNITA

$$= m \, \vec{a}_G \times \vec{v}_G + J_G \, \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega}$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE ("THE ULTIMATE" PER LA DINAMICA)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

- E_c : ENERGIA CINETICA
- V : ENERGIA POTENZIALE
- Q_k : COMPONENTE LAGRANGIANA $= \frac{\delta L}{\delta q_k}$
- L : LAVORO FORZE ESTERNE E DELLE INTERNE NON CONSERVATIVE
- q_k : COORDINATE LIBERE INDIPENDENTI



GIUSEPPE LUIGI LAGRANGIA (NATO A TORINO)
AKA JOSEPH LUIS LAGRANGE 1736-1813

DIMOSTRAZIONE EQ. LAGRANGE

→ PRINCIPIO DI D'ALEMBERT + PLV

$$\sum_i^N \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i\right) \times \delta x_i = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, N$$ COORDINATE FISICHE

FISICHE

LA DESCRIZIONE DEL MOTO LA POSSO FARE ANCHE MEDIANTE LE COORDINATE GENERALIZZATE INDIPENDENTI q_k con $k=1,2,\dots,n$

$\vec{x}_i$ NON SONO ESPLICITAMENTE DIPENDENTI DAL TEMPO

SEPOLTO AL PANTHEON

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{per } i=1,2,\dots,N$$

CALCOLO LA VELOCITA' DELLE $\vec{x}_i$

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad \text{per } i=1,2,\dots,N$$

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots$$

DATO CHE $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$ NON DIPENDE DA $\dot{q}_k \Rightarrow$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \quad \text{per } i=1,2,\dots,N \text{ e } k=1,2,\dots,n \; ⊛$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k}}_{1} + \dot{q}_k \cancel{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_k}} = 0 \rightarrow \vec{x}_i(q_k) \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$$

SPOSTAMENTI VIRTUALI DELLE $\vec{x}_i$

$$\delta\vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad k=1,2,\dots,n$$

SOSTITUISCO $\delta\vec{x}_i$ NELLA II PARTE DEL PLV

$$\sum_{1}^{N}{}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \delta\vec{x}_i = \sum_{1}^{N}{}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{1}^{n}{}_k \left(\sum_{1}^{N}{}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right)\delta q_k \; ⊠$$

OGNI TERMINE DELL'EQ. PRECEDENTE LO SCRIVO COME

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

BARBATRUCCO!! $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\boxed{m_i \dot{\vec{x}}_i} \times \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}} \right) - \boxed{m \dot{\vec{x}}_i} \times \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_k}} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \right]\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i \right) \; ⊛$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \qquad - m \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_k}$$

RIPRENDO LA ⊠ E SOSTITUISCO LA ⊛

$$\sum_{1}^{N}{}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \delta\vec{x}_i = \sum_{1}^{n}{}_k \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \left(\underbrace{\sum_{1}^{N}{}_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i}_{E_c} \right) \right\} \delta q_k =$$

$$\sum^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\dots} \right) - \frac{\partial E_c}{\dots} \right] \delta q \dots$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{k} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k}\right] \delta q_k \quad (1)$$

CONSIDERO LE FORZE ESTERNE $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t)$

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ESTERNE (PRIMO TERMINE DI ✪)

$$\delta L = \sum_{1}^{N}{}_{i} \vec{F}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_{1}^{N}{}_{i} \vec{F}_i \times \sum_{1}^{n}{}_{k} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{1}^{n}{}_{k} \left(\sum_{1}^{N}{}_{i} \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{1}^{n}{}_{k} Q_k \delta q_k \quad (2)$$

CONSIDERO IL LAVORO DI FORZE INTERNE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

$\hookrightarrow V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ LE FORZE CONSERVATIVE HANNO ENERGIA POTENZIALE

$$\sum_{1}^{N}{}_{i} \vec{F}_{I_i} \times \delta \vec{x}_i = \underset{\text{CONSERVATIVE}}{\delta L_c} + \underset{\text{NON CONSERVATIVE}}{\delta L_{nc}} = -\delta V + \sum_{1}^{n}{}_{k} Q_{nc_k} \delta q_k =$$

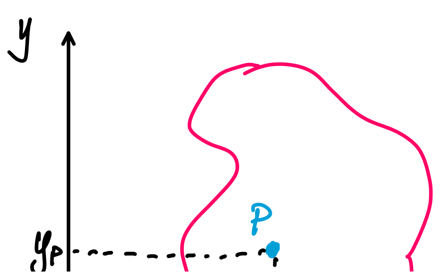
$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \sum_{1}^{n}{}_{k} Q_{nc_k} \delta q_k = -\sum_{1}^{n}{}_{k} \left(\frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc_k} \right) \delta q_k \quad (3)$$

SOSTITUISCO (1) (2) (3) NELL'EQ DI D'ALEMBERT + PLV ✪

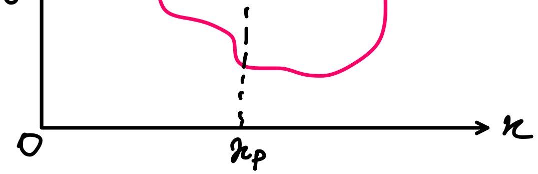
$$-\sum_{1}^{n}{}_{k} \left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{nc} + Q$$

NOTE:



DIMOSTRAZIONE DEL PERCHÉ IL MOMENTO STATICO RISPETTO AL BARICENTRO È NULLO



$$M_{Ox}^{(1)} = \int_V y_P \, \rho \, dV \qquad M_{Gx}^{(1)} = \int_V |y_P - y_G| \, \rho \, dV = 0$$

$$M_{Oy}^{(1)} = \int_V x_P \, \rho \, dV \qquad M_{Gy}^{(1)} = \int_V |x_P - x_G| \, \rho \, dV = 0$$

DEFINIZIONE DI MOMENTO STATICO RISPETTO AD O

DEF. $y_G = \dfrac{\int_V y_P \rho \, dV}{m} \Rightarrow y_G \int_V \rho \, dV = \int_V y_P \rho \, dV$

DEF $x_G = \dfrac{\int_V x_P \rho \, dV}{m} \Rightarrow x_G \int_V \rho \, dV = \int x_P \rho \, dV$

DEFINIZIONE DI BARICENTRO

NB: $\dfrac{d}{dt} L = W$

L: LAVORO W: POTENZA

EQUIVALENZA TH ENERGIA CINETICA

$$\Sigma W = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\int_0^t dt$$

$$\int_0^t \Sigma W \, dt = \int_0^t \frac{dE_c}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$$

$$\Sigma L(t) - \underbrace{\Sigma L(0)}_{0} = \underbrace{E_c(t) - E_c(0)}_{\Delta E_c}$$

$$\Sigma L = \Delta E_c$$