Lunedì 20 settembre 2021

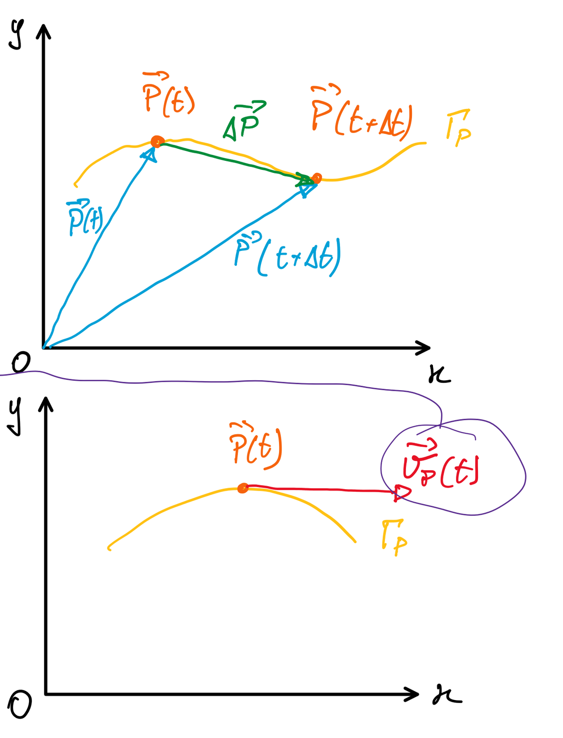
lunedì 20 settembre 2021 10:03

FORSE CE LA FACCIAMO!!

- ULTIMA LEZIONE
  - VETTORE POSIZIONE PER UN PUNTO (4 NOTAZIONI DIVERSE + ASCISSA CURVILINEA)

- VELOCITA'

DEF. $\vec{v}_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt}$



1) DEFINIZIONE MEDIANTE ASCISSA CURVILINEA

$\vec{v}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} = \boxed{\frac{d\vec{P}}{ds}}\boxed{\frac{ds}{dt}}$

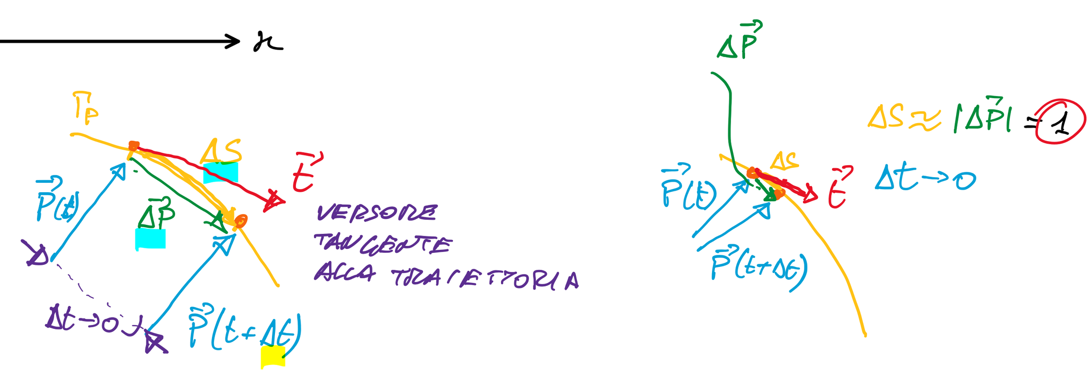
$\vec{P} = \vec{P}(s)$ $\begin{cases} s = s(t) \\ \vec{P} = \vec{P}(s(t)) \end{cases}$

$\vec{v}_P = \boxed{\vec{t}}\,\boxed{\dot{s}}$

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{P}|}{\Delta s} = 1$

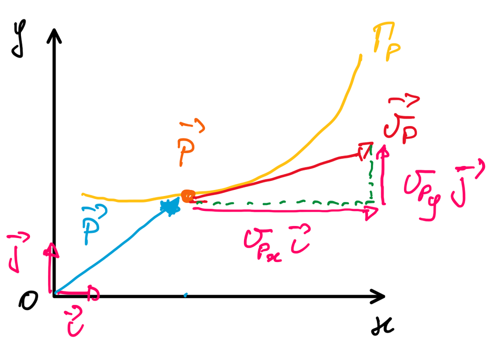
DIREZIONE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA | MODULO UNITARIO

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta s}$



2) DEFINIZIONE MEDIANTE NOTAZIONE CARTESIANA

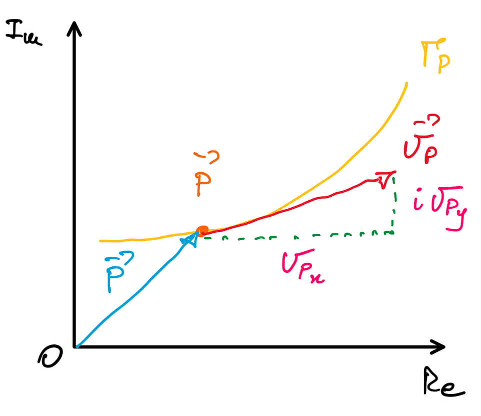
$\vec{v}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} = v_{P_x}\vec{i} + v_{P_y}\vec{j} = \dot{x}_P(t)\vec{i} + \dot{y}_P(t)\vec{j}$



3) DEFINIZIONE MEDIANTE NOTAZIONE COMPLESSA (PIANO DI GAUSS)

$\vec{v}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{x}_P(t) + i\,\dot{y}_P(t) = v_{P_x} + i\,v_{P_y}$

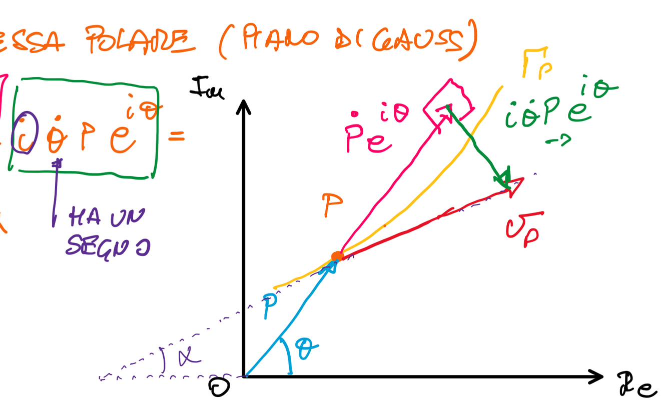
PARTE REALE VETTORE VELOCITA' — PARTE IMMAGINARIA VETTORE VELOCITA'



4) DEFINIZIONE MEDIANTE NOTAZIONE COMPLESSA POLARE (PIANO DI GAUSS)

$\vec{v}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(P(t)\,e^{i\theta(t)}\right) = \boxed{\dot{P}e^{i\theta}} + \boxed{i\dot{\theta}Pe^{i\theta}} = v_P\,e^{i\alpha}$

HA UN SEGNO



- ACCELERAZIONE

DEF: $\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{P}}{dt}$

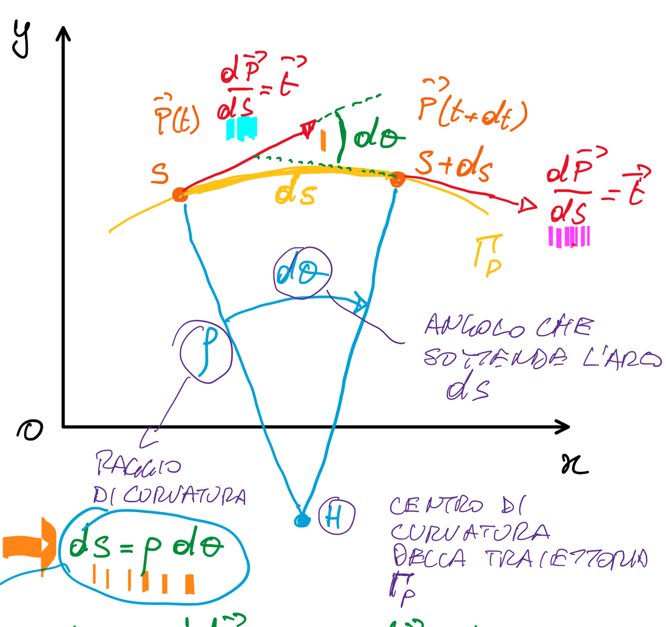
$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{d\vec{P}}{ds}\frac{ds}{dt}}_{\vec{v}_P}\right)$ DERIVAZIONE DI DUE FUNZIONI DEL TEMPO

$\vec{a}_P = \boxed{\frac{d\vec{P}}{ds}}\boxed{\frac{d^2s}{dt^2}} + \frac{d^2\vec{P}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\right)$

$\vec{t}$ $\ddot{s}$ $\frac{1}{\rho}\vec{n}$ $\dot{s}\cdot\dot{s} = \dot{s}^2$

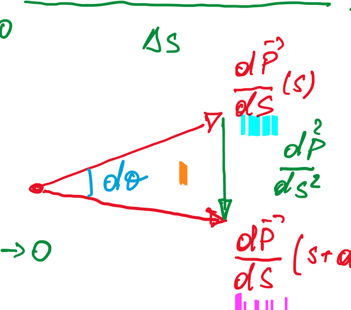
$\frac{d^2P}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\right)$

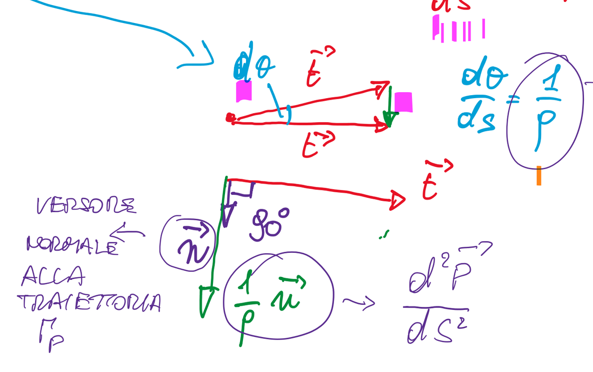
$\frac{d}{dt}\frac{d\vec{P}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$



$ds = \rho\, d\theta$

$\left|\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|\frac{d\vec{P}}{ds}(s+\Delta s) - \frac{d\vec{P}}{ds}(s)\right|}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$ → IN PRATICA E' COME SE SCRIVESSI → $\frac{d\theta}{ds}$



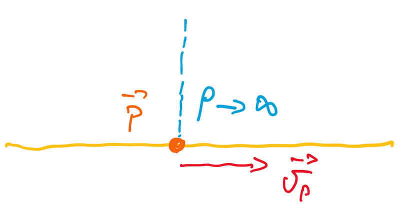


1) ASCISSA CURVILINEA

$\vec{a}_P = \underbrace{\ddot{s}(t)\,\vec{t}}_{\text{TANGENZIALE}} + \underbrace{\frac{\dot{s}(t)^2}{\rho}\vec{n}}_{\text{NORMALE}}$ → DUE COMPONENTI DISTINTE CHE DANNO LUOGO ALL'ACCELERAZIONE

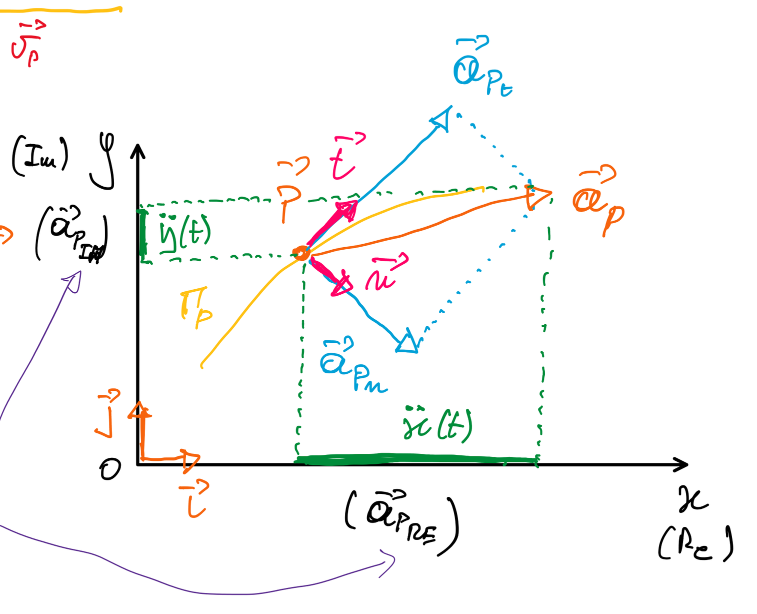
SEMPRE $\vec{a}_P = \vec{a}_{P_t} + \vec{a}_{P_n}$

ATTENZIONE
$\vec{a}_{P_t}$ ∃ se $\ddot{s} \neq 0$
se v_P = costante ⇒ $\vec{a}_{P_t} = 0$
$\vec{a}_{P_n}$ ∃ se $\rho < \infty$
se $\rho \to \infty \to \frac{1}{\rho} \to 0 \to \vec{a}_{P_n} = 0$
TRAIETTORIA È RETTILINEA



2) RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_P\vec{i} + \dot{y}_P\vec{j}\right) = \ddot{x}_P(t)\,\vec{i} + \ddot{y}_P(t)\,\vec{j}$



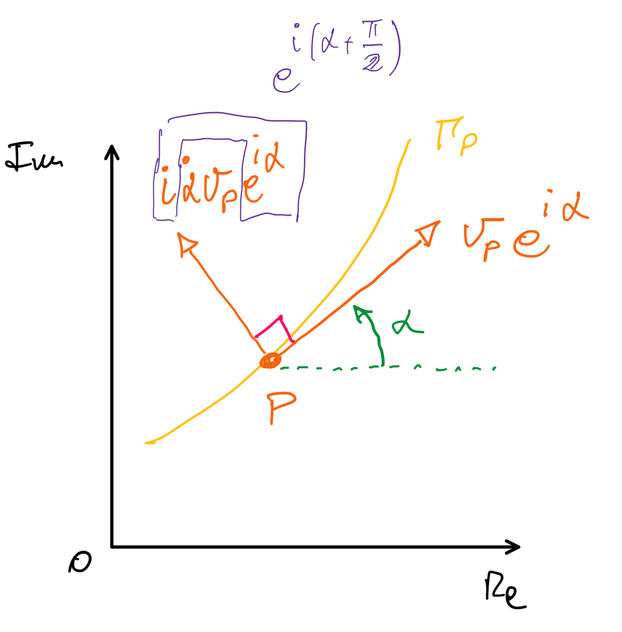
3) RAPPRESENTAZIONE COMPLESSA (PIANO DI GAUSS)

$\vec{a}_P = \vec{a}_{P_{RE}} + i\,\vec{a}_{P_{IM}}$

4) RAPPRESENTAZIONE COMPLESSA NOTAZIONE POLARE

$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_P e^{i\alpha}\right) = \underbrace{\dot{v}_P e^{i\alpha}}_{\text{VETTORE DIRETTO COME LA VELOCITA'}} + \underbrace{i\dot{\alpha}v_P e^{i\alpha}}_{\text{VETTORE PERPENDICOLARE ALLA VELOCITA'}}$

HA UN SEGNO



- CORPO RIGIDO
  - PROPRIETA' DEL CORPO RIGIDO (CR)
    - DEFINIZIONE DI CR
    - GRADI DI LIBERTÀ DEL CR NEL PIANO
  - MOVIMENTO DEL CORPO RIGIDO NEL PIANO
    - MOTO DEL CR (VIDEO)
    - ATTO DI MOTO DEL CR (FOTOGRAFIA)
      - CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (CIR)

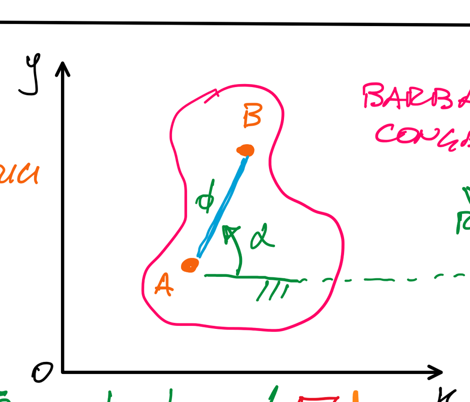
INSIEME DI PUNTI → FORMANO IL CR.

DEF: CORPO RIGIDO

$A(x_A, y_A)$
$B(x_B, y_B)$

PER DETERMINARE LA POSIZIONE DEI 2 PUNTI MI SERVONO 4 PARAMETRI:
x_A, y_A, x_B, y_B

A, B SONO PUNTI GENERICI ∈ CR



SE IL CORPO E' RIGIDO ⇒ DISTANZA TRA DUE GENERICI PUNTI E' COSTANTE → $\overline{AB}$ = costante = d
α = costante

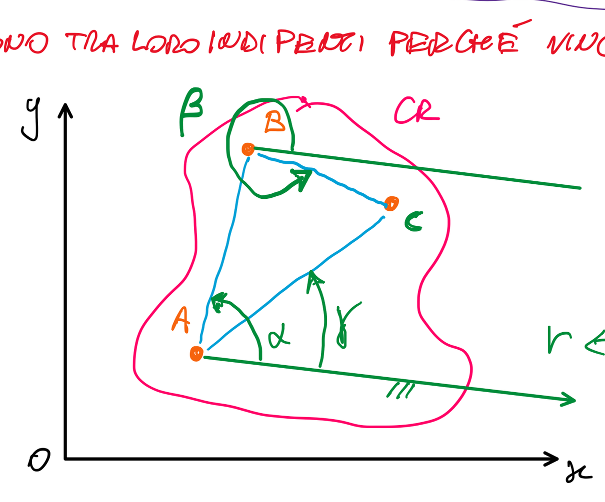
CONDIZIONI DI "RIGIDITA'" DEL NOSTRO CR

$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ = costante
① ② ③ ④

DISTANZA CON SEGNO

x_A, y_A, x_B, y_B NON SONO TRA LORO INDIPENDENTI PERCHÉ VINCOLATI DA

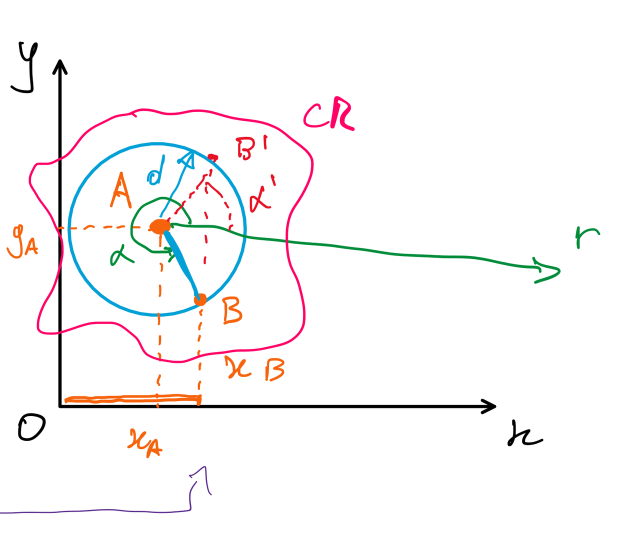
$\overline{AB}$ = costante
$\overline{BC}$ = costante
$\overline{AC}$ = costante
α = costante
β = costante
γ = costante



VINCOLO DI RIGIDITA' FA SÍ CHE SOLO 3 PARAMETRI SONO INDIPENDENTI E DEFINISCONO LA POSIZIONE DI UN CR NEL PIANO

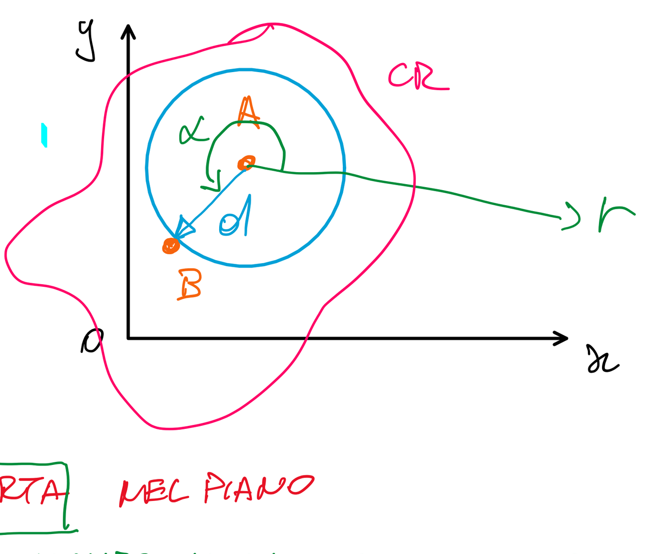
ES. 1

$A(x_A, y_A)$ → 2 PARAMETRI INDIPENDENTI
$\overline{AB}$ = costante
$B(x_B, y_B)$ 1 PARAMETRO INDIPENDENTE
1 PARAMETRO DIPENDENTE



ES. 2

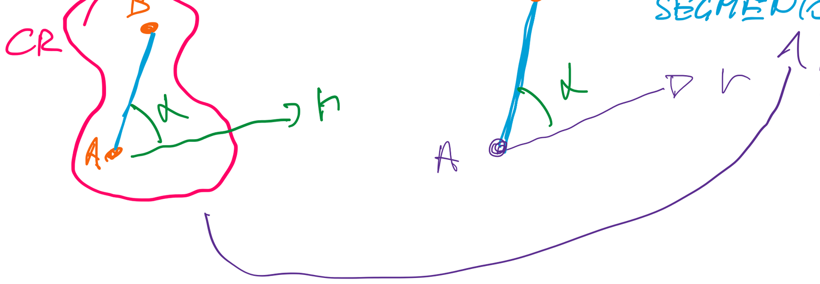
$A(x_A, y_A)$
α noto
d = costante



3 PARAMETRI INDIPENDENTI → DETERMINO LA POSIZIONE NEL PIANO → IL CR HA 3 $\boxed{\text{GRADI DI LIBERTA'}}$ NEL PIANO

↳ NUMERO MINIMO DI COORDINATE SUFFICIENTI PER DEFINIRE LA POSIZIONE DI UN ENTE GEOMETRICO

→ RAPPRESENTERÒ (PER COMODITA') I CR MEDIANTE SEGMENTI



"SEMPLIFICO" IL CR CON IL SEGMENTO CHE UNISCE 2 PUNTI

Lunedì 27 settembre 2021

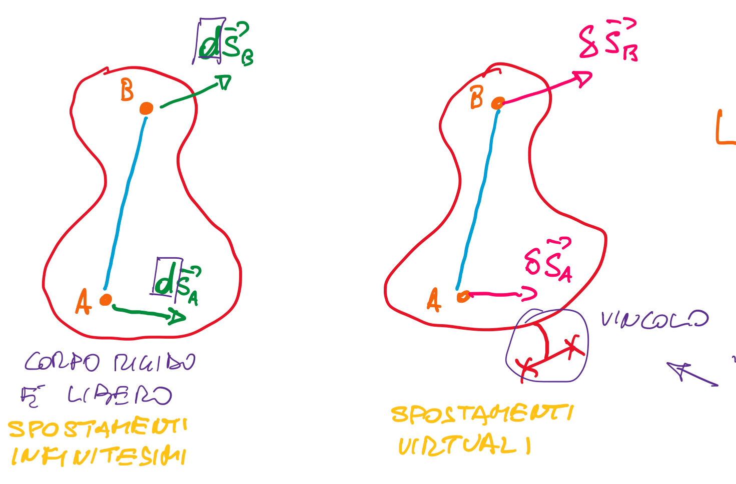
lunedì 27 settembre 2021 10:14

ATTI DI MOTO

↳ FOTOGRAFIA DEL MOVIMENTO DEL C.R.

↳ MOTO "IN PICCOLO" → SPOSTAMENTI SONO MOLTO PICCOLI ↳ SPOSTAMENTI INFINITESIMI PERMESSI AL C.R. (IN "QUESTO MOMENTO" TUTTI GLI SPOSTAMENTI SONO PERMESSI → → NON ESISTONO VINCOLI)

↳ SPOSTAMENTI VIRTUALI (SPOSTAMENTI PERMESSI DAI VINCOLI ⊗ I VINCOLI LI DISCUTIAMO TRA BREVE)



VINCOLO

← "PICCOLI" SPOSTAMENTI IN "POCO" TEMPO

IL CONCETTO DI ATTO DI MOTO È INTRINSECAMENTE COLLEGATO AL CONCETTO DI VELOCITA'

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{S}_A}{dt} \quad \Big| \quad \vec{v}_A = \frac{\delta\vec{S}_A}{dt} = \frac{\delta\vec{S}_A}{\delta t}$$

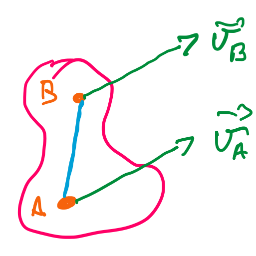
RIMPIAZZO L'OPERATORE d CON L'OPERATORE δ

GLI ATTI DI MOTO POSSIBILI SONO SOLO 2:

- ATTO DI MOTO TRASLATORIO
- ATTO DI MOTO ROTATORIO

ATTO DI MOTO TRASLATORIO

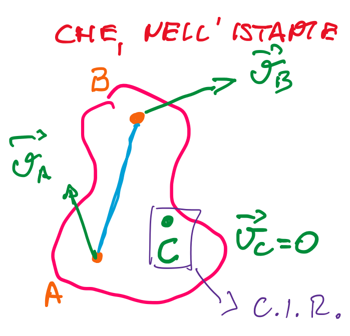
↳ LE VELOCITA' DI TUTTI I PUNTI (DEL C.R.) SONO UGUALI (MODULO, DIREZIONE, VERSO)



$\vec{v}_A = \vec{v}_B$

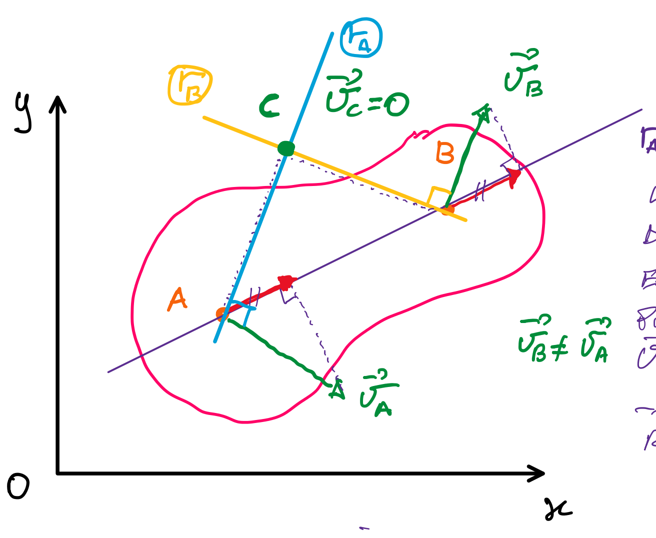
ATTO DI MOTO ROTATORIO

↳ ∃ UN PUNTO DEL C.R. (O COLLEGATO RIGIDAMENTE AD ESSO) CHE, NELL'ISTANTE CONSIDERATO, HA VELOCITA' NULLA.



$\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$

IL PUNTO A VELOCITA' NULLA VIENE DEFINITO COME "CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE" C.I.R.



r_{AB}

LA PROIEZIONE DI $\vec{v}_A$ SU r_{AB} È UGUALE ALLA PROIEZIONE DI $\vec{v}_B$ SU r_{AB} → → VINCOLO DI RIGIDEZZA

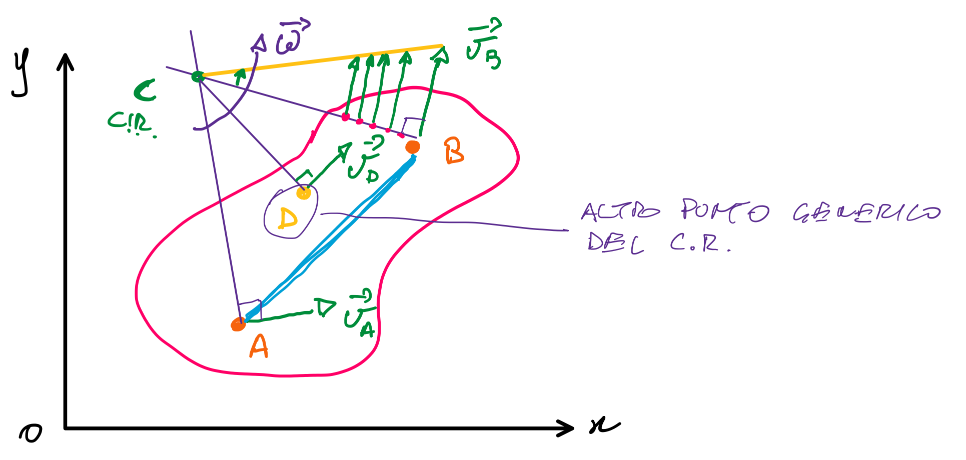
$\vec{v}_B \neq \vec{v}_A$

LA COMPONENTE DELLA VELOCITA' DI $\vec{v}_A$ LUNGO r_A È NULLA

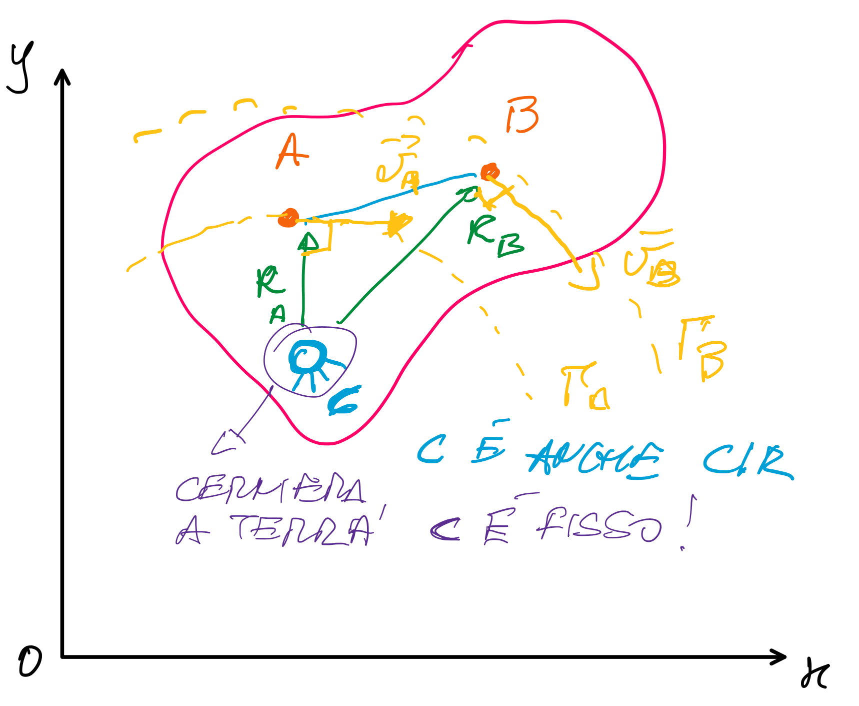
LA COMPONENTE DELLA VELOCITA' DI $\vec{v}_B$ LUNGO r_B È NULLA

IL PUNTO C HA LE COMPONENTI DELLA SUA VELOCITA' NULLE LUNGO LE DUE DIREZIONI r_A E r_B ⇒ $\vec{v}_C = 0$ ⇒ C È C.I.R.

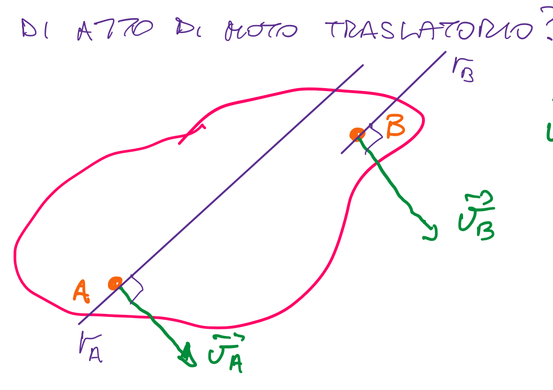
→ IL C.I.R. IN GENERALE NON È UN PUNTO FISSO NEL PIANO



↳ È UN PUNTO FISSO SOLO SE IL MOTO È ROTATORIO (IN QUESTO CASO IL PUNTO FISSO È IL C.I.R.)



ESISTE IL C.I.R. NEL CASO DI ATTO DI MOTO TRASLATORIO? NO!



$\vec{v}_A = \vec{v}_B$

$r_A // r_B$ → CIR → ∞

IL C.I.R. HA VELOCITA' NULLA, MA ALLORA HA ANCHE ACCELERAZIONE NULLA? NO!
IN GENERALE IL C.I.R. HA ACCELERAZIONE $\neq 0$ → SE IL CENTRO DI ROTAZIONE È ANCHE C.I.R. ALLORA L'ACCELERAZIONE È NULLA.

ESISTE (IN OGNI ISTANTE NELL'ATTO DI MOTO ROTATORIO) UN PUNTO AD ACCELERAZIONE NULLA (DETTO "CENTRO DELLE ACCELERAZIONI), IN GENERALE NON COINCIDENTE CON IL C.I.R. (È PERÒ INUTILE CERCARLO SE USEREMO METODI NUMERICI PER LO STUDIO DELLA CINEMATICA)

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

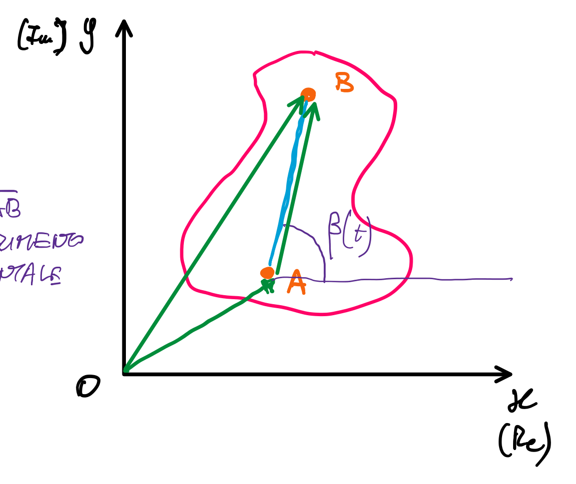
↳ TEOREMA DI RIVALS PER VELOCITA' ED ACCELERAZIONE

- RIFERIMENTO DI 2 PUNTI DEL C.R. MEDIANTE IL LORO VETTORE POSIZIONE

DATI: $x_A(t), y_A(t)$ POSIZIONE DI A

$\beta(t)$ ANGOLO FORMATO DA $\overline{AB}$ RISPETTO AD UN RIFERIMENTO AD ES. L'ASSE ORIZZONTALE

3 PARAMETRI DEFINISCONO ("FISSANO") I 3 GDL DEL C.R.



$(B-O) = (A-O) + (B-A)$

RELAZIONE TRA I VETTORI POSIZIONE

$$(B-O) = \underbrace{x_B + i\,y_B}_{\text{POSIZIONI DI B}} = \underbrace{\underbrace{x_A + i\,y_A}_{\text{POSIZIONE DI A}} + \underbrace{\overline{AB}\,e^{i\beta}}_{\text{POSIZIONE RELATIVA DI B RISPETTO AD A}}}_{\text{TUTTO "NOTO" } x_A(t),\, y_A(t),\, \beta(t),\ \overline{AB} \text{ È DATA DAL VINCOLO DI C.R.}}$$

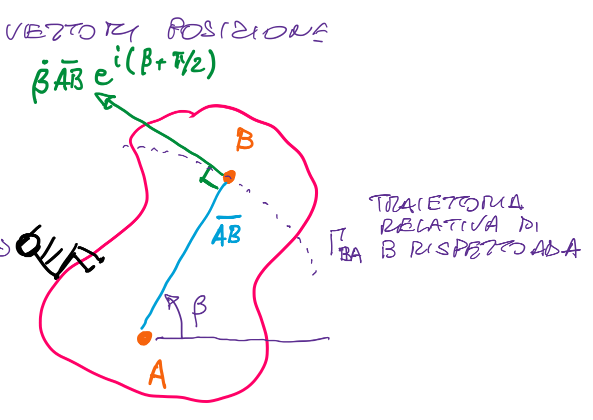
VELOCITA' DI B

- APPLICO LA DEFINIZIONE DI VELOCITA' ALLA RELAZIONE TRA I VETTORI POSIZIONE

$$\frac{d}{dt}(B-O) = \frac{d}{dt}\left(x_A + i\,y_A + \overline{AB}\,e^{i\beta}\right)$$

$$\vec{v}_B = \underbrace{\dot{x}_A + i\,\dot{y}_A}_{\vec{v}_A} + i\dot{\beta}\,\overline{AB}\,e^{i\beta} = \vec{v}_A + \boxed{\dot{\beta}\,\overline{AB}\,e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}} =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow\\ \text{VELOCITA' DI A}}}{\vec{v}_A} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{VELOCITA' DI B RISPETTO AD A}}}{\vec{v}_{BA}}$$



$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

TEOREMA DI RIVALS PER LE VELOCITA'

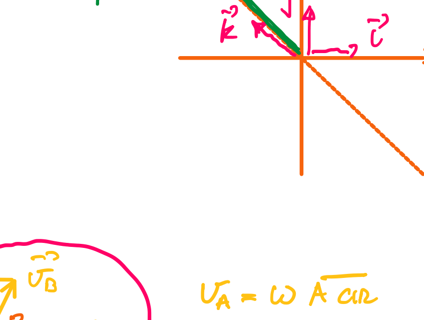
$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$ MODULO DELLA VELOCITA' ANGOLARE

ATTN: LA VELOCITA' ANGOLARE È UNA PROPRIETÀ DI TUTTO IL CORPO RIGIDO

SE CONOSCO LA VELOCITA' DI UN PUNTO DEL C.R. E LA SUA VELOCITA' ANGOLARE ⇒ POSSO CONOSCERE LA VELOCITA' DI TUTTI I PUNTI DEL C.R.

↳ $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B-A)$

VELOCITA' ANGOLARE — PRODOTTO VETTORIALE — POSIZIONE DI B RISPETTO AD A

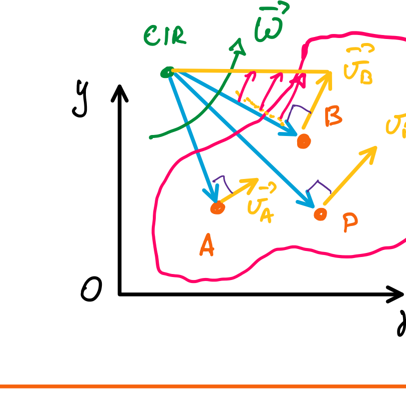


USO DEL CIR NEL TH DI RIVALS X VELOCITA'

SAPPIAMO CHE PUÒ ESISTERE IL C.I.R. → $\vec{v}_{CIR} = 0$

$$\vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_{CIR}} + \vec{\omega} \wedge (B - CIR) =$$

$$= \vec{\omega} \wedge (B - CIR)$$



$v_A = \omega\,\overline{A\,CIR}$

$v_B = \omega\,\overline{B\,CIR}$

$v_P = \omega\,\overline{P\,CIR}$

ACCELERAZIONE DI B

$$\vec{a}_B = \frac{d}{dt}\vec{v}_B = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B-A)\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_A + i\,\dot{y}_A + i\,\overline{AB}\,\omega\,e^{i\beta}\right)$$

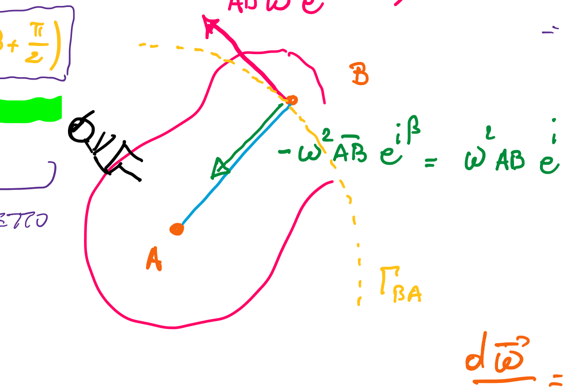
$$\vec{a}_B = \underbrace{\ddot{x}_A + i\,\ddot{y}_A}_{\vec{a}_A} + i\,\overline{AB}\,\omega\left(i\,\omega\,e^{i\beta}\right) + i\,\overline{AB}\,\dot{\omega}\,e^{i\beta} =$$

$$= \vec{a}_A \underbrace{\underbrace{-\omega^2\,\overline{AB}\,e^{i\beta}}_{\vec{a}_{BA_n}} + \underbrace{\overline{AB}\,\dot{\omega}\,e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}}_{\vec{a}_{BA_t}}}_{\text{ACCELERAZIONE DI B RISPETTO AD A}}$$

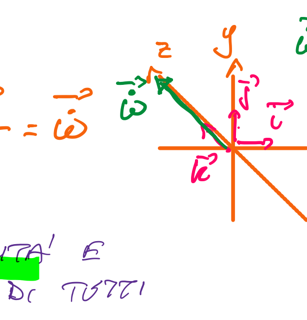
$$= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA_n} + \vec{a}_{BA_t} =$$

$\ddot{\beta} = \dot{\omega}$ ← ACCELERAZIONE ANGOLARE DEL C.R.

→ PROPRIETÀ DEL C.R.



$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\dot{\omega}}$



$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}}$$

SE CONOSCO ACCELERAZIONE DI UN PUNTO DEL C.R. E LE SUE VELOCITA' E ACCELERAZIONE ANGOLARE ALLORA CONOSCO LE ACCELERAZIONI DI TUTTI I PUNTI DEL C.R.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (B-A)}_{\vec{a}_{BA_n}} + \underbrace{\vec{\dot{\omega}} \wedge (B-A)}_{\vec{a}_{BA_t}}$$

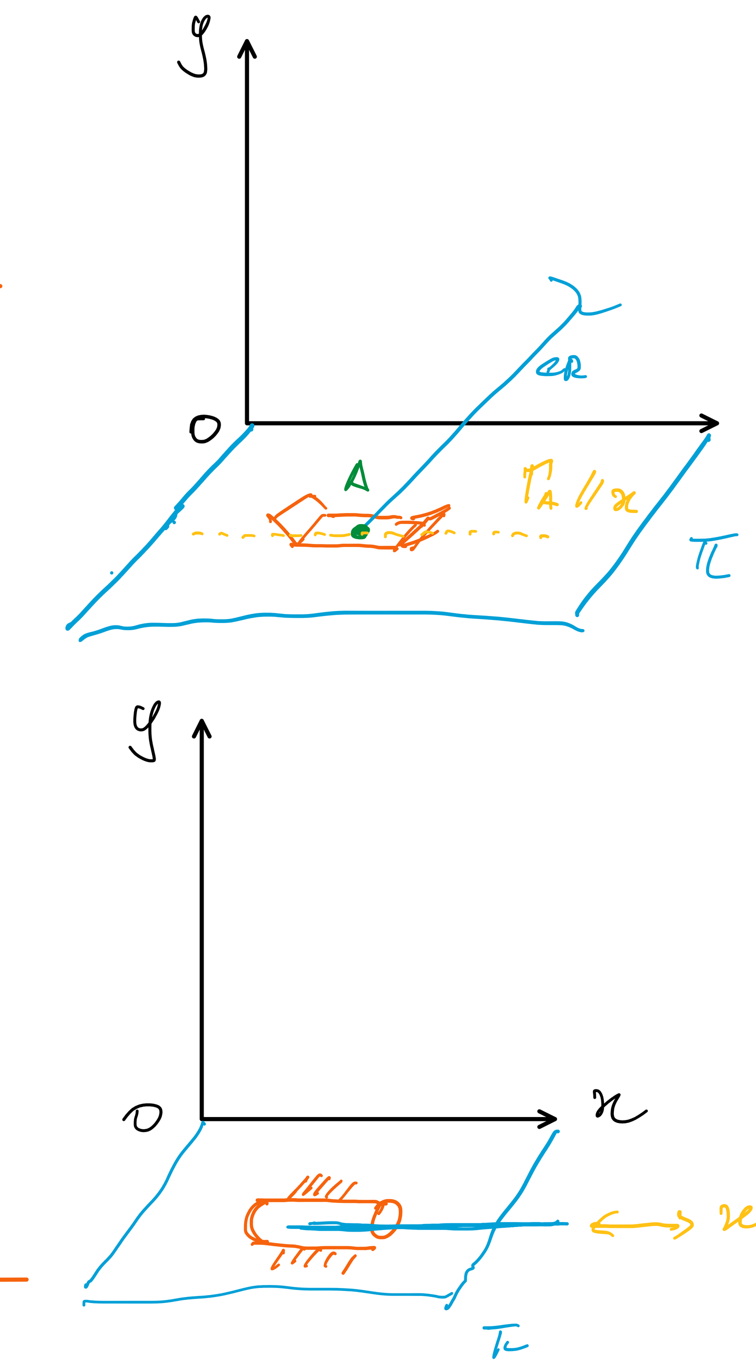
Lunedì 4 ottobre 2021

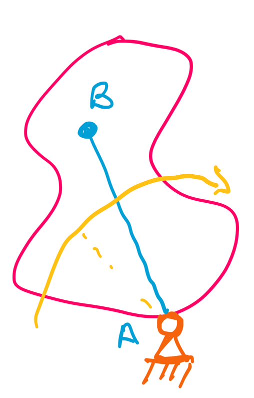
lunedì 4 ottobre 2021 10:24

- VINCOLI PER SISTEMI DI C.R. NEL PIANO
- TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

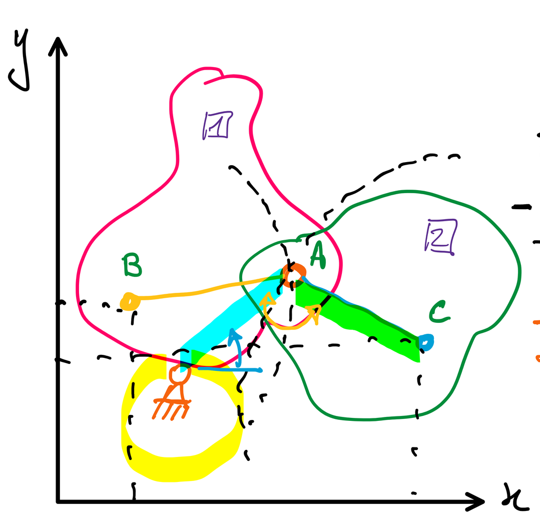
VINCOLI

	CERNIERA A TERRA	CERNIERA TRA 2 C.R.	PATTINO	MANICOTTO	CARRELLO	INCASTRO	PURO ROTOLAMENTO
SIMBOLO	A; A. PUNTO FISSO A ATTORNO AL QUALE RUOTA IL C.R.	A; 1; 2	A; π; PIANO DI "SCORRIMENTO"	A; POSSO TRASLARE LIBERAMENTE AL MANICOTTO	A; CERNIERA + PATTINO; π; PATTINO; A; CERNIERA	A; A; π	C.R.; RUOTA O DISCO; C; R; VINCOLO È NEL PUNTO A; A; π
GRADI DI VINCOLO	A; INIBITI SPOSTAMENTI VERTICALE E ORIZZONTALE; 2 GRADI DI VINCOLO → → 2 GdV	$x_A^{1} = x_A^{2}$; $y_A^{1} = y_A^{2}$; y_A^{2}; y_A^{1}; x_A^{1}; x_A^{2}; A; 1; 2; 2 GdV; SOTTRAGGO 2 GdV COMPLESSIVAMENTE A 1 E 2	y_A; A; θ; π; y_A = costante; θ = costante; 2 GdV	y_A; θ; A; y_A = costante; θ = costante; 2 GdV	y_A; A; A; π; y_A = costante; 1 GdV	A; x_A = costante; y_A = costante; θ = costante; 3 GdV	θ(t); $x_c(t) = R\,\theta(t)$; C; $x_c(t)$; A; π; 2 GdV; 1) DISCO NON SI DISTACCA DAL PIANO ↑; 2) LA COORDINATA x_c (SPOSTAMENTO DEL CENTRO DEL DISCO IN DIREZIONE // π) NON È INDIPENDENTE DALLA ROTAZIONE θ(t)
GRADI DI LIBERTÀ RESIDUI	A; θ(t); x; PERMESSA SOLO LA ROTAZIONE ATTORNO AD A; 1 GRADO DI LIBERTÀ RESIDUO → 1 GdL	1; 2; θ(t); PERMESSA LA ROTAZIONE RELATIVA TRA 1 E 2	$x_A(t)$; A; π; POSSO SOLAMENTE TRASLARE RISPETTO A π; 1 GdL: $x_A(t)$	$x_A(t)$; A; 1 GdL: $x_A(t)$	A; θ(t); $x_A(t)$; π; 2 GdL: $x_A(t)$, θ(t)	A; NESSUN MOVIMENTO PERMESSO; 0 GdL	θ(t); $x_c(t) = R\theta(t)$; C; $x_c(t)$; 1 GdL; A; – MOTO C.R. → ROTOTRASLATORIO; – ATTO DI MOTO DEL C.R. → ROTATORIO, IL PUNTO A È IL C.I.R.
REAZIONI VINCOLARI	A; C.R.; H_A; V_A; DAL PUNTO DI VISTA CINEMATICO HO INIBITI I MOVIMENTI IN DIREZIONE VERTICALE E ORIZZONTALE → EQUIVALENZA DAL PUNTO DI VISTA DELLE REAZIONI VINCOLARI E CON DUE FORZE V_A E H_A	V_A^{1}; A^{1}; H_A^{1}; A^{2}; H_A^{2}; V_A^{2}; 1; 2; DUE REAZIONI VINCOLARI V_A E H_A	MOMENTO CHE IMPEDISCE LA ROTAZIONE; M_A; A; V_A; DUE REAZIONI VINCOLARI V_A E M_A	A; M_A; V_A; DUE REAZIONI VINCOLARI V_A E M_A	A; V_A; UNA REAZIONE V_A	M_A; A; H_A; V_A; TRE REAZIONI V_A, H_A E M_A	C.R.; REAZIONE TANGENZIALE; A; H_A → T_A; REAZIONE NORMALE; N_A ← V_A; DUE REAZIONI N_A E T_A





3 GdL POSSIBILI
– 2 GdV
1 GdL RESIDUO



3 GdL POSSIBILI PER 1
3 GdL POSSIBILI PER 2
– 2 GdV PER CERNIERA A

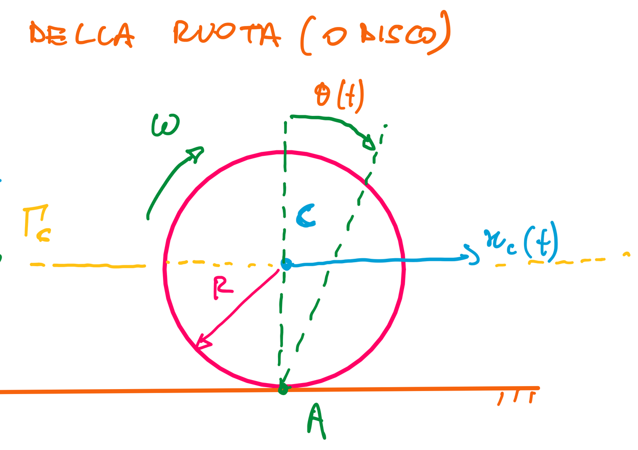
4 GdL RESIDUI
– 2 GdV

2 GdL RESIDUI

x_B, y_B x_c, y_c

$x_B + c, y_B$ $x_c + c, y_c$

CINEMATICA DELLA RUOTA (O DISCO)



C: CENTRO DEL DISCO

A: CIR ↔ PUNTO VINCOLATO NELL'ISTANTE CONSIDERATO

VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO

$x_c(t) = R\,\theta(t)$

$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow \dot{x}_c(t) = R\,\dot{\theta}(t)$

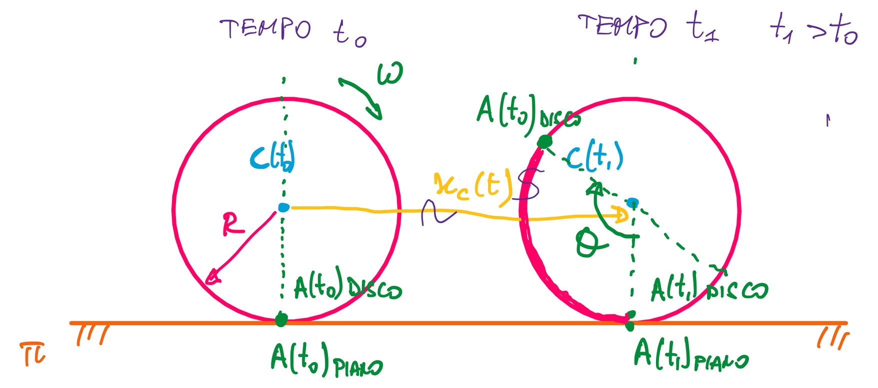
$v_c = R\dot{\theta} = R\omega$

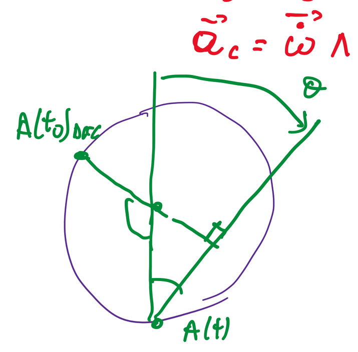
$\vec{v}_c = \vec{\omega} \wedge (C - A)$

$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow a_c = \ddot{x}_c = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega}$

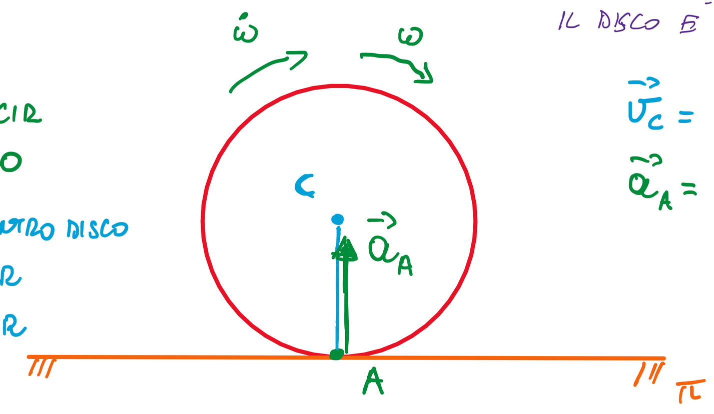
$\vec{a}_c = \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A)$

TEMPO t_0 TEMPO t_1 $t_1 > t_0$





$x_c(t) = R\theta \leftrightarrow \left(A(t_1)_{PIANO} - A(t_0)_{PIANO}\right) = \overset{\frown}{A(t_1)_{DISCO}\,A(t_0)_{DISCO}}$



A: CIR

$v_A = 0$

C: CENTRO DISCO

$v_c = \omega R$

$a_c = \dot{\omega} R$

IL DISCO È UN C.R. → POSSO APPLICARE IL TH DI RIVALS

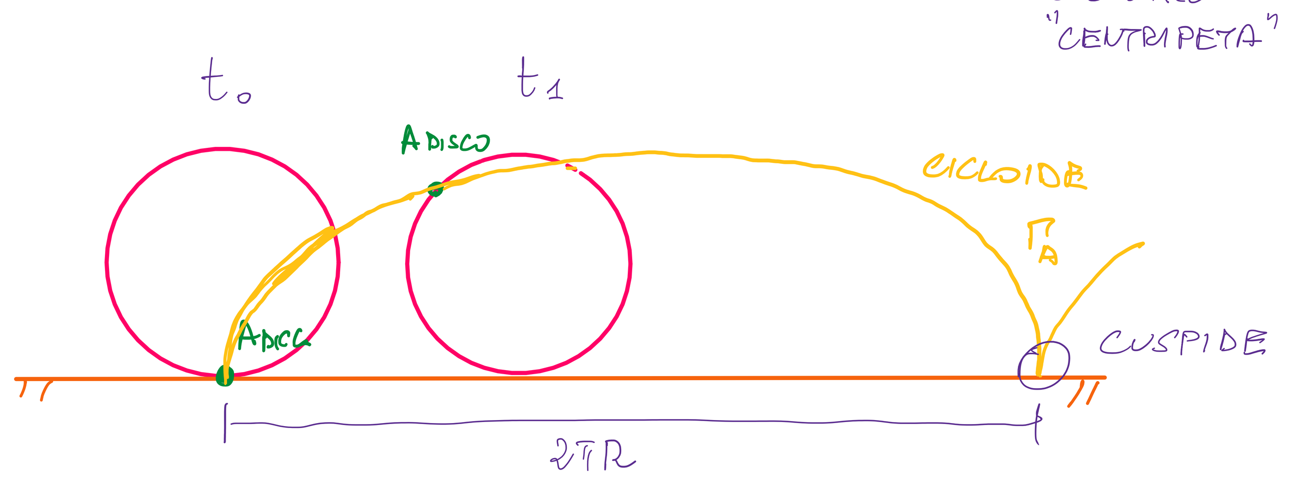
$\vec{v}_c = \vec{v}_A + \vec{v}_{cA} = 0 + \vec{\omega} \wedge (C - A) \rightarrow v_c = \omega R$

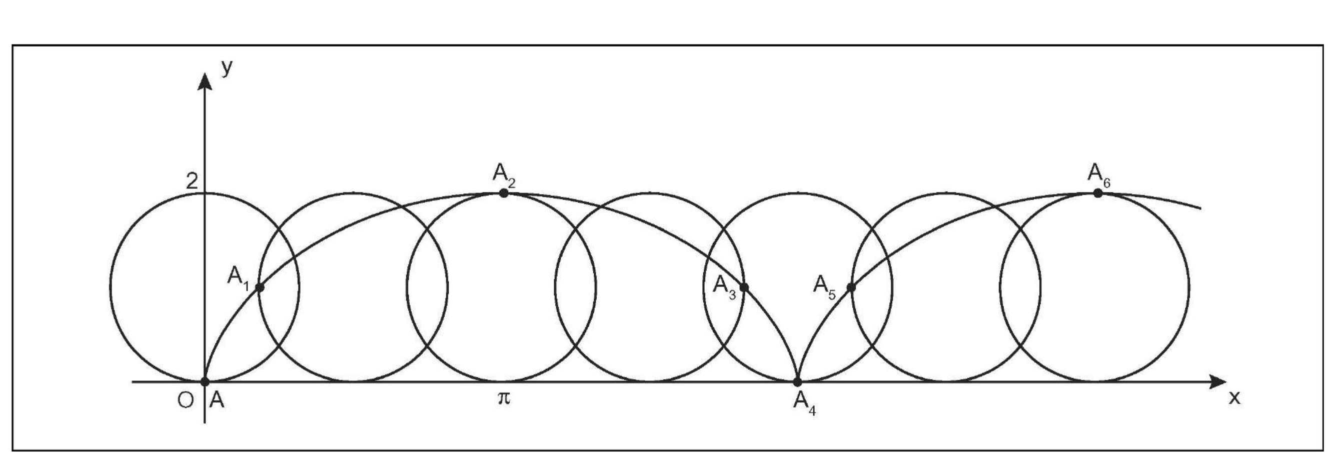
$\vec{a}_A = \vec{a}_c + \vec{a}_{Ac} = \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A)} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (A - C) + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge (A - C)} =$

$= \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (A - C) = -\omega^2 (A - C)$

$\vec{a}_A = -\omega^2 R$

↳ QUI IL "–" SERVE A RICORDARE CHE L'ACCELERAZIONE DI A È "CENTRIPETA"



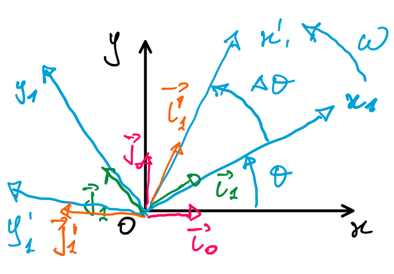


Recupero giovedì 06 ottobre 2021

giovedì 7 ottobre 2021 14:02

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI
↳ FORMULE DI POISSON
↳ DIMOSTRAZIONE TRADIZIONALE
↳ DIMOSTRAZIONE CON USO DI NUMERI COMPLESSI

FORMULE DI POISSON → DERIVATE RISPETTO AL TEMPO DEI VERSORI DEGLI ASSI



$S(xOy)$ SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO

$S(x_1 O y_1)$ SISTEMA DI CENTRO O MOBILE (ROTANTE)

$S'(x_1' O y_1')$ SISTEMA S DOPO dt

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{i}_1}{\Delta t} \to \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1$$

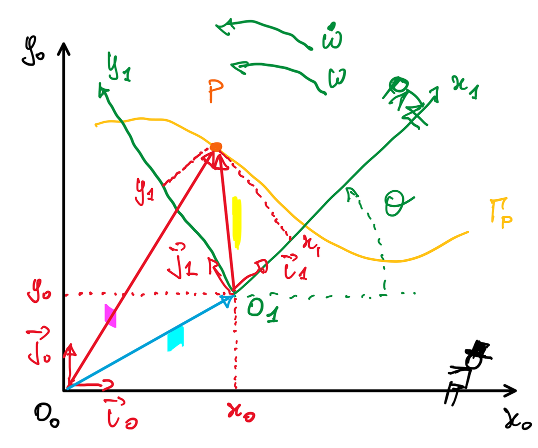
$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}_1 = e^{i\theta} \\ \vec{j}_1 = i e^{i\theta} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \end{array}\right\} \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \frac{d}{dt} e^{i\theta} = i\dot{\theta} \boxed{e^{i\theta}} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 \qquad \boxed{e^{i\theta}} \to \vec{i}_1$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \frac{d}{dt} i e^{i\theta} = -\dot{\theta} e^{i\theta} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1$$

$$-i \cdot \boxed{i} \cdot \dot{\theta} \boxed{e^{i\theta}} \to \vec{j}_1$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA MOTI RELATIVI



STUDIO IL MOVIMENTO DI P VISTO DA OSSERVATORE ASSOLUTO E DA UNO RELATIVO

$S(x, O, y)$ SISTEMA FISSO

$S_1(x_1, O, y_1)$ SISTEMA MOBILE

- VETTORE POSIZIONE

$$(P - O_0) = (O_1 - O_0) + (P - O_1) \qquad (P - O_0) = (x_0 \vec{i}_0 + y_0 \vec{j}_0) + (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)$$

- VELOCITA'

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P - O_0) = \frac{d}{dt}(x_0 \vec{i}_0 + y_0 \vec{j}_0) + \frac{d}{dt}(x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1) =$$

$$= \dot{x}_0 \vec{i}_0 + \dot{y}_0 \vec{j}_0 + \frac{d\vec{i}_1}{dt} x_1 + \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \frac{d\vec{j}_1}{dt} y_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1$$

$$\boxed{\vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 x_1 \qquad \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 y_1} \to \vec{\omega} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1) = \vec{\omega} \wedge (P - O_1)$$

$$\vec{v}_P = \dot{x}_0 \vec{i}_0 + \dot{y}_0 \vec{j}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\vec{v}_{O_1}}_{\text{Velocità con cui si muove il centro } O_1} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (P - O_1)}_{\text{Velocità con cui ruota il sistema } S_1}}_{\text{velocità di trascinamento}} + \underbrace{v_{P_{rel}}}_{\text{velocità relativa}}$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{P_{trasc}} + \vec{v}_{P_{rel}}}$$

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI PER LA VELOCITA'

- ACCELERAZIONE

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt} \vec{v}_P = \frac{d^2}{dt^2}(P - O_0) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{O_1} + \omega \wedge (P - O_1) + v_{P_{rel}}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\underset{①}{\dot{x}_0 \vec{i}_0 + \dot{y}_0 \vec{j}_0} + \underset{②}{\vec{\omega} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)} + \underset{③}{\dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_0 \vec{i}_0 + \dot{y}_0 \vec{j}_0) = \ddot{x}_0 \vec{i}_0 + \ddot{y}_0 \vec{j}_0 \quad ①$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)\right) = \dot{\vec{\omega}} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \vec{v}_{P_{rel}}\right) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P_{rel}} \quad ②$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1) = \frac{d}{dt} v_{P_{rel}} = \frac{d\vec{i}_1}{dt} \dot{x}_1 + \boxed{\ddot{x}_1 \vec{i}_1} + \frac{d\vec{j}_1}{dt} \dot{y}_1 + \boxed{\ddot{y}_1 \vec{j}_1} \quad ③_{bis}$$

$$\boxed{\vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 \dot{x}_1 \qquad \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 \dot{y}_1} \to \vec{\omega} \wedge (\dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P_{rel}} \quad ③$$

$$\vec{a}_P = \ddot{x}_0 \vec{i}_0 + \ddot{y}_0 \vec{j}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \vec{a}_{P_{rel}} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P_{rel}} =$$

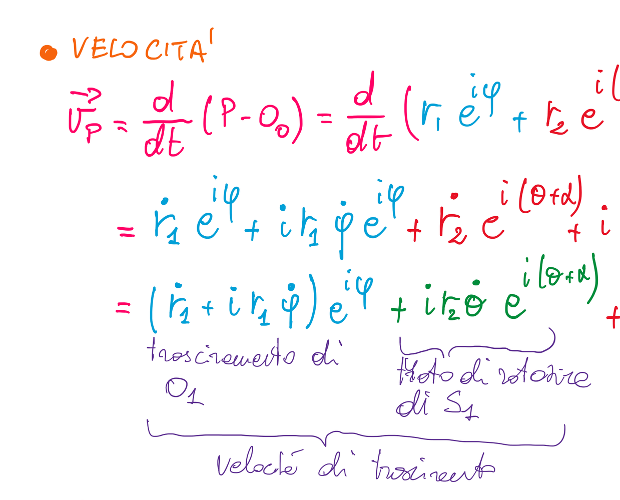
$$= \underbrace{\underbrace{\vec{a}_{O_1}}_{\text{trascinamento di } O_1} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1)}_{\text{componente tangenziale}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} (P - O_1)}_{\text{componente normale}}}_{\text{accelerazione di trascinamento}} + \underbrace{a_{P_{rel}}}_{\text{accelerazione di P relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P_{rel}}}_{\text{accelerazione Complementare o di Coriolis}}$$

(1835)

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{P_{trasc}} + a_{P_{rel}} + a_{P_{cor}}}$$

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI PER LA ACCELERAZIONE

- USO I NUMERI COMPLESSI PER DIMOSTRARE IL TH DEI MOTI RELATIVI



$$(O_1 - O_0) = r_1 e^{i\varphi}$$

$$(P - O_1) = r_2 e^{i(\theta + \alpha)}$$

- POSIZIONE

$$(P - O_0) = (O_1 - O_0) + (P - O_1) = $$

$$= r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{i(\theta + \alpha)}$$

- VELOCITA'

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P - O_0) = \frac{d}{dt}\left(r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{i(\theta + \alpha)}\right) =$$

$$= \dot{r}_1 e^{i\varphi} + i r_1 \dot{\varphi} e^{i\varphi} + \dot{r}_2 e^{i(\theta+\alpha)} + i r_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi}}_{\text{trascinamento di } O_1} + \underbrace{i r_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)}}_{\text{Moto di rotazione di } S_1}}_{\text{velocità di trascinamento}} + \underbrace{(\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)}}_{\text{Moto relativo di P}}$$

velocità relativa

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P_{trasc}} + \vec{v}_{P_{rel}}$$

- ACCELERAZIONE

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\vec{v}_P = \frac{d}{dt}\left((\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi} + i r_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)} + (\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)}\right) =$$

$$= (\ddot{r}_1 + i \dot{r}_1 \dot{\varphi} + i r_1 \ddot{\varphi}) e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}(\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi} +$$

$$+ (i \dot{r}_2 \dot{\theta} + i r_2 \ddot{\theta}) e^{i(\theta+\alpha)} - (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) r_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)} +$$

$$+ (\ddot{r}_2 + i \dot{r}_2 \dot{\alpha} + i r_2 \ddot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} + i(\dot{\theta} + \dot{\alpha})(\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} =$$

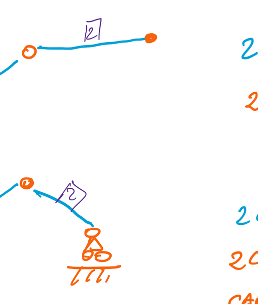
$$= \underbrace{\underbrace{(\ddot{r}_1 + 2i\dot{r}_1\dot{\varphi} + i r_1 \ddot{\varphi} - r_1 \dot{\varphi}^2) e^{i\varphi}}_{\text{trascinamento di } O_1 = \vec{a}_{O_1}} \underbrace{\underset{\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(P-O_1)}{- r_2 \dot{\theta}^2 e^{i(\theta+\alpha)}} + \underset{\dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1)}{i r_2 \ddot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)}}}_{\text{moto di rotazione di } S_1}}_{\vec{a}_{P_{trasc}}} +$$

$$+ \underbrace{(\ddot{r}_2 + 2i\dot{r}_2\dot{\alpha} + i r_2 \ddot{\alpha} - r_2 \dot{\alpha}^2) e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec{a}_{P_{rel}}} + \underbrace{i 2\dot{\theta} (\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec{a}_{P_{cor}}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P_{trasc}} + \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{cor}}$$

- CINEMATICA DEI SISTEMI MECCANICI

STRUTTURE → SISTEMI DI CR E VINCOLI CON GdL ≤ 0



2 CR → 3x2 = 6 GdL possibili

3 CERNIERE 2x3 = 6 GdV

0 GdL RESIDUI

← STRUTTURA ISOSTATICA (0 GdL)

1 CR → 3x1 = 3 GdL possibili

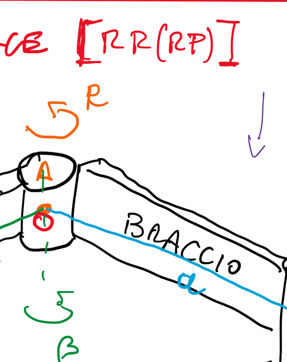
1 INCASTRO → 1x3 = 3 } 5 GdV

1 CERNIERA 1x2 = 2

-2 GdL RESIDUI

STRUTTURA IPERSTATICA (GdL < 0)

MECCANISMI → SISTEMI "MECCANICI" CON GdL > 0



2 CR → 3x2 = 6 GdL possibili

2 CERNIERE 2x2 = 4 GdV

2 GdL RESIDUI

2 CR → 3x2 = 6 GdL possibili

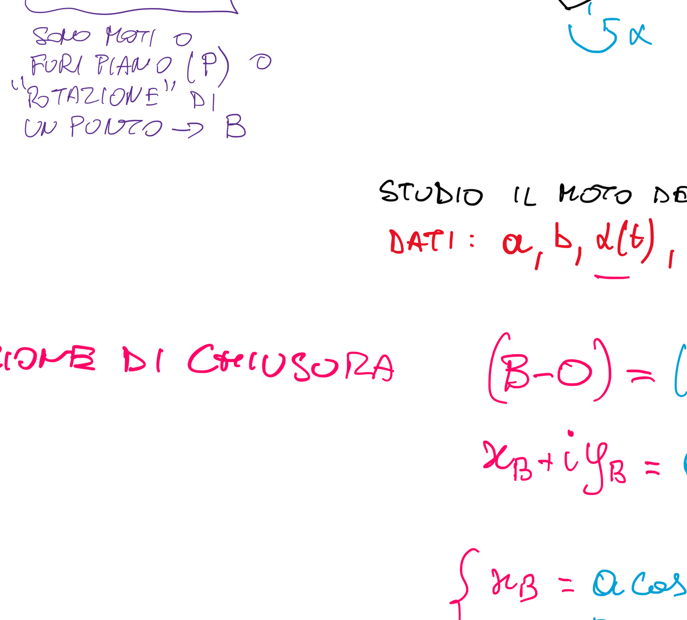
2 CERNIERE 2x2 } 5 GdV

CARRELLO 1x1

1 GdL RESIDUO

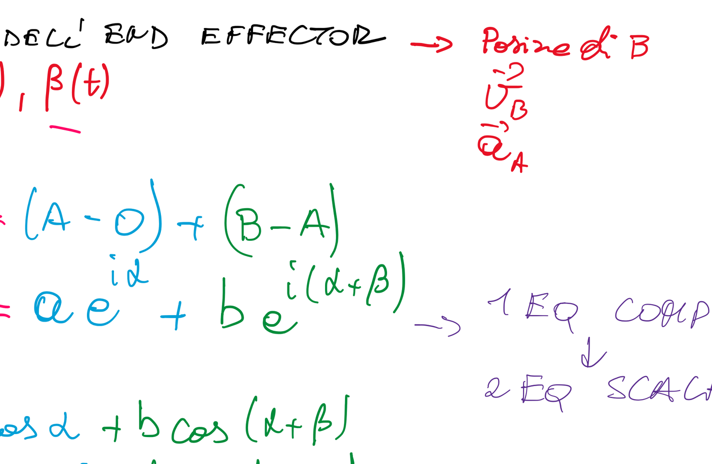
ESEMPIO: CINEMATICA DI UN ROBOT INDUSTRIALE [RR(RP)]

↓ GUARDO DALL'ALTO



SONO MOTI O FUORI PIANO (P) O "ROTAZIONE" DI UN PUNTO → B

↓ GUARDO DALL'ALTO



STUDIO IL MOTO DELL' END EFFECTOR → Posizione di B, $\vec{v}_B$, $\vec{a}_A$

DATI: $a, b, \alpha(t), \beta(t)$

- POSIZIONE → EQUAZIONE DI CHIUSURA

$$(B - O) = (A - O) + (B - A)$$

$$x_B + i y_B = a e^{i\alpha} + b e^{i(\alpha + \beta)} \to \text{1 EQ COMPLESSA}$$

↓ 2 EQ SCALARI (LUNGO Re e Im)

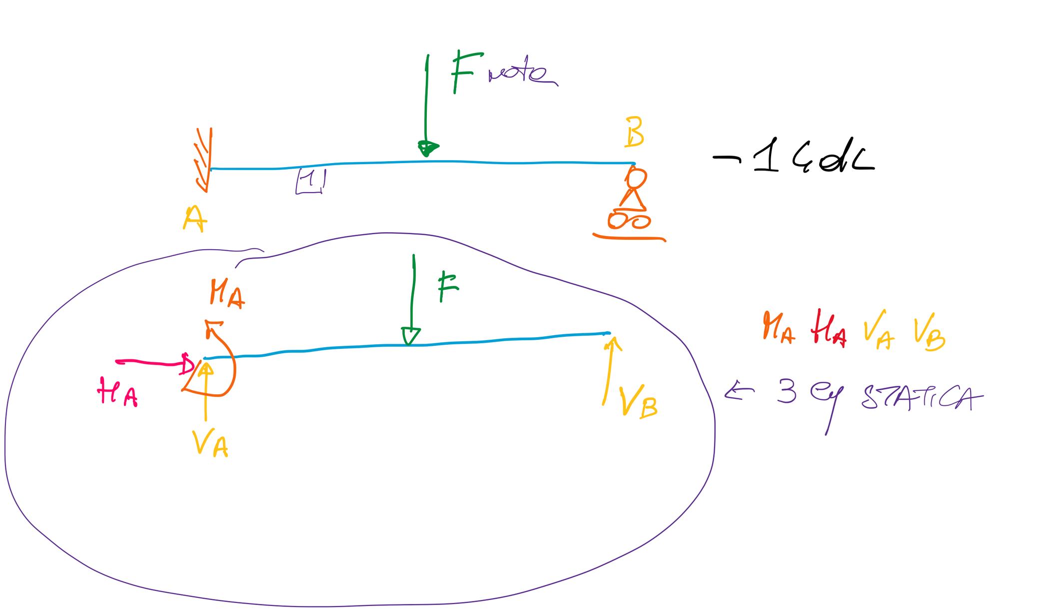
$$\begin{cases} x_B = a\cos\alpha + b\cos(\alpha + \beta) \\ y_B = a\sin\alpha + b\sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

- VELOCITA' → DERIVO $\frac{d}{dt}$ EQ CHIUSURA

↳ $\dot{x}_B$ e $\dot{y}_B$

- ACCELERAZIONE → $\frac{d^2}{dt^2}$ EQ CHIUSURA

$\ddot{x}_B$ e $\ddot{y}_B$



-1 GdL

M_A H_A V_A V_B

← 3 eq STATICA

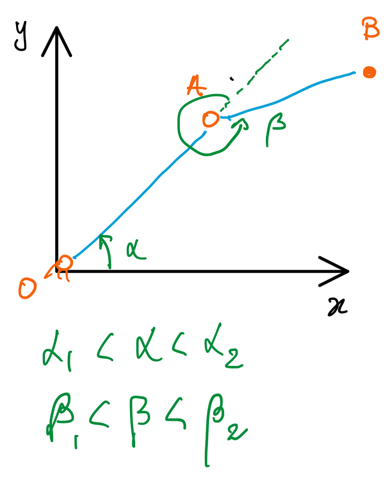
Lezione lunedì 18 ottobre 2021

lunedì 12 ottobre 2020 10:19

- SISTEMI DI CORPI RIGIDI
  - MECCANISMI
    - ↳ CATENE CINEMATICHE APERTE → ESEMPIO ROBOT MANIPOLATORE
    - ↳ CATENE CINEMATICHE CHIUSE ↳ MECCANISMI "TRADIZIONALI" DELLE MACCHINE

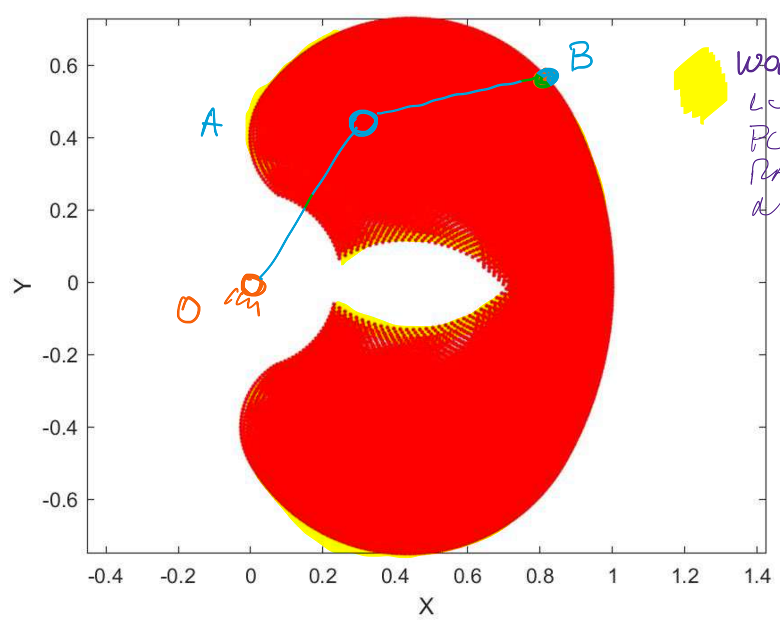
ROBOT MANIPOLATORE / PLANARE

↳ WORK SPACE



$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$

$\beta_1 < \beta < \beta_2$



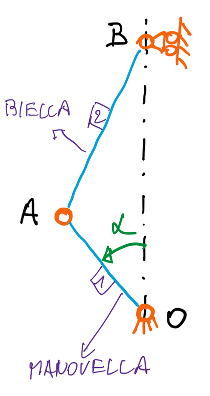
WORKSPACE LUOGO DEI PUNTI RAGGIUNGIBILI NEL PIANO

CATENE CINEMATICHE CHIUSE

↳ MECCANISMI BASE (1 GdL)

- MANOVELLISMO → MOTORI A COMBUSTIONE INTERNA, COMPRESSORI/POMPE ALTERNATIVI
- QUADRILATERO ARTICOLATO → BIOMECCANICA, TELAI TESSILI / PANTOGRAFI / SOSPENSIONI (AUTO F1) / AZIONAMENTI SUP. CONTROLLO AERONAUTICO
- GLIFO → MACCHINE UTENSILI

MANOVELLISMO



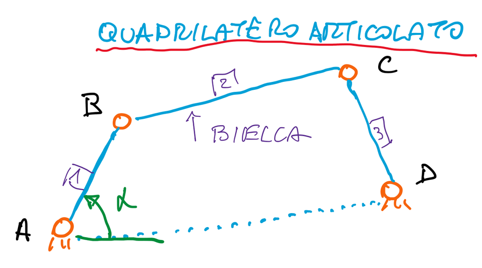
2 CR × 3 GdL = 6 GdL

2 CERNIERE × 2 GdV = 4 GdV

1 CARRELLO × 1 GdV = 1 GdV

1 GdL RESIDUO

QUADRILATERO ARTICOLATO



3 CR × 3 GdL = 9 GdL

4 CERNIERE × 2 GdV = 8 GdV

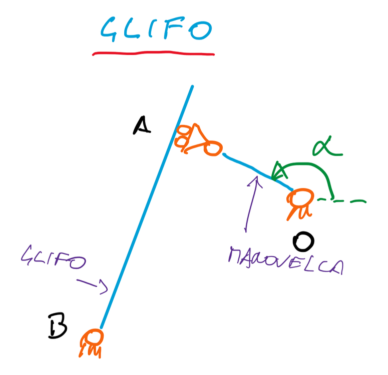
1 GdL RESIDUO

AB e CD → MANOVELLE SE COMPIONO GIRI COMPLETI

→ BILANCIERI ALTRIMENTI

↳ REGOLA DI GRASHOF

GLIFO

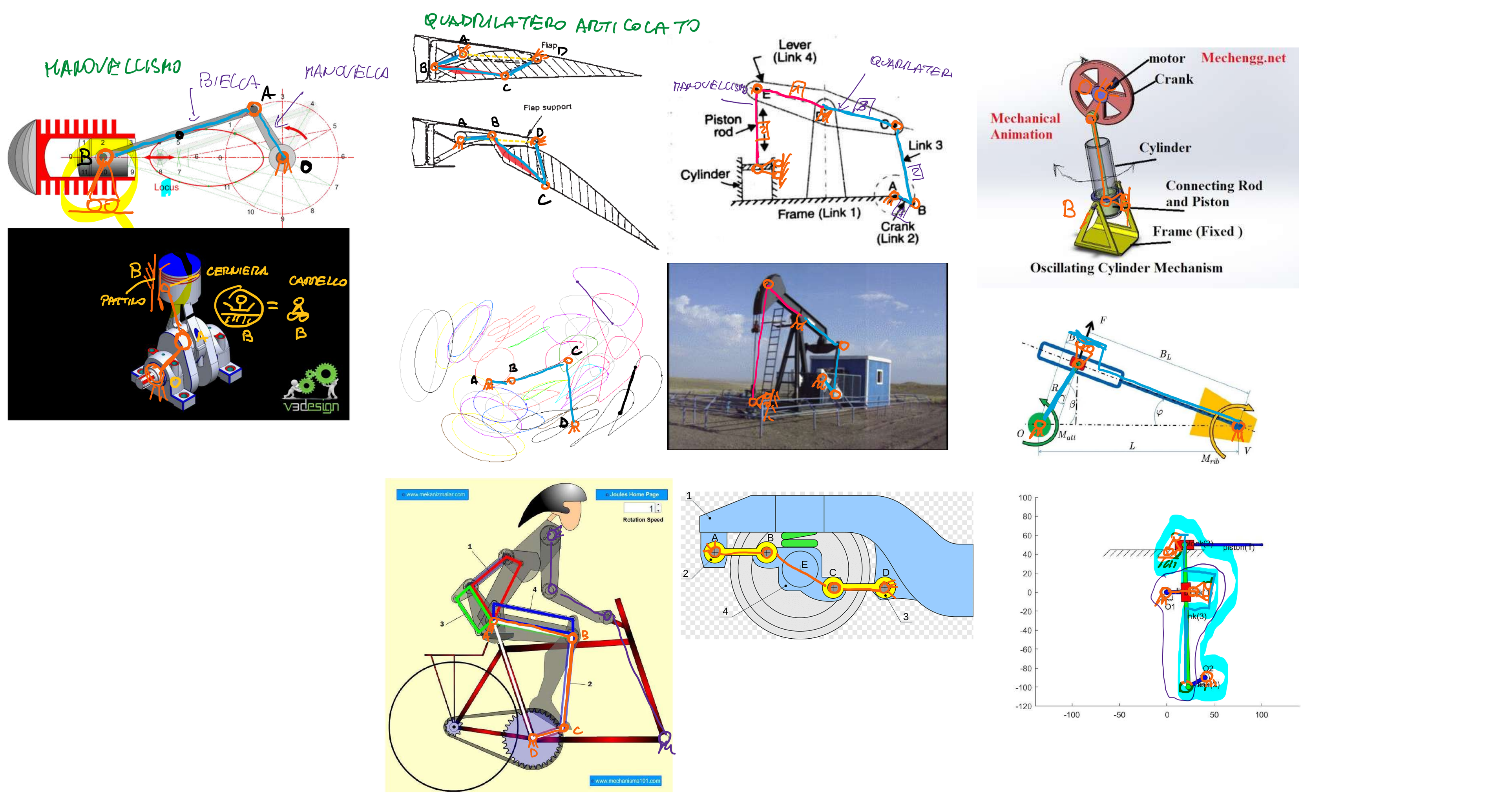


2 CR × 3 GdL = 6 GdL

2 CERNIERE × 2 GdV = 4 GdV

1 CARRELLO × 1 GdV = 1 GdV

1 GdL RESIDUO



DINAMICA

↳ METODI PER LO STUDIO DELLA DINAMICA

- PRINCIPIO DI D'ALEMBERT → ESTENDERE I METODI DELLA STATICA CONSIDERANDO EQUAZIONI DI EQUILIBRIO "DINAMICHE"
  ESTENSIONE DELLE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA ALLA DINAMICA INTRODUCENDO FORZE D'INERZIA (FORZE E COPPIE) ⇐ MECCANICA NEWTONIANA
- METODI "ENERGETICI" ⇐ PRINCIPI DI TIPO CONSERVATIVO
  - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
  - BILANCIO DI POTENZE / EQUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA
  - EQUAZIONE DI LAGRANGE

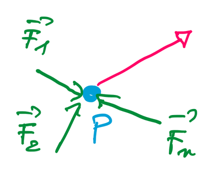
PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

→ II PRINCIPIO DELLA DINAMICA

PER 1 PUNTO

$$\boxed{\sum_i \vec{F} = m\vec{a}} \quad (*)$$

COME È SCRITTA NON È UN'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO (TERMINE A DX DELL'"=" DIVERSO DA 0)



PUNTO MATERIALE MASSA "m"

D'ALEMBERT

DEFINISCO

$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$

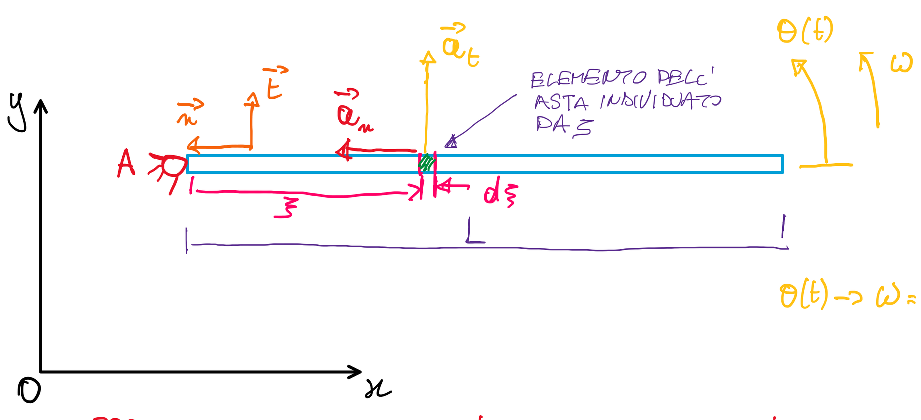
↳ DEFINISCO QUESTO "PRODOTTO" COME FORZA D'INERZIA

LA (*) DIVENTA $\boxed{\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{in} = 0}$ ← QUESTA È UN'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO

LA FORZA D'INERZIA È CONSIDERATA DAI FISICI UNA FORZA "APPARENTE" MA IN MECCANICA APPLICATA HA LA STESSA "DIGNITÀ" DELLE ALTRE FORZE.

- APPLICAZIONE AD 1 CORPO RIGIDO
  ↳ DEFINIZIONE SISTEMA EQUIVALENTE DELLE FORZE D'INERZIA (1 FORZA + 1 COPPIA PER C.R.)

ESEMPIO ASTA ≡ C.R. INCERNIERATA A TERRA IN A → MOTO ROTATORIO



DATI: TRAVE OMOGENEA

$dm = m\dfrac{d\xi}{L}$

MASSA ELEMENTO — MASSA TOTALE ASTA

$\theta(t) \rightarrow \omega = \dfrac{d\theta}{dt}, \ \dot{\omega} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

PER DEFINIZIONE DI FORZA D'INERZIA, LA FORZA D'INERZIA DELL'ELEMENTO $d\xi$ È:

$$d\vec{F}_{in} = -dm\,\vec{a}$$

$\vec{a}_t(\xi) = \xi\ddot{\theta}\vec{t}$ COMPONENTE TANGENZIALE DELL'ACCELERAZIONE $\rightarrow d\vec{F}_{in_t}(\xi) = -dm\,\vec{a}_t(\xi) = -m\dfrac{d\xi}{L}\xi\ddot{\theta}\vec{t}$

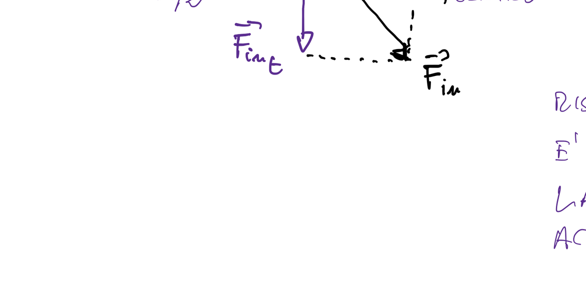
$\vec{a}_n(\xi) = \xi\dot{\theta}^2\vec{n}$ COMPONENTE NORMALE DELL'ACCELERAZIONE $\rightarrow d\vec{F}_{in_n}(\xi) = -dm\,\vec{a}_n(\xi) = -m\dfrac{d\xi}{L}\xi\dot{\theta}^2\vec{n}$

COMPONENTI INFINITESIME DELLA FORZA D'INERZIA

$$\vec{F}_{in_t} = \int_0^L d\vec{F}_{in_t}(\xi) = -\frac{m\ddot{\theta}}{L}\int_0^L \xi\,d\xi\,\vec{t} = -m\boxed{\frac{L}{2}\ddot{\theta}\vec{t}} \quad \vec{a}_{G_t}$$

$$\vec{F}_{in_n} = \int_0^L dF_{in_n}(\xi) = -\frac{m\dot{\theta}}{L}\int_0^L \xi\,d\xi\,\vec{n} = -m\boxed{\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\vec{n}} \quad \vec{a}_{G_n}$$

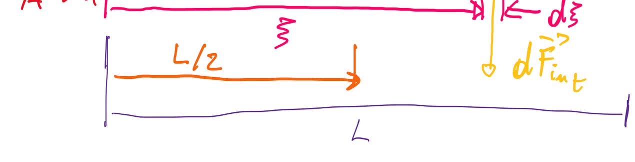
ACCELERAZIONE DI UN PUNTO POSTO A L/2 DELLA TRAVE ⇒ G È IL BARICENTRO DELLA TRAVE



$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_{in_n} &= -m\vec{a}_{G_n}\\ \vec{F}_{in_t} &= -m\vec{a}_{G_t}\end{aligned}\right\} \vec{F}_{in} = -m\vec{a}_G$$

RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA DI TUTTO IL C.R. È PARI ALL'ACCELERAZIONE DEL BARICENTRO PER LA MASSA DEL C.R. E HA VERSO OPPOSTO ALL'ACCELERAZIONE

COPPIA RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA (INFINITESIME)



MOMENTO DELLE FORZE D'INERZIA INFINITESIME RISPETTO AL BARICENTRO G

$$\vec{C}_{in} = \int_0^L (P-G)\wedge d\vec{F}_{in} = \int_0^L (P-G)\wedge d\vec{F}_{in_t} =$$

$$= -\frac{m}{L}\ddot{\theta}\int_0^L \xi\left(\xi - \frac{L}{2}\right)d\xi\,\vec{k} =$$

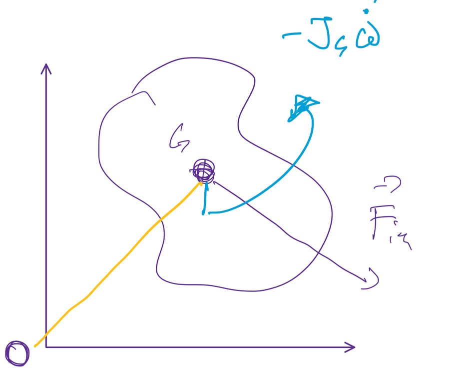
$(P-G) = \left(\xi - \frac{L}{2}\right)\vec{n}$

$$= -m\ddot{\theta}\frac{L^2}{12}\vec{k} =$$

→ MOMENTO D'INERZIA BARICENTRALE DELLA TRAVE → J_G

$$= -J_G\ddot{\theta}\vec{k}$$

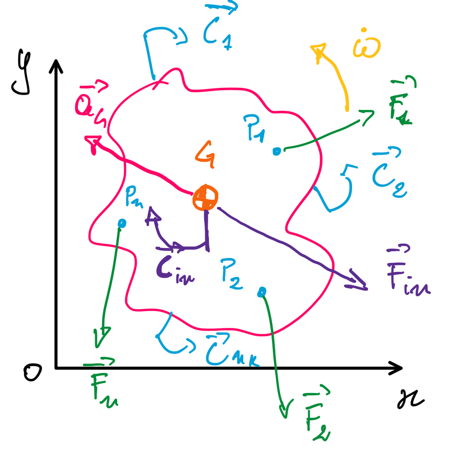
RISULTANTE DELLE COPPIE D'INERZIA È PARI AD UNA COPPIA DATA DAL MOMENTO D'INERZIA BARICENTRALE PER L'ACCELERAZIONE ANGOLARE DEL CORPO RIGIDO, VERSO OPPOSTO ALL'ACCELERAZIONE ANGOLARE, DIREZIONE ⊥ AL PIANO



PER OGNI CORPO RIGIDO:

SISTEMA EQUIVALENTE DELLE FORZE D'INERZIA
$$\begin{cases}\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_G\\ \vec{C}_{in} = -J_G\ddot{\vec{\theta}} = -J_G\dot{\vec{\omega}}\end{cases}$$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA PER 1 CORPO RIGIDO



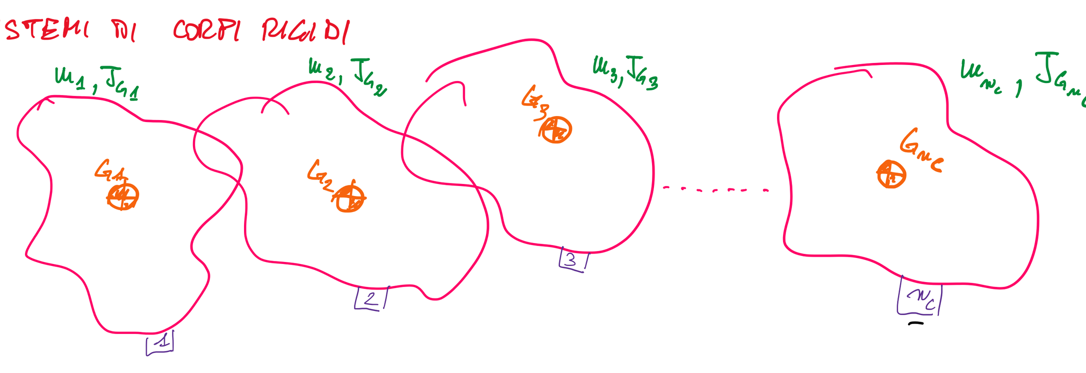
$$\begin{cases}\sum_1^n{}_j \vec{F}_j + \vec{F}_{in} = 0\\ \underbrace{\sum_1^n{}_j (P_j - O)\wedge\vec{F}_j}_{\text{MOMENTO FORZE EXT.}} + \underbrace{(G-O)\wedge\vec{F}_{in}}_{\text{MOMENTO FORZA D'INERZIA}} + \underbrace{\sum_1^{n_k}{}_r \vec{C}_r}_{\text{MOMENTI/COPPIE ESTERNO}} + \underbrace{\vec{C}_{in}}_{\text{COPPIA D'INERZIA}} = 0\end{cases}$$

$\vec{F}_i$

$-J_G\ddot{\theta}\vec{k}$

POLO DEI MOMENTI (NON NECESSARIAMENTE L'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO)

SISTEMI DI CORPI RIGIDI



PER OGNI CORPO RIGIDO

$$\begin{cases}\sum_1^n{}_j \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{in,i} = 0\\ \sum_1^n{}_j (P_{i,j} - O)\wedge\vec{F}_{i,j} + \sum_1^{n_M}{}_r \vec{C}_{i,r} + (G_i - O)\wedge\vec{F}_{in,i} + \vec{C}_{in,i} = 0\end{cases}$$

NE POSSO SCRIVERE n_c

$j = 1, 2, \dots, n$ indice delle forze esterne per ogni C.R.

$i = 1, 2, \dots, n_c$ indice dei corpi rigidi

$r = 1, 2, \dots, n_M$ indice delle coppie/momenti esterni per ogni C.R.

- METODI ENERGETICI (PER LO STUDIO DELLA DINAMICA DI SISTEMI DI C.R.)
  - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)
    - ↳ BILANCIO DI POTENZE
    - ↳ TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA — DUALI
    - ↳ EQUAZIONE DI LAGRANGE

N.B.

$\wedge$: PRODOTTO VETTORIALE
$\times$: PRODOTTO SCALARE

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

→ RIPRENDIAMO SISTEMA EQUAZIONI EQUILIBRIO DINAMICO PER SISTEMI DI CORPI RIGIDI

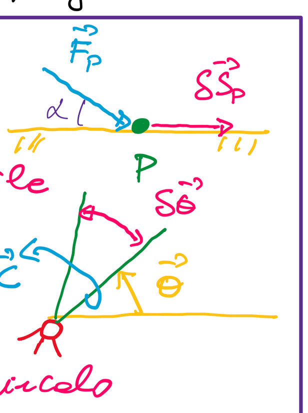
PER OGNI C.R.
$$\begin{cases} \sum_j^{n} \vec F_{i,j} + \vec F_{in,i} = 0 \\ \sum_j (P_{i,j}-O)\wedge \vec F_{i,j} + \sum_1^{n_M}{}_r \vec C_{i,r} + (G_i - O)\wedge \vec F_{in,i} + \vec C_{in,i} = 0 \end{cases}$$

$j = 1,2,\dots,n$ indice delle forze esterne per ogni C.R.
$i = 1,2,\dots,n_c$ indice dei C.R.
$r = 1,2,\dots,n_M$ indice delle coppie/momenti esterni per ogni C.R.

↳ CALCOLO DEL LAVORO VIRTUALE

$$\delta L = \underbrace{\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j \vec F_{i,j} \times \delta \vec P_{i,j}}_{\text{LAVORO DELLE FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r \vec C_{i,r} \times \delta \vec \theta_i}_{\text{LAVORO MOMENTI/COPPIE ESTERNE}} +$$
$$+ \sum_1^{n_c}{}_i \Big(\underbrace{-m_i \vec a_{G_i} \times \delta \vec G_i}_{\text{LAVORO FORZE D'INERZIA}} \underbrace{- J_{G_i} \dot{\vec\omega}_i \times \delta \vec \theta_i}_{\text{LAVORO COPPIE D'INERZIA}} \Big) = 0$$

LAVORO VIRTUALE



$\delta L = \vec F_P \times \delta \vec S_P$

$\delta \vec S_P$ spostamento compatibile con il vincolo

$\delta L = \vec C \times \delta \vec \theta$

$\delta \vec \theta$ spostamento (angolare) compatibile con il vincolo

SCRIVIAMO IL δL CON LE COORDINATE FISICHE

$$\delta L = \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j \left(F_{x_{i,j}} \delta x_{i,j} + F_{y_{i,j}} \delta y_{i,j} \right) + \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r C_{i,r} \delta \theta_i +$$
$$+ \sum_1^{n_c}{}_i \left(-m_i a_{G_x i} \delta x_{G_i} - m_i a_{G_y i} \delta y_{G_i} - J_{G_i} \ddot\theta_i \delta \theta_i \right)$$

↑ 1 EQUAZIONE SCALARE

$$x_{G_i} = x_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$$
$$y_{G_i} = y_{G_i}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$$
$$\theta_i = \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GdL}})$$

LE q_s SONO LE COORDINATE LIBERE INDIPENDENTI CHE "DESCRIVONO" COMPLETAMENTE I GdL DEL SISTEMA DI C.R.
(A VOLTE VENGONO DETTE ANCHE COORDINATE GENERALIZZATE)

$$\begin{cases} \delta x_{G_i} = \sum_1^{n_{GdL}}{}_s \dfrac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta y_{G_i} = \sum_1^{n_{GdL}}{}_s \dfrac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta \theta_i = \sum_1^{n_{GdL}}{}_s \dfrac{\partial \theta_i}{\partial q_s} \delta q_s \end{cases}$$

$$\boxed{\delta L = \sum_1^{n_{GdL}}{}_s \left(Q_s + Q_{in,s} \right) \delta q_s = 0}$$

← 1 EQUAZIONE SCALARE CHE È SODDISFATTA SE TUTTI I TERMINI TRA PARENTESI SONO UGUALI A ZERO

$$\begin{cases} Q_1 + Q_{in,1} = 0 \\ Q_2 + Q_{in,2} = 0 \\ \vdots \\ Q_{n_{GdL}} + Q_{in,n_{GdL}} = 0 \end{cases}$$

← SISTEMA DI n_{GdL} EQUAZIONI

I "Q_s" SONO CHIAMATI "COMPONENTI LAGRANGIANE"

$$Q_{in,s} = \sum_1^{n_c}{}_i \left(-m_i a_{G_x i} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_s} - m_i a_{G_y i} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_s} - J_{G_i} \ddot\theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_s} \right)$$

I "$Q_{in,s}$" SONO CHIAMATI "COMPONENTI LAGRANGIANE DELLE FORZE D'INERZIA"

AD ESEMPIO PER LA 1ª EQUAZIONE $Q_{in,s} \to Q_{in,1}$

$$Q_{in,1} = \sum_1^{n_c}{}_i \left(-m_i a_{G_x i} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_1} - m_i a_{G_y i} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_1} - J_{G_i} \ddot\theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_1} \right)$$

BILANCIO DI POTENZE

RIPRENDERE IL PLV

$$\delta L = \underbrace{\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j \vec F_{i,j} \times \delta \vec P_{i,j}}_{\text{LAVORO FORZE ESTERNE}} + \underbrace{\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r \vec C_{i,r} \times \delta \vec \theta_i}_{\text{LAVORO COPPIE/MOMENTI ESTERNI}} + \sum_1^{n_c}{}_i \Big(\underbrace{-m_i \vec a_{G_i} \times \delta \vec G_i}_{\text{LAVORO FORZE INERZIA}} \underbrace{- J_{G_i} \dot{\vec\omega}_i \times \delta \vec \theta_i}_{\text{LAVORO COPPIE D'INERZIA}} \Big) = 0$$

d/dt

$$\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j \vec F_{i,j} \times \underbrace{\frac{d\vec P_{i,j}}{dt}}_{\vec v_{P_{i,j}}} + \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r \vec C_{i,r} \times \underbrace{\frac{d\vec\theta_i}{dt}}_{\vec\omega_i} + \sum_1^{n_c}{}_i \Big(-m_i \vec a_{G_i} \times \underbrace{\frac{d\vec G_i}{dt}}_{\vec v_{G_i}} - J_{G_i} \dot{\vec\omega}_i \times \underbrace{\frac{d\vec\theta_i}{dt}}_{\vec\omega_i} \Big) = 0$$

$\frac{d}{dt} L = 0$

$W_{i,j} = \vec F_{i,j} \times \dfrac{d\vec P_{i,j}}{dt} = \vec F_{i,j} \times \vec v_{P_{i,j}}$ POTENZA DELLA FORZA $\vec F_{i,j}$

$W_{i,r} = \vec C_{i,r} \times \dfrac{d\vec\theta_i}{dt} = \vec C_{i,r} \times \vec\omega_i$ POTENZA DELLA COPPIA/MOMENTO $\vec C_{i,r}$

$W_{in,i} = -m_i \vec a_{G_i} \times \vec v_{G_i} - J_{G_i} \dot{\vec\omega}_i \times \vec\omega$ POTENZA DEL SISTEMA EQUIVALENTE D'INERZIA DEL C.R. i-esimo

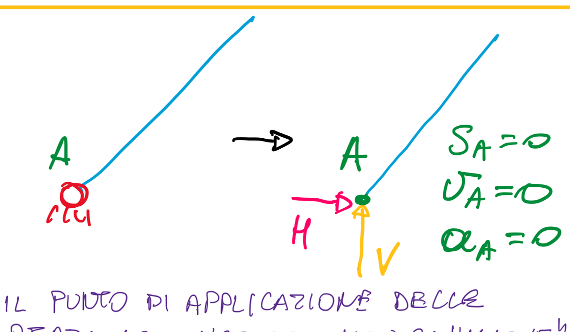
$$\sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n}{}_j W_{i,j} + \sum_1^{n_c}{}_i \sum_1^{n_M}{}_r W_{i,r} + \sum_1^{n_c}{}_i W_{in,i} = 0$$

1 EQUAZIONE → 1 INCOGNITA

$$\boxed{\sum W + \sum W_{in} = 0}$$

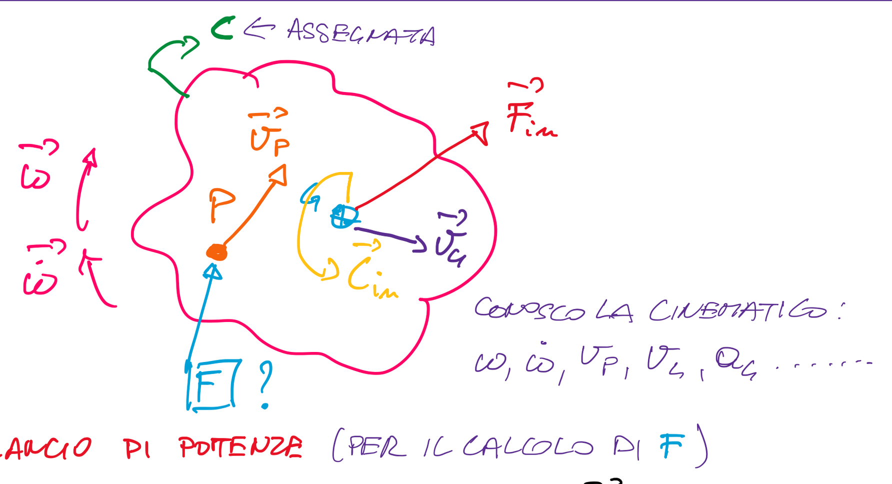
BILANCIO DI POTENZE

POTENZE FORZE, COPPIE, MOMENTI ESTERNI — POTENZA FORZE COPPIE D'INERZIA



IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI NON SI "MUOVE" ERGO LE REAZIONI VINCOLARI NON LAVORANO

APPLICAZIONE



CONOSCO LA CINEMATICA: $\omega, \dot\omega, v_P, v_G, a_G \dots\dots$

BILANCIO DI POTENZE (PER IL CALCOLO DI F)

$$\vec F \times \vec v_P + \vec C \times \vec\omega - m \vec a_G \times \vec v_G - J_G \dot{\vec\omega} \times \vec\omega = 0$$

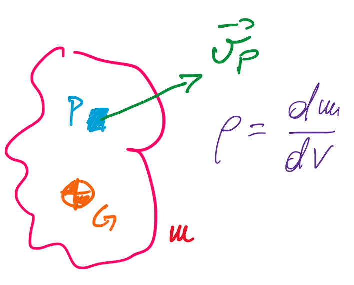
↑ UNICA INCOGNITA

(SE HO REAZIONI VINCOLARI, IL LORO PUNTO DI APPLICAZIONE NON SI MUOVE)

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (DUALE DEL BILANCIO DI POTENZE)

- CALCOLO DELL'ENERGIA CINETICA DI UN C.R.

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \vec v_P \times \vec v_P \rho \, dV = \frac{1}{2} \int_V v_P^2 \rho \, dV$$



$\rho = \dfrac{dm}{dV}$

APPLICO IL TH DI RIVALS

$\vec v_P = \vec v_G + \vec\omega \wedge (P-G)$

$$E_c = \frac{1}{2} \vec v_G \times \vec v_G \underbrace{\int_V \rho \, dv}_{m} + \frac{1}{2} \vec v_G \times \Big(\vec\omega \wedge \int_V (P-G) \rho \, dv \Big) + \frac{1}{2} \Big(\vec\omega \wedge \int_V (P-G) \rho \, dv \Big) \times \vec v_G + \frac{1}{2} \omega^2 \int_V |P-G|^2 \rho \, dV \to$$

MOMENTI STATICI RISPETTO AL BARICENTRO G = 0

$(\vec\omega \wedge (P-G)) \times (\vec\omega \wedge (P-G)) = \omega^2 |P-G|^2$

$\int_V |P-G|^2 \rho \, dV = J_G$

$$\to E_c = \frac{1}{2} m \vec v_G \times \vec v_G + \frac{1}{2} J_G \vec\omega \times \vec\omega = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

TEOREMA DI KOENIG (KÖNIG)

JOHAN SAMUEL KÖNIG (1712 - 1757)

DERIVATA RISPETTO AL TEMPO DELLE E_{c_i} DEI MIEI i CORPI RIGIDI

d/dt

$$\frac{dE_{c_i}}{dt} = \frac{1}{2} m_i \vec a_{G_i} \times \vec v_{G_i} + \frac{1}{2} m_i \vec v_{G_i} \times \vec a_{G_i} + \frac{1}{2} J_{G_i} \dot{\vec\omega}_i \times \vec\omega_i + \frac{1}{2} J_{G_i} \vec\omega_i \times \dot{\vec\omega}_i =$$
$$= m_i \vec a_{G_i} \times \vec v_{G_i} + J_{G_i} \dot{\vec\omega}_i \times \vec\omega_i = -W_{in,i}$$

⊗ IL PRODOTTO SCALARE HA LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA

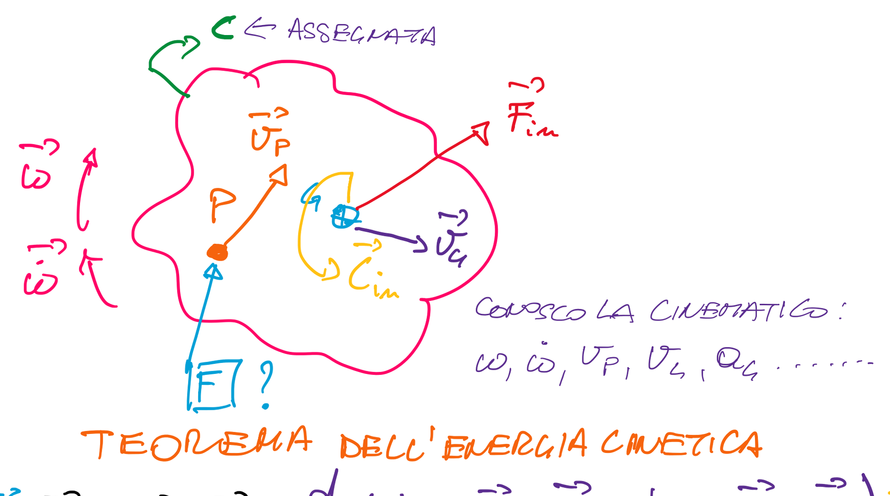
$$\boxed{W_{in,i} = -\frac{dE_{c_i}}{dt}}$$

$$\sum W + \sum W_{in} = 0 \to \boxed{\sum W = \frac{dE_c}{dt}}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

1 EQUAZIONE → 1 INCOGNITA

APPLICAZIONE



CONOSCO LA CINEMATICA: $\omega, \dot\omega, v_P, v_G, a_G \dots\dots$

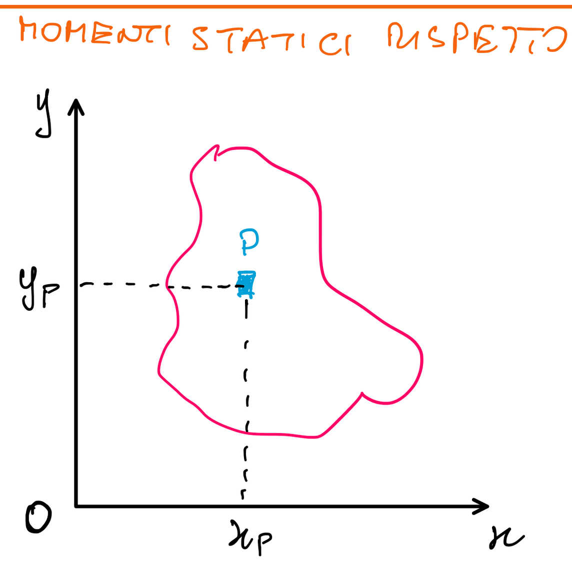
TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$\vec F \times \vec v_P + \vec C \times \vec\omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec v_G \times \vec v_G + \frac{1}{2} J_G \vec\omega \times \vec\omega \right) \to m \vec a_G \times \vec v_G + J_G \dot{\vec\omega} \times \vec\omega$$

↑ UNICA INCOGNITA

(SE HO REAZIONI VINCOLARI, IL LORO PUNTO DI APPLICAZIONE NON SI MUOVE)

MOMENTI STATICI RISPETTO AL BARICENTRO



$M^{(1)}_{Ox} = \int_V y_P \rho \, dv$ MOMENTO STATICO RISPETTO A x

$M^{(1)}_{Oy} = \int_V x_P \rho \, dv$ MOMENTO STATICO RISPETTO A y

DEF BARICENTRO

$y_G = \dfrac{\int_V y_P \rho \, dv}{m}$

$x_G = \dfrac{\int_V x_P \rho \, dv}{m}$

$$M^{(1)}_{Gx} = \int_V |y_P - y_G| \rho \, dv = \left| \int_V y_P \rho \, dv - \frac{\int_V y_P \rho \, dv}{\cancel{m}} \underbrace{\int_V \rho \, dv}_{\cancel{m}} \right| = 0$$

$$M^{(1)}_{Gy} = \int_V |x_P - x_G| \rho \, dv$$

MOMENTO STATICO RISPETTO AL BARICENTRO (LUNGO x)

" "

Lunedì 15 novembre

lunedì 15 novembre 2021 09:36

EQUAZIONE DI LAGRANGE (THE "ULTIMATE" PER LA DINAMICA)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

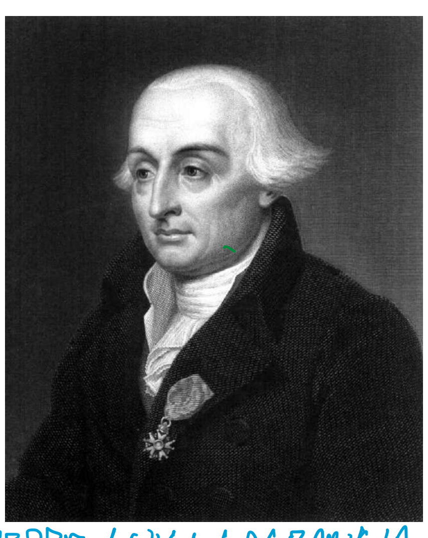
E_c : ENERGIA CINETICA

V : ENERGIA POTENZIALE

Q_k : COMPONENTE LAGRANGIANA $= \dfrac{\delta L}{\delta q_k}$

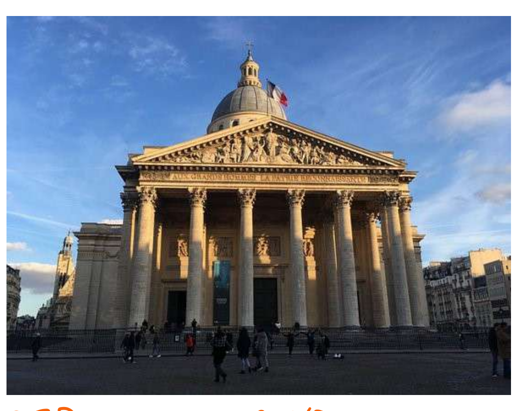
L : LAVORO DELLE FORZE ESTERNE (E DELLE FORZE INTERNE NON CONSERVATIVE)

q_k : COORDINATE INDIPENDENTI



GIUSEPPE LUIGI LAGRANGIA (NATO A TORINO)

AKA JOSEPH LOUIS LAGRANGE 1736 – 1813



SEPOLTO PANTHEON

DIMOSTRAZIONE EQ. LAGRANGE

→ PRINCIPIO DI D'ALEMBERT + PLV

$$\sum_1^N {}_i \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i\right) \times \delta \vec{x}_i = 0 \quad \text{per } i = 1,2,\dots,N \text{ COORDINATE FISICHE}$$

②③ ①

LA DESCRIZIONE DEL MOTO LA POSSO FARE ANCHE MEDIANTE LE COORDINATE GENERALIZZATE INDIPENDENTI

q_k con $k = 1,2,\dots,n$

$\vec{x}_i$ NON SONO ESPLICITAMENTE DIPENDENTI DAL TEMPO

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{PER } i = 1,2,\dots,N$$

CALCOLO DELLE VELOCITÀ DELLE $\vec{x}_i$

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n = \sum_1^n {}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad \text{per } i = 1,2,\dots,N \rightarrow \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots$$

DATO CHE $\dfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$ NON DIPENDONO DA $\dot{q}_k$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \quad \text{per } i = 1,2,\dots,N \text{ e per } k = 1,2,\dots,n \; ✲$$

$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_k)$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_k}\right) + \partial \dot{q}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k}}_{=1} + \partial \dot{q}_k \frac{d}{dt}(0) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$$

SPOSTAMENTI VIRTUALI DELLE $\vec{x}_i$

$$\delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_1^n {}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad k = 1,2,\dots,n$$

SOSTITUISCO $\delta \vec{x}_i$ NELLA II PARTE DEL PLV

$$\sum_1^N {}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_1^N {}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \left(\sum_1^n {}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right) = \sum_1^n {}_k \left(\sum_1^N {}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k$$

OGNI TERMINE DELL'EQ. PRECEDENTE LO POSSO SCRIVERE

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right) - m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)$$

① ②

BARBATRUCCO !!

$\dfrac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}$

$$\Rightarrow m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\boxed{m_i \dot{\vec{x}}_i} \times \frac{\partial \boxed{\dot{\vec{x}}_i}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \boxed{m_i \dot{\vec{x}}_i} \times \frac{\partial \boxed{\dot{\vec{x}}_i}}{\partial q_k} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\right]\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i\right) ✲$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_k \times \dot{\vec{x}}_k\right)\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i\right) = -m_i \dot{\vec{x}}_i \times \frac{\partial \dot{\vec{x}}_k}{\partial q_k}$$

$$\sum_1^N {}_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_1^n {}_k \left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\right]\left(\sum_1^N {}_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i\right)\right\}\delta q_k =$$

$$= \sum_1^n {}_k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k}\right]\delta q_k \quad ①$$

CONSIDERO LE FORZE ESTERNE $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t)$

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ESTERE (I TERMINE DEL PLV)

$$\delta L = \sum_1^N {}_i \vec{F}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_1^N {}_i \vec{F}_i \times \sum_1^n {}_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_1^n {}_k \left(\sum_1^N {}_i \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = \sum_1^n {}_k Q_k \delta q_k \quad ②$$

CONSIDERO IL LAVORO DI FORZE INTERNE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

↳ $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ LE FORZE CONSERVATIVE HANNO UN'ENERGIA POTENZIALE

CONSERVATIVE NON CONSERVATIVE

$$\sum_1^N {}_i \vec{F}_{I_i} \times \delta \vec{x}_i = \delta L_c + \delta L_{NC} = -\delta V + \sum_1^n {}_k Q_{nc_k}\delta q_k =$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n}\delta q_n\right) + \sum_1^n {}_k Q_{nc_k}\delta q_k = -\sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc_k}\right)\delta q_k \quad ③$$

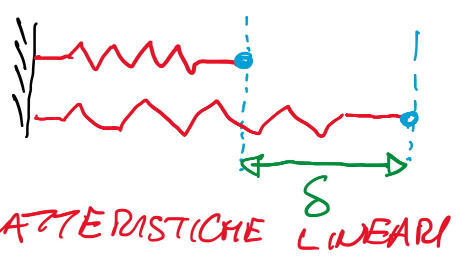
SOSTITUISCO ①②③ ALL'INTERNO DEL PLV :

$$-\sum_1^n {}_k \left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc_k} - Q_k\right]\delta q_k = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{nc} + Q}$$

- FORZE ELASTICHE / GRAVITAZIONALI NELL'EQ. DI LAGRANGE
- FORZE VISCOSE DISSIPATIVE NELL'EQ. DI LAGRANGE

FORZE ELASTICHE → MOLLA



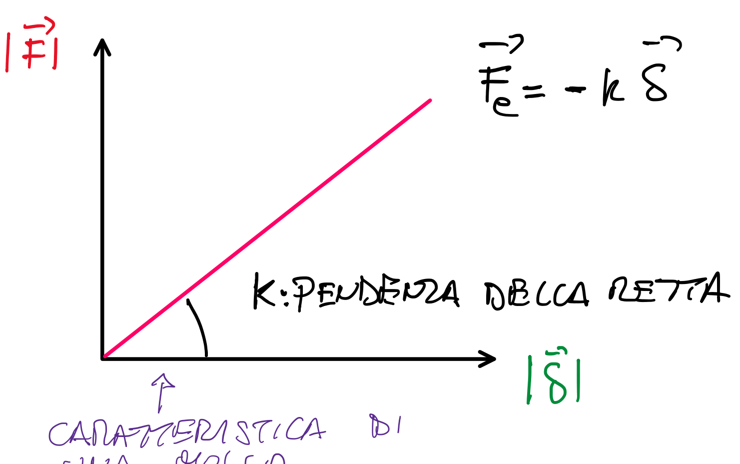
$\vec{F}_e = -k\vec{\delta}$ ← VARIAZIONE DI LUNGHEZZA DELLA MOLLA

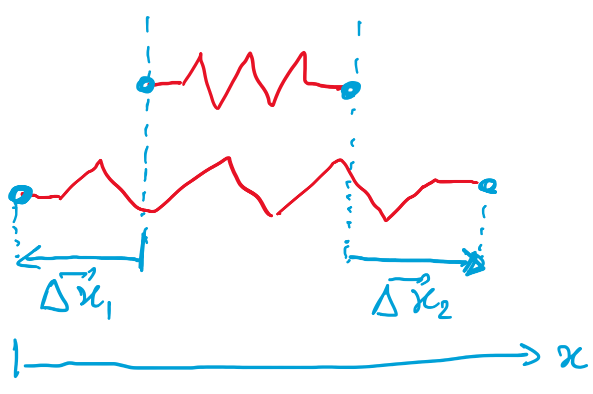
FORZA ELASTICA

RIGIDEZZA (PARAMETRO CARATTERISTICO DELLA MOLLA)

LA MOLLA VIENE CONSIDERATA CON CARATTERISTICHE LINEARI →

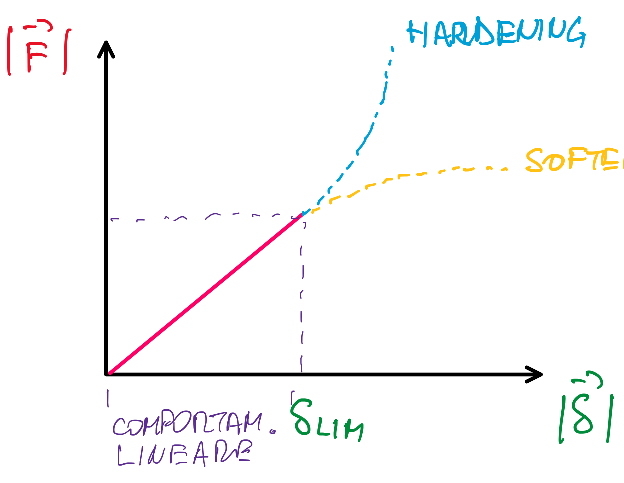
→ LEGGE DI HOOKE





$$\vec{\delta} = \Delta\vec{x}_2 - \Delta\vec{x}_1$$

NELLA REALTÀ LE MOLLE SONO LINEARI SOLO IN UN CERTO INTERVALLO DI DEFORMAZIONE



δ_{lim} : DEFORMAZIONE LIMITE (SOGLIA DI LINEARITÀ)

- LAVORO DI DEFORMAZIONE DI UNA MOLLA → ENERGIA POTENZIALE DELLA MOLLA

$$L_{def} = \int_0^\delta \vec{F}_e \times d\eta = \int_0^\delta -k\eta \, d\eta = -\frac{1}{2}k\delta^2 \rightarrow V_e = -L_{def} = \frac{1}{2}k\delta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

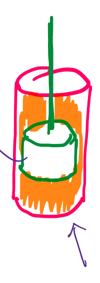
FORZE GRAVITAZIONALI

$$L_g = \int_0^h m\vec{g} \times d\vec{y} = -mgh \qquad \downarrow \vec{g} \quad \uparrow d\vec{y} \qquad \longrightarrow \qquad V_g = -L_g = mgh$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

FORZE DISSIPATIVE DI TIPO VISCOSO

- IN GENERALE GLI EFFETTI DISSIPATIVI SONO NON-LINEARI
  ↳ CASO PARTICOLARE : DISSIPATORE VISCOSO
  - ESEMPIO TIPICO : AMMORTIZZATORE



IL FLUIDO SI PUÒ MUOVERE TRA LE DUE CAMERE SEPARATE DALLO STANTUFFO

PER $\dot{\delta}$ VALE QUANTO GIÀ DETTO PER GLI SPOSTAMENTI DELLA MOLLA NEL CASO CHE LE DUE ESTREMITÀ SIANO ENTRAMBE MOBILI

$$\vec{F}_d = -r\dot{\vec{\delta}}$$

← VELOCITÀ CON CUI AVVIENE LO SPOSTAMENTO (RELATIVITÀ)

FORZA DISSIPATIVA O SMORZANTE

COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO VISCOSO

COMPONENTE LAGRANGIANA DELLO SMORZATORE VISCOSO

$$Q_{d_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial q_k}$$

→ DIPENDENZA DI δ DALLE COORDINATE LIBERE

$$\delta = \delta(q_k) \rightarrow \dot{\delta} = \sum_k \frac{\partial \delta}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \delta}{\partial q_k}$$

(VEDI DIMOSTRAZIONE EQ. LAGRANGE)

$$Q_{d_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial q_k} = -r\dot{\delta}\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}r\dot{\delta}^2\right) \qquad D = \frac{1}{2}r\dot{\delta}^2$$

FUNZIONE DISSIPATIVA (PER SMORZAMENTO VISCOSO)

$$Q_{d_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}D$$

↳ POSSO "MODIFICARE" L'EQ. DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}D + Q_k$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k}$$

INTRODUZIONE DELLA DERIVATA DELLA FUNZIONE DISSIPATIVA NEL LATO SX DELL'EQ. DI LAGRANGE

TUTTE LE COMPONENTI LAGRANGIANE DELLE FORZE ESTERNE CHE LAVORANO

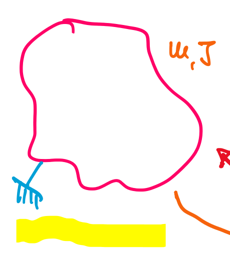
IL VENERDÌ PASSATE DALL'AULA 25.0.2 ALLA 2.0.1

Lunedì 22 novembre 2021

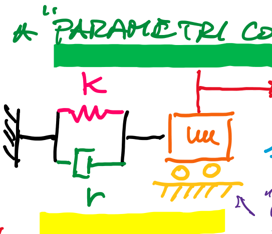
lunedì 22 novembre 2021 10:20

VIBRAZIONE MECCANICHE

- RINUNCIAMO A CONSIDERARE "TUTTO" IL MONDO COME COMPOSTO DA SOLI C.R.
- "CONCENTREREMO" I CORPI RIGIDI (RAPPRESENTAZIONE A "PARAMETRI CONCENTRATI")



SE CONSIDERIAMO COMPONENTI TRASLAZIONALI DELLO SPOSTAMENTO



SISTEMA A 1 GdL -> $x(t)$

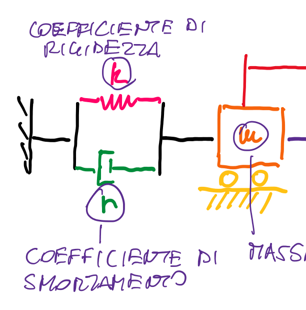
"CARRELLINO" PER NON CONSIDERARE ATTRITI SUL PIANO IN CUI AVVIENE LO SPOSTAMENTO

CORPO NON PIÙ "TOTALMENTE" RIGIDO -> DEFORMABILITA'
↳ CARATTERIZZO CON k

-> DISSIPAZIONI ENERGETICHE -> SMORZAMENTO
↳ CARATTERIZZO CON r

- VIBRAZIONI MECCANICHE A 1 GdL

↳ SCRIVERE L'EQUAZIONE DI MOTO
- -> EQUILIBRIO DINAMICO
- -> EQUAZIONE DI LAGRANGE

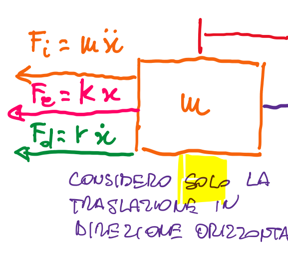


$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$

$F(t)$ -> $F(t)$: FORZA ESTERNA

SISTEMA A 1 GdL -> SPOSTAMENTO $x(t)$

- EQUILIBRIO DINAMICO



CONSIDERO SOLO LA TRASLAZIONE IN DIREZIONE ORIZZONTALE

EQUILIBRIO DINAMICO ALLA TRASLAZIONE IN DIREZIONE ORIZZONTALE -> $-F_i - F_d - F_e + F(t) = 0$

$$F_i + F_d + F_e = F(t)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\boxed{m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)}$$ EQUAZIONE DI MOTO DEL SISTEMA

- EQUAZIONE DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\delta^* L}{\delta^* q_k} = Q_k$$

SOSTITUISCO x

$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$V = \frac{1}{2} k x^2$

$D = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$

$L = \vec{F}(t) \times \vec{x}(t) = F(t)\, x$

$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x}$

$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial V}{\partial x} = kx$

$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = r\dot{x}$

$Q_k = \frac{\delta L}{\delta x} = F(t)$

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F(t)$$

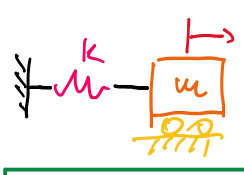
$$\boxed{m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)}$$ EQUAZIONE DI MOTO DEL SISTEMA

EQUAZIONE DIFFERENZIALE ALLE DERIVATE TOTALI
LINEARE
2° ORDINE
COEFFICIENTI COSTANTI
NON OMOGENEA (PERCHÈ È PRESENTE LA FORZANTE ESTERNA $F(t)$)

- VIBRAZIONI DEL SISTEMA A 1 GdL : MOTO LIBERO, SENZA SMORZAMENTO

↳ NON CONSIDERO F_d -> $F_d = 0 \Leftrightarrow r = 0$

↳ NON CI SONO FORZANTI ESTERNE $F(t) = 0$



$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE ALLE DERIVATE TOTALI
LINEARE / 2° ORDINE / INCOMPLETA / COEFFICIENTI COSTANTI / OMOGENEA

INTEGRALE GENERALE
$x(t) = X e^{\lambda t}$ $\quad \downarrow d/dt$
$\dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t}$ $\quad \downarrow d/dt$
$\ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t}$

$m\lambda^2 X e^{\lambda t} + kX e^{\lambda t} = 0 \;\rightarrow\; (m\lambda^2 + k) X \boxed{e^{\lambda t}} = 0$ $\quad X = 0$ SOLUZIONE BANALE
↳ IL SISTEMA NON SI MUOVE (NON VIBRA)

$e^{\lambda t}$ DIVERSA DA 0

SE $X \neq 0$ $\quad (m\lambda^2 + k) = 0$ -> EQUAZIONE ALGEBRICA DI 2° GRADO
↳ EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\lambda_{1e2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \boxed{\omega}$$

ω ← PULSAZIONE NATURALE DEL SISTEMA
i : UNITÀ IMMAGINARIA

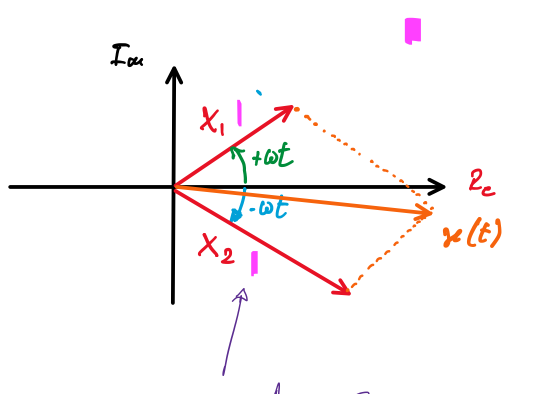
$[\omega] = rad/s$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad [f] = Hz$

$\lambda_{1e2} = \pm i\, 2\pi \boxed{f}$ ← FREQUENZA PROPRIA DEL SISTEMA

$$x(t) = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t} = \underbrace{X_1 e^{i\omega t}}_{} + \underbrace{X_2 e^{-i\omega t}}_{}$$

SONO DUE VETTORI ROTANTI NEL PIANO COMPLESSO



FORMULA DI EULERO
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$x(t) = X_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) +$
$+ X_2(\cos\omega t - i\sin\omega t) =$

$$= \underbrace{(X_1 + X_2)}_{A}\cos\omega t + i\underbrace{(X_1 - X_2)}_{B}\sin\omega t =$$

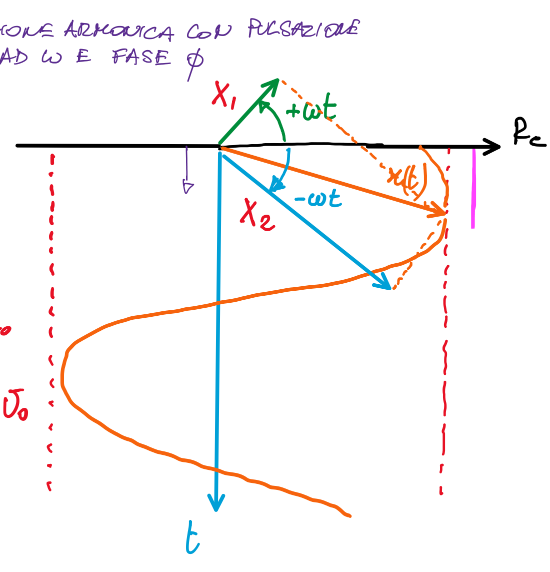
$X_1 = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$

$X_2 = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$

$\boxed{= A\cos\omega t + B\sin\omega t}$ ← COMBINAZIONE LINEARE DI DUE FUNZIONI ARMONICHE CON STESSA PULSAZIONE

$\boxed{= C\cos(\omega t + \phi)}$ ← FUNZIONE ARMONICA CON PULSAZIONE PARI AD ω E FASE ϕ

$C^2 = A^2 + B^2$ $\quad \tan\phi = -\frac{B}{A}$



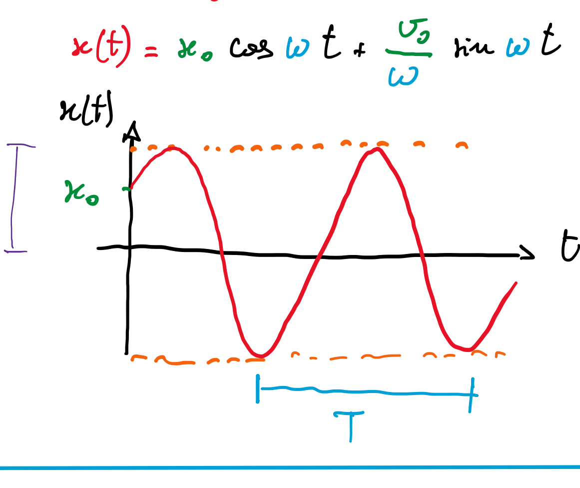
DETERMINARE A e B OPPURE C e ϕ
↳ IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI

$x(t)\big|_{t=0} = x_0$ $\quad A\cos 0 + B\sin 0 = x_0$

$\dot{x}(t)\big|_{t=0} = v_0$ $\quad -A\omega\sin 0 + B\omega\cos 0 = v_0$

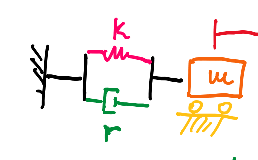
DALLA 1° EQ -> $A = x_0$
2° EQ -> $B = \frac{v_0}{\omega}$

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$ SOLUZIONE DEL MOTO LIBERO SENZA SMORZAMENTO



$\boxed{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$
PERIODO

- VIBRAZIONI SISTEMA 1 GdL : MOTO LIBERO CON SMORZAMENTO



$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

NON C'È LA FORZANTE

EQ DIFFERENZIALE ALLE DERIVATE TOTALI
2° ORDINE, COMPLETA, OMOGENEA, COEFFICIENTI COSTANTI,

$x(t) = X e^{\lambda t}$
d/dt
$\dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t}$
d/dt
$\ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t}$

$$m\lambda^2 X e^{\lambda t} + r\lambda X e^{\lambda t} + kX e^{\lambda t} = 0$$

$$(m\lambda^2 + r\lambda + k) X \boxed{e^{\lambda t}} = 0$$

$e^{\lambda t} \neq 0$

SOLUZIONE BANALE
$X = 0 \Rightarrow x(t) = 0$
IL SISTEMA NON SI MUOVE

SE $X \neq 0$ $\quad m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$ EQUAZIONE ALGEBRICA DI 2° GRADO
EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL SISTEMA

$$\lambda_{1e2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}_{\text{DISCRIMINANTE}}} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

Δ : DISCRIMINANTE

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

CONDIZIONI PER $\Delta = 0$ -> $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$

$\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow r_c = 2m\omega$

r_c : SMORZAMENTO CRITICO

SE : $r > r_c$ $\quad \Delta > 0$ $\quad h > 1$
$r < r_c$ $\quad \Delta < 0$ $\quad h < 1$
$r = r$ $\quad \Delta = 0$ $\quad h = 1$

$h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega}$ $\quad h$: FATTORE DI SMORZAMENTO (SMORZAMENTO ADIMENSIONALE)

---

1) $r < r_c$ $\quad \Delta < 0$ $\quad h < 1$

$$\lambda_{1e2} = -\underbrace{\boxed{\frac{r}{2m}}}_{\alpha} \pm i\sqrt{\underbrace{\boxed{\frac{k}{m}}}_{\omega^2} - \underbrace{\boxed{\left(\frac{r}{2m}\right)^2}}_{\alpha^2}} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_d$$

$\omega_d = \omega\sqrt{1 - h^2}$
↑ PULSAZIONE DEL SISTEMA SMORZATO
$\omega_d < \omega$

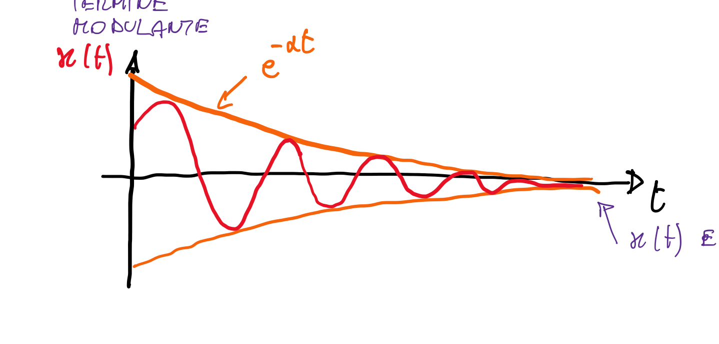
$$x(t) = X_1 e^{(-\alpha + i\omega_d)t} + X_2 e^{(-\alpha - i\omega_d)t} =$$

$$= e^{-\alpha t}\left(X_1 e^{i\omega_d t} + X_2 e^{-i\omega_d t}\right) =$$ APPLICO LA FORMULA DI EULERO

$$= \boxed{e^{-\alpha t}}\boxed{(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)}$$

$e^{-\alpha t}$: TERMINE MODULANTE
$(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)$: FUNZIONI ARMONICHE

A e B -> DETERMINARE CON LE CONDIZIONI INIZIALI $\quad x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$



$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

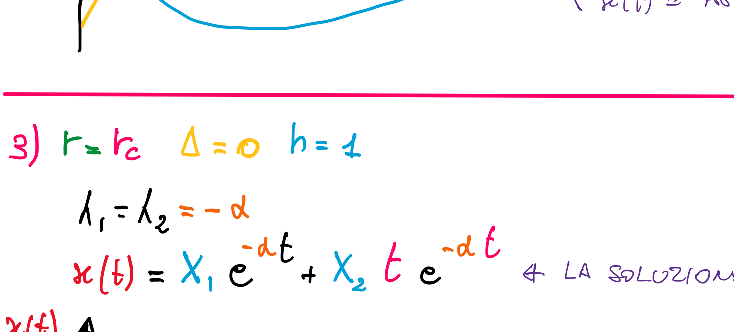
$x(t)$ E' ASINTOTICAMENTE NULLA

---

2) $r > r_c$ $\quad \Delta > 0$ $\quad h > 1$

$\lambda_{1e2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}$ < λ_1, λ_2 $\quad \lambda_{1e2}$ SONO REALI $\quad \lambda_1 e \lambda_2 < 0$

$x(t) = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t}$ ⊛



$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

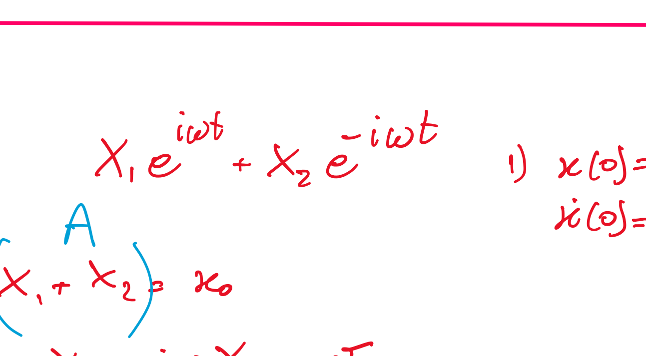
$x(t)$ E' ASINTOTICAMENTE NULLA

---

3) $r = r_c$ $\quad \Delta = 0$ $\quad h = 1$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$

$x(t) = X_1 e^{-\alpha t} + X_2\, t\, e^{-\alpha t}$ ← LA SOLUZIONE VA A ZERO "PIÙ VELOCEMENTE" DI ⊛



$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

$x(t)$ E' ASINTOTICAMENTE NULLA

$X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t}$ $\quad$ 1) $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$

$\overbrace{(X_1 + X_2)}^{A} = x_0$

$i\omega X_1 - i\omega X_2 = v_0$

$i\omega(X_1 - X_2) = v_0$

$\underbrace{i(X_1 - X_2)}_{B} = \frac{v_0}{\omega}$

Lunedì 29 novembre 2021

lunedì 29 novembre 2021 10:26

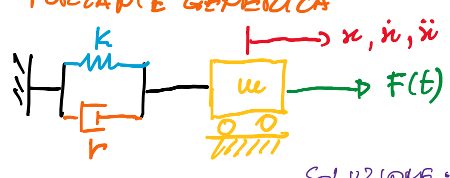
SISTEMI VIBRANTI AD 1 G.d.L. CON FORZAMENTO

↳ SISTEMI CON FORZANTE COSTANTE

↳ SISTEMI CON FORZANTE ARMONICA $\begin{cases} F_0 \cos \Omega t \\ Re(F_0 e^{i\Omega t}) \end{cases}$ → RISONANZA, RISPOSTA IN FREQUENZA

↳ SISTEMI CON FORZANTI PERIODICHE

FORZANTE GENERICA



EQ DI MOTO DEL SISTEMA

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$ ← FORZANTE (FUNZIONE DEL TEMPO) SISTEMA LINEARE

EQ DIFFERENZIALE ...... NON OMOGENEA

SOLUZIONE: $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

EQUAZIONE LINEARE → VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

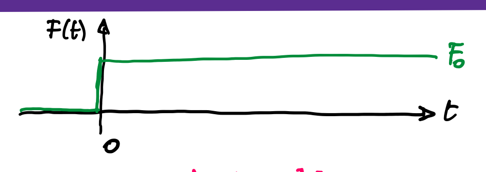
$x_g(t)$: INTEGRALE GENERALE, SOLUZIONE DELL' EQ. MOTO OMOGENEA; $\lim_{t\to\infty} x_g(t) = 0$

$x_p(t)$: INTEGRALE PARTICOLARE: DIPENDE DAL TIPO DI FORZANTE

- IN TRANSITORIO ("t" PICCOLO, SONO "VICINO" A $t=0$): LA SOLUZIONE $x(t)$ É CARATTERIZZATA DAL CONTRIBUTO SIA DELL' INTEGRALE GENERALE $x_g(t)$ SIA DALL' INTEGRALE PARTICOLARE $x_p(t)$
- A REGIME ("t" GRANDE, $t\to\infty$): $\lim_{t\to\infty} x_g(t) = 0 \to \lim_{t\to\infty} x(t) = x_p(t)$: L'INTEGRALE PARTICOLARE DIVENTA LA SOLUZIONE A REGIME

FORZANTE COSTANTE

↳ FORZANTE "A GRADINO"



TEORIA DELLE EQ. DIFFERENZIALI: $x_p(t) = \text{costante} = X_0$

d/dt: $\dot{x}_p(t) = 0$

d/dt: $\ddot{x}_p(t) = 0$

SOSTITUISCO NELL' EQ. DI MOTO

$$m\cancel{\ddot{x}_p} + r\cancel{\dot{x}_p} + kx_p = F_0$$

$$kX_0 = F_0$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \delta_{st}$$

SPOSTAMENTO DOVUTO ALL' APPLICAZIONE "STATICA" DELLA FORZANTE

SOLUZIONE DELL' EQ. DI MOTO

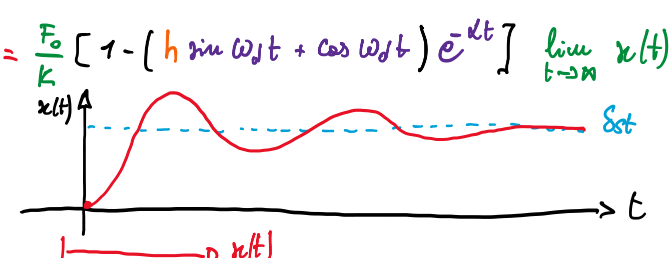
$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

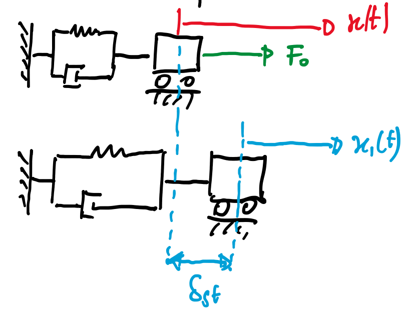
$$x(t) = e^{-\alpha t}[A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t] + \frac{F_0}{k}$$

PER DETERMINARE A e B: IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ → $0 = e^{-\alpha 0}[A\cos\omega_d 0 + B\sin\omega_d 0] + \frac{F_0}{k}$; $\dot{x}(0) = 0 = \ldots\ldots$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(h\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)e^{-\alpha t}\right] \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{F_0}{k} = \delta_{st}$$

CON h = SMORZAMENTO ADIMENSIONALE $h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2\omega m}$





ESEMPIO DI FORZANTE STATICA: PESO

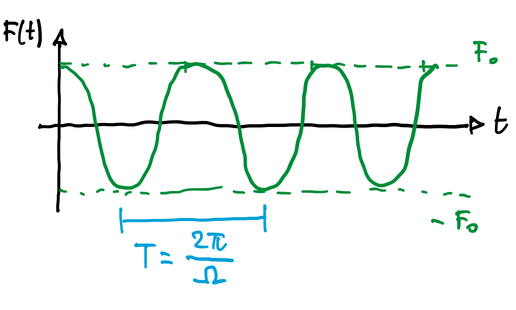
POSSO CONSIDERARE CHE "DOPO UN PO' DI TEMPO" IL SISTEMA RAGGIUNGE UNA NUOVA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO

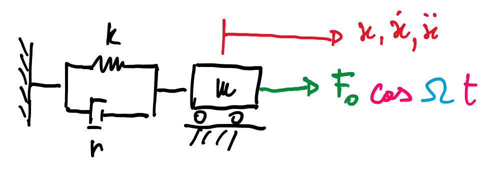
SE DOVESSI CONSIDERARE L' APPLICAZIONE DI UN' ALTRA FORZANTE POSSO PASSARE AD UN NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE IN $x = \delta_{st} \to x_1(t)$

FORZANTE ARMONICA

- $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

F_0 ↑ AMPIEZZA DELLA FORZANTE; Ω ↑ PULSAZIONE DELLA FORZANTE





TEORIA EQ. DIFFERENZIALI:

$$x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

X_0: AMPIEZZA INTEGRALE PARTICOLARE; $\cos$: STESSO TIPO DI FUNZIONE DELLA FORZANTE; ϕ: FASE

$$x_p(t) = X_0\cos(\Omega t + \phi)$$
$$\dot{x}_p(t) = -\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi)$$
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0\cos\Omega t$$

$$-m\Omega^2 X_0\cos(\Omega t+\phi) - r\Omega X_0 \sin(\Omega t+\phi) + kX_0\cos(\Omega t+\phi) = F_0\cos\Omega t$$

→ APPLICARE LE FORMULE TRIGONOMETRICHE PER $\cos(\Omega t+\phi)$ E $\sin(\Omega t+\phi)$

→ RACCOGLIERE I TERMINI IN $\cos\Omega t$ E IN $\sin\Omega t$

I $(-m\Omega^2\cos\phi - r\Omega\sin\phi + k\cos\phi)X_0\cancel{\cos\Omega t} = F_0\cancel{\cos\Omega t}$

II $(-m\Omega^2\sin\phi - r\Omega\cos\phi - k\sin\phi)X_0\sin\Omega t = 0$

DALLA II → $\tan\phi = -\frac{r\Omega}{k - m\Omega^2} \to \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{r\Omega}{k-m\Omega^2}\right)$ III

SOSTITUENDO ϕ NELLA I → $X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2 + (r\Omega)^2}}$ IV

FORMA ADIMENSIONALE: DIVIDO NUMERATORE E DENOMINATORE DI III E IV PER k

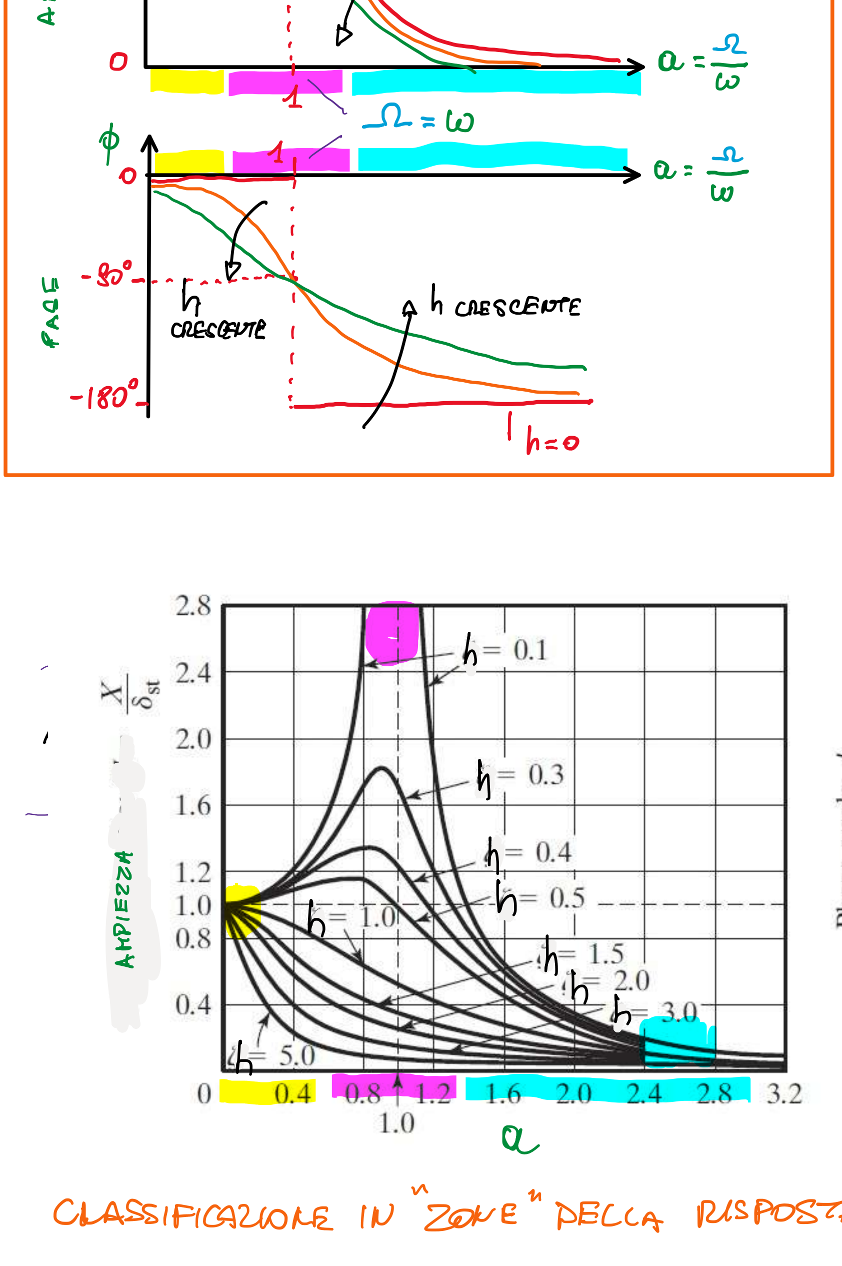
$$X_0 = \frac{\boxed{F_0/k}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\left(\frac{r}{r_c}\right)^2}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}}$$

$F_0/k = \delta_{st}$; ω: PULSAZIONE NATURALE; a: RAPPORTO TRA LE PULSAZIONI $a = \frac{\Omega}{\omega}$; h: FATTORE DI SMORZAMENTO $h = \frac{r}{r_c}$

$$\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}}$$

$$\tan\phi = -\frac{r\Omega/k}{\frac{k-m\Omega^2}{k}} = -\frac{2\frac{\Omega}{\omega}\frac{r}{r_c}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = -\frac{2ah}{1-a^2}$$

RAPPRESENTAZIONI ADIMENSIONALI DI AMPIEZZA E FASE DELLA RISPOSTA FORZATA $x_p = X_0\cos(\Omega t + \phi)$



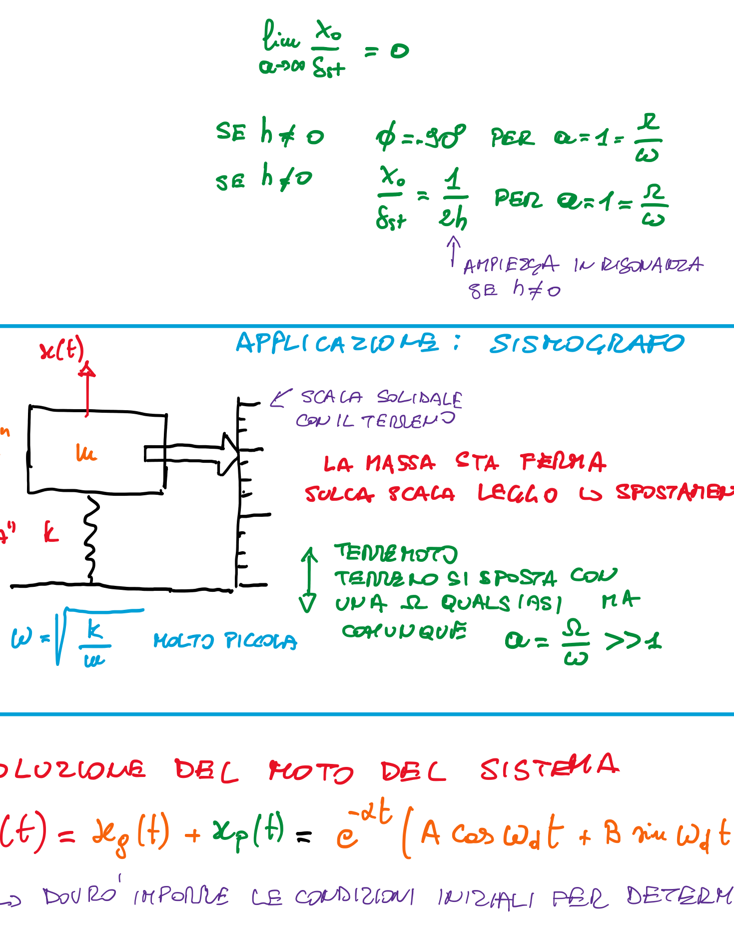
SE $h = 0 \to \frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-a^2}$ $\lim_{a\to1}\frac{X_0}{\delta_{st}} = \lim_{a\to1}\frac{1}{1-a^2} = \infty$

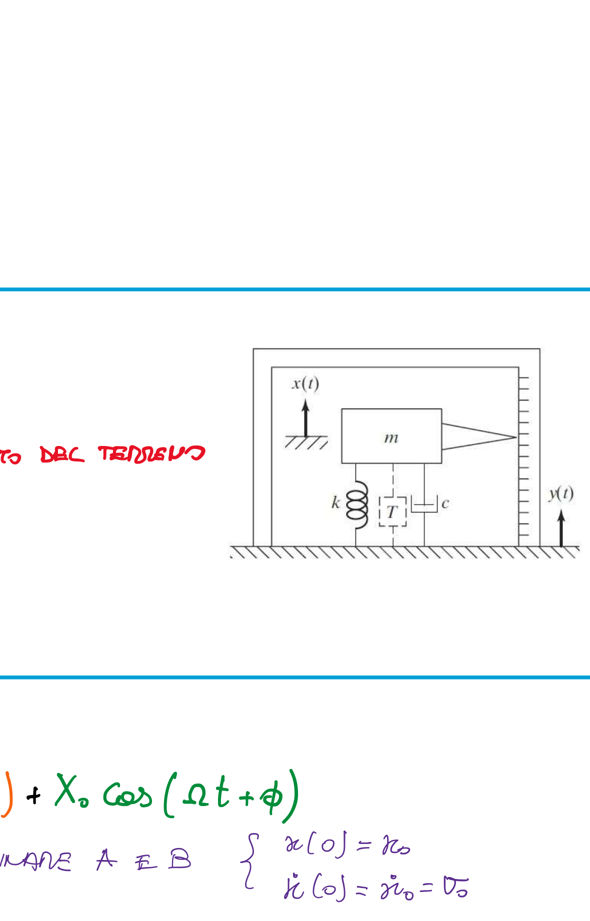
SI VERIFICA QUANDO $\Omega = \omega$ CONDIZIONE DI RISONANZA

ω: PULSAZIONE NATURALE $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

SE $h = 0$ E $\Omega = \omega$ → "SALTO DI FASE"

NEL LIBRO DA CUI É TRATTO IL DIAGRAMMA $x_p(t) = X_0\cos(\Omega t - \phi)$





CLASSIFICAZIONE IN "ZONE" DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

$a \ll 1 \Rightarrow \Omega \ll \omega$: ZONA QUASI STATICA

$a = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$: ZONA DI RISONANZA

$a \gg 1 \Rightarrow \Omega \gg \omega$: ZONA ELASTICA O SISMOGRAFICA O "SOSPESA"

IN TUTTI I CASI: $X_0 = \delta_{st}$ PER $\Omega = 0$

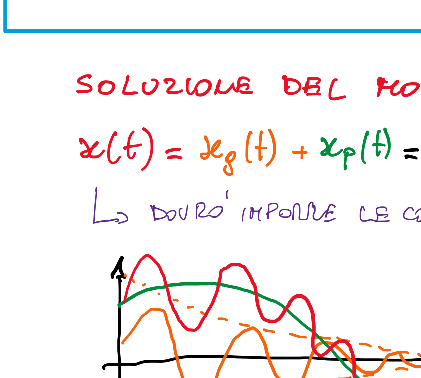
$$\lim_{a\to\infty}\frac{X_0}{\delta_{st}} = 0$$

SE $h \neq 0$ $\phi = -90°$ PER $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

SE $h \neq 0$ $\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{2h}$ PER $a = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$

↑ AMPIEZZA IN RISONANZA SE $h \neq 0$

APPLICAZIONE: SISMOGRAFO

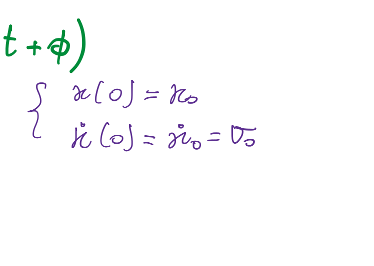


$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ MOLTO PICCOLA

LA MASSA STA FERMA

SULLA SCALA LEGGO LO SPOSTAMENTO DEL TERRENO

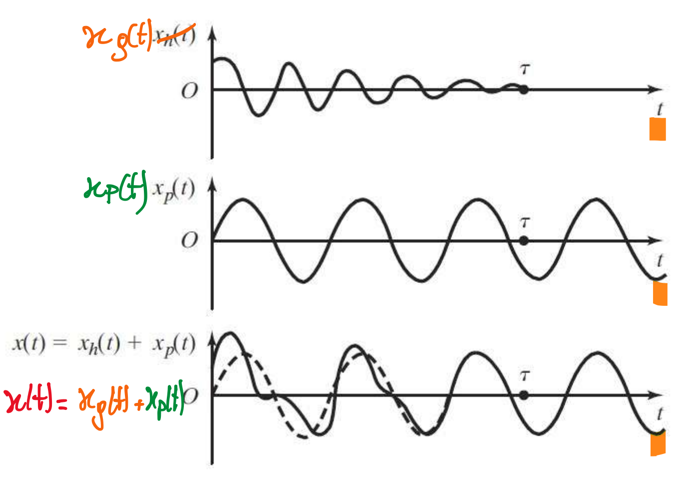
TERREMOTO: TERRENO SI SPOSTA CON UNA Ω QUALSIASI MA COMUNQUE $a = \frac{\Omega}{\omega} \gg 1$



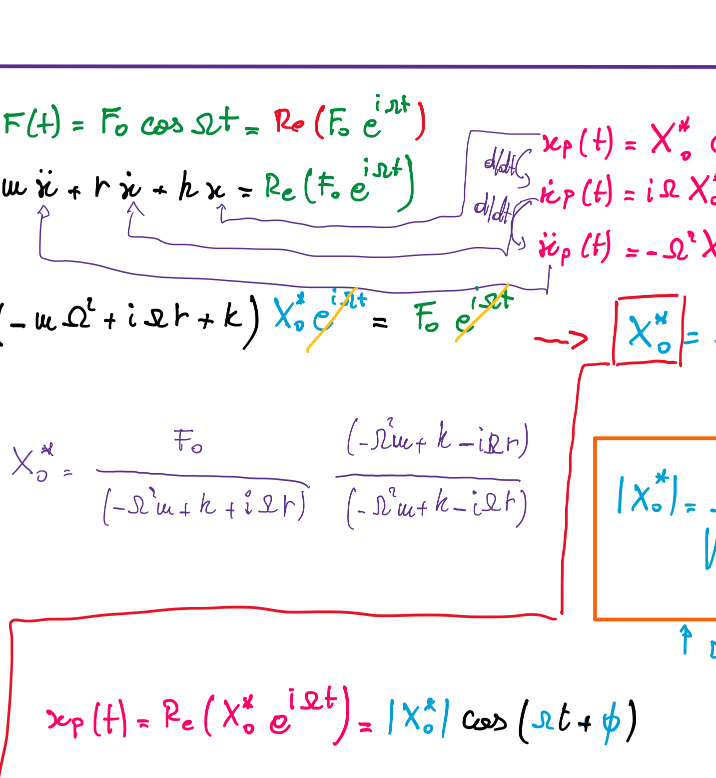
SOLUZIONE DEL MOTO DEL SISTEMA

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) + X_0\cos(\Omega t + \phi)$$

↳ DOVRÒ IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI PER DETERMINARE A E B $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \end{cases}$



RISPOSTA NEL TEMPO



- $F(t) = F_0\cos\Omega t = Re(F_0 e^{i\Omega t})$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = Re(F_0 e^{i\Omega t})$$

d/dt: $x_p(t) = X_0^* e^{i\Omega t}$
d/dt: $\dot{x}_p(t) = i\Omega X_0^* e^{i\Omega t}$
$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0^* e^{i\Omega t}$

TRASCURO, MA SOTTOINTENDO L' OPERATORE $Re(\ )$

$$(-m\Omega^2 + i\Omega r + k)X_0^*\cancel{e^{i\Omega t}} = F_0\cancel{e^{i\Omega t}} \rightarrow \boxed{X_0^*} = \frac{F_0}{(-\Omega^2 m + i\Omega r + k)}$$

DEVO FARE UN' OPERAZIONE DI RAZIONALIZZAZIONE E POI CALCOLARE AMPIEZZA E ARGOMENTO (FASE) DI X_0^*

$$X_0^* = \frac{F_0}{(-\Omega^2 m + k + i\Omega r)}\frac{(-\Omega^2 m + k - i\Omega r)}{(-\Omega^2 m + k - i\Omega r)}$$

$$|X_0^*| = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \qquad \tan\phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2}$$

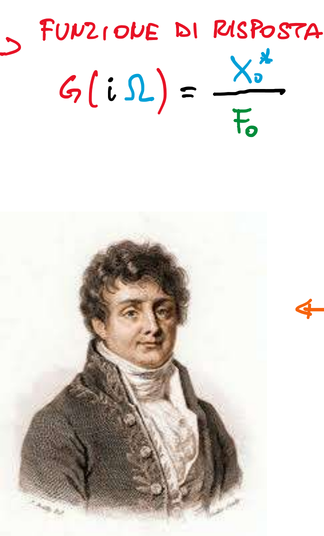
↑ DISEGNO MODULO E FASE IN FUNZIONE DI Ω

↳ DIAGRAMMI DI BODE

$$x_p(t) = Re(X_0^* e^{i\Omega t}) = |X_0^*|\cos(\Omega t + \phi)$$

FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

$$G(i\Omega) = \frac{X_0^*}{F_0}$$



↔ FORZANTI PERIODICHE

J.B. FOURIER

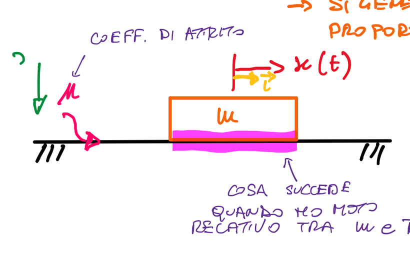
Lunedì 20 dicembre 2021

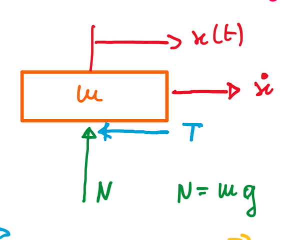
lunedì 20 dicembre 2021 10:06

SISTEMA LIBERO CON SMORZAMENTO PER ATTRITO RADENTE

→ ATTRITO RADENTE : INTERAZIONE MACROSCOPICA TRA SUPERFICI IN MOTO RELATIVO

→ SI GENERA UN'AZIONE TANGENZIALE ALLE SUPERFICI IN MOTO RELATIVO PROPORZIONALE ALLA REAZIONE NORMALE (LEGGI DI COULOMB SULL'ATTRITO)



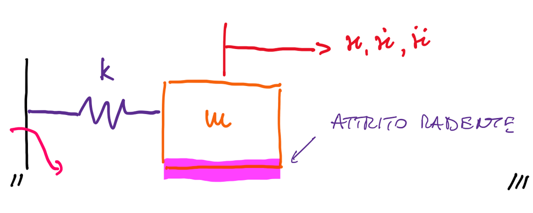


$N = mg$

PER LE LEGGI DI COULOMB :

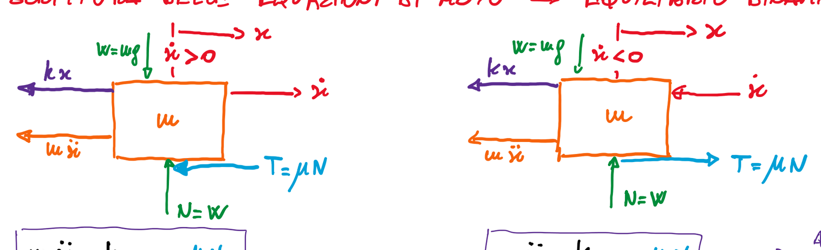
$T = \mu N$ ← MODULO DELLA REAZIONE NORMALE; ← COEFFICIENTE D'ATTRITO; MODULO DELLA REAZIONE TANGENZIALE

$\vec{T} = -\mathrm{sign}(\dot{x})\,\mu m g\,\vec{i}$



← SISTEMA LIBERO CON ATTRITO RADENTE (NON C'È SMORZATORE VISCOSO)

SCRITTURA DELLE EQUAZIONI DI MOTO → EQUILIBRIO DINAMICO ALLA TRASLAZIONE ORIZZONTALE

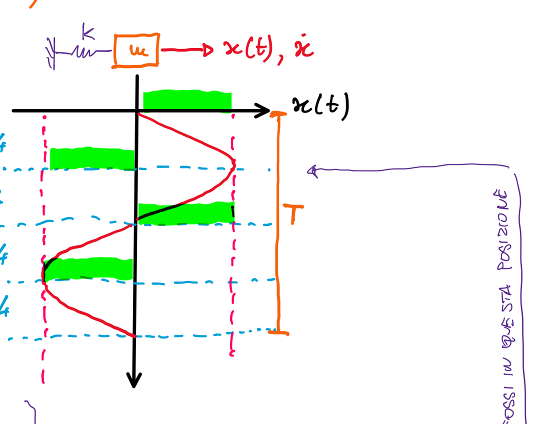


$\boxed{m\ddot{x} + kx = -\mu N}$ $\qquad$ $\boxed{m\ddot{x} + kx = \mu N}$ → A SECONDA DEL VERSO DI $\dot{x}(t)$ L'EQ. DI MOTO È DIFFERENTE

$m\ddot{x} + \mu m g\,\mathrm{sign}(\dot{x}) + kx = 0$ $\quad$ EQ. DIFF. NON LINEARE

→ LINEARIZZAZIONE A "TRATTI" STUDIANDO $\mathrm{sign}(\dot{x})$

		x	$\dot{x}$
①	$0 \le t < \frac{T}{4}$	+	+
②	$\frac{T}{4} \le t < \frac{T}{2}$	+	−
②	$\frac{T}{2} \le t < \frac{3T}{4}$	−	−
③	$\frac{3T}{4} \le t < T$	−	+



È COME SE FOSSI IN QUESTA POSIZIONE

EQUAZIONE VALIDA PER $\mathrm{sign}(\dot{x}) = 1$

① ③ $m\ddot{x} + kx = -\mu N$ ← FORZANTE COSTANTE NEL TEMPO

$x(t) = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t + \left(-\frac{\mu N}{k}\right)$

EQUAZIONE VALIDA PER $\mathrm{sign}(\dot{x}) = -1$

② $m\ddot{x} + kx = \mu N$

$x(t) = A_3 \cos\omega t + A_4 \sin\omega t + \left(\frac{\mu N}{k}\right)$

DEVO SCEGLIERE LA SOLUZIONE A SECONDA DI $\mathrm{sign}(\dot{x})$ E POI IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI

CONSIDERIAMO UN CASO IN CUI ESISTA IL MOTO, OVVERO AD ESEMPIO SE IMPONGO $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

↳ DEVO USARE LA SOLUZIONE ②

$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ $\quad A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}$ $\quad A_4 = 0$

$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega t + \frac{\mu N}{k}$

$\dot{x}(t) = -\omega\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\sin\omega t$

SOLUZIONE VALIDA PER $0 \le t < \frac{\pi}{\omega}$

QUANDO $t = \frac{\pi}{\omega}$ →

$x_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos \cancel{\omega}\frac{\pi}{\cancel{\omega}} + \frac{\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$

$\dot{x}_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -\omega\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\sin \cancel{\omega}\frac{\pi}{\cancel{\omega}} = 0$

DIVENTANO LE "NUOVE" CONDIZIONI INIZIALI DA IMPORRE NELL'EQ. ① QUANDO $\mathrm{sign}(\dot{x}) = 1$

↳ USO LA SOLUZIONE ①

$\begin{cases} x_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \\ \dot{x}_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \end{cases}$ $\quad A_1 = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right)$ $\quad A_2 = 0$

$x(t) = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right)\cos\omega t - \frac{\mu N}{k}$

$\dot{x}(t) = -\omega\left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right)\sin\omega t$

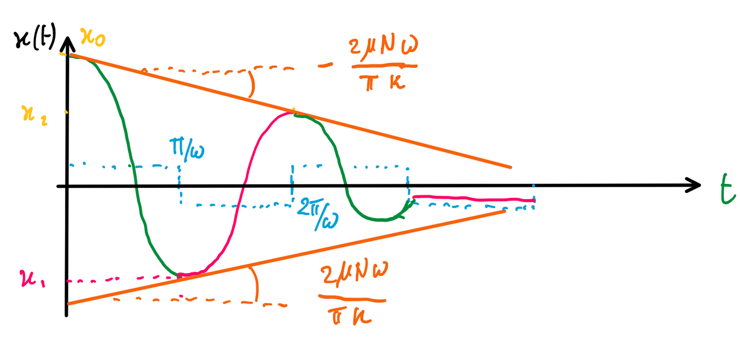
SOLUZIONE VALIDA PER $\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$

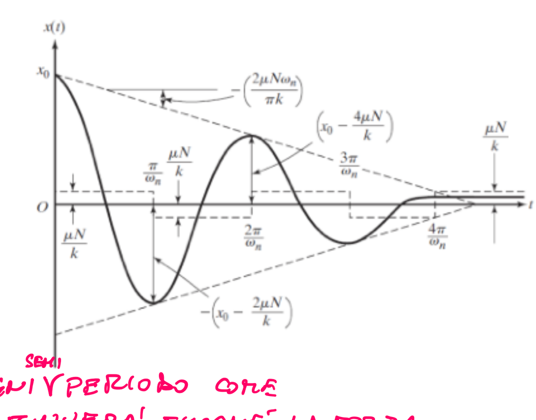
QUANDO $t = \frac{2\pi}{\omega}$ →

$x_2\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = x_0 - \frac{4\mu N}{k}$

$\dot{x}_2\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = 0$

"NUOVE" CONDIZIONI INIZIALI PER L'EQ. ② QUANDO $\mathrm{sign}(\dot{x}) = -1$





POSSO ESPRIMERE LA RIDUZIONE DI AMPIEZZA PER OGNI SEMI PERIODO COME $|x_1 - x_0| = \frac{2\mu N}{k}$ O COME $|x_2 - x_1| = \frac{2\mu N}{k}$. IL MOTO CONTINUERÀ FINCHÉ LA FORZA ELASTICA SARÀ MAGGIORE DELLA FORZA D'ATTRITO → FINO A CHE LA RIDUZIONE DELLO SPOSTAMENTO INIZIALE NON SARÀ MAGGIORE DELLO SPOSTAMENTO STATICO DOVUTO ALLA FORZA D'ATTRITO

$x_0 - \boxed{n}\,\frac{2\mu N}{k} \le \frac{\mu N}{k}$ $\qquad$ $n \ge \dfrac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}$

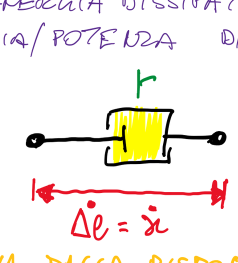
numero di semi periodi

SISTEMA FORZATO CON SMORZAMENTO DOVUTO AD ATTRITO RADENTE

↳ SMORZAMENTO EQUIVALENTE

↳ EQUIPAREREMO LA POTENZA PERSA / ENERGIA DISSIPATA DA UN FENOMENO DOVUTO A SMORZATO (NON VISCOSO) ALL'ENERGIA/POTENZA DISSIPATA DA UNO SMORZATORE VISCOSO IN UN PERIODO

COSA ACCADE IN UNO SMORZATORE VISCOSO



$\frac{d\boxed{W}}{dt} = \vec{F} \times \vec{v} = -rv^2 = -r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ (ENERGIA)

↳ DERIVA DALLA RISPOSTA DI UN SISTEMA LINEARE: $x(t) = X\sin(\omega t + \varphi)$ ↑ TRASCURO LA FASE

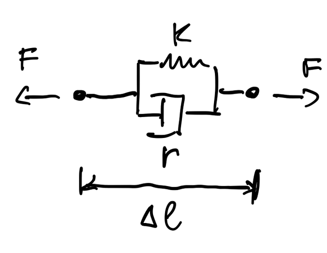
$w(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow w(-)$

$\Delta W = \int_0^T r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt =$

$= \int_0^{2\pi/\omega} r\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} r X^2 \cos^2\omega t\, d(\omega t) = \boxed{rX^2\omega\pi}$

ENERGIA DISSIPATA IN UN PERIODO DA UNO SMORZATORE VISCOSO SOTTOPOSTO A SPOSTAMENTO ARMONICO DEGLI ESTREMI

SE IN PARALLELO ALLO SMORZATORE C'È UNA MOLLA, NON CAMBIA NULLA

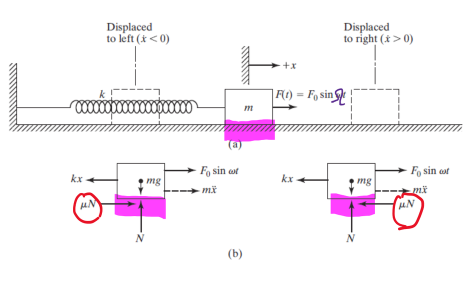


$F = -r\dot{x} - kx$ $\qquad$ $x(t) = X\sin\omega t$

$F = -kX\sin\omega t - r\omega\cos\omega t$

$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} \vec{F} \times \vec{v}\, dt = \dots = rX^2\omega\pi$

POTENZA DISSIPATA PER CICLO IN PRESENZA DI ATTRITO RADENTE



SISTEMA FORZATO CON FORZANTE

$F(t) = F_0 \sin\Omega t$

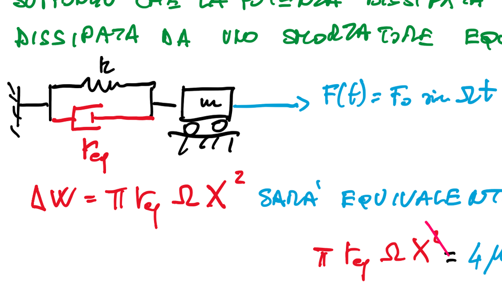
$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F_0 \sin\Omega t$ ← NON LINEARE

↖ POTENZA DISSIPATA PER ATTRITO IN UN CICLO

$\Delta W = 4\mu N X$

SOLUZIONE DEL MOTO FORZATO → INTEGRALE PARTICOLARE (A REGIME)

SUPPONGO CHE LA POTENZA DISSIPATA PER ATTRITO VISCOSO SIA LA STESSA (PER CICLO) DISSIPATA DA UNO SMORZATORE EQUIVALENTE



$\Delta W = \pi r_{eq} \Omega X^2$ SARÀ EQUIVALENTE A $\Delta W = 4\mu N X$

$\pi r_{eq}\Omega X^{\cancel{2}} = 4\mu N \cancel{X}$ $\qquad$ $\boxed{r_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \Omega X}}$

SMORZAMENTO EQUIVALENTE; DIPENDE DALL'AMPIEZZA DEL MOTO

$X = \dfrac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (r_{eq}\Omega)^2}} = \dfrac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_{eq}\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}$

$\xi_{eq} = \frac{r_{eq}}{r_{cr}} = \frac{4\mu N}{\pi \Omega X}\frac{1}{2m\omega} = \frac{2\mu N}{\pi m \omega \Omega X}$

$X = \dfrac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi k X}\right)^2}}$ → $X = \frac{F_0}{k}\left[\dfrac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2}\right]^{1/2}$

VERIFICARE CHE IL NUMERATORE SIA POSITIVO

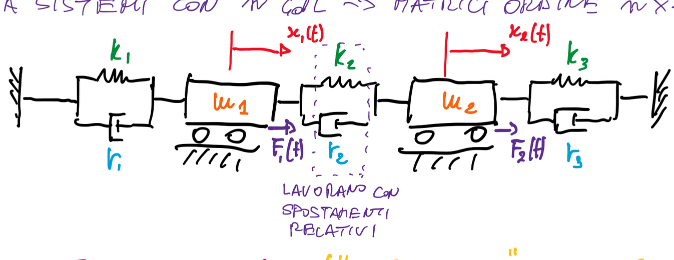
$1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2 > 0$ $\qquad$ $\frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi}$

L'EQUIVALENZA DI DISSIPAZIONE DI POTENZA VALE SOLO SE F_0 È MAGGIORE DI $4/\pi$ DELLA FORZA D'ATTRITO μN

$\varphi = \arctan\left(\frac{r_{eq}\Omega}{k - m\Omega^2}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{4\mu N}{\pi k X}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}\right)$

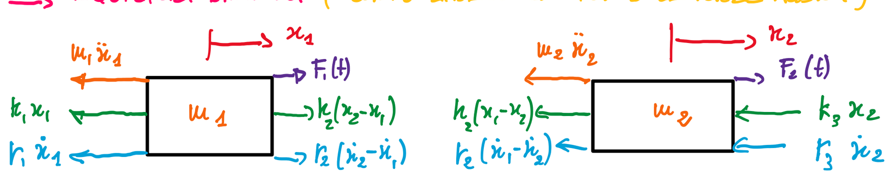
• SISTEMI VIBRANTI A 2-n GdL

UTILIZZEREMO UN APPROCCIO MATRICIALE, LO MOSTREREMO PER UN SIST. A 2 GdL - PER RAGIONI PRATICHE - (OTTERREMO MATRICI 2×2), POTREMO ESTENDERE IL METODO A SISTEMI CON n GdL → MATRICI ORDINE n×n



SCRITTURA EQ. DI MOTO → EQUILIBRI DINAMICI; EQ. DI LAGRANGE

→ EQUILIBRI DINAMICI ("CORPO LIBERO" CON TUTTE LE FORZE AGENTI) → EQ TRASLAZIONE DIREZIONE ORIZZONTALE → PER OGNI MASSA



$\boxtimes \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (r_1 + r_2)\dot{x}_1 - r_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - r_2\dot{x}_1 + (r_2 + r_3)\dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2(t) \end{cases}$

SISTEMA DI EQ DIFFERENZIALI → EQ DI MOTO DEL SISTEMA → EQ ACCOPPIATE

DA $\boxtimes$ POSSO CALCOLARE :

1) FREQUENZE PROPRIE (NATURALI) DEL SISTEMA → SISTEMA OMOGENEO NON SMORZATO

2) MODI DI VIBRARE → SISTEMA OMOGENEO NON SMORZATO

→ APPROCCIO MATRICIALE

$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ MATRICE DI MASSA $\qquad$ $[R] = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + r_3 \end{bmatrix}$ MATRICE DI SMORZAMENTO

$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$ MATRICE DI RIGIDEZZA $\qquad$ $\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$ VETTORE DELLE FORZANTI

$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$

LA $\boxtimes$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME

$[M]\ddot{\vec{x}} + [R]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{F}$

FORMALMENTE IL SISTEMA DELLE EQ DI MOTO È UGUALE ALL'EQ DI MOTO DEL SISTEMA A 1 GdL.
IN NOTAZIONE MATRICIALE HO MATRICI DI COEFFICIENTI CHE SONO 2×2 | VETTORI 2×1
→ POSSO ESTENDERE A n×n | → n×1

OSSERVIAMO CHE LE MATRICI [M], [R] e [K] SONO SIMMETRICHE

$[M] = [M]^T \qquad [R] = [R]^T \qquad [K] = [K]^T$

1) CALCOLO DELLE FREQUENZE PROPRIE

$[M]\ddot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = 0$ → ① $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ SIST. EQ DIFF. OMOGENEE

IPOTIZZIAMO PER IL SISTEMA ① UNA SOLUZIONE ARMONICA

$x_1(t) = X_1\cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad$ $\ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1\cos(\omega t + \varphi)$

$x_2(t) = X_2\cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad$ $\ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2\cos(\omega t + \varphi)$

$\begin{cases} \left(\left(-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\right)X_1 - k_2 X_2\right)\cancel{\cos(\omega t + \varphi)} = 0 \\ \left(-k_2 X_1 + \left(-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\right)X_2\right)\cancel{\cos(\omega t + \varphi)} = 0 \end{cases}$

$X_1 \ne 0$, $X_2 \ne 0$ ALTRIMENTI HO SOLUZIONE BANALE → IL SISTEMA NON SI MUOVE

$⊙ \begin{cases} ① \left(-m_1\omega + (k_1 + k_2)\right)X_1 - k_2 X_2 = 0 \\ ② -k_2 X_1 + \left(-m_2\omega + (k_2 + k_3)\right)X_2 = 0 \end{cases}$

• SISTEMA ALGEBRICO OMOGENEO IN X_1 E X_2
• PERCHÉ POSSA AVERE UNA SOLUZIONE NON BANALE BISOGNA IMPORRE CHE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI SIA NULLO →
→ LE EQUAZIONI DELLA ⊙ NON SONO PIÙ LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\det\begin{bmatrix} -m_1\omega + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = 0$

$(m_1 m_2)\omega^4 - \left((k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\right)\omega^2 + \left((k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\right) = 0$

EQUAZIONE CARATTERISTICA → ORDINE 2n IN ω → NEL NOSTRO CASO n = 2 → 4° ORDINE IN ω (BIQUADRATICA)

$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right) \mp \left(\left(\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right)^2 - 4\left(\frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2}\right)\right)^{1/2}$

↳ ASSOCIATI AD ω_1 E ω_2 SONO I RAPPORTI TRA X_1 E X_2 → IL SISTEMA ⊙ NON HA EQ. LINEARMENTE INDIPENDENTI PER CUI POSSO SOLO DETERMINARE I RAPPORTI TRA LE AMPIEZZE DI VIBRAZIONE

$X_i^{(k)}$ ← INDICE RELATIVO ALLA PULSAZIONE UTILIZZATA (k); ↖ INDICE RELATIVO AL GRADO DI LIBERTÀ (i)

SE USO LA ① EQ DI ⊙

$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$ ← 1° MODO DI VIBRARE →

$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$ ← 2° MODO DI VIBRARE →

SE USO LA ② EQ DI ⊙

$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$

$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)}$

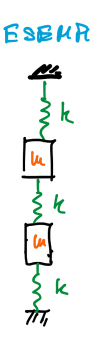
MODI DI VIBRARE

$\vec{x}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \eta_1 X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{Bmatrix}$ ← 1° MODO DI VIBRARE

$\vec{x}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \eta_2 X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{Bmatrix}$ ← 2° MODO DI VIBRARE

$X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \varphi_1, \varphi_2$ DETERMINO CON CONDIZIONI INIZIALI → $x_1(0), \dot{x}_1(0)$; $x_2(0), \dot{x}_2(0)$

ESEMPIO



$k_1 = k_2 = k_3 = k$

$m_1 = m_2 = m$

$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$ ⊛

$\begin{vmatrix} -m\omega + 2k & -k \\ -k & -m\omega + 2k \end{vmatrix} = 0$

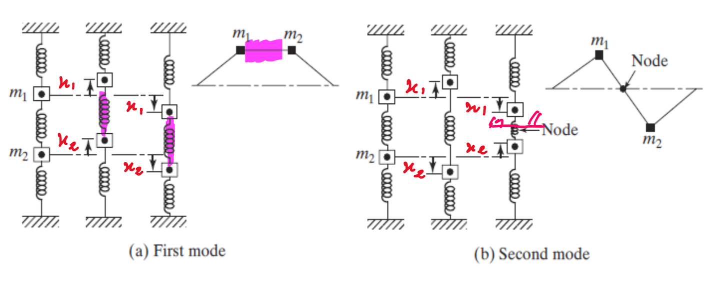
$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$ ← EQUAZIONE CARATTERISTICA

$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ $\qquad$ $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$ $\qquad$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$\eta_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1$

$\eta_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1$



(a) First mode $\qquad$ (b) Second mode

1° MODO DI VIBRARE $\quad \vec{x}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) \\ 1 \cdot X_1^{(1)}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) \end{Bmatrix}$

2° MODO DI VIBRARE $\quad \vec{x}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \varphi\right) \\ -1 \cdot X_1^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \varphi\right) \end{Bmatrix}$

$x_1(t) = X_1^{(1)}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) + X_1^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \varphi_2\right)$

$x_2(t) = X_1^{(1)}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) - X_1^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \varphi_2\right)$

PASSAGGIO IN COORDINATE PRINCIPALI

LE EQUAZIONI DI MOTO IN COORDINATE FISICHE $x_1(t)$ E $x_2(t)$ SONO ACCOPPIATE. PER LA TEORIA DEI SISTEMI LINEARI POSSO INTRODURRE UNA TRASFORMAZIONE DI "COORDINATE" CHE RENDE IL SISTEMA DISACCOPPIATO : LE NUOVE COORDINATE SI CHIAMANO COORDINATE "MODALI" O "PRINCIPALI"

CONSIDERO L'ESEMPIO PRECEDENTE E DEFINISCO DELLE NUOVE COORDINATE CHE :

$q_1(t) = X_1^{(1)}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right)$

$q_2(t) = X_1^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \varphi_2\right)$

→ $\begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{k}{m}q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{3k}{m}q_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1(t) = 1 \cdot q_1(t) + \eta_1\, q_2(t) \\ x_2(t) = 1 \cdot q_1(t) + \eta_2\, q_2(t) \end{cases}$ SE SOSTITUISCO QUESTE ESPRESSIONI NELLA ⊛ OTTENGO