MECCANICA APPLICATA

NOME:...
COGNOME:..
MATRICOLA:.......................................

Ai fini della valutazione, consegnare: il presente foglio compilato con nome, cognome, matricola e risultati numerici negli appositi spazi **e** i fogli protocollo con lo svolgimento dei calcoli.

Problema 1

Il sistema articolato rappresentato in figura è costituito da 2 corpi rigidi: l'asta uniforme AC (baricentro G_1, massa m_1, momento di inerzia baricentrale J_1, lunghezza a) e il corpo rettangolare (baricentro G_2, massa m_2, momento di inerzia baricentrale J_2), Da un punto di vista cinematico, ABC costituisce un glifo: l'asta è incernierata a terra in A e vincolata con un carrello (di dimensioni trascurabili) al corpo rettangolare. Una coppia esterna C_M (incognita) è applicata all'asta AC. Il sistema si muove nel piano verticale ed è soggetto alla forza di gravità. Nell'atto di moto raffigurato è nota la configurazione del sistema ($\alpha, \beta, |BC| = b$) e i valori di $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$.

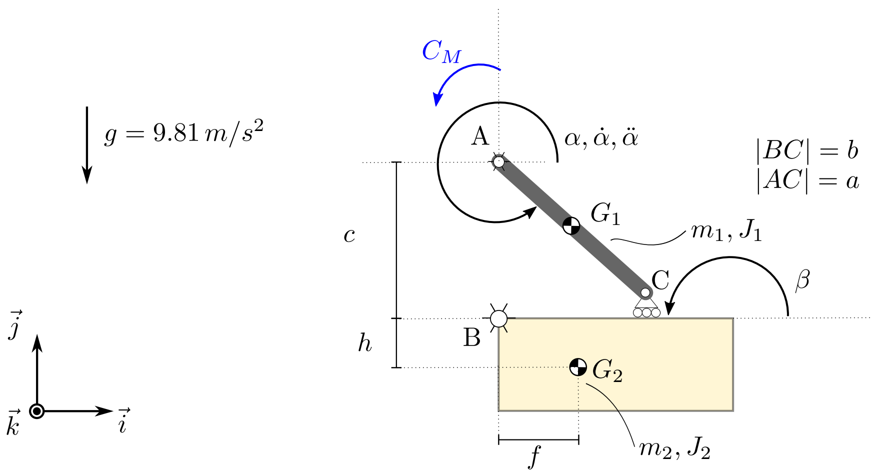


Figura 1:

Per l'atto di moto raffigurato, si chiede di:

1. calcolare la velocità e l'accelerazione angolare del corpo rettangolare, $\vec{\omega}_2$ e $\dot{\vec{\omega}}_2$;
2. calcolare la velocità e l'accelerazione di G_1 e G_2;
3. calcolare il valore di C_M, applicando il teorema dell'energia cinetica;
4. calcolare la reazione vincolare in B.

Dati

$a = 0.384\ m$, $b = 0.209\ m$, $c = 0.322\ m$, $f = 0.126\ m$, $h = 0.062\ m$, $\alpha = 303$ deg, $\beta = 180$ deg, $\dot{\alpha} = 2.0\ rad/s$, $\ddot{\alpha} = 0.3\ rad/s^2$ $J_1 = 0.10\, kgm^2$, $m_1 = 1.5$ kg, $J_2 = 0.20\, kgm^2$, $m_2 = 1.3$ kg,

Risposte

1. $\vec{\omega}_2 = \ldots\ldots \vec{k}$ rad/s; $\quad \dot{\vec{\omega}}_2 = \ldots\ldots \vec{k}\, rad/s^2$;
2. $\vec{v}_{G_1} = \ldots\ldots \vec{i} + \ldots\ldots \vec{j}$ m/s; $\quad \vec{a}_{G_1} = \ldots\ldots \vec{i} + \ldots\ldots \vec{j}\ m/s^2$
3. $\vec{v}_{G_2} = \ldots\ldots \vec{i} + \ldots\ldots \vec{j}$ m/s; $\quad \vec{a}_{G_2} = \ldots\ldots \vec{i} + \ldots\ldots \vec{j}\ m/s^2$
4. $C_M = \ldots\ldots Nm$
5. $\vec{R_B} = \ldots\ldots \vec{i} + \ldots\ldots \vec{j}$ N ;

Problema 2

Il sistema di corpi rigidi rappresentato in figura 2 si muove nel piano orizzontale ed è composto da 2 corpi rigidi: 1 disco omogeneo di massa m_1, momento di inerzia baricentrale J e raggio R; un corpo rigido rettangolare di massa m_2. I corpi sono soggetti ai seguenti vincoli cinematici: carrello orizzontale in E; contatto di puro rotolamento in B e A. Si utilizza la coordinata $x(t)$, traslazione del rettangolo, per descrivere il grado di libertà del sistema. Quando $x(t) = 0$ il sistema si trova in equilibrio statico con le molle indeformate. Il rettangolo, che trasla in orizzontale, è connesso a terra anche tramite uno smorzatore lineare di caratteristica r e tramite una molla di rigidezza k. Inoltre, un'altra molla di rigidezza k collega a terra il centro del disco D. Il sistema è soggetto alle seguenti forze esterne: una coppia $C(t) = C_0 \cos(\Omega t)$.

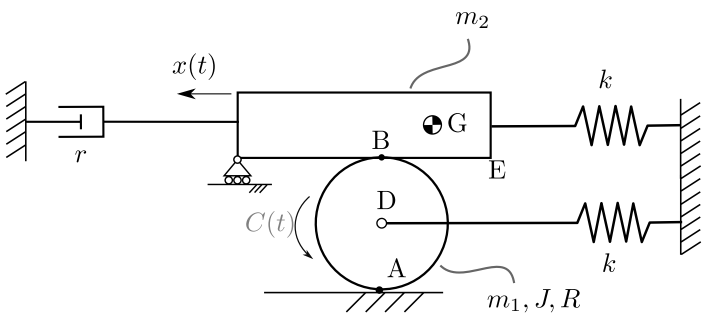


Figura 2:

Si chiede di calcolare:
1. l'equazione di moto del sistema, usando come coordinata libera $x(t)$.
2. la pulsazione propria del sistema ω_0 ed il coefficiente di smorzamento h
3. l'ampiezza di vibrazione a regime $|x_P|$, quando $\Omega = 2\omega_0$

Dati

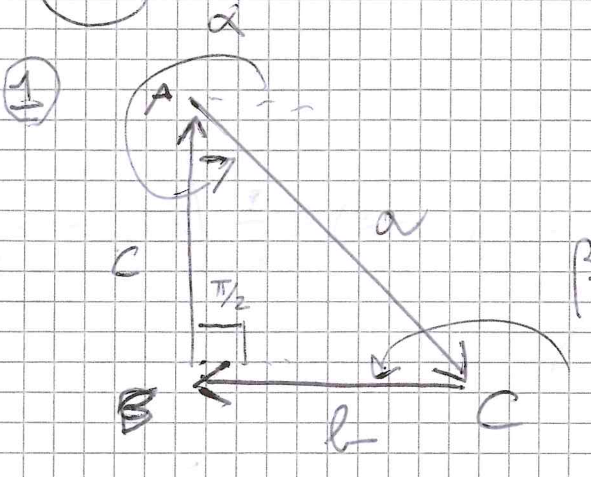
$m_1 = 8.9$ kg, $J = 7.0 kgm^2$, $m_2 = 1.7$ kg, $R = 1.6$ m, $r = 36\, Ns/m$, $k = 2489\, N/m$, $C_0 = 215.8\, Nm$,

Risposte

1. eq. di moto: $\ldots\ldots\ldots \ddot{x} + \ldots\ldots\ldots \dot{x} + \ldots\ldots\ldots x = \ldots\ldots\ldots\ldots \cos(\Omega t)$
2. $\omega_0 = \ldots\ldots\ldots\, rad/s$; $h = \ldots\ldots\ldots$
3. $|x_P| = \ldots\ldots\ldots\, m$

SOLUZIONE

1



α COORD LIBERA

a, c COSTANTI

b, β VARIABILI

$$(A-B)+(B-C)+(C-A)=0$$

$$\begin{cases} 0 + b\cos\beta + a\cos\alpha = 0 \\ c + b\sin\beta + a\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow \; d/dt$

$$\begin{cases} \dot b\cos\beta + b\dot\beta\sin\beta(-1) + a\dot\alpha(-\sin\alpha) = 0 \\ \cancel{c} + \dot b\sin\beta + b\dot\beta\cos\beta + a\dot\alpha\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot\beta, \dot b$$

con $\cos\beta = -1$
$\sin\beta = 0$

$\Downarrow \; d/dt$

$$\begin{cases} \ddot b\cos\beta - 2\dot b\dot\beta\sin\beta - b\ddot\beta\sin\beta - b\dot\beta^2\cos\beta - a\ddot\alpha\sin\alpha - a\dot\alpha^2\cos\alpha = 0 \\ \ddot b\sin\beta + 2\dot b\dot\beta\cos\beta + b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\beta + a\ddot\alpha\cos\alpha - a\dot\alpha^2\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \ddot\beta, \ddot b$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\beta}\,\vec{K}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\beta}\,\vec{K}$$

(2) $$\vec{V}_{G1} = \dot{\alpha}\,K \wedge (G_1 - A)$$ $$\text{con } (G_1 - A) = \frac{a}{2}\left(\cos\alpha\, i + \sin\alpha\, j\right)$$

$$\vec{a}_{G1} = \ddot{\alpha}\,K \wedge (G_1 - A) - \dot{\alpha}^2 (G_1 - A)$$

$$\vec{V}_{G2} = \dot{\beta}\,\vec{K} \wedge (G_2 - B)$$ $$\text{cs } (G_2 - B) = f\,\vec{i} - h\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_{G} = \ddot{\beta}\,\vec{K} \wedge (G_2 - B) - \dot{\beta}^2 (G_2 - B)$$

(3) $$W = \vec{C}_m \cdot \dot{\vec{\alpha}} + m_1 \vec{g} \cdot \vec{V}_{G1} + m_2 \vec{g} \cdot \vec{V}_{G2}$$

$$= C_m \dot{\alpha} - m_1 g V_{Gy} - m_2 g V_{G2y}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_{G1} \cdot \vec{V}_{G1} + \frac{1}{2} J_1 \dot{\vec{\alpha}} \cdot \dot{\vec{\alpha}} +$$

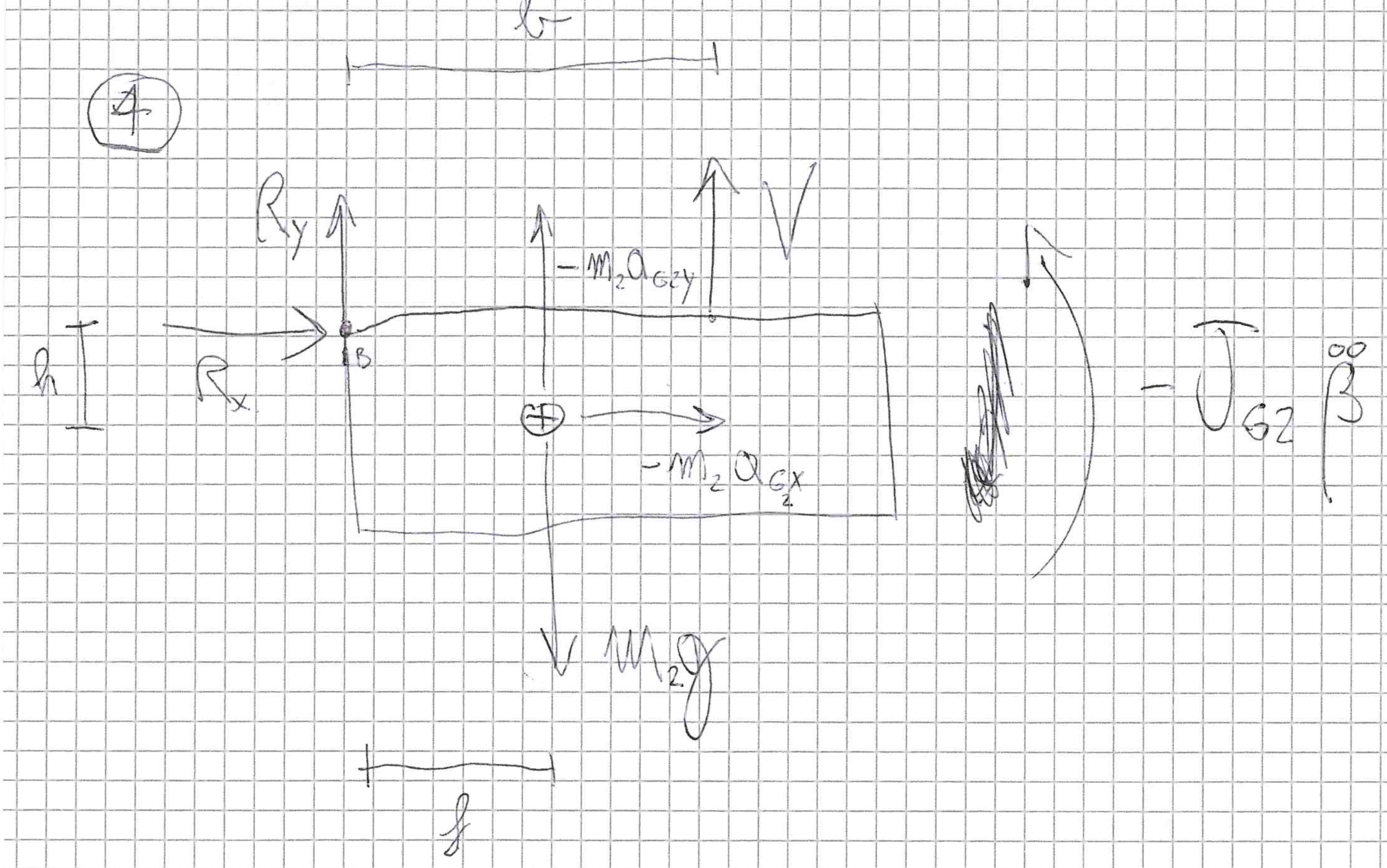
$$+ \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_{G2} \cdot \vec{V}_{G2} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = m_1 \left(V_{G1x}\, a_{G1x} + V_{G1y} \cdot a_{G1y} \right) + J_1 \dot{\alpha} \ddot{\alpha}$$

$$+ m_2 \left(a_{G2x} V_{G2x} + a_{G2y} V_{G2y} \right)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = W \longrightarrow C_m$$ UNICA INCOGNITA

④

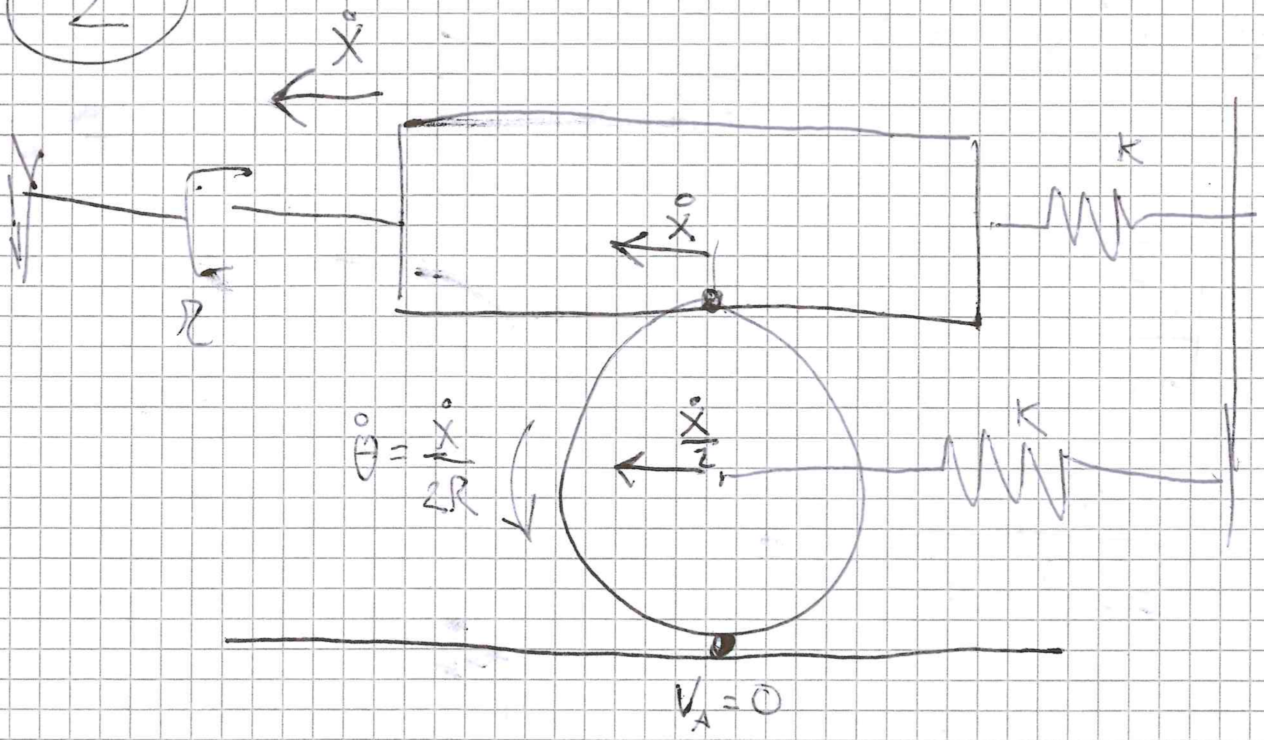


$$\begin{cases} \Sigma F_x & R_x = m_2 a_{G2x} \\ \Sigma F_y & R_y + V - m_2 a_{G2y} - m_2 g = 0 \\ \Sigma M_B & -J_2 \ddot{\beta} + V b - m_2 a_{G2y} f - m_2 g f - m_2 a_{G2x} h = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ RICAVO R_x, R_y, V

$$\vec{R}_B = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

2



$$E_c = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(m_2 + \frac{m_1}{4} + \frac{J}{4R^2}\right)}_{m^*} \dot{x}^2$$

$$D = \frac{1}{2} r \left(-\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} K (x)^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(K + \frac{K}{4}\right)}_{} x^2$$

$$K^* = \frac{5}{4} K$$

$$Q = \frac{\delta L}{\delta x} = \frac{C \frac{\delta x}{2R}}{\delta x} = \frac{C}{2R}$$

$$m^* \ddot{x} + K^* x + r \dot{x} = \left(\frac{C}{2R} \right) = F_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}}$$

$$h = \frac{r}{2 m^* \omega_0}$$

$$|X_p| = F_0 / K^* \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - a^2) + (2ha)^2}}$$

con $a = 2$