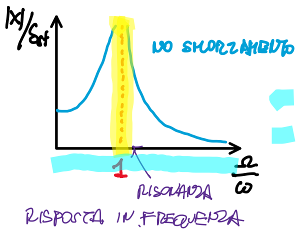
Lezione lunedì 30 novembre 2020

lunedì 30 novembre 2020 10:28

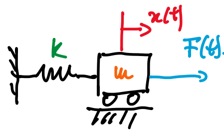
RISPOSTA DI SISTEMI A 1 GdL IN RISONANZA → RISPOSTA NEL TEMPO
SISTEMI NON LINEARI
→ PENDOLO → LINEARIZZAZIONE
→ SISTEMA LIBERO CON SMORZAMENTO DOVUTO AD ATTRITO RADENTE
→ SISTEMA FORZATO CON SMORZAMENTO DOVUTO AD ATTRITO RADENTE → SMORZAMENTO EQUIVALENTE

RISPOSTA SISTEMA A 1 G.d.L. IN CONDIZIONI DI RISONANZA SENZA SMORZAMENTO

→ RISPOSTA IN FREQUENZA → AMPIEZZA INT. PARTICOLARE È ∞ (QUESTO È UN COMPORTAMENTO "ASINTOTICO")
↳ CI DICE COSA SUCCEDE A REGIME



RISPOSTA IN FREQUENZA



$F(t) = F_0 \cos \Omega t$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \delta_{st} = \frac{F_0}{k}$

$x(t) = x_g + x_p$

$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t$

DETERMINO C_1 e C_2 CON CONDIZIONI INIZIALI

IN RISONANZA $\omega = \Omega \to k - m\Omega^2 = 0$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \qquad C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\Omega^2}\right) \cos \omega t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) \sin \omega t + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \boxed{\delta_{st} \left(\frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right)}$$

IN RISONANZA $\frac{\Omega}{\omega} = 1$

↳ STUDIO QUESTA PARTE DELLA RISPOSTA: IN RISONANZA $\frac{0}{0}$

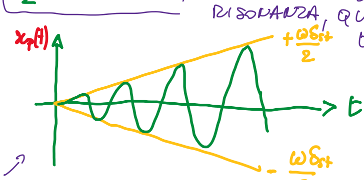
$$\lim_{\Omega \to \omega} \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \lim_{\Omega \to \omega} \frac{\frac{d}{d\Omega}(\cos \Omega t - \cos \omega t)}{\frac{d}{d\Omega}\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]} = \lim_{\Omega \to \omega} \frac{-t \sin \Omega t}{-2\frac{\Omega}{\omega^2}} = \frac{\omega t}{2} \sin \omega t$$

REGOLA DI DE L'HOPITAL

$$x(t) = \underbrace{x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t}_{} + \boxed{\frac{\omega t}{2} \delta_{st} \sin \omega t}$$

RISPOSTA MOTO LIBERO ANCHE SE NON HO MESSO SMORZAMENTO, HO UNA RISPOSTA NEL TEMPO FINITA

× RISPOSTA A REGIME IN RISONANZA, QUINDI PER $t \to \infty$



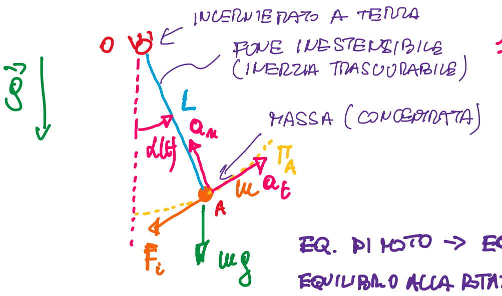
LA RISPOSTA DEL SISTEMA VA A ∞ MA CI METTE TEMPO INFINITO (PROPORZIONALE At) → AMPIEZZA IN RISONANZA CRESCE LINEARMENTE CON t
(POSSO ECCITARE IL SISTEMA IN RISONANZA PER UN "PO'" DI TEMPO PRIMA DI ARRIVARE AD AMPIEZZE PERICOLOSE

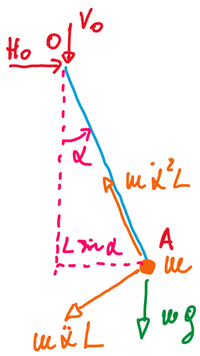
PENDOLO

GALILEO E IL PENDOLO

https://it.wikipedia.org/wiki/Cappella_Aulla?wprov=sfti1
https://www.treccani.it/enciclopedia/pendolo_(Enciclopedia-dei-ragazzi)/

1 G.d.L.





EQ. DI MOTO → EQUILIBRI DINAMICI
EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE IN O

$\sum M_O^* = 0$

* INDICA CHE USIAMO TUTTE LE FORZE (INERZIE COMPRESE)

$\cancel{m} \ddot{\alpha} L^{\cancel{2}} + \cancel{m} g \cancel{L} \sin \alpha = 0$

$L\ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0$ → EQ. DIFF. NON LINEARE IN α

SE CONSIDERO "PICCOLE OSCILLAZIONI" $\sin \alpha \simeq \alpha$ → LINEARIZZO L'EQ DI MOTO

$\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = 0$ ... NEL PENDOLO LINEARIZZATO

$L\ddot{\alpha} + g\alpha = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ ← PER PICCOLE OSCILLAZIONI. LA PULSAZIONE NON DIPENDE DALLA MASSA → DIPENDE DA g E DA L

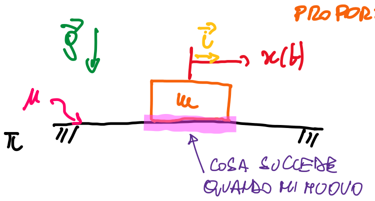
$\alpha(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

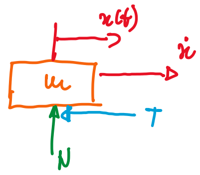
↳ SOLUZIONE ARMONICA

$T = \frac{\omega}{2\pi}$ ← È VERO CHE IL PERIODO È COSTANTE

SISTEMA LIBERO CON SMORZAMENTO PER ATTRITO RADENTE

→ ATTRITO RADENTE: INTERAZIONE MACROSCOPICA TRA SUPERFICI IN MOTO RELATIVO
→ SI GENERA UN'AZIONE TANGENZIALE ALLE SUPERFICI IN MOTO PROPORZIONALE ALLA REAZIONE NORMALE (LEGGI DI COULOMB SULL'ATTRITO)





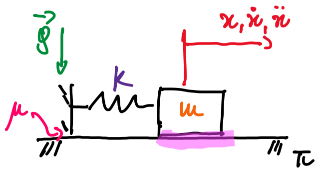
$N = mg$

PER LE LEGGI DI COULOMB:

$T = \mu N$ ← MODULO REAZIONE NORMALE

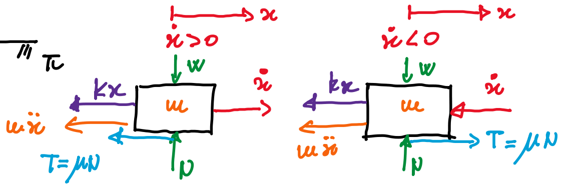
MODULO REAZIONE TANGENZIALE; COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO

$\vec{T} = -\mathrm{sign}(\dot{x})\,\mu mg\,\vec{i}$



$N = mg$

SISTEMA LIBERO CON ATTRITO RADENTE (NO SMORZATORE VISCOSO)



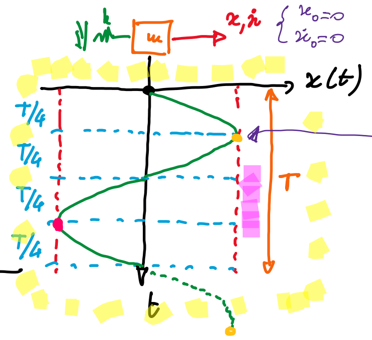
$m\ddot{x} + kx = -\mu N$ $\quad$ $m\ddot{x} + kx = \mu N$

A SECONDA DEL VERSO DI $\dot{x}(t)$ HO EQ DI MOTO CHE CAMBIA

$$m\ddot{x} + \mu mg\,\mathrm{sign}(\dot{x}) + kx = 0$$ EQ DIFF. NON LINEARE

LINEARIZZAZIONE A "TRATTI" STUDIANDO $\mathrm{sign}(\dot{x})$

		x	$\dot{x}$
①	$0 \le t < \frac{T}{4}$	+	+
②	$\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}$	+	−
	$\frac{T}{2} < t < \frac{3T}{4}$	−	−
③	$\frac{3T}{4} < t < T$	−	+



EQUAZIONE VALIDA QUANDO $\mathrm{sign}(\dot{x}) = 1$

① $m\ddot{x} + kx = -\mu N$ ← FORZANTE (COSTANTE NEL TEMPO)

$x(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t + \left(-\frac{\mu N}{k}\right)$

② $m\ddot{x} + kx = \mu N$ ← VALIDA PER $\mathrm{sign}(\dot{x}) = -1$

$x(t) = A_3\cos\omega t + A_4\sin\omega t + \left(\frac{\mu N}{k}\right)$

DEVO SCEGLIERE LA SOLUZIONE A SECONDA DI $\mathrm{sign}(\dot{x})$ E IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI

È COME SE FACESSI PARTIRE IL MOTO DA QUESTA POSIZIONE

CONSIDERIAMO UN CASO IN CUI ESISTE IL MOTO, AD ESEMPIO SE IMPONGO $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

↳ DEVO USARE LA SOLUZIONE ②

$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k} \\ A_4 = 0 \end{array}$

$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega t + \frac{\mu N}{k}$

$\dot{x}(t) = -\omega\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\sin\omega t$

SOLUZIONE VALIDA PER $0 \le t \le \frac{\pi}{\omega}$

QUANDO $t = \frac{\pi}{\omega}$

$x_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega\frac{\pi}{\omega} + \frac{\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$

$\dot{x}_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -\omega\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\sin\omega\frac{\pi}{\omega} = 0$

DIVENTANO LE NUOVE "CONDIZIONI INIZIALI" DA IMPORRE NELL'EQ ① QUANDO $\mathrm{sign}(\dot{x}) = 1$

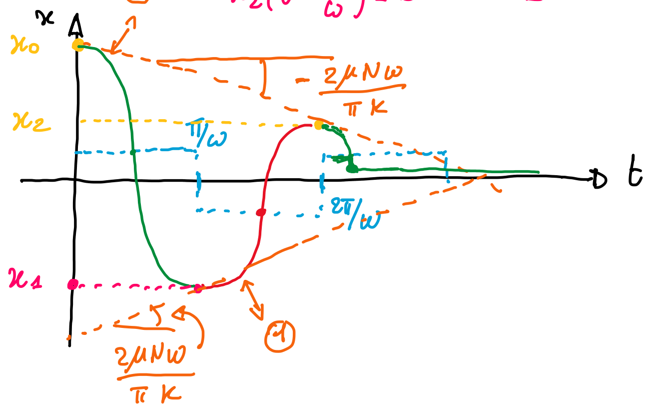
→ USO LA SOLUZIONE ①

$\begin{cases} x_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \\ \dot{x}_1\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow$ $A_1 = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right)$ $\quad$ $x(t) = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right)\cos\omega t - \frac{\mu N}{k}$ SOLUZIONE VALIDA PER

$\dot{x}_1(t=\frac{\pi}{\omega})=0$ $\quad x_2 = 0$ $\quad \dot{x}(t) = +\omega\left(-x_0+\frac{3\mu N}{k}\right)\sin\omega t \quad \frac{\pi}{\omega}\le t < \frac{2\pi}{\omega}$

$$x_2\left(t=\frac{2\pi}{\omega}\right) = x - \frac{4\mu N}{k}$$
$$\dot{x}_2\left(t=\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0$$

} NUOVE "CONDIZIONI INIZIALI" PER EQ. ② QUANDO $\mathrm{sign}(\dot{x}) = -1$



POSSO ESPRIMERE LA RIDUZIONE DI AMPIEZZA PER OGNI PERIODO COME $|x_1 - x_0|$ O $|x_2 - x_1| = \frac{2\mu N}{k}$
IL MOTO CONTINUERÀ FINCHÉ LA FORZA ELASTICA SARÀ MAGGIORE DELLA FORZA D'ATTRITO → FINO A CHE LA RIDUZIONE DELLO SPOSTAMENTO INIZIALE NON SARÀ MINORE DELLO SPOSTAMENTO STATICO DELLA FORZA D'ATTRITO

$$x_0 - n\frac{2\mu N}{k} \leqslant \frac{\mu N}{k} \qquad n \geqslant \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}$$

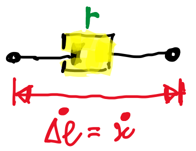
NUMERO DI SEMI PERIODI

SISTEMA FORZATO CON SMORZAMENTO DOVUTO AD ATTRITO RADENTE

↳ SMORZAMENTO EQUIVALENTE

↳ EQUIPAREREMO LA POTENZA PERSA/ENERGIA DISSIPATA DA UN FENOMENO DOVUTO A SMORZAMENTO (NON VISCOSO) ALL'ENERGIA DISSIPATA IN UN PERIODO DA UNO SMORZATORE VISCOSO

IN UNO SMORZATORE VISCOSO



ENERGIA

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}\times\vec{v} = -rv^2 = -r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad dW = -r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt \qquad \Delta W = \int \ldots\ldots$$

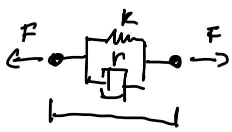
→ STO CONSIDERANDO SISTEMA LINEARE VIBRANTE $x(t) = X\sin(\omega t + \varphi)$

POSSO TRASCURARE LA FASE

$$\Delta W = \int_0^T r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt =$$
$$= \int_0^{2\pi/\omega} r\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} rX^2\omega\cos^2\omega t \; d(\omega t) = rX^2\omega\pi$$

ENERGIA DISSIPATA IN UN PERIODO DA SMORZATORE VISCOSO SOTTOPOSTO A MOTO ARMONICO

SE IN PARALLELO ALLO SMORZATORE C'È UNA MOLLA, NON CAMBIA NULLA



$$F = -r\dot{x} - kx \qquad x(t) = X\sin\omega t$$
$$F = -kX\sin\omega t - r\omega X\cos\omega t$$
$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} F v\, dt \to \ldots\ldots \to rX^2\omega\pi$$

IN PRESENZA DI ATTRITO RADENTE

AMPIEZZA DI VIBRAZIONE SE IL MOTO È ALIMENTATO DA UNA FORZANTE ESTERNA

$$\Delta W = 4X\mu N$$ ← FORZA D'ATTRITO

4 INTERVALLI IN CUI CONSIDERO LA FORZA D'ATTRITO