# Dimostrazioni

Matteo Gambaretto — 2.0

## 01 Limite: 1/n per n tende a infinito

Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

**Dimostrazione** $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n > 0 :$

Per formulazione di Archimede

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n > 0 : \frac{1}{n} < \varepsilon$

Scelgo $n = \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n = \frac{1}{\varepsilon} : \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n = \frac{1}{\varepsilon} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

## 02 Limite: sin(x)/x per x tende a 0

Dimostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Dimostrazione

Considero la circonferenza goniometrica

Considero il triangolo OAB

$\overline{OB} = \overline{OA} = 1$

$\overline{AB} = \sin(x)$

$\overline{OA} = \cos(x)$

Considero il triangolo OAC

$\overline{OC} = \frac{1}{\cos(x)}$

$\overline{AC} = \tan(x)$

Considero il settore circolare OAB

$\overline{OB} = 1$

$\overline{AB} = x$

Considero il triangolo OAB

$\overline{OB} = \overline{OA} = 1$

$\overline{AB} = \sin(x)$

Considero il triangolo OAC

$\overline{OC} = \frac{1}{\cos(x)}$

$\overline{AC} = \tan(x)$

Considero il settore circolare OAB

$\overline{OB} = 1$

$\overline{AB} = x$

$\sin(x) < x < \tan(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\sin(x)} < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$

$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

## 03 Derivata: sin(x) per cos(x)

Dimostrare che $\sin'(x) = \cos(x)$

Dimostrazione

$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$

$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}$

$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\cos(x)}{h}$

$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)\cos(x)}{h}$

$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\cos(x)$

$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \