MECCANICA APPLICATA

Ing. Fisica AA.2017-2018 prova del 16-02-2018 n. compito 001

NOME:..

COGNOME:..

MATRICOLA:.......................................

Ai fini della valutazione, consegnare: il presente foglio compilato con nome, cognome, matricola e risultati numerici negli appositi spazi **e** i fogli protocollo con lo svolgimento dei calcoli.

Problema 1

Il sistema articolato rappresentato in figura è costituito da tre corpi rigidi: l'asta AB (di inerzia trascurabile), il corpo rettangolare (baricentro G, massa m, momento di inerzia baricentrale J), e l'asta CD (di inerzia trascurabile). Da un punto di vista cinematico, ABCD costituisce un quadrilatero articolato. Una coppia esterna C_M (incognita) è applicata all'asta AB. Il sistema si muove nel piano verticale ed è soggetto alla forza di gravità. Nell'atto di moto raffigurato è nota la configurazione del sistema (α, β, γ) e i valori di $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$.

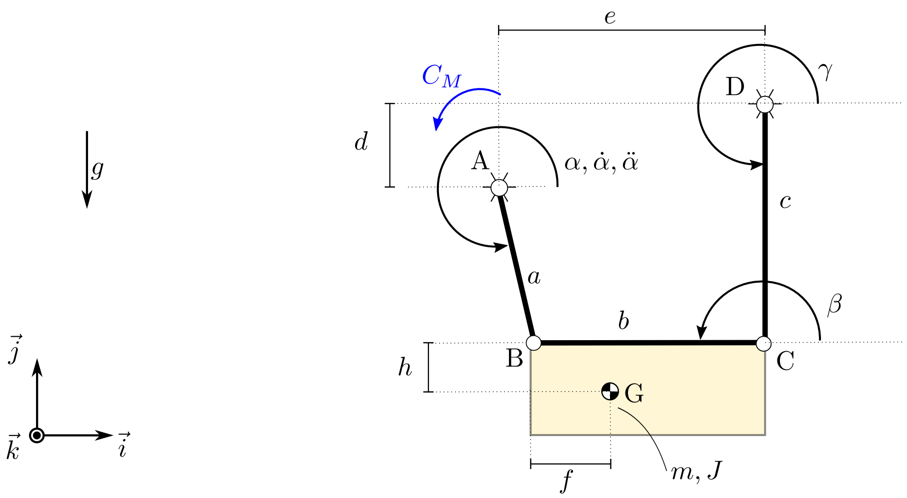


Figura 1:

Per l'atto di moto raffigurato, si chiede di:

1. calcolare la velocità e l'accelerazione angolare delle aste BC e CD;
2. calcolare la velocità e l'accelerazione di G;
3. calcolare il valore di C_M, applicando il teorema dell'energia cinetica;
4. calcolare la reazione vincolare in B.

Dati

$a = 0.231\ m$, $b = 0.322\ m$, $c = 0.379\ m$, $d = 0.166\ m$, $e = 0.411\ m$, $f = 0.250\ m$, $h = 0.140\ m$, $\alpha = 293$ deg, $\beta = 180$ deg, $\gamma = 270$ deg, $\dot{\alpha} = 2.0\ rad/s$, $\ddot{\alpha} = 0.3\ rad/s^2$ $J = 0.10\,kgm^2$, $m = 1.8$ kg,

Risposte

1. $\vec{\omega}_{BC} = \ldots\ldots\vec{k}$ rad/s; $\vec{\omega}_{CD} = \ldots\ldots\vec{k}$ rad/s;
2. $\vec{\dot{\omega}}_{BC} = \ldots\ldots\vec{k}\,rad/s^2$; $\vec{\dot{\omega}}_{CD} = \ldots\ldots\vec{k}\,rad/s^2$;
3. $\vec{v}_G = \ldots\ldots\vec{i} + \ldots\ldots\vec{j}$ m/s; $\vec{a}_G = \ldots\ldots\vec{i} + \ldots\ldots\vec{j}\ m/s^2$
4. $C_M = \ldots\ldots Nm$
5. $\vec{R_B} = \ldots\ldots\vec{i} + \ldots\ldots\vec{j}$ N ;

Problema 2

Il sistema di corpi rigidi rappresentato in figura 2 si muove nel piano orizzontale ed è composto da 2 corpi rigidi: 1 disco omogeneo di massa m_1, momento di inerzia baricentrale J e raggio R; un corpo rigido rettangolare di massa m_2. I corpi sono soggetti ai seguenti vincoli cinematici: carrello orizzontale in E; contatto di puro rotolamento in B e A. Si utilizza la coordinata $\theta(t)$ (rotazione del disco) per descrivere il grado di libertà del sistema. Quando $\theta(t) = 0$ il sistema si trova in equilibrio statico con le molle indeformate. Il rettangolo, che trasla in orizzontale, è connesso a terra anche tramite uno smorzatore lineare di caratteristica r e tramite una molla di rigidezza k. Inoltre, un'altra molla di rigidezza k collega a terra il centro del disco D. Il sistema è soggetto alle seguenti forze esterne: una coppia $C(t) = C_0 \cos(\Omega t)$ applicata al disco e una forza $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

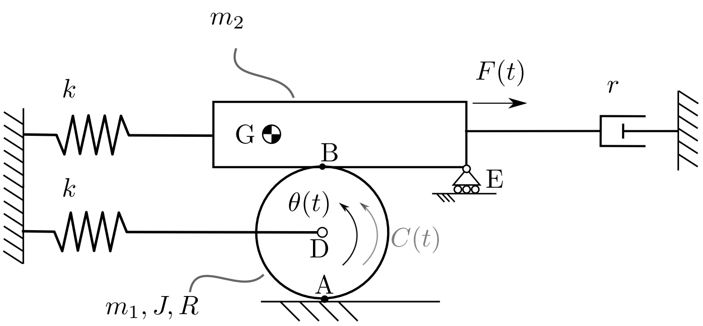


Figura 2:

Si chiede di calcolare:
1. l'equazione di moto del sistema, usando come coordinata libera $\theta(t)$.
2. la pulsazione propria del sistema ω_0 ed il coefficiente di smorzamento h
3. l'ampiezza di vibrazione a regime $|\theta_P|$, quando $\Omega = \omega_0$

Dati

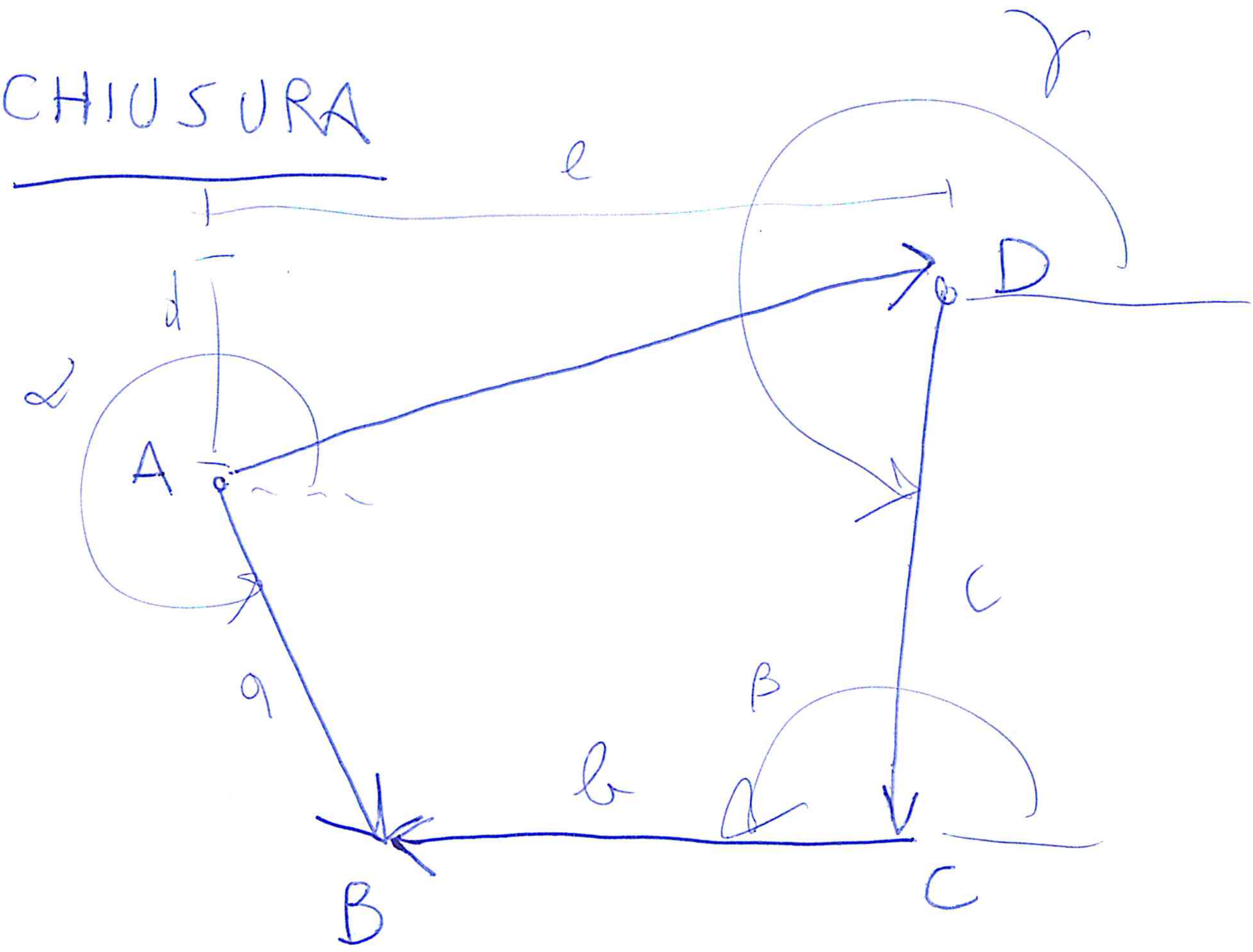
$m_1 = 7.0$ kg, $J = 8.4 kgm^2$, $m_2 = 1.6$ kg, $R = 1.2$ m, $r = 35\, Ns/m$, $k = 3736\, N/m$, $C_0 = 135.2\, Nm$, $F_0 = -56.3\, N$

Risposte

1. eq. di moto: $\ldots\ldots\ldots \ddot{\theta} + \ldots\ldots\ldots \dot{\theta} + \ldots\ldots\ldots \theta = \ldots\ldots\ldots\ldots \cos(\Omega t)$
2. $\omega_0 = \ldots\ldots\ldots\ rad/s$; $h = \ldots\ldots\ldots$
3. $|\theta_P| = \ldots\ldots\ldots\ rad$

ES 1

① CHIUSURA



$$(B-A) = (B-C) + (C-D) + (D-A)$$

$$a e^{i\alpha} = b e^{i\beta} + c e^{i\gamma} + (e + id)$$

DERIVO

$$a\dot{\alpha}\, e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = b\dot{\beta}\, e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} + c\dot{\gamma}\, e^{i\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right)}$$

INCOGNITE $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$

$$\begin{cases} a\dot{\alpha}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = b\dot{\beta}\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) + c\dot{\gamma}\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right) \\ a\dot{\alpha}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = b\dot{\beta}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) + c\dot{\gamma}\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \dot{\beta}, \dot{\gamma}$$

$$\vec{\omega}_{BC} = \dot{\beta}\vec{K}, \quad \vec{\omega}_{CD} = \dot{\gamma}\vec{K}$$

DERIVO

$$a\ddot{\alpha}e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} - a\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} = \dots$$

$$b\ddot{\beta}e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} - b\dot{\beta}^2 e^{i\beta} + c\ddot{\gamma}e^{i\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right)} - c\dot{\gamma}^2 e^{i\gamma}$$

$$\longrightarrow \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{BC} = \ddot{\beta}\vec{K}, \quad \dot{\vec{\omega}}_{CD} = \ddot{\gamma}\vec{K}$$

2

$$\vec{V}_G = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge (G - B)$$

con

$$(G - B) = d\,\vec{i} - h\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A)$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_{BC} \wedge (G - B) - \omega_{BC}^2 (G - B)$$

con

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{\omega}}_{AB} \wedge (B - A) - \omega_{AB}^2 (B - A)$$

3

$$-m g \vec{j} \qquad \vec{V}_G = V_{Gx}\vec{i} + V_{Gy}\vec{j}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = W$$

$$W = \vec{C}_M \cdot \vec{\omega}_{AD} + m\vec{g} \cdot \vec{V}_G$$

$$= C_m \dot{\alpha} - m g V_{Gy}$$

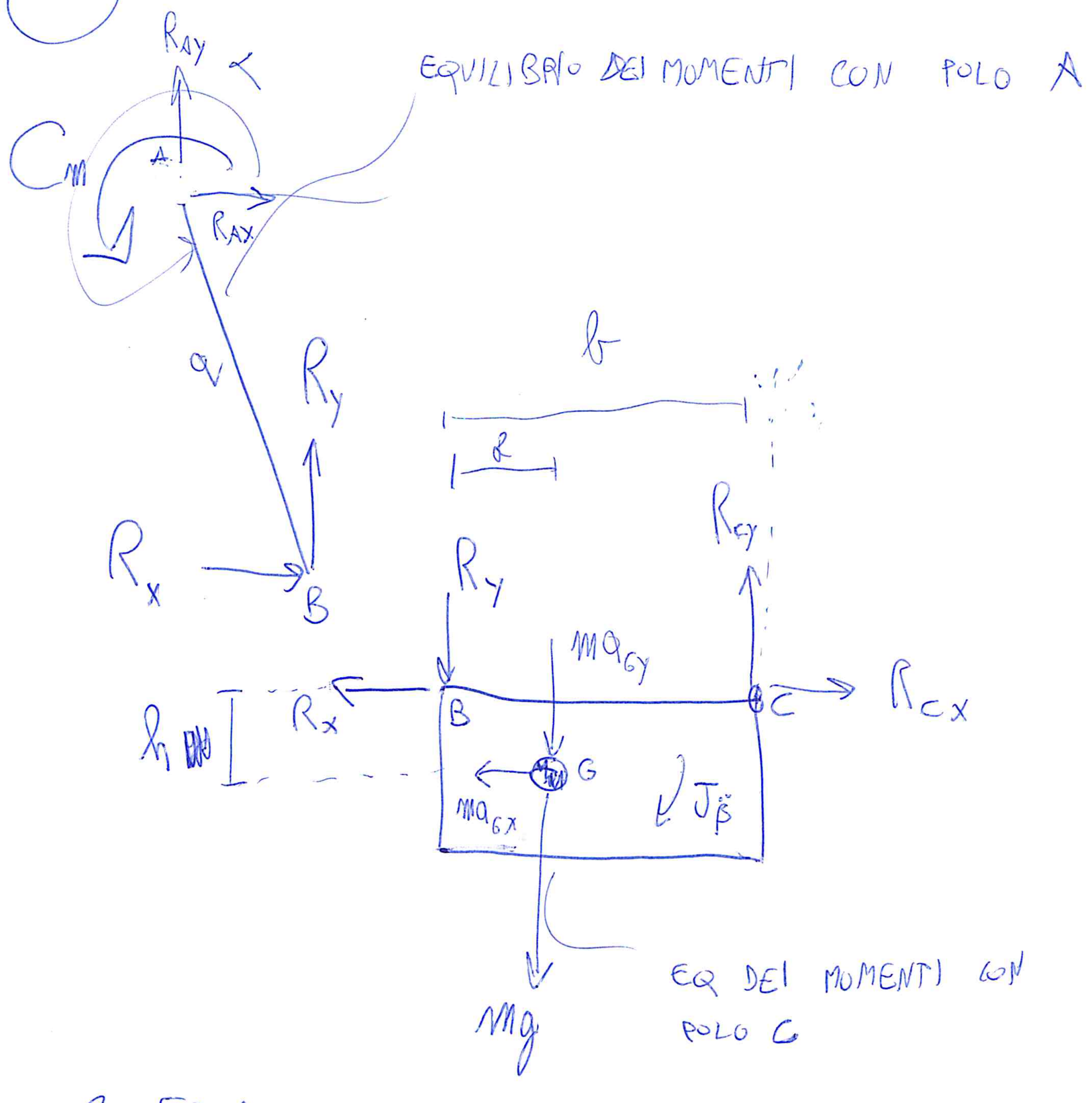
$$E_c = \frac{1}{2} J \omega_{BC}^2 + \frac{1}{2} m V_G^2 = \frac{1}{2} J \vec{\omega}_{BC} \cdot \vec{\omega}_{BC} + \frac{1}{2} m \vec{V}_G \cdot \vec{V}_G$$

$$\frac{dE_c}{dt} = J \vec{\omega}_{BC} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{BC} + m \vec{V}_G \cdot \vec{a}_G =$$

$$= J \omega_{BC} \dot{\omega}_{BC} + m\left(V_{Gx} a_{Gx} + V_{Gy} a_{Gy}\right)$$

→ RICAVO C_m UNICA INCOGNITA

4



2 EQUAZIONI, 2 INCOGNITE

$$\begin{cases} (B-A)\wedge\left(R_y\vec{j}+R_x\vec{i}\right)+C_m\vec{K}=\vec{0} \\ (B-C)\wedge\left(-R_x\vec{i}-R_y\vec{j}\right)-(G-C)\wedge\left(-m a_{Gx}\vec{i}+\dots\right. \\ \quad \dots\left.-(m a_{Gy}+mg)\vec{j}\right)-J\ddot{\beta}\vec{K}=\vec{0} \end{cases}$$

CON

$$(B-A) = a\cos\alpha\,\vec{i} + a\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$(B-C) = -b\,\vec{i} \qquad (\text{INFATTI } \beta = \pi)$$

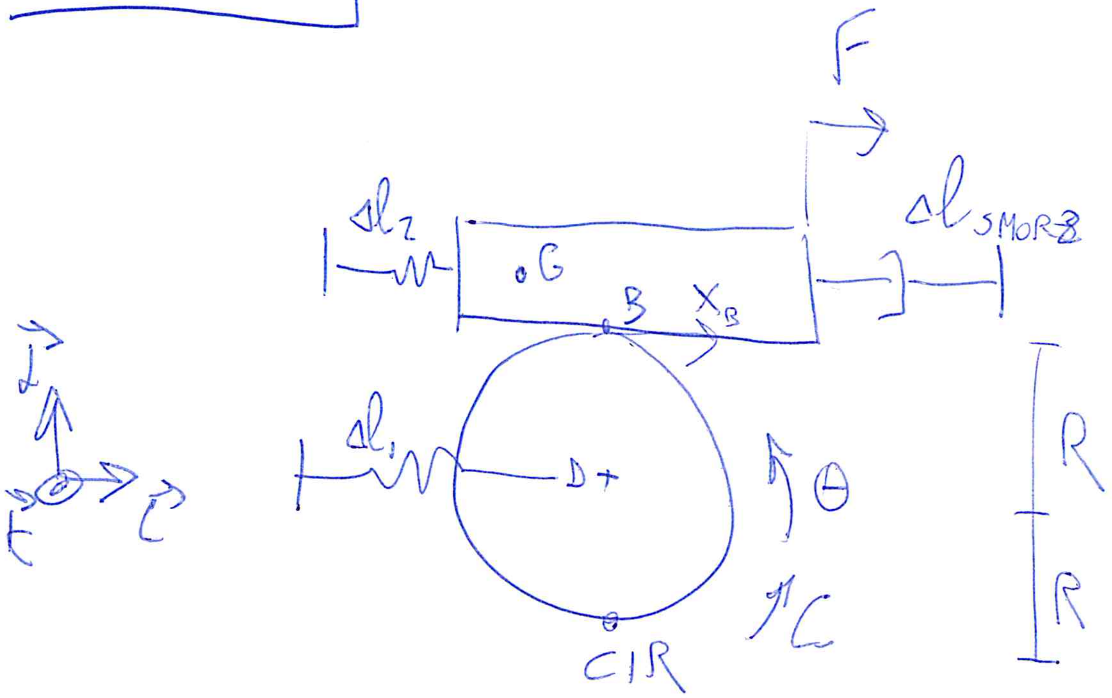
$$(G-C) = -(b-f)\,\vec{i} - h\vec{j}$$

QUINDI

$$\begin{cases} a\cos\alpha\,R_y - a\sin\alpha\,R_x + C_m = 0 \\ R_y b + (b-f)(m a_{Gy} + mg) - h\,m a_{Gx} - J\ddot{\beta} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ RICAVO R_x, R_y

ES 2



$$\vec{V}_D = -\dot{\theta} R \, \vec{i} \qquad \vec{\omega}_D = +\dot{\theta} \, \vec{k}$$

$$\vec{V}_B = -2\dot{\theta} R \, \vec{i} = \vec{V}_G = V_G \, \vec{i}$$

$$\Delta l_{SMORZ} = -V_G = +2\dot{\theta} R$$

$$\Delta l_{MOLLA\,1} = -R\theta$$

$$\Delta l_{MOLLA\,2} = -2R\theta$$

$$\delta x_B = -2R\,\delta\theta$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 V_D^2 + \frac{1}{2} J \omega_D^2 + \frac{1}{2} m_2 V_G^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(m_1 R^2 + J + m_2 4R^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} K \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} K \Delta l_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(K R^2 + K 4R^2 \right) \theta^2 = \frac{1}{2} K^* \theta$$

$$D = \frac{1}{2} r \Delta \dot{l}_{SM}^2 = \frac{1}{2} \left(4 r R^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} r^* \dot{\theta}^2$$

$$Q = \frac{\delta L}{\delta \theta} = \frac{F \delta x_B + C \delta \theta}{\delta \theta} =$$

$$= \frac{F(-2R)\delta_\theta + C \delta_\theta}{\delta_\theta} = C - 2FR$$

1

$$J^* \ddot{\theta} + r^* \dot{\theta} + K^* \theta = (C_0 - 2F_0 R)\cos \Omega t$$

2

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{J^*}}$$

$$h = \frac{r^*}{2 J^* \omega_0}$$

3

$$|\Theta_p| = \frac{|C_0 - 2F_0 R| / K^*}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ha)^2}} = \frac{C_0 - 2F_0 R}{(2h) K^*}$$

con $a = \frac{\Omega}{\omega_0} = 1$