

ARGOMENTI DEL CORSO

- CINEMATICA (DESCRIZIONE DEL MOVIMENTO)
 - MOTO DI UN PUNTO (MATERIALE)
 - MOTO DI UN CORPO RIGIDO (CR)
 - MOTO DI SISTEMI DI CORPI RIGIDI

CINEMATICA
PIANA

- DINAMICA (TROVARE LE CAUSE DEL MOVIMENTO:
FORZE CORPIE)

- DINAMICA DI UN PUNTO MATERIALE
 - SISTEMA DELLE FORZE D'INERZIA (MOTON)
 - PRINCIPIO DI D'ALEMBERT
 - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (P.L.V.)
 - BILANCIO DI ROTENZE / EQUAZIONE
DELL'ENERGIA CINETICA
 - EQUAZIONE DI LAGRANGE

ENERGIE

- DINAMICA DEL CORPO RIGIDO / SISTEMA DI CORPI RIGIDI

- VIBRAZIONI MECCANICHE (RIGIDEZZA)

- SISTEMI A 1 GRADO DI LIBERTÀ (GDL)
 - MOTO LIBERO
 - MOTO FORZATO

- SISTEMI A 2-n GDL
 - MOTO LIBERO
 - MOTO FORZATO

- ARGOMENTO FACOLTATIVO

BILANCIAZIONE MOTORI: SINTESI

PLAQUETTENAU NATURA INFORMATICA

CINEMATICA DEL PUNTO (RIPASSO)

- VETTORE POSIZIONE

- VELOCITÀ

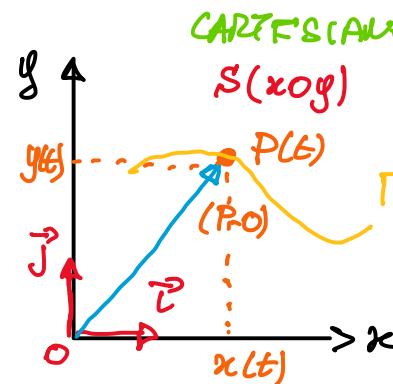
- ACCELERAZIONE

— VETTORE POSIZIONE

- 1) $\vec{P}(t) = (P - O)$
- 2) $\vec{P}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
.....

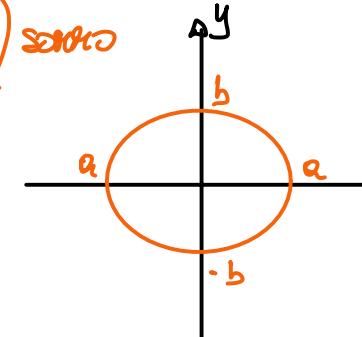
EQUAZIONE
PARAMETRICA
DELLA TRAIETTORIA

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(t) = a \cos \omega t \\ y(t) = b \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 x^2 &= b^2 a^2 \cos^2 \omega t \\ a^2 y^2 &= a^2 b^2 \sin^2 \omega t \quad \text{(scopo)} \\ b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$



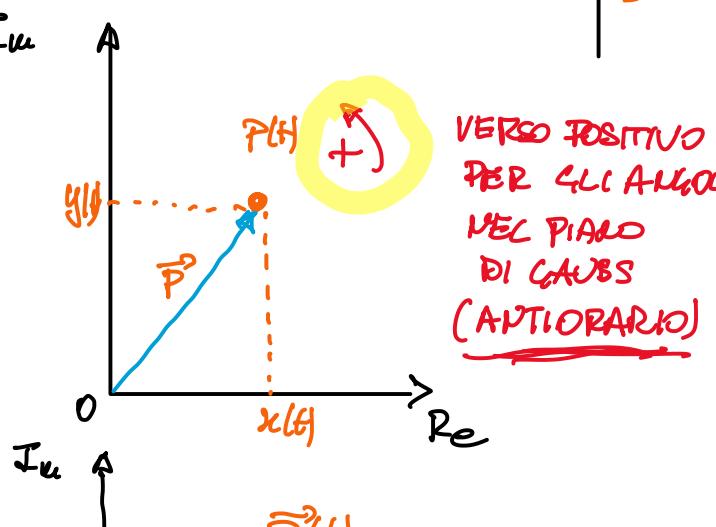
3) USO DEL PIANO DI GAUSS (PUNTO COME
NUMERO COMPLESSO)

$$\vec{P}(t) = x + iy$$

4) ROTAZIONE POLARE (NUMERO COMPLESSO)

$$\vec{P}(t) = P e^{i\theta}$$

$$P = \sqrt{x^2 + y^2}$$



VERSO POSITIVO
PER GLI ANGOLI
NEL PIANO
DI GAUSS
(ANTIORARIO)

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

FORMULA DI EULER

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

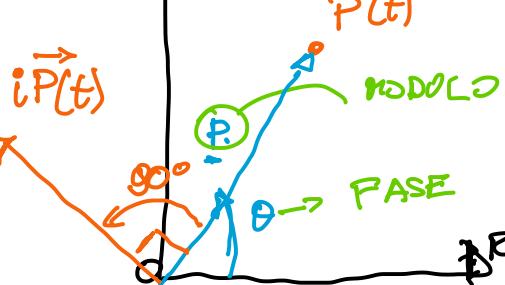
NOTAZIONE ESPOERIMENTALE → NOTAZIONE CARTESIANA

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

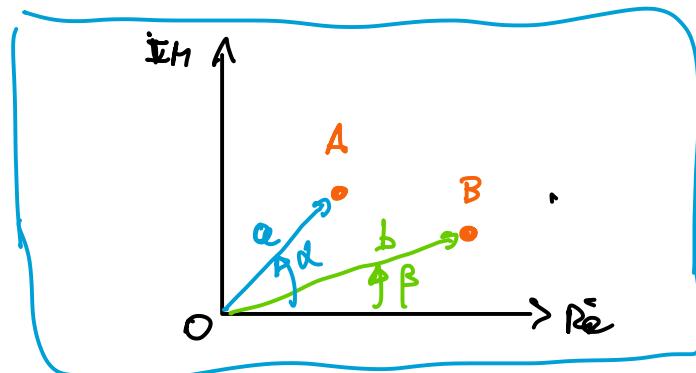
$$e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$$



$$P e^{i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} = P e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

• ASCIENDA CURVILINEA

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(s) = \vec{P}(s(t))$$

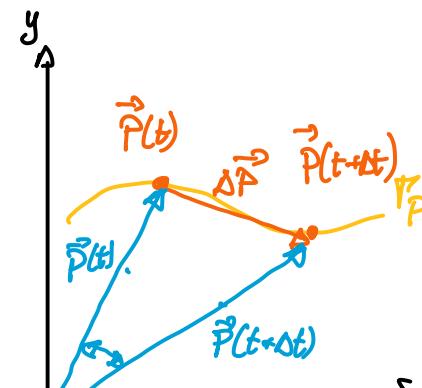
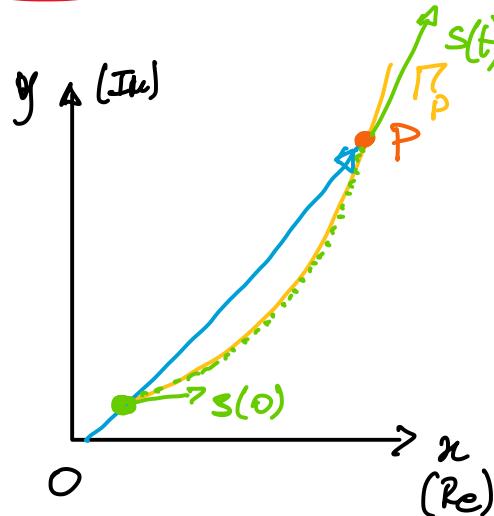


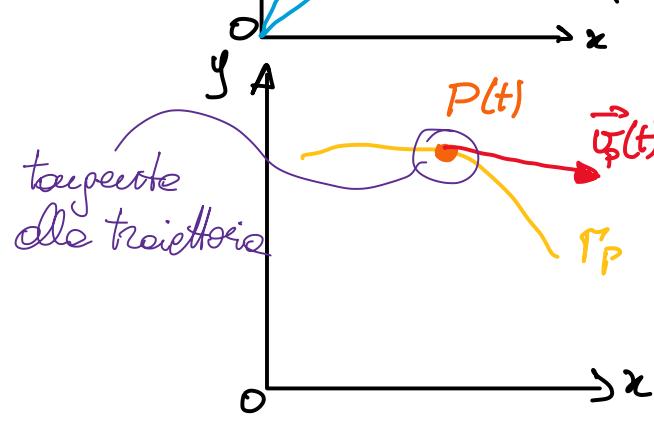
$$(A-O) = a e^{i\alpha}$$

$$(B-O) = b e^{i\beta}$$

- VELOCITÀ

$$\text{DEF. } \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} = \frac{d \vec{P}}{dt}$$





1) DEFINIZIONE
ASCESA CURVILINEA $\vec{P} = \vec{P}(s) \left\{ \begin{array}{l} s = s(t) \\ \vec{P} = \vec{P}(s(t)) \end{array} \right.$

$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \left[\frac{d\vec{P}}{ds} \right] \frac{ds}{dt}$

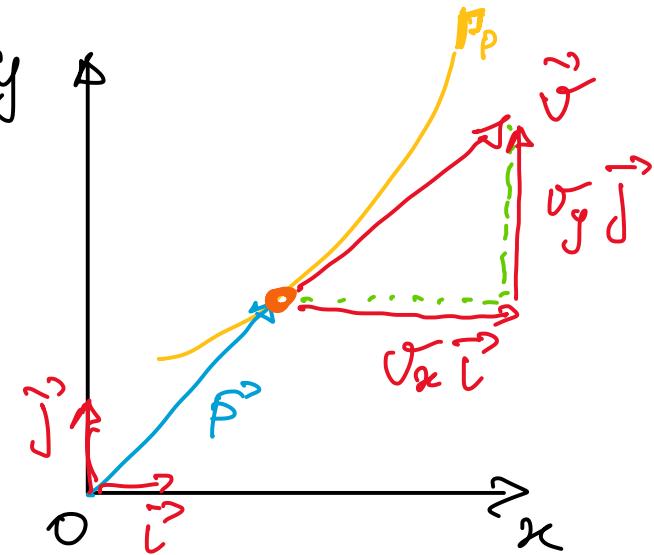
$\vec{v} = \vec{E} s$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{P}|}{|\Delta s|} = 1$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s} = \vec{E}$

VERSORE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA

$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \\ = \dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j}$$

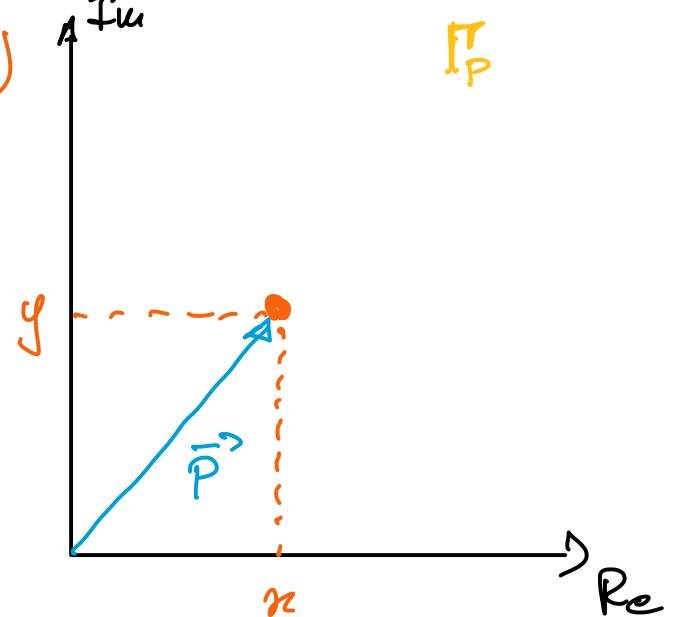


3) NOTAZIONE COMPLESSA (O NEL PIANO DI GAUSS)

$$\vec{V} = \overset{\circ}{x} + i \overset{\circ}{y} = V_x + i V_y$$

4) NOTAZIONE POLARE

$$\vec{V} = \frac{d}{dt} \left(P(t) e^{i \theta(t)} \right) = 1$$



• IDEI

- VETTORE POSIZIONE
- VELOCITÀ }
- PUNTO

- ACCELERAZIONE

$$\text{DEF: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{P}}{ds} \right) = \frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{P}}{ds} \frac{ds}{dt} \right)$$

...

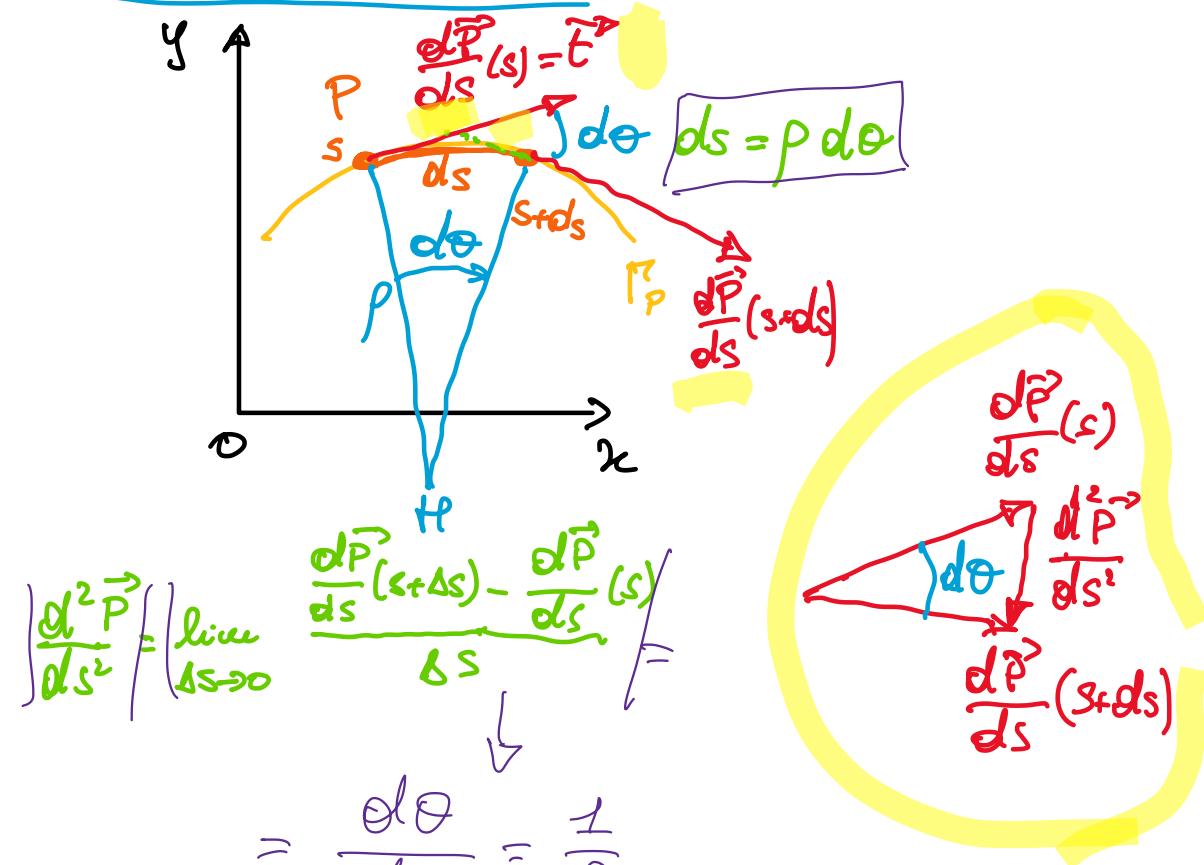
$$\vec{a} = \frac{d\vec{P}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \right)$$

$\downarrow \frac{1}{P} \vec{n}$

$\downarrow \vec{T}$

$\downarrow \vec{s}$

$\downarrow \vec{s} \cdot \vec{s}$

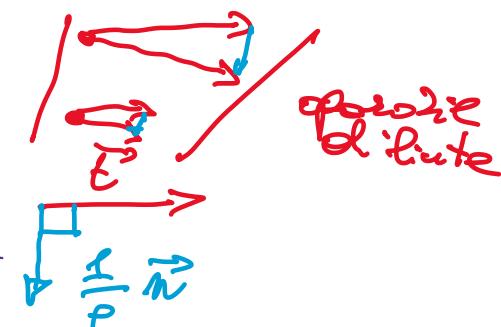


1° MONO

$$\vec{a} = \vec{s}'' \vec{T} + \frac{\vec{s}''^2}{P} \vec{n}$$

2 componenti
distinte

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n$$



ATTENZIONE! $\vec{a}_t \exists$ se $\ddot{s} \neq 0$
 se $\vec{v} = \text{costante} \Rightarrow \vec{a}_t = 0$

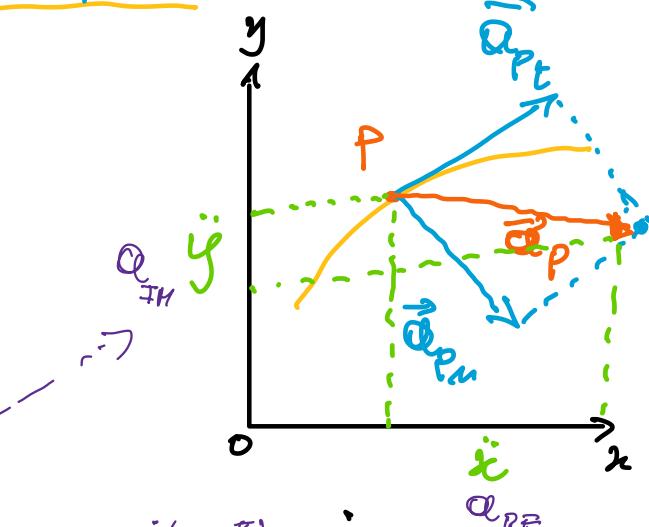
$\vec{a}_n \exists$ se $\rho < \infty$
 se $\rho \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1}{\rho} = 0 \Rightarrow \vec{a}_n = 0$

\hookrightarrow traiettoria rettilinea



2° MODO RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$



3° MODO RAPPRESENTAZIONE NEL PIANO DI GAUSS

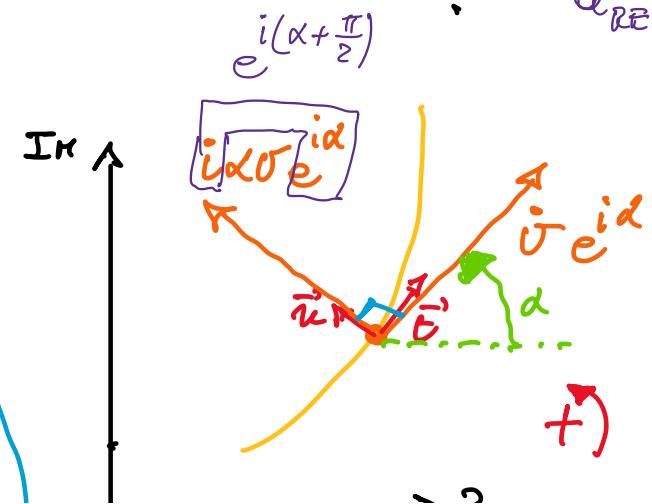
$$\vec{a} = \vec{\alpha}_{RE} + i \vec{\alpha}_{IH}$$

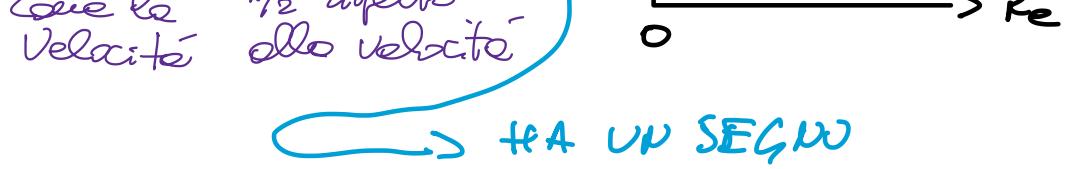
4° MODO NOTAZIONE POLARE

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (r e^{id}) = \dot{r} e^{id} + i \dot{\theta} r e^{id}$$

direzione
angolare
velocità
angolare

motore di
T.G. rotabile





• ULTIMA LEZIONE

- VETTORE POSIZIONE } PUNTO
- VELOCITÀ'

- ACCELERAZIONE

$$\text{DEF: } \vec{\alpha} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{P}}{ds} \frac{ds}{dt} \right)$$

$$\vec{\alpha} = \left[\frac{d\vec{P}}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} \right] + \left[\frac{d^2 \vec{P}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} \right) \right]$$

$\downarrow \vec{T}$ $\downarrow \vec{S}$ $\frac{1}{\rho} \vec{n}$

1° MOVO

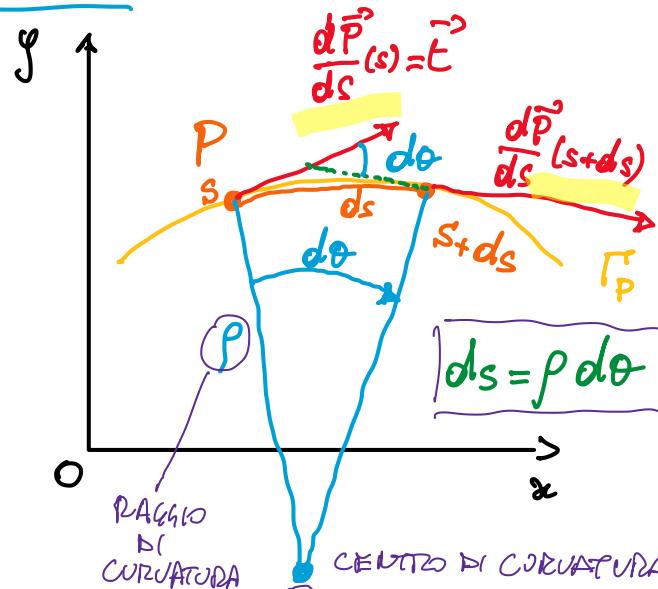
$$\vec{\alpha} = \left[\ddot{s}(t) \vec{T} \right] + \left[\frac{\dot{s}^2(t)}{\rho} \vec{n} \right]$$

2 componenti
distinte

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_t + \vec{\alpha}_n$$

ATTENZIONE

$$\vec{\alpha}_t \quad \exists \neq 0$$

Se $v = \text{costante} \Rightarrow \vec{\alpha}_t = 0$ 

$$\left| \frac{d^2 \vec{P}}{ds^2} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{d\vec{P}}{ds}(s+\Delta s) - \frac{d\vec{P}}{ds}(s)}{\Delta s} \right| =$$

$$= \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{P}(s)}{ds} \quad \frac{d^2 \vec{P}}{ds^2}$$

$$\frac{d\vec{P}}{ds}(s \rho ds)$$

$$\vec{T} \quad \frac{1}{\rho} \vec{n}$$

90°

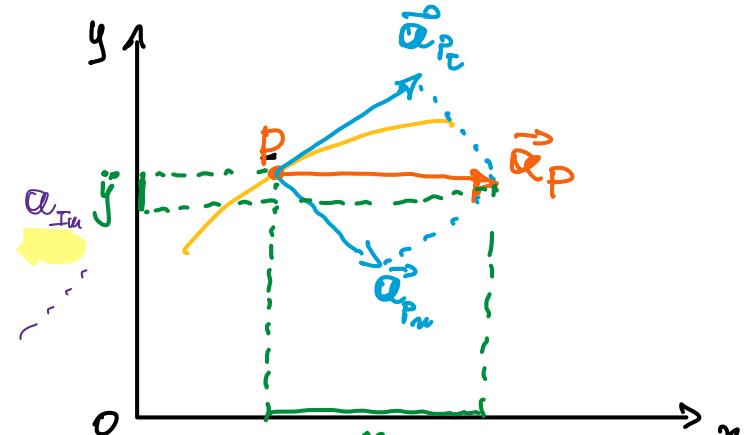
$$\vec{a}_n \exists \propto \rho < \infty$$

$$\text{Se } \rho \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{\rho} = 0 = \vec{a}_n = 0$$

$\rho \rightarrow \infty$ traiettoria rettilinea

2° MODO RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$



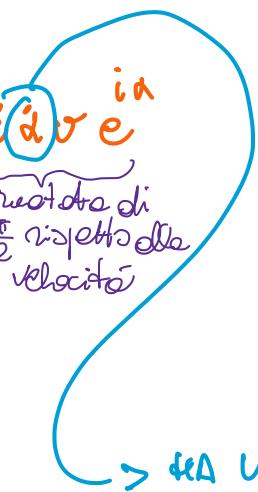
3° MODO RAPPRESENTAZIONE NEL PIANO DI GAUSS

$$\vec{a} = a_{Re} + i a_{Im}$$

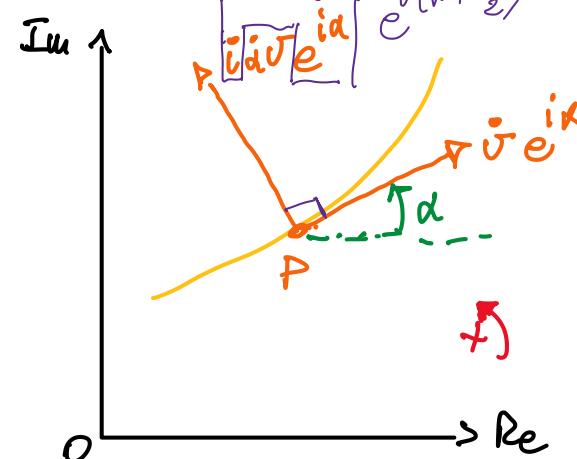
4° MODO ROTAZIONE POLARE

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v e^{id}) = \dot{v} e^{id} + v i d e^{id}$$

dirette come le velocità
rispetto alle velocità



> UN SEGNO



• CORPO RIGIDO

- PROPRIETÀ DEL CORPO RIGIDO (C.R.)

↳ DEFINIZIONE C.R.

↳ GRADI DI LIBERTÀ (NEL PIANO)

- MOVIMENTO DEL CORPO RIGIDO

↳ MOTO DEL C.R.



↳ ATTO DI MOTO DEL C.R.



↓

CENTRO DI INSTANTANEA ROTAZIONE (C.I.R.)

INSIEME DI PUNTI

A (x_A, y_A)

B (x_B, y_B)

4 PARAMETRI:

x_A, y_A, x_B, y_B

VINCOLO DI CORPO RIGIDO

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \text{costante}$$

x_A, y_A, x_B, y_B non sono indipendenti
vincolati da:

- CONDIZIONE DI "RIGIDITÀ"

↳ 3 PARAMETRI INDEPENDENTI

PER DEFINIRE LA POSIZIONE
DI UN C.R. IN UN PIANO

A (x_A, y_A) → 2 parametri indipendenti

A, B sono
PUNTI GENERICI

~~AB~~ = costante
nel tempo

~~α~~ = costante
nel tempo

SE CORPO È
RIGIDO

AB = costante

BC = costante

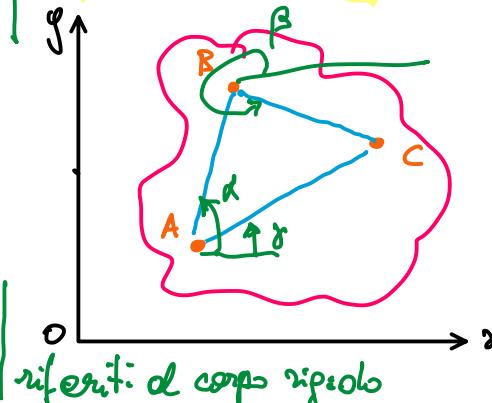
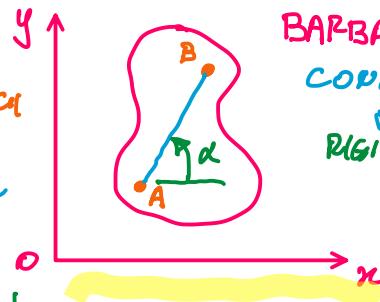
AC = costante

d = costante

β = costante

γ = costante

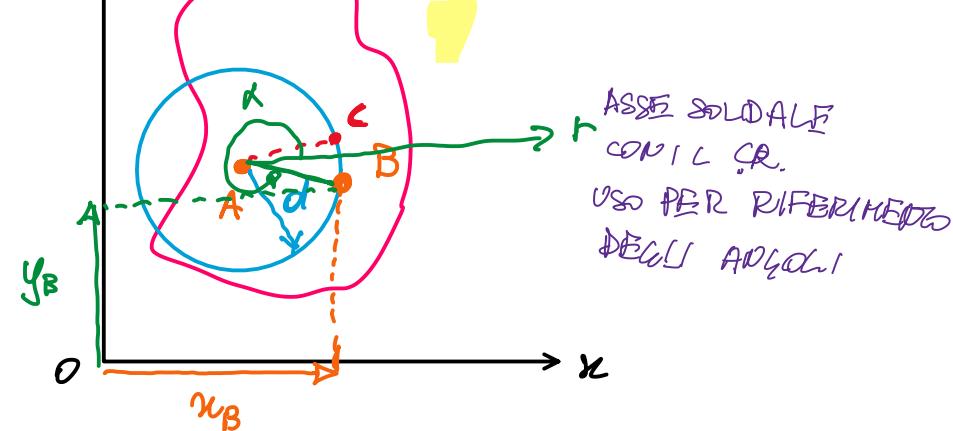
BARBAPAPAOIDE
CORGELATO
RIGIDO



$$\bar{AB} = d = \text{costante}$$

$B(x_B, y_B)$ → 1 pos. indipendente
1 pos. diangolare

UN CORPO RIGIDO SI PUO' MUOVERE NEL PIANO MA NON SI DEFORMA



3 PARAMETRI INDEPENDENTI → C.R. (UN CORPO RIGIDO) NEL PIANO HA 3 GRADI DI LIBERTÀ

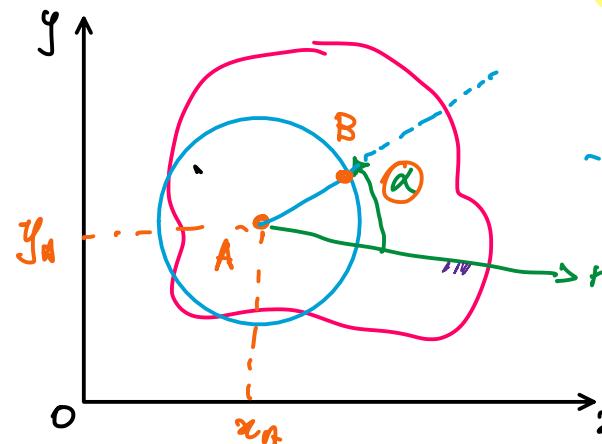
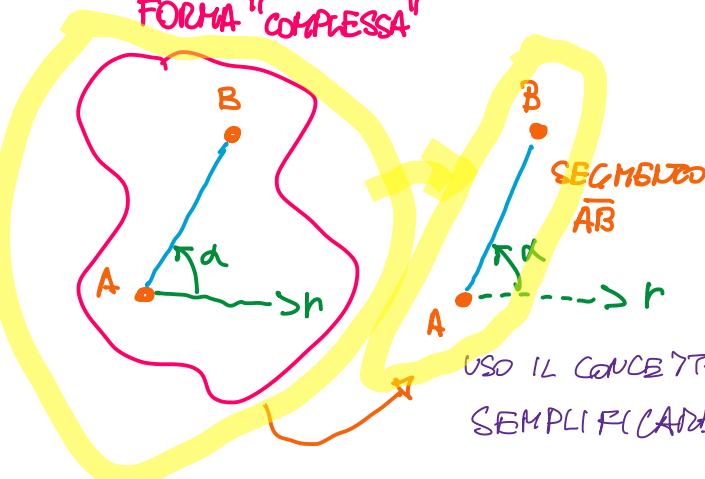
ALTRA SCELTA :

COORDINATE DI A E L'ANGOLARE

$$(x_A, y_A)$$

$$\alpha$$

FORMA "COMPISSA"



MOVIMENTO DEL C.R.

- MOTTO ("IN GRANDE")



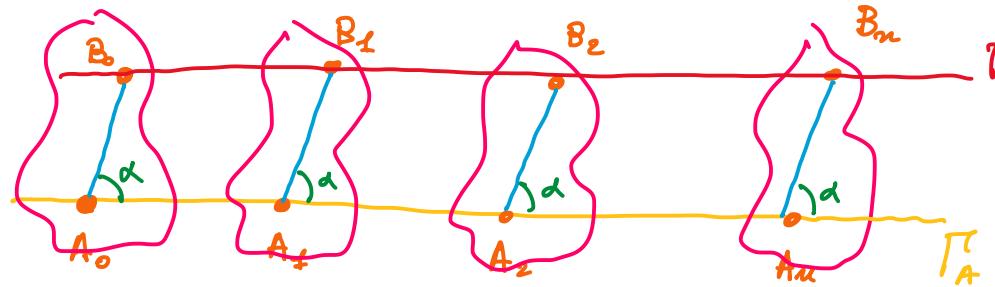
- MOTTO A MOTTO ("IN PICCOLO")



- MOTI:
- 1) TRASZATORIO
 - 2) ROTATORIO
 - 3) ROTOTRASLATORIO
-

MOTO TRASLATORIO

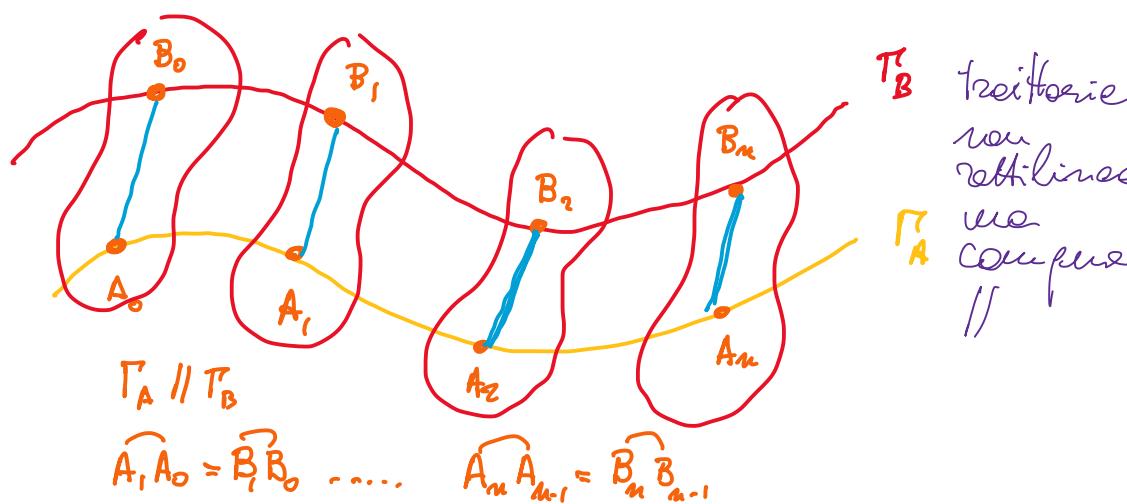
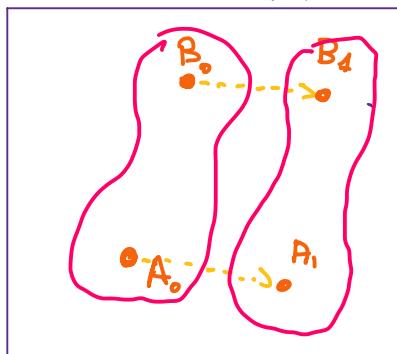
- LE TRAIETTORIE DEI PUNTI DEL CORPO SONO //
- PUNTI OTOLOGHI COMPIONO SPOSTAMENTI uguali



$$\Gamma_A \parallel \Gamma_B$$

$$\overrightarrow{A_0 A_1} = \overrightarrow{B_0 B_1}, \dots, \overrightarrow{A_m A_{m-1}} = \overrightarrow{B_m B_{m-1}}$$

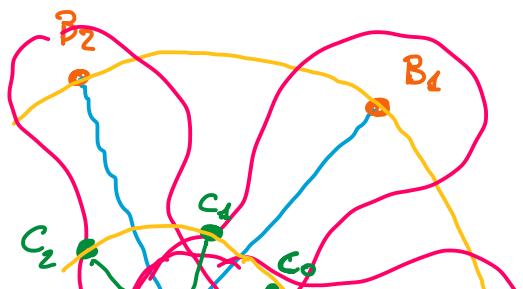
PUNTI OTOLOGHI



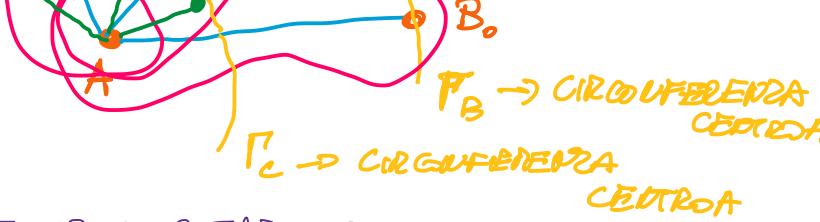
Traiettorie
non
rettilinee
ma
composte //

MOTO ROTATORIO

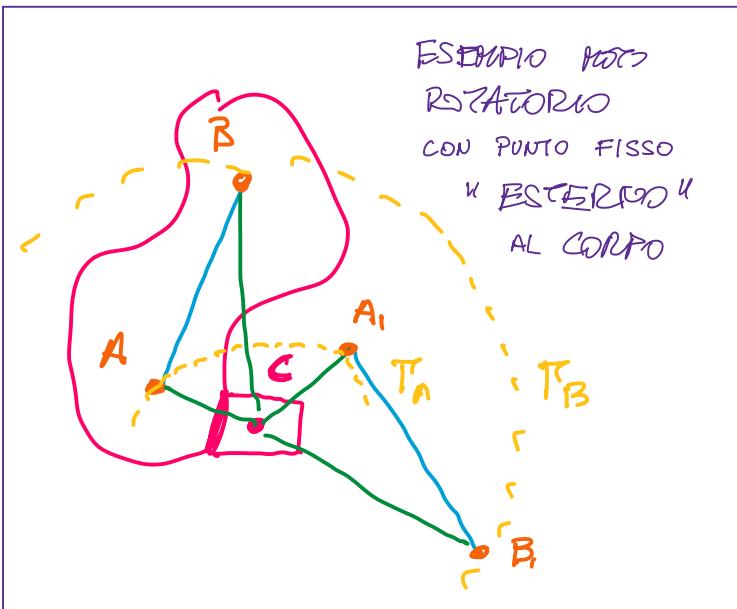
- 1 PTO DEL CORPO RIGIDO FISSO NEL PIANTO
- LE TRAIETTORIE DI TUTTI I PUNTI SONO CIRCOLI CON UNO STESO CENTRO



TIENI GLI ALTRI PUNTI
PEL C.R. SONO
CIRCONFERENZE

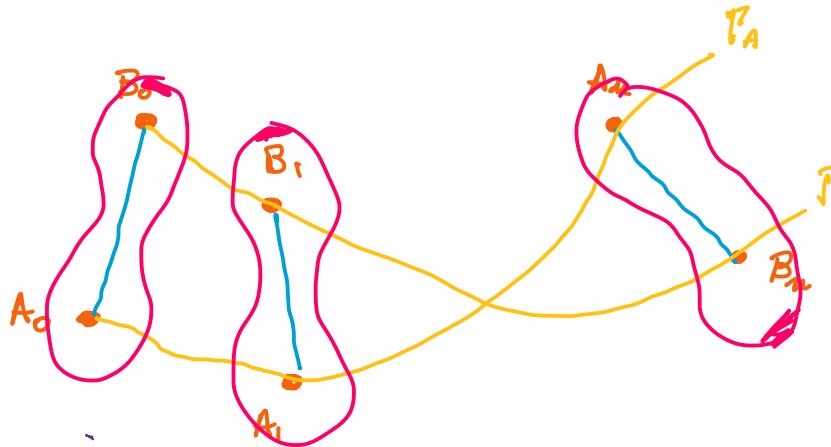


NOTA SULLA POSIZIONE DEL CENTRO DI ROTAZIONE



MOTORE POTO TRASLATORIO

- MESSO PUNTO E' SEMPRE FISSO NEL PIANO
- LE TRAIETTORIE DEI PUNTI NON SONO IN GENERALE // TRA LORO



↳ FOTOGRAFIA DEL MOVIMENTO

↳ MOTO "IN PICCOLO" → SPOSTAMENTI SORO
MOLTI PICCOLI

↳ SPOSTAMENTI INFINITESIMI

TRA THSELLI PERMESSI AL C.R.

(IN QUESTO MOME DCO TUTTI GLI SPOSTAMENTI SONO PERMESSI)

→ SPOSTAMENTI VIRTUALI

(SPOSTAMENTI PERMESSI DAI VINCOLI*)

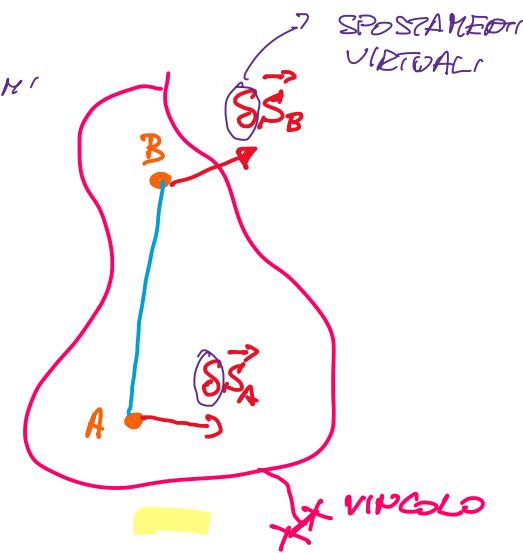
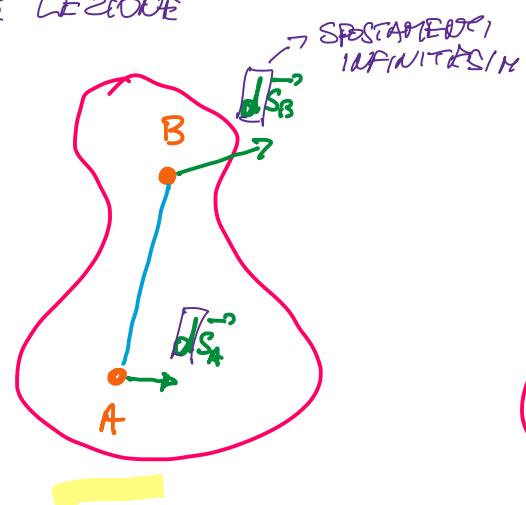
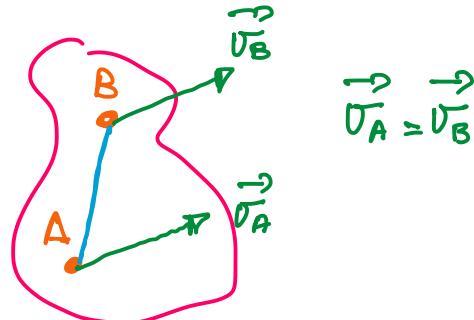
* I VINCOLI LI DISCUTEREMO TRA
QUALCHE LEZIONE

GLI ATTI DI MOTO POSSIBILI SONO SOLO 2:

- ATTO DI MOTO TRASLATORIO
- ATTO DI MOTO ROTATORIO

ATTO DI MOTO TRASLATORIO

↳ LE VELOCITA' DI TUTTI I PUNTI (DEL C.R.) SONO UGUALI (MODULO DIREZIONE VERSO)



TRA LE DUE FOTO HO UN TEMPO PICCOLISSIMO ALT

IL CONCETTO DI ATTO DI MOTO E' COLLEGATO AL CONCETTO DI VELOCITA'

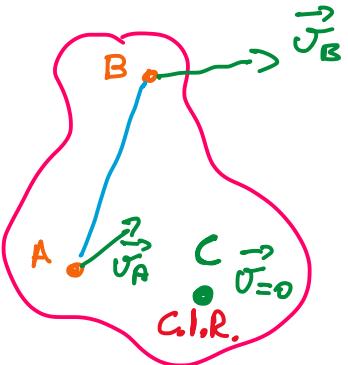
$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{S}_A}{dt} \quad | \quad \vec{v}_A = \frac{\vec{S}_{PA}}{\Delta t} = \frac{\vec{S}_{PA}}{S}$$

ATTO DI MOTO A TASSO

ALTO DI MOTO ROTATORIO

→ È UN PUNTO DEL C.R. (O COLLEGATO RIGIDAMENTE AD ESSO) CHE (NELL'ISTANTE CONSIDERATO) HA VELOCITÀ NULLA

IL PUNTO SI CHIAMA C.R.
CENTRO DI ISTANTE ROTAZIONE



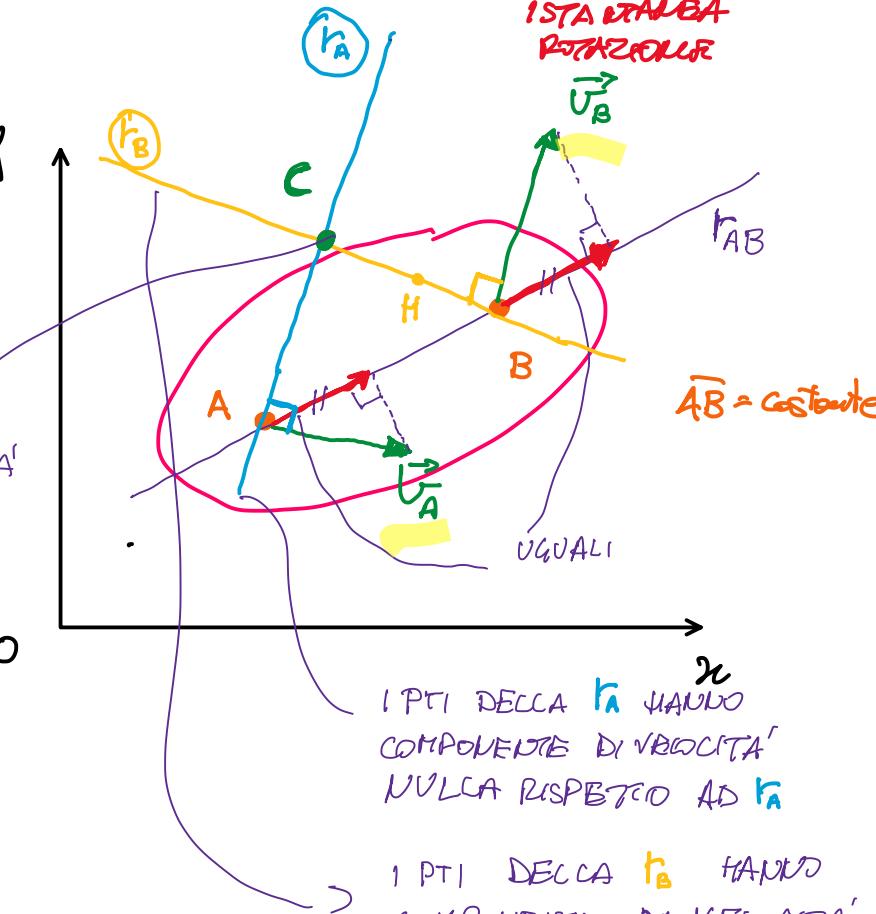
C HA VELOCITÀ
NULLA
 $\vec{v}_c = 0$

C È IL
CENTRO DI
ISTANTE
ROTAZIONE

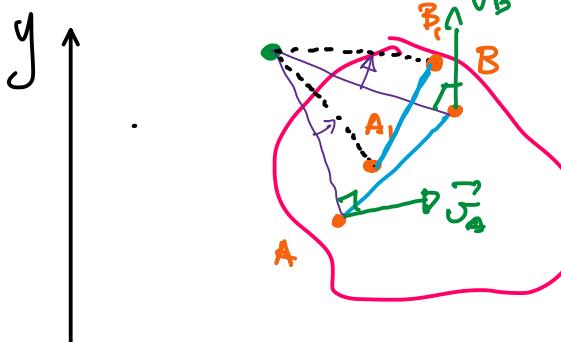
SICCOME PARLIAMO DI ATTO
DI MOTO

→ C.R. IN GENERALE
NON È UN PUNTO FISSO NEL
PIANO

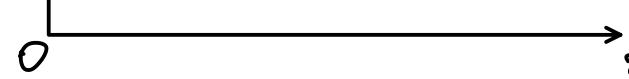
È UN PUNTO FISSO SOLO
SE IL MOTO È ROTATORIO



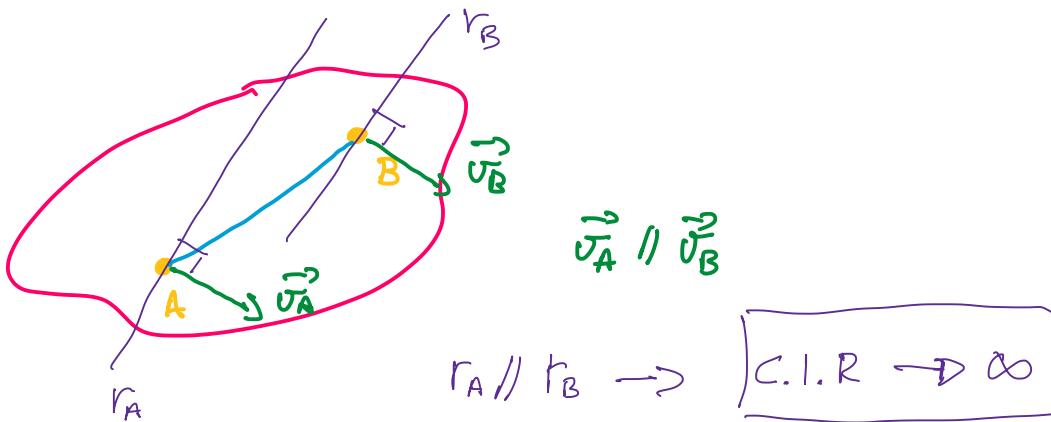
C.I.R. HA VELOCITÀ
NULLA, MA IN GENERALE
NON HA ACCELERAZIONE
NULLA (A MENO CHE
IL MOTO SIA ROTATARIO)



IN QUESTO CASO IL CENTRO DI ROTAZIONE COINCIDE CON IL C.I.R.



ESISTE IL C.I.R. NEL CASO DI ATTO DI MOTO TRASLATORIO? NO!



ESISTE PER UN C.R. IL "CENTRO DELLE ACCELERAZIONI" CHE UN PUNTO

(DEL C.R. È COLLEGATO RIGIDAMENTE AD esso) CHE HA $\vec{a} = \vec{0}$, MA

NON HA UN IMPIEGO PRATICO, NEL MOMENTO IN CUI SI STUDIA LA

CINEMATICA DEL C.R. CON METODI NUMERICI.

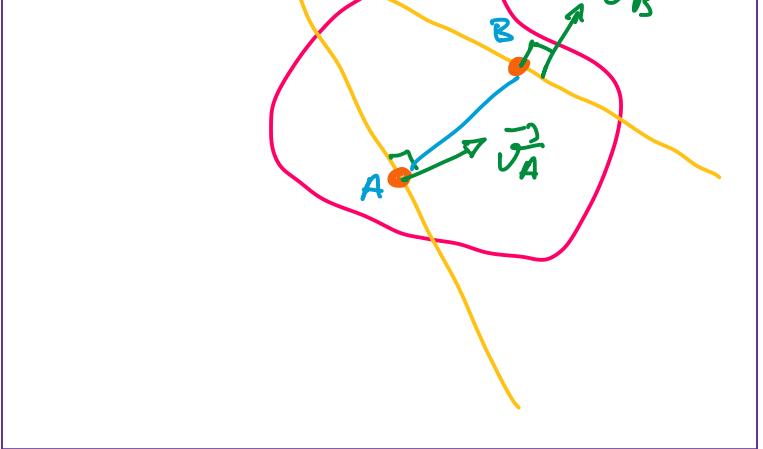
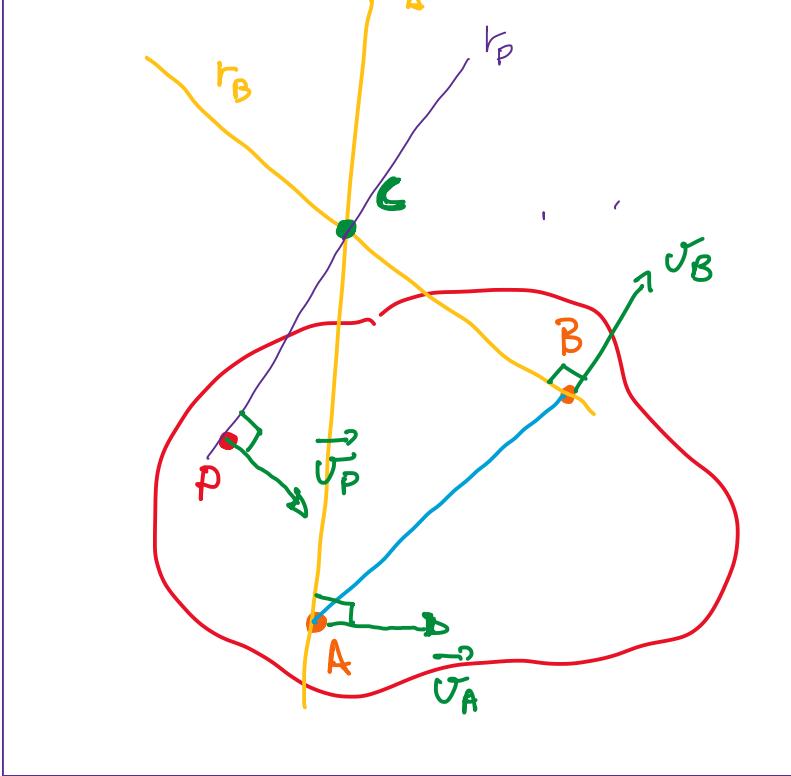
NB: SE IL CENTRO DI ROTAZIONE È ANCHE C.I.R., ALLORA HA ANCHE ACCELERAZIONE NULLA

DOMANDA: MA SE CONSIDERO UN PUNTO DEL C.R. DIVERSO DA A E B, OTENGO UN C.I.R. DIFFERENTE? NO, IL C.I.R. È UNICO

DOMANDA: COME SI INDICA L'ACCELERAZIONE DEL C.I.R?

\vec{a}_c & così

\vec{v}_c



ESSENDO UNICO IL C.I.R. POSSO USARLO PER TROVARE LA DIREZIONE DELLA VELOCITA' DI OGNI PUNTO DE C.R. - VEDI AD ESEMPIO IL PUNTO P IN FIGURA:

TRACCIO LA RETTA CHE PASSA PER G E PER $P(r_p)$ E LA DIREZIONE DELLA \vec{v}_P SARÀ \perp A r_p

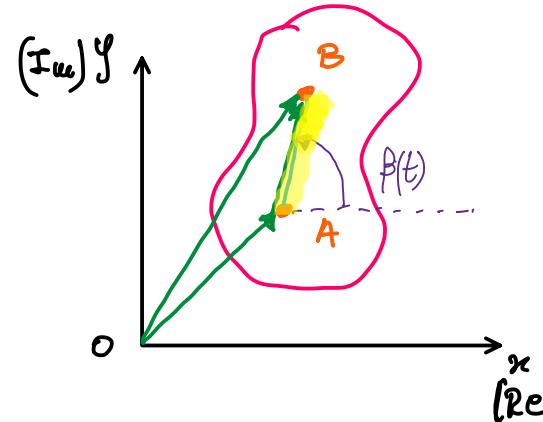
CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

↳ TEOREMA DI RIVALS PER VELOCITA' ED ACCELERAZIONE

- RIFERIMENTO DI 2 PUNTI DEL C.R. MEDIANTE I LORO VETTORI POSIZIONE

DATI : $x_A(t), y_A(t)$ POSIZIONE DI A
 $\beta(t)$ ANGOLARE DEL SEGMENTO AB RISPECTO AL RIFERIMENTO ANGOLARE : AD ES. ASSE ORIZZONTALE

3 PARAMETRI CHE "FISSANO" I 3 G.D.L. DEL C.R.



VETTORE POSIZIONE DI B

$$(B-O) = (A-O) + (B-A)$$

RECIAZIONE TRA I VETTORI POSIZIONE

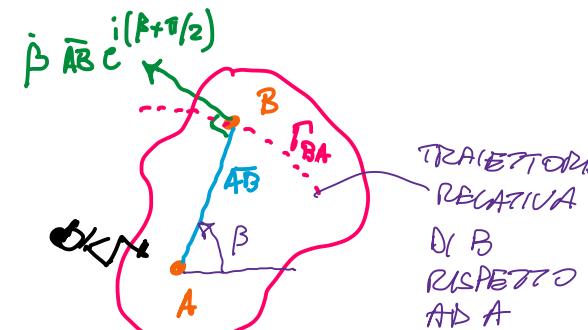
$$\begin{aligned} (B-O) &= x_B + i y_B = \\ &= x_A + i y_A + \bar{AB} e^{i\beta} \end{aligned}$$

LUNGHEZZA È NOTA PERCHÉ IL CORPO È RIGIDO (N.B. AB È costante)

VELOCITÀ DI B

APPLICO LA DEFINIZIONE DI VELOCITÀ'

$$\frac{d}{dt}(B-O) = \frac{d}{dt}(x_A + i y_A + \bar{AB} e^{i\beta})$$



$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_A + i\dot{\gamma}_A}_{\vec{v}_A} + i\beta_{AB}\vec{e}^i - \vec{e}^s = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

↑
 VELOCITA'
 DI A
 ↑
 VELOCITA'
 RELATIVA
 DI B RISPETTO AD A

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$$

→ velocità angolare
 (modulo)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

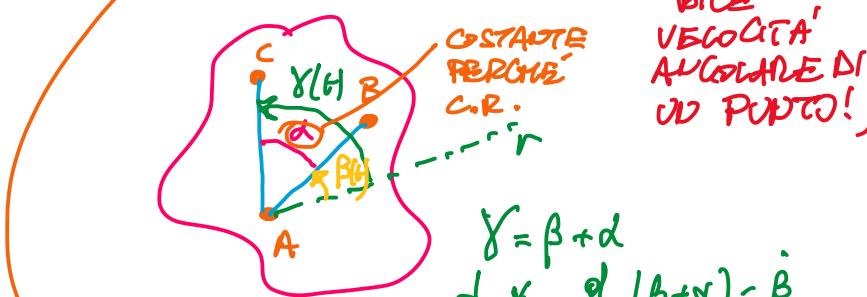
TH. DI
RIVALS
PER LA VELOCITA'

⇒ SE CONOSCO LA VELOCITA' DI UN PTO
DI UN C.R. E LA VELOCITA' ANGOLARE
ACCORDA POSSO CONOSCERE LA
VELOCITA' DI TUTTI I PTI PER IL C.R.

LA VELOCITA' ANGOLARE E' UNA!

PROPRIETA' NEL C.R.

(CON A CHI
DICE
VELOCITA'
ANGOLARE DI
UN PUNTO!)



$$\gamma = \beta + d$$

$$\frac{d}{dt} \gamma = \frac{d}{dt} (\beta + d) = \dot{\beta}$$

È L'UNICA VELOCITA' ANGOLARE
IL MODOLO: $|\omega| = \dot{\beta}$

IL VETTORE VELOCITA' ANGOLARE E':

$$\vec{\omega} = \vec{k} \omega = \vec{k} \dot{\beta}$$

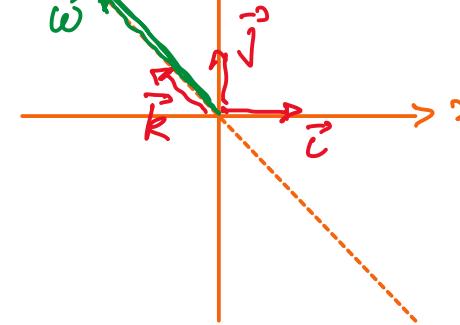
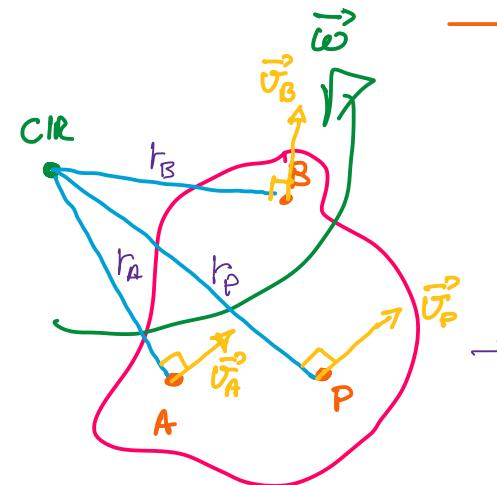
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

SAPPiamo che nel moto di un C.R.
può esistere un C.R.



PROPRIETÀ
 $\vec{V}_{CIR} = 0$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{circ} + \vec{\omega} \wedge (P - circ)$$



$$\vec{V}_P = \vec{\omega} \wedge (P - circ)$$

$$V_P = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{V_P}{r_p}$$

VALORE PER
 F PRO

$$\omega = \frac{V_A}{r_A} = \frac{V_B}{r_B}$$

ACCELERAZIONE DEL PUNTO B

$$\vec{\alpha}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)) - \frac{d}{dt} (i\ddot{r}_A + i\ddot{y}_A + i\bar{AB}\omega e^{i\beta})$$

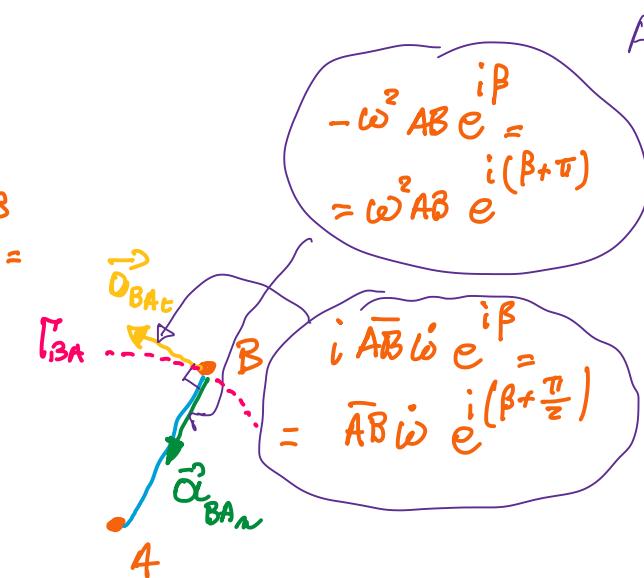
↓

$$\vec{\alpha}_B = \underbrace{\ddot{r}_A + i\ddot{y}_A}_{\text{ACCELERAZIONE DI A}} + i\bar{AB}\omega(i\omega e^{i\beta}) + i\bar{AB}\dot{\omega}e^{i\beta} =$$

$$= \vec{\alpha}_A - \omega^2 AB e^{i\beta} + i\bar{AB}\dot{\omega}e^{i\beta}$$

ACCELERAZIONE DI B RISPETTO AD A
VALE PER LE ACCELERAZIONI

(ACCELERAZIONE ANGOLARE $\Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$)



ACCEL
 B R
 IN
 NO
 ACC
 B R
 IN
 TAR

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A + \vec{\alpha}_{BA}$$

TH DI RIVALS
PER LE
ACCELERAZIONI

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{r}_B - \vec{r}_A)) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{r}_B - \vec{r}_A))$$

\downarrow \downarrow

$$\vec{\alpha}_{BA,c} \qquad \qquad \qquad \vec{\alpha}_{BA,u}$$

VECTORE ACCELERAZIONE ANGOLARE:

$$\vec{\ddot{\omega}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{k}$$

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

↳ TEOREMA DI RIVALS PER LA VELOCITÀ E L'ACCELERAZIONE

- SISTEMA DI RIFERIMENTO : POSIZIONE DI 2 PTI DEC C.R. MEDIANTE I LORO VETTORI POSIZIONE

DATI : $x_A(t)$ $y_A(t)$ POSIZIONE DI A

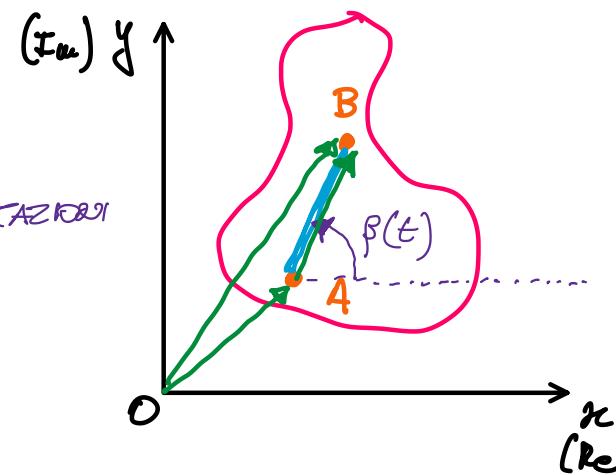
$\beta(t)$

ANGOLI DEL SEGMENTO AB
RISPETTO AL RIFERIMENTO ROTAZIONI
(AD. ES. ACCE ORIZZONTALE)

3 PARAMETRI CHE

"FISSANO" I G.d.L. DEC C.R.

POSIZIONE DI B RISPETTO AD A $(B-A)$
RISPETTO AL SIS. RIF. $(B-O)$



VETTORE POSIZIONE
di B

$$(B-O) = (A-O) + (B-A)$$

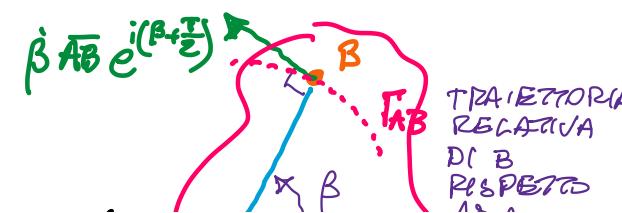
DELAZIONE VETTORIALE TRA I
VETTORI POSIZIONE

$$\begin{aligned} (B-O) &= x_B + i y_B = \\ &= x_A(t) + i y_A(t) + \bar{AB} e^{i\beta(t)} \end{aligned}$$

VELOCITÀ DI B

APPALCO LA DEFINIZIONE DI VELOCITÀ

$$\frac{d}{dt}(B-O) = \frac{d}{dt}(x_A + i y_A + \bar{AB} e^{i\beta})$$



TRAJECTORIA
RELATIVA
DI B
RISPETTO
AD A

$$\vec{v}_B = \dot{x}_A + i \dot{y}_A + i \dot{\beta} \vec{AB} \vec{e}^{\dot{\beta}} = \vec{v}_A + \boxed{i \dot{\beta} \vec{AB} e^{i(\beta + \frac{\pi}{2})}}$$

$$= \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

\downarrow VELOCITA' DI
A \downarrow VELOCITA' DI B
RISPETTO AD A

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$$

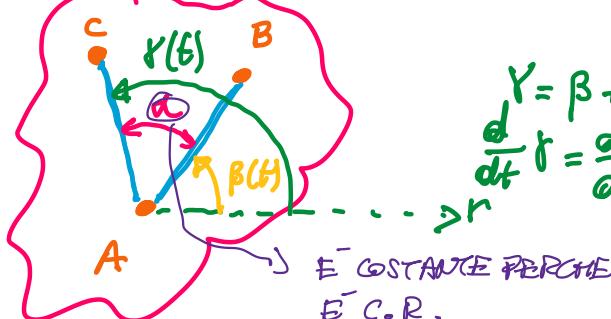
\hookrightarrow VELOCITA' ANGOLARE
(MODULO)

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

TH. DI
RIVALS
PER LE
VELOCITA'

\Rightarrow SE CONOSCO LA VELOCITA' DI
1 PTO DI UN C.R. E LA
VELOCITA' ANGOLARE ALLORA,
POSso CONOSCERE LA VELOCITA'
DI TUTTI I PTI DEL C.R.

LA VELOCITA' ANGOLARE E' UNICA!



$$\gamma = \beta + \alpha$$

$$\frac{d}{dt} \gamma = \frac{d}{dt} (\beta(t) + \alpha) = \dot{\beta}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\beta}$$

E' COSTANTE PERCHÉ
E' C.R.

LA VELOCITA' ANGOLARE E' IN TUTTO IL C.R.
(GUAI A CHI DIRÀ "VELOCITA' ANGOLARE DI UN PUNTO")

\exists LETTERA SPECIALE PER INDICARE IL
MODULO DELLA VELOCITA' ANGOLARE

$$(w) = \dot{\beta}$$

IL VETTORE VELOCITA' ANGOLARE:

$$\vec{\omega} = \vec{r} w = \vec{r} \dot{\beta}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_{BA})$$

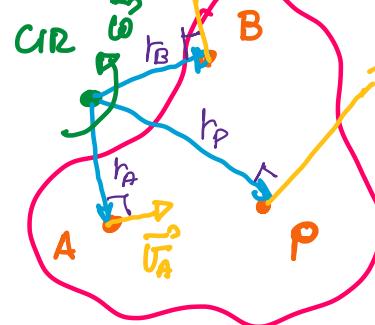
$$\vec{v}_B$$

SAPPIAMO CHE IN UN C.R.

PUÒ ESISTERE UN C.I.R.

$$\vec{v}_{\text{cir}} = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_{\text{cir}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_{\text{cir}}) = \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_{\text{cir}})\end{aligned}$$



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_{\text{cir}})$$

$$v_P = \omega r_P$$

VALE PER TUTTO

$$\frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B} = \omega$$

ACCELERAZIONE DEL PUNTO B

$$\vec{a}_B = \frac{d}{dt} \vec{v}_B = \frac{d}{dt} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_B - \vec{r}_A)) = \frac{d}{dt} (\ddot{x}_A i + \ddot{y}_A j + i \omega \bar{AB} e^{i\beta})$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \ddot{x}_A i + \ddot{y}_A j + i \bar{AB} \omega (i \omega e^{i\beta}) + i \bar{AB} \dot{\omega} e^{i\beta} \\ &= \vec{a}_A + \underbrace{-\omega^2 \bar{AB} e^{i\beta}}_{\text{ACCELERAZIONE DI B RISPETTO AD A}} + i \dot{\omega} \bar{AB} e^{i\beta}\end{aligned}$$

ACCELERAZIONE DI A

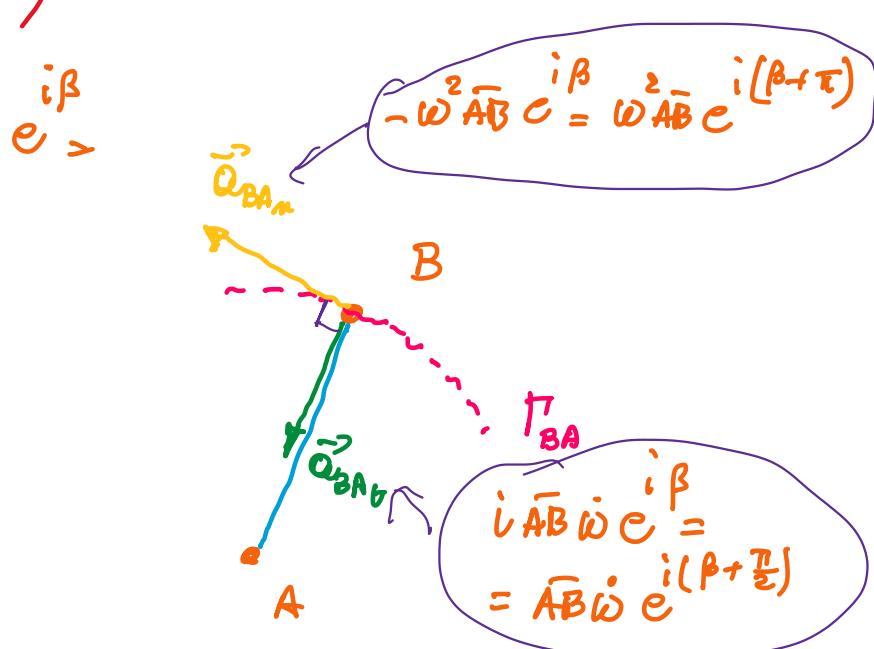
ACCELERAZIONE DI B
RISPETTO AD A

VALE PER ACCELERAZIONI

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}}$$

TI DI
RIVALE
PER LE
ACCELERAZIONI

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{r}_B - \vec{r}_A)}_{\vec{a}_{BA}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_B - \vec{r}_A)}_{\vec{c}}$$



$$\begin{aligned}\text{ACCELERAZIONE ANGOLARE} &\rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\omega} \\ \ddot{\omega} &= \ddot{\omega} \hat{k}\end{aligned}$$

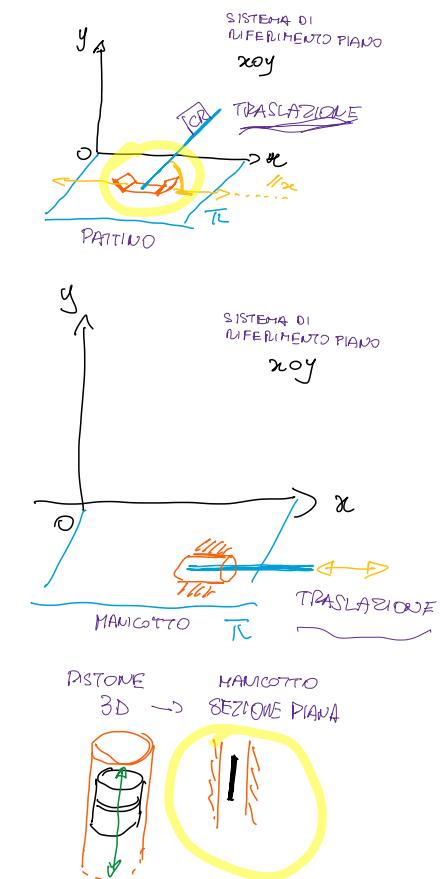
•ent

CUBAN

- VIDOLI PER C.R. DEL PIANO
- TEOREMA DEI VOTI RELATIVI

VIDOLI

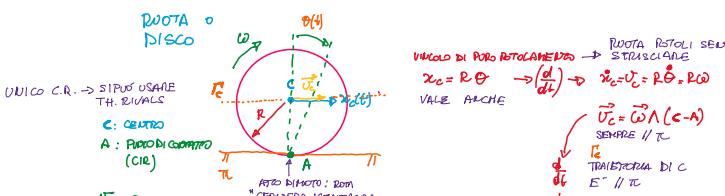
CEMERA A TERRA	CERNIERA TRA 2 CR.	PATTINO	MANICOTTO	CARRELLO	IPCASTRO	PULIO ROTOLAMENTO
 Punto PESO CD. VERT. ASTORIO AB A	 Punto PESO CD. VERT. ASTORIO AB A	 Punto PESO CD. VERT. ASTORIO AB A	 Punto PESO CD. VERT. ASTORIO AB A	 Punto PESO CD. VERT. ASTORIO AB A	 Punto PESO CD. VERT. ASTORIO AB A	 Punto PESO CD. VERT. ASTORIO AB A
 IMPIANTI DI SPOSTAMENTI DI A \Rightarrow 2 G.D.V.	 2 G.D.V.					 1) IL DISCO NON E' DISCARICO DAL PIANO 2) LA DOVETEVA Y_C (SPERDENDO CENTRO DEL DISCO//x_A) NON E' INFLUENZATA DALLA ROTAZIONE DEL DISCO 2 G.D.V.
 1 G.D.L.: $\theta(t)$	 PERMESSA LA TRASLAZIONE RELATIVA 1 G.D.L.: $x_A(t)$	 PERMESSA LA TRASLAZIONE NELLA DIREZIONE DEL PIANO 1 G.D.L.: $x_A(t)$	 PERMESSA LA TRASLAZIONE NELLA DIREZIONE DEL PIANO 1 G.D.L.: $x_A(t)$	 1 G.D.L.: $x_A(t)$	 LISCON MOVIMENTO PERMESSO 0 G.D.L.	 MOTORE ROTATIVO ATTORIO DI MOTORE ROTATORIO ASTORIO AB A \equiv C.R. 1 G.D.L.
 DAL PIANO VISTA CINETICO HO IL MANICOTTO DAL PIANO VISTA DINAMICO SOSTITUITO IL "MANICOTTO" CON LE SUE REAZIONI VISTOSA EQUILIBRATA DUE REAZIONI: V H	 DUE REAZIONI: V H	 DUE REAZIONI: V H	 DUE REAZIONI: V H	 DUE REAZIONI: V H	 TRE REAZIONI: V H M	 TRENDIMENTALMENTE LA REAZIONE VERTICALE SI INDICA CON H E QUELLA ORIZZONTALE CON T

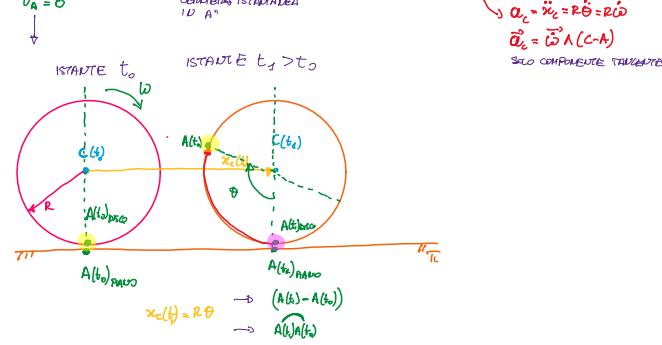


CALCOLO DEI GRADI DI LIBERTÀ (SISTEMA DI CORPI RIGIDI)



→ CINEMATICA DELLA RUOTA (DISCO)





A: CIR.

$V_A = 0$

$\vec{U}_C = \vec{U}_A + \vec{U}_{CA} = 0 + \vec{\omega} \wedge [C-A]$

$\vec{U}_C =$

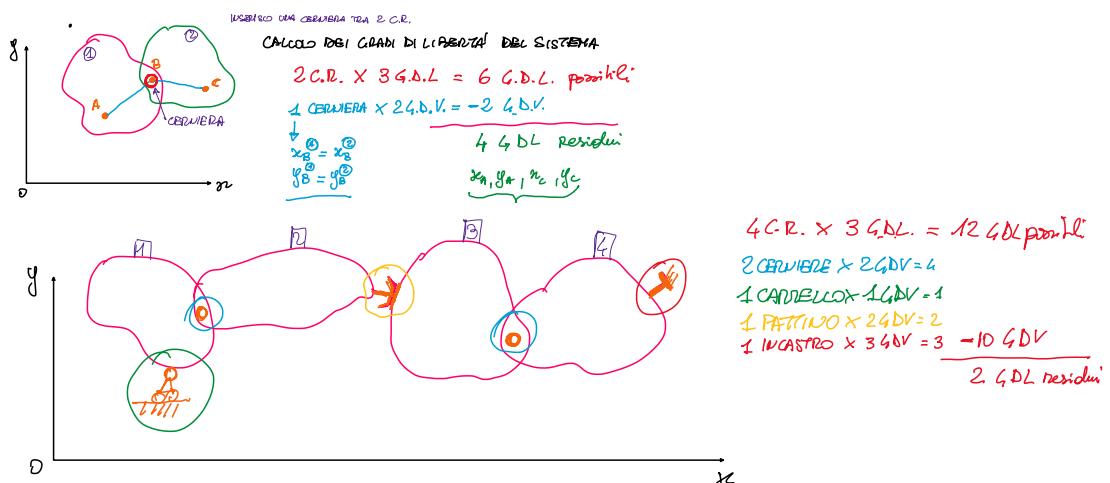
$\vec{\alpha}_c = \vec{\omega} \wedge [C-A]$

$\vec{\alpha}_A = \vec{\alpha}_c + \vec{\alpha}_{AC} = \vec{\omega} \wedge [C-A] + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge [A-C] + \vec{\omega} \wedge [A-C] =$

$= \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge [A-C] = -\omega^2 [A-C]$

$\alpha_A = -\omega^2 R$

equo d'è il "-" per ricordare che è compone normale o diviso dallo centripeto



TEOREMA DBI MOTI RELATIVI

↳ FORMULE DI POISSON

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_i$$

$\vec{\omega} = \frac{1}{2t} \vec{u}_0$

$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_i$ (FONDE DI POISSON)

$s(\text{noy})$ SETIMA
FISSO

$s_i(x_0 y_i)$ CERNO IN O

$s'_i(x_i y_i)$ S. DOPA dt

$$\begin{aligned}\vec{v}_i &= e^{i\theta} \\ \vec{v}_i &= i e^{i\theta} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_i$

$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_i$

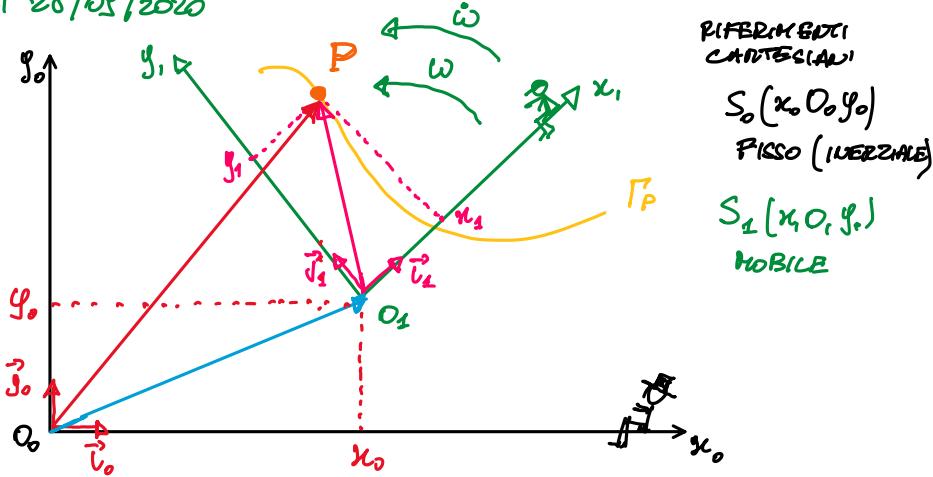
$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\vec{v}_i} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = i\dot{\theta} e^{i\theta} = -\dot{\theta} e^{i\theta}$$

Lezione lunedì 5 ottobre 2020

lunedì 5 ottobre 2020 10:25

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

→ RECUPERARE LE FORMULE DI POISSON DALLA LEZIONE
DI LUNEDÌ 28/09/2020

RIFERIMENTI
CARTESIANI $S_0(x_0, O_0, y_0)$

FISSO (INERZIALE)

 $S_1(x_1, O_1, y_1)$

MOBILE

● VETTORE POSIZIONE :

$$(P - O_0) = (O_1 - O_0) + (P - O_1)$$

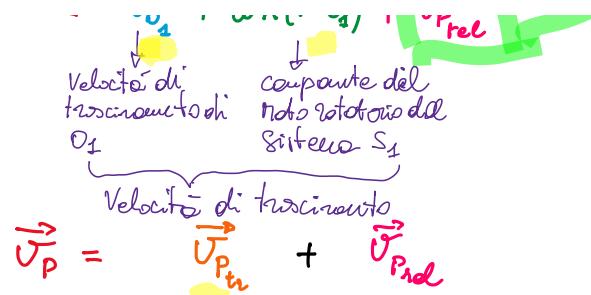
ESPRIMENDO LA POSIZIONE DI P NEL SISTEMA S_0
COME POSIZIONE DI P IN S_1 + POSIZIONE
RELATIVA DI O_1 RISPETTO AD O_0

● VELOCITÀ

$$\vec{v}_P = (P - O_0) = (x_0 \vec{v}_0 + y_0 \vec{j}_0) + (x_1 \vec{v}_1 + y_1 \vec{j}_1)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \frac{d}{dt}(P - O_0) = \frac{d}{dt}(x_0 \vec{v}_0 + y_0 \vec{j}_0) + \frac{d}{dt}(x_1 \vec{v}_1 + y_1 \vec{j}_1) \\ &= \dot{x}_0 \vec{v}_0 + \dot{y}_0 \vec{j}_0 + \boxed{\frac{d\vec{v}_0}{dt}}_{x_1 + \dot{x}_1 \vec{v}_1 + \frac{d\vec{v}_1}{dt}} \dot{x}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 \\ &\quad + \boxed{\frac{d\vec{v}_1}{dt}}_{y_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1} \dot{y}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 = \vec{\omega} \wedge (x_1 \vec{v}_1 + y_1 \vec{j}_1) = \vec{\omega} \wedge (P - O_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \dot{x}_0 \vec{v}_0 + \dot{y}_0 \vec{j}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \dot{x}_1 \vec{v}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 = \\ &= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \vec{v}_1 \end{aligned}$$



ACCELERAZIONE

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt} \vec{v}_P = \frac{d^2}{dt^2} (P - O_1) =$$

$$= \frac{d}{dt} (\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \vec{v}_{P_{rel}}) =$$

$$= \frac{d}{dt} (\overset{①}{\dot{x}_0 \vec{i}_0 + \dot{y}_0 \vec{j}_0} + \overset{②}{\vec{\omega} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)} + \overset{③}{\dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1})$$

$$\frac{d}{dt} (\overset{①}{\dot{x}_0 \vec{i}_0 + \dot{y}_0 \vec{j}_0}) = \ddot{x}_0 \vec{i}_0 + \ddot{y}_0 \vec{j}_0 \quad ①$$

$$\frac{d}{dt} (\overset{②}{\vec{\omega} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)}) = \overset{④}{\vec{\omega} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)} + \overset{⑤}{\vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt} (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)}$$

$$= \overset{④}{\vec{\omega} \wedge (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)} + \overset{⑥}{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \vec{v}_{P_{rel}})} =$$

$$= \overset{⑦}{\vec{\omega} \wedge (P - O_1)} + \overset{⑧}{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P - O_1)} + \overset{⑨}{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P_{rel}}} \quad ②$$

$$\frac{d}{dt} (\overset{⑩}{\dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1}) = \frac{d}{dt} \overset{⑪}{\vec{v}_{P_{rel}}} = \boxed{\frac{d \overset{⑫}{\vec{i}_1}}{dt}} \overset{⑬}{\dot{x}_1} + \boxed{\frac{d \overset{⑭}{\vec{j}_1}}{dt}} \overset{⑮}{\dot{y}_1} + \boxed{\frac{d \overset{⑯}{\vec{i}_1}}{dt}} \overset{⑰}{\dot{y}_1} + \boxed{\frac{d \overset{⑯}{\vec{j}_1}}{dt}} \overset{⑱}{\dot{x}_1} \quad ③$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \overset{⑲}{\ddot{x}_0 \vec{i}_0 + \ddot{y}_0 \vec{j}_0} + \overset{⑳}{\vec{\omega} \wedge (P - O_1)} + \overset{㉑}{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P - O_1)} + (\overset{㉒}{\ddot{x}_1 \vec{i}_1 + \ddot{y}_1 \vec{j}_1}) + 2 \overset{㉓}{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P_{rel}}} = \\ &= \overset{㉔}{\vec{a}_{O_1}} + \overset{㉕}{\vec{\omega} \wedge (P - O_1)} + \overset{㉖}{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P - O_1)} + \overset{㉗}{\vec{a}_{P_{rel}}} + 2 \overset{㉘}{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P_{rel}}} \end{aligned}$$

acc. di corrente, corrente, corrente, relativa.

trascurate le forze esterne
nereende
corporate rotatorie
di S_1
decelerazione di trascinato

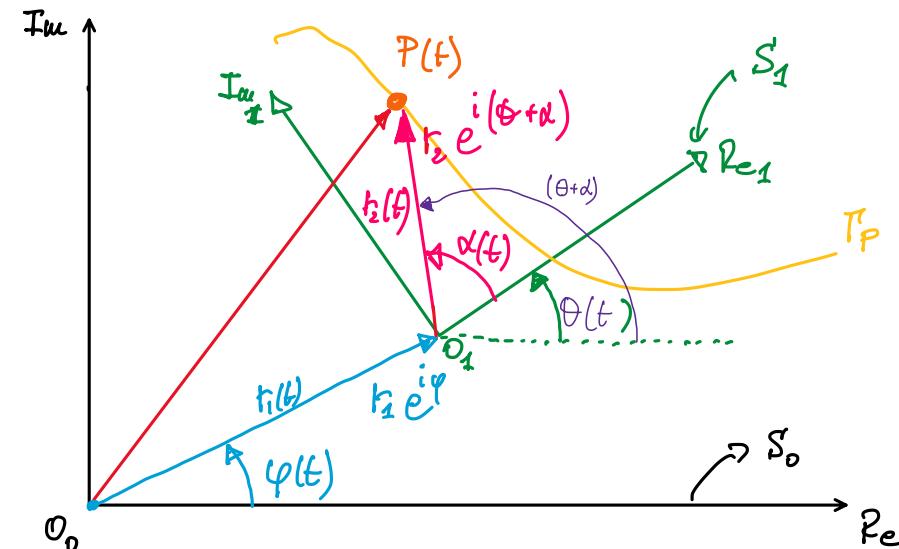
$$\vec{\alpha}_P = \vec{\alpha}_{P_{tr}} + \vec{\alpha}_{P_{re-e}} + \vec{\alpha}_{P_C}$$

relative di P
decelerazione
complementare
di Coriolis (1835)

• USO DEI NUMERI COMPLESSI PER LO STUDIO DEI SISTEMI MECCANICI

$$(O_1 - O_0) = r_1 e^{i\varphi} \\ (P - O_1) = r_2 e^{i(\theta+\alpha)}$$

$$(P - O_0) = (O_1 - O_0) + (P - O_1) = \\ = r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{i(\theta+\alpha)}$$



$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt} (P - O_0) = \frac{d}{dt} (r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{i(\theta+\alpha)})$$

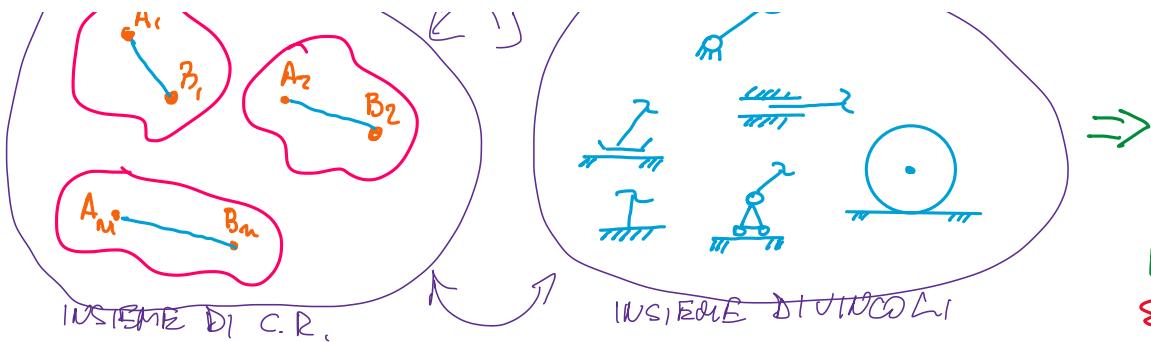
$$\vec{v}_P = r_1 i e^{i\varphi} + i r_1 \dot{\varphi} e^{i\varphi} + r_2 i e^{i(\theta+\alpha)} + i r_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} = \\ = (r_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi} + i r_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)} + (r_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} = \\ \text{trascinato di } O_1 \quad \text{Moto di rotazione di } S_1 \quad \text{Moto relativo di } P$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{\omega}_{P_{tr}} + \vec{\omega}_{P_{rel}} \\
 \vec{\alpha}_P = \frac{d}{dt} \vec{\omega}_P &= \frac{d}{dt} ((\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi} + i \dot{r}_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)} + (\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\alpha+d)}) = \\
 &= (\ddot{r}_2 + i \dot{r}_2 \dot{\varphi} + i \dot{r}_2 \dot{\varphi}) e^{i\varphi} + i \dot{\varphi} (\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}) e^{i\varphi} + \\
 &\quad + (i \dot{r}_2 \dot{\theta} + i r_2 \ddot{\theta}) e^{i(\theta+\alpha)} - (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \dot{r}_2 \dot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)} + \\
 &\quad + (\ddot{r}_2 + i \dot{r}_2 \dot{\alpha} + i r_2 \ddot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} + i (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) (\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} = \\
 &= (\ddot{r}_1 + 2i \dot{r}_1 \dot{\varphi} + i r_1 \ddot{\varphi} - r_1 \dot{\varphi}^2) e^{i\varphi} - r_2 \dot{\theta}^2 e^{i(\theta+\alpha)} + i r_2 \ddot{\theta} e^{i(\theta+\alpha)} + \\
 &\quad \underbrace{+ \text{trascinamento di } \theta_1 = \vec{\alpha}_{O_1}}_{\vec{\alpha}_{P_{tr}}} \quad \underbrace{- \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P-O_1) + \vec{\omega} \wedge (P-O_1)}_{\text{Moto di rotazione di } S_1} + \\
 &\quad + (\ddot{r}_2 + 2i \dot{r}_2 \dot{\alpha} + i r_2 \ddot{\alpha} - r_2 \dot{\alpha}^2) e^{i(\theta+\alpha)} + [i] 2 \dot{\theta} (\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)} = \\
 &\quad \underbrace{\vec{\alpha}_{P_{rel}}}_{\vec{\alpha}_{P_{rel}}} \quad \underbrace{+ [i] 2 \dot{\theta} (\dot{r}_2 + i r_2 \dot{\alpha}) e^{i(\theta+\alpha)}}_{\vec{\alpha}_{P_{cor}}} \\
 &= \vec{\alpha}_{P_{tr}} + \vec{\alpha}_{P_{rel}} + \vec{\alpha}_{P_{cor}}
 \end{aligned}$$

• CINEMATICA DEI SISTEMI MECCANICI

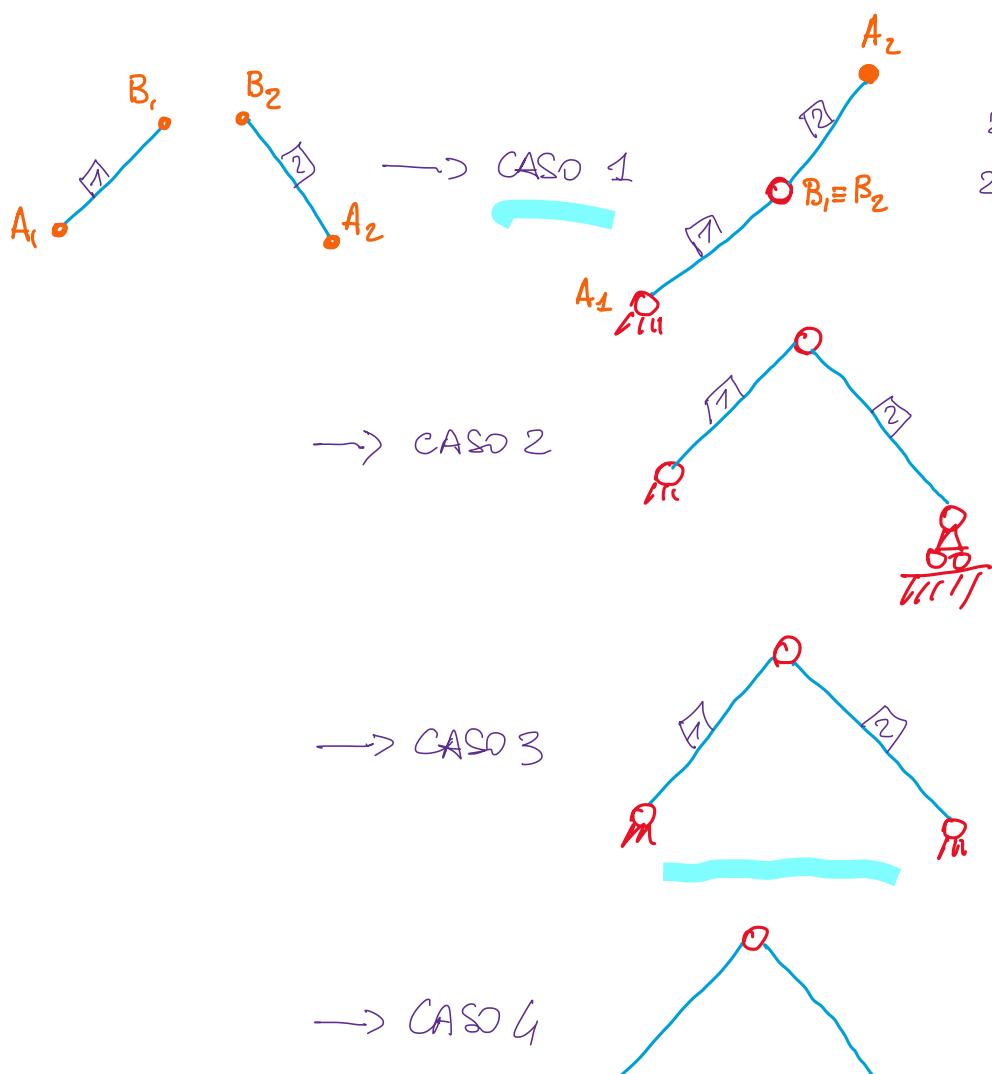


STRUTTURA
G.d.L. < 0



MECCANISMI
SISTEMI MECCANICI

G. d. L > 0



$$2 \text{ C.R.} \times 3 \text{ G.d.L} = 6 \text{ G.d.L}$$

$$2 \text{ CERMERE} \times 2 \text{ G.d.V} = -4 \text{ G.d.V}$$

2 G.d.L → MECCANISMO

$$2 \text{ C.R.} \times 3 \text{ G.d.L} = 6 \text{ G.d.L}$$

$$2 \text{ CERMERE} \times 2 \text{ G.d.V} = -4 \text{ G.d.V}$$

$$1 \text{ CARDOSO} \times 1 \text{ G.d.V} = -1 \text{ G.d.V}$$

1 G.d.L → MECCANISMO

$$2 \text{ C.R.} \times 3 \text{ G.d.L} = 6 \text{ G.d.L}$$

$$3 \text{ CERMERE} \times 2 \text{ G.d.V} = -6 \text{ G.d.V}$$

0 G.d.L

STATICA ←

→ STRUTTURA
(ISO'STATICA)

$$2 \text{ C.R.} \times 2 \text{ G.d.L} = 4 \text{ G.d.L}$$



OneNote

$\dots \rightarrow \text{d} \text{ur} - \text{d} \text{ur}$

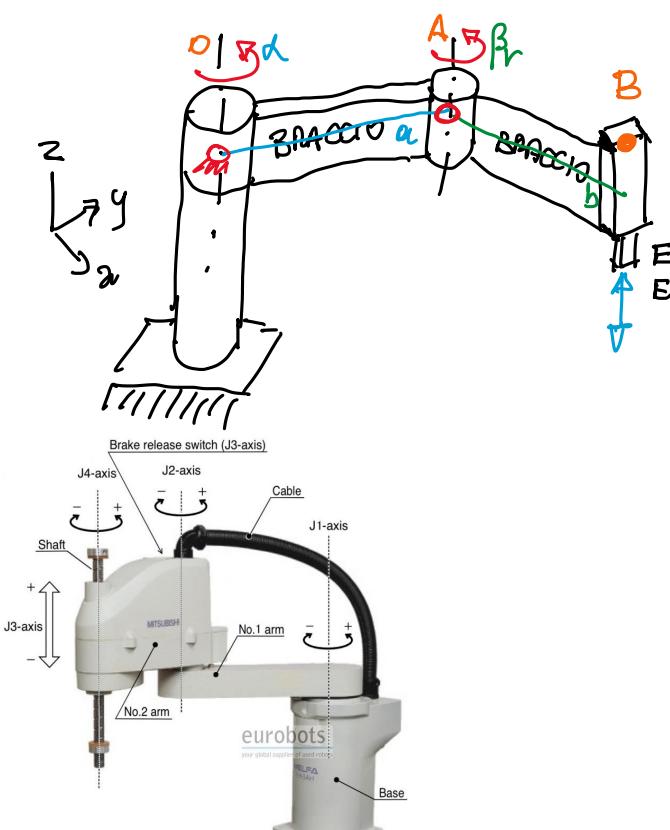
$$2 \text{ CERNIERE} \times 2 \text{ G.d.V} = -4 \text{ G.d.V}$$

$$1 \text{ MACASTRO} \times 3 \text{ G.d.V} = -3 \text{ G.d.V}$$

$\overbrace{-14 \text{ d.L}} \rightarrow \text{STRUTTURA}$
(PERSTATICHE)

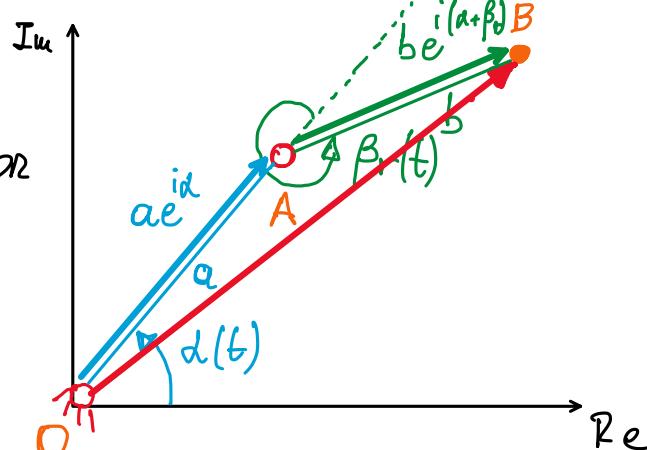
CONSIDERARE I
CORPI COME ELASTICI

② CINEMATICA DI UN ROBOT



RR(P)

- ↳ ACCOPPIAMENTO ROTOIDALE (CERNIERA NEL PIANO)
- ↳ ACCOPPIAMENTO PRISMATICO (MOVIMENTO DI B \perp PIANO)



2 G.d.L

DATI:
 $\alpha, b, \alpha(t), \beta(t)$

EQUAZIONE DI CHIUSURA (SOMMA VETORIALE)

$$\begin{cases} (B-O) = (A-O) + (B-A) \\ x_B + iy_B = a e^{i\alpha} + b e^{i(\alpha+\beta_r)} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 2 \text{EQ SCALARI} \\ (\text{FORMULA DI BULERO}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \frac{d}{dt}(x_B + iy_B) = \frac{d}{dt}\left(a e^{i\alpha} + b e^{i(\alpha+\beta_r)}\right) = \\ &= i\dot{\alpha}a e^{i\alpha} + i(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)b e^{i(\alpha+\beta_r)} \end{aligned}$$

FORMULA DI BULERO

$$\begin{cases} x_B = a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta_r) \\ y_B = a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta_r) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &i\dot{\alpha}a(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \\ &i(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)b(\cos(\alpha + \beta_r) + i \sin(\alpha + \beta_r)) \\ &\downarrow \\ &2 \text{EQ SCALARI} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -i\dot{\alpha}a \sin \alpha - (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)b \sin(\alpha + \beta_r) \\ \dot{y}_B = i\dot{\alpha}a \cos \alpha + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)b \cos(\alpha + \beta_r) \end{cases}$$

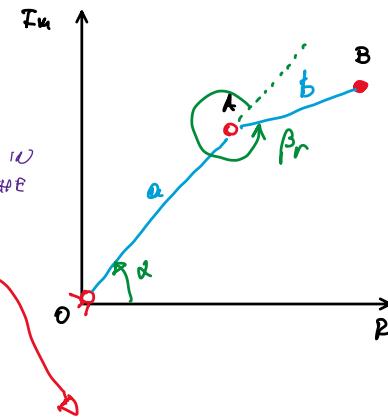
CATENE CINEMATICHE APerte

↳ ROBOT PLANARI

↳ DEFINIZIONE DEL "WORKSPACE"

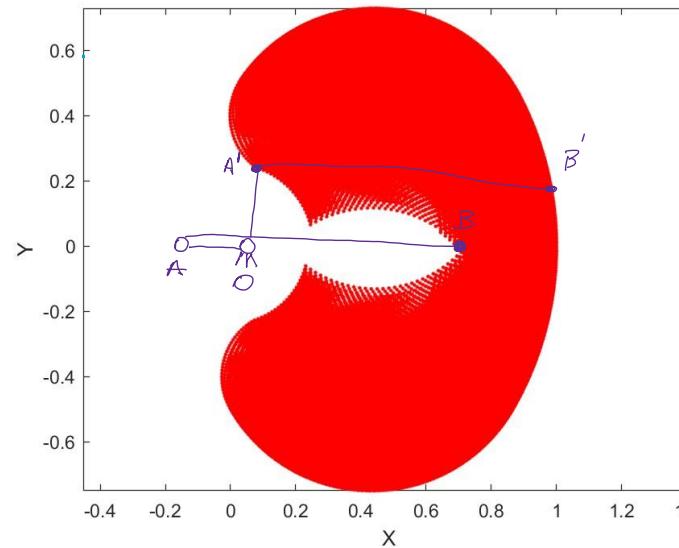
DONDE E' DEBITO IN
GENERALI CHE
 $0 \leq \alpha < 2\pi$
 $0 \leq \beta_r < 2\pi$

"WORKSPACE" NEL PIANO: PORZIONE DI
PIANO raggiungibile dal suo
MANIPOLATORE variando α e β_r



.PER CHI VOGLIESSE
DIVERTIRSI A
DISEGNARE
WORKSPACE
SEGUITA IL LINK.

[Link a BeeP \(installate prima il toolbox di Matlab, poi aprite lo script per vedere le istruzioni\)](#)



CATENE CINEMATICHE CHIuse

↳ BASE MECCANISMI TRASDATORI DELLA MECCANICA

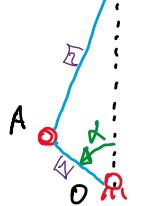
- MANOVELLISMO → MOTORI A COMBUSTIONE INTERNA / COMPRESSEUR / POMPA ALTERNATIVA
- QUADRILATERO ARTICOLATO → BIOMECCANICA / TELAI / PARACOLPI / SOSPENSIONI AUTO / AZIONAMENTI SUP.
(F1) CONTROLLO AERONAUTICHE
- GLIFO → MACCHINE UTENSILI /

TUTTI SISTEMI A 1 G.d.L.

B'

B

A



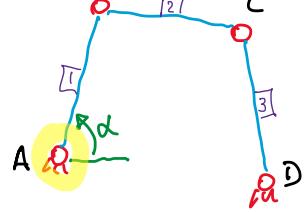
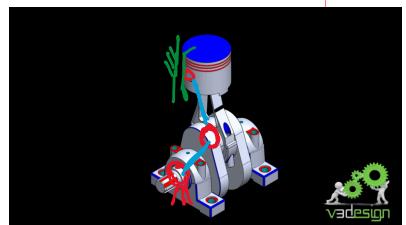
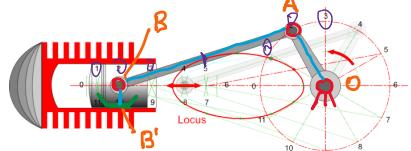
MANOVELLISMO

$$2CR \times 3GDL = 6GDL$$

$$2CRD \times 2GDV = -4GDV$$

$$1CARL \times 1GDV = -1GDV$$

1GDL

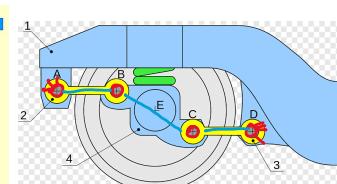
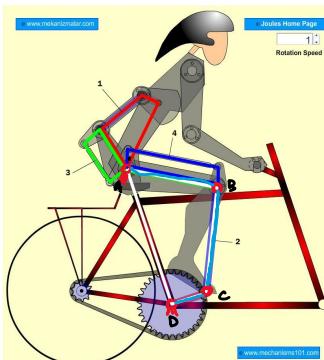
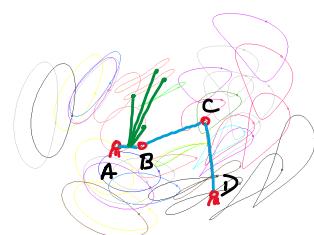
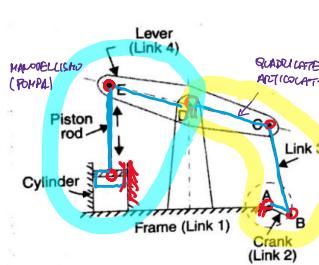
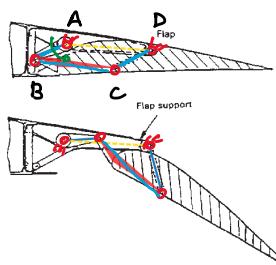


QUADRILATERO ARTICOLATO

$$3CR \times 3GDL = 9GDL$$

$$4CRD \times 2GDV = -8GDV$$

1GDL



COLLEGATO AD UN MOTORE

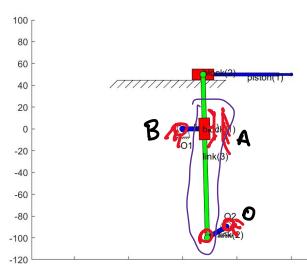
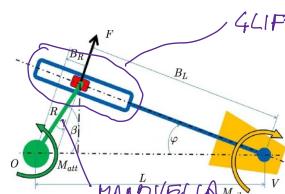
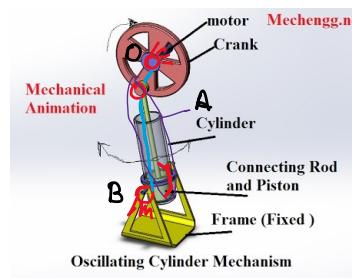
GLIFO

$$2CR \times 3GDL = 6GDL$$

$$2CRD \times 2GDV = -4GDV$$

$$1CARL \times 1GDV = -1GDV$$

1GDL



PER CHI VOLESSE UN SEMPLICE SIMULATORE DI SISTEMI ARTICOLATI IN AMBIENTE MATLAB

Link al simulatore sistemi articolati
(leggete il Readme.docx ed eseguite gli script suggeriti dopo aver estratto lo zip in una directory)

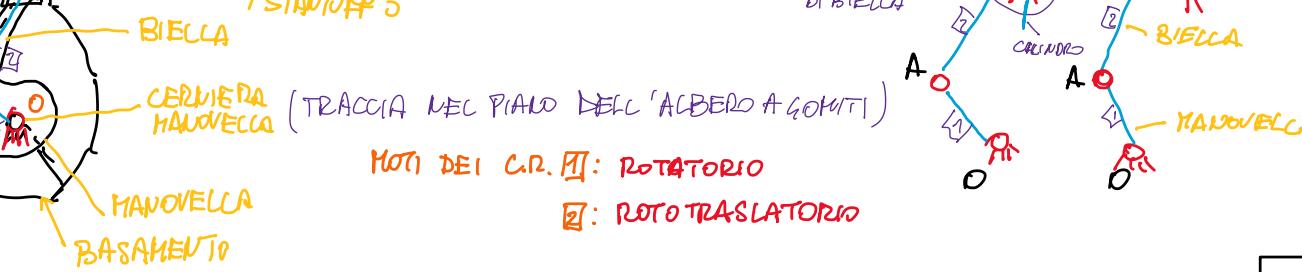


OVELLISMO

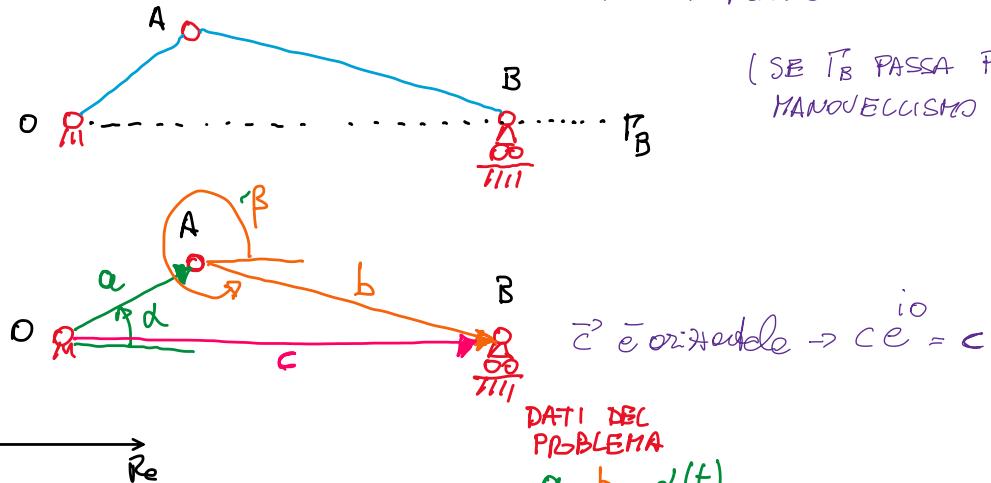
MOTORE A.C.I / POMPA / COMPRESSORE

PISTONE / CAMMINO ALTERNATIVI





ROTAZIONE DI 90° DEL MECCANISMO PER APPLICAZIONI PRATICHE



DATI DEL PROBLEMA
 $a, b, \alpha(t)$

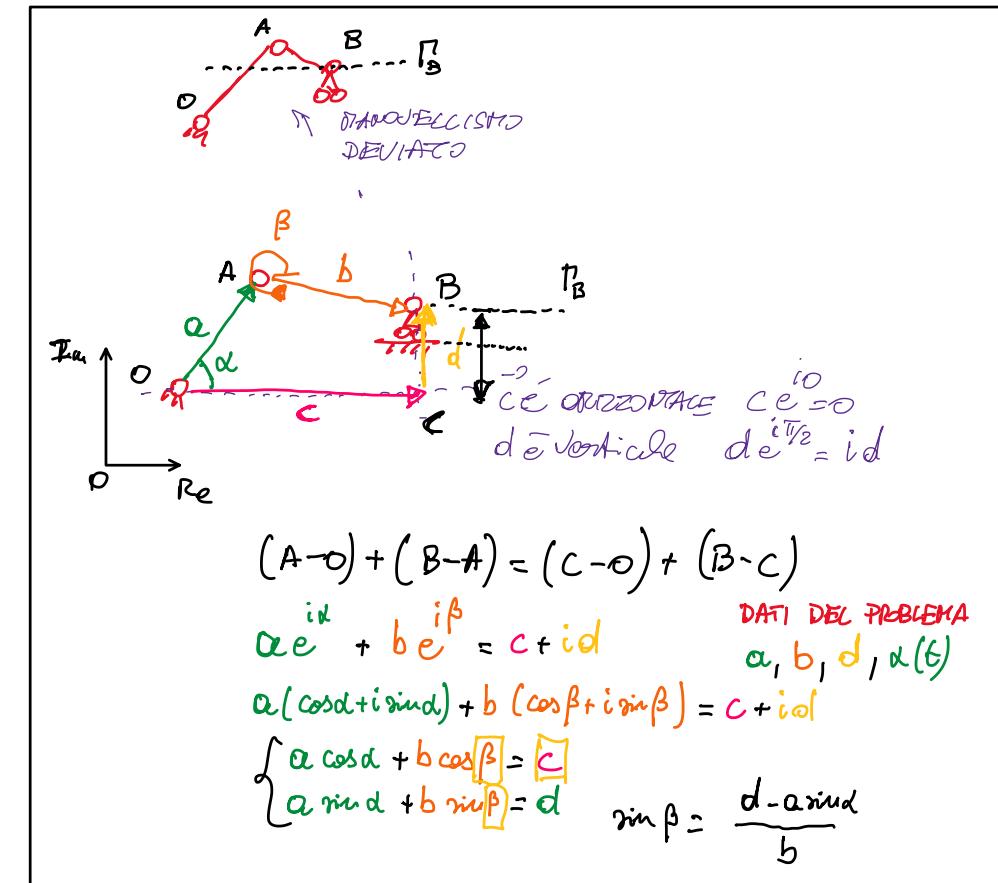
$$\begin{aligned} & \text{EQUAZIONE DI CHIUSURA} \\ & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \\ & a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c \quad \text{DATI DEL PROBLEMA} \\ & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad a, b, d, \alpha(t) \\ & \vec{a}(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \vec{b}(\cos\beta + i\sin\beta) = c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{DETERMINO } \beta \text{ E } c \\ & \text{SISTEMA DI EQ. TRASCENDENTI} \\ & \begin{cases} a \cos\alpha + b \cos\beta = c \\ a \sin\alpha + b \sin\beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

DALLA II
SOSTITUISCO
 β NELLA I

$$c(t) = a \cos\alpha + b \sqrt{1 - \left(\frac{a \sin\alpha}{b}\right)^2} \quad \alpha(t)$$

$$i \cdot id e^{i\alpha} + i \cdot ib e^{i\beta} = c$$



$$\vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_B$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_B$$

$$ia(\cos\alpha + i\sin\alpha) + i\beta b(\cos\beta + i\sin\beta) = \dot{c}$$



$$\begin{aligned} I & \left\{ -ia\sin\alpha + -i\beta b\sin\beta = \dot{c} \right. \\ II & \left\{ ia\cos\alpha + i\beta b\cos\beta = 0 \right. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{DETERMINARE } \beta \in \dot{c} \\ \leftarrow \text{SISTEMA ALGEBRICO} \end{array}$$

$$\dot{\beta}(t) = -i \frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta}$$

$$\ddot{c}(t) = -ia(\sin\alpha - \cos\alpha \tan\beta) \quad \otimes$$

ACCELERAZIONE

C
NUO

$$i\ddot{a}ae - i\dot{a}e + i\ddot{\beta}be - \dot{\beta}\dot{b}e = \ddot{c}$$

$$\ddot{\vec{a}}_A + \ddot{\vec{a}}_m + \ddot{\vec{a}}_{BA} + \ddot{\vec{a}}_{BA_m} = \ddot{\vec{a}}_B$$

$$\begin{cases} -ia\sin\alpha - i^2 a\cos\alpha - \beta b\sin\beta - \dot{\beta}^2 b\cos\beta = \ddot{c} \\ ia\cos\alpha - i^2 a\sin\alpha + \beta b\cos\beta - \dot{\beta}^2 b\sin\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{DETERMINARE } \dot{\beta} \in \ddot{c} \\ \leftarrow \text{SISTEMA ALGEBRICO} \end{array}$$

JACOBIANO

PUÒ ESSERE UTILE ESPRIMERE LA VELOCITÀ DI UN PUNTO IN FUNZIONE DELLA

COORDINATA LIBERA: AD ESEMPIO $\vec{v}_B = \dot{c}$ COME FUNZIONE DI $d(t)$

$$\dot{c} = \Delta(d) \dot{d}$$

COME IL MECCANISMO TRASFORMA LA VELOCITÀ (ANGOLARE) DI MECCA
VELOCITÀ DI B

$$\dot{c}(t) = \left[-d \left(\sin d - \cos d \tan(\arcsin \left(\frac{-a\sin d}{b} \right)) \right) \right] = \Delta(d) \dot{d}$$

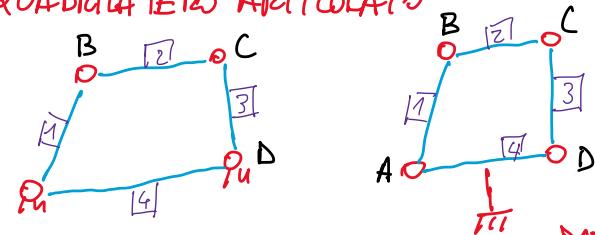
CALCOLO ACCELERAZIONE $\frac{d}{dt} \dot{c}(t)$

$$\ddot{c} = \frac{d}{dt} \Delta(d) \ddot{d} = \ddot{d} \Delta(d) + \Delta(d) \ddot{d}$$

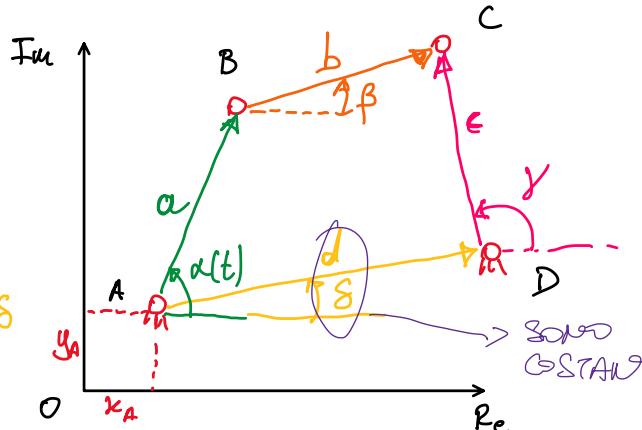
$$\frac{d}{dt} \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} + \underbrace{\frac{\partial \Lambda(\alpha)}{\partial \dot{\alpha}}}_{\text{Lagrange multipliers}}$$

$$\frac{\partial \Lambda(\alpha)}{\partial t} \cdot \frac{d \dot{\alpha}}{dt} \cdot \ddot{\alpha} = \frac{\partial \Lambda(\alpha)}{\partial t} \cdot \dot{\alpha}^2$$

QUADRILATERO ARTICOLATO



DATI DEL PROBLEMA
 a, b, c, d, s
 $\alpha(t)$



ZIONE

$$(B-A) + (C-B) = (D-A) + (C-D)$$

$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = de^{i\delta} + ce^{i\gamma}$$

EQUAZIONE DI CHIUSURA

$$a(\cos \alpha + i \sin \alpha) + b(\cos \beta + i \sin \beta) = d(\cos \delta + i \sin \delta) + c(\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

$$a \cos \alpha + b \cos \beta = d \cos \delta + c \cos \gamma \rightarrow \text{DETERMINARE } \beta \text{ e } \gamma$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta = d \sin \delta + c \sin \gamma \rightarrow \text{EQUAZIONI TRASCENDENTI}$$

CITA'

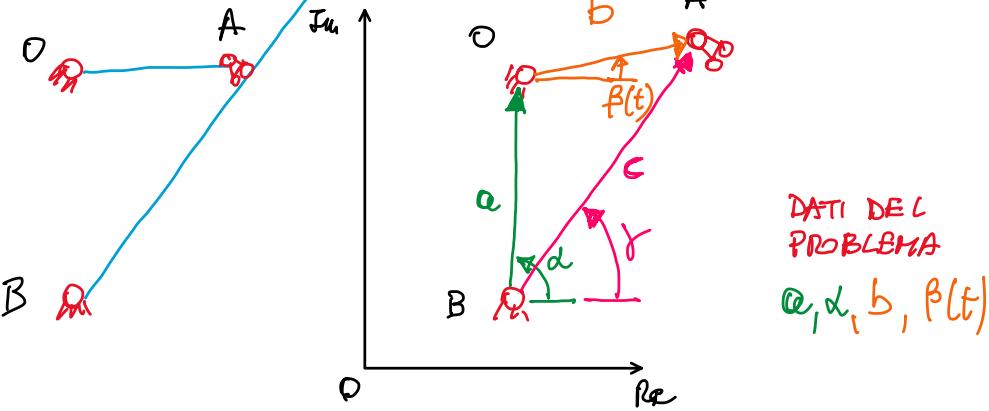
$$iae^{i\alpha} + ibe^{i\beta} = ie^{i\gamma}$$

\rightarrow 2 EQ SCALARI \rightarrow DETERMINARE β E γ

SEMPLIFICAZIONE

$$iae^{i\alpha} - iae^{i\alpha} + ibe^{i\beta} - ibe^{i\beta} = ie^{i\gamma} - ie^{i\gamma}$$

\rightarrow 2 EQ SCALARI \rightarrow DETERMINARE β E γ



DATI DEL PROBLEMA
 $\alpha, \alpha, \beta, \beta(t)$

POSIZIONE

$$(O - B) + (A - O) = (A - B)$$

$$\alpha e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} \quad \text{EQ DI CHIUSURA}$$

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta = \boxed{c} \cos \gamma \\ a \sin \alpha + b \sin \beta = \boxed{c} \sin \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{DETERMINARE } c \text{ E } \gamma \\ \text{EQ TRANSCENDENTI} \end{matrix}$$

VELOCITA'

ACCELERAZIONE

DINAMICA

↳ METODI PER LO STUDIO DELLA DINAMICA

- PRINCIPIO DI D'ALEMBERT → ESTENDE I METODI DELLA STATICA CONSIDERANDO EQUAZIONI DI EQUILIBRIO "DINAMICHE"
ESTENSIONE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA ALLA DINAMICA INTRODUCENDO FORZE D'INERZIA (FORZE F COPPIE)

- METODI "ENERGETICO"
 - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
 - BILANCIO DI POTERZE / EQUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA
 - EQUAZIONE DI LAGRANGE

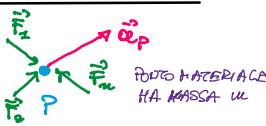
PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

- II PRINCIPIO DELLA DINAMICA

PER UN PUNTO

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}$$

COME È SCRITTA
NON È UN'EQUAZIONE DI
EQUILIBRIO (TERMINE A DX DELL'U = "PARA A O")



$$\vec{F}_{in} = -m \vec{a}$$

DEFINISCO QUESTO "PRODOTTO" COME FORZA D'INERZIA

$$\sum_i \vec{F}_i - m \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{in} = 0$$

LA FORZA D'INERZIA È CONSIDERATA DAI FISSI UNA FORZA "APPARENTE"



D'ALEMBERT

- APPLICAZIONE AD UN CORPO RIGIDO

↳ SISTEMA EQUIVALENTE DELLE FORZE D'INERZIA (1 FORZA + 1 COPPIA PER C.R.)

ESEMPIO: TRAVE INERZIERATA IN A (MOTORE ROTATORIO)



DATI: TRAVE È CHIGGIATA \downarrow
 $d\omega = \omega \frac{dz}{L}$
 MASSA ELEMENTARE dm MASSA TOTALE m

$$\ddot{\theta}, \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

PER DEFINIZIONE DI FORZA D'INERZIA, LA FORZA D'INERZIA NELL'ELEMENTO $d\vec{z}$ È:

$$\vec{F}_{in} = -m \vec{a}$$

DEVO DETERMINARE $\vec{a} = \vec{a}_m + \vec{a}_t$

$$\vec{a}_t(z) = \ddot{z} \vec{\theta}$$

COMPONENTE TANGENTE ALL'ACCELERAZIONE

$$\vec{a}_m(z) = \ddot{z} \vec{\theta}^2 \vec{w}$$

COMPONENTE RADIALE DELL'ACCELERAZIONE

$$\vec{F}_{in,b} = -m \vec{a}_t = -m \frac{L}{2} \ddot{z} \vec{\theta}$$

$$\vec{F}_{in,m} = -m \vec{a}_m = -m \frac{L}{2} \ddot{z} \vec{\theta}^2 \vec{w}$$

COMPONENTI ININTEGRABILI DELLA
FORZA D'INERZIA

$$\vec{F}_{in,b} = \int_0^L d\vec{F}_{in,b}(z) = -m \frac{\ddot{\theta}}{L} \int_0^L \ddot{z} dz \vec{\theta} = -m \frac{L}{2} \ddot{\theta} \vec{\theta}$$

$$\vec{F}_{in,m} = \int_0^L d\vec{F}_{in,m}(z) = -m \frac{\ddot{\theta}^2}{L} \int_0^L \ddot{z} dz \vec{w} = -m \frac{L}{2} \ddot{\theta}^2 \vec{w}$$

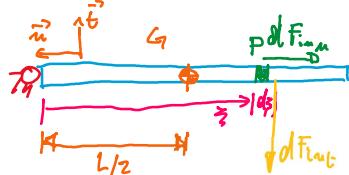
ACCELERAZIONE DI UN
PUNTO POSTO A L/2
NELLA TRAVE \Rightarrow
BARICENTRO DELLA TRAVE



$\vec{F}_{in,b} = -m \vec{a}_{bt}$
 $\vec{F}_{in,m} = -m \vec{a}_{bm}$

RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA
DI TUTTO IL CORPO RIGIDO È
PARI ALL'ACCELERAZIONE REC.
BARICENTRO PER LA MASSA
PER C.R. È VERSO OPPOSTO
ALL'ACCELERAZIONE

COPPIA PULSANTRE DELLE FORZE D'INERZIA (INFINITESIME)



MOMENTO DELLE $d\vec{F}_{in}$ RISPETTO AL
BARICENTRO G

$$\vec{C}_{in} = \int_0^L (P-G) \wedge d\vec{F}_{in} = \int_0^L (P-G) \wedge d\vec{F}_{in,b} =$$

$$= -m \ddot{\theta} \int_0^L (\vec{z} - \vec{L}/2) d\vec{z} \vec{k} =$$

$$(P-G) = (\vec{z} - \vec{L}/2) \vec{m}$$

$$= - \left[m \ddot{\theta} \frac{L^2}{12} K \right] \rightarrow$$

MOMENTO D'INERZIA
BARICENTRICO DELLA
TRAVE J_G

$$= - J_G \ddot{\theta} K$$

RISULTANTE DEGLI CORPI D'INERZIA È PARIGI AD UNA COPPIA
DATA DA MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO PER
ACCELERAZIONE ANGOLARE DEL CORPO RIGIDO, VERSO OPPOSTO
ALL'ACCELERAZIONE F DIREZIONE \perp PIANO

PER OGNI CORPO RIGIDO:

SISTEMA EQUIVALENTE
DELLE FORZE D'INERZIA

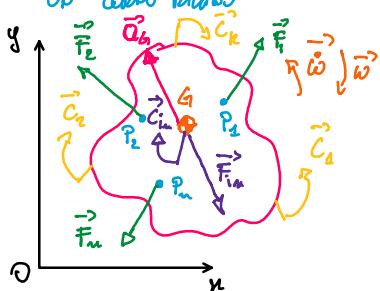
$$\begin{cases} \vec{F}_{in} = - [m \ddot{\theta}] \vec{a}_G \\ \vec{C}_{in} = - [J_G \ddot{\theta}] \vec{\omega} = - J_G \vec{\omega} \end{cases}$$

MASSA DEL C.R.

COME LA MASSA È DISTRIBUITA
ATTORIO AL PIANO CENTRO \rightarrow **MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO**

EQUAZIONI CARDINALI

DELLA DINAMICA DEL
UN CORPO RIGIDO

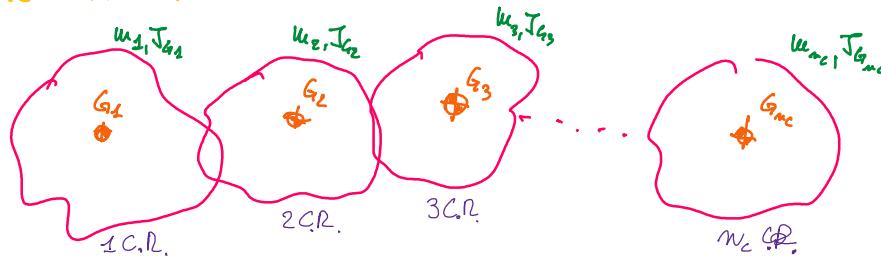


$$\begin{cases} \sum_j \vec{F}_j + \vec{F}_{in} = 0 \\ \sum_j (P_j - 0) \wedge \vec{F}_j + (G - 0) \wedge \vec{F}_{in} + \sum_r \vec{c}_r + \vec{C}_{in} = 0 \end{cases}$$

POLO DEL MOMENTO
NON NECESSARIAMENTE
ORIGINE DEL SISTEMA
DI REFERIMENTO

SISTEMI DI CORPI RIGIDI

SI DICE CHE UN SISTEMA



$$\begin{cases} \sum_{i,j} \vec{F}_{in,i} + \vec{F}_{in,j} = 0 \\ \sum_i (P_{in,i} - 0) \wedge \vec{F}_{in,i} + \sum_r \vec{c}_{in,i} + (G_i - 0) \wedge \vec{F}_{in,i} + \vec{C}_{in,i} = 0 \end{cases}$$

$j = 1, 2, \dots, m$ indice delle forze esterne per ogni C.R.

$i = 1, 2, \dots, n$ indice dei CORPI RIGIDI

$r = 1, 2, \dots, m_i$ indice delle coppie/mom. esterni per gli i C.R.

N.B.

A: PRODOTTO VETTORIALE
X: PRODOTTO SCALARE

• METODI ENERGETICI

- PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLA

$$\delta L = \sum_1^m \sum_1^n \vec{F}_{i,j} \times \delta \vec{P}_{i,j} + \sum_1^m \sum_1^m \vec{C}_{i,r} \times \delta \vec{\theta}_i +$$

LAVORO FORZE ESTERNE

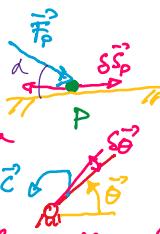
LAVORO MOMENTI/COPPIE ESTERNE

LAVORO VIRTUALE

$$\delta L = \vec{F}_P \times \delta \vec{s}_P$$

$\delta \vec{s}_P$ è compatibile con il vincolo

$$\delta L = \vec{C} \times \delta \vec{\theta}$$



$\delta\Theta$ è compatibile con il circuito

$$+ \sum_i^m (-m_i \vec{a}_{g_i} \times \delta \vec{\theta}_i - J_{g_i} \vec{\omega}_i \times \delta \vec{\theta}_i) = 0$$

LAZIO FORZA D'INERZIA LAZIO COPPIA D'INERZIA

EVIDENZIO IL SL CON LE COORDINATE FISICHE

$$\delta L = \sum_i^m \sum_j^m (F_{x_{ij}} \delta x_{ij} + F_{y_{ij}} \delta y_{ij}) + \sum_i^m \sum_j^m C_i \delta \theta_i +$$

$$+ \sum_i^m (-m_i \alpha_{gx} \delta x_{gi} - m_i \alpha_{gy} \delta y_{gi} - J_{gi} \ddot{\theta}_i \delta \theta_i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x_{gi} = \sum_{s=1}^{n_{GL}} \frac{\partial x_{gi}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta y_{gi} = \sum_{s=1}^{n_{GL}} \frac{\partial y_{gi}}{\partial q_s} \delta q_s \\ \delta \theta_i = \sum_{s=1}^{n_{GL}} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_s} \delta q_s \end{array} \right.$$

1 equazione

$$x_{gi} = x_{gi}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GL}})$$

$$y_{gi} = y_{gi}(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GL}})$$

$$\theta_i = \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_{GL}})$$

LE q_s SONO LE COORDINATE CHE
"DESCRIVONO" I GL DEL SISTEMA
AI C.R.

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n_{GL}} (Q_s + Q_{in,s}) \delta q_s = 0$$

1 equazione che è soddisfatta se tutti i termini
tra parentesi sono uguali a 0

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 + Q_{in,1} = 0 \\ Q_2 + Q_{in,2} = 0 \\ \vdots \\ Q_{n_{GL}} + Q_{in,n_{GL}} = 0 \end{array} \right.$$

SISTEMA DI n_{GL} EQUAZIONI

I "Q" SONO CHIAMATI "COMPONENTI LAGRANGESE"

$$Q_s = \sum_i^m (-m_i \alpha_{gx} \frac{\partial x_{gi}}{\partial q_s} - m_i \alpha_{gy} \frac{\partial y_{gi}}{\partial q_s} - J_{gi} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_s})$$

$$Q_{in,s} = \sum_i^m (-m_i \alpha_{gx} \frac{\partial x_{gi}}{\partial q_s} - m_i \alpha_{gy} \frac{\partial y_{gi}}{\partial q_s} - J_{gi} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_s})$$

I "Q_{in,s}" SONO LE "COMPONENTI LAGRANGESE" DELLE FORZE D'INERZIA

$$Q_{in,1} = \sum_i^m (-m_i \alpha_{gx} \frac{\partial x_{gi}}{\partial q_1} - m_i \alpha_{gy} \frac{\partial y_{gi}}{\partial q_1} - J_{gi} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_1}) \leftarrow \begin{array}{l} \text{ESEMPIO DI } Q_{in,1} \\ \text{PER LA PRIMA} \\ \text{EQUAZIONE DI } \cancel{Q_s} \end{array}$$

TEOREMI ENERGETICI

- **BILANCIO DI POTENZE**
- **TEOREMA DELLA ENERGIA CINETICA**
- **EQUAZIONE DI LAGRANGE**

BILANCIO DI POTENZE

RIPRENDIAMO IN ESAME IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^n \vec{F}_{i,j} \times \delta \vec{P}_{i,j} + \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{r=1}^{n_H} \vec{C}_{i,r} \times \delta \vec{\theta}_i + \sum_{i=1}^{n_c} (-m_i \vec{\alpha}_{i,i} \times \vec{S}\vec{G}_i - J_{\vec{\omega}_i} \vec{\omega}_i \times \delta \vec{\theta}_i) = 0$$

↓
 $\frac{d}{dt}$
L

LAVORO DELLE FORZE ESTERNE
 $\sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^n \vec{F}_{i,j} \times \frac{d\vec{P}_{i,j}}{dt}$

LAVORO MOMENTI/COPPIE ESTERNI
 $\sum_{i=1}^{n_c} \sum_{r=1}^{n_H} \vec{C}_{i,r} \times \frac{d\vec{\theta}_i}{dt}$

LAVORO FORZE D'INERZIA
 $\sum_{i=1}^{n_c} (-m_i \vec{\alpha}_{i,i} \times \frac{d\vec{q}_i}{dt})$

LAVORO COPPIE D'INERZIA
 $- J_{\vec{\omega}_i} \vec{\omega}_i \times \frac{d\vec{\theta}_i}{dt}$

$$W_{i,j} = \vec{F}_{i,j} \times \frac{d\vec{P}_{i,j}}{dt} = \vec{F}_{i,j} \times \vec{V}_{P_{i,j}}$$

POTENZA DELLA FORZA $\vec{F}_{i,j}$

$$W_{i,r} = \vec{C}_{i,r} \times \frac{d\vec{\theta}_i}{dt} = \vec{C}_{i,r} \times \vec{\omega}_i$$

POTENZA DELLA COPPIA/MOMENTO $\vec{C}_{i,r}$

$$W_{in,i} = -m_i \vec{\alpha}_{i,i} \times \vec{V}_{G_i} - J_{\vec{\omega}_i} \vec{\omega}_i \times \vec{V}_{\omega_i}$$

POTENZA DEL SISTEMA EQUIVALENTE D'INERZIA DEL CORPO i -esimo

$i = 1, \dots, n_c$ (indice dei C.R.)

$j = 1, \dots, n$ (indice delle forze esterne agenti sul C.R. i -esimo)

$r = 1, \dots, n_H$ (indice delle coppi/momenti esterni agenti sul C.R. i -esimo)

$$\sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^n W_{i,j} + \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{r=1}^{n_H} W_{i,r} + \sum_{i=1}^{n_c} W_{in,i} = 0 \quad 1 \text{ EQUAZIONE} \rightarrow 1 \text{ INCognita}$$

$\sum W + \sum W_{in} = 0$

\rightarrow

C
assegnato
G
centro di massa
cristallizzato!
F?
V_P
V_G
V_{omega}
C

POTENZA FORZE/COPPIE ESTERNI

POTENZA FORZE/COPPIE D'INERZIA

BILANCIO DI POTENZE (PER IL CALCOLO DI F)

$$\vec{F} \times \vec{V}_P + \vec{C} \times \vec{V}_\omega - m_i \vec{\alpha}_{i,i} \times \vec{V}_G - J_{\vec{\omega}_i} \vec{\omega}_i \times \vec{V}_\omega = 0$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (DUALE DEL BILANCIO DI POTENZE)

- CALCOLO DELL'ENERGIA CINETICA DI UN C.R.

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \vec{V}_p \times \vec{V}_p p dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{V}_p^2 p dV$$

V volume infinitesimo
 p pressione generica
 m massa del C.R.

APPLICO THAI RIVALS

$$\vec{V}_p = \vec{V}_g + \vec{\omega} \wedge (P-G)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{V}_g \times \vec{V}_g}_{m} \int_V p dV + \frac{1}{2} \vec{V}_g \times \left(\vec{\omega} \wedge \int_V (P-G) p dV \right)_f + \frac{1}{2} \left(\vec{\omega} \wedge \int_V (P-G) p dV \right) \times \vec{V}_g + \frac{1}{2} \boxed{\vec{\omega}^2 \int_V |P-G|^2 p dV}$$

MOMENTI STATICI
RISPETTO AL BARICENTRO $(\vec{\omega} \wedge (P-G)) \times (\vec{\omega} \wedge (P-G)) = \vec{\omega}^2 |P-G|^2$

$G = 0$

$$\int_V |P-G|^2 p dV = J_g$$

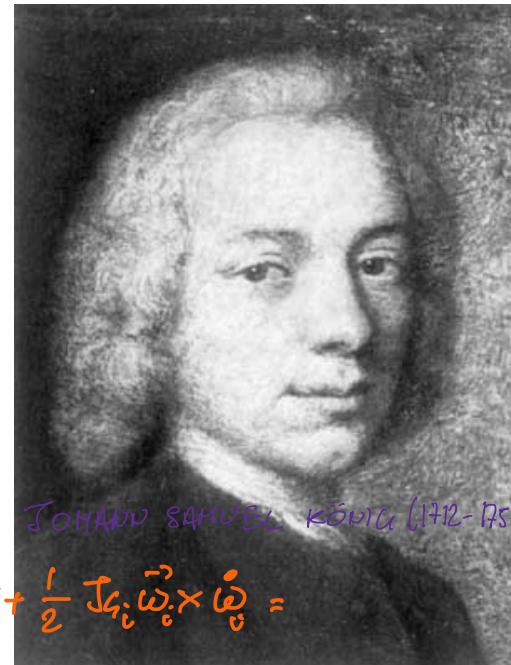
$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{V}_g \times \vec{V}_g + \frac{1}{2} J_g \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \vec{V}_g^2 + \frac{1}{2} J_g \vec{\omega}^2$$

↓
TEOREMA DI
KÖNIG (KÖNIG)

SE DEFINO RISPETTO AL TEMPO LA E_{ci} :

↓ DELL C.R. i-esico

$$\frac{d}{dt} \frac{dE_{ci}}{dt} = \frac{1}{2} m_i \vec{\alpha}_{hi} \times \vec{V}_{hi} + \frac{1}{2} m_i \vec{V}_{hi} \times \vec{\alpha}_{hi} + \frac{1}{2} J_{gi} \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i + \frac{1}{2} J_{gi} \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i = \\ = m_i \vec{\alpha}_{hi} \times \vec{V}_{hi} + \int_{C_i} \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{\omega} = -W_{hi}$$

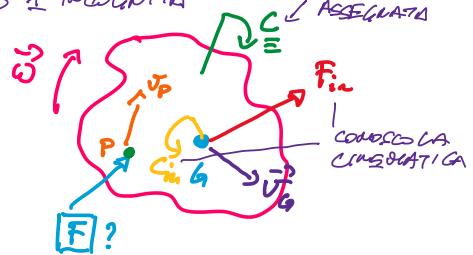


JOHANN SAMUEL KÖNIG (1712-1757)

$$W_{in,i} = - \frac{dE_{ci}}{dt} \quad \text{SE RIPRENDO L'ESPRESSIONE DEL BILANCIO DI POTENZA}$$

$$\sum W + \sum W_{in} = 0 \Rightarrow \sum W = \frac{dE_c}{dt} \quad \text{TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA}$$

1 EQUAZIONE → 1 INCognita



BILANCIO DI POTERZE (PER IL CALCOLO DI F)

$$\vec{F}_x \vec{v}_p + \vec{C} \times \vec{\omega} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}_g \times \vec{v}_g + \frac{1}{2} J_g \vec{\omega} \times \vec{\omega} \right) =$$

↑ UNICA INCognITA

$$= m \vec{a}_g \times \vec{v}_g + J_g \vec{\omega} \times \vec{\omega}$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE ("THE ULTIMATE" PER LA DINAMICA)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = Q_n$$

E_c : ENERGIA CINETICA

V : ENERGIA POTENZIALE

$$Q_n: \text{COMPONENTE LAGRANGIANA} = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_n}$$

L : LAVORO FORZE ESTERNE

+ DELLE INTERNE NON CONSERVATIVE

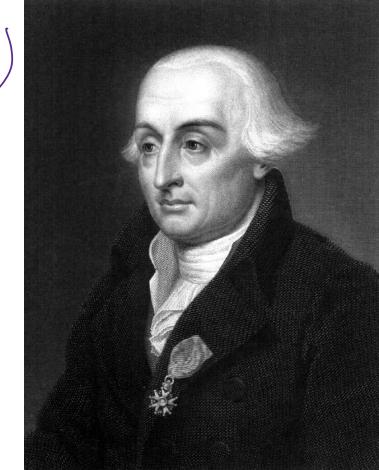
q_n : COORDINATE LIBERE INDEPENDENTI

DIMOSTRAZIONE EQ. LAGRANGE

→ PRINCIPIO DI D'ALEMBERT + PLV

$$\sum_i^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \times S x_i = 0 \quad \text{per } i=1, 2, \dots, N$$

COORDINATE
SICURE



GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE (NATO A TORINO)
AKA JOSEPH LOUIS LAGRANGE 1736-1813



LA PRESCRIZIONE DEL MOTTO LA POSSO FARLE AUCHÉ MEDIANTE LE COORDINATE CHE GENERALIZZATE INDIPENDENTI q_k CON $k = 1, 2, \dots, n$
 \vec{x}_i NON SONO ESPlicitamente DIPENDENTI DAL TEMPO

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ per } i = 1, 2, \dots, N$$

CALCOLO LA VELOCITÀ DELLE \vec{x}_i :

$$\vec{\dot{x}}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \text{ per } i = 1, 2, \dots, N$$

DATO CHE $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}$ NON DIPENDE DA $\dot{q}_n \Rightarrow$

$$\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \text{ per } i = 1, 2, \dots, N \text{ e } k = 1, 2, \dots, n$$

SPOSTAMENTI VIRTUALI DELLE \vec{x}_i :

$$\delta \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

SOSTITUISCO $\delta \vec{x}_i$ NECCA II PARTE PER PLV

$$\sum_i^N: m_i \ddot{x}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_i^N m_i \ddot{x}_i \times \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_i^N m_i \ddot{x}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

OGNI TERMINE DELL'EQ. PRECEDENTE \hookrightarrow SCRIVO COME

$$m_i \ddot{x}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \right) - m_i \dot{x}_i \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \right)$$

$$\Rightarrow m_i \ddot{x}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} = \frac{d}{dt} \left[\left(m_i \dot{x}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \right) - \left[m_i \dot{x}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \right] \right] = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \right) - \frac{\partial}{\partial q_n} \right] \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i \times \dot{x}_i \right)$$

RIPRENDO LA \star E SOSTITUISCO LA \star

$$\sum_i^N m_i \ddot{x}_i \times \delta \vec{x}_i = \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \right) - \frac{\partial}{\partial q_n} \right] \left(\sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i \times \dot{x}_i \right) \right\} \delta q_k =$$

$$\sum_i^N \left[d \left(\frac{\partial E_c}{\partial q_n} \right) \frac{\partial E_c}{\partial q_n} \right] C_n =$$

SEPOLTO AL PANTEON



$$\frac{d \vec{x}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \dots$$

$$\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_n} + \dot{q}_n \cancel{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_n}} \Rightarrow \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}$$

BABA TRUCCO!! \Rightarrow

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \right) - \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i \times \dot{x}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n} \right) - m_i \dot{x}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_n}$$

$$= \sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_k} \right] \delta q_k \quad (1)$$

CONSIDERO LE FORZE ESTERNE $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t)$

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ESTERNE (PRIMO TERMINE DI \otimes)

$$\delta L = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_i \vec{F}_i \times \sum_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_k \left(\sum_i \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_k Q_k \delta q_k \quad (2)$$

CONSIDERO IL LAVORO DI FORZE INTERNE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_{I,i} \cdot \delta \vec{x}_i &= \delta L_c + \delta L_{nc} = -\delta V + \sum_k Q_{nc,k} \delta q_k = \\ &= - \left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n} \delta q_n \right) + \sum_k Q_{nc,k} \delta q_k = - \sum_k \left(\frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc,k} \right) \delta q_k \quad (3) \end{aligned}$$

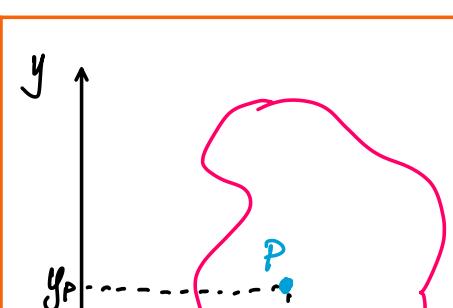
$\hookrightarrow V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ LE FORZE CONSERVATIVE HANNO ENERGIA POTENZIALE

SOSTITUISCO (1) (2) (3) NELL'EQUAZIONE D'ALEMBERT + PUV \otimes

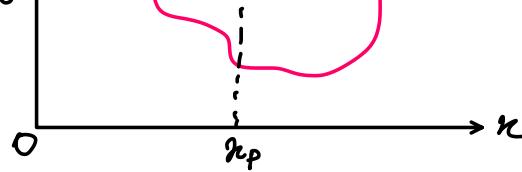
$$- \sum_k \left[\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{nc,k} - Q_k \right] \delta q_k = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{nc} + Q$$

NOTE:



DIMOSTRAZIONE DEL PERCHE' IL MOMENTO STATICO SUSPESO AL BARICENTRO E' NULLO



$$M_0^{(I)} x = \int_V y_p p dV$$

$$M_0^{(II)} g = \int_V x_p p dV$$

DEFINIZIONE
MOMENTO STATICO
RISPETTO AD
O

$$M_{g,x}^{(I)} = \int_V |y_p - y_g| p dV = 0$$

$$M_{g,y}^{(I)} = \int_V |y_p - x_g| p dV = 0$$

DEF.

$$y_g = \frac{\int_V y_p p dV}{m} \Rightarrow y_g \int_V p dV = \int_V y_p p dV$$

$$\text{DEF } x_g = \frac{\int_V x_p p dV}{m} \Rightarrow x_g \int_V p dV = \int_V x_p p dV$$

DEFINIZIONE DI PIANO CENTRO

NB : $\frac{d}{dt} L = W$

$\downarrow \quad \downarrow$

L : LAVORO W : POTERZA

$$\sum w = \frac{dE_c}{dt}$$

$\int_0^t dt$

EQUIVALENZA
TRA ENERGIA
CINETICA

$$\int_0^t \sum w dt = \int_0^t \frac{dE_c}{dt} dt$$

$$\sum L(t) - \sum L(0) = \underbrace{E_c(t) - E_c(0)}_{\Delta E_c}$$

$$\sum L = \Delta E_c$$

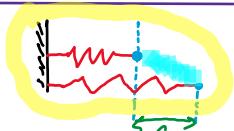
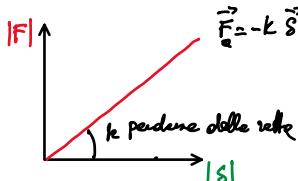
Lezione lunedì 16 novembre 2020

lunedì 16 novembre 2020 10:16

- FORZE ELASTICHE / GRAVITAZIONALI NELL'EQ. DI LAGRANGE
- FORZE VISCOSE DISCRIPTIVE NELL'EQ. DI LAGRANGE
- VIBRAZIONI MECCANICHE

FORZE ELASTICHE → MOLLA

LA MOLLA HA IN GENERALE CARATTERISTICHE LINEARI →
→ LEGGE DI HOOKE



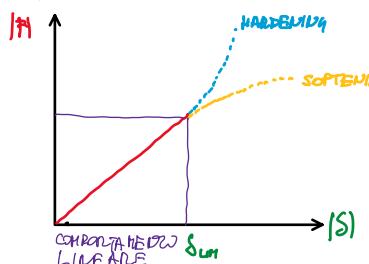
$$\vec{F}_e = -k \vec{s}$$

1 FORZA ELASTICA
VARIAZIONE DI LUNGHEZZA DELLA MOLLA

RIGIDEZZA (PARAMETRO CARATTERISTICO DELLA MOLLA)

$$\vec{s} = (\Delta \vec{x}_1, -\Delta \vec{x}_2)$$

VERA REALTÀ LE MOLLE SONO LINEARI SOLO IN UN CERTO INTERVALLO DI DEFORMAZIONE



s_{un} : DEFORMAZIONE LIMITE (BAGLIO DI LINIERITÀ)

- LAVORO DI DEFORMAZIONE DI UNA MOLLA → ENERGIA POTENZIALE DELLA MOLLA

$$L_{def} = \int_0^s \vec{F}_e \cdot d\vec{q} = \int_0^s -k \vec{q} \cdot d\vec{q} = -\frac{1}{2} k s^2 \quad V_e = -L_{def} = \frac{1}{2} k s^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_e}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial E_e}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{ek}$$

FORZE GRAVITAZIONALI

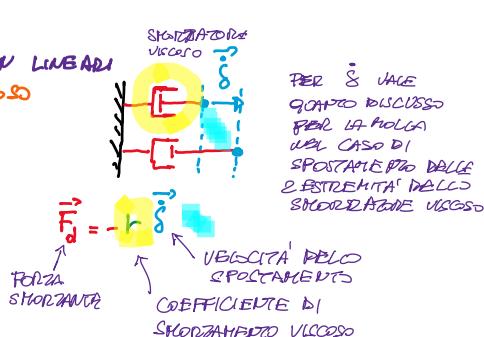
$$L_g = \int_0^h -m \vec{g} \cdot d\vec{y} = -mgh \quad \vec{g} \downarrow \quad \uparrow d\vec{y} \quad V_g = -L_g = mgh$$

FORZE DISSIPATIVE DI TIPO VISCOSE

- IN GENERALE EFFETTI DISSIPATIVI SONO NON LINEARI

↪ CASO PARTICOLARE: DISSIPATORE VISCOSE

- TIPICAMENTE AMMORTIZZATORE



PER \vec{s} VICE
GOTTO DISCUSSO
PER LA MOLLA
NEL CASO DI
SPOSTAMENTO DOLCE
E ESTREMITÀ DELLA
SCORDAZIONE VISCOSE

COMPONENTE LAGRANGIANA DELL'EFFETTO DELLO SCORDAZIONE VISCOSE

$$Q_{dk} = -r \vec{s} \frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k} \rightarrow \text{DIPENDENZA DI } \vec{s} \text{ DALE COORDINATA LIBERE}$$

$$\vec{s} = \vec{s}(q_k) \rightarrow \dot{\vec{s}} = \sum_k \frac{\partial \vec{s}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k}$$

$$Q_{dk} = -r \vec{s} \frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k} = -r \vec{s} \frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{r}{2} \left(\frac{1}{2} r \vec{s}^2 \right) \quad D = \frac{1}{2} r \vec{s}^2$$

SE CONSIDERO SOLO IL TERMINE $\frac{1}{2} r \vec{s}^2$

$$\left[\frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k} \right] = \frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k} = 1$$

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k} = 1$$

$$\dot{Q}_{dk} = -\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_k} D$$

'FONZIONE DISSIPATIVA
(PER SFORZAMENTO Viscoso)

$$\partial \dot{\varphi}_n \quad \partial \dot{\varphi}_k$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_n} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_n} + \frac{\partial V}{\partial \dot{\varphi}_n} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_n} = -\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_k} D + Q_k$$

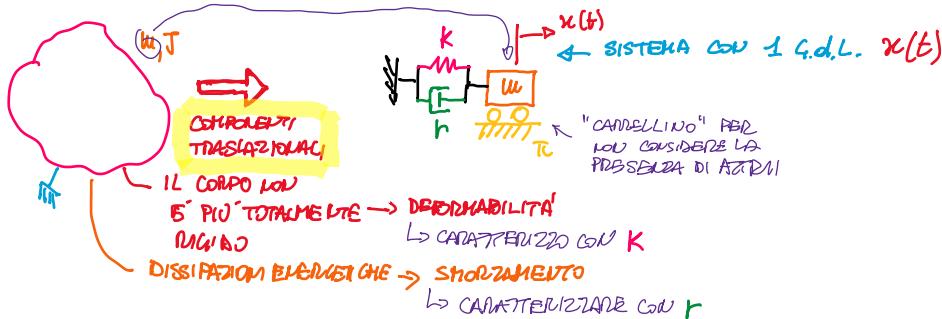
INTRODUZIONE DELLA FONZIONE
DISSIPATIVA NEL LATO SX DELL'EQ.
DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_n} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_n} + \frac{\partial V}{\partial \dot{\varphi}_n} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_n} = Q_k$$

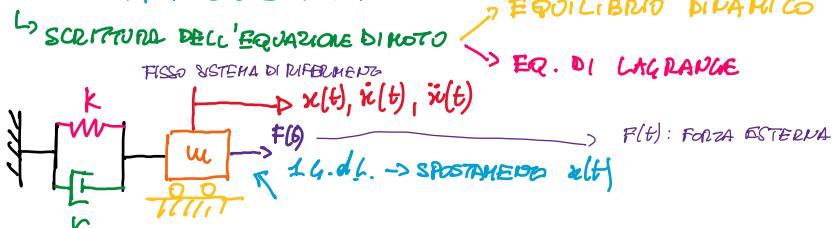
COME I COMBINATI LAGRANGIANI RESTANO
TUTTE LE ALTRE FORZE ESTERNE CHE
LAVORANO

VIBRAZIONI MECCANICHE

- RIUNIAMO A CONSIDERARE "TUTTO" IL NUOVO CONCETTO CONMESSO DA C.R.
- "CON CENTRO MO" I CORPI RIGIDI (RAPPRESENTAZIONE A PARAMETRI OSCILLATORI)



- VIBRAZIONI DI SISTEMA 1 G.d.L



- EQUILIBRIO DINAMICO DELLA MASSA

$$F_i = m \ddot{x}$$

$$F_e = -kx$$

$$F_d = -r \dot{x}$$

$$F_i + F_e + F_d = F(t)$$

$$m \ddot{x} + kx + r \dot{x} = F(t)$$

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + kx = F(t) \rightarrow \text{EQUAZIONE DI MOTTO DEL SISTEMA}$$

- EQUAZIONE DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_n} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_n} + \frac{\partial V}{\partial \dot{\varphi}_n} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_n} = \frac{\delta^* L}{\delta \dot{x}} \uparrow Q_k$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

$$D = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$$

$$L = \vec{F}(t) \times \vec{\dot{x}} = F(t)x$$

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + kx = F(t)$$

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + kx = F(t) \rightarrow \text{EQUAZIONE DI MOTTO DEL SISTEMA}$$

— VIBRAZIONI DEL SISTEMA: MUOVI LIBERAMENTE NELLO SPAZIO

→ MANCA LO SPORCO DI FORZA NETTO $F_a = 0 \Leftrightarrow F_r = 0$

NON TES FORZANTI ESTERNE $F(t) = 0$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

EQ. DIFFERENZIALE, DERIVATA TOTALI, INCOMPLETA, OMOGENEA, COEFFICIENTI COSTANTI

INTEGRALE GENERALE $x(t) = X e^{kt}$

$$\dot{x}(t) = kX e^{kt}$$

$$\ddot{x}(t) = k^2 X e^{kt}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (m\lambda^2 + k)X e^{kt} = 0$$

$X = 0 \rightarrow$ SOLUZIONE BANALE

IL SISTEMA NON SI MUOVE

SE $X \neq 0$ $(m\lambda^2 + k) = 0 \rightarrow$ EQ ALGEBRICA DI II GRADO → EQUAZIONE CARATTERISTICA

SOLUZIONI EQ. CARATTERISTICA

$$[\omega] = \text{rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [f] = \text{Hz}$$

FREQUENZA PROPRIA

$$X_1 e^{kt} + X_2 e^{-kt}$$

VETTORI ROTANTI NEL PIANO COMPLESSO

$$X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t}$$

+

$$X_1 e^{$$

Lezione venerdì 20 novembre 2020

venerdì 20 novembre 2020 11:18

VIBRAZIONI DEL SISTEMA: MOTORE LIBERO CON SMORZAMENTO

$x(t) = X e^{\lambda t}$

$\dot{x}(t) = \lambda X e^{\lambda t}$

$\ddot{x}(t) = \lambda^2 X e^{\lambda t}$

$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$

NON C'È LA FORZANTE
EQ. DIFFERENZIALE, DERIVATE TOTALI
IN ORIGINE, COMPLETA, OMOCROMA,
COEFFICIENTI COSTANTI

$(m\lambda^2 + r\lambda + k) X e^{\lambda t} = 0$

SOLUZIONE BASICA
 $X=0 \Rightarrow x(t)=0$
IL SISTEMA NON SI MUOVE

SE $X \neq 0$

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$$

EQ. DI GRADO ALGEBRICO

EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL SISTEMA

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

Δ DIPENDE DAL DISCRIMINANTE

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

PULSAZIONE NATURALE DEL SISTEMA

$$\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0$$

$$\frac{r^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$$

$$\frac{r^2}{4m^2} = \frac{4m\omega^2}{4m^2}$$

$$\frac{r^2}{4m^2} = \omega^2$$

$$r^2 = 4m^2\omega^2$$

$$r = 2m\omega$$

$$r_c = 2m\omega$$

r_c : SMORZAMENTO CRITICO

SE $r > r_c$	$\Delta > 0$	$h > 1$
$r < r_c$	$\Delta < 0$	$h < 1$
$r = r_c$	$\Delta = 0$	$h = 1$

$$h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega}$$

FASSONE DI SMORZAMENTO (SMORZAMENTO ADHERZIONALE)

 $1/r_c < h < 1$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \left(\frac{r}{2m}\right)^2 = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_d$$

$\hookrightarrow \omega_d = \omega\sqrt{1 - h^2}$

$$x(t) = X_1 e^{(-\alpha + i\omega_d)t} + X_2 e^{(-\alpha - i\omega_d)t} = e^{-\alpha t} (X_1 e^{i\omega_d t} + X_2 e^{-i\omega_d t}) =$$

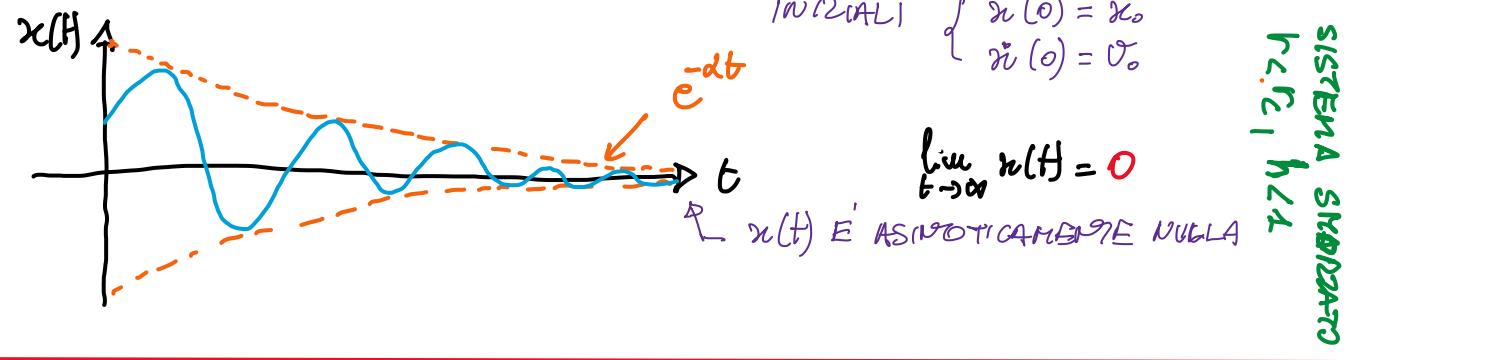
$$= e^{-\alpha t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t]$$

TERMINI ROTOLANTE

FUNZIONE ARMONICA

PULSAZIONE SISTEMA
SOPRATTUTTO $\omega_d < \omega$

FORMULA DI
EULER $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$



SISTEMA SOPRATTUTTO
 $h < r_c$, $h > 1$

c) $r > r_c$, $\Delta > 0$, $h > 1$

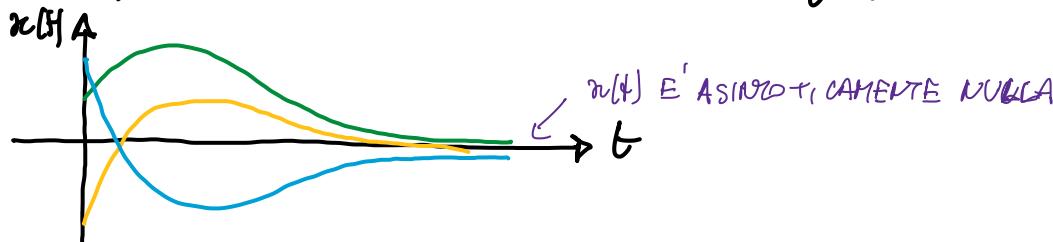
$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta} < \lambda_1 = -\alpha_1$$

$$\lambda_2 = -\alpha_2$$

PB: $\alpha > \sqrt{\Delta}$

$$x(t) = X_1 e^{-\alpha_1 t} + X_2 e^{-\alpha_2 t}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$



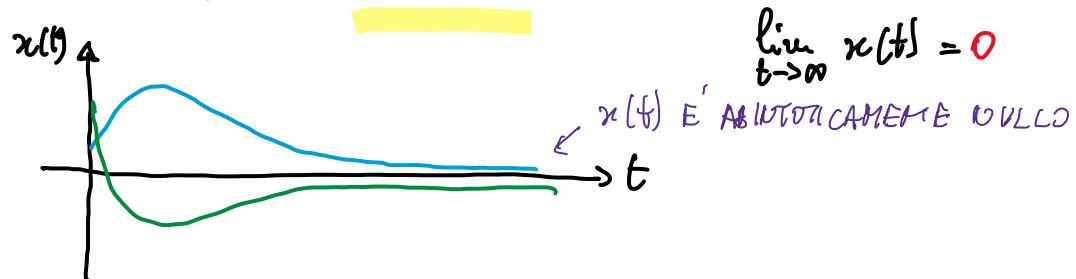
SISTEMA SOVRA-SOPRATTUTTO
 $h > r_c$, $h > 1$

$$3) r = r_c, \Delta = 0, n = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$$

$$x(t) = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t}$$

"LA SOLUZIONE CHE VA A ZERO PIÙ VELOCEMENTE"



Lezione lunedì 23 novembre 2020

lunedì 23 novembre 2020 10:23

SISTEMI VIBRANTI 1 G.D.L. CON FORZAMENTO

↳ SISTEMI CON FORZANTE COSTANTE

↳ SISTEMI CON FORZANTE ARMONICA $\xrightarrow{F_0 \cos \omega t}$ $\xrightarrow{Re(F_0 e^{i\omega t})}$ RISONANZA

↳ SISTEMI CON FORZAZIONI PERIODICHE

FORZANTE GENERICA



EQ. MOT. DEL SISTEMA

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + k x = F(t)$$

FORZANTE (FUNZIONE SOLO DEL TEMPO)

EQ. DIFFERENZIALE NON OMogenea

SOLUZIONE

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

INTEGRALE PARTICOLARE:
DIPENDE DAL TIPO DI
FORZANTE

EQ. DI MOT. \ddot{x}
LINEARE \rightarrow
PRINCIPIO DI
SOMMA POSIZIONE
DEGLI EFFETTI

INTEGRALE GENERALE
SOLUZIONE DELL'EQ DI MOT.
OMOGENEA $\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$

- IN TRANSITORIO ("t" piccolo): LA SOLUZIONE È CARATTERIZZATA DAL CONTROBOSSO SIA DELL'INTEGRALE GENERALE SIA NELL'INTEGRALE PARTICOLARE

- A REGIME ("t" grande) $\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p(t)$: L'INTEGRALE PARTICOLARE È LA SOLUZIONE A REGIME

FORZANTE COSTANTE

↳ FORZANTE "A GRADINO"

TROVA EQ. DIFFERENZIALI: $x_p(t) = \text{costante} = X_0$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_p(t) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} x_p(t) = 0 \end{cases}$$

SOSTITUISCO NELL'EQ. DI MOT.

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + k x = F_0$$

$$k X_0 = F_0$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = S_{st}$$

SPOSTAMENTO
DOVUTO ALL'APPLICAZIONE
"STATICA" DELLA FORZANTESOLUZIONE EQ. DI MOT.: $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

$$x(t) = e^{-rt} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] + \frac{F_0}{k}$$

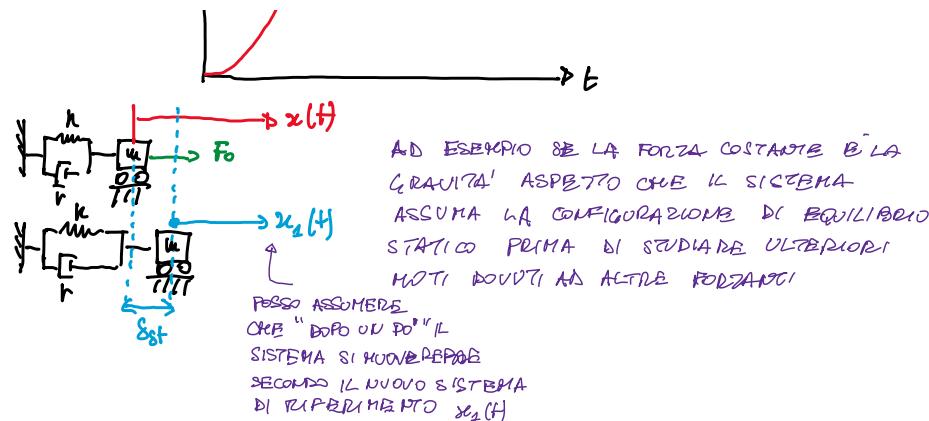
PER DETERMINARE A E B IMPOGNO LE
CONDIZIONI INIZIALI: AD ESEMPIO:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - (B \sin \omega_d t + \cos \omega_d t) e^{-rt}]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{F_0}{k} = S_{st}$$

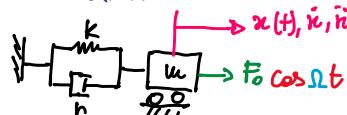




FORZANTE ARMONICA

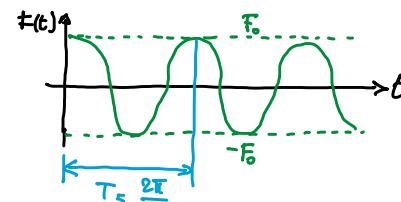
• $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

AMPIZZA DELLA FORZANTE



$x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$

AMPIZZA
SOLUZIONE STESSO TIPO DI FUNZIONE



$x_p(t) = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$
 $\dot{x}_p(t) = -\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi)$
 $\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi)$

$m \ddot{x} + r \dot{x} + k x = F_0 \cos \Omega t$

$-m \Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi) - r \Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi) + k X_0 \cos(\Omega t + \phi) = F_0 \cos \Omega t$

→ APPLICARE LE FORMULE TRIGONOMETRICHE PER $\cos(\Omega t + \phi) = \cos(\Omega t)\cos(\phi) - \sin(\Omega t)\sin(\phi)$

→ RACCOLGONO I TERMI IN $\cos(\Omega t + \phi)$ E IN $\sin(\Omega t + \phi)$

I $(-m \Omega^2 \cos \phi - r \Omega \sin \phi + k \cos \phi) X_0 \cos \Omega t = F_0 \cos \Omega t$

II $(m \Omega^2 \sin \phi - r \Omega \cos \phi - k \sin \phi) X_0 \sin \Omega t = 0$

DALLA II $\tan \phi = -\frac{r \Omega}{k - m \Omega^2} \rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{r \Omega}{k - m \Omega^2}\right)$

SOSTITUISCO LA II
NELLA I

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m \Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} \quad \text{IV}$$

FORMA ANOMENOLARE
DIVIDI IL NUMERATORE
ED IL DENOMINATORE

$$X_0 = \frac{F_0 / k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{r}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{r \omega}{\omega}\right)^2 / \left(\frac{r}{\omega}\right)^2}} = \frac{F_0 / k}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\omega^2} + \frac{r^2}{\omega^2}}}$$

DEFORMAZIONE STATICHE

DI III E II PER K

$$\frac{x_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{(\omega_1)^2 + 4\alpha^2 h^2}$$

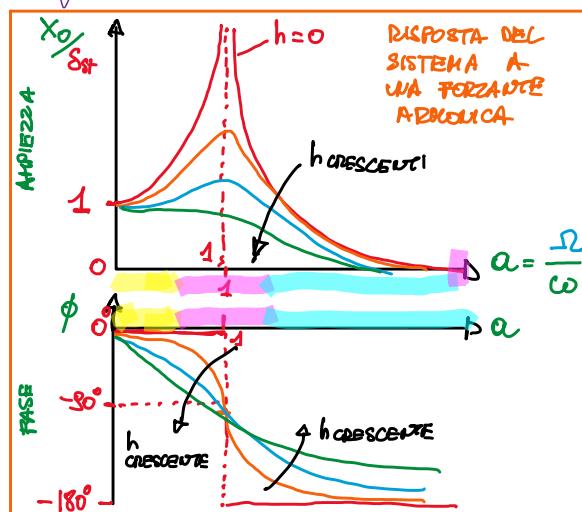
RAPPORO TRA LE PULSAZIONI

FATORE PI ESGORZAMENTO

$$\tan \phi = -\frac{\omega r/k}{(k-m\omega^2)/k} = -\frac{2\frac{\omega}{\omega_1} \frac{r}{r_1}}{1 - (\frac{\omega_1}{\omega})^2} = -\frac{2\alpha h}{1 - \alpha^2}$$

COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA

RAPPRESENTAZIONI ADIMENSIONALI DI AMPIZZA E FASE
DECCA RISPOSTA FORZATA
 $x_p(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$



SE $h=0$ $\frac{x_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \alpha^2}$ E SE $\alpha = 1 \rightarrow \Omega = \omega$

$\lim_{\alpha \rightarrow 1} X_0 \rightarrow \infty$ CONDIZIONE DI RISONANZA

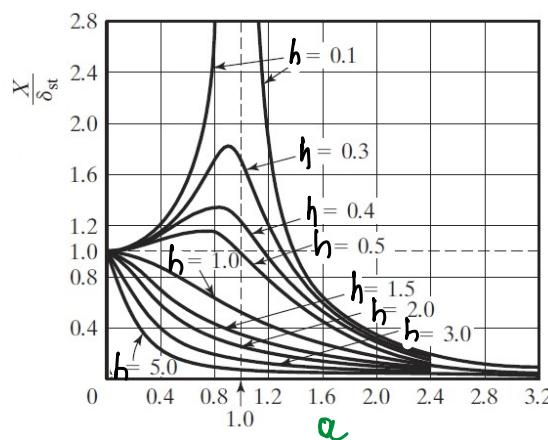
$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$\frac{X_0}{\delta_{st}} = \frac{F_0}{F_{st}}$

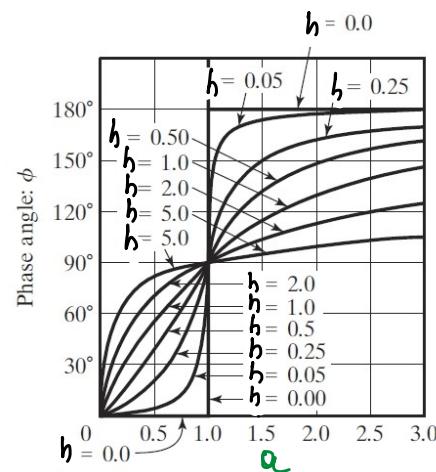
$\Omega = \frac{\omega_r}{\omega} < 1$

$\frac{F_0}{\omega^2 - \omega_r^2}$

SE $h=0$ $\tan \phi = 0$ "SALTI DI FASE" IN CORRISPONDENZA DI $\Omega = \omega$



CLASSIFICAZIONE IN "ZONE" DELLA
DISPONIBILITÀ DEL SISTEMA



- IN TUTTI I CASI: $X_0 = \delta_{st}$ PER $\Omega = 0$
 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{X_0}{\delta_{st}} = 0$

$\alpha \ll 1 \Rightarrow \Omega \ll \omega$: ZONA QUASI STATICA

$\alpha = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$: ZONA DI RISONANZA

$\alpha \gg 1 \Rightarrow \Omega \gg \omega$: ZONA ELASTICA O SISMOGRAFICA
"SOSPESA"

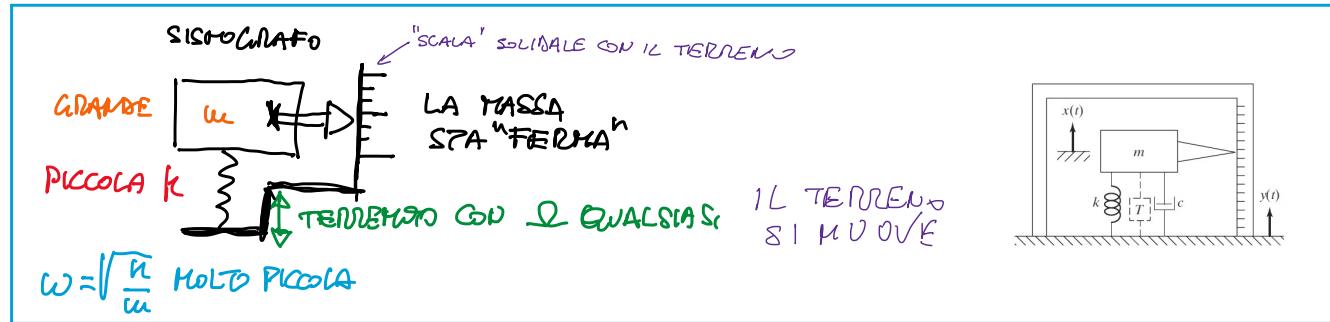
OneNote

Q-DN

$$\text{SE } h \neq 0 \quad \phi = -\theta_0 \text{ PER } \alpha = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$\text{SE } h \neq 0 \quad \frac{x_0}{x_{st}} = \frac{1}{2h} \text{ PER } \alpha = 1 = \frac{\Omega}{\omega}$$

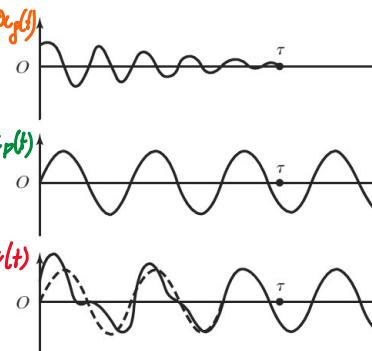
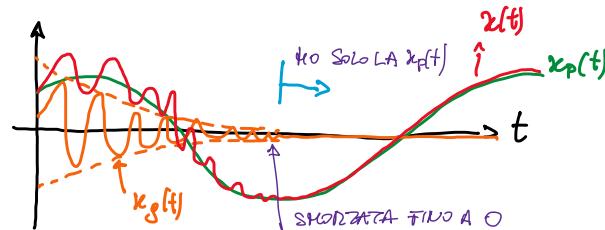
↑ AMPIEZZA DI $x_p(t)$
IN RISONANZA SE $h \neq 0$



SOLUZIONE DEL SISTEMA

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

↪ Dovendo impostare le condizioni iniziali per ottenere A e B

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \end{cases}$$


$$\bullet F(t) = F_0 \cos \Omega t = \operatorname{Re}(F_0 e^{i \Omega t})$$

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = \operatorname{Re}(F_0 e^{i \Omega t})$$

$$\rightarrow x_p(t) = X_0^* e^{i \Omega t} \quad \text{"TRASCURSO" DI SCRIVERE L'OPERATORE RE(.) PER LA SOLUZIONE}$$

$$\begin{aligned} i \Omega x_p(t) &= i \Omega X_0^* e^{i \Omega t} \\ \ddot{x}_p(t) &= -\Omega^2 X_0^* e^{i \Omega t} \end{aligned}$$

$$i \Omega^2 X_0^* e^{i \Omega t} - i \Omega X_0^* e^{i \Omega t}$$

$$i \Omega^2 X_0^* e^{i \Omega t} - i \Omega X_0^* e^{i \Omega t}$$

$$(-\omega^2 m + i \omega r + k) X_0 e^{i \omega t} = F_0 e^{i \omega t} \rightarrow X_0 = \frac{F_0}{(-\omega^2 m + i \omega r + k)}$$

$$|X_0^*| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + (\omega r)^2}}$$

$$\tan \phi = -\frac{\omega r}{k - m \omega^2}$$

AVERATO IN ADEGUAMENTO
POI CALCOLO MODULO E FASE
← DISEGNO MODULO E FASE
← DIAGRAMMI DI BODE

$$x_p(t) = R e(X_0^* e^{i \omega t}) = |X_0^*| \cos(\omega t + \phi)$$

FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

$$G(i\omega) = \frac{X_0^*}{F_0}$$

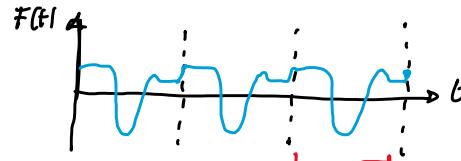
SISTEMI CON FORZANTE PERIODICA

FUNZIONE PERIODICA DEF: $F(t) = F(t+T)$

↪ ESPANSIONE IN SERIE DI FOURIER

$$F(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k \Omega_0 t) + B_k \sin(k \Omega_0 t)] \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ PERIODO}$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(k \Omega_0 t) dt \quad B_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(k \Omega_0 t) dt$$



J.B.J. FOURIER

SISTEMA VIBRANTE CON FORZANTE PERIODICA

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + k x = F(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k \Omega_0 t) + B_k \sin(k \Omega_0 t)] \quad \leftarrow \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE}$$

$$x_p = x_{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{p_{c_k}} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{p_{s_k}}$$

$$m \ddot{x}_{p_0} + r \dot{x}_{p_0} + k x_{p_0} = F_0$$

$$m \ddot{x}_{p_{c_1}} + r \dot{x}_{p_{c_1}} + k x_{p_{c_1}} = A_1 \cos \Omega_0 t$$

$$m \ddot{x}_{p_{s_n}} + r \dot{x}_{p_{s_n}} + k x_{p_{s_n}} = A_n \cos n \Omega_0 t$$

$$m \ddot{x}_{p_{s_4}} + r \dot{x}_{p_{s_4}} + k x_{p_{s_4}} = B_1 \sin \Omega_0 t$$

↓
SOPRAPOSIZIONE REGOLARE

← EFFETTO

CIASCUNA EQUAZIONE È LA SOLUZIONE DI UN SISTEMA VIBRANTE A 1 GRAD. ECCITATO DA FORZANTE ARMONICA

$$i \dot{x}_{P_{S_n}} + r \ddot{x}_{P_{S_n}} + k x_{P_{S_n}} = B_n \sin \omega t \quad \curvearrowleft \text{(NB. NELLO SVILUPPO MI SONO FERMATO AL TERMINE "n")}$$

$$|X_0^*| = \frac{A_k}{\sqrt{(k - m(\beta_S)^2)^2 + (\beta_S \omega)^2}}$$

AUMENTA MAO L'ORDINE β_S NELL'ARMONICA
IL MODULO DIMINUISCE A PARITÀ
DI AMPIZZA

Lezione lunedì 30 novembre 2020

lunedì 30 novembre 2020 10:28

RISPOSTA DI SISTEMI A I GOLI IN RISONANZA → RISPOSTA NEL TEMPO

SISTEMI NON LINEARI

→ PENDOL → LINEARIZZAZIONE

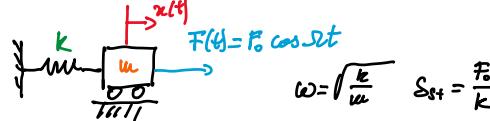
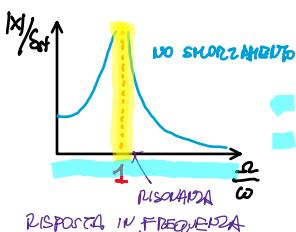
→ SISTEMA LIBERO CON SMORZAMENTO DENTRO AD ASSESTO RAPIDO

→ SISTEMA FORZATO CON SFORZAMENTO DIRETTO AD APERTURA RADIANTE → SFORZAMENTO PROVOCATORE

RISPOSTA SISTEMA A 1 GRAD. L. IN COLLEGAMENTI DI RISORTE SENZA SOVRACCARICO

→ **RISPOSTA IN FREQUENZA** → AMPIEZZA INT. PARTICOLARE È 00 (QUESTO È UN
L₀ CI DICE COSA COMPODEAMENTO "ASINOTICO")

↳ CI DICE COSA
SOCIEDÀ A DECIMI



$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - kx_0}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{m\omega^2} \right) \cos \omega t + \left(\frac{i x_0}{m\omega} \right) \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{x_0}{\omega} \sin(\omega t) + S_{st} \left(\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega t)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2} \right)$$

IN RESONANCE
 $\frac{\omega}{\omega_s} = 1$

↳ STUPRO QUESTA PARTE DELLA RISPOSTA: IN RICORDANZA $\frac{0}{0}$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\cos \omega t - \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega}\right)^2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt}(\cos \omega t - \cos \omega t)}{\frac{d}{dt}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega}\right)^2\right]} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-t \sin \omega t}{-2 \frac{\omega}{\omega^2}} = \frac{\omega t \sin \omega t}{2} = \frac{\omega t}{2} \sin \omega t$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t$$

RESPOSTA MOTO LIBERADO
ANCHE SE NON HO MESSO
SKORDAMENTO, HO UNA
DISPOSTA VEL TEMPO
PUNITA

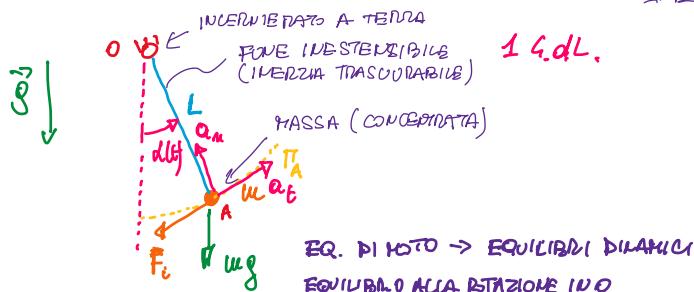
REGOLA DI DE L'HOSPITAL

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\omega t}{2} \sin \omega t$$

RISPOSTA MOTTO ZERO
ALCUNI SE NON HO MESSO
SOMMAMENTO, NUOVA
RISPOSTA VEL TEMPO
PINTA

LA RISPOSTA DEL SISTEMA VA A 0 MA CI METTE
TEMPO INFINTO (PROPORTZIONALE AT) → AMPIEZZA
IN RISONANZA CRESCE LINEARMENTE CON T
(POSSESSO ECITARE IL SISTEMA IN RISONANZA PER
UN "PO'" DI TEMPO PRIMA DI ATTIVARE AD AMPIEZZE PERICOLOSE

PENSOLO



EQ. PI MOTO \rightarrow EQUILIBRI DILATATI
EQUILIBRIO ALLA PISTAZIONE IN O

* INDICA CHE USIAMO TUTTE LE FORZE

$$de \in L^2 + u \otimes V \sin k = 0$$

$L_i^2 + q \sin d = 0 \Rightarrow$ Eq. DIFF. DOW LINEADE FN &

SE CONSIDERI "PERCORSO" OCCURRERÀ QUANDO $t \approx \tau \rightarrow$ LINEARIZZAZIONE DI MOTO

Page 1 of 1 | Last updated: 10/10/2023

- 145/R - 2 - 1 - 6

https://polimi365-my.sharepoint.com/personal/10125452_polimi_it/_layouts/15/Doc.aspx?sourcedoc={34300697-d4d0-4f0d-9a00-255ed202fa58}...

$$Lx + gy = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{per il moto circolare}$$

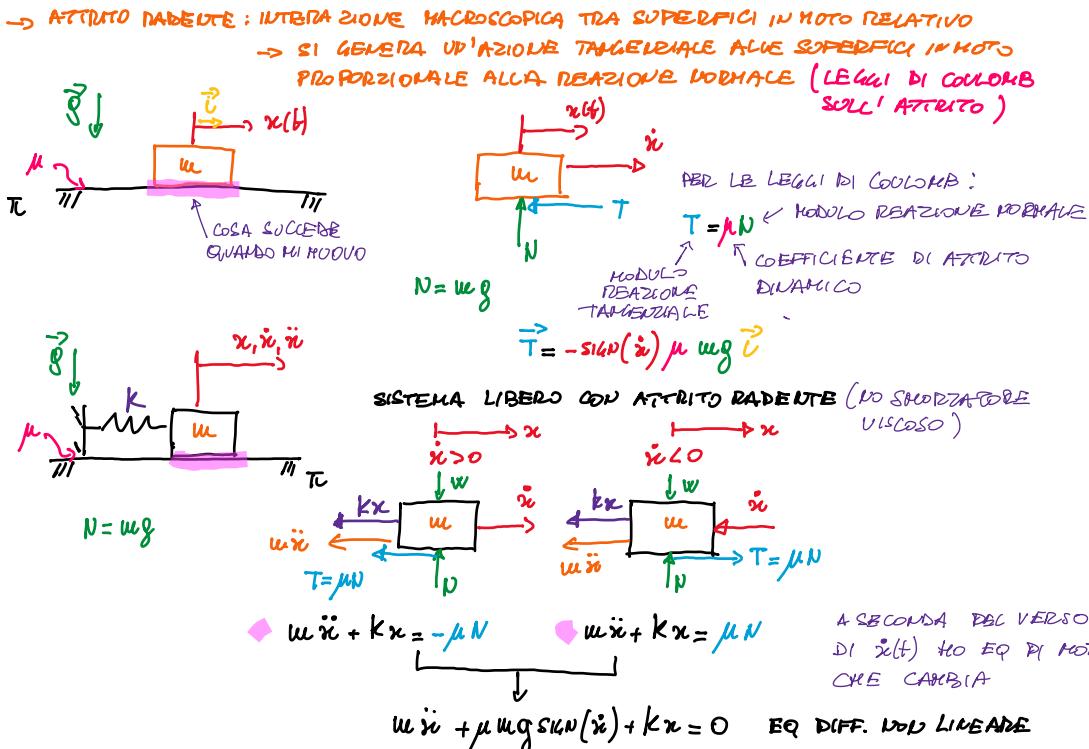
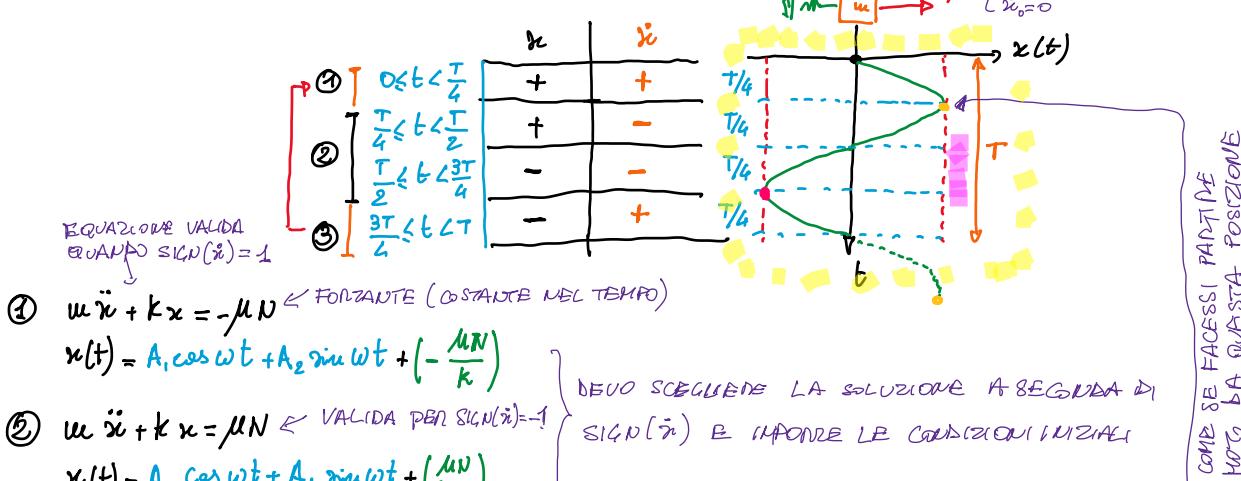
\downarrow

$$d(x) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{LA PULSAZIONE NON DIPENDE DALLA MASSA} \rightarrow \text{DIPENDE DA } g \text{ E DA } L$$

$T = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{E' VERO CHE IL PERIODO E' COSTANTE}$

\hookrightarrow SOLUZIONE ARMONICA

SISTEMA LIBERO CON SMORZATORE VISOSEO PER ATTRITO RADENTE

LINEARIZZAZIONE A "TRATTI" STUDIANDO $\text{SIGN}(x)$ 

CONSIDERIAMO UN CASO IN CUI ESISTE IL MOTO, AD ECCEZIONE SE IMPEDITO

$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

\hookrightarrow DEVO USARE LA SOLUZIONE ②

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k} \quad x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega t + \frac{\mu N}{k} \quad \text{SOLUZIONE VALIDA PER } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \sin \omega t$$

QUANDO $t = \frac{\pi}{\omega}$

$$x_1(t = \frac{\pi}{\omega}) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega \frac{\pi}{\omega} + \frac{\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$$

$$\dot{x}_1(t = \frac{\pi}{\omega}) = -\omega \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \sin \omega \frac{\pi}{\omega} = 0$$

DIAGNOSTICO LE NUOVE CONDIZIONI INIZIALI DA IMPORTE NELL'EQUAZIONE QUANDO $\text{SIGN}(\dot{x}) = 1$

→ USO LA SOLUZIONE ①

$$\begin{cases} x_1(t = \frac{\pi}{\omega}) = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \\ \therefore 1 \leq \frac{\pi}{\omega} \end{cases} \rightarrow A_1 = -\left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right) \quad x(t) = \left(-x_0 + \frac{3\mu N}{k}\right) \cos \omega t - \frac{\mu N}{k}$$

SOLUZIONE VALIDA PER $\frac{\pi}{\omega} \leq t$

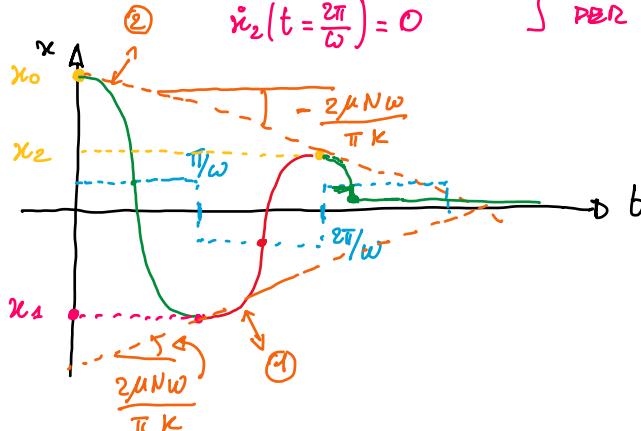
$$\hookrightarrow x_1(t = \frac{\pi}{\omega}) = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_2(t) = +\omega \left(-x_0 + \frac{3\mu N}{K} \right) \sin \omega t \quad \text{per } \frac{\pi}{\omega} \leq t < \frac{\pi}{\omega}$$

$$\begin{aligned} x_2(t = \frac{2\pi}{\omega}) &= x_2 - \frac{4\mu N}{K} \\ \dot{x}_2(t = \frac{2\pi}{\omega}) &= 0 \end{aligned}$$

nuove "condizioni iniziali"
per eq. ② quando $\text{sign}(x_2) = -1$



Posso esprimere la riduzione di ampiezza per ogni periodo come $|x_1 - x_0| \text{ o } |x_2 - x_1| = \frac{2\mu N}{K}$

il moto continuerà finché la forza elastica sarà maggiore della forza d'attrito

d'altrio \rightarrow fino a che la riduzione dello spostamento iniziale non sarà minore dello spostamento statico della forza d'attrito

$$x_0 - \frac{2\mu N}{K} \leq \frac{\mu N}{K}$$

↑ numero di semi periodi

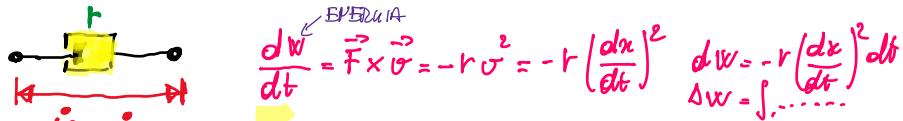
$$N \geq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{K}}{\frac{2\mu N}{K}}$$

SISTEMA FORZATO CON SHORZAMENTO DUCUTO AD ATTRITO RADIBRE

↪ SORZAMENTO EQUIVALENTE

↪ EQUIPARAREMO LA FORZA PERSA / ENERGIA DISSIPATA DA UN SHORZAMENTO DUCUTO A SORZAMENTO (NON VISCOSE) ALL'ENERGIA DISSIPATA IN UN PERIODO DA UNO SHORZATORE VISCOSE

IN UN SHORZAMENTO VISCOSE



$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \times \vec{v} = -r v^2 = -r \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad dW = -r \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt$$

$\Delta W = \int \dots \dots$

$$\rightarrow \text{se consideriamo sistema lineare vibrante}$$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$$

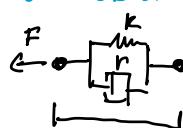
↪ posso trascurare la fase

$$\Delta W = \int_0^T r \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt =$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} r \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = \int_0^{2\pi} r X^2 \omega \cos^2 \omega t d(\omega t) = r X^2 \omega \pi$$

ENERGIA DISSIPATA IN UN PERIODO DA SHORZATORE
VISCOSE SOTTOPOSTO A FORZA
ADERICO

SE IN PARALLELO ALLO SHORZATORE C'È UNA PELLA, NON CAMBIA NOLCA



$$F = -r \ddot{x} - kx \quad \ddot{x}(t) = X \sin \omega t$$

$$F = -kX \sin \omega t - r \omega X \cos \omega t$$

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} F v dt \rightarrow \dots \dots \rightarrow r X^2 \omega \pi$$

IN PRESENZA DI ATTRITO RADIBRE

AMPIZZA DI VIBRAZIONE SE IL MOTO È ALIMENTATO DA UNA FORZA D'ESCAZIONE

$$\Delta W = 4X \mu N$$

↪ FORZA D'ATTRITO
4 INTERVALLI IN CUI CONSIDERO LA FORZA D'ATTRITO

Lezione lunedì 14 dicembre 2020

lunedì 14 dicembre 2020 09:58

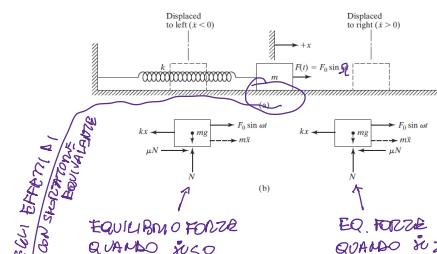
SISTEMI VIBRANTI A 1 GDL FORZATI CON SINUSOIDALE PER ATTRITO RADDESSO

- POTENZA DISSIPATA PER CYCLE IN VLO SINUSOIDALE VISCOSE

$$\Delta W = \pi k \omega L X^2$$

- POTENZA DISSIPATA PER CYCLE IN PRESENZA DI ATTRITO RADDESSO

$$\Delta W = 4 \mu N X$$



SISTEMA FORZATO CON FORZAZZE

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

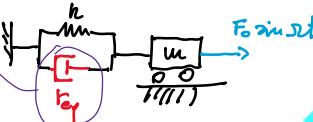
NON LINEARITÀ'

$$\mu \ddot{x} + kx \pm \mu N = F_0 \sin(\omega t)$$

SOLUZIONE DEL MOTO FORZATO \rightarrow INTEGRALE PARTICOLARE E A REGRES

\rightarrow SUPpongo che la potenza dissipata per attrito viscoso sia la stessa (per cycle) dissipata da vlo chiorzatore equivalente

$$\Delta W = \Delta W' \rightarrow \pi k_{eq} \omega L X^2 = 4 \mu N X \rightarrow k_{eq} = \frac{4 \mu N}{\pi \omega L X}$$



$$x_p(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

DIPENDE DALL'AMPEDDA
DEL MOTO

RISPOSTA
DI UN SISTEMA
1GDL A PERIODICO
AUTONOMO

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \mu \omega^2)^2 + (k_{eq} \omega)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2})^2 + (2 \zeta_1 \frac{\omega_1}{\omega})^2}}$$

$$\zeta_1 = \frac{k_{eq}}{k} = \frac{4 \mu N}{\pi \omega L X} = \frac{1}{2 \mu \omega} = \frac{2 \mu N}{\pi \mu \omega \omega L X}$$

$$X = \frac{F_0}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{4 \mu N}{\pi F_0}\right)^2}$$

VERIFICA CHE IL NUMERATORRE SIA > 0

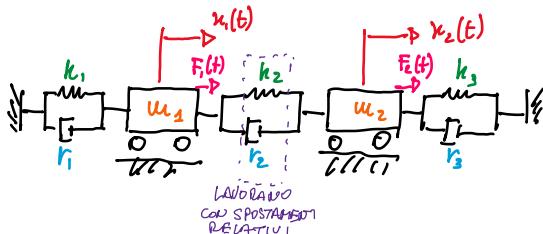
$$\star 1 - \left(\frac{4 \mu N}{\pi F_0}\right)^2 > 0 \quad \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi} \quad \begin{array}{l} \text{L'EQUIVALENZA DI DISSIPAZIONE} \\ \text{DI POTENZA VALE SOLO} \\ \text{SE LA } F_0 \text{ È MAGGIORE DI } 4/\pi \text{ VOLTE} \\ \text{LA FORZA D'ATTRITO } \mu N \end{array}$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{k_{eq} \omega}{k - \mu \omega^2} \right) = \arctan \left(\frac{\frac{4 \mu N}{\pi k X}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \right) = \arctan \left(\frac{\frac{4 \mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4 \mu N}{\pi F_0}\right)^2}} \right)$$

SE LA \star NON È VERIFICATA \rightarrow RISOLVIZIONE NUMERICA DELL'EQ. NON LINEARE DEL MOTO

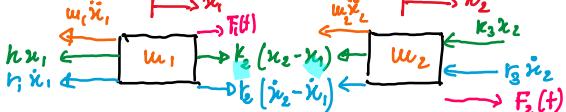
• SISTEMI VIBRANTI A 2-M GDL

UTILIZZARE PLMHO UN APPROCCIO MATEMATICO, LO MOSTREMO PER 2 GDL. PER RAGIONI PRATICHE (OTTIME MATERICI 2×2), MA POTREMO ESTENDERLO A n GDL CON MATERICI $n \times n$



SCRITTURA EQ. MOTI \leftarrow EQUILIBRIUM ANALYTIC
 \leftarrow EQ. DI LAGRANGE

\rightarrow EQUILIBRIUM DINAMICO ("CORPO LIBERO" CON TUTTE LE FORZE AGENTI) \rightarrow EQUILIBRIUM IN PERIODICHE
DISSOZIAZIONE \rightarrow PER OGNI MASSA



$$\star m_1 \ddot{x}_1 + (r_1 + r_2) \dot{x}_1 - r_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \quad | \quad \text{SISTEMA DUEQ. EQUATION!}$$

$$m_1 \ddot{x}_1 - r_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_3) x_1 - k_2 x_2 + (k_2 + k_3) x_2 = F_2(t)$$

DI MODO DEL SISTEMA CON RISORZAMENTO E FORZA MERA

DA □ POSSO CALCOLARE:

- 1) FREQUENZE PROPRIE (NATURALI) DEL SISTEMA → USO SISTEMA OMOGENEO NON SOSPESO
- 2) MODI DI VIBRAZIONE → SISTEMA OMOGENEO E NON SOSPESO

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI MASSA

$$[R] = \begin{bmatrix} r_1+r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2+k_3 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI SOSPENSIONE

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI MIGIOZZA

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

VECTORE DELLE FORZANTI

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

VECTORE DEGLI SPOSTAMENTI

4) □ PUÒ ESSERE SCRITTA COME:

$$[M] \ddot{\vec{x}} + [R] \dot{\vec{x}} + [K] \vec{x} = \vec{F}$$

AL PUNTO DI VISTA "FORMALE" IL SISTEMA DI EQ. DI MODO È UGUALE ALL'EQ DI USO DEL SISTEMA A 1 GRAD.

IN NOTAZIONE MATRICIALE NULCA CAMBIA SE LE MATRICI O I VETTORI SONO $2 \times 2 \div 2 \times 1$ OPPURE $m \times n \div n \times 1$

OSSERVIAMO CHE LE MATRICI $[M]$, $[R]$ E $[K]$ SONO SIMMETRICHE:

$$[M] = [M]^T \quad [R] = [R]^T \quad [K] = [K]^T$$

1) CALCOLO FREQUENZE PROPRIE

$$[M] \ddot{\vec{x}} + [K] \vec{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_3) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{SIST. DI EQ DIFF. OMOGENEE}$$

IPOTIZZIAMO SOLUZIONI ARMONICHE PER IL SISTEMA $\textcircled{1}$

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad \textcircled{2}$$

SOSTITUISCO $\textcircled{2}$ E $\textcircled{3}$ IN $\textcircled{1}$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \textcircled{3}$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)) X_1 - k_2 X_2) \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ (-k_2 X_1 + (-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)) X_2) \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{array} \right.$$

$X_1 \neq 0$ ALTRIMENTI SOLUZIONE

$$\left\{ \begin{array}{l} (-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)) X_1 - k_2 X_2 = 0 \\ -k_2 X_1 + (-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)) X_2 = 0 \end{array} \right.$$

$X_2 \neq 0$ BANALE → SISTEMA CHE NON SI MUOVE

$$\textcircled{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} (-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)) X_1 - k_2 X_2 = 0 \\ -k_2 X_1 + (-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)) X_2 = 0 \end{array} \right.$$

SISTEMA ALGEBRICO OMOGENEO IN X_1 E X_2
PERCHÉ POSSA AVERE UNA SOLUZIONE NON BANALE
BISOGNA IMPOSTARE CHE IL DETERMINANTE DELLA
MATRICE DEI COEFFICIENTI SIA NULLO.

$$\det \begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = 0 \quad (m_1 m_2) \omega^4 - ((k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1) \omega^2 + + ((k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2) = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA → ORDINE 2 IN ω →
PER NOI CON 2 GLI → ORDINE 4 IN ω

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \left(\left(\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2} \right) \right)^{1/2}$$

↪ ASSOCIATI AD ω_1 E ω_2 SONO I RAPPORTI TRA X_1 E X_2 , IL SISTEMA $\textcircled{4}$ NON HA EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI DATO CHE HO IMPOSTO $\det(\cdot) = 0$. SE USO LA PRIMA EQ. →

$$\gamma_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1 \omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

VALORE DI ω_1

SE USO LA SECONDA EQ. → $\gamma_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$

$$\gamma_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_2 \omega_2^2 + (k_2 + k_3)}{k_2}$$

$$\gamma_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_2^2 + (k_2 + k_3)}$$

LA SOLUZIONE DELL'EQ. DI MODO È:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)$$

$$\vec{x}_1 = \left\{ \begin{array}{l} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \gamma_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{array} \right\}$$

1° MODO

$$\vec{x}_2 = \left\{ \begin{array}{l} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \gamma_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{array} \right\}$$

MODI DI VIBRAZIONE DEL SISTEMA

$X_i^{(k)}$ INDICE RELATIVO ALLA FREQUENZA CALCOLATA → ALCUNE AC

INDICE RELATIVO AL GRADO DI LIBERTÀ!

2) MODI DI VIBRAZIONE

$$\left(\begin{array}{l} \gamma_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \gamma_2 X_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{array} \right) \xrightarrow{\text{2 modi}}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2$

DBLSIM / MATI CON

CONDIZIONI INIZIALI

$x_1(0), \dot{x}_1(0)$

$x_2(0), \dot{x}_2(0)$

ESEMPIO

$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$\text{SOLUZIONE } x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \varphi) \quad i=1,2$$

DETERMINARE
MATRICE DEI
COEFFICIENTI

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0$$

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\gamma_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1$$

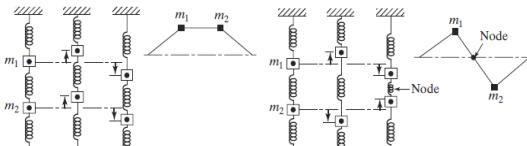
$$\gamma_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1$$

$$\text{PRIMO MODO } \vec{x}^{(1)}(t) = \begin{cases} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1\right) \\ X_2^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

$$\text{SECONDO MODO } \vec{x}^{(2)}(t) = \begin{cases} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \varphi_1\right) \\ -X_2^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \varphi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_2^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1\right) - X_2^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \varphi_2\right)$$



(a) First mode
LE MASSE
SI SPOSTANO
IN FASE

(b) Second mode
LE MASSE
SI SPOSTANO
IN CONTRO FASE

PASSAGGIO IN COORDINATE PRINCIPALI

LE EQUAZIONI DI MOTO IN COORDINATE FISICHE $x_1(t)$, $x_2(t)$ SONO ACCOPPIATE.

PER LA TEORIA DEI SISTEMI LINEARI POSSO INTRODURRE UNA TRASFORMAZIONE DI "COORDINATE" CHE DELIBRA IL SISTEMA DISACCOPPIATO: LE NUOVE COORDINATE SI CHIAMANO COORDINATE "MODALI" O "PRINCIPALI"

CONSIDERO L'ESEMPIO PRECEDENTE E DEFINISCO:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1\right) \\ q_2(t) &= X_2^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \varphi_2\right) \end{aligned}$$

SONO SOLUZIONI
DI UN SISTEMA \rightarrow
DI EQ DIFF.

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{k}{m} q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{3k}{m} q_2 = 0 \end{cases}$$

HO OTTENUTO
n EQUAZIONI AD IGL
INVOCIE DI UN SISTEMA
DI n EQUAZIONI

$$\begin{cases} x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \end{cases}$$

TRASFORMAZIONE
DI COORDINATE

\hookrightarrow TRASFORMAZIONE INVERSA

SE USO \hookrightarrow NELLA \circlearrowleft OTTENGO

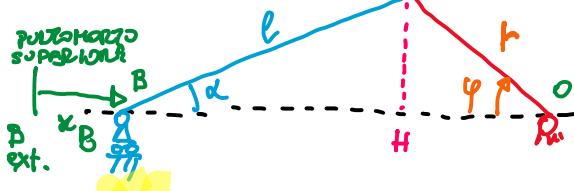
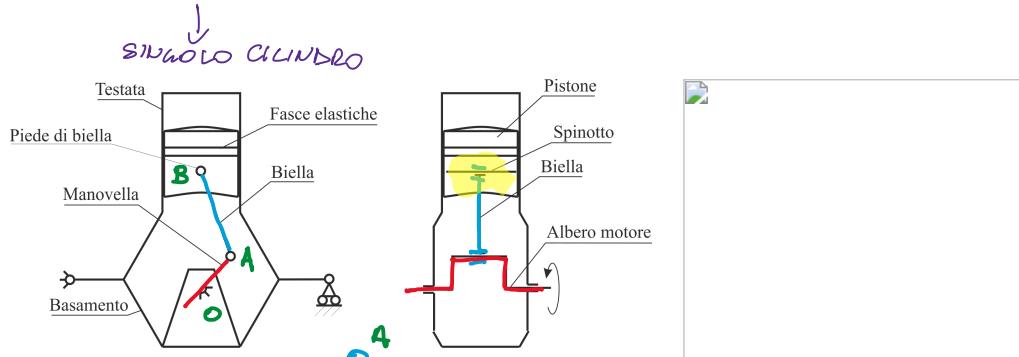
$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{2} [x_1(t) + x_2(t)] \\ q_2(t) &= \frac{1}{2} [x_1(t) - x_2(t)] \end{aligned}$$

Lezione facoltativa martedì 22 dicembre

martedì 22 dicembre 2020 12:34

EQUILIBRAMENTO FORZE ALTERNATIVE

MI PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE IL MANOVELLISMO



$$x_B = \overline{OB}_{ext} - \overline{OH} - \overline{HB} = l + l - r \cos \varphi - l \cos \alpha$$

$$\Delta r = l \sin \alpha = r \sin \varphi$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \varphi = k \sin \varphi$$

LUNGHEZZA MANOVELLA

LUNGHEZZA BIELLA

SOTTRAHETE $k < 0.3$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

APPROXIMARE $\rightarrow \epsilon$

$$(1+\epsilon)^{1/2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$x_B = l + l - r \cos \varphi - l \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) = l \left(1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right)$$

$$\hookrightarrow v_B = \dot{x}_B = \omega r \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \quad \omega = \frac{d}{dt} \varphi$$

$$a_B = \ddot{x}_B = \omega^2 r \left(\cos \varphi + k \cos 2\varphi \right)$$

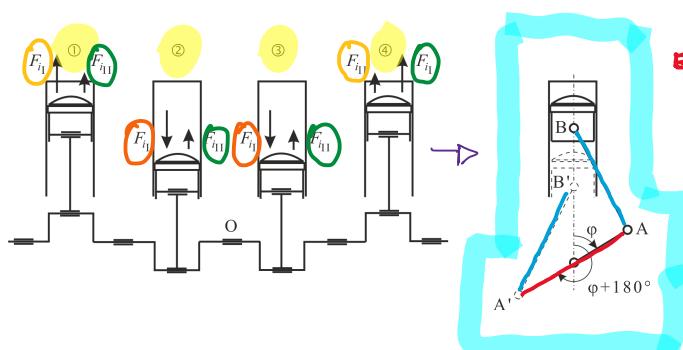
\hookrightarrow ESPRESSIONE ACCELERAZIONE DEC
PIEDI DI BIELLA \rightarrow POSSO CACCOLARE
FORZA D'INERZIA SUL PISTONE

I ARMONIC
I IDRULICIII ARMONIC
II IDRULICI

"GIRAL" CON LA MANOVELLA

"GIRAL" A VELOCITA'
DOPPIA FREQUENZA MANOVELLA

COME CALCOLARE LE FORZE D'INERZIA CHE AGISCONO SUI PISTONI DEI MOTORI A C.I.



ESEMPIO: 4 CILINDRI IN LINEA

$$a_B^{00} = \omega^2 r (\cos \varphi + k \cos 2\varphi)$$

$$a_{B'}^{00} = \omega^2 r (\cos (\varphi + 180^\circ) + k \cos 2(\varphi + 180^\circ)) = \\ = \omega^2 r (-\cos \varphi + k \cos 2\varphi)$$

$$F_i^{00} = -m a_B^{00} = -m \omega^2 r (\cos \varphi + k \cos 2\varphi)$$

$$F_i^{00} = -m a_{B'}^{00} = -m \omega^2 r (-\cos \varphi + k \cos 2\varphi)$$

TERMINI DI I IDRULICI
TERMINI DI II IDRULICI

$$\sum F_i \text{ IDRULICI} = 0$$

$$\sum F_i \text{ IDRULICI} \neq 0 \\ = -4 m \omega^2 r / \cos 2\varphi$$

SONO OPPosti

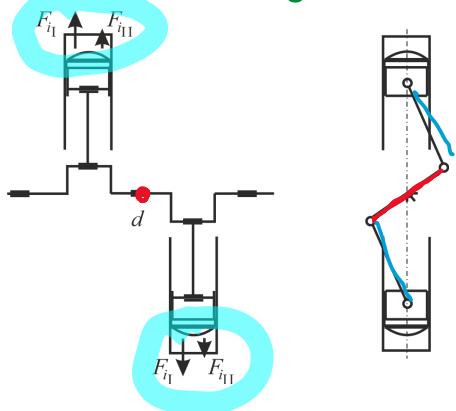
HANNO LO STESSO VERSO

MOMENTO DELLE FORZE
D'INIZIAZIA SUSPETTO AD 0

$$\sum M_i \text{ FORZE} = 0$$

$$\sum M_i \text{ TORQUE} = 0$$

MOTORE BOXER (2 CILINDRI ORIZZONTALI)



$$\sum F_i \text{ FORZE} = 0$$

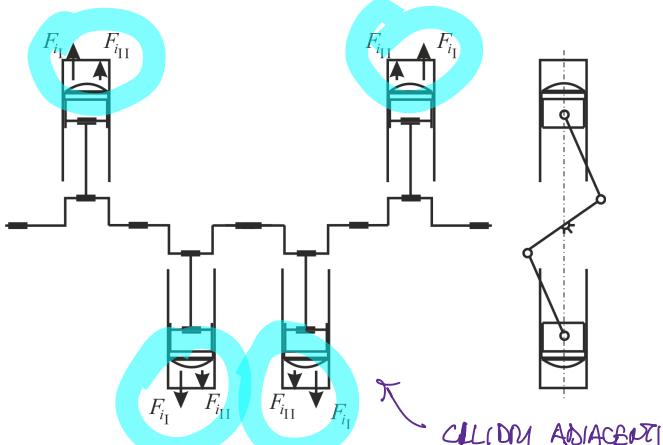
$$\sum M_i \text{ FORZE} \neq 0$$

$$\sum F_i \text{ IIORDINE} = 0$$

$$\sum M_i \text{ IIORDINE} \neq 0$$

DISPOSIZIONE ORIZZONTALE

MOTORE BOXER 4 CILINDRI

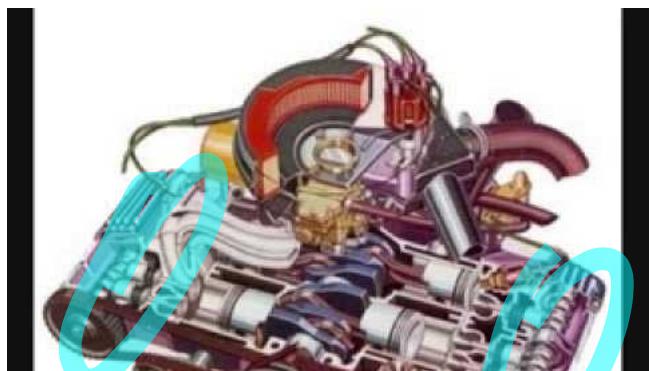
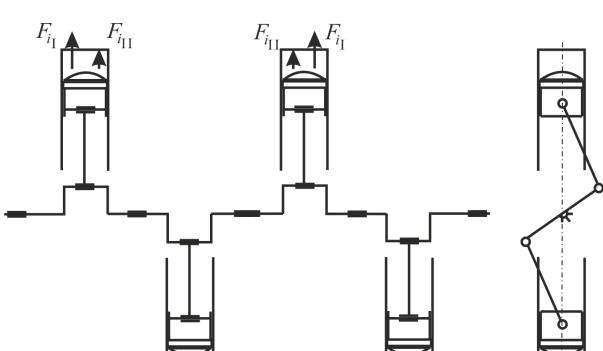


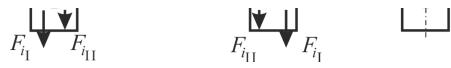
$$\sum F_i \text{ FORZE} = 0 \quad \sum M_i \text{ FORZE} = 0$$

$$\sum F_i \text{ IIORDINE} = 0 \quad \sum M_i \text{ IIORDINE} = 0$$

CILINDRI ADJACENTI
POSSO AVERE PROBLEMI DI DIFERENZIAMENTO

MOTORE BOXER 4 CILINDRI





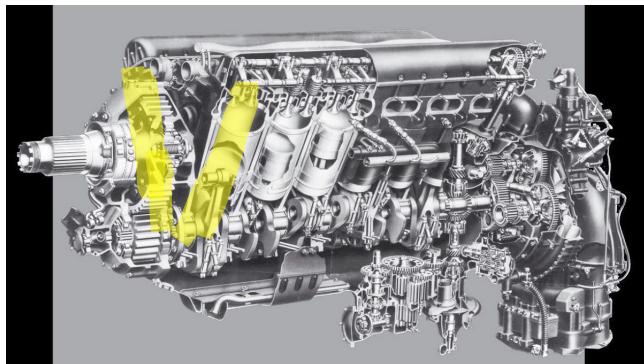
$$\sum F_i \text{ FORZA } = 0$$

$$\sum M_i \text{ TORQUE } \neq 0$$

$$\sum F_i \text{ IIORDINE } = 0$$

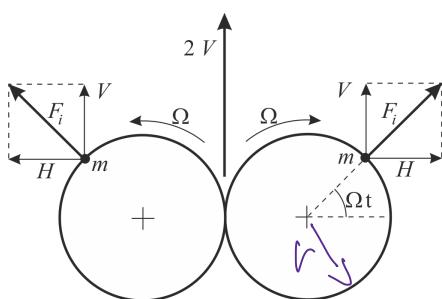
$$\sum M_i \text{ IIORDINE } \neq 0$$

ALTRIE DISPOSIZIONI DI CILINDRI



← 12 CILINDRI A "V"

VIBRODINAMICA → BILANCIAZIONE FORZE ALTERNATIVI



2 ALBERI CONTROROTANTI CON
MASSA IN ECCENTRICITÀ
→ SOMMA FORZE

$$\begin{aligned}\sum H &= 0 \\ \sum V &= 2V = 2m\Omega^2 r\end{aligned}$$

