

4

Quadrilatero articolato

In figura 4.1 è riportato lo schema di un sistema meccanico composto da un disco incernierato a terra nel suo centro O_1 , al quale è collegata mediante la cerniera A , posizionata ad una distanza radiale $O_1A = 0.2 \text{ m}$, un'asta AB di lunghezza pari a 0.8 m . All'estremo B di tale asta è incernierata una seconda asta BO_2 lunga 0.6 m , che risulta rigidamente collegata al semidisco, di raggio $R_{SD} = 0.15 \text{ m}$, incernierato a terra nel punto O_2 .

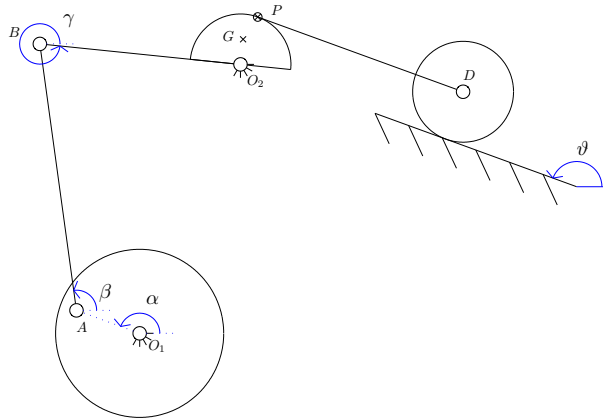


Figura 4.1: Sistema articolato

Su tale semidisco si avvolge senza strisciare una fune inestensibile al cui estremo è collegato il centro del disco D , di raggio $R_D = 0.15 \text{ m}$ che rotola

$\alpha = 160^\circ \quad \dot{\alpha} = 0.1 \text{ rad/s} \quad \ddot{\alpha} = 0 \text{ rad/s}^2$

Tabella 4.1: Dati dell'atto di moto considerato

senza strisciare su un piano inclinato di un angolo pari a ϑ pari a 160° . Si ritengano inoltre note le distanze fra le due cerniere poste sul telaio pari a 0.3 m sull'orizzontale e 0.8 m sulla verticale.

Si richiede di calcolare:

1. La velocità del punto G , baricentro del semidisco (si ritenga nota la distanza del baricentro dalla cerniera O_2 pari a $R_{SD}/2$) e del punto D .
2. L'accelerazione del punto G , baricentro del semidisco (si ritenga nota la distanza del baricentro dalla cerniera O_2 pari a $R_{SD}/2$) e del punto D .

Si supponga inoltre che siano note le seguenti grandezze fisiche relativamente all'atto di moto considerato, riportate in Tabella 4.1.

4.1 Analisi del moto

Il sistema, costituito da 5 corpi rigidi (disco O_1 , asta AB , semi-disco+asta BO_2 , fune e disco D) che si muovono nel piano, disporrebbe in assenza di vincoli di 15 gradi di libertà. Per calcolare i gradi di libertà effettivamente lasciati liberi dal sistema di vincoli è necessario considerare che:

- la traslazione verticale e orizzontale del disco O_1 è impedita dalla cerniera a terra in O_1 (vincolo doppio);
- L'estremità A dell'asta AB è vincolata a seguire una traiettoria circolare attorno ad O_1 dal vincolo di cerniera (vincolo doppio);
- L'estremità B dell'asta AB è vincolata a seguire una traiettoria circolare attorno ad O_2 dal vincolo di cerniera in B (vincolo doppio);
- la traslazione verticale e orizzontale del semi-disco O_2 è impedita dalla cerniera a terra in O_2 (vincolo doppio);
- l'inestensibilità della fune introduce due gradi di vincolo; non strisciamento e non penetrazione della fune nel semi-disco (vincolo doppio);

- esiste un legame tra gli spostamenti dell'estremità D della fune inestensibile PD e quelli del centro del disco D per il collegamento tramite cerniera della fune sul disco (vincolo doppio);
- il vincolo di puro rotolamento tra il disco D e piano inclinato impedisce il distacco del disco dal piano e lega la rotazione del disco all'avanzamento relativo dello stesso lungo il piano (vincolo doppio);

Il computo dei gradi di libertà del sistema può quindi essere sintetizzato nella seguente tabella.

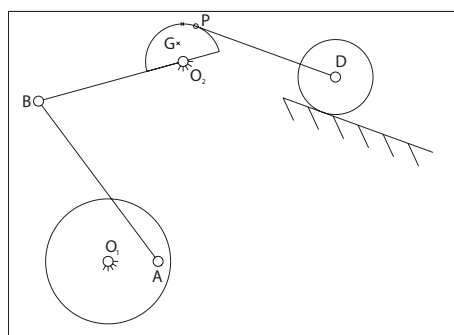
3 g.d.l. x 5 corpi rigidi =	15 g.d.l.	-
1 cerniera a terra in O_1 =	2 g.d.v.	-
1 cerniera (Disco/Asta) =	2 g.d.v.	-
1 cerniera (Asta/Asta) =	2 g.d.v.	-
1 cerniera a terra in O_2 =	2 g.d.v.	-
1 vincolo fune/semi-disco O_2 =	2 g.d.v.	-
1 vincolo fune/disco D =	2 g.d.v.	-
1 vincolo di puro rotolamento =	2 g.d.v.	-
<hr/>		
Totale	1 g.d.l.	residuo

Tabella 4.2: Computo dei g.d.l. residui del sistema

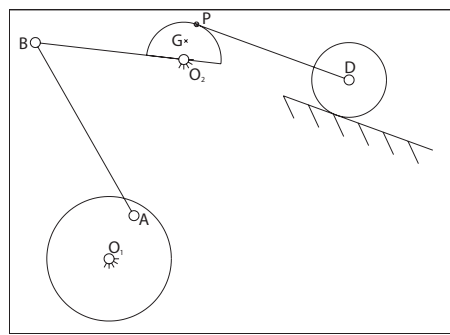
Per prima cosa si propone in Figura 4.2 una analisi del sistema articolato proposto, dando una rappresentazione della configurazione assunta dal sistema per differenti angoli di manovella α .

Si osserva innanzi tutto come il sistema meccanico da analizzare sia costituito da due sottosistemi in serie, di cui il primo è assimilabile ad un quadrilatero articolato delimitato dai punti O_1ABO_2 . Tale quadrilatero soddisfa la regola di Grashof in quanto $l_{min} + l_{max} < \sum \text{altri lati}$ avendo $l_{min} = 0,2m$, $l_{max} = \sqrt{0,3^2 + 0,8^2} = 0,854m$ e $l_2 + l_3 = 0,8 + 0,6 = 1,4$. Saranno quindi possibili due configurazioni di assemblaggio del sistema (come verrà poi dimostrato e rappresentato in Figura 4.4).

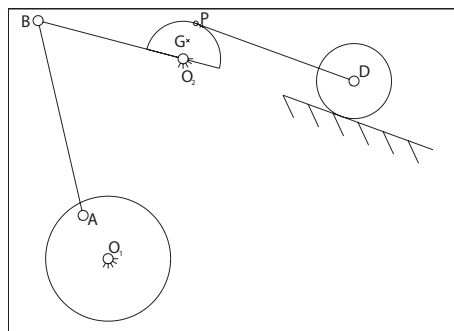
Inoltre nelle varie configurazioni riportate in Figura 4.2 è stato evidenziato come il punto della fune a contatto con il semidisco, rappresentato in figura con un circolo, rimanga fisso al variare dell'angolo di manovella α . Invece il punto del semidisco a contatto con la fune varia e per la configurazione assegnata ($\alpha = 160^\circ$) è stato evidenziato in figura con una crocetta.



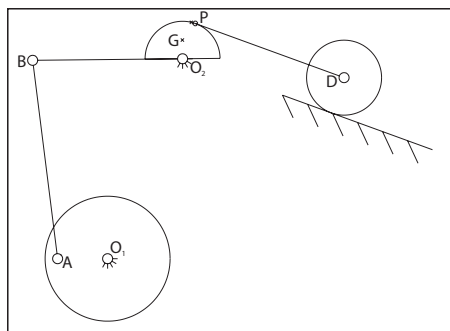
(a) Angolo di manovella $\alpha = 0^\circ$



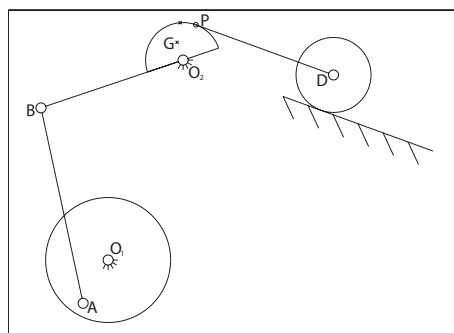
(b) Angolo di manovella $\alpha = 60^\circ$



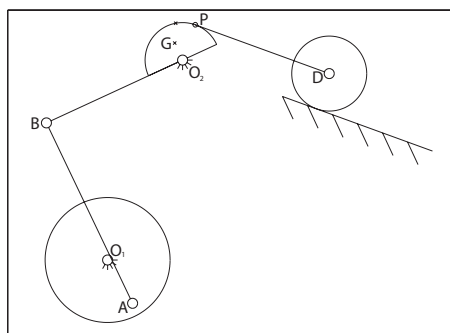
(c) Angolo di manovella $\alpha = 120^\circ$



(d) Angolo di manovella $\alpha = 180^\circ$



(e) Angolo di manovella $\alpha = 240^\circ$



(f) Angolo di manovella $\alpha = 300^\circ$

Figura 4.2: Cinematica del sistema per vari angoli di manovella

4.2 Soluzione del quesito 1

4.2.1 Con i numeri complessi

Per la risoluzione dei quesiti proposti è necessario risolvere la cinematica del sistema calcolando per prima cosa l'orientamento e la posizione delle varie aste. Si propone, quindi, l'utilizzo di una equazione di chiusura scritta secondo le convenzioni riportate nella seguente Figura ??.

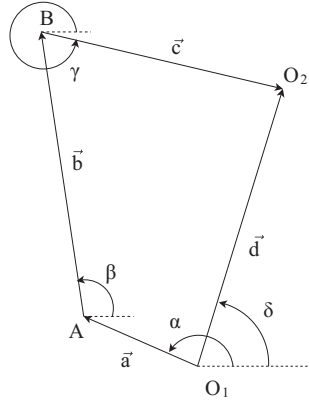


Figura 4.3: Chiusura cinematica

Si scrive dapprima l'equazione di chiusura cinematica per il primo sottosistema, riportata nell'equazione 4.1:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d} \quad (4.1)$$

L'equazione vettoriale 4.1 può essere riscritta utilizzando la notazione esponenziale, così come riportato nell'equazione 4.2:

$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} + ce^{i\gamma} = de^{i\delta} \quad (4.2)$$

In Tabella 4.3 sono riportate le grandezze note e quelle incognite dei vettori riportati nell'equazione 4.2:

Si osserva innanzi tutto che il vettore \vec{d} , che congiunge i due punti del telaio che rimangono fissi nello spazio, rimarrà costante sia in modulo che in fase. Tale termine scomparirà nelle derivazioni successive, ma risulta fondamentale per la determinazione della configurazione geometrica del sistema.

La proiezione dell'equazione 4.2 sui due assi reale ed immaginario porta alla scrittura del seguente sistema nelle due incognite β e γ .

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = d \cos \delta \\ a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = d \sin \delta \end{cases} \quad (4.3)$$

Vettore	Modulo	Fase
\vec{a}	$a = O_1A = 0.25m \text{ cost.}$	$\alpha = 160^\circ \text{ variabile assegnata}$
\vec{b}	$b = AB = 0.8m \text{ cost.}$	$\beta = 97.82^\circ \text{ variabile}$
\vec{c}	$c = BO_2 = 0.6m \text{ cost.}$	$\gamma = 354.16^\circ \text{ variabile}$
\vec{d}	$d = O_1O_2 = 0.854m \text{ cost.}$	$\delta = 69.44^\circ \text{ cost.}$

Tabella 4.3

Dalla prima delle due equazioni del sistema 4.3 è possibile esplicitare β come:

$$\beta = \arccos \left(\frac{d \cos \delta - a \cos \alpha - c \cos \gamma}{b} \right) \quad (4.4)$$

Sostituendo quanto appena ottenuto nella seconda equazione del sistema 4.3 si ottiene:

$$-b \sqrt{1 - \left(\frac{d \cos \delta - a \cos \alpha - c \cos \gamma}{b} \right)^2} = a \sin \alpha + c \sin \gamma - d \sin \delta \quad (4.5)$$

Elevando al quadrato entrambi i membri della 4.5 si ottiene:

$$\begin{aligned} & b^2 - d^2 \cos^2 \delta - a^2 \cos^2 \alpha - c^2 \cos^2 \gamma \\ & + 2ad \cos \delta \cos \alpha + 2cd \cos \delta \cos \gamma - 2ac \cos \alpha \cos \gamma = \\ & d^2 \sin^2 \delta + a^2 \sin^2 \alpha + c^2 \sin^2 \gamma \\ & + 2ac \sin \alpha \sin \gamma - 2ad \sin \delta \sin \alpha - 2cd \sin \delta \sin \gamma \end{aligned} \quad (4.6)$$

Utilizzando le relazioni trigonometriche è possibile semplificare la precedente equazione ottenendo:

$$K = A \cos \gamma + B \sin \gamma \quad (4.7)$$

dove i termini K , A e B sono noti per la configurazione assegnata (α) e, essendo $\delta = \text{cost}$, valgono:

$$\begin{aligned} K &= b^2 - a^2 - c^2 - d^2 + 2ad \cos(\alpha - \delta) \\ A &= 2ac \cos \alpha - 2cd \cos \delta \\ B &= 2ac \sin \alpha - 2cd \sin \delta \end{aligned} \quad (4.8)$$

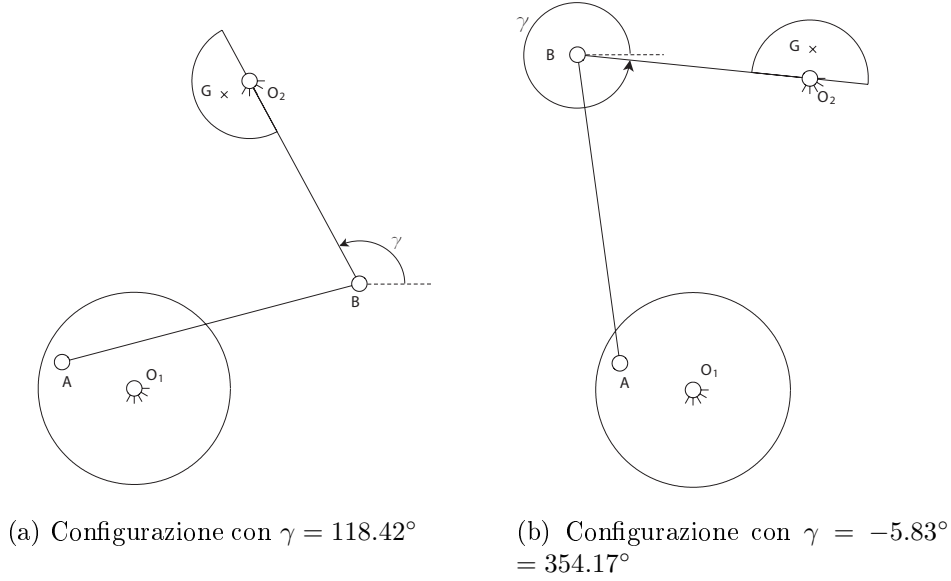


Figura 4.4: Confronto delle differenti soluzioni di montaggio

L'equazione 4.7, sfruttando la relazione trigonometrica $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$, può essere scritta come equazione quadratica nella variabile $\cos \gamma$.

$$K^2 - 2KA \cos \gamma + A^2 \cos^2 \gamma = B^2(1 - \cos^2 \gamma) \quad (4.9)$$

L'equazione 4.9 porta all'ottenimento di quattro soluzioni per l'angolo γ , rispettivamente $\gamma_{1-2} = \pm 5.83^\circ$ e $\gamma_{3-4} = \pm 118.42^\circ$, e quindi, tramite la 4.4, all'angolo β . Le uniche soluzioni accettabili sono le due con angolo γ pari a -5.83° e 118.42° ; tali configurazioni sono mostrate nella Figura 4.4

La soluzione di montaggio riportata in Figura 4.4(a) è infine da scartare in quanto non raggiungibile a partire dalla configurazione di montaggio assegnata e non consentirebbe inoltre un corretto avvolgimento della fune sul semidisco. La soluzione che verrà quindi utilizzata in seguito è quella con $\gamma = -5.83 = 354.17^\circ$ e di conseguenza $\beta = 97.82^\circ$.

A questo punto è possibile procedere con il calcolo della velocità di rotazione dell'asta BO_2 e, quindi, del semidisco ad essa rigidamente collegato. Per ricavare le varie velocità richieste si procede derivando l'equazione 4.2 ottenendo:

$$a\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} + b\dot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} + c\dot{\gamma}e^{i(\gamma+\frac{\pi}{2})} = 0 \quad (4.10)$$

Proiettando l'equazione 4.10 sull'asse reale ed immaginario si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -a\dot{\alpha} \sin \alpha - b\dot{\beta} \sin \beta - c\dot{\gamma} \sin \gamma = 0 \\ a\dot{\alpha} \cos \alpha + b\dot{\beta} \cos \beta + c\dot{\gamma} \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Il sistema di equazioni così ottenuto è un sistema di tipo lineare nelle incognite $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$. Tale sistema può quindi essere risolto utilizzando la scrittura in forma matriciale.

$$\begin{bmatrix} -b \sin \beta & -c \sin \gamma \\ +b \cos \beta & c \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +a\dot{\alpha} \sin \alpha \\ -a\dot{\alpha} \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Sostituendo i valori numerici nelle equazioni appena scritte si ottengono i risultati numerici riportati nella 4.13.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \sin \beta & -c \sin \gamma \\ +b \cos \beta & c \cos \gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} +a\dot{\alpha} \sin \alpha \\ -a\dot{\alpha} \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s} \\ 30.3 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Si osserva come l'aver ottenuto un valore numerico $\dot{\beta} < 0$, con le convenzioni adottate, indica che l'asta AB sta ruotando in verso orario, mentre il valore $\dot{\gamma} > 0$ indica che l'asta BO_2 sta ruotando in verso antiorario. A questo punto la velocità del punto G è immediatamente ricavabile come:

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \vec{\omega}_{BO_2} \wedge (G - O_2) \\ &= \dot{\gamma} \vec{k} \wedge \overline{GO_2} \left(\cos \left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} \right) \\ &= 2.3 \cdot 10^{-3} e^{i(\gamma + \frac{\pi}{2})} \text{ m/s} \end{aligned} \quad (4.14)$$

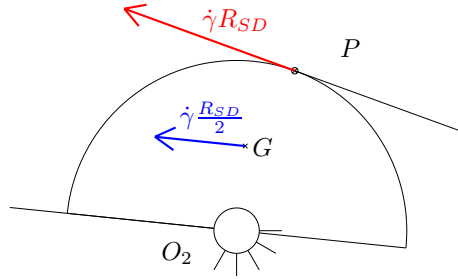
definendo il vettore posizione come:

$$(G - O_2) = GO_2 e^{i(\gamma + \frac{\pi}{2})} \quad (4.15)$$

e il vettore velocità come:

$$\frac{d}{dt}(G - O_2) = \vec{v}_G \quad (4.16)$$

Per quanto riguarda la velocità del centro del disco D si osserva come quest'ultima non possa che essere diretta come il piano inclinato. Il modulo di tale velocità viene invece riportato nell'equazione 4.17:


 Figura 4.5: Rappresentazione velocità \vec{v}_P e \vec{v}_G

$$|\vec{v}_D| = |\vec{v}_P| = |\vec{\omega}_{BO_2} \wedge (P - O_2)| = \dot{\gamma} \overline{PO_2} = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \quad (4.17)$$

in cui si ricorda che $(P - O_2)$ e $\frac{d}{dt}(P - O_2)$ sono numeri complessi

Si fornisce quindi in Figura 4.5 una rappresentazione grafica delle due velocità appena calcolate, di cui rispettivamente in rosso la velocità \vec{v}_P ed in blu la velocità del punto \vec{v}_G .

4.2.2 Con i moti relativi

Velocità ed accelerazioni possono essere ricavate anche mediante l'utilizzo di terne in moto relativo. Si sceglie di posizionare una terna traslante $x_1 O_A y_1$ in A con cui studiare velocità e accelerazione del punto B . Il moto del punto B è un moto assoluto rotatorio attorno al punto O_2 . Infatti il punto B appartiene al corpo rigido BO_2 incernierato in O_2 cerniera fissa. Il moto di trascinamento rappresenta il moto che l'osservatore assoluto vedrebbe se il punto B fosse solidale con la terna mobile (moto relativo impedito) e trascinato in questo caso a traslare con $\vec{v}_B^{(Tr)} = \vec{v}_A$ (attenzione al fatto che il punto A è in moto rotatorio rispetto ad O_1). Per ricostruire il moto assoluto va sommato al moto di trascinamento il moto relativo visto dall'osservatore mobile. Il moto relativo del punto B è visto dall'osservatore traslante come un moto rotatorio di B attorno ad A . Infatti il punto B appartiene al corpo rigido AB incernierato in A che risulta essere una cerniera mobile. La velocità del punto B può quindi essere espressa così:

$$\vec{v}_B^{(Ass)} = \vec{v}_B^{(Tr)} + \vec{v}_B^{(Rel)} \quad (4.18)$$

I termini dell'equazione 4.18 possono essere espressi come riportato nella tabella 4.4.

$\vec{v}_B^{(Ass)}$	$\vec{v}_B^{(Tr)}$	$\vec{v}_B^{(Rel)}$	
Modulo	$\vec{\omega}_{O_2B} \wedge (B - O_2)$	$\vec{\omega}_{O_1A} \wedge (A - O_1)$	$\vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A)$
Direzione	$\perp O_2B$	$\perp O_1A$	$\perp AB$

Tabella 4.4: Vettori

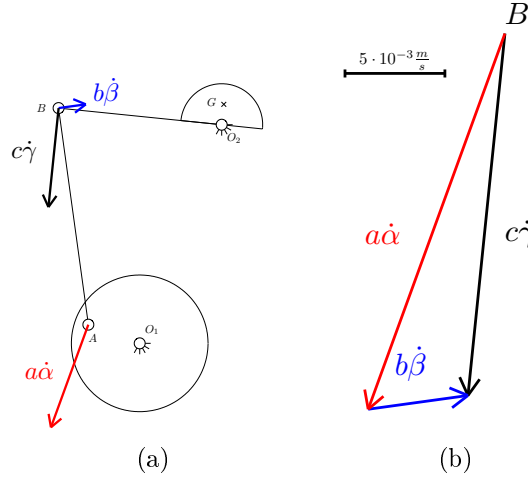


Figura 4.6: Poligono delle velocità

Confrontando i termini dell'equazione 4.18 con i valori dell'equazione 4.10 si nota come le due metodologie risolutive portino ad esplicitare gli stessi termini.

$$\underbrace{a\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}}_{\vec{v}_B^{(Tr)}} + \underbrace{b\dot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})}}_{\vec{v}_B^{(Rel)}} = -c\dot{\gamma}e^{i(\gamma+\frac{\pi}{2})} = \underbrace{c\dot{\gamma}e^{i(\gamma-\frac{\pi}{2})}}_{\vec{v}_B^{(Ass)}} \quad (4.19)$$

Da ultimo è possibile fornire una rappresentazione grafica dell'equazione 4.19, così come riportato nella Figura 4.6, in cui sono rappresentate, per la configurazione assegnata, in nero la velocità assoluta $\vec{v}_B^{(Ass)}$ del punto B , in rosso il termine di trascinamento $\vec{v}_B^{(Tr)}$ ed in blu in termine di velocità relativa $\vec{v}_B^{(Rel)}$.

In particolare in Figura 4.6(a) sono evidenziati i tre termini di velocità nei rispettivi punti di applicazione, mentre in Figura 4.6(b) è evidenziata la chiusura del poligono delle velocità.

4.3 Soluzione del quesito 2

4.3.1 Con i numeri complessi

E' possibile procedere al calcolo delle accelerazioni richieste noti i valori di $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ ricavati al passo precedente. Derivando l'equazione 4.10 è possibile ottenere:

$$\begin{aligned} a\ddot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + b\ddot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} - b\dot{\beta}^2e^{i\beta} + \\ + c\ddot{\gamma}e^{i(\gamma+\frac{\pi}{2})} - c\dot{\gamma}^2e^{i\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

L'equazione 4.20, come già visto per l'equazione 4.10, può essere proiettata sui due assi reale ed immaginario ottenendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta - c\ddot{\gamma}\sin\gamma - c\dot{\gamma}^2\cos\gamma = 0 \\ a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha - b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta - c\ddot{\gamma}\cos\gamma - c\dot{\gamma}^2\sin\gamma = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

A questo punto, è possibile calcolare la soluzione del sistema 4.21 utilizzando la formulazione matriciale, ottenendo la seguente espressione.

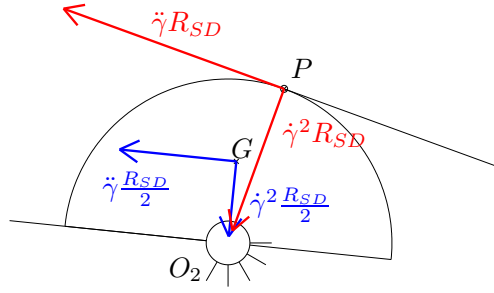
$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -b\sin\beta & -c\sin\gamma \\ +b\cos\beta & c\cos\gamma \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{Bmatrix} +a\ddot{\alpha}\sin\alpha + a\dot{\alpha}^2\cos\alpha + b\dot{\beta}^2\cos\beta + c\dot{\gamma}^2\cos\gamma \\ -a\ddot{\alpha}\cos\alpha + a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + b\dot{\beta}^2\sin\beta + c\dot{\gamma}^2\sin\gamma \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

E' possibile notare come la matrice da invertire sia la stessa di quella calcolata per la stima delle velocità. La sostituzione dei valori numerici nell'equazione 4.22 porta all'ottenimento dei seguenti risultati di accelerazione.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}^2 \\ 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}^2 \end{Bmatrix}$$

Si nota come entrambi i valori di $\ddot{\beta}$ e $\ddot{\gamma}$ risultino positivi secondo le convenzioni evidenziate in Figura ?? corrispondente ad accelerazioni del moto entrambe dirette in senso antiorario. Per il calcolo delle accelerazioni del punto G e del centro del disco D si utilizza, come per le velocità, il teorema di Rivals, così come riportato nell'equazione 4.23.

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= \vec{\omega}_{BO_2} \wedge (G - O_2) + \vec{\omega}_{BO_2} \wedge (\vec{\omega}_{BO_2} \wedge (G - O_2)) \\ \vec{a}_P &= \vec{\omega}_{BO_2} \wedge (P - O_2) + \vec{\omega}_{BO_2} \wedge (\vec{\omega}_{BO_2} \wedge (P - O_2)) \end{aligned} \quad (4.23)$$


 Figura 4.7: Rappresentazione accelerazioni del punto P e G

Per la risoluzione numerica è conveniente scomporre i due vettori accelerazione appena indicati nelle due componenti normale e tangenziale, ottenendo le seguenti espressioni.

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}_{Gt}| &= \left| \ddot{\gamma} \vec{k} \wedge (G - O_2) \right| = \left| -\ddot{\gamma} \frac{R_{SD}}{2} e^{i\gamma} \right| = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2 \\
 |\vec{a}_{Gn}| &= \left| \dot{\gamma} \vec{k} \wedge \left(\dot{\gamma} \vec{k} \wedge (G - O_2) \right) \right| = \left| -\dot{\gamma}^2 \frac{R_{SD}}{2} e^{i(\gamma + \frac{\pi}{2})} \right| = 6.9 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2 \\
 |\vec{a}_{Pt}| &= \left| \ddot{\gamma} \vec{k} \wedge (P - O_2) \right| = \left| \ddot{\gamma} R_{SD} e^{i\vartheta} \right| = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2 \\
 |\vec{a}_{Pn}| &= \left| \dot{\gamma} \vec{k} \wedge \left(\dot{\gamma} \vec{k} \wedge (P - O_2) \right) \right| = \left| \dot{\gamma}^2 R_{SD} e^{i(\vartheta + \frac{\pi}{2})} \right| = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Si fornisce quindi in Figura 4.7 una rappresentazione grafica delle accelerazioni appena calcolate, di cui rispettivamente in rosso l'accelerazione normale e tangenziale del punto P ed in blu quelle del punto G .

L'accelerazione del centro del disco, e quindi del punto D , risente unicamente della componente tangenziale di \vec{a}_{Pt} , quindi può essere espressa come $|\vec{a}_D| = |\vec{a}_{Pt}| = \ddot{\gamma} \wedge (P - O_2)$. Per quanto riguarda la direzione dell'accelerazione \vec{a}_D sarà diretta in modo parallelo al piano inclinato su cui rotola il disco D .

4.3.2 Con i moti relativi

Da ultimo si propone, anche per le accelerazioni, la valutazione dell'accelerazione del punto B mediante l'approccio con i moti relativi.

$$\vec{a}_B^{(Ass)} = \vec{a}_B^{(Tr)} + \vec{a}_B^{(Rel)} + \vec{a}_B^{(Cor)} \quad (4.25)$$

Nello specifico gli elementi dell'equazione 4.25 rappresentano:

- $\vec{a}_B^{(Ass)}$: accelerazione assoluta del punto B , avente una componente normale $\vec{a}_{Bn}^{(Ass)}$ e una tangenziale $\vec{a}_{Bt}^{(Ass)}$ (perché il moto assoluto del punto B è rotatorio attorno alla cerniera fissa O_1).

$$\begin{cases} \vec{a}_{Bn}^{(Ass)} = \vec{\omega}_{BO_2} \wedge (\vec{\omega}_{BO_2} \wedge (B - O_2)) \\ \vec{a}_{Bt}^{(Ass)} = \vec{\omega}_{BO_2} \wedge (B - O_2) \end{cases}$$

- $\vec{a}_B^{(Tr)}$: accelerazione di trascinamento del punto B corrispondente ad una traslazione con accelerazione \vec{a}_A , avente una componente normale $\vec{a}_{Bn}^{(Tr)}$ e una tangenziale $\vec{a}_{Bt}^{(Tr)}$.

$$\begin{cases} \vec{a}_{Bn}^{(Tr)} = \vec{\omega}_{AO_1} \wedge (\vec{\omega}_{AO_1} \wedge (A - O_1)) \\ \vec{a}_{Bt}^{(Tr)} = \vec{\omega}_{AO_1} \wedge (A - O_1) \end{cases}$$

- $\vec{a}_B^{(Rel)}$: accelerazione relativa del punto B , avente una componente normale $\vec{a}_{Bn}^{(Rel)}$ e una tangenziale $\vec{a}_{Bt}^{(Rel)}$ (perché il moto relativo di B è rotatorio attorno ad A).

$$\begin{cases} \vec{a}_{Bn}^{(Rel)} = \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A)) \\ \vec{a}_{Bt}^{(Rel)} = \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A) \end{cases}$$

- $\vec{a}_B^{(Cor)} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_B^{(Rel)}$: accelerazione di Coriolis che risulta essere nulla nel caso in esame avendo velocità angolare della terna mobile $\omega = 0$ in quanto la terna mobile è traslante.

È quindi possibile suddividere i termini sopra elencati così come riportato nella seguente Tabella 4.5.

Esplicitando i termini dell'equazione 4.25 con i valori esplicitati in Tabella si ottiene l'equazione:

$$\underbrace{a\ddot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}}_{\vec{a}_{Bt}^{(tr)}} - \underbrace{a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha}}_{\vec{a}_{Bn}^{(tr)}} + \underbrace{b\ddot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})}}_{\vec{a}_{Bt}^{(rel)}} - \underbrace{b\dot{\beta}^2e^{i\beta}}_{\vec{a}_{Bn}^{(rel)}} + \underbrace{c\ddot{\gamma}e^{i(\gamma+\frac{\pi}{2})}}_{\vec{a}_{Bt}^{(ass)}} - \underbrace{c\dot{\gamma}^2e^{i\gamma}}_{\vec{a}_{Bn}^{(ass)}} = 0 \quad (4.26)$$

	Modulo	Direzione
$\vec{a}_{Bn}^{(ass)}$	$\vec{\omega}_{O_2B} \wedge (\vec{\omega}_{O_2B} \wedge (B - O_2))$	$\parallel BO_2$
$\vec{a}_{Bt}^{(ass)}$	$\vec{\omega}_{O_2B} \wedge (B - O_2)$	$\perp BO_2$
$\vec{a}_{Bn}^{(tr)}$	$\vec{\omega}_{O_1A} \wedge (\vec{\omega}_{O_1A} \wedge (A - O_1))$	$\parallel AO_1$
$\vec{a}_{Bt}^{(tr)}$	$\vec{\omega}_{O_1A} \wedge$	$\perp AO_1$
$\vec{a}_{Bn}^{(rel)}$	$\vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A))$	$\parallel AB$
$\vec{a}_{Bt}^{(rel)}$	$\vec{\omega}_{AB} \wedge$	$\perp AB$
$\vec{a}_B^{(Cor)}$	—	—

Tabella 4.5

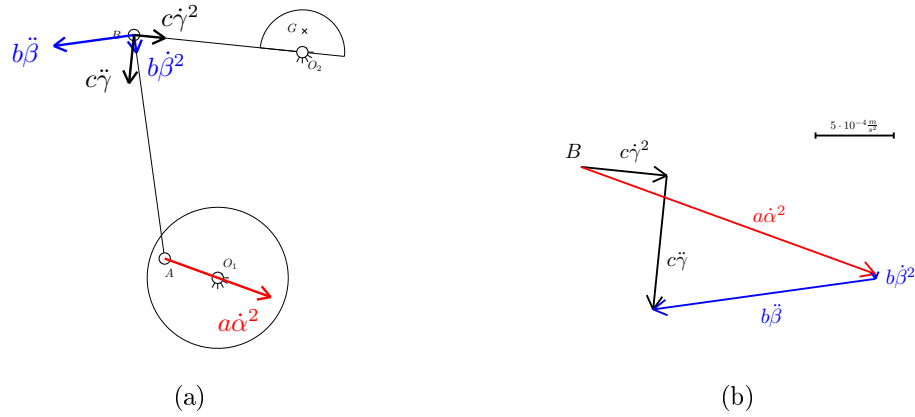


Figura 4.8: Poligono delle accelerazioni

i cui termini sono esattamente i medesimi dell'equazione 4.20.

Da ultimo è possibile fornire una rappresentazione grafica dell'equazione 4.26, così come riportato nella Figura 4.8, in cui sono rappresentate, per la configurazione assegnata, in nero l'accelerazione assoluta del punto B $\vec{a}_B^{(Ass)}$, in rosso il termine di trascinamento $\vec{a}_B^{(Tr)}$ ed in blu in termine di accelerazione relativa $\vec{a}_B^{(Rel)}$ (Si fa notare che in Figura 4.8(a) il vettore $b\dot{\beta}^2$ è stato scalato di un fattore 10 per motivi grafici).

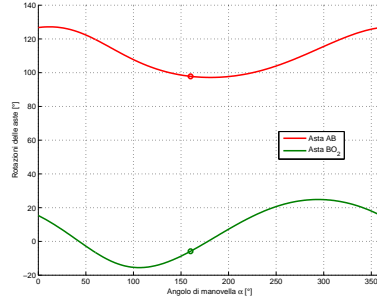


Figura 4.9: Rotazioni aste

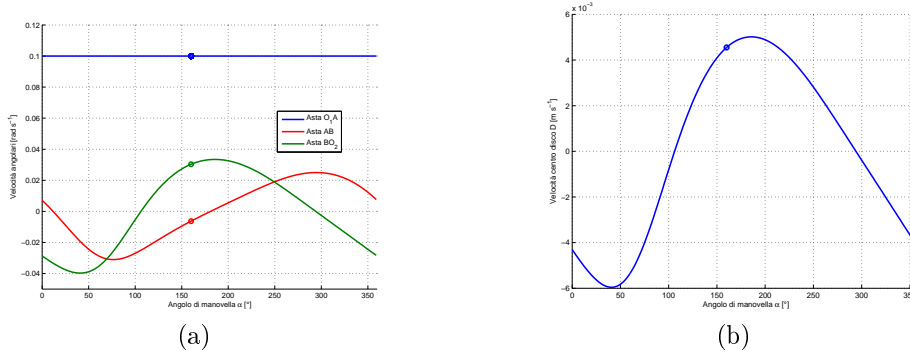


Figura 4.10: Velocità dei componenti del sistema

4.4 Osservazioni

Si propone un'analisi complessiva della cinematica del sistema valutando le posizioni, velocità ed accelerazioni del sistema in funzione dell'angolo di manovella α .

Per prima cosa si riporta in figura 4.9 l'andamento degli angoli β e γ in funzione dell'angolo di manovella α ; in tale figura è stato evidenziato con un circolo il punto relativo alla configurazione assegnata $\alpha = 160^\circ$.

In seguito si propone in Figura 4.10(a) l'andamento degli angoli $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ e in Figura 4.10(b) la velocità del centro del disco D sempre in funzione dell'angolo di manovella α . Come prima, si evidenzia con un circolo il punto relativo alla configurazione assegnata $\alpha = 160^\circ$ e $\dot{\alpha} = 0.1 \text{ rad/s}$.

In Figura 4.10(b) si nota come il tempo in cui il disco si muove verso l'alto, ovvero in cui $|\vec{v}_D| > 0$, risultino pari al 52.2% del periodo complessivo (pari a $2\pi/\dot{\alpha}$). Ciò significa che il tempo di andata (disco in salita) differisce, seppur di poco, da quello di ritorno (disco in discesa). E' possibile osservare inoltre come nel caso analizzato la velocità dell'asta O_1A si mantenga costante per tutti i valori di dell'angolo di manovella considerati. Infine si propone

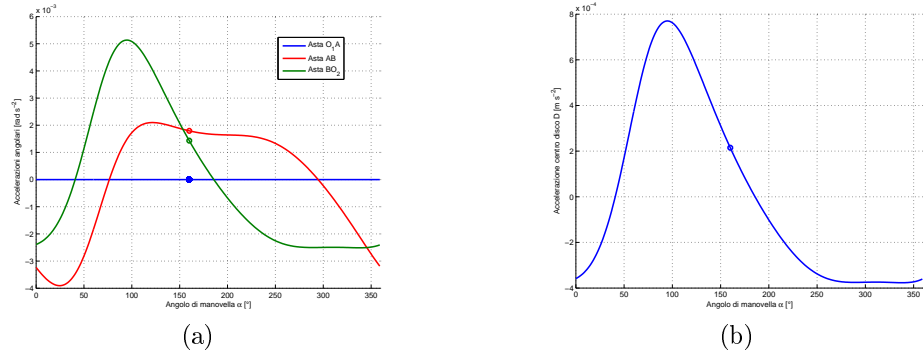


Figura 4.11: Accelerazione dei componenti del sistema

in Figura 4.11 l'andamento degli angoli $\ddot{\beta}$ e $\ddot{\gamma}$ e in Figura 4.11 l'accelerazione del centro del disco D sempre in funzione dell'angolo di manovella α . Come prima, si evidenzia con un circolo il punto relativo alla configurazione assegnata $\alpha = 160^\circ$ e $\dot{\alpha} = 0.1 \text{ rad/s}$. Dalla figura si osserva come solo per l'asta O_1A si abbia un valore di accelerazione nulla, dovuta al fatto che la velocità dell'asta stessa è mantenga costante per tutti i valori di angoli di manovella considerati. Per le aste con velocità variabile si osserva un profilo di accelerazione diverso da 0. Dove ho v_{max} ho accelerazione nulla.