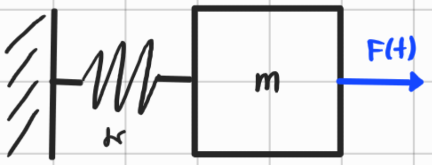
① Moto libero non smorzato forzato da forzante armonica



equazione di moto del sistema: $m\ddot{x} + kx = F(t)$

$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$

l'integrale generale si ottiene risolvendo l'equazione omogenea associata e poi ricercare la soluzione particolare attraverso il metodo di somiglianza

▸ $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}}$

Soluzioni del tipo $x_0 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ | le costanti C_1 e C_2 vengono determinate con le condizioni iniziali.

Inoltre $\lambda_{1,2}$ può anche essere vista come la pulsazione propria del sistema, cioè
$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Appare immediato capire che affinché le soluzioni siano reali, C_1 e C_2 devono apparire complesse coniugate

Per quanto riguarda la soluzione particolare x_p, andiamo a cercare soluzioni della forma

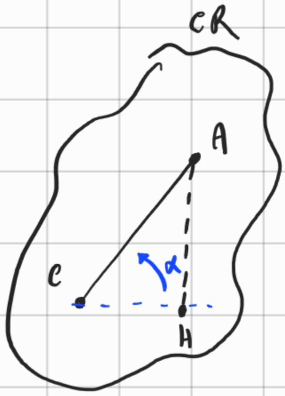
$x_p = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ ipotizzando nulle implicite di trattazione $\phi = 0$

In modo che

- $x'_p = -A\Omega\sin(\Omega t) + \Omega B\cos(\Omega t)$
- $x''_p = -A\Omega^2\cos(\Omega t) - B\Omega^2\sin(\Omega t)$

⇒ Sostituire e sviluppare calcolo

(2) teorema Rivals, dimostrazione ed enunciato



Dato un corpo rigido CR con velocità e accelerazione angolare ω e $\dot{\omega}$ rispetto all'osservatore, identificato il C.I.R. ovvero il punto a velocità 0

Chiamo con H la proiezione di A sulla normale, scrivo la mia equazione di chiusura

$$(A-C) = (H-C) + (A-H)$$

$$\downarrow$$

$$a\cos\alpha\, \underline{i} + a\sin\alpha\, \underline{j} = \overline{HC}\, \underline{i} + \overline{AH}\, \underline{j}$$

$\downarrow \frac{\partial}{\partial t}$ per la velocità

$$-\dot{\alpha}\, a\sin\alpha\, \underline{i} + \dot{\alpha}\, a\cos\alpha\, \underline{j} = 0$$

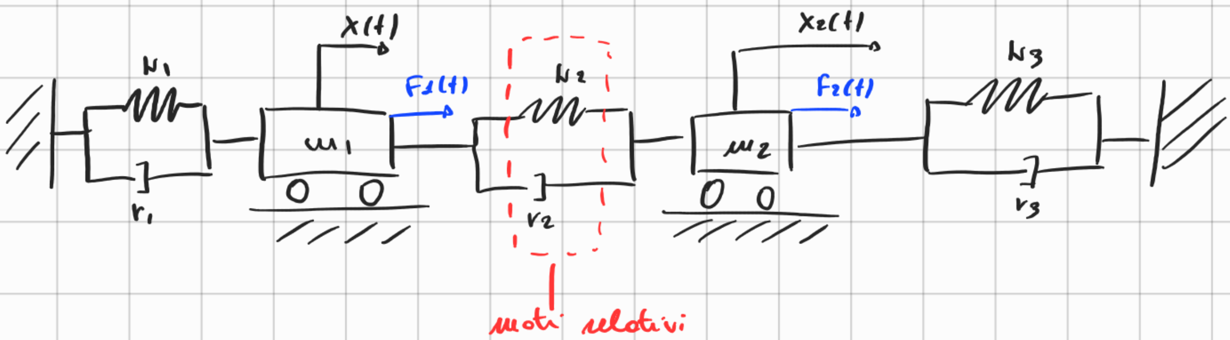
$\downarrow$ così via

Per semplicità applicato nel C.I.R.

(3) Sistemi vibranti a 2-n gradi di libertà e frequenze proprie sistemi 2GdL

Per semplicità $2\times 2 \Rightarrow$ 2 G.d.L. $\Rightarrow$ approccio matriciale

lo stesso per n gradi di libertà con matrici $n\times n$



iniziamo con la scrittura delle equazioni di moto
- eq. Forze dinamiche
- eq. Lagrange

- $m_2\ddot{x}_2 - r_2 x_1 + (r_2 - r_1)\dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2+k_3)x_2 = F(t)$
- $m_1\ddot{x}_1 + (r_2+r_1)\dot{x}_1 - r_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1(t)$

Dalle 2 posso calcolare

- frequenze proprie → sistema omogeneo non smorzato
- modi di vibrare → sistema omogeneo e non smorzato

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad [R] = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + r_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} \qquad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

e cioè $$[M]\ddot{x} + [R]\dot{x} + [K]x = F$$

Dal punto di vista formale non cambia niente rispetto al sistema ad 1 GdL
In notazione matriciale non cambia niente se le matrici o i vettori sono $2\times2 \div 2\times1$ oppure $n\times n \div n\times1$

Osserviamo che le matrici $[M]$ $[R]$ e $[K]$ sono simmetriche

$[M] = [M]^T$ e così via

Calcolo frequenze proprie

$$[M]\ddot{x} + [K]x = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ipotizziamo soluzione armonica per (1)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t - \varphi) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega^2 X_1 \cos(\omega t - \varphi) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega^2 X_2 \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

sostituisco e ho due eq in X_1 e X_2

soluzione non banale = det matrice nullo

$$\det \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2+k_3) \end{bmatrix} = 0$$

→ equazione in $\omega^4 \Rightarrow \omega_1^2, \omega_2^2$ → X_1, X_2

e la soluzione sarà $X = x_1(t) + x_2(t)$

③ PLV nella dinamica dei sistemi

Approccio alternativo a quello basato sulle equazioni di equilibrio che consiste nell'imporre l'annullamento del lavoro virtuale compiuto complessivamente da tutte le forze attive in qualsiasi spostamento virtuale del sistema.

È un "modo energetico" per la scrittura dell'equazioni di equilibrio.

permette di scrivere un numero di equazioni indipendenti pari al numero di gradi di libertà del sistema e che in tali equazioni NON compaiano le incognite di reazione vincolare.

Per un sistema formato da n_C CORPI:

$$\delta L = \sum_{i,j}^{n_C, n_i} \vec{F}_{ij} \times \delta P_{ij} + \underbrace{\sum_{i}^{n_C} \left(-m_i \vec{a}_i \times \delta G_i - J_{G_i} \times \delta \theta_i \right)}_{\text{componenti baricentrali pari alle forze d'inerzia dell'approccio D'Alembert}} = 0$$

Esprimiamo gli spostamenti virtuali

$$\begin{cases} \delta x_{G_i} = \sum \dfrac{\partial x_{G_i}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta y_{G_i} = \sum \dfrac{\partial y_{G_i}}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta \theta_{G_i} = \sum \dfrac{\partial \theta_i}{\partial q_k} \delta q_k \end{cases}$$

e sostituendo nell'espressione trovata prima $\Rightarrow \delta L = \sum_k^{n} \left(Q_k + Q_{IN,k} \right) = 0$

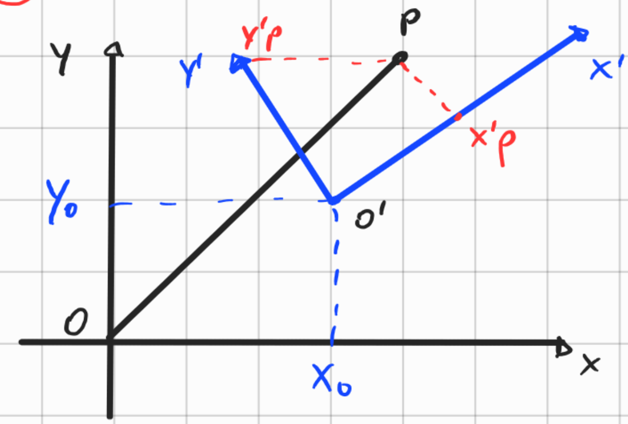
Q_k = componente lagrangiana secondo la k-esima coordinata delle forze agenti sul sistema

$Q_{IN,k}$ = componente lagrangiana secondo la stessa coordinata delle forze e coppie d'inerzia agenti sul sistema.

D'alembert

$$\left(m\ddot{x} \frac{\partial x_G}{\partial q_k} + m\ddot{y} \frac{\partial y_G}{\partial q_k} + J\ddot{\theta} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k} \right)$$

(4) Moti relativi



IN BLU SISTEMA RELATIVO

$$(P-O) = x_O \underline{i} + y_O \underline{J} + \underline{x'_P \underline{i}'} + \underline{y'_P \underline{J}'}$$

$$V_P = \dot{x}_O \underline{i} + \dot{y}_O \underline{J} + \dot{x}_P \underline{i}' + \dot{y}_P \underline{J}' + x_P \cdot \vec{\omega} \wedge \underline{i}' + y_P \cdot \vec{\omega} \wedge \underline{J}' =$$

$$= \vec{V}_{O'} + \underbrace{\vec{V}_{P'} + \vec{\omega} \wedge (x_P \underline{i}' + y_P \underline{J}')}_{\text{v. trascinamento}}$$

$$\frac{dV_P}{dt} = \underbrace{\bar{a}'}_{\text{P rispetto O'}} + \underbrace{\bar{a}_{O'}}_{\text{O' rispetto O}} + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')}_{\text{centripeta}} + \underbrace{\bar{\alpha} \times \bar{r}'}_{\alpha \text{ di O' rispetto O}} + \underbrace{2\, \bar{\omega} \times \bar{v}'}_{\text{CORIOLIS}}$$

(3) Effetto smorzamento

Nella realtà vediamo l'ampiezza dei sistemi vibranti a 1 GdL ridursi nel tempo. Questo avviene perché al moto è associata una dissipazione di energia, dovuta a vari tipi di attrito, perché i materiali non sono perfettamente elastici ecc. e dissipano energie in ogni ciclo.

Queste forme di dissipazione vengono generalmente racchiuse in un termine r di smorzamento viscoso.

- Approssimiamo tutto ciò che succede a livello di dissipazione energetica

L'integrale generale sarà del tipo

$$\boxed{(\lambda^2 m + \lambda r + k) X e^{\lambda t} = 0}$$

e scartando $X = 0$ soluzione banale avremo

$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$

Per distinguere ciò che avviene analizziamo l'andamento del fattore di smorzamento

$$h := \frac{r^*}{r_c} = \frac{r^*}{2m\omega_0}$$

caso $r < r_c$

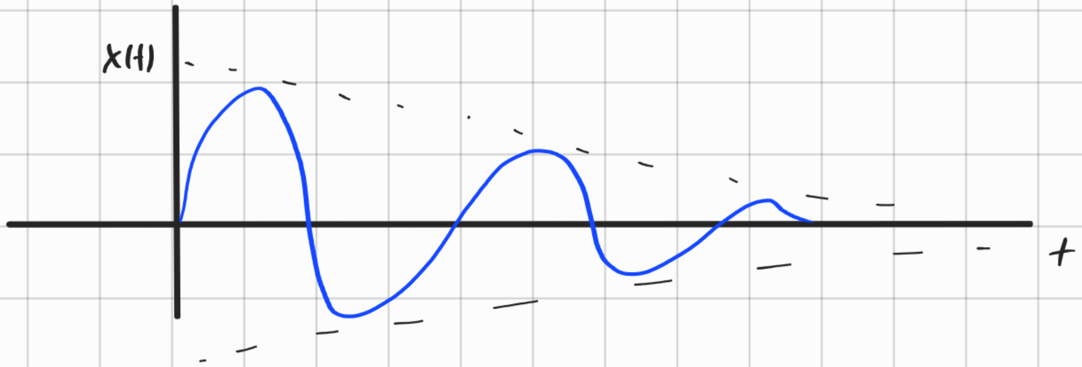
$\Delta < 0 \Rightarrow$ soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = -\alpha \pm i\omega_d$$

$$\alpha = \frac{r}{2m} \qquad \omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

sostituendo

$$x = e^{-\alpha t}\left(X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t}\right)$$ // decrescente esponenziale



caso $r > r_c$

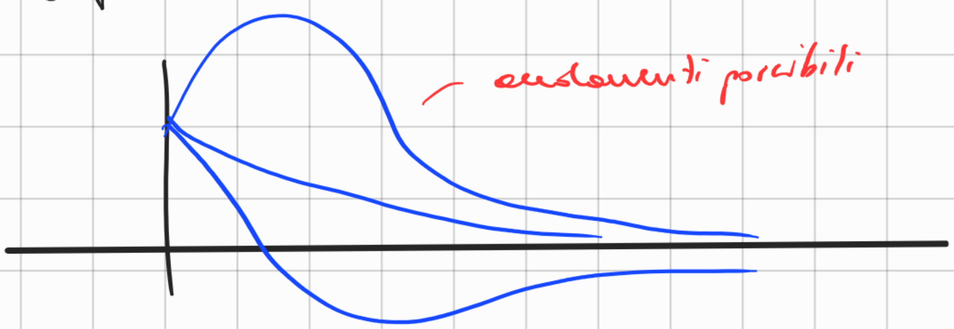
$$\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta} = \begin{cases} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{cases}$$

Essendo $\alpha > \sqrt{\Delta}$ le 2 radici sono negative

$\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$x = X_1 e^{-\alpha_1 t} + X_2 e^{-\alpha_2 t}$$

decrescita esponenziale variabile, che dipende dalle condizioni iniziali, e torna nella posizione di equilibrio statico senza compiere oscillazioni

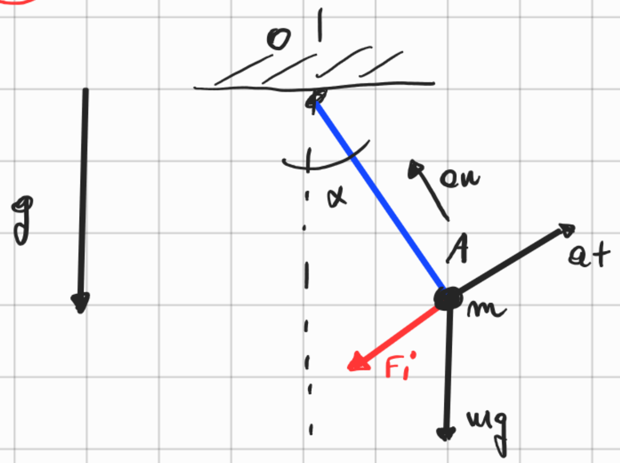


caso 3

$r = r_c$

$\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ soluzione $x = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t}$

6 Pendolo

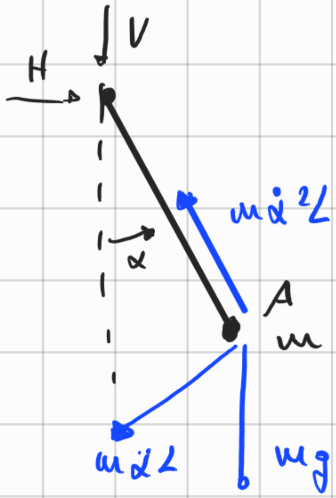


Hp.: • O cerniera e ferma
• filo lunghezza L inestensibile
• massa concentrata

Equilibrio $\Rightarrow$ eq. moto < DINAMICO / ROTAZIONE

$\sum M^* = 0$ $\quad$ $*$ = si usano anche forze inerzie

polo nella reazione vincolare $\Rightarrow$ forze-vincolo non le consideriamo



• $m\ddot{\alpha}L^2 + mgL\sin\alpha = 0$

$L\ddot{\alpha} + g\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha \sim \alpha$

$L\ddot{\alpha} + g\alpha = 0$

eq. moto armonico

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ $\quad T = \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad | \quad \alpha(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$