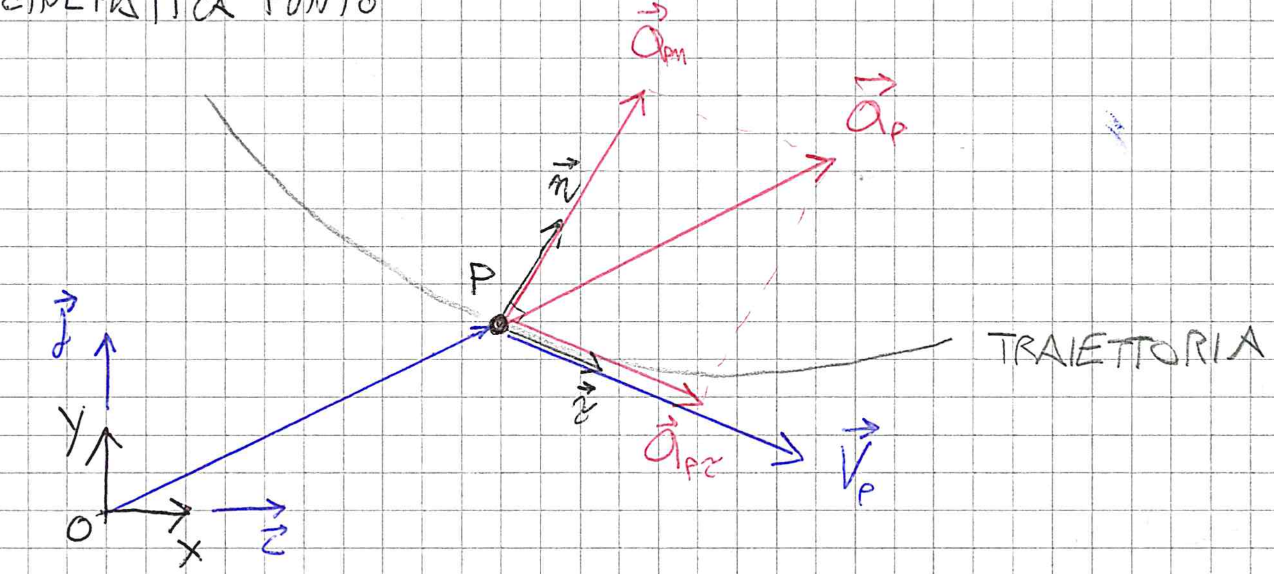
ESERCITAZIONE 1

- CINEMATICA PUNTO



$$(P-O) = \vec{P} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j}$$

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{x}_P \vec{i} + \dot{y}_P \vec{j} = V_P \vec{\tau}$$

V_P = MODULO DI $\vec{V}_P$ = $\sqrt{\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2}$

$\vec{\tau}$: VERSORE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA IN P

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{x}_P \vec{i} + \ddot{y}_P \vec{j} = \dot{V}_P \vec{\tau} + \frac{V_P^2}{\rho} \vec{n}$$

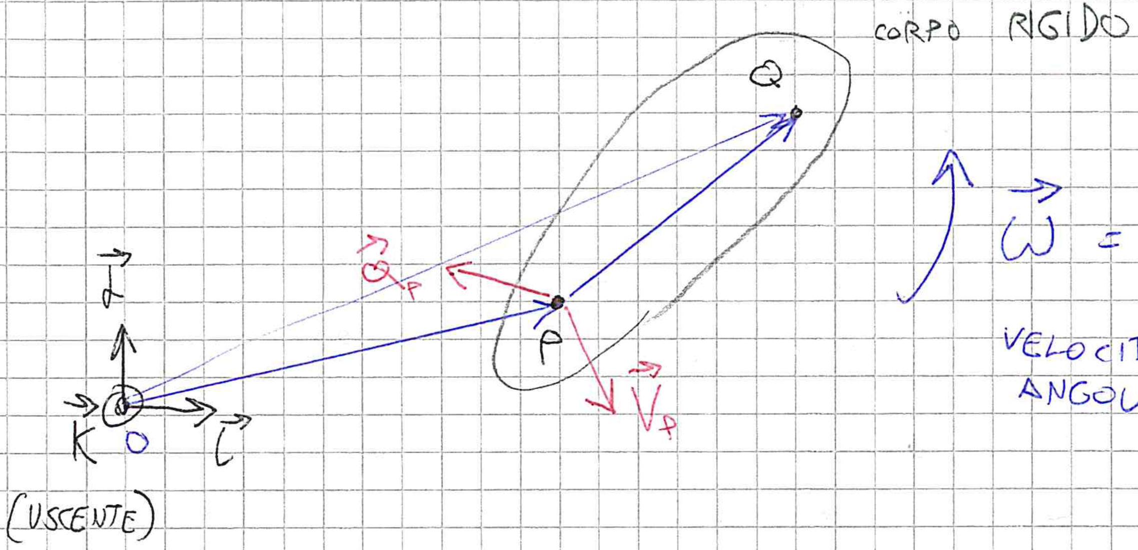
ρ : RAGGIO DI CURVATURA

$\vec{n}$: VERSORE NORMALE

$\dot{V}_P$ = COMPONENTE DI ACCEL TANGENZIALE (VARIAZIONE DI MODULO DI $\vec{V}$)

$\frac{V_P^2}{\rho}$ = COMP. NORMALE (VARIAZIONE DIREZIONE DI $\vec{V}$)

- CINEMATICA CORPO RIGIDO



$$\vec{\omega} = \omega \vec{K}$$

VELOCITÀ ANGOLARE

$$(Q-O) = \underbrace{(Q-P)}_{} + (P-O)$$

↳ PUÒ SOLO RUOTARE (MODULO COSTANTE) PER VINCOLO RIGIDITÀ

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_P + \vec{\omega} \wedge (Q-P) \qquad \boxed{\text{RIVALS}}$$

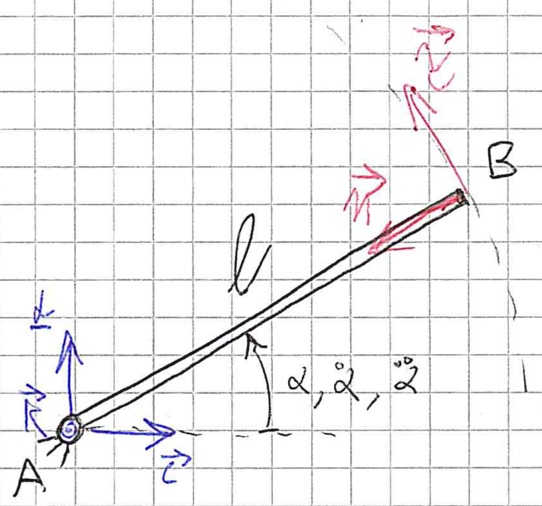
$$\vec{\omega} = \omega \vec{K}$$ VELOCITÀ ANGOLARE NEL MOTO PIANO

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_P + \dot{\vec{\omega}} \wedge (Q-P) - \omega^2 (Q-P)$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{K}$$ ACCELERAZIONE ANGOLARE

ESERCIZIO 1

TRAIETTORIA CIRCOLARE



CALCOLARE $\vec{V}_B$ e $\vec{a}_B$ USANDO RIVALS, NOTO $\alpha(t)$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

$$\vec{\omega} = \dot\alpha \vec{K}$$

$$(B-A) = l\left(\cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j}\right)$$

$$\vec{V}_A = \vec{0} \qquad \text{(PER LA CERNIERA)}$$

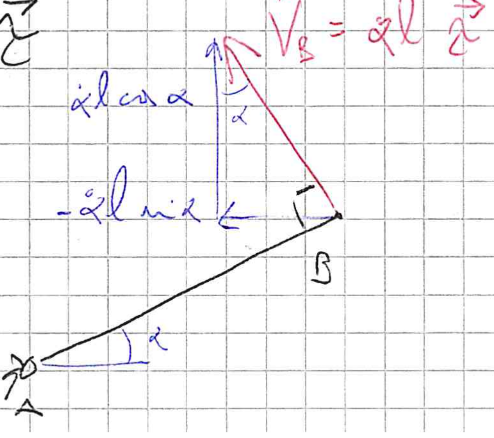
$A \equiv CIR$
$\forall$ ATTO DI MOTO

$$\vec{V}_B = \dot\alpha l\, \vec{K} \wedge \left(\cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j}\right)$$

$$= \dot\alpha l \left(-\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j}\right)$$

$$= \dot\alpha l\, \vec{\tau}$$

=



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B-A) - \omega^2 (B-A)$$

$$\vec{a}_A = 0$$

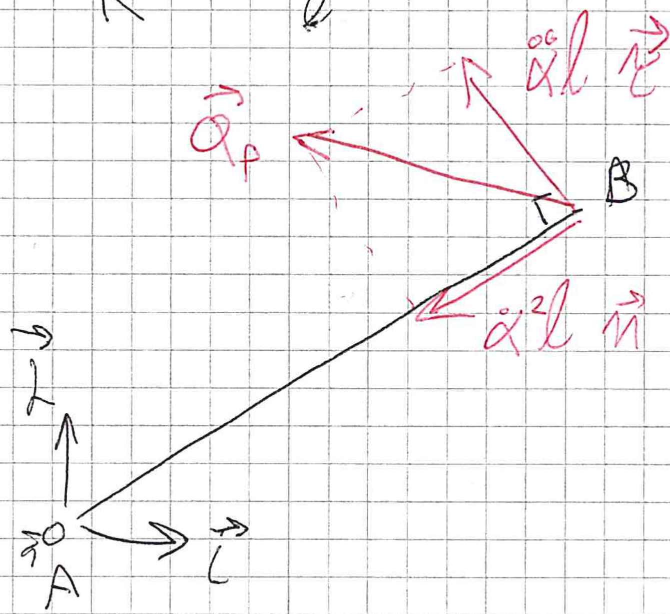
$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\alpha}\vec{k}$$

$$\vec{a}_B = \ddot{\alpha} l \left(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}\right) - \dot{\alpha}^2 l \left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right)$$

$$= (\ddot{\alpha} l)\,\vec{\tau} + (\dot{\alpha}^2 l)\,\vec{n}$$

con $\vec{n} = -\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}$

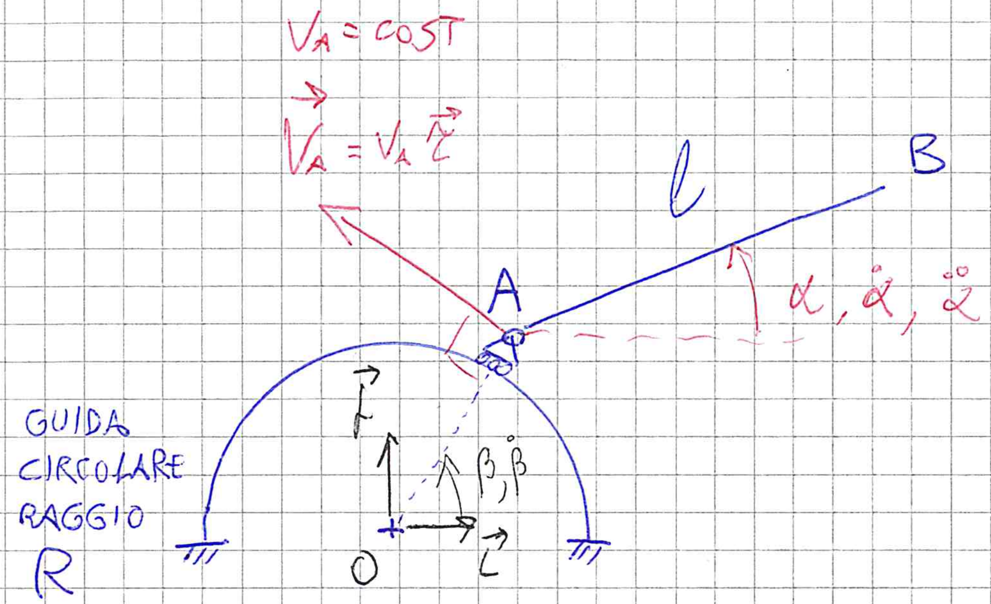
$$(\dot{\alpha}^2 l) = \frac{V_P^2}{R} = \frac{(\dot{\alpha} l)^2}{l}$$



$$\vec{a}_B = a_{Bx}\,\vec{i} + a_{By}\,\vec{j} = \ddot{X}_B\,\vec{i} + \ddot{Y}_B\,\vec{j}$$

$$= \left(-\ddot{\alpha} l \sin\alpha - \dot{\alpha}^2 l \cos\alpha\right)\vec{i} + \left(\ddot{\alpha} l \cos\alpha - \dot{\alpha}^2 l \sin\alpha\right)\vec{j}$$

ESERCIZIO 2



TROVARE: $\vec{V}_B$, POSIZIONE DEL C.I.R NELL'ATTO DI MOTO RAFFIGURATO , $\vec{a}_B$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A)$$

$$\vec{V}_A = V_A \vec{\tau}$$

$\vec{\omega}_{OA}$

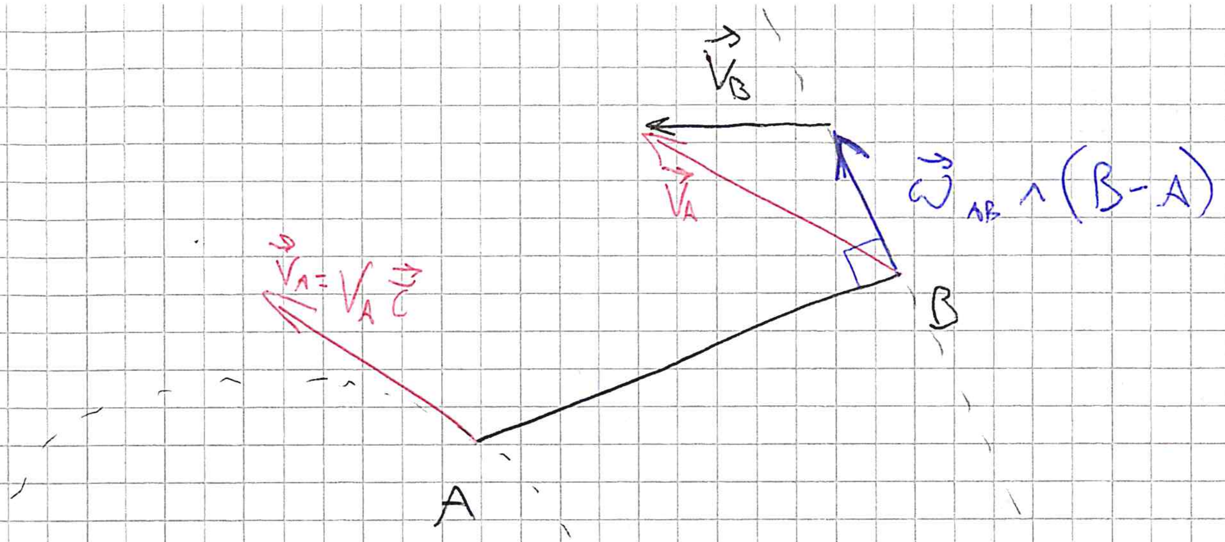
$$\vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_O} + (\dot{\beta}\vec{K}) \wedge (A - O) = \dot{\beta}\vec{K} \wedge R(\cos\beta\,\vec{i} + \sin\beta\,\vec{j})$$

$$= \dot{\beta}R(-\sin\beta\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}) = \dot{\beta}R\,\vec{\tau}$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \dot{\alpha}\vec{K}$$

$$(B - A) = l(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + l\dot{\alpha}(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$$

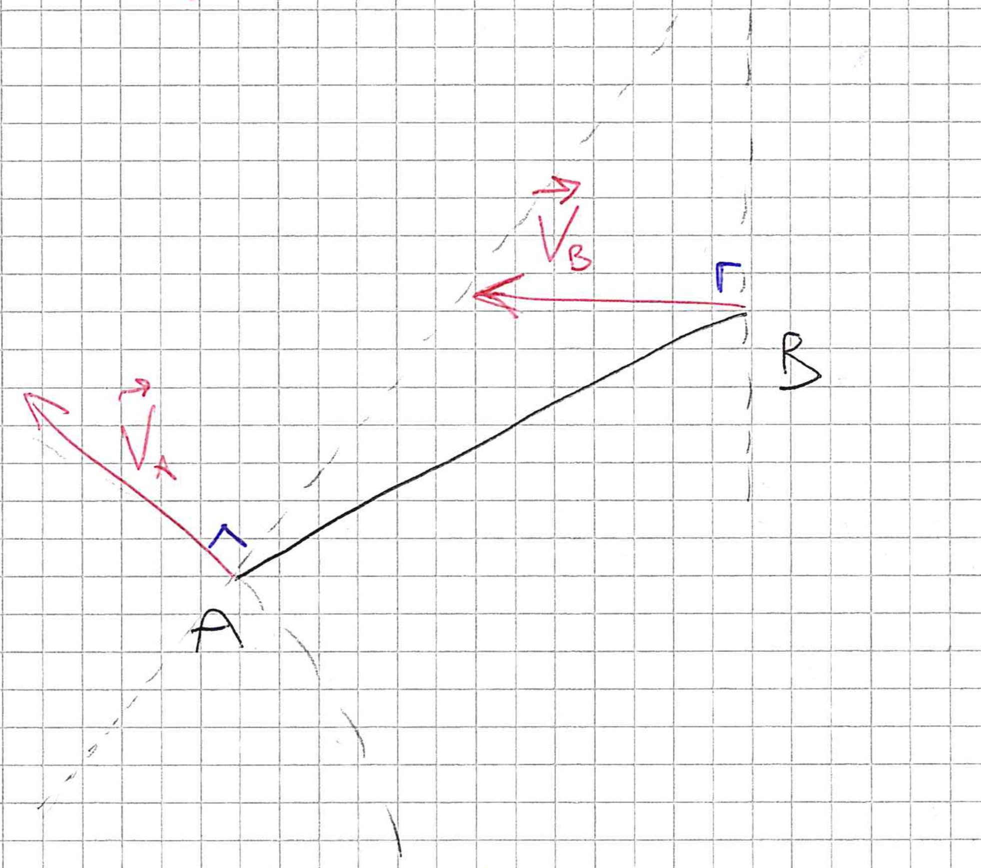


POSIZIONE DEL C.I.R. C

$\vec{V}_A = \vec{\omega} \wedge (A - C)$

$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge (B - C)$

$C \equiv CIR$



DA UN PUNTO DI VISTA ANALITICO

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{0}$$

$$-\vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{V}_A \iff (C - A) \wedge \vec{\omega} = \vec{V}_A$$

$$\vec{\omega} \wedge \left[-\vec{\omega} \wedge (C-A)\right]^{*} = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_A$$

$$\omega^2 (C-A) = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_A$$

$$(C-A) = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_A}{\omega^2} = \frac{\vec{K} \wedge \vec{V}_A}{\omega} = \left(\frac{V_{Ax}}{\omega}\right)\vec{j} - \left(\frac{V_{Ay}}{\omega}\right)\vec{i}$$

* NOTA

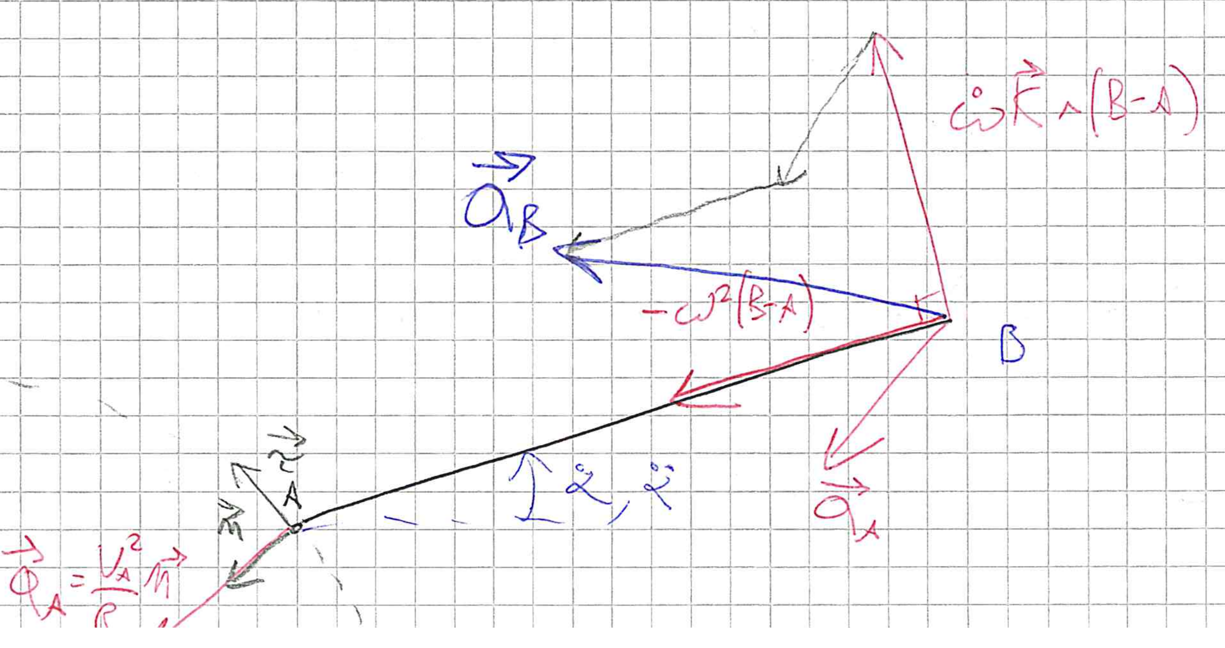
$$a \wedge (b \wedge c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

ANALOGAMENTE A $\vec{V}_B$ POSSO CALCOLARE $\vec{a}_B$ CON RIVALS

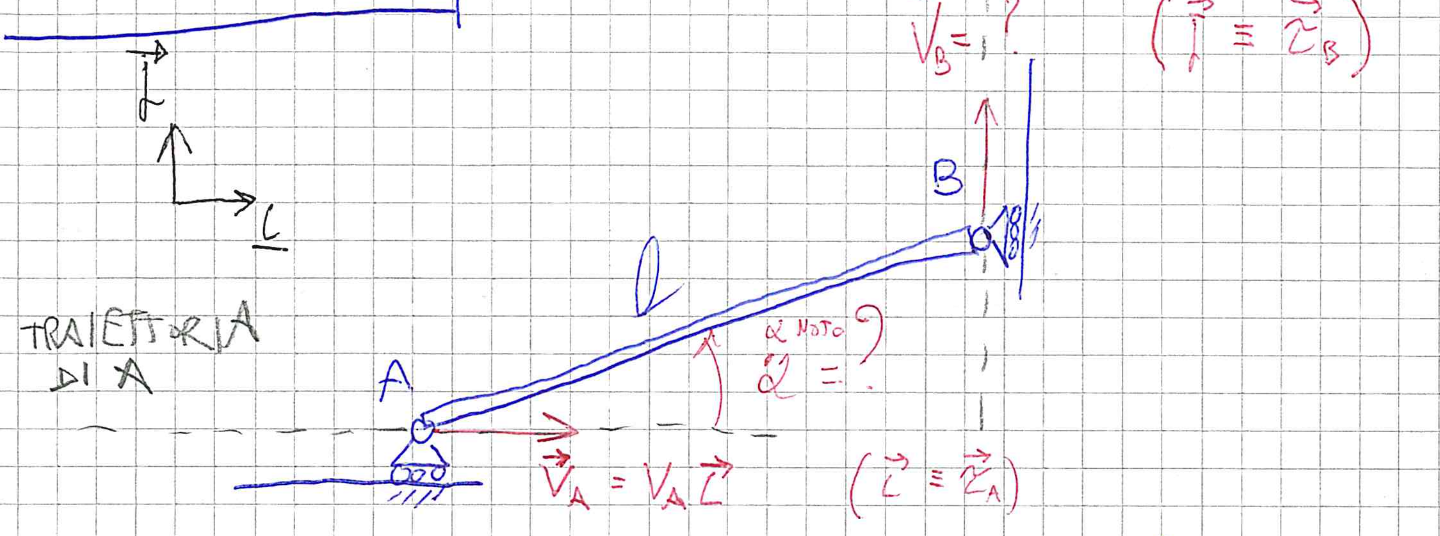
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\dot{\omega}}_{AB} \wedge (B-A) - \omega_{AB}^2 (B-A)$$

$$\vec{a}_A = \left(\frac{V_A^2}{R}\right)\vec{n} \qquad \vec{n} = -\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j}$$

$$\vec{\dot{\omega}} = \ddot{\varphi}\,\vec{K}$$



ESERCIZIO 3



NOTA V_A, α, l CALCOLARE: $\dot{\alpha}$, $\vec{V}_B$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B)$$

$\vec{V}_A = V_A \vec{i}$ (NOTA)

$\vec{\omega} = \dot{\alpha} \vec{k}$ (INCOGNITA $\dot{\alpha}$)

$\vec{V}_B = V_B \vec{j}$ (INCOGNITA V_B)

$(A - B) = l(\cos\alpha' \vec{i} + \sin\alpha \vec{j})$ (NOTO)

$\alpha' = \alpha + \pi$

$\dot{\alpha}' = \dot{\alpha}$

$$V_A \vec{i} = V_B \vec{j} + \dot{\alpha} \vec{k} \wedge l (\cos\alpha' \vec{i} + \sin\alpha' \vec{j})$$

1 EQ VETTORIALE CON 2 INCOGNITE

1 EQ VETTORIALE $\Longrightarrow$ 2 EQ SCALARI

$$V_A \vec{i} = V_B \vec{j} + \dot{\alpha} l \left(-\sin\alpha' \vec{i} + \cos\alpha' \vec{j}\right)$$

$$\begin{cases} \vec{i} \quad V_A = -\dot{\alpha} l \sin\alpha' \\ \vec{j} \quad 0 = V_B + \left(+\cos\alpha' \dot{\alpha} l\right) \end{cases}$$

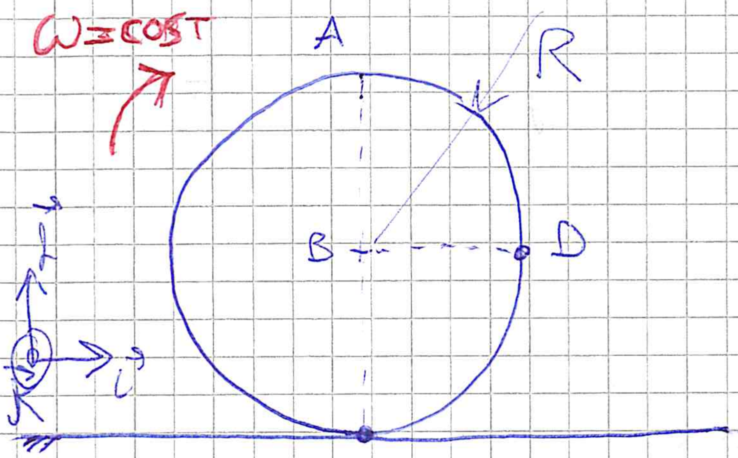
$$\dot{\alpha} = -\frac{V_A}{l \sin\alpha'}$$

$$V_B = -\dot{\alpha} l \cos\alpha'$$

ANALOGAMENTE POTREI RISOLVERE PER LE ACCELERAZIONI

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (A-B) - \omega^2 (A-B)$$

ESERCIZIO 4



C = PUNTO DI CONTATTO RUOTA - STRADA

↓

VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO $\Leftrightarrow$ $\vec{V}_C = \vec{0}$ (NELL'ATTO DI MOTO)

CALCOLARE LA VELOCITÀ E L'ACCELERAZIONE DEI PUNTI A, B, D

CALCOLO LE VELOCITÀ USANDO RIVALS RISPETTO AL C.I.R. C

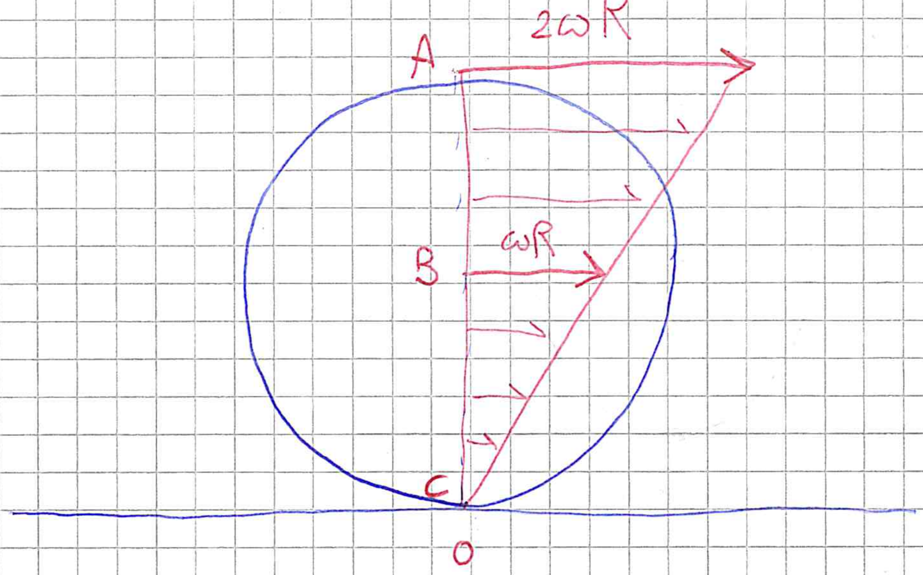
$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge (B-C) = \omega R \,\vec{i}$$

$\vec{\omega} = -\omega \vec{k}$ (ROTAZIONE ORARIA)

$(B-C) = R\vec{j}$

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \wedge (A-C) = 2\omega R \,\vec{i}$$

$(A-C) = 2R\vec{j}$



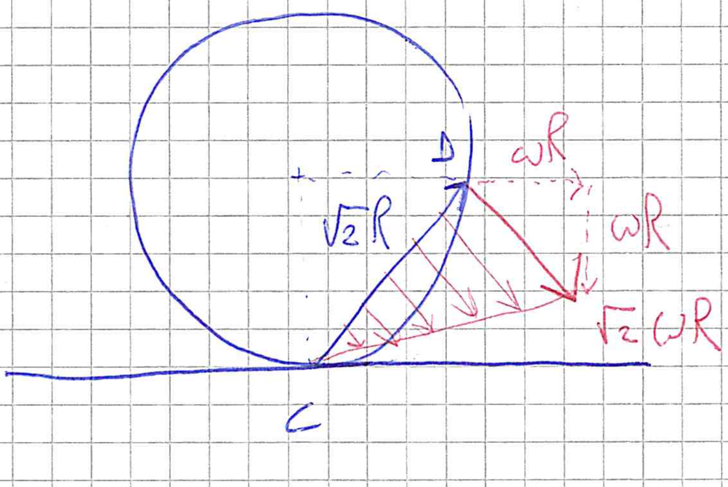
DISTRIBUZIONE
DI
VELOCITÀ

$$\vec{V}_D = \vec{\omega} \wedge (D-C) = +\omega R\,\vec{i} + (-\omega R)\,\vec{j}$$

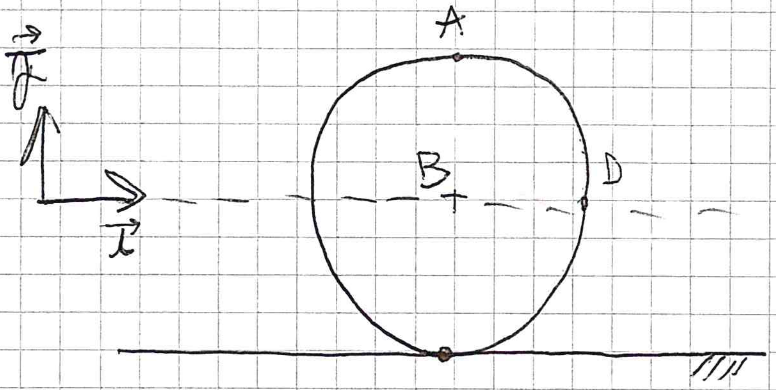
$$(D-C) = R\vec{i} + R\vec{j}$$

$$\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$$

$$V_D = \sqrt{(\omega R)^2 + (-\omega R)^2} = \sqrt{2}\,\omega R$$



ACCELERAZIONI



TRAIETTORIA DI B (RETTILINEA)

C ≡ CIR

$$\vec{V}_C = \vec{0} \quad \text{MA} \quad \vec{a}_C \neq 0$$

QUINDI SCRIVERE LE ACCELERAZIONI RISPETTO AL CIR NON MI AIUTA

CONOSCO PERÒ LA TRAIETTORIA DEL CENTRO DEL DISCO

$$\vec{a}_B = \dot{V}_B \underset{\vec{i}}{\vec{\tau}} + \cancel{\frac{V_B^2}{\underset{\infty}{\rho}} \vec{n}}$$

$$\vec{a}_B = \dot{V}_B \vec{i} = \vec{0}$$

$V_B = \omega R$

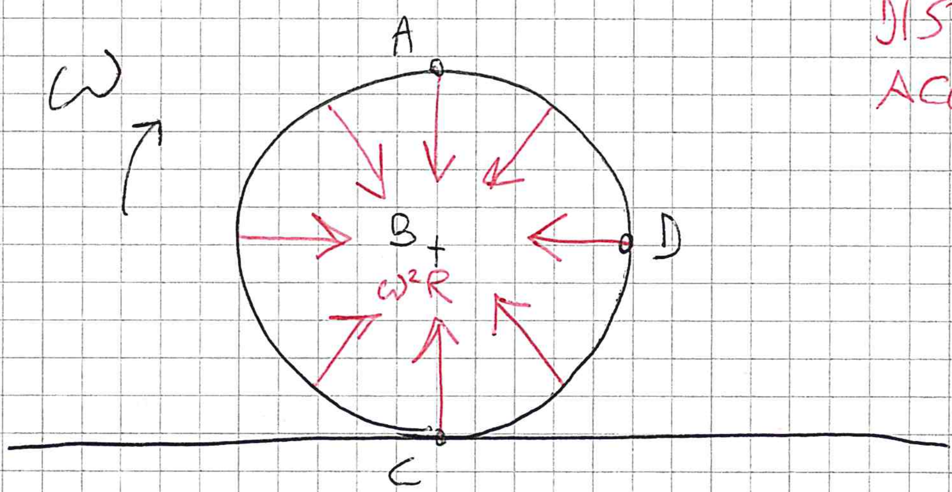
$\dot{V}_B = \dot{\omega} R = 0$ IN QUESTO CASO PERCHÉ ω = COSTANTE

$$\vec{a}_C = \cancel{\vec{a}_B} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge (C-B)} - \omega^2 (C-B)$$

$$= -\omega^2 (C-B) = \omega^2 R \, \vec{j}$$

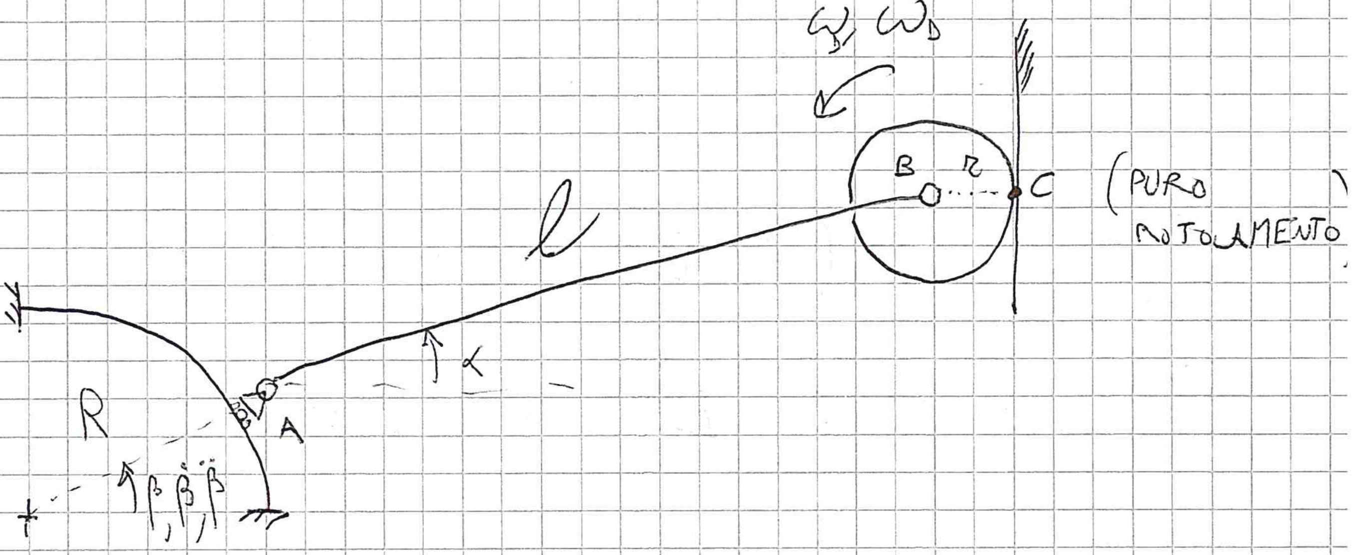
$$\vec{a}_A = -\omega^2 (A-B) = -\omega^2 R \, \vec{j}$$

$$\vec{a}_D = -\omega^2 (D-B) = -\omega^2 R \, \vec{i}$$



DISTRIB
ACCELERAZIONI

ESERCIZIO 5 (x CASA)



DATI:

α, R, ℓ, r

β, $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$

CALCOLARE $\vec{\omega}_D$ e $\vec{\dot{\omega}}_D$ DEL DISCO