MECCANICA APPLICATA

Ing. Fisica AA.2016-2017 prova del 06-02-2016 n. compito 001

NOME:..
COGNOME:..
MATRICOLA:.......................................

☐ II parziale
☐ appello completo

Ai fini della valutazione, consegnare: il presente foglio compilato con nome, cognome, matricola e risultati numerici negli appositi spazi **e** i fogli protocollo con lo svolgimento dei calcoli.

Problema 1

L'asta AB, di massa trascurabile, è vincolata a terra mediante due carrelli: il carrello in A può muoversi in orizzontale, mentre il carrello in B può muoversi in verticale. Una forza verticale F è applicata in B.

Un corpo rigido di massa m e momento di inerzia baricentrale J con baricentro in G è vincolato isostaticamente all'asta AB mediante una cerniera in C ed un carrello in D (quindi non è possibile un moto relativo tra asta e corpo).

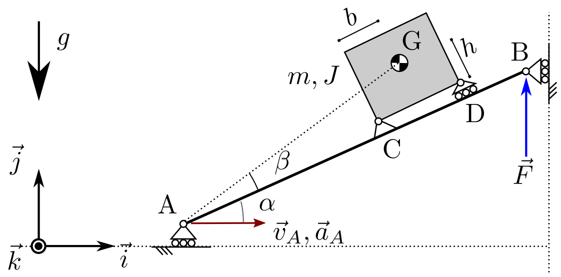


Figura 1:

Nell'atto di moto rappresentato in figura sono note tutte le posizioni e la geometria del sistema. Il punto A ha velocità e accelerazione note: $\vec{v}_A = \dot{x}_A\vec{i}$, $\vec{a}_A = \ddot{x}_A\vec{i}$. Calcolare:

1. La velocità del punto B, $\vec{v}_B$, e la velocità angolare dell'asta AB, $\vec{\omega}$
2. L'accelerazione del punto B, $\vec{a}_B$, e l'accelerazione angolare dell'asta AB, $\vec{\dot{\omega}}$
3. La velocità del punto G, $\vec{v}_G$, e la accelerazione del punto G, $\vec{a}_G$
4. l'energia cinetica del sistema, E_c
5. la potenza delle forze di inerzia $W_{in} = -\frac{dE_c}{dt}$
6. la potenza della forza peso W_g
7. il valore di $\vec{F}$
8. la reazione vincolare in D, $\vec{R}_D$ (usare un sistema di riferimento $\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$ solidale all'asta, con $\vec{i}'//\vec{AB}$)

Dati

$\dot{x}_A = 13.0\ m/s$, $\ddot{x}_A = 1.1\ m/s^2$, $m = 6.2\,kg$, $J = 4.1\,kgm^2$, $AB = 1.4$ m, $AG = 0.8$ m, $CD = 0.3$ m, $b = 0.1$ m, $h = 0.4$ m, $\alpha = 16$ deg, $\beta = 27$ deg,

Risposte

1. $\vec{v}_B = \ldots\ldots\vec{j}$ m/s; $\vec{\omega} = \ldots\ldots\vec{k}$ rad/s
2. $\vec{a}_B = \ldots\ldots\vec{j}\ m/s^2$; $\vec{\dot{\omega}} = \ldots\ldots\vec{k}\ rad/s^2$
3. $\vec{v}_G = \ldots\ldots\vec{i} + \ldots\ldots\vec{j}$ m/s; $\vec{a}_G = \ldots\ldots\vec{i} + \ldots\ldots\vec{j}\ m/s^2$
4. $E_c = \ldots\ldots\ldots$ Joule
5. $W_{in} = -\frac{dE_c}{dt} = \ldots\ldots$ Watt
6. $W_g = \ldots\ldots$ Watt
7. $\vec{F} = \ldots\ldots\vec{j}$ N;
8. $\vec{R}_D \ldots\ldots\vec{j}'$ N;

Problema 2

Il sistema di corpi rigidi rappresentato in figura 2 si muove nel piano orizzontale ed è composto da 4 corpi rigidi: 3 dischi omogenei di massa m_1, momento di inerzia baricentrale J e raggio R; un coerpo rigido rettangoalre di massa m_2.

I corpi sono soggetti ai seguenti vincoli cinematici: cerneiera a terra in A e in C; contatto di puro rotolamento in B, D, E, G.

Il rettangolo è connesso a terra anche tramite uno smorzatore lineare di caratteristica r. Uno dei dischi è collegato a terra mediante una molla di rigidezza k, incernierata al centro del disco in F.

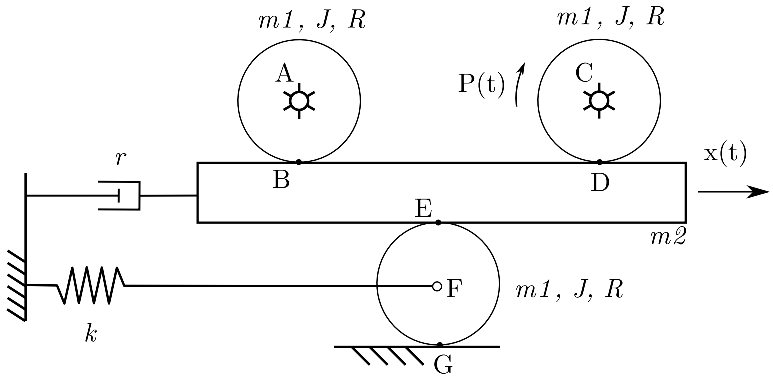


Figura 2:

Inoltre il sistema è forzato da una coppia $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ applicata ad uno dei dischi.

Si chiede di calcolare:

1. il legame cinematico tra la velocità della coordinata libera $\dot{x}(t)$ e la velocità del punto F
2. l'equazione di moto del sitema, usando come coordinata libera $x(t)$
3. la pulsazione propria del sistema ω
4. il coefficiente di smorzamento ζ
5. l'ampiezza di vibrazione a regime $|X_0|$ e la fase rispetto alla forzante $\Delta\varphi$

Dati

$m_1 = 6.2$ kg, $m_2 = 12.4$ kg, $R = 1.5$ m, $J = 7.0\, kgm^2$, $r = 4\, Ns/m$, $k = 3211\, N/m$, $P_0 = 132\, N$, $\Omega = 5\, rad/s$,

Risposte

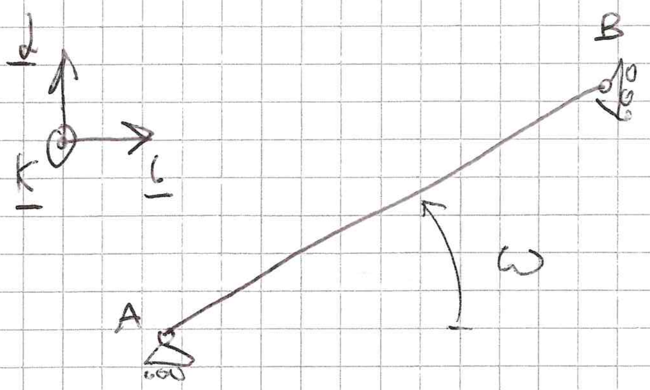
1. $v_F = \ldots\ldots \dot{x}$
2. eq. di moto: $\ldots\ldots \ddot{x} + \ldots\ldots \dot{x} + \ldots\ldots x = \ldots\ldots$
3. $\omega = \ldots\ldots\ rad/s$
4. $\zeta = \ldots\ldots$
5. $|X_0| = \ldots\ldots$ m; $\quad \Delta\varphi = \ldots\ldots$ deg

Domanda di teoria

Rispondere ad una delle tre domande di teoria a scelta:

1. Ricavare il teorema dei moti relativi nel piano per le velocità e le accelerazioni per la cinematica del punto;
2. Discutere l'effetto dello smorzamento in un sistema vibrante libero ad 1 g.d.l.;
3. Spiegare come si calcolano le frequenze proprie in un sistema vibrante a 2 g.d.l. in cui siano note le masse e le rigidezze del sistema.

PROB 1



$\underline{V}_A = V_{Ax}\,\underline{i}$ (NOTA) $\qquad \underline{\omega} = \omega\,\underline{k}$

$\underline{V}_B = V_{By}\,\underline{j} \qquad (B-A) = (AB\cos\alpha)\,\underline{i} + (AB\sin\alpha)\,\underline{j}$

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega} \wedge (B-A)$$

$$V_{By}\,\underline{j} = V_{Ax}\,\underline{i} + \omega\underline{k} \wedge (AB\cos\alpha)\,\underline{i} + \omega\underline{k} \wedge (AB\sin\alpha)\,\underline{j}$$

$$= (V_{Ax} - \omega AB\sin\alpha)\,\underline{i} + (\omega AB\cos\alpha)\,\underline{j}$$

$$\begin{cases} V_{By} = \omega AB\cos\alpha \\ 0 = V_{Ax} - \omega AB\sin\alpha \end{cases} \longrightarrow \omega = \frac{V_{A1}}{AB\sin\alpha}$$

$$V_{By} = \omega AB\cos\alpha$$

$$\underline{a}_B = a_{By}\,\underline{j} \qquad\qquad \underline{\dot{\omega}} = \dot{\omega}\,\underline{k}$$

$$\underline{a}_A = a_{Ax}\,\underline{i} \qquad \text{(NOTA)}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A - \omega^2 (B-A) + \underline{\dot{\omega}} \wedge (B-A)$$

DA CUI SI RICAVANO a_{By} e $\dot{\omega}$:

$$a_{By}\,\underline{j} = a_{Ax}\,\underline{i} - \omega^2 (AB\cos\alpha)\,\underline{i} - \omega^2 (AB\sin\alpha)\,\underline{j} +$$

$$+ \dot{\omega}\,\underline{k} \wedge (AB\cos\alpha)\,\underline{i} + \dot{\omega}\,\underline{k} \wedge (AB\sin\alpha)\,\underline{j}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{Ax} - \omega^2 AB\cos\alpha - \dot{\omega}\, AB\sin\alpha & \longrightarrow \dot{\omega} \\ a_{By} = -\omega^2 AB\sin\alpha + \dot{\omega}\, AB\cos\alpha & \longrightarrow a_{By} \end{cases}$$

$$(G-A) = AG\cos(\alpha+\beta)\,\underline{i} + AB\sin(\alpha+\beta)\,\underline{j}$$

$$\underline{V}_G = \underline{V}_A + \underline{\omega} \wedge (G-A) = V_{Gx}\,\underline{i} + V_{Gy}\,\underline{j}$$

$$\underline{a}_G = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}} \wedge (G-A) - \omega^2 (G-A) = a_{Gx}\,\underline{i} + a_{Gy}\,\underline{j}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m\, \underline{V}_G \cdot \underline{V}_G + \frac{1}{2} J\, \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = m\, \underline{V}_G \cdot \underline{a}_G + J\, \underline{\omega} \cdot \underline{\dot{\omega}}$$

$$= m\left(V_{Gx} a_{Gx} + V_{Gy} a_{Gy}\right) + J\omega\dot{\omega}$$

$$W_g = -mg\,\underline{j} \cdot \underline{V}_G = -mg\,V_{Gy}$$

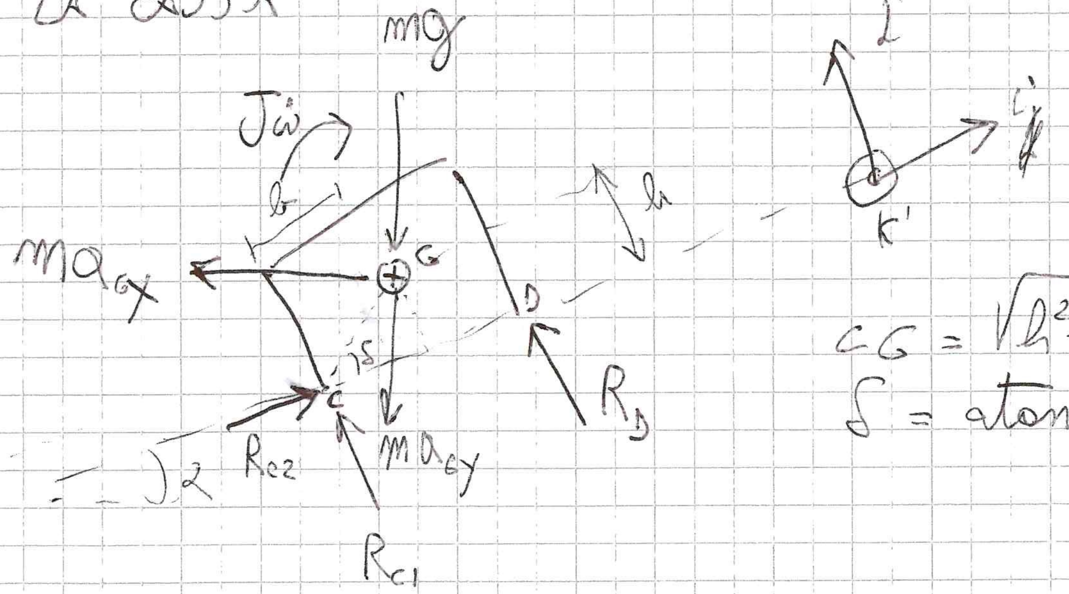
$$\frac{dE_c}{dt} = W_g + W_F$$

$$W_F = \underline{F} \cdot \underline{V}_B = F\,\underline{j} \cdot V_{By}\,\underline{j} = F\,V_{By}$$

$$F = \frac{\frac{dE_c}{dt} - W_g}{V_{By}}$$

REAZIONI VINCOLARI

ISOLO LA CASSA



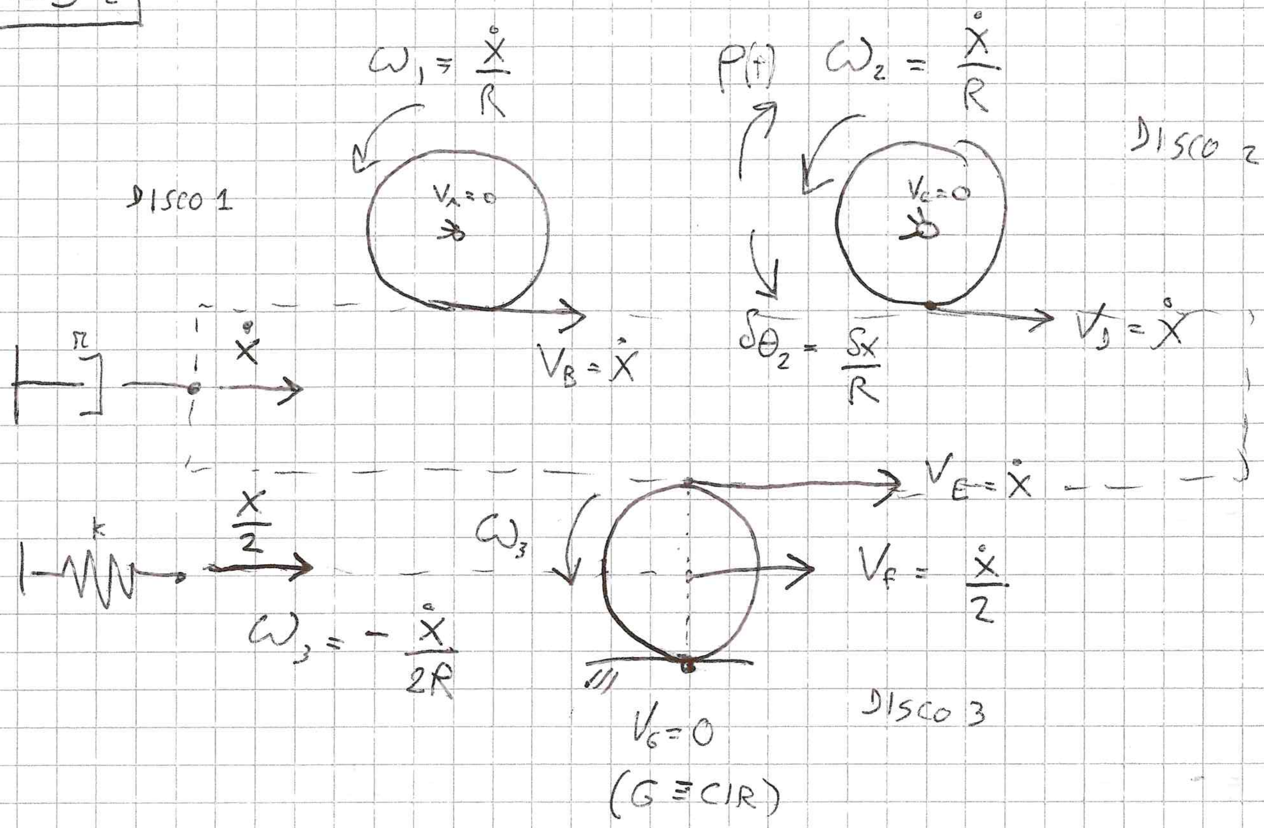
$$CG = \sqrt{h^2 + b^2}$$

$$\delta = \operatorname{atan}\frac{h}{b}$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$R_D\,CD - (mg + ma_{Gy})\,CG\cos(\alpha+\delta) - J\dot{\omega} + ma_{Gx}\,CG\sin(\alpha+\delta) = 0$$

PROB 2



$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2}_{\text{RETTANGOLO}} + \underbrace{\frac{1}{2} J\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2}_{\text{DISCO 1}} + \underbrace{\frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)}_{\text{DISCO 2}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} J\left(-\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2}_{\text{DISCO 3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_2 + 2\frac{J}{R^2} + \frac{m_1}{4} + \frac{J}{4R^2} \right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m^* \dot{x}^2$$

$$D = \frac{1}{2} r \Delta\dot{l}^2 = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{4}\right) x^2 = \frac{1}{2} k^*$$

$$\delta L = -P\,\delta\theta_2 = \left(-\frac{P}{R}\right)\delta x = Q_x\,\delta x$$

EQ DI MOTO

$$m^* \ddot{x} + r\dot{x} + k^* x = Q_x$$

CON $Q_x = \left(-\frac{P_0}{R}\right)\cos\Omega t = Q_{x0}\cos\Omega t$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

$$\zeta = \frac{r^*}{r_c} = \frac{r}{2\, m^*\, \omega}$$

$$|X_0| = \left| \frac{Q_{0x}}{(-m^*\Omega^2 + k^*) + i\,(r^*\Omega)} \right|$$

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = -\frac{2\,\zeta\, a}{1 - a^2} \qquad \text{con} \qquad a = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$x = |X_0| \cos(\Omega t + \Delta\varphi)$$