MECCANICA APPLICATA

Ing. Fisica AA.2016-2017 prova del 21-11-2016 n. compito 001

NOME:...
COGNOME:..
MATRICOLA:.......................................

Ai fini della valutazione, consegnare: il presente foglio compilato con nome, cognome, matricola e risultati numerici negli appositi spazi **e** i fogli protocollo con lo svolgimento dei calcoli.

Problema 1

Lo slittino in figura 1, considerato come un punto A, scende lungo una curva che può essere approssimata dalla parabola $y = \gamma x^2$. La posizione x_A del punto A è nota in funzione del tempo t. Calcolare all'istante di tempo $t = \bar{t}$:

1. modulo della velocità di A, v_a
2. versore tangente, $\vec{\tau}$
3. accelerazione di A, $\vec{a}_A$, nelle componenti tangenziale (versore $\vec{\tau}$) e normale (versore $\vec{n}$)

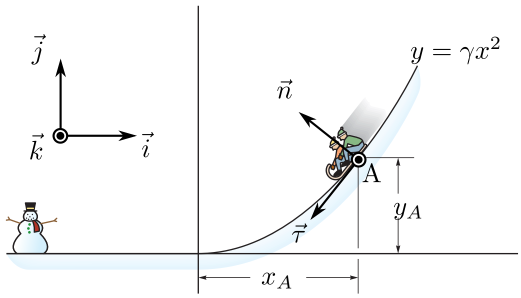


Figura 1:

Dati

$\bar{t} = 13.0$ s, $x_A = (110 - t)$ m, $\gamma = 0.17\, m^{-1}$

Risposte

1. $v_a = \ldots\ldots$ m/s
2. $\vec{\tau} = \ldots\ldots \vec{i} + \ldots\ldots \vec{j}$
3. $\vec{a}_A = \ldots\ldots \vec{\tau} + \ldots\ldots \vec{n}\ m/s^2$

Problema 2

Il corpo rigido in figura 2 ha baricentro in G, massa M e momento di inerzia baricentrale J. È vincolato a terra in A e in B mediante due carrelli di dimensione trascurabile: il carrello in A segue una traiettoria circolare di raggio r, mentre il carrello in B segue una traiettoria rettilinea orizzontale. Nell'istante rappresentato, il punto A ha velocità nota rappresentata in figura e di modulo v_A, e accelerazione tangenziale nulla. Calcolare:

1. La velocità del baricentro $\vec{v}_G$ e la velocità angolare $\vec{\omega}$
2. l'energia cinetica del sistema, E_c
3. L'accelerazione del baricentro $\vec{a}_G$ e la accelerazione angolare $\dot{\vec{\omega}}$
4. la potenza delle forze di inerzia $W_{in} = -\frac{dE_c}{dt}$

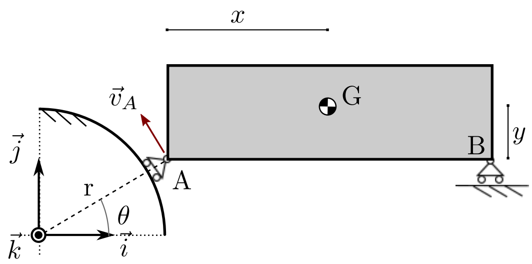


Figura 2:

Dati

$M = 5.7\,kg$, $J = 4.5\,kgm^2$, $v_A = 1.3$ m/s, $\theta = 39$ deg, $r = 1.2$ m, $(B - A) = 2.7\vec{i}$ m, $x = 1.4$ m, $y = 0.9$ m,

Risposte

1. $\vec{\omega} = \ldots\ldots\vec{k}$ rad/s
2. $\vec{v}_G = \ldots\ldots\vec{i} + \ldots\ldots\vec{j}$ m/s
3. $E_c = \ldots\ldots$ Joule
4. $\dot{\vec{\omega}} = \ldots\ldots\vec{k}\ rad/s^2$
5. $\vec{a}_G = \ldots\ldots\vec{i} + \ldots\ldots\vec{j}\ m/s^2$
6. $W_{in} = -\frac{dE_c}{dt} = \ldots\ldots$ Watt

Problema 3

Il sistema di corpi rigidi rappresentato in figura 3 è composto da 4 corpi rigidi che si muovono nel piano verticale. Il disco omogeneo di massa m_3, momento di inerzia J_3 e raggio R_3 rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Al centro del disco è applicata una forza P. Inoltre su di esso si avvolge una fune inestensibile che è anche avvolta attorno alla circonferenza esterna del corpo rigido di momento di inerzia J_2 composto da due dischi omogenei saldati tra di loro (raggio interno R_1, esterno R_2) ed incernierato a terra in O. Sulla circonferenza interna si avvolge un'altra fune inestensibile che è collegata al corpo di massa m_1 il quale è vincolato a terra mediante un pattino che permette la traslazione verticale. Tra massa e terra vi è un coefficiente di attrito dinamico μ_d, inoltre una forza F preme la massa contro la terra. Si chiede di calcolare:

1. il legame cinematico tra la velocità v_3 del centro del disco m_3 e la velocità v_1 del corpo m_1
2. il valore della forza P che consente alla massa m_1 di salire a velocità costante
3. l'accelerazione a_1 se il valore di P viene raddoppiato rispetto a quello calcolato al punto precedente
4. nella condizione del punto precedente, il tiro della fune AB, T_{AB}

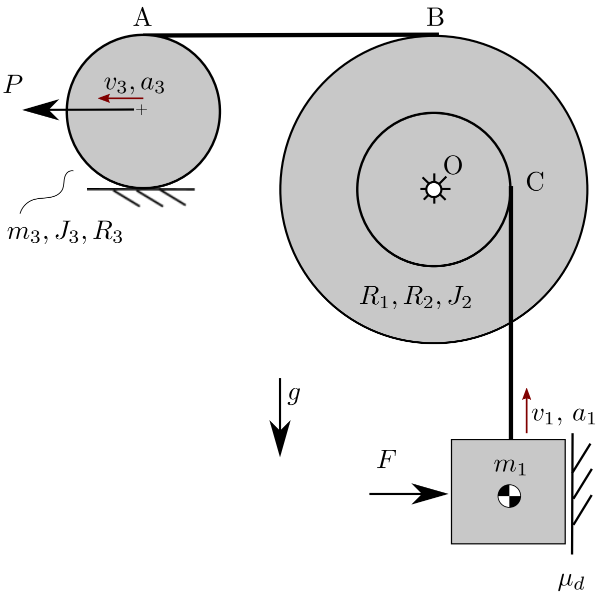


Figura 3:

Dati

$g = 9.81\,m/s^2$, $R_1 = 1.3$ m, $R_2 = 4.8$ m, $R_3 = 1.2$ m, $m_1 = 10.5$ kg, $J_2 = 5.8\,kgm^2$, $m_3 = 13.0$ kg, $J_3 = 9.4\,kgm^2$, $\mu_d = 0.10$, $F = 186\,N$,

Risposte

1. $v_3 = \ldots\ldots v_1$
2. $P = \ldots\ldots$ N
3. $a_1 = \ldots\ldots\ m/s^2$
4. $T_{AB} = \ldots\ldots$ N

$\boxed{\text{ES 1}}$

$x_A = a - t \quad , \quad y = \gamma x^2 \quad , \quad t = \bar{t}$

1

$$v_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}$$

$$\dot{x}_A = -1$$

$$y_A = \gamma (a - t)^2$$

$$\dot{y}_A = 2\gamma (a - t)(-1)$$

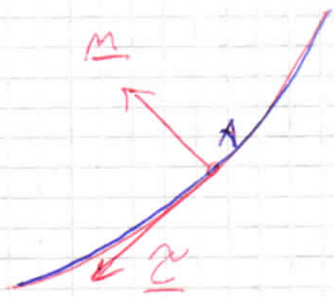
$$\dot{y}_A = -2\gamma (a - \bar{t})$$

$$v_A = \sqrt{1 + [2\gamma (a - \bar{t})]^2}$$

2

$$\underline{v}_A = -1\,\underline{i} - 2\gamma (a - \bar{t})\,\underline{j}$$

$$\underline{\tau} = \frac{\underline{v}_A}{v_A}$$



3

$$\underline{a}_A = \ddot{x}_A\,\underline{i} + \ddot{y}_A\,\underline{j}$$

$$\ddot{x}_A = 0$$

$$\ddot{y}_A = 2\gamma$$

$$\underline{a}_A = 2\gamma\,\underline{j} = \ddot{s}\,\underline{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\underline{n}$$

$$\ddot{s} = 2\gamma\, \underline{j}\cdot\underline{\tau}$$

$$\underline{n} = \underline{K}\wedge(-\underline{\tau}) = \underline{\tau}\wedge\underline{K}$$

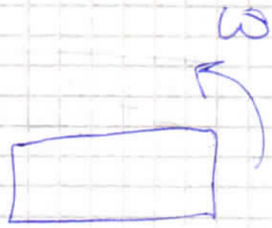
$$\left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right) = 2\gamma\, \underline{j}\cdot\underline{n}$$

$\boxed{\text{es 2}}$

(1) $\underline{V}_B = V_B\, \underline{i}$

$$\underline{V}_A = V_A\left(-\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j}\right)$$

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega}\wedge(B-A)$$



$$(B-A) = AB\, \underline{i} \quad , \quad \underline{\omega} = \omega\, \underline{K}$$

$$V_B\, \underline{i} = \left(-V_A\sin\theta\right)\underline{i} + \left(V_A\cos\theta + \omega AB\right)\underline{j}$$

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{-V_A\cos\theta}{AB} \\ V_B = -V_A\sin\theta \end{cases}$$

$$\underline{V}_G = \underline{V}_A + \underline{\omega}\wedge(G-A)$$

$$(G-A) = x\, \underline{i} + y\, \underline{j}$$

$$\underline{V}_G = \underbrace{\left(-V_A\sin\theta - \omega y\right)}_{V_{Gx}}\underline{i} + \underbrace{\left(V_A\cos\theta + \omega x\right)}_{V_{Gy}}\underline{j}$$

(2)

$$E_c = \frac{1}{2} m \, \underline{V}_G \cdot \underline{V}_G + \frac{1}{2} J \, \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} \left[m \left(V_{Gx}^2 + V_{Gy}^2 \right) + J \omega^2 \right]$$

(3)

$$\underline{a}_B = a_B \, \underline{i}$$

$$\underline{a}_A = \frac{V_A^2}{R} \underline{n} \qquad \underline{n} = -\cos\theta \, \underline{i} - \sin\theta \, \underline{j}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\dot{\omega}} \wedge (B-A) - \omega^2 (B-A)$$

$$a_B \underline{i} = \frac{V_A^2}{R} \left(-\cos\theta \, \underline{i} - \sin\theta \, \underline{j} \right) + \dot{\omega} \, \underline{k} \wedge AB \, \underline{i} - \omega^2 AB \, \underline{i}$$

$$a_B \underline{i} = \left(-\frac{V_A^2}{R} \cos\theta - \omega^2 AB \right) \underline{i} + \left(-\frac{V_A^2}{R} \sin\theta + \dot{\omega} AB \right) \underline{j}$$

$$\hookrightarrow \dot{\omega} = \frac{V_A^2 \sin\theta}{R \, AB}$$

$$a_B = \dots \qquad (G-A) = x \, \underline{i} + y \, \underline{j}$$

$$\underline{a}_G = \underline{a}_A + \dot{\omega} \, \underline{k} \wedge (G-A) - \omega^2 (G-A) =$$

$$= \left(-\frac{V_A^2}{R} \cos\theta - \dot{\omega} y - \omega^2 x \right) \underline{i} + \left(-\frac{V_A^2}{\ell} \sin\theta + \dot{\omega} x - \omega^2 y \right) \underline{j}$$

$$= a_{Gx} \, \underline{i} + a_{Gy} \, \underline{j}$$

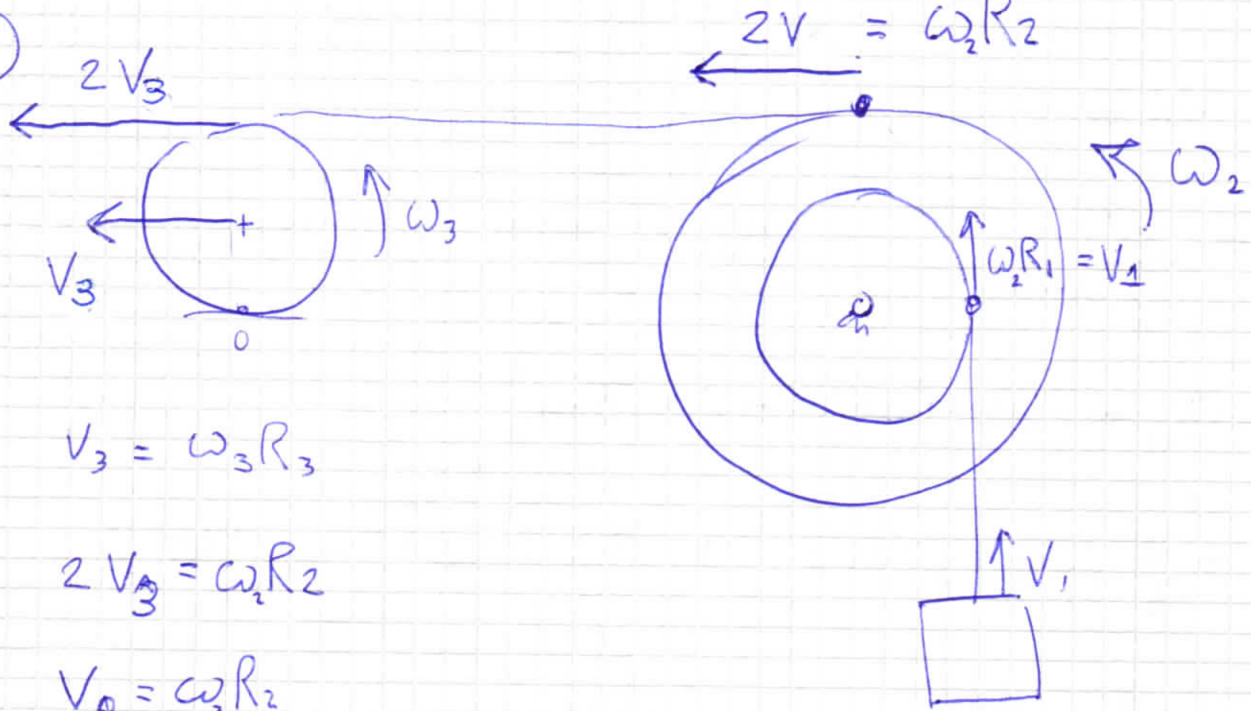
4

$$W_{IN} = -\frac{dE_c}{dt} = -m\underline{v}_G\,\underline{a}_G - J\underline{\dot\omega}\cdot\underline{\omega}$$

$$= -\left[m\left(V_{Gx}a_{Gx} + V_{Gy}a_{Gy}\right) + J\dot\omega\omega\right]$$

$\boxed{\text{es 3}}$

1



$$V_3 = \omega_3 R_3$$

$$2V_3 = \omega_2 R_2$$

$$V_3 = \omega_2 \frac{R_2}{2}$$

$$\omega R_1 = V_1 \rightarrow \omega_2 = \frac{V_1}{R_1}$$

$$V_3 = \frac{R_2}{R_1 2} V_1 \iff a_3 = \frac{R_2}{R_1 2} a_1$$

2

SE V_1 = COST $\quad \frac{dE_c}{dt} = 0$

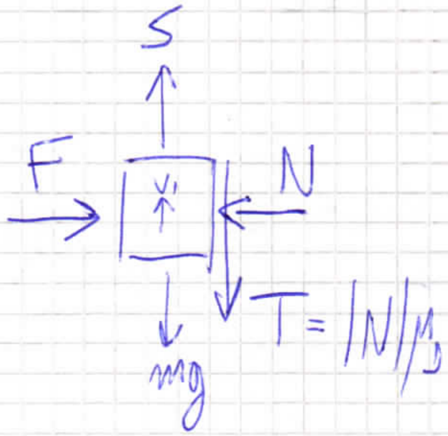
CI SONO 3 FORZE CHE COMPIONO LAVORO:

P, $m_1 g$, ATTRITO

$$W_P = P\, v_3$$

$$W_g = -m_1 g\, v_1$$

$$W_{ATTRITO} = -F \mu_D\, v_1$$



$$N = F$$

$$W_P + W_g + W_{ATT} = 0$$

$$P v_3 - m_1 g v_1 - F \mu_D v_1 = 0$$

$$P = (m_1 g + F\mu_D)\frac{v_1}{v_3} = (m_1 g + F\mu_D)\frac{2R_1}{R_2} = \overline{P}$$

(3)

$$\frac{dE_c}{dt} = 2W_{\overline{P}} + W_g + W_{ATTRITO}$$

ma poiché N non dipende dall'accelerazione

$$W_P + W_g + W_{ATTRITO} = 0$$

$$\frac{dE_c}{dt} = W_{\overline{P}} = \overline{P}\, v_3$$

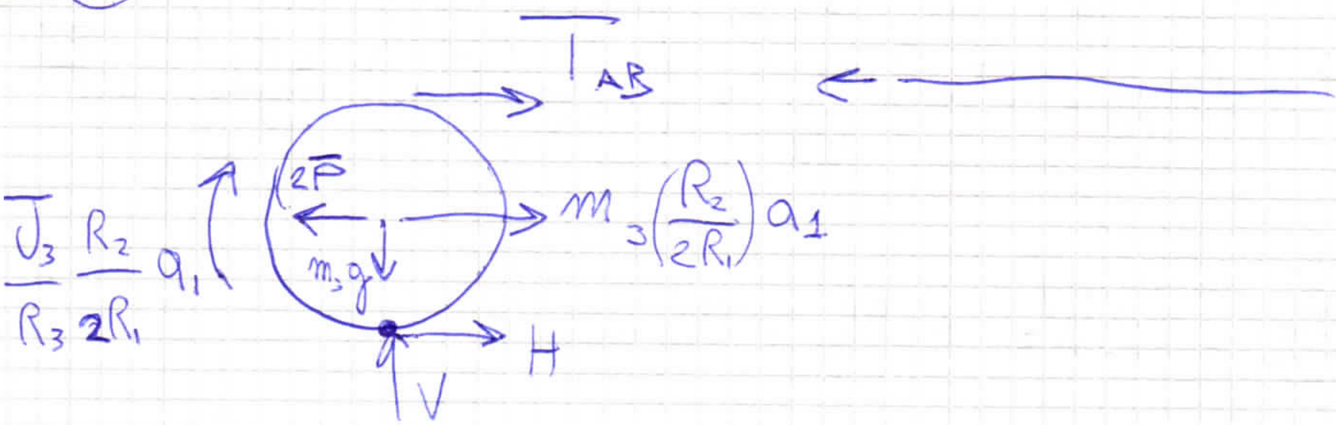
$$\frac{dE_c}{dt} = m_1 a_1 v_1 + J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 + m_3 v_3 a_3$$

$$m_1 a_1 V_1 + J_2 \frac{a_1}{R_1}\frac{V_1}{R_1} + J_3 \frac{a_3}{R_3}\frac{V_3}{R_3} + m_3 a_3 V_3$$

$$\underbrace{\left[m_1 + \frac{J_2}{R_1^2} + \frac{J_3}{R_3^2}\left(\frac{R_2}{2R_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{R_2}{2R_1}\right)^2\right]}_{m^*} a_1 \cancel{V_1} = \overline{P}\left(\frac{R_2}{2R_1}\right)\cancel{V_1}$$

$$a_1 = \frac{\overline{P}\,\frac{R_2}{2R_1}}{m^*}$$

4



$$\Sigma M_{\text{PUNTO DI CONTATTO}} = 0$$

$$2\overline{P}R_3 - T_{AB}\,2R_3 - \frac{J_3 R_2}{2R_3 R_1}a_1 - m_3\left(\frac{R_2}{2R_1}\right)a_1 R_3 = 0$$

$$T_{AB} = \overline{P} - \frac{J_3 R_2}{4R_3^2 R_1}a_1 - m_3\frac{R_2}{4R_1}a_1$$