Es. 2

Il sistema rappresentato in Figura 2 si trova nella configurazione di equilibrio statico, nel piano verticale. È costituito da un disco omogeneo, incernierato a terra, di massa M e momento di inerzia J, con due raggi R_1 e R_2. Sul diametro esterno si avvolge una fune, la cui rigidezza assiale è schematizzata dalla molla di rigidezza k. Sul dimetro interno si avvolge una fune inestensibile a cui è appesa una massa m. La massa m, che è vincolata a traslare in direzione verticale, è collagata a terra con uno smorzatore r.

Detrminare:

- il $\Delta\ell$ statico della molla necessario a garantire l'equilibrio statico
- l'equazione di moto

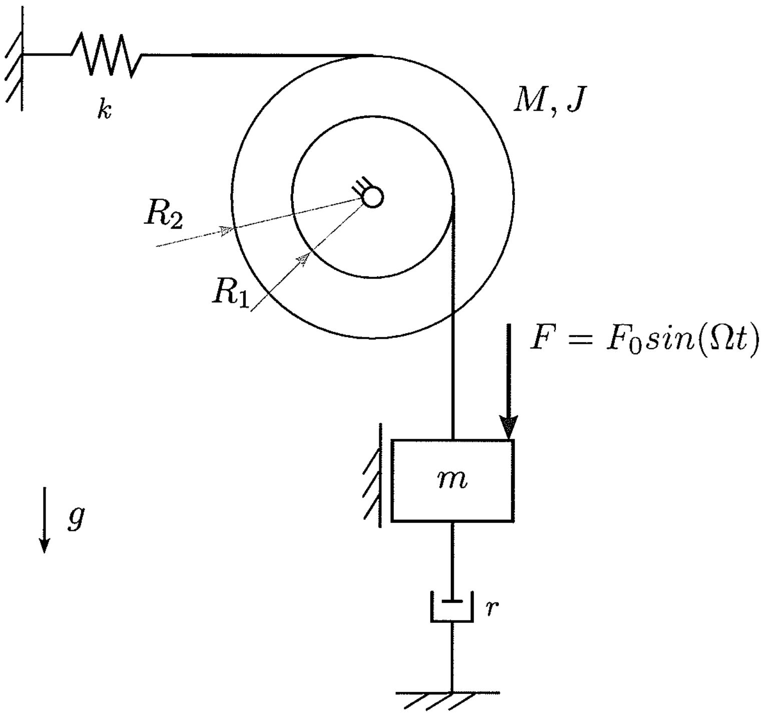


Figura 2:

SOLUZIONE ES 2

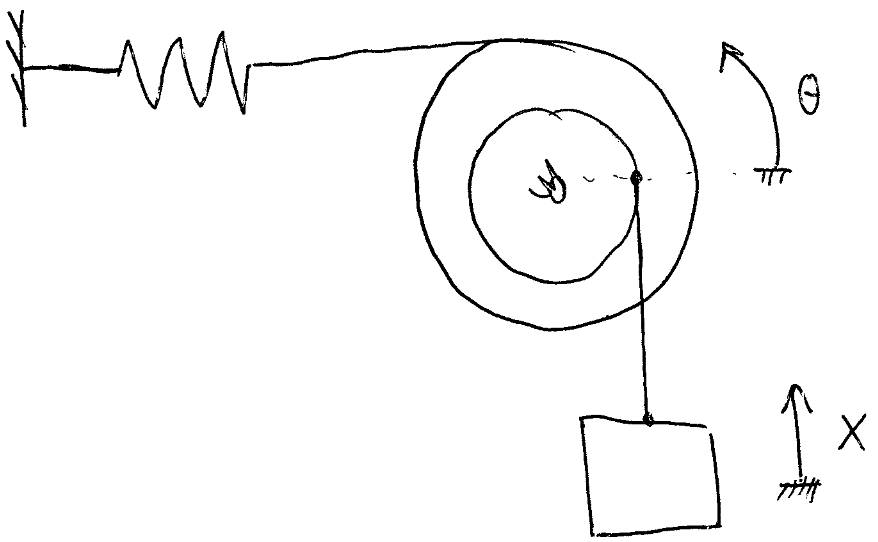
ANALISI CINEMATICA

- 2 CORPI RIGIDI $\quad$ 6 GDL
- CERNIERA $\quad -2$
- PATTINO $\quad -2$
- FUNE INESTENSIBILE $\quad -1$

---

1 GDL RESIDUO

<u>COORDINATA LIBERA</u>: X

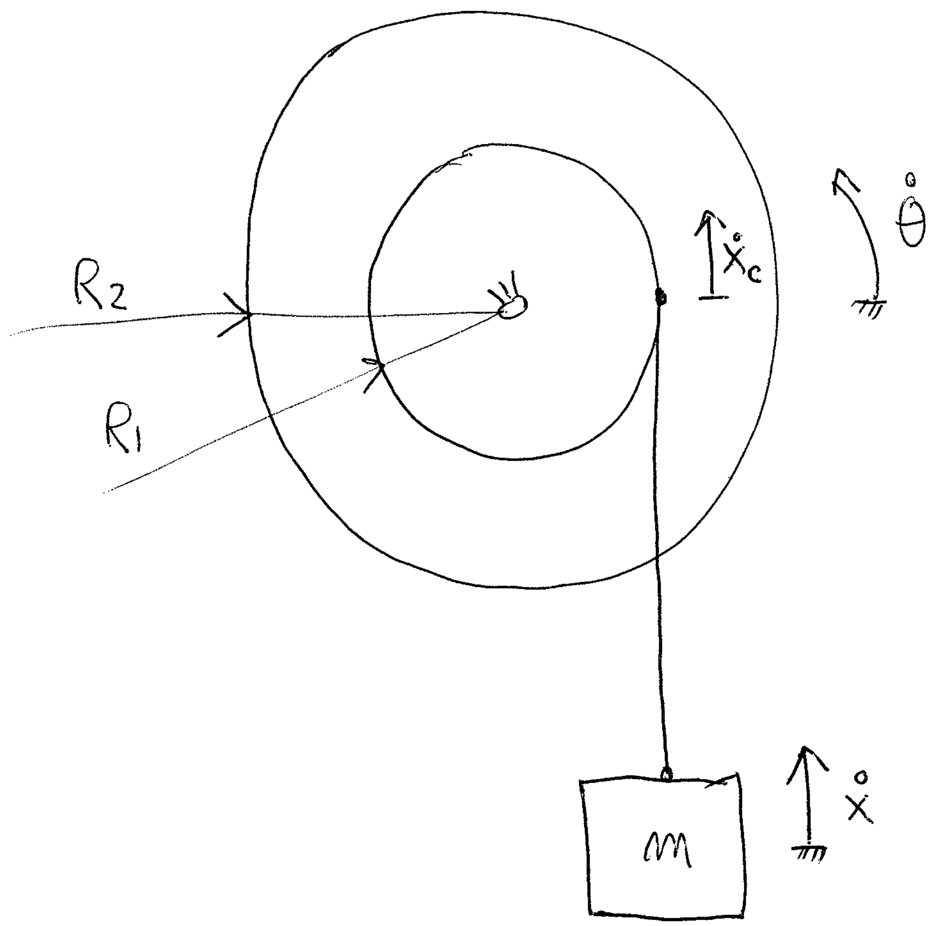


$X = 0$ NELLA

CONFIGURAZIONE DI EQ. STATICO

LEGAMI CINEMATICI

DISCO



$$\dot{x}_c = \dot{\theta} R_1$$

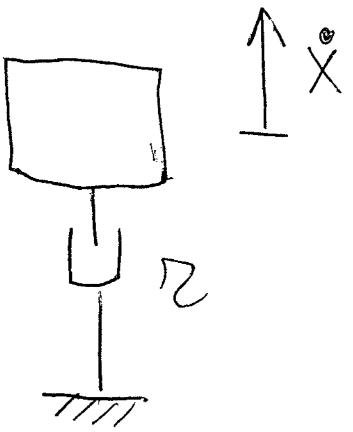
$$\dot{x}_c = \dot{x} \qquad \text{(FUNE INESTENSIBILE)}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R_1}$$

$$\theta = \frac{x}{R_1}$$

NOTA: $\theta = 0$ QUANDO $x = 0$

SMORZATORE

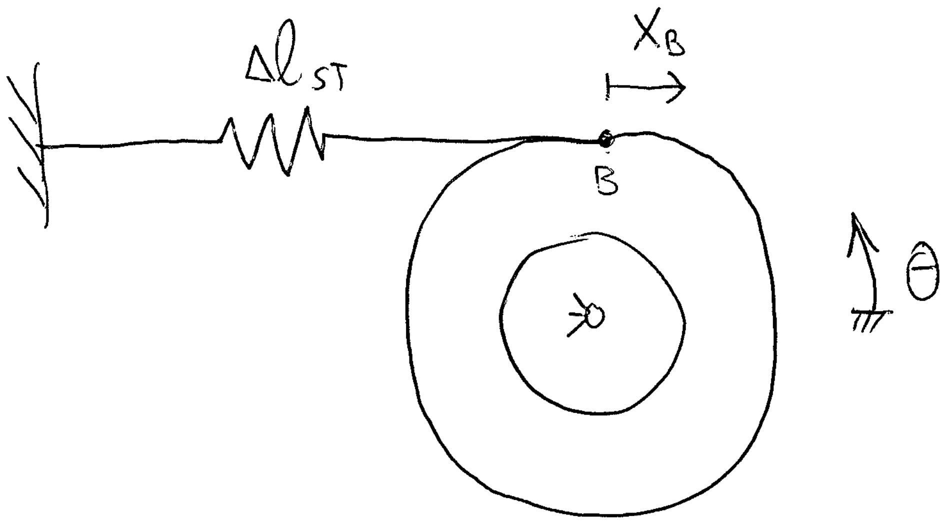


CONVENZIONE

$\dot{\Delta l} > 0$

$$\dot{\Delta l} = \dot{x}$$

MOLLA



$$x_B = -R_2 \theta$$

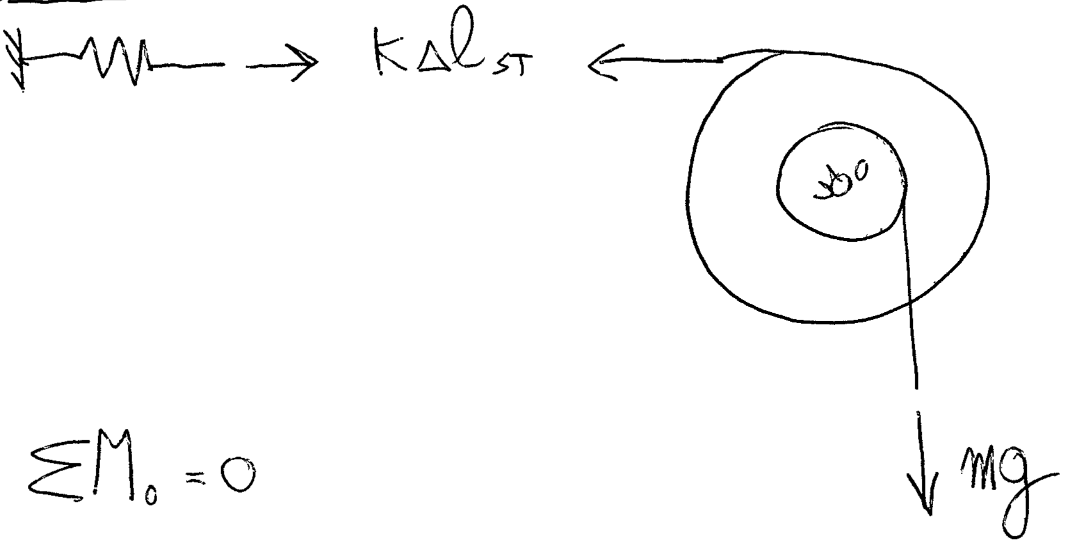
$$\Delta l = \Delta l_{ST} - R_2 \theta$$

$$= \Delta l_{ST} - \frac{R_2}{R_1} x$$

EQ. STATICO

$x = 0$
$\theta = 0$

$\boxed{\text{EQ FORZE}}$



$\sum M_0 = 0$

$K \Delta l_{ST} R_2 = mg R_1$

$\Delta l_{ST} = \frac{mg}{K} \frac{R_1}{R_2}$

$\boxed{\text{LAGRANGE}}$

$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$

$V = V_K + V_g = \frac{1}{2} K \Delta l^2 + mgh$

$= \frac{1}{2} K \left(\Delta l_{ST} - \frac{R_2}{R_1} x \right)^2 + mgx$

$-\frac{R_2}{R_1} K \left.\left(\Delta l_{ST} - \frac{R_2}{R_1} x \right)\right|_{x=0} + mg = 0$

$$\rightarrow \quad \Delta l_{ST} = \frac{mg}{K}\frac{R_1}{R_2}$$

EQ DI MOTO

- LAGRANGE

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{J}{R_1^2} + m\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m^* \dot{x}^2$$

$$V = V_k + V_g$$

$$= \frac{1}{2} K \Delta l^2 + mgh$$

$$= \frac{1}{2} K \left(\Delta l_{ST} - \frac{R_2}{R_1} x\right)^2 + mgx$$

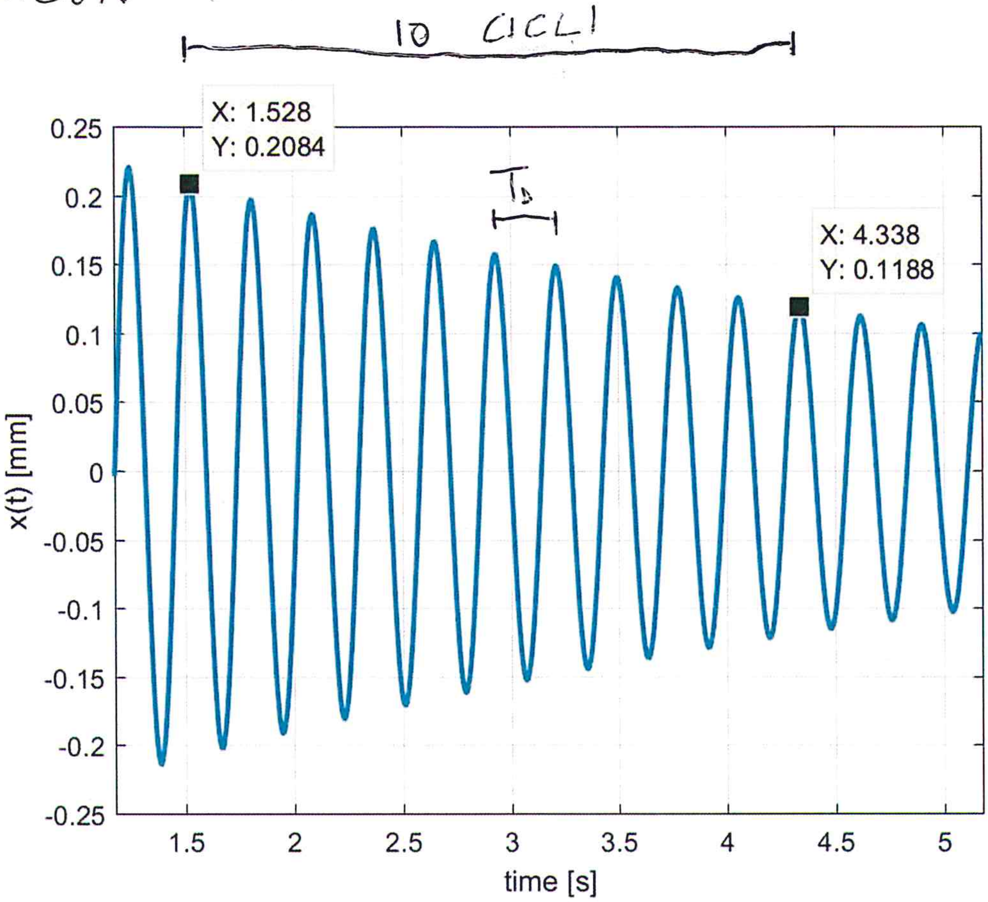
$$D = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$$

$$\delta L = -F \delta x$$

$$m^* \ddot{x} + 2\dot{x} + k\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 x + \cancel{mg} - \cancel{\frac{R_2}{R_1} k \Delta l_{ST}} = -F$$

$$\boxed{m^* \ddot{x} + 2\dot{x} + k^* x = -F(t)}$$

CALCOLARE TUTTI I PARAMETRI DEL SISTEMA, NOTA LA RISPOSTA LIBERA RIPORTATA IN FIGURA



DATI NOTI:

$J = 20 \ Kg\,m^2$

$m = 100 \ Kg$

$K = 16\,000 \ N/m$

$R_1 = 1 \ m$

DATI INCOGNITI:

r

R_2

LA RISPOSTA DEL SISTEMA È DATA DALL'INTEGRALE DELL'OMOGENEA DI

$$m^* \ddot{x} + r \dot{x} + K^* x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$h = \frac{r}{2 m^* \omega} = \frac{r}{2\sqrt{K^* m^*}} \qquad (h < 1)$$

VEDI FIGURA

$$x(t) = e^{-h\omega t}\left(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t\right)$$

con $\omega_D = \omega\sqrt{1-h^2}$ PULSAZIONE SMORZATA

$$\omega_D = \frac{2\pi}{T_D} \rightarrow T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

DAL GRAFICO

$$10\, T_D = 4.338 - 1.528$$

$$T_D = 0.281 \ s$$

$$\omega_D = 22.36 \ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-h^2}$$

$$\omega = \frac{\omega_D}{\sqrt{1-h^2}} \qquad \text{se } h \ll 1 \qquad \omega \simeq \omega_D$$

DECAY

$$x(t) = e^{-\omega h t}\left(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t\right)$$

DOPO m CICLI

$$x(t+mT_D) = e^{-h\omega(t+mT_D)}$$

$$\left(A \sin(\omega_D(t+mT_D)) + B \cos(\omega_D(t+mT_D))\right)$$

SE FACCIO IL RAPPORTO

$$\frac{x(t)}{x(t+mT_D)} = \frac{e^{-h\omega t}}{e^{-h\omega(t+mT_D)}} = e^{h\omega m T_D} =$$

$$e^{h\omega m \frac{2\pi}{\omega_D}} = e^{\frac{h\cancel{\omega} m 2\pi}{\cancel{\omega}\sqrt{1-h^2}}}$$

$$\underbrace{\log\left(\frac{x(t)}{x(t+nT_D)}\right)}_{\delta} = 2\pi n \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$\delta = \log\left(\frac{0.2084}{0.1188}\right) = 0.562$$

$$n = 10$$

$$\delta = 2\pi n \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

EQ NON LINEARE CON INCOGNITA h

SE $h \ll 1$, si SEMPLIFICA IN

$$h = \frac{\delta}{2\pi n} = 0.0089$$

$$\omega \approx \omega_D = \omega\sqrt{1-h^2} \approx 22.36 \ \frac{rad}{s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} \qquad K^* = \omega^2 m^* \qquad K\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \omega^2 \left(\frac{J}{R_1^2} + m\right)$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{R_1^2 \omega^2 \left(\frac{J}{R_1^2} + m\right)}{K}} = 1.9 \ m$$

$$h = \frac{r}{2 m^* \omega} \rightarrow r = 2 h \omega m^*$$

$$= 47.7 \ \frac{Ns}{m}$$