Nomenclatura capitolo 2

$\vec{F}$	forza	*N*
$\vec{f}$	forza specifica	N/m^3
h	entalpia specifica	J/kg
m	massa	kg
$\dot{m}$	portata massica	kg/s
$\mathcal{L}$	potenza meccanica	W
L	lavoro per unità di massa	J/kg
p	pressione	N/m^2
$\dot{Q}$	potenza termica	W
q'''	potenza termica per unità di volume	W/m^3
Q	calore scambiato per unità di massa	J/kg
S	superficie	m^2
T	temperatura	K
u	energia interna specifica	J/kg
V	volume	m^3
$\dot{V}$	portata volumetrica	kg/s
ρ	densità	kg/m^3
τ	sforzo tangenziale	N/m^2
Φ_n	sforzo che agisce su una generica superficie di normale $\vec{n}$	N/m^2
φ	potenziale	J/kg

<u>per il solo paragrafo 2.4.2</u>

Ω	velocità di rotazione	rad/s
$\vec{v}$	velocità assoluta	*m/s*
$\vec{w}$	velocità relativa	*m/s*
$\vec{u}$	velocità periferica	*m/s*

Costanti

$\vec{g}$	accelerazione gravitazionale	9.81 m/s^2

2. Equazioni di bilancio per un volume di controllo

Nei corsi di base di fisica si è soliti fissare l'attenzione su un corpo di una certa massa oppure su un sistema termodinamico chiuso con una ben definita massa, e formulare delle leggi fisiche con riferimento a tale massa. Talvolta, però, può risultare più conveniente fare riferimento ad un ben definito volume nello spazio, anziché ad una certa massa.

Nella sua più ampia accezione, la metodologia dell'"analisi dei volumi di controllo" (control volume analysis) consiste nel fissare l'attenzione su un volume nello spazio, definendone con precisione la superficie che lo delimita e le sue caratteristiche, e valutando l'accumulo di una certa grandezza fisica di interesse (ad esempio l'energia) all'interno del volume considerato, per effetto del trasferimento di quella grandezza attraverso la superficie che lo delimita o per effetto di altre cause che possano variarne la quantità all'interno del volume considerato. Il volume su cui si fissa l'attenzione è detto volume di controllo, e la superficie che lo delimita superficie di controllo (Figura 2.1).

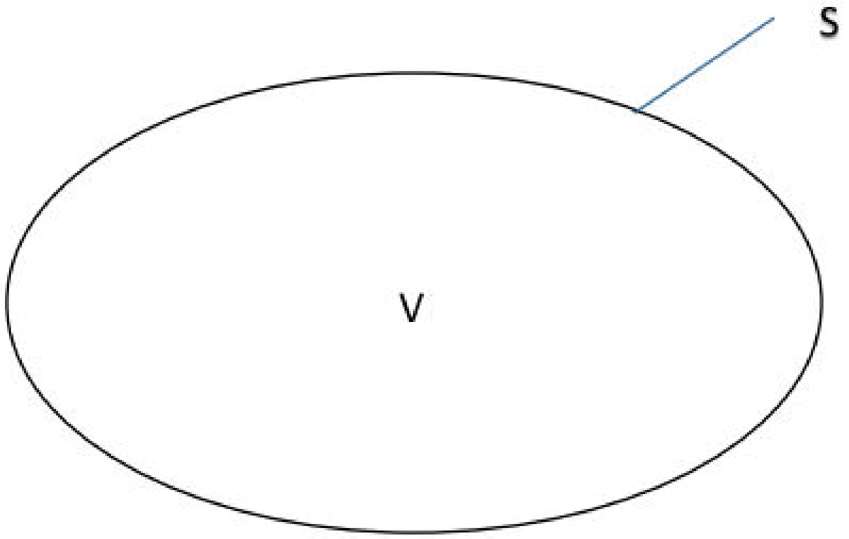

Figura 2.1 *Volume di controllo V delimitato da una superficie di controllo S*

Si osservi che il volume di controllo può essere delimitato da una superficie reale o virtuale (o parzialmente reale e parzialmente virtuale), e la forma e la dimensione del volume di controllo possono essere scelte a piacere, a seconda del fenomeno da studiare: potrebbe essere un volume estremamente grande, e comprendere una intera centrale elettrica, oppure un volume di dimensione più contenuta, e corrispondere al volume delimitato dal condotto di una turbomacchina; molti altri esempi potrebbero essere fatti, tra cui anche il caso di un volume di controllo all'interno di un solido, utile per lo studio della trasmissione del calore per conduzione (cfr par. XXX).

La scrittura del bilancio per un volume di controllo finito porta alla scrittura delle equazioni di bilancio in forma integrale; inoltre, in generale può essere utile valutare l'accumulo della grandezza di interesse all'interno del volume di controllo nell'unità di tempo: questo è necessario se si vuole poi derivare l'equazione differenziale che descrive il processo di interesse, ma è utile anche quando il processo è stazionario, perché porta alla scrittura di un'equazione in cui compaiono termini costanti. E' inoltre essenziale specificare se il volume di controllo che si sta studiando è fisso nello spazio oppure mobile, e, in quest'ultimo caso, rilevante per lo studio delle turbomacchine, specificarne il tipo di moto (tipicamente rotatorio, attorno ad un ben definito asse di rotazione).

In generale, se G è una grandezza estensiva, con riferimento alla Figura 2.1, sarà possibile scrivere

$$\left\{\begin{matrix} variazione\ della \\ grandezza\ G\ entro\ V \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} trasferimento\ netto\ della\ grandezza\ G \\ attraverso\ la\ superficie\ S \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} altre\ cause\ di \\ variazione\ della\ grandezza\ G \\ dipendenti\ dalla\ sua\ natura, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\}$$

Nella precedente scrittura, il primo termine rappresenta il cosiddetto termine di accumulo della grandezza G entro V, che può ovviamente essere positivo o negativo, mentre per il trasferimento netto si intende la differenza tra il trasferimento in ingresso e in uscita dal volume di controllo; le "altre cause" saranno più chiare nel seguito, quando saranno esemplificate, ma si sottolinea fin d'ora che può essere compreso un termine di generazione, che potrebbe essere a priori sia positivo (detto in tal caso termine "sorgente"), che negativo (in questo caso viene detto anche termine di "pozzo"; tale caso non verrà però considerato nella presente trattazione)

Nel seguito l'analisi dei volumi di controllo verrà applicata allo studio del moto di un fluido attraverso un condotto di forma generica: questo implica che non si abbia a che fare con una singola particella, come nel caso del corpo rigido, ma con un continuo[1] , e inoltre che non si debba studiare la traiettoria di una particella isolata ma bensì studiare il campo di moto in una ben definita regione dello spazio. In un punto all'interno del volume di controllo, al passare del tempo, il fluido si rinnova continuamente: non si inseguirà dunque la particella ma la storia di ciò che avviene in quel punto, prescindendo da quale particella si trovi lì in quel momento[2], valutando quale sarà in quel punto il valore di velocità, accelerazione e proprietà termodinamiche in funzione del tempo.

Il volume di controllo analizzato nei prossimi paragrafi sarà identificato dal volume di un generico condotto aperto in corrispondenza di entrambe le estremità, che talvolta è chiamato *sistema aperto fluente*; per semplicità la trattazione sarà limitata al caso di condotto con una sola sezione di ingresso e una sola sezione di uscita, ma i risultati potranno facilmente essere generalizzati al caso di un sistema a N ingressi ed M uscite.

Si consideri dunque un condotto rigido e fisso nello spazio, di forma qualsivoglia e lunghezza L, (Figura 2.2), delimitato da una superficie S_3, impervia al passaggio di massa, e da due superfici permeabili S_1 ed S_2, rispettivamente di ingresso e di uscita, attraverso le quali scorre un fluido generico. La superficie chiusa formata da $S_1+S_2+S_3$ è la superficie di controllo che delimita il volume di controllo V per il quale si formuleranno le relazioni di bilancio.

[1] Come detto nel capitolo 1, un fluido è costituito da un elevato numero di atomi o molecole, la cui distanza reciproca (cammino libero medio) è però molto piccola rispetto alle altre dimensioni in gioco che intervengono nei fenomeni da studiare, e per tale motivo il fluido può essere ritenuto un continuo nell'ambito dello studio.

[2] Questa è la descrizione del moto del fluido fatta dal punto di vista euleriano, opposta per criterio al punto di vista lagrangiano, che insegue la singola particella come nel caso dei corpi rigidi.

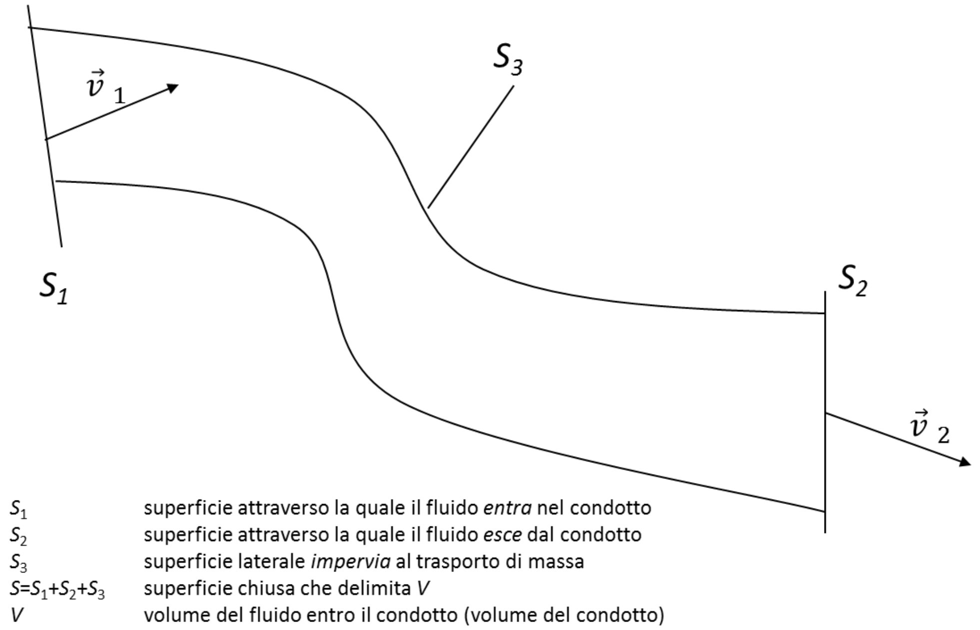

Figura 2.2 *Condotto generico per il quale vengono applicate in maniera esemplificativa le equazioni di bilancio.*

Le equazioni di bilancio saranno ricavate nei paragrafi seguenti a partire dalle tre leggi fisiche fondamentali:

- conservazione della massa
- conservazione della quantità di moto
- conservazione dell'energia

Tali equazioni saranno ricavate dapprima in forma generale, cercando di evidenziare tutti i fenomeni fisici che intervengono, e successivamente saranno semplificate introducendo (i) l'ipotesi di flusso monodimensionale (ii) l'ipotesi di regime stazionario[3] che sono solitamente accettabili per la trattazione delle macchine a fluido, argomento di particolare interesse in questa trattazione.

E' utile richiamare, prima di procedere, il concetto di monodimensionalità. Si supponga innanzitutto che il condotto abbia geometria tale da poter essere schematizzato come monodimensionale, si supponga cioè che l'eventuale raggio di curvatura del condotto sia molto elevato rispetto al diametro del condotto, e che la variazione della sezione di passaggio lungo il condotto sia contenuta (ovvero angolo di apertura/chiusura di un condotto divergente/convergente piccolo). In queste ipotesi *(*Figura 2.3*)*, è possibile definire una opportuna ascissa curvilinea x. La superficie di una generica sezione lungo x sarà esprimibile come S(x) e su ciascuna delle sezioni del condotto, per effetto della ipotesi di monodimensionalità, si assume che tutte le proprietà del fluido siano costanti.

[3] Nella condizione di regime stazionario, in ogni punto del campo di moto nessuna delle grandezze caratteristiche del moto (ad esempio la velocità, la pressione, la temperatura ecc.) varia nel tempo.

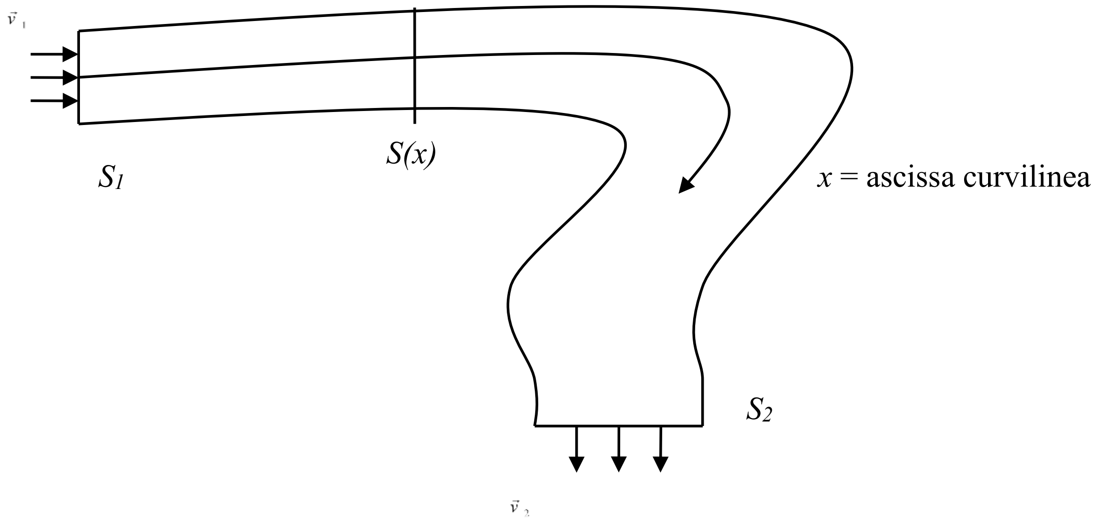

Figura 2.3 *Coordinata curvilinea in un generico condotto schematizzato come monodimensionale.*

Nella realtà, ciò non è mai vero: se si considera ad esempio la velocità, per effetto della viscosità del fluido, che si manifesta sottoforma di attrito fluidodinamico, si ha una distribuzione non uniforme di velocità sula sezione del condotto considerato, ed a tale distribuzione non uniforme di velocità corrisponderanno parimenti distribuzioni non uniformi delle varie proprietà termodinamiche, ciascuna secondo una propria legge.

Con riferimento alla Figura 2.4-a, relativa ad un condotto rettilineo a sezione circolare di diametro costante, si osservi la distribuzione di velocità su una generica sezione:

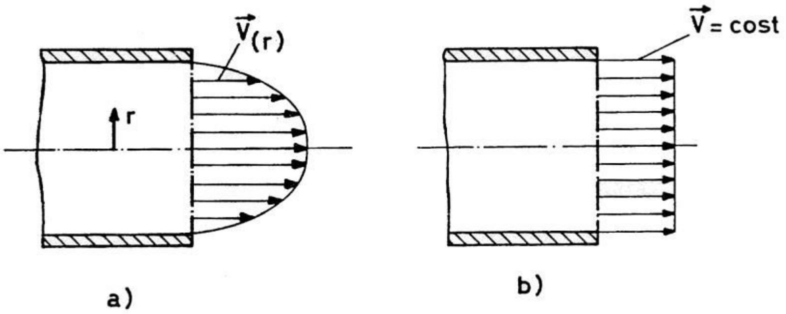

Figura 2.4*: (a) distribuzione di velocità per moto laminare in un tubo a sezione circolare, (b) distribuzione di velocità in un tubo a sezione circolare in ipotesi monodimensionale.*

La distribuzione effettiva della velocità in una generica sezione S presenta un andamento a simmetria radiale, con velocità nulla in corrispondenza della parete del tubo (condizione di aderenza), e velocità progressivamente crescente fino ad arrivare alla velocità massima in corrispondenza del centro della sezione. Il profilo di velocità sarà in generale rappresentato da una curva più o meno piatta, funzione del regime di moto, cui corrisponderà un valore medio di velocità $\bar{v}$ esprimibile come:

$$\bar{v}_n = \frac{\int_S v dS}{\int_S dS} \tag{2-1}$$

Accettando l'ipotesi di monodimensionalità, si ritiene che l'errore comunque introdotto identificando tutti i punti della sezione con un unico valore ("media") delle velocità (Figura 2.4-b) e delle proprietà termodinamiche sia trascurabile.

In base all'ipotesi di monodimensionalità tutte le grandezze saranno esprimibili in funzione di *(x,t)*, essendo *x* l'ascissa curvilinea e *t* il tempo.

Per la densità ρ si potrà dunque scrivere, in virtù dell'ipotesi di modimensionalità:

$$\varrho = \varrho(x,t) \tag{2-2}$$

Tale funzione descrive, per un istante assegnato, la variazione della densità nel condotto occupato dal fluido, e per un punto P assegnato lungo l'asse del condotto, la variazione della densità nel tempo in quel punto.

Allo stesso modo, il campo di moto sarà descritto da una funzione delle medesime variabili, e si avrà:

$$\vec{v} = \vec{v}(x,t) \tag{2-3}$$

e similmente per le altre grandezze.

2.1 Equazione di conservazione della massa

Si consideri un condotto rigido, fisso nello spazio, attraversato da un fluido. Il volume del condotto V costituisce il volume di controllo per il quale si vuole scrivere l'equazione di bilancio della massa, che esprime in forma matematica il principio di conservazione della massa. La generica grandezza estensiva G, usata all'inizio del capitolo per esemplificare il concetto di bilancio, è dunque in questo caso la massa.

Con riferimento alla Figura 2.2, un osservatore che fissi la sua attenzione sul volume di controllo V rileverà che la variazione nell'unità di tempo di massa del fluido entro il volume V è dovuta alla differenza tra il trasferimento di massa nell'unità di tempo in ingresso e in uscita dal volume di controllo V attraverso la superficie di controllo S; dunque, all'istante *t*, la conservazione della massa si può esprimere come:

$$\left\{\begin{matrix} variazione\ della\ massa \\ del\ fluido\ entro\ V \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} trasferimento\ netto\ di\ massa \\ nell'unità\ di\ tempo \\ attraverso\ la\ superficie\ S, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\}$$

dove, poiché il fluido entra nel volume di controllo V attraverso la superficie S_1, ne esce attraverso la superficie S_2, ed essendo la superficie S_3 impervia alla massa, il trasferimento netto di massa nell'unità di tempo è esprimibile come:

$$\left\{\begin{matrix} trasferimento\ netto\ di\ massa \\ nell'unità\ di\ tempo \\ attraverso\ la\ superficie\ S, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} trasferimento\ di\ massa \\ nell'unità\ di\ tempo \\ entrante \\ attraverso\ la\ superficie\ S_1, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} trasferimento\ di\ massa \\ nell'unità\ di\ tempo \\ uscente \\ attraverso\ la\ superficie\ S_2, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\}$$

Introducendo m_{VC} [kg], massa racchiusa entro il volume di controllo V, e osservando che all'interno di tale volume V la densità è funzione della posizione e del tempo, è possibile scrivere

$$m_{VC}(t) = \int_V \rho dV \tag{2-4}$$

e si osserva che l'integrale di volume viene effettuato all'istante t. Il termine di variazione della massa entro V nell'unità di tempo si ottiene derivando la precedente relazione:

$$\frac{d\int_V \rho dV}{dt}$$

Per il calcolo dei termini di trasferimento attraverso S_1 e S_2 osserviamo preliminarmente che la direzione del vettore velocità $\vec{v}$ può *a priori* essere generica: considerata una qualsiasi superficie S, tale vettore è comunque scomponibile secondo due direzioni, una normale alla superficie considerata, ed una ad essa tangente. La componente v_n è la componente responsabile del trasporto di massa, mentre la componente v_t causa uno scorrimento del flusso sulla superficie senza partecipare al trasporto di massa.

Si calcoli dapprima il termine in uscita: considerando una superficie infinitesima dS, appartenente alla superficie S_2, *durante un intervallo di tempo Δt esce attraverso dS un volume infinitesimo di fluido* esprimibile come (base dS per altezza $v_n\Delta t$):

$$dS v_n \Delta t$$

e nell'unità di tempo

$$\frac{v_n dS \Delta t}{\Delta t} = v_n dS$$

La massa infinitesima di fluido che esce attraverso dS nell'unità di tempo si ottiene moltiplicando il precedente termine per la densità ρ:

$$\rho v_n dS$$

e le masse rispettivamente uscenti ed entranti dalle superfici S_2 e S_1 nell'unità di tempo risultano

$$\int_{S_2} \rho v_n dS$$

$$\int_{S_1} \rho v_n dS$$

L’equazione di conservazione della massa in forma generale diventa quindi:

$$\frac{d\int_V \rho dV}{dt} = \int_{S_1} \rho v_n dS - \int_{S_2} \rho v_n dS \qquad (2\text{-}5)$$

Si osserva che tale equazione è scritta in termini di *proprietà locali* (perché compaiono la densità e la velocità, funzioni della posizione e del tempo) ed è detta anche equazione globale di continuità.

E’ importante notare che i precedenti termini possono essere scritti in forma vettoriale: con la convenzione, largamente utilizzata, che considera positiva la normale uscente dalla superficie, si può scrivere per il *volume di fluido che esce attraverso S_2 nell’unità di tempo [m^3/s]*

$$\int_{S_2} v_n dS = \int_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{dS}$$

che è per definizione il *flusso del vettore velocità* attraverso la superficie S_2.

Per *il trasferimento di massa attraverso S_2 nell’unità di tempo [kg/s]*, analogamente si ha

$$\int_{S_2} \rho v_n dS = \int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{dS}$$

che costituisce il *flusso di massa* attraverso *S_2*; è quindi possibile indicare il trasferimento nell’unità di tempo attraverso S con il termine di flusso attraverso S.

Inoltre, per la generica sezione S del condotto si definiscono *portata volumetrica* $\dot{V}$ *(m^3/s)* e *portata massica* $\dot{m}$ *(kg/s)* le seguenti quantità:

$$\dot{V} = \int_S v_n dS \qquad (2\text{-}6)$$

$$\dot{m} = \int_S \rho v_n dS \qquad (2\text{-}7)$$

si osserva che la portata massica appena introdotta corrisponde alla definizione di *flusso di massa* attraverso la superficie S.

Si definiscono inoltre i valori medi di velocità normale $\bar{v}_n$ e densità $\bar{\rho}$ sulla generica sezione S come:

$$\bar{v}_n = \frac{\int_S v_n dS}{\int_S dS} = \frac{\dot{V}}{S} \qquad (2\text{-}8)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\int_S \rho v_n dS}{\int_S v_n dS} = \frac{\dot{m}}{\dot{V}} \qquad (2\text{-}9)$$

Introducendo la portata massica nella (2-5), si ottiene:

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \tag{2-10}$$

E' importante osservare che $\frac{dm_{VC}}{dt}$ è la derivata rispetto al tempo di $m_{VC}(t)$, mentre $\dot{m}_1 e\ \dot{m}_2$ sono le portate massiche (o flussi di massa) e corrispondono ad un trasferimento di massa nell'unità di tempo attraverso le sezioni di ingresso e uscita.

La (2-10) può essere generalizzata nel caso di un sistema con N sezioni di ingresso e M sezioni di uscita, ottenendo:

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \sum_{i}^{N} \dot{m_{i,IN}} - \sum_{j}^{M} \dot{m_{J,OUT}} \tag{2-11}$$

Infine si osserva che, nel caso in cui il volume di controllo non sia attraversato da flusso di massa, cioè coincida con un sistema chiuso, nella (2-10) si annullano entrambi i termini di flusso di massa attraverso le superfici S_1 e S_2 e dunque, diventando la derivata uguale a zero si ricava:

$$m_{VC} = cost \tag{2-12}$$

come necessariamente deve essere per un sistema chiuso.

Se il condotto è rigido e fisso, è possibile portare la derivata che compare nella (2-5) dentro l'integrale[4] giungendo a:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{S_1} \rho v_n dS - \int_{S_2} \rho v_n dS \tag{2-13}$$

dove si osserva che la derivata è diventata una derivata parziale. La (2-13) costituisce una formulazione alternativa alla (2-5) dell'equazione di conservazione della massa; le due equazioni non vanno però confuse.

---

[4] Richiamando la relazione che consente di calcolare la derivata totale rispetto al tempo dell'integrale di generica funzione F, con limiti essi stessi funzione del tempo (per maggiori dettagli si veda ad es. (Kundu, 2012), par. 3.6):

$$\frac{d}{dt}\int_{V_*(t)} F(\vec{x},t)dV = \int_{V_{*(t)}} \frac{\partial F(\vec{x},t)}{\partial t} dV + \int_{S_{*(t)}} F(\vec{x},t)\overrightarrow{v_S}\cdot\vec{n}dS$$

Nella precedente equazione V* è il volume delimitato dalla superficie S*, i cui punti si muovono con velocità $\overrightarrow{v_S}$: si osserva che, se il volume è fisso nello spazio, allora $\overrightarrow{v_S} = 0$, ed annullandosi l'integrale sulla superficie si ottiene che la derivata totale d/dt può essere portata all'interno dell'integrale, diventando una derivata parziale.

2.1.1 Caso monodimensionale

Nel caso monodimensionale, densità e velocità, essendo costanti su tutta la sezione (e specificatamente uguali al valore medio), possono essere portati fuori dagli integrali presenti nella (2-5), ottenendo:

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \rho_1 v_{1n} S_1 - \rho_2 v_{2n} S_2 \tag{2-14}$$

2.1.2 Regime stazionario

Nell'ipotesi di regime stazionario, la massa totale contenuta nel volume di controllo non varia nel tempo, e dunque nella (2-5) si avrà:

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = 0 \tag{2-15}$$

l'equazione di conservazione della massa diventa:

$$\int_{S_1} \rho v_n dS - \int_{S_2} \rho v_n dS = 0 \tag{2-16}$$

ed è quindi esprimibile come:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \tag{2-17}$$

oppure, in funzione dei valori medi, e con riferimento alle sezioni di ingresso e uscita 1 e 2:

$$\bar{\rho}_1 \bar{v}_{1n} S_1 = \bar{\rho}_2 \bar{v}_{2n} S_2 \tag{2-18}$$

Inoltre, nel caso di un sistema con N sezioni di ingresso e M sezioni di uscita, in regime stazionario, la (2-11) si riduce a:

$$\sum_{i}^{N} \dot{m}_{i,IN} = \sum_{j}^{M} \dot{m}_{j,OUT} \tag{2-19}$$

2.1.3 Caso monodimensionale e regime stazionario

Nel caso monodimensionale e regime stazionario, in virtù delle precedenti equazioni l'equazione di conservazione della massa è esprimibile:

- in funzione della densità e della portata volumetrica come:

$$\rho_1 \dot{V}_1 = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho_2 \dot{V}_2 \tag{2-20}$$

- in funzione della densità, della velocità, e della sezione di passaggio come:

$$\rho_1 v_{1n} S_1 = \rho_2 v_{2n} S_2 \tag{2-21}$$

Si osserva infine che spesso nel seguito della trattazione il pedice n sarà per semplicità omesso, sottintendendo che si considera la componente normale della velocità.

2.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

Ripetendo quanto già fatto per la scrittura dell'equazione della massa, si consideri un condotto rigido, fisso nello spazio, attraversato da un fluido. Il volume del condotto V costituisce il volume di controllo per il quale si vuole scrivere l'equazione della quantità di moto, che esprime in forma matematica la seconda legge di Newton. La generica grandezza estensiva G, usata all'inizio del capitolo per esemplificare il concetto di bilancio, è dunque in questo caso la quantità di moto.

Con riferimento alla Figura 2.2, un osservatore che fissi la sua attenzione su un volume di controllo V rileverà che la variazione della quantità di moto nell'unità di tempo del fluido entro il volume V è dovuta a due termini: la variazione di quantità di moto nell'unità di tempo associata al trasporto di massa in ingresso e uscita dal volume di controllo V, attraverso la superficie di controllo S, e, inoltre, la risultante delle forze agenti sul fluido; dunque, all'istante *t*, si avrà:

$$\begin{Bmatrix} \text{variazione della quantità di moto} \\ \text{del fluido entro } V \\ \text{nell'unità di tempo,} \\ \text{all'istante } t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{trasferimento netto di quantità di moto} \\ \text{nell'unità di tempo associato} \\ \text{al trasporto di massa} \\ \text{attraverso la superficie } S, \\ \text{all'istante } t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \text{risultante delle} \\ \text{forze} \\ \text{agenti} \\ \text{sul fluido,} \\ \text{all'istante } t \end{Bmatrix}$$

dove, poiché il fluido entra nel volume di controllo V attraverso la superficie S_1, ne esce attraverso la superficie S_2, ed essendo la superficie S_3 impervia alla massa, il trasferimento netto di quantità di moto nell'unità di tempo è esprimibile come:

$$\begin{Bmatrix} \text{trasferimento netto} \\ \text{di quantità di moto} \\ \text{nell'unità di tempo associato} \\ \text{al trasporto di massa} \\ \text{attraverso la superficie } S, \\ \text{all'istante } t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{trasferimento di quantità di moto} \\ \text{nell'unità di tempo} \\ \text{entrante} \\ \text{attraverso la superficie } S_1, \\ \text{all'istante } t \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \text{trasferimento di quantità di moto} \\ \text{nell'unità di tempo} \\ \text{uscente} \\ \text{attraverso la superficie } S_2, \\ \text{all'istante } t \end{Bmatrix}$$

Ricordando che densità e velocità dipendono dalla posizione e dal tempo all'interno del volume V, è possibile scrivere

$$\text{quantità di moto entro } V, \text{all'istante } t = \int_V \rho \vec{v} dV \tag{2-22}$$

e si osserva che l'integrale di volume viene effettuato all'istante t. Il termine di variazione nell'unità di tempo della quantità di moto entro V si ottiene derivando la precedente relazione:

$$\frac{d \int_V \rho \vec{v} dV}{dt}$$

Per il calcolo dei termini di trasferimento attraverso S_1 e S_2, si ripete la trattazione già vista nel caso dell'equazione della massa: si consideri dunque prima il termine in uscita: considerando una superficie infinitesima dS, appartenente alla superficie *S_2*, *durante un intervallo di tempo Δt esce attraverso dS un volume infinitesimo di fluido* esprimibile come (base dS per altezza $v_n\Delta t$):

$$dSv_n\Delta \mathrm{t}$$

e nell'unità di tempo

$$\frac{v_n dS\Delta t}{\Delta t} = v_n dS$$

La massa infinitesima di fluido che esce attraverso dS nell'unità di tempo si ottiene moltiplicando il precedente termine per la densità ρ:

$$\rho v_n dS$$

e a questa è associata una quantità di moto infinitesima di fluido pari a:

$$\rho v_n \vec{v} dS$$

e le quantità di moto rispettivamente uscenti ed entranti dalle superfici S_2 e S_1 nell'unità di tempo risultano

$$\int_{S_2} \rho v_n \vec{v} dS$$

$$\int_{S_1} \rho v_n \vec{v} dS$$

Si osserva che per *il trasferimento di quantità di moto attraverso S_2 nell'unità di tempo* è possibile anche scrivere

$$\int_{S_2} \rho v_n \vec{v} dS = \int_{S_2} \rho\, (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{v} \mathrm{dS}$$

e che tale espressione costituisce il *flusso di quantità di moto* attraverso *S_2*.

Le forze agenti sul fluido sono distinguibili in forze di volume (dette anche di massa o a distanza), le quali si esercitano a distanza su tutte le particelle costituenti del fluido, in generale proporzionalmente alla loro massa, e forze di superficie, le quali si esercitano sul fluido attraverso la superficie che delimita il volume di fluido considerato.

Il campo gravitazionale è un esempio di campo di forze conservative, che origina una forza di volume; nel seguito si supporrà che l'unica forza di volume che agisce sul fluido sia la forza di gravità, e di conseguenza la forza di volume $d\overrightarrow{F_{vol}}$ che agisce su un volumetto infinitesimo dV sarà pari a:

$$d\overrightarrow{F_{vol}} = \rho\vec{g}dV$$

essendo $\vec{g}$ l'accelerazione di gravità, e dove il termine $\rho\vec{g}$ risulta espresso in [N/m^3]; per l'intero volume risulta:

$$\overrightarrow{F_{vol}} = \int_V \rho\vec{g}dV = m_{VC}\vec{g}$$

Per la valutazione delle forze di superficie è necessario introdurre la nozione di sforzo: con riferimento ad una superficie con giacitura identificata dalla normale $\vec{n}$, presa per convenzione uscente dalla superficie, si definisce sforzo $\overrightarrow{\Phi_n}$ il rapporto tra la forza di superficie e l'area elementare su cui la forza agisce, al tendere a zero della superficie; lo sforzo viene quindi espresso in [N/m^2]. Con riferimento ad una superficie infinitesima dS, con versori normale $\vec{n}$ e tangente $\vec{t}$ (Figura 2.5), è utile considerare le componenti normale e tangenziale dello sforzo, che prendono il nome di sforzo normale e sforzo tangenziale (o di taglio).

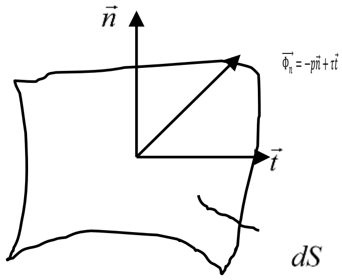

Figura 2.5 *Scomposizione dello sforzo su una generica superficie dS secondo la direzione $\vec{n}$ perpendicolare alla superficie presa in considerazione e $\vec{t}$ tangente alla superficie.*

Se il fluido è in quiete, cioè fermo, è presente solo uno sforzo con componente normale alla superficie considerata, e dovuto alla pressione. Gli sforzi dovuti alla pressione sono diretti in senso opposto a quello della normale (la maggior parte dei fluidi, non sopporta infatti, in condizioni normali, apprezzabili sforzi di trazione) e sono isotropi, si ha quindi in questo caso:

$$\overrightarrow{\Phi_n} = -p\vec{n}$$

Quando il fluido è in moto nasce uno sforzo ulteriore dovuto alla viscosità, detto sforzo viscoso, con componente normale di solito trascurabile, e con componente tangenziale, parallela alla superficie che delimita il condotto, significativa (a causa degli attriti interni del fluido). La relazione tra sforzo è velocità è molto complicata, tuttavia Newton scopri che, per il caso estremamente semplice di moto laminare monodimensionale (ad esempio il caso di fluido tra due piastre parallele, di cui una in moto rispetto all'altra) vale la relazione:

$$\tau = -\mu\frac{dv_x}{dy}$$

(essendo x la direzione del moto della piastra mobile, e y ortogonale a x). Ciò consente di introdurre la viscosità dinamica μ, importante proprietà del fluido, e di valutarne le unità di misura (Pa·s).

Nel caso generale lo sforzo è esprimibile come:

$$\overrightarrow{\Phi_n} = -p\vec{n} + \tau\vec{t}$$

e la forza di superficie che agisce su una superficie infinitesima dS sarà pari a:

$$d\overrightarrow{F_{sup}} = \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right)dS$$

e per l'intera superficie risulta:

$$\overrightarrow{F_{sup}} = \int_{S1+S2+S3} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS$$

Complessivamente per la risultante delle forze agenti sul fluido si ha:

$$Ris\,\vec{F} = \overrightarrow{F_{sup}} + \overrightarrow{F_{vol}} = \int_V \rho\vec{g}dV + \int_{S1+S2+S3} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS \tag{2-23}$$

Sostituendo le relazioni viste, l'equazione della quantità di moto per un volume di controllo V nel caso generale è esprimibile come:

$$\frac{d\int_V \rho\,\vec{v}dV}{dt} = \int_{S_1} \rho v_n\vec{v}dS - \int_{S_2} \rho v_n\vec{v}dS + \int_V \rho\vec{g}dV + \int_{S1+S2+S3} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS \tag{2-24}$$

Si osserva che l'equazione è scritta in termini di *proprietà locali* ed è detta anche equazione globale della dinamica dei fluidi; se ne sottolinea il carattere vettoriale.

2.2.1 Caso monodimensionale e regime stazionario

Nel caso monodimensionale è possibile portare fuori dall'integrale dei termini di flusso la velocità; inoltre, in regime stazionario la quantità di moto all'interno del volume di controllo è costante, e si annulla la derivata a primo membro della (2-24) . Infine, grazie alla (2-17), è possibile evidenziare un'unica portata massica ottenendo

$$0 = \dot{m}(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) + \int_V \rho\vec{g}dV + \int_{S1+S2+S3} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS \tag{2-25}$$

oppure, riarrangiando i termini,

$$\int_V \rho\vec{g}dV + \int_{S1+S2+S3} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS = \dot{m}(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$$

Ponendo $\tau = 0$ su S_1 e S_2 (rigoroso in ipotesi di monodimensionalità, e in ogni caso approssimazione generalmente accettabile nello studio delle macchine a fluido), l'integrale delle forze di superficie diventa:

$$\int_{S1+S2+S3} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS = \int_{S1} (-p\vec{n})\, dS + \int_{S2} (-p\vec{n})\, dS + \int_{S3} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS$$

Essendo il flusso monodimensionale, se S_1 ed S_2 sono superfici piane si ha:

$$\int_{S1}(-p\vec{n})\, dS = -p_1 S_1 \overrightarrow{n_1} \qquad \text{e} \qquad \int_{S2}(-p\vec{n})\, dS = -p_2 S_2 \overrightarrow{n_2}$$

da cui:

$$m_{VC}\vec{g} - p_1 S_1 \overrightarrow{n_1} - p_2 S_2 \overrightarrow{n_2} + \int_{S3} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS = \dot{m}(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) \tag{2-26}$$

che costituisce l'equazione che esprime la conservazione della quantità di moto nelle ipotesi di (i) monodimensionalità, (ii) regime stazionario, (iii) campo di forze a distanza solo gravitazionale e (iv) sforzi tangenziali trascurabili su S_1 ed S_2.

Applicazione dell'equazione della quantità di moto ad un tubo orizzontale

Consideriamo quale esempio l'applicazione della precedente equazione ad un condotto orizzontale rettilineo e a sezione costante S riportato in Figura 2.6.

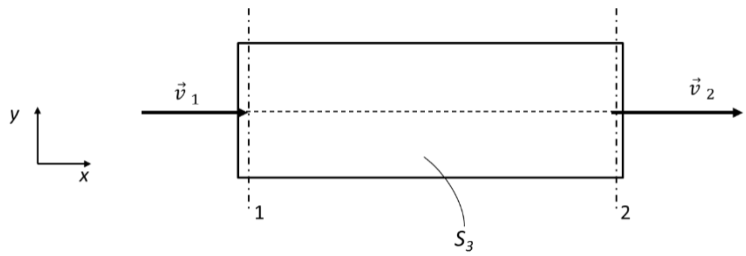

Figura 2.6 *Schema di condotto orizzontale rettilineo a sezione costante con una superficie di ingresso ed una di uscita*

Consideriamo un sistema di riferimento in cui l'asse *x* coincida con l'asse di simmetria del condotto e l'asse *y* sia verticale; siano $\vec{i}$ e $\vec{j}$ i versori degli assi *x* e *y;* supponiamo inoltre che il fluido si muova nel senso delle x crescenti.

L'equazione della quantità di moto (2-26), essendo un'equazione vettoriale, corrisponde a 3 equazioni scalari: per considerare la componente dell'equazione della quantità di moto in direzione *x* è necessario moltiplicare scalarmente tale equazione per il versore dell'asse *x*:

$$m_{VC}\vec{g} \cdot \vec{i} - p_1 S \;\; \overrightarrow{n_1} \cdot \vec{i} - p_2 S \;\; \overrightarrow{n_2} \cdot \vec{i} + \int_{S3} \left(-p\vec{n} \cdot \vec{i} + \tau\vec{t} \cdot \vec{i}\right) dS = \dot{m}(\overrightarrow{v_2} \cdot \vec{i} - \overrightarrow{v_1} \cdot \vec{i}) \tag{2-27}$$

che fornisce:

$$+p_1S \quad -p_2S \quad +\int_{S3} (\tau)\, dS = \dot{m}(v_2 - v_1) \tag{2-28}$$

Ponendo T=$\int_{S3}(\tau)\, dS$ si ha:

$$+p_1S \quad -p_2S \quad +T = \dot{m}(v_2 - v_1) \tag{2-29}$$

dove T è la risultante delle forze di superficie esercitate sul fluido per contatto attraverso la superficie del condotto S_3.

Nel caso in cui il fluido sia incomprimibile, dalla (2-18) risulta v_2=v_1, e dalla precedente relazione si ottiene:

$$T = (p_2 - p_1)S$$

poiché il moto del fluido procede da pressioni maggiori verso pressione minori (cioè p_1>p_2), si evince che la forza risultante dalla differenza di pressione agli estremi del tubo serve a bilanciare la risultante delle forze di superficie che la parete del condotto esercita sul fluido; essa è dunque diretta in senso opposto alla direzione del moto.

Se invece il fluido è comprimibile è possibile scrivere:

$$p_1S \quad -p_2S \quad = -T + \dot{m}\left(\frac{\dot{m}}{S\rho_2} - \frac{\dot{m}}{S\rho_1}\right) = -T + \frac{\dot{m}^2}{S}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \tag{2-30}$$

e oltre alla risultante delle forze di superficie T compare un termine funzione della variazione della densità tra ingresso e uscita del condotto.

Per considerare la componente dell'equazione della quantità di moto in direzione *y* è necessario moltiplicare scalarmente tale equazione per il versore dell'asse *y*:

$$m_{VC}\vec{g}\cdot\vec{j} - p_1S\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{j} \; - p_2S\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{j} + \int_{S3}\left(-p\vec{n}\cdot\vec{j} + \tau\vec{t}\cdot\vec{j}\right) dS = \dot{m}(\overrightarrow{v_2}\cdot\vec{j} - \overrightarrow{v_1}\cdot\vec{j}) \tag{2-31}$$

che fornisce:

$$-m_{VC}g = \int_{S3}(-p\vec{n}\cdot\vec{j})\, dS$$

ed indica che la componente in direzione verticale della forza esercitata dal tubo sul fluido serve a sostenere il peso il fluido.

Applicazione dell'equazione della quantità di moto ad un tubo verticale

Consideriamo ora quale esempio l'applicazione della precedente equazione ad un condotto rettilineo verticale, sempre a sezione costante S. Consideriamo un sistema di riferimento *xyz* in cui l'asse y, verticale, coincida con l'asse di simmetria del condotto e sia $\vec{j}$ il versore dell' asse *y*; supponiamo inoltre che il fluido si muova nel senso delle y crescenti. Per considerare la componente dell'equazione della quantità di moto in direzione *y* è necessario moltiplicare scalarmente tale equazione per il versore dell'asse *y*:

$$m_{VC}\vec{g}\cdot\vec{j} - p_1 S\ \ \vec{n_1}\cdot\vec{j}\ - p_2 S\ \ \vec{n_2}\cdot\vec{j} + \int_{S3}\left(-p\vec{n}\cdot\vec{j} + \tau\vec{t}\cdot\vec{j}\right)dS = \dot{m}(\vec{v_2}\cdot\vec{j} - \vec{v_1}\cdot\vec{j}) \tag{2-32}$$

da cui:

$$-m_{VC}g + p_1 S\ - p_2 S + T = \dot{m}(v_2 - v_1) \tag{2-33}$$

Nel caso in cui il fluido sia fermo, $v_2 = v_1 = 0$ e si annullano inoltre gli sforzi tangenziali: dalla precedente relazione si ottiene:

$$-m_{VC}g = (p_2 - p_1)\,S$$

e nel caso di un tratto di tubo di lunghezza infinitesima *dy* si ha:

$$-g\,dm_{VC} = Sdp$$

Considerando che

$$dm_{VC} = -\rho dV = -\rho S dy$$

Si ottiene

$$-g\rho S dy = Sdp$$

e si ritrova dunque l'equazione fondamentale della statica dei fluidi:

$$-\rho g = \frac{dp}{dy} \tag{2-34}$$

2.3 Equazione di conservazione dell'energia

Volendo estendere il procedimento già adottato nei precedenti paragrafi per la scrittura dell'equazione di conservazione dell'energia, sarà necessario introdurre nel volume di controllo V un organo mobile che consenta di scambiare lavoro con l'esterno, contraddistinto da una superficie mobile S_4. Il volume di controllo V per il quale si vuole scrivere l'equazione dell'energia, che esprime in forma matematica il principio di conservazione dell'energia, risulta quindi delimitato dalla superficie di controllo costituita dalle superfici S_1 ed S_2, entrambe permeabili, dalla superficie S_3, impervia alla massa e rigida, e dalla superficie S_4, a contatto con l'organo mobile, impervia alla massa ma mobile. Inoltre, la generica grandezza estensiva G, usata all'inizio del capitolo per esemplificare il concetto di bilancio, è in questo caso l'energia .

Con riferimento alla Figura 2.7, un osservatore che fissi la sua attenzione sul volume di controllo V rileverà che la variazione di energia nell'unità di tempo del fluido entro il volume V può essere dovuta:

- alla variazione di energia nell'unità di tempo associata al trasporto di massa in ingresso e uscita dal volume di controllo V, attraverso la superficie di controllo S
- al trasferimento di energia sotto forma di lavoro compiuto dalle forze agenti sul fluido e/o sotto forma di calore, sempre nell'unità di tempo (cioè alla potenza delle forze agenti sul fluido e/o alla potenza termica trasmessa attraverso la superficie di controllo S)
- ad altri fenomeni, come ad esempio reazioni chimiche o nucleari, che avvengono all'interno del volume di controllo, e che contribuiscono al bilancio con un termine di generazione (detto sorgente, se positivo, oppure pozzo, se negativo).

Si stabilisca inoltre la convenzione di segno in base alla quale *si ritengono positivi il lavoro e il calore entranti nel sistema.*

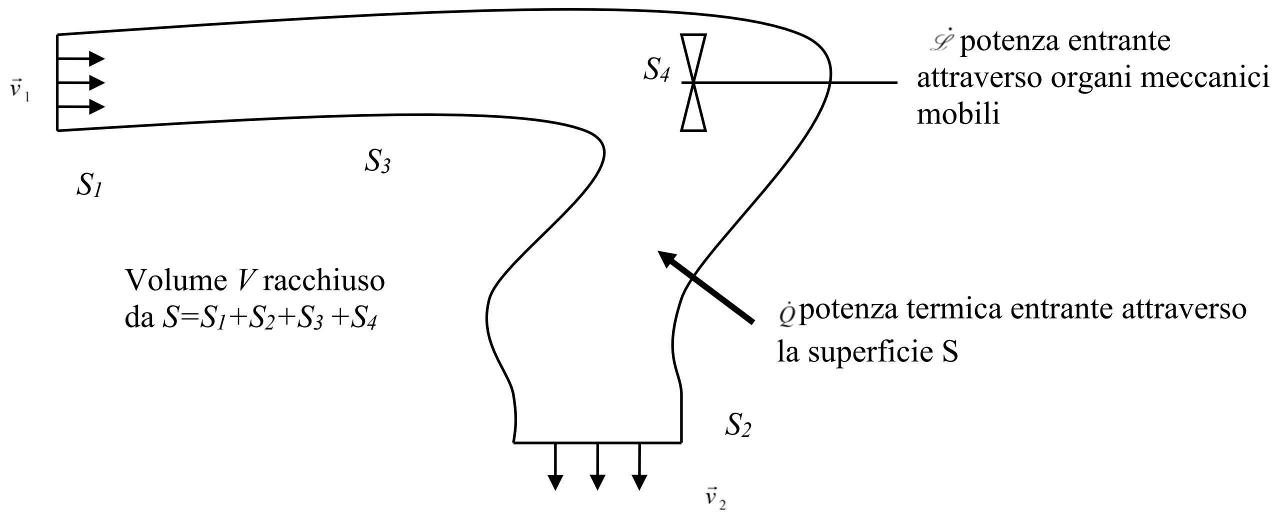

Figura 2.7 *Esempio di condotto di forma generica per la scrittura dell'equazione di conservazione dell'energia.*

Il bilancio dell'energia all'istante *t* è esprimibile come:

$$\begin{Bmatrix} variazione\ dell'energia \\ del\ fluido\ entro\ V \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} trasferimento\ netto\ di\ energia \\ nell'unità\ di\ tempo\ associato \\ al\ trasporto\ di\ massa \\ attraverso\ la\ superficie\ S, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} lavoro\ netto \\ compiuto\ dalle \\ forze\ agenti \\ sul\ fluido \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} trasferimento\ netto\ di\ calore \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ attraverso\ S, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} generazione\ di\ energia \\ entro\ V \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix}$$

E’ utile sottolineare fin d’ora che, qualora i campi di forza presenti siano conservativi, è possibile (e conveniente!) considerare il potenziale del campo di forze anziché il lavoro compiuto dalle forze.

Per la scrittura del termine di variazione nell’unità di tempo dell’energia immagazzinata dal fluido entro il volume V si considerano l’energia interna, l’energia cinetica e la somma dei potenziali dovuti agli eventuali campi di forze conservative presenti. Chiamando E_{VC} tale termine, e osservando che all’interno del volume V la densità ρ, l’energia interna u, la velocità v e gli eventuali termini di energia potenziale per unità di massa φ_i saranno funzione della posizione e del tempo, si ha:

$$E_{VC}(t) = \int_V \rho\left(u + \frac{v^2}{2} + \sum \varphi_i\right) dV \tag{2-35}$$

Il termine di variazione dell’energia entro V nell’unità di tempo si ottiene derivando la precedente relazione:

$$\begin{Bmatrix} variazione\ dell'energia \\ del\ fluido\ entro\ V \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix} = \frac{d\int_V \rho\left(u + \frac{v^2}{2} + \Sigma\varphi_i\right) dV}{dt}$$

dove si ribadisce che tutti i termini tra parentesi rappresentano una energia per unità di massa *[J/kg]*.

Il trasferimento netto di energia nell’unità di tempo associato al trasporto di massa è esprimibile come:

$$\begin{Bmatrix} trasferimento\ netto \\ di\ energia \\ nell'unità\ di\ tempo\ associato \\ al\ trasporto\ di\ massa \\ attraverso\ la\ superficie\ S, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} trasferimento\ di\ energia \\ nell'unità\ di\ tempo \\ entrante \\ attraverso\ la\ superficie\ S_1, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} trasferimento\ di\ energia \\ nell'unità\ di\ tempo \\ uscente \\ attraverso\ la\ superficie\ S_2, \\ all'istante\ t \end{Bmatrix}$$

poiché il fluido entra nel volume di controllo V attraverso la superficie S_1, ne esce attraverso la superficie S_2, e le superfici S_3 ed S_4 sono impervie alla massa; per i singoli termini che concorrono al trasferimento netto di energia, considerando che nell’unità di tempo esce attraverso una superficie elementare dS una massa infinitesima pari a $\rho v_n dS$, e che a questa sarà associata una energia per unità di massa comprendente energia interna, energia cinetica e somma dei potenziali, si ottiene per il trasferimento attraverso dS

$$\left(u + \frac{v^2}{2} + \sum \varphi_i\right) \rho\, v_n dS$$

corrispondentemente, attraverso le superfici S_1 e S_2 si avrà:

$$\left\{\begin{matrix} trasferimento\ di\ energia \\ nell'unità\ di\ tempo \\ entrante \\ attraverso\ la\ superficie\ S_1, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\} = \int_{S_1} \left(u + \frac{v^2}{2} + \Sigma\, \varphi_i\right) \rho\, v_n \mathrm{dS}$$

$$\left\{\begin{matrix} trasferimento\ di\ energia \\ nell'unità\ di\ tempo \\ uscente \\ attraverso\ la\ superficie\ S_2, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\} = \int_{S_2} \left(u + \frac{v^2}{2} + \Sigma\, \varphi_i\right) \rho v_n \mathrm{dS}$$

Per il termine relativo alla potenza delle forze agenti sul fluido, si dovranno considerare, come già fatto per l'equazione della quantità di moto, forze di volume e forze di superficie. Distinguendo le forze di volume $\vec{f}_{vol}$ in conservative (il cui lavoro può essere espresso come variazione di un potenziale) e non conservative, è possibile escludere le forze conservative dalla valutazione delle potenze introdotte nel fluido, in quanto già considerate attraverso il potenziale φ; così facendo la potenza delle forze di volume non conservative $\vec{f}'_{vol}$ agenti sul fluido è calcolabile come:

$$\vec{f}'_{vol} \rho dV \cdot \vec{v} = potenza\ delle\ forze\ di\ volume\ non\ conservative\ agenti\ sul\ fluido\ contenuto\ in\ dV$$

$$\int_V \vec{f}'_{vol} \rho \cdot \vec{v} dV = potenza\ delle\ forze\ di\ volume\ non\ conservative\ agenti\ sul\ fluido\ contenuto\ in\ V$$

E per le forze di superficie, analogamente:

$$\left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) dS \cdot \vec{v} = potenza\ delle\ forze\ di\ superficie\ agenti\ su\ dS$$

$$\int_{S_1+S_2+S_3+S_4} \left(-p\vec{n} + \tau\vec{t}\right) \cdot \vec{v}\, dS = potenza\ delle\ forze\ di\ superficie\ agenti\ sulla\ superficie\ di\ controllo$$

Indicando con $\dot{\boldsymbol{Q}}$ il trasferimento netto di calore nell'unità di tempo attraverso la superficie di controllo (come già detto, positivo se entrante nel sistema), e considerando che il termine di generazione è relativo alla conversione da altre forme di energia (chimica, nucleare, elettrica, ecc.) in energia interna, ed è in generale proporzionale al volume, potendosi quindi scrivere per tale termine

$$\left\{\begin{matrix} generazione\ di\ energia \\ entro\ V \\ nell'unità\ di\ tempo, \\ all'istante\ t \end{matrix}\right\} = \int_V q''' \, dV$$

dove q''' rappresenta la generazione di energia nell'unità di tempo per unità di volume [W/m^3] , il bilancio dell'energia si scrive:

$$\frac{d\int_V \rho\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum\varphi_i\right)dV}{dt} = +\int_{S_1}\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum\varphi_i\right)\rho v_n\,dS - \int_{S_2}\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum\varphi_i\right)\rho v_n\,dS + \int_V \vec{f}'_{vol}\rho\cdot\vec{v}dV + \int_{S_1+S_2+S_3+S_4}\left(-p\vec{n}+\tau\vec{t}\right)\cdot\vec{v}\,dS + \dot{\mathcal{Q}} + \int_V q'''\,dV \tag{2-36}$$

La precedente equazione rappresenta il caso più generale ed è suscettibile di varie modifiche a seconda dell'utilizzo finale. Il termine $\dot{\mathcal{Q}}$ può ad esempio essere scritto come integrale di superficie del flusso termico; gli eventuali termini dovuti a forze non conservative e generazione possono essere conglobati in un unico termine; infine, la somma dei potenziali deve essere esplicitata in funzione delle forze conservative presenti.

Nel seguito si considereranno assenti le forze non conservative, e nullo il termine di generazione. E' interessante analizzare l'integrale delle forze di superficie $\int_{S_1+S_2+S_3+S_4}\left(-p\vec{n}+\tau\vec{t}\right)\cdot\vec{v}\,dS$[5]:

- su S_3 si ha la "condizione di aderenza" (le molecole sono intrappolate dalla rugosità superficiale), e poiché S_3 è fissa, la velocità del fluido alla parete è nulla, dunque non c'è scambio di lavoro in corrispondenza di S_3:

$$\int_{S3}\left(-p\vec{n}+\tau\vec{t}\right)\cdot\vec{v}\,dS = 0$$

- su S_4 la velocità è diversa da zero, e l'integrale delle forze di superficie su S_4 corrisponde alla potenza meccanica scambiata con l'esterno dagli organi mobili

$$\int_{S4}\left(-p\vec{n}+\tau\vec{t}\right)\cdot\vec{v}\,dS = \dot{\mathcal{L}}$$

- su S_1 e S_2 la velocità è diversa da zero, e l'integrale fornisce un altro contributo relativo alla potenza delle forze di superficie: in particolare, in corrispondenza delle superfici S_1 e S_2 le forze dovute alla pressione compiono certamente lavoro poiché si sposta il punto di applicazione di tali forze; il corrispondente lavoro è detto lavoro di pulsione e corrisponde al lavoro che deve essere fatto per consentire l'ingresso del fluido all'interno del volume V (oppure per consentirne l'uscita). E' inoltre opportuno spezzare l'integrale separando il contributo della pressione e degli sforzi tangenziali; essendo

$$-\vec{n}\cdot\vec{v} = v_n \quad (su\ S_1)$$
$$-\vec{n}\cdot\vec{v} = -v_n \quad (su\ S_2)$$

moltiplicando e dividendo per la densità ρ il solo termine funzione della pressione si ha:

$$\int_{S_1+S_2} -p\vec{n}\cdot\vec{v}\,dS = \int_{S_1} +\frac{p}{\varrho}\varrho\,v_n\,dS - \int_{S_2}\frac{p}{\varrho}\varrho\,v_n\,dS \tag{2-37}$$

[5] Tale termine rappresenta la potenza meccanica direttamente associata allo spostamento della superficie di controllo.

e dunque i termini relativi alla potenza delle forze dovute alla pressione sulle superfici di ingresso e uscita possono essere conglobati nei termini di flusso di energia, ottenendo nel complesso:

$$\frac{d\int_V \rho\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)dV}{dt} = +\int_{S_1}\left(u+\frac{p}{\varrho}+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\rho v_n\,dS - \int_{S_2}\left(u+\frac{p}{\varrho}+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\rho v_n\,dS + \dot{\mathcal{L}} + \int_{S_1+S_2}\tau\vec{t}\cdot\vec{v}\,dS + \dot{\mathcal{Q}} \quad (2\text{-}38)$$

Introducendo la definizione di entalpia ($h = u + pv = u + p/\rho$) si ottiene:

$$\frac{d\int_V \rho\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)dV}{dt} = +\int_{S_1}\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\rho v_n\,dS - \int_{S_2}\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\rho v_n\,dS + \dot{\mathcal{L}} + \int_{S_1+S_2}\tau\vec{t}\cdot\vec{v}\,dS + \dot{\mathcal{Q}} \quad (2\text{-}39)$$

Supponiamo infine, come già fatto per la conservazione della quantità di moto, che sforzi tangenziali su S_1 e S_2 siano trascurabili, si annullano dunque gli integrali $\int_{S_1}\tau\,\vec{t}\cdot\vec{v}\,dS = 0$ e $\int_{S_2}\tau\,\vec{t}\cdot\vec{v}\,dS = 0$ e la precedente relazione diventa:

$$\frac{d\int_V \rho\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)dV}{dt} = +\int_{S_1}\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\rho v_n\,dS - \int_{S_2}\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\rho v_n\,dS + \dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{Q}} \quad (2\text{-}40)$$

Questa equazione costituisce la formulazione della conservazione della energia in assenza di forze non conservative e di sforzi viscosi sulle sezioni di ingresso e uscita, e in assenza di fenomeni di generazione di energia (a causa di reazioni chimiche e nucleari, etc.) ed esprime dunque il principio fisico: *la somma di tutte le potenze entranti nel sistema, e cioè potenza associata al flusso del fluido attraverso il volume di controllo V, potenza meccanica e potenza termica, eguaglia la velocità di variazione dell' energia del fluido racchiuso entro il volume di controllo V.*

2.3.1 Caso monodimensionale

Nel caso monodimensionale è possibile portare fuori dagli integrali i vari termini costanti sulla sezione e integrare sulle superfici S_1 ed S_2, ottenendo:

$$\frac{d\int_V \rho\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_\iota\right)dV}{dt} = +\left(h_1+\frac{v^2{}_1}{2}+\sum \varphi_{i,1}\right)\rho_1 v_{n,1} S_1 - \left(h_2+\frac{v^2{}_2}{2}+\sum \varphi_{i,2}\right)\rho_2 v_{n,2} S_2 + \dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{Q}} \qquad (2\text{-}41)$$

2.3.2 Regime stazionario

Nell'ipotesi di regime stazionario, l'energia della massa di fluido contenuta nel volume di controllo non varia nel tempo, e dunque, annullandosi la derivata a primo membro nella (2-40) l'equazione di conservazione dell'energia diventa:

$$\int_{S_1}\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\rho v_n\, dS - \int_{S_2}\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\rho v_n\, dS + \dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{Q}} = 0 \qquad (2\text{-}42)$$

2.3.3 Caso monodimensionale e regime stazionario

E' particolarmente utile la scrittura che può essere derivata in ipotesi monodimensionale e regime stazionario; evidenziando nella precedente equazione la portata massica, e ricordando che in regime stazionario dall'equazione di continuità risulta $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$, la conservazione dell'energia diventa:

$$\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)_1 \dot{m} - \left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)_2 \dot{m} + \dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{Q}} = 0 \qquad (2\text{-}43)$$

La precedente equazione può essere scritta in forma compatta raccogliendo la portata massica:

$$\Delta\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\ \dot{m} + \dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{Q}} = 0\ [J/s] \qquad (2\text{-}44)$$

in modo che, portando al secondo membro $\Delta\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)$ e dividendo per $\dot{m}$:

$$\mathsf{L} + \mathsf{Q} = \Delta\left(h+\frac{v^2}{2}+\sum \varphi_i\right)\quad [J/kg] \qquad (2\text{-}45)$$

si ottiene un'quazione in termini *per unità di massa,* in cui L e Q rappresentano il lavoro e il calore scambiati con l'esterno *per unità di massa* e h, $v^2/2$ e Φ_i sono rispettivamente l'entalpia, l'energia cinetica e il potenziale per unità di massa.

Nel caso in cui il campo gravitazionale sia l'unico campo di forze conservative presente, la precedente espressione è ulteriormente semplificabile considerando:

$$\sum \varphi_i = \varphi_{grav} \qquad (2\text{-}46)$$

Essendo in generale $\vec{f} = -grad\ \varphi$, assumendo un riferimento cartesiano x,y,z (con asse z diretto verso l'alto) ed esplicitando il gradiente in coordinare cartesiane si ha:

$$\vec{f} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad (2\text{-}47)$$

nel caso del campo gravitazionale, poiché $\vec{g}$ ha componente solo lungo l'asse z, la precedente relazione si riduce a

$$\vec{g} = -\left(\frac{\partial\varphi_{grav}}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad (2\text{-}48)$$

da cui, integrando

$$\varphi_{grav} - \varphi_{grav}(0) = -\int_0^z \vec{g}\cdot\vec{k}dz = +g\,z \qquad (2\text{-}49)$$

in cui z rappresenta la quota rispetto ad un opportuno valore di riferimento; si assume poi $\varphi_{grav}(0) = 0$, ed essendo $\varphi_{grav} = +g\,z$, si può dunque scrivere: (2-50)

$$h_1 + \frac{v^2{}_1}{2} + gz_1 + \text{L+Q} = h_2 + \frac{v^2{}_2}{2} + gz_2\ [J/kg] \qquad (2\text{-}51)$$

Questa equazione è dunque l'equazione di conservazione dell'energia in ipotesi di (i) monodimensionalità, (ii) regime stazionario, (iii) solo campo di forza gravitazionale (conservativo) e (iv) sforzi tangenziali trascurabili su S_1 ed S_2 e costituisce l'equazione che verrà comunemente utilizzata nel seguito.

<u>Nota:</u> *non è stata fatta alcuna ipotesi sul tipo di fluido: la precedente relazione vale quindi per tutti i fluidi, sia comprimibili che incomprimibili.*

Infine si osserva che, nel caso di un sistema con N sezioni di ingresso e M sezioni di uscita, sempre in regime stazionario e con solo campo gravitazionale, il potenziale φ_i presente nella (2-43) può essere esplicitato ottenendo:

$$\sum_{k=1}^{M}\left(h_{k,OUT}+\frac{v_{k,OUT}{}^2}{2}+gz_{k,OUT}\right)_1 \dot{m}_{k,OUT} - \sum_{j=1}^{N}\left(h_{j,IN}+\frac{v_{j,IN}{}^2}{2}+gz_{j,IN}\right)_2 \dot{m}_{j,IN} + \dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{Q}} = 0 \qquad (2\text{-}52)$$

2.4 Equazioni per i volumi di controllo mobili

Le equazioni viste in precedenza possono essere estese al caso dei volumi di controllo mobili e dilatabili. Pur non essendo questo caso più generale indispensabile per la successiva trattazione, si riporta per completezza (e per chi ne avesse curiosità!) nel prossimo paragrafo un breve cenno al teorema del trasporto di Reynolds e alle sue applicazioni.

2.4.1 Il teorema del trasporto di Reynolds e le relative applicazioni

Si consideri una ben definita massa fluida che fluisca attraverso un condotto: è possibile studiare questo processo sia facendo riferimento alla massa (detta massa di controllo o sistema chiuso), sia facendo riferimento al condotto (detto volume di controllo o sistema aperto). Il teorema del trasporto di Reynolds fornisce un legame tra i due approcci, ed in particolare consente di scrivere una relazione matematica tra la velocità di variazione di una certa proprietà estensiva G per una massa di controllo (sistema chiuso) e la velocità di variazione della stessa grandezza estensiva G per un volume di controllo (sistema aperto). La formulazione generale è così esprimibile:

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{SC} = \frac{d}{dt}\int_V \rho g^* dV + \int_S \rho g^* (\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n})\, dS \qquad (2\text{-}53)$$

dove gli integrali sono estesi al volume di controllo V e alla superficie di controllo S, g^*è la grandezza specifica corrispondente alla grandezza estensiva G, e $\overrightarrow{v_r} = \vec{v} - \overrightarrow{v_S}$ è la velocità relativa del fluido rispetto alla superficie di controllo S, che a sua volta si muove con velocità $\overrightarrow{v_S}$.

La precedente equazione afferma che la variazione nell'unità di tempo della grandezza G del sistema chiuso (massa di controllo) è uguale alla variazione nell'unità di tempo della grandezza G del volume di controllo più il flusso attraverso la superficie di controllo S, nell'ipotesi che, all'istante t, volume di controllo e volume della massa di controllo coincidano.

A titolo di esempio, si applichi la (2-53) alla conservazione della massa (cioè G=massa del sistema, e $g^* = 1$). Poiché, nel caso di un sistema chiuso la legge di conservazione implica che la massa non vari nel tempo, il termine a sinistra dell'uguale è nullo.

$$0 = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \int_S \rho(\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n})\, dS \qquad (2\text{-}54)$$

Spezzando l'integrale esteso alla superficie di controllo S in modo da evidenziare i termini per i quali il flusso non è nullo, e spostando tali termini dall'altra parte dell'uguale, si ottiene

$$\int_{S_1} \rho(\vec{v} - \overrightarrow{v_S}) \cdot \vec{n} dS - \int_{S_2} \rho(\vec{v} - \overrightarrow{v_S}) \cdot \vec{n} dS = \frac{d\int_V \rho dV}{dt} \qquad (2\text{-}55)$$

essendo S_1 la superficie attraverso la quale il fluido entra, S_2 la superficie attraverso la quale il fluido esce, $\vec{v}$ la velocità del fluido e $\overrightarrow{v_S}$ la velocità dei punti che appartengono alla superficie di controllo.

Come ulteriore esempio è possibile applicare la (2-53) alla conservazione della quantità di moto (cioè G= $m\vec{v}$, quantità di moto del sistema, e $g^* = \vec{v}$). In questo caso la seconda legge di Newton afferma che la variazione nell'unità di tempo della quantità di moto del sistema chiuso è uguale alla risultante delle forze agenti sul fluido, quindi per il termine a sinistra dell'uguale nella (2-53) vale

$$\left(\frac{dm\vec{v}}{dt}\right)_{SC} = Ris\,\vec{F} \tag{2-56}$$

e dunque

$$Ris\,\vec{F} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}dV + \int_S \rho\vec{v}(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})\,dS \tag{2-57}$$

Spezzando l'integrale esteso alla superficie di controllo S in modo da evidenziare i termini per i quali il flusso non è nullo, e spostando tali termini dall'altra parte dell'uguale, si ottiene

$$Ris\,\vec{F} + \int_{S_1} \rho\vec{v}(\vec{v}-\overrightarrow{v_s})\cdot\vec{n}\,dS - \int_{S_2} \rho\vec{v}(\vec{v}-\overrightarrow{v_s})\cdot\vec{n}\,dS = \frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}dV \tag{2-58}$$

essendo S_1 la superficie attraverso la quale il fluido entra, S_2 la superficie attraverso la quale il fluido esce, $\vec{v}$ la velocità del fluido e $\overrightarrow{v_s}$ la velocità dei punti che appartengono alla superficie di controllo.

Le equazioni ottenute, (2-55) e (2-58) sono del tutto analoghe alle corrispondenti equazioni ricavate in precedenza (2-5) e (2-24); si osserva però che compare negli integrali di superficie, al posto della velocità del fluido, la velocità relativa del fluido *rispetto alla superficie S che delimita il volume di controllo* , cioè $(\vec{v}-\overrightarrow{v_s})$ (per maggiori dettagli è possibile vedere (Kundu, 2012)).

Anche nel caso dell'equazione dell'energia, con analogo procedimento si ottiene che è necessario correggere i termini di flusso facendo comparire la velocità relativa del fluido rispetto alla superficie di controllo. Considerando per semplicità il caso di assenza di forze non conservative e di termini di generazione, essendo G= energia interna + energia cinetica + energia potenziale, e g*= $\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum\varphi_i\right)$, con le consuete convenzioni di segno (lavoro e calore positivi entranti) si giunge alla scrittura[6]:

$$+\int_S \left(-p\vec{n}+\tau\vec{t}\right)\cdot\vec{v}\,dS + \dot{\boldsymbol{Q}} = \frac{d}{dt}\int_V \left(u+\frac{v^2}{2}+\sum\varphi_i\right)\rho dV + \int_S \rho\left(u+\frac{v^2}{2}+\sum\varphi_i\right)(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})\,dS \tag{2-59}$$

Si può successivamente spezzare l'integrale dei termini di flusso in funzione delle caratteristiche delle superfici che concorrono a delimitare il volume V, spostando poi tali termini dall'altra parte dell'uguale.

Da ultimo si osserva che risulta verificata la regola generale enunciata all'inizio del capitolo, e cioè che la variazione della grandezza G entro il volume di controllo è uguale al trasferimento netto di G attraverso la superficie S che delimita tale volume + eventuali altri termini dovuti alla natura di G, essendo tutti i termini valutati nell'unità di tempo.

[6] Con processo inverso all'estensione dal sistema chiuso al sistema aperto, deve essere possibile ricavare da questa equazione, come caso particolare, l'equazione per un sistema chiuso: si annullano in questo caso i termini di flusso, e poiché la superficie S delimita un volume di controllo mobile e dilatabile, l'integrale delle forze di superficie può rappresentare sia un lavoro dilatativo, sia un lavoro all'albero (entrambi nell'unità di tempo), come necessariamente deve essere per un sistema chiuso.

2.4.2 Le equazioni di conservazione rispetto ad un sistema di riferimento rotante

Le equazioni discusse ai paragrafi 2.1, 2.2, 2.3 sono state ricavate per un condotto rigido e rispetto ad un sistema di riferimento fisso. Per lo studio del funzionamento delle turbomacchine sarà necessario considerare un condotto (volume di controllo) mobile, e risulta inoltre particolarmente utile la scrittura delle equazioni di conservazione in un un sistema di riferimento mobile, idealmente solidale con la turbomacchina oggetto di studio, cioè un sistema di riferimento rotante.

Nel seguito verrano ricavate le equazioni di conservazione della massa e dell'energia per il solo caso stazionario e monodimensionale. A tal fine, si considerino un sistema di riferimento fisso identificato da una terna x, y, z, e un sistema di riferimento mobile identificato da una terna x', y', z'. Il sistema mobile ruota attorno all'asse z con velocità angolare Ω costante (si veda la Figura 2.8).

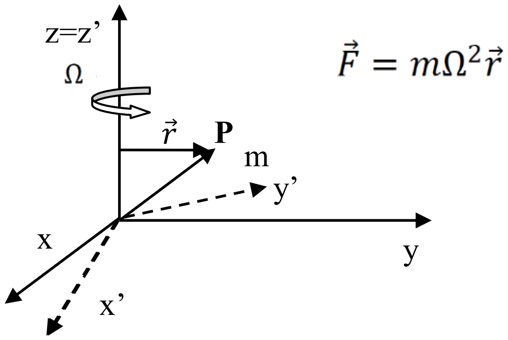

Figura 2.8 *Sistema di riferimento fisso e sistema di riferimento mobile, rotante attorno all'asse z, utilizzati per la scrittura delle equazioni.*

Un punto P, solidale con la terna rotante e posto a distanza r dall'asse di rotazione, si muove rispetto al riferimento fisso con velocità detta di trascinamento pari a

$$\vec{v}_{trasc} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \tag{2-60}$$

Se il punto P si muove rispetto alla terna mobile, un osservatore solidale con il sistema di riferimento mobile percepisce una velocità $\vec{v}_{rel}$; un osservatore solidale con il riferimento fisso percepisce invece per il punto P la velocità:

$$\vec{v}_{ass} = \vec{v}_{trasc} + \vec{v}_{rel} \tag{2-61}$$

Nell'ambito di studio delle macchine, la velocità di trascinamento è detta velocità periferica ed è indicata con $\vec{u}$, mentre la velocità relativa è tipicamente indicata con $\vec{w}$. La velocità assoluta $\vec{v}$ di un qualsivoglia punto, in moto rispetto al sistema di riferimento rotante , è dunque esprimibile, rispetto al riferimento fisso, come somma vettoriale della velocità relativa $\vec{w}$ rispetto al sistema di riferimento mobile e della velocità periferica $\vec{u}$, cioè:

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u} \tag{2-62}$$

dove:

$$\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \tag{2-63}$$

Inoltre, in un sistema di riferimento mobile, si manifestano delle forze dette "fittizie". Di conseguenza, un corpo con massa m, posto in un punto P a distanza r dall'asse di rotazione, risulterà soggetto ad una forza centrifuga pari a:

$$\overrightarrow{F_C} = m\Omega^2\vec{r} \tag{2-64}$$

e la corrispondente forza per unità di massa risulterà quindi:

$$\overrightarrow{f_C} = \Omega^2\vec{r} \tag{2-65}$$

Il campo che genera tale forza risulta essere un campo di forze conservativo, e ammette dunque un potenziale φ_c. Per il calcolo di tale potenziale, sapendo che la forza è diretta in direzione radiale, conviene assumere un sistema di coordinate cilindrico, così che dalla relazione generale

$$\vec{f} = -grad\ \varphi,$$

l'unico termine non nullo risulta essere

$$\overrightarrow{f_C} = -\left(\frac{\partial\varphi_C}{\partial r}\overrightarrow{e_r}\right)$$

Integrando si ha

$$\varphi_C - \varphi_{c(r=0)} = -\int_0^r \overrightarrow{f_C}\cdot\overrightarrow{e_r}dr = -\int_0^r \Omega^2\vec{r}\cdot\overrightarrow{e_r}dr = -\frac{\Omega^2r^2}{2}$$

Ponendo $\varphi_{c(r=0)} = 0$ e osservando che $|\vec{u}| = \Omega \cdot r$ si ottiene infine:

$$\varphi_C = -\Omega^2\frac{r^2}{2} = -\frac{u^2}{2} \tag{2-66}$$

E' a questo punto possibile formulare le equazioni di conservazione per un condotto mobile in un sistema di riferimento rotante; si consideri dunque un volume di controllo V racchiuso da una superficie S costituita da S_1 ed S_2, rispettivamente superficie di ingresso e uscita dal canale, e S_3, superficie impervia alla massa e coincidente in parte con la superficie del canale tra le pale della girante e in parte con la superficie dell'involucro (cassa), come rappresentato in figura:

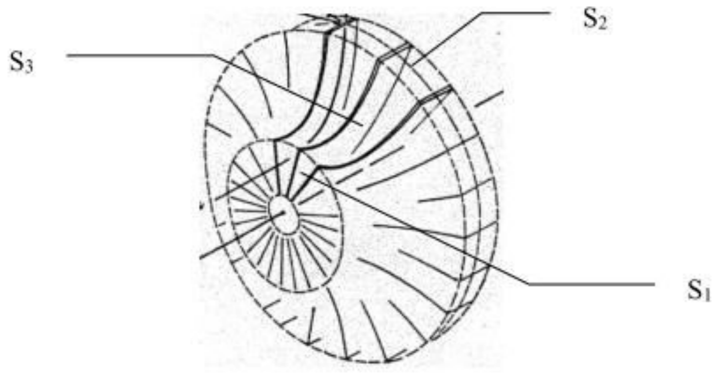

Figura 2.9 *Superfici del volume di controllo del canale mobile.*

L'equazione di conservazione della massa si scrive[7]:

$$\rho_1 w_1 S_1 = \rho_2 w_2 S_2 \tag{2-67}$$

Per la scrittura della equazione di conservazione dell'energia è invece necessario considerare che

- l'entalpia specifica e il calore scambiato non dipendono dal sistema di riferimento
- l'energia cinetica da considerare è quella nel sistema relativo $\frac{w^2}{2}$
- ci sono due campi di forze conservativi (gravitazionale e centrifugo) e dunque $\Sigma\phi_i = \phi_{grav} + \phi_c$
- se il sistema di riferimento mobile è solidale con la girante della turbomacchina allora in tale sistema di riferimento il lavoro L scambiato è nullo, *poiché nel sistema solidale con la girante le forze scambiate tra fluido e girante non spostano il loro punto di applicazione* e quindi non compiono lavoro.

Risulta dunque:

$$h_1 + \frac{w^2{}_1}{2} + gz_1 - \frac{u^2{}_1}{2} + \mathrm{Q} = h_2 + \frac{w^2{}_2}{2} + gz_2 - \frac{u^2{}_2}{2} \; [J/kg] \tag{2-68}$$

relazione valida in un sistema di riferimento rotante, solidale con la girante, per moto stazionario,in ipotesi di monodimenionalità. E' evidente che, per ragioni di simmetria, la (2-68) è valida per qualsiasi canale mobile si voglia considerare.

[7] Si osserva che tale equazione corrisponde alla (2-55) nel caso di regime stazionario: dunque l'equazione di conservazione della massa per un condotto mobile non cambia passando da un sistema di riferimento fisso ad uno mobile; diversamente avviene per l'equazione dell'energia.

Contents