Corso di Statistica per Ingegneria Fisica
Anno accademico 2020/2021

Esercitazione 3: Variabili aleatorie gaussiane

Esercizio 1. La resistenza di una bobina viene misurata con un apparecchio che introduce un errore sistematico di 0.1 ohm ed uno casuale distribuito secondo una gaussiana di deviazione standard 0.4 ohm. Se la resistenza è pari a 1.8 ohm, determinare la probabilità con cui il risultato della misurazione

(a) sarà maggiore di 1.3 ohm; *[93.319%]*

(b) sarà compreso tra 1.3 ohm e 1.6 ohm; *[15.982%]*

(c) differirà da 1.8 ohm per meno di ± 0.6 ohm. *[85.429%]*

Esercizio 2. Un'industria produce su commissione delle sbarre d'acciaio cilindriche, il cui diametro dovrebbe essere di 4 cm., ma che tuttavia sono accettabili se hanno diametro compreso tra 3.95 e 4.05 cm.

(a) Supponiamo che il diametro delle sbarre sia una variabile aleatoria normale con media 4 cm e varianza $0.09\,\text{cm}^2$.

  (1) Si determini la percentuale di sbarre il cui diametro è accettabile. *[13.498%]*

  (2) Si determini la probabilità che una sbarra scelta a caso abbia diametro inferiore a 4 cm. *[0.5]*

(b) Supponiamo ora di sapere che il diametro delle sbarre è una variabile aleatoria normale, ma di non conoscerne media e varianza. Sappiamo però da un controllo accurato che il 5% delle sbarre ha diametro inferiore al minimo tollerato e l'11.9% ha diametro superiore al massimo tollerato.
Si determini in questo caso media e deviazione standard della variabile diametro. *[$\mu = 4.0082$, $\sigma = 0.0354$]*

(c) Supponiamo infine di sapere che il diametro delle sbarre è una variabile aleatoria normale con media 4 cm, ma di non conoscerne la varianza.
Si determini per quali valori della deviazione standard la probabilità che le sbarre abbiano diametro superiore al massimo tollerato diventa minore dell'1%. *[$\sigma < 0.0215$]*

Esercizio 3. Un apparecchio dosatore riempie delle provette da 10 cl. Assumiamo che la quantità di liquido (misurata in cl) X versato in una provetta abbia una distribuzione $N(9.99,\, 0.01^2)$.

(a) Trovare la percentuale di provette fatte traboccare dal dosatore. *[15.866%]*

(b) Determinare x in modo tale che la percentuale di provette che contengono una quantità di liquido inferiore a x sia pari al 10% delle provette. *[$x = 9.9772$]*

Esercizio 4. Lo spessore, espresso in cm, di un pezzo d'acciaio prodotto dalla ditta Lames è un numero casuale gaussiano di media $\mu = 0.9$ e deviazione standard σ . La legge stabilisce che un pezzo è accettabile se il suo spessore è compreso nell'intervallo $[0.895; 0.905]$.

(a) Supponiamo che il macchinario venga regolato in modo tale che la deviazione standard dello spessore di un pezzo prodotto sia pari a 0.003. Calcolare la probabilità che un pezzo prodotto non sia a norma di legge. *[0.096]*

(b) Il proprietario della Lames non si sente tranquillo e decide di regolare diversamente la deviazione standard dello spessore di un pezzo prodotto. Calcolare il valore massimo che può dare a σ affinché al massimo il 3 % dei pezzi prodotti non sia a norma di legge. *[0.002304]*

Esercizio 5. L'altezza di una data popolazione di uomini con età compresa tra i 18 e i 65 anni segue la curva normale.

(a) Se l'altezza media fosse 165 cm ed esattamente il 5.48% della popolazione fosse più basso di 158 cm, quale percentuale di popolazione sarebbe più alto di 174 cm? *[1.97%]*

(b) Se il primo quartile dell'altezza fosse pari a 160 cm e il novantesimo percentile a 184 cm, quanto varrebbero la media e la deviazione standard dell'altezza? *[$\mu = 168.287$ cm, $\sigma = 12.276$ cm]*

Esercizio 6. La Ferrari si è convinta che, per tornare ai vertici della Formula 1, è necessario portare in squadra degli statistici e per questo si rivolge ad alcuni ingegneri energetici del Politecnico di Milano, che sono noti per essere dei bravissimi statistici. In particolare la loro attenzione è rivolta al raggio delle gomme, che si suppone essere una variabile aleatoria normale di media 33.5 cm e deviazione standard 0.4 cm. I tecnici della Ferrari sono interessati alle seguenti domande:

(a) Come è distribuita la variabile aleatoria che rappresenta il diametro di una ruota? *[$D \sim N(67.0\,,\,0.8^2$]*

(b) La FIA (Federazione Internazionale dell'Automobile) ha stabilito che, se almeno una ruota ha un diametro superiore a 68.0 cm cm, la vettura deve essere squalificata. Qual è la probabilità che la vettura di Fernando Alonso venga quindi squalificata? *[36.0221%]*

(c) I tecnici della Ferrari vogliono che questa probabilità sia inferiore al 5% e decidono quindi di apporre degli aggiustamenti alla macchina che costruisce le gomme. Supponendo che la media resti inalterata, come deve essere la deviazione standard del diametro affinché la probabilità di squalifica risulti minore del 5%? *[$\sigma < 0.44763$]*

Soluzioni di alcuni esercizi

Soluzione 1. La resistenza misurata è la variabile aleatoria

$$R = r_{\text{vera}} + e_{\text{sist}} + E_{\text{cas}} \qquad \text{(espressa in ohm)}$$

dove

$$\left.\begin{aligned} r_{\text{vera}} &= \text{valore vero della resistenza} = 1.8 \\ e_{\text{sist}} &= \text{errore sistematico} = 0.1 \end{aligned}\right\} \quad \text{costanti deterministiche}$$

$$E_{\text{cas}} = \text{errore casuale} \sim N(0, (0.4)^2) \qquad \text{variabile aleatoria}$$

Pertanto,

$$R = 1.8 + 0.1 + E_{\text{cas}} = 1.9 + E_{\text{cas}} \sim N(1.9, (0.4)^2)$$

in quanto

- R è una v.a. gaussiana, perché trasformazione affine della v.a. gaussiana E_{cas};
- $\mathbb{E}[R] = \mathbb{E}[1.9 + E_{\text{cas}}] = 1.9 + \mathbb{E}[E_{\text{cas}}] = 1.9 + 0 = 1.9$, e quindi il primo parametro di R è 1.9;
- $\mathrm{Var}(R) = \mathrm{Var}(1.9 + E_{\text{cas}}) = \mathrm{Var}(E_{\text{cas}}) = (0.4)^2$, e quindi il secondo parametro di R è $(0.4)^2$.

(Ricordare che $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$ e $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ se a, b sono costanti.)

(a) Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento "$R > 1.3$". Per farlo, standardizziamo la v.a. gaussiana R a primo membro della disequazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R > 1.3) &= \mathbb{P}(R - \mathbb{E}[R] > 1.3 - \mathbb{E}[R]) = \mathbb{P}\left(\frac{R - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R)}} > \frac{1.3 - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R)}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{R - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{1.3 - 1.9}{0.4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.3 - 1.9}{0.4}\right) = 1 - \Phi(-1.50) \\ &= 1 - (1 - \Phi(1.50)) = \Phi(1.50) = 0.93319 = 93.319\%\,. \end{aligned}$$

(Si ricordi che $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Inoltre, essendo R una v.a. assolutamente continua, non fa differenza calcolare $\mathbb{P}(R > 1.3)$ o $\mathbb{P}(R \geq 1.3)$.)

(b) La probabilità che R sia compresa tra 1.3 e 1.6 è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1.3 < R < 1.6) &= \mathbb{P}\left(\frac{1.3 - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R)}} < \frac{R - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R)}} < \frac{1.6 - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R)}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1.3 - 1.9}{0.4} < \underbrace{\frac{R - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{1.6 - 1.9}{0.4}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1.6 - 1.9}{0.4}\right) - \Phi\left(\frac{1.3 - 1.9}{0.4}\right) = \Phi(-0.75) - \Phi(-1.50) \\ &= (1 - \Phi(0.75)) - (1 - \Phi(1.50)) = (1 - 0.77337) - (1 - 0.93319) = 15.982\%\,. \end{aligned}$$

(c) Abbiamo l'uguaglianza di eventi

$$\begin{aligned}\text{“il risultato differisce da 1.8 ohm per meno di } \pm 0.6 \text{ ohm”} &= \text{“}\,|R - 1.8| < 0.6\,\text{”} \\ &= \text{“}\,-0.6 < R - 1.8 < 0.6\,\text{”} = \text{“}\,1.2 < R < 2.4\,\text{”}\end{aligned}$$

e quindi, come al punto precedente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{“il risultato differisce da 1.8 ohm per meno di } \pm 0.6 \text{ ohm”}\right) &= \mathbb{P}\left(1.2 < R < 2.4\right) \\ &= \mathbb{P}\Bigg(\frac{1.2 - 1.9}{0.4} < \underbrace{\frac{R - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{2.4 - 1.9}{0.4}\Bigg) \\ &= \Phi\left(\frac{2.4 - 1.9}{0.4}\right) - \Phi\left(\frac{1.2 - 1.9}{0.4}\right) = \Phi(1.25) - \Phi(-1.75) \\ &= 0.89435 - (1 - \Phi(1.75)) = 0.89435 - (1 - 0.95994) = 85.429\%\,.\end{aligned}$$

Soluzione 2. Supponiamo di prendere una sbarra d'acciaio a caso tra quelle prodotte dall'industria, e introduciamo la v.a.

$$X = \text{diametro della sbarra} \quad (\text{espresso in cm})\,.$$

Abbiamo l'uguaglianza di eventi

$$\text{“la sbarra è accettabile”} = \text{“}\,3.95 \leq X \leq 4.05\,\text{”}\,.$$

(a) In questo punto, l'ipotesi è

$$X \sim N(4,\, 0.09)\,.$$

(1) Si richiede

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{“la sbarra è accettabile”}\right) &= \mathbb{P}\left(3.95 \leq X \leq 4.05\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{3.95 - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \leq \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \leq \frac{4.05 - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) \\ &= \mathbb{P}\Bigg(\frac{3.95 - 4}{\sqrt{0.09}} < \underbrace{\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{4.05 - 4}{\sqrt{0.09}}\Bigg) \\ &= \Phi\left(\frac{4.05 - 4}{\sqrt{0.09}}\right) - \Phi\left(\frac{3.95 - 4}{\sqrt{0.09}}\right) = \Phi(0.167) - \Phi(-0.167) \\ &= \Phi(0.167) - (1 - \Phi(0.167)) = 2\,\Phi(0.167) - 1 = 2 \cdot 0.56749 - 1 \\ &= 13.498\%\,.\end{aligned}$$

(2) Ora dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{“la sbarra ha diametro minore di 4 cm”}\right) &= \mathbb{P}\left(X < 4\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} < \frac{4 - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{4 - 4}{\sqrt{0.09}}\Bigg) \\ &= \Phi\left(\frac{4 - 4}{\sqrt{0.09}}\right) = \Phi(0) = 50\%\,.\end{aligned}$$

C'era da aspettarselo: poiché la densità gaussiana è simmetrica rispetto alla sua media e 4 è proprio la media di X, necessariamente $\mathbb{P}(X < 4) = 1/2$.

(b) Ora le ipotesi non sono più quelle del punto (a), ma sono invece

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \text{con media } \mu \text{ e varianza } \sigma^2 \text{ entrambe incognite}$$

e

$$\mathbb{P}(X < 3.95) = 5\% \qquad\qquad \mathbb{P}(X > 4.05) = 11.9\%\,. \tag{*}$$

Dalla prima delle due equazioni (*) ricaviamo

$$0.05 = \mathbb{P}(X < 3.95) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} < \frac{3.95 - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{3.95 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{3.95 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z_{0.05} = \frac{3.95 - \mu}{\sigma}\,,$$

dove $z_{0.05}$ è il quantile di ordine 0.05 della densità normale standard $N(0, 1)$. Ricordiamo che, dato $\gamma \in [0, 1]$, il quantile di ordine γ di $N(0, 1)$ è definito dalla relazione

$$\Phi(z_\gamma) = \gamma \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad z_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma)\,.$$

Nelle tavole della normale standard sono tabulati tutti i quantili a partire da $z_{0.5} = 0$ in poi (teoricamente, $z_1 = +\infty$; in pratica, vediamo che sulle tavole l'ultimo quantile è 4.49, per il quale già $\Phi(4.49) \simeq 1.00$). I quantili z_γ sono i valori che si ricavano dai margini delle tavole; le corrispondenti probabilità $\gamma = \Phi(z_\gamma)$ sono i valori al centro delle tavole. Dal momento che sulle tavole non c'è $z_{0.05}$, dobbiamo ricavarlo dai quantili di ordine $\geq 50\%$ usando la proprietà di simmetria della normale standard:

$$z_\gamma = -z_{1-\gamma} \quad \text{per ogni } \gamma \in [0, 1] \qquad \text{equivalente a} \qquad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}\,.$$

Abbiamo infatti

$$z_{0.05} = -z_{1-0.05} = -z_{0.95} \simeq -\frac{1.64 + 1.65}{2} = -1.645\,.$$

(Poiché 0.95 si trova proprio a metà tra $1.64 = z_{0.94950}$ e $1.65 = z_{0.95053}$, per $z_{0.95}$ si prende di solito il punto medio dell'intervallo $[1.64\,, 1.65]$.) Ricapitolando, la prima delle due equazioni (*) dà

$$\frac{3.95 - \mu}{\sigma} = -1.645\,. \tag{o}$$

Dalla seconda ricaviamo invece (con passaggi simili ai precedenti)

$$0.119 = \mathbb{P}(X > 4.05) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{4.05 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4.05 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{4.05 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.119 = 0.881$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4.05 - \mu}{\sigma} = z_{0.881} = 1.18\,, \tag{oo}$$

in quanto dalle tavole

$$\Phi(1.18) = 0.88100 \quad \Leftrightarrow \quad z_{0.88100} = 1.18\,.$$

Mettendo a sistema le due condizioni (o) e (oo), troviamo

$$\begin{cases} \frac{3.95-\mu}{\sigma} = -1.645 \\ \frac{4.05-\mu}{\sigma} = 1.18 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu = 4.0082 \\ \sigma = 0.0354\,. \end{cases}$$

(c) Ora le ipotesi sono

$$X \sim N(4,\, \sigma^2) \qquad \text{con } \sigma^2 \text{ incognita}$$

e vogliamo che

$$\mathbb{P}\,(X > 4.05) < 0.01\,.$$

Deve essere pertanto

$$0.01 > \mathbb{P}\,(X > 4.05) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}\,[X]}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{4.05-4}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4.05-4}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.05}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{0.05}{\sigma}\right) > 1 - 0.01 = 0.99$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0.05}{\sigma} > z_{0.99} \simeq 2.33\,,$$

in quanto

- Φ è crescente, e quindi $\Phi(x) > \Phi(y) \quad \Leftrightarrow \quad x > y$
- $\Phi(2.33) = 0.99010 \simeq 0.99$, e quindi $z_{0.99} \simeq 2.33$ (più precisamente, $z_{0.99}$ è di poco minore di 2.33).

Risolvendo la disequazione $\frac{0.05}{\sigma} > 2.33$ troviamo che deve essere $\sigma < 0.0215$.

Soluzione 3. L'ipotesi è

$$X \sim N(9.99,\, 0.01^2)\,.$$

(a) Abbiamo

$$\mathbb{P}\,(\text{“il dosatore fa traboccare la provetta”}) = \mathbb{P}\,(X > 10) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}\,[X]}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{10-9.99}{0.01}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{10-9.99}{0.01}\right) = 1 - \Phi(1.00) = 1 - 0.84134 = 15.866\%\,.$$

(b) Vogliamo trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{P}\,(X < x) = 10\%$. Pertanto, risolviamo l'equazione

$$0.10 = \mathbb{P}\,(X < x) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}\,[X]}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{x-9.99}{0.01}\right) = \Phi\left(\frac{x-9.99}{0.01}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-9.99}{0.01} = z_{0.10} = -z_{1-0.10} = -z_{0.90} \simeq -1.28\,,$$

in quanto sulle tavole $\Phi(1.28) = 0.89973$. Risolvendo per x,

$$x = -1.28 \cdot 0.01 + 9.99 = 9.9772\,.$$

Soluzione 5. Se X è la v.a.

$$X = \text{altezza di un uomo tra i 18 e i 65 anni} \quad \text{(in cm)}\,,$$

l'ipotesi comune alle due domande dell'esercizio è

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ parametri}\,. \tag{*}$$

(a) In questo punto, si aggiungono le due ulteriori ipotesi

$$\mu = 165 \qquad\qquad \mathbb{P}(X < 158) = 5.48\%\,, \tag{o}$$

e si vuole calcolare $\mathbb{P}(X > 174)$. Per farlo, bisogna standardizzare la v.a. X, e per questo serve conoscere quanto vale la sua deviazione standard σ (la media μ è già nota). Quindi, ricaviamo innanzitutto σ dalle ipotesi (*) e (o):

$$0.0548 = \mathbb{P}(X < 158) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{158 - 165}{\sigma}\Bigg) = \Phi\left(\frac{158-165}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{7}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{7}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{7}{\sigma}\right) = 1 - 0.0548 = 0.9452\\
&\Rightarrow \quad \frac{7}{\sigma} = z_{0.9452} = 1.60\\
&\Rightarrow \quad \sigma = 4.375\,.
\end{aligned}$$

Ora, possiamo finalmente calcolare la probabilità richiesta:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 174) &= \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{174 - 165}{4.375}\Bigg) = 1 - \Phi\left(\frac{174-165}{4.375}\right) = 1 - \Phi(2.057)\\
&\simeq 1 - \Phi(2.06) = 1 - 0.98030 = 1.97\%\,.
\end{aligned}$$

(b) Dire che il primo quartile dell'altezza è pari a 160 cm significa che $\mathbb{P}(X < 160) = 25\%$. Similmente, dire che 184 cm è il novantesimo percentile dell'altezza significa che $\mathbb{P}(X < 184) = 0.90$. Quindi, le ipotesi (o) del punto (a) ora si rimpiazzano con

$$\mathbb{P}(X < 160) = 25\% \qquad\qquad \mathbb{P}(X < 184) = 90\%\,. \tag{oo}$$

Dalla prima equazione,

$$0.25 = \mathbb{P}(X < 160) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{160 - \mu}{\sigma}\Bigg) = \Phi\left(\frac{160-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{160-\mu}{\sigma} = z_{0.25} = -z_{1-0.25} = -z_{0.75} \simeq -\frac{0.67 + 0.68}{2} = -0.675\,,$$

in quanto 0.75 è praticamente a metà tra $\Phi(0.67) = 0.74857$ e $\Phi(0.68) = 0.75175$. Dalla seconda,

$$0.90 = \mathbb{P}(X < 184) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{184 - \mu}{\sigma}\Bigg) = \Phi\left(\frac{184-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{184-\mu}{\sigma} = z_{0.90} \simeq 1.28\,.$$

Mettendo a sistema le due condizioni,

$$\begin{cases} \frac{160-\mu}{\sigma} = -0.675 \\ \frac{184-\mu}{\sigma} = 1.28 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \mu = 168.287 \\ \sigma = 12.276\,. \end{cases}$$