Statistica - 4^{a} lezione (parte II)

9 marzo 2021

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)
- La f.d.r. di $N(0,1)$ si indica con Φ e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$\Phi(0.36) =$

$= \Phi(0.3 + 0.06)$

$= 0.64058$

$q_{0.64058} = 0.36$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\ 0 \qquad\qquad < \ X \qquad\qquad < \ 5.1 \qquad\qquad \right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\underbrace{3.2}_{\mu},\ 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\begin{matrix} 0 - 3.2 \\ \end{matrix} < \begin{matrix} X - \mu \\ \end{matrix} < \begin{matrix} 5.1 - 3.2 \\ \end{matrix} \right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\, 3.2 \,,\, \underbrace{7.6}_{\sigma^2})$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}} \right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0{,}1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}} \right) \\
&= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\
&= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)
\end{aligned}$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ \ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327

$$\Phi(0.689) =$$

$$= \Phi(0.6+0.09)$$

$$= 0.75490$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ \ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

$$= 0.75490$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774

$$\Phi(-1.161) =$$

$$= 1 - \Phi(1.161)$$

$$= 1 - 0.87698$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2\ ,\ 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

$$= 0.75490 - (1 - 0.87698)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774

$$\Phi(-1.161) =$$

$$= 1 - \Phi(1.161)$$

$$= 1 - 0.87698$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}} \right) \\
&= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\
&= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\
&= 0.75490 - (1 - 0.87698) \\
&= 0.63188 = 63.188\%
\end{aligned}$$

Definizione

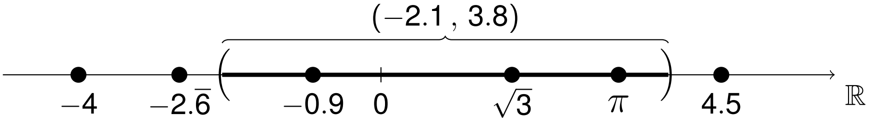
Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

S è un insieme discreto quando tutti i suoi punti sono isolati

$\Rightarrow$ S è finito o al più numerabile

ESEMPIO: $S = \{-4,\ -2.\overline{6},\ -0.9,\ \sqrt{3},\ \pi,\ 4.5\}$ $\qquad I = (-2.1\,,\,3.8)$



Si richiede $\mathbb{P}(X \in (-2.1\,,\,3.8)) = \mathbb{P}\left(X \in \{-0.9,\ \sqrt{3},\ \pi\}\right)$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R})$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0, 1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0, 1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k) \quad$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \displaystyle\sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

con $I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

$$\overset{(3)}{=} \mathbb{P}(X = k_1) + \ldots + \mathbb{P}(X = k_n) \qquad \text{con } I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

$$= \mathbb{P}(X = k_1) + \ldots + \mathbb{P}(X = k_n) \qquad \text{con } I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$$

$$= \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0,1]$ per ogni $k \in S$ (positività)

  perché $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0,1]$ per ogni $k \in S$ (positività)
- $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$ (normalizzazione)

  perché $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0,1]$ per ogni $k \in S$ (positività)
- $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$ (normalizzazione)

$\left.\begin{array}{l} \text{(positività)} \\ \text{(normalizzazione)} \end{array}\right\}$ proprietà fondamentali

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} p_X(k) = \mathbb{P}\,(X = k) = \mathbb{P}\,(\text{“uscirà } k\text{”}) \\ \text{tutti i } k \in S \text{ sono equiprobabili} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S$$

Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{array}{c} p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{"uscirà } k\text{"}) \\ \text{tutti i } k \in S \text{ sono equiprobabili} \end{array}}_{\Downarrow \atop p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S} \qquad \sum_{k \in S} p_X(k) = 1}_{\Downarrow}$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1] \\ p_X(k) = \dfrac{1}{6} \quad \forall k \in S \end{array}$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1,2,3,4,5,6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = ???$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3,4\}} p_X(k)$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$
$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1,2,3,4,5,6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$$

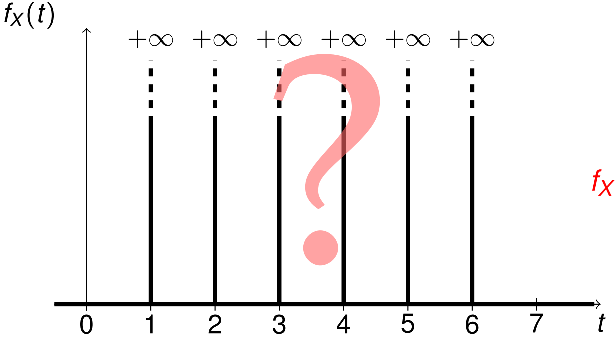
$$\mathbb{P}\,(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k\in\{3,4\}} p_X(k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



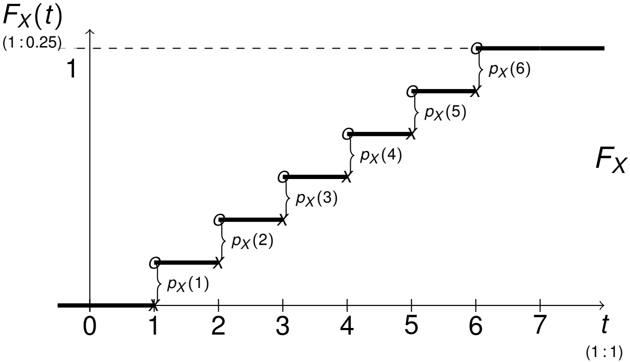
f_X non esiste!!!

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



$$F_X(t) = \sum_{\substack{k \le t \\ k \in S}} p_X(k)$$

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\displaystyle\int_I \dots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\displaystyle\sum_{k\in I\cap S} \dots p_X(k)$

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\displaystyle\int_I \ldots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\displaystyle\sum_{k \in I \cap S} \ldots p_X(k)$

Definizioni

Il *valore atteso* e la *varianza* di una v.a. discreta X sono i numeri reali

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) \qquad \mathrm{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2\, p_X(k)$$

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\displaystyle\int_I \dots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\displaystyle\sum_{k\in I\cap S} \dots p_X(k)$

Definizioni

Il *valore atteso* e la *varianza* di una v.a. discreta X sono i numeri reali

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in S} k\, p_X(k) \qquad \mathrm{var}[X] = \sum_{k\in S} (k - \mathbb{E}[X])^2\, p_X(k)$$

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{k\in S} g(k)\, p_X(k)$$

Valgono le stesse proprietà e gli stessi risultati del caso continuo

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

Variabili aleatorie costanti

$X = c \qquad$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \to [0, 1]$$

Variabili aleatorie costanti

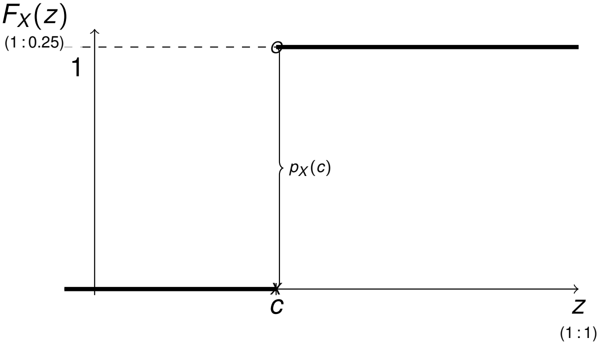
$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$



Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k \, p_X(k)$

Variabili aleatorie costanti

$$X = c \qquad \text{qualunque sia il risultato dell'esperimento}$$

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = c \cdot p_X(c)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = c \cdot p_X(c)$

  $= c \cdot 1 = c$

Variabili aleatorie costanti

$X = c \qquad$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 \, p_X(k)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ &p_X(c) = 1 \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 \, p_X(k) = (c - c)^2 \cdot p_X(c)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 p_X(k) = (c - c)^2 \cdot p_X(c)$

  $= (c - c)^2 \cdot 1 = 0$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = 0$

$$\mathrm{var}[X] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ è una costante}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{0,1\} \to [0,1] \\ & p_X(0) = \mathbb{P}\left(X = 0\right) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \\ & p_X(1) = \mathbb{P}\left(X = 1\right) \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{0,1\} \to [0,1] \\ & p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \\ & p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}\left(X = 0\right) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}\left(X = 1\right) = \mathbb{P}\left(E\right) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}\left(E\right)$$

p_X si chiama densità *bernoulliana di parametro q* e si scrive

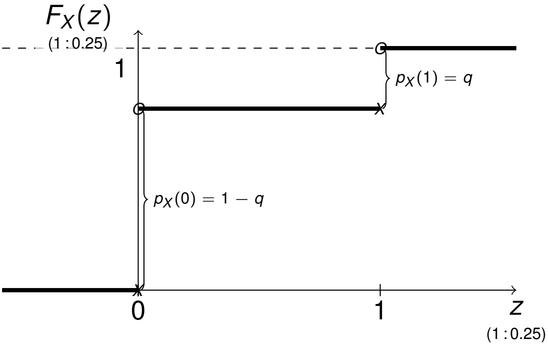
$$X \sim B(1, q)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$



Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k \, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}\left(X = 0\right) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}\left(X = 1\right) = \mathbb{P}\left(E\right) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}\left(E\right)$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\right] &= \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) \\ &= 0 \cdot (1 - q) + 1 \cdot q \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) \\ &= 0 \cdot (1 - q) + 1 \cdot q \\ &= q \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$ perché $X^2 = X$ $\begin{pmatrix} 1^2 = 1 \\ 0^2 = 0 \end{pmatrix}$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$

  $= q - q^2$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{0,1\} \to [0,1] \\ & \left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E) \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $$\begin{aligned} \mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= q - q^2 \\ &= q(1-q) \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = q(1-q)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = q(1 - q)$

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

Vettori aleatori

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4^{o} studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17^{o} studente

$Y_4 =$ peso del 4^{o} studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17^{o} studente

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4º studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17º studente

$Y_4 =$ peso del 4º studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17º studente

Tra loro le variabili alatorie si possono sommare, moltiplicare ecc. :

$$X + Y \qquad\qquad XY \qquad\qquad \dots$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X, Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)**):**

$$\mathrm{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)**):**

$$\operatorname{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

$$\overset{\text{(I)}}{=} \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])\}^2\right]$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)**):**

$$\mathrm{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X]) + (Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right]$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[X+Y] &= \mathbb{E}\left[\{(X+Y)-\mathbb{E}[X+Y]\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X])+(Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2+(Y-\mathbb{E}[Y])^2+2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]
\end{aligned}
$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}[X+Y] &= \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X]) + (Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2 + 2\,(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right] \\
&\overset{(I)}{=} \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] + \mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right] + 2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]
\end{aligned}$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$\operatorname{var}[X+Y] =$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]}_{\operatorname{var}[X]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]}_{\operatorname{var}[Y]} + \underbrace{2\,\mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\Big]}_{\operatorname{cov}[X,Y]}$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Per n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right]$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X, Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

Per n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right]$$

Come mi sbarazzo di $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right]$?