Corso di Statistica per Ingegneria Fisica
Anno accademico 2020/2021

Esercitazione 8 - Test d'ipotesi per media, varianza e proporzione di una popolazione

Esercizio 1. Per decidere se sia il caso di revisionare i propri impianti, una nota marca di pasta decide di verificare l'attendibilità del peso dichiarato sulle proprie confezioni di spaghetti. Su un campione di 60 scatole da 500 g viene trovata una media campionaria di 496 g. Si supponga che la quantità di spaghetti contenuta in una confezione, espressa in grammi, possa essere descritta con una variabile normale di media μ e di varianza $200\,\mathrm{g}^2$, nota da precedenti indagini.

(a) Si introduca un opportuno test statistico e si tragga una conclusione al livello di significatività del 1%, 5% e 10%. *[Test per $H_0 : \mu = 500$ vs. $H_1 : \mu \neq 500$. Non si rifiuta H_0 al livello 1%, ma la si rifiuta ai livelli 5% e 10%.]*

(b) Si calcoli il minimo livello di significatività con cui si sarebbe giunti alla revisione degli impianti. *[2.8% .]*

(c) Per quale valore di $\mu \in \{490, 493.5, 496, 497.1\}$ è maggiore la probabilità di errore di seconda specie dei test costruiti al punto (a)? *[$\mu = 497.1$]*

Si supponga ora che gli stessi dati siano stati ottenuti in un'indagine condotta da un'associazione di consumatori.

(d) Possono i consumatori concludere con un opportuno test statistico al livello $\alpha = 1\%$ che le confezioni contengono meno di quanto dichiarato? *[Test per $H_0 : \mu = 500$ vs. $H_1 : \mu < 500$. Non si rifiuta H_0 al livello 1%.]*

Esercizio 2. Una certa ditta produce filo spinato in matasse nominalmente da 100 m l'una, ma la cui lunghezza X in realtà è una variabile aleatoria distribuita secondo la densità $N(\mu, 4)$.

(a) Scrivere la regione critica di un test di significatività α per sottoporre a verifica le ipotesi

$$H_0 : \ \mu = 100 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \ \mu \neq 100$$

sulla base di un campione di numerosità n. *[$RC(\alpha) = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{2} \left| \overline{X}_n - 100 \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$]*

Vengono esaminate 10 matasse, rilevando le lunghezze:

$$97.8 \quad 96.5 \quad 99.6 \quad 102.5 \quad 100.9 \quad 102.3 \quad 98.3 \quad 103.1 \quad 98.7 \quad 104.0\,.$$

(b) Al livello di significatività $\alpha = 5\%$, si può rifiutare l'ipotesi nulla?
[$\frac{\sqrt{n}}{2} |\overline{x}_n - 100| = 0.585 \not> z_{0.975} = 1.96 \Rightarrow$ Non si può rifiutare H_0.]

(c) Determinare, sulla base dei dati osservati, il p-value del test. *[55.856%]*

Esercizio 3. In un processo chimico viene utilizzato come reagente una soluzione il cui pH deve necessariamente avere valore $\mu > 8.20$; in caso contrario, infatti, il processo non può avvenire. Il metodo usato per determinare il pH della soluzione fornisce misurazioni che sono distribuite secondo una normale con media uguale a μ e deviazione standard uguale a 0.02. Il campione su cui ci baseremo sono 25 di tali misurazioni.

(a) Scrivere le ipotesi statistiche di un test in cui, coerentemente con quanto detto sopra, l'errore più grave consista nel ritenere $\mu > 8.20$ quando in realtà ciò non è vero. *[$H_0 : \mu \leq 8.20$ vs. $H_1 : \mu > 8.20$]*

(b) Se per testare le ipotesi statistiche del punto (a) usiamo la regione critica $RC = \{\bar{X}_{25} > 8.2093\}$, qual è il livello di significatività del nostro test? *[$\alpha = 1.0036\%$]*

(c) Calcolare la probabilità di errore di seconda specie del test del punto (b) quando:

(1) $\mu = 8.2093$; *[50%]*

(2) $\mu = 8.215$. *[7.7078%]*

(d) Calcolare la potenza del test del punto (b) quando:

(1) $\mu = 8.2093$; *[50%]*

(2) $\mu = 8.215$. *[92.2922%]*

(e) Eseguire il test del punto (b) sapendo che la media campionaria delle 25 misurazioni ha preso il valore $\bar{x}_{25} = 8.206$. *[Non si può rifiutare H_0]*

Esercizio 4. In uno studio clinico si vogliono osservare le concentrazioni di colesterolo totale, espresse in mg/dl, in n pazienti a cui viene somministrato il nuovo farmaco Colmeno. Supponiamo che i valori $X_1, \dots, X_n$ di tali concentrazioni siano variabili aleatorie indipendenti e con densità gaussiana di media μ incognita e varianza $50\,(\text{mg/dl})^2$.

(a) Scrivere ipotesi nulla, ipotesi alternativa e regione critica al livello α di un test statistico volto a dimostrare che la concentrazione di colesterolo media, in un paziente che assuma il farmaco Colmeno, è inferiore a 200 mg/dl. *[$H_0 : \mu \geq 200$ vs. $H_1 : \mu < 200$; $RC(\alpha) = \left\{ \frac{\bar{x}-200}{\sigma}\sqrt{n} < -z_{1-\alpha} \right\}$]*

(b) Scegliere il livello α e la numerosità n del campione, affinché il test impostato al punto (a) abbia una probabilità di errore di primo tipo pari al 5% e una potenza, nel caso in cui $\mu = 190$ mg/dl, almeno del 90%. *[$\alpha = 0.05, n \geq 5$]*

(c) Se su 10 pazienti si è osservata una media campionaria pari a 198.5 mg/dl, stabilire quale conclusione si può trarre ad un livello del 5%. *[Non si può rifiutare H_0]*

Esercizio 5. In uno studio atmosferico si sono misurate, su 8 diversi campioni di aria di una certa città, le seguenti concentrazioni della sostanza tossica COUGH (espressi in microgrammi per metro cubo, μg/m^3):

$$2.3 \quad 1.7 \quad 3.2 \quad 2.1 \quad 2.3 \quad 2.0 \quad 2.2 \quad 1.2\,.$$

(a) Utilizzando stimatori non distorti, fornire una stima puntuale della media e della varianza della concentrazione di COUGH nell'atmosfera. *[$\widehat{\mu} = 2.125$; $\widehat{\sigma^2} = 0.325$]*

Si assuma ora che la concentrazione di COUGH abbia una distribuzione normale. Recenti studi clinici hanno dimostrato che il COUGH diventa pericoloso per la salute dell'uomo quando la sua concentrazione media nell'aria è superiore a $2.7\,\mu$g/m^3.

(b) Utilizzando un opportuno test statistico al 5% di significatività, stabilire se i dati raccolti consentono di affermare che l'aria da cui provengono i campioni non è dannosa per la salute dell'uomo. *[Test per le ipotesi $H_0 : \mu \geq 2.7$ vs. $H_1 : \mu < 2.7$. Si rifiuta H_0 al livello del 5%.]*

(c) Calcolare il p-value del test del punto precedente. Con un tale p-value, vi sentireste tranquilli a respirare l'aria da cui provengono i campioni? *[1% < p-value < 2.5%. Mi sentirei abbastanza tranquillo.]*

(d) Supponete invece che i recenti studi clinici dimostrino che il COUGH diventa pericoloso quando la sua concentrazione media nell'aria supera i $2.4\,\mu\text{g/m}^3$. Come cambia il p-value del test precedente? Vi sentireste sempre tranquilli a respirare l'aria da cui provengono i campioni? *[p-value* $> 10\%$. *Non mi sentirei affatto tranquillo.]*

Esercizio 6. Dall'esperienza è noto che il numero di guasti a un certo apparecchio è in media di 3 alla settimana. Nel corso dell'ultimo anno ci sono stati 234 guasti in tutto, con una deviazione standard campionaria del numero di guasti alla settimana pari a 1.8 .
Si può affermare che il numero di guasti è aumentato in modo significativo rispetto agli anni precedenti? *[Sì. Perché?]*

Esercizio 7. La concentrazione dello zinco nell'acqua di Lago Lungo è normalmente distribuita. Un campione di cinque misurazioni indipendenti fornisce i seguenti risultati (in mg/m^3):

$$10.20 \quad 9.85 \quad 10.15 \quad 9.97 \quad 10.40\,.$$

(a) Stimare media e varianza della concentrazione dello zinco nell'acqua di Lago Lungo. *[*$\overline{x}_5 = 10.114$; $s^2 = 0.04523$*]*

(b) I dati permettono di concludere che il valore della media è diverso da 10 mg/m^3? Rispondere effettuando un test a livello di significatività $\alpha = 1\%$, 5% e 10%. *[Test per le ipotesi* $H_0 : \mu = 10$ *vs.* $H_1 : \mu \neq 10$. *In nessun caso si rifiuta* H_0.*]*

(c) Valutare il p-value del test del punto (b). *[*$0.2 <$ *p-value* < 0.3 *(valore esatto: p-value* $= 0.297$*).]*

Esercizio 8. L'altezza media dei soldati di leva di un certo paese era di 170 cm nel 1950. Su 100 reclute nel 1960 la media campionaria era $\overline{x} = 171.2$ cm con una varianza campionaria $s^2 = 15.9\ \text{cm}^2$.

(a) Con significatività $\alpha = 5\%$, si può dire che l'altezza media sia cambiata? *[Sì. Perché?]*

(b) Con significatività $\alpha = 1\%$ si può dire che l'altezza media sia aumentata? *[Sì. Perché?]*

(c) Calcolare il p-value del test del punto (b). C'è forte evidenza che l'altezza media sia aumentata? *[p-value* $\simeq 0.131\%$. *Sì, molto forte.].*

Esercizio 9. L'etichetta delle bottiglie di champagne Veuve Coquelicot dichiara un contenuto di 730 ml. Un'associazione di consumatori decide di controllare questa affermazione e su 81 bottiglie esaminate riscontra una media campionaria $\bar{x} = 726\,\text{ml}$ ed una varianza campionaria $s^2 = 625\,\text{ml}^2$. Supponendo che la quantità di champagne contenuta in ogni bottiglia si possa modellizzare con una variabile aleatoria normale, si può concludere (al livello di significatività $\alpha = 5\%$) che in media le bottiglie contengono meno di quanto dichiarato? *[Test per le ipotesi* $H_0 : \mu = 730$ *vs.* $H_1 : \mu < 730$. *Non si può rifiutare* H_0.*]*

Esercizio 10. Per ottenere il marchio "DOC" dal consorzio dei produttori di vino della sua zona, un viticoltore deve dimostrare che la percentuale media di alcool contenuta nel suo vino è maggiore di 13 cl/l. Misurando il grado alcoolico in cinque bottiglie da lui prodotte, si rilevano i valori (in cl/l):

$$12.78 \qquad 15.83 \qquad 13.25 \qquad 13.81 \qquad 14.24\,.$$

(a) Supponendo che il grado alcolico X di ogni bottiglia sia normalmente distribuito, si effettui un test al livello di significatività del 5% per stabilire se in base a questi dati c'è evidenza che il produttore abbia diritto al marchio DOC. *[Non c'è evidenza.]*

(b) Supponendo in più di sapere che la deviazione standard di X è pari a 1, si ripeta il test precedente. *[C'è evidenza.]*

(c) Nelle situazioni dei punti (a) e (b), si calcoli il p-value. *[Nel punto (a),* $5\% <$ *p-value* $< 10\%$. *Nel punto (b), p-value* $= 1.405\%$.*]*

Esercizio 11. Una lamentela tipica degli utenti di file su server è la forte (alta) varianza σ^2 del tempo di risposta (che misuriamo in millisecondi quadrati, ms^2). La Yasdam sta valutando la possibilità di sostituire il vecchio server, il cui tempo di risposta ha varianza pari a $\sigma^2 = 20\,\mathrm{ms}^2$, con uno nuovo. Prima di procedere alla sostituzione, però, vuole essere abbastanza sicura che il tempo di risposta del nuovo server abbia effettivamente varianza minore di $20\,\mathrm{ms}^2$. Decide quindi di misurare un campione casuale di n nuovi tempi di risposta, in base al quale stabilire se vale la pena di fare l'acquisto oppure no. Si assuma che i tempi di risposta abbiano densità normale.

(a) Aiutate la Yasdam a decidere se acquistare il nuovo server o meno, impostando un opportuno test d'ipotesi al livello α basato sul campione di numerosità n. Si indichino ipotesi nulla, ipotesi alternativa, statistica test e regione critica. *[*$H_0 : \sigma^2 \geq 20 =: \sigma_0^2$ *vs.* $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$*; statistica test* $X_0^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}$, *dove* S_n^2 *è la varianza campionaria;* $\mathrm{RC}(\alpha) = \{(X_1, \ldots, X_n) : X_0^2 < \chi^2_\alpha(n-1)\}$.*]*

Vengono quindi misurati 51 tempi di risposta del server proposto alla Yasdam, trovando una varianza campionaria di $16.3\,\mathrm{ms}^2$.

(b) Si valuti il p-value dei dati raccolti. *[*$0.15 <$ *p-value* < 0.20*]*

(c) È il caso di procedere all'acquisto? *[No.]*

Esercizio 13. In un campione di 170 misure della temperatura di ebollizione di un certo liquido si è trovata una media campionaria $\bar{x} = 128.2°$ C, con una varianza campionaria $s^2 = 0.126°\,\mathrm{C}^2$. Supponendo che le osservazioni provengano da una popolazione normale con media μ e varianza σ^2 entrambe incognite:

(a) Qual è il livello di significatività minimo che porta a rifiutare l'ipotesi nulla che $\sigma^2 \geq 0.15°\,\mathrm{C}^2$? *[*$6.552\%$.*]*

(b) Al livello di significatività del 5%, i dati mostrano evidenza del fatto che $\sigma^2 < 0.15°\,\mathrm{C}^2$? *[No.]*

(c) Si definisca, si determini e si rappresenti graficamente la funzione di potenza del test al livello di significatività del 5% svolto nel punto precedente. *[*$\pi(\sigma^2) = F_{\chi^2(169)}(\frac{20.948}{\sigma^2})$, *definita quando* σ^2 *sta nell'intervallo* $(0\,,\,0.15)$. *È una funzione decrescente in* σ^2, *con* $\lim_{\sigma^2 \to 0^+} \pi(\sigma^2) = 1$ *e* $\pi(0.15) = 0.05$.*]*

(d) Quanto vale tale potenza in corrispondenza di $\sigma^2 = 0.11°\,\mathrm{C}^2$? *[*$87.698\%$*]*

Esercizio 14. La ditta Baltic Sea produce macchine per l'inscatolamento di caviale. A causa delle fluttuazioni casuali, la quantità di caviale dosata dalle macchine è una variabile aleatoria X gaussiana con media μ e varianza σ^2 entrambe incognite. Prima di procedere all'acquisto di una di queste macchine, controllo le quantità X_i (misurate in grammi) di caviale contenute in un campione casuale di 10 scatolette, ottenendo

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 300.6 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 9071.1$$

Per me l'errore più grave consiste nell'acquistare una macchina che abbia un'imprecisione (= deviazione standard di X) effettiva maggiore o uguale di 2 g. Sono disposto a correre il rischio che questo succeda solo con una probabilità massima del 2.5%.

(a) Impostate un opportuno test sulla varianza specificando: ipotesi nulla, ipotesi alternativa e la regione critica del test. *[*$H_0 : \sigma^2 \geq 4$ *vs.* $H_1 : \sigma^2 < 4$*;* $\mathrm{RC}(2.5\%) = \{(X_1, \ldots, X_{10}) : \frac{9S^2}{4} < 2.7004\}$, *dove* S^2 *è la varianza campionaria.]*

(b) Fornite una stima puntuale della varianza σ^2. *[*$\widehat{\sigma^2} = 3.896$*.]*

(c) Quale decisione prendete nel test del punto (a)? *[Non si può rifiutare* H_0*.]*

(d) Fornite un intervallo entro cui cade la potenza del test del punto (a) quando $\sigma^2 = 1.5$. *[*$0.25 < \pi(1.5) < 0.50$*]*

Esercizio 15. I rappresentanti degli studenti del Politecnico propongono al Consiglio di Facoltà che l'1% delle tasse da loro pagate sia destinato a un'Università di un paese del terzo mondo. Per dimostrare che la proposta è condivisa da una gran parte dei loro rappresentati, i rappresentanti presentano al Consiglio i risultati di un'intervista fatta a 472 studenti, di cui ben 384 si sono dichiarati favorevoli. I rappresentanti sono convinti che ciò provi che almeno il 75% di tutti gli studenti è favorevole alla proposta; tuttavia, uno di loro che ha studiato Statistica preferisce effettuare un test d'ipotesi prima di trarre conclusioni affrettate.

(a) Si imposti un test opportuno (motivando la risposta) e lo si esegua al livello di significatività del 10%. *[Test per le ipotesi* $H_0 : p \leq 0.75$ *vs.* $H_1 : p > 0.75$. *Si rifiuta* H_0 *al* 10%*.]*

(b) Si determini il p-value del test e si commenti il risultato ottenuto. *[p-value* $= 0.00071$*.]*

(c) Calcolare la probabilità che il test al 10% del punto (a) induca erroneamente a credere che meno del 75% degli studenti è favorevole alla proposta, quando in realtà la percentuale di favorevoli è dell'80%. *[*0.09176*.]*

Esercizio 16. Su 2350 cittadini intervistati, 1908 sono favorevoli alla costruzione di un nuovo cinema multisala.

(a) Al livello di significatività del 5%, il sondaggio mostra evidenza del fatto che almeno l'80% di tutti i cittadini è favorevole al nuovo cinema? *[No.]*

(b) Calcolare il p-value del test eseguito al punto (a). *[p-value* $= 7.493\%$*.]*

(c) Calcolare la potenza del test al livello del 5% svolto al punto (a) quando la vera percentuale di cittadini favorevoli è l'83%. *[*$\pi(0.83) = 98.300\%$*.]*

Esercizio 17. Una certa pianta produce piselli che possono essere verdi o gialli. Secondo un classico modello genetico, la proporzione p dei piselli verdi deve essere pari a 0.75, mentre secondo un nuovo modello genetico dovrebbe essere pari a 0.8. Si vuole quindi verificare l'ipotesi H_0: $p = 0.75$ contro H_1: $p = 0.8$, esaminando un campione (casuale e numeroso) di n di questi piselli. Indicando con $\bar{X}_n$ la frazione di piselli verdi trovati nel campione, si intende usare il test di regione critica

$$\mathrm{RC} = \left\{ \bar{X}_n > 0.75 + \frac{0.71231}{\sqrt{n}} \right\}.$$

(a) Si determini la probabilità α di commettere un errore di *prima* specie esaminando un campione di $n = 100$ piselli. *[*$\alpha = 5\%$*]*

(b) Si determini la probabilità β di commettere un errore di *seconda* specie esaminando un campione di $n = 100$ piselli. *[*$\beta_{100} = 70.194\%$*]*

(c) Si calcoli quanto deve essere numeroso il campione se si vuole $\beta < 10\%$. *[*$n \geq 600$*]*

Viene esaminato un campione di 999 piselli, trovandone 777 verdi e 222 gialli.

(d) Si dica quale modello genetico risulta più corretto in base al test proposto. *[Il nuovo modello]*

Esercizio 18. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale da una distribuzione di Bernoulli di parametro θ, e indichiamo con $\bar{X}_n$ la sua media campionaria. Si vogliono verificare le ipotesi

$$H_0 : \theta \leq 1/2 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \theta > 1/2 \,.$$

(a) Sia $n = 2$. Per verificare H_0 contro H_1 viene proposto un test con regione critica

$$\mathrm{RC} = \{\bar{x}_2 \geq 1\} \,.$$

Al variare di θ, si determinino la probabilità di errore di primo tipo e quella di secondo tipo. Quanto vale la massima probabilità di commettere un errore di primo tipo? *[Se $\theta \leq 1/2$, si ha P_θ(Errore I tipo) $= \theta^2$. Se $\theta > 1/2$, si ha P_θ(Errore II tipo) $= 1 - \theta^2$. La massima probabilità di commettere l'errore di primo tipo è $\alpha = 1/4$.]*

(b) Sia ora $n = 1000$. Si determini k in modo tale che

$$\mathrm{RC} = \{\bar{x}_{1000} \geq k\}$$

sia la regione critica di un test di livello $\alpha = 5\%$ per verificare H_0 contro H_1. *[$k = 0.526$]*

Esercizio 19. Un lotto di molte migliaia di pezzi viene ritenuto inaccettabile dalla ditta acquirente se contiene più del 10% di pezzi difettosi. Pertanto, prima di procedere all'acquisto, viene sottoposto a controllo un campione di 100 pezzi. Sia m il numero massimo di pezzi difettosi tra i 100 collaudati per cui si decide comunque di acquistare l'intero lotto. Come si deve scegliere m affinché sia inferiore al 5% la probabilità di accettare un lotto con più del 10% di pezzi difettosi? *[$m = 5$]*