Corso di Statistica per Ingegneria Fisica
Anno accademico 2020/2021

Esercitazione 4: Variabili Aleatorie Discrete

Esercizio 1. I 5˙000 biglietti di una lotteria costano 6 euro l'uno. In palio ci sono: 1 premio da 4˙000 euro, 3 da 1˙000 euro, 95 da 100 euro e 425 da 5 euro. Si indichino con X la vincita corrispondente ad un biglietto acquistato e con Y il guadagno.

(a) Qual è la vincita media attesa? [$\mathbb{E}[X] = 3.725$]

(b) Qual è il guadagno medio atteso? [$\mathbb{E}[Y] = -2.275$]

(c) Qual è il guadagno più probabile? [$Moda(Y) = -6$]

(d) Quanto valgono le varianze di X ed Y? [$Var(X) = Var(Y) = 3978.25$]

(e) Qual è la probabilità di perdere? [$\mathbb{P}(Y < 0) = 0.9802$]

Esercizio 2. Si consideri la variabile aleatoria discreta X con legge data dalla funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ 1/3\,, & 0 \leq x < 1\,, \\ 5/6\,, & 1 \leq x < 3\,, \\ 1\,, & x \geq 3\,, \end{cases}$$

(a) Si calcoli la densità di X. [$p_X(0) = 1/3$, $p_X(1) = 1/2$, $p_X(3) = 1/6$]

(b) Si calcoli il valore atteso e la varianza di X. [$E[X] = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 1$]

(c) Si calcoli la densità di $Y = \sqrt{X}$. [$p_Y(0) = 1/3$, $p_Y(1) = 1/2$, $p_Y(\sqrt{3}) = 1/6$]

(d) Si calcoli il valore atteso e la varianza di $Y = \sqrt{X}$. [$E[Y] = 0.789$, $\mathrm{Var}(Y) = 0.377$]

Esercizio 3. Si vuole costruire un gioco equo con il lancio di un dado non truccato. Sia X il risultato del lancio e sia Y la corrispondente somma vinta o persa al gioco. Se $X = 1$ allora $Y = -20$ euro, se $X = 2$ o 3 allora $Y = -\bar{y}$ euro, se $X = 4$ o 5 allora $Y = 0$ euro, se infine $X = 6$ allora $Y = 40$ euro. Si scelga $\bar{y}$ in modo tale che il gioco sia effettivamente equo ($E[Y] = 0$) e, in corrispondenza di tale valore, si determinino la densità di Y e la sua moda (valore più probabile). [$\bar{y} = 10$*; Valori più probabili sono -10 e 0.*]

Esercizio 4. Si consideri la variabile aleatoria discreta X con legge data dalla funzione di massa di probabilità

x_i	-5	-3	-1	0	1	3
$f(x_i)$	0.1	0.25	0.05	0.25	0.15	0.2

Determinare

(a) media e deviazione standard di X; *[-0.55; 2.539]*

(b) la probabilità di avere $X > 1$; *[0.2]*

(c) la probabilità di avere $X^2 > 1$; *[0.55]*

(d) distribuzione, media e deviazione standard di X^2; [$E[X^2] = 6.75$; $\sigma_{X^2} = 7.32$]

(e) i grafici delle funzioni di ripartizione di X e X^2.

Esercizio 5. Alla roulette si può puntare su un qualunque numero intero tra 0 e 36, e tutti i numeri sono equiprobabili. I numeri sono colorati secondo la seguente tabella:

rossi	neri	verdi
$1, 3, 5, 7, 9, 12,$ $14, 16, 18, 19, 21, 23,$ $25, 27, 30, 32, 34, 36$	$2, 4, 6, 8, 10, 11,$ $13, 15, 17, 20, 22, 24$ $26, 28, 29, 31, 33, 35$	0

Voi decidete di giocare alla roulette puntando sempre sul rosso. Si calcolino:

(a) la probabilità di vincere in una singola giocata; *[18/37]*

(b) la probabilità di perdere 5 volte su 5; *[0.0357]*

(c) il numero più probabile ed il numero atteso di vincite su 5 giocate; *[moda = 2; media = 2.432]*

(d) la probabilità di vincere almeno 2 volte su 5. *[0.7952]*

(e) Cosa cambierebbe decidendo invece di puntare alternativamente sul rosso e sul nero? *[Niente]*

Esercizio 6. Una compagnia aerea dispone di due tipi di aerei, uno da 20 posti e un altro da 10 posti. Poiché si sa che i passeggeri che prenotano poi nel 10% dei casi non si presentano, la compagnia accetta fino a 22 prenotazioni sui voli da 20 posti, e fino a 11 su quelli da 10.
Con quale dei due tipi di aereo è maggiore il rischio di dover lasciare a terra almeno un passeggero che ha regolarmente prenotato in un volo in cui si è accettato il massimo di prenotazioni? *[Rischio sull'areo da 10 posti = 31.381%; Rischio sull'aereo da 20 posti = 33.920%]*

Esercizio 7. Un traghetto da crociera è in grado di navigare quando almeno la metà dei motori risulta funzionante. Immaginando che ogni motore si possa guastare con probabilità p in modo indipendente dagli altri, stabilire per quali valori di p un traghetto con quattro motori ha maggior probabilità di navigare di un traghetto con due motori. *[$0 < p < \frac{1}{3}$]*

Esercizio 8. Durante un esame a risposta multipla con 5 domande e 3 possibili risposte per ogni domanda, qual è la probabilità che uno studente azzecchi almeno 4 risposte semplicemente rispondendo a caso? *[0.045]*

Esercizio 9. Una persona afferma di possedere percezioni extrasensoriali (ESP). Come prova viene chiesto a questa persona di predire il risultato del lancio di una moneta equilibrata. Su 10 lanci, vengono indicati correttamente 7 risultati. Quale sarebbe la probabilità di ottenere un risultato almeno altrettanto buono senza poteri ESP? *[0.1719]*

Esercizio 10. La Express Service è un corriere specializzato in spedizioni di pacchi. Sia $p = 2\%$ la percentuale di pacchi spediti con questo corriere che non arriva a destinazione entro il tempo stabilito. Nel corso dell'anno 2002, l'azienda ISI prevede di spedire 10 pacchi mediante la Express Service. Sulla base dei dati forniti, rispondere alle seguenti domande:

(a) si determini la probabilità che tutti e 10 i pacchi arrivino a destinazione nel tempo stabilito; *[0.8171]*

(b) si determini la probabilità che al più 1 dei 10 pacchi non arrivi a destinazione nel tempo stabilito; *[0.9838]*

(c) se la Express Service rimborsa 5 Euro per ogni pacco non consegnato in tempo, determinare con quale probabilità la Express Service dovrà rimborsare almeno 45 Euro alla ISI; *[$5.03 \cdot 10^{-15}$]*

(d) determinare quanto dovrebbe valere p affinchè tutti e 10 i pacchi spediti dalla ISI arrivino a destinazione nel tempo stabilito con probabilità maggiore o uguale a 0.9. *[0.0105]*

Esercizio 11. Una linea trasmette un segnale binario. La probabilità di mandare un segnale sbagliato è uguale a 0,01. Si calcolino, su 30 segnali trasmessi:

a) la probabilità che ci siano più di 2 errori; *[0.0033]*

b) il numero medio di errori; *[0.3]*

c) la probabilità che il numero di errori superi il valore atteso di errori. *[0.2603]*

Esercizio 12. In un lungo manoscritto, si è scoperto che solo il 13.5% delle pagine contengono errori tipografici. Se assumiamo che il numero di errori per pagina è una variabile aleatoria con una distribuzione di Poisson, trovate la percentuale di pagine che hanno esattamente 1 errore. *[12.425%]*

Esercizio 13. Alla dogana di un areoporto 5 passeggeri su 1000 (in media) sono trovati con merce abusiva. Se in un giorno i controlli sono 500, con quale probabilità si trovano al massimo due abusivi? *[0.5435]*

Esercizio 14. Il numero di cartoline imbucate in una certa cassetta delle lettere è una variabile di Poisson con media di 5 al giorno. Con quale probabilità domani saranno imbucate non meno di 4 cartoline? *[0.735]*

Esercizio 15. Il numero di incidenti che si verificano ogni giorno lungo una certa autostrada è una variabile aleatoria di Poisson. Inoltre, è noto che mediamente solo 18 giorni all'anno sono senza incidenti.

(a) Qual è il numero atteso di incidenti al giorno? *[3.0095]*

(b) Qual è la probabilità che su quell'autostrada domani si verifichino almeno due incidenti? *[80.227%]*

Esercizio 16. I neutrini sono delle particelle elementari con una sezione d'urto estremamente piccola. Questo le rende particelle con una capacità ridotta di interagire con la materia ordinaria. Uno dei metodi di rilevazione più comuni consiste nell'utilizzo di scintillatori. Tali strumento sono in grado di rilevare le particelle con un tempo di campionamento molto piccolo. È noto che, in condizioni standard, uno scintillatore rileva in media 5 neutrini ogni 10^{-9} sec.. Calcolare la probabilità che:

(a) in 10^{-9} sec. non si registrino neutrini *[$\mathbb{P}(X = 0) = 0.6738\%$]*;

(b) in 10^{-9} sec. si registrino almeno 6 neutrini *[$\mathbb{P}(X \geq 6) = 38.4039\%$]*;

(c) in 10^{-9} sec. si registrino meno di 10 neutrini *[$\mathbb{P}(X < 10) = 96.8172\%$]*.

Soluzioni di alcuni esercizi

Soluzione 1.

(a) La v.a.

$$X = \text{vincita con un biglietto (espressa in euro)}$$

è una v.a. discreta che può prendere solo i valori

$$S_X = \{0,\, 5,\, 100,\, 1000,\, 4000\}\,.$$

La sua densità discreta è pertanto la funzione $p_X : S_X \to [0,1]$, data da

$$p_X(5) = \frac{425}{5000} = 0.085 \qquad p_X(100) = \frac{95}{5000} = 0.019 \qquad p_X(1000) = \frac{3}{5000} = 0.0006$$
$$p_X(4000) = \frac{1}{5000} = 0.0002 \qquad p_X(0) = 1 - p_X(5) - p_X(100) - p_X(1000) - p_X(4000) = 0.8952\,,$$

dove il valore di $p_X(0)$ segue dalla condizione di normalizzazione $\sum_{t\in S_X} p_X(t) = 1$. La media di X è pertanto

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{t\in S_X} t\, p_X(t) = 0\cdot 0.8952 + 5\cdot 0.085 + 100\cdot 0.0019 + 1000\cdot 0.0006 + 4000\cdot 0.0002 = 3.725\,.$$

(b) La v.a.

$$Y = \text{guadagno con un biglietto}$$

è la differenza

$$Y = X - 6\,.$$

Pertanto, il guadagno medio atteso è

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[X-6] = \mathbb{E}[X] - 6 \qquad \text{formula } \mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b\\ &= 3.725 - 6 = -2.275\,.\end{aligned}$$

(c) Per trovare il guadagno più probabile, dobbiamo ricavare la densità di Y e vedere dove è massima. Poiché $Y = X - 6$, i valori possibili di Y sono

$$S_Y = \{-6,\, -1,\, 94,\, 994,\, 3994\}$$

e la densità di Y si trova da quella di X secondo la relazione

$$p_Y(s) = \mathbb{P}(Y = s) = \mathbb{P}(X - 6 = s) = \mathbb{P}(X = s + 6)\ ,$$

che dà

$$p_Y(-6) = p_X(0) = 0.8952 \qquad p_Y(-1) = p_X(5) = 0.085 \qquad p_Y(94) = p_X(100) = 0.019$$
$$p_Y(994) = p_X(1000) = 0.0006 \qquad p_Y(3994) = p_X(4000) = 0.0002\,.$$

Il guadagno più probabile è quindi $\mathrm{moda}(Y) = -6$, che si ottiene con probabilità $p_Y(-6) = 89.52\%$.

(d) Per calcolare la varianza di X, conviene usare la formula alternativa $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$, e quindi trovare prima

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{t \in S_X} t^2 p_X(t) = 0^2 \cdot 0.8952 + 5^2 \cdot 0.085 + 100^2 \cdot 0.0019 + 1000^2 \cdot 0.0006 + 4000^2 \cdot 0.0002 \\ &= 3992.125\end{aligned}$$

e poi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 3992.125 - 3.725^2 = 3978.25\,.$$

La varianza di Y si ricava da quella di X secondo la relazione

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(X-6) = \mathrm{Var}(X) \qquad \text{formula } \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X) \\ &= 3992.125\,.\end{aligned}$$

(e) La probabilità di perdere è

$$\mathbb{P}(Y<0) = \sum_{t \in S | t<0} p_Y(t) = p_Y(-6) + p_Y(-1) = 0.8952 + 0.085 = 98.02\%\,.$$

Soluzione 2.

(a) Poiché X è una v.a. discreta, la sua funzione di ripartizione F_X è costante a tratti, e compie un 'salto' in corrispondenza di ciascun valore che X può assumere. L'altezza di ciascuno di tali 'salti' è la densità di probabilità del valore corrispondente. La f.d.r. F_X 'salta' nei seguenti valori:

$$S_X = \{0, 1, 3\}\,,$$

e quindi questi saranno tutti i valori che X può prendere. La densità di X è la funzione $p_X : S \to [0,1]$, data dall'altezza dei 'salti':

$$p_X(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \qquad p_X(1) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \qquad p_X(3) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\,.$$

(b) Il valore atteso di X è

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{t \in S_X} t\, p_X(t) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

e la varianza si trova dalla formula alternativa $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$, con

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{t \in S_X} t^2 p_X(t) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} = 2$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - 1^2 = 1\,.$$

(c) Poiché X può prendere solo i valori $S_X = \{0, 1, 3\}$, la nuova v.a. $Y = \sqrt{X}$ potrà prendere solo i valori $S_Y = \{0, 1, \sqrt{3}\}$. La densità di Y si ricava dall'uguaglianza di eventi

$$\text{“}Y = s\text{”} = \text{“}\sqrt{X} = s\text{”} = \text{“}X = s^2\text{”}$$

ed è

$$p_Y(0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = p_X(0) = \frac{1}{3}$$
$$p_Y(1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = p_X(1) = \frac{1}{2}$$
$$p_Y(\sqrt{3}) = \mathbb{P}\left(Y = \sqrt{3}\right) = \mathbb{P}(X = 3) = p_X(3) = \frac{1}{6}\,.$$

(d) Usando il teorema sulla media di una funzione di v.a., abbiamo che la media di Y è

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sqrt{X}\right] = \sum_{t \in S_X} \sqrt{t}\, p_X(t) = \sqrt{0} \cdot \frac{1}{3} + \sqrt{1} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} = 0.789$$

(alternativamente, si trovava lo stesso risultato usando la definizione $\mathbb{E}[Y] = \sum_{t \in S_Y} t\, p_Y(t)$). La varianza di Y è invece

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}\left[(\sqrt{X})^2\right] - 0.789^2 = \mathbb{E}[X] - 0.789^2 = 1 - 0.789^2 = 0.377\,.$$

Soluzione 5.

(a) Introduciamo la v.a. discreta

$$X = \text{numero uscito in una giocata}\,.$$

Poiché X può assumere qualunque valore intero $S_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 36\}$, e ognuno di questi valori è equiprobabile, la densità di X è la densità uniforme discreta sull'insieme S_X, e cioè

$$p_X : S_X \to [0, 1] \qquad p_X(k) = \frac{1}{\# S_X} = \frac{1}{37} \quad \forall k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 36\}\,.$$

I numeri rossi sono l'insieme $R = \{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36\}$, e quindi

$$\mathbb{P}(\text{“esce rosso”}) = \mathbb{P}(X \in R) = \sum_{k \in R} p_X(k) = p_X(1) + p_X(3) + p_X(5) + \ldots + p_X(36)$$
$$= \underbrace{1/37 + 1/37 + 1/37 + \ldots + 1/37}_{\# R = 18 \text{ volte}} = \frac{18}{37}\,.$$

(b) 5 giocate sul rosso costituiscono $n = 5$ prove di Bernoulli, ognuna con la stessa probabilità di successo $p = 18/37$ trovata al punto precedente. La v.a.

$$Y = \text{numero di vincite nelle 5 giocate}$$

conta il numero di successi nelle 5 prove, e pertanto

$$Y \sim B\left(5,\, \frac{18}{37}\right)\,.$$

Si richiede di calcolare la probabilità

$$\mathbb{P}(\text{“si perde 5 volte su 5”}) = \mathbb{P}(Y = 0) = p_Y(0) = \binom{5}{0}\left(\frac{18}{37}\right)^0\left(1 - \frac{18}{37}\right)^{5-0} = \left(1 - \frac{18}{37}\right)^5 = 0.0357$$
$$= 3.57\%\,,$$

dove ricordiamo che la densità $B(n, p)$ è $p_Y(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (con $k = 0, 1, \ldots, n$).

(c) Il numero atteso di vincite è

$$\mathbb{E}[Y] = np = 5 \cdot \frac{18}{37} = 2.432\,.$$

Per trovare invece il numero di vincite più probabile (cioè la moda di Y), bisogna calcolare la densità $p_Y(k)$ per tutti i valori di k possibili, e vedere per quale k essa assume valore massimo:

$$p_Y(0) = \left(\frac{19}{37}\right)^5 = 0.0357 \qquad p_Y(1) = 5 \cdot \frac{18}{37} \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^4 = 0.1691$$

$$p_Y(2) = 10 \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^2 \left(\frac{19}{37}\right)^3 = 0.3205 \qquad p_Y(3) = 10 \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^3 \left(\frac{19}{37}\right)^2 = 0.3036$$

$$p_Y(4) = 5 \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^4 \cdot \frac{19}{37} = 0.1438 \qquad p_Y(5) = \left(\frac{18}{37}\right)^5 = 0.0272\,.$$

Vediamo che il massimo è raggiunto per $k = 2$ ($p_Y(2) = 0.3205$), e quindi moda$(Y) = 2$.

(d) Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{“si vince almeno 2 volte su 5”}) &= \mathbb{P}(Y \geq 2) \qquad \text{passiamo all'evento negato per ridurre i calcoli} \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y < 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{1} p_Y(k)\right) = 1 - (0.0357 + 0.1691) = 0.7952 \\ &= 79.52\%\,.\end{aligned}$$

Il motivo del passaggio all'evento negato è che altrimenti il calcolo diretto $\mathbb{P}(Y \geq 2) = \sum_{k=2}^{5} p_Y(k)$ sarebbe stato più lungo (4 addendi contro 2).

(e) Puntando alternativamente sul rosso e sul nero, si avrebbe comunque una successione di prove indipendenti (le giocate non si influenzano tra loro). Inoltre, la probabilità di successo nelle prove pari sarebbe la $p = 18/37$ trovata al punto (a). Nelle prove dispari, sarebbe invece (con calcoli simili)

$$\mathbb{P}(X \in \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35\}) = \frac{18}{37}\,,$$

che è lo stesso valore delle prove pari. Quindi, le prove pari e quelle dispari hanno tutte la stessa probabilità di successo $p = 18/37$, sono tutte indipendenti tra loro $\Rightarrow$ si ha ancora $Y \sim B(5, 18/37)$ $\Rightarrow$ non cambia niente.

Soluzione 6. Introduciamo le due v.a. (chiaramente discrete)

$$\begin{aligned} X &= \text{numero di passeggeri che si presentano all'imbarco tra i 22 che hanno prenotato} \\ Y &= \text{numero di passeggeri che si presentano all'imbarco tra gli 11 che hanno prenotato}\,. \end{aligned}$$

Allora, X conta il numero di successi in una serie di $n = 22$ prove di Bernoulli, in cui l'i-esima prova consiste nell'osservare se l'i-esimo dei 22 passeggeri si presenta all'imbarco oppure no, e si ha un successo quando questo effettivamente succede. L'i-esimo passeggero si presenta all'imbarco con probabilità $p = 100\% - 10\% = 90\%$ (il 10% è la probabilità che invece *non* ci si presenti). Di conseguenza,

$$X \sim B(n, p) = B(22,\, 0.90)\,.$$

In un volo da 20 posti in cui si è accettato il massimo di prenotazioni ($= 22$), abbiamo l'uguaglianza di eventi

$$\begin{aligned}&\text{“si lascia a terra almeno un passeggero che ha regolarmente prenotato”} = \\ &\qquad = \text{“si presentano più di 20 dei 22 passeggeri che hanno prenotato”} \\ &\qquad = \text{“}\, X > 20 \,\text{”}\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\,(\text{“si lascia a terra almeno un passeggero che ha regolarmente prenotato”}) = \mathbb{P}\,(X > 20) \\ &\quad = \sum_{k=21}^{22} p_X(k) = p_X(21) + p_X(22) = \binom{22}{21} 0.90^{21}(1-0.90)^{22-21} + \binom{22}{22} 0.90^{22}(1-0.90)^{22-22} \\ &\quad = 22 \cdot 0.90^{21} \cdot 0.10 + 1 \cdot 0.90^{22} \cdot 1 = 0.33920\,,\end{aligned}$$

dove $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ è la densità $B(n, p)$ calcolata in k. Con un ragionamento analogo,

$$Y \sim B(11,\, 0.90)$$

e su un aereo da 10 posti si ha

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\,(\text{“si lascia a terra almeno un passeggero che ha regolarmente prenotato”}) = \mathbb{P}\,(Y > 10) \\ &\quad = \sum_{k=11}^{11} p_Y(k) = p_Y(11) = \binom{11}{11} 0.90^{11}(1-0.90)^{11-11} = 0.90^{11} = 0.31381\,.\end{aligned}$$

Vediamo così che la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero che ha regolarmente prenotato è maggiore in un aereo da 20 posti ($= 33.920\%$) che in un aereo da 10 ($= 31.381\%$).

Soluzione 7. Introduciamo le v.a.

$$\begin{aligned}X &= \text{numero di motori funzionanti in un traghetto da 4 motori} \\ Y &= \text{numero di motori funzionanti in un traghetto da 2 motori}\,.\end{aligned}$$

Poiché ogni motore si rompe con probabilità p e in modo indipendente dagli altri, la v.a. X conta il numero di successi in $n = 4$ prove di Bernoulli, in cui ciascuna prova ha la stessa probabilità di successo $1 - p$ (successo = il motore funziona). Un discorso analogo vale per Y. Quindi,

$$X \sim B(4,\, 1-p) \qquad\qquad Y \sim B(2,\, 1-p)\,.$$

Si ha poi l'uguaglianza di eventi

$$\begin{aligned}&\text{“il traghetto a 4 motori è in grado di navigare”} = \text{“}\, X \geq \frac{1}{2} \cdot 4 \,\text{”} = \text{“}\, X \geq 2 \,\text{”} \\ &\text{“il traghetto a 2 motori è in grado di navigare”} = \text{“}\, Y \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \,\text{”} = \text{“}\, Y \geq 1 \,\text{”}\,.\end{aligned}$$

(Ricordare che

“almeno x” = “$\geq x$” “al più x” = “$\leq x$” “più di x” = “$> x$” “meno di x” = “$< x$”.)

Dobbiamo confrontare

$$\mathbb{P}\left(\text{“il traghetto a 4 motori è in grado di navigare”}\right) = \mathbb{P}\left(X \geq 2\right) = \sum_{k=2}^{4} p_X(k) = \sum_{k=2}^{4} \binom{4}{k} (1-p)^k p^{4-k}$$

$$= \underbrace{\binom{4}{2}}_{=6}(1-p)^2 p^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{=4}(1-p)^3 p + \underbrace{\binom{4}{4}}_{=1}(1-p)^4 = (1-p)^2(3p^2+2p+1) \qquad (*)$$

con

$$\mathbb{P}\left(\text{“il traghetto a 2 motori è in grado di navigare”}\right) = \mathbb{P}\left(Y \geq 1\right) = \sum_{k=1}^{2} p_Y(k) = \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} (1-p)^k p^{2-k}$$

$$= \underbrace{\binom{2}{1}}_{=2}(1-p)p + \underbrace{\binom{2}{2}}_{=1}(1-p)^2 = (1-p)(p+1)\,. \qquad (**)$$

Se vogliamo che la prima probabilità sia maggiore della seconda, deve essere

$$(1-p)^2(3p^2+2p+1) > (1-p)(p+1) \quad \Leftrightarrow \quad p^2(1-p)(-3p+1) > 0\,. \qquad \text{(o)}$$

Le soluzioni della disequazione precedente sono

$$p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/3) \cup (1, +\infty)\,.$$

Di queste, solo $p \in (0, 1/3)$ è compatibile col fatto che p deve essere una probabilità, cioè $p \in [0,1]$. Concludiamo che i valori possibili di p sono

$$0 < p < \frac{1}{3}\,.$$

Si osservi che nelle sommatorie in (*) e (**) compaiono rispettivamente tre e due addendi con potenze di p abbastanza elevate, e questo rende i calcoli un po' più laboriosi. Un modo per far prima è usare la normalizzazione di $B(n,p)$ per ridurre il numero di termini nella somma, cioè notare che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X \geq 2\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(X < 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq 1\right) = 1 - \sum_{k=0}^{1} p_X(k) = 1 - \binom{4}{0}p^4 - \binom{4}{1}(1-p)p^3 \\
&= 3p^4 - 4p^3 + 1 \\
\mathbb{P}\left(Y \geq 1\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(Y < 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y = 0\right) = 1 - p_Y(0) = 1 - \binom{2}{0}p^2 \\
&= 1 - p^2\,.
\end{aligned}$$

La disequazione da risolvere diventa in questo modo

$$3p^4 - 4p^3 + 1 > 1 - p^2$$

che è più semplice di (o), ma naturalmente dà le stesse soluzioni (verificare!).

Soluzione 12. Introduciamo la v.a.

$$X = \text{numero di errori in una pagina del manoscritto}\,.$$

Il testo ci dice che

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{con } \lambda \text{ incognito} \qquad\qquad \mathbb{P}\left(X \geq 1\right) = 13.5\%\,,$$

e ci chiede di clacolare

$$\mathbb{P}\left(X = 1\right) = p_X(1) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\,. \tag{*}$$

Dobbiamo quindi trovare il parametro λ. Dai dati del problema,

$$0.135 = \mathbb{P}\left(X \geq 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X = 0\right) = 1 - p_X(0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = -\ln(1 - 0.135) = 0.1450\,.$$

Sostituendo questo valore in (*), troviamo

$$\mathbb{P}\left(X = 1\right) = 0.1450\mathrm{e}^{-0.1450} = 0.12545 = 12.425\%\,.$$

Soluzione 15. Introduciamo le due v.a.

$$X = \text{numero di incidenti in un giorno fissato dell'anno}$$
$$Y = \text{numero di giorni senza incidenti in un anno}$$

Allora sappiamo dal testo del problema che

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{con } \lambda \text{ incognito} \qquad\qquad \mathbb{E}\left[Y\right] = 18\,.$$

(a) Viene richiesto di calcolare il numero medio di incidenti in un giorno, cioè $\mathbb{E}\left[X\right]$. Poiché $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, abbiamo $\mathbb{E}\left[X\right] = \lambda$, e quindi dobbiamo trovare λ.
Ora, l'altra v.a. Y conta il numero di giorni senza incidenti in un anno. I giorni dell'anno possono essere visti come una serie di 365 prove di Bernoulli (= indipendenti e ognuna con la stessa probabilità di successo), in cui abbiamo successo alla prova i-esima se nel corrispondente i-esimo giorno non capitano incidenti. Di conseguenza, Y è binomiale:

$$Y \sim B(365, p)$$

dove

$$p = \mathbb{P}\left(\text{“in un giorno non capitano incidenti”}\right) = \mathbb{P}\left(X = 0\right) = p_X(0) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,.$$

Qui abbiamo usato il fatto che $p_X(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. La media di una $B(n,p)$ è np, e dal testo sappiamo che

$$18 = \mathbb{E}\left[Y\right] = 365 \cdot p = 365 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\ln\frac{18}{365} = 3.0095\,.$$

In conclusione, il numero medio di incidenti in un giorno è

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \lambda = 3.0095\,.$$

(b) Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\text{“domani si verificano almeno due incidenti”}\right) &= \mathbb{P}\left(X \geq 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq 1\right) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{1} p_X(k) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-3.0095}\left(1 + 3.0095\right) \\
&= 0.80227 = 80.227\,\%\,.
\end{aligned}$$

Notare che, anziché calcolare direttamente la serie infinita $\mathbb{P}\left(X \geq 2\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, è molto più comodo passare all'evento complementare $\mathbb{P}\left(X \geq 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq 1\right) = \sum_{k=0}^{1} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.