Teorema 1 (Formula delle probabilità totali). *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità, e siano* $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ *eventi che formano una* partizione *di* Ω*, cioè tali che*

(a) $F_i \cap F_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$*;*

(b) $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \Omega$*.*

Supponiamo inoltre che $\mathbb{P}(F_i) > 0$ *per ogni* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Allora per ogni evento* $E \in \mathcal{F}$ *si ha*

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \mid F_i)\, \mathbb{P}(F_i)\,.$$

Teorema 2 (Formula di Bayes). *Supponiamo che* $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ *sia una partizone di* Ω, *e che* $\mathbb{P}(F_i) > 0$ *per ogni* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Allora per ogni* $E \in \mathcal{F}$ *con* $\mathbb{P}(E) > 0$ *si ha*

$$\mathbb{P}(F_k \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid F_k)\,\mathbb{P}(F_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \mid F_i)\,\mathbb{P}(F_i)} \qquad \text{per ogni } k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Teorema 3 (Formula del prodotto)**.** *Supponiamo che* $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{F}$ *siano eventi qualsiasi. Allora*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n\right) =& \mathbb{P}\left(E_n \mid E_{n-1} \cap E_{n-2} \cap \ldots \cap E_1\right) \mathbb{P}\left(E_{n-1} \mid E_{n-2} \cap E_{n-3} \cap \ldots \cap E_1\right) \ldots \cdot \\ & \cdot \ldots \mathbb{P}\left(E_1\right).\end{aligned}$$

Teorema 4 (Legge dei Grandi Numeri). *Supponiamo che $X_1, X_2, \dots$ sia un campione aleatorio. Allora per ogni $\epsilon > 0$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}\left[X_1\right]| > \epsilon\right) = 0.$$

Teorema 5 (Teorema del Limite Centrale). *Sia* $X_1, X_2, \ldots$ *un campione aleatorio qualsiasi. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}\left[X_1\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(X_1\right)}}\sqrt{n} \leq x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z \qquad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 6 (Non dimostrato). *Se* $X_1, \dots, X_n$ *è un campione aleatorio* gaussiano, *con* $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, *allora*

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

dove $t(n-1)$ *è la* densità t di Student con $n-1$ gradi di libertà.

Per il quantile destro di ordine α della densità di Student $t(n)$ si usa la notazione $t_{\alpha,n}$. In altre parole, $t_{\alpha,n}$ è il numero reale definito dalla relazione

$$F_{t(n)}(t_{\alpha,n}) = 1 - \alpha,$$

dove $F_{t(n)}$ è la funzione di ripartizione della densità $t(n)$. I quantili $t_{\alpha,n}$ per i valori più comuni di α (p.es., $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.025$) e i valori di n non troppo grandi (p.es., $n \leq 40$) si trovano tabulati su tutti i libri di Statistica.

Teorema 7. *Se* $X_1, \dots, X_n$ *e* $Y_1, \dots, Y_m$ *sono due campioni* normali *e* indipendenti, *con*

$$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \qquad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

allora:

(i) si ha sempre

$$\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1);$$

(ii) (non dimostrato) *se vale* in più *la condizione* $\sigma_X \equiv \sigma_Y$, *definita la* varianza pooled

$$S_p^2 := \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2},$$

in cui S_X^2 *e* S_Y^2 *sono la varianza campionaria del primo e del secondo campione, rispettivamente, si ha*

$$\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2).$$

Teorema 8 (Non dimostrato). *Sia* $X_1, \ldots, X_n$ *un campione aleatorio, con* X_i *variabili aleatorie discrete a valori nell'insieme* $\{1, \ldots, k\}$ *(cioè* $X_i : \Omega \to \{1, \ldots, k\}$ *per ogni* i*). Sia* $p : \{1, \ldots, k\} \to [0, 1]$ *la densità di una qualsiasi delle* X_i*. Per ogni* $l \in \{1, \ldots, k\}$*, definiamo le variabili aleatorie*

$$O_l = |\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i = l\}|.$$

Sia inoltre T *la statistica*

$$T = \sum_{l=1}^{k} \frac{O_l^2}{np(l)} - n.$$

Allora, se $n \gg 1$*, la statistica* T *ha approssimativamente densità* chi-quadrato con $k-1$ gradi di libertà*:*

$$T \approx \chi^2(k-1).$$

Teorema 9 (Non dimostrato). *Sia* $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ *un campione costituito da* vettori aleatori *discreti a due componenti, con*

$$(X_i, Y_i) : \Omega \to \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, s\}.$$

Definiamo le statistiche

$$O_{l,m} = |\{i \in \{1, \ldots, n\} : (X_i, Y_i) = (l, m)\}|$$

$$O_{l\cdot} = \sum_{m=1}^{s} O_{l,m} \qquad\qquad O_{\cdot m} = \sum_{l=1}^{r} O_{l,m}.$$

Allora, se vale l'ipotesi nulla

$$H_0 : X_i \text{ e } Y_i \text{ sono indipendenti per ogni } i,$$

la statistica test

$$T = n \left(\sum_{l=1}^{r} \sum_{m=1}^{s} \frac{O_{l,m}^2}{O_{l\cdot} O_{\cdot m}} - 1 \right)$$

per $n \gg 1$ *ha approssimativamente densità* chi-quadrato con $(r-1)(s-1)$ gradi di libertà*:*

$$T \approx \chi^2((r-1)(s-1)) \quad \text{se è vera } H_0.$$