Statistica - 5ª lezione

16 marzo 2021

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Per n v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right]$$

Come mi sbarazzo di $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right]$?

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

$X, \ Y$ indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio	$Y =$ risultato del secondo lancio

$X + Y =$ somma dei due risultati

$X, \; X + Y$ NON indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$X + Y =$ somma dei due risultati

$X, \ Y, \ X+Y$ NON indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4º studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17º studente

$Y_4 =$ peso del 4º studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17º studente

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$\boxed{X_4 = \text{ altezza del } 4^{\text{o}} \text{ studente} \quad X_{17} = \text{ altezza del } 17^{\text{o}} \text{ studente}}$

$Y_4 =$ peso del 4^{o} studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17^{o} studente

$X_4, \ X_{17}$ indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$\boxed{X_4 = \text{altezza del } 4^{\text{o}} \text{ studente}}$ $\quad X_{17} =$ altezza del 17^{o} studente

$Y_4 =$ peso del 4^{o} studente $\quad \boxed{Y_{17} = \text{peso del } 17^{\text{o}} \text{ studente}}$

$X_4, \; Y_{17}$ indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\qquad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4º studente $\qquad X_{17} =$ altezza del 17º studente

$Y_4 =$ peso del 4º studente $\qquad Y_{17} =$ peso del 17º studente

$X_4,\ Y_4$ NON indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4º studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17º studente

$Y_4 =$ peso del 4º studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17º studente

$X_4, \ Y_4, \ X_{17}, \ Y_{17}$ NON indipendenti

Indipendenza

Definizione (per 2 variabili aleatorie)

Le v.a. $X,\ Y$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}\left(\text{“}X \in I\text{”} \wedge \text{“}Y \in J\text{”}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X \in I\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y \in J\right)$$

per ogni possibile scelta di $I,\ J \subseteq \mathbb{R}$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}\left(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \ldots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X_1 \in I_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 \in I_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in I_n\right)$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}\left(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \dots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X_1 \in I_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 \in I_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in I_n\right)$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\left[X_i\right]$$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \ldots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}) = \\ = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in I_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in I_n)$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i]$$

ATTENZIONE: Non vale il viceversa

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}\left[X - Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]$ linearità di $\mathbb{E}$

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}\left[X - Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]$ — linearità di $\mathbb{E}$
- $\operatorname{var}\left[X - Y\right] = \operatorname{var}\left[X\right] + \operatorname{var}\left[-Y\right]$ — indipendendenza di $X,\ Y$

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\operatorname{var}[X - Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[-Y]$ indipendendenza di X, Y

  $= \operatorname{var}[X] + (-1)^2 \operatorname{var}[Y]$ quadraticità di var

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}\left[X - Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]$ — linearità di $\mathbb{E}$
- $\mathrm{var}\left[X - Y\right] = \mathrm{var}\left[X\right] + \mathrm{var}\left[-Y\right]$ — indipendendenza di X, Y

  $= \mathrm{var}\left[X\right] + (-1)^2\mathrm{var}\left[Y\right]$ — quadraticità di var

  $= \mathrm{var}\left[X\right] + \mathrm{var}\left[Y\right]$

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}\left[X - Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\mathrm{var}\left[X - Y\right] = \mathrm{var}\left[X\right] + \mathrm{var}\left[-Y\right]$ indipendendenza di X, Y

  $= \mathrm{var}\left[X\right] + (-1)^2 \mathrm{var}\left[Y\right]$ quadraticità di var

  $= \mathrm{var}\left[X\right] + \mathrm{var}\left[Y\right]$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)
2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)
2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q
3. le prove non si influenzano tra loro

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)
2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q
3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \;\; \text{per ogni } i = 1, \ldots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \ \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{ sono indipendenti}$$

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \ \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{ sono indipendenti}$$

$$\begin{aligned} Y &= \text{numero di successi nelle } n \text{ prove} \\ &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n \end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \ \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \dots, X_n \ \text{ sono indipendenti}$$

$X_1, \dots, X_n$ sono
(i.) ndipendenti e
(i.) denticamente
(d.) istribuite

$$\begin{aligned} Y &= \text{numero di successi nelle } n \text{ prove} \\ &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n \end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = ???$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$ linearità di $\mathbb{E}$

  $= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{q} + \underbrace{\mathbb{E}[X_2]}_{q} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{q} \qquad X_i \sim B(1, q) \quad \text{per ogni } i$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{q} + \underbrace{\mathbb{E}[X_2]}_{q} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{q} \\ &= nq \end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = nq$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = ???$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$ indipendenza delle X_i

  $= \mathrm{var}[X_1] + \mathrm{var}[X_2] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{q(1-q)} + \underbrace{\mathrm{var}[X_2]}_{q(1-q)} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{q(1-q)} \qquad X_i \sim B(1, q) \quad \text{per ogni } i$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{q(1-q)} + \underbrace{\mathrm{var}[X_2]}_{q(1-q)} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{q(1-q)}$$

$$= nq(1-q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = nq(1-q)$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = nq$
- $\mathrm{var}\left[Y\right] = nq(1-q)$
- $p_Y(k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) q^k (1-q)^{n-k}$ per ogni $k \in S = \{0,\, 1,\, 2, \ldots,\, n\}$

dove $\underbrace{\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}_{\text{coefficiente binomiale di } n \text{ su } k}$

p_Y è la densità *binomiale* di parametri n e q :

$$Y \sim B(n,\, q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = nq(1-q)$
- $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \quad$ per ogni $k \in S = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n\}$

dove $\quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \#\{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \mid \#I = k\}$

Per esempio, con $n = 3$ e $k = 2$:

$$\{I \subseteq \{1,2,3\} \mid \#I = 2\} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

$$\Rightarrow \quad \binom{3}{2} = \# \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad = 3$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”}}_{\text{successo nelle prove } I}$$

Per esempio, con $I = \{1, 3\}$:

$$\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} = \text{“}X_1 = 1\text{”} \wedge \text{“}X_3 = 1\text{”}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right)}_{\text{successo solo nelle prove } I}$$

Per esempio, con $I = \{1, 3\}$ e $n = 3 \quad \Rightarrow \quad I^c = \{2\}$:

$$\bigwedge_{i \in I^c} \text{“}X_i = 0\text{”} = \text{“}X_2 = 0\text{”}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right]}_{\text{esattamente } k \text{ successi}}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\,(Y = k) \ = \ \mathbb{P}\underbrace{\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)}_{\text{esattamente } k \text{ successi}}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\,(Y = k) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\left(Y = k\right) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}\left(X_i = 1\right) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}\left(X_j = 0\right) \right) \qquad \text{indipendenza}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\,(Y = k) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \underbrace{\mathbb{P}\,(X_i = 1)}_{q} \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \underbrace{\mathbb{P}\,(X_j = 0)}_{1-q} \right)$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \underbrace{\left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right)}_{q^k} \times \underbrace{\left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)}_{(1-q)^{n-k}}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right)}_{q^k} \times \underbrace{\left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)}_{(1-q)^{n-k}}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\,(Y = k) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}\,(X_i = 1) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}\,(X_j = 0) \right)$$

$$= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\left(Y = k\right) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}\left(X_i = 1\right) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}\left(X_j = 0\right) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} q^k (1-q)^{n-k}$$