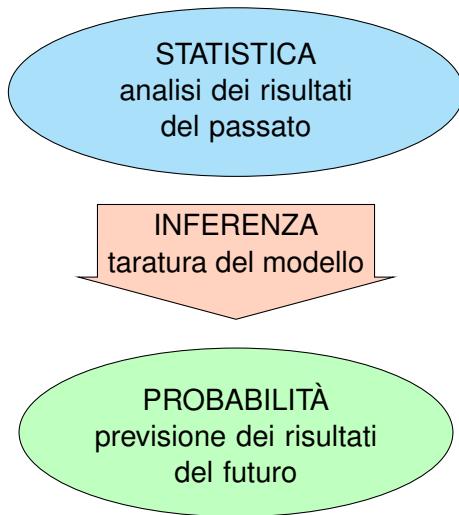


Statistica - 8^a lezione



30 marzo 2021



- **Statistica descrittiva**
(riassumere molti dati attraverso poche caratteristiche essenziali)
- **Probabilità**
(costruire un modello che preveda il risultato di un esperimento)
- **Inferenza statistica**
(tarare i parametri del modello in base ai risultati dell'esperimento)
- **Regressione lineare**
(riconoscere relazioni tra dati di tipo diverso)







PRIMA
dell'esperimento



DOPO
l'esperimento

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	
	$X_2 =$ 	
	...	



	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$  $X_2 =$  ...	
densità	$X_i \sim f_\theta$	

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$  $X_2 =$  ...	
densità	$X_i \sim f_\theta$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	



	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	} realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	{ $X_i \sim f_\theta$			
parametri	{ $\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$			

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	} realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$			

Inferenza statistica



	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri

Vogliamo approssimare θ in base ai dati !

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	\rightarrow	*	
parametri	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	\rightarrow	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	parametri

Vogliamo approssimare μ e σ in base ai dati !

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Una statistica è una variabile aleatoria !

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare
un parametro della densità delle X_i

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare
un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare
un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

Uno stimatore è una variabile aleatoria !

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare
un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA = realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA = realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA = realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3} = 1.567 \quad \text{è una stima di } \mu$$

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$



STIMA = realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$



$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3} = 1.567 \text{ è una stima di } \mu$$

Una stima è un numero !



Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri



Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$			

Inferenza statistica




	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

θ non si può misurare, ma $\hat{\Theta}$ sì !

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 = $ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	$X_3 = $ 	\rightarrow	$x_3 = 2.9$	
densità	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	\rightarrow	*	
parametri	$\begin{cases} \mu = 1.5 \\ \sigma = 0.8 \end{cases}$	\rightarrow	$\begin{cases} \mu = 1.5 \\ \sigma = 0.8 \end{cases}$	parametri
stimatore	$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$	\rightarrow	$\bar{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3}$	stima

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ
 \Rightarrow si vede a occhio

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ
 \Rightarrow si vede a occhio
- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \underbrace{\text{bias}(\hat{\theta}; \theta)}_{\text{distorsione}}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \Rightarrow 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

$$\Rightarrow \underbrace{\text{mse}(\hat{\theta}; \theta)}_{\substack{\text{errore} \\ \text{quadratico} \\ \text{medio}}} := \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad \text{deve esser piccolo}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

$$\Rightarrow \underbrace{\text{mse}(\hat{\theta}; \theta)}_{\substack{\text{mean} \\ \text{square} \\ \text{error}}} := \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad \text{deve esser piccolo}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \Rightarrow 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

$$\Rightarrow \text{mse}(\hat{\theta}; \theta) := \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad \text{deve esser piccolo}$$

Se $\hat{\theta}_n = h_n(X_1, \dots, X_n)$, allora

$$\text{mse}(\hat{\theta}_n; \theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_n \text{ è } \textit{consistente in media quadratica}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}_n$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}_n$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \Rightarrow 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_n \text{ è non-distorto (o corretto)}$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

$$\Rightarrow \text{mse}(\hat{\theta}; \theta) := \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad \text{deve esser piccolo}$$

Se $\hat{\theta}_n = h_n(X_1, \dots, X_n)$, allora

$$\text{mse}(\hat{\theta}_n; \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_n \text{ è consistente in media quadratica}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

- 1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$
- 2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$
- 3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$ perché $\text{mse} \geq 0$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2]$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\begin{aligned}\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) &= \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2 \\ &= \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - \mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2 + \mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2 - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2\end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\begin{aligned} \text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) &= \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2 \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - \mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2}_{\text{var}[\hat{\Theta}]} + \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2 - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2}_{(\mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta)^2} \end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\begin{aligned} \text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) &= \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2 \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - \mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2}_{\text{var}[\hat{\Theta}]} + \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2 - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2}_{(\mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta)^2} \\ &= \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 \end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$\textcircled{1} \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$\textcircled{2} \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$\textcircled{3} \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$\textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta:$$

$$\mathbb{1} \geq \mathbb{P}(|\hat{\Theta}_n - \theta| < \varepsilon)$$

$\mathbb{P}(E) \leq 1$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$\textcircled{1} \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$\textcircled{2} \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$\textcircled{3} \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$\textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \underset{\mathbb{E}[\hat{\Theta}_n] = \theta}{=} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$① \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$② \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$③ \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$④ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta:$$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

$$\geq 1 - \frac{\text{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2}$$

Chebyshev

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$① \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$② \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$③ \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$④ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right) \\ &\geq 1 - \frac{\text{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2} \underset{\text{bias} = 0}{=} 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$① \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$② \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$③ \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$④ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$$

$$\begin{aligned} 1 & \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right) \\ & \geq 1 - \frac{\text{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$\textcircled{1} \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$\textcircled{2} \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$\textcircled{3} \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$\textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

perché $\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

\hat{M}_n NO

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

\hat{M}_n NO

\hat{M}'_n SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

~~$\hat{M}_n = \mu$~~

$\hat{M}'_n = X_3$

$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

\hat{M}_n NO

\hat{M}'_n SÌ

\hat{M}''_n SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3]$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2 = \frac{\text{var}[X_i]}{n}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2 = \frac{\text{var}[X_i]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2 = \frac{\text{var}[X_i]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

\bar{X}_n è lo stimatore migliore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{Sì}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{Sì}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{Sì}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Sì}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2 = \frac{\text{var}[X_i]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Sì}$$

- **ERRORE STANDARD** = $\underbrace{\text{se}(\hat{\Theta}; \theta)}_{\substack{\text{standard} \\ \text{error}}} := \sqrt{\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)}$

- ERRORE STANDARD = $\text{se}(\hat{\Theta}; \theta) := \sqrt{\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)}$
- EFFICIENZA RELATIVA di $\hat{\Theta}$ contro $\hat{\Theta}' := \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}'; \theta)}{\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)}$

- ERRORE STANDARD = $\text{se}(\hat{\theta}; \theta) := \sqrt{\text{mse}(\hat{\theta}; \theta)}$
- EFFICIENZA RELATIVA di $\hat{\theta}$ contro $\hat{\theta}' := \frac{\text{mse}(\hat{\theta}'; \theta)}{\text{mse}(\hat{\theta}; \theta)}$

Se supera 1, lo stimatore $\hat{\theta}$ è meglio di $\hat{\theta}'$ in termini di mse

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? **Sì**

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = ???$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \text{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \text{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \text{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = \text{var}[\bar{X}_n] + \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = \text{var}[\bar{X}_n] + \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = \text{var}[\bar{X}_n] + \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} (n-1) \sigma^2 \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2) \right\} \\ &= \frac{1}{\cancel{n-1}} (\cancel{n-1}) \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? **Sì**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2) \right\} \\ &= \frac{1}{\cancel{n-1}} (\cancel{n-1}) \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(S_n^2; \sigma^2) = \text{var}[S_n^2] + \text{bias}(S_n^2; \sigma^2)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(S_n^2; \sigma^2) = \text{var}[S_n^2] + \text{bias}(S_n^2; \sigma^2)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(S_n^2; \sigma^2) = \text{var}[S_n^2] + \text{bias}(S_n^2; \sigma^2)^2$$

$$= \frac{1}{n} \mathbb{E}[(X_i - \mu)^4] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \quad (\text{più complicato})$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\begin{aligned} \text{mse}(S_n^2; \sigma^2) &= \text{var} \left[S_n^2 \right] + \cancel{\text{bias}(S_n^2; \sigma^2)^2} \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[(X_i - \mu)^4 \right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica? **Sì**

$$\begin{aligned} \text{mse}(\mathbf{S}_n^2; \sigma^2) &= \text{var} \left[S_n^2 \right] + \cancel{\text{bias}(\mathbf{S}_n^2; \sigma^2)^2} \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[(X_i - \mu)^4 \right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{0} \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica? Sì

S_n^2 è un buono stimatore di σ^2

Funzioni di parametri

IPOSTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \end{array} \right.$

Funzioni di parametri

IOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

Funzioni di parametri

IPOSTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

Qual è uno stimatore non distorto di θ ?

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})]$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \underset{\substack{\text{metodo} \\ \text{delta}}}{\simeq} g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}])$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) \underset{\substack{\mathbb{E}[\hat{A}] = \alpha \\ \mathbb{E}[\hat{B}] = \beta}}{=} g(\alpha, \beta)$$

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

OSSERVAZIONE:

$$\theta = a\alpha + b\beta \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = a\hat{A} + b\hat{B} \text{ è } \text{esattamente} \text{ non-distorto}$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

OSSERVAZIONE:

$$\theta = a\alpha + b\beta \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = a\hat{A} + b\hat{B} \text{ è esattamente non-distorto}$$

E per stimare l'errore $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)$?

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e(\alpha, \beta, \text{var}[\hat{A}], \text{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e(\alpha, \beta, \text{var}[\hat{A}], \text{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

$$\text{IPOTESI ULTERIORI: } \left\{ \begin{array}{l} - S_A^2 \text{ stimatore non-distorto di } \text{var}[\hat{A}] \\ - S_B^2 \text{ stimatore non-distorto di } \text{var}[\hat{B}] \end{array} \right.$$

Funzioni di parametri

IOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

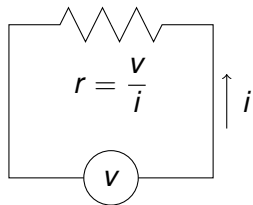
$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e(\alpha, \beta, \text{var}[\hat{A}], \text{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

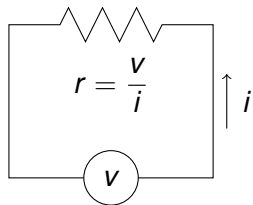
IOTESI ULTERIORI: $\left\{ \begin{array}{l} - S_A^2 \text{ stimatore non-distorto di } \text{var}[\hat{A}] \\ - S_B^2 \text{ stimatore non-distorto di } \text{var}[\hat{B}] \end{array} \right.$

\Rightarrow stesso motivo di prima $\widehat{\text{MSE}} := e(\hat{A}, \hat{B}, S_A^2, S_B^2)$ stimatore approssimativamente non-distorto di $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)$

ESEMPIO

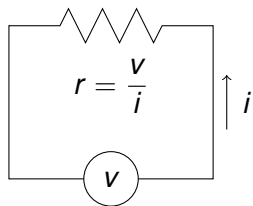


ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$



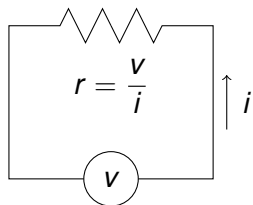
$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

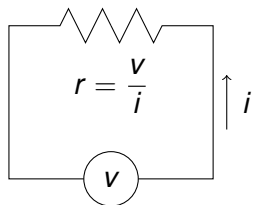
no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

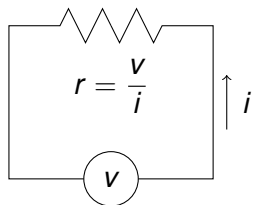
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i]$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

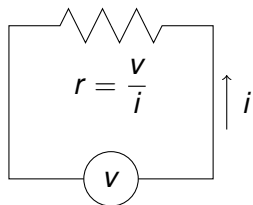
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

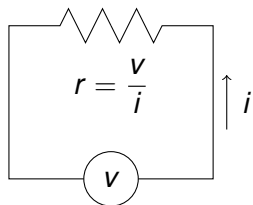
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

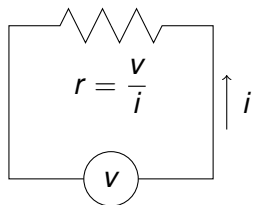
no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

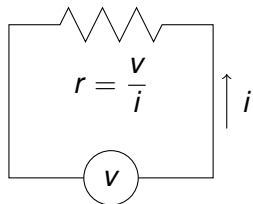
no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore **approx.** non-distorto di r



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

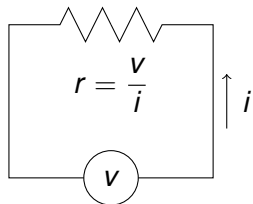
$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right]$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

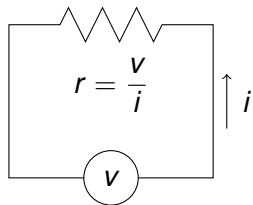
$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\text{metodo delta}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\bar{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]}$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

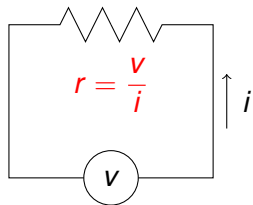
$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\text{metodo delta}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\bar{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]} = \frac{v}{i}$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

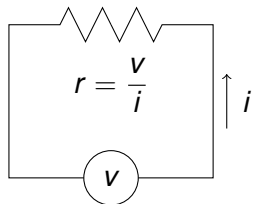
$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\text{metodo delta}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\bar{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]} = \frac{v}{i} = r$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore **approx. non-distorto** di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\text{metodo delta}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\bar{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]} = \frac{v}{i} = r$$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; \nu) = \text{var}[\bar{V}] + \text{bias}(\bar{V}; \nu)^2$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m}$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m}$
 $\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_V := \frac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\text{mse}(\bar{V}; v)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m}$
 $\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_V := \frac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\text{mse}(\bar{V}; v)$
- $\text{mse}(\bar{I}; i) = \dots\dots\dots = \frac{\sigma_I^2}{n}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$

- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ **non-distorto** di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$

• $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m}$

$\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_V := \frac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\text{mse}(\bar{V}; v)$

• $\text{mse}(\bar{I}; i) = \dots = \frac{\sigma_I^2}{n}$

$\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_I := \frac{S_I^2}{n}$ è uno stimatore non-distorto di $\text{mse}(\bar{I}; i)$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
 - $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
 - $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \underbrace{\text{bias}(\hat{R}; r)^2}_{\simeq 0}$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \underbrace{\text{bias}(\hat{R}; r)^2}_{\simeq 0} \simeq \text{var}[\hat{R}]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$
 $\underset{\substack{\text{metodo} \\ \text{delta}}}{\simeq} [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$
 $\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}]$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$
 $\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}]$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = v \quad \mathbb{E}[\bar{I}] = i$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$
 $\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}]$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = v \quad \mathbb{E}[\bar{I}] = i \quad \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m} \quad \text{var}[\bar{I}] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

$$\begin{aligned} \bullet \text{mse}(\hat{R}; r) &= \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})] \\ &\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}] \\ &= \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} \end{aligned}$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = v \quad \mathbb{E}[\bar{I}] = i \quad \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m} \quad \text{var}[\bar{I}] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

$$\begin{aligned} \bullet \text{mse}(\hat{R}; r) &= \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})] \\ &\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}] \\ &= \left[\frac{1}{i} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} \end{aligned}$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = v \quad \mathbb{E}[\bar{I}] = i \quad \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m} \quad \text{var}[\bar{I}] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- \bar{V} non-distorto di v
- \bar{I} non-distorto di i

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
 - $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
 - $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
 - \bar{V} non-distorto di v
 - \bar{I} non-distorto di i
- $\text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
 - $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
 - $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
 - \bar{V} non-distorto di v
 - \bar{I} non-distorto di i
- $\text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- \bar{V} non-distorto di v
- \bar{I} non-distorto di i

$$\bullet \text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$$
$$\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_R := e(\bar{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2) \text{ è uno stimatore approx. non-distorto di } \text{mse}(\hat{R}; r)$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- \bar{V} non-distorto di v
- \bar{I} non-distorto di i

$$\bullet \text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{\bar{i}} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{\bar{i}^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_R &:= e(\bar{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2) \\ &= \left[\frac{1}{\bar{I}} \right]^2 \cdot \frac{S_V^2}{m} + \left[-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2} \right]^2 \cdot \frac{S_I^2}{n} \end{aligned}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- \bar{V} non-distorto di v
- \bar{I} non-distorto di i

$$\bullet \text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{\bar{I}} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{\bar{I}^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$$

$$\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_R := e(\bar{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2)$$

$$= \frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} v_1 = 3.4 & v_2 = 3.3 & v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 & v_5 = 2.9 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} v_1 = 3.4 & v_2 = 3.3 & v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 & v_5 = 2.9 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned}
 v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 &\Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases} \\
 v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 & \\
 i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 &\Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}
 \end{aligned}$$

parametro	stimatore	
v	\bar{V}	
i	\bar{I}	
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{I}}$	
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	
$\text{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\underbrace{\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}}_{\text{prima dell'esperimento}}$	

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned}
 v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\
 v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	\bar{V}	3.12
i	\bar{i}	1.83
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{i}}$	
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	
$\text{mse}(\bar{i}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{i}^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{i}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}$	
prima dell'esperimento		dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned} v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	\bar{V}	3.12
i	\bar{i}	1.83
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{i}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	
$\text{mse}(\bar{i}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{f^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{i}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}$	
prima dell'esperimento		dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned}
 v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\
 v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	\bar{V}	3.12
i	\bar{i}	1.83
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{i}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	$\frac{0.092}{5} = 0.018$
$\text{mse}(\bar{i}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	$\frac{0.123}{3} = 0.041$
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{f^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{i}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}$	
prima dell'esperimento		dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned} v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	\bar{V}	3.12
i	\bar{i}	1.83
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{i}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	$\frac{0.092}{5} = 0.018$
$\text{mse}(\bar{i}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	$\frac{0.123}{3} = 0.041$
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{i}^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{i}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}$	$\frac{1}{1.83^2} \cdot \frac{0.092}{5} + \frac{3.12^2}{1.83^4} \cdot \frac{0.123}{3} = 0.041$
prima dell'esperimento		dopo l'esperimento