Statistica - 7ª lezione

23 marzo 2021

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

La media campionaria *tende in probabilità* al valore atteso delle X_i:

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

La media campionaria *tende in probabilità* al valore atteso delle X_i:

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

μ non si può misurare, ma $\overline{X}_n$ sì !

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \underset{\mathbb{P}(E)\,\leq\,1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \underset{\mathbb{P}(E)\,\leq\,1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E)\,= \\ =\,1\,-\,\mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n]\,=\,\mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right)$$

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) & \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
& \underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \\
& \underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E)\,\le\,1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) & \underset{\substack{\mathbb{P}(E)\,= \\ =\,1\,-\,\mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
& \underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n]\,=\,\mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \\
& \underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2} \\
& \underset{\sigma^2\,:=\,\operatorname{var}[X_i]}{=} 1 - \frac{(\sigma^2/n)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$
\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E)\,\leq\,1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E)\,= \\ =\,1\,-\,\mathbb{P}(\overline{E})}}{=} & \; 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n]\,=\,\mu}{=} & \; 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \\
\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} & \; 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2} \\
\underset{\sigma^2\,:=\,\operatorname{var}[X_i]}{=} & \; 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$
\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E)\le 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} & \ 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} & \ 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \\
\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} & \ 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2} \\
\underset{\sigma^2 := \operatorname{var}[X_i]}{=} & \ 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \equiv \quad p$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \equiv \quad p$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon\,(n, p) = \frac{\sigma}{\sqrt{n(1-p)}}$$

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

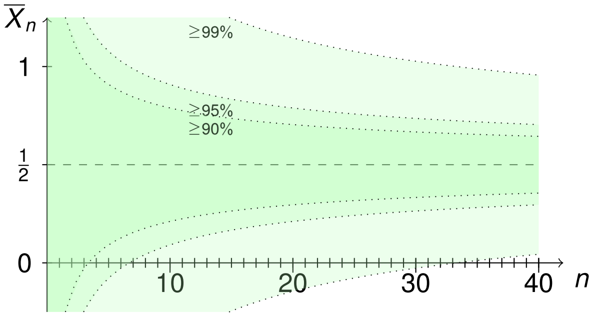
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

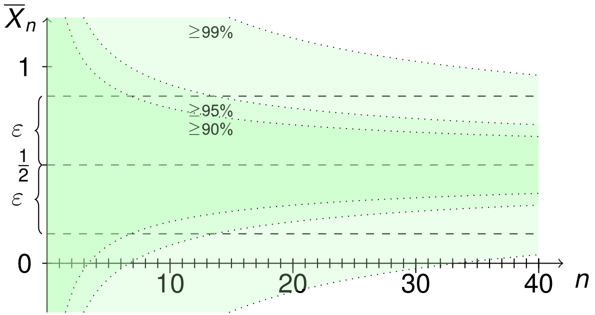
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

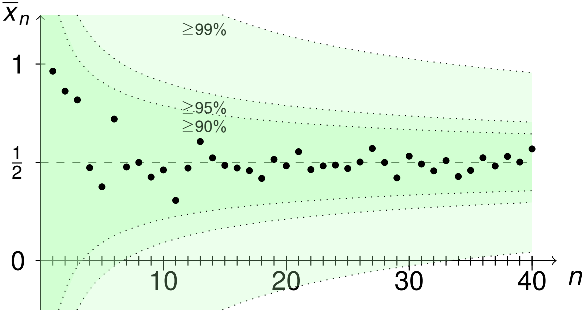
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



$\overline{x}_n$ = *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

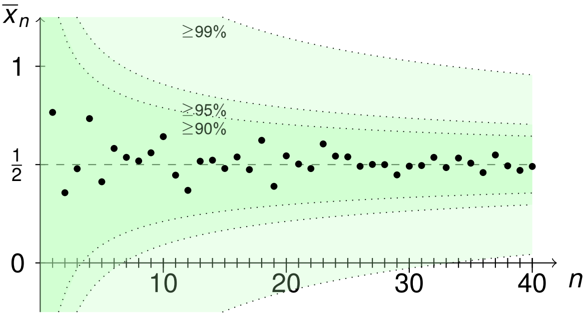
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$\Rightarrow \quad \mu = \dfrac{1}{2}$

con Chebyshev



$\overline{x}_n$ = *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

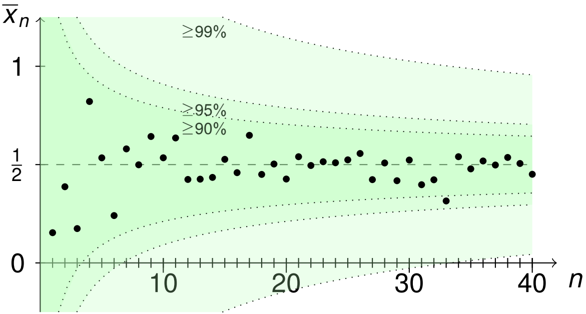
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



$\overline{x}_n$ = *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \dots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}}$$

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica (dei successi)}$$

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \dots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con q = probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b)$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a, b])$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a, b])$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{FR}([a, b]) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a, b])$$

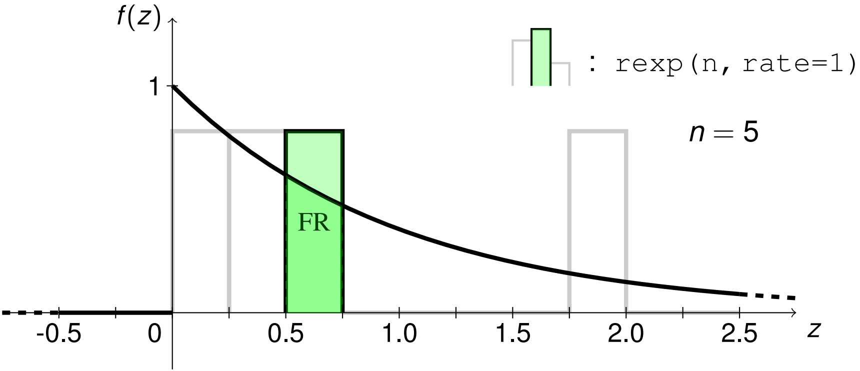
$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{FR}([a, b]) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$$

La frequenza relativa converge all'area sottesa dalla densità !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

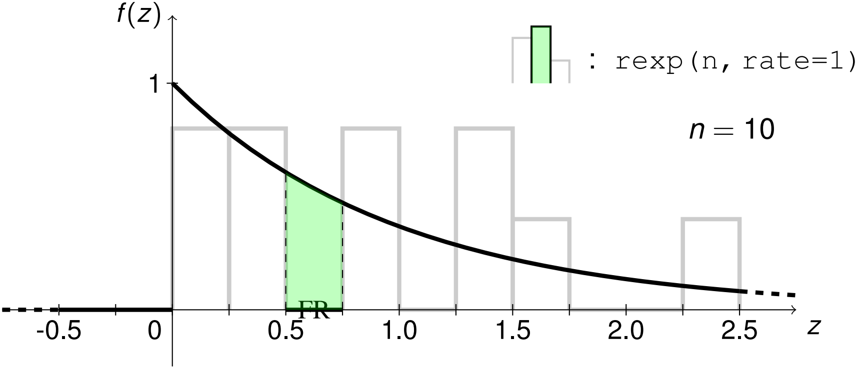
$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

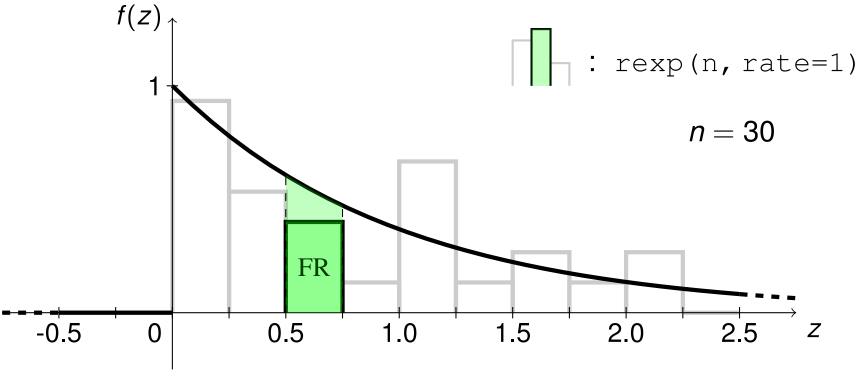
$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

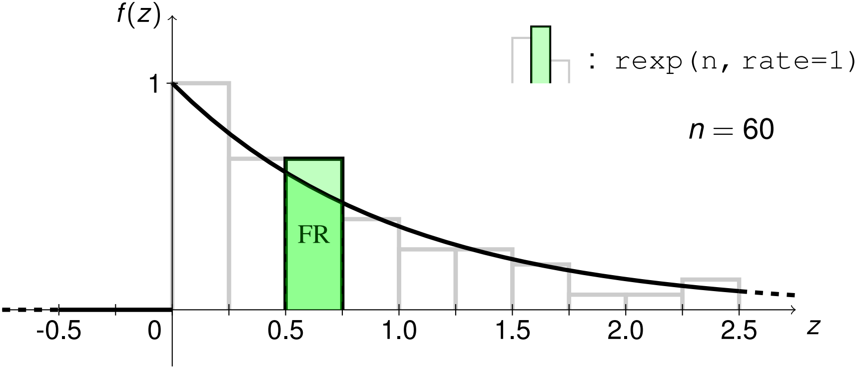
$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

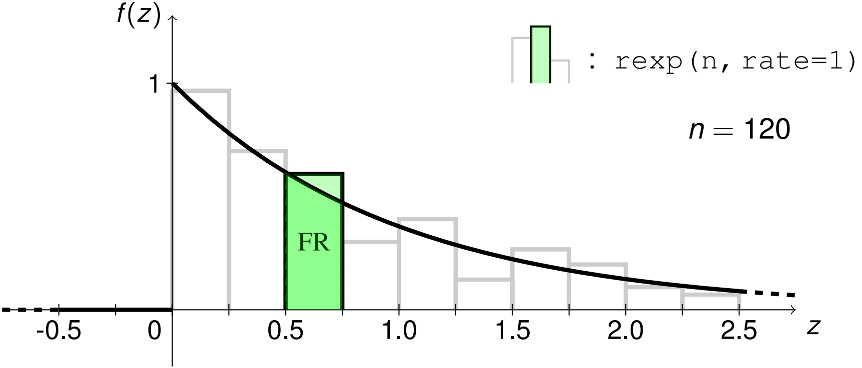
$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo: non lo so

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo: non lo so
- Se $n > 1$ è grande: esiste il famoso…

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo : non lo so
- Se $n > 1$ è grande : esiste il famoso…

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

$\approx$: 'ha circa densità'

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$

OSSERVAZIONI:

- Tipicamente, ‘grande’ $=$ ‘maggiore di 30’

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

OSSERVAZIONI:

- Tipicamente, 'grande' $=$ 'maggiore di 30'
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$

OSSERVAZIONI:

- Tipicamente, ‘grande’ $=$ ‘maggiore di 30’
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Il TLC vale qualunque sia la densità delle X_i

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

OSSERVAZIONI:

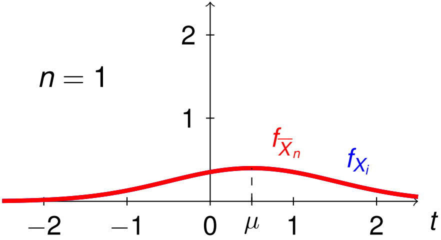
- Tipicamente, 'grande' $=$ 'maggiore di 30'
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Il TLC vale qualunque sia la densità delle X_i
- Il TLC non dice nulla sulla densità delle X_i

Teorema del limite centrale

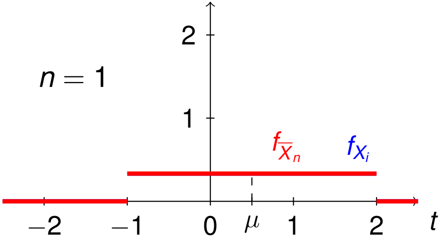
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



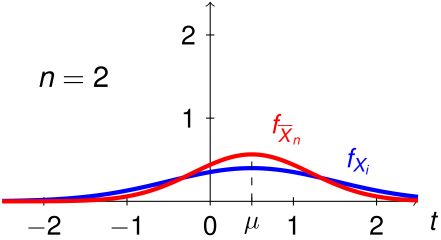
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

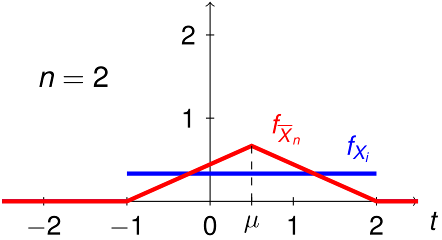
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



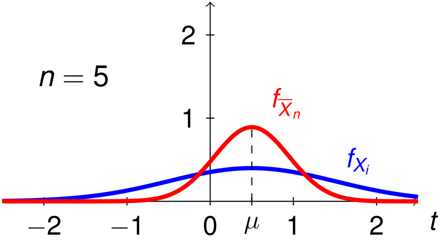
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

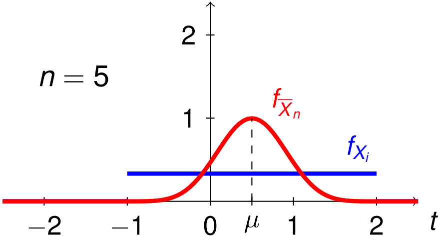
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



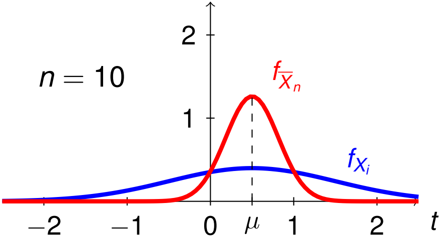
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

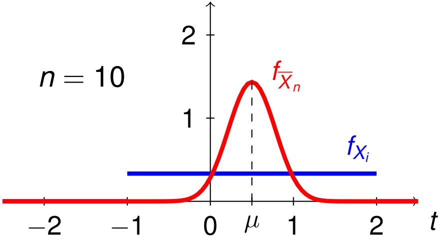
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



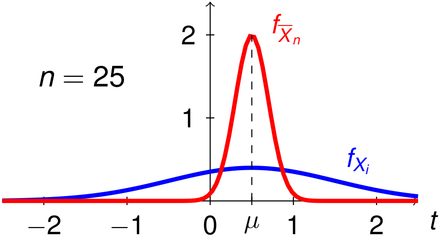
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

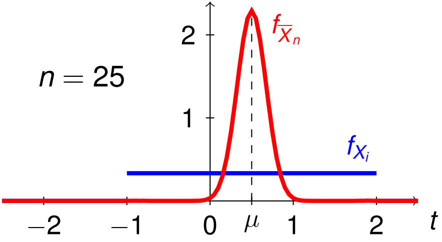
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



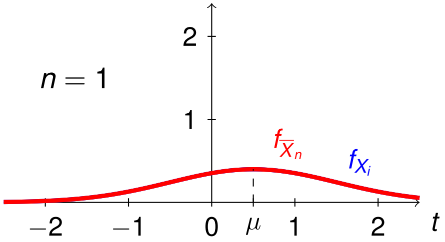
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

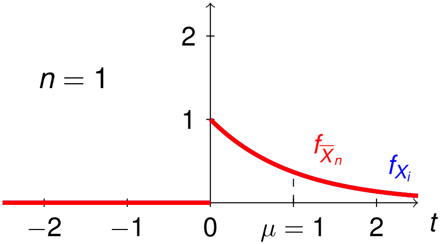
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



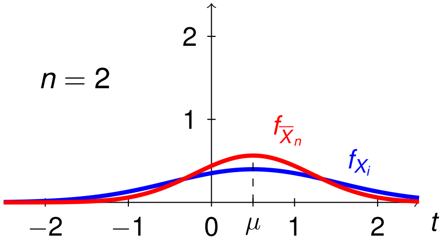
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

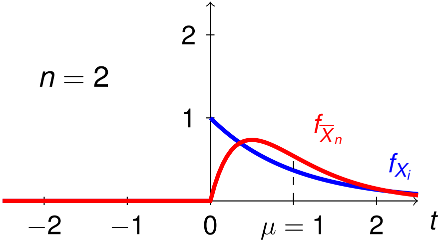
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



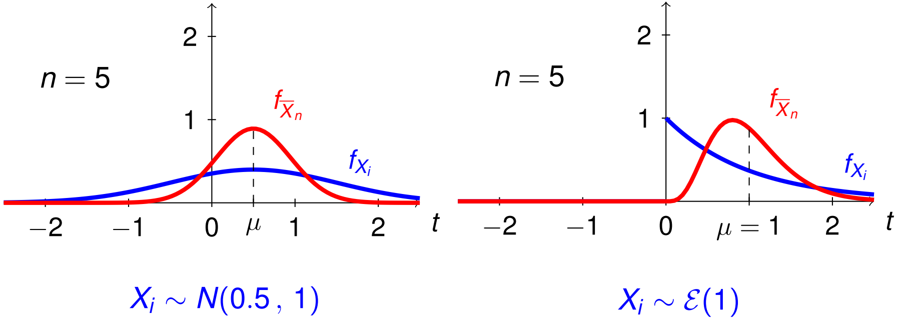
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

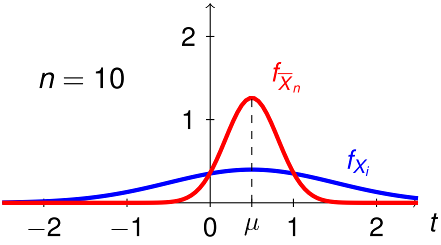


Teorema del limite centrale

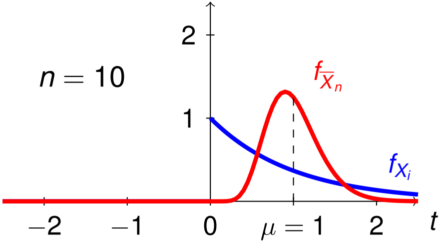
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



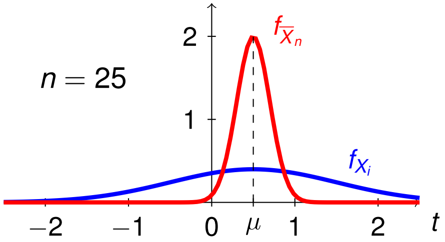
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

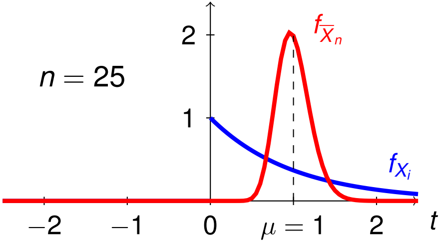
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

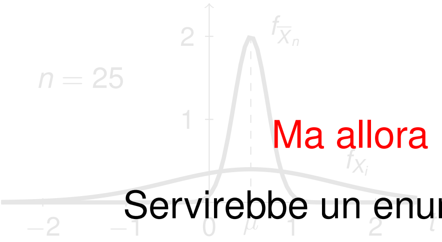


$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

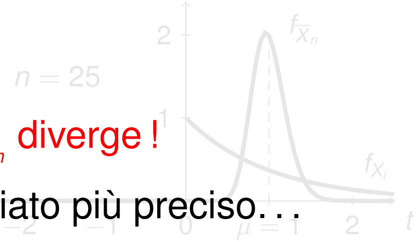
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Ma allora $f_{\overline{X}_n}$ diverge !

Servirebbe un enunciato più preciso…

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

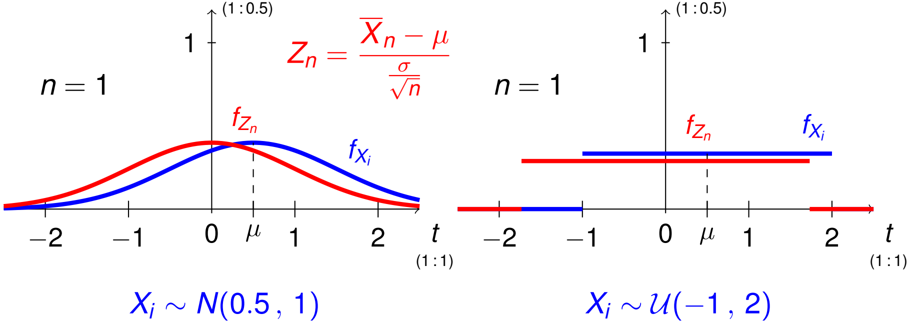
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

standardizzazione di $\overline{X}_n$

Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

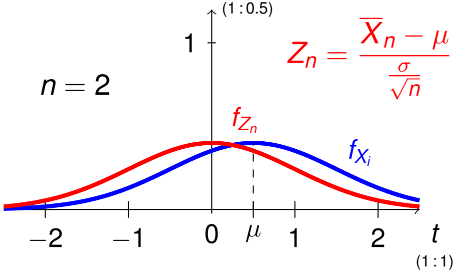


Teorema del limite centrale

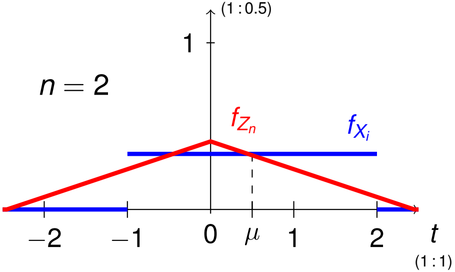
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

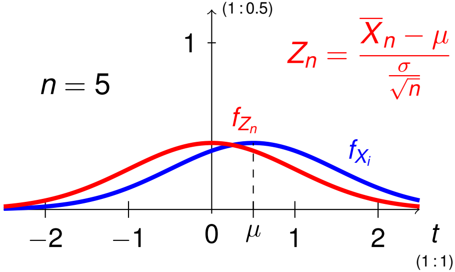


$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

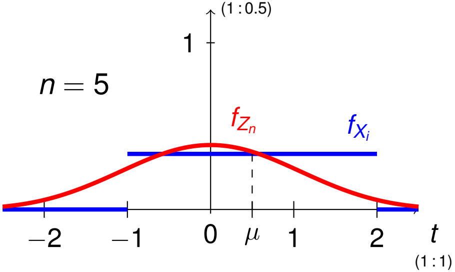
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



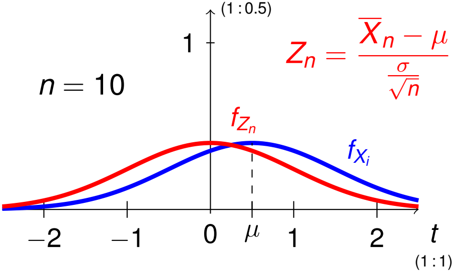
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

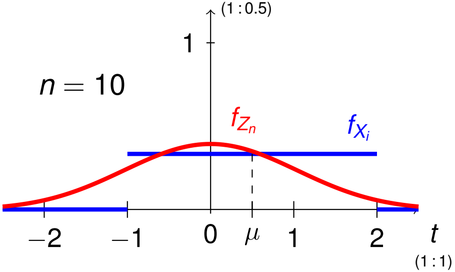
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\text{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



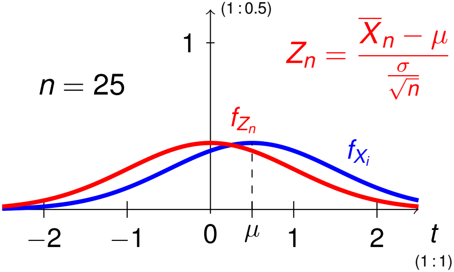
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

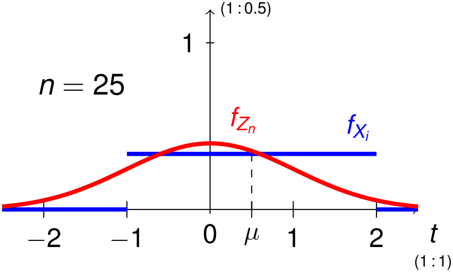
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



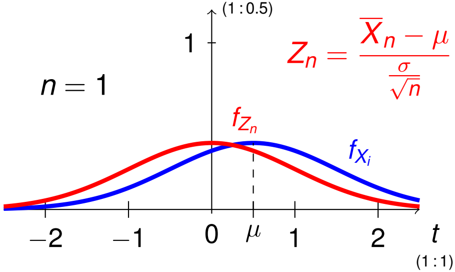
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

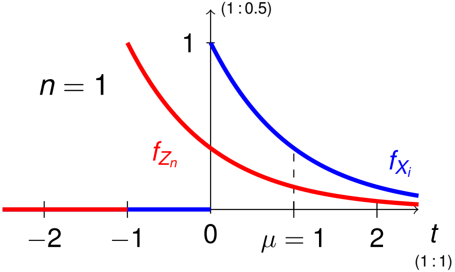
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



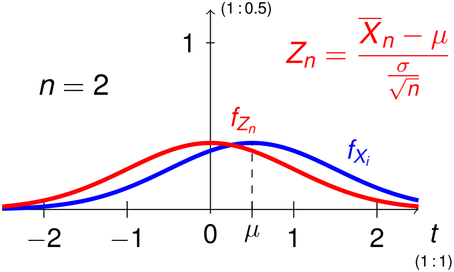
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

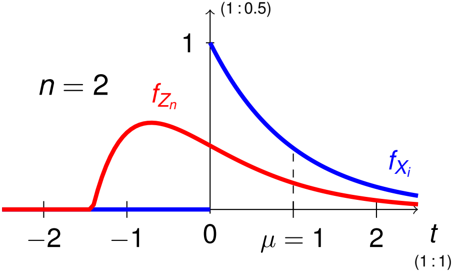
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\, 1)$



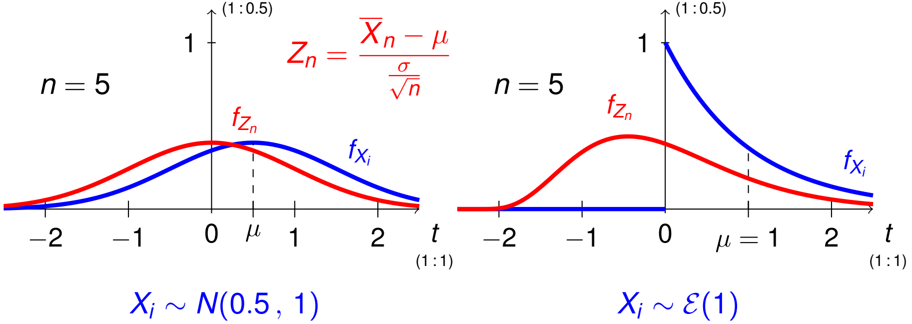
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

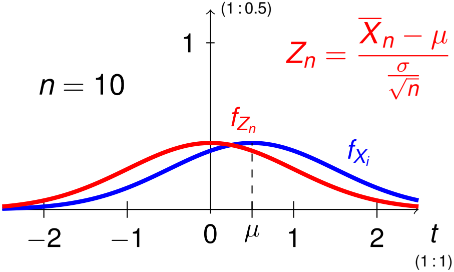


Teorema del limite centrale

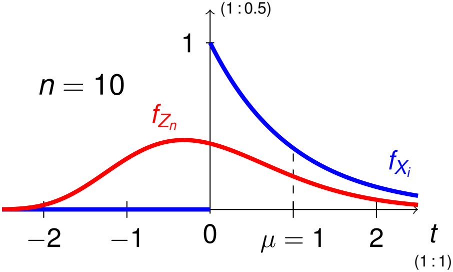
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z \right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



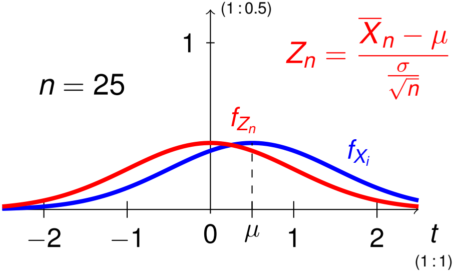
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

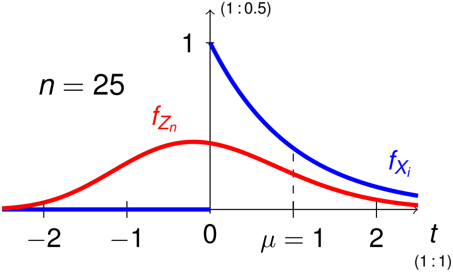
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z \right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

Qual è la densità di $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ quando n è grande ?

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]$ linearità di $\mathbb{E}$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{\mu} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{\mu}$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{\mu} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{\mu} = n\mu$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$ indipendenza delle X_i

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$

- $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \operatorname{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\operatorname{var}[X_1]}_{\sigma^2} + \ldots + \underbrace{\operatorname{var}[X_n]}_{\sigma^2}$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{\sigma^2} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{\sigma^2} = n\sigma^2$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\sigma^2$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N}$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\sigma^2$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\ n\,\sigma^2\right)}$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N}$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$
- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\sigma^2$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 + \ldots + X_n \approx N(n\,\mu,\, n\,\sigma^2)}$$

Teorema del Limite Centrale (versione equivalente)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora

$$X_1 + \ldots + X_n \sim B(n, q)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q)$$

$$X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{aligned} X_1 + \ldots + X_n &\sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n &\approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

Quali sono i parametri della gaussiana ?

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\mu,\, n\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\mu,\, n\sigma^2\big)$$

- $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

- $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$
- $\sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right] = q(1-q)$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)}$$

$$\Downarrow$$

- $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$
- $\sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right] = q(1-q)$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q \\ \sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right] = q(1-q) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big)}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{aligned} X_1 + \ldots + X_n &\sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n &\approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q \\ &\bullet\ \sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right] = q(1-q) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big)}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale (versione formale)

Se $Y_n \sim B(n, q)$ per ogni n, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k)$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k) = \sum_{k=0}^{19} \binom{30}{k} 0.5^k (1-0.5)^{30-k}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k) = \sum_{k=0}^{19} \binom{30}{k} 0.5^k (1-0.5)^{30-k} = ???$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}\,(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\quad Y_{30} \quad\quad < \quad\quad 20 \quad\quad \right)$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\quad Y_{30} - n\,q \quad < \quad 20 - 30 \cdot 0.5 \quad \right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}\,(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}} \right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30\cdot 0.5,\, 30\cdot 0.5\cdot(1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30\cdot 0.5}{\sqrt{30\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}}\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right) = \Phi(1.826)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30,$ ... $- 0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

Col calco

$B(30, \ldots - 0.5))$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30,$ … $0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30,$ … $0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \le 19\text{”} = \text{“}Y \le 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\le$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \le 19.5)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.643) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIO

Col calco

$B(30,$ ... $-0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.643) = 94.950\%$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n,q) \simeq \begin{cases} N\big(n\,q,\ n\,q(1-q)\big) \quad \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n,q) \simeq \begin{cases} N\big(n\,q,\ n\,q(1-q)\big) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\ \\ \mathcal{P}(n\,q) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ q \leq 0.01 \\ n\,q \simeq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n, q) \simeq \begin{cases} N\big(n\,q,\ n\,q(1-q)\big) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\ \\ \mathcal{P}(n\,q) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ q \leq 0.01 \\ n\,q \simeq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\lambda) \simeq N(\lambda,\ \lambda) \quad \text{se} \quad \lambda \geq 5$$

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

dove:

ℓ = lunghezza *vera* del lato (costante deterministica)

X_1 = errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (v.a.)

X_2 = errore dovuto alla dilatazione termica del metro (v.a.)

X_3 = errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (v.a.)

. . . .

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

dove:

ℓ = lunghezza *vera* del lato (<u>costante deterministica</u>)

X_1 = errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (<u>v.a.</u>)

X_2 = errore dovuto alla dilatazione termica del metro (<u>v.a.</u>)

X_3 = errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (<u>v.a.</u>)

. . . .

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + \underbrace{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}_{E}$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (<u>costante deterministica</u>)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (<u>v.a.</u>)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (<u>v.a.</u>)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (<u>v.a.</u>)

. . . .

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

CONSEGUENZA: $E := X_1 + X_2 + \ldots + X_n \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0, \sigma_E^2)$

con $\sigma_E^2 = n \operatorname{var}[X_i]$

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n \; = \ell + E \approx N(\ell,\, \sigma_E^2)$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (costante deterministica)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (v.a.)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (v.a.)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (v.a.)

$\ldots\ldots\ldots$

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

CONSEGUENZA: $E := X_1 + X_2 + \ldots + X_n \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,\, \sigma_E^2)$

con $\sigma_E^2 = n \operatorname{var}[X_i]$

Cose da non fare MAI

- Credere che il TLC renda le X_i gaussiane quando n è grande:

  È assurdo !

  È $\overline{X}_n$ che diventa gaussiana. La densità delle X_i non può cambiare né se $n = 1$ né se $n = 10$ né se $n = 1'000'000$

Cose da non fare MAI

- Credere che il TLC renda le X_i gaussiane quando n è grande:

  È assurdo !

  È $\overline{X}_n$ che diventa gaussiana. La densità delle X_i non può cambiare né se $n = 1$ né se $n = 10$ né se $n = 1^{\cdot}000^{\cdot}000$

- Credere che $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ sia la stessa cosa di $n\,X_1$:

  Non ha senso !

  Se lancio un dado $n = 2$ volte ed esce $x_1 = 4$ al primo lancio e $x_2 = 1$ al secondo, la somma dei due lanci non può essere $n\,x_1 = 8$, ma è piuttosto $x_1 + x_2 = 5$.