Politecnico di Milano - Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

PRIMA PROVA IN ITINERE DI STATISTICA PER INGEGNERIA ENERGETICA
9 maggio 2014

Cognome, Nome e Numero di matricola:

Problema 1. La legge di Planck afferma che l'energia E associata ad una radiazione elettromagnetica dipende dalla lunghezza d'onda Λ della radiazione stessa attraverso la nota formula:

$$E = \frac{h \cdot c}{\Lambda}$$

dove $h = 6,625 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ è la costante di Planck e c è la velocità di propagazione della radiazione (si consideri la velocità nel vuoto, ovvero $c = c_0 = 2,9976 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$). Il noto esperto di energia Mario Pannello (laureatosi a pieni voti al Politecnico di Milano, dopo un brillante esame di statistica) è interessato a studiare l'energia delle radiazioni nella zona salentina, dove è intenzionato a costruire la più grande centrale di energia solare del mondo utilizzando pannelli in silicio cristallino che sfruttano le radiazioni a lunghezze d'onda nella parte visibile dello spettro. Misura pertanto le lunghezze d'onda Λ, in μm, di 650 radiazioni ottenendo i dati riassunti nella seguente tabella:

Classi	Frequenze assolute
$[0.35; 0.45)$	175
$[0.45; 0.55)$	165
$[0.55; 0.65)$	201
$[0.65; 0.75)$	109

a) Completare la tabella di distribuzione di frequenze (inserendo frequenze relative, frequenze cumulate e densità) e rappresentare la distribuzione delle lunghezze d'onda Λ misurate tramite un istogramma.

Mario Pannello vorrebbe ora calcolare media e terzo quartile delle lunghezze d'onda osservate. Purtroppo non ha più a disposizione i 650 dati grezzi, ma solo la tabella sopra riportata. Fortunatamente, grazie al brillante esame di statistica, non tutto è perduto.

b) Calcolare, eventualmente in maniera approssimata, la media e il terzo quartile delle lunghezze d'onda misurate.

Mario Pannello si accorge infine che per la sua analisi sono più rilevanti le energie E piuttosto che le lunghezze d'onda Λ. Purtroppo non ha più a disposizione i 650 dati grezzi, ma solo la tabella sopra riportata. Fortunatamente, sempre grazie al brillante esame di statistica, non tutto è perduto.

c) Calcolare una tabella di distribuzione di frequenze per le energie E delle radiazioni osservate e rappresentarne la distribuzione tramite un istogramma (indicando l'unità di misura considerata).

d) Calcolare, eventualmente in maniera approssimata, la media e il primo quartile delle energie delle radiazioni osservate.

Risultati.

a) La tabella completa è riportata in Tabella 1. L'istogramma sulla sinistra di Figura 1.

b) Utilizzando le approssimazioni per calcolare media e quantili a partire da un istogramma si ottiene:
$\overline{\lambda}_n \simeq 0.4 * 0.269 + 0.5 * 0.254 + 0.6 * 0.309 + 0.7 * 0.168 = 0.5376$
$Q_3 \simeq 0.55 + 0.1 \cdot \frac{0.75-0.523}{0.832-0.523} = 0.623$

c) Consideriamo l'energia in Joule. La tabella completa è riportata in Tabella 2. L'istogramma sulla destra di Figura 1 (indispensabile in questo caso l'uso delle densità).

d) Utilizzando le approssimazioni per calcolare media e quantili a partire da un istogramma si ottiene:
$\overline{e}_n \simeq (2.8516 * 0.168 + 3.333 * 0.309 + 4.012 * 0.254 + 5.0435 * 0.269) \cdot 10^{-19} = 3.8847 \cdot 10^{-19}$
$Q_1 \simeq (3.055 + (3.611 - 3.055) \cdot \frac{0.25-0.168}{0.477-0.168}) \cdot 10^{-19} \simeq 3.203 \cdot 10^{-19}$

Classi	Fr. ass.	Fr. rel.	Fr. cum.	Den.
$[0.35; 0.45)$	175	0.269	0.269	2.69
$[0.45; 0.55)$	165	0.254	0.523	2.54
$[0.55; 0.65)$	201	0.309	0.832	3.09
$[0.65; 0.75)$	109	0.168	1	1.68

Tabella 1: Tabella di distribuzione di frequenze per le lunghezze d'onda

Classi	Fr. ass.	Fr. rel.	Fr. cum.	Den.
$10^{-19} \cdot [2.648; 3.055)$	109	0.168	0.168	$4.11 \cdot 10^{18}$
$10^{-19} \cdot [3.055; 3.611)$	201	0.309	0.477	$5.56 \cdot 10^{18}$
$10^{-19} \cdot [3.611; 4.413)$	165	0.254	0.731	$3.17 \cdot 10^{18}$
$10^{-19} \cdot [4.413; 5.674)$	175	0.269	1	$2.14 \cdot 10^{18}$

Tabella 2: Tabella di distribuzione di frequenze per le energie

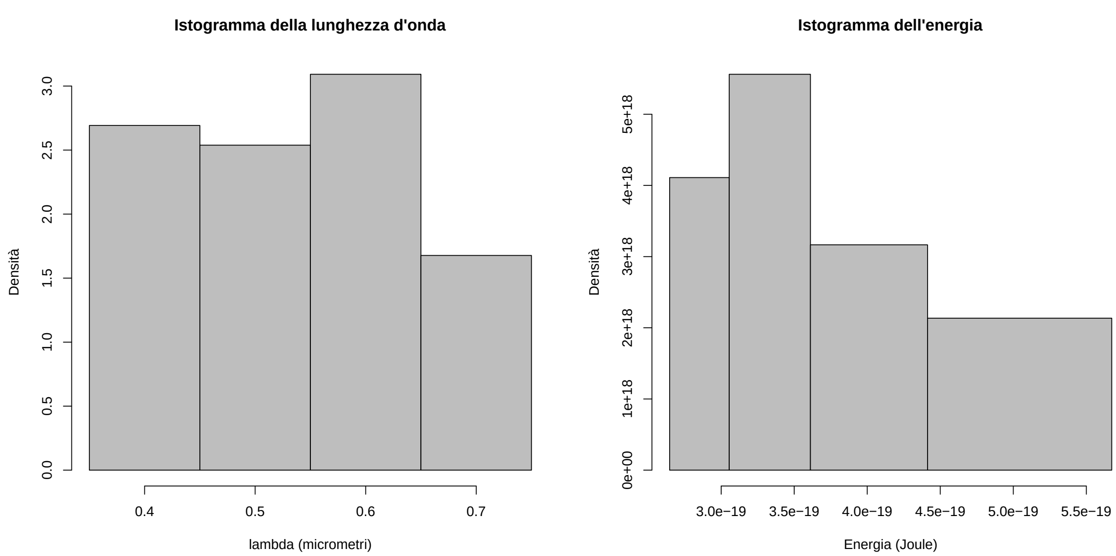

Figura 1: Istrogramma delle lunghezze d'onda (sulla sinistra) e delle energie (sulla destra)

Problema 2. Cesare sa di vincere a basket contro Mario in ogni singola partita con probabilità 0.42; allora decide di giocare con Mario nel modo seguente. Il Lunedì di ogni settimana Cesare e Mario giocano 6 mini-partite; se Cesare ne vince almeno 2 il gioco si ferma, altrimenti il Mercoledì della stessa settimana Cesare e Mario giocano altre 6 partite. Si assuma che i risultati delle partite siano tra loro indipendenti.

a) Si determini la probabilità che, in una data settimana, Cesare e Mario giochino anche il Mercoledì.

b) Si determini la probabilità che, in una data settimana, Cesare e Mario giochino solo il Lunedì.

Il centro sportivo dove giocano Cesare e Mario introduce una promozione per il Mercoledì: ogni 15 prenotazioni pagate, la 16-esima è gratuita.

c) Si determini la probabilità che Cesare e Mario usufruiscano della promozione almeno una volta in un anno[1], ovvero che Cesare e Mario giochino anche il Mercoledì per più di 15 settimane in un anno.

d) Quante settimane ci vogliono perché Cesare e Mario usufruiscano della promozione con una probabilità del 10% almeno.

Risultati.

a) Sia X = il numero di mini-partite su 6 vinte da Cesare,
$X \sim Bi(6, 0.42)$.
Allora
$$\mathbb{P}(\text{giocano anche mer}) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \binom{6}{0} \cdot 0.42^0 \cdot (1-0.42)^6 + \binom{6}{1} \cdot 0.42^1 \cdot (1-0.42)^5 = 0.2035.$$

b) $\mathbb{P}(\text{giocano sol lun}) = 1 - \mathbb{P}(\text{giocano anche mer}) = 1 - 0.2035 = 0.7965.$

c) Sia Y = il numero di mercoledì in un anno in cui Cesare e Mario giocano,
$Y \sim Bi(52, p)$ con $p = 0.2035$,
$\mathbb{E}[Y] = \mu = 52 \cdot p = 10.58$,
$\text{Var}(Y) = \sigma^2 = 52 \cdot p \cdot (1-p) = 8.4277$.
Poiché $\mu > 5$ e $52 - \mu > 5$ possiamo sfruttare l'approssimazione Normale della Binomiale, per cui $Y \simeq \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e possiamo calcolare la probabilità richiesta come segue, ricordandosi di effettuare la correzione di continuità:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 15) = \mathbb{P}(Y > 15.5) \approx \mathbb{P}(Z > (15.5 - \mu)/\sigma) = \mathbb{P}(Z > 1.6946) &\approx 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1.69) \\ &\approx 1 - 0.9549 = 0.0451.\end{aligned}$$
Senza approssimazione normale si troverebbe il risultato esatto $\mathbb{P}(Y > 15) = 0.0500$.

d) Sia W_n = il numero di mercoledì su n settimane in cui Cesare e Mario giocano,
$W_n \sim Bi(n, p)$ con $p = 0.2035$.
Dobbiamo risolvere rispetto ad n la disequazione
$$\mathbb{P}(W_n > 15) \geq 0.1.$$
Poiché per $n = 52$ la disequazione non è soddisfatta, ma già vale l'approssimazione normale, possiamo dare per scontato che $W_n \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p))$ e risolvere come segue:
$$0.1 \leq \mathbb{P}(W_n > 15) = \mathbb{P}\left(\frac{W_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{15.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{15.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
$$\frac{15.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z_{0.1} \qquad \Rightarrow \qquad n \geq \left(\frac{-z_{0.1}\sqrt{p(1-p)} + \sqrt{z_{0.1}^2 p(1-p) + 4 \cdot 15.5p}}{2p}\right)^2 = 57.03$$
$$n \geq 58.$$
Senza approssimazione normale si troverebbe il risultato esatto $n \geq 57$.

[1] Si consideri l'anno come composto da 52 settimane

Problema 3. Uno studente dell'Università di Noah ha appena seguito e dato l'esame di *Storia della Federazione Terrestre* presso l'Università del Principato di Zeon prendendo 8.5. Le due Università tuttavia non hanno lo stesso sistema di voti: i voti sufficienti a Zeon sono compresi fra 6 e 10, mentre a Noah sono compresi fra 13 e 25. In entrambe le Università i voti sono numeri reali, non necessariamente interi. Ora lo studente è tornato a Noah, il suo esame deve essere convalidato e il suo voto convertito.

1. Lo studente cerca di prevedere il risultato della conversione con una proporzione. Cosa ottiene?

L'Università di Noah però sa bene che la distribuzione dei voti presso i due Atenei non è equivalente e pertanto tiene conto di questa differenza nella conversione. Il voto X di uno studente di *Storia della Federazione Terrestre* a Noah è una variabile continua con densità

$$f_X(x) = \frac{(x-25)^2}{576} I_{[13,25]}(x),$$

mentre il voto Y di uno studente di *Storia della Federazione Terrestre* a Zeon è una variabile continua con densità a V, ovvero della forma

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 6, \\ -k(y-8), & \text{se } 6 \leq y \leq 8, \\ k(y-8), & \text{se } 8 \leq y \leq 10, \\ 0, & \text{se } y > 10. \end{cases}$$

2. Determinare il valore della costante k e tracciare un grafico qualitativo delle densità f_X e f_Y.

3. Calcolare e tracciare un grafico qualitativo delle funzioni di ripartizione F_X e F_Y.

4. Confrontare voto medio e voto mediano per X. Confrontare voto medio e voto mediano per Y.

5. Calcolare la percentuale α di studenti che a Zeon prende in *Storia della Federazione Terrestre* un voto Y di almeno 8.5.

6. L'Università di Noah converte il voto $y = 8.5$ con quel voto x che a Noah viene preso o superato dalla medesima percentuale di studenti di *Storia della Federazione Terrestre*. Cosa ottiene?

Risultati.

1. $(x-13):(25-13)=(8.5-6):(10-6) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=20.5.$

2. $\begin{cases} f_Y(y)\geq 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k=1/4.$

3. $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } x\geq 13, \\ 1-\dfrac{(25-x)^3}{1'728}, & \text{se } 13\leq x\leq 25, \\ 1, & \text{se } x\geq 25, \end{cases} \qquad F_Y(y)\begin{cases} 0, & \text{se } y\leq 6, \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{(y-8)^2}{8}, & \text{se } 6\leq y\leq 8, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{(y-8)^2}{8}, & \text{se } 8\leq y\leq 10, \\ 1, & \text{se } y\geq 10. \end{cases}$

4. $\mathbb{E}X = \displaystyle\int_{13}^{25} x\,\frac{(x-25)^2}{576}\,\mathrm{d}x = 16,$

   $m_X: \quad F_X(m_X)=0.5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m_X = 25-\sqrt[3]{1'728\cdot 0.5}=15.4756,$

   per cui $m_X < \mathbb{E}X$, come ci si doveva aspettare dalla coda a destra della distribuzione f_X.

   $\mathbb{E}Y = m_Y = 8$ come ci si doveva aspettare dalla simmetria della distribuzione f_Y.

5. $\alpha = \mathbb{P}(Y\geq 8.5) = 15/32 = 0.46875 = 46.875\%.$

6. $x: \quad F_X(x)=0.46875 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=25-\sqrt[3]{1'728\cdot 0.46875}=15.6783.$