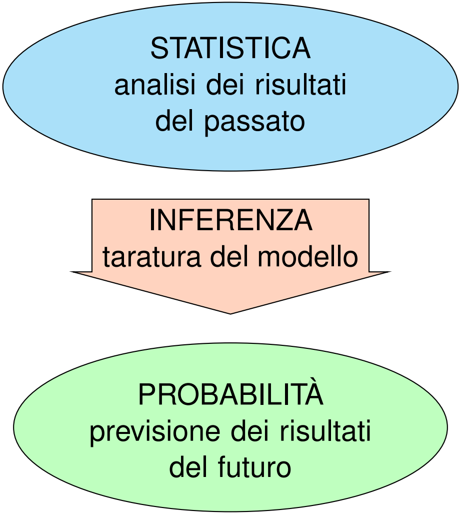
Statistica

Alessandro Toigo

Programma

- Statistica descrittiva
  (riassumere molti dati attraverso poche caratteristiche essenziali)
- Probabilità
  (costruire un modello che preveda il risultato di un esperimento)
- Inferenza statistica
  (tarare i parametri del modello in base ai risultati dell'esperimento)
- Regressione lineare
  (riconoscere relazioni tra dati di tipo diverso)

Statistica e Probabilità



Inferenza statistica

PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	
	$X_2 =$ 	
	$\dots$	

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	
	$X_2 =$ 	
	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	
	$X_2 =$ 	
	$\ldots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$	

densità $\left\{ \quad X_i \sim f_\theta \right.$

parametri $\left\{ \quad \theta \in \mathbb{R} \right.$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$\ast$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri

Vogliamo approssimare θ in base ai dati !

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	$\rightarrow$	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	parametri

Vogliamo approssimare μ e σ in base ai dati !

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i$$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Una statistica è una variabile aleatoria !

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

Uno stimatore è una variabile aleatoria !

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA $=$ realizzazione di uno stimatore <u>dopo</u> l'esperimento aleatorio

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA $=$ realizzazione di uno stimatore <u>dopo</u> l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA $=$ realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3} = 1.567 \text{ è una stima di } \mu$$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA $=$ realizzazione di uno stimatore <u>dopo</u> l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3} = 1.567 \text{ è una stima di } \mu$$

Una stima è un numero !

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$\ast$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \ldots)$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

θ non si può misurare, ma $\hat{\Theta}$ sì !

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$X_3 =$ 	$\rightarrow$	$x_3 = 2.9$	
densità	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	$\rightarrow$	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	parametri
stimatore	$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$	$\rightarrow$	$\overline{x} = \frac{1.2+0.6+2.9}{3}$	stima

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \underbrace{\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)}_{\text{distorsione}}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

  $$\Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}_{\text{errore quadratico medio}} := \mathbb{E}[(\hat{\Theta}-\theta)^2] \qquad \text{deve esser piccolo}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

  $$\Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta)}_{\substack{\text{mean}\\ \text{square}\\ \text{error}}} := \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{deve esser piccolo}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

  $\Rightarrow \quad \mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta) := \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$ deve esser piccolo

  Se $\hat{\Theta}_n = h_n(X_1, \ldots, X_n)$, allora

  $\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}_n$ è *consistente in media quadratica*

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}_n$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}_n$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}_n$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

  $\Rightarrow \quad \mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) := \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$ deve esser piccolo

  Se $\hat{\Theta}_n = h_n(X_1, \ldots, X_n)$, allora

  $\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\theta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}_n$ è *consistente in media quadratica*

Proprietà di bias e mse

$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$ DISTORSIONE

$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$ ERRORE QUADRATICO MEDIO

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$ perché $\mathrm{mse} \geq 0$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right]$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2 + \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2 - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2}_{\mathrm{var}[\hat{\Theta}]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2 - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2}_{\left(\mathbb{E}[\hat{\Theta}]-\theta\right)^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta) = \mathbb{E}[\hat\Theta] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) = \mathbb{E}[(\hat\Theta - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) = \mathrm{var}\left[\hat\Theta\right] + \mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta)^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) &= \mathbb{E}\left[\hat\Theta^2 - 2\,\theta\,\hat\Theta + \theta^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat\Theta^2\right] - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat\Theta\right] + \theta^2 \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left[\hat\Theta^2\right] - \mathbb{E}\left[\hat\Theta\right]^2}_{\mathrm{var}[\hat\Theta]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\hat\Theta\right]^2 - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat\Theta\right] + \theta^2}_{\left(\mathbb{E}[\hat\Theta]-\theta\right)^2} \\
&= \mathrm{var}\left[\hat\Theta\right] + \mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta)^2
\end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right)$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty,\, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0,\, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta:$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \underset{\mathbb{E}[\hat{\Theta}_n] = \theta}{=} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta$:

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

$$\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\mathrm{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta:$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

$$\geq \quad 1 - \frac{\mathrm{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2} \underset{\text{bias} = 0}{=} 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\, \theta)}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty,\, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0,\, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \quad \color{red}{\geq} \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad \color{red}{=} \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

$$\color{red}{\geq} \quad 1 - \frac{\mathrm{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2} \quad \color{red}{=} \quad 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\, \theta)}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta:$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\,\theta)}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$\mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta) = \mathbb{E}[\hat\Theta] - \theta$ DISTORSIONE

$\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) = \mathbb{E}[(\hat\Theta - \theta)^2]$ ERRORE QUADRATICO MEDIO

1. $\mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta) \in (-\infty,\ +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) \in [0,\ +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) = \mathrm{var}\left[\hat\Theta\right] + \mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat\Theta_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat\Theta_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat\Theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta:$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat\Theta_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat\Theta_n;\ \theta)}{\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

perché $\mathrm{mse}(\hat\Theta_n;\ \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty,\ +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0,\ +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\ \theta)}{\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \;\; \text{non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \;\; \text{consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

  $\hat{M}_n$ NO

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad \hat{M}'_n$ SÌ $\qquad \hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}\,[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}\,[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad \hat{M}'_n$ SÌ $\qquad \hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad \mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad \mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}\,[X_3]$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad \hat{M}'_n$ SÌ $\qquad \hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad \mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad \mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

$\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3]$ NO

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3]$ NO

  $\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}\,[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}\,[X_3]$ NO

  $\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2 = \dfrac{\mathrm{var}\,[X_i]}{n}$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{SÌ}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3] \qquad \text{NO}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2 = \frac{\mathrm{var}[X_i]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \cancel{\hat{M}'_n = X_3} \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $$\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{SÌ}$$

  $$\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3] \qquad \text{NO}$$

  $$\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2 = \frac{\mathrm{var}[X_i]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \cancel{\hat{M}'_n = X_3} \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

  $\hat{M}_n$ NO

$\overline{X}_n$ è lo stimatore migliore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

- Lo stimatore è non-distorto?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad \mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad \mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3]$ NO

  $\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2 = \dfrac{\mathrm{var}[X_i]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

Altre quantità

- ERRORE STANDARD $= \underbrace{\mathrm{se}(\hat{\Theta};\theta)}_{\substack{\text{standard}\\ \text{error}}} := \sqrt{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$

Altre quantità

- ERRORE STANDARD $= \ \mathrm{se}(\hat{\Theta};\theta) \ := \ \sqrt{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$
- EFFICIENZA RELATIVA di $\hat{\Theta}$ contro $\hat{\Theta}'$ $:= \dfrac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}';\theta)}{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$

Altre quantità

- ERRORE STANDARD $= \ \mathrm{se}(\hat{\Theta};\theta) \ := \ \sqrt{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$

- EFFICIENZA RELATIVA di $\hat{\Theta}$ contro $\hat{\Theta}'$ $:= \dfrac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}';\theta)}{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$

  Se supera 1, lo stimatore $\hat{\Theta}$ è meglio di $\hat{\Theta}'$ in termini di mse

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}\,[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\quad \sum X_i^2 \quad - n\cdot \overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}\left[X_i\right]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = ???$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathrm{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathrm{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right)\right.$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathrm{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}\,[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right) \right.$$

$$\mathrm{var}\,[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}\,[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}\,[Z] + \mathbb{E}\,[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right)\right.$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad\Rightarrow\quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow\quad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?   SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?   SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \left(\sigma^2 + n\,\mu^2\right)\right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum\left(\sigma^2+\mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{n\left(\sigma^2+\cancel{\mu^2}\right) - \left(\sigma^2+\cancel{n\mu^2}\right)\right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum\left(\sigma^2+\mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{n\left(\sigma^2+\cancel{\mu^2}\right) - \left(\sigma^2+\cancel{n\mu^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}(n-1)\,\sigma^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum\left(\sigma^2+\mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\left(\sigma^2+\cancel{\mu^2}\right) - \left(\sigma^2+\cancel{n\mu^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{n-1}}\cancel{(n-1)}\,\sigma^2 = \sigma^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n\cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\left(\sigma^2 + \cancel{\mu^2}\right) - \left(\sigma^2 + \cancel{n\mu^2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{n-1}}\cancel{(n-1)}\,\sigma^2 = \sigma^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \quad \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?   SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?   SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \mathrm{bias}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \cancel{\mathrm{bias}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right)^2}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}(S_n^2\,;\,\sigma^2) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \cancel{\mathrm{bias}(S_n^2\,;\,\sigma^2)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[(X_i - \mu)^4\right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \qquad \text{(più complicato)}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \cancel{\mathrm{bias}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[(X_i - \mu)^4\right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ? SÌ

$$\mathrm{mse}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \cancel{\mathrm{bias}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\,\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^4\right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ? SÌ

S_n^2 è un buono stimatore di σ^2

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Funzioni di parametri

IPOTESI:

$$
\begin{cases}
\text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\
\text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\
\text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta
\end{cases}
$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

Qual è uno stimatore non distorto di θ ?

Funzioni di parametri

IPOTESI:

$$\begin{cases} - \ \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \ \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \ \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})]$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:

- α, β, θ parametri con $\theta = g(\alpha, \beta)$
- $\hat{A}$ stimatore non-distorto di α
- $\hat{B}$ stimatore non-distorto di β

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big)$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) \underset{\substack{\mathbb{E}[\hat{A}] = \alpha \\ \mathbb{E}[\hat{B}] = \beta}}{=} g(\alpha, \beta)$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:

$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:
- α, β, θ parametri con $\theta = g(\alpha, \beta)$
- $\hat{A}$ stimatore non-distorto di α
- $\hat{B}$ stimatore non-distorto di β

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] \;=\; \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \;\simeq\; g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) \;=\; g(\alpha, \beta) \;=\; \theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:

- α, β, θ parametri con $\theta = g(\alpha, \beta)$
- $\hat{A}$ stimatore non-distorto di α
- $\hat{B}$ stimatore non-distorto di β

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

OSSERVAZIONE:

$\theta = a\alpha + b\beta \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = a\hat{A} + b\hat{B}$ è esattamente non-distorto

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

OSSERVAZIONE:

$\theta = a\,\alpha + b\,\beta \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = a\,\hat{A} + b\,\hat{B}$ è esattamente non-distorto

E per stimare l'errore $\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta)$?

Funzioni di parametri

IPOTESI:

- α, β, θ parametri con $\theta = g(\alpha, \beta)$
- $\hat{A}$ stimatore non-distorto di α
- $\hat{B}$ stimatore non-distorto di β

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e\,(\alpha, \beta, \mathrm{var}[\hat{A}], \mathrm{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e\,(\alpha, \beta, \mathrm{var}[\hat{A}], \mathrm{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

IPOTESI ULTERIORI:
$$\begin{cases} \text{- } S_A^2 \text{ stimatore non-distorto di } \mathrm{var}[\hat{A}] \\ \text{- } S_B^2 \text{ stimatore non-distorto di } \mathrm{var}[\hat{B}] \end{cases}$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

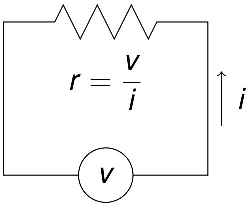
$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e\,(\alpha, \beta, \mathrm{var}[\hat{A}], \mathrm{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

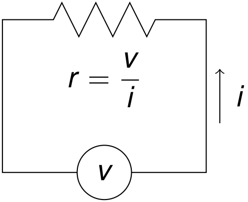
IPOTESI ULTERIORI:
$$\begin{cases} \text{- } S_A^2 \text{ stimatore non-distorto di } \mathrm{var}[\hat{A}] \\ \text{- } S_B^2 \text{ stimatore non-distorto di } \mathrm{var}[\hat{B}] \end{cases}$$

$\underset{\text{stesso motivo di prima}}{\Rightarrow}$ $\widehat{\mathrm{MSE}} := e\,(\hat{A}, \hat{B}, S_A^2, S_B^2)$ stimatore approssimativamente non-distorto di $\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta)$

ESEMPIO



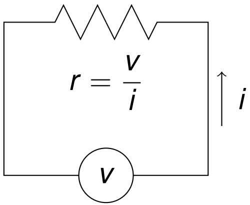
ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[V_i] = v$

ESEMPIO



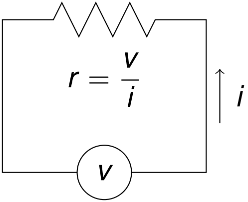
$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

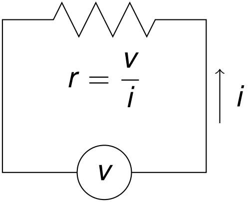
no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[V_i] = v$

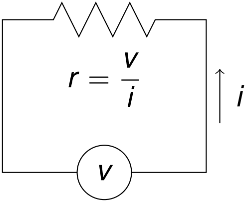
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i]$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[V_i\right] = v$

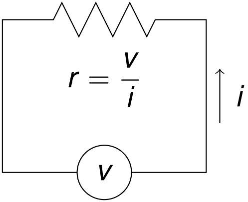
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}\left[V_i\right] = v$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

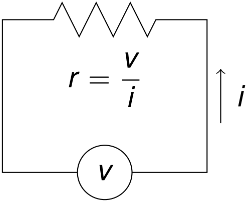
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

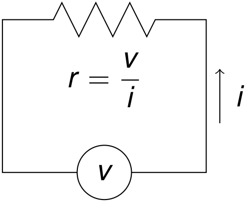
no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[V_i\right] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}\left[V_i\right] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$
- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

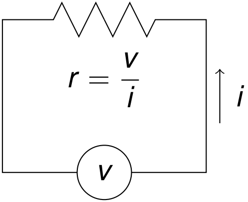
no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$
- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)
- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

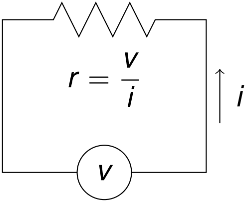
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \text{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] \quad = \quad \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\bar{I}}\right]$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

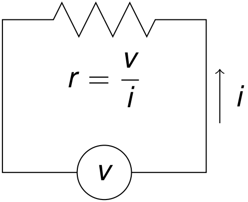
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché

$$\mathbb{E}\left[\hat{R}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\overline{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]}$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

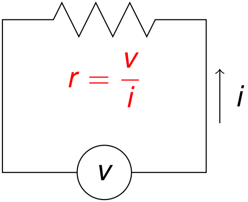
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché

$$\mathbb{E}\left[\hat{R}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\overline{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]} = \frac{v}{i}$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

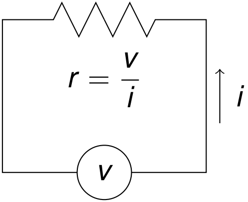
no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[V_i\right] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}\left[V_i\right] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$
- $\overline{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)
- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché
$$\mathbb{E}\left[\hat{R}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\overline{I}}\right] \underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\overline{V}]}{\mathbb{E}[\overline{I}]} = \frac{v}{i} = r$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[V_i\right] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}\left[V_i\right] = v \quad \Rightarrow \quad \text{bias}(\overline{V}; v) = 0$$
- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)
- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché
$$\mathbb{E}\left[\hat{R}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\overline{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]} = \frac{v}{i} = r$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \dfrac{\sigma_V^2}{m}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \dfrac{\sigma_V^2}{m}$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_V := \dfrac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \dfrac{\sigma_V^2}{m}$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_V := \dfrac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$

- $\mathrm{mse}(\overline{I}; i) = \;\ldots\ldots\; = \dfrac{\sigma_I^2}{n}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \dfrac{\sigma_V^2}{m}$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_V := \dfrac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$

- $\mathrm{mse}(\bar{I}; i) = \ldots\ldots = \dfrac{\sigma_I^2}{n}$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_I := \dfrac{S_I^2}{n}$ è uno stimatore non-distorto di $\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \underbrace{\mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2}_{\simeq 0}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \underbrace{\mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2}_{\simeq 0} \simeq \mathrm{var}[\hat{R}]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = g\,(\overline{V}, \overline{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\,(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g\,(\overline{V}, \overline{I})\right]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\left(\overline{V}, \bar{I}\right)$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\left(v, i\right)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g\left(\overline{V}, \bar{I}\right)\right]$

$$\underset{\substack{\text{metodo}\\\text{delta}}}{\simeq} \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\bar{I}\right]$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g(\overline{V}, \bar{I})\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\bar{I}\right]$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = g\left(\overline{V}, \overline{I}\right)$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\left(v, i\right)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g\left(\overline{V}, \overline{I}\right)\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{I}\right]$$

$$\partial_1 g\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = v \qquad \mathbb{E}\left[\overline{I}\right] = i$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g(\overline{V}, \bar{I})\right]$

$$\simeq \quad \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\bar{I}\right]$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = v \qquad \mathbb{E}\left[\bar{I}\right] = i \qquad \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \frac{\sigma_V^2}{m} \qquad \mathrm{var}\left[\bar{I}\right] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = g(\overline{V}, \overline{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g(\overline{V}, \overline{I})\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{I}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = v \qquad \mathbb{E}\left[\overline{I}\right] = i \qquad \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \frac{\sigma_V^2}{m} \qquad \mathrm{var}\left[\overline{I}\right] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = g(\overline{V}, \overline{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g(\overline{V}, \overline{I})\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{I}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = v \qquad \mathbb{E}\left[\overline{I}\right] = i \qquad \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \frac{\sigma_V^2}{m} \qquad \mathrm{var}\left[\overline{I}\right] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\,(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\,(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\left(\overline{V}, \bar{I}\right)$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\left(v, i\right)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\left(\overline{V}, \bar{I}\right)$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\left(v, i\right)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e\left(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2\right)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = g(\overline{V}, \overline{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\overline{I}$ non-distorto di i

- $$\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e\left(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2\right)$$

$\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_R := e\left(\overline{V}, \overline{I}, S_V^2, S_I^2\right)$ è uno stimatore approx. non-distorto di $\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\,(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\,(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $$\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e\left(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_R := e\left(\overline{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\bar{I}}\right]^2 \cdot \frac{S_V^2}{m} + \left[-\frac{\overline{V}}{\bar{I}^2}\right]^2 \cdot \frac{S_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $$\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e\left(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_R := e\left(\overline{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2\right)$$

$$= \frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Dopo le misure:
$$\begin{matrix} v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{matrix} v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	
v	$\overline{V}$	
i	$\bar{I}$	
r	$\frac{\overline{V}}{\bar{I}}$	
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	
$\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{prima dell'esperimento}}$

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	$\overline{V}$	3.12
i	$\bar{I}$	1.83
r	$\frac{\overline{V}}{\bar{I}}$	
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	
$\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	

prima dell'esperimento — dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	$\overline{V}$	3.12
i	$\bar{I}$	1.83
r	$\frac{\overline{V}}{\bar{I}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	
$\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	

prima dell'esperimento | dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	$\overline{V}$	3.12
i	$\bar{I}$	1.83
r	$\frac{\overline{V}}{\bar{I}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	$\frac{0.092}{5} = 0.018$
$\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	$\frac{0.123}{3} = 0.041$
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	

prima dell'esperimento (stimatore) — dopo l'esperimento (stima)

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	$\overline{V}$	3.12
i	$\overline{I}$	1.83
r	$\frac{\overline{V}}{\overline{I}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	$\frac{0.092}{5} = 0.018$
$\mathrm{mse}(\overline{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	$\frac{0.123}{3} = 0.041$
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\overline{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\overline{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	$\frac{1}{1.83^2} \cdot \frac{0.092}{5} + \frac{3.12^2}{1.83^4} \cdot \frac{0.123}{3} = 0.041$
	prima dell'esperimento	dopo l'esperimento

Stima intervallare

PROBLEMA: anche se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore di θ, può capitare che

$$\mathbb{P}\left(\hat{\Theta} = \theta\right) = 0$$

Stima intervallare

PROBLEMA: anche se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore di θ, può capitare che

$$\mathbb{P}\left(\hat{\Theta} = \theta\right) = 0$$

SOLUZIONE: costruire un intervallo in cui siamo (relativamente) sicuri di trovare il parametro θ

Stima intervallare

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \ldots, X_n)$ e $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < \theta < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Stima intervallare

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \ldots, X_n)$ e $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < \theta < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si dice che

$$\big(\ell(x_1, \ldots, x_n)\,,\, u(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

Stima intervallare

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \dots, X_n)$ e $U = u(X_1, \dots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < \theta < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si dice che

$$\big(\ell(x_1, \dots, x_n)\,,\, u(x_1, \dots, x_n)\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

TIPICAMENTE: $\gamma = 90\%$ o 95% o 99%

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$\ast$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta < u(1.2, 0.6, \dots)$	*IC*

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $L = \ell(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta > L) = \gamma \qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $L = \ell(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta > L) = \gamma \qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si dice che

$$\big(\ell(x_1, \ldots, x_n)\,,\, +\infty\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta < U) = \gamma \qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}\,(\theta < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si dice che

$$\big(-\infty\,,\, u(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

Stima intervallare

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $U = u(X_1, \dots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}\,(\theta < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si dice che

$$\big(-\infty\,,\, u(x_1, \dots, x_n)\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

SPESSO: $L = \hat{\Theta} - E, \quad U = \hat{\Theta} + E$ con

- $\hat{\Theta}$ = stimatore di θ
- E = errore (costante o aleatorio)

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right]$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right]$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right] = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow} \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right] = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} , \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = \dots = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow} \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \dots = \gamma$$

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow} \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \ldots = \gamma$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione numeroso

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande $\underset{\text{TLC}}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$ approssimato

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \simeq \dots \simeq \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
\left(\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, +\infty\right) \\
\left(-\infty \,,\, \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)
\end{array}\right\} \quad \text{sono } IC_\mu(\gamma)$$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: $z_\gamma \; = \;$ quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, +\infty\right) \\ \left(-\infty \, , \, \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - e, \quad U = \overline{X} + e$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $e \; = \; z_{\ldots} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore <u>costante</u>

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\[2ex]
\left(\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right) \\[2ex]
\left(-\infty\,,\ \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)
\end{array}\right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - e, \quad U = \overline{X} + e$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $e = z_{\ldots} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore <u>costante</u> $\longrightarrow 0$ se $n \to \infty$ (più misure)

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right) \\ \left(-\infty\,,\ \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - e, \quad U = \overline{X} + e$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $e = z_{\ldots} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore <u>costante</u> $\longrightarrow 0$ se $n \to \infty$ (più misure)
  o $\sigma \to 0$ (più precisione)

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right)$$

$$\left(-\infty\,,\ \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ma se non so quanto vale σ ?

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - e$, $U = \overline{X} + e$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $e = z_{\ldots} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore costante $\longrightarrow 0$ se $n \to \infty$ (più misure) o $\sigma \to 0$ (più precisione)

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).

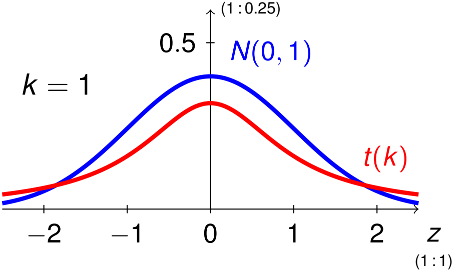
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



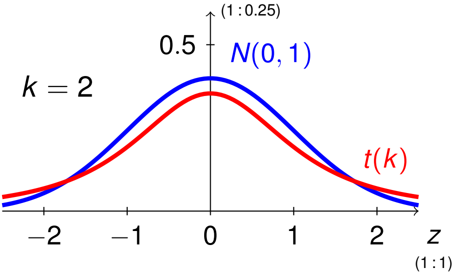
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



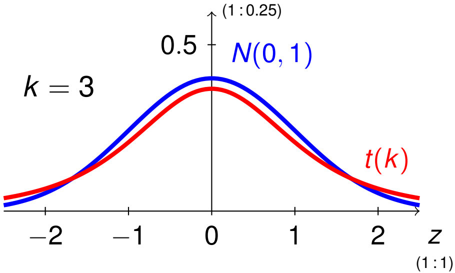
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



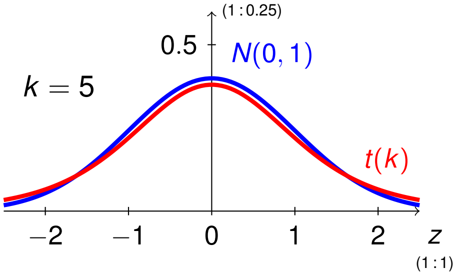
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



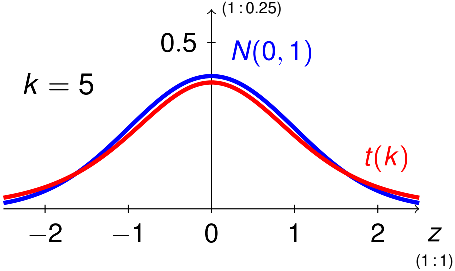
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)

n	Valore della funzione di ripartizione 0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.707

- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati

$$t_{0.85}(3) = 1.2498$$

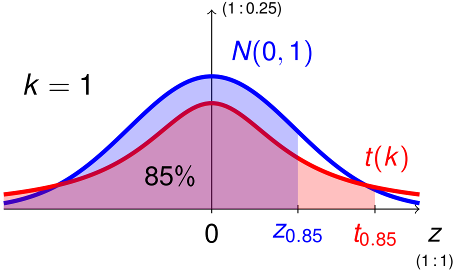
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
- $t_\gamma(k) > z_\gamma$
- $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \to \infty$

$\Big\}$ se $\gamma > 50\%$

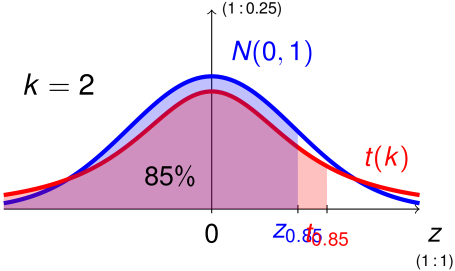
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
- $t_\gamma(k) > z_\gamma$
- $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \to \infty$

$\Big\}$ se $\gamma > 50\%$

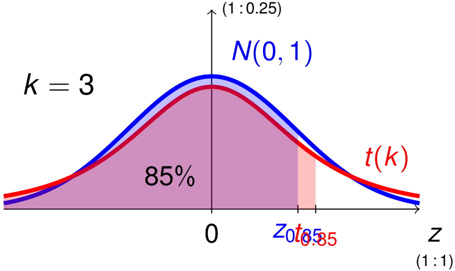
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
- $t_\gamma(k) > z_\gamma$
- $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \to \infty$

$\Big\}$ se $\gamma > 50\%$

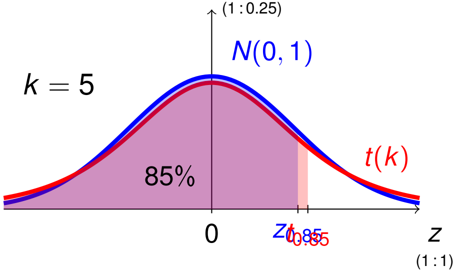
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
- $t_\gamma(k) > z_\gamma$
- $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \to \infty$

$\Big\}$ se $\gamma > 50\%$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \, \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \; \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \, \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\;,\; \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \dots = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(-\, t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \ldots = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \dots = \gamma$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ +\infty\right) \\ \left(-\infty\ ,\ \overline{x} + t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_{\mu}(\gamma)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left.\begin{array}{l}
\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \\
\left(\overline{x} - t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right) \\
\left(-\infty\,,\ \overline{x} + t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)
\end{array}\right\}\ \text{sono}\ IC_{\mu}(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E, \quad U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $E \;=\; t_{\ldots}(n-1)\,\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ errore <u>aleatorio</u>

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left.\begin{array}{l}
\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \\
\left(\overline{x} - t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ +\infty\right) \\
\left(-\infty\ ,\ \overline{x} + t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)
\end{array}\right\}\ \text{sono}\ \ IC_{\mu}(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E, \quad U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $E = t_{\ldots}(n-1)\,\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ errore <u>aleatorio</u> non riducibile a priori

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} , \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S} \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ \\ \end{array} \right.$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1}$$

con

$$\begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \dots = \gamma$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = \dots = \gamma$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - z_{\gamma} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \, , \, +\infty\right) \\ \left(-\infty \, , \, \overline{x} + z_{\gamma} \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_{\mu}(\gamma)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$ è un $IC_\mu(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\cancel{2}} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$ perché $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}_{=\overline{x}} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right) \quad \text{è un} \quad IC_q(\gamma)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{è un } IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}_{=\overline{x}} - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{è un } IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \frac{n}{n-1}\, \overline{x}\,(1 - \overline{x})$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\simeq 1} \overline{x}\,(1-\overline{x})$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{è un } IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \; - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\simeq 1} \overline{x}\,(1-\overline{x}) \simeq \overline{x}\,(1-\overline{x})$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \; - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \, \overline{x} \, (1 - \overline{x}) \simeq \overline{x} \, (1 - \overline{x})$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{è un } IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \, \overline{x} \, (1 - \overline{x}) \simeq \overline{x} \, (1 - \overline{x}) \quad \Rightarrow \quad s \simeq \sqrt{\overline{x} \, (1 - \overline{x})}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{è un } IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \; - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \, \overline{x} \, (1 - \overline{x}) \simeq \overline{x} \, (1 - \overline{x}) \quad \Rightarrow \quad s \simeq \sqrt{\overline{x} \, (1 - \overline{x})}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E$, $U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ = frequenza empirica (stimatore di q)

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E, \quad U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ $=$ frequenza empirica (stimatore di q)
- E $=$ $z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$ errore <u>aleatorio</u>

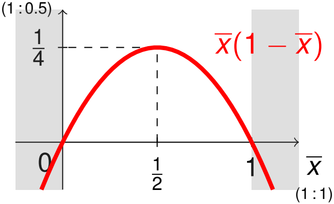
IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E, \quad U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ = frequenza empirica (stimatore di q)
- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$ errore <u>aleatorio</u>



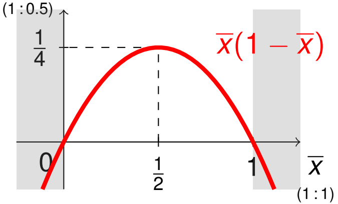
$$\overline{x} \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \overline{x}(1-\overline{x}) \leq \frac{1}{4}$$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E$, $U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ = frequenza empirica (stimatore di q)
- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{n}}$



$$\overline{x} \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \overline{x}(1-\overline{x}) \leq \frac{1}{4}$$

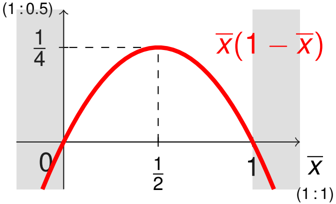
IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E, \quad U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ = frequenza empirica (stimatore di q)
- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{n}} = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$



$$\overline{x} \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \overline{x}(1-\overline{x}) \leq \frac{1}{4}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E, \quad U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X} = $ frequenza empirica (stimatore di q)

- $E \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ riducibile a priori

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\ ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right) \\
\left(\overline{x} - z_{\gamma} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\ ,\ 1\right) \\
\left(0\ ,\ \overline{x} + z_{\gamma} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right)
\end{array}\right\} \text{ sono } IC_q(\gamma)$$

IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).

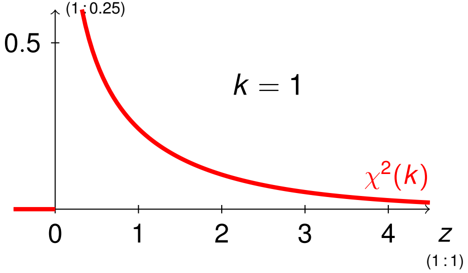
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



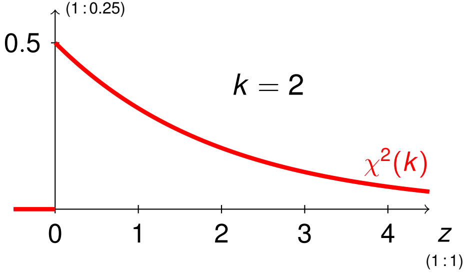
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



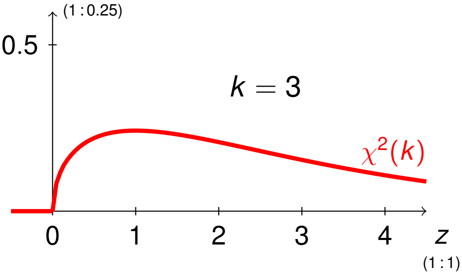
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



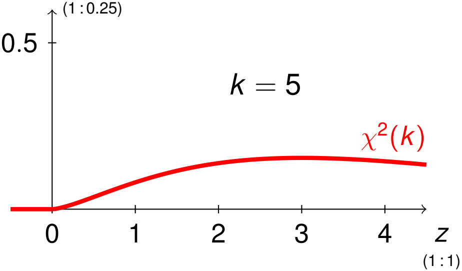
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



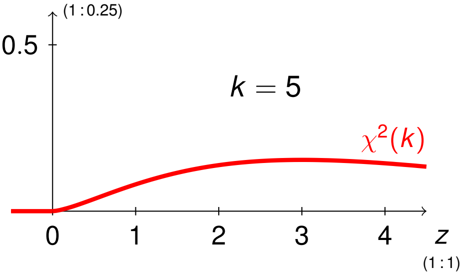
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$

IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).

n	0.0005	0.001	0.005	0.01	...	99	0.995	0.999	0.9995
1	3.929E-07	1.570E-06	3.927E-05	1.571E-	...	.6349	7.8794	10.8274	12.1153
2	9.997E-04	2.001E-03	0.0100	0.02	...	.2104	10.5965	13.8150	15.2014
3	0.0153	0.0243	0.0717	0.11	...	.3449	12.8381	16.2660	17.7311
4	0.0639	0.0908	0.2070	0.29	...	.2767	14.8602	18.4662	19.9977
5	0.1581	0.2102	0.4118	0.55	...	.0863	16.7496	20.5147	22.1057
6	0.2994	0.3810	0.6757	0.87	...	.8119	18.5475	22.4575	24.1016
7	0.4849	0.5985	0.9893	1.23	...	.4753	20.2777	24.3213	26.0179
8	0.7104	0.8571	1.3444	1.64	...	.0902	21.9549	26.1239	27.8674
9	0.9718	1.1519	1.7349	2.08		.6660	23.5893	27.8767	29.6669

- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati

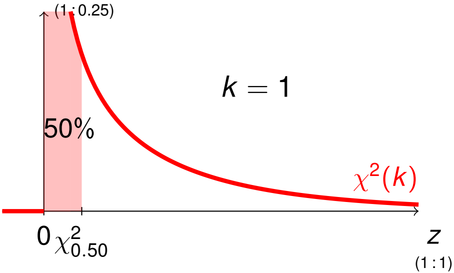
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$

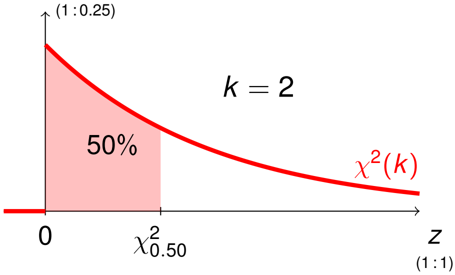
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$

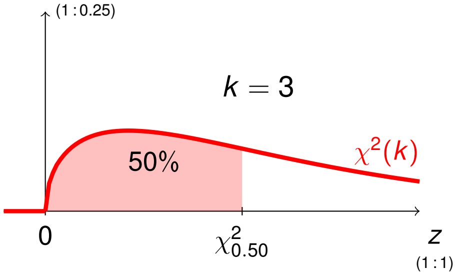
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$

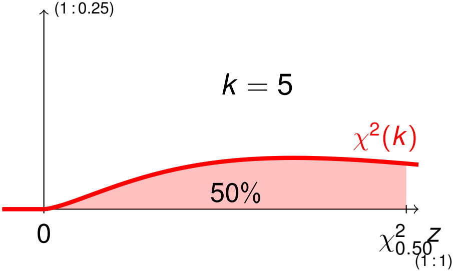
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\text{supp}\, \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$

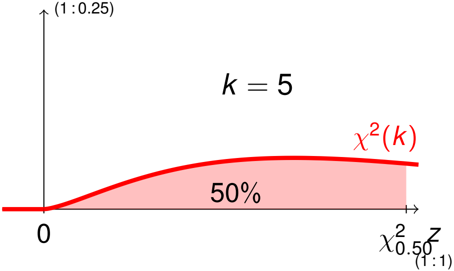
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$
- $\chi^2_\gamma(k) \simeq \dfrac{(z_\gamma + \sqrt{2k-1})^2}{2}$ se k è grande

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \, , \, \dfrac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \,,\, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) = \gamma$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \,,\; \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}{(n-1)\, S^2} > \quad \frac{1}{\sigma^2} \quad > \frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}{(n-1)\, S^2} \right)$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \, , \, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} , \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $$\left(\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}}_{\sim\chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right)$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \,,\; \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}\,,\ \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$$

$$= \gamma$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \, , \, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$$

$$= \gamma$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= \ldots = \gamma$$

STATISTICA PIVOT

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\dfrac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \,,\; \dfrac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) \\[2ex]
\left(\dfrac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\gamma}(n-1)} \,,\; +\infty \right) \\[2ex]
\left(0 \,,\; \dfrac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\gamma}(n-1)} \right)
\end{array}\right\} \quad \text{sono } IC_{\sigma^2}(\gamma)$$

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è onesto

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un baro

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è onesto $\Leftrightarrow$ $q = 1/2$

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un baro $\Leftrightarrow$ $q < 1/2$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini rispettano la relatività

AFFERMAZIONE 1: i neutrini violano la relatività

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$ nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

AFFERMAZIONE 1: i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

$H_0 =$ IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

$H_0 =$ IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

$H_1 =$ IPOTESI ALTERNATIVA: vera solo se c'è evidenza a suo favore

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

$H_0 =$ IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

$H_1 =$ IPOTESI ALTERNATIVA: vera solo se c'è evidenza a suo favore

H_0 e H_1 NON sono intercambiabili !

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$\left.\begin{array}{llll} \textbf{AFFERMAZIONE 0:} & \text{l'amico è onesto} & \Leftrightarrow & q = 1/2 \\ \textbf{AFFERMAZIONE 1:} & \text{l'amico è un baro} & \Leftrightarrow & q < 1/2 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{ipotesi} \\ \text{statistiche}\end{array}$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è onesto $\Leftrightarrow$ $q = 1/2$ DEFAULT

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un baro $\Leftrightarrow$ $q < 1/2$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

H_0 : l'amico è onesto $\Leftrightarrow$ $q = 1/2$ DEFAULT

H_1 : l'amico è un baro $\Leftrightarrow$ $q < 1/2$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'*i*-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{AFFERMAZIONE 0:} & \text{i neutrini rispettano la relatività} \\ & \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \\ \textbf{AFFERMAZIONE 1:} & \text{i neutrini violano la relatività} \\ & \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \end{array}\right\} \text{ipotesi statistiche}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini rispettano la relatività DEFAULT

$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

AFFERMAZIONE 1: i neutrini violano la relatività

$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività DEFAULT

$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

$H_0 =$ IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

$H_1 =$ IPOTESI ALTERNATIVA: vera solo se c'è evidenza a suo favore

TEST D'IPOTESI $=$ regola per scegliere tra H_0 e H_1

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \ldots, X_n)$

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \ldots, X_n)$
- si fissa una *regione di rifiuto* (o *critica*) $RC \subset \mathbb{R}$
  $\big($tipicamente: $(-\infty, c)$ o $(c, +\infty)$ o $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)\big)$

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \ldots, X_n)$
- si fissa una *regione di rifiuto* (o *critica*) $RC \subset \mathbb{R}$
  $\big($tipicamente: $(-\infty, c)$ o $(c, +\infty)$ o $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)\big)$
- si stabilisce la *regola del test*:

  "rifiuto H_0 se trovo $T_0 \in RC$"

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$\underbrace{Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}}_{\text{statistica test}} \leq 1$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$\underbrace{Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}}_{\text{statistica test}} \underbrace{\leq 1}_{\substack{\text{regione} \\ \text{critica}}}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\underbrace{\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5}}_{\text{statistica test}} \geq 3.2 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\underbrace{\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5}}_{\text{statistica test}} \underbrace{\geq 3.2 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}}_{\text{regione critica}}$$

Tipi d’errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0		
rifiuto H_0		

Tipi d’errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0		

Tipi d’errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0		OK!

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

$\Rightarrow$ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

$\Rightarrow$ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

$\Rightarrow$ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\big(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”}\big)$$

$\mathbb{P}$ calcolata coi parametri che soddisfano H_0

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

$\Rightarrow$ voglio fissare <u>a priori</u> la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

TIPICAMENTE: significatività $=$ 5% o 2.5% o 1%

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0: \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1: \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}\big(Y \leq 1\big)$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}\left(Y \leq 1\right) = \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{10-k}$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \le 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}\left(Y \le 1\right) = \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k} \simeq 1\%$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}(Y \leq 1)$ Va bene ! $\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k} \simeq 1\%$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$$X_i = \text{velocità misurata per l'}i\text{-esimo neutrino}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}\big(\overline{X} \geq 3.2\big)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$$X_i = \text{velocità misurata per l'}i\text{-esimo neutrino}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

$$\text{SIGN.} = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\overline{X} \geq 3.2\right) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$$X_i = \text{velocità misurata per l'}i\text{-esimo neutrino}$$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}\big(\overline{X} \geq 3.2\big) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12)$ $\simeq 13\%$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$$X_i = \text{velocità misurata per l'}i\text{-esimo neutrino}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}$ ... $) = 1 - \Phi(1.12) \simeq$ 13%

Troppo grande !

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO ... do in realtà è vera

Però è una buona idea...

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12) \simeq 13\%$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”} \right) = \alpha$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $\underbrace{X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. con } X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\boxed{\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\boxed{\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

$$= \mathbb{P}_{\boxed{\mu=\mu_0}}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad \mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \underbrace{\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\Updownarrow$$

più comodo $\longrightarrow$ $$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

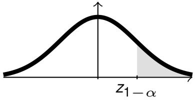
TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

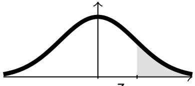
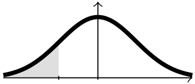
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

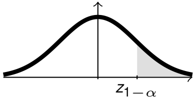
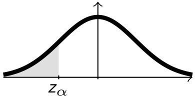
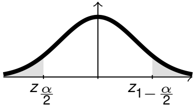
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < z_{\alpha}$	

 $= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

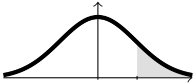
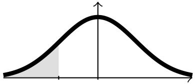
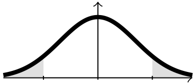
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < z_{\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

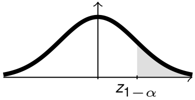
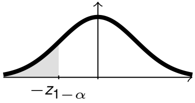
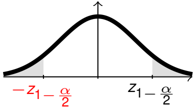
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

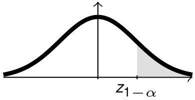
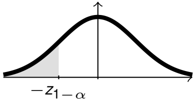
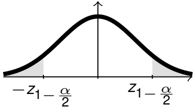
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

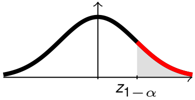
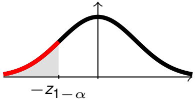
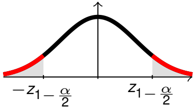
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

H_1 fissa la forma di RC_α ...

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\quad}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

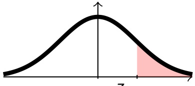
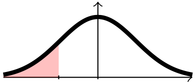
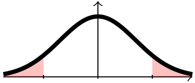
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

. . . mentre α fissa la sua ampiezza

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\quad}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta < u(1.2, 0.6, \dots)$	*IC*

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \ldots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \ldots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \ldots) < \theta < u(X_1, X_2, \ldots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \ldots) < \theta < u(1.2, 0.6, \ldots)$	*IC*
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\big(T_0 \in RC\big)$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta < u(1.2, 0.6, \dots)$	*IC*
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(T_0 \in RC\right)$	$\rightarrow$	?	

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

p-value di un test

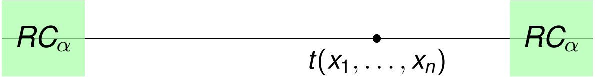
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 0.25\%$

p-value di un test

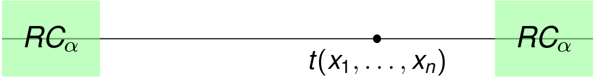
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 0.5\%$

p-value di un test

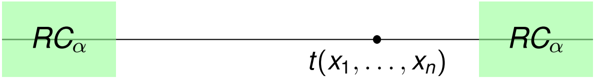
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\%$

p-value di un test

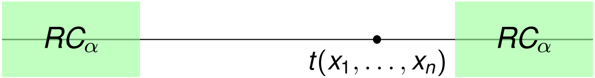
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 2.5\%$

p-value di un test

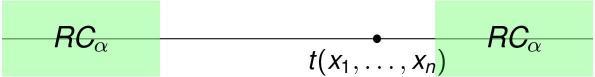
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 5\%$

p-value di un test

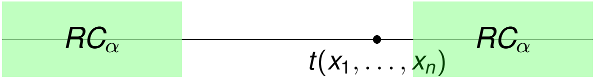
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 10\%$

p-value di un test

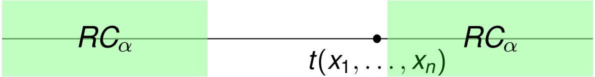
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 20\%$

p-value di un test

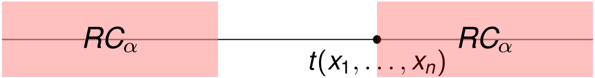
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 26\%$

p-value di un test

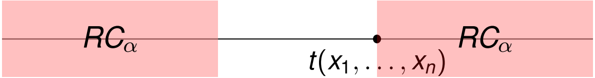
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 26\% = p$-value

p-value di un test

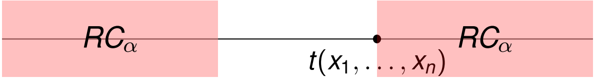
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 26\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe il 26%

p-value di un test

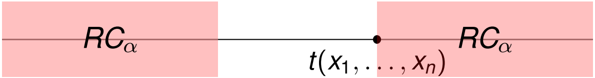
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 26\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe il 26%

$\Rightarrow$ nessuna evidenza contro H_0

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

$\alpha = 0.25\%$

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

$\alpha = 0.5\%$

p-value di un test

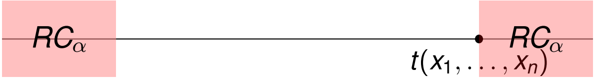
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\%$

p-value di un test

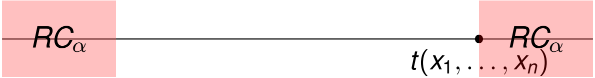
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

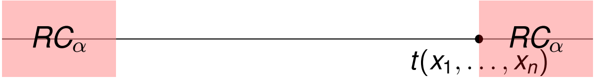
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l’1%

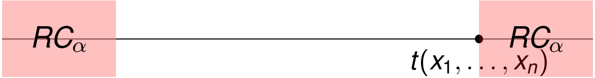
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato

p-value di un test

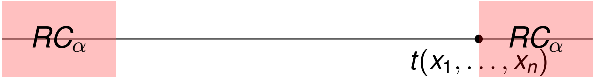
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato
- o H_0 non è vera

p-value di un test

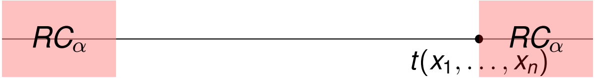
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato
- o H_0 non è vera

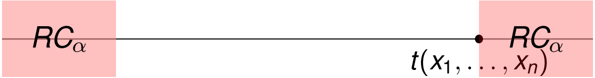
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1%

$\Rightarrow$ forte evidenza contro H_0

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

p-value alto $(> 5\%)$ $\Rightarrow$ non rifiuto H_0 (conclusione debole)

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

p-value alto $(> 5\%)$ $\Rightarrow$ non rifiuto H_0 (conclusione debole)

p-value basso $(\leq 5\%)$ $\Rightarrow$ accetto H_1 (conclusione forte)

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \ldots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \ldots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \ldots) < \theta < u(X_1, X_2, \ldots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \ldots) < \theta < u(1.2, 0.6, \ldots)$	*IC*
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(T_0 \in RC\right)$	$\rightarrow$	?	

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$\ast$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta < u(1.2, 0.6, \dots)$	*IC*
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(T_0 \in RC\right)$	$\rightarrow$	minimo α t.c. $t(1.2, 0.6, \dots) \in RC_\alpha$	*p*-value

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \; = \;$ realizzazione di $\; Z_0 \;$ dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \; \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha})$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \; = \;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow\ \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1-\alpha$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow\ \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ $\Leftrightarrow\ \alpha = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \ = \ $ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \ \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ $\Leftrightarrow \ \alpha = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \ = \$ realizzazione di $\ Z_0\ $ dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\|Z_0\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \; \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha})$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \; \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \; = \;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha)$ $= \alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \;=\;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha)$ $= \alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 =$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$z_0 \; = \;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \Phi(\lvert z_0 \rvert) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \Phi(\lvert z_0 \rvert) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$z_0 \;=\;$ realizzazione di $\;Z_0\;$ dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow\ \Phi(\lvert z_0 \rvert) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\Leftrightarrow\ \alpha = 2\,[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$

$z_0 \ = \$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow\ \Phi(\lvert z_0 \rvert) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\Leftrightarrow\ \alpha = 2\,[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$

$z_0 \;=\;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$p\text{-value} = 2\,[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$

$z_0 \ = \ $ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \text{i neutrini rispettano la relatività} \\ & \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0 \\ H_1 : \quad & \text{i neutrini violano la relatività} \\ & \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

$\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ nota

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > z_{1-\alpha}$$

$n = 5$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > z_{1-\alpha}$$

significatività $= 5\%$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > z_{0.95} \longleftarrow \text{significatività} = 5\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \longleftarrow \text{significatività} = 5\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

... ...

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7$$
$$x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\ldots \cdot 10^8)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$\begin{matrix} x_1 = 3.4 & x_2 = 3.3 & x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 & x_5 = 2.9 & (\ldots \cdot 10^8) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad z_0 = 0.671$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > \color{red}{1.645} \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure: $x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7 \quad x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\dots \cdot 10^8) \quad \Rightarrow \quad z_0 = \color{red}{0.671}$

$z_0 \not> 1.645 \quad \Rightarrow \quad$ non posso rifiutare H_0 al 5%

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure: $\begin{array}{c} x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\ldots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow \quad z_0 = 0.671$

$z_0 \not> 1.645 \quad \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0 al 5%

p-value $= 1 - \Phi(z_0)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:
$$\begin{matrix} x_1 = 3.4 & x_2 = 3.3 & x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 & x_5 = 2.9 & (\ldots \cdot 10^8) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad z_0 = 0.671$$

$z_0 \not> 1.645 \quad \Rightarrow \quad$ non posso rifiutare H_0 al 5%

p-value $= 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(0.671) = 25.1\%$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure: $\begin{array}{l} x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\ldots \cdot 10^8) \end{array} \quad \Rightarrow \quad z_0 = 0.671$

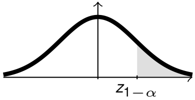
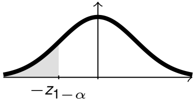
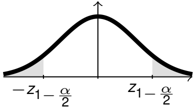
$z_0 \not> 1.645 \quad \Rightarrow \quad$ non posso rifiutare H_0 al 5%

p-value $= 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(0.671) = 25.1\% \quad \Rightarrow$ nessuna evidenza contro H_0

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

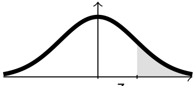
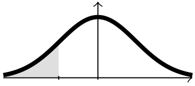
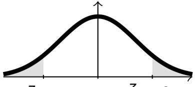
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

H_0 determina univocamente $\mathbb{P}$
(ipotesi semplice)

TESI: Posto Z ... nificatività α :

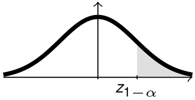
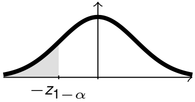
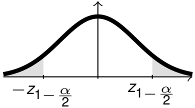
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto Z ... nificatività α :

Ma se non la determinasse?
(ipotesi composta)

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta)	$:=$	massima probabilità di errore di I tipo

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta)	$:=$	massima probabilità di errore di I tipo
	$=$	$\max\limits_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$\color{red}{H_0 : \mu \leq \mu_0} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= ???$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

quella di $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

quella di Z_0

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

non sono la stessa cosa

$\Rightarrow$ $\overline{X}$ va ancora standardizzata

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

Ipotesi nulla composta

$$\begin{array}{lcl} \text{SIGNIFICATIVITÀ} & := & \text{massima probabilità di errore di I tipo} \\ \text{(con } H_0 \text{ composta)} & = & \max\limits_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) \end{array}$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0}\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \left[1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \underbrace{\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}}_{\text{crescente in } \mu} \right) \right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0}\left[1 - \Phi\left(\underbrace{z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}}_{\text{decrescente in } \mu}\right)\right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0}\left[1 - \underbrace{\Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)}_{\text{decrescente in } \mu}\right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \underbrace{\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right]}_{\text{crescente in } \mu}$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \underbrace{\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \right]}_{\text{crescente in } \mu}$$

il max è preso in $\mu = \mu_0$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \leq \mu_0}} \left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \leq \mu_0}}\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \leq \mu_0}} \left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = \alpha$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \max\limits_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \le \mu_0}}\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = \alpha$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

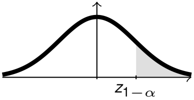
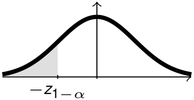
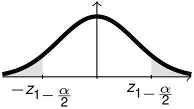
$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \alpha \quad \Rightarrow \quad$ tutto come prima

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

$\Rightarrow$ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

$\Rightarrow$ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA $=$ probabilità di non commettere errore di II tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

$\Rightarrow$ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA $=$ probabilità di <u>non</u> commettere errore di II tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

$\Rightarrow$ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA $=$ probabilità di <u>non</u> commettere errore di II tipo

$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$ può essere molto piccola

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO $=$ non accusare l'amico quando in realtà bara

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO $=$ <u>non</u> accusare l'amico quando in realtà bara

POTENZA $= \mathbb{P}_{q<\frac{1}{2}}\big(Y \leq 1\big)$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO $=$ <u>non</u> accusare l'amico quando in realtà bara

POTENZA $= \mathbb{P}_{q<\frac{1}{2}}\big(Y \leq 1\big)$ dipende da q

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO $=$ non rigettare la relatività quando in realtà è falsa

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO $=$ <u>non</u> rigettare la relatività quando in realtà è falsa

POTENZA $= \mathbb{P}_{\mu>3}\big(Z_0 > 1.645\big)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO $=$ non rigettare la relatività quando in realtà è falsa

POTENZA $= \mathbb{P}_{\mu>3}(Z_0 > 1.645)$ dipende da μ

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $=$? ? ?

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

quella di
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

quella di Z_0

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

non sono la stessa cosa

$\Rightarrow$ $\overline{X}$ va ancora standardizzata

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - {\color{red}\mu}}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{{\color{red}\mu} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right) \quad \text{dipende da } \mu$$

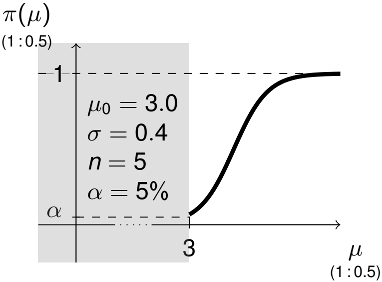
ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right)$$ aumenta se:

- aumenta μ (non controllabile)



Potenza di uno Z-test

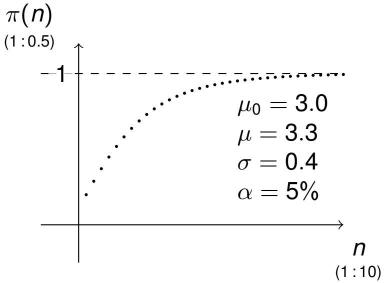
ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\overbrace{\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}}^{\geq 0} \sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right)$$ aumenta se:

- aumenta μ (non controllabile)
- aumenta n (più misure)



Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

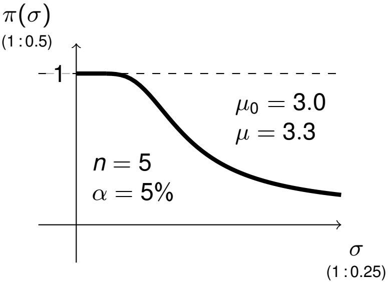
$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\overbrace{\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}}^{\geq 0} \sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right)$$

aumenta se:

- aumenta μ (non controllabile)
- aumenta n (più misure)
- diminuisce σ (più precisione)



Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \underset{\substack{\text{riprod.} \\ \text{di } N}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, sono test di significatività α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, sono test di significatività α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \sim N(0,1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Z-test per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \underset{\text{TLC}}{\approx} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0,1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad Z_0 \approx N(0,1) \ \text{ se } \ \mu = \mu_0$$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\overline{X} \underset{\text{TLC}}{\approx} N\left(q, \frac{q(1 - q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \approx N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0, 1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

... ...

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\overline{X} \approx N\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0,1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\overline{X} \approx N\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0,1) \text{ se } q = q_0$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

E la potenza ?

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $=$? ? ?

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1,q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di $X_i \sim B(1,q)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di Z_0

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

non sono la stessa cosa

$\Rightarrow$ $\overline{X}$ va ancora standardizzata

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} \qquad \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - \cancel{q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - \cancel{q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0\right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\overline{X} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\overline{X} - q > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q\right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\overline{X} \cancel{- q_0} \cancel{\frac{}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n}}_{\approx N(0,1)} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q(1-q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q(1-q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n}\right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\overline{X} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q(1-q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n}\right)$$

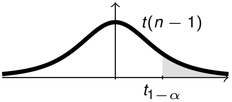
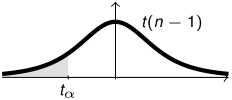
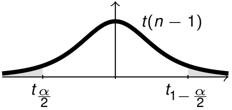
dipende da n, q

E se non conosciamo σ^2 ?

T-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α:

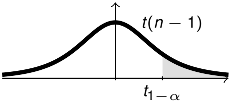
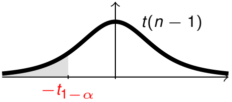
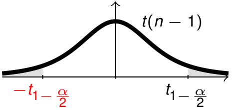
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < t_{\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T_0 < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ oppure $T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

■ $= \alpha$

T-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

$= \alpha$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ ”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad {\color{red}1.4783} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}({\color{green}3})$$

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)

	Valore della funzione di ripartizione							
n	**0.75**	**0.8**	**0.85**	**0.9**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.707

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ ”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 0.85 < 1 - \frac{\alpha}{2} < 0.9$$

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)

	Valore della funzione di ripartizione							
n	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.707

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 0.85 < 1 - \tfrac{\alpha}{2} < 0.9$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 < \quad \alpha \quad < 0.3$$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$

$\Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$

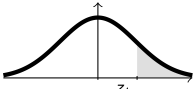
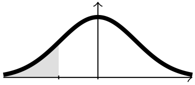
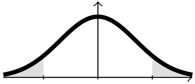
$\Rightarrow \quad 0.85 < 1 - \frac{\alpha}{2} < 0.9$

$\Rightarrow \quad 0.2 < p\text{-value} < 0.3$

T-test per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

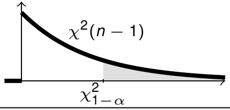
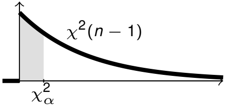
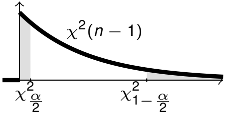
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

X^2-test per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma_0 > 0$ fissato

TESI: Posto $X_0^2 := \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$, questi sono test di significatività α :

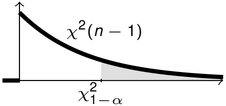
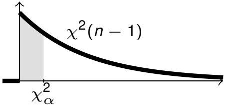
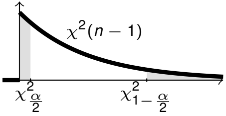
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\sigma = \sigma_0$, $X_0^2 \sim \dots$
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$X_0^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$X_0^2 < \chi^2_{\alpha}(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$X_0^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ oppure $X_0^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

$= \alpha$

X^2-test per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma_0 > 0$ fissato

TESI: Posto $X_0^2 := \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	accetto H_0 se	se $\sigma = \sigma_0$, $X_0^2 \sim \dots$
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$X_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$X_0^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq$ $\leq X_0^2 \leq$ $\leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

$= \alpha$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:
$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N\big(\mu_X, \sigma_X^2\big) \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Y_j \sim N\big(\mu_Y, \sigma_Y^2\big) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \dots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \overline{X}_m \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X^2}{m}\right) \\[2ex] \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array}\right\} \textcolor{red}{\text{indipendenti}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \dots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \overline{X}_m \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \\ \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_m - \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI: $\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}\right\}$ indipendenti

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \overline{X}_m \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \\ \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_m - \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \qquad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \qquad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

e la regola

“Rifiuto H_0 se $Z_0 > z_{1-\alpha}$”

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \qquad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

e la regola

“Rifiuto H_0 se $Z_0 > z_{1-\alpha}$”

Questo è un test di significatività α !

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“ Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

$$= \alpha$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}$ (“rifiuterò H_0”)

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}}_{N(0,1)} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}\right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}\right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

$$= \Phi\left(-z_{1-\alpha} + \frac{(\mu_X - \mu_Y) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

$$= \Phi\left(-z_{1-\alpha} + \frac{(\mu_X - \mu_Y) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right) \qquad \text{crescente in } m, n\,!$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \leq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y > \delta_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(z_0)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \geq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y < \delta_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$\Phi(z_0)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2\left[1 - \Phi\left(\lvert z_0 \rvert\right)\right]$

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(z_0)$
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$\Phi(z_0)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2\left[1 - \Phi\left(\lvert z_0 \rvert\right)\right]$

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

senza conoscere il valore di σ_X e σ_Y !

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

senza conoscere il valore di σ_X e σ_Y !

Teorema (non dimostrato)

Se i due campioni normali precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \sim t(m+n-2)$$

dove S_p^2 è la *varianza pooled*

$$S_p^2 := \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \leq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y > \delta_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \geq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y < \delta_0$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$

$$T_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}(m+n-2)}$

$$T_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X =$ … oppur… $\mu_X \geq$ …	…	… $+ n - 2)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}(m+n-2)}$

$T_0 \sim ???$ quando $\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$

$\Rightarrow$ la potenza non si sa calcolare

$$T_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y \quad \Rightarrow \quad$ sarebbe meglio)

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y \quad \Rightarrow \quad$ sarebbe meglio)

o almeno per

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X \neq \sigma_Y$)

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y \quad \Rightarrow \quad$ sarebbe meglio)

o almeno per

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X \neq \sigma_Y$)

Purtroppo si sa fare solo questo!

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Teorema (non dimostrato)

Se i due campioni normali precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

ha *densità di Fisher* con $m - 1$ e $n - 1$ gradi di libertà ($f(m-1, n-1)$)

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Teorema (non dimostrato)

Se i due campioni normali precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

ha *densità di Fisher* con $m-1$ e $n-1$ gradi di libertà ($f(m-1, n-1)$)

$$\Downarrow$$

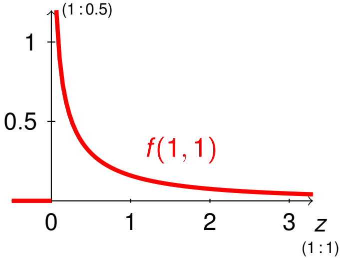
Un test di significatività α per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1 \right) \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1 \right)$$

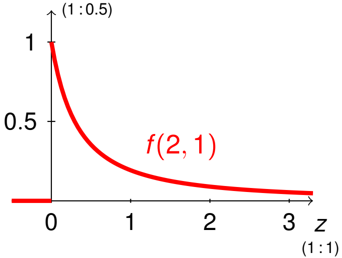
è dato dalla regola

“Rifiuto H_0 se $F_0 > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$”

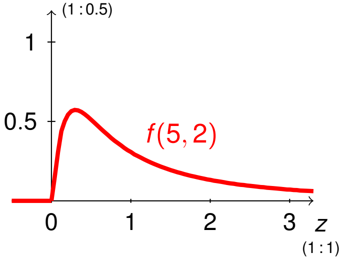
Proprietà della densità di Fisher:



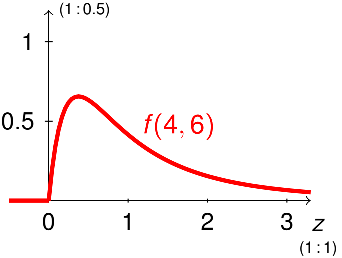
Proprietà della densità di Fisher:



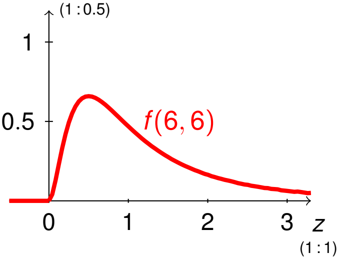
Proprietà della densità di Fisher:



Proprietà della densità di Fisher:

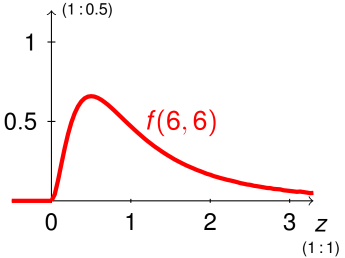


Proprietà della densità di Fisher:



Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

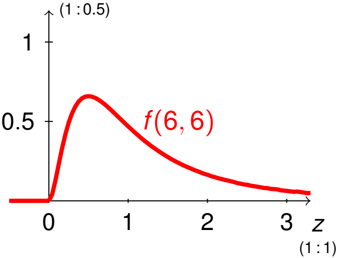
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0, +\infty)$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



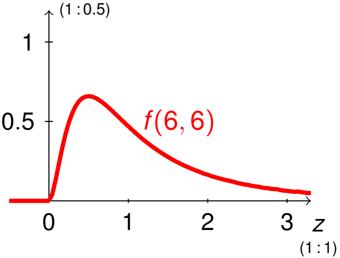
- $\text{supp}\, f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati:

$$f_{0.975}(3,7) = 5.890$$

Tavola dei quantili 0.975 della distribuzione F(m,n)

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30
1	647.8	38.506	17.443	12.218	10.007	8.813	8.073	7.571	7.209	6.937	6.724	6.554	6.414	6.298	6.200	6.115	6.042	5.978	5.922	5.871	5.786	5.717	5.659	5.610	5.5
2	799.5	39.000	16.044	10.649	8.434	7.260	6.542	6.059	5.715	5.456	5.256	5.096	4.965	4.857	4.765	4.687	4.619	4.560	4.508	4.461	4.383	4.319	4.265	4.221	4.1
3	864.2	39.166	15.439	9.979	7.764	6.599	5.890	5.416	5.078	4.826	4.630	4.474	4.347	4.242	4.153	4.077	4.011	3.954	3.903	3.859	3.783	3.721	3.670	3.626	3.5
4	899.6	39.248	15.101	9.604	7.388	6.227	5.523	5.053	4.718	4.468	4.275	4.121	3.996	3.892	3.804	3.729	3.665	3.608	3.559	3.515	3.440	3.379	3.329	3.286	3.2
5	921.8	39.298	14.885	9.364	7.146	5.988	5.285	4.817	4.484	4.236	4.044	3.891	3.767	3.663	3.576	3.502	3.438	3.382	3.333	3.289	3.215	3.155	3.105	3.063	3.0
6	937.1	39.331	14.735	9.197	6.978	5.820	5.119	4.652	4.320	4.072	3.881	3.728	3.604	3.501	3.415	3.341	3.277	3.221	3.172	3.128	3.055	2.995	2.945	2.903	2.8
7	948.2	39.356	14.624	9.074	6.853	5.695	4.995	4.529	4.197	3.950	3.759	3.607	3.483	3.380	3.293	3.219	3.156	3.100	3.051	3.007	2.934	2.874	2.824	2.782	2.7

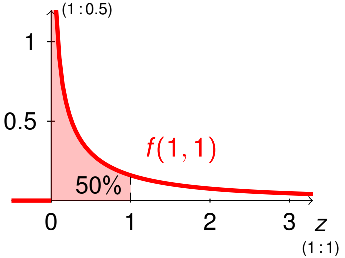
Proprietà della densità di Fisher:



- $\mathrm{supp}\, f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

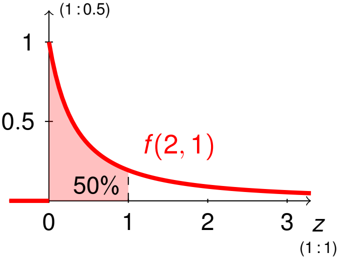
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

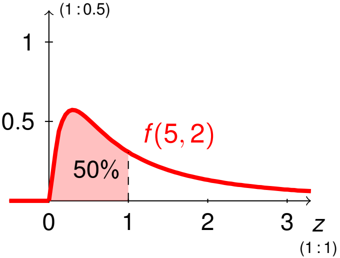
Proprietà della densità di Fisher:



- supp $f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

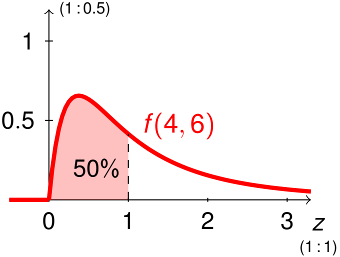
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0,+\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

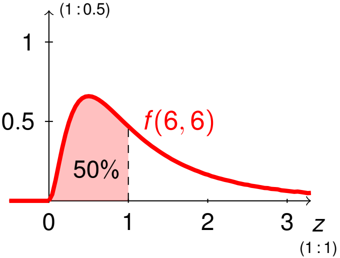
Proprietà della densità di Fisher:



- $\mathrm{supp}\, f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

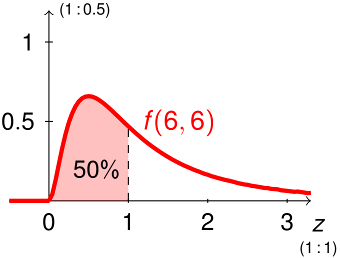
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0,+\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



- supp $f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$
- i quantili con $\alpha \leq 10\%$ si ricavano da

$$f_\alpha(h,k) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(k,h)}$$

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\quad \frac{S_X^2}{S_Y^2} \quad \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)}\Bigg)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1)\right)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\quad \frac{S_X^2}{S_Y^2} \quad \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1)\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\quad \frac{S_Y^2}{S_X^2} \quad < f_{1-\alpha}(n-1, m-1)\right)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \le \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \ge f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1,m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right)$$

$$= 1 - (1-\alpha)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1,m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\Bigg) \\
&= 1-(1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}_{f(m-1,n-1)} \le \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}\Bigg)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \ge f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1,m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\Bigg)$$

$$= 1-(1-\alpha)$$

$$= \alpha$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}_{f(m-1,n-1)} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}\Bigg)
&= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1,m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\Bigg) \\
&= 1-(1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad f_{\alpha}(m-1,n-1) \equiv \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}
$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \geq \sigma_Y$	$\sigma_X < \sigma_Y$	$F_0 < f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$F_0 < f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ oppure $F_0 > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$ Vanno controllate entrambe! $\sigma_X \leq \sigma_Y$		$F_0 < f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$F_0 < f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ oppure $F_0 > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	accetto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 \leq f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \geq \sigma_Y$	$\sigma_X < \sigma_Y$	$F_0 \geq f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) \leq$ $\leq F_0 \leq$ $\leq f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il *p*-value dell'*F*-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{ ”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

$\Rightarrow \quad 0.9 < 1 - \alpha$

. . . la dei quantili 0.9 della distribuzio

m	1	2	3	4	. . .	15	16	17	18	19	20
1	39.86	8.526	5.538	4.5	. . .	3.073	3.048	3.026	3.007	2.990	2.975
2	49.50	9.000	5.462	4.3	. . .	2.695	2.668	2.645	2.624	2.606	2.589
3	53.59	9.162	5.391	4.1	. . .	2.490	2.462	2.437	2.416	2.397	2.380
4	55.83	9.243	5.343	4.1	. . .	2.361	2.333	2.308	2.286	2.266	2.249
5	57.24	9.293	5.309	4.0	. . .	2.273	2.244	2.218	2.196	2.176	2.158

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

$\Rightarrow \quad 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$

. . . la dei quantili 0.95 della distribuzi

m	1	2	3	4	…	15	16	17	18	19	20
1	161.45	18.513	10.128	7.7	…	4.543	4.494	4.451	4.414	4.381	4.351
2	199.50	19.000	9.552	6.9	…	3.682	3.634	3.592	3.555	3.522	3.493
3	215.71	19.164	9.277	6.5	…	3.287	3.239	3.197	3.160	3.127	3.098
4	224.58	19.247	9.117	6.3	…	3.056	3.007	2.965	2.928	2.895	2.866
5	230.16	19.296	9.013	6.2	…	2.901	2.852	2.810	2.773	2.740	2.711

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

$\Rightarrow \quad 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$

$\Rightarrow \quad 0.05 < \quad \alpha \quad < 0.1$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

$\Rightarrow \quad 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$

$\Rightarrow \quad 0.05 < p\text{-value} < 0.1$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{ ”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow \quad 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3,17)}$$

$$\Rightarrow \quad 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \alpha > 0.995$$

. . . uantili 0.995 della distribuzi

m	1	2	3	4	5	. . .	16	17	18	19	20
1	16212	198.5	55.55	31.332	22.785	. . .	10.576	10.384	10.218	10.073	9.944
2	19997	199.0	49.80	26.284	18.314	. . .	7.514	7.354	7.215	7.093	6.987
3	21614	199.2	47.47	24.260	16.530	. . .	6.303	6.156	6.028	5.916	5.818
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	24632	199.4	43.08	20.438	13.146	. . .	3.920	3.793	3.683	3.587	3.502
16	24684	199.4	43.01	20.371	13.086	. . .	3.875	3.747	3.637	3.541	3.457
17	24728	199.4	42.94	20.311	13.033	. . .	3.834	3.707	3.597	3.501	3.416
18	24766	199.4	42.88	20.258	12.985	. . .	3.797	3.670	3.560	3.464	3.380

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow \quad 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \alpha > 0.995$$

$$\Rightarrow \quad \alpha < 0.005$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow \quad 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \alpha > 0.995$$

$$\Rightarrow \quad p\text{-value} < 0.005$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il *p*-value dell'*F*-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

"accetto H_0 se $f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) < F_0 := \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$"

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \quad \ldots$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

"accetto H_0 se $\underbrace{f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}_{<1} < F_0 := \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$"

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \quad \ldots$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

- se $f_0 < 1$,

  $f_0 \equiv f_{\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

$$\text{“accetto } H_0 \text{ se } \underbrace{f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}_{<1} < F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < \underbrace{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}_{>1}\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \quad \ldots$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

- se $f_0 < 1$,

  $f_0 \equiv f_{\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$

- se $f_0 > 1$,

  $f_0 \equiv f_{1-\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOTESI:
$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad m \text{ grande} \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad n \text{ grande} \end{array}\right\} \text{indipendenti}$$

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad m \ \text{grande} \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad n \ \text{grande} \end{array}\right\} \ \text{indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \approx N(0,1)$$

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOTESI: $\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad m \;\text{grande} \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad n \;\text{grande} \end{array}\right\}$ indipendenti

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \approx N(0, 1)$$

$\Rightarrow$ Z-test per $\mu_X - \mu_Y$ approssimati

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \ldots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array}\right\} \text{ indip.}$$

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI: $\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \ldots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array}\right\}$ indip.

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \hat{P} = \frac{m\overline{X}_m + n\overline{Y}_n}{m+n}$$

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI: $\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \ldots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array}\right\}$ indip.

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \hat{P} = \frac{m\overline{X}_m + n\overline{Y}_n}{m+n}$$

$\Rightarrow$ Z-test per $q_X - q_Y$ approssimati

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI:
$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \ \text{ i.i.d. con } \ m \ \text{ grande, } \ X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \ldots, Y_n \ \text{ i.i.d. con } \ n \ \text{ grande, } \ Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array}\right\} \text{ indip.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \hat{P} = \frac{m\overline{X}_m + n\overline{Y}_n}{m+n}$$

$\Rightarrow$ Z-test per $q_X - q_Y$ approssimati

<u>In alternativa</u>: Z-test per campioni numerosi,
ma convergenza a $N(0,1)$ più lenta

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim f, \quad f \text{ densità incognita}$$

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim f, \quad f \text{ densità incognita}$$

Vogliamo fare inferenza su tutta f (e non solo su un suo parmetro)

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim f, \quad f \text{ densità incognita}$$

Vogliamo fare inferenza su tutta f (e non solo su un suo parmetro)

Ci sono due modi:

- metodi grafici
- test non parametrici

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\Big(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\Big) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$
$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\Big(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\Big) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

dalle tavole

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\right) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\right) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

dall'esperimento

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\Big(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\Big) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

$$\Rightarrow \quad \hat{q}_\gamma^X \text{ e } z_\gamma \text{ si devono allineare!}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^{X}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \;=\; \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} \;=\; \tfrac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big)$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \;=\; \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} \;=\; \tfrac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big) \qquad \text{complicato!}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^{X} = \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^{X}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \;=\; \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} \;=\; \tfrac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \;=\; \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}} \;=\; x_{(k)}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} = \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}} = x_{(k)} \qquad \text{più semplice\ldots}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} = \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}} = x_{(k)} \qquad \text{più semplice...}$$

NORMAL QQ-PLOT $=$ grafico dei punti

$$\left(z_{\frac{k-0.5}{n}}\,,\ \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}}\right) \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n$$

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \; = \; \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} \; = \; \tfrac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \; = \; \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}} \; = \; x_{(k)} \qquad \text{più semplice\ldots}$$

NORMAL QQ-PLOT $=$ grafico dei punti

$$\Big(z_{\frac{k-0.5}{n}}\,,\; \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}}\Big) \; = \; \Big(z_{\frac{k-0.5}{n}}\,,\; x_{(k)}\Big) \qquad \text{con } \; k = 1, 2, \ldots, n$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} = \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}} = x_{(k)} \qquad \text{più semplice\ldots}$$

NORMAL QQ-PLOT $=$ grafico dei punti

$$\left(z_{\frac{k-0.5}{n}}\,,\ \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}}\right) = \left(z_{\frac{k-0.5}{n}}\,,\ x_{(k)}\right) \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n$$

punti quasi allineati $\Rightarrow$ è verosimile che $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Test di Shapiro-Wilks

Si può fare (con R) un test per le ipotesi

$$H_0 : \text{le } X_i \text{ hanno densità normale} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

Test di Shapiro-Wilks

Si può fare (con R) un test per le ipotesi

$$H_0 : \text{le } X_i \text{ hanno densità normale} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

$$p\text{-value alto} \quad \Rightarrow \quad \text{non possiamo escludere } X_i \text{ normali}$$

Test di Shapiro-Wilks

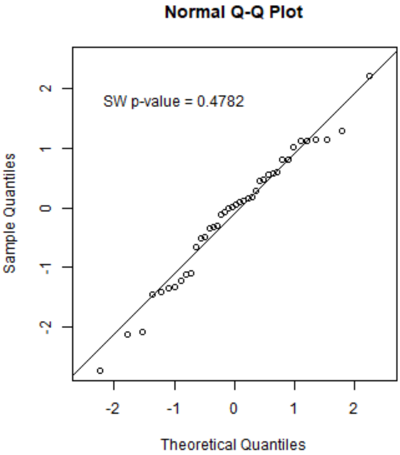
Si può fare (con R) un test per le ipotesi

$$H_0 : \text{le } X_i \text{ hanno densità normale} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

p-value alto $\Rightarrow$ non possiamo escludere X_i normali

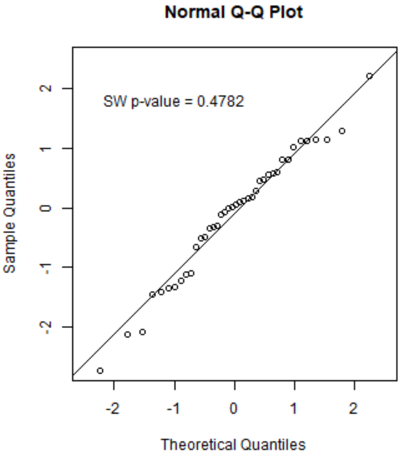
p-value basso $\Rightarrow$ normalità delle X_i poco verosimile

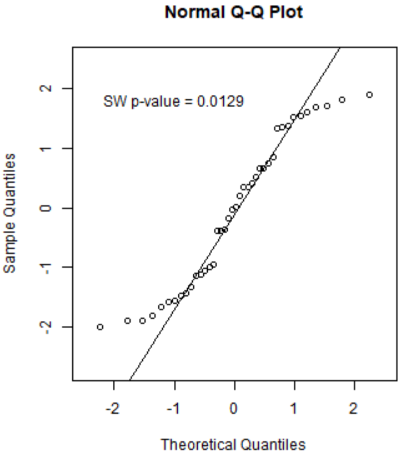
Test di Shapiro-Wilks



Non posso rifiutare la gaussianità

Test di Shapiro-Wilks





Non posso rifiutare la gaussianità

Devo rifiutare la gaussianità