

# Statistica - 4<sup>a</sup> lezione (parte II)

9 marzo 2021

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$
- Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , allora  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  (standardizzazione)
- La f.d.r. di  $N(0, 1)$  si indica con  $\Phi$  e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione $N(0,1)$										
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$\begin{aligned}\Phi(0.36) &= \\ &= \Phi(0.3 + 0.06) \\ &= 0.64058 \\ q_{0.64058} &= 0.36\end{aligned}$$

**ESEMPIO:**

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1)$$

**ESEMPIO:**

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(0 < X < 5.1\right)$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(\underbrace{3.2}_{\mu}, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(0 - 3.2 < X - \mu < 5.1 - 3.2\right)$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, \underbrace{7.6}_{\sigma^2})$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right)\end{aligned}$$



## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)\end{aligned}$$

# Densità gaussiana

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)\end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59094	0.59481	0.59867	0.60251	0.60635	0.61018	0.61399
0.3	0.61770	0.62149	0.62527	0.62904	0.63279	0.63653	0.64026	0.64398	0.64768	0.65136
0.4	0.65502	0.65867	0.66231	0.66594	0.66955	0.67315	0.67674	0.68032	0.68389	0.68744
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327

$$\begin{aligned}\Phi(0.689) &= \\ &= \Phi(0.6 + 0.09) \\ &= 0.75490\end{aligned}$$

# Densità gaussiana

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\ &= 0.75490\end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58319	0.58709	0.59099	0.59487	0.59875	0.60261	0.60646	0.61029	0.61411
0.3	0.61791	0.62170	0.62547	0.62914	0.63281	0.63645	0.64008	0.64370	0.64730	0.65089
0.4	0.65448	0.65806	0.66163	0.66518	0.66871	0.67224	0.67576	0.67926	0.68274	0.68621
0.5	0.68967	0.69311	0.69653	0.69994	0.70334	0.70673	0.71011	0.71349	0.71685	0.72020
0.6	0.72344	0.72666	0.72986	0.73304	0.73619	0.73933	0.74245	0.74556	0.74865	0.75173
0.7	0.75479	0.75783	0.76086	0.76388	0.76688	0.76987	0.77284	0.77580	0.77875	0.78169
0.8	0.78461	0.78752	0.79042	0.79330	0.79616	0.79901	0.80185	0.80468	0.80750	0.81031
0.9	0.81311	0.81590	0.81868	0.82145	0.82421	0.82696	0.82969	0.83241	0.83511	0.83780
1.0	0.84048	0.84314	0.84580	0.84845	0.85109	0.85372	0.85634	0.85895	0.86155	0.86413
1.1	0.86670	0.86925	0.87179	0.87432	0.87684	0.87935	0.88185	0.88434	0.88681	0.88927
1.2	0.89171	0.89414	0.89656	0.89897	0.90137	0.90375	0.90612	0.90848	0.91082	0.91314
1.3	0.91544	0.91774	0.91994	0.92212	0.92429	0.92645	0.92859	0.93071	0.93281	0.93489

$$\begin{aligned}\Phi(-1.161) &= \\ &= 1 - \Phi(1.161) \\ &= 1 - 0.87698\end{aligned}$$

# Densità gaussiana

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\ &= 0.75490 - (1 - 0.87698)\end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60259	0.60646	0.61033	0.61419
0.3	0.61794	0.62179	0.62564	0.62948	0.63321	0.63693	0.64065	0.64436	0.64806	0.65175
0.4	0.65543	0.65910	0.66276	0.66641	0.66995	0.67349	0.67702	0.68054	0.68405	0.68755
0.5	0.69104	0.69452	0.69799	0.70145	0.70490	0.70834	0.71177	0.71519	0.71861	0.72202
0.6	0.72542	0.72881	0.73219	0.73556	0.73891	0.74226	0.74560	0.74893	0.75225	0.75556
0.7	0.75894	0.76229	0.76563	0.76896	0.77228	0.77559	0.77889	0.78218	0.78546	0.78873
0.8	0.79199	0.79525	0.79850	0.80174	0.80497	0.80819	0.81140	0.81460	0.81780	0.82098
0.9	0.82415	0.82730	0.83044	0.83357	0.83669	0.83980	0.84290	0.84598	0.84905	0.85211
1.0	0.85517	0.85821	0.86125	0.86427	0.86728	0.87028	0.87326	0.87623	0.87919	0.88214
1.1	0.88507	0.88799	0.89090	0.89379	0.89667	0.89954	0.90239	0.90523	0.90806	0.91088
1.2	0.91368	0.91647	0.91924	0.92200	0.92475	0.92748	0.93020	0.93291	0.93560	0.93828
1.3	0.94094	0.94358	0.94621	0.94882	0.95142	0.95400	0.95657	0.95912	0.96166	0.96418

$$\begin{aligned}\Phi(-1.161) &= \\ &= 1 - \Phi(1.161) \\ &= 1 - 0.87698\end{aligned}$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\&= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\&= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\&= 0.75490 - (1 - 0.87698) \\&= 0.63188 = 63.188\%\end{aligned}$$

# Variabili aleatorie discrete

## Definizione

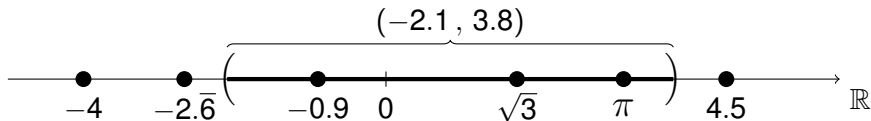
Una v.a.  $X$  si dice **discreta** se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

$S$  è un **insieme discreto** quando tutti i suoi punti sono isolati

$\Rightarrow S$  è finito o al più numerabile

**ESEMPIO:**  $S = \{-4, -2.\bar{6}, -0.9, \sqrt{3}, \pi, 4.5\}$       $I = (-2.1, 3.8)$



Si richiede  $\mathbb{P}(X \in (-2.1, 3.8)) = \mathbb{P}(X \in \{-0.9, \sqrt{3}, \pi\})$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$ :

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S)$$



## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$ :

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R})$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$ :

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S)$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}("X = k_1" \vee \dots \vee "X = k_n")$$

$$\text{con } I \cap S = \{k_1, \dots, k_n\}$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}("X = k_1" \vee \dots \vee "X = k_n")$$

$$\stackrel{(3)}{=} \mathbb{P}(X = k_1) + \dots + \mathbb{P}(X = k_n) \quad \text{con } I \cap S = \{k_1, \dots, k_n\}$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in I) &= \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}("X = k_1" \vee \dots \vee "X = k_n") \\ &= \mathbb{P}(X = k_1) + \dots + \mathbb{P}(X = k_n) \quad \text{con } I \cap S = \{k_1, \dots, k_n\} \\ &= \sum_{k \in I \cap S} p_X(k) \end{aligned}$$



## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0, 1]$  per ogni  $k \in S$  (positività)  
perché  $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0, 1]$  per ogni  $k \in S$  (positività)
- $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$  (normalizzazione)

perché  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$

- $p_X(k) \in [0, 1]$  per ogni  $k \in S$  (positività)
  - $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$  (normalizzazione)
- } proprietà fondamentali

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{"uscirà } k\text{"})$$

tutti i  $k \in S$  sono equiprobabili



$$p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{"uscirà } k\text{"})$$

tutti i  $k \in S$  sono equiprobabili

$$\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$$

$\Downarrow$

$$p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S$$

$\Downarrow$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

$p_X$  si chiama densità *uniforme discreta* su  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$



## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

$p_X$  si chiama densità *uniforme discreta* su  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = ???$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

$p_X$  si chiama densità *uniforme discreta* su  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3, 4\}} p_X(k)$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

$p_X$  si chiama densità *uniforme discreta* su  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

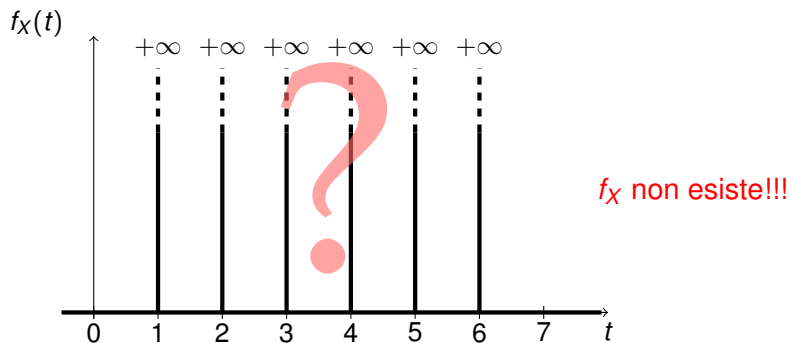
$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3, 4\}} p_X(k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



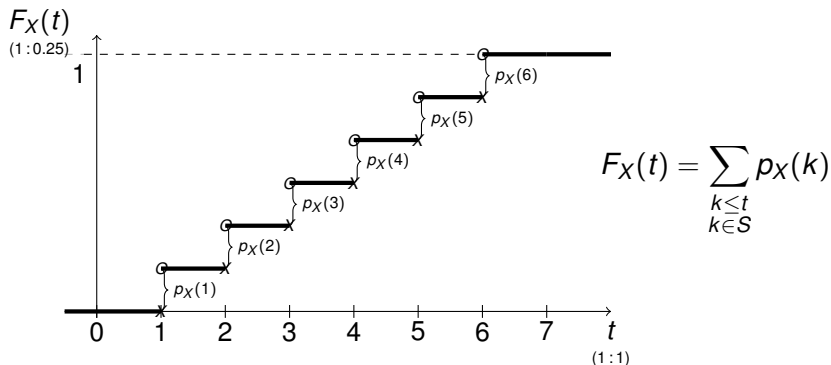
# Variabili aleatorie discrete

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



# Variabili aleatorie discrete

$X$  assolutamente continua

$X$  discreta

$$\int_I \dots f_X(z) \, dz \quad \longrightarrow \quad \sum_{k \in I \cap S} \dots p_X(k)$$

# Variabili aleatorie discrete

$X$  assolutamente continua

$X$  discreta

$$\int_I \dots f_X(z) \, dz \quad \longrightarrow \quad \sum_{k \in \text{InS}} \dots p_X(k)$$

## Definizioni

Il *valore atteso* e la *varianza* di una v.a. discreta  $X$  sono i numeri reali

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k p_X(k)$$

$$\text{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 p_X(k)$$

# Variabili aleatorie discrete

$X$  assolutamente continua

$X$  discreta

$$\int_I \dots f_X(z) dz \quad \longrightarrow \quad \sum_{k \in I \cap S} \dots p_X(k)$$

## Definizioni

Il **valore atteso** e la **varianza** di una v.a. discreta  $X$  sono i numeri reali

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k p_X(k)$$

$$\text{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 p_X(k)$$

## Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{k \in S} g(k) p_X(k)$$

Valgono le stesse proprietà e gli stessi risultati del caso continuo



# Variabili aleatorie costanti

$X = c$       qualunque sia il risultato dell'esperimento

# Variabili aleatorie costanti

$X = c$      qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1]$$

# Variabili aleatorie costanti

$X = c$      qualunque sia il risultato dell'esperimento

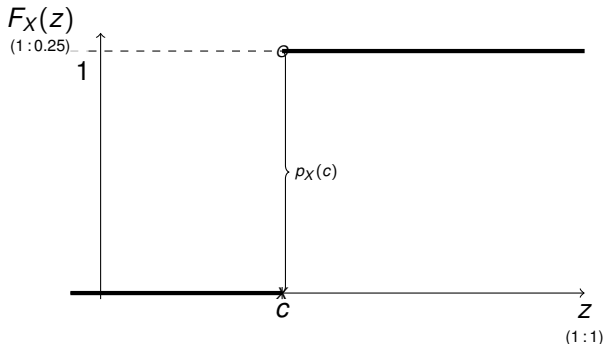
$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1]$$
$$p_X(c) = 1$$

# Variabili aleatorie costanti

$X = c$  qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \Rightarrow p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(c) = 1$$



# Variabili aleatorie costanti

$X = c$      qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1] \\ p_X(c) = 1$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k p_X(k)$

# Variabili aleatorie costanti

$X = c$       qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1] \\ p_X(c) = 1$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k p_X(k) = c \cdot p_X(c)$

# Variabili aleatorie costanti

$X = c$      qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1] \\ p_X(c) = 1$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k p_X(k) = c \cdot p_X(c) \\ = c \cdot 1 = c$

# Variabili aleatorie costanti

$X = c$      qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1] \\ p_X(c) = 1$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\text{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 p_X(k)$



# Variabili aleatorie costanti

$X = c$      qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1] \\ p_X(c) = 1$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\text{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 p_X(k) = (c - c)^2 \cdot p_X(c)$

# Variabili aleatorie costanti

$X = c$  qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \Rightarrow p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1] \\ p_X(c) = 1$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\text{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 p_X(k) = (c - c)^2 \cdot p_X(c) \\ = (c - c)^2 \cdot 1 = 0$

# Variabili aleatorie costanti

$X = c$       qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \rightarrow [0, 1] \\ p_X(c) = 1$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\text{var}[X] = 0$

$$\text{var}[X] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ è una costante}$$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E})$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E})$$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1)$$



# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E})$$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E)$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

$p_X$  si chiama densità *bernoulliana di parametro  $q$*  e si scrive

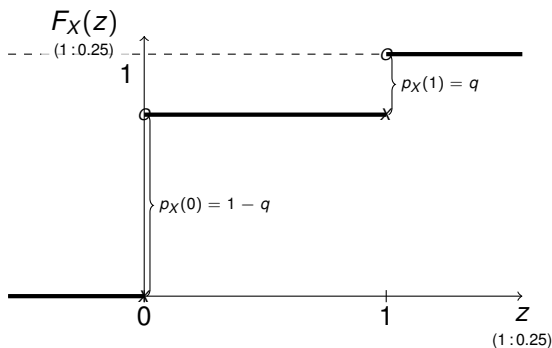
$$X \sim B(1, q)$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \Rightarrow p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$



# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k p_X(k)$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1)$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in S} k p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) \\ &= 0 \cdot (1 - q) + 1 \cdot q \end{aligned}$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in S} k p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) \\ &= 0 \cdot (1 - q) + 1 \cdot q \\ &= q \end{aligned}$$



# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \Rightarrow p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$

- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$  perché  $X^2 = X$   
 $\left( \begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 0^2 = 0 \end{array} \right)$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$

- $\begin{aligned} \text{var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= q - q^2 \end{aligned}$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$

- $$\begin{aligned} \text{var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= q - q^2 \\ &= q(1 - q) \end{aligned}$$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$

- $\text{var}[X] = q(1 - q)$

# Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \bar{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned} \right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\text{var}[X] = q(1 - q)$

## ESEMPI:

- Nel lancio di **due** dadi:

$X$  = risultato del primo lancio     $Y$  = risultato del secondo lancio

$X + Y$  = somma dei due risultati



## ESEMPI:

- Nel lancio di **due** dadi:

$X$  = risultato del primo lancio     $Y$  = risultato del secondo lancio

$X + Y$  = somma dei due risultati

- Nel sondaggio fra **100** studenti:

$X_4$  = altezza del 4° studente     $X_{17}$  = altezza del 17° studente

$Y_4$  = peso del 4° studente     $Y_{17}$  = peso del 17° studente

## ESEMPI:

- Nel lancio di **due** dadi:

$X$  = risultato del primo lancio     $Y$  = risultato del secondo lancio

$X + Y$  = somma dei due risultati

- Nel sondaggio fra **100** studenti:

$X_4$  = altezza del 4° studente     $X_{17}$  = altezza del 17° studente

$Y_4$  = peso del 4° studente     $Y_{17}$  = peso del 17° studente

Tra loro le variabili aleatorie si possono sommare, moltiplicare ecc. :

$X + Y$              $XY$             ...

## Teorema

$$① \quad \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

## Teorema

- ❶  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- ❷  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

## Teorema

- ❶  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- ❷  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

**DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):**

$$\text{var}[X + Y] = \mathbb{E}\left[\{(X + Y) - \mathbb{E}[X + Y]\}^2\right]$$

## Teorema

- ❶  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- ❷  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

**DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):**

$$\begin{aligned} \text{var}[X + Y] &= \mathbb{E} \left[ \{(X + Y) - \mathbb{E}[X + Y]\}^2 \right] \\ &\stackrel{(I)}{=} \mathbb{E} \left[ \{(X + Y) - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])\}^2 \right] \end{aligned}$$

## Teorema

- ❶  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- ❷  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

**DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):**

$$\begin{aligned}\text{var}[X + Y] &= \mathbb{E} \left[ \{(X + Y) - \mathbb{E}[X + Y]\}^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \{(X - \mathbb{E}[X]) + (Y - \mathbb{E}[Y])\}^2 \right]\end{aligned}$$

## Teorema

$$\textcircled{I} \quad \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

$$\textcircled{II} \quad \text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

## DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\begin{aligned} \text{var}[X + Y] &= \mathbb{E} \left[ \{(X + Y) - \mathbb{E}[X + Y]\}^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \{(X - \mathbb{E}[X]) + (Y - \mathbb{E}[Y])\}^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (X - \mathbb{E}[X])^2 + (Y - \mathbb{E}[Y])^2 + 2(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]) \right] \end{aligned}$$



## Teorema

$$\textcircled{I} \quad \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

$$\textcircled{II} \quad \text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

## DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\begin{aligned} \text{var}[X + Y] &= \mathbb{E} \left[ \{(X + Y) - \mathbb{E}[X + Y]\}^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \{(X - \mathbb{E}[X]) + (Y - \mathbb{E}[Y])\}^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (X - \mathbb{E}[X])^2 + (Y - \mathbb{E}[Y])^2 + 2(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]) \right] \\ &\stackrel{(I)}{=} \mathbb{E} \left[ (X - \mathbb{E}[X])^2 \right] + \mathbb{E} \left[ (Y - \mathbb{E}[Y])^2 \right] + 2 \mathbb{E} \left[ (X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]) \right] \end{aligned}$$

## Teorema

- ❶  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- ❷  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

## DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\text{var}[X + Y] =$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}_{\text{var}[X]} + \underbrace{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]}_{\text{var}[Y]} + \underbrace{2 \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]}_{\text{cov}[X, Y]}$$

## Teorema

- ❶  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- ❷  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Per  $n$  v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$\text{var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \text{cov}[X_i, X_j]$$

## Teorema

- ❶  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- ❷  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2 \text{cov}[X, Y]$

dove la *covarianza* di  $X$  e  $Y$  è

$$\text{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Per  $n$  v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$\text{var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \text{cov}[X_i, X_j]$$

Come mi sbarazzo di  $\text{cov}[X_i, X_j]$  ?