Statistica - 10$^{\mathrm{a}}$ lezione

13 aprile 2021

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$$ è un $IC_q(\gamma)$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{è un } IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\cancel{2}} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$ perché $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1,q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \; - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}_{=\overline{x}} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1,q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{è un } IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{=\overline{x}} - n \cdot \overline{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2\right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \, \overline{x} \, (1 - \overline{x})$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{è un } IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\simeq 1} \overline{x} \, (1 - \overline{x})$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\simeq 1} \overline{x}(1-\overline{x}) \simeq \overline{x}(1-\overline{x})$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \, \overline{x}\,(1-\overline{x}) \simeq \overline{x}\,(1-\overline{x})$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1,q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\, , \ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\, , \ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2\right)$$

$$= \frac{n}{n-1}\,\overline{x}\,(1-\overline{x}) \simeq \overline{x}\,(1-\overline{x}) \quad \Rightarrow \quad s \simeq \sqrt{\overline{x}\,(1-\overline{x})}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \; - n \cdot \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \overline{x} - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \, \overline{x} \, (1 - \overline{x}) \simeq \overline{x} \, (1 - \overline{x}) \quad \Rightarrow \quad s \simeq \sqrt{\overline{x} \, (1 - \overline{x})}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E$, $U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ = frequenza empirica (stimatore di q)

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E$, $U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X} =$ frequenza empirica (stimatore di q)
- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$ errore <u>aleatorio</u>

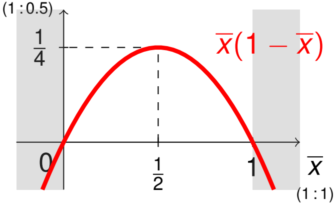
IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E$, $U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ = frequenza empirica (stimatore di q)
- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$ errore aleatorio



$$\overline{x} \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \overline{x}(1-\overline{x}) \leq \frac{1}{4}$$

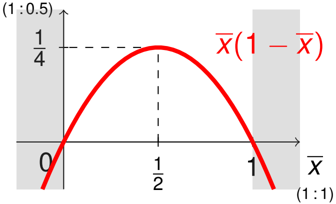
IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E$, $U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ = frequenza empirica (stimatore di q)
- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}}{n}}$



$$\overline{x} \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \overline{x}(1-\overline{x}) \leq \frac{1}{4}$$

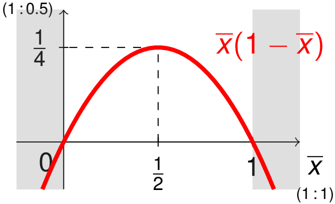
IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \,,\; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E$, $U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ = frequenza empirica (stimatore di q)
- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}}{n}} = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$



$$\overline{x} \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \overline{x}(1-\overline{x}) \leq \frac{1}{4}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E$, $U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X} \;=\;$ frequenza empirica (stimatore di q)
- $E \;\leq\; z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ riducibile a priori

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI:
$$\left.\begin{array}{l}
\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\ ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right) \\
\left(\overline{x} - z_{\gamma} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\ ,\ 1\right) \\
\left(0\ ,\ \overline{x} + z_{\gamma} \sqrt{\dfrac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right)
\end{array}\right\} \text{ sono } IC_q(\gamma)$$

IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).

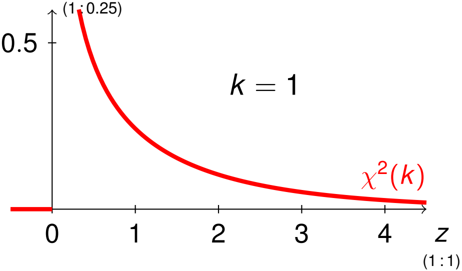
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



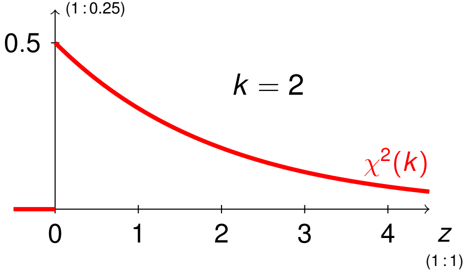
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



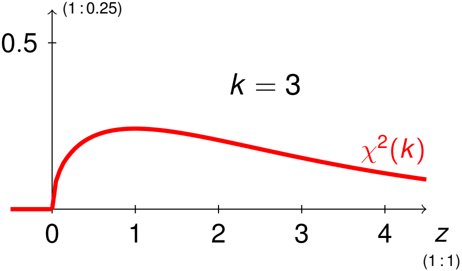
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



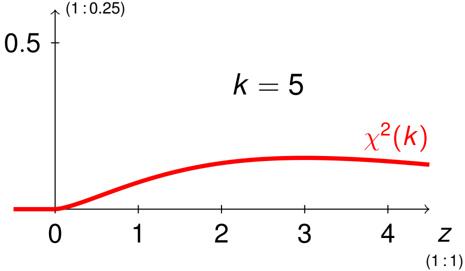
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



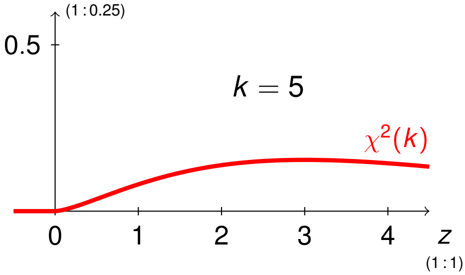
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$

IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).

n	0.0005	0.001	0.005	0.01	. . .	99	0.995	0.999	0.9995
1	3.929E-07	1.570E-06	3.927E-05	1.571E-	. . .	.6349	7.8794	10.8274	12.1153
2	9.997E-04	2.001E-03	0.0100	0.02	. . .	.2104	10.5965	13.8150	15.2014
3	0.0153	0.0243	0.0717	0.11	. . .	.3449	12.8381	16.2660	17.7311
4	0.0639	0.0908	0.2070	0.29	. . .	.2767	14.8602	18.4662	19.9977
5	0.1581	0.2102	0.4118	0.55	. . .	.0863	16.7496	20.5147	22.1057
6	0.2994	0.3810	0.6757	0.87	. . .	.8119	18.5475	22.4575	24.1016
7	0.4849	0.5985	0.9893	1.23	. . .	.4753	20.2777	24.3213	26.0179
8	0.7104	0.8571	1.3444	1.64	. . .	.0902	21.9549	26.1239	27.8674
9	0.9718	1.1519	1.7349	2.08		.6660	23.5893	27.8767	29.6669

- $\mathrm{supp}\, \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati

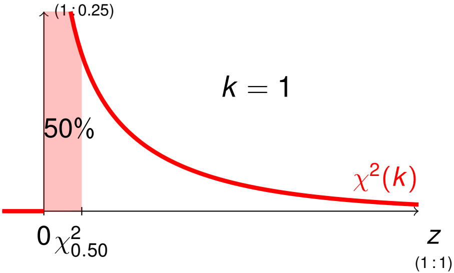
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$

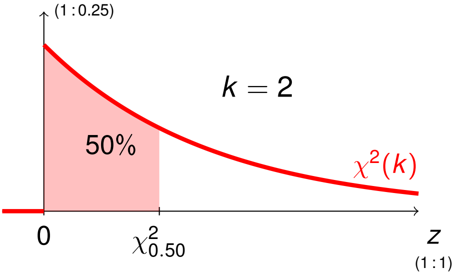
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$

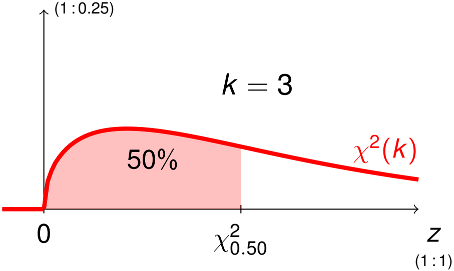
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$

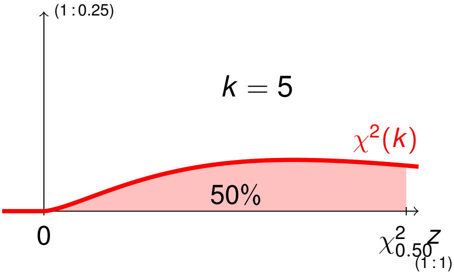
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$

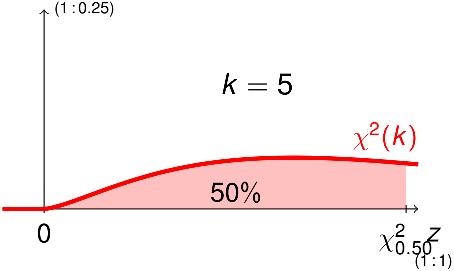
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\operatorname{supp} \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \to \infty$ per $k \to \infty$
- $\chi^2_\gamma(k) \simeq \dfrac{(z_\gamma + \sqrt{2k-1})^2}{2}$ se k è grande

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $$\left(\frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \, , \, \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \,,\, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) = \gamma$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \,,\, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}{(n-1)\, S^2} > \qquad \frac{1}{\sigma^2} \qquad > \frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}{(n-1)\, S^2} \right)$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} , \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \,,\, \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \, , \, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \,,\, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$$

$$= \gamma$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $$\left(\frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)\right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2}$$

$$= \gamma$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \, , \, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right)$$

$$= \dots = \gamma$$

STATISTICA PIVOT

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \, , \, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) \\[2em] \left(\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\gamma}(n-1)} \, , \, +\infty \right) \\[2em] \left(0 \, , \, \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\gamma}(n-1)} \right) \end{array} \right\} \text{ sono } IC_{\sigma^2}(\gamma)$$

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è onesto

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un baro

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è onesto $\Leftrightarrow$ $q = 1/2$

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un baro $\Leftrightarrow$ $q < 1/2$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$ nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini rispettano la relatività

AFFERMAZIONE 1: i neutrini violano la relatività

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

AFFERMAZIONE 1: i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

$H_0 =$ IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

H_0 $=$ IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

H_1 $=$ IPOTESI ALTERNATIVA: vera solo se c'è evidenza a suo favore

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

H_0 $=$ IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

H_1 $=$ IPOTESI ALTERNATIVA: vera solo se c'è evidenza a suo favore

H_0 e H_1 NON sono intercambiabili !

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{AFFERMAZIONE 0:} & \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow & q = 1/2 \\ \textbf{AFFERMAZIONE 1:} & \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow & q < 1/2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{ipotesi} \\ \text{statistiche} \end{array}$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è onesto $\Leftrightarrow$ $q = 1/2$ DEFAULT

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un baro $\Leftrightarrow$ $q < 1/2$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

H_0 : l'amico è onesto $\Leftrightarrow$ $q = 1/2$ DEFAULT

H_1 : l'amico è un baro $\Leftrightarrow$ $q < 1/2$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{AFFERMAZIONE 0:} & \text{i neutrini rispettano la relatività} \\ & \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \\ \textbf{AFFERMAZIONE 1:} & \text{i neutrini violano la relatività} \\ & \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \end{array}\right\} \text{ipotesi statistiche}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini rispettano la relatività DEFAULT

$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

AFFERMAZIONE 1: i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività DEFAULT

$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE $=$ affermazioni su θ

H_0 $=$ IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

H_1 $=$ IPOTESI ALTERNATIVA: vera solo se c'è evidenza a suo favore

TEST D'IPOTESI $=$ regola per scegliere tra H_0 e H_1

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l'*i*-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \ldots, X_n)$

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \ldots, X_n)$
- si fissa una *regione di rifiuto* (o *critica*) $RC \subset \mathbb{R}$
  $\big($ tipicamente: $(-\infty, c)$ o $(c, +\infty)$ o $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)\big)$

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \ldots, X_n)$
- si fissa una *regione di rifiuto* (o *critica*) $RC \subset \mathbb{R}$
  $\big($tipicamente: $(-\infty, c)$ o $(c, +\infty)$ o $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)\big)$
- si stabilisce la *regola del test*:

  "rifiuto H_0 se trovo $T_0 \in RC$"

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0: \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1: \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$\underbrace{Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}}_{\text{statistica test}} \leq 1$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$\underbrace{Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}}_{\text{statistica test}} \underbrace{\leq 1}_{\text{regione critica}}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\underbrace{\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5}}_{\text{statistica test}} \geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\underbrace{\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5}}_{\text{statistica test}} \underbrace{\geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}_{\text{regione critica}}$$

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0		
rifiuto H_0		

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0		

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0		OK!

Tipi d’errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

$\Rightarrow$ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

$\Rightarrow$ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

$\Rightarrow$ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”}\right)$$

$\mathbb{P}$ calcolata coi parametri che soddisfano H_0

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

$\Rightarrow$ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

TIPICAMENTE: significatività $=$ 5% o 2.5% o 1%

Esempio: l’amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l’amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l’amico quando in realtà è onesto

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}\big(Y \leq 1\big)$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}\left(Y \leq 1\right) = \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k}$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}\left(Y \leq 1\right) = \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{10-k} \simeq 1\%$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}(Y \leq 1)$ Va bene ! $\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k} \quad \simeq \quad 1\%$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'*i*-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\, \mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\, \mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività $\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\, \mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8\, \mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$$X_i = \text{velocità misurata per l'}i\text{-esimo neutrino}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12) \simeq 13\%$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

SIGN. $= \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}$ **Troppo grande !** $) = 1 - \Phi(1.12) \simeq 13\%$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

$X_i =$ velocità misurata per l'i-esimo neutrino

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$ nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\overline{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

ERRORE DI I TIPO … do in realtà è vera

Però è una buona idea. . .

$$\text{SIGN.} = \mathbb{P}_{\mu=3}(\overline{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12) \simeq 13\%$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad \mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”}) = \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad \mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”} \right) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $\underbrace{X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. con } X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, $\quad \mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\boxed{\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\boxed{\mu=\mu_0}}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$\boxed{\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“ rifiuterò } H_0\text{ ”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad \mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \underbrace{\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\Updownarrow$$

più comodo $\longrightarrow$ $$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

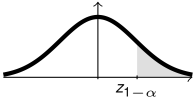
TESI: Posto $Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

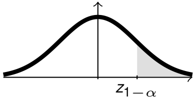
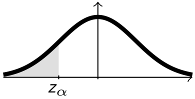
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

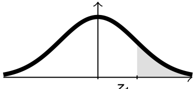
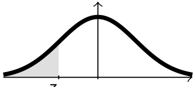
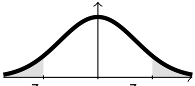
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < z_{\alpha}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

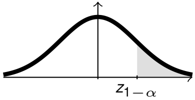
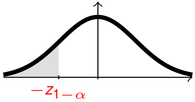
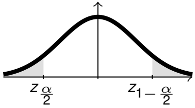
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < z_{\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

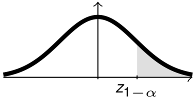
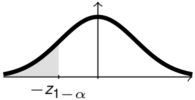
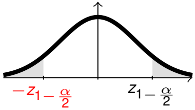
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

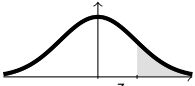
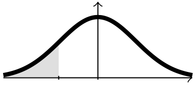
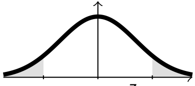
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

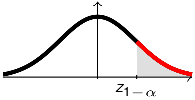
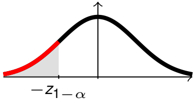
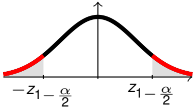
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

H_1 fissa la forma di RC_α ...

TESI: Posto $Z_0 := \frac{}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

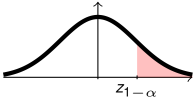
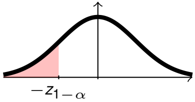
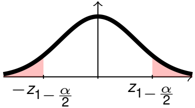
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

…mentre α fissa la sua ampiezza

TESI: Posto $Z_0 :=$ … $\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$