Statistica - 15^{a} lezione

18 maggio 2021

Retta dei minimi quadrati

Dai punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ distilliamo le 5 quantità

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_{xx} := \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad s_{xy} := \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad s_{yy} := \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

Allora la retta che meglio interpola i punti è la LSL

$$y = \hat{a} + \hat{b}\,x$$

coi coefficienti

$$\hat{a} = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_{xx}}\,\bar{x} \qquad \hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}$$

Il modello statistico

x → **Legge fisica** $y = a + bx$ → $Y = a + bx + E$

input deterministico
(numero reale)

output probabilistico
(v. a.)

Il modello statistico

$$x \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Legge fisica}\\ y = a + bx\end{array}} \longrightarrow Y = a + bx + E$$

input deterministico (numero reale) → Legge fisica $y = a + bx$ → output probabilistico (v. a.)

Se facciamo n misure:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \longrightarrow \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_n \quad \text{con} \quad Y_i = a + bx_i + E_i$$

Il modello statistico

$$\xrightarrow[\text{input deterministico (numero reale)}]{x} \boxed{\begin{array}{c}\text{Legge fisica}\\ y = a + bx\end{array}} \xrightarrow[\text{output probabilistico (v. a.)}]{Y = a + bx + E}$$

Se facciamo n misure:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \longrightarrow \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \quad \text{con} \quad Y_i = a + bx_i + E_i$$

Ipotesi fondamentale del modello lineare:

- $E_1, E_2, \ldots, E_n$ i. i. d.
- $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ con σ^2 incognita

Il modello statistico

$$x \xrightarrow{\text{input deterministico (numero reale)}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Legge fisica}\\ y = a + bx\end{array}} \xrightarrow{\text{output probabilistico (v. a.)}} Y = a + bx + E$$

Se facciamo n misure:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \longrightarrow \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \quad \text{con} \quad Y_i = a + bx_i + E_i$$

Ipotesi fondamentale del modello lineare:

- $E_1, E_2, \ldots, E_n$ i. i. d.
- $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ con σ^2 incognita

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2) \\ Y_1, \ldots, Y_n \ \text{indipendenti} \end{cases}$$

Il modello statistico

x

input deterministico
(numero reale)

Legge fisica
$y = a + bx$

$Y = a + bx + E$

output probabilistico
(v. a.)

Se facciamo n misure:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \longrightarrow \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \quad \text{con} \quad Y_i = a + bx_i + E_i$$

Ipotesi fondamentale del modello lineare:

- $E_1, E_2, \ldots, E_n$ i. i. d.
- $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ con σ^2 incognita

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2) \\ Y_1, \ldots, Y_n \ \text{indipendenti} \end{cases}$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ <u>non</u> sono identicamente distribuite

Il modello statistico

Quali sono le varibili aleatorie nel modello lineare ?

Il modello statistico

Quali sono le varibili aleatorie nel modello lineare ?

Era:	Diventa:	Ora è una v.a.?
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$	No

Il modello statistico

Quali sono le varibili aleatorie nel modello lineare ?

Era:	Diventa:	Ora è una v.a.?
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$	No
$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$	$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i$	Sì

Il modello statistico

Quali sono le varibili aleatorie nel modello lineare ?

Era:	Diventa:	Ora è una v.a.?
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$	No
$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$	$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i$	Sì
$s_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2$	$s_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2$	No

Il modello statistico

Quali sono le varibili aleatorie nel modello lineare ?

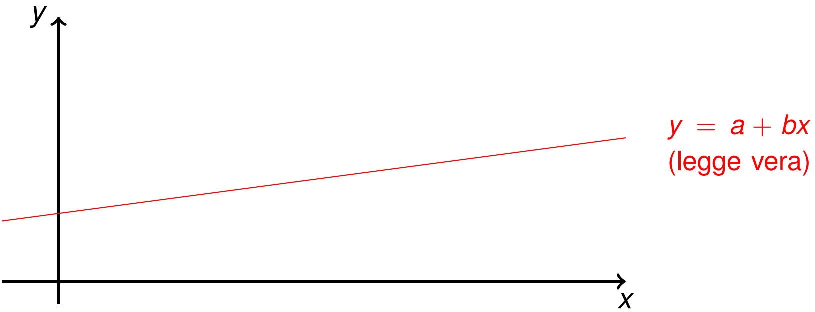
Era:	Diventa:	Ora è una v.a.?
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$	No
$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$	$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i$	Sì
$s_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$	$s_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$	No
$s_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$S_{xY} = \sum (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})$	Sì

Il modello statistico

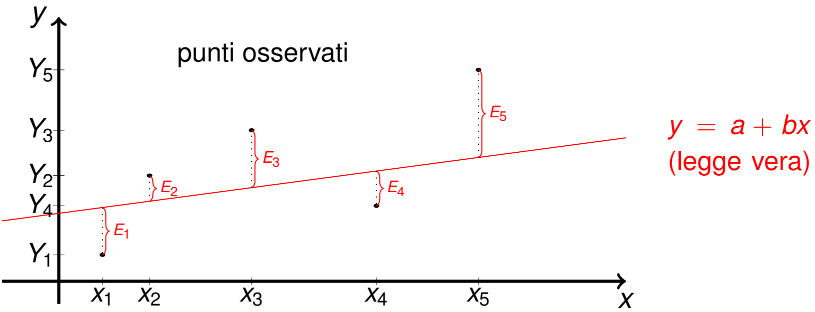
Quali sono le varibili aleatorie nel modello lineare ?

Era:	Diventa:	Ora è una v.a.?
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$	No
$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$	$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i$	Sì
$s_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$	$s_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$	No
$s_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$S_{xY} = \sum (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})$	Sì
$s_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2$	$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$	Sì
Ecc.		

Il modello statistico



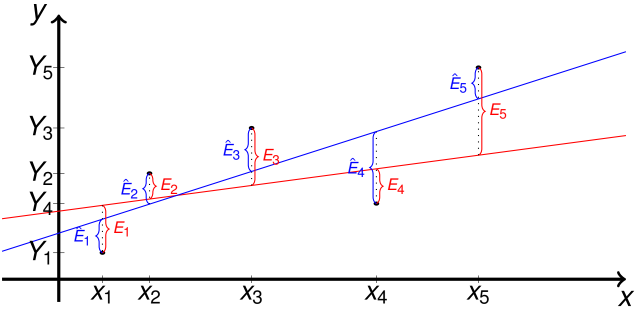
Il modello statistico



E_i = errori di misura (residui di $y = a + bx$) NON MISURABILI

perché a, b incogniti

Il modello statistico



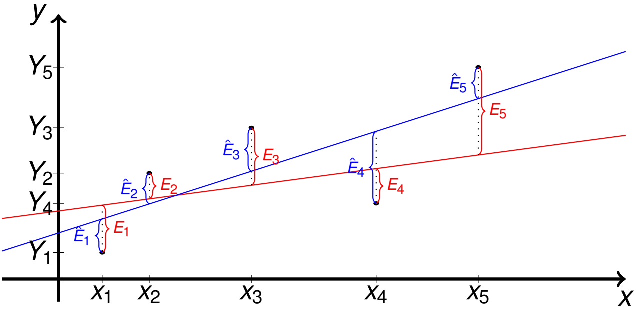
$\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}x$
(minimi quadrati)

$y = a + bx$
(legge vera)

E_i = errori di misura (residui di $y = a + bx$)

$\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}x$ interpola i punti $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$

Il modello statistico



$\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}x$
(minimi quadrati)

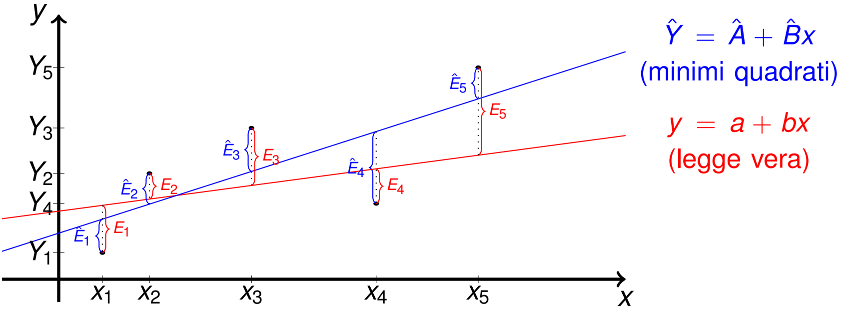
$y = a + bx$
(legge vera)

E_i = errori di misura (residui di $y = a + bx$)

$\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}x$ interpola i punti $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$

Riguarderemo $(\hat{A}, \hat{B})$ come stimatori di (a, b)

Il modello statistico



E_i = errori di misura (residui di $y = a + bx$)

$\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}x$ interpola i punti $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$

Riguarderemo $(\hat{A}, \hat{B})$ come stimatori di (a, b)

$\hat{E}_i$ = residui di $\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}x$ MISURABILI

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b\,,\, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

DIMOSTRAZIONE:

$\hat{B}$ comb. lineare di gaussiane indipendenti $\quad \Rightarrow \quad \hat{B} \sim N$

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

DIMOSTRAZIONE:

$\hat{B}$ comb. lineare di gaussiane indipendenti $\Rightarrow$ $\hat{B} \sim N$

$$\mathbb{E}\left[\bar{Y}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum \mathbb{E}\left[Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum(a + bx_i)$$
$$= a + b\bar{x}$$

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

DIMOSTRAZIONE:

$\hat{B}$ comb. lineare di gaussiane indipendenti $\Rightarrow$ $\hat{B} \sim N$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\bar{Y}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum \mathbb{E}\left[Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum(a + bx_i) \\
&= a + b\bar{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{B}\right] &= \frac{\sum(x_i - \bar{x})(\mathbb{E}\left[Y_i\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Y}\right])}{\sum(x_j - \bar{x})^2} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})[a + bx_i - (a + b\bar{x})]}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \\
&= b
\end{aligned}$$

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

DIMOSTRAZIONE:

$\hat{B}$ comb. lineare di gaussiane indipendenti $\Rightarrow$ $\hat{B} \sim N$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\bar{Y}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum \mathbb{E}\left[Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum(a + bx_i) \\ &= a + b\bar{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{B}\right] &= \frac{\sum(x_i - \bar{x})(\mathbb{E}\left[Y_i\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Y}\right])}{\sum(x_j - \bar{x})^2} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})[a + bx_i - (a + b\bar{x})]}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \\ &= b\end{aligned}$$

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

DIMOSTRAZIONE:

$\hat{B}$ comb. lineare di gaussiane indipendenti $\Rightarrow$ $\hat{B} \sim N$

$$\mathbb{E}\left[\bar{Y}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum \mathbb{E}\left[Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum (a + bx_i)$$

$$= a + b\bar{x}$$

$$\mathbb{E}\left[\hat{B}\right] = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(\mathbb{E}\left[Y_i\right] - \mathbb{E}\left[\bar{Y}\right])}{\sum (x_j - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})[a + bx_i - (a + b\bar{x})]}{\sum (x_j - \bar{x})^2}$$

$$= b$$

$$\mathrm{Var}\left[\hat{B}\right] = \frac{\sigma^2}{s_{xx}}$$ (più complicato)

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B} \text{ stimatore non distorto di } b$$

Se conoscessimo σ^2, potremmo usare la v. a.

$$\frac{\hat{B} - b}{\sqrt{\sigma^2 / s_{xx}}} \sim N(0,1)$$

per costruire IC e fare test per il parametro b

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B} \text{ stimatore non distorto di } b$$

Ma non conoscendo σ^2, la stimiamo con lo stimatore non distorto:

$$\hat{\Sigma}^2 := \frac{SS_E}{n-2} = \frac{1}{n-2}\left(S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{s_{xx}}\right)$$

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B} \text{ stimatore non distorto di } b$$

Ma non conoscendo σ^2, la stimiamo con lo stimatore non distorto:

$$\hat{\Sigma}^2 := \frac{SS_E}{n-2} = \frac{1}{n-2}\left(S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{s_{xx}}\right)$$

Si dimostra che

$$\frac{(n-2)\hat{\Sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2) \quad \text{indipendente da } \hat{B}$$

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B} \text{ stimatore non distorto di } b$$

Ma non conoscendo σ^2, la stimiamo con lo stimatore non distorto:

$$\hat{\Sigma}^2 := \frac{SS_E}{n-2} = \frac{1}{n-2}\left(S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{s_{xx}}\right)$$

Si dimostra che

$$\frac{(n-2)\hat{\Sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2) \quad \text{indipendente da } \hat{B}$$

e quindi

$$\frac{\hat{B} - b}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2 / s_{xx}}} \sim t(n-2)$$

Inferenza su b

$$\hat{B} := \frac{S_{xY}}{s_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{s_{xx}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B} \text{ stimatore non distorto di } b$$

Ma non conoscendo σ^2, la stimiamo con lo stimatore non distorto:

$$\hat{\Sigma}^2 := \frac{SS_E}{n-2} = \frac{1}{n-2}\left(S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{s_{xx}}\right)$$

Si dimostra che

$$\frac{(n-2)\hat{\Sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2) \quad \text{indipendente da } \hat{B}$$

e quindi

$$\frac{\overbrace{\frac{\hat{B}-b}{\sqrt{\sigma^2/s_{xx}}}}^{N(0,1)}}{\frac{1}{\sqrt{n-2}}\sqrt{\underbrace{\frac{(n-2)\hat{\Sigma}^2}{\sigma^2}}_{\chi^2(n-2)}}} = \frac{\hat{B}-b}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2/s_{xx}}} \sim t(n-2)$$

indip.

Inferenza su b

$$\frac{\hat{B} - b}{\hat{\Sigma}/\sqrt{s_{xx}}} \sim \; t(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\hat{b} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}\right) \quad \text{è un} \;\; IC_b(\gamma)$$

Inferenza su b

$$\frac{\hat{B}-b}{\hat{\Sigma}/\sqrt{s_{xx}}} \sim t(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\hat{b} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}\right) \quad \text{è un} \quad IC_b(\gamma)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(b \in \left(\hat{B} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\frac{\hat{\Sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}\right)\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2) \leq \frac{\hat{B}-b}{\hat{\Sigma}/\sqrt{s_{xx}}} \leq t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\right)$$

$$= \gamma$$

Inferenza su b

$$\frac{\hat{B}-b}{\hat{\Sigma}/\sqrt{s_{xx}}} \sim \; t(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad \text{“ Rifiuto } H_0 \text{ se } \left|\frac{\hat{B}-b_0}{\hat{\Sigma}/\sqrt{s_{xx}}}\right| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\text{”}$$

è un test di livello α per le ipotesi

$$H_0 : b = b_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : b \neq b_0$$

Inferenza su b

$$\frac{\hat{B} - b}{\hat{\Sigma} / \sqrt{s_{xx}}} \sim \; t(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad \text{“ Rifiuto } H_0 \text{ se } \left| \frac{\hat{B} - b_0}{\hat{\Sigma} / \sqrt{s_{xx}}} \right| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \text{ ”}$$

è un test di livello α per le ipotesi

$$H_0 : b = b_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : b \neq b_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“ rifiuto } H_0 \text{ ”}) = \mathbb{P}_{b=b_0}\left(\underbrace{\left| \frac{\hat{B} - b_0}{\hat{\Sigma} / \sqrt{s_{xx}}} \right|}_{t(n-2)} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \right)$$

$$= \alpha$$

Inferenza su b

$$\frac{\hat{B} - b}{\hat{\Sigma}/\sqrt{s_{xx}}} \sim \; t(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad \text{“ Rifiuto } H_0 \text{ se } \left| \frac{\hat{B} - b_0}{\hat{\Sigma}/\sqrt{s_{xx}}} \right| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\text{”}$$

è un test di livello α per le ipotesi

$$H_0 : b = b_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : b \neq b_0$$

Se $b_0 = 0$, il test per le ipotesi

$$H_0 : b = 0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : b \neq 0$$

verifica che le Y dipendano realmente da x (*significatività del modello*)

Inferenza su a

$$\hat{A} \;=\; \bar{Y} - \frac{S_{xY}}{s_{xx}}\,\bar{x} \;\sim\; N\left(a\,,\,\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ $\hat{A}$ stimatore non distorto di a

(dimostrazioni simili al caso per $\hat{B}$)

Inferenza su a

$$\hat{A} \;=\; \bar{Y} - \frac{S_{xY}}{s_{xx}}\,\bar{x} \;\sim\; N\left(a\,,\,\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$\Rightarrow \quad \hat{A}$ stimatore non distorto di a

$$\frac{\hat{A} - a}{\hat{\Sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}}}} \;\sim\; t(n-2)$$

$\Rightarrow \quad$ IC e test per il parametro a

(dimostrazioni simili al caso per $\hat{B}$)

Terminologia

$$\hat{\Sigma}^2 \ := \ \frac{1}{n-2}\left(S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{s_{xx}}\right) \quad \text{(stimatore non distorto di } \sigma^2\text{)}$$

Terminologia

$$\hat{\Sigma}^2 := \frac{1}{n-2}\left(S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{s_{xx}}\right) \quad \text{(stimatore non distorto di } \sigma^2\text{)}$$

$$\hat{\Sigma} := \sqrt{\hat{\Sigma}^2}$$ *residual standard error*

(stimatore *approx.* non distorto di σ)

Terminologia

$$\hat{\Sigma}^2 := \frac{1}{n-2}\left(S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{s_{xx}}\right) \quad \text{(stimatore non distorto di } \sigma^2\text{)}$$

$$\hat{\Sigma} := \sqrt{\hat{\Sigma}^2} \quad \textit{residual standard error}$$

(stimatore *approx.* non distorto di σ)

$$\mathrm{se}(\hat{A}) := \hat{\Sigma}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}}\right)} \quad \textit{standard error di } \hat{A}$$

(stimatore *approx.* non distorto di $\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{A}]}$)

Terminologia

$$\hat{\Sigma}^2 := \frac{1}{n-2}\left(S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{s_{xx}}\right) \quad \text{(stimatore non distorto di } \sigma^2\text{)}$$

$$\hat{\Sigma} := \sqrt{\hat{\Sigma}^2} \quad \textit{residual standard error}$$

(stimatore *approx.* non distorto di σ)

$$\mathrm{se}(\hat{A}) := \hat{\Sigma}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}}\right)} \quad \textit{standard error di } \hat{A}$$

(stimatore *approx.* non distorto di $\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{A}]}$)

$$\mathrm{se}(\hat{B}) := \frac{\hat{\Sigma}}{\sqrt{s_{xx}}} \quad \textit{standard error di } \hat{B}$$

(stimatore *approx.* non distorto di $\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{B}]}$)

Terminologia

La terminologia corretta sarebbe (p.es. per $\hat{B}$)

$\mathrm{se}(\hat{B}) = \sqrt{\mathrm{Var}[\hat{B}]} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{s_{xx}}}$	*errore* (o *deviazione*) *standard* di $\hat{B}$
$\widehat{\mathrm{SE}(\hat{B})} = \dfrac{\hat{\Sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}$	stimatore approx. non distorto di $\mathrm{se}(\hat{B})$
$\widehat{\mathrm{se}(\hat{B})} = \dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}$	stima (= realizzazione) di $\widehat{\mathrm{SE}(\hat{B})}$

Terminologia

La terminologia corretta sarebbe (p.es. per $\hat{B}$)

$$\mathrm{se}(\hat{B}) = \sqrt{\mathrm{Var}[\hat{B}]} = \frac{\sigma}{\sqrt{s_{xx}}}$$ *errore* (o *deviazione*) *standard* di $\hat{B}$

$$\widehat{\mathrm{SE}(\hat{B})} = \frac{\hat{\Sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}$$ stimatore approx. non distorto di $\mathrm{se}(\hat{B})$

$$\widehat{\mathrm{se}(\hat{B})} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}$$ stima (= realizzazione) di $\widehat{\mathrm{SE}(\hat{B})}$

Ma con abuso di notazione, diremo semplicemente

$$\mathrm{se}(\hat{B}) = \frac{\hat{\Sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}$$ *standard error di* $\hat{B}$

$$\mathrm{se}(\hat{b}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{s_{xx}}}$$ (realizzazione dello) *standard error di* $\hat{B}$

Terminologia

In termini delle quantità precedenti:

$$\left(\hat{a} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\,\mathrm{se}(\hat{a})\right) \qquad IC(\gamma) \text{ per } a$$

$$\frac{\hat{A} - a_0}{\mathrm{se}(\hat{A})} \sim t(n-2) \qquad \text{statistica test per un test su } a$$

$$\left(\hat{b} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\,\mathrm{se}(\hat{b})\right) \qquad IC(\gamma) \text{ per } b$$

$$\frac{\hat{B} - b_0}{\mathrm{se}(\hat{B})} \sim t(n-2) \qquad \text{statistica test per un test su } b$$

Output della regressione in R

```
Call:
lm(formula = Allungamento ~ I(Tensione^2), data = Data)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-14.7339  -3.5666   0.0062   3.6649  15.2774

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.6979121  0.8078622   0.864    0.389
I(Tensione^2) 0.0197671  0.0006648  29.736   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 5.519 on 148 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8566,     Adjusted R-squared:  0.8557
F-statistic: 884.2 on 1 and 148 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

$\hat{a}$

$se(\hat{a})$

$\frac{\hat{a}}{se(\hat{a})}$

p-value test su a

$\hat{b}$

$se(\hat{b})$

$\frac{\hat{b}}{se(\hat{b})}$

p-value test su b

r^2

$\hat{\sigma}$

$n - 2$

Test per la bontà del modello lineare

Le ipotesi su cui si basa il modello sono

(1) $Y_i = a + bx_i + E_i$

(2) $E_i \sim N(0, \sigma^2)$

(3) $E_1, \ldots, E_n$ i.i.d.

Test per la bontà del modello lineare

Le ipotesi su cui si basa il modello sono

(1) $Y_i = a + bx_i + E_i$

(2) $E_i \sim N(0, \sigma^2)$

(3) $E_1, \ldots, E_n$ i.i.d.

$\Longleftrightarrow$

(A) $Y_i \sim N(a + bx_i\, ,\, \sigma^2)$

(B) $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti

Test per la bontà del modello lineare

Le ipotesi su cui si basa il modello sono

(1) $Y_i = a + bx_i + E_i$

(2) $E_i \sim N(0, \sigma^2)$

(3) $E_1, \ldots, E_n$ i.i.d.

$\iff$

(A) $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2)$

(B) $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti

Ma come facciamo a verificarle?

Test per la bontà del modello lineare

Le ipotesi su cui si basa il modello sono

(1) $Y_i = a + bx_i + E_i$

(2) $E_i \sim N(0, \sigma^2)$

(3) $E_1, \ldots, E_n$ i.i.d.

$\iff$

(A) $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2)$

(B) $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti

Ma come facciamo a verificarle?

Per verificare almeno (1) - (2), servirebbe un test di normalità sugli E_i

residui di $a + bx$

Test per la bontà del modello lineare

Le ipotesi su cui si basa il modello sono

(1) $Y_i = a + bx_i + E_i$

(2) $E_i \sim N(0, \sigma^2)$

(3) $E_1, \ldots, E_n$ i.i.d.

$\iff$

(A) $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\,\sigma^2)$

(B) $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti

Ma come facciamo a verificarle?

Per verificare almeno (1) - (2), servirebbe un test di normalità sugli E_i

MA

dai dati sappiamo ricavare solo gli $\hat{E}_i = Y_i - \hat{Y}_i$

residui della LSL

Test per la bontà del modello lineare

Le ipotesi su cui si basa il modello sono

(1) $Y_i = a + bx_i + E_i$

(2) $E_i \sim N(0, \sigma^2)$

(3) $E_1, \ldots, E_n$ i.i.d.

$\iff$

(A) $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\ \sigma^2)$

(B) $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti

Teorema (non dimostrato)

Se le (1) - (2) - (3) sono vere, allora i *residui standardizzati*

$$R_i := \frac{\hat{E}_i}{\hat{\Sigma}} = \frac{Y_i - (\hat{A} + \hat{B}x_i)}{\hat{\Sigma}}$$

- sono (approssimativamente) i.i.d.
- $R_i \approx N(0, 1)$

Test per la bontà del modello lineare

Le ipotesi su cui si basa il modello sono

(1) $Y_i = a + bx_i + E_i$

(2) $E_i \sim N(0, \sigma^2)$

(3) $E_1, \dots, E_n$ i.i.d.

$\Longleftrightarrow$

(A) $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2)$

(B) $Y_1, \dots, Y_n$ indipendenti

Teorema (non dimostrato)

Se le (1) - (2) - (3) sono vere, allora i *residui standardizzati*

$$R_i \;:=\; \frac{\hat{E}_i}{\hat{\Sigma}} \;=\; \frac{Y_i - (\hat{A} + \hat{B}x_i)}{\hat{\Sigma}}$$

- sono (approssimativamente) i.i.d.
- $R_i \;\approx\; N(0, 1)$

$\Rightarrow$ Possiamo fare un test di normalità per gli $R_1, \dots, R_n$!

Test per la bontà del modello lineare

Assumendo $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti, un test per le ipotesi

$$H_0 : \exists\, a,\, b,\, \sigma \quad \text{tali che} \quad Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

vs.

$$H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

può quindi essere un qualunque test di normalità sugli $R_1, \ldots, R_n$

Test per la bontà del modello lineare

Assumendo $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti, un test per le ipotesi

$$H_0 : \exists\, a, b, \sigma \quad \text{tali che} \quad Y_i \sim N(a + bx_i\,, \sigma^2) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

vs.

$$H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

può quindi essere un qualunque test di normalità sugli $R_1, \ldots, R_n$

Analizzando lo scatterplot degli $r_1, \ldots, r_n$:

- non deve esserci una struttura definita (*omoschedasticità*)

Test per la bontà del modello lineare

Assumendo $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti, un test per le ipotesi

$$H_0 : \exists\, a, b, \sigma \quad \text{tali che} \quad Y_i \sim N(a + bx_i\,, \sigma^2) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

vs.

$$H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

può quindi essere un qualunque test di normalità sugli $R_1, \ldots, R_n$

Analizzando lo scatterplot degli $r_1, \ldots, r_n$:

- non deve esserci una struttura definita (*omoschedasticità*)
- i residui devono disporsi “a nuvola” intorno alla linea orizzontale

Test per la bontà del modello lineare

Assumendo $Y_1, \dots, Y_n$ indipendenti, un test per le ipotesi

$$H_0 : \exists\, a, b, \sigma \quad \text{tali che} \quad Y_i \sim N(a + bx_i\,, \sigma^2) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

vs.

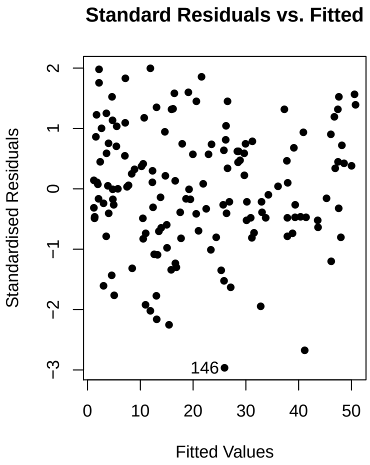
$$H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

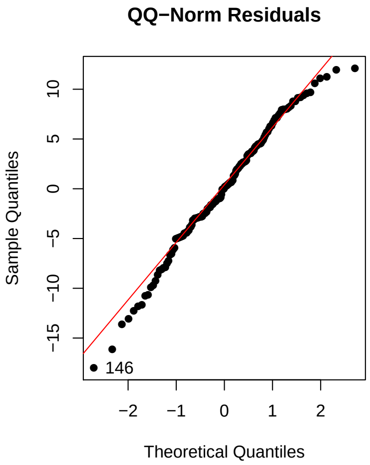
può quindi essere un qualunque test di normalità sugli $R_1, \dots, R_n$

Analizzando lo scatterplot degli $r_1, \dots, r_n$:

- non deve esserci una struttura definita (*omoschedasticità*)
- i residui devono disporsi “a nuvola” intorno alla linea orizzontale
- circa il 95% dei residui deve essere compreso tra -2 e $+2$

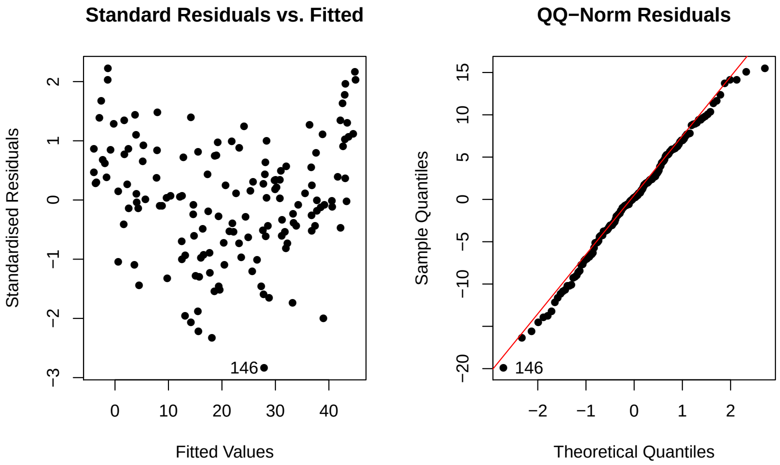
Due esempi





OK modello lineare!

Due esempi



<u>NO</u> modello lineare (forse quadratico)

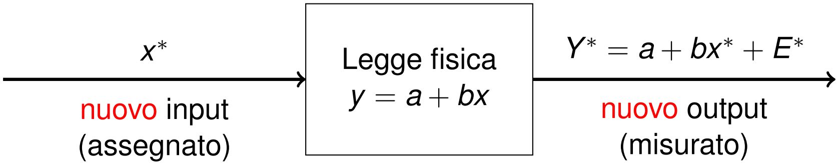
IC per il valore atteso di una nuova osservazione

$$x_1, \dots, x_n \xrightarrow[\text{input (assegnati)}]{} \boxed{\begin{array}{c}\text{Legge fisica}\\ y = a + bx\end{array}} \xrightarrow[\text{output (misurati)}]{\begin{array}{c}Y_1, \dots, Y_n \\ Y_i = a + bx_i + E_i\end{array}}$$

Ipotesi:

- $E_1, \dots, E_n$ indipendenti $\Leftrightarrow$ $Y_1, \dots, Y_n$ indipendenti
- $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ $\Leftrightarrow$ $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

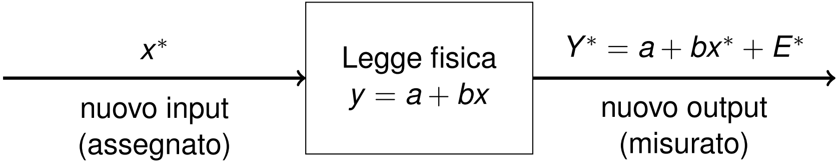


Ipotesi:

- $E_1, \ldots, E_n, E^*$ indipendenti $\quad \Leftrightarrow \quad Y_1, \ldots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $E_i \sim N(0, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2)$

  $E^* \sim N(0, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad Y^* \sim N(a + bx^*\,,\, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di una nuova osservazione



Ipotesi:

- $E_1, \ldots, E_n, E^*$ indipendenti $\quad\Leftrightarrow\quad$ $Y_1, \ldots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2)$

  $E^* \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $Y^* \sim N(a + bx^*\,,\, \sigma^2)$

Vogliamo trovare IC per il parametro

$$\mathbb{E}\,[Y^*] = a + bx^*$$

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

IPOTESI:

- $Y_1, \ldots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2)$, $Y^* \sim N(a + bx^*\,,\, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

IPOTESI:

- $Y_1, \ldots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $Y_i \sim N(a + bx_i\,, \sigma^2)$, $Y^* \sim N(a + bx^*\,, \sigma^2)$

CONSEGUENZE:

$\hat{A} + \hat{B}x^* \sim N$

somma normali indipendenti

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

IPOTESI:

- $Y_1, \ldots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $Y_i \sim N(a + bx_i\,, \sigma^2),\ \ Y^* \sim N(a + bx^*\,, \sigma^2)$

CONSEGUENZE:

$$\hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\Big(a + bx^* \qquad\qquad\qquad \Big)$$

somma normali indipendenti

$\mathbb{E}[\hat{A}] = a$
$\mathbb{E}[\hat{B}] = b$

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

IPOTESI:

- $Y_1, \dots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2)$, $\;Y^* \sim N(a + bx^*\,,\, \sigma^2)$

CONSEGUENZE:

$$\hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,,\, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

somma normali indipendenti

$\mathbb{E}[\hat{A}] = a$
$\mathbb{E}[\hat{B}] = b$

più complicato

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

IPOTESI:

- $Y_1, \ldots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $Y_i \sim N(a + bx_i \,,\, \sigma^2)$, $Y^* \sim N(a + bx^* \,,\, \sigma^2)$

CONSEGUENZE:

$$\hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^* \,,\, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$\Rightarrow \quad \hat{Y}^* := \hat{A} + \hat{B}x^*$ stimatore non distorto di $a + bx^*$

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

IPOTESI:

- $Y_1, \ldots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $Y_i \sim N(a + bx_i\,,\, \sigma^2),\ \ Y^* \sim N(a + bx^*\,,\, \sigma^2)$

CONSEGUENZE:

$$\hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,,\, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{Y}^* := \hat{A} + \hat{B}x^* \text{ stimatore non distorto di } a + bx^*$$

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}x^* - (a + bx^*)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}} \sim N(0, 1)$$

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

IPOTESI:

- $Y_1, \ldots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $Y_i \sim N(a + bx_i \,,\, \sigma^2)$, $Y^* \sim N(a + bx^* \,,\, \sigma^2)$

CONSEGUENZE:

$$\hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^* \,,\, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{Y}^* := \hat{A} + \hat{B}x^* \text{ stimatore non distorto di } a + bx^*$$

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}x^* - (a + bx^*)}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}} \sim t(n-2)$$

IC per il valore atteso di una nuova osservazione

IPOTESI:

- $Y_1, \dots, Y_n, Y^*$ indipendenti
- $Y_i \sim N(a + bx_i\,, \sigma^2)$, $Y^* \sim N(a + bx^*\,, \sigma^2)$

CONSEGUENZE:

$$\hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{Y}^* := \hat{A} + \hat{B}x^* \text{ stimatore non distorto di } a + bx^*$$

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}x^* - (a + bx^*)}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}} \sim t(n-2)$$

$$\Rightarrow \left(\hat{a} + \hat{b}x^* \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}\right) \quad \text{è un } IC_{a+bx^*}(\gamma)$$

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

Definizione

Siano $L = \ell(Y_1, \ldots, Y_n)$ e $U = u(Y_1, \ldots, Y_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < Y^* < U) = \gamma \qquad\qquad (\text{con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato})$$

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

Definizione

Siano $L = \ell(Y_1, \dots, Y_n)$ e $U = u(Y_1, \dots, Y_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < Y^* < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $y_1, \dots, y_n$ sono le realizzazioni di $Y_1, \dots, Y_n$, si dice che

$$\big(\ell(y_1, \dots, y_n)\,,\, u(y_1, \dots, y_n)\big)$$

è un *intervallo di predizione* di livello γ per la v.a. Y^* ($IP_{Y^*}(\gamma)$)

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

Definizione

Siano $L = \ell(Y_1, \ldots, Y_n)$ e $U = u(Y_1, \ldots, Y_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < Y^* < U) = \gamma \qquad\qquad (\text{con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato})$$

Allora, se $y_1, \ldots, y_n$ sono le realizzazioni di $Y_1, \ldots, Y_n$, si dice che

$$\big(\ell(y_1, \ldots, y_n)\,,\, u(y_1, \ldots, y_n)\big)$$

è un *intervallo di predizione* di livello γ per la v.a. Y^* ($IP_{Y^*}(\gamma)$)

<table>
<tr><td colspan="2">$$Y^* \sim N(a + bx^*\,,\,\sigma^2)$$</td></tr>
<tr><td>$a + bx^* \in \mathbb{R}$ parametro incognito
$\mathbb{P}\,(L < a + bx^* < U) = \gamma$
$\Rightarrow (l, u)$ è un $IC_{a+bx^*}(\gamma)$</td><td></td></tr>
</table>

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

Definizione

Siano $L = \ell(Y_1, \ldots, Y_n)$ e $U = u(Y_1, \ldots, Y_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < Y^* < U) = \gamma \qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $y_1, \ldots, y_n$ sono le realizzazioni di $Y_1, \ldots, Y_n$, si dice che

$$\big(\ell(y_1, \ldots, y_n)\,,\, u(y_1, \ldots, y_n)\big)$$

è un *intervallo di predizione* di livello γ per la v.a. Y^* ($IP_{Y^*}(\gamma)$)

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$Y^* \sim N(a + bx^*\,,\,\sigma^2)$</td></tr>
<tr><td>$a + bx^* \in \mathbb{R}$ parametro incognito
$\mathbb{P}\,(L < a + bx^* < U) = \gamma$
$\Rightarrow (l, u)$ è un $IC_{a+bx^*}(\gamma)$</td><td>Y^* variabile aleatoria
$\mathbb{P}\,(L < Y^* < U) = \gamma$
$\Rightarrow (l, u)$ è un $IP_{Y^*}(\gamma)$</td></tr>
</table>

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

$$\left.\begin{array}{l} Y^* \sim N(a + bx^*\,,\,\sigma^2) \\ \hat{Y}^* = \hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,,\,\sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right) \end{array}\right\} \quad \text{indipendenti}$$

funzioni di $Y_1, \ldots, Y_n$

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

$$\left.\begin{aligned} &Y^* \sim N(a + bx^*\,,\,\sigma^2) \\ &\hat{Y}^* = \hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,,\,\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad Y^* - \hat{Y}^* \sim N\left(0\,,\,\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

$$\left.\begin{array}{l} Y^* \sim N(a + bx^*\,,\,\sigma^2) \\ \hat{Y}^* = \hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,,\,\sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right) \end{array}\right\} \quad \text{indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad Y^* - \hat{Y}^* \sim N\left(0\,,\,\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$$\frac{Y^* - \hat{Y}^*}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}} \sim t(n-2)$$

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

$$\left.\begin{aligned} &Y^* \sim N(a + bx^*\,,\, \sigma^2) \\ &\hat{Y}^* = \hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,,\, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad Y^* - \hat{Y}^* \sim N\left(0\,,\, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$$\frac{Y^* - \hat{Y}^*}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}} \sim t(n-2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(Y^* \in \left(\hat{Y}^* \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\sqrt{\hat{\Sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}\right)\right) = \gamma$$

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

$$\left.\begin{array}{l} Y^* \sim N(a + bx^*\,,\, \sigma^2) \\ \hat{Y}^* = \hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,,\, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right) \end{array}\right\} \quad \text{indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad Y^* - \hat{Y}^* \sim N\left(0\,,\, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$$\frac{Y^* - \hat{Y}^*}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}} \sim t(n-2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(Y^* \in \left(\hat{Y}^* \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\sqrt{\hat{\Sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}\right)\right) = \gamma$$

$$\Rightarrow \left(\hat{y}^* \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}\right) \quad \text{è un } IP_{Y^*}(\gamma)$$

Intervalli di predizione per una nuova osservazione

$$\left.\begin{aligned} &Y^* \sim N(a + bx^*\,,\, \sigma^2) \\ &\hat{Y}^* = \hat{A} + \hat{B}x^* \sim N\left(a + bx^*\,,\, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad Y^* - \hat{Y}^* \sim N\left(0\,,\, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)\right)$$

$$\frac{Y^* - \hat{Y}^*}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}} \sim t(n-2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(Y^* \in \left(\hat{Y}^* \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\sqrt{\hat{\Sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}\right)\right) = \gamma$$

$$\Rightarrow \left(\hat{y}^* \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\underbrace{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_{xx}}\right)}}_{\text{più largo dell'}IC_{a+bx^*}(\gamma)}\right) \quad \text{è un } IP_{Y^*}(\gamma)$$

Regressione lineare multipla

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

input
(vettore in $\mathbb{R}^k$)

Legge fisica

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k$$

Regressione lineare multipla

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(vettore in } \mathbb{R}^k)]{\text{input}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Legge fisica} \\ \begin{aligned} y &= a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k \\ &= a + \mathbf{x}^t \mathbf{b} \end{aligned} \\ (a \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k) \end{array}}$$

Regressione lineare multipla

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

input
(vettore in $\mathbb{R}^k$)

Legge fisica

$$\begin{aligned} y &= a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k \\ &= a + \mathbf{x}^t \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$(a \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k)$$

$$Y = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b} + E$$

output
(variabile aleatoria)

Regressione lineare multipla

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

input
(vettore in $\mathbb{R}^k$)

Legge fisica

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k$$
$$= a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$
$$(a \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k)$$

$$Y = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b} + E$$

output
(variabile aleatoria)

predittori
(o *regressori*)

Regressione lineare multipla

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

input
(vettore in $\mathbb{R}^k$)

Legge fisica

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k$$
$$= a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$
$$(a \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k)$$

$$Y = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b} + E$$

output
(variabile aleatoria)

Se facciamo n misure:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \quad \longrightarrow \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \quad \text{con} \quad Y_i = a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b} + E_i$$

Regressione lineare multipla

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

input
(vettore in $\mathbb{R}^k$)

Legge fisica

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k$$
$$= a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$
$$(a \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k)$$

$$Y = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b} + E$$

output
(variabile aleatoria)

Se facciamo n misure:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \quad \longrightarrow \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \quad \text{con} \quad Y_i = a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b} + E_i$$

Ipotesi fondamentale del modello multilineare:

- $E_1, \ldots, E_n$ indipendenti $\Leftrightarrow$ $Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti
- $E_i \sim N(0, \sigma^2)\ \forall i$ $\Leftrightarrow$ $Y_i \sim N(a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}\,,\, \sigma^2)\ \forall i$

Regressione lineare multipla

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{Legge fisica} \\ y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k \\ = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b} \\ (a \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k) \end{array}} \xrightarrow{Y = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b} + E}$$

input
(vettore in $\mathbb{R}^k$)

output
(variabile aleatoria)

Se facciamo n misure:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \quad \longrightarrow \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \quad \text{con} \quad Y_i = a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b} + E_i$$

Ipotesi fondamentale del modello multilineare:

- $E_1, \ldots, E_n$ indipendenti $\quad \Leftrightarrow \quad Y_1, \ldots, Y_n$ indipendenti
- $E_i \sim N(0, \sigma^2)\ \ \forall i \quad \Leftrightarrow \quad Y_i \sim N(a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}\,,\, \sigma^2)\ \ \forall i$

Parametri incogniti: $\quad a, \quad \mathbf{b}, \quad \sigma^2$

Iperpiano dei minimi quadrati

PROBLEMA: Valutare quanto bene l'iperpiano

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$

interpola n punti $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_n, y_n)$ assegnati in $\mathbb{R}^{k+1}$

Iperpiano dei minimi quadrati

PROBLEMA: Valutare quanto bene l'iperpiano

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$

interpola n punti $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_n, y_n)$ assegnati in $\mathbb{R}^{k+1}$

$$e_i := y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \qquad \textit{i}\text{-esimo residuo}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

PROBLEMA: Valutare quanto bene l'iperpiano

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$

interpola n punti $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_n, y_n)$ assegnati in $\mathbb{R}^{k+1}$

$$e_i := y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \qquad \textit{i}\text{-esimo residuo}$$

$$L(a, \mathbf{b}) := \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \right]^2 \qquad \text{funzionale di errore}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

PROBLEMA: Valutare quanto bene l'iperpiano

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$

interpola n punti $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_n, y_n)$ assegnati in $\mathbb{R}^{k+1}$

$$e_i := y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \qquad i\text{-esimo residuo}$$

$$L(a, \mathbf{b}) := \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \right]^2 \qquad \text{funzionale di errore}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}}_{n \times (k+1)} \qquad \boldsymbol{\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}}_{(k+1) \times 1}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

PROBLEMA: Valutare quanto bene l'iperpiano

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$

interpola n punti $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_n, y_n)$ assegnati in $\mathbb{R}^{k+1}$

$$e_i := y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \qquad i\text{-esimo residuo}$$

$$L(a, \mathbf{b}) := \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \right]^2 \qquad \text{funzionale di errore}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}_1^t \\ 1 & \mathbf{x}_2^t \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \mathbf{x}_n^t \end{pmatrix}}_{n \times (k+1)} \qquad \boldsymbol{\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ \\ \mathbf{b} \\ \\ \end{pmatrix}}_{(k+1) \times 1}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

PROBLEMA: Valutare quanto bene l'iperpiano

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$

interpola n punti $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_n, y_n)$ assegnati in $\mathbb{R}^{k+1}$

$$e_i := y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) = y_i - (\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})_i \qquad i\text{-esimo residuo}$$

$$L(a, \mathbf{b}) := \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \right]^2 \qquad \text{funzionale di errore}$$

$$= \sum_i (y_i - (\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})_i)^2$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}_1^t \\ 1 & \mathbf{x}_2^t \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \mathbf{x}_n^t \end{pmatrix}}_{n \times (k+1)} \qquad \boldsymbol{\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ \\ \mathbf{b} \\ \\ \end{pmatrix}}_{(k+1) \times 1} =: \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

PROBLEMA: Valutare quanto bene l'iperpiano

$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k = a + \mathbf{x}^t \mathbf{b}$$

interpola n punti $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_n, y_n)$ assegnati in $\mathbb{R}^{k+1}$

$$e_i := y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) = y_i - (\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})_i \qquad i\text{-esimo residuo}$$

$$L(a, \mathbf{b}) := \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + \mathbf{x}_i^t \mathbf{b}) \right]^2 \qquad \text{funzionale di errore}$$

$$= \sum_i (y_i - (\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})_i)^2 = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}_1^t \\ 1 & \mathbf{x}_2^t \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \mathbf{x}_n^t \end{pmatrix}}_{n \times (k+1)} \qquad \boldsymbol{\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ \\ \mathbf{b} \\ \\ \end{pmatrix}}_{(k+1)\times 1} =: \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\beta) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta\|^2$ rispetto a β:

$$\nabla_{\beta} L(\beta) = ?????$$

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\beta) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta\|^2$ rispetto a β:

$$\nabla_{\beta} L(\beta) = -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta)$$

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\beta) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta\|^2$ rispetto a β :

$$\nabla_\beta L(\beta) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\beta$$

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\beta) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta\|^2$ rispetto a β:

$$\nabla_\beta L(\beta) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\beta \;\equiv\; 0$$

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}) \; = \; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \; = \; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \; \equiv \; 0$$

$$\xRightarrow{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}} \qquad \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\beta) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta\|^2$ rispetto a β :

$$\nabla_\beta L(\beta) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\beta) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\beta \;\equiv\; 0$$

$$\stackrel{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}}{\Longrightarrow} \qquad \beta = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y}$$

P. es., con $k = 1$ predittore:

$$\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} n & n\bar{x} \\ n\bar{x} & s_{xx} + n\bar{x}^2 \end{pmatrix} \quad \text{è invertibile} \quad \Leftrightarrow \quad s_{xx} \neq 0$$

Altrimenti: *collinearità*

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \;\equiv\; 0$$

$$\overset{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}}{\Longrightarrow} \qquad \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} =: \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$y \;=\; \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k \;=\; (1\;\mathbf{x}^t)\,\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

iperpiano dei minimi quadrati (LSH)

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \;\equiv\; 0$$

$$\overset{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}}{\Longrightarrow} \qquad \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} =: \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$y \;=\; \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k \;=\; (1\ \mathbf{x}^t)\,\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

iperpiano dei minimi quadrati (LSH)

Come nel caso semplice:

$$\hat{y}_i \;:=\; (1\ \mathbf{x}_i^t)\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

output dell'LSH

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \;\equiv\; 0$$

$$\overset{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}}{\Longrightarrow} \qquad \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} =: \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$y \;=\; \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k \;=\; (1\ \mathbf{x}^t)\,\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

iperpiano dei minimi quadrati (LSH)

Come nel caso semplice:

$$\hat{y}_i \;:=\; (1\ \mathbf{x}_i^t)\hat{\boldsymbol{\beta}} \qquad \text{output dell'LSH}$$

$$\hat{e}_i \;:=\; y_i - \hat{y}_i \qquad \text{residui dell'LSH}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \;\equiv\; 0$$

$$\overset{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}}{\Longrightarrow} \qquad \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} =: \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$y \;=\; \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k \;=\; (1\ \mathbf{x}^t)\,\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

iperpiano dei minimi quadrati (LSH)

Come nel caso semplice:

$$\hat{y}_i \;:=\; (1\ \mathbf{x}_i^t)\hat{\boldsymbol{\beta}} \qquad \text{output dell'LSH}$$

$$\hat{e}_i \;:=\; y_i - \hat{y}_i \qquad \text{residui dell'LSH}$$

$$ss_r \;:=\; \sum(\bar{y} - \hat{y}_i)^2 \qquad \text{varianza spiegata}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}) \; = \; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \; = \; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \; \equiv \; 0$$

$$\stackrel{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}}{\Longrightarrow} \qquad \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} =: \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$y \; = \; \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k \; = \; (1 \; \mathbf{x}^t) \, \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

iperpiano dei minimi quadrati (LSH)

Come nel caso semplice:

$\hat{y}_i$	$:= (1 \; \mathbf{x}_i^t)\hat{\boldsymbol{\beta}}$	output dell'LSH
$\hat{e}_i$	$:= y_i - \hat{y}_i$	residui dell'LSH
ss_r	$:= \sum(\bar{y} - \hat{y}_i)^2$	varianza spiegata
ss_e	$:= \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$	varianza residua

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \;\equiv\; 0$$

$$\overset{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}}{\Longrightarrow} \qquad \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} =: \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$y \;=\; \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k \;=\; (1\ \mathbf{x}^t)\,\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

iperpiano dei minimi quadrati (LSH)

Come nel caso semplice:

$\hat{y}_i := (1\ \mathbf{x}_i^t)\hat{\boldsymbol{\beta}}$	output dell'LSH
$\hat{e}_i := y_i - \hat{y}_i$	residui dell'LSH
$ss_r := \sum(\bar{y} - \hat{y}_i)^2$	varianza spiegata
$ss_e := \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$	varianza residua
$ss_t := \sum(y_i - \bar{y})^2$	varianza totale

Iperpiano dei minimi quadrati

Minimizziamo $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}\|^2$ rispetto a $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \;=\; -2\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} + 2\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \;\equiv\; 0$$

$$\xRightarrow{\text{se } \tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}} \text{ è invertibile}} \qquad \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} =: \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$y \;=\; \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k \;=\; (1\ \mathbf{x}^t)\,\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

iperpiano dei minimi quadrati (LSH)

Come nel caso semplice:

$$\hat{y}_i \;:=\; (1\ \mathbf{x}_i^t)\hat{\boldsymbol{\beta}}$$ output dell'LSH

$$\hat{e}_i \;:=\; y_i - \hat{y}_i$$ residui dell'LSH

$$ss_r \;:=\; \sum(\bar{y} - \hat{y}_i)^2$$ varianza spiegata

$$ss_e \;:=\; \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$$ varianza residua

$$ss_t \;:=\; \sum(y_i - \bar{y})^2 \;\equiv\; ss_r + ss_e$$ varianza totale

Iperpiano dei minimi quadrati

OVERFITTING = ridurre ss_e aumentando i regressori

Iperpiano dei minimi quadrati

OVERFITTING = ridurre ss_e aumentando i regressori:

$$ss_e = L(\hat{\beta}) = \min_{\boldsymbol{\beta}} L(\beta)$$

Iperpiano dei minimi quadrati

OVERFITTING = ridurre ss_e aumentando i regressori:

$$ss_e = L(\hat{\beta}) = \min_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta})$$

$$L_k(\boldsymbol{\beta}) = \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i,1} - \ldots - \beta_k x_{i,k})^2 \qquad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

$$L_{k+1}(\boldsymbol{\beta}') = \sum_i (y_i - \beta'_0 - \beta'_1 x_{i,1} - \ldots - \beta'_{k+1} x_{i,k+1})^2 \qquad \boldsymbol{\beta}' \in \mathbb{R}^{k+2}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

OVERFITTING = ridurre ss_e aumentando i regressori:

$$ss_e \;=\; L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \;=\; \min_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta})$$

$$L_k(\boldsymbol{\beta}) \;=\; \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i,1} - \ldots - \beta_k x_{i,k})^2 \qquad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

$$L_{k+1}(\boldsymbol{\beta}') \;=\; \sum_i (y_i - \beta_0' - \beta_1' x_{i,1} - \ldots - \beta_{k+1}' x_{i,k+1})^2 \qquad \boldsymbol{\beta}' \in \mathbb{R}^{k+2}$$

$$L_k(\boldsymbol{\beta}) \;\equiv\; L_{k+1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

OVERFITTING = ridurre ss_e aumentando i regressori:

$$ss_e \;=\; L(\hat{\boldsymbol\beta}) \;=\; \min_{\boldsymbol\beta} L(\boldsymbol\beta)$$

$$L_k(\boldsymbol\beta) \;=\; \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i,1} - \ldots - \beta_k x_{i,k})^2 \qquad \boldsymbol\beta \in \mathbb{R}^{k+1}$$

$$L_{k+1}(\boldsymbol\beta') \;=\; \sum_i (y_i - \beta'_0 - \beta'_1 x_{i,1} - \ldots - \beta'_{k+1} x_{i,k+1})^2 \qquad \boldsymbol\beta' \in \mathbb{R}^{k+2}$$

$$L_k(\boldsymbol\beta) \;\equiv\; L_{k+1}\begin{pmatrix} \boldsymbol\beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \min_{\boldsymbol\beta} L_k(\boldsymbol\beta) \geq \min_{\boldsymbol\beta'} L_{k+1}(\boldsymbol\beta')$$

Iperpiano dei minimi quadrati

OVERFITTING = ridurre ss_e aumentando i regressori:

$$ss_e = L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \min_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta})$$

$$L_k(\boldsymbol{\beta}) = \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i,1} - \ldots - \beta_k x_{i,k})^2 \qquad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

$$L_{k+1}(\boldsymbol{\beta}') = \sum_i (y_i - \beta'_0 - \beta'_1 x_{i,1} - \ldots - \beta'_{k+1} x_{i,k+1})^2 \qquad \boldsymbol{\beta}' \in \mathbb{R}^{k+2}$$

$$L_k(\boldsymbol{\beta}) \equiv L_{k+1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \min_{\boldsymbol{\beta}} L_k(\boldsymbol{\beta}) \geq \min_{\boldsymbol{\beta}'} L_{k+1}(\boldsymbol{\beta}')$$

Perciò si preferisce usare l'*r^2-adjusted*

$$r_A^2 := 1 - \frac{ss_e}{ss_t} \frac{n-1}{n-1-k}$$

Iperpiano dei minimi quadrati

OVERFITTING = ridurre ss_e aumentando i regressori:

$$ss_e = L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \min_{\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{\beta})$$

$$L_k(\boldsymbol{\beta}) = \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i,1} - \ldots - \beta_k x_{i,k})^2 \qquad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

$$L_{k+1}(\boldsymbol{\beta}') = \sum_i (y_i - \beta'_0 - \beta'_1 x_{i,1} - \ldots - \beta'_{k+1} x_{i,k+1})^2 \qquad \boldsymbol{\beta}' \in \mathbb{R}^{k+2}$$

$$L_k(\boldsymbol{\beta}) \equiv L_{k+1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \min_{\boldsymbol{\beta}} L_k(\boldsymbol{\beta}) \geq \min_{\boldsymbol{\beta}'} L_{k+1}(\boldsymbol{\beta}')$$

Perciò si preferisce usare l'r^2-*adjusted*

$$r_A^2 := 1 - \frac{ss_e}{ss_t}\frac{n-1}{n-1-k} \begin{cases} \leq r^2 \\ \text{decrescente in } k \end{cases}$$

Stimatori, IC e test per i parametri

IPOTESI: $\begin{cases} Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{indipendenti} \\ Y_i \sim N((1\ \mathbf{x}_i^t)\boldsymbol{\beta}\,,\,\sigma^2) \quad \forall i \end{cases}$ $\boldsymbol{\beta}$, σ^2 parametri incogniti

Stimatori, IC e test per i parametri

IPOTESI: $\begin{cases} Y_1, \ldots, Y_n & \text{indipendenti} \\ Y_i \sim N((1\ \mathbf{x}_i^t)\boldsymbol{\beta}\,,\, \sigma^2) & \forall i \end{cases}$ $\qquad \boldsymbol{\beta}$, σ^2 parametri incogniti

CONSEGUENZE:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} \quad \underset{\text{vettore di v.a.}}{\overset{\text{diventa il}}{\longrightarrow}} \quad \hat{\boldsymbol{B}} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{Y} \quad \text{con} \quad \mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$$

Stimatori, IC e test per i parametri

IPOTESI: $\begin{cases} Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{indipendenti} \\ Y_i \sim N((1\ \mathbf{x}_i^t)\boldsymbol{\beta}\,,\, \sigma^2) \quad \forall i \end{cases}$ $\boldsymbol{\beta}$, σ^2 parametri incogniti

CONSEGUENZE:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} \quad \xrightarrow[\text{vettore di v.a.}]{\text{diventa il}} \quad \hat{\boldsymbol{B}} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{Y} \quad \text{con} \quad \mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$$

$$\hat{B}_r \sim N\left(\beta_r\,,\, \sigma^2\,[(\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}]_{rr}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_r \text{ stimatore corretto di } \beta_r$$

Stimatori, IC e test per i parametri

IPOTESI: $\begin{cases} Y_1, \dots, Y_n \quad \text{indipendenti} \\ Y_i \sim N((1\ \mathbf{x}_i^t)\boldsymbol{\beta}\,,\ \sigma^2) \quad \forall i \end{cases}$ $\qquad \boldsymbol{\beta}$, σ^2 parametri incogniti

CONSEGUENZE:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} \quad \underset{\text{vettore di v.a.}}{\xrightarrow{\text{diventa il}}} \quad \hat{\boldsymbol{B}} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{Y} \quad \text{con} \quad \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^t$$

$$\hat{B}_r \sim N\left(\beta_r\,,\ \sigma^2\,[(\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}]_{rr}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_r \ \text{stimatore corretto di } \beta_r$$

$$\frac{SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k-1) \quad \text{indipendente da } \hat{B}_r$$

$$\Rightarrow\ \hat{\Sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-k-1} \qquad\qquad \text{stimatore corretto di } \sigma^2$$

Stimatori, IC e test per i parametri

IPOTESI: $\begin{cases} Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{indipendenti} \\ Y_i \sim N((1\ \mathbf{x}_i^t)\boldsymbol{\beta}\,,\ \sigma^2) \quad \forall i \end{cases}$ $\qquad \boldsymbol{\beta}$, σ^2 parametri incogniti

CONSEGUENZE:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{y} \quad \xrightarrow[\text{vettore di v.a.}]{\text{diventa il}} \quad \hat{\boldsymbol{B}} = (\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^t\mathbf{Y} \quad \text{con} \quad \mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$$

$$\hat{B}_r \sim N\left(\beta_r\,,\ \sigma^2\,[(\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}]_{rr}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_r \ \text{stimatore corretto di } \beta_r$$

$$\frac{SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k-1) \quad \text{indipendente da } \hat{B}_r$$

$$\Rightarrow \ \hat{\Sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-k-1} \qquad \text{stimatore corretto di } \sigma^2$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{se}(\hat{B}_r) = \sqrt{\hat{\Sigma}^2[(\tilde{\mathbf{x}}^t\tilde{\mathbf{x}})^{-1}]_{rr}} \quad \text{stimatore approx. corretto di } \sqrt{\mathrm{Var}[\hat{B}_r]}$$

Stimatori, IC e test per i parametri

$$\frac{\hat{B}_r - \beta_r}{\mathrm{se}(\hat{B}_r)} \sim t(n-k-1)$$

Stimatori, IC e test per i parametri

$$\frac{\hat{B}_r - \beta_r}{\mathrm{se}(\hat{B}_r)} \sim t(n-k-1)$$

$$\swarrow$$

$$\left(\hat{\beta}_r \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-k-1)\,\mathrm{se}(\hat{\beta}_r)\right)$$

è un $IC(\gamma)$ per β_r

Stimatori, IC e test per i parametri

$$\frac{\hat{B}_r - \beta_r}{\mathrm{se}(\hat{B}_r)} \sim t(n-k-1)$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\left(\hat{\beta}_r \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-k-1)\,\mathrm{se}(\hat{\beta}_r)\right)$$

è un $IC(\gamma)$ per β_r

"Rifiuto H_0 se

$$\left|\frac{\hat{B}_r - \beta_{r0}}{\mathrm{se}(\hat{B}_r)}\right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-k-1)\text{"}$$

è un test di livello α per le ipotesi

$$H_0 : \beta_r = \beta_{r0} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_r \neq \beta_{r0}$$

Eliminazione a ritroso dei predittori non significativi

$k = k_0, \quad \text{predittori } x_1, \ldots, x_{k_0}$

Eliminazione a ritroso dei predittori non significativi

$k = k_0, \quad \text{predittori } x_1, \ldots, x_{k_0}$

$\downarrow$

Con R, ricavare l'output della regressione

Eliminazione a ritroso dei predittori non significativi

$k = k_0, \quad$ predittori $x_1, \ldots, x_{k_0}$

Con R, ricavare l'output della regressione

Ordinare $x_1, \ldots, x_k$ in modo che i k test

$$H_0 : \beta_r = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_r \neq 0$$

abbiano p-value $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$

Eliminazione a ritroso dei predittori non significativi

$k = k_0, \quad$ predittori $x_1, \ldots, x_{k_0}$

Con R, ricavare l'output della regressione

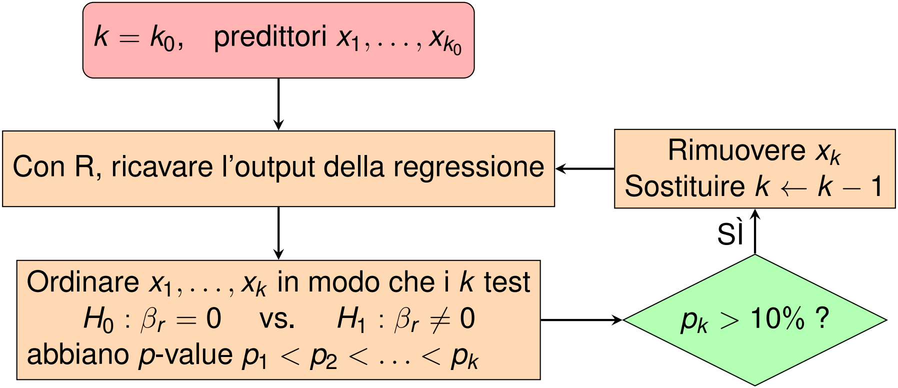
Ordinare $x_1, \ldots, x_k$ in modo che i k test

$$H_0 : \beta_r = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_r \neq 0$$

abbiano p-value $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$

$p_k > 10\%$?

Eliminazione a ritroso dei predittori non significativi



Eliminazione a ritroso dei predittori non significativi