Corso di Statistica per Ingegneria Fisica
Anno accademico 2020/2021

Esercitazione 2: Variabili aleatorie assolutamente continue

Esercizio 1. La garanzia di un certo televisore ha durata di un anno. La probabilità che il televisore si rompa entro il primo anno è 5%, mentre la probabilità che si rompa entro 5 anni è 45%. Si determini la probabilità che:

a) il televisore funzioni per almeno 5 anni; *[0.55]*

b) si debba pagare almeno una riparazione nei prossimi 5 anni; *[0.4]*

c) non si usufruisca della garanzia. *[0.95]*

Esercizio 2. Il 13% dei sacchi di farina provenienti dal mulino del signor Sabbioso pesa meno di 30 Kg mentre il 15% pesa meno di 33.5 Kg. Se il signor Gamgee ordina un sacco di farina al mugnaio Sabbioso, con quale probabilità riceve un sacco di peso compreso fra 30 e 33.5 Kg? *[0.02]* Con quale probabilità il sacco pesa almeno 33.5 Kg? *[0.85]*

Esercizio 3. Riteniamo che il prezzo di un'azione *Autostrade* domani rimarrà inferiore ai 6 Euro con probabilità 0.49, mentre supererà i 7 Euro con probabilità 0.3. Se ne deduca la probabilità con cui un'azione *Autostrade* raggiungerà domani una quotazione massima compresa fra 6 e 7 Euro, e la probabilità con cui raggiungerà i 6 Euro. *[0.21 e 0.51]*.

Esercizio 4. Una variabile aleatoria assolutamente continua X si dice *uniforme* sull'intervallo $[\alpha, \beta]$, $X \sim U(\alpha, \beta)$, se ha funzione di densità data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Disegnare il grafico della funzione di densità.

(b) Calcolare la funzione di ripartizione e disegnarne il grafico.

(c) Calcolare la probabilità che la variabile aleatoria appartenga all'intervallo $[a, b]$, contenuto in $[\alpha, \beta]$.

(d) Calcolare media e varianza.

Soluzione:

(b) $F(x) = 0$ *se* $x < \alpha$, $F(x) = (x - \alpha)/(\beta - \alpha)$ *se* $\alpha \leq x \leq \beta$, $F(x) = 1$ *se* $x > \beta$.

(c) $P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$.

(d) $E(X) = \int \frac{x}{\beta-\alpha} dx = (\alpha + \beta)/2$, $E(X^2) = \int \frac{x^2}{\beta-\alpha} dx = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)/3 \to Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = (\beta - \alpha)^2/12$.

Esercizio 5. Una variabile aleatoria assolutamente continua X si dice *esponenziale* con parametro, o intensità, λ ($\lambda > 0$), $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, se ha funzione di densità data da

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Dimostrare che f è effettivamente una densità di probabilità.

(b) Disegnare il grafico della funzione di densità.

(c) Calcolare la funzione di ripartizione e disegnarne il grafico.

(d) Calcolare media e varianza.

Soluzione:

(a) $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ *(Verificare!)* $\Rightarrow f$ *è una densità*

(c) $F(x) = 0$ *se* $x < 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ *se* $x \geq 0$.

(d) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda$ *(integrare per parti);* $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 1/\lambda^2$*, ottenuto calcolando* $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = 2/\lambda^2$ *(integrare per parti 2 volte).*

Esercizio 6. Si dice che una v.a. X ha distribuzione Gamma di parametri (α, λ), con $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, se la sua densità è data da

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\, I_{(0,+\infty)}(x)$$

dove $\Gamma(\alpha)$ è la funzione Gamma definita da

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Si noti che $Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$.

a) Verificare che $f(x)$ è effettivamente una densità di probabilità.

b) Verificare la seguente proprietà della funzione gamma:

   1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
   2. per n intero positivo $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

c) Verificare che se X è una Gamma di parametri (λ, α), allora $E(X) = \alpha/\lambda$ e $Var(X) = \alpha/\lambda^2$.

d) Sia X una v.a. esponenziale con media $1/\lambda$. Provare che $E(X^k) = k!/\lambda^k$.

Soluzione:

a) *Perchè* $f(x)$ *sia una desità occorre che* $f(x)$ *sia una funzione non-negativa* $\forall x$ *(condizione verificata) e che* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$*, ovvero* $\frac{\int_0^{+\infty} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx}{\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt} = 1$*. Verificare sostituendo nell'integrale al numeratore* $\lambda x = t$.

b) *1.* $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$*, ed integrando per parti si ottiene* $\alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$*, e sfruttando la precedente proprietà,* $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2) \times \Gamma(n-2) = (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 2 \times 1\, \Gamma(1) = (n-1)!$.

c) *Per calcolare $E(X)$ e $Var(X)$ è possibile per esempio fruttare la seguente identità*

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$$

che deriva dal fatto che $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = 1$, (come dimostrato al punto a). Si ha così $E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^{(\alpha+1)-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\lambda}$. Altrimenti è possibile calcolare $E(X)$ integrando per parti. Analogamente si calcola $Var(X)$.

d) *Per calcolare $E(X^k) = k!/\lambda^k$ si può utilizzare la densità della Gamma: $E(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^k}\int_0^{+\infty} \lambda^{k+1}x^{(k+1)-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^k}\Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}$.*

Esercizio 7. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \begin{cases} 4x^3 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x \notin (0,1). \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di distribuzione cumulativa F_X di X. *[$F_X(x) = 0$ se $x < 0$; $F_X(x) = x^4$ se $x \in [0,1)$; $F_X(x) = 1$ se $x \geq 1$.]*
2. Calcolare $P(-0.5 < X \leq 0.5)$. *[0.0625]*

Esercizio 8. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua di funzione di ripartizione

$$F(x) = \left[1 - \mathrm{e}^{-x}\right]^2 \mathbf{I}_{(0,+\infty)}(x);$$

determinare:

a) la densità di X; *[$f(x) = 0$ se $x \leq 0$; $f(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})$ se $x > 0$.]*

b) $P(X > 1)$; *[0.6]*

c) $P(1 < X < 2)$. *[0.348]*

Esercizio 9. Sia T una variabile aleatoria di densità

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 1, \\ 1/4, & -1 < t < 0, \\ \alpha(1-t^3), & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

a) Si determini α e si disegni il grafico di f_T. *[$\alpha = 1$]*

b) Si calcoli la funzione di ripartizione e se ne disegni il grafico. *[$F_T(t) = 0$ se $t < -1$; $F_T(t) = 1/4t + 1/4$ se $-1 \leq t < 0$; $F_T(t) = 1/4 + t - t^4/4$ se $0 \leq t < 1$; $F_T(t) = 1$ se $t \geq 1$.]*

c) Si trovino: $P(T \leq \frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{4} \leq T < \frac{1}{4})$, $P(T = 0)$, $P(T \leq 3)$, $E[T]$, $\mathrm{Var}(T)$. *[0.734; 0.3125; 0; 1; 0.175; 0.22.]*

d) Si trovino $q_{0.1}$ e $q_{0.25}$. *[-0.6; 0]*

Esercizio 10. Il raggio R di un certo tipo di particelle inquinanti, espresso in micron, è una variabile aleatoria la cui densità di probabilità può essere descritta con la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} cx\mathrm{e}^{-x^2}, & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Determinare il valore della costante reale c. *[c=2]*

(b) Calcolare la funzione di ripartizione di R. *[$F(x) = 0$ se $x < 0$; $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ se $x \geq 0$.]*

(c) Calcolare la probabilità che una particella selezionata a caso abbia un raggio superiore a 2 micron. *[0.018]*

(d) Supponendo che le particelle inquinanti siano delle sfere, calcolare la probabilità che una particella scelta a caso abbia un volume superiore ad 1 micron cubo. *[0.68]*

Esercizio 11. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + k & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ove k è un parametro reale.

(a) Si determini il valore di k per cui f è una densità. *[$k = 5/6$]*

(b) Se X è una variabile aleatoria che ha la funzione determinata al punto precedente come densità, quanto valgono la media e la varianza di X? *[$\mathrm{E}[X] = 19/36$, $\mathrm{Var}\,(X) = 107/1269$]*

(c) Si determini il punto $x_{1/3}$ tale che $P(X \leq x_{1/3}) = 1/3$. $[x_{1/3} = 0.3723]$

Esercizio 12. Sia X una v.a. assolutamente continua che ammette la seguente funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \lambda \left[1 - \mathrm{e}^{-2(x-\lambda)}\right] \mathbb{1}_{[\lambda,+\infty)}(x)$$

(a) Determinare $\lambda > 0$ in modo che F_X sia effettivamente una funzione di ripartizione e per tale λ determinare la densità di X. Tracciare un grafico qualitativo di entrambe le funzioni. *[$\lambda = 1$]*

(b) Si calcoli $\mathbb{P}\,(X > 2)$ *[$\mathbb{P}\,(X > 2) = 0.135$]*.

(c) Si calcolino la mediana e il quantile di ordine 90% di X. *[mediana $= 1.347$, $q_{0.90} = 2.151$]*

(d) Si determini la densità della v.a. assolutamente continua $Y = X - 1$ e si riconosca di quale densità notevole si tratta. *[$Y \sim \mathcal{E}(2)$]*

(e) Si calcolino la media e la varianza di X. *[$\mathbb{E}\,[X] = 3/2$, $\mathrm{Var}\,(X) = 1/4$]*

(f) La densità di X presenta una coda più lunga a destra o a sinistra?

(g) Si determini la media della v.a. $Z = \mathrm{e}^X$. *[$\mathbb{E}\,[Z] = 2\mathrm{e}$]*

(h) Si determini la densità della v.a. $Z = \mathrm{e}^X$. *[$f_Z(z) = \frac{2\mathrm{e}^2}{z^3}\mathbb{1}_{[\mathrm{e},+\infty)}(z)$]*

Esercizio 13. Sia X una v.a. uniforme sull'intervallo $[a, b]$, con $-\infty < a \leq b < +\infty$. Calcolare la probabilità che X disti dalla propria media meno di $k\sigma$, dove σ è la deviazione standard di X, e $k = 1, 2, 3$. Confrontare poi i risultati ottenuti con quelli che si ricaverebbero utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev. *[$2/\sqrt{12}$ se $k = 1$; 1 se $k = 2, 3$]*

Esercizio 14. Il manuale di istruzioni di uno strumento di misura dichiara che l'errore massimo commesso dallo strumento è compreso tra $-a$ e a. Facendo le opportune ipotesi sul modello probabilistico, calcolare la deviazione standard della misura.

Esercizio 15. Sia T una variabile aleatoria di densità

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 2, \\ \alpha\big|1 - |t|\big|, & |t| < 2. \end{cases}$$

Si determini α e si disegnino i grafici di f_T e della funzione di ripartizione. Si calcolino inoltre:

a) $P(-\frac{1}{2} < T \leq 1)$; *[7/16]*

b) i quartili di T; *[$Q_1 = -1$; $Q_2 = 0$; $Q_3 = 1$]*

c) i punti percentuali 0.1-esimo e 0.9-esimo. *[1.775;-1.775]*

Esercizio 16. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua di funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0, \\ \alpha x + \frac{x^2}{6}, & se\ 0 \leq x < 1, \\ 1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Si determini l'unico valore ammissibile di α e si disegni il grafico di $F(x)$. *[$\alpha = 5/6$]*

(b) Si calcoli la funzione densità della variabile aleatoria X. *[$f(x) = (5/6 + x/3)\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$]*

(c) Si calcolino la media e la varianza della variabile aleatoria X. *[$E(X) = 19/36$, $\mathrm{Var}(X) = 107/1296$]*

(d) Si calcoli la probabilità che X disti dalla sua media per al più due deviazioni standard e si confronti il risultato ottenuto con quanto previsto dalla disuguaglianza di Chebishev.
$\Big[$*Calcolo esatto:* $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) = 100\%$.
Con Chebishev $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) \geq 75\%\Big]$

(e) Si calcoli il quantile di ordine 0.3 per la distribuzione di X e il punto percentuale 0.3-esimo.
[$q_{0.3} = 0.33725$, $q_{0.3\%} = 0.00360$]

Esercizio 17. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(1, 2)$. Determinare il numero reale z tale che $P(X > z + E[X]) = 1/4$. *[$z = 0.25$]*

Esercizio 18. Sia X una v.a. assolutamente continua con densità uniforme sull'intervallo $[-1, 1]$. Sia inoltre $Y = X^2$.

(a) Calcolare la funzione di ripartizione di Y. *[$F_Y(y) = 0$ se $y < 0$, $F_Y(y) = \sqrt{y}$ se $0 \leq y \leq 1$ e infine $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$]*

(b) Calcolare la densità di Y. *[$\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$]*

(c) Calcolare la media di Y. *[$\mathbb{E}[Y] = 1/3$]*

Definiamo ora un'altra v.a. $Z = cX + d$, dove c e d sono due costanti reali con $c > 0$ e d arbitraria.

(d) Determinare la densità di Z e riconoscere di quale densità notevole si tratta. *[$Z \sim \mathcal{U}(d - c, c + d)$]*

Esercizio 19. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ; determinare la densità della variabile $Y = X^2$. *[$f_Y(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} \exp(-\lambda\sqrt{t})\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(t)$]*

Soluzioni di alcuni esercizi

Soluzione 1. Introduciamo la v.a.

$$\begin{aligned} T &= \text{durata di un televisore (in anni)} \\ &= \text{tempo del primo guasto del televisore}\,. \end{aligned}$$

Dai dati sappiamo che

$$\mathbb{P}\,(T \leq 1) = 5\% = 0.05 \qquad\qquad \mathbb{P}\,(T \leq 5) = 45\% = 0.45\,.$$

(Notare che $\mathbb{P}\,(T \leq 1) < \mathbb{P}\,(T \leq 5)$, in quanto l'evento "$T \leq 1$" implica l'evento "$T \leq 5$".)

a) Usando le uguaglianze di eventi

$$\text{“il televisore funziona per almeno 5 anni”} = \text{“il televisore dura più di 5 anni”} = \text{“}T > 5\text{”}$$

abbiamo che la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}\,(\text{“il televisore funziona per almeno 5 anni”}) = \mathbb{P}\,(T > 5) = 1 - \mathbb{P}\,(T \leq 5) = 1 - 0.45 = 0.55 = 55\%\,.$$

b) Si ha l'uguaglianza di eventi

$$\begin{aligned} &\text{“si deve pagare almeno una riparazione nei prossimi 5 anni”} = \\ &\quad = \text{“il televisore si rompe almeno una volta nei prossimi 5 anni, ma non mentre è in garanzia”} \\ &\quad = \text{“}1 < T \leq 5\text{”}\,. \end{aligned}$$

Quindi la probabilità cercata è

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\,(\text{“si deve pagare almeno una riparazione nei prossimi 5 anni”}) \\ &\qquad = \mathbb{P}\,(1 < T \leq 5) = \mathbb{P}\,(T \leq 5) - \mathbb{P}\,(T \leq 1) = 0.45 - 0.05 = 0.40 = 40\%\,. \end{aligned}$$

c) Si ha

$$\text{“non si usufruisce della garanzia”} = \text{“il televisore dura più di 1 anno”} = \text{“}T > 1\text{”}$$

e quindi

$$\mathbb{P}\,(\text{“non si usufruisce della garanzia”}) = \mathbb{P}\,(T > 1) = 1 - \mathbb{P}\,(T \leq 1) = 1 - 0.05 = 0.95 = 95\%\,.$$

Anche se "$T < 1$" e "$T \leq 1$" non sono gli stessi eventi (e non lo sono neanche "$T > 5$" e "$T \geq 5$", ecc.), è ragionevole supporre che $\mathbb{P}\,(T = 1) = 0$, cioè assumere che la probabilità che il televisore si rompa *esattamente* la mezzanotte del 365mo giorno dopo l'acquisto sia pari a 0. Quindi, in questo caso possiamo considerare uguali le due probabilità $\mathbb{P}\,(T < 1)$ e $\mathbb{P}\,(T \leq 1)$, e non fa differenza usare una o l'altra (infatti, T sarà tipicamente una v.a. assolutamente continua).

Soluzione 5. Per comodità, riscriviamo la densità f in un'unica riga usando la funzione indicatrice dell'intervallo $[0, +\infty)$, cioè

$$\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ 0 & \text{se } x \notin [0, +\infty)\,. \end{cases}$$

Allora si ha

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

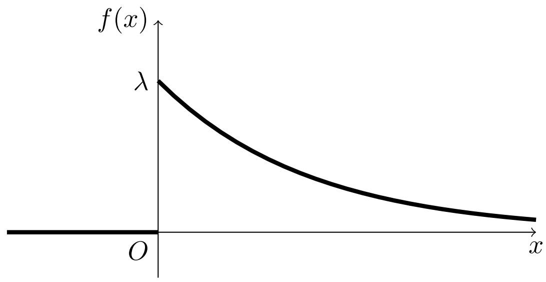
a) Affinché f sia la densità di una v.a. assolutamente continua, si deve dimostrare che

(1) $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$:
$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \geq 0\ \forall x \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \geq 0$ (perché $\mathrm{e}^{-\lambda x}$ è sempre positiva).

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = 1 - \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Quest'equazione è soddisfatta se e solo se $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$, cioè se e solo se $\lambda > 0$.

Mettendo insieme le due condizioni (1) e (2), troviamo che deve essere $\lambda > 0$, che è proprio la condizione richiesta nella definizione della densità esponenziale.

b) Il grafico di f è



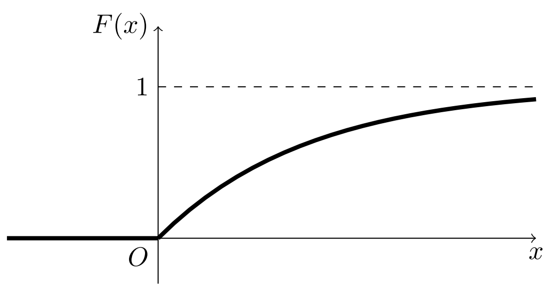
c) La funzione di ripartizione di X è

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 0 + \left[\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_{t=0}^{t=x} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)\,.$$

Il grafico di F è



Notare che $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Inoltre, poiché X è una variabile aleatoria assolutamente continua, la sua funzione di ripartizione F è una funzione continua. Questo *non è* necessariamente vero per la sua densità f, che difatti in questo caso *non è continua* (vedi primo grafico).

d) Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \qquad \text{per parti}\\
&= 0 + \left[x\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\right]_{x=0}^{x=+\infty} - \int_{0}^{+\infty}(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{perché } f \text{ è normalizzata}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \qquad \text{per parti}\\
&= \left[x^2\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\right]_{x=0}^{x=+\infty} - \int_{0}^{+\infty} 2x\,(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\mathrm{d}x = 0 + \frac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Soluzione 10. Riscriviamo

$$f(x) = cx\mathrm{e}^{-x^2}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\,.$$

(a) Affinché f sia la densità di una v.a. assolutamente continua, si deve dimostrare che

(1) $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$:
$cx\mathrm{e}^{-x^2}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c \geq 0 \qquad$ (perché $x\mathrm{e}^{-x^2}$ è positiva per $x \in (0,+\infty)$).

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \int_0^{+\infty} cx\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{c}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c = 2\,.$

Mettendo a sistema le due condizioni $c \geq 0$ e $c = 2$, troviamo che f è una densità se e solo se essere $c = 2$.

(b) Sostituendo $c = 2$, la funzione di ripartizione di R è

$$\begin{aligned}
F(x) = \mathbb{P}(R \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 & \text{se } x < 0\\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0 + \left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{t=0}^{t=x} = 1 - \mathrm{e}^{-x^2} & \text{se } x > 0\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0\\ 1 - \mathrm{e}^{-x^2} & \text{se } x > 0\end{cases}\\
&= (1 - \mathrm{e}^{-x^2})\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\,.
\end{aligned}$$

(c) Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}(R > 2) = 1 - \mathbb{P}(R \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-2^2}) = \mathrm{e}^{-2^2} = 0.018 = 1.8\%\,.$$

Notare che la probabilità precedente non sarebbe cambiata se avessimo dovuto calcolare la probabilità dell'evento $R \geq 2$ invece di $R > 2$, in quanto R è una v.a. assolutamente continua.

(d) Il volume delle particelle è la v.a.

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

(volume della sfera). Pertanto, dobbiamo calcolare la probabilità

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V > 1) &= \mathbb{P}\left(\frac{4\pi}{3} R^3 > 1\right) = \mathbb{P}\left(R > \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(R \leq \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right) = 1 - F\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right) \\ &= 1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\} = \mathrm{e}^{-0.385} = 0.681 = 68.1\% .\end{aligned}$$

in quanto si ha l'uguaglianza di eventi

$$\text{“ } \frac{4\pi}{3} R^3 > 1 \text{ ” } = \text{ “ } R > \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \text{ ”}$$

Soluzione 12.

(a) Affincé F_X sia la funzione di ripartizione di una v.a. assolutamente continua, devono essere rispettate le seguenti condizioni:

(1) *F_X deve essere una funzione non decrescente:*
Poiché le funzioni $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-2(x-\lambda)}$ e $x \mapsto \mathbb{1}_{[\lambda,+\infty)}(x)$ sono entrambe non decrescenti e non negative, è non decrescente e non negativo anche il loro prodotto $x \mapsto \left[1 - \mathrm{e}^{-2(x-\lambda)}\right] \mathbb{1}_{[\lambda,+\infty)}(x)$. Dal momento che F_X è uguale a λ-volte questo prodotto, affinché F_X sia nondecrescente è necessario e sufficiente che $\lambda \geq 0$.

(2) *F_X deve essere una funzione continua* (ma solo perché si richiede che X sia assolutamente continua!)*:*
F_X è continua in $(-\infty, \lambda)$ (dove vale identicamente 0) e in $(\lambda, +\infty)$ (dove $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2(x-\lambda)}$). In λ si ha

$$\lim_{x \to \lambda^-} F(x) = \lim_{x \to \lambda^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x \to \lambda^+} F(x) = \lim_{x \to \lambda^+} \lambda \left[1 - \mathrm{e}^{-2(x-\lambda)}\right] = 0$$

e quindi F_X è continua anche in λ, e perciò su tutto $\mathbb{R}$.

(3) *Limiti agli estremi:*
Deve essere

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 .$$

Il primo limite è automaticamente soddisfatto, in quanto F_X è identicamente 0 a sinistra di λ. Per quanto riguarda invece il secondo:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \lambda \left[1 - \mathrm{e}^{-2(x-\lambda)}\right] = \lambda .$$

Se vogliamo che faccia 1, deve essere $\lambda = 1$.

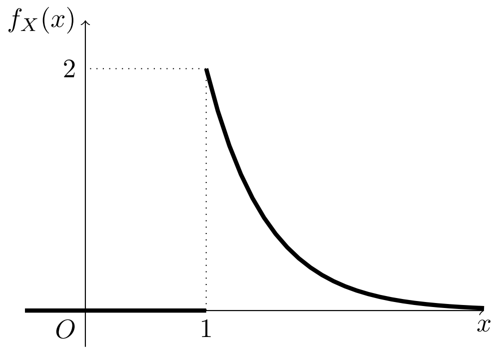
Mettendo a sistema le condizioni (1), (2) e (3), vediamo che solo (1) e (3) danno vincoli su λ, e cioè, rispettivamente, $\lambda \geq 0$ e $\lambda = 1$. Siccome entrambi questi vincoli devono essere rispettati, l'unico valore valido è $\lambda = 1$.
Di conseguenza, d'ora in poi la fuzione di ripartizione sarà

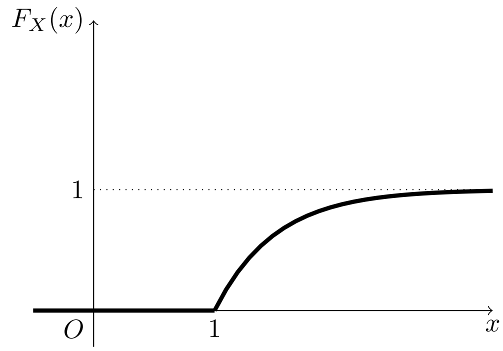
$$F_X(x) = \left[1 - \mathrm{e}^{-2(x-1)}\right] \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)$$

La densità f_X di X si trova derivando F_X:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 0 = 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[1 - \mathrm{e}^{-2(x-1)}\right] = 2\mathrm{e}^{-2(x-1)} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$
$$= 2\mathrm{e}^{-2(x-1)} \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)\,.$$

I grafici della densità e della f.d.r. sono rispettivamente





Notiamo che sono gli stessi grafici dell'esponenziale di parametro 2 (vedi Esercizio 5), traslati però di $+1$ verso destra.

(b) Si ha

$$\mathbb{P}\left(X > 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq 2\right) = 1 - F_X(2) = 1 - \left[1 - \mathrm{e}^{-2(2-1)}\right] = \mathrm{e}^{-2} = 0.135\,.$$

(c) La mediana m è (per definizione) il quantile del 50% della densità di X, cioè $m = q_{0.50}$. Per ricavarla, risolviamo l'equazione

$$F_X(m) = 0.50 \quad \Leftrightarrow \quad \left[1 - \mathrm{e}^{-2(m-1)}\right] \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(m) = 0.50\,.$$

Chiaramente, m non può stare nell'intervallo $(-\infty, 1)$, in quanto $F_X(x) = 0$ in tale intervallo. Pertanto, l'equazione precedente diventa

$$1 - \mathrm{e}^{-2(m-1)} = 0.50 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-2(m-1)} = 0.50 \quad \Leftrightarrow \quad -2(m-1) = \ln 0.50$$
$$\Leftrightarrow \quad m = 1 - \frac{1}{2} \ln 0.50 = 1.347\,.$$

Per calcolare il quantile di ordine 90%, bisogna ragionare in modo analogo:

$$F_X(q_{0.90}) = 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathrm{e}^{-2(q_{0.90}-1)} = 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-2(q_{0.90}-1)} = 0.10$$
$$\Leftrightarrow \quad -2(q_{0.90} - 1) = \ln 0.10 \quad \Leftrightarrow \quad q_{0.90} = 1 - \frac{1}{2} \ln 0.10 = 2.151\,.$$

Notare che $q_{0.90} > q_{0.50}$, come in effetti ci aspettiamo che sia: l'area sottesa dalla densità f_X a sinistra di $q_{0.90}$ (cioè il 90%) deve essere maggiore dell'area a sinistra di $q_{0.50}$ (cioè il 50%). In altre parole, la funzione $[0, 1] \ni \gamma \mapsto q_\gamma \in \mathbb{R}$ è sempre *non decrescente*.

(d) Per determinare la densità della v.a. $Y = X - 1$, si può osservare che si tratta di una trasformazione affine di X, e quindi usare la formula

$$f_{aX+b}(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\,,$$

valida per la densità di una qualunque trasformazione affine $aX+b$ (dove $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$). Quindi, con $a = 1$, $b = -1$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_{1\cdot X+(-1)}(y) = \frac{1}{|1|} f_X\left(\frac{y-(-1)}{1}\right) = f_Y(y+1) = 2\mathrm{e}^{-2[(y+1)-1]}\mathbb{1}_{[1,+\infty)}(y+1) \\ &= 2\mathrm{e}^{-2y}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y) \end{aligned}$$

(osservare che $\mathbb{1}_{[1,+\infty)}(y+1) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y)$, in quanto $y+1 \in [1,+\infty) \iff y \in [0,+\infty)$). Riconosciamo in f_Y la densità esponenziale di parametro 2; cioè, $Y \sim \mathcal{E}(2)$.

(e) Per calcolare media e varianza di X, invece di fare direttamente i (lunghi) calcoli

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\mathrm{d}x \qquad \mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x)\mathrm{d}x\,,$$

osserviamo che $X = Y + 1$, dove $Y = X - 1$ è la v.a. del punto precedente, e che abbiamo appena dimostrato $Y \sim \mathcal{E}(2)$. Di Y pertanto già sappiamo che $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}$ e $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ (vedi Esercizio 5). Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[Y+1] = \mathbb{E}[Y] + 1 && \text{linearità di } \mathbb{E} \\ &= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(Y+1) = \mathrm{Var}(1\cdot Y + 1) = 1^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) && \text{formula } \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X) \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

(f) Abbiamo visto che $\mathbb{E}[X] = 3/2 = 1.5$ e $m = 1.347$. Quindi, poiché $\mathbb{E}[X] > m$, la densità f_X presenta una coda più lunga a destra (vedi grafico).

(g) Per calcolare la media di $Z = \mathrm{e}^X$, abbiamo due possibilità:

1. o usiamo la definizione di $\mathbb{E}[Z]$, cioè

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)\mathrm{d}z\,,$$

ma per farlo non conosciamo ancora la densità f_Z di Z (la calcoleremo solo nell'ultimo punto);

2. o usiamo il teorema per il calcolo della media di una funzione di v.a., che afferma che

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\mathrm{d}x\,.$$

Qui invece conosciamo f_X, e dunque possiamo svolgere immediatamente il calcolo.

Usando quindi la seconda formula,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^X\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^x f_X(x)\mathrm{d}x && \text{perché in questo caso } g(x) = \mathrm{e}^x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^x \cdot 2\mathrm{e}^{-2(x-1)}\mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)\mathrm{d}x = 2\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x+2}\mathrm{d}x \\ &= 2\left[-\mathrm{e}^{-x+2}\right]_{x=1}^{x=+\infty} = 2\mathrm{e}\,. \end{aligned}$$

(h) Per determinare la densità di $Z = \mathrm{e}^X$, ricaviamo anzitutto la sua funzione di ripartizione F_Z a partire da F_X; dopodiché, deriviamo F_Z ottenendo finalmente la f_Z cercata. Quindi, per cominciare

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^X \leq z\right) = \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq \ln z) = F_X(\ln z) & \text{se } z > 0 \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & \text{se } z \leq 0\,, \end{cases}$$

in quanto nei due casi si ha l'uguaglianza di eventi

$$\text{“}\,\mathrm{e}^X \leq z\,\text{”} = \begin{cases} \text{“}\,X \leq \ln z\,\text{”} & \text{se } z > 0 \\ \emptyset & \text{se } z \leq 0 \end{cases}$$

(e^x è sempre positiva!). Poi, se $z > 0$, notiamo che per scrivere esplicitamente $F_X(\ln z)$ dobbiamo ancora distinguere i due sottocasi $\ln z < 1$ e $\ln z \geq 1$, in quanto

$$F_X(\ln z) = \left[1 - \mathrm{e}^{-2(\ln z - 1)}\right] \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(\ln z) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2(\ln z - 1)} = 1 - \frac{\mathrm{e}^2}{z^2} & \text{se } \ln z \geq 1 \\ 0 & \text{se } \ln z < 1\,. \end{cases}$$

Infine, osserviamo che

$$\ln z \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad z \geq \mathrm{e} \qquad\qquad \ln z < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < z < \mathrm{e}\,,$$

e quindi l'ultima espressione si può riscrivere

$$F_X(\ln z) = \begin{cases} 1 - \frac{\mathrm{e}^2}{z^2} & \text{se } z \geq \mathrm{e} \\ 0 & \text{se } 0 < z < \mathrm{e}\,. \end{cases}$$

Mettendo insieme i pezzi,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \begin{cases} F_X(\ln z) & \text{se } z > 0 \\ 0 & \text{se } z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{\mathrm{e}^2}{z^2} & \text{se } z \geq \mathrm{e} \\ 0 & \text{se } 0 < z < \mathrm{e} \\ 0 & \text{se } z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{\mathrm{e}^2}{z^2} & \text{se } z \geq \mathrm{e} \\ 0 & \text{se } z < \mathrm{e} \end{cases} \\ &= \left(1 - \frac{\mathrm{e}^2}{z^2}\right) \mathbb{1}_{[\mathrm{e},+\infty)}(z)\,. \end{aligned}$$

Ora, per ricavare f_Z non ci resta che derivare F_Z:

$$\begin{aligned} f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_Z(z) &= \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^2}{z^2}\right) = \frac{2\mathrm{e}^2}{z^3} & \text{se } z \geq \mathrm{e} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, 0 = 0 & \text{se } z < \mathrm{e} \end{cases} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^2}{z^3} \mathbb{1}_{[\mathrm{e},+\infty)}(z)\,. \end{aligned}$$

Notiamo che $f_Z(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, che è sempre un buon modo per controllare di non aver fatto errori. Notiamo anche che a questo punto possiamo calcolare la media $\mathbb{E}[Z]$ usando direttamente la sua definizione (metodo 1 della domanda precedente):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) \mathrm{d}z &= \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \frac{2\mathrm{e}^2}{z^3} \mathbb{1}_{[\mathrm{e},+\infty)}(z) \mathrm{d}z \\ &= 2\mathrm{e}^2 \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{z^2} \mathrm{d}z = 2\mathrm{e}^2 \left[-\frac{1}{z}\right]_{z=\mathrm{e}}^{z=+\infty} = 2\mathrm{e}\,. \end{aligned}$$

Questo risultato è (ovviamente!) lo stesso di prima. Per ottenerlo, però, abbiamo dovuto spendere molto più tempo per calcolare la densità f_Z.

Soluzione 18.

(a) La funzione di ripartizione di Y è

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}\left(X^2 \le y\right) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) & \text{se } y \ge 0 \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & \text{se } y < 0\,, \end{cases}$$

in quanto si ha l'uguaglianza di eventi

$$\text{“}\, X^2 \le y\,\text{”} = \begin{cases} \text{“} -\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\,\text{”} & \text{se } y \ge 0 \\ \emptyset & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Ora, per $y \ge 0$,

$$\mathbb{P}(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{1-(-1)} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x$$

dal momento che sappiamo $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$. L'ultimo integrale si risolve considerando separatamente i due casi $\sqrt{y} \le 1$ e $\sqrt{y} > 1$:

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 1\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{y} & \text{se } \sqrt{y} \le 1 \\ \int_{-\sqrt{y}}^{-1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{y}} 0\,\mathrm{d}x = 2 & \text{se } \sqrt{y} > 1\,. \end{cases}$$

Quindi, ricapitolando:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } y \ge 0 \text{ e } \sqrt{y} \le 1 \\ 1 & \text{se } y \ge 0 \text{ e } \sqrt{y} > 1 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{se } y > 1 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Notare che F_Y è una funzione continua e non decrescente, con $\lim_{y\to-\infty} F_Y(y) = 0$ e $\lim_{y\to+\infty} F_Y(y) = 1$. È così che in effetti deve essere la f.d.r. di una v.a. assolutamente continua, e questo ci conforta di non aver sbagliato qualche passaggio.

(b) Per determinare la densità di Y, deriviamo F_Y, trovando

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{se } y > 1 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,.$$

Si osservi che $f_Y(y) \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad y \in [0,1]$. Questo significa che la v.a. Y può prendere solo valori nell'intervallo $[0,1]$, coerentemente col fatto che X prende valori in $[-1,1]$ e $Y = X^2$.

(c) Usando il teorema

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\mathrm{d}x\,,$$

in questo caso particolare abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{1-(-1)} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x \qquad \text{perché la densità uniforme } \mathcal{U}(a,b) \text{ è } \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Questo calcolo non richiede di conoscere la densità di Y, ma solo quella di X. Notare che avremmo potuto ricavare lo stesso risultato anche usando direttamente la definizione

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_0^1 y \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathrm{d}y \,,$$

dal momento che in questo esercizio avevamo già ricavato f_Y al punto precedente.

(d) Z è una trasformazione affine della v.a. assolutamente continua X. Per calcolare la sua densità, usiamo quindi la formula nota

$$\begin{aligned} f_Z(z) = f_{cX+d}(z) &= \frac{1}{|c|} f_X\left(\frac{z-d}{c}\right) = \frac{1}{c}\,\frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}\left(\frac{z-d}{c}\right) \qquad \text{(ricordare che } c > 0 \text{ per ipotesi)} \\ &= \frac{1}{2c}\,\mathbb{1}_{[d-c,d+c]}(z) \,, \end{aligned}$$

dove abbiamo adoperato il fatto che $f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, e che

$$\frac{z-d}{c} \in [-1,1] \quad \Leftrightarrow \quad z \in [d-c, d+c] \,.$$

Riconosciamo in f_Z la densità uniforme sull'intervallo $[d-c, d+c]$, cioè $Z \sim \mathcal{U}(d-c, d+c)$. Questo in realtà è un caso particolare di un fatto più generale: una trasformazione affine di una v.a. con densità uniforme ha ancora densità uniforme. La densità uniforme è però una delle poche densità ad avere una proprietà del genere; sostanzialmente, infatti, solo per la densità gaussiana vale ancora la stessa cosa. Per esempio, per l'esponenziale non è vero nulla di simile (vedi Esercizio 12, punti (a) e (d)).