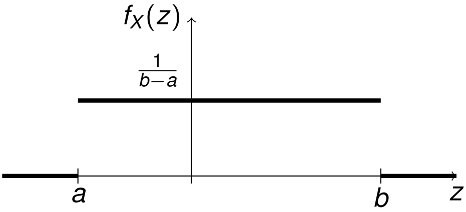
Statistica - 4ª lezione (parte I)

9 marzo 2021

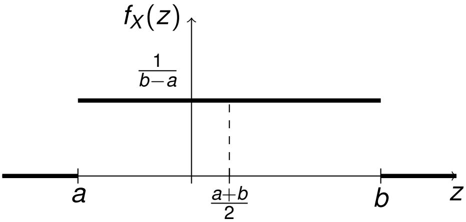
Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Valore atteso e varianza della densità uniforme

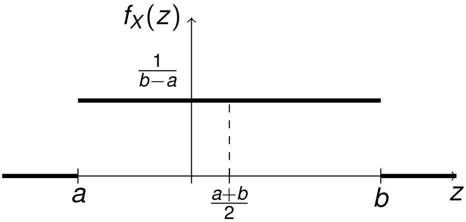
$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

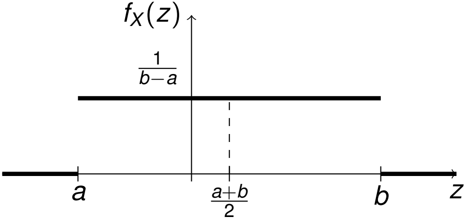
$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

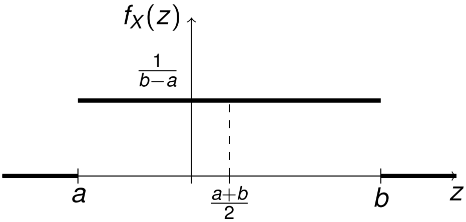


- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

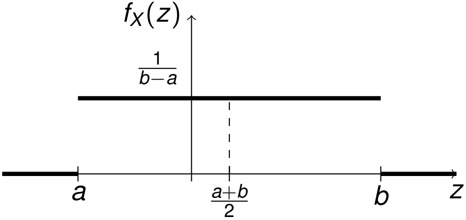


- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z)\, \mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \, \frac{1}{b-a}\, \mathrm{d}z$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



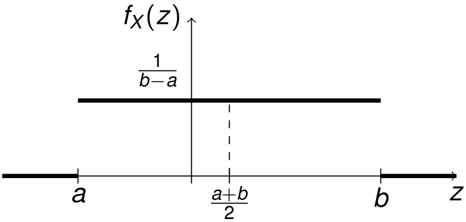
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \, \frac{1}{b-a} \, \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=a}^{z=b}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

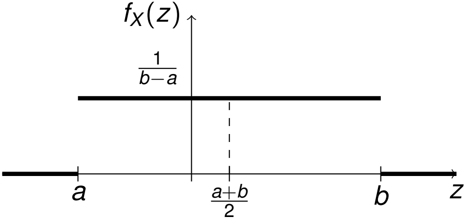


- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=a}^{z=b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



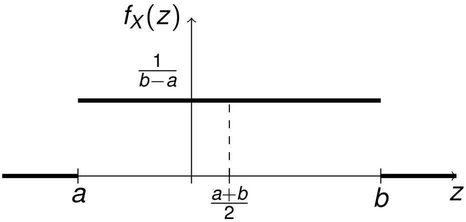
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=a}^{z=b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

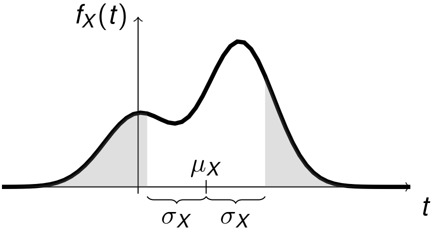
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 1$:

$$\leq \frac{1}{1^2} = 100\%$$

Disuguaglianza di Chebyshev

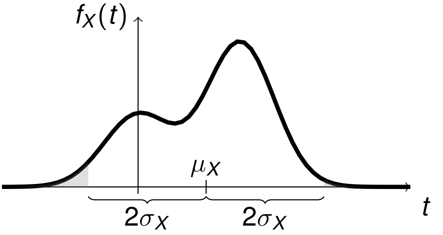
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 2$:

$$\leq \frac{1}{2^2} = 25\%$$

Disuguaglianza di Chebyshev

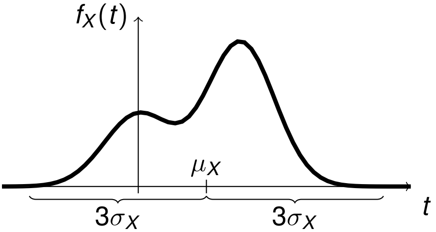
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 3$:

$$\leq \frac{1}{3^2} = 11.1\%$$

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2 f_X(z)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2 f_X(z)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2\, f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\;\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\;\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{\color{red}{|z-\mu_X|\geq\varepsilon}} \underbrace{(z-\mu_X)^2}_{\color{red}{\geq\varepsilon^2}} f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \underbrace{(z-\mu_X)^2}_{\geq\varepsilon^2} f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \varepsilon^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}\left[X\right]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}\left[X\right]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2}_{\geq\varepsilon^2} f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \varepsilon^2 \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \geq \varepsilon^2 \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} f_X(z)\, \mathrm{d}z \\
&= \varepsilon^2\, \mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}\left[X\right]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}\left[X\right]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \varepsilon^2 \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \varepsilon^2\, \mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq \varepsilon\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \geq \mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

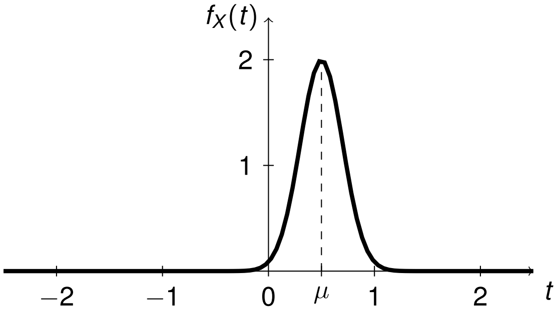
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



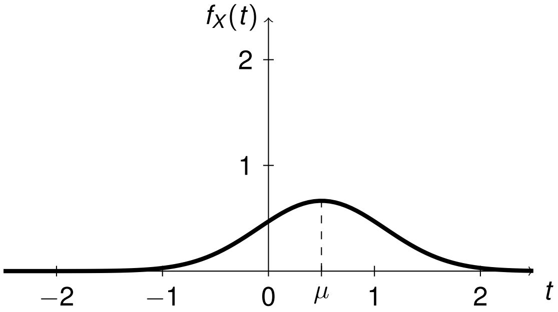
$\mu = 0.5$
$\sigma = 0.2$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



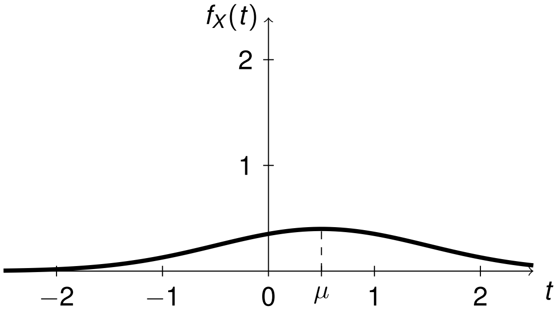
$\mu = 0.5$
$\sigma = 0.6$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



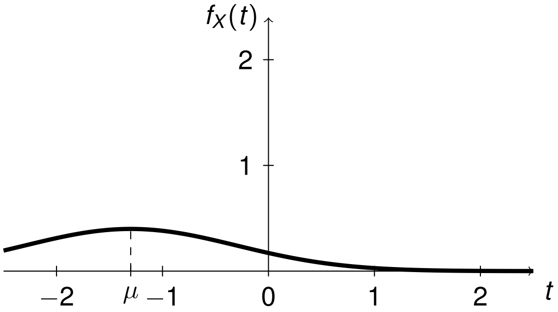
$\mu = 0.5$
$\sigma = 1$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



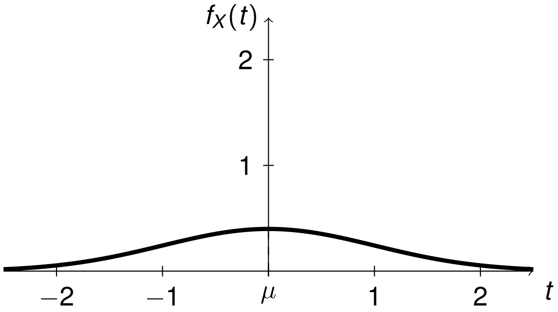
$\mu = -1.3$
$\sigma = 1$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



$\mu = 0$
$\sigma = 1$

$N(0, 1)$ è la densità *normale standard*

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$ con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ fissati

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$ (col calcolo)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t - \quad a\mu - b}{a\,\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-(a\mu+b)}{|a|\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-(a\mu+b)}{|a|\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\,(|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione) :

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma}$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione):

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}, \left(\left|\frac{1}{\sigma}\right|\sigma\right)^2\right)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione):

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}\,,\, \left(\left|\frac{1}{\sigma}\right|\sigma\right)^2\right) = N(0,1)$$

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\,(|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)
- La f.d.r. di $N(0,1)$ si indica con Φ e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$\Phi(0.36) =$$
$$= \Phi(0.3+0.06)$$
$$= 0.64058$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\,(|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)
- La f.d.r. di $N(0,1)$ si indica con Φ e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$\Phi(0.36) =$$
$$= \Phi(0.3+0.06)$$
$$= 0.64058$$
$$q_{0.64058} = 0.36$$