Statistica - 6ª lezione

18 marzo 2021

Densità di Poisson

1 anno

$Y =$ numero di terremoti in un anno

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[Y\right] = 3.72}_{\text{fissato}}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\rule{5cm}{0pt}}_{1^{\circ}\text{ semestre}}\underbrace{\rule{5cm}{0pt}}_{2^{\circ}\text{ semestre}}}^{1\text{ anno}}$$

X_i = numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\hspace{6cm}}_{1^{\text{o}}\text{ semestre}}\underbrace{\hspace{6cm}}_{2^{\text{o}}\text{ semestre}}}^{\text{1 anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, X_2 \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\rule{7cm}{0.4pt}}_{1^{\text{o}}\text{ semestre}}\underbrace{\rule{7cm}{0.4pt}}_{2^{\text{o}}\text{ semestre}}}^{1\text{ anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{2}$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, X_2 \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\rule{0pt}{0pt}\qquad\qquad}_{1^{\text{o}}\text{ quadrimestre}}\underbrace{\rule{0pt}{0pt}\qquad\qquad}_{2^{\text{o}}\text{ quadrimestre}}\underbrace{\rule{0pt}{0pt}\qquad\qquad}_{3^{\text{o}}\text{ quadrimestre}}}^{1\text{ anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo quadrimestre, $\quad i = 1, 2, 3$

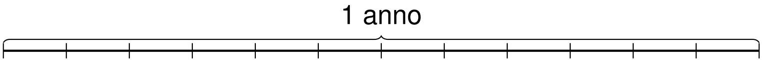
$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2 + X_3$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{3}$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, X_2, X_3 \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson



$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo mese, $\quad i = 1, \dots, 12$

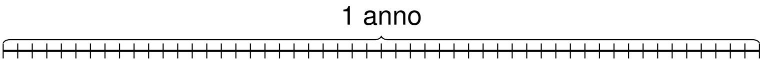
$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \dots + X_{12}$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_{12}]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{12}$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \dots, X_{12} \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson



X_i = numero di terremoti nell'i-esima settimana, $\quad i = 1, \ldots, 52$

Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_{52}$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_{52}]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{52}$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{52} \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

1 anno

X_i = numero di terremoti nell'i-esimo giorno, $\quad i = 1, \ldots, 365$

Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_{365}$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_{365}]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{365}$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{365} \quad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

1 anno

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \dots, n$

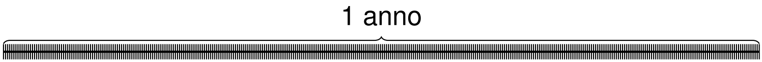
$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = \quad \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson



$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \dots, n$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \dots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = \quad \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

  $\Rightarrow \quad X_1, \dots, X_n \qquad$ sono i.i.d.

- n grande $\quad \Rightarrow \quad$ le X_i possono prendere solo valori $\{0, 1\}$

  $\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{E}[X_i] = \dfrac{\lambda}{n} \quad$ piccolo

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Uparrow$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \ldots, n$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}\,[Y] = \quad \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}\,[X_1] + \ldots + \mathbb{E}\,[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\,[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- istanti diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

  $\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \qquad$ sono i.i.d.

- n grande $\quad \Rightarrow \quad$ le X_i possono prendere solo valori $\{0, 1\}$

  $\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{E}\,[X_i] = \dfrac{\lambda}{n} \quad$ piccolo

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Y ha (circa!) densità *di Poisson* (o *poissoniana*) di parametro λ

$$Y \approx \mathcal{P}(\lambda)$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) \;&=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &=\; \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n, q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}} \frac{n!}{n^k (n-k)!} \end{aligned}$$

$$\frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n^k + O(n^{k-1})}{n^k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\,\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\,\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\,\underbrace{\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}}_{\to 1}$$

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n^k + O(n^{k-1})}{n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\, q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to\, \mathrm{e}^{-\lambda}}\underbrace{\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}}_{\to 1} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = nq$ perché $Y \sim B(n, q)$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\, q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = nq \;\underset{\substack{n\to\infty \\ q\to 0 \\ nq=\lambda}}{\longrightarrow}\; \lambda$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = \lambda$
- $\operatorname{var}[Y] = nq(1-q)$ perché $Y \sim B(n, q)$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = \lambda$
- $\mathrm{var}\left[Y\right] = nq(1-q) \underset{\substack{n\to\infty \\ q\to 0 \\ nq=\lambda}}{\longrightarrow} \lambda \cdot 1$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = \lambda$
- $\mathrm{var}\left[Y\right] = \lambda$

Riproducibilità

Qual è la densità di $X + Y$ se conosco la densità di X e quella di Y?

Riproducibilità

Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro q) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

Riproducibilità

Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro q) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

DIMOSTRAZIONE:

$X + Y =$ numero di successi in $m + n$ prove indipendenti e tutte con la stessa probabilità di successo q

$\sim B(m + n, q)$

Riproducibilità

Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro q) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

Teorema

Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sono indipendenti, allora $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Riproducibilità

Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro q) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

Teorema

Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sono indipendenti, allora $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Teorema (non dimostrato)

Se $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ sono indipendenti, allora

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y,\ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}\left[g(X)\right]$ o $\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right]$?

Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}[g(X)]$ o $\mathbb{E}[g(X, Y)]$?

- Se X è continua, sappiamo che

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Ma l'integrale potrebbe essere difficile!

Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}[g(X)]$ o $\mathbb{E}[g(X, Y)]$?

- Se X è continua, sappiamo che

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

  Ma l'integrale potrebbe essere difficile!

- Se $g(X, Y) = X + Y$, sappiamo che

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

  Ma $g(X, Y)$ potrebbe essere una funzione più complicata!

Metodo delta

Teorema

- In prima approssimazione,

$$\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] \simeq g(\mu_X, \mu_Y)$$

Metodo delta

Teorema

- In prima approssimazione,

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] \simeq g(\mu_X,\mu_Y)$$

- In prima approssimazione, se X e Y sono indipendenti,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left[g(X,Y)\right] \;\simeq\; & \left[\partial_1 g\left(\mu_X,\mu_Y\right)\right]^2 \operatorname{var}\left[X\right] \;+ \\ & + \;\left[\partial_2 g\left(\mu_X,\mu_Y\right)\right]^2 \operatorname{var}\left[Y\right]\end{aligned}$$

dove

$$\partial_1 g\left(\mu_X,\mu_Y\right) = \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} \qquad \partial_2 g\left(\mu_X,\mu_Y\right) = \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) = g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y) + \\ + \dots$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y) + \cancel{+ \dots}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(X - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(Y - \mu_Y)$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x,y) \simeq g(\mu_X,\mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)(x-\mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)(y-\mu_Y)$$

$$g(X,Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}}(X-\mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}}(Y-\mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\,[g(X,Y)] \simeq g(\mu_X,\mu_Y) + \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

$$+\,\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)\,\mathbb{E}\,[X-\mu_X] + \partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)\,\mathbb{E}\,[Y-\mu_Y]$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x,y) \simeq g(\mu_X,\mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)(x-\mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)(y-\mu_Y)$$

$$g(X,Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}}(X-\mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}}(Y-\mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] \simeq g(\mu_X,\mu_Y) + \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

$$+\,\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)\underbrace{\mathbb{E}\left[X-\mu_X\right]}_{=\mu_X-\mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)\underbrace{\mathbb{E}\left[Y-\mu_Y\right]}_{=\mu_Y-\mu_Y}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] \simeq g(\mu_X, \mu_Y) +$$

$$+\, \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[X - \mu_X\right]}}_{=\mu_X - \mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[Y - \mu_Y\right]}}_{=\mu_Y - \mu_Y}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] &\simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \\
&\quad + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[X - \mu_X\right]}}_{=\mu_X - \mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[Y - \mu_Y\right]}}_{=\mu_Y - \mu_Y} \\
&= g(\mu_X, \mu_Y)
\end{aligned}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2 \mathrm{var}\,[X] + b^2 \mathrm{var}\,[Y]$ se X e Y sono indipendenti

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2 \mathrm{var}\,[X] + b^2 \mathrm{var}\,[Y]$ se X e Y sono indipendenti

$$\mathrm{var}\,[g(X, Y)] \simeq$$

$$\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\, \mathrm{var}\,[X - \mu_X] + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\, \mathrm{var}\,[Y - \mu_Y]$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2\mathrm{var}\,[X] + b^2\mathrm{var}\,[Y]$ se X e Y sono indipendenti

$$\mathrm{var}\,[g(X, Y)] \simeq$$

$$\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2 \underbrace{\mathrm{var}\,[X - \mu_X]}_{=\mathrm{var}[X]} + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2 \underbrace{\mathrm{var}\,[Y - \mu_Y]}_{=\mathrm{var}[Y]}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2\mathrm{var}\,[X] + b^2\mathrm{var}\,[Y]$ se X e Y sono indipendenti

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\,[g(X, Y)] &\simeq \\ &\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\,\underbrace{\mathrm{var}\,[X - \mu_X]}_{=\mathrm{var}[X]} + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\,\underbrace{\mathrm{var}\,[Y - \mu_Y]}_{=\mathrm{var}[Y]} \\ &= [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\,\mathrm{var}\,[X] + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\,\mathrm{var}\,[Y]\end{aligned}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$$\left.\begin{array}{l} X = \text{numero che uscirà sul primo dado} \\ Y = \text{numero che uscirà sul secondo dado} \end{array}\right\} \quad X, Y \text{ è un campione aleatorio}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$$\left.\begin{array}{l} X = \text{numero che uscirà sul primo dado} \\ Y = \text{numero che uscirà sul secondo dado} \end{array}\right\} \quad X, Y \text{ è un campione aleatorio}$$

- Nel lancio di tre monete:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se uscirà testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X_1, X_2, X_3 è un campione aleatorio

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

ESEMPI:

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$$X_i = \text{altezza dell'}i\text{-esimo intervistato}$$

$X_1, \ldots, X_{100}$ è un campione aleatorio

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

La media campionaria di un campione aleatorio
è una <u>variabile aleatoria</u>

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = ???$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$$

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} \cdot n\mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \mu = \mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\mu = \mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = ???$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \qquad \text{quadraticità di var}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \operatorname{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] \qquad \text{indipendenza delle } X_i$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n\sigma^2$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N$ riproducibilità di N

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N \qquad\qquad X \sim N \;\Rightarrow\; aX + b \sim N$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \qquad \right) \qquad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

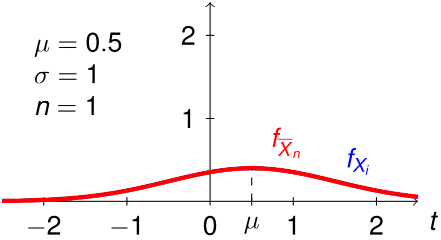
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \;=\; \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

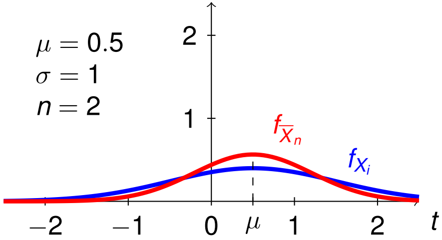
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

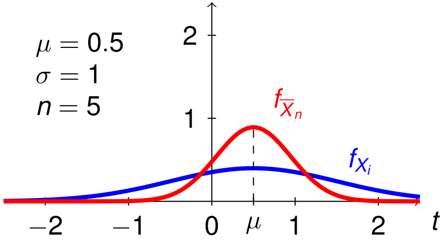
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

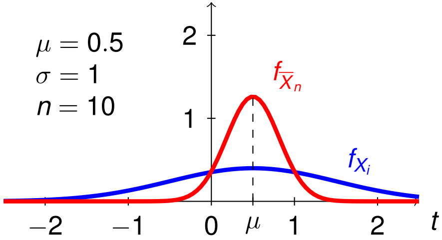
ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i :

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$\mu = 0.5$
$\sigma = 1$
$n = 10$



Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$\mu = 0.5$
$\sigma = 1$
$n = 25$