Statistica - 3ª lezione

2 marzo 2021

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \qquad \Rightarrow \qquad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \qquad \Rightarrow \qquad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se conosco la densità X, qual è quella di Y?

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t])$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

1. $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right)$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right) = \int_{g^{-1}((-\infty,t])} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}\,(Y \leq t) = \mathbb{P}\,(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right) = \int_{g^{-1}((-\infty,t])} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t}$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t)$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

1. $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \qquad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(aX + b \le t) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{t-b}{a}\right)$

$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i)
$$F_Y(t) = \mathbb{P}\,(Y \leq t) = \mathbb{P}\,(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii)
$$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$
$$= \quad F'_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(aX + b \le t) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$

$$= \quad F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$

$$= \quad F'_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a < 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(aX + b \le t) = \mathbb{P}\left(X \ge \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$
$$= -F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$
$$= -f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a \neq 0$$

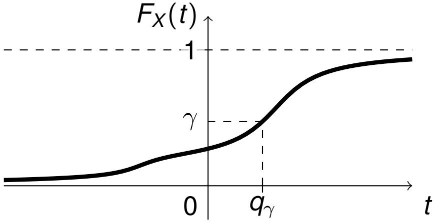
In conclusione,

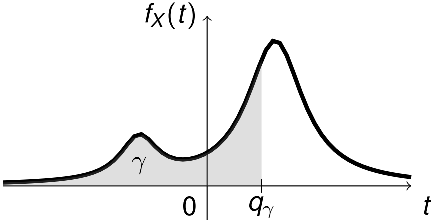
$$f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{- } \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{- esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

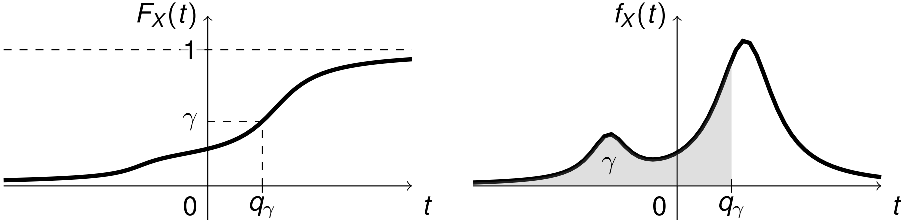




Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{- } \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{- esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine γ* (della densità) di X



Se $\gamma = 0.5$, ottengo la *mediana* di X ecc.

Quantili di una v.a.

Se: $\left\{ \begin{array}{ll} \text{-} & \gamma \in (0, 1) \text{ è fissato} \\ \text{-} & \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{array} \right.$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

- Se $Y = aX + b$, allora $q_\gamma^Y = \begin{cases} a\, q_\gamma^X + b & \text{se } a > 0 \\ a\, q_{1-\gamma}^X + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$

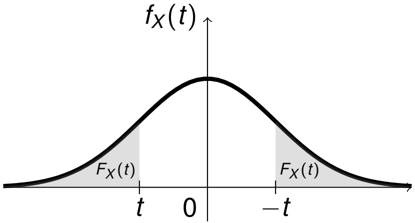
Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

- Se $Y = aX + b$, allora $q_\gamma^Y = \begin{cases} a\, q_\gamma^X + b & \text{se } a > 0 \\ a\, q_{1-\gamma}^X + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse delle y ($\Leftrightarrow$ $f_X = f_{-X}$), allora
  - $F_X(t) = 1 - F_X(-t)$



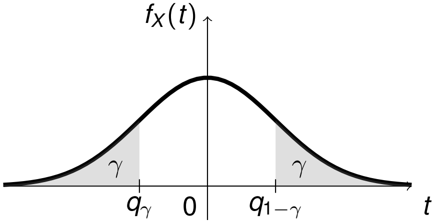
Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

- Se $Y = aX + b$, allora $q_\gamma^Y = \begin{cases} a\,q_\gamma^X + b & \text{se } a > 0 \\ a\,q_{1-\gamma}^X + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse delle y ($\Leftrightarrow$ $f_X = f_{-X}$), allora
  - $F_X(t) = 1 - F_X(-t)$
  - $-q_\gamma = q_{1-\gamma}$



Valore atteso

Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Valore atteso

Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

Valore atteso

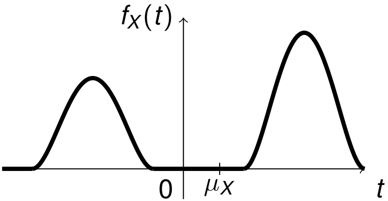
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

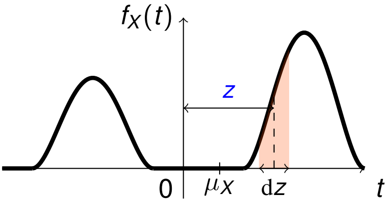
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

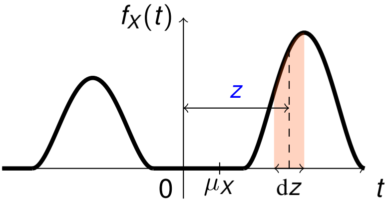
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

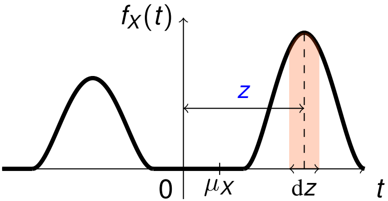
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

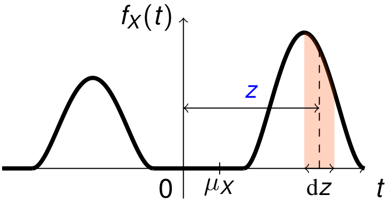
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



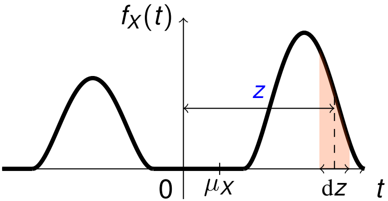
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}\left[X\right]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



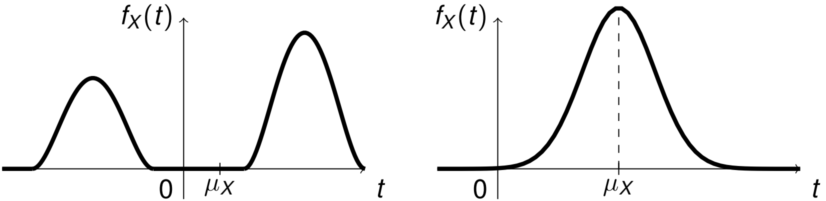
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, allora $\mu_X = x_0$



Valore atteso

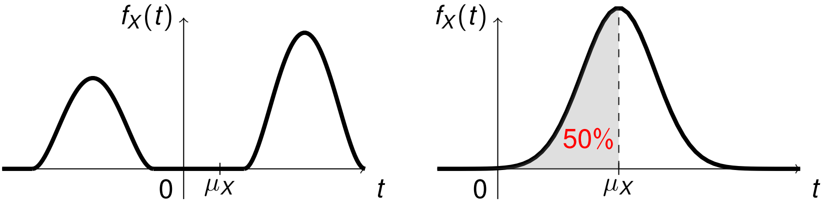
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, allora $\mu_X = x_0 = q_{0.5}^X$



Valore atteso

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, come si calcola

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = ???$$

Valore atteso

Secondo la definizione,

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_{g(X)}(z)\, \mathrm{d}z$$

ma in pratica il passaggio $f_X \;\rightarrow\; f_{g(X)}$ è laborioso

Valore atteso

Secondo la definizione,

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_{g(X)}(z)\,\mathrm{d}z$$

ma in pratica il passaggio $f_X \quad \to \quad f_{g(X)}$ è laborioso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

  Infatti, con $g(z) = az + b$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

  Infatti, con $g(z) = az + b$:

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Infatti, con $g(z) = az + b$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X]} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{1}\end{aligned}$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Infatti, con $g(z) = az + b$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left[X\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) \, f_X(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_X(z) \, \mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) \, \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\operatorname{var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X^2]} - 2\mu_X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X]} + \mu_X^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{1}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \cdot 1\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left[X\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) \, f_X(z) \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_X(z) \, \mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) \, \mathrm{d}z \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \cdot 1
\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2\,\mathrm{var}\left[X\right]$:

$$\mathrm{var}\left[aX + b\right] = \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}\left[aX + b\right]\right\}^2\right]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2 \, \mathrm{var}\left[X\right]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}\left[aX + b\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}\left[aX + b\right]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - (a\mathbb{E}\left[X\right] + b)\right\}^2\right] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E} \end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2\, \mathrm{var}\left[X\right]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left[aX + b\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}\left[aX + b\right]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}\left[X\right] + \cancel{b})\right\}^2\right]\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{a(X - \mathbb{E}[X])\right\}^2\right]\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2\,\mathrm{var}\left[X\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left[aX + b\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}\left[aX + b\right]\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}\left[X\right] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[a^2\left\{(X - \mathbb{E}\left[X\right])\right\}^2\right]
\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2 \,\mathrm{var}[X]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}[aX+b] &= \mathbb{E}\left[\{(aX+b) - \mathbb{E}[aX+b]\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\{(aX+\cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X]+\cancel{b})\}^2\right] \\
&= a^2\,\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}
\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2\, \mathrm{var}\left[X\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left[aX + b\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}\left[aX + b\right]\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}\left[X\right] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\
&= a^2\, \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = a^2\, \mathrm{var}\left[X\right]
\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2\,\mathrm{var}\left[X\right]$
- Per la *deviazione standard* $\mathrm{sd}\left[X\right] = \sqrt{\mathrm{var}\left[X\right]}$ si ha

$$\mathrm{sd}\left[aX + b\right] = |a|\,\mathrm{sd}\left[X\right]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2\, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\,[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\,[aX + b] = a^2\,\mathrm{var}\,[X]$
- Per la *deviazione standard* $\mathrm{sd}\,[X] = \sqrt{\mathrm{var}\,[X]}$ si ha

$$\mathrm{sd}\,[aX + b] = |a|\,\mathrm{sd}\,[X]$$

(A volte si scrive anche $\sigma_X = \mathrm{sd}\,[X]$)