Corso di Statistica per Ingegneria Fisica
Anno accademico 2020/2021

Esercitazione 6 - Stima puntuale e metodo delta

Esercizio 1. La potenza P dissipata dalla resistenza R di un circuito elettrico è $P = RI^2$, dove la corrente I è una variabile aleatoria di media $\mu_I = 20\,\mathrm{A}$ e deviazione standard $\sigma_I = 0.1\,\mathrm{A}$. Si approssimino media e varianza della potenza P, nel caso in cui:

(a) R è una costante che vale $80\,\Omega$; *[*$\mu_P \simeq 32000\,\mathrm{W}$*;* $\sigma_P^2 \simeq 102400\,\mathrm{W}^2$*]*

(b) R è anch'essa una variabile aleatoria di media $\mu_R = 80\,\Omega$ e deviazione standard $\sigma_R = 1.5\,\Omega$, indipendente da I. *[*$\mu_P \simeq 32000\,\mathrm{W}$*;* $\sigma_P^2 \simeq 462400\,\mathrm{W}^2$*]*

Esercizio 2. Sia X una v.a. con funzione di densità definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\frac{(1-x)}{\sqrt{x}} & \textit{se } x \in (0,1) \\ 0 & \textit{se } x \notin (0,1) \end{cases}$$

(a) Calcolare media e varianza di X. *[*$\mathbb{E}[X] = 1/5$*;* $\mathrm{Var}(X) = 8/175$*]*

(b) Si determini la densità della v.a. continua $Y = \log(X)$. *[*$f_Y(y) = \left[-\frac{3}{4}\exp(\frac{3}{2}y) + \frac{3}{4}\exp(\frac{y}{2})\right]\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(y)$*]*

(c) Si calcolino media e varianza della v.a. Y e si confronti il risultato con quello approssimato tramite il metodo delta (o formula di propagazione dell'errore). *[*$\mathbb{E}[Y] = -2.\bar{6}$, $\mathrm{Var}(Y) = 4.\bar{4}$*; approssimate con il metodo delta* $\mathbb{E}[Y] \simeq -1.609$, $\mathrm{Var}(Y) \simeq 1.143$*]*

Esercizio 3. Si consideri un campione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. discrete con densità

$$p(-1) = \frac{\theta}{2}, \quad p(0) = 1-\theta, \quad p(1) = \frac{\theta}{2}$$

(a) Determinare per quali θ la funzione p è una densità. *[Deve essere* $0 \le p_i \le 1$ *e* $\sum p_i = 1$*, da cui* $0 \le \theta \le 1$*]*

(b) Calcolare media e varianza di X_1. *[* $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \theta$*]*

Si considerano gli stimatori di θ definiti da $\Theta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$ e $T_n = |X_n|$.

(c) Si stabilisca se Θ_n e T_n sono distorti. *[Sia* Θ_n *sia* T_n *sono non distorti]*

(d) Si calcoli l'errore quadratico medio degli stimatori Θ_n e T_n e se ne studino i comportamenti per $n \to \infty$. *[*$\mathrm{mse}(\Theta_n;\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ *e* $\mathrm{mse}(T_n;\theta) = \theta(1-\theta)$*. Si noti che* $\mathrm{mse}(\Theta_n;\theta) \to 0$ *per* $n \to \infty$*, mentre* $\mathrm{mse}(T_n;\theta)$ *è costante in n]*

(e) Quale stimatore vi sembra migliore? Perché? *[*Θ_n *è migliore in quanto, pur essendo non distorti ambedue gli stimatori,* Θ_n *ha* mse *minore e tendente a* 0 *per* $n \to \infty$*]*

Esercizio 4. Due resistori sono collegati in parallelo. Le due resistenze r_1 ed r_2 sono incognite. Se ne vuole stimare il valore, assieme al valore della resistenza equivalente r_{eq}, sulla base di 25 misure indipendenti di r_1, che indichiamo con $X_1, \dots, X_{25}$, e di 16 misure indipendenti di r_2, che indichiamo con $Y_1, \dots, Y_{16}$. Supponendo che sia nullo l'errore sistematico dello strumento di misura:

1. Proporre tre stimatori puntuali $\widehat{R}_1$, $\widehat{R}_2$ ed $\widehat{R}_{\text{eq}}$ per r_1, r_2 ed r_{eq}.
   [$\widehat{R}_1 = \bar{X}$, $\widehat{R}_2 = \bar{Y}$, $\widehat{R}_{\text{eq}} = (\widehat{R}_1\widehat{R}_2)/(\widehat{R}_1 + \widehat{R}_2) = h(\widehat{R}_1, \widehat{R}_2)$]

2. Verificare se tali stimatori sono, almeno approssimativamente, corretti.
   [$\widehat{R}_1$ ed $\widehat{R}_2$ sono esattamente corretti; $\widehat{R}_{\text{eq}}$ è corretto solo approssimativamente]

3. Determinare l'errore standard di $\widehat{R}_{\text{eq}}$ in funzione degli errori standard di $\widehat{R}_1$ ed $\widehat{R}_2$.
$$\left[\operatorname{se}(\widehat{R}_{\text{eq}}) \simeq \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)^4 \operatorname{se}(\widehat{R}_1)^2 + \left(\frac{r_1}{r_1+r_2}\right)^4 \operatorname{se}(\widehat{R}_2)^2}\right]$$

Le suddette 25 misure di r_1 forniscono una media campionaria $\bar{x} = 22.8\ \Omega$ e una varianza campionaria $s_X^2 = 0.375\ \Omega^2$, mentre le 16 misure di r_2 danno $\bar{y} = 37.1\ \Omega$ ed $s_Y^2 = 0.25\ \Omega^2$.

4. Fornire le corrispondenti stime puntuali $\widehat{r}_1$, $\widehat{r}_2$ ed $\widehat{r}_{\text{eq}}$ per r_1, r_2 ed r.
   [$\widehat{r}_1 = 22.8\ \Omega$, $\widehat{r}_2 = 37.1\ \Omega$ e $\widehat{r}_{\text{eq}} = 14.1215\ \Omega$]

5. Fornire una stima dell'errore standard di $\widehat{R}_1$, $\widehat{R}_2$ ed $\widehat{R}_{\text{eq}}$.
   [$\widehat{\operatorname{se}}(\widehat{R}_1) = 0.12247\ \Omega$, $\widehat{\operatorname{se}}(\widehat{R}_2) = 0.125\ \Omega$, $\widehat{\operatorname{se}}(\widehat{R}_{\text{eq}}) = 0.0504\ \Omega$.]

Esercizio 5. La potenza p dissipata dalla resistenza r di un circuito elettrico è $p = ri^2$. Si ottengono le seguente misure per l'intensità di corrente (in A) e per la resistenza (in Ω):

$$i_1 = 3\,, \qquad i_2 = 4\,, \qquad i_3 = 3.5\,, \qquad i_4 = 3$$

$$r_1 = 10\,, \qquad r_2 = 15\,, \qquad r_3 = 11\,, \qquad r_4 = 8$$

Supponendo che lo strumento di misura abbia errore sistematico nullo, proporre uno stimatore approssimativamente non distorto per p. Fornire una stima puntuale per p e una stima dell'errore standard dello stimatore proposto.
$$\left[\widehat{P} = \bar{R}\bar{I}^2\,, \quad \widehat{p} = 125.30\,W\,, \quad \widehat{\operatorname{se}}(\widehat{P}) = \sqrt{\bar{i}^4\,\frac{s_R^2}{4} + 4\bar{r}^2\bar{i}^2\,\frac{s_I^2}{4}} = 24.43\ W\right]$$

Esercizio 6. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione da una legge $B(1,p)$ (Bernoulliana di parametro p) di numerosità $n \geq 2$.

(a) Si trovi uno stimatore *esattamente* non distorto per p^2. *[$T_n = \hat{X}_n - S_n^2$]*

Viene effettuato un esperimento con $n = 4$. Si ottengono i valori

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 1\,.$$

(b) Fornire una stima per p^2. *[$t_4 = 1/6$]*

Esercizio 7. Sia X una popolazione distribuita secondo la legge uniforme sull'intervallo $(\theta - 2, \theta + 2)$; sia $X_1, \ldots, X_4$ un campione aleatorio estratto da tale popolazione. Dimostrare che il seguente stimatore

$$T(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{2X_1 - X_2}{2} + \frac{2X_3 + X_4}{3}$$

è distorto per θ e valutare la sua distorsione. *[$b(T;\theta) = \theta/2$]*

Esercizio 8. Sia X una popolazione distribuita secondo una legge di Bernoulli di parametro p. Sia inoltre X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 un campione casuale estratto da X.

1. Mostrare che lo stimatore
$$T_5 = \frac{4X_1 - 3X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$$
è distorto per p e valutare la sua distorsione. *[*$\mathbb{E}[T_5] = \frac{4}{5}p$*, quindi* $b(T_5; p) = \frac{4}{5}p - p = -\frac{1}{5}p$*]*

2. Calcolare la varianza di tale stimatore.
$$\left[\operatorname{Var}(T_5) = \frac{1}{25}(16p(1-p) + 9p(1-p) + p(1-p) + p(1-p) + p(1-p)) = \frac{28}{25}\, p(1-p)\right]$$

3. Partendo da T_5 trovare uno stimatore non distorto per p; *[*$\widetilde{T} = 5T_5/4$*]*.

Esercizio 9. Sia $X_1, \ldots, X_6$ un campione casuale estratto da una popolazione di media $\mathbb{E}[X] = 3\theta$ e $\operatorname{Var}(X) = 1$. Siano
$$T_1 = \frac{2X_1 - X_2}{3} \qquad \text{e} \qquad T_2 = \frac{X_4 + X_6}{6}$$
due stimatori per θ.

1. Mostrare che entrambi sono stimatori corretti e valutare per ognuno l'errore quadratico medio. *[*$\text{mse}(T_1; \theta) = 0.\bar{5}\,, \quad \text{mse}(T_2; \theta) = 0.0\bar{5}$*]*

2. Quale tra i due è il più efficiente? Perché? *[*T_2*]*

Esercizio 10. Siano X_1, X_2, X_3, X_4 variabili aleatorie distribuite secondo una legge uniforme sull'intervallo $(\theta - 1, \theta + 1)$, con θ incognito.

(a) Calcolare valore atteso e varianza di ciascuna X_i. *[*$\mathbb{E}[X_i] = \theta, \quad \operatorname{Var}(X_i) = 1/3$*]*

(b) Consideriamo ora la variabile aleatoria Y ottenuta nel seguente modo:
$$Y = \frac{X_1 + 3X_2}{8} + \frac{X_3 + X_4}{4}.$$
Calcolare valore atteso e varianza di Y. *[*$\mathbb{E}[Y] = \theta, \quad \operatorname{Var}(Y) = 3/32$*]*

(c) Siamo anche interessati alla variabile aleatoria ottenuta come:
$$Z = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}.$$
Calcolare valore atteso e varianza di Z. *[*$\mathbb{E}[Z] = \theta, \quad \operatorname{Var}(Z) = 1/12$*]*

(d) Quale, tra Y e Z è migliore come stimatore di θ? *[*Z*]*.

Esercizio 11. X_1 è un campione unidimensionale estratto da una Poisson di parametro λ, e $T_1 = X_1$ e $T_2 = 1$ sono due stimatori per λ. Qual è migliore in termini di MSE? *[*T_2 *preferito per* $2.618 \geq \lambda \geq 0.381$*]*

Esercizio 12. Sia X_1, X_2, X_3 un campione estratto da una popolazione bernoulliana $B(1, p)$. Al fine di stimare il parametro p della popolazione, è stato proposto il seguente stimatore
$$T = 2X_1 - 2X_2 - X_3\,.$$

(a) Mostrare che T è uno stimatore distorto e valutarne l'errore quadratico medio.
[$b(T; p) = -2p\,, \quad \text{mse}(T; p) = p(9 - 5p)$*]*

(b) Successivamente, individuate la costante c tale che $W = cT$ sia non distorto per p e valutatene l'errore quadratico medio. *[*$c = -1\,, \quad \text{mse}(W; p) = 9p(1-p)$*]*

(c) Quale dei due stimatori risulta migliore? *[W]*

Soluzione 1.

(a) Se R è una costante, usiamo il fatto che, secondo il metodo delta, abbiamo approssimativamente $\mathbb{E}[g(I)] \simeq g(\mathbb{E}[I])$, e dunque

$$\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}\left[RI^2\right] \underset{\substack{\text{linearità} \\ \text{di } \mathbb{E}}}{=} R\,\mathbb{E}\left[I^2\right] \underset{\text{metodo } \delta}{\simeq} R\,\mathbb{E}[I]^2 = 80 \cdot 20^2 = 32000\,.$$

In questo caso, la funzione g è $g(i) = i^2$. Similmente, per la varianza si ha (di nuovo approssimativamente) $\mathrm{Var}(g(I)) \simeq g'(\mathbb{E}[I])^2\,\mathrm{Var}(I)$, dove g' è la derivata della stessa g di prima, cioè $g'(i) = 2i$. Dunque

$$\mathrm{Var}(P) = \mathrm{Var}\left(RI^2\right) \underset{\substack{\text{quadraticità} \\ \text{di Var}}}{=} R^2\mathrm{Var}\left(I^2\right) \underset{\text{metodo } \delta}{\simeq} R^2\left(2\mathbb{E}[I]\right)^2\mathrm{Var}(I) = 80^2\cdot(2\cdot20)^2\cdot0.1^2 = 102400\,.$$

Da notare che in entrambi i calcoli l'uguaglianza approssimata è in un passaggio solo (quello in cui si è usato il metodo delta, appunto); in tutti gli altri passaggi, non si è fatta nessuna approssimazione.

(b) La differenza rispetto al punto (a) è che ora $P = h(R, I)$ dipende da due v.a. indipendenti, cioè R e I. La funzione ora è

$$h(r,i) = ri^2 \quad \Rightarrow \quad \partial_1 h(r,i) = i^2\,, \qquad \partial_2 h(r,i) = 2ri\,.$$

Il metodo delta per la media è

$$\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}[h(R,I)] \underset{\text{metodo } \delta}{\simeq} h(\mathbb{E}[R], \mathbb{E}[I]) = \mathbb{E}[R]\,\mathbb{E}[I]^2 = 80 \cdot 20^2 = 32000\,.$$

Per la varianza invece si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(P) = \mathrm{Var}(h(R,I)) &\underset{\text{metodo } \delta}{\simeq} \left[\partial_1 h(\mathbb{E}[R], \mathbb{E}[I])\right]^2\mathrm{Var}(R) + \left[\partial_2 h(\mathbb{E}[R], \mathbb{E}[I])\right]^2\mathrm{Var}(I) \\ &= (\mathbb{E}[I]^2)^2\mathrm{Var}(R) + (2\mathbb{E}[R]\,\mathbb{E}[I])^2\mathrm{Var}(I) \\ &= (20^2)^2\cdot 1.5^2 + (2\cdot 80\cdot 20)^2\cdot 0.1^2 = 462400\,.\end{aligned}$$

Soluzione 4.

Supporre che sia nullo l'errore sistematico dello strumento di misura significa assumere che le v.a. che descrivono i risultati delle varie misure abbiano tutte densità centrata sul valore 'vero' della quantità misurata. Nell'esercizio, i valori 'veri' dei due resistori in parallelo sono i due parametri incogniti r_1 e r_2. Dunque, dire che non c'è errore sistematico significa assumere che $\mathbb{E}[X_i] = r_1$ per ogni $i = 1,\dots,25$ e $\mathbb{E}[Y_j] = r_2$ per ogni $j = 1,\dots,16$. Le altre ipotesi enunciate nel testo sono: (1) che le $X_1,\dots,X_{25}$ siano tutte indipendenti tra loro (misure diverse non si influenzano tra loro); (2) che siano indipendenti anche le $Y_1,\dots,Y_{16}$. Possiamo aggiungere noi le ulteriori ipotesi che: (3) *tutte* le v.a. $X_1,\dots,X_{25},Y_1,\dots,Y_{16}$ siano indipendenti tra loro (misure diverse, eventualmente fatte su oggetti diversi, non si influenzano tra loro); (4) le $X_1,\dots,X_{25}$ siano identicamente distribuite; (5) le $Y_1,\dots,Y_{16}$ siano identicamente distribuite (ma naturalmente con una densità diversa dalle X_i). Riassumendo, d'ora in poi le nostre ipotesi saranno:

$$\left.\begin{array}{ll} X_1,\dots,X_{25} & \text{i.i.d.} \\ Y_1,\dots,Y_{16} & \text{i.i.d.}\end{array}\right\} \text{tutte indipendenti tra loro}\,, \qquad \begin{array}{ll}\mathbb{E}[X_i] = r_1 & \forall i = 1,\dots,25 \\ \mathbb{E}[Y_j] = r_2 & \forall j = 1,\dots,16\end{array}\,.$$

1. Un buono stimatore (cioè non distorto e consistente in media quadratica) del parametro r_1 è la media campionaria $\bar{X} =: \widehat{R}_1$ delle misure $X_1, \ldots, X_{25}$. Infatti, sappiamo che

$$\mathbb{E}\left[\bar{X}\right] = \mathbb{E}\left[X_i\right] = r_1 \quad \Rightarrow \quad b(\widehat{R}_1; r_1) = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad \text{non distorsione}$$

$$\mathrm{mse}(\widehat{R}_1; r_1) = \mathrm{Var}\left(\widehat{R}_1\right) + b(\widehat{R}_1; r_1)^2 = \mathrm{Var}\left(\bar{X}\right) = \frac{\mathrm{Var}\left(X_i\right)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{consistenza}$$

Analogamente, la media campionaria $\bar{Y} =: \widehat{R}_1$ delle misure $Y_1, \ldots, Y_{16}$ è un buono stimatore del parametro r_2. Per quanto riguarda infine la resistenza equivalente, ricordiamo dall'elettrodinamica che per le resistenze in parallelo vale

$$\frac{1}{r_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_{\mathrm{eq}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} =: g(r_1, r_2)\,.$$

Di conseguenza, uno stimatore approssimativamente non distorto del parametro r_{eq} (cioè della resistenza equivalente 'vera') sarà, per il metodo delta,

$$\widehat{R}_{\mathrm{eq}} = g(\widehat{R}_1, \widehat{R}_2) = \frac{\widehat{R}_1 \widehat{R}_2}{\widehat{R}_1 + \widehat{R}_2}\,.$$

2. Abbiamo già visto al punto precedente che $\widehat{R}_1$ e $\widehat{R}_2$ sono stimatori *esattamente* corretti (= non distorti) dei rispettivi parametri r_1 e r_2. Per dimostrarlo, abbiamo usato quello che sapevamo dalla teoria. Abbiamo anche anticipato che $\widehat{R}_{\mathrm{eq}}$ è uno stimatore *approssimativamente* corretto del parametro r_{eq} per via del metodo delta. Infatti, per dimostrarlo,

$$\mathbb{E}\left[\widehat{R}_{\mathrm{eq}}\right] = \mathbb{E}\left[g(\widehat{R}_1, \widehat{R}_2)\right] \underset{\text{metodo } \delta}{\simeq} g(\mathbb{E}[\widehat{R}_1], \mathbb{E}[\widehat{R}_2]) \underset{\substack{\widehat{R}_1 \text{ e } \widehat{R}_2 \text{ stimatori} \\ \text{corretti di } r_1 \text{ e } r_2 \\ \text{(esattamente!)}}}{=} g(r_1, r_2) = r_{\mathrm{eq}}\,.$$

3. Sappiamo che la definizione di errore standard di uno stimatore $\widehat{\Theta}$ è

$$\mathrm{se}(\widehat{\Theta}) = \sqrt{\mathrm{Var}\left(\widehat{\Theta}\right)}\,.$$

Notiamo che in questo caso l'errore standard coincide (almeno approssimativamente) con la radice dell'errore quadratico medio, in quanto, avendo a che fare con stimatori (almeno approssimativamente) non distorti, abbiamo

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left(\widehat{\Theta}\right)} \underset{\text{oppure } \simeq}{=} \sqrt{\mathrm{Var}\left(\widehat{\Theta}\right) + b(\Theta; \theta)^2} = \sqrt{\mathrm{mse}(\widehat{\Theta}; \theta)}\,.$$

Gli errori standard di $\widehat{R}_1$ e di $\widehat{R}_2$ sono facili da trovare. Infatti,

$$\mathrm{se}(\widehat{R}_1) = \sqrt{\mathrm{Var}\left(\bar{X}\right)} = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}\left(X_i\right)}{n}} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{25}} = \frac{\sigma_X}{5}\,,$$

dove è comodo aver definito una volta per tutte

$$\sigma_X^2 := \mathrm{Var}\left(X_i\right)\,.$$

Allo stesso modo,

$$\mathrm{se}(\widehat{R}_2) = \sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{16}} = \frac{\sigma_Y}{4} \qquad \text{dove} \qquad \sigma_Y^2 := \mathrm{Var}\left(Y_i\right)\,.$$

Per trovare invece $\mathrm{se}(\widehat{R}_{\mathrm{eq}}) = \sqrt{\mathrm{Var}\left(\widehat{R}_{\mathrm{eq}}\right)}$, non possiamo fare altro che calcolare $\mathrm{Var}\left(\widehat{R}_{\mathrm{eq}}\right)$ *approssimativamente* usando il metodo delta. Si fa così:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\widehat{R}_{\mathrm{eq}}\right) &= \mathrm{Var}\left(g(\widehat{R}_1, \widehat{R}_2)\right) \\
&\underset{\text{metodo } \delta}{\simeq} \left[\partial_1 g(\mathbb{E}[\widehat{R}_1], \mathbb{E}[\widehat{R}_2])\right]^2 \mathrm{Var}\left(\widehat{R}_1\right) + \left[\partial_2 g(\mathbb{E}[\widehat{R}_1], \mathbb{E}[\widehat{R}_2])\right]^2 \mathrm{Var}\left(\widehat{R}_2\right) \\
&= \left[\partial_1 g(r_1, r_2)\right]^2 \mathrm{se}(\widehat{R}_1)^2 + \left[\partial_2 g(r_1, r_2)\right]^2 \mathrm{se}(\widehat{R}_2)^2 \,,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo di nuovo usato il fatto che $\widehat{R}_1$ ed $\widehat{R}_2$ sono stimatori (esattamente) non distorti di r_1 e r_2 (cioè $\mathbb{E}[\widehat{R}_i] = r_i$), e che inoltre, per definizione,

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{R}_1\right) = \mathrm{se}(\widehat{R}_1)^2 \,, \qquad \mathrm{Var}\left(\widehat{R}_2\right) = \mathrm{se}(\widehat{R}_2)^2 \,.$$

Non resta da fare altro che calcolare le derivate parziali di g:

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(r_1, r_2) &= \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) = \frac{(r_1 + r_2)\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1 r_2) - r_1 r_2 \frac{\partial}{\partial r_1}(r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^2 \\
\partial_2 g(r_1, r_2) &= \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)^2 \qquad \text{(perché simmetrico al calcolo di } \partial_1\text{)} \,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\widehat{R}_{\mathrm{eq}}\right) &\simeq \left[\left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^2\right]^2 \mathrm{se}(\widehat{R}_1)^2 + \left[\left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)^2\right]^2 \mathrm{se}(\widehat{R}_2)^2 \\
&= \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^4 \mathrm{se}(\widehat{R}_1)^2 + \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)^4 \mathrm{se}(\widehat{R}_2)^2 \,,
\end{aligned}$$

e l'errore standard di $\widehat{R}_{\mathrm{eq}}$ è

$$\mathrm{se}(\widehat{R}_{\mathrm{eq}}) \simeq \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^4 \mathrm{se}(\widehat{R}_1)^2 + \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)^4 \mathrm{se}(\widehat{R}_2)^2} \,.$$

Questo è quanto era richiesto dal punto 3. Da notare che l'espressione precedente fornisce il *parametro incognito* (= numero reale) $\mathrm{se}(\widehat{R}_{\mathrm{eq}})$ in funzione degli altri quattro *parametri incogniti* (= numeri reali) $r_1, r_2, \mathrm{se}(\widehat{R}_1), \mathrm{se}(\widehat{R}_2)$, cioè

$$\mathrm{se}(\widehat{R}_{\mathrm{eq}}) = h(r_1, r_2, \mathrm{se}(\widehat{R}_1), \mathrm{se}(\widehat{R}_2)) \,,$$

in cui h è la funzione scritta appena sopra.

4. Ora sappiamo che, dopo la misura, per le v.a. $\bar{X}$, $\bar{Y}$ e S_X^2, S_Y^2 si sono osservate le realizzazioni

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= 22.8\ \Omega \qquad & s_X^2 &= 0.375\ \Omega^2 \\
\bar{y} &= 37.1\ \Omega \qquad & s_Y^2 &= 0.25\ \Omega^2 \,.
\end{aligned}$$

Come al solito, per non fare confusione scriviamo in maiuscolo le v.a. e in minuscolo le loro realizzazioni (= numeri reali). Le nostre *stime* di r_1, r_2 ed r_{eq} sono dunque le realizzazioni degli stimatori

$\widehat{R}_1$, $\widehat{R}_2$ ed $\widehat{R}_{\text{eq}}$ sui valori precedenti. Cioè:

$$\widehat{r}_1 = \bar{x} = 22.8\ \Omega \qquad\qquad \widehat{r}_2 = \bar{y} = 37.1\ \Omega$$
$$\widehat{r}_{\text{eq}} = \frac{\widehat{r}_1 \widehat{r}_2}{\widehat{r}_1 + \widehat{r}_2} = \frac{22.8 \cdot 37.1}{22.8 + 37.1}\ \Omega = 14.1215\ \Omega\,.$$

Anche qui, abbiamo scritto ciascuna realizzazione con la lettera della v.a. corrispondente in minuscolo.

5. Ora vogliamo stimare gli errori standard $\mathrm{se}(\widehat{R}_1)$, $\mathrm{se}(\widehat{R}_2)$ ed $\mathrm{se}(\widehat{R}_{\text{eq}})$. Osserviamo che si tratta ancora del problema di stimare tre *parametri incogniti* (= numeri reali), che sono a loro volta funzione di altri parametri incogniti. Infatti, abbiamo visto al punto 3 che

$$\begin{aligned}
\mathrm{se}(\widehat{R}_1) &= \frac{\sigma_X}{5} =: h_1(\sigma_X^2) \qquad \text{dove} \qquad \sigma_X^2 := \mathrm{Var}\,(X_i) \\
\mathrm{se}(\widehat{R}_2) &= \frac{\sigma_Y}{4} =: h_2(\sigma_Y^2) \qquad \text{dove} \qquad \sigma_Y^2 := \mathrm{Var}\,(Y_i) \\
\mathrm{se}(\widehat{R}_{\text{eq}}) &\simeq \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^4 \mathrm{se}(\widehat{R}_1)^2 + \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)^4 \mathrm{se}(\widehat{R}_2)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^4 \frac{\sigma_X^2}{25} + \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)^4 \frac{\sigma_Y^2}{16}} \\
&=: h_{\text{eq}}(r_1, r_2, \sigma_X^2, \sigma_Y^2)\,.
\end{aligned}$$

Anche qui, per via del metodo delta, si possono ottenere degli stimatori *approssimativamente* non distorti di questi nuovi tre parametri applicando le rispettive funzioni h_1, h_2 e h_{eq} a degli stimatori *esattamente* non distorti di r_1, r_2, σ_X^2 e σ_Y^2. Sappiamo dalla teoria (o abbiamo già visto prima) che:

- $\widehat{R}_i$ è uno stimatore esattamente non distorto di r_i;
- S_X^2 [rispettivamente, S_Y^2] è uno stimatore esattamente non distorto di σ_X^2 [risp., σ_Y^2],

e dunque

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{R}_1) &= h_1(S_X^2) = \frac{S_X}{5} \\
\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{R}_2) &= h_2(S_Y^2) = \frac{S_Y}{4} \\
\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{R}_{\text{eq}}) &= h_{\text{eq}}(\widehat{R}_1, \widehat{R}_2, S_X^2, S_Y^2) = \sqrt{\left(\frac{\widehat{R}_2}{\widehat{R}_1 + \widehat{R}_2}\right)^4 \frac{S_X^2}{25} + \left(\frac{\widehat{R}_1}{\widehat{R}_1 + \widehat{R}_2}\right)^4 \frac{S_Y^2}{16}}
\end{aligned}$$

sono degli stimatori approssimativamente non distorti di $\mathrm{se}(\widehat{R}_1)$, $\mathrm{se}(\widehat{R}_2)$ e $\mathrm{se}(\widehat{R}_{\text{eq}})$, rispettivamente. Da notare che abbiamo usato il maiuscolo SE per indicare gli stimatori (perché sono delle v.a.), e per loro abbiamo usato le stesse lettere 'se' dei corrispondenti parametri da stimare, aggiungendoci un $\widehat{\cdot}$ come si fa di solito con gli stimatori.
Se ora dagli *stimatori* vogliamo passare alle *stime*, dobbiamo realizzare le tre v.a. $\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{R}_1)$, $\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{R}_2)$

e $\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{R}_{\mathrm{eq}})$ sui valori effettivamente misurati, trovando così i tre numeri reali

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{se}}(\widehat{R}_1) &= \frac{s_X}{5} = \frac{\sqrt{0.375\ \Omega^2}}{5} = 0.12247\ \Omega \\
\widehat{\mathrm{se}}(\widehat{R}_2) &= \frac{s_Y}{4} = \frac{\sqrt{0.25\ \Omega^2}}{4} = 0.125\ \Omega \\
\widehat{\mathrm{se}}(\widehat{R}_{\mathrm{eq}}) &= \sqrt{\left(\frac{\widehat{r}_2}{\widehat{r}_1+\widehat{r}_2}\right)^4 \frac{s_X^2}{25} + \left(\frac{\widehat{r}_1}{\widehat{r}_1+\widehat{r}_2}\right)^4 \frac{s_Y^2}{16}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{37.1}{22.8+37.1}\right)^4 \cdot \frac{0.375}{25} + \left(\frac{22.8}{22.8+37.1}\right)^4 \cdot \frac{0.25}{16}} = 0.0504\ \Omega\,.
\end{aligned}$$

Questa è la risposta al punto 5. Naturalmente, in linea di principio si potrebbe richiedere di trovare anche l'errore standard dello stimatore dell'errore standard (cioè determinare l'espressione del parametro $\mathrm{se}(\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{R}))$), e di fornirne uno stimatore (che coerentemente chiameremo $\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{\mathrm{SE}}(\widehat{R}))$), e di trovare la stima corrispondente ... e così via.

Soluzione 6.

(a) Sappiamo che il parametro p^2 interviene nella varianza di $B(1,p)$ e non nella sua media: $\mathrm{Var}\,(X_i) = p - p^2$, mentre $\mathbb{E}\,[X_i] = p$. Di conseguenza, ricaviamo $p^2 = \mathbb{E}\,[X_i] - \mathrm{Var}\,(X_i)$. Ora, la media campionaria $\bar{X}_n$ è uno stimatore non distorto del parametro $\mathbb{E}\,[X_i]$, mentre la varianza campionaria S_n^2 lo è di $\mathrm{Var}\,(X_i)$. Di conseguenza, la v.a.

$$T_n := \bar{X}_n - S_n^2$$

è uno stimatore non distorto di p^2 per la linearità della media. Infatti,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[T_n] &= \mathbb{E}\left[\bar{X}_n - S_n^2\right] \underset{\substack{\text{linearità}\\ \text{di } \mathbb{E}}}{=} \mathbb{E}\left[\bar{X}_n\right] - \mathbb{E}\left[S_n^2\right] \underset{\substack{b(\bar{X}_n;\mathbb{E}[X_i])=0\\ b(S_n^2;\mathrm{Var}(X_i))=0}}{=} \mathbb{E}\,[X_i] - \mathrm{Var}\,(X_i) = p - [p(1-p)] \\
&= p^2\,.
\end{aligned}$$

(b) Una stima di p^2 è data dalla realizzazione dello stimatore T_4 sui risultati delle 4 misure. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\bar{x}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{4}(0+1+0+1) = \frac{1}{2} \\
s_n^2 &= \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - n\bar{x}_n^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - n\bar{x}_n^2\right] \qquad \text{perché } x_i = 0 \text{ o } 1 \Rightarrow x_i^2 = x_i \\
&= \frac{1}{n-1}\left(n\bar{x}_n - n\bar{x}_n^2\right) = \frac{n}{n-1}\bar{x}_n\left(1-\bar{x}_n\right) \\
&= \frac{4}{4-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

e di conseguenza la stima è

$$t_4 = \bar{x}_n - s_n^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

Soluzione 9.

(a) Per la linearità della media, abbiamo

$$\mathbb{E}[T_1] = \mathbb{E}\left[\frac{2X_1 - X_2}{3}\right] = \frac{2}{3}\mathbb{E}[X_1] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[X_2] = \frac{2}{3} \cdot 3\theta - \frac{1}{3} \cdot 3\theta = \theta$$
$$\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}\left[\frac{X_4 + X_6}{6}\right] = \frac{1}{6}\mathbb{E}[X_4] + \frac{1}{6}\mathbb{E}[X_6] = \frac{1}{6} \cdot 3\theta + \frac{1}{6} \cdot 3\theta = \theta\,,$$

e dunque entrambi gli stimatori sono corretti (= non distorti). Per quanto riguarda invece il loro errore quadratico medio,

$$\begin{aligned}
\mathrm{mse}(T_1;\theta) &= \mathrm{Var}(T_1) + b(T_1;\theta)^2 = \mathrm{Var}(T_1) = \mathrm{Var}\left(\frac{2X_1 - X_2}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \mathrm{Var}(X_1) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{Var}(X_2) = \frac{4}{9} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{5}{9} = 0.\bar{5} \\
\mathrm{mse}(T_2;\theta) &= \mathrm{Var}(T_2) + b(T_2;\theta)^2 = \mathrm{Var}(T_2) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_4 + X_6}{6}\right) \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{Var}(X_4) + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{Var}(X_6) = \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{1}{36} \cdot 1 = \frac{1}{18} = 0.0\bar{5}\,.
\end{aligned}$$

(b) Il più efficiente dei due è T_2, in quanto, benché siano entrambi non distorti, tuttavia T_2 ha miglior errore quadratico medio: $\mathrm{mse}(T_2;\theta) < \mathrm{mse}(T_1;\theta)$.