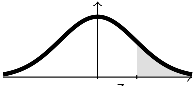
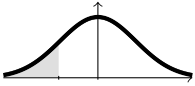
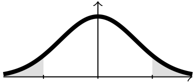
Statistica - 11ª lezione

20 aprile 2021

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

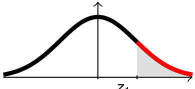
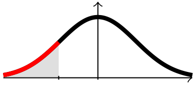
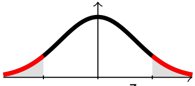
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

H_1 fissa la forma di RC_α ...

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\quad}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

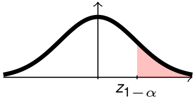
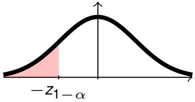
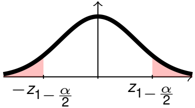
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

… mentre α fissa la sua ampiezza

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\quad}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \ldots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \ldots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \ldots) < \theta < u(X_1, X_2, \ldots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \ldots) < \theta < u(1.2, 0.6, \ldots)$	*IC*

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta < u(1.2, 0.6, \dots)$	*IC*
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\big(T_0 \in RC\big)$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \ldots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \ldots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \ldots) < \theta < u(X_1, X_2, \ldots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \ldots) < \theta < u(1.2, 0.6, \ldots)$	*IC*
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\big(T_0 \in RC\big)$	$\rightarrow$	?	

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } \; H_0 \; \text{ se trovo } \; t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

p-value di un test

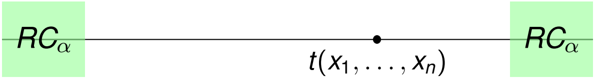
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 0.25\%$

p-value di un test

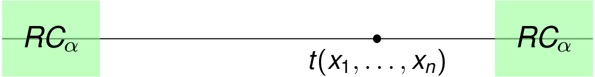
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1,\ldots,X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1,\ldots,x_n$ sono le realizzazioni di $X_1,\ldots,X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1,\ldots,x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 0.5\%$

p-value di un test

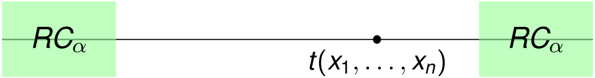
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\%$

p-value di un test

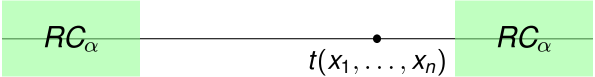
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 2.5\%$

p-value di un test

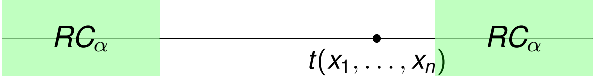
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 5\%$

p-value di un test

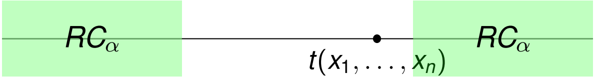
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 10\%$

p-value di un test

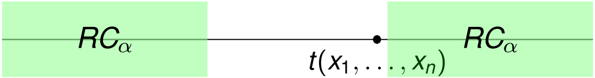
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 20\%$

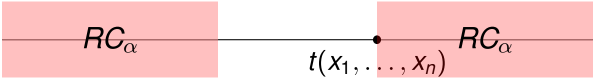
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 26\%$

p-value di un test

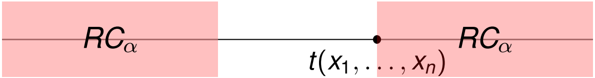
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha \text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 26\% = p$-value

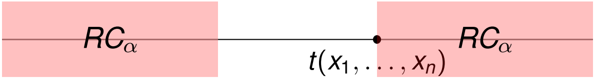
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 26\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe il 26%

p-value di un test

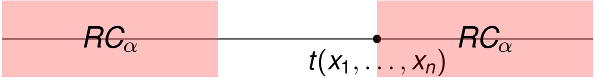
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$\color{red}{p\text{-value}} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 26\% = p\text{-value}$

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe il 26%

$\Rightarrow$ nessuna evidenza contro H_0

p-value di un test

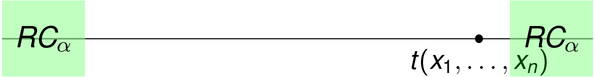
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 0.25\%$

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

$\alpha = 0.5\%$

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α:

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

$\alpha = 1\%$

p-value di un test

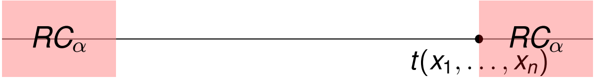
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1,\ldots,X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1,\ldots,x_n$ sono le realizzazioni di $X_1,\ldots,X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1,\ldots,x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1,\ldots,X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1,\ldots,x_n$ sono le realizzazioni di $X_1,\ldots,X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1,\ldots,x_n) \in RC_\alpha\}$$

$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1%

p-value di un test

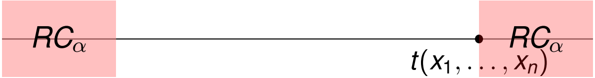
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato

p-value di un test

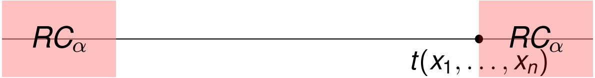
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato
- o H_0 non è vera

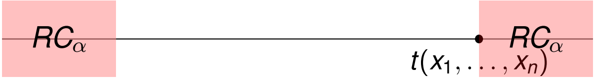
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato
- o H_0 non è vera

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

$\alpha = 1\% = p$-value

Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1%

$\Rightarrow$ forte evidenza contro H_0

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{"}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

p-value alto $(> 5\%)$ $\Rightarrow$ non rifiuto H_0 (conclusione debole)

p-value di un test

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } t(X_1, \ldots, X_n) \in RC_\alpha\text{”}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \ldots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

p-value alto $(> 5\%)$ $\Rightarrow$ non rifiuto H_0 (conclusione debole)

p-value basso $(\leq 5\%)$ $\Rightarrow$ accetto H_1 (conclusione forte)

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$\ast$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta < u(1.2, 0.6, \dots)$	*IC*
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(T_0 \in RC)$	$\rightarrow$	?	

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$\ast$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta < u(1.2, 0.6, \dots)$	*IC*
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}\big(T_0 \in RC\big)$	$\rightarrow$	minimo α t.c. $t(1.2, 0.6, \dots) \in RC_\alpha$	*p*-value

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \; = \;$ realizzazione di $\; Z_0 \;$ dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\|Z_0\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \;=\;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha})$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \;=\;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow\ \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$$z_0 \ = \ \text{realizzazione di } \ Z_0 \ \text{ dopo l'esperimento}$$

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \; \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ $\Leftrightarrow \; \alpha = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1-\alpha$ $\Leftrightarrow \alpha = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$$z_0 \; = \; \text{realizzazione di } Z_0 \text{ dopo l'esperimento}$$

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \; = \;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \;=\;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow\ \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha})$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \;=\;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \ \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha)$
$\mu \neq \mu_0$	$\|Z_0\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \ = \$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha)$ $= \alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \; \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha)$ $= \alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \; = \;$ realizzazione di $\; Z_0 \;$ dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$z_0 \;=\;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$z_0 \; = \;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \ \Phi(\lvert z_0 \rvert) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

$z_0 \ = \$ realizzazione di $\ Z_0\ $ dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \Phi(\lvert z_0 \rvert) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$z_0 =$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	p-value $= 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	p-value $= \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \ \Phi(\lvert z_0 \rvert) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\Leftrightarrow \ \alpha = 2\,[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$

$z_0 \ = \$ realizzazione di $\ Z_0\ $ dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert z_0 \rvert \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \ \Phi(\lvert z_0 \rvert) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\Leftrightarrow \ \alpha = 2\,[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$

$z_0 \ = \$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p-value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$p\text{-value} = 2\,[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$

$z_0 \;=\;$ realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \iff \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \iff \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

$\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ nota

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

... ...

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > z_{1-\alpha}$$

$n = 5$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \\ \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > z_{1-\alpha} \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8}\sqrt{5} > z_{0.95} \longleftarrow \text{significatività} = 5\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \longleftarrow \text{significatività} = 5\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7$$
$$x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\ldots \cdot 10^8)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8}\sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure: $x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7$ $\quad x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\ldots \cdot 10^8)$ $\Rightarrow \quad z_0 = 0.671$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure: $\begin{array}{l} x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\ldots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow \quad z_0 = 0.671$

$z_0 \not> 1.645 \quad \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0 al 5%

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure: $\begin{array}{c} x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\ldots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow \quad z_0 = 0.671$

$z_0 \not> 1.645 \quad \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0 al 5%

p-value $= 1 - \Phi(z_0)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure: $\begin{array}{ccc} x_1 = 3.4 & x_2 = 3.3 & x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 & x_5 = 2.9 & (\ldots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow \quad z_0 = 0.671$

$z_0 \not> 1.645 \quad \Rightarrow \quad$ non posso rifiutare H_0 al 5%

p-value $= 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(0.671) = 25.1\%$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

H_0 : i neutrini rispettano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} =: \mu_0$

H_1 : i neutrini violano la relatività
$\Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8}\sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure: $x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7 \quad x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\ldots \cdot 10^8) \quad \Rightarrow \quad z_0 = 0.671$

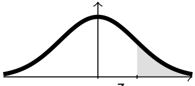
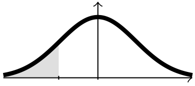
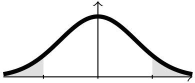
$z_0 \not> 1.645 \quad \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0 al 5%

p-value $= 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(0.671) = 25.1\% \quad \Rightarrow$ nessuna evidenza contro H_0

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

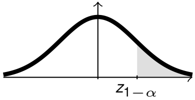
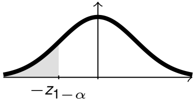
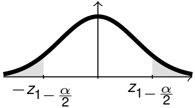
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

H_0 determina univocamente $\mathbb{P}$
(ipotesi semplice)

TESI: Posto Z ... nificatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

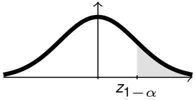
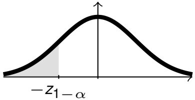
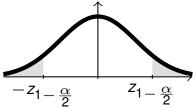
$= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto Z … nificatività α :

Ma se non la determinasse?
(ipotesi composta)

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta)	$:=$	massima probabilità di errore di I tipo

Ipotesi nulla composta

$$\begin{array}{ccl} \text{SIGNIFICATIVITÀ} & := & \text{massima probabilità di errore di I tipo} \\ \text{(con } H_0 \text{ composta)} & = & \max\limits_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big) \end{array}$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= ???$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ipotesi nulla composta

$$\begin{aligned} \text{SIGNIFICATIVITÀ (con } H_0 \text{ composta)} &:= \text{massima probabilità di errore di I tipo} \\ &= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) \end{aligned}$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

quella di Z_0

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

non sono la stessa cosa

$\Rightarrow$ $\overline{X}$ va ancora standardizzata

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0}\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \Bigg)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \left[1 - \Phi \Bigg(z_{1-\alpha} - \underbrace{\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}}_{\text{crescente in } \mu} \Bigg) \right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0}\left[1 - \Phi\left(\underbrace{z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}}_{\text{decrescente in } \mu}\right)\right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0}\left[1 - \underbrace{\Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)}_{\text{decrescente in } \mu}\right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \underbrace{\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right]}_{\text{crescente in } \mu}$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \underbrace{\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right]}_{\text{crescente in } \mu}$$

il max è preso in $\mu = \mu_0$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \le \mu_0}}\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right]$$

Ipotesi nulla composta

$$\begin{array}{ll} \text{SIGNIFICATIVITÀ} & := \text{ massima probabilità di errore di I tipo} \\ \text{(con } H_0 \text{ composta)} & = \max\limits_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big) \end{array}$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \leq \mu_0}}\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \leq \mu_0}} \left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = \alpha$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$

$$= \max_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\Bigg)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \le \mu_0}}\left[1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = \alpha$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ (con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

$$= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

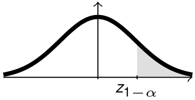
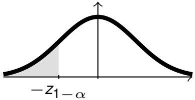
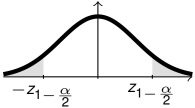
$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \alpha \qquad \Rightarrow \qquad$ tutto come prima

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $Z_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

$\Rightarrow$ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

$\Rightarrow$ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA $=$ probabilità di <u>non</u> commettere errore di II tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

$\Rightarrow$ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA $=$ probabilità di <u>non</u> commettere errore di II tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO $=$ errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ $=$ probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO $=$ errore meno grave

$\Rightarrow$ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA $=$ probabilità di <u>non</u> commettere errore di II tipo

$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$ può essere molto piccola

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO $=$ <u>non</u> accusare l'amico quando in realtà bara

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \le 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO $=$ non accusare l'amico quando in realtà bara

POTENZA $= \mathbb{P}_{q<\frac{1}{2}}\big(Y \le 1\big)$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0: \quad \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1: \quad \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO $=$ accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO $=$ <u>non</u> accusare l'amico quando in realtà bara

POTENZA $= \mathbb{P}_{q<\frac{1}{2}}\big(Y \leq 1\big)$ dipende da q

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0 : \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1 : \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8}\sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO $=$ non rigettare la relatività quando in realtà è falsa

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8}\sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO $=$ <u>non</u> rigettare la relatività quando in realtà è falsa

POTENZA $= \mathbb{P}_{\mu>3}(Z_0 > 1.645)$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

… … … … …

$$H_0: \quad \text{i neutrini rispettano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} =: \mu_0$$

$$H_1: \quad \text{i neutrini violano la relatività} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 ($\Leftrightarrow$ rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\overline{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \qquad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO $=$ rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO $=$ <u>non</u> rigettare la relatività quando in realtà è falsa

POTENZA $= \mathbb{P}_{\mu>3}(Z_0 > 1.645)$ dipende da μ

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $=$? ? ?

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } \; H_0 \; \text{ se } \; Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{ ”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“ rifiuterò } \; H_0 \text{ ”} \big)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

quella di
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di Z_0

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

non sono la stessa cosa

$\Rightarrow$ $\overline{X}$ va ancora standardizzata

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\begin{aligned}
\text{POTENZA} &= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big) \\
&= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right) \\
&= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)
\end{aligned}$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu>\mu_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right) \quad \text{dipende da } \mu$$

Potenza di uno Z-test

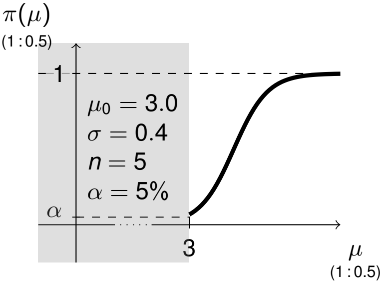
ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right)$$ aumenta se:

- aumenta μ (non controllabile)



Potenza di uno Z-test

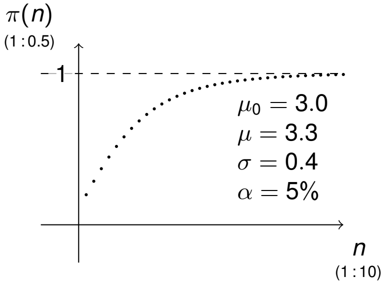
ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\overbrace{\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}}^{\geq 0} \sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right)$$ aumenta se:

- aumenta μ (non controllabile)
- aumenta n (più misure)



Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

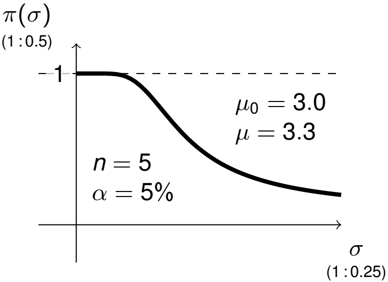
$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\overbrace{\mu - \mu_0}^{\geq 0}}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right)$$

aumenta se:

- aumenta μ (non controllabile)
- aumenta n (più misure)
- diminuisce σ (più precisione)



Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left\|Z_0\right\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \underset{\substack{\text{riprod.} \\ \text{di } N}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, sono test di significatività α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \sim N(0,1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

Z-test per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \underset{\text{TLC}}{\approx} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0,1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta)**:**

$$\overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0,1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

... ...

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1,q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\overline{X} \underset{\text{TLC}}{\approx} N\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0,1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

... ...

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\overline{X} \approx N\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0,1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

… … … …

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \le q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \ge q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\overline{X} \approx N\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0,1) \text{ se } q = q_0$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \dfrac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

E la potenza ?

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $=$? ? ?

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

quella di
$X_i \sim B(1, q)$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di Z_0

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right)$$

non sono la stessa cosa

$\Rightarrow$ $\overline{X}$ va ancora standardizzata

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \qquad\qquad \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0}\left(\frac{\overline{X} - q_0}{\cancel{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} \qquad \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\cancel{\frac{\overline{X} - \cancel{q_0}}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - \cancel{q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\overline{X} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\overline{X} - q > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1 - q)}} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\overline{X} \cancel{- q_0} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n}}_{\approx N(0,1)} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q(1-q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\left(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}} \cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q(1-q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}\big(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}\big)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} \cancel{- q_0}}{\cancel{\sqrt{q_0(1-q_0)}}}\cancel{\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q>q_0}\left(\frac{\overline{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{q_0(1-q_0)}{q(1-q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1-q)}}\sqrt{n} \right) \qquad \text{dipende da } n, q$$

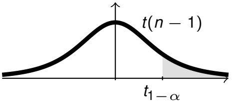
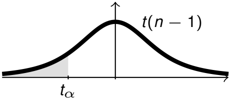
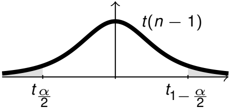
T-test per il valore atteso di un campione normale

E se non conosciamo σ^2 ?

T-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad \mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

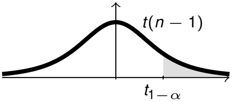
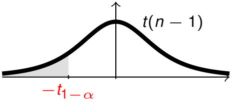
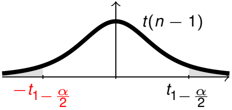
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < t_{\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T_0 < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ oppure $T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

$= \alpha$

T-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

$= \alpha$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ ”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$

$\quad \Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)

	Valore della funzione di ripartizione							
n	**0.75**	**0.8**	**0.85**	**0.9**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.707

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ ”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 0.85 < 1 - \frac{\alpha}{2} < 0.9$$

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)

	Valore della funzione di ripartizione							
n	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.707

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 0.85 < 1 - \tfrac{\alpha}{2} < 0.9$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 < \quad \alpha \quad < 0.3$$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow \quad 0.85 < 1 - \frac{\alpha}{2} < 0.9$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 < p\text{-value} < 0.3$$