Proposizione 1. *Siano* $E, F \in \mathcal{P}(\Omega)$ *due eventi.*

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(ii) *Se* $E \subseteq F$, *allora* $\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)$ *(dove l'insieme* $F \setminus E := F \cap E^c$ *è la* differenza *di* F *meno* E*).*

(iii) *Se* $E \subseteq F$, *allora* $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.

(iv) $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$.

(v) $\mathbb{P}(E) \leq 1$.

(vi) $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$.

Proposizione 2. *Siano* X *e* Y *due variabili aleatorie assolutamente continue* e indipendenti, *con densità* f_X *e* f_Y, *rispettivamente. Sia* $Z = X+Y$ *la loro somma. Allora* Z *è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y. \tag{1.9}$$

Proposizione 3. *Siano X e Y due variabili aleatorie assolutamente continue* e indipendenti. *Supponiamo che sia X sia Y abbiano densità normale. Allora la loro somma $Z = X + Y$ ha anch'essa densità normale.*

Proposizione 4. *Se* $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *è un vettore aleatorio discreto con densità* $p_{\vec{X}}$ *[rispettivamente, assolutamente continuo con densità* f_X*] e* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è una funzione qualunque, allora*

$$\mathbb{E}\left[g(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) p_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

[risp.,

$$\mathbb{E}\left[g(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_n \, g(x_1, x_2, \ldots, x_n) f_{\vec{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

]

Proposizione 5 (Proprietà della media). *(i) Se $c \in \mathbb{R}$ e $X \equiv c$ è la variabile aleatoria identicamente uguale a c (cioè $X(\omega) = c$ per ogni $\omega \in \Omega$), allora $\mathbb{E}[X] = c$.*

(ii) Se X e Y sono due variabili aleatorie e a, b sono numeri reali, allora $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$. In particolare, $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$.

(iii) Se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti, *allora $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.*

Dalla Proposizione 4 possiamo ricavare l'espressione esplicita di $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ nei due casi in cui (X,Y) è un vettore aleatorio discreto

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \sum_{x,y}(x-\mathbb{E}\,[X])(y-\mathbb{E}\,[Y])p_{(X,Y)}(x,y)$$

oppure assolutamente continuo

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathbb{E}\,[X])(y-\mathbb{E}\,[Y])f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

La proposizione seguente riassume le principali proprietà della covarianza.

Proposizione 6 (Proprietà della covarianza). *(i)* $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathbb{E}\,[XY] - \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y]$ *(formula alternativa della covarianza).*

(ii) $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{Cov}\,(Y,X)$ *per ogni coppia di variabili aleatorie* X, Y *(simmetria).*

(iii) Se X *è una variabile aleatoria costante, allora* $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = 0$.

(iv) $\mathrm{Cov}\,(aX+bY,Z) = a\mathrm{Cov}\,(X,Z) + b\mathrm{Cov}\,(Y,Z)$ *per ogni tripla di variabili aleatorie* X,Y,Z *e coppia di numeri reali* a,b*; la stessa proprietà vale anche per il secondo argomento (bilinearità).*

(v) Se X *e* Y *sono indipendenti, allora* $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = 0$.

Proposizione 7 (Proprietà della varianza). *(i)* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ *(formula alternativa della varianza).*

(ii) *Se* X *è una variabile aleatoria costante, allora* $\mathrm{Var}(X) = 0$.

(iii) *Se* a, b *sono numeri reali, allora* $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.

(iv) *Se* $X_1, X_2, \ldots X_n$ *sono* n *variabili aleatorie, la varianza della loro somma è*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j). \tag{1.12}$$

In particolare, se le variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots X_n$ sono indipendenti

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i). \tag{1.13}$$

Proposizione 8 (Disuguaglianza di Chebyshev). *Sia* X *una variabile aleatoria qualsiasi. Allora, per ogni* $k > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]\,| > k\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}\right) \leq \frac{1}{k^2}\,.$$

Proposizione 9 (Approssimazione normale della binomiale)**.** *Supponiamo* $X \sim B(n,p)$ *con* n *molto grande e* p *non trascurabile. Allora* $X \approx N(np, np(1-p))$.

Proposizione 10 (Approssimazione di Poisson della binomiale). *Supponiamo* $X \sim B(n, p)$ *con* n *molto grande e* p *infinitesimo, in modo però che il prodotto* $\lambda := np$ *sia confrontabile con* 1. *Allora* X *ha approssimativamente densità*

$$p_X(k) \simeq \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \textit{per ogni } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Proposizione 11. *Sia* $X_1, \ldots, X_n$ *un campione qualsiasi, e sia* $\sigma^2 := \mathrm{Var}\left(X_i\right)$ *la sua varianza. Allora* $\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \sigma^2$*. In altre parole, la varianza campionaria* S_n^2 *è uno stimatore non distorto della varianza vera* σ^2 *del campione.*