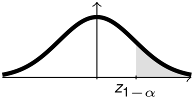
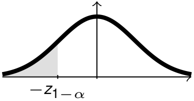
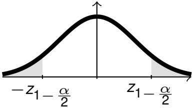
Statistica - 12ª lezione

4 maggio 2021

T-test per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

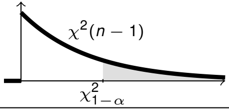
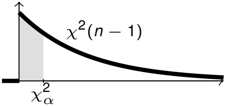
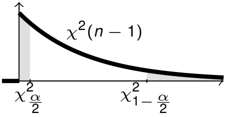
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \ldots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

$= \alpha$

X^2-test per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma_0 > 0$ fissato

TESI: Posto $X_0^2 := \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$, questi sono test di significatività α :

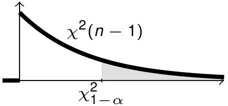
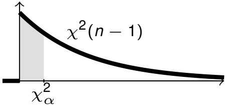
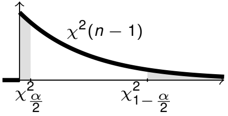
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\sigma = \sigma_0$, $X_0^2 \sim \dots$
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$X_0^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$X_0^2 < \chi^2_{\alpha}(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$X_0^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ oppure $X_0^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

$= \alpha$

X^2-test per la varianza di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma_0 > 0$ fissato

TESI: Posto $X_0^2 := \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	accetto H_0 se	se $\sigma = \sigma_0$, $X_0^2 \sim \dots$
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$X_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$X_0^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq$ $\leq X_0^2 \leq$ $\leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

$= \alpha$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}\right\} \quad \text{indipendenti}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \overline{X}_m \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \\ \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$\textbf{IPOTESI:} \quad \left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} \overline{X}_m \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X^2}{m}\right) \\[2ex] \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_m - \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{llll} X_1, \dots, X_m & \text{i.i.d.} & \text{con} & X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \dots, Y_n & \text{i.i.d.} & \text{con} & Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} \overline{X}_m \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X^2}{m}\right) \\[2ex] \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array}\right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_m - \overline{Y}_n \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \qquad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \qquad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

e la regola

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 > z_{1-\alpha}\text{”}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \qquad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

e la regola

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 > z_{1-\alpha}\text{”}$$

Questo è un test di significatività α !

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}$(“rifiuterò H_0”)

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

$$= \alpha$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}\right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\underbrace{\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}}_{N(0,1)} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X-\mu_Y>\delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X-\mu_Y>\delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}\right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

$$= \Phi\left(-z_{1-\alpha} + \frac{(\mu_X - \mu_Y) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}\text{”}$$

POTENZA $= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”})$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0}\left(\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

$$= \Phi\left(-z_{1-\alpha} + \frac{(\mu_X - \mu_Y) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right) \qquad \text{crescente in } m, n\,!$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \leq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y > \delta_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(z_0)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \geq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y < \delta_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$\Phi(z_0)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2\left[1 - \Phi\left(\lvert z_0 \rvert\right)\right]$

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	p-value
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(z_0)$
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$\Phi(z_0)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2\left[1 - \Phi\left(\lvert z_0 \rvert\right)\right]$

$$Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

senza conoscere il valore di σ_X e σ_Y !

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

senza conoscere il valore di σ_X e σ_Y!

Teorema (non dimostrato)

Se i due campioni normali precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$\frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \sim t(m+n-2)$$

dove S_p^2 è la *varianza pooled*

$$S_p^2 := \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \leq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y > \delta_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \geq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y < \delta_0$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}(m+n-2)}$

$$T_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}(m+n-2)}$

$$T_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X =$ oppur $\mu_X \geq$		$+ n - 2)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}(m+n-2)}$

$T_0 \sim ???$ quando $\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$

$\Rightarrow$ la potenza non si sa calcolare

$$T_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y \quad \Rightarrow \quad$ sarebbe meglio)

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y \quad \Rightarrow \quad$ sarebbe meglio)

o almeno per

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X \neq \sigma_Y$)

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y \quad \Rightarrow \quad$ sarebbe meglio)

o almeno per

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X \neq \sigma_Y$)

Purtroppo si sa fare solo questo!

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Teorema (non dimostrato)

Se i due campioni normali precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

ha *densità di Fisher* con $m - 1$ e $n - 1$ gradi di libertà ($f(m-1, n-1)$)

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Teorema (non dimostrato)

Se i due campioni normali precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

ha *densità di Fisher* con $m-1$ e $n-1$ gradi di libertà ($f(m-1, n-1)$)

$$\Downarrow$$

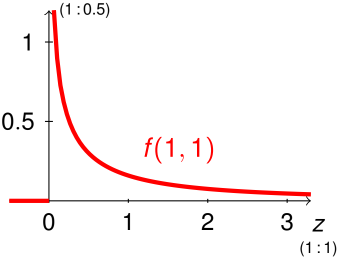
Un test di significatività α per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1 \right) \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1 \right)$$

è dato dalla regola

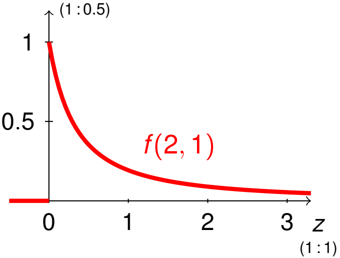
"Rifiuto H_0 se $F_0 > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$"

Proprietà della densità di Fisher:

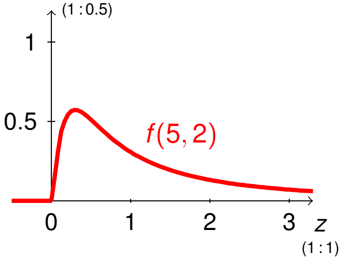


Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:

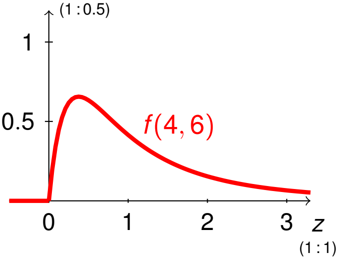


Proprietà della densità di Fisher:

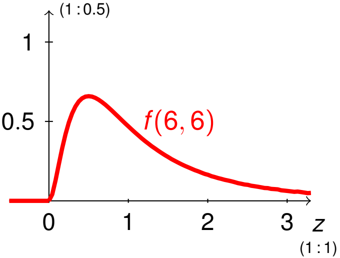


Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:

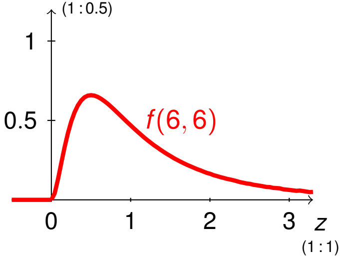


Proprietà della densità di Fisher:



Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

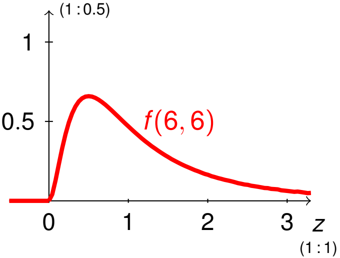
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0, +\infty)$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati:

$$f_{0.975}(3,7) = 5.890$$

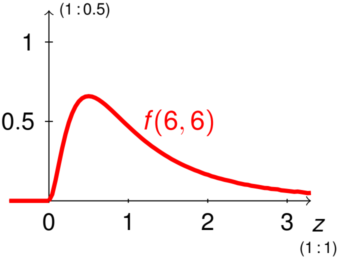
Tavola dei quantili 0.975 della distribuzione F(m,n)

m	n: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	647.8	38.506	17.443	12.218	10.007	8.813	8.073	7.571	7.209	6.937	6.724	6.554
2	799.5	39.000	16.044	10.649	8.434	7.260	6.542	6.059	5.715	5.456	5.256	5.096
3	864.2	39.166	15.439	9.979	7.764	6.599	5.890	5.416	5.078	4.826	4.630	4.474
4	899.6	39.248	15.101	9.604	7.388	6.227	5.523	5.053	4.718	4.468	4.275	4.121
5	921.8	39.298	14.885	9.364	7.146	5.988	5.285	4.817	4.484	4.236	4.044	3.891
6	937.1	39.331	14.735	9.197	6.978	5.820	5.119	4.652	4.320	4.072	3.881	3.728
7	948.2	39.356	14.624	9.074	6.853	5.695	4.995	4.529	4.197	3.950	3.759	3.607

m	n: 13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30
1	6.414	6.298	6.200	6.115	6.042	5.978	5.922	5.871	5.786	5.717	5.659	5.610	5.5
2	4.965	4.857	4.765	4.687	4.619	4.560	4.508	4.461	4.383	4.319	4.265	4.221	4.1
3	4.347	4.242	4.153	4.077	4.011	3.954	3.903	3.859	3.783	3.721	3.670	3.626	3.5
4	3.996	3.892	3.804	3.729	3.665	3.608	3.559	3.515	3.440	3.379	3.329	3.286	3.2
5	3.767	3.663	3.576	3.502	3.438	3.382	3.333	3.289	3.215	3.155	3.105	3.063	3.0
6	3.604	3.501	3.415	3.341	3.277	3.221	3.172	3.128	3.055	2.995	2.945	2.903	2.8
7	3.483	3.380	3.293	3.219	3.156	3.100	3.051	3.007	2.934	2.874	2.824	2.782	2.7

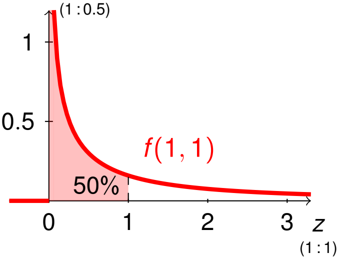
Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0,+\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

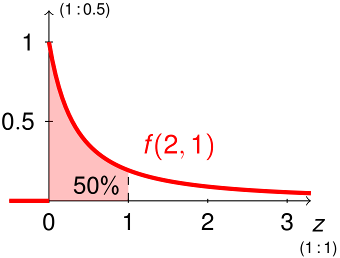
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

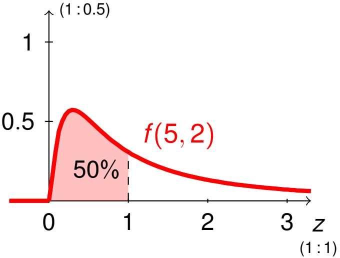
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

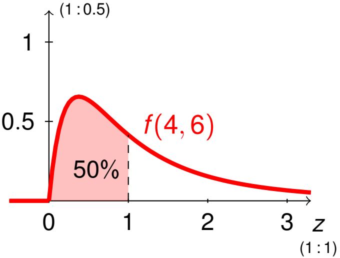
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

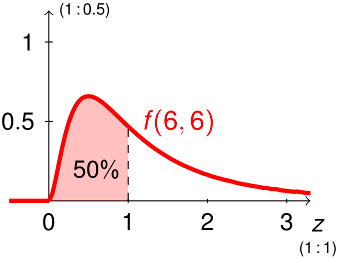
Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h, k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h, k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h, k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

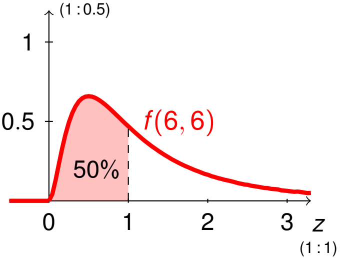
Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$

Proprietà della densità di Fisher:



- $\operatorname{supp} f(h,k) = [0,+\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $\begin{cases} f_\alpha(h,k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h,k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$
- i quantili con $\alpha \leq 10\%$ si ricavano da

$$f_\alpha(h,k) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(k,h)}$$

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\quad \frac{S_X^2}{S_Y^2} \quad \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)}\right)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Big(\quad \frac{S_X^2}{S_Y^2} \quad \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)}\Big)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Big(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1)\Big)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Big(\quad \frac{S_X^2}{S_Y^2} \quad \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}\Big)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Big(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\Big)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Big(\quad \frac{S_Y^2}{S_X^2} \quad < f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\Big)$$

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1,m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right)$$

$$= 1 - (1-\alpha)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1)\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1,m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1, m-1)\right) \\
&= 1 - (1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}_{f(m-1,n-1)} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}\Bigg)
&= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1,m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\Bigg) \\
&= 1-(1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) **:**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}_{f(m-1,n-1)} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}\Bigg) \\
&= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\right) \\
&= 1-\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\Bigg(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1,m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1,m-1)\Bigg) \\
&= 1-(1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad f_{\alpha}(m-1,n-1) \equiv \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1,m-1)}
$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \geq \sigma_Y$	$\sigma_X < \sigma_Y$	$F_0 < f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$F_0 < f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ oppure $F_0 > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$		$F_0 < f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$F_0 < f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ oppure $F_0 > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

Vanno controllate entrambe!

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α:

H_0	H_1	accetto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 \leq f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \geq \sigma_Y$	$\sigma_X < \sigma_Y$	$F_0 \geq f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) \leq$ $\leq F_0 \leq$ $\leq f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il *p*-value dell'*F*-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

$\Rightarrow \quad 0.9 < 1 - \alpha$

la dei quantili 0.9 della distribuzio

m	1	2	3	4	…	15	16	17	18	19	20
1	39.86	8.526	5.538	4.5	…	3.073	3.048	3.026	3.007	2.990	2.975
2	49.50	9.000	5.462	4.3	…	2.695	2.668	2.645	2.624	2.606	2.589
3	53.59	9.162	5.391	4.1	…	2.490	2.462	2.437	2.416	2.397	2.380
4	55.83	9.243	5.343	4.1	…	2.361	2.333	2.308	2.286	2.266	2.249
5	57.24	9.293	5.309	4.0	…	2.273	2.244	2.218	2.196	2.176	2.158

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“ rifiuto } \; H_0 \; \text{ se } \; F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1) \text{ ”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$$

$$\Rightarrow \quad 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$$

. . . la dei quantili 0.95 della distribuzi

m	1	2	3	. . .	15	16	17	18	19	20
1	161.45	18.513	10.128	. . .	4.543	4.494	4.451	4.414	4.381	4.351
2	199.50	19.000	9.552	. . .	3.682	3.634	3.592	3.555	3.522	3.493
3	215.71	19.164	9.277	. . .	3.287	3.239	3.197	3.160	3.127	3.098
4	224.58	19.247	9.117	. . .	3.056	3.007	2.965	2.928	2.895	2.866
5	230.16	19.296	9.013	. . .	2.901	2.852	2.810	2.773	2.740	2.711

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

$\Rightarrow \quad 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$

$\Rightarrow \quad 0.05 < \alpha < 0.1$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$

$\Rightarrow \quad 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$

$\Rightarrow \quad 0.05 < p\text{-value} < 0.1$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{ ”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{ ”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{ ”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow \quad 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow \quad 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \alpha > 0.995$$

... uantili 0.995 della distribuzi

m	1	2	3	4	5	...	16	17	18	19	20
1	16212	198.5	55.55	31.332	22.785	...	10.576	10.384	10.218	10.073	9.944
2	19997	199.0	49.80	26.284	18.314	...	7.514	7.354	7.215	7.093	6.987
3	21614	199.2	47.47	24.260	16.530		6.303	6.156	6.028	5.916	5.818
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	24632	199.4	43.08	20.438	13.146	...	3.920	3.793	3.683	3.587	3.502
16	24684	199.4	43.01	20.371	13.086	...	3.875	3.747	3.637	3.541	3.457
17	24728	199.4	42.94	20.311	13.033	...	3.834	3.707	3.597	3.501	3.416
18	24766	199.4	42.88	20.258	12.985	...	3.797	3.670	3.560	3.464	3.380

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow \quad 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \alpha > 0.995$$

$$\Rightarrow \quad \alpha < 0.005$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow \quad 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \alpha > 0.995$$

$$\Rightarrow \quad p\text{-value} < 0.005$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

"accetto H_0 se $f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) < F_0 := \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$"

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \quad \ldots$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

$$\text{“accetto } H_0 \text{ se } \underbrace{f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}_{<1} < F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \quad \ldots$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

- se $f_0 < 1$,

  $f_0 \equiv f_{\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p-value dell'F-test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

"accetto H_0 se $f_{\frac{\alpha}{2}}(\underbrace{m-1, n-1}_{<1}) < F_0 := \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\underbrace{m-1, n-1}_{>1})$"

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \quad \ldots$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

- se $f_0 < 1$,

  $f_0 \equiv f_{\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$

- se $f_0 > 1$,

  $f_0 \equiv f_{1-\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad m \ \text{grande} \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad n \ \text{grande} \end{array}\right\} \ \text{indipendenti}$$

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOTESI:
$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad m \ \text{grande} \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad n \ \text{grande} \end{array}\right\} \ \text{indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \approx N(0,1)$$

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad m \ \text{grande} \\ Y_1, \ldots, Y_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad n \ \text{grande} \end{array}\right\} \ \text{indipendenti}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \approx N(0,1)$$

$\Rightarrow$ Z-test per $\mu_X - \mu_Y$ approssimati

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \ \text{i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \ldots, Y_n \ \text{i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array}\right\} \text{indip.}$$

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI: $\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \ \text{ i.i.d. con } \ m \ \text{ grande, } \ X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \ldots, Y_n \ \text{ i.i.d. con } \ n \ \text{ grande, } \ Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array}\right\}$ indip.

$$\Rightarrow \qquad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \hat{P} = \frac{m\overline{X}_m + n\overline{Y}_n}{m+n}$$

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI:
$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \ldots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array}\right\} \text{ indip.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \hat{P} = \frac{m\overline{X}_m + n\overline{Y}_n}{m+n}$$

$\Rightarrow$ Z-test per $q_X - q_Y$ approssimati

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI: $\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_m \ \text{ i.i.d. con } \ m \ \text{ grande, } \ X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \ldots, Y_n \ \text{ i.i.d. con } \ n \ \text{ grande, } \ Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array}\right\}$ indip.

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \hat{P} = \frac{m\overline{X}_m + n\overline{Y}_n}{m+n}$$

$\Rightarrow$ Z-test per $q_X - q_Y$ approssimati

<u>In alternativa</u>: Z-test per campioni numerosi,
ma convergenza a $N(0,1)$ più lenta

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim f, \quad f \text{ densità incognita}$$

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim f, \quad f \text{ densità incognita}$$

Vogliamo fare inferenza su tutta f (e non solo su un suo parmetro)

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim f, \quad f \text{ densità incognita}$$

Vogliamo fare inferenza su tutta f (e non solo su un suo parmetro)

Ci sono due modi:

- metodi grafici
- test non parametrici

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\Big(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\Big) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\Big(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\Big) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

dalle tavole

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\right) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\right) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

dall'esperimento

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$
$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni} \ \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile)**:** Se inoltre

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se} \ \ n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\Big(X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}\Big) & \text{se} \ \ n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

$$\Rightarrow \quad \hat{q}_\gamma^X \ \text{e} \ z_\gamma \ \text{si devono allineare!}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^{X}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} = \frac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big)$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^{X} = \frac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big)$$

complicato!

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^{X} = \frac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^{X}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^{X} = \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^{X} = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^{X} = x_{(k)}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_\gamma^X \; = \; \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X \; = \; \tfrac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}_\gamma^X \; = \; \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X \; = \; x_{(k)} \qquad \text{più semplice\ldots}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \ = \ \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} \ = \ \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \ = \ \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}} \ = \ x_{(k)} \qquad \text{più semplice\ldots}$$

NORMAL QQ-PLOT $=$ grafico dei punti

$$\left(\hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}}\,,\ z_{\frac{k-0.5}{n}}\right) \qquad\qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} = \frac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma = \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}} = x_{(k)} \qquad \text{più semplice\dots}$$

NORMAL QQ-PLOT = grafico dei punti

$$\Big(\hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}}\,,\ z_{\frac{k-0.5}{n}}\Big) = \Big(x_{(k)}\,,\ z_{\frac{k-0.5}{n}}\Big) \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \;=\; \hat{q}^X_{\frac{k}{n}} \;=\; \tfrac{1}{2}\big(x_{(k)} + x_{(k+1)}\big) \qquad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\hat{q}^X_\gamma \;=\; \hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}} \;=\; x_{(k)} \qquad \text{più semplice\ldots}$$

NORMAL QQ-PLOT $=$ grafico dei punti

$$\left(\hat{q}^X_{\frac{k-0.5}{n}}\,,\ z_{\frac{k-0.5}{n}}\right) \;=\; \left(x_{(k)}\,,\ z_{\frac{k-0.5}{n}}\right) \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n$$

punti quasi allineati $\Rightarrow$ è verosimile che $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Test di Shapiro-Wilks

Si può fare (con R) un test per le ipotesi

$$H_0 : \text{le } X_i \text{ hanno densità normale} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

Test di Shapiro-Wilks

Si può fare (con R) un test per le ipotesi

$$H_0 : \text{le } X_i \text{ hanno densità normale} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

$$p\text{-value alto} \quad \Rightarrow \quad \text{non possiamo escludere } X_i \text{ normali}$$

Test di Shapiro-Wilks

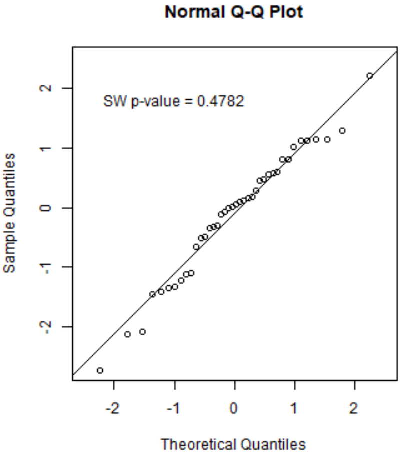
Si può fare (con R) un test per le ipotesi

$$H_0 : \text{le } X_i \text{ hanno densità normale} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : H_0 \text{ è falsa}$$

p-value alto $\Rightarrow$ non possiamo escludere X_i normali

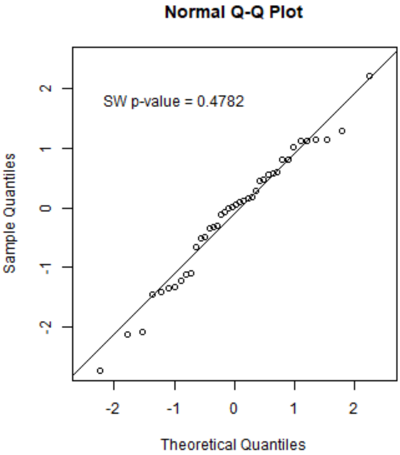
p-value basso $\Rightarrow$ normalità delle X_i poco verosimile

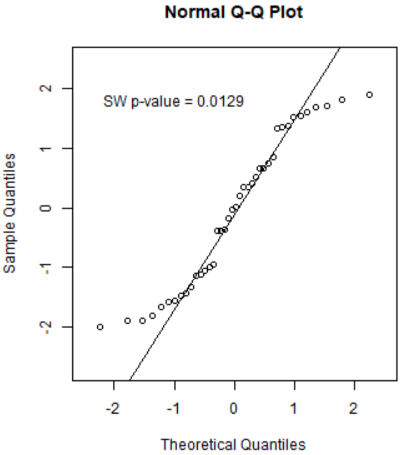
Test di Shapiro-Wilks



Non posso rifiutare la gaussianità

Test di Shapiro-Wilks





Non posso rifiutare la gaussianità

Devo rifiutare la gaussianità