Statistica - 9ª lezione

8 aprile 2021

Stima intervallare

PROBLEMA: anche se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore di θ, può capitare che

$$\mathbb{P}\left(\hat{\Theta} = \theta\right) = 0$$

Stima intervallare

PROBLEMA: anche se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore di θ, può capitare che

$$\mathbb{P}\left(\hat{\Theta} = \theta\right) = 0$$

SOLUZIONE: costruire un intervallo in cui siamo (relativamente) sicuri di trovare il parametro θ

Stima intervallare

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \ldots, X_n)$ e $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < \theta < U) = \gamma \qquad\qquad (\text{con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato})$$

Stima intervallare

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \ldots, X_n)$ e $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < \theta < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si dice che

$$\big(\ell(x_1, \ldots, x_n)\,,\; u(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

Stima intervallare

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \dots, X_n)$ e $U = u(X_1, \dots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}\,(L < \theta < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \dots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \dots, X_n$, si dice che

$$\big(\ell(x_1, \dots, x_n)\,,\, u(x_1, \dots, x_n)\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

TIPICAMENTE: $\gamma = 90\%$ o 95% o 99%

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}\big(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta < u(X_1, X_2, \dots)\big) = \gamma$	$\rightarrow$	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta < u(1.2, 0.6, \dots)$	*IC*

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $L = \ell(X_1, \dots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta > L) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Stima intervallare

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $L = \ell(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}\,(\theta > L) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si dice che

$$\big(\ell(x_1, \ldots, x_n)\,,\, +\infty\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta < U) = \gamma \qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Stima intervallare

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta < U) = \gamma \qquad\qquad \text{(con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato)}$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si dice che

$$\big(-\infty\,,\, u(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

Stima intervallare

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $U = u(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}\,(\theta < U) = \gamma \qquad\qquad (\text{con } \gamma \in (0,1) \text{ fissato})$$

Allora, se $x_1, \ldots, x_n$ sono le realizzazioni di $X_1, \ldots, X_n$, si dice che

$$(-\infty\,,\, u(x_1, \ldots, x_n))$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

SPESSO: $L = \hat{\Theta} - E, \quad U = \hat{\Theta} + E$ con

- $\hat{\Theta}$ = stimatore di θ
- E = errore (costante o aleatorio)

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, ,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right]$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow} \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right]$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow} \overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right] = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right] = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow} \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \dots = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \dots = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\text{riprod. di } N}{\Rightarrow}$ $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \dots = \gamma$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione numeroso

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande $\quad \underset{\text{TLC}}{\Rightarrow} \quad \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$ approssimato

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \simeq \dots \simeq \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right) \\ \left(-\infty\,,\ \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, +\infty\right) \\ \left(-\infty \,,\, \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - e, \quad U = \overline{X} + e$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $e = z_{\ldots} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore <u>costante</u>

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, +\infty\right) \\ \left(-\infty \, , \, \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - e, \quad U = \overline{X} + e$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $e = z_{\dots} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore <u>costante</u> $\longrightarrow$ 0 se $n \to \infty$ (più misure)

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right) \\ \left(-\infty\,,\ \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - e, \quad U = \overline{X} + e$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $e = z_{\ldots} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore <u>costante</u> $\longrightarrow$ 0 se $n \to \infty$ (più misure)
  o $\sigma \to 0$ (più precisione)

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\left(\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right)$$
$$\left(-\infty\,,\ \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ma se non so quanto vale σ ?

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - e, \quad U = \overline{X} + e$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $e = z_{\ldots} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore costante $\longrightarrow 0$ se $n \to \infty$ (più misure)
  o $\sigma \to 0$ (più precisione)

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).

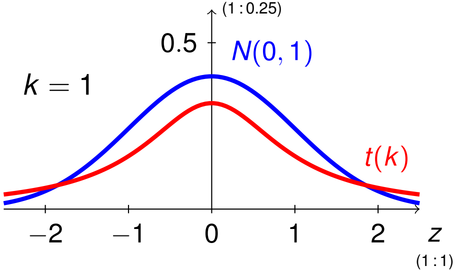
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



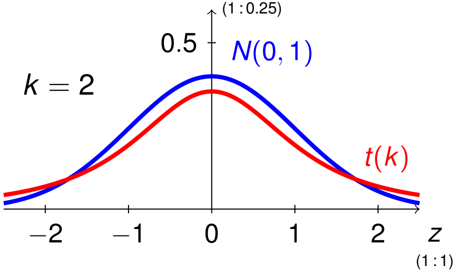
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



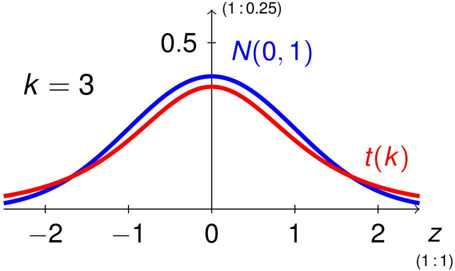
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



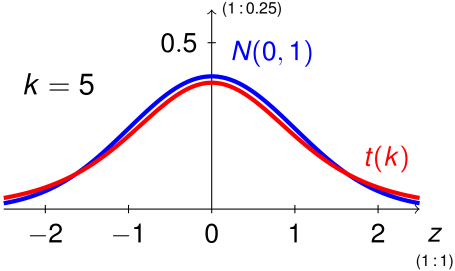
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



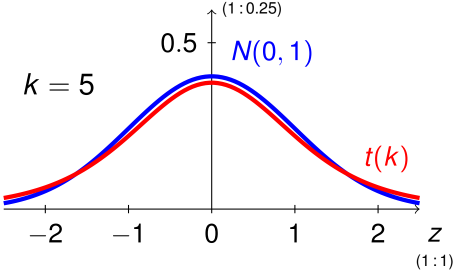
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)

	Valore della funzione di ripartizione							
n	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.707

- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati

$$t_{0.85}(3) = 1.2498$$

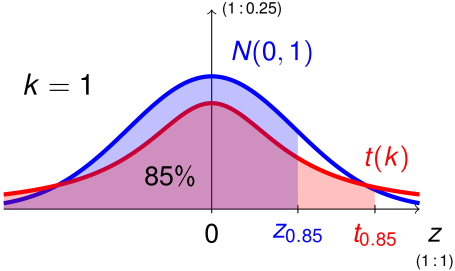
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
- $t_\gamma(k) > z_\gamma$
- $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \to \infty$

$\Big\}$ se $\gamma > 50\%$

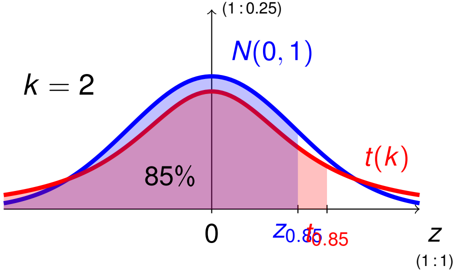
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
- $t_\gamma(k) > z_\gamma$
- $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \to \infty$

$\Big\}$ se $\gamma > 50\%$

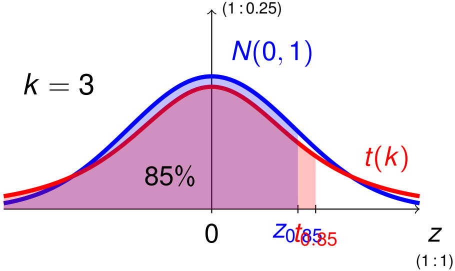
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
- $t_\gamma(k) > z_\gamma$
- $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \to \infty$

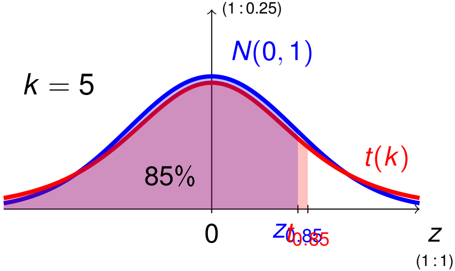
$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ se $\gamma > 50\%$

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n-1$ gradi di libertà ($t(n-1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
- $t_\gamma(k) > z_\gamma$
- $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \to \infty$

$\Big\}$ se $\gamma > 50\%$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \ldots = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-\, t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \dots = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\;,\; \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \dots = \gamma$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \\
\left(\overline{x} - t_{\gamma}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ +\infty\right) \\
\left(-\infty\ ,\ \overline{x} + t_{\gamma}(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right)
\end{array}\right\}\ \text{sono}\ \ IC_{\mu}(\gamma)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \\ \left(\overline{x} - t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right) \\ \left(-\infty\,,\ \overline{x} + t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right\} \text{ sono } IC_{\mu}(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E, \quad U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $E = t_{\dots}(n-1)\,\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ errore <u>aleatorio</u>

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right) \\
\left(\overline{x} - t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\,,\ +\infty\right) \\
\left(-\infty\,,\ \overline{x} + t_{\gamma}(n-1)\,\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)
\end{array}\right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \overline{X} - E, \quad U = \overline{X} + E$ con

- $\overline{X}$ stimatore di μ
- $E = t_{\dots}(n-1)\,\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ errore aleatorio non riducibile a priori

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \; \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\, ,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ \\ \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S}$$

con

$$\begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ {\color{red} S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2} \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1}$$

con

$$\begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(- z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = \ldots = \gamma$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \ldots$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = \ldots = \gamma$$

$$\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sigma}}{\cancel{S}}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - \overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\overline{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right) \\ \left(\overline{x} - z_{\gamma} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \, , \, +\infty \right) \\ \left(-\infty \, , \, \overline{x} + z_{\gamma} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right) \end{array} \right\} \text{ sono } IC_{\mu}(\gamma)$$