Corso di Statistica per Ingegneria Fisica
Anno accademico 2020/2021

Esercitazione 2: Variabili aleatorie assolutamente continue

Esercizio 1. La garanzia di un certo televisore ha durata di un anno. La probabilità che il televisore si rompa entro il primo anno è 5%, mentre la probabilità che si rompa entro 5 anni è 45%. Si determini la probabilità che:

a) il televisore funzioni per almeno 5 anni; *[0.55]*

b) si debba pagare almeno una riparazione nei prossimi 5 anni; *[0.4]*

c) non si usufruisca della garanzia. *[0.95]*

Esercizio 2. Il 13% dei sacchi di farina provenienti dal mulino del signor Sabbioso pesa meno di 30 Kg mentre il 15% pesa meno di 33.5 Kg. Se il signor Gamgee ordina un sacco di farina al mugnaio Sabbioso, con quale probabilità riceve un sacco di peso compreso fra 30 e 33.5 Kg? *[0.02]* Con quale probabilità il sacco pesa almeno 33.5 Kg? *[0.85]*

Esercizio 3. Riteniamo che il prezzo di un'azione *Autostrade* domani rimarrà inferiore ai 6 Euro con probabilità 0.49, mentre supererà i 7 Euro con probabilità 0.3. Se ne deduca la probabilità con cui un'azione *Autostrade* raggiungerà domani una quotazione massima compresa fra 6 e 7 Euro, e la probabilità con cui raggiungerà i 6 Euro. *[0.21 e 0.51]*.

Esercizio 4. Una variabile aleatoria assolutamente continua X si dice *uniforme* sull'intervallo $[\alpha, \beta]$, $X \sim U(\alpha, \beta)$, se ha funzione di densità data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Disegnare il grafico della funzione di densità.

(b) Calcolare la funzione di ripartizione e disegnarne il grafico.

(c) Calcolare la probabilità che la variabile aleatoria appartenga all'intervallo $[a, b]$, contenuto in $[\alpha, \beta]$.

(d) Calcolare media e varianza.

Soluzione:

(b) $F(x) = 0$ *se* $x < \alpha$, $F(x) = (x-\alpha)/(\beta-\alpha)$ *se* $\alpha \leq x \leq \beta$, $F(x) = 1$ *se* $x > \beta$.

(c) $P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$.

(d) $E(X) = \int \frac{x}{\beta-\alpha} dx = (\alpha+\beta)/2$, $E(X^2) = \int \frac{x^2}{\beta-\alpha} dx = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)/3 \rightarrow Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = (\beta-\alpha)^2/12$.

Esercizio 5. Una variabile aleatoria assolutamente continua X si dice *esponenziale* con parametro, o intensità, λ ($\lambda > 0$), $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, se ha funzione di densità data da

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Dimostrare che f è effettivamente una densità di probabilità.

(b) Disegnare il grafico della funzione di densità.

(c) Calcolare la funzione di ripartizione e disegnarne il grafico.

(d) Calcolare media e varianza.

Soluzione:

(a) $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ *(Verificare!)* $\Rightarrow f$ *è una densità*

(c) $F(x) = 0$ *se* $x < 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ *se* $x \geq 0$.

(d) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda$ *(integrare per parti);* $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 1/\lambda^2$, *ottenuto calcolando* $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = 2/\lambda^2$ *(integrare per parti 2 volte).*

Esercizio 6. Si dice che una v.a. X ha distribuzione Gamma di parametri (α, λ), con $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, se la sua densità è data da

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\, I_{(0,+\infty)}(x)$$

dove $\Gamma(\alpha)$ è la funzione Gamma definita da

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Si noti che $Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$.

a) Verificare che $f(x)$ è effettivamente una densità di probabilità.

b) Verificare la seguente proprietà della funzione gamma:

   1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
   2. per n intero positivo $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

c) Verificare che se X è una Gamma di parametri (λ, α), allora $E(X) = \alpha/\lambda$ e $Var(X) = \alpha/\lambda^2$.

d) Sia X una v.a. esponenziale con media $1/\lambda$. Provare che $E(X^k) = k!/\lambda^k$.

Soluzione:

a) *Perchè* $f(x)$ *sia una desità occorre che* $f(x)$ *sia una funzione non-negativa* $\forall x$ *(condizione verificata) e che* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, *ovvero* $\frac{\int_0^{+\infty} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx}{\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt} = 1$. *Verificare sostituendo nell'integrale al numeratore* $\lambda x = t$.

b) *1.* $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$, *ed integrando per parti si ottiene* $\alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, *e sfruttando la precedente proprietà,* $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2) \times \Gamma(n-2) = (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 2 \times 1\, \Gamma(1) = (n-1)!$.

c) *Per calcolare $E(X)$ e $Var(X)$ è possibile per esempio fruttare la seguente identità*

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$$

che deriva dal fatto che $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = 1$, *(come dimostrato al punto a). Si ha così* $E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^{(\alpha+1)-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\lambda}$. *Altrimenti è possibile calcolare $E(X)$ integrando per parti. Analogamente si calcola $Var(X)$.*

d) *Per calcolare $E(X^k) = k!/\lambda^k$ si può utilizzare la densità della Gamma:* $E(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^k}\int_0^{+\infty} \lambda^{k+1}x^{(k+1)-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^k}\Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}$.

Esercizio 7. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \begin{cases} 4x^3 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x \notin (0,1). \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di distribuzione cumulativa F_X di X. *[$F_X(x) = 0$ se $x < 0$; $F_X(x) = x^4$ se $x \in [0,1)$; $F_X(x) = 1$ se $x \geq 1$.]*
2. Calcolare $P(-0.5 < X \leq 0.5)$. *[0.0625]*

Esercizio 8. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua di funzione di ripartizione

$$F(x) = \left[1 - \mathrm{e}^{-x}\right]^2 \mathbf{I}_{(0,+\infty)}(x);$$

determinare:

a) la densità di X; *[$f(x) = 0$ se $x \leq 0$; $f(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})$ se $x > 0$.]*

b) $P(X > 1)$; *[0.6]*

c) $P(1 < X < 2)$. *[0.348]*

Esercizio 9. Sia T una variabile aleatoria di densità

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 1, \\ 1/4, & -1 < t < 0, \\ \alpha(1-t^3), & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

a) Si determini α e si disegni il grafico di f_T. *[$\alpha = 1$]*

b) Si calcoli la funzione di ripartizione e se ne disegni il grafico. *[$F_T(t) = 0$ se $t < -1$; $F_T(t) = 1/4t + 1/4$ se $-1 \leq t < 0$; $F_T(t) = 1/4 + t - t^4/4$ se $0 \leq t < 1$; $F_T(t) = 1$ se $t \geq 1$.]*

c) Si trovino: $P(T \leq \frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{4} \leq T < \frac{1}{4})$, $P(T = 0)$, $P(T \leq 3)$, $E[T]$, $\mathrm{Var}(T)$. *[0.734; 0.3125; 0; 1; 0.175; 0.22.]*

d) Si trovino $q_{0.1}$ e $q_{0.25}$. *[-0.6; 0]*

Esercizio 10. Il raggio R di un certo tipo di particelle inquinanti, espresso in micron, è una variabile aleatoria la cui densità di probabilità può essere descritta con la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} cx\mathrm{e}^{-x^2}, & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Determinare il valore della costante reale c. *[c=2]*

(b) Calcolare la funzione di ripartizione di R. *[$F(x) = 0$ se $x < 0$; $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ se $x \geq 0$.]*

(c) Calcolare la probabilità che una particella selezionata a caso abbia un raggio superiore a 2 micron. *[0.018]*

(d) Supponendo che le particelle inquinanti siano delle sfere, calcolare la probabilità che una particella scelta a caso abbia un volume superiore ad 1 micron cubo. *[0.68]*

Esercizio 11. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + k & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ove k è un parametro reale.

(a) Si determini il valore di k per cui f è una densità. *[$k = 5/6$]*

(b) Se X è una variabile aleatoria che ha la funzione determinata al punto precedente come densità, quanto valgono la media e la varianza di X? *[$\mathbb{E}[X] = 19/36$, $\operatorname{Var}(X) = 107/1269$]*

(c) Si determini il punto $x_{1/3}$ tale che $P(X \leq x_{1/3}) = 1/3$. [$x_{1/3} = 0.3723$]

Esercizio 12. Sia X una v.a. assolutamente continua che ammette la seguente funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \lambda \left[1 - \mathrm{e}^{-2(x-\lambda)}\right] \mathbb{1}_{[\lambda,+\infty)}(x)$$

(a) Determinare $\lambda > 0$ in modo che F_X sia effettivamente una funzione di ripartizione e per tale λ determinare la densità di X. Tracciare un grafico qualitativo di entrambe le funzioni. *[$\lambda = 1$]*

(b) Si calcoli $\mathbb{P}(X > 2)$ *[$\mathbb{P}(X > 2) = 0.135$]*.

(c) Si calcolino la mediana e il quantile di ordine 90% di X. *[mediana $= 1.347$, $q_{0.90} = 2.151$]*

(d) Si determini la densità della v.a. assolutamente continua $Y = X - 1$ e si riconosca di quale densità notevole si tratta. *[$Y \sim \mathcal{E}(2)$]*

(e) Si calcolino la media e la varianza di X. *[$\mathbb{E}[X] = 3/2$, $\operatorname{Var}(X) = 1/4$]*

(f) La densità di X presenta una coda più lunga a destra o a sinistra?

(g) Si determini la media della v.a. $Z = \mathrm{e}^X$. *[$\mathbb{E}[Z] = 2\mathrm{e}$]*

(h) Si determini la densità della v.a. $Z = \mathrm{e}^X$. *[$f_Z(z) = \frac{2\mathrm{e}^2}{z^3} \mathbb{1}_{[\mathrm{e},+\infty)}(z)$]*

Esercizio 13. Sia X una v.a. uniforme sull'intervallo $[a, b]$, con $-\infty < a \leq b < +\infty$. Calcolare la probabilità che X disti dalla propria media meno di $k\sigma$, dove σ è la deviazione standard di X, e $k = 1, 2, 3$. Confrontare poi i risultati ottenuti con quelli che si ricaverebbero utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev. *[$2/\sqrt{12}$ se $k = 1$; 1 se $k = 2, 3$]*

Esercizio 14. Il manuale di istruzioni di uno strumento di misura dichiara che l'errore massimo commesso dallo strumento è compreso tra $-a$ e a. Facendo le opportune ipotesi sul modello probabilistico, calcolare la deviazione standard della misura.

Esercizio 15. Sia T una variabile aleatoria di densità

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 2, \\ \alpha\big|1 - |t|\big|, & |t| < 2. \end{cases}$$

Si determini α e si disegnino i grafici di f_T e della funzione di ripartizione. Si calcolino inoltre:

a) $P(-\frac{1}{2} < T \leq 1)$; *[7/16]*

b) i quartili di T; *[$Q_1 = -1$; $Q_2 = 0$; $Q_3 = 1$]*

c) i punti percentuali 0.1-esimo e 0.9-esimo. *[1.775;-1.775]*

Esercizio 16. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua di funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0, \\ \alpha x + \frac{x^2}{6}, & se\ 0 \leq x < 1, \\ 1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Si determini l'unico valore ammissibile di α e si disegni il grafico di $F(x)$. *[$\alpha = 5/6$]*

(b) Si calcoli la funzione densità della variabile aleatoria X. *[$f(x) = (5/6 + x/3)\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$]*

(c) Si calcolino la media e la varianza della variabile aleatoria X. *[$E(X) = 19/36$, $\mathrm{Var}(X) = 107/1296$]*

(d) Si calcoli la probabilità che X disti dalla sua media per al più due deviazioni standard e si confronti il risultato ottenuto con quanto previsto dalla disuguaglianza di Chebishev.
$\Big[$*Calcolo esatto:* $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) = 100\%$.
Con Chebishev $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) \geq 75\%\Big]$

(e) Si calcoli il quantile di ordine 0.3 per la distribuzione di X e il punto percentuale 0.3-esimo.
[$q_{0.3} = 0.33725$, $q_{0.3\%} = 0.00360$]

Esercizio 17. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(1, 2)$. Determinare il numero reale z tale che $P(X > z + E[X]) = 1/4$. *[$z = 0.25$]*

Esercizio 18. Sia X una v.a. assolutamente continua con densità uniforme sull'intervallo $[-1, 1]$. Sia inoltre $Y = X^2$.

(a) Calcolare la funzione di ripartizione di Y. *[$F_Y(y) = 0$ se $y < 0$, $F_Y(y) = \sqrt{y}$ se $0 \leq y \leq 1$ e infine $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$]*

(b) Calcolare la densità di Y. *[$\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$]*

(c) Calcolare la media di Y. *[$\mathbb{E}[Y] = 1/3$]*

Definiamo ora un'altra v.a. $Z = cX + d$, dove c e d sono due costanti reali con $c > 0$ e d arbitraria.

(d) Determinare la densità di Z e riconoscere di quale densità notevole si tratta. *[$Z \sim \mathcal{U}(d - c, c + d)$]*

Esercizio 19. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ; determinare la densità della variabile $Y = X^2$. *[$f_Y(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} \exp(-\lambda\sqrt{t})\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(t)$]*