Statistica - 2^a lezione

25 febbraio 2021

Esperimenti aleatori

$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

Esperimenti aleatori

$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

PROPRIETÀ:

$(E \wedge F) \wedge G = E \wedge (F \wedge G)$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

$\overline{E \wedge F} = \overline{E} \vee \overline{F}$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

$E \wedge (F \vee G) = (E \wedge F) \vee (E \wedge G)$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

Esperimenti aleatori

$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

PROPRIETÀ:

$(E \wedge F) \wedge G = E \wedge (F \wedge G)$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

$\overline{E \wedge F} = \overline{E} \vee \overline{F}$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

$E \wedge (F \vee G) = (E \wedge F) \vee (E \wedge G)$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

Si definiscono inoltre

$$\Omega = \text{evento certo} \quad := E \vee \overline{E} \qquad \forall E$$

$$\varnothing = \text{evento impossibile} \quad := E \wedge \overline{E} \qquad \forall E$$

E ed F sono *incompatibili* quando $E \wedge F = \varnothing$

E *implica* F quando $E \wedge F = E$

Probabilità

Definizione

Una *probabilità* è una qualsiasi funzione $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ t.c.

1. $\mathbb{P}(E) \geq 0 \quad \forall E$ (positività)
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalizzazione)
3. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono a due a due incompatibili,

   $\mathbb{P}(E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_n)$ (additività)

Probabilità

Definizione

Una *probabilità* è una qualsiasi funzione $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ t.c.

1. $\mathbb{P}(E) \geq 0 \quad \forall E$ (positività)
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalizzazione)
3. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono a due a due incompatibili,

   $\mathbb{P}(E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_n)$ (additività)

Conseguenze

(a) $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

Probabilità

Definizione

Una *probabilità* è una qualsiasi funzione $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ t.c.

1. $\mathbb{P}(E) \geq 0 \quad \forall E$ (positività)
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalizzazione)
3. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono a due a due incompatibili,

   $\mathbb{P}(E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_n)$ (additività)

ATTENZIONE:

$$\mathbb{P}(T_1 \vee T_2 \vee T_3) \neq \mathbb{P}(T_1) + \mathbb{P}(T_2) + \mathbb{P}(T_3) = 150\% > 1$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E):$

$$1 \overset{(2)}{=} \mathbb{P}(\Omega)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \overset{(3)}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 \; = \; \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \; = \; \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;= \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \;=\; \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \overset{(1)}{\leq} \mathbb{P}(E)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 \;=\; \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \;=\; \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \;\leq\; \mathbb{P}(E) \;=\; 1 - \underset{\substack{|\vee\,(1) \\ 0}}{\mathbb{P}\left(\overline{E}\right)} \;\leq 1$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \leq 1$$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$:

$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left((E \wedge F) \vee (\overline{E} \wedge F)\right)$

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;= \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \;=\; \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \;\leq\; \mathbb{P}(E) \;= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \;\leq 1$$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left((E \wedge F) \vee (\overline{E} \wedge F)\right)$$
$$\overset{(3)}{=} \mathbb{P}(E \wedge F) + \mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right) \qquad \text{perché } (E \wedge F) \wedge (\overline{E} \wedge F) = \varnothing$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \leq 1$$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left((E \wedge F) \vee (\overline{E} \wedge F)\right)$$

$$= \mathbb{P}(E \wedge F) + \mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right)$$

$$= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right) \qquad \text{perché } E \wedge F = E$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \leq 1$$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$:

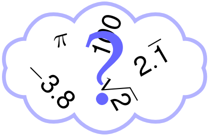
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}\left((E \wedge F) \vee (\overline{E} \wedge F)\right) \\
&= \mathbb{P}(E \wedge F) + \mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right) \\
&= \mathbb{P}(E) + \underset{\substack{\geq\,(1) \\ 0}}{\mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right)} \\
&\geq \mathbb{P}(E)
\end{aligned}$$

Variabili aleatorie

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

ESEMPI:

- $X =$ numero che uscirà nel lancio di un dado
- $Y =$ numero di teste nei tre lanci di moneta
- $Z =$ altezza del 10^{o} intervistato

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

Variabili aleatorie

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

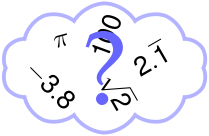
ESEMPI:

- X = numero che uscirà nel lancio di un dado
- Y = numero di teste nei tre lanci di moneta

} discrete

- Z = altezza del 10^{o} intervistato

} continua

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

Variabili aleatorie

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

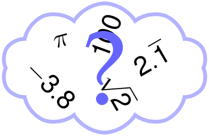
ESEMPI:

- X = numero che uscirà nel lancio di un dado
- Y = numero di teste nei tre lanci di moneta

} discrete

- Z = altezza del 10$^{\text{o}}$ intervistato

} continua

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

Le v.a. non sono eventi, ma si possono usare per creare eventi:

- $E :=$ "$X = 6$" = "uscirà 6"
- $F :=$ "$Y = 3$" = "uscirà sempre testa"
- $G :=$ "$Z > 1.80\,\mathrm{m}$" = "il 10$^{\text{o}}$ intervistato sarà più alto di $1.80\,\mathrm{m}$"

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \le t\text{”}\right)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$s < t \quad \Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”}\right) \leq \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right) \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”}\right) \leq \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right) \\ &\Rightarrow \quad F_X(s) \leq F_X(t) \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”}\right) \leq \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right) \\ &\Rightarrow \quad F_X(s) \leq F_X(t) \end{aligned}$$

D’ora in poi, $\mathbb{P}\left(\text{“}\ldots\text{”}\right) = \mathbb{P}\left(\ldots\right)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0:$

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\,(X < +\infty)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$:

  $$F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \leq t\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(X < +\infty\right) = \mathbb{P}\left(\Omega\right) = 1$$

  e similmente per l'altro limite

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \le t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \le t\right) = F_X(t) - F_X(s)$:

  $F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \le t\right)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \le t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\,(s < X \le t) = F_X(t) - F_X(s)$:

  $$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \le t) \; = \mathbb{P}\,(\text{“}X \le s\text{”} \vee \text{“}s < X \le t\text{”})$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \le t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \le t\right) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \le t\right) = \mathbb{P}\left(\text{“}X \le s\text{”} \vee \text{“}s < X \le t\text{”}\right)$$

$$\overset{(3)}{=} \mathbb{P}\left(X \le s\right) + \mathbb{P}\left(s < X \le t\right)$$

perché $\text{“}X \le s\text{”} \wedge \text{“}s < X \le t\text{”} = \varnothing$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$ e $F_X(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}(s < X \leq t) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”} \vee \text{“}s < X \leq t\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq s) + \mathbb{P}(s < X \leq t)$$

$$= F_X(s) + \mathbb{P}(s < X \leq t)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}(s < X \leq t) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$\begin{aligned} F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) &= \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”} \vee \text{“}s < X \leq t\text{”}\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq s) + \mathbb{P}(s < X \leq t) \\ &= F_X(s) + \mathbb{P}(s < X \leq t) \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}(s < X \leq t) = F_X(t) - F_X(s) \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

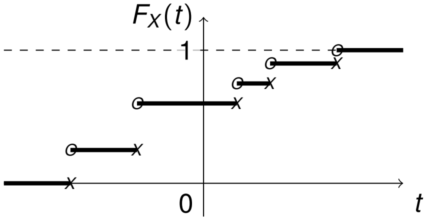
La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

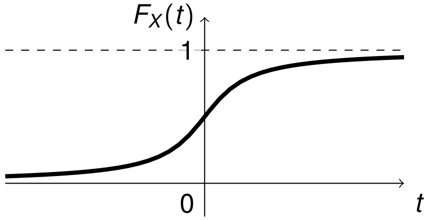
$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

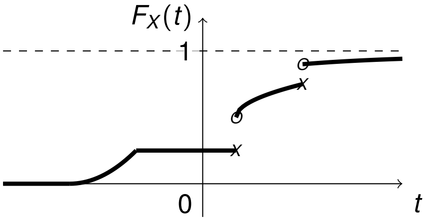
PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}(s < X \leq t) = F_X(t) - F_X(s)$
- F_X è continua da destra con limite da sinistra

ESEMPI:







Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\; s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)

  perché $\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) \geq 0$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$ con $s < t$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z = 1$ (normalizzazione)

  perché $\mathbb{P}\,(-\infty < X < +\infty) = 1$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(s \le X \le t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \ge 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z = 1$ (normalizzazione)

ATTENZIONE: per una v.a. assolutamente continua

$$\mathbb{P}(X = t) = 0 \qquad \mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(X \le t) \qquad \text{ecc.}$$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

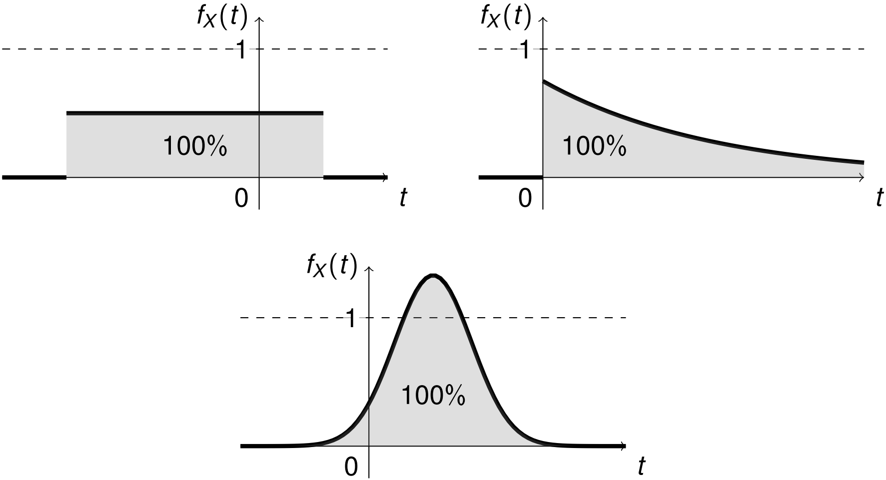
Legame densità - f.d.r. per una v.a. assolutamente continua:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

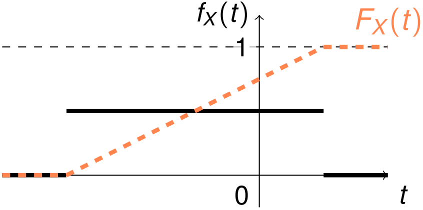
$$\Rightarrow \quad f_X(t) = \frac{\mathrm{d}\,F_X(t)}{\mathrm{d}t}$$

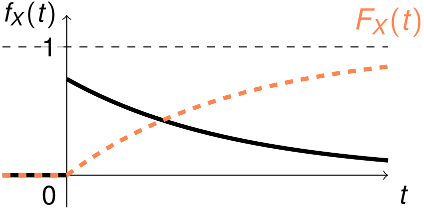
Variabili aleatorie assolutamente continue

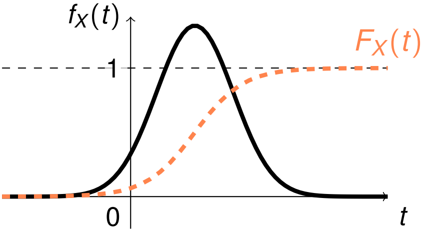
ESEMPI:



ESEMPI:







Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $a < b$ fissati

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

dove la *funzione indicatrice* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è

$$\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

dove la *funzione indicatrice* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è

$$\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

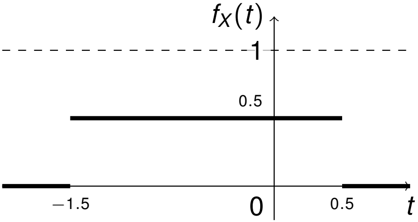
La densità f_X si chiama *uniforme continua* di parametri a, b e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(a,b)$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

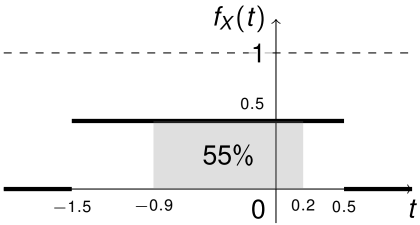
ESEMPIO: se $a = -1.5, \; b = 0.5$:



Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5,\ b = 0.5$:



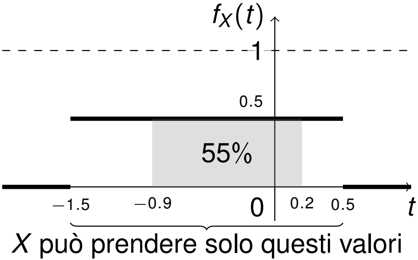
$$\mathbb{P}(-0.9 \leq X \leq 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

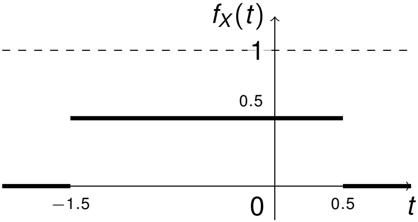
$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\mathrm{supp}\, f_X$ è il *supporto* della v.a. X

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\, \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

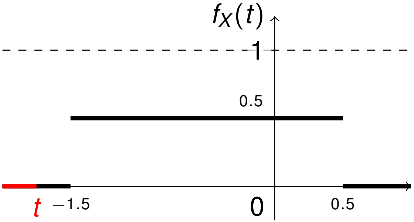
$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

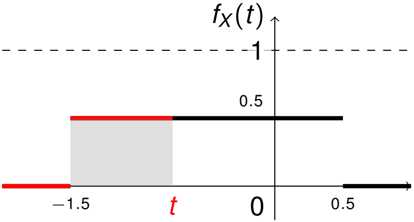
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{se } t < -1.5 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

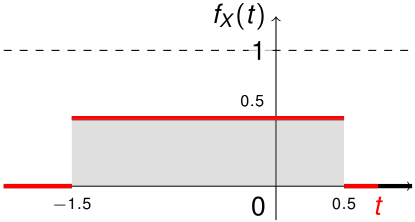
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 & \text{se } t < -1.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{t} 0.5\,\mathrm{d}z = 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5,\ b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

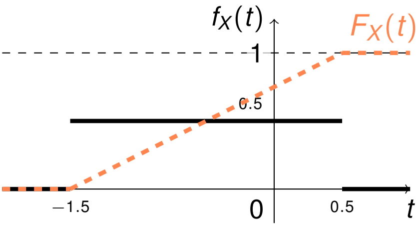
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 & \text{se } t < -1.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{t} 0.5\,\mathrm{d}z = 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{0.5} 0.5\,\mathrm{d}z + \int_{0.5}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5,\ b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

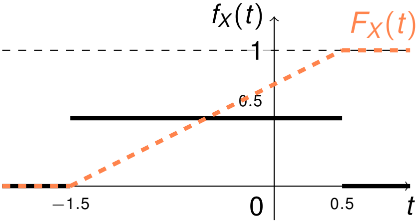
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1.5 \\ 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) =$$
$$= F_X(0.2) - F_X(-0.9)$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1.5 \\ 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$