

PRIMO ESPERIMENTO

APPARATO SPERIMENTALE:

- Generatore di corrente alternata
- Bobina grande composta dall'avvolgimento di 200 spire circolari di raggio 105mm (circuito primario)
- Bobina piccola composta dall'avvolgimento di 2000 spire di raggio 15mm (circuito secondario)
- Oscilloscopio



Dati:

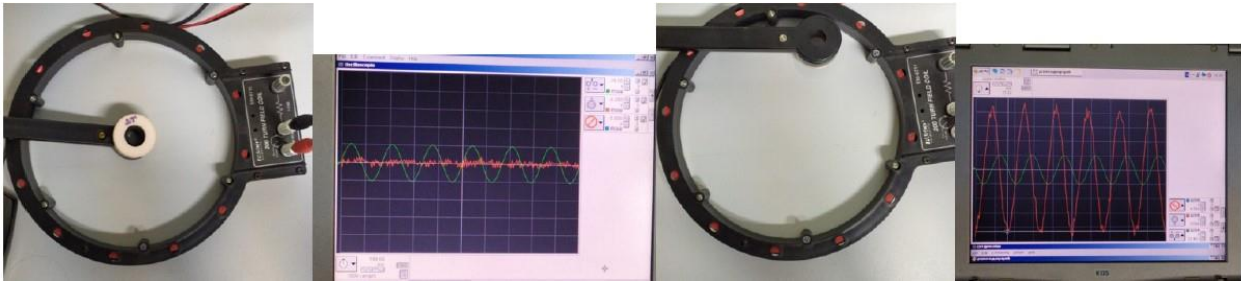
- $N_1=200$
- $R_1= 105\text{mm}$
- $N_2=2000$
- $R_2=15\text{mm}$
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$

DESCRIZIONE DELL'ESPERIMENTO:

L'esperimento si pone come obiettivo il calcolo del coefficiente di mutua induzione tra due bobine, rispettivamente di 200 e 2000 spire, in cui nella prima scorre una corrente generata da una tensione sinusoidale variabile, mentre nella seconda è presente una corrente indotta dalla prima.

In prima battuta verifichiamo qualitativamente come la mutua induzione tra i due circuiti dipenda da posizione e orientamento relativo tra questi. A questo scopo abbiamo collegato il circuito primario ad un generatore di corrente alternata, e tutto l'apparato sperimentale ad un oscilloscopio che si interfaccia con un software e ci permette di visualizzare su un grafico l'andamento delle tensioni ed estrapolare i dati. La bobina percorsa da corrente variabile genera un campo magnetico variabile nel tempo \vec{B}_1 . Dunque, avvicinando il secondo circuito al primo, si registra tramite l'oscilloscopio la presenza di una tensione indotta. Per effetto della mutua induzione, infatti, quando immergiamo la seconda bobina nel

campo magnetico variabile della prima, la variazione del flusso concatenato alle spire genera una f.e.m. indotta ($\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$) che fa scorrere una corrente $i = \frac{\varepsilon}{R}$.



Notiamo che:

1. L'andamento della tensione indotta risulta essere una sinusoide di segno opposto e con uno sfasamento di $\pi/2$ rispetto alla tensione del circuito primario.
2. Spostando il circuito secondario all'interno della bobina primaria mantenendo le due normali uscenti dai circuiti parallele, la tensione indotta risulta essere maggiore in prossimità dei bordi. Possiamo ipotizzare per effetto del campo magnetico radiale generato dalla corrente che scorre nelle singole spire e che quindi dipende dalla distanza.
3. Variando l'angolo con cui immergiamo la bobina secondaria nel campo magnetico generato dal circuito primario, la tensione indotta diminuisce progressivamente fino a risultare nulla quando le due normali uscenti dai circuiti sono perpendicolari tra loro.
4. Variando il segnale della tensione in ingresso, imponendo segnali periodici di forma diversa dalla sinusoide, come l'onda quadra o il dente di sega, osserviamo che: nei punti di non derivabilità il grafico della tensione primaria risulta invece continuo, in quanto nella realtà a causa dell'autoinduzione non possono esserci variazioni nette di tensione. Il grafico della tensione secondaria presenta di conseguenza dei picchi in corrispondenza di queste variazioni.



Nella seconda parte dell'esperimento procediamo invece nel calcolo quantitativo del coefficiente di mutua induzione M quando il circuito secondario si trova al centro della bobina grande. In questa regione di spazio gli effetti di bordo sono trascurabili, perciò possiamo considerare il campo magnetico \vec{B}_1 uniforme.

Con questa approssimazione il campo magnetico risulta essere:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1(t)}{2R_1}$$

Il flusso di \vec{B}_1 attraverso la bobina piccola è calcolato come:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_2 dS = \frac{\mu_0 N_1 i_1(t)}{2R_1} \pi R_2^2 N_2$$

Pertanto, il valore teorico della mutua induzione per questa configurazione risulta:

$$M = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{i_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_2^2}{2R_1} = 1,69 \text{ mH} \quad (**)$$

Procediamo quindi a verificare con misurazioni sperimentali tale valore.

Conoscendo l'andamento della corrente in ingresso e l'espressione della tensione indotta

$$i_1(t) = i_0 \cos \omega t \qquad \varepsilon = -\frac{d\Phi(\vec{B}_1)}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

ricaviamo l'andamento della tensione indotta:

$$\varepsilon = M i_0 \omega \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad \text{con} \quad \varepsilon_0 = M i_0 2\pi \nu \quad (*)$$

Ciò è confermato sperimentalmente, in quanto, come in precedenza notato, la tensione indotta ha effettivamente un andamento sinusoidale.

Dalla relazione

$$M = \frac{\varepsilon_0}{i_0 2\pi \nu}$$

si può dunque ricavare il coefficiente di mutua induzione: ε_0 è il valore di picco della tensione indotta, e i_0 si ricava facilmente grazie ad un fattore di conversione: $i_0 = 0,0506 V_0$, dove V_0 è la tensione di picco in ingresso nel circuito primario. Entrambe le informazioni si ricavano facilmente grazie agli strumenti del software utilizzato.

RISULTATI SPERIMENTALI:

- 1V

ν [Hz]	ε [V]	i_0 [A]	M[H]
10	0,018	0,141882	0,00202
20	0,027	0,137126	0,001568
30	0,042	0,131206	0,001699
40	0,055	0,124122	0,001764

Valore medio di M: 0,001763

- 2V

ν [Hz]	ε [V]	i_0 [A]	M[H]
10	0,036	0,281387	0,002037
20	0,06	0,274303	0,001742
30	0,083	0,262462	0,001679
40	0,103	0,243538	0,001684

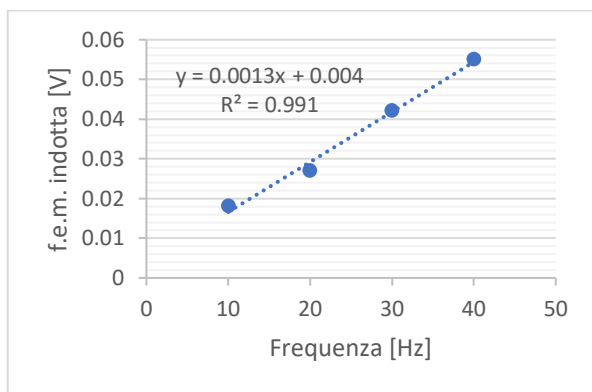
Valore medio di M: 0,001785

Possiamo ricavare il valore del coefficiente di mutua induzione in un modo alternativo. Attraverso un fit lineare fra i valori di picco della tensione indotta e la frequenza in ingresso nel circuito primario troviamo il coefficiente angolare che per (*) risulta essere uguale a:

$$Mi_0 2\pi$$

Troviamo quindi:

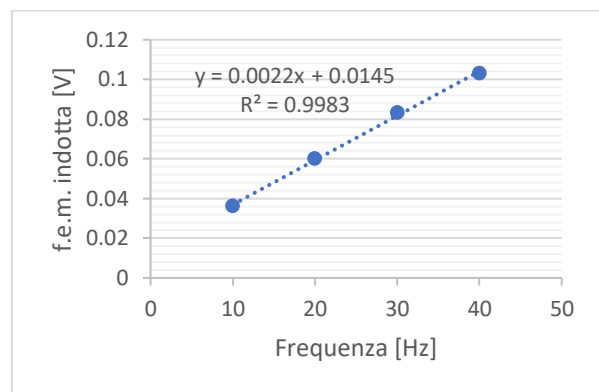
1V



$$0.0013 = M_{1V} i_0 2\pi$$

$$M_{1V} = 0.001554 \text{ H}$$

2V



$$0.0022 = M_{2V} i_0 2\pi$$

$$M_{2V} = 0.001324 \text{ H}$$

Facendo la media di tutti i valori del coefficiente di mutua induzione M trovati con le diverse misurazioni e ricavato con i due diversi metodi otteniamo un valore di $M = 0,001606 \text{ H}$, soddisfacentemente vicino al valore teorico ricavato in precedenza (**) considerando che nello svolgimento dell'esperimento abbiamo:

- Supposto il campo magnetico uniforme (approssimazione accettabile nonostante osservazione 2. dell'esperienza qualitativa date le dimensioni del circuito secondario) senza nemmeno considerare il coefficiente di permeabilità magnetica dell'aria.
- Posizionato il circuito secondario senza avere la certezza che fosse perfettamente centrato e non inclinato rispetto alla normale uscente dal campo inducente.
- Ricavato i dati di tensione indotta leggendoli dal grafico dell'oscilloscopio che risentiva di rumore elettronico, maggiormente marcato e rilevante in particolare per le misure eseguite a valori di frequenza ridotti.

SECONDO ESPERIMENTO

L'obiettivo di questa coppia di esperimenti è verificare le proprietà ondulatorie della luce, in particolare i fenomeni di interferenza e di diffrazione. Per fare ciò, sfruttiamo l'emissione di onde monocromatiche da parte di un led contro una singola fenditura o due fenditure poste a distanza d tra di loro ed esaminiamo l'effetto che hanno su una superficie piana posta dietro di esse a distanza L . Qualitativamente, a occhio nudo si distinguono nitidamente fasce in cui l'intensità luminosa è massima e fasce in cui vi è invece buio: si tratta proprio delle figure di interferenza \ diffrazione. I dati sono in seguito stati esaminati al computer con un software dedicato e confrontati con i nostri calcoli teorici per riuscire a risalire a una stima della lunghezza d'onda.

1. Interferenza

Per poter misurare l'effetto dell'interferenza abbiamo utilizzato due fenditure di grandezza molto ridotta, approssimandole a puntiformi, di modo da poterle considerare le sorgenti coerenti di due onde sferiche grazie al principio di Huygens.

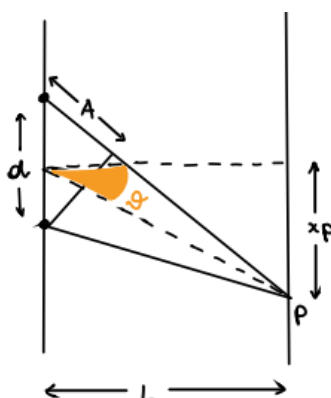
Chiamiamo X_{max} la posizione che misuriamo sperimentalmente dei massimi di intensità e X_{min} la posizione dei minimi. La posizione del generico punto p è data da $X_p = L \cdot \tan(\theta) \approx L \cdot \sin(\theta)$ dove θ è l'angolo di incidenza e l'approssimazione è valida per angoli molto piccoli, come in questo caso dato che $L \gg d$.

Se segniamo con A la differenza di cammino geometrico percorso dalle due onde, si ha interferenza costruttiva quando le onde sono in fase, ovvero per $A_c = n \cdot \lambda$, e distruttiva per $A_d = \frac{2n+1}{2} \lambda$. A distanze elevate ($L \gg d$), è possibile effettuare l'approssimazione $A \approx d \cdot \sin(\theta)$. Si può quindi facilmente ricavare un'espressione per la distanza tra due minimi (o due massimi) adiacenti, in funzione della sola lunghezza d'onda e di altri parametri a noi noti.

$$X_{min_n} = \frac{L}{d} \cdot \lambda \cdot \frac{2n+1}{2} \Rightarrow \Delta X_{min} = X_{min_{n+1}} - X_{min_n} = \frac{L}{d} \cdot \lambda$$

$$X_{max_n} = \frac{L}{d} \cdot \lambda \Rightarrow \Delta X_{max} = X_{max_{n+1}} - X_{max_n} = \frac{L}{d} \cdot \lambda$$

Grazie ai calcoli risaliamo a un'espressione per determinare la distanza tra due massimi (o tra due minimi) in funzione della lunghezza d'onda. Utilizzando le Δx sperimentali lette dal software possiamo infine trovare λ . Sono state effettuate ripetute misure modificando ogni volta il parametro d .



STRUMENTAZIONE UTILIZZATA:

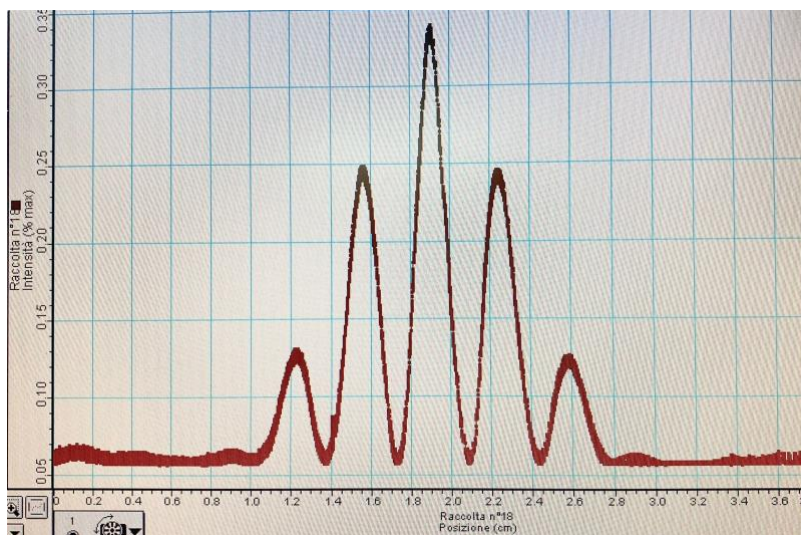
Per questa prima parte di esperimento, l'apparato sperimentale consiste in:

- Una sorgente luminosa, laser rosso con lunghezza d'onda di 650nm;
- Delle fenditure doppie di ampiezza variabile poste su un sostegno perpendicolare alla sorgente;
- Un sensore ottico anch'esso perpendicolare alla sorgente;
- Un metro per misurare la distanza tra la sorgente e il sensore.

DESCRIZIONE DELL'ESPERIMENTO:

Per l'esperimento abbiamo posto ad una distanza di 70cm dal sensore ottico il supporto delle fenditure, che, se ruotato, permetteva di selezionare misure diverse di ampiezza delle fenditure e di distanza tra le stesse. Per registrare correttamente il profilo di diffrazione sul terminale collegato al sensore ottico, abbiamo spostato lentamente il sensore di fronte alla fenditura, facendo attenzione che fosse ben perpendicolare ad esso.

La figura di interferenza che così otteniamo risulta modulata dalla diffrazione, effetto secondario impossibile da eliminare utilizzando fenditure di grandezze non realmente puntiformi. Lo spazio racchiuso tra due minimi adiacenti causati dalla diffrazione contiene N massimi causati dall'interferenza. Al fine di calcolare la distanza tra due minimi consecutivi della figura di interferenza, abbiamo perciò misurato dapprima l'ampiezza del massimo principale della figura di diffrazione e successivamente diviso tale valore per il numero di massimi del profilo di interferenza contenuti al suo interno.



L'immagine mostra il profilo di interferenza relativo alla prima misurazione, con ampiezza delle fenditure $a = 4,00E-05$ poste a distanza $d = 1,25E-04$.

In questo caso è ben visibile solo il massimo principale della figura di diffrazione, mentre i massimi secondari hanno ampiezza nettamente minore.

RISULTATI SPERIMENTALI:

Di seguito riportiamo le tabelle con i dati noti di lunghezza del cammino e di ampiezza delle fenditure, le misure dei margini destro e sinistro del massimo principale della figura di diffrazione e calcoli fatti con tali valori.

Riportiamo inoltre i valori di lunghezza d'onda calcolati con la seguente formula:

$$\lambda = \frac{\Delta x_{\text{minimo}} \cdot d}{L}, \quad \text{con } \Delta x_{\text{minimo}} = \frac{\Delta x_{\text{massimo principale}}}{N_{\text{minimi}}}$$

$$\text{Allora } \lambda = \frac{\Delta x_{\text{massimo principale}} \cdot d}{N \cdot L}$$

Lunghezza cammino [m]	Ampiezza fenditure [m]	Distanza fenditure [m]	Sinistra [m]	Destra [m]	Numero minimi interf.	Ampiezza max principale [m]	Ampiezza minimi [m]	Lunghezza d'onda [m]
7,00E-01	4,00E-05	1,25E-04	1,05E-02	2,75E-02	5	1,70E-02	3.40E-03	6,07E-07
7,00E-01	4,00E-05	2,50E-04	2,42E-02	4,03E-02	9	1,61E-02	1.79E-03	6,40E-07
7,00E-01	4,00E-05	5,00E-04	1,63E-02	3,35E-02	19	1,72E-02	9.05E-04	6,48E-07
7,00E-01	8,00E-05	2,50E-04	2,55E-02	3,44E-02	5	8,98E-03	1.78E-03	6,41E-07
7,00E-01	8,00E-05	5,00E-04	2,06E-02	2,68E-02	7	6,18E-03	8.86E-04	6,31E-07

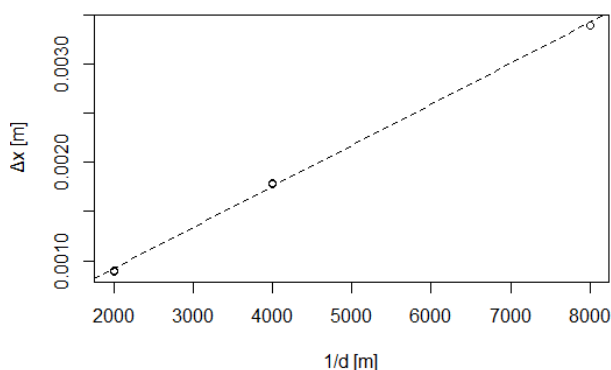
La media delle lunghezze d'onda misurate è 6,52E-07, molto vicino a quello reale.

Confrontiamo ora i risultati ottenuti con le formule con uno studio fatto sul fit lineare dei dati ottenuti.

Dalla formula $\Delta x_{\text{minimo}} = \lambda L \cdot \frac{1}{d}$, notiamo la dipendenza lineare della distanza tra due minimi successivi con l'inverso della distanza tra le fenditure.

Realizziamo quindi un grafico che abbia sulle ascisse l'inverso della distanza tra le due fenditure e sulle ordinate l'ampiezza del massimo principale già diviso per il numero dei minimi del profilo di interferenza.

Riportiamo il plot e il l'output della regressione realizzati con il software R.



```
Call:
lm(formula = distanza_minimi ~ inverso_dist)

Residuals:
    1         2         3         4         5 
-2.187e-05  3.780e-05 -1.237e-05  2.780e-05 -3.137e-05 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.253e-05  3.321e-05   2.486  0.0888 .
inverso_dist  4.174e-07  7.281e-09  57.332 1.17e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.567e-05 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9991,    Adjusted R-squared:  0.9988 
F-statistic: 3287 on 1 and 3 DF,  p-value: 1.169e-05
```

Notiamo dalla regressione lineare un valore di variabilità spiegata molto alto, maggiore del 99%, che conferma l'accuratezza dei dati raccolti.

Inoltre il coefficiente angolare $\lambda L = 4.174\text{E-}07$, se diviso per la distanza L tra il sensore e la sorgente, mostra un valore della lunghezza d'onda $\lambda = 5.96\text{E-}07$.

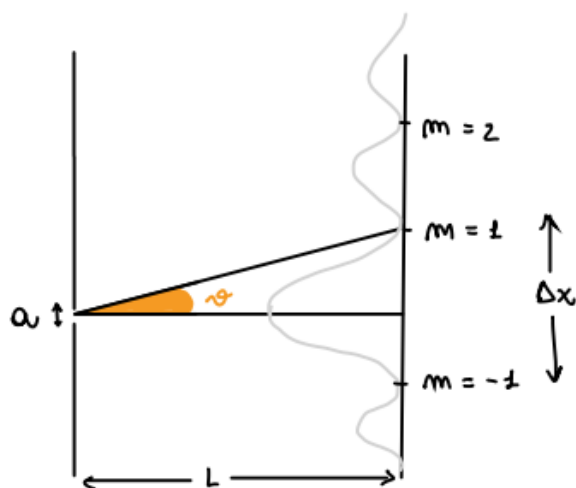
Questo valore sperimentale si discosta abbastanza dalla media delle lunghezze d'onda ottenute con le formule. Possiamo comunque ritenerci soddisfatti di tale risultato, considerando che in questa prima

parte dell'esperimento è stato particolarmente difficile identificare con precisione i margini del massimo principale della figura di diffrazione, in particolare per quei profili in cui i massimi secondari erano talmente deboli da non essere quasi riconoscibili.

2. Diffrazione

La seconda parte dell'esperimento consiste nel far passare la luce attraverso una singola fenditura di lunghezza a , e misurare l'effetto della diffrazione. La differenza principale con la prima metà dell'esperimento è che in questo caso la grandezza della fenditura non è più assimilabile a puntiforme ma è invece di dimensioni comparabili alla lunghezza d'onda della luce monocromatica del led.

Con ragionamenti simili al caso precedente, otteniamo che la posizione dei minimi è $X_{min} = \frac{L}{a} \cdot \lambda \cdot m$, con $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$ (per $m=0$ si ha il massimo principale). La distanza tra i minimi adiacenti al massimo principale è dunque $\Delta X_{min} = 2 \cdot \frac{L}{a} \cdot \lambda$.



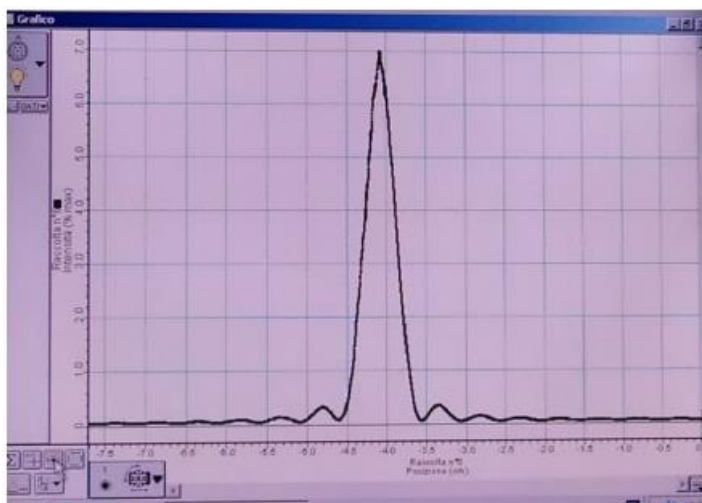
STRUMENTAZIONE UTILIZZATA:

In questa seconda parte l'apparato sperimentale è analogo a quello usato in precedenza ed è composto da:

- Una sorgente luminosa, laser rosso con lunghezza d'onda di 650nm;
- Delle fenditure singole rettangolari di ampiezza variabile poste su un sostegno perpendicolare alla sorgente;
- Un sensore ottico anch'esso perpendicolare alla sorgente;
- Un metro per misurare la distanza tra la sorgente e il sensore.

DESCRIZIONE DELL'ESPERIMENTO:

Per questo esperimento abbiamo registrato il profilo di interferenza come descritto in precedenza. Conclusa la parte di registrazione del profilo, abbiamo selezionato sul computer con un cursore la distanza dall'origine del sistema di riferimento (fornito dal software stesso) dei due minimi adiacenti al massimo principale e in questo modo abbiamo potuto calcolarne l'ampiezza.



Questo è un profilo di diffrazione mostrato dal software da noi utilizzato.

Notiamo come il massimo principale abbia ampiezza doppia rispetto ai massimi secondari.

RISULTATI SPERIMENTALI:

Riportiamo le tabelle relative alle misure dell'ampiezza del massimo principale, realizzate calcolando la differenza tra l'estremo destro e sinistro di tale massimo con le tre fenditure di ampiezza crescente e con la stessa distanza tra il supporto delle fenditure e il sensore.

Lunghezza del cammino [m]	Ampiezza della fenditura [m]	Sinistra [m]	Destra [m]	Ampiezza max principale [m]	Lunghezza d'onda [m]
7,00E-01	4,00E-05	2,09E-02	4,47E-02	2,376E-02	6,79E-07
7,00E-01	8,00E-05	1,96E-02	3,15E-02	1,197E-02	6,84E-07
7,00E-01	1,60E-04	2,83E-02	3,43E-02	0,598E-02	6,83E-07

La media delle lunghezze d'onda misurate è 6.83E-07.

Notiamo innanzitutto come all'aumentare dell'ampiezza delle fenditure le figure di diffrazione risultino più strette, proprio come previsto dalla legge fisica.

Inoltre, tramite le formule riportate sopra, calcoliamo il valore della lunghezza d'onda del laser utilizzato e notiamo come i risultati ottenuti per le diverse fenditure siano piuttosto simili. Le discrepanze tra un risultato e l'altro sono riconducibili ad imprecisioni sperimentali. Infatti è stato difficile rilevare con esattezza i margini della figura di diffrazione tramite il cursore del computer.

Ricordiamo la relazione che lega l'ampiezza del massimo principale all'ampiezza delle fenditure è:

$$\Delta x = 2L\lambda \frac{1}{a}$$

Realizziamo un grafico che mostri l'andamento dei dati da noi raccolti relativi al massimo principale in funzione del reciproco dell'ampiezza delle fenditure, in modo da analizzare il coefficiente angolare della retta risultante dal fit lineare.

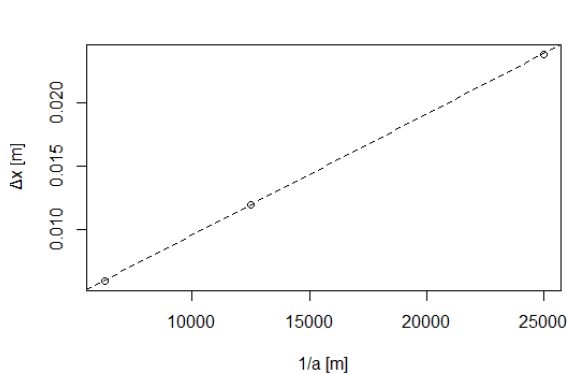
Notiamo innanzitutto che la regressione lineare mostra una variabilità spiegata del 100%, cosa che conferma la validità dei dati raccolti.

Inoltre, dal valore del coefficiente angolare pari a $2L\lambda = 9.495e-07$ possiamo ricavare la lunghezza d'onda che risulta quindi essere $\lambda = 6.78E - 07$.

Considerando che la regressione lineare, che possiamo considerare particolarmente valida dal valore dell'R-squared, fornisce un valore della lunghezza d'onda molto prossimo a quello da noi calcolato, possiamo ritenerci soddisfatti del modello utilizzato. La piccola differenza tra il valore sperimentale e quello ottenuto con la formula è probabilmente dovuta ad una lieve imprecisione sulla distanza L misurata tra la sorgente e il sensore.

Nel complesso otteniamo con i dati un valore di lunghezza d'onda prossimo a quello reale ma leggermente maggiore a causa di rumori sperimentali.

Riportiamo il plot e l'output della regressione realizzati con il software R.



```
Call:
lm(formula = ampiezza_massimo ~ reciproco_fenditura)

Residuals:
    1       2       3 
-1.714e-05  5.143e-05 -3.429e-05 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.000e-05  7.856e-05   1.018  0.49421
reciproco_fenditura 9.495e-07  4.751e-09 199.859  0.00319 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.414e-05 on 1 degrees of freedom
Multiple R-squared:  1, Adjusted R-squared:  0.9999
F-statistic: 3.994e+04 on 1 and 1 DF, p-value: 0.003185
```