Aufgabe 1.1

Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

(a) Die Summe der geraden Zahlen von 2 bis 100
(b) Die Summe aller ungeraden Quadratzahlen von 121 bis 2401
(c) Die Summe der 2er-Potenzen mit ungeraden Exponenten von 2 bis 524288

Aufgabe 1.2

Schreiben Sie die Summe ausführlich hin und berechnen Sie sie:

(a) $\sum_{k=1}^{6} k^2$ (b) $\sum_{k=1}^{7} k \cdot 2^k$ (c) $\sum_{k=1}^{8} k^{(-1)^k}$ (d) $\sum_{k=1}^{5} 2^{8-k}$

Aufgabe 1.4

Berechnen Sie:

(a) $\sum_{k=1}^{8} 2^k$ (b) $\sum_{k=1}^{100} (2k-1)$ (c) $\sum_{k=1}^{100} (2k-1)^2$

Aufgabe 1.5

Durch die Vorschrift: $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ wird eine Zahlenfolge definiert.

Bestimmen Sie die Folgenglieder a_n für $n = 2, \ldots, 5$!

Aufgabe 1.6

Schreiben Sie die rekursiv definierten Folgen in nicht-rekursiver Form:

(a) $f(1) = 2$ und $f(n+1) := f(n) + f(1)$
(b) $f(1) = \frac{1}{2}$ und $f(n+1) := \frac{1}{2} \cdot f(n)$

Aufgabe 1.7 / 1.8

Beweisen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Vollständigen Induktion die folgenden Aussagen:

(a) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für alle $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$

(f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Term: $n^2 - n$ eine gerade Zahl
(Eine Zahl heißt gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist)

Aufgabe 1.13

Durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ für $x, y \in [-1, +1]$ wird eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Erstellen Sie dafür die explizite Funktionsvorschrift!

Aufgabe 1.14:
Bestimmen Sie für folgende Funktion den Definitionsbereich, den Wertebereich und das Urbild zur Menge N.

(a) $f(x) = x^2$ $\quad N := [16,25]$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad N := [4,5]$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad N :=]0,\infty[$

Aufgabe 1.16:
Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren!

(a) $p(x) := x^2 + 4x + 4$ (b) $p(x) := x^2 - 1$ (c) $p(x) := x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

<u>Bemerkung:</u> Linearfaktoren sind Polynome der Form $q(x) = x - a$ also Polynome vom Grad 1 und a ist dann eine Nullstelle von q und damit auch von p. Sie gewinnen die Zerlegung durch Polynomdivision.

Aufgabe 1.17:
Berechnen Sie

(1) $w_1 := z_1 + z_2$ (2) $w_2 := z_1 - z_2$ (3) $w_3 := z_1 \cdot z_2$ (4) $w_4 := \frac{z_1}{z_2}$

für die folgenden komplexe Zahlenpaare und stellen Sie das Ergebnis in der Form $a + i \cdot b$ dar:

(a) $z_1 := 1 + 2i$ und $z_2 := 2 - 5i$
(b) $z_1 := 3 + 4i$ und $z_2 := -5 + 7i$
(c) $z_1 := 8$ und $z_2 := 4 - 8i$

Aufgabe 1.18:
Bestimmen Sie die komplexwertigen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $z^2 + 4z + 5 = 0$ (b) $z^2 - 6z + 10 = 0$ (c) $z^2 - 12z + 34 = 0$

Aufgabe 1.19

(a) Es gilt die Beziehung: $z := \frac{1 + ix}{1 - ix}$. Berechnen Sie |z|.
(b) Es gilt die Beziehung: $(2 - i) \cdot z = 1 - \bar{z}$. Berechnen Sie z.

Aufgabe 1.22 (Zusatzaufgabe[1])
Karlchen bezahlt seinen Einkauf mit einem 100 € Schein. Der Kassierer verwechselt bei der Geldrückgabe Cents und Euro. Auf dem Heimweg verliert Karlchen 5 Cent ohne dies zu bemerken. Zu Hause stellt er fest, dass er doppelt so viel Geld zurückerhalten hat, als er eigentlich hätte bekommen sollen.
Wie hoch war die Rechnung?

[1] Zusatzaufgaben haben einen höheren Schwierigkeitsgrad. Deren Bearbeitung ist freiwillig.