Tutorium 9

Totale Unimodularität

Eine Matrix A heißt total unimodular, wenn die Determinante alle quadratischen Teilmatrizen (Streichungsmatrizen) von A nur die Werte 0, 1 oder −1 annehmen kann. (insbesondere auch 1x1 Matrizen)

⇒ Eine Matrix ist total unimodular, wenn gilt:

- Jedes Element von A besitzt den Wert 0, 1 oder −1
- Jede Spalte von A enthält maximal zwei Nichtnullelemente
- Die Zeilen von A lassen sich so in zwei Teilmengen I_1 und I_2 unterteilen, dass folgende Bedingung erfüllt ist:

  Besitzt eine Spalte von A zwei Nichtnullelemente, so befinden sie sich bei gleichem Vorzeichen in verschiedenen Teilmengen, bei ungleichem Vorzeichen in derselben Teilmenge

Graphentheorie

Ein Graph G ist definiert durch seine Knoten V und Kanten E.

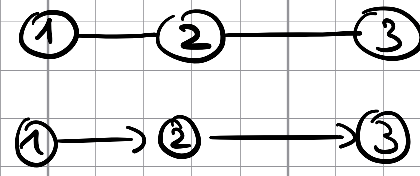
Ein Graph $G=(V,E)$ heißt gerichtet, wenn seine Kanten nur in eine Richtung führen. Er heißt ungerichtet, falls sie in beide Richtungen führt.

Eine gerichtete Kante (i,j) führt von Knoten i zu Knoten j.

Eine ungerichtete Kante $[i,j]$ führt in beide Richtungen.

Bsp.: $G = (\{1,2,3\}, \{[1,2],[2,3]\}$

$G = (\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,3)\}$



Knoten heißen adjazent, wenn sie mit einer Kante verbunden sind.

Eine Kante ist inzident zu einem Knoten, falls sie verbunden sind.

Ein Teilgraph U von G $U \subseteq G$ muss ebenfalls ein für sich vollständiger Graph sein.

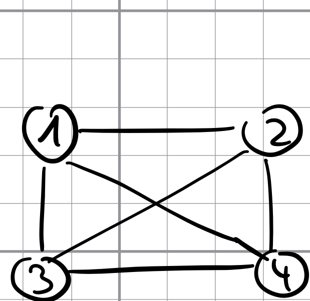
Ein Graph heißt bewertet, falls die Kanten Gewichte haben.

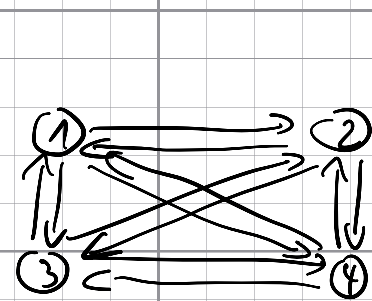
Ein gerichteter (ungerichteter) Graph, der keine parallelen Kanten und keine Schlingen enthält, heißt schlicht.

Der Knotengrad eines Knoten gibt an, wie viele inzidente Kanten er hat.

Ein vollständiger Graph K_n ist der schlichte Graph von Größe n mit maximal vielen Kanten.

K_4:





Aufgabe 1

a) Formulieren Sie die folgenden Probleme jeweils als mathematisches Optimierungsproblem und klassifizieren Sie die erhaltene Formulierung.

1. Ein Ehepaar will sich die vier Haushaltsarbeiten A_j mit $j = 1, \ldots, 4$ so teilen, dass jeder genau zwei Aufgaben übernimmt und die insgesamt benötigte Zeit minimiert wird. Ehepartner E_i mit $i = 1, 2$ benötigt die Dauer t_{ij} für Aufgabe j.

A1a) 1. Entscheidungsvariablen:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, wenn Ehepartner } i \text{ Aufgabe } j \text{ erledigt} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad i=1,2 \quad j=1,2,3,4$$

Optimierungsproblem:

$$\min \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} t_{ij} x_{ij} \qquad \text{Minimiere Arbeitszeit}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{2} x_{ij} = 1 \qquad j=1,\ldots,4 \qquad \text{Aufgabenzuteilung}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 2 \qquad i=1,2 \qquad \text{Jeder 2 Aufgaben}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i=1,2 \quad j=1,\ldots,4 \qquad \text{Binärbedingungen}$$

Transportproblem mit Binärbedingungen: Jeder Ehepartner hat ein Angebot von 2 Aufgaben und jede Aufgabe hat einen Bedarf von 1 Aufgabe. Aufgrund der exklusiven Zuordnung von Aufgabe zu Ehepartner sind keine anteiligen Zuordnungen möglich, so dass Binärvariablen verwendet werden müssen. Allerdings kann man wegen der totalen Unimodularität der Koeffizientenmatrix die Binärbedingungen zu $x_{ij} \geq 0$ ändern, ohne dass sich der optimale Punkt ändert. Nach dieser Überlegung kann das Problem also auch als klassisches Transportproblem formuliert werden.

A

2. Für n zu errichtende Fabriken stehen genau n verschiedene Standorte zur Verfügung. Die Errichtungskosten von Fabrik i auf Standort j würden c_{ij} Geldeinheiten betragen ($i, j = 1, \ldots, n$). Die Frage ist, an welchem Standort welche Fabrik gebaut werden soll, so dass die gesamten Errichtungskosten minimal werden.

1a) 2. Entscheidungsvariablen:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, wenn Fabrik } i \text{ auf Standort } j \text{ errichtet wird} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad i,j=1,\ldots,n$$

Optimierungsproblem:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$ Minimiere Errichtungskosten

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, .., n$$ jeder Standort hat Fabrik

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, .., n$$ jede Fabrik an einem Standort

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i,j = 1, ..., n$$ Binärbedingungen

Lineares Zuordnungsproblem: Wegen der totalen Unimodularität der Koeffizientenmatrix kann man die Binärbedingungen zu $x_{ij} \geq 0$ ändern, ohne dass sich der optimale Punkt ändert.

b) Sind die folgenden Matrizen jeweils total unimodular?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cancel{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$I_1 = \{1,3\}$
$I_2 = \{3\}$

$I_1 = \{1,2,3,4\}$
$I_2 = \{\}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ✓, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ✓$$

$I_1 = \{1,4,3\}$
$I_2 = \{2\}$

- Jedes Element von A besitzt den Wert 0,1 oder -1
- Jede Spalte von A enthält maximal zwei Nichtnullelemente
- Die Zeilen von A lassen sich so in zwei Teilmengen I_1 und I_2 unterteilen, dass folgende Bedingung erfüllt ist:

Besitzt eine Spalte von A zwei Nichtnullelemente, so befinden sie sich bei gleichem Vorzeichen in verschiedenen Teilmengen, bei ungleichem Vorzeichen in derselben Teilmenge

A1b) A_1 ist nicht total unimodular, da die quadratische Teilmatrix (2) mit Determinante 2 enthalten ist.

A_2 ist nicht total unimodular, da die quadratische Teilmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mit Determinante -2 enthalten ist.

A_3 ist total unimodular, da sich die Zeilenindizes in $I_1 = \{1,2,3,4\}$ und $I_2 = \{\ \}$ einteilen lassen.

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A_4 ist total unimodular, da sich die Zeilenindizes in $I_1 = \{1,3,4\}$ und $I_2 = \{2\}$ einteilen lassen.

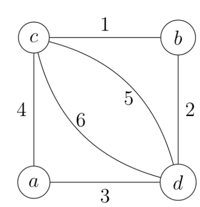
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bedeutung/Auswirkung der totalen Unimodularität

Merke: Liegen bei einem linearen Optimierungsproblem eine (ganzzahlige) total unimodulare Koeffizientenmatrix und ausschließlich ganzzahlige rechte Seiten vor, so besteht jede Basislösung des Problems ausschließlich aus ganzzahligen Einträgen. Dies ist für Anwendungen hilfreich bei denen Ganzzahligkeit der Entscheidungsvariablen gefordert wird. Diese Anwendungen können aufgrund des Resultats auch mit kontinuierlichen Entscheidungsvariablen formuliert werden, so dass der Simplex eingesetzt werden kann.

Aufgabe 2

a) Gegeben sei der folgende Graph G:



Welche der folgenden Eigenschaften trifft auf G zu:

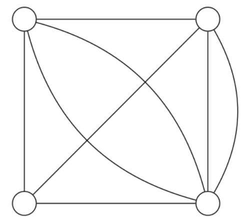
1. Die Knoten a und c sind adjazent.
2. Die Kante $[c, d]$ ist inzident mit Knoten d.
3. Der Knoten d und die beiden Kanten $[c, d]$ sind ein Teilgraph von G.
4. G ist bewertet.

A2) a) 1. Ja, da beide Knoten mit Kante $[a,c]$ inzident sind.
2. Ja
3. Nein, gemäß der Inzidenzabbildung eines Graphen jeder Kante ein Knotenpaar des Graphen zugeordnet werden müsste

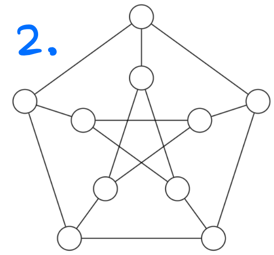
4. Ja, es handelt sich um einen Kantenbewerteten Graphen

b) Handelt es sich bei den folgenden Graphen um schlichte Graphen?

1.



2.



A2b) 1. Nein, da parallele Kanten vorhanden

2. Ja, weder parallele Kanten noch Schlingen vorhanden

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie das *Handshaking-Lemma*: Für alle Graphen gilt, dass die Summe der Knotengrade genau zweimal so groß ist wie die Anzahl der Kanten.

A 3a) Jede Kante ist entweder mit genau 2 Knoten oder mit einem Knoten 2 mal (Schlinge) inzident

=> Jede Kante trägt genau 2 zur Summe der Knotengrade bei

=> Die Summe der Knotengrade ist genau 2mal so groß wie die Anzahl der Kanten

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) die folgende Aussage: Für jeden Graphen gilt, dass die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade ist.

Sei $G=(V,E)$ ein Graph und seien $U \subseteq V$ diejenigen Knoten, die ungeraden Knotengrad haben

Zu zeigen: $|U|$ ist gerade

Es gilt:

alle ungeraden Knotengrade gerade machen

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E| = \underbrace{\sum_{v\in V/U} \deg(v)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{v\in U}(\deg(v)-1)}_{\text{gerade}} + |U|$$

$\Rightarrow |U|$ ist als Differenz gerade Zahlen ebenfalls gerade

Alternative:

Wegen a) ist die Summe der Knotengrade gerade; zudem ist die Summe der Knotengrade der Knoten mit geradem Knotengrad ebenfalls gerade

⇒ Auch die Summe der Knotengrade mit ungeradem Knotengrad muss gerade sein

Nun ist eine Summe aus ungeraden Zahlen aber nur gerade, wenn die Anzahl der Summanden gerade ist

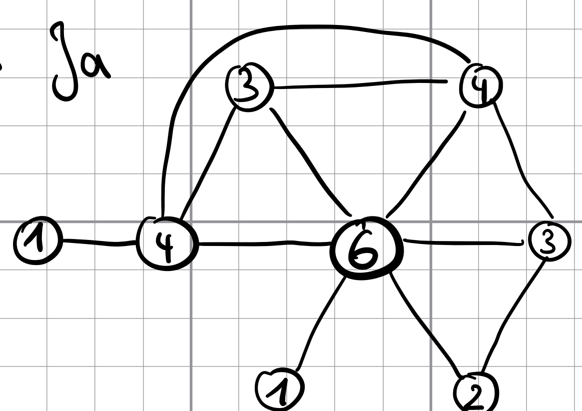
⇒ Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad muss gerade sein

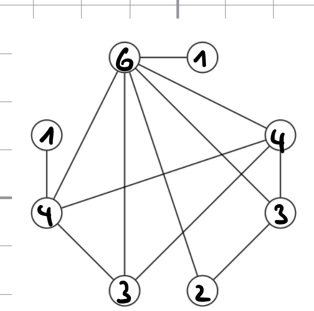
c) Die *Gradfolge* eines Graphen G ist die Folge, die man erhält, wenn man die Knotengrade von G in aufsteigender Reihenfolge ordnet, wobei ggf. Wiederholungen mit aufgenommen werden. Gibt es einen schlichten Graphen mit der Gradfolge:

1. $(1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6)$,
2. $(3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5)$,
3. $(1, 2, 3, 4)$,
4. $(1, 2, 3, 3, 4, 4)$?

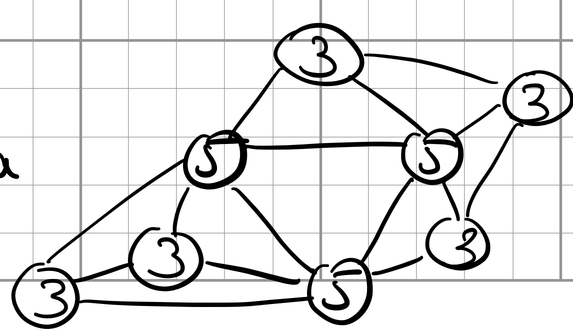
Zeichnen Sie einen jeweiligen Graphen, falls es ihn gibt.

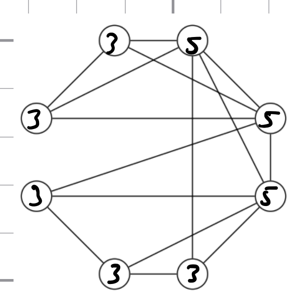
A3c) 1. Ja





2. Ja





3. Nein, denn da ein Knoten den Knotengrad 4 hat, es aber nur 4 Knoten im Graphen gibt, muss dieser Knoten (mindestens) eine Schlinge oder Parallelkante besitzen.

4. Nein, denn es gibt genau 3 Knoten mit ungeradem Knotengrad.

Aufgabe 4

Es liege ein (schlichter) Graph mit n Knoten vor. Zeigen Sie, dass

a) jeder gerichtete Graph höchstens $n(n-1)$ Kanten,

b) jeder ungerichtete Graph höchstens $n(n-1)/2$ Kanten aufweist.

A4) Ein gerichteter (ungerichteter) Graph, der keine parallelen Kanten und keine Schlingen enthält, heißt schlicht.

a) Von jedem der n Knoten kann höchstens zu jedem der $n-1$ anderen Knoten eine Kante führen:

Anfangsknoten	Endknoten	Anzahl Kanten
1	$2, 3, 4, \dots, n$	$n-1$
2	$1, \ \ 3, \dots, n$	$n-1$
3	$1, 2, 4, \dots, n$	$n-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$1, 2, 3, \dots, n-2, n$	$n-1$
n	$1, 2, 3, \dots, n-1$	$n-1$

Also insgesamt $n \cdot (n-1)$ Kanten

b) Ausgehend von Lösung aus a) werden die beiden gerichteten Kanten (i,j) und (j,i) durch eine Kante $[i,j]$ ersetzt.
Es entstehen im ungerichteten Graphen somit genau halb so viele Kanten wie im gerichteten Graphen aus Teil a)

$\Rightarrow$ $n \cdot (n-1) \,/\, 2$ Kanten

Alternativer Beweis über Teleskopsumme:

$$\sum_{i=1}^{n} n - i = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

nächstes Tutorium:

- Graphentheorie
  $\rightarrow$ kürzeste Wege

Online-Test:

Mo, 24.06. bis So, 30.06.

- Simplex mit oberen Schranken
- Parametrische Optimierung
- Multikriterielle Optimierung