Tutorium 7

Multikriterielle lineare Optimierung

- Zieldominanz

  (letzte Woche behandelt)

- Skalarisierung

  → Skaliere die unterschiedlichen Zielfunktionen

- Goal Programming

  → Minimiere die Abstandsfunktion

  (→ nutzt Skalarisierung)

  q-Norm:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot |z_i^* - F_i(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{wenn } 1 \le q < \infty \\ \max_{i=1,\dots,p} \{ \lambda_i \cdot |z_i^* - F_i(x)| \} & \text{wenn } q = \infty \end{cases}$$

- Zielerreichungsgeraden: $z_i(x) = \frac{F_i(x)}{z_i^*}$

- Pareto-Optimalität

x^{par} ist pareto-optimal, wenn es kein $x \in M$ gibt, so dass gilt

- $F_i(x) \geq F_i(x^{par})$ für alle $i \in \{1, \dots, p\}$
- $F_i(x) > F_i(x^{par})$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, p\}$

$(4,2)$ $(3,3)$ $(2,4)$ $\cancel{(2,3)}$

⇝ Pareto-Optimum ist ein Zustand, in dem es nicht möglich ist eine (Ziel-)Eigenschaft zu verbessern, ohne eine andere zu verschlechtern.

→ Bestimmen durch Parametrisierung der Zielfunktion

$$(1-t)\,F_1(x) + t\,F_2(x)$$

Aufgabe 1

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte her. Dabei verfolgt es neben dem langfristigen Gewinnziel noch zwei weitere Zielsetzungen. In der folgenden Tabelle sind das jeweilig angestrebte Ziel, die Zielbeiträge der einzelnen Produkte pro Mengeneinheit und ein Gewichtungsfaktor angegeben:

	Produkt		
Zielart	1	2	Gewichtungsfaktor
Gewinn	5	4	0.5
Prestige	3	4	0.3
Umweltverträglichkeit	5	2	0.2

Bezeichnet man mit x_1 und x_2 die zu produzierenden Mengen der Produkte 1 und 2, so ist das folgende Nebenbedingungssystem zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 24 \quad \text{Kapazitätsrestriktion 1} \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 12 \quad \text{Kapazitätsrestriktion 2} \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 16 \quad \text{Absatzrestriktion} \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Lösen Sie dieses multikriterielle Optimierungsproblem durch an die Zielgewichtung angelehnte Skalarisierung.

A1a) Zielfunktionen:

$$F_1(x) = 5x_1 + 4x_2$$
$$F_2(x) = 3x_1 + 4x_2$$
$$F_3(x) = 5x_1 + 2x_2$$

Ersatzzielfunktion mit vorgegebenen Gewichten

$$\tilde{F}(x) = 0.5\,F_1(x) + 0.3\,F_2(x) + 0.2\,F_3(x)$$
$$= 4.4x_1 + 3.6x_2$$

$\max \tilde{F}(x) \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 4$ (Bsp. Simplex)

mit $F_1(x) = 26,\ F_2(x) = 22,\ F_3(x) = 18$

b) Bestimmen Sie durch Goal Programming eine Kompromisslösung auf der Grundlage der Minimierung von Abstandsfunktionen mit $q = 1$ sowie $q = \infty$ und unter Verwendung der angegebenen Gewichtung. Sie dürfen ausnutzen, dass die optimalen Werte $z_1^* = 26$, $z_2^* = 24$ und $z_3^* = 20$ sind.

A1b) Minimiere Abstandsfunktion mit $q=1$

$$\min \tilde{F}(x) = 0.5 \cdot |26-5x_1-4x_2| + 0.3 \cdot |24-3x_1-4x_2| + 0.2 \cdot |20-5x_1-2x_2|$$

$$= 24.2 - 4.4x_1 - 3.6x_2$$

$$\Leftrightarrow \quad -\max \tilde{F}'(x) = -\max 4.4x_1 + 3.6x_2 - 24.2$$

$\max \tilde{F}'(x) \Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = 4$ (Bsp. Simplex)

mit ZF der Abstandsfunktion $= 1$

Minimiere Abstandsfunktion mit $q=\infty$

$$\min \tilde{F}(x) = \max\{0.5 \cdot |26-5x_1-4x_2|, 0.3 \cdot |24-3x_1-4x_2|, 0.2 \cdot |20-5x_1-2x_2|\}$$

$\rightsquigarrow$ Umformulierung als lineares Problem

$$\min \tilde{F}(x,d) = d$$ ← aber minimal

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 0.5 \cdot (26-5x_1-4x_2) \leq d \\
& 0.3 \; (24-3x_1-4x_2) \leq d \\
& 0.2 \; (20-5x_1-2x_2) \leq d
\end{aligned}$$

d mindestens so groß wie alle Bed.

$$\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\
2x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\
4x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\
x_1, x_2, d &\geq 0
\end{aligned}$$

$\min \tilde{F}(x) \Rightarrow x_1 = \frac{16}{9}, \; x_2 = \frac{38}{9}$ (löse mit dualem Simplex)

mit Abstand 0.533 (keine Ecke von $\mathbb{M}$, durch d höhere Dimensionalität)

Aufgabe 2

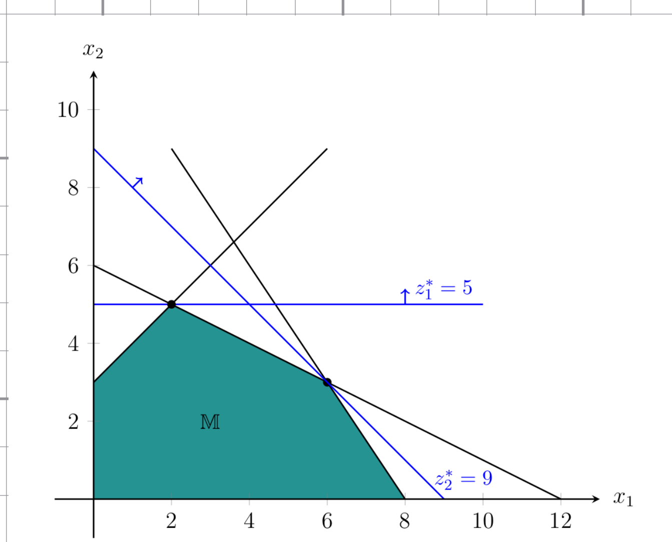
Gegeben seien das multikriterielle lineare Optimierungsproblem MKP

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
MKP: & \max & F_1(x) & = & & & x_2 & & \\
 & \max & F_2(x) & = & x_1 & + & x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & & \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 & & \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 & & \\
 & & & & x_1,\, x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

sowie die drei Punkte $x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus der zulässigen Menge $\mathbb{M}$ von MKP.

a) Berechnen Sie für alle $i = 1, 2$ und $j = 1, 2, 3$ die Zielerreichungsgrade $Z_i(x^j)$. Die optimalen Zielfunktionswerte z_i^* für $i = 1, 2$ können Sie der Einfachheit halber in einer graphischen Analyse bestimmen.

A2a)



Der Zielerreichungsgrad $Z_i(x) = \frac{F_i(x)}{z_i^*}$ gibt an, in welchem Ausmaß das Ziel i verwirklicht worden ist.

$z_1^* = \max F_1(x)$ s.t. $x \in \mathbb{M}$

$z_2^* = \max F_2(x)$ s.t. $x \in \mathbb{M}$

Aus der Abbildung können $z_1^* = 5$ und $z_2^* = 9$ abgelesen werden.

$$\Rightarrow Z_1(x) = \frac{F_1(x)}{z_1^*} = \frac{x_2}{5}, \quad Z_2(x) = \frac{F_2(x)}{z_2^*} = \frac{x_1 + x_2}{9} \quad (x \in M)$$

$Z_1(x_1) = \frac{2}{5}$ $\quad Z_1(x_2) = \frac{4}{5}$ $\quad Z_1(x_3) = 0$

$Z_2(x_1) = \frac{4}{9}$ $\quad Z_2(x_2) = \frac{8}{9}$ $\quad Z_2(x_3) = \frac{8}{9}$

b) Sei der Zielerreichungsgrad $Z_1(x)$ mit 60% und der Zielerreichungsgrad $Z_2(x)$ mit 40% gewichtet. Entscheiden Sie mit Hilfe der Zielerreichungsgrade, welcher Punkt x^j, $j = 1, 2, 3$, bzgl. aller Ziele präferiert werden sollte.

A2b)

$$Z_{Gew} = 0.6 Z_1(x) + 0.4 Z_2(x)$$
$$= \frac{2}{45} x_1 + \frac{37}{225} x_2$$

$\Rightarrow$ $Z_{Gew}(x_1) \approx 0.42$

$Z_{Gew}(x_2) \approx 0.84$ $\leftarrow$ Wir präferieren $x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

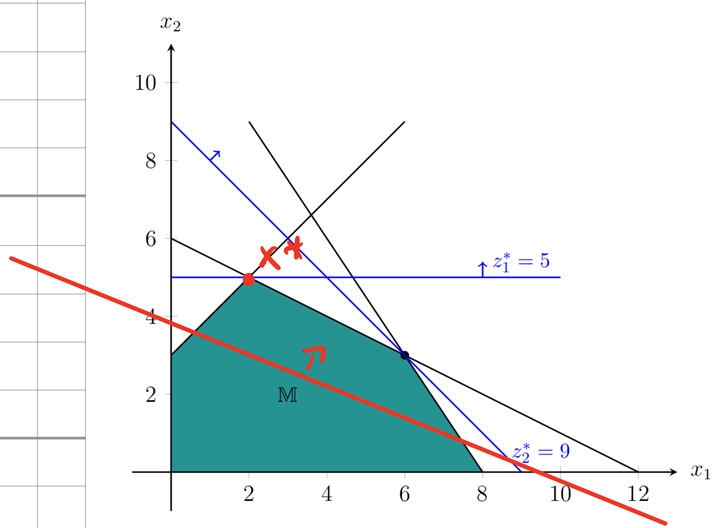
$Z_{Gew}(x_3) \approx 0.36$

c) Bestimmen Sie einen optimalen Punkt im Sinne der Gewichtungsmethode, wenn die Zielfunktion $F_1(x)$ mit 60% und die Zielfunktion $F_2(x)$ mit 40% gewichtet werden. Stellen Sie hierzu das lineare Optimierungsproblem auf und lassen Sie es von einem Solver, wie er z.B. in der Rechnerübung vorgestellt wird, lösen.

A2c)

$$P: \max\ 0.6 F_1(x) + 0.4 F_2(x) = 0.4x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x^* = \binom{2}{5}$, Ecke der zulässigen Menge



Beispielhafter Quellcode für IBM CPLEX Optimization Studio (freiwillig):

```
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;

maximize 0.4*x1 + x2;

subject to{
    -1*x1 + 1*x2 <= 3;
    3*x1 + 2*x2 <= 24;
    1*x1 + 2*x2 <= 12;
}
```

d) Bestimmen Sie einen optimalen Punkt im Sinne der Gewichtungsmethode, wenn Sie anstelle der ursprünglichen Zielfunktionen die in Teil b) beschriebenen Zielerreichungsgrade zugrundelegen. Stellen Sie hierzu das lineare Optimierungsproblem auf und lassen Sie es von einem Solver, wie er z.B. in der Rechnerübung vorgestellt wird, lösen.

A2d) P: $\max\; 0.6\, z_1(x) + 0.4\, z_2(x) = \frac{2}{45} x_1 + \frac{37}{225} x_2$

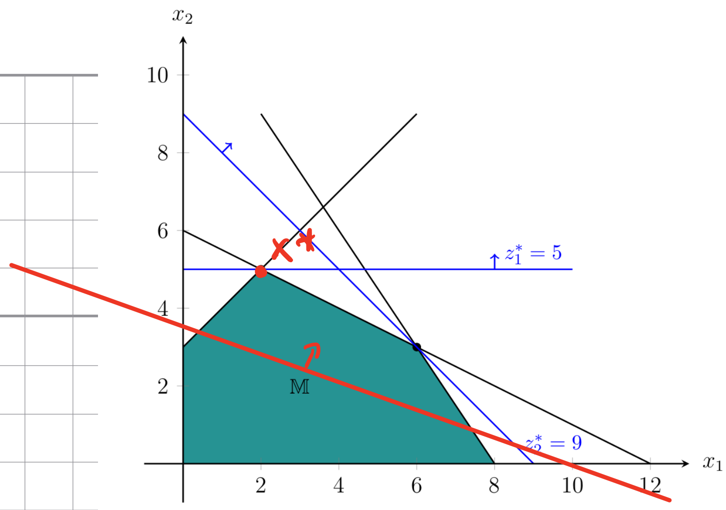
s.t. $-x_1 + x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 24$

$x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x^* = \binom{2}{5}$, Ecke der zulässigen Menge



Beispielhafter Quellcode für IBM CPLEX Optimization Studio (freiwillig):

```
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;

maximize (2/45)*x1 + (37/225)*x2;

subject to{
    -1*x1 + 1*x2 <= 3;
    3*x1 + 2*x2 <= 24;
    1*x1 + 2*x2 <= 12;
}
```

Lösung nur Eckpunkte (lineare Optimierung)

⇝ Abhängig von Gewichtung

⇝ große Frage: Wie wählt man Gewichte?

Aufgabe 3

Gegeben sei das folgende bikriterielle lineare Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\max & F_1(x) = & & & x_2 & & \\
\max & F_2(x) = & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bestimmen Sie die Menge aller Pareto-optimalen Punkte.

A3) Es ist $c_1 = (0,1)^T$ und $c_2 = (1,1)^T$

löse folgende Zielfunktion:

$$((1-t)c_1 + tc_2)^T x = (1-t)F_1(x) + tF_2(x) \qquad t \in [0,1]$$

Problem: gewünschte Form $(c + t\gamma)^T x$

$\Rightarrow c = c_1 = (0,1)^T$ und $\gamma = c_2 - c_1 = (1,1)^T - (0,1)^T = (1,0)^T$

$$\Rightarrow (1-t)F_1(x) + tF_2(x) = (1-t)x_2 + t(x_1 + x_2)$$
$$= x_2 + t x_1$$

Berechne optimalen Punkt für $t = 0$

	x_1	x_2	
$\bar{c}$	0	-1	0
$\bar{\gamma}$	-1	0	0
x_3	-1	1	3
x_4	3	2	24
x_5	1	2	12

$\Rightarrow$

	x_1	x_3	
$\bar{c}$	-1	1	3
$\bar{\gamma}$	-1	0	0
x_2	-1	1	3
x_4	5	-2	18
x_5	3	-2	6

$\Rightarrow$

	x_5	x_3	
$\bar{c}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5
$\bar{\gamma}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5
x_4	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	8
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2

$x^* = (2,5)$ ist optimal für

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \geq 0, \quad \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad t \geq -1 \;, \; t \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$

Berechne optimalen Punkt für $t > \frac{1}{2}$ durch primalen Austauschschritt, wobei x_3 in die Basis kommt und x_4 die Basis verlässt

	x_5	x_3	
$\bar{c}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5
$\bar{\gamma}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5
x_4	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	8
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2

$\Rightarrow$

	x_5	x_4	
$\bar{c}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3
$\bar{\gamma}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6
x_2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3
x_3	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	6
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6

$x^* = (6,3)$ ist optimal für

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t \geq 0, \; -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad t \leq \frac{3}{2} \;, \; t \geq \frac{1}{2}$

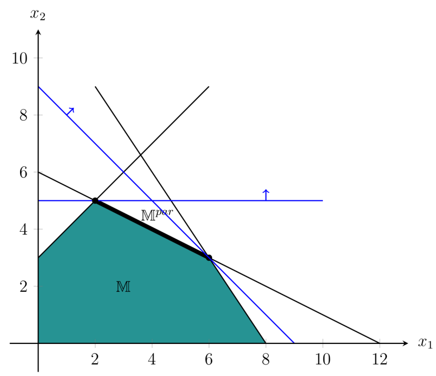
$\Leftrightarrow \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Zusammenfassung ($z^*(t)$ auf vektorwertige (Ausgangs-)Zielfunktion bezogen)

t	$\mathbb{M}^*(t)$	$z^*(t)$
$(0, \frac{1}{2})$	$\{(2,5)\}$	$(5,7)$
$\frac{1}{2}$	$[(2,5),(6,3)]$	$[(5,7),(3,9)]$
$(\frac{1}{2}, 1)$	$\{(6,3)\}$	$(3,9)$

Die Menge der Pareto-optimalen Punkte ist somit die Verbindungsstrecke der Punkte $(2,5)$ und $(6,3)$, d.h. $\mathbb{M}^{par} = [(2,5),(6,3)]$

Grafische Veranschaulichung:

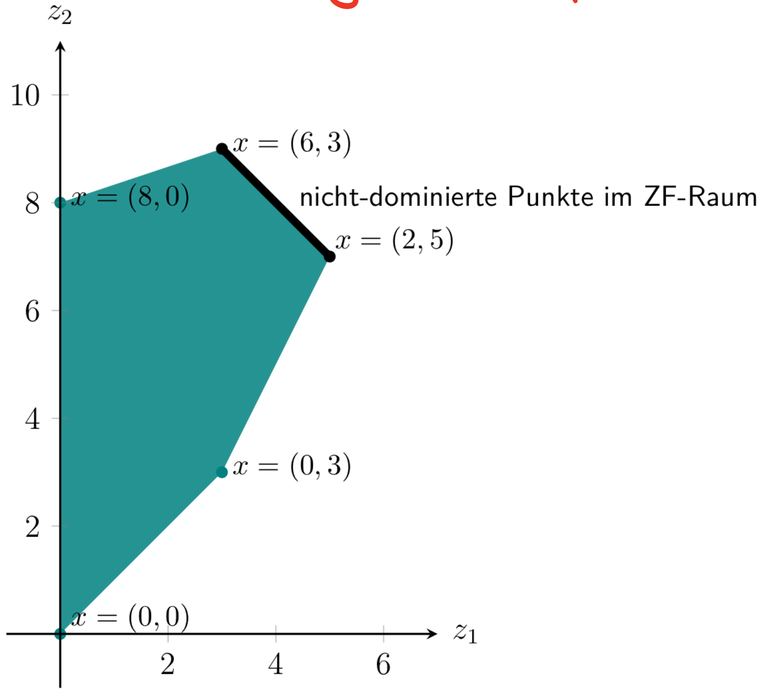


Exkurs (nicht Bestandteil der Vorlesung): Grafische Veranschaulichung der sog. nicht-dominierten Punkte im Zielfunktionen-Raum; dies sind die Zielfunktionsvektoren, die zu den Pareto-optimalen Punkten gehören

Korrespondenz zwischen $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{M}$ und zugehörigem Zielfunktions-Vektor $F(x) = \big(F_1(x), F_2(x)\big) = (x_2, x_1 + x_2)$ lässt sich durch korrespondierende Eckpunkte in Grafik konstruieren

Eckpunkt (x_1, x_2)	Zielfunktionsvektor $(z_1, z_2) = (x_2, x_1 + x_2)$
$(0,0)$	$(0,0)$
$(8,0)$	$(0,8)$
$(6,3)$	$(3,9)$
$(2,5)$	$(5,7)$
$(0,3)$	$(3,3)$

Veranschaulichung im Zielfunktionsraum:



nächstes Tutorium:

Transportprobleme
- Nordwesteckenregel
- Stepping Stone Methode

2. Online Test
- Big-M-Methode
- Dualität
- Dualer Simplex