Tutorium 4

Big-M-Methode:

Vorgehensweise (1)

- Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit positiver rechter Seite $b \geq 0$.
  - Führe einen der folgenden Schritte durch:
    - Zu jeder Nebenbedingung i wird eine Schlupfvariable $y_i \geq 0$ mit positivem Vorzeichen hinzugefügt
    - Zu jeder Nebenbedingung i ohne Schlupfvariable mit positivem Vorzeichen wird eine Schlupfvariable $y_i \geq 0$ mit positivem Vorzeichen hinzugefügt

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 3$$

Vorgehensweise (2)

- Die Hilfsvariablen werden in der Zielfunktion (bei Max-Problemen) mit $-M$ bewertet ($M \geq 0$ und hinreichend groß) und man erhält ein erweitertes Problem mit bekannter zulässige Basislösung.

- Der primale Simplex-Algorithmus wird nun solange auf das erweiterte Problem angewendet bis alle zusätzlichen Variablen die Basis verlassen haben

$\Rightarrow$ zulässige Lösung für Ausgangsproblem gefunden

- Die zulässige Lösung wird mit Hilfe des primalen Simplex-Algorithmus optimiert.

Bemerkung: Unzulässige Probleme

Das lineare Optimierungsproblem besitzt keine zulässige Lösung, wenn alle Opportunitätskosten nichtnegativ sind, aber sich immer noch Hilfsvariablen $y_i > 0$ in der Basis finden.

Dualität

primales Problem P: $\max\ c^T x \quad$ s.t. $Ax \leq b$, $x \geq 0$

duales Problem D: $\min\ b^T y \quad$ s.t. $A^T y \geq c$, $y \geq 0$

Dualisierungsregeln

Maximierung	Minimierung
Zielfunktionskoeffizient c_j	Rechte Seite c_j
Rechte Seite b_i	Zielfunktionskoeffizient b_i
Koeffizientenmatrix A	Koeffizientenmatrix A^T
Restriktionszeile i: $\leq$-Ungleichung	Variable $y_i \geq 0$
Restriktionszeile i: Gleichung	Variable $y_i \in \mathbb{R}$
Restriktionszeile i: $\geq$-Ungleichung	Variable $y_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Restriktionszeile j: $\geq$-Ungleichung
Variable $x_j \in \mathbb{R}$	Restriktionszeile j: Gleichung
Variable $x_j \leq 0$	Restriktionszeile j: $\leq$-Ungleichung

Satz vom komplementären Schlupf

Es seien (x,u) ein zulässiger Punkt von

$P_=$: $\max\ c^T x \quad$ s.t. $Ax + u = b$; $x, u \geq 0$

und (y,w) ein zulässiger Punkt des zu P= dualen Problems

$$D=: \quad \min \; b^T y \quad \text{s.t.} \quad A^T y - w = c \quad ; \quad y, w \geq 0$$

Dann sind (x,u) und (y,w) genau dann optimal, wenn die Komplementärbedingungen $x^T w = 0$ und $y^T u = 0$ erfüllt sind.

Wegen der Nichtnegativitätsbedingungen gilt:

- $x^T w = 0 \iff x_j w_j = 0$ für $j = 1, \dots, n$
- $y^T u = 0 \iff y_i u_i = 0$ für $i = 1, \dots, m$

Aufgabe 1

Angenommen Sie hätten die Information, dass x_2 und x_3 im optimalen Punkt des folgenden linearen Optimierungsproblems ungleich Null sind.

$$\begin{array}{llllllll} \max & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 30 \\ & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe dieser Information den Simplex-Algorithmus für dieses Problem verändern kann, so dass eine minimale Anzahl von Iterationen zur Lösung benötigt wird.

A1) a) 2 Nebenbedingungen, 3 Variablen

$\Rightarrow$ Basislösung hat maximal 2 Variablen > 0

Im optimalen Punkt x_2 und x_3 in der Basis

$\Rightarrow$ Pivotiere zuerst x_2 und x_3 in die Basis

(egal welche Variable das Simplex-Verfahren wählen würde)

b) Lösen Sie das Problem mit dem abgewandelten Simplex-Algorithmus aus Teil a).

	x_1	x_2	x_3	
z	-5	-3	-4	0
x_4	2	1	1	20
x_5	3	1	2	30

$\Rightarrow$

	x_1	x_4	x_3	
z	1	3	-1	60
x_2	2	1	1	20
x_5	1	-1	1	10

	x_1	x_4	x_5	
z	2	2	1	70
x_2	1	2	-1	10
x_3	1	-1	1	10

$\Rightarrow x_1^* = 0, \; x_2^* = 10, \; x_3^* = 10$

mit $z^* = 70$

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit Hilfe der Big-M-Methode. Entscheiden Sie hierzu zunächst, welcher Nebenbedingung eine Hilfsvariable hinzugefügt werden muss.

$$\begin{array}{llllllll} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 60 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \geq & 120 \\ & & & & x_1, & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

A2) Normalform ohne Hilfsvariablen

$$\begin{array}{llllll} \max & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & & = & 60 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 & - x_4 & = & 120 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Punkt (0,0,0) ist nicht zulässig.

=> Normalform mit Hilfsvariablen

Strafterme

$$\begin{array}{llll} \max & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & - My_1 - My_2 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & + y_1 & = 60 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 & + y_2 & = 120 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Überführung in Tableauform

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
M	0	0	0	0	M	M	0
z	-3	-2	-4	0	0	0	0
y_1	2	1	3	0	1	0	60
y_2	3	3	5	-1	0	1	120

$1 \cdot -M$

$1 \cdot -M$

y_1 und y_2 sind Basisvariablen, aber die zugehörigen Spalten bilden keine Einheitsvektor (Bewertung mit $-M$) $\Rightarrow$ Umformen mit Zeilenoperationen

	x_1	x_2	x_3	x_4	
M	$-5M$	$-4M$	$-8M$	M	$-180M$
z	-3	-2	-4	0	0
y_1	2	1	3	0	60
y_2	3	3	5	-1	120

$\Rightarrow$

	x_1	x_2	y_1	x_4	
M	$\frac{1}{3}M$	$-\frac{4}{3}M$	•	M	$-20M$
z	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	•	0	80
x_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	•	0	20
y_2	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	•	-1	20

	x_1	x_2	y_1	x_4	
M	$\frac{1}{3}M$	$-\frac{4}{3}M$	•	M	$-20M$
z	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	•	0	80
x_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	•	0	20
y_2	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	•	-1	20

$\Rightarrow$

	x_1	y_2	y_1	x_4	
M	0	•	•	0	0
z	$-\frac{1}{2}$	•	•	$-\frac{1}{2}$	90
x_3	$\frac{3}{4}$	•	•	$\frac{1}{4}$	15
x_2	$-\frac{1}{4}$	•	•	$-\frac{3}{4}$	15

$\Rightarrow$ Punkt zulässig, da alle Hilfsvariablen die Basis verlassen haben

- weiter mit primalem Simplex

	x_1	x_4	
z	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	90
x_3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	15
x_2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	15

	x_3	x_4	
z	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	100
x_1	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	20
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	20

	x_3	x_1	
z	2	1	120
x_4	4	3	60
x_2	3	2	60

$\Rightarrow$ optimaler Punkt $x^* = (0, 60, 0)$ mit $z^* = 120$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe der Big-M-Methode, dass das folgende lineare Optimierungsproblem keinen zulässigen Punkt besitzt.

$$\begin{array}{llcll} \max & 90x_1 & + & 70x_2 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \geq 2 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Normalform mit Hilfsvariablen

$$\begin{array}{llllllll} \max & 90x_1 & + 70x_2 & & & -My_1 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + x_2 & + x_3 & & & = 2 \\ & x_1 & - x_2 & & - x_4 & + y_1 & = 2 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 & \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_4	
M	$-M$	M	M	$-2M$
z	-90	-70	0	0
x_3	2	1	0	2
y_1	1	-1	-1	2

$\Rightarrow$

	x_3	x_2	x_4	
M	$\frac{1}{2}M$	$\frac{3}{2}M$	M	$-M$
z	45	-25	0	90
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
y_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	1

$\Rightarrow$ Da $\frac{3}{2}M - 25 > 0$ ist der Punkt optimal.

Allerdings ist y_1 noch in der Basis, d.h. es existiert auch kein optimaler Punkt mit $y_1^* = 0$.

$\Rightarrow$ Es existiert kein zulässiger Punkt, d.h. $M = \emptyset$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe der Big-M-Methode einen optimalen Punkt für das folgende lineare Optimierungsproblem. Transformieren Sie hierzu zunächst in Normalform und fügen Sie anschließend benötigte Hilfsvariablen hinzu. Geben Sie auch den zwischenzeitlich zunächst gefundenen zulässigen Punkt an. Ist die Menge der optimalen Punkte mehrelementig?

$$\begin{array}{llcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 25 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 30 \\
 & & & & & x_3 & \leq & 20 \\
 & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

A4)

Normalform ohne Hilfsvariablen

$$\begin{array}{llcrcrcrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 25 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & 30 \\
 & & & & & x_3 & & & + & x_5 & = & 20 \\
 & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Normalform mit benötigten Hilfsvariablen

$$\begin{array}{llcrcrcrcrcrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & & & - & My_1 & - & My_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & y_1 & & & = & 25 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & & & + & y_2 & = & 30 \\
 & & & & & x_3 & & & + & x_5 & & & & & = & 20 \\
 & & & & & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_5, y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Starttableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	
M	$-5M$	$-4M$	$-2M$	M	$-55M$
z	-3	-2	-3	0	0
y_1	1	2	1	0	25
y_2	$\boxed{4}$	2	1	-1	30
x_5	0	0	1	0	20

Iteration 1

	y_2	x_2	x_3	x_4	
M	•	$-\frac{3}{2}M$	$-\frac{3}{4}M$	$-\frac{1}{4}M$	$-\frac{35}{2}M$
z	•	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{45}{2}$
y_1	•	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{35}{2}$
x_1	•	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{15}{2}$
x_5	•	0	1	0	20

Iteration 2

	y_2	y_1	x_3	x_4	
M	•	•	0	0	0
z	•	•	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{85}{3}$
x_2	•	•	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{35}{3}$
x_1	•	•	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_5	•	•	$\boxed{1}$	0	20

Zulässiger Punkt: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{35}{3}$, $x_3 = 0$, $z = \frac{85}{3}$

Iteration 3

	x_5	x_4	
z	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{205}{3}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{6}}$	$\frac{5}{3}$
x_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_3	1	0	20

Iteration 4

	x_5	x_2	
z	0	4	75
x_4	-3	6	10
x_1	-1	2	5
x_3	1	0	20

Optimaler Punkt $x_1^* = 5$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 20$ mit $z^* = 75$

Ja, die Menge der optimalen Punkte $\mathbb{M}^*$ ist mehrelementig, da aufgrund der Opportunitätskosten von 0 für x_5 im letzten Tableau ein Basistausch (mit x_3) vollzogen werden könnte, der den Zielfunktionswert unverändert lässt.

Aufgabe 5

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem (P):

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -8 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 5 \\
 & & & & & x_1 & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & & x_2,\ x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Maximierung	Minimierung
Zielfunktionskoeffizient c_j	Rechte Seite c_j
Rechte Seite b_i	Zielfunktionskoeffizient b_i
Koeffizientenmatrix A	Koeffizientenmatrix A^T
Restriktionszeile i: $\leq$-Ungleichung	Variable $y_i \geq 0$
Restriktionszeile i: Gleichung	Variable $y_i \in \mathbb{R}$
Restriktionszeile i: $\geq$-Ungleichung	Variable $y_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Restriktionszeile j: $\geq$-Ungleichung
Variable $x_j \in \mathbb{R}$	Restriktionszeile j: Gleichung
Variable $x_j \leq 0$	Restriktionszeile j: $\leq$-Ungleichung

a) Geben Sie das zu (P) duale Problem (D) an.

A5) a) D:

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\min & -8y_1 & +7y_2 & +5y_3 & & \\
\text{s.t.} & -3y_1 & -2y_2 & +y_3 & = & -1 \\
 & y_1 & +y_2 & & \geq & 2 \\
 & -2y_1 & -y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\
 & & & y_2 & \in & \mathbb{R} \\
 & & & y_1, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Geben Sie (P) in Normalform $(P1)$ an.

b) P1:

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
\max & -x_1^+ & +x_1^- & +2x_2 & +x_3 & & & & \\
\text{s.t.} & -3x_1^+ & +3x_1^- & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & & = & -8 \\
 & -2x_1^+ & +2x_1^- & +x_2 & -x_3 & & & = & 7 \\
 & x_1^+ & -x_1^- & & +2x_3 & & +x_5 & = & 5 \\
 & & & & & & x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

c) Geben Sie das zu $(P1)$ duale Problem $(D1)$ an.

c) D1:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & -8y_1 & +7y_2 & +5y_3 & & \\
\text{s.t.} & -3y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -1 \\
 & 3y_1 & +2y_2 & -y_3 & \geq & 1 \\
 & y_1 & +y_2 & & \geq & 2 \\
 & -2y_1 & -y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\
 & y_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & y_3 & \geq & 0 \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

d) Sind die Probleme (D) und $(D1)$ äquivalent?

d) D:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & -8y_1 & +7y_2 & +5y_3 & & \\
\text{s.t.} & -3y_1 & -2y_2 & +y_3 & = & -1 \\
 & y_1 & +y_2 & & \geq & 2 \\
 & -2y_1 & -y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\
 & & y_2 & & \in & \mathbb{R} \\
 & & y_1, y_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

D1:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & -8y_1 & +7y_2 & +5y_3 & & \\
\text{s.t.} & -3y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -1 \\
 & 3y_1 & +2y_2 & -y_3 & \geq & 1 \\
 & y_1 & +y_2 & & \geq & 2 \\
 & -2y_1 & -y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\
 & y_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & y_3 & \geq & 0 \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Ja, sie sind äquivalent.

Aufgabe 6

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem P:

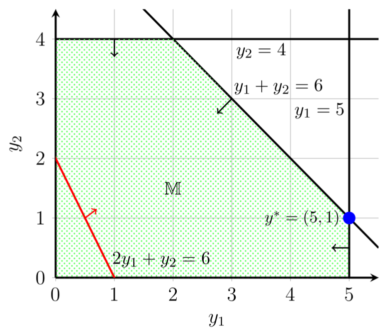
$$\begin{array}{llllllll} \min & 6x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & & & \geq & 2 \\ & x_1 & & & + & x_3 & \geq & 1 \\ & & & & x_1,\ x_2,\ x_3 & & \geq & 0 \end{array}$$

a) Lösen Sie das zu P duale Problem graphisch.

A6) a)

a) Duales Problem

$$\begin{array}{lllllll} (D) & \max & 2y_1 & + & y_2 & & \\ & \text{s.t.} & y_1 & + & y_2 & \leq & 6 \\ & & y_1 & & & \leq & 5 \\ & & & & y_2 & \leq & 4 \\ & & & & y_1,\ y_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Graphische Lösung: $y^* = (5, 1)$ mit $v^* = 11$

b) Bestimmen Sie möglichst einfach (unter Zuhilfenahme der Ergebnisse aus a)) den optimalen Punkt von P.

A6) b) Satz vom komplementären Schlupf.

$\Rightarrow$ Wir brauchen $P_=$ und $D_=$

$$\begin{array}{llllll} P_=: & \min & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & & \\ & \text{s.t.} & x_1 + x_2 & -u_1 & & = 2 \\ & & x_1 \qquad + x_3 & & -u_2 & = 1 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, u_1, u_2 & \geq 0 \end{array}$$

$D =:\quad \max\ 2y_1 + y_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad y_1 + y_2 + w_1 &= 6 \\ y_1 + w_2 &= 5 \\ y_2 + w_3 &= 4 \\ y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

x und y sind optimal, wenn gilt:

$x^T w = 0$ und $y^T u = 0$

$\Rightarrow\quad x_1 w_1 = 0,\ x_2 w_2 = 0,\ x_3 w_3 = 0 \qquad \Rightarrow\quad y_1 u_1 = 0,\ y_2 u_2 = 0$

Aus Aufgabe a) wissen wir:

$y_1^* = 5,\ y_2^* = 1,\ w_1^* = w_2^* = 0,\ w_3^* = 3$

$\Rightarrow\ u_1^*, u_2^*, x_3^* = 0$

$\Rightarrow$ restliche Gleichungen von P lösen

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1^* &= 1 \\ x_2^* &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ x^* = (1, 1, 0)$ mit $z^* = 11$

1. Online Test:

13.05. bis 19.05., Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Aufgaben:
- Modellierung (3/11)
- Graphische Lösung (3/11)
- Ecken (2/11)
- Formen und Basen (1/11)
- Simplex (2/11)

nächstes Tutorium:

- primaler & dualer Simplex
- Dualität