Fynn Knöll

ujwjb@student.kit.edu

Tut-Folien auf github:

github.com/FynnKnoell00/OR-1-Tutorium-SS24

Meine Tutorien:

Fr: 8:00-9:30 10.81 HS62

Fr: 11:30-13:00 10.50 Raum 602

Einführung in das Operations Research I

Tutorium

- Übungsaufgaben zu den Inhalten aus der Vorlesung
- keine vollständige Wiederholung der Vorlesung

=> Klausur enthält Aufgaben ähnlich zu denen aus den Tutorien (aber auch aus der VL)

- „Hausaufgaben" für Tutorien gekennzeichnet mit ⌂

=> Lösungen sind entweder gute Vorbereitung auf das Tut oder werden im Tut in anderen Aufgaben verwendet

Lineare Optimierungsprobleme

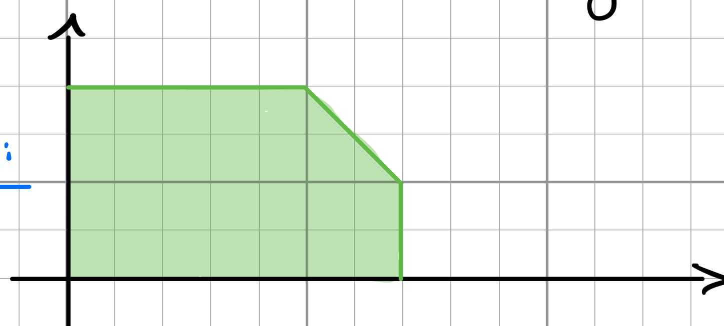
Form: $\max / \min \quad c^T x$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

x sind Entscheidungsvariablen

Nebenbedingungen sind (Un-) Gleichungen

Grafisches Beispiel:



- Modellieren eines linearen Optimierungsproblem

1. Entscheidungsvariablen benennen / bestimmen
   ↳ Index nicht vergessen

2. Mathematisches Problem / Optimierungsproblem

   2.1 max / min Funktion aufstellen

   2.2 Nebenbedingungen aufstellen
   ↳ Wertebereiche der Entscheidungsvariablen beachten

Aufgabe 1 🏠

Wiederholen Sie zunächst die Grundlagen zu Vektoren und Matrizen. Hierzu können Sie die Datei *Vektoren, Matrizen, LGS.pdf* im ILIAS-Bereich dieses Übungsblatts nutzen.

Gegeben seien nun die folgenden Vektoren und Matrizen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}^{3\times 1}, \quad y = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}^{3\times 1}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}^{2\times 1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{2\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{2\times 2}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{2\times 2}$$

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $x + y$

b) $x - y$

c) $5 \cdot x$

d) $B + C$

e) $A \cdot x$

f) $C \cdot A$

g) $x^{\mathsf{T}} \cdot y$

h) $x \cdot y^{\mathsf{T}}$

i) $z^{\mathsf{T}} \cdot B$

j) $A^{\mathsf{T}} \cdot B$

k) B^{-1} und C^{-1} (mittels elementarer Zeilenoperationen und der allgemeinen Regel)

Sollte aus Mathe-Vorlesungen bekannt sein

$\Rightarrow$ Lösungen von 🏠 -Aufgaben sind in ILIAS zu finden

Jetzt betrachten wir nur Teilaufgaben g) und k)

g) $x^T \cdot y = (2 \quad 1 \quad 5) \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = 14$

$\Rightarrow$ Standardskalarprodukt

$\Rightarrow$ andere Schreibweise $\langle x, y \rangle$

k) B^{-1} und C^{-1} berechnen

<u>Mit elementaren Zeilenoperationen:</u>

B^{-1}: Erweitere B

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Forme $(B|I)$ so um, dass links I steht $(I|B^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \cdot(-1) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Mit allgemeiner Regel für 2×2-Matrizen:

$$B^{-1} = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{21} \\ -b_{12} & b_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\cdot2 - 5\cdot1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

C^{-1}:

$$(C|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

zweite Zeile ist Null

=> nicht möglich, $(C|I)$ umzuformen

=> C ist nicht invertierbar

Aufgabe 2

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 5x_2 & & & = & 6 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \end{array}$$

Umformulierung als lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr|l}
3x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 9 & \\
x_1 & + & 5x_2 & & & = & 6 & \cdot(-2) \\
2x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & = & 9 &
\end{array}
\iff
\begin{array}{rcrcrcr|l}
3x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 9 & \\
x_1 & + & 5x_2 & & & = & 6 & \\
 & & & & 3x_3 & = & -3 & \cdot\frac{1}{3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr|l}
3x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 9 & \\
x_1 & + & 5x_2 & & & = & 6 & \\
 & & & & x_3 & = & -1 & \cdot(-1)
\end{array}
\iff
\begin{array}{rcrcrcr|l}
3x_1 & + & 7x_2 & & & = & 8 & \\
x_1 & + & 5x_2 & & & = & 6 & \cdot(-3) \\
 & & & & x_3 & = & -1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr|l}
 & - & 8x_2 & & & = & -8 & \cdot\left(-\frac{1}{8}\right) \\
x_1 & + & 5x_2 & & & = & 6 & \\
 & & & & x_3 & = & -1 &
\end{array}
\iff
\begin{array}{rcrcrcr|l}
 & & x_2 & & & = & 1 & \cdot(-5) \\
x_1 & + & 5x_2 & & & = & 6 & \\
 & & & & x_3 & = & -1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
 & & x_2 & & & = & 1 \\
x_1 & & & & & = & 1 \\
 & & & & x_3 & = & -1
\end{array}
\implies \mathbb{L} = \{(1,1,-1)\}$$

b) Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr}
3\,x_1 & + & 7\,x_2 & = & 4 \\
2\,x_1 & + & 5\,x_2 & = & 2
\end{array}$$

Geben Sie das lineare Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise $A \cdot x = b$ an und bestimmen Sie eine Lösung für das Gleichungssystem mit Hilfe der inversen Matrix von A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \quad | \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

c) Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 3 \\ 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Versuchen Sie mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens eine Lösung für dieses Gleichungssystem zu bestimmen.

Gelingt es, das Gleichungssystem zu lösen, wenn Sie für x_1 einen Wert angeben?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot(-3) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & -3 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \;| \cdot -\tfrac{1}{3} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Problem: x_1 lässt sich nicht isolieren.

$\Rightarrow$ Es gibt mehrere Lösungen

Grund: unterbestimmtes LGS mit 3 Unbekannten aber nur 2 Gleichungen

Ausweg: Fixiere Variable x_1.

Bsp.: $x_1 = 0 \Rightarrow x = (0, 1, -1)^T$

$x_1 = 1 \Rightarrow x = (1, -2, 4)^T$

$$\mathbb{L} = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{N}, x_2 = 1 - 3x_1, x_3 = -1 + 5x_1 \}$$

Aufgabe 3

Das Unternehmen *Iceman AG* stellt verschiedene Eissorten her. Im Folgenden sollen die in der nächsten Woche zu produzierenden Mengen der Sorten Schokolade, Haselnuss und Vanille bestimmt werden.

Die Herstellung der Eissorten erfolgt jeweils in zwei Arbeitsschritten, die auf Maschine 1 bzw. Maschine 2 ausgeführt werden. Je Woche stehen 33 Maschinenstunden auf Maschine 1 und 40 Maschinenstunden auf Maschine 2 zur Verfügung. Dabei ist die Anzahl der Maschinenstunden, die zur Produktion einer Tonne der verschiedenen Eissorten benötigt werden, in folgender Tabelle gegeben:

	Maschinenstunden pro Tonne		
	Schokolade	Haselnuss	Vanille
Maschine 1	2	2	1
Maschine 2	4	2	2

Begleitend zur maschinellen Produktion wird ein Mitarbeiter benötigt. Zur Herstellung einer Tonne Schokoladeneis muss der Mitarbeiter 2 Stunden arbeiten; für eine Tonne Haselnusseis bzw. Vanilleeis braucht er 1 Stunde bzw. 2 Stunden. Die Wochenarbeitszeit des Mitarbeiters beträgt 38 Stunden. Aufgrund von bestehenden Arbeitsverträgen muss der Arbeiter sogar genau diese Anzahl von Stunden pro Woche arbeiten.

Die Sorte Schokolade ist sehr beliebt und für die übernächste Woche liegt bereits eine Bestellung eines Großhändlers über eine Menge von 5 Tonnen vor. Darum muss diese Menge in der kommenden Woche mindestens produziert werden.

Weiterhin hat die Firma in den letzten Jahren die Erfahrung gemacht, dass die Händler, wenn sie Haselnusseis bestellen, auch immer Vanilleeis nachfragen. Darum muss die *Iceman AG* pro Woche mindestens soviel Vanille- wie Haselnusseis herstellen.

Beim Verkauf der Produkte ergibt sich ein Gewinn von 4000 € für eine Tonne Schokoladeneis, 3000 € für eine Tonne Haselnusseis und 2000 € für eine Tonne Vanilleeis.

Stellen Sie ein lineares Optimierungsproblem auf, mit dessen Hilfe sich ein gewinnoptimales Produktionsprogramm bestimmen lässt. Wählen Sie dabei geeignete Entscheidungsvariablen und geben Sie deren Bedeutung an.

Q: Wie wählen wir die Entscheidungsvariablen?

Entscheidungsvariablen:

- x_S : Produktionsmenge Schokoladeneis in Tonnen
- x_H : Produktionsmenge Haselnusseis in Tonnen
- x_V : Produktionsmenge Vanilleeis in Tonnen

Lineares Optimierungsproblem:

Q: Was sind Zielfunktion / Nebenbedingungen von diesem Problem?

	Maschinenstunden pro Tonne		
	Schokolade	Haselnuss	Vanille
Maschine 1	2	2	1
Maschine 2	4	2	2

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 4000\,x_S + 3000\,x_H + 2000\,x_V & & \\
\text{s.t.} & 2x_S + 2x_H + x_V & \leq & 33 \\
 & 4x_S + 2x_H + 2x_V & \leq & 40 \\
 & 2x_S + x_H + 2x_V & = & 38 \\
 & x_S & \geq & 5 \\
 & -x_H + x_V & \geq & 0 \\
 & x_S, x_H, x_V & \geq & 0
\end{array}
$$

$(x_V \geq x_H)$

Aufgabe 4

Eine Ölraffinerie garantiert pro hergestellter Einheit eines Produktes P einen Minimalgehalt b_i von jedem der Bestandteile B_i $(i = 1, \ldots, m)$ und einen Maximalgehalt v einer Verunreinigung V. P wird aus den Rohstoffen R_k $(k = 1, \ldots, n)$ hergestellt. Eine Einheit R_k kostet c_k Geldeinheiten und enthält a_{ik} Einheiten von B_i und u_k Einheiten von V.

Wie viele Einheiten der jeweiligen Rohstoffe sollen verwendet werden, so dass das damit hergestellte Produkt den garantierten Anforderungen entspricht und die Gesamtkosten der benutzten Rohstoffe minimal sind? Formulieren Sie diese Aufgabe als lineares Optimierungsproblem.

Q: Wie wählen wir die Entscheidungsvariablen?

Q: Was sind Zielfunktion / Nebenbedingungen von diesem Problem?

Entscheidungsvariablen:

- x_k : Anzahl der verwendeten Einheiten von R_k $(k = 1, \ldots, n)$

Zielfunktion:

- Minimiere Gesamtkosten (Produktionskosten für Rohstoffe)

Nebenbedingungen:

- Minimalgehalt b_i von jedem Bestandteil B_i
- Maximalgehalt v an Verunreinigungen
- Nichtnegativitätsbedingungen

Lineares Optimierungsproblem:

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_k x_k$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_k \geq b_i \qquad (i = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_k x_k \leq v$$

$$x_k \geq 0 \qquad (k = 1, \dots, n)$$

nächstes Tutorium:

- Graphische Lösung von Problemen
- Standardform
- Konvexität