Aufgabe 1 Tutorium 13

Walter Bill, Vorsitzender der *Lincoln Construction*, denkt darüber nach, ein Gebot für ein Bauprojekt abzugeben. Hierzu müssten im Verlauf des Projekts fünf Vorgänge durchgeführt werden. Im Rahmen der PERT-Methode konnte Walter Bill sowohl Schätzwerte für die einzelnen Vorgangsdauern bestimmen als auch die Vorrangbeziehungen der Vorgänge bestimmen:

	Vorgangsdauern			
Vorgang	Optimistischer Schätzwert	Wahrscheinlichster Schätzwert	Pessimistischer Schätzwert	Unmittelbare Vorgänger
A	3 Wochen	4 Wochen	5 Wochen	–
B	2 Wochen	2 Wochen	2 Wochen	A
C	3 Wochen	5 Wochen	6 Wochen	B
D	1 Wochen	3 Wochen	5 Wochen	A
E	2 Wochen	3 Wochen	5 Wochen	B,D

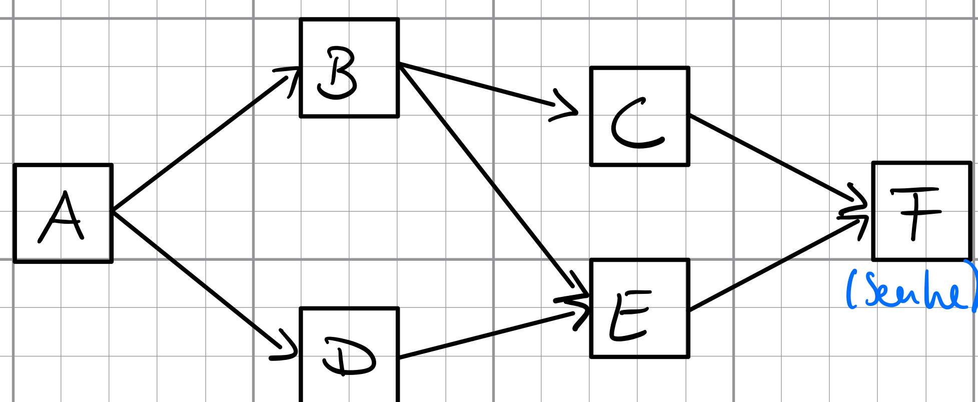
Kann das Projekt nicht rechtzeitig (d.h. innerhalb von 11 Wochen) erfolgreich durchgeführt werden, so muss eine Konventionalstrafe von 500.000 € bezahlt werden. Aus diesem Grund interessiert sich Walter Bill für den Wert der Wahrscheinlichkeit mit der seine Firma das Projekt im geplanten Zeitrahmen beenden kann.

Stochastische Zeitplanung

a) Erstellen Sie für das beschriebene Projekt einen Vorgangsknotennetzplan (zunächst noch ohne zeitliche Angaben).

Hinweis: Obwohl PERT eine ereignisorientierte Netzplandarstellung ist, stellen wir die *Struktur* des Projekts in dieser Aufgabe als Vorgangsknotennetzplan dar.

A1) a)



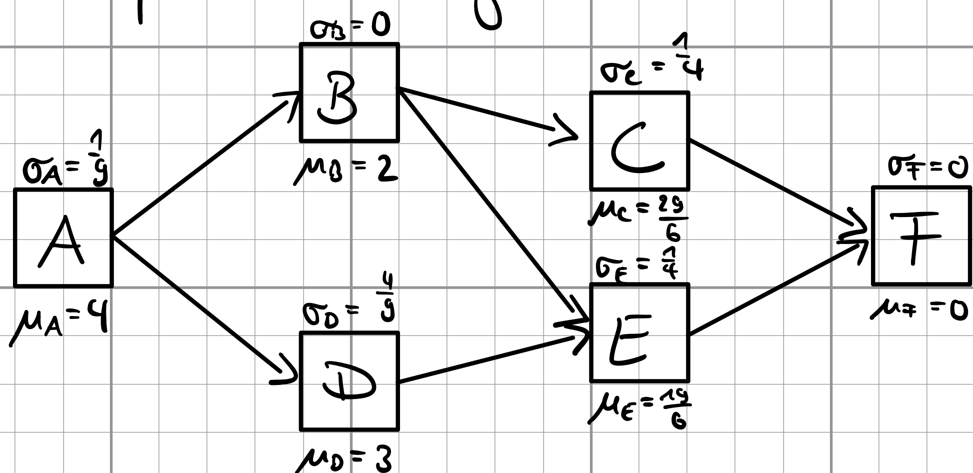
b) Bestimmen Sie Schätzwerte für den Mittelwert und die Varianz der Dauer jedes Vorgangs, wenn für die Vorgangsdauer eine Beta-Verteilung angenommen wird und im zentralen 6σ-Bereich 90% der Werte liegen sollen. Ergänzen Sie die zeitlichen Angaben in Ihrem Netzplan aus Teil a).

b) Für eine unterstellte Beta-Verteilung bei der 90% der Werte im Bereich $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ (typisch bei Dauern) liegen, erhält man den Erwartungswert μ_i, bzw. die Varianz σ_i^2 von Vorgangsdauer d_i über die Formeln $\mu_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}$ bzw. $\sigma_i^2 = \frac{(b_i - a_i)^2}{36}$

Erwartungswerte und Varianzen der einzelnen Vorgänge:

Vorgang	a_i	m_i	b_i	μ_i	σ_i^2
A	3	4	5	4	$\frac{1}{9}$
B	2	2	2	2	0
C	3	5	6	$\frac{29}{6}$	$\frac{1}{4}$
D	1	3	5	3	$\frac{4}{9}$
E	2	3	5	$\frac{19}{16}$	$\frac{1}{4}$
F	0	0	0	0	0

Netzplan des Projekts



Die Zahlen geben Mittelwert bzw. Varianz der Vorgänge an.

c) Bestimmen Sie den kritischen Weg bezüglich der erwarteten Vorgangsdauern.

Bestimme zuerst FAZ und FEZ.

Vorgang	A	B	C	D	E	F
FAZ	0	4	6	4	7	$\frac{65}{6}$
FEZ	4	6	$\frac{65}{6}$	7	$\frac{61}{6}$	$\frac{65}{6}$

Setze nun $SEZ_F = FEZ_F$ und bestimme SAZ und SEZ.

Vorgang	A	B	C	D	E	F
FAZ	0	4	6	4	7	$\frac{65}{6}$
FEZ	4	6	$\frac{65}{6}$	7	$\frac{61}{6}$	$\frac{65}{6}$
SEZ	4	6	$\frac{65}{6}$	$\frac{23}{3}$	$\frac{65}{6}$	$\frac{65}{6}$
SAZ	0	4	6	$\frac{14}{3}$	$\frac{23}{3}$	$\frac{65}{6}$

Der kritische Pfad ist damit: A - B - C - F.

d) Walter Bill konnte in Erfahrung bringen, dass dasjenige Gebot, das eine realistische Chance hat, den Auftragszuschlag zu erhalten, im Falle eines rechtzeitigen Projektabschlusse einen Gewinn von 250.000 € für die Lincoln Log Construction bedeuten würde. Da seine Firma im Falle einer verspäteten Beendigung des Projektes aufgrund der Konventionalstrafe 250.000 € zahlen muss, möchte Walter Bill das Angebot nur abgeben, wenn eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% dafür besteht, das Projekt rechtzeitig fertig zu stellen. Welchen Ratschlag würden Sie Walter Bill geben?

Tabellenausschnitt der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(z)$:

z*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0*	0.500	0.503	0.507	0.511	0.515	0.519	0.523	0.527	0.531	0.535
0.1*	0.539	0.543	0.547	0.551	0.555	0.559	0.563	0.567	0.571	0.575
0.2*	0.579	0.583	0.587	0.590	0.594	0.598	0.602	0.606	0.610	0.614
0.3*	0.617	0.621	0.625	0.629	0.633	0.636	0.640	0.644	0.648	0.651
0.4*	0.655	0.659	0.662	0.666	0.670	0.673	0.677	0.680	0.684	0.687
0.5*	0.691	0.694	0.698	0.701	0.705	0.708	0.712	0.715	0.719	0.722

d) Erwartete Länge des Projekts = Länge des kritischen Pfads $= FEZ_F = \frac{65}{6}$

Varianz der Projektdauer = Summe der Varianzen des kritischen Pfads $= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$

Damit ist die Projektdauer D eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\frac{65}{6}$ und Varianz $\frac{13}{36}$: $D \sim \mathcal{N}\left(\frac{65}{6}, \frac{13}{36}\right)$

Berechnung der Whk., dass das Projekt in 11 Wochen beendet ist:

$$P(D \leq 11) = \Phi\left(\frac{11 - \frac{65}{6}}{\sqrt{\frac{13}{36}}}\right) = \Phi(0.277) = 0.61 = 61\%$$

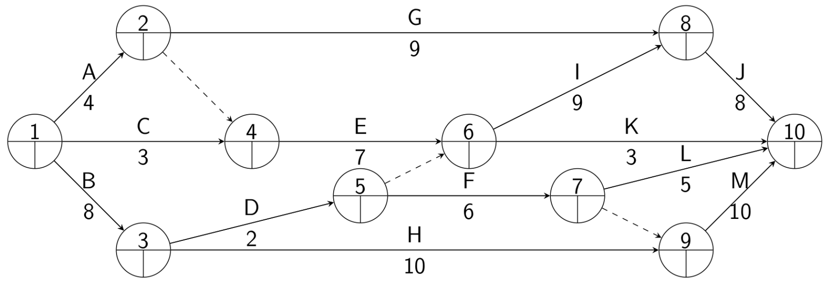
$\Rightarrow$ Bill sollte das Gebot abgeben

Aufgabe 2

CPM:

Vorgang = Kante

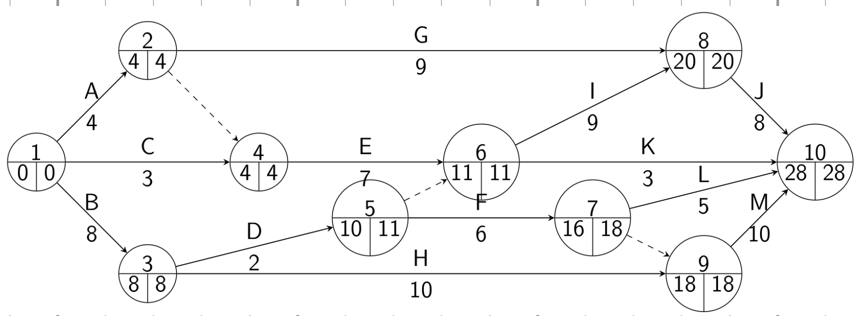
Gegeben sei der folgende CPM-Netzplan:



Die Zahlen an den Pfeilen geben die Dauer der jeweiligen Vorgänge an.

a) Bestimmen Sie für jeden Vorgang den frühesten (spätesten) Anfang und das früheste (späteste) Ende sowie die minimale Projektdauer.

A2) a)



b) Berechnen Sie für die Vorgänge C, D, G, I, L die gesamte Pufferzeit, die freie Pufferzeit, die freie Rückwärtspufferzeit und die unabhängige Pufferzeit.

b)

$$GP_{ij} := SZ_j - FZ_i - d_{ij}$$

$$FP_{ij} := FZ_j - FZ_i - d_{ij}$$

$$FRP_{ij} := SZ_j - SZ_i - d_{ij}$$

$$UP_{ij} := \max\{0, FZ_j - SZ_i - d_{ij}\}$$

	GP_{ij}	FP_{ij}	FRP_{ij}	UP_{ij}
C = (1,4)	1	1	1	1
D = (3,5)	1	0	1	0
G = (2,8)	7	7	7	7
I = (6,8)	0	0	0	0
L = (7,10)	7	7	5	5

c) Geben Sie alle kritischen Vorgänge und kritischen Pfade an.

c) KW_1: $1 \to 2 \to 8 \to 10$

UW_2: $1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 10$

UW_3: $1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8 \to 10$

UW_4: $1 \to 3 \to 9 \to 10$

Aufgabe 3

Gegeben seien ein CPM-Netzplan und ein zugehöriger Vorgang mit Startereignis i und Endereignis j.

a) Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

i) $FZ_j - FZ_i - d_{ij} \leq SZ_j - FZ_i - d_{ij}$

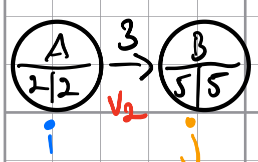
ii) $SZ_j - SZ_i - d_{ij} \leq SZ_j - FZ_i - d_{ij}$

iii) $0 \leq SZ_j - SZ_i - d_{ij}$

iv) $0 \leq FZ_j - FZ_i - d_{ij}$

A3) a)

Da i das Startereignis und j das Endereignis ist, gilt $i \in V(j)$ und $j \in N(i)$. Daraus folgen die Ungleichungen:



$$FZ_j = \max\{FZ_h + d_{hj} \mid h \in V(j)\} \geq FZ_i + d_{ij}$$

$$SZ_i = \min\{SZ_l - d_{il} \mid l \in N(i)\} \leq SZ_j - d_{ij}$$

bzw.

$$FZ_j - FZ_i - d_{ij} \geq 0 \qquad \text{(iv)}$$

$$SZ_j - SZ_i - d_{ij} \geq 0 \qquad \text{(iii)}$$

Weiterhin ist der früheste Eintrittszeitpunkt FZ_i von Ereignis i kleiner gleich dem spätesten Eintrittszeitpunkt SZ_i von Ereignis i. Analoges gilt für Ereignis j. Damit gilt:

$$FZ_j \le SZ_j$$

$$FZ_j - FZ_i - d_{ij} \le SZ_j \overbrace{- FZ_i - d_{ij}}^{(-\text{Konstante})} \qquad (i)$$

sowie

$$FZ_i \le SZ_i$$

$$-SZ_i \le -FZ_i$$

$$SZ_j - SZ_i - d_{ij} \le \overbrace{SZ_j - FZ_i - d_{ij}}^{(+\text{Konstante})} \qquad (ii)$$

b) Zeigen Sie für die gesamte (GP), die freie (FP), die unabhängige (UP) Pufferzeit und die freie Rückwärtspufferzeit (FRP) folgende Ungleichungen:

I) $UP_{ij} \le FP_{ij} \le GP_{ij}$

II) $UP_{ij} \le FRP_{ij} \le GP_{ij}$

b) Aus den Definitionen der Pufferzeiten:

$GP_{ij} = SZ_j - FZ_i - d_{ij}$, $FP_{ij} = FZ_j - FZ_i - d_{ij}$ und $FRP_{ij} = SZ_j - SZ_i - d_{ij}$

sowie i) und ii) folgt sofort:

$$FP_{ij} \le GP_{ij} \quad \text{und} \quad FRP_{ij} \le GP_{ij}$$

Für die Eintrittszeitpunkte FZ_i, SZ_i, FZ_j, SZ_j können weitere Ungleichungen hergeleitet werden:

$$FZ_j \le SZ_j$$

$$FZ_j - SZ_i - d_{ij} \le SZ_j \overbrace{- SZ_i - d_{ij}}^{(-\text{Konstante})} \qquad (*)$$

sowie $$FZ_i \le SZ_i$$

$$-SZ_i \le -FZ_i \quad \text{(Konstante)}$$

$$FZ_j - SZ_i - d_{ij} \le FZ_j - FZ_i - d_{ij} \qquad (**)$$

Aus (iii) und (*) ergibt sich:

$$0 \le SZ_j - SZ_i - d_{ij} \quad \text{UND}$$

$$FZ_j - SZ_i - d_{ij} \le SZ_j - SZ_i - d_{ij}$$

und damit

$$\underbrace{\max\{0, FZ_j - SZ_i - d_{ij}\}}_{UP_{ij}} \le \underbrace{SZ_j - SZ_i - d_{ij}}_{FRP_{ij}}$$

Aus (iv) und (**) ergibt sich:

$$0 \le FZ_j - FZ_i - d_{ij} \quad \text{UND}$$

$$FZ_j - SZ_i - d_{ij} \le FZ_j - FZ_i - d_{ij}$$

und damit

$$\underbrace{\max\{0, FZ_j - SZ_i - d_{ij}\}}_{UP_{ij}} \le \underbrace{FZ_j - FZ_i - d_{ij}}_{FP_{ij}}$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Vorgangsliste eines Projekts.

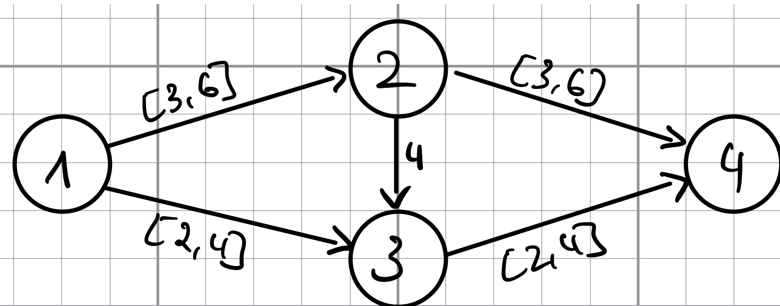
Vorgang	Vorgänger	minimale Dauer	maximale Dauer
(1,2)	–	3	6
(1,3)	–	2	4
(2,3)	(1,2)	4	4
(2,4)	(1,2)	3	6
(3,4)	(1,3),(2,3)	2	4

Weiterhin sind in Abhängigkeit der realisierten Vorgangsdaueren d_{ij} die folgenden vorgangsdauerabängigen Kostenfunktionen gegeben:

- Für (1,2) und (2,4): $7 - d_{ij}$
- Für (1,3) und (3,4): $11 - 2d_{ij}$
- Für den Vorgang (2,3) sind die Kosten immer gleich 4.

a) Stellen Sie einen Vorgangspfeilnetzplan für dieses Projekt auf. Führen Sie dabei die Pfeilbewertung mit Hilfe von Intervallen durch.

A4) a)



b) Wie groß sind die maximale Projektdauer D_{max} und die minimale Projektdauer D_{min}? Berechnen Sie auch die frühest- und spätestmöglichen Anfangs- bzw. Endzeitpunkte der einzelnen Vorgänge.

b) $D_{max} = 14$

	1	2	3	4
FAZ_i	0	6	10	14

$D_{min} = 9$

	1	2	3	4
FAZ_i	0	3	7	9

c) Wie teuer ist das Projekt, wenn nur Vorgangskosten betrachtet werden und die Projektdauer $D = D_{max}$ bzw. $D = D_{min}$ ist?

c) $D = D_{max} = 14$:

$$F_V = (7-6) + (11 - 2\cdot 4) + 4 + (7-6) + (11 - 2\cdot 4)$$
$$= 1 + 3 + 4 + 1 + 3$$
$$= 12$$

$D = D_{min} = 9$:

$$F_V = (7-3) + (11 - 2\cdot 4) + 4 + (7-6) + (11 - 2\cdot 2)$$
$$= 4 + 3 + 4 + 1 + 7$$
$$= 19$$

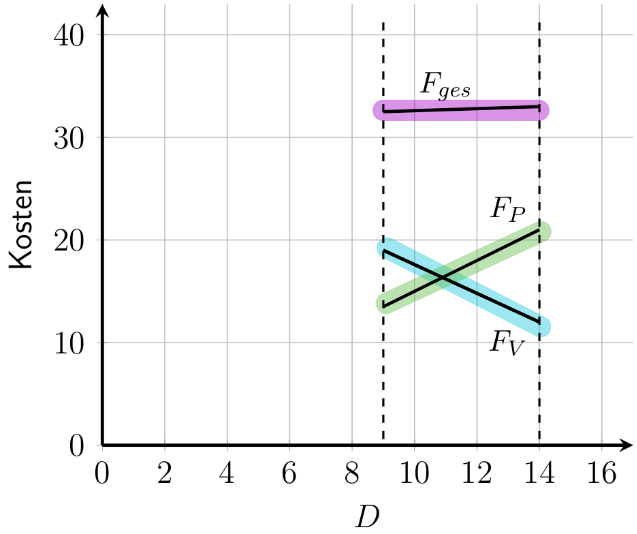
Dabei wird angenommen, dass die nicht auf dem kritischen Weg liegenden Vorgänge möglichst kostengünstig, d.h. mit längstmöglicher Dauer, bearbeitet werden.

d) Geben Sie die Funktion $F_V(FZ, d)$ der Vorgangskosten im Intervall $[D_{min}, D_{max}]$ in Abhängigkeit der Projektdauer D an. Darüber hinaus seien die Projektkosten $F_P(D) = 1.5D$. Bestimmen Sie die Projektdauer bei der die Gesamtkosten minimiert werden. Wie hoch sind diese Kosten?

d) Aus $F_V(FZ, d) = 12$ für $D = D_{max} = 14$ und $F_V(FZ, d) = 19$ für $D = D_{min} = 9$ erhält man $F_V(D) = -\frac{7}{5}(D-9) + 19$ für $D \in [9, 14]$; gemäß Aufgabe ist $F_P(D) = 1.5D$

Als Gesamtkosten erhält man:

$$F_{ges} = F_V(D) + F_P(D) = -\frac{7}{5}(D-9) + 19 + 1.5D = 0.1D + 31.6$$



Folglich werden die minimalen Gesamtkosten für die kleinstmögliche Projektdauer $D = D_{min} = 9$ angenommen. Sie betragen dann 32.5 Geldeinheiten.

e) Stellen Sie ein lineares Optimierungsproblem zur Bestimmung der minimalen Gesamtkosten für dieses Projekt auf, wenn die Projektkosten durch $F_P(D) = 1.5D$ gegeben sind.

e)

$$F_{ges}(d, D) = 4 + 7 - d_{12} + 7 - d_{24} + 11 - 2d_{13} + 11 - 2d_{34} + 1.5D$$
$$= 40 - d_{12} - d_{24} - 2d_{13} - 2d_{34} + 1.5D$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & 40 - d_{12} - d_{24} - 2d_{13} - 2d_{34} + 1.5D \\
\text{s.t.}\ & -FZ_1 + FZ_2 - d_{12} \geq 0 \\
& -FZ_1 + FZ_3 - d_{13} \geq 0 \\
& -FZ_2 + FZ_3 - 4 \geq 0 \\
& -FZ_2 + FZ_4 - d_{24} \geq 0 \\
& -FZ_3 + FZ_4 - d_{34} \geq 0 \\
& 3 \leq d_{12}, d_{24} \leq 6 \\
& 2 \leq d_{13}, d_{34} \leq 4
\end{aligned}
$$

$$-Ft_1 + Ft_4 - D = 0$$

$$Fz_1, \dots, Fz_4, d_{12}, \dots, d_{34}, D \geq 0$$

Klausur

06.08. 8:00 Uhr

Online-Test

bis So, 28.07.

alles zu Graphen