Tutorium 3

Normalform

P_{Norm}: $\max\; c^T x$

s.t. $\tilde{A} x = b$

$x \geq 0$

$\tilde{A}^{m \times m+n}$ hat Rang m

kanonische Form:

P_{kanon}: $\max\; c^T x$

s.t. $\tilde{A} x = b$

$x \geq 0$

$c = (c_1, \dots, c_N, 0, \dots, 0)^T$

$\tilde{A} = (A, I_m)$, $b \geq 0$

Nichtbasisvariablen und Basisvariablen

Variablen, die in einer Basislösung 0 sind können" NB-Variablen sein.
→ Ausnahme degenerierte Lösung

Variablen, die in einer Basislösung $\neq 0$ sind, sind Basisvariablen.
→ Variablen mit Wert $=0$ können es auch sein (degenerierter Fall)

Simplex-Algorithmus Theorie

Nichtbasisvariablen

	x_1	x_2	
z	-3	-2	0
x_3	1	0	4
x_4	1	3	15
x_5	2	1	10

Zielfunktionswert

Basisvariablen

$\iff$

$\max\; 3x_1 + 2x_2$

s.t.
$$x_3 + x_1 = 4$$
$$x_4 + x_1 + 3x_2 = 15$$
$$x_5 + 2x_1 + x_2 = 10$$

Simplex-Algorithmus Anwenden

- Pivotspalte:
  - Minimum der Einträge in erste Zeile
  - nur negativ erlaubt
  - 2 minimale Einträge => kleinste Indexregel
    -> zuerst die mit kleinerem Index

=> keine negativ? => Fertig.

- Pivotzeile:
  - Minimum über $\frac{\text{Eintrag Pivotspalte}}{\text{Eintrag für b in Zeile}}$
  - nur positiv erlaubt
  - 2 minimale Einträge => kleinste Indexregel
    -> zuerst die mit kleinerem Index

=> keine positiv? => Problem unzulässig.

Schritt im Tableau:

	x_1	x_2	
z	-3	-2	0
x_3	1	0	4
x_4	1	3	15
x_5	2	1	10

- Pivotelement => $\frac{1}{\text{Pivotelement}}$
- Pivotspalte => $\cdot\left(\frac{-1}{\text{Pivotelement}}\right)$
- Pivotzeile => $\cdot\left(\frac{1}{\text{Pivotelement}}\right)$
- restliche Elemente: Dreiecksregel
  Element
  => Element $-\left(\frac{\text{Wert Pivotspalte} \cdot \text{Wert Pivotzeile}}{\text{Pivotelement}}\right)$
- Variablen an Pivotelement tauschen

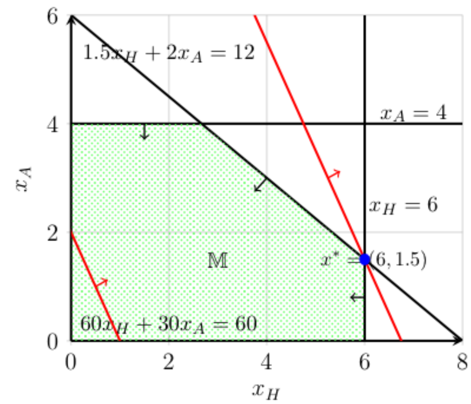
	x_3	x_2	
z	3	$-2-\frac{-3\cdot 0}{1}$	$0-\frac{-3\cdot 4}{1}$
x_1	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{4}{1}$
x_4	$-\frac{1}{1}$	$3-\frac{1\cdot 0}{1}$	$15-\frac{1\cdot 4}{1}$
x_5	$-\frac{2}{1}$	$1-\frac{2\cdot 0}{1}$	$10-\frac{2\cdot 4}{1}$

Aufgabe 1

Gegeben sei erneut die *Durchblick GmbH* aus Übungsblatt 2 und das hierzu gehörende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 60\,x_H & + & 30\,x_A & & \\ \text{s.t.} & x_H & & & \leq & 6 \\ & & & x_A & \leq & 4 \\ & 1.5\,x_H & + & 2\,x_A & \leq & 12 \\ & & & x_H,\; x_A & \geq & 0. \end{array}$$

Dabei ist x_H die Anzahl an Fenstern mit Holzrahmen und x_A die Anzahl an Fenstern mit Alurahmen. Graphisch lässt sich die Situation wie folgt darstellen:



a) Transformieren Sie das lineare Optimierungsproblem in Normalform. Liegt eine kanonische Form vor?

A1) a) Führe Schlupfvariablen x_1, x_2, x_3 ein, um die $\leq$-Bedingungen zu $=$-Bedingungen umzuwandeln:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl} \max & 60x_H & + & 30x_A & + & 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_H & & & + & x_1 & & & & & = & 6 \\ & & & x_A & & & + & x_2 & & & = & 4 \\ & 1.5x_H & + & 2x_A & & & & & + & x_3 & = & 12 \\ & & & & & & & & & x_H, x_A, x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ kanonische Form:

$$\tilde{A} = (A, I) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$c = \quad c^T x \quad = (60, 30, 0, 0, 0)^T$$

$$b \geq 0$$

b) Bestimmen Sie für alle Ecken des zulässigen Bereichs $\mathbb{M}$ die zugehörige Basislösung.

b) Koeffizientenmatrix $\tilde{A}$ hat $m=3$ Zeilen und $m+n=5$ Spalten. Da $I \in \tilde{A}$ hat $\tilde{A}$ vollen Rang $(=3)$. Jede Basislösung hat also 3 Basisvariablen und 2 Nichtbasisvariablen.

$\Rightarrow$ Ecken durch Schnittpunkte bestimmen

$\Rightarrow$ Ecken einsetzen und LGS lösen

Bsp. Ecke $(0,4)$

$$\left.\begin{aligned} 0 + x_1 &= 6 \\ 4 + x_2 &= 4 \\ 0 + 2 \cdot 4 + x_3 &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4$$

Ecke	Basisvariablen	Nichtbasisvariablen	Basislösung
$(0,0)$	x_1, x_2, x_3	x_H, x_A	$(0,0,6,4,12)$
$(0,4)$	x_A, x_1, x_3	x_H, x_2	$(0,4,6,0,4)$
$(2.\overline{6}, 4)$	x_H, x_A, x_1	x_2, x_3	$(2.\overline{6},4,3.\overline{3},0,0)$
$(6, 1.5)$	x_H, x_A, x_2	x_1, x_3	$(6,1.5,0,2.5,0)$
$(6,0)$	x_H, x_2, x_3	x_A, x_1	$(6,0,0,4,3)$

c) Wenn Sie das Problem rechnerisch ohne Zuhilfenahme einer Zeichnung lösen müssten, wie würden Sie vorgehen?

c) Eckensatz

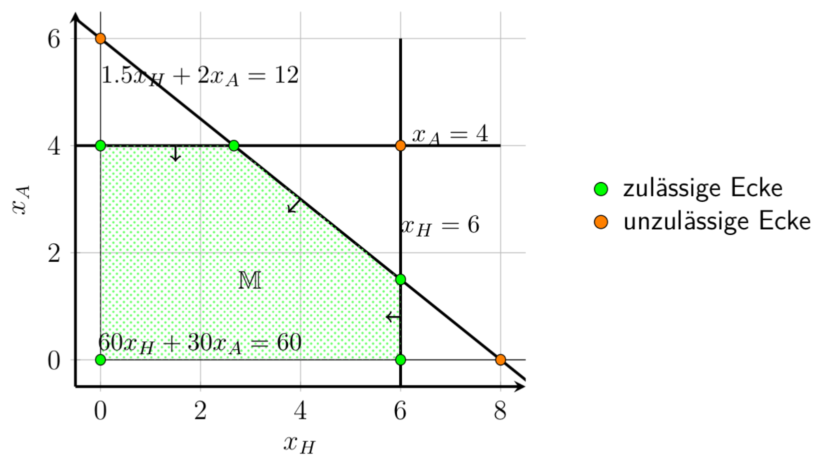
Mindestens ein optimaler Punkt liegt auf einer Ecke.

$\Rightarrow$ 1. Schnittpunkte bestimmen

2. Prüfe, ob Schnittpunkte zulässig

3. Zielfunktionswerte der Schnittpunkte berechnen

Siehe folgende Graphik zur Veranschaulichung:



zulässige Schnittpunkte:

$x = (0, 0)$ mit ZFW 0

$x = (0, 4)$ mit ZFW 120

$x = (2.\overline{6}, 4)$ mit ZFW 280

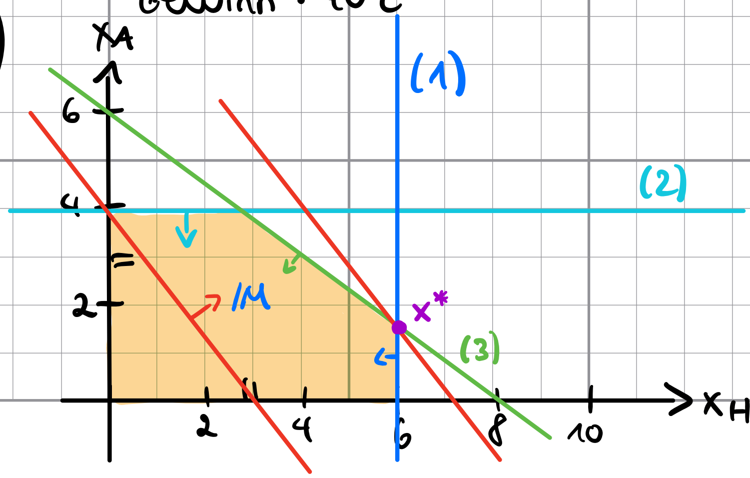
$x = (6, 0)$ mit ZFW 360

$x = (6, 1.5)$ mit ZFW 405 $\Rightarrow x^* = (6, 1.5)$

d) Ein neuer Mitbewerber, der ebenfalls Fenster mit Holzrahmen produziert, hat in der Stadt einen Laden eröffnet. Dadurch kann es passieren, dass die *Durchblick GmbH* ihren Preis für dieses Fenster senken muss, um wettbewerbsfähig zu bleiben. Wie würde sich der optimale Punkt ändern (wenn überhaupt), wenn der Gewinn für ein Fenster mit Holzrahmen von 60 € auf 40 € (20 €) zurückgehen würde?

Bei welchem Gewinn für ein Fenster mit Holzrahmen würde sich mehr als ein optimaler Punkt ergeben?

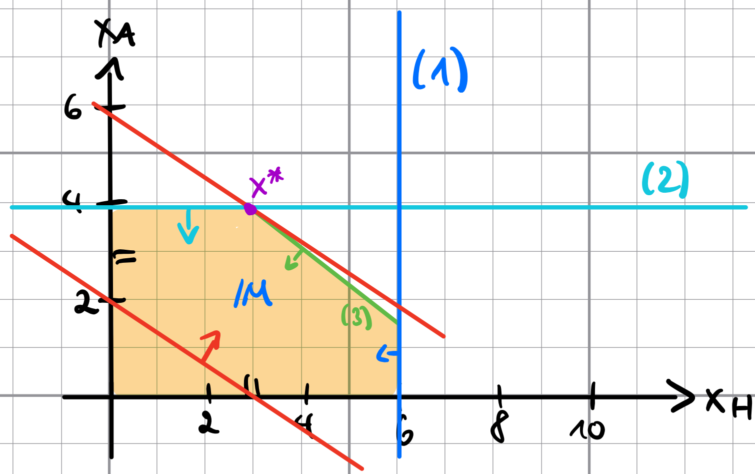
d) Gewinn: 40€



x^* bleibt gleich

$f(x^*) = 285$

Gewinn : 20€



$x^* = (2.\overline{6}, 4)$

$f(x^*) = 173.\overline{3}$

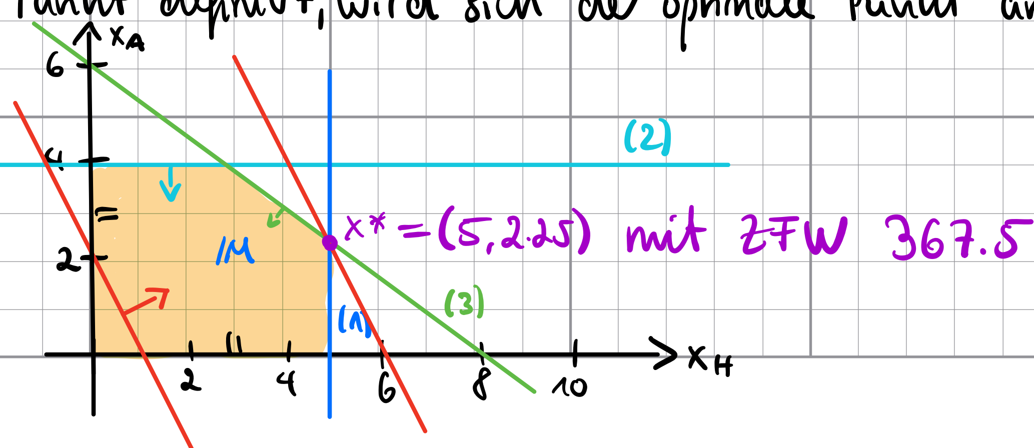
Damit wir mehrere optimale Punkte haben, muss die Zielfunktion parallel zu einer aktiven Nebenbedingung sein. Bei der Wahl von x_H haben wir 2 Möglichkeiten.

1. $x_H = 0 \Rightarrow$ parallel zu NB (2)
2. $x_H = 22{,}5 \Rightarrow$ parallel zu NB (3)

e) Dieter überlegt, ob er seine Arbeitszeit verkürzen soll. Dadurch würde er nur noch fünf Holzrahmen pro Tag herstellen können. Würde sich der optimale Punkt dadurch ändern? Begründen Sie zuerst, ohne etwas zu rechnen, warum.

Falls sich der optimale Punkt ändert, bestimmen Sie den neuen optimalen Punkt.

e) Da die NB, die Dieters Arbeit modelliert, den optimalen Punkt definiert, wird sich der optimale Punkt ändern.



Aufgabe 2

Transformieren Sie das folgende lineare Optimierungsproblem in Normalform:

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 5x_1 & - & 2x_2 & + & 9x_3 & & \\
\text{s.t.} & 4x_1 & - & 3x_2 & + & \frac{4}{5}x_3 & \geq & 37 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 74 \\
 & 4x_1 & - & \frac{3}{4}x_2 & + & x_3 & \leq & 90 \\
 & & & & & x_1 & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & & x_2,\, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

A2)

Q: Was ist nicht in Normalform

Wie können wir das ändern?

Substitution $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ mit $x_1^+, x_1^- \geq 0$

$$\begin{array}{llllll}
\max & 5x_1^+ - 5x_1^- & -2x_2 & +9x_3 & & \\
 & 4x_1^+ - 4x_1^- & -3x_2 & +\frac{4}{5}x_3 & -x_4 & = 37 \\
 & 3x_1^+ - 3x_1^- & +2x_2 & +8x_3 & & = 74 \\
 & 4x_1^+ - 4x_1^- & -\frac{3}{4}x_2 & +x_3 & +x_5 & = 90 \\
 & & & & x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
\end{array}$$

Q: Ist das Problem in kanonischer Form?

Aufgabe 3

Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & + & x_5 & & & & & = & 4 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & & & + & 6x_4 & & & + & x_6 & & & = & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & & & & & + & x_7 & = & 3 \end{array}$$

Gegeben sei eine Basislösung x mit den Basisvariablen x_5, x_6 und x_7, d.h. $x = (0, 0, 0, 0, 4, 8, 3)$. Angenommen x_1 soll nun in die Basis aufgenommen werden, d.h. von einer Nichtbasis- zu einer Basisvariable werden. Welche Variable muss für x_1 die Basis verlassen, damit alle Variablen nichtnegativ bleiben und welchen Wert erhält x_1? Wiederholen Sie dasselbe Vorgehen mit den Variablen x_2 und x_3.

A3)

Basistausch

Betrachtung von x_1:

1.NB: x_1 kann maximal den Wert 4 annehmen

2.NB: x_1 kann maximal den Wert $\frac{8}{5} = 1.6$ annehmen

3.NB: x_1 kann maximal den Wert $\frac{3}{2} = 1.5$ annehmen

=> x_1 wird durch NB3 am meisten eingeschränkt

=> x_7 würde für x_1 verlassen und x_1 würde den Wert $\frac{3}{2}$ annehmen

Betrachtung von x_2:

1.NB: x_2 kann maximal den Wert 2 annehmen

2.NB: x_2 wird durch diese NB nicht eingeschränkt

3.NB: x_2 kann maximal den Wert 1 annehmen

=> x_2 wird durch NB3 am meisten eingeschränkt

=> x_7 würde für x_2 verlassen und x_2 würde den Wert 1 annehmen

Betrachtung von x_3:

1\. NB: x_3 wird durch diese NB nicht eingeschränkt

2\. NB: x_3 wird durch diese NB nicht eingeschränkt

3\. NB: x_3 wird durch diese NB nicht eingeschränkt

=> x_3 uneingeschränkt

$\Rightarrow$ x_3 ist zwar uneingeschränkt; allerdings findet man in keiner NB eine bisherige Basisvariable (x_5, x_6, x_7), die unter Einhaltung der Nichtnegativitätsbedingungen auf 0 gesetzt und somit zur Nichtbasisvariable werden kann, ohne dass dabei eine weitere bisherige Nichtbasisvariable (x_1, x_2, x_4) einen positiven Wert annehmen müsste

Bei einem Basistausch dürfen aber immer nur genau zwei Variablen (eine Basisvariable und eine Nichtbasisvariable) ihren Charakter (von einer Nichtbasis- zu einer Basisvariablen bzw. umgekehrt) verändern

$\Rightarrow$ Ein Basis*tausch*, der x_3 als Basisvariable vorsieht, ist unter Einhaltung der Nichtnegativitätsbedingungen unmöglich

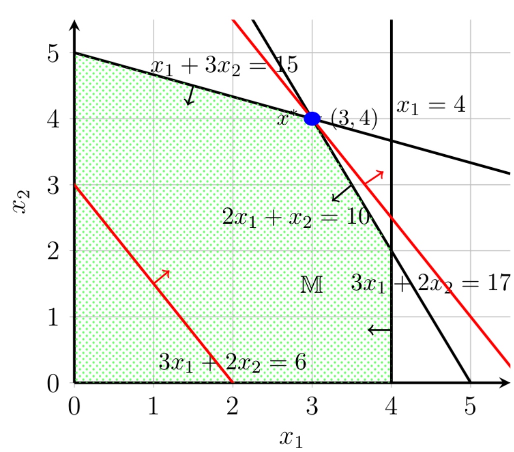
Aufgabe 4

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llcll} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 & & & \leq 4 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq 15 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 10 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

a) graphisch,

a) Optimaler Punkt $x^* = (3,4)$ mit $z^* = 17$ (siehe Abbildung)



b) mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

In welcher Reihenfolge werden beim Simplex-Algorithmus die Ecken des zulässigen Bereichs durchlaufen?

$$\begin{array}{llcl} \max & 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & \le & 4 \\ & x_1 + 3x_2 & \le & 15 \\ & 2x_1 + x_2 & \le & 10 \\ & x_1,\ x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

A4) b) Starttableau:

	x_1	x_2	
z	-3	-2	0
x_3	1	0	4
x_4	1	3	15
x_5	2	1	10

Pivot-Spalte: $\min\{-3,-2\} = -3 \Rightarrow x_1$

Pivot-Zeile: $\min\{\frac{4}{1}, \frac{15}{1}, \frac{10}{2}\} = 4 \Rightarrow x_3$

Q: Wie sieht das folgende Tableau aus?

- Pivotelement $\Rightarrow \frac{1}{\text{Pivotelement}}$
- Pivotspalte $\Rightarrow \cdot\left(\frac{-1}{\text{Pivotelement}}\right)$
- Pivotzeile $\Rightarrow \cdot\left(\frac{1}{\text{Pivotelement}}\right)$
- restliche Elemente: Dreiecksregel
  Element
  $\Rightarrow$ Element $-\left(\frac{\text{Wert Pivotspalte} \cdot \text{Wert Pivotzeile}}{\text{Pivotelement}}\right)$
- Variablen an Pivotelement tauschen

$\Rightarrow$

		x_2	
z			
x_4			
x_5			

	x_3	x_2	
z	3	-2	12
x_1	1	0	4
x_4	-1	3	11
x_5	-2	1	2

Pivot-Spalte: $\min\{3,-2\} = ? \Rightarrow x_?$

Pivot-Zeile: $\min\{\ ?\ \} = ? \Rightarrow x_?$

	x_3	x_2	
z	3	-2	12
x_1	1	0	4
x_4	-1	3	11
x_5	-2	1	2

Q: Wie sieht das folgende Tableau aus?

- Pivotelement $\Rightarrow \frac{1}{\text{Pivotelement}}$
- Pivotspalte $\Rightarrow \cdot\left(\frac{-1}{\text{Pivotelement}}\right)$
- Pivotzeile $\Rightarrow \cdot\left(\frac{1}{\text{Pivotelement}}\right)$
- restliche Elemente: Dreiecksregel
  Element
  $\Rightarrow \text{Element} - \left(\frac{\text{Wert Pivotspalte} \cdot \text{Wert Pivotzeile}}{\text{Pivotelement}}\right)$
- Variablen an Pivotelement tauschen

$\Rightarrow$

	x_3	
z		
x_1		
x_4		

---

	x_3	x_5	
z	-1	2	16
x_1	1	0	4
x_4	5	-3	5
x_2	-2	1	2

$\Rightarrow$

	x_4	x_5	
z	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	17
x_1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{3}{5}$	3
x_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{-3}{5}$	1
x_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	4

- optimal, da alle $\bar{c}_j$ nicht-negativ

$\Rightarrow x^* = (3,4)$ mit ZFW $z^* = 17$

Ecken: $(0,0) \to (4,0) \to (4,2) \to (3,4) = x^*$

Anmerkung: Der Simplex-Algorithmus wählt nicht unbedingt den “kürzesten” Weg zur optimalen Ecke bzw. zum optimalen Punkt. Ausgehend von der Startecke $(0,0)$ wird hier zuerst die Ecke $(4,0)$ gewählt, da der Zuwachs im Zielfunktionswert größer ist als bei der Ecke $(0,5)$ (12 gegenüber 10).

Aufgabe 5

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Optimierungsprobleme jeweils einen optimalen Punkt mit dem Simplex-Algorithmus, oder begründen Sie warum das Problem nicht lösbar ist:

a)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 40 \\ & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	
z	-4	-3	-6	0
x_4	3	1	$\boxed{3}$	30
x_5	2	2	3	40

Iteration 1

- Pivot-Spalte: $\min\{-4;-3;-6\} = -6 \Rightarrow x_3$ kommt in Basis
- Pivot-Zeile: $\min\{\frac{30}{3};\frac{40}{3}\} = 10 \Rightarrow x_4$ verlässt Basis

$\Longrightarrow$

	x_1	x_2	x_4	
z	2	-1	2	60
x_3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	10
x_5	-1	$\boxed{1}$	-1	10

Iteration 2

- Pivot-Spalte: $\min\{-1\} = -1 \Rightarrow x_2$ kommt in Basis
- Pivot-Zeile: $\min\{\frac{10}{\frac{1}{3}};\frac{10}{1}\} = 10 \Rightarrow x_5$ verlässt Basis

	x_1	x_5	x_4	
z	1	1	1	70
x_3	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{3}$
x_2	-1	1	-1	10

Iteration 3

- Optimal, da alle $\bar{c}_j$ nicht-negativ sind
- $\Rightarrow$ Optimaler Punkt $x_1^* = 0,\ x_2^* = 10,\ x_3^* = \frac{20}{3}$ mit $z^* = 70$

b)

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & -5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15 \\ & -x_1 & - & 4x_2 & \leq & 2 \\ & -2x_1 & & & \leq & 8 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Starttableau:

	x_1	x_2	
z	-1	-2	0
x_3	-5	3	15
x_4	-1	-4	2
x_5	-2	0	8

$\Longrightarrow$

	x_1	x_4	
z	$-\frac{13}{3}$	$\frac{2}{3}$	10
x_2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	5
x_4	$-\frac{23}{3}$	$\frac{4}{3}$	22
x_5	-2	0	8

- Das Problem ist unbeschränkt, da alle Koeffizienten in der Pivot-Spalte negativ ist.
- Man könnte also den Wert von x_1 beliebig groß machen, ohne unzulässig zu werden.

c)

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 15 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 12 \\
 & 2x_1 & & & + & x_3 & \leq & 8 \\
 & & & & x_1,\ x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

c) Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	
z	-1	-2	-2	0
x_4	5	2	3	15
x_5	1	4	2	12
x_6	2	0	1	8

Pivot-Spalte: $\min\{-1,-2,-2\} = -2 \Rightarrow x_2$

$\rightarrow$ kleinste Index-Regel

Pivot-Zeile: $\min\{\frac{15}{2}, \frac{12}{4}\} = 3 \Rightarrow x_5$

	x_1	x_4	x_3	
z	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	6
x_4	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	9
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	3
x_6	2	0	1	8

	x_1	x_4	x_3	
z	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	6
x_4	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	9
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	3
x_6	2	0	1	8

	x_1	x_4		
z	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{21}{2}$
x_3	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_3	$-\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_6	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$

optimale Punkt:

$x_1^* = 0,\ x_2^* = \frac{3}{4},\ x_3^* = \frac{9}{2}$

mit $z^* = \frac{21}{2}$

nächstes Tutorium:

- Simplex-Algorithmus
- Big-M-Methode
- Dualform / Duale Probleme