

Tutorium 10

Kürzeste Wege mit Dijkstra-Algorithmus

→ Single - Source Shortest Path: Dijkstra Algorithmus

Input: Digraph $G = (V, E, c)$ mit $|V| = n$ und $c_{ij} \geq 0$ für alle $(i, j) \in E$, Startknoten $a \in V$

begin

$MK := \{a\}, D(a) := 0, D(i) := \infty$ für alle $i \neq a$

Wähle Startknoten a , Distanz zu $a = 0$, sonst Distanz $= \infty$

while $MK \neq \emptyset$

Bestimme $h = \arg \min_{i \in MK} D(i)$

in Iteration 1: $= a$

forall $j \in N(h)$

if $D(j) > D(h) + c_{hj}$

Update-Schritt

$D(j) := D(h) + c_{hj}, R(j) := h, MK := MK \cup \{j\}$

Ist Distanz von hier zu Nachbar kürzer, als unser bisher kürzester Weg dahin?

end

end

$MK := MK \setminus \{h\}$

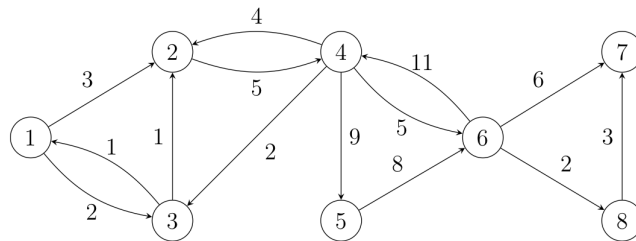
end

end

Output: $D(i)$ ist die kürzeste Weglänge von a nach i , $R(i)$ ist der direkte Vorgänger von i auf einem kürzesten Weg von a nach i

Aufgabe 1

Gegeben sei der folgende gerichtete Graph:



Bestimmen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die Entfernung und einen kürzesten Weg von Knoten 5 zu allen anderen Knoten.

A1) Initialisierung

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$D(i)$	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞
$P(i)$								

$MU = \{5\}$

Iteration 1

• $h = 5 \Rightarrow N(h) = \{6\}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$D(i)$	∞	∞	∞	∞	0	8	∞	∞
$P(i)$						5		

$MU = \{6\}$

Iteration 2

• $h = 6 \Rightarrow N(h) = \{4, 7, 8\}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$D(i)$	∞	∞	∞	19	0	8	14	10	$MU = \{4, 7, 8\}$
$R(i)$				6		5	6	6	

Iteration 3

• $h = 8 \Rightarrow N(h) = \{7\}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	
$D(i)$	∞	∞	∞	19	0	8	13	10	$MU = \{4, 7\}$
$R(i)$				6		5	8	6	

Iteration 4

• $h = 7 \Rightarrow N(h) = \emptyset \Rightarrow \text{keine Änderung} \Rightarrow MU = \{4\}$

Iteration 5

• $h = 4 \Rightarrow N(h) = \{2, 3, 5, 6\}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	
$D(i)$	∞	23	21	19	0	8	13	10	$MU = \{2, 3\}$
$R(i)$		4	4	6		5	8	6	

Iteration 6

• $h = 3 \Rightarrow N(h) = \{1, 2\}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	--

$D(i)$	22	22	21	19	0	8	13	10	$MU = \{1, 2\}$
$R(i)$	3	3	4	6		5	8	6	

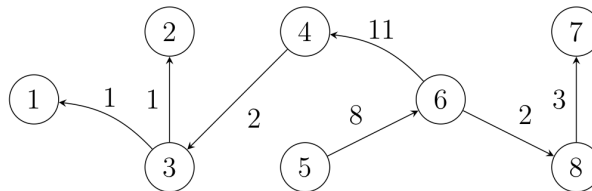
Iteration 7

• $h = 1 \Rightarrow N(h) = \{2, 3\} \Rightarrow$ keine Änderung $\Rightarrow MU = \{1, 2\}$

Iteration 8

• $h = 2 \Rightarrow N(h) = \{4\} \Rightarrow$ keine Änderung $\Rightarrow MU = \emptyset$

Kürzester-Wege-Baum



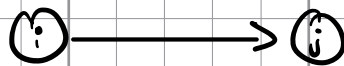
Aufgabe 2

An einem kleinen Flughafen soll ein neues Fahrzeug für den Gepäcktransport zu den Flugzeugen angeschafft werden. Dieses Fahrzeug soll allerdings nur drei Jahre in Betrieb bleiben, da danach ein automatisches System eingerichtet wird. Auf Grund von wachsenden Betriebskosten kann es aber sein, dass es sich lohnt das Fahrzeug nach einem oder nach zwei Jahren erneut auszutauschen. In der folgende Tabelle sind die absoluten Kosten (in €) gegeben, die anfallen, wenn ein Fahrzeug am Ende von Jahr i gekauft und bis zum Ende von Jahr j genutzt wird:

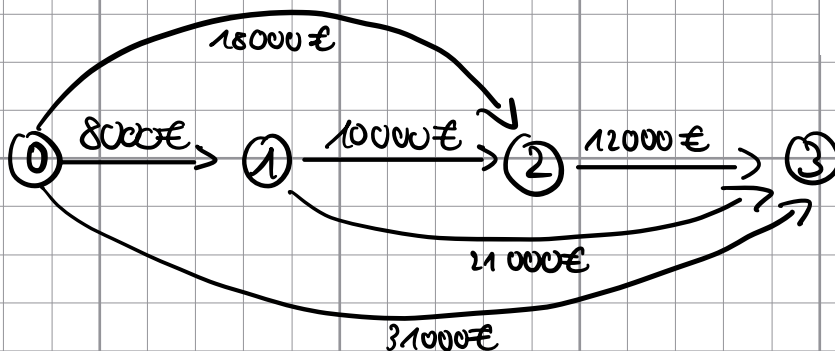
		Jahr j		
		1	2	3
Jahr i	0	8000	18000	31000
	1		10000	21000
	2			12000

Die Frage ist nun, zu welchem Zeitpunkt (wenn überhaupt) und wie oft das Fahrzeug ausgewechselt werden soll, damit die Gesamtkosten minimal werden und in jedem der drei Jahre ein Fahrzeug verfügbar ist. Bestimmen Sie dazu einen gerichteten und bewerteten Graphen, in dem sich die optimale Lösung als kürzester Weg darstellen lässt. Lösen Sie dann das Problem mit dem Dijkstra-Algorithmus.

Bedeutung des Graphen: Ein Fahrzeug wird am Ende von Jahr i gekauft und bis Ende von Jahr j genutzt ($i \in \{1, 2, 3\}$, (0 = heute); $j \in \{1, 2, 3\}$) wird wie folgt dargestellt:



Resultierender Graph:



	Jahr j		
	1	2	3
0	8000	18000	31000
Jahr i 1		10000	21000
2			12000

Bestimme kürzesten Weg von Knoten 0 nach Knoten 3 mit Dijkstra

Initialisierung

i	0	1	2	3
$D(i)$	0	∞	∞	∞
$P(i)$				

$$\mu = \{0\}$$

Iteration 1

$$h = 0 \Rightarrow N(h) = \{1, 2, 3\}$$

i	0	1	2	3
$D(i)$	0	8000	18000	31000

$$\mu = \{1, 2, 3\}$$

$R(i)$		0	0	0
--------	--	---	---	---

Iteration 2

• $h=1 \Rightarrow N(h)=\{2,3\}$

i	0	1	2	3
$D(i)$	0	8000	18000	25000
$R(i)$		0	0	1

$MU = \{2,3\}$

Iteration 3

• $h=2 \Rightarrow N(h)=\{3\}$

i	0	1	2	3
$D(i)$	0	8000	18000	25000
$R(i)$		0	0	1

$MU = \{3\}$

Iteration 4

• $h=3 \Rightarrow N(h)=\emptyset \Rightarrow \text{keine Änderung} \Rightarrow MU = \emptyset$

\Rightarrow kürzester Weg $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ mit Länge 25000€

\Rightarrow Heute und am Ende von Jahr 1 wird ein Auto gekauft

Aufgabe 3

Ein Unternehmen will ein neues Produkt so schnell wie möglich auf den Markt bringen. Bis dies soweit ist müssen allerdings noch die folgenden Aufgaben in der gegebenen Reihenfolge ausgeführt werden:

1. Abschließende Forschungen
2. Aufbau des Produktionssystems
3. Initialisierung der Produktion und des Vertriebs

Jede dieser Aufgaben kann nun normal, schnell oder sehr schnell ausgeführt werden. Allerdings steigen mit zunehmender Geschwindigkeit auch die Kosten, so dass es nicht möglich ist alle Aufgaben sehr schnell auszuführen. In den folgenden Tabellen sind die entsprechenden Zeiten und Kosten gegeben:

	Zeiten		
	1.	2.	3.
normal	5 Monate	—	—
schnell	4 Monate	3 Monate	5 Monate
sehr schnell	2 Monate	2 Monate	3 Monate

	Kosten (in Millionen €)		
	1.	2.	3.
normal	3	—	—
schnell	6	5	9
sehr schnell	9	8	12

Dabei bedeuten die Einträge '—', dass diese Möglichkeiten aus Zeitgründen nicht betrachtet werden. Weiter ist bekannt, dass für das ganze Projekt maximal 26 Millionen € zur Verfügung stehen.

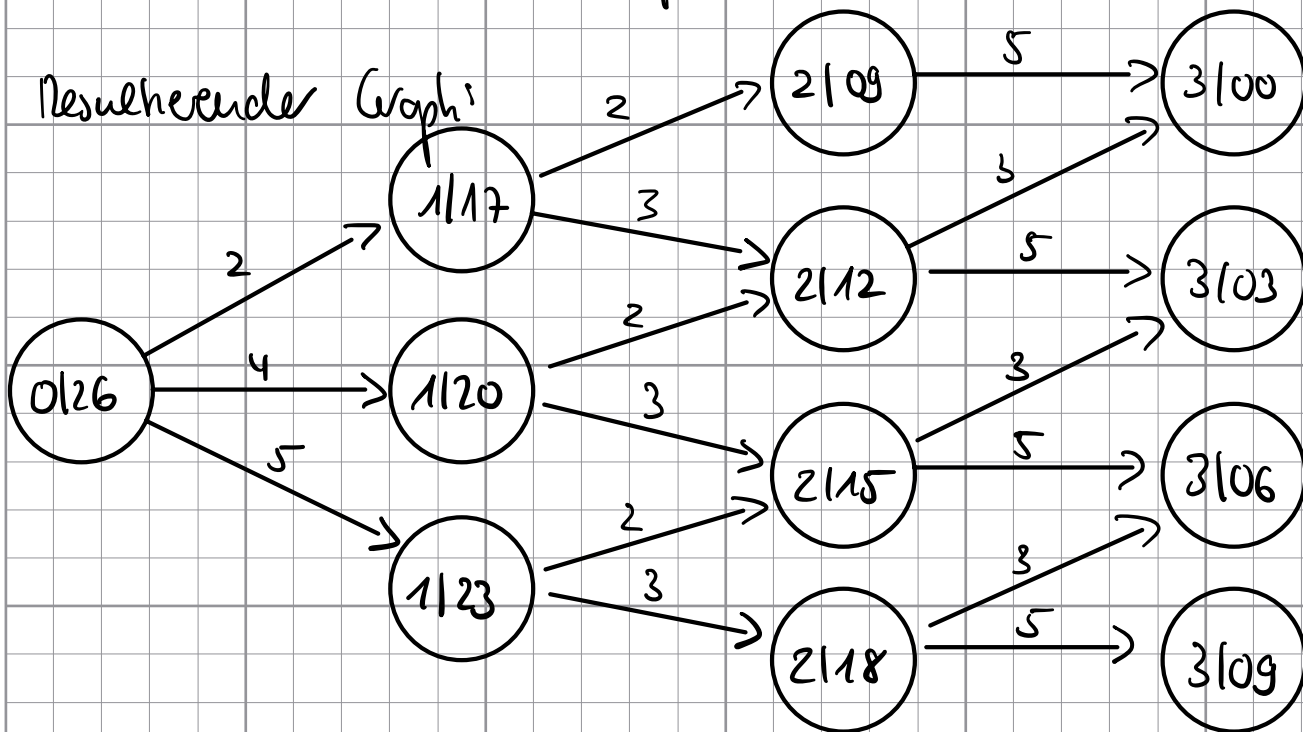
Wie schnell müssen nun die einzelnen Aufgaben ausgeführt werden, damit einerseits das Produkt möglichst schnell auf dem Markt ist und andererseits das Budget nicht überschritten wird? Stellen Sie zur Beantwortung der Frage einen gerichteten und bewerteten Graphen auf, der die Lösung des Problems als kürzesten Weg enthält. Bestimmen Sie mit einer geeigneten Methode die optimale Lösung.

Graph: • Knoten: Aufgabe i ist ausgeführt und es sind noch x Millionen € vom Budget übrig

$$i | x$$

- Kanten: Mögliche Entscheidungen (normal, schnell, sehr schnell)

- Kontenbewertung: Zeit, die die jeweilige Entscheidung in Anspruch nimmt



Eine optimale Lösung erhält man, wenn man die kürzesten Wege von Knoten $(0|26)$ zu den Knoten $(3|x)$ mit $(x \in \{9, 6, 3, 0\})$

bestimmt und davon den kürzesten Weg auswählt; Gemäß Aufgabe ist nur wichtig, dass das Budget eingehalten wird
 \Rightarrow Vennende Dijkstra

Inhaltsverzeichnis

[illegible]

$D(i)$

$$MU = \{0126\}$$

Iteration 1

$$h = 0126 \Rightarrow N(h) = \{1117, 1120, 1123\}$$

i	0126	1117	1120	1123	219	2112	2115	2118	310	313	316	319
$D(i)$	0	2	4	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$D(i)$		0126	0126	0126								

$$MU = \{1117, 1120, 1123\}$$

Iteration 2

$$h = 1117 \Rightarrow N(h) = \{219, 2112\}$$

i	0126	1117	1120	1123	219	2112	2115	2118	310	313	316	319
$D(i)$	0	2	4	5	4	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$D(i)$		0126	0126	0126	1117	1117						

$$MU = \{1120, 1123, 419, 2112\}$$

Iteration 3

$$h = 1120 \Rightarrow N(h) = \{2112, 2115\}$$

i	0126	1117	1120	1123	219	2112	2115	2118	310	313	316	319
$D(i)$	0	2	4	5	4	5	7	∞	∞	∞	∞	∞
$D(i)$		0126	0126	0126	1117	1117	1120					

$$MU = \{1123, 49, 2112, 2115\}$$

Iteration 4

$$\cdot h = 219 \Rightarrow N(h) = \{310\}$$

i	026	1117	1120	1123	219	2112	2115	2118	310	313	316	319
DC(i)	0	2	4	5	4	5	7	∞	8	∞	∞	∞
R(i)		0126	0126	0126	1117	1117	1120		219			

$$MU = \{1123, 2112, 2115, 310\}$$

Iteration 5

$$\cdot h = 1123 \Rightarrow N(h) = \{2115, 2118\}$$

i	026	1117	1120	1123	219	2112	2115	2118	310	313	316	319
DC(i)	0	2	4	5	4	5	7	8	9	∞	∞	∞
R(i)		0126	0126	0126	1117	1117	1120	1123	219			

$$MU = \{2112, 2115, 2118, 310\}$$

Iteration 6

$$\cdot h = 2112 \Rightarrow N(h) = \{310, 313\}$$

i	026	1117	1120	1123	219	2112	2115	2118	310	313	316	319
DC(i)	0	2	4	5	4	5	7	8	8	10	∞	∞
R(i)		0126	0126	0126	1117	1117	1120	1123	2112	2112		

$$MU = \{2115, 2118, 310, 313\}$$

Iteration 7

$$\cdot h = 2115 \Rightarrow N(h) = \{313, 316\}$$

i	0126	1117	1120	1123	219	2112	2115	2118	310	313	316	319
D(i)	0	2	4	5	4	5	7	8	8	10	12	∞
P(i)		0126	0126	0126	1117	1117	1120	1123	2112	2112	2115	

$$MU = \{2118, 310, 313, 316\}$$

Iteration 8

$$\cdot h = 2118 \Rightarrow N(h) = \{316, 319\}$$

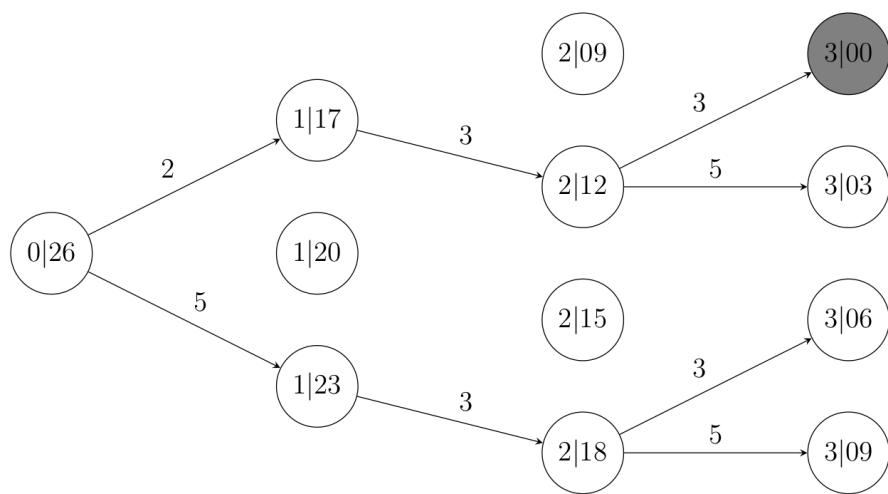
i	0126	1117	1120	1123	219	2112	2115	2118	310	313	316	319
D(i)	0	2	4	5	4	5	7	8	8	10	11	13
P(i)		0126	0126	0126	1117	1117	1120	1123	2112	2112	2118	2115

$$MU = \{310, 313, 316, 319\}$$

In den Iterationen 9-12 kann keine Veränderung mehr stattfinden, da alle Knoten aus MU keine Nachfolger haben; folglich leert sich MU sukzessive

Optimale Lösung: sehr schnell \rightarrow schnell \rightarrow sehr schnell
 \Rightarrow benötigt insgesamt 8 Monate

Kürzester Wege-Baum:



nächstes Tutorium:

mehr Graphentheorie

→ Tripel-Algorithmus

→ Kruskal-Algorithmus

Euler-Graphen / -Kreise

nächster Online Test:

Mo, 08.07. bis So, 14.07.