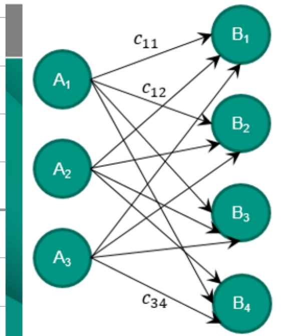
Tutorium 8

Transportprobleme

- Kosten c_{ij} von Angebot a_i nach b_j pro Mengeneinheit



Beispiel: $m = 3, n = 4$

- Entscheidungsvariablen
  - x_{ij} Anzahl der Mengeneinheiten, die von A_i nach B_j transportiert werden
- Formulierung als lineares Optimierungsproblem

$$\min \quad f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i,j$$

- Angebot = Nachfrage $\Rightarrow \sum a_i = \sum b_j$
- Bei Ungleichung verschiedene Möglichkeiten

- neue Schreibweise für Tableaus

- Jede zulässige Basislösung des allgemeinen Transportproblems mit m Anbietern und n Nachfragern besitzt genau $m + n - 1$ Basisvariablen
- Zur Berechnung eines optimalen Punktes des allgemeinen Transportproblems wird ein spezielles Transport-Tableau verwendet

Nachfrager / Anbieter

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	a
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
b	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

- Eröffnungsverfahren für Startlösungen
  - Nordwesteckenverfahren
    - -> beginnen oben links und wähle maximal mögliche

Input: Transportproblem

begin
  Stelle das Transport-Tableau auf
  Setze $i \coloneqq 1$ und $j \coloneqq 1$
  while $i \leq m$ **or** $j \leq n$
    Trage den Wert $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ ins Tableau ein
    Ersetze a_i durch $a_i - x_{ij}$ und b_j durch $b_j - x_{ij}$
    if $a_i = 0$
      Ersetze i durch $i + 1$
    else
      Ersetze j durch $j + 1$
    end
  end
end

Output: Zulässige Basislösung des Transportproblems

- Vogel'sche Approximationsmethode
  - -> versuche regret zu minimieren
  - was wäre der regret, wenn wir nicht das kleinste nehmen?

Input: Transportproblem

begin
  Stelle das Transport-Tableau mit unmarkierten Zeilen und Spalten auf
  while es gibt mindestens zwei unmarkierte Zeilen **and** es gibt mindestens zwei unmarkierte Spalten
    Bestimme für jede unmarkierte Zeile (Spalte) i (j) die Differenz dz_i (ds_j) von zweitkleinstem und kleinstem Kostenkoeffizient in unmarkierten Feldern
    Wähle eine unmarkierte Zeile oder Spalte mit maximaler Differenz dz_i oder ds_j
    Bestimme in der gewählten Zeile oder Spalte dasjenige unmarkierte Feld mit kleinstem Kostenkoeffizient c_{kl}
    Trage den Wert $x_{kl} = \min\{a_k, b_l\}$ ins Tableau ein
    Ersetze a_k durch $a_k - x_{kl}$ und b_l durch $b_l - x_{kl}$
    if $a_k = 0$ Markiere Zeile k **else** Markiere Spalte l **end**
  end
  while es gibt unmakierte Zeilen **or** es gibt unmarkierte Spalten
    Fülle das Tableau per Nordwesteckenregel auf
  end
end

Output: Zulässige Basislösung des Transportproblems

- <u>Finden einer optimalen Lösung</u>
  - Stepping-Stone-Methode
  - -> Primal-duales Verfahren

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \\
\text{s.t.} \quad & u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \\
& u_i, v_j \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

- mit Satz vom komplementären Schlupf lösen

- Mit dem Satz vom komplementären Schlupf ergibt sich für optimale Punkte x des primalen Problems und (u, v) des dualen Problems folgender Zusammenhang

$$x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n$$

- Es folgt
  - $x_{ij} > 0 \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$
  - $u_i + v_j < c_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0$

$$\mathbf{R} \max \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\begin{array}{llll} \text{s.t.} & u_i + v_j & \leq & c_{ij} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \\ & u_i, v_j & \in & \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \end{array}$$

= duale Zulässigkeit prüfen, d.h.

$c'_{ij} := c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$?

- Prinzip des Stepping-Stone-Verfahrens
  - Zu einer zulässigen Basislösung x wird eine duale Lösung (u, v) konstruiert
  - Danach werden für alle Nichtbasisvariablen mit Hilfe der dualen Lösung die Opportunitätskosten bestimmt
  - Sind all diese Opportunitätskosten größer oder gleich Null so ist die aktuelle Basislösung optimal, da die duale Lösung zulässig ist
  - Sonst wird durch eine Umverteilung der Transportmengen die Nichtbasisvariable mit den kleinsten negativen Opportunitätskosten in die Basis aufgenommen und die Methode beginnt von vorne
- → Primal-duale Methode

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Datensätze eines klassischen Transportproblems:

a)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad a = (5, 2, 3), \quad b = (3, 3, 2, 2)$$

b)

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 & 7 & 5 \\ 5 & 12 & 8 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 9 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = (20, 30, 30, 20), \quad b = (25, 25, 20, 10, 20)$$

Bestimmen Sie jeweils mit Hilfe der Nordwesteckenregel und der Vogelschen Approximationsmethode eine zulässige Startecke, d.h. eine Basislösung, die als erster zulässiger Transportplan eingesetzt werden kann.

A1a) Startecke mit Nordwesteckenregel

	B_1	B_2	B_3	B_4	a
A_1	3	2			5, 2, 0
A_2		1	1		2, 1, 0
A_3			1	2	3, 2, 0
b	3 0	3 1 0	2 1 0	2 0	

$\Rightarrow$ Transportplan

$x_{11} = 3,\ x_{12} = 2,\ x_{22} = 1$

$x_{23} = 1,\ x_{33} = 1,\ x_{34} = 2$

mit $z^* = 48$

• Vogel'sche Approximationsmethode

	B_1	B_2	B_3	B_4	a	d_z ← regret
A_1	3 / 3	7 / 0	6 / 0	4 / 2	5 2 0	1 1
→ A_2	2	4	3 / 2	2	2 0	0 –

→ A_3	4	3 3	8	5	3 0	1 1
b	3 0	3 0	2 0	2 0		
ds	1 1	1 4	3 2	2 1		

⇒ Transportplan

$x_{11}=3$, $x_{14}=2$,
$x_{23}=3$, $x_{32}=3$

mit $z^*=32$

⇒ 1 Zeile übrig ⇒ NW Eckenregel

A1b) Startecke mit Nordwesteckenregel

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a
A_1	20					20, 0
A_2	5	25				30 25 0
A_3		0	20	10		30 10 0
A_4				0	20	20 0
b	25 5 0	25 0	20 0	10 0	20 0	

$z^* = 725$

Startecke mit Vogel

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a	dz
→ A_1	8	6	3 20	7	5	20 0	2 2 – – – –
→ A_2	5 5	12	8	9 10	7 15	30 20 15 0	1 1 1 1 2 1
A_3	6	3 25	9 0	6	8 5	30 5 0	3 3 3 0 2 1
	0	0	0	0	0		0 – – – – –

A_4	20					20 0
b	25 5 0	25 0	20 0	10 0	20 5 0	
ds	5 1 1 1 1 –	3 3 9 – – –	3 5 1 1 1 1	4 2 2 2 – –	5 2 1 1 1 1	

$z^* = 345$

Aufgabe 2

Gemäß der vorangehenden Aufgabe seien die Datensätze eines klassischen Transportproblems sowie zusätzlich jeweils eine zulässige Startecke gegeben:

a) Zulässiger Transportplan (Startecke):
$x_{11} = 3,\ x_{12} = 2,\ x_{22} = 1,\ x_{23} = 1,\ x_{33} = 1,\ x_{34} = 2,\ ZFW = 48$

b) Zulässiger Transportplan (Startecke):
$x_{13} = 20,\ x_{21} = 5,\ x_{24} = 10,\ x_{25} = 15,\ x_{32} = 25,\ x_{33} = 0,\ x_{35} = 5,\ x_{41} = 20,\ ZFW = 345$

Wenden Sie jeweils die Stepping-Stone-Methode auf die gegebene Startecke an, um einen optimalen Transportplan zu berechnen.

A2a)

c_{ij} : $+d / -d$ BV: $c_{ij}' = c_{ij} - u_i - v_j = 0$!

c_{ij}' : x_{ij} NBV: $c_{ij}' = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$?

Iteration 1	B_1	B_2	B_3	B_4	u
A_1	3 / 3	7 / 2	6 / 0	4 / 1	0
A_2	2 / 2	4 −d / 1	3 +d / 1	2 / 2	−3
A_3	4 / −1	3 +d / −6	8 −d / 1	5 / 2	2
v	3	7	6	3	

$\Rightarrow \Delta = \min\{x_{22}, x_{33}\} = 1$, x_{22} wird NBV mit $z = 42$

Iteration 2	B_1	B_2	B_3	B_4	u
A_1	0 / 3	0 −d / 2	0 +d / −6	1 / −5	0
A_2	2 / 8	0 / 6	0 / 2	2 / 2	−6
A_3	−1 / 5	−6 +d / 1	0 −d / 0	0 / 2	−6
V	0	0	6	6	

$\Rightarrow \Delta = \min\{x_{12}, x_{33}\} = 0$, x_{33} wird NBV mit $z = 42$

Iteration 3	B_1	B_2	B_3	B_4	u
A_1	0 / 3	0 −d / 2	−6 / 0	−5 +d / −5	0
A_2	8 / 2	6 / 0	0 / 2	2 / −4	6
A_3	5 / 5	0 +d / 1	0 / 6	0 −d / 2	0
V	0	0	−6	0	

$\Rightarrow \Delta = \min\{x_{12}, x_{34}\} = 2$, x_{34} wird NBV mit $z^* = 32$

Iteration 4	B_1	B_2	B_3	B_4	u
A_1	0 / 3	0 / 5	0 / 0	−5 / 2	0
A_2	2 / 2	0 / 5	0 / 2	−4 / 1	0
A_3	5 / 0	0 / 3	6 / 1	0 / 0	5
V	0	−5	0	−5	

$\Rightarrow$ alle reduzierten Kosten nicht-negativ

$\Rightarrow$ Basislösung optimal

A2b)

Iteration 1	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u
A_1	8 8	6 9	3 20	7 8	5 3	0
A_2	5 +d 5	12 10	8 0	4 10	7 −d 15	5
A_3	6 0	3 25	9 −d 0	6 1	8 +d 5	6
A_4	0 −d 20	0 3	0 +d −3	0 1	0 −2	0
b	0	−3	3	−1	2	

$\Rightarrow \Delta = \min\{x_{33}, x_{41}\} = 2$, x_{33} wird NBV mit $z = 345$

Iteration 2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u
A_1	8 5	9 6	0 20	8 5	3 0	0
A_2	0 +d 5	10 10	0 3	0 10	0 −d 15	−3
A_3	0 0	0 25	0 3	1 1	0 5	−3
A_4	0 −d 20	3 3	−3 0	1 1	−2 +d −2	−3
b	3	3	0	3	3	

$\Rightarrow \Delta = \min\{x_{25}, x_{41}\} = 2$, x_{25} wird NBV mit $z = 315$

Iteration 3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u
A_1	5 5	6 8	0 20	5 5	0 2	0
A_2	0 20	10 12	3 3	0 10	0 2	0
A_3	0 +d −2	0 25	3 1	1 −1	0 −d 5	2
A_4	0 −d 5	3 5	0 0	1 1	−2 +d 15	0
b	0	−2	0	0	−2	

$\Rightarrow \Delta = \min\{x_{35}, x_{41}\} = 2$, x_{35} wird NBV mit $z^* = 305$

Iteration 4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u
A_1	5 5	8 6	0 20	5 5	2 2	0
A_2	0 20	12 10	3 3	0 10	2 2	0
A_3	-2 5	0 25	1 3	-1 1	0 0	-2
A_4	0 0	5	0 0	1 1	0 20	0
b	0	2	0	0	0	

$\Rightarrow$ alle reduzierten Kosten nicht-negativ

$\Rightarrow$ Basislösung optimal

nächstes Tutorium:

Transportprobleme

Graphentheorie

nächster Online Test:

Mo, 24.06. bis So, 30.06.

- Simplex mit oberen Schranken
- Parametrische Optimierung
- Multikriterielle Optimierung