Nachtrag Organisatorisches

Klausurbonus

10 Online Tests

=> 5 OR I & 5 OR II

=> mindestens 8 bestehen für Bonus

Tutorium / Übungsblatt 2

Modellieren eines linearen Optimierungsproblem

1. Entscheidungsvariablen benennen / bestimmen
   ↳ Index nicht vergessen
2. Mathematisches Problem / Optimierungsproblem
   - 2.1 max / min Funktion aufstellen
   - 2.2 Nebenbedingungen aufstellen
     ↳ Wertebereiche der Entscheidungsvariablen beachten

Graphische Lösung finden

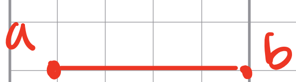
1. Nebenbedingungen einzeichnen
   → zulässige Menge einzeichnen
2. Zielfunktion einzeichnen
   → Zielfunktion verschieben

Standardform

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Konvexität

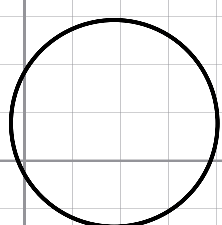
Definition: Eine Teilmenge $\mathbb{M}$ heißt konvex, wenn für alle $a, b \in \mathbb{M}$ und für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt:



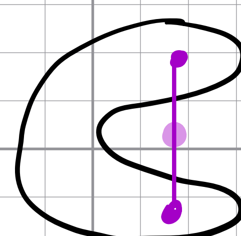
$$\lambda a + (1-\lambda) b \in \mathbb{M}.$$

Q: Welche Flächen sind konvex/nicht konvex?

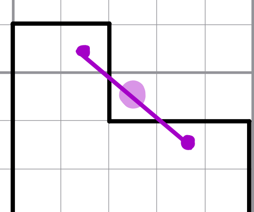
a)



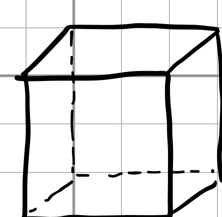
b)



c)



d)



→ Lineare Optimierungsprobleme sind immer konvex (Aufgabe 5)

Aufgabe 1

Die *Durchblick GmbH* ist ein Unternehmen mit drei Mitarbeitern, die zwei verschiedene Arten von handgefertigten Fenstern herstellen: Ein Fenster mit Holzrahmen und ein Fenster mit Aluminiumrahmen. Dabei verdienen sie an jedem Fenster mit Holzrahmen 60 € und an jedem Fenster mit Aluminiumrahmen 30 €. Der erste Mitarbeiter, Dieter, produziert die Holzrahmen und schafft davon 6 Stück pro Tag. Lisa, die zweite Mitarbeiterin, stellt die Aluminiumrahmen her. Sie fertigt 4 Stück pro Tag. Der dritte Mitarbeiter, Bernd, ist für das Anpassen und Schneiden des Glases zuständig, wobei er 12 m^2 pro Tag bearbeiten kann. Für jedes Fenster mit Holzrahmen braucht er dabei 1.5 m^2 und für jedes mit Aluminiumrahmen 2 m^2 Glas.

Das Unternehmen möchte nun wissen, wie viele Fenster vom jeweiligen Typ hergestellt werden müssen, damit der Gewinn maximal wird.

Hinweis: Gehen Sie der Einfachheit halber davon aus, dass auch Bruchteile von Fenstern gefertigt werden können. (Da ein sich täglich wiederholendes Programm geplant werden soll, ist diese Annahme vertretbar.)

a) Stellen Sie ein lineares Optimierungsproblem für dieses Problem auf.

A1 a)

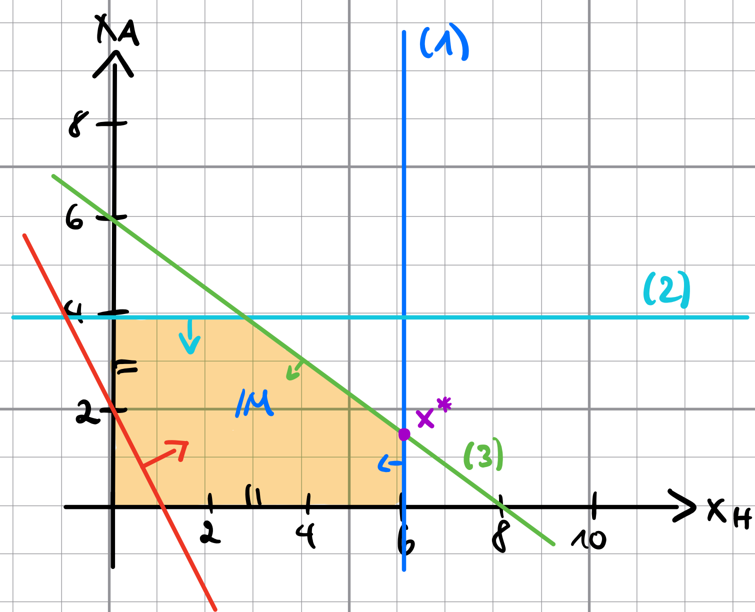
Entscheidungsvariablen:

- x_H: Anzahl Fenster mit Holzrahmen
- x_A: Anzahl Fenster mit Aluminiumrahmen

Lineares Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{llcrl}
\max & 60x_H & + & 30x_A & \\
\text{s.t.} & x_H & & & \leq 6 \quad (1) \\
 & & & x_A & \leq 4 \quad (2) \\
 & 1.5x_H & + & 2x_A & \leq 12 \quad (3) \\
 & & & x_H, x_A & \geq 0
\end{array}
$$

b) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem aus Teil a) graphisch.



Bestimmung des optimalen Punktes:

→ Schnittpunkt von (3) und (1)

$x_H = 6$ & $1.5 x_H + 2 x_A = 12$

$\Rightarrow x_H = 6, \; x_A = 1.5$

$\Rightarrow z^* = 60 \cdot 6 + 30 \cdot 1.5 = 405$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgende Definition:

Die Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißen linear unabhängig, wenn das lineare Gleichungssystem $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt ist. Andernfalls nennt man die Vektoren linear abhängig.

Gegeben seien die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie diese auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit und geben Sie an, ob sich durch Linearkombination der Vektoren der $\mathbb{R}^3$ erzeugen lässt.

a)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A2

a) Aufstellen und Lösen des LGS (in Matrixform):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Setze z.B. $\lambda_3 = 1$, dann folgt $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ und $\lambda_1 = -\frac{4}{3}$. Folglich ist das LGS nicht nur trivial für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ lösbar und a_1, a_2, a_3 sind linear abhängig.

$\mathbb{R}^3$ hat die Dimension 3 und lässt sich durch a_1, a_2, a_3 nicht vollständig aufspannen, d.h. nicht jedes Element des $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination von a_1, a_2, a_3 schreiben. Grund: Um *jedes* $x \in \mathbb{R}^3$ darstellen zu können, benötigt man drei linear unabhängige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$; a_1, a_2, a_3 sind aber nicht linear unabhängig, sondern linear abhängig.

b) Aufstellen und Lösen des LGS (in Matrixform):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -15 & 7 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{73}{4} & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

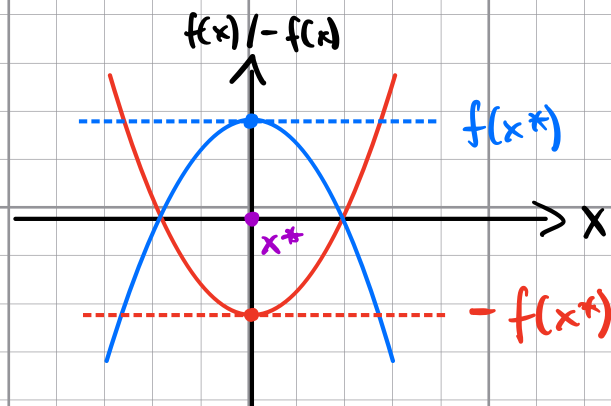
Das LGS ist nur trivial für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ lösbar. Folglich sind b_1, b_2, b_3 linear unabhängig. Da allgemein n linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, bilden b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Dies bedeutet, dass sich *jedes* $x \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von b_1, b_2, b_3 darstellen lässt. Hinweis: Die dabei benötigten Koeffizienten nennt man Koordinaten von x bzgl. der Basis b_1, b_2, b_3.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass $\max f(x) = -\min\{-f(x)\}$ gilt und veranschaulichen Sie dieses Resultat graphisch.

A3

$$f(x^*) = \max\{f(x)\} \iff f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in M$$
$$\iff -f(x^*) \leq -f(x) \quad \forall x \in M$$
$$\iff -f(x^*) = \min\{-f(x)\}$$
$$\iff f(x^*) = -\min\{-f(x)\}$$
$$\implies f(x^*) = \max\{f(x)\} = -\min\{-f(x)\}$$



Aufgabe 4

Bringen Sie die folgenden linearen Optimierungsprobleme in die Standardform:

a)

$$\begin{array}{llllllll} \min & -4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & -2x_1 & + & 8x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & \geq & 43 \\ & 3x_1 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & 4x_3 & \leq & 45 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 34 \\ & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

A4 a)

$$\begin{array}{ll} -\max & 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 8x_2 - \frac{1}{2}x_3 \leq -43 \\ & 3x_1 - \frac{1}{3}x_2 - 4x_3 \leq 45 \\ & 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 34 \\ & -2x_1 - x_2 - 7x_3 \leq -34 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{llllllll} \min & -x_1 & - & 3x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & \geq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ & & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

b) Substitution $x_3' = -x_3$

$$\begin{array}{ll} -\max & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & -3x_1 + 4x_2 - 3x_3' \leq -5 \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3' \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3' \leq 7 \\ & -x_1 - 3x_2 - x_3' \leq -7 \\ & x_1, x_2, x_3' \geq 0 \end{array}$$

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{M}$ aller zulässigen Punkte eines linearen Optimierungsproblems konvex ist.

A5 a) Jedes lineare Optimierungsproblem lässt sich in Standardform bringen.

$$\max \quad c^T x \qquad \text{s.t.} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

Seien $x, y \in \mathbb{M}$, d.h. $Ax \leq b, x \geq 0$ und $Ay \leq b, y \geq 0$.

Zu zeigen: $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathbb{M}$ $\qquad \lambda \in (0,1)$

$$\Leftrightarrow \quad A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq b \quad , \quad \lambda x + (1-\lambda)y \geq 0 \quad \lambda \in (0,1)$$

Es gilt: $\lambda Ax = A\lambda x \leq \lambda b$, bzw. $(1-\lambda)Ay = A(1-\lambda)y \leq (1-\lambda)b$

$$\overset{\text{Addition}}{\Longrightarrow} \quad A\lambda x + A(1-\lambda)y \leq \lambda b + (1-\lambda)b \Leftrightarrow A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq b$$

$$\lambda x \geq 0 \quad , \text{bzw.} \quad (1-\lambda)y \geq 0$$

$$\overset{\text{Addition}}{\Longrightarrow} \quad \lambda x + (1-\lambda)y \geq 0 \qquad \blacksquare$$

b) Sei $\mathbb{M}$ die (konvexe) Menge aller zulässigen Punkte und $\mathbb{M}^*$ die (nichtleere) Menge aller optimalen Punkte eines linearen Optimierungsproblems mit Zielfunktion $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ für $x \in \mathbb{M}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{M}^*$ konvex ist.

b) Zu zeigen: Für zwei optimale Punkte sind auch alle Punkte auf ihrer Verbindungsstrecke optimal.

Seien $x^*, y^* \in \mathbb{M}^*$, d.h.

$$f(x^*) = f(y^*) = \max_{x \in \mathbb{M}} f(x) = m$$

Dann folgt: $\mathbb{M}^* = \{x \in \mathbb{M} \mid f(x) = m\}$

$z^* \in M$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\alpha \in (0,1)$

Sei z^* auf der Verbindungsstrecke mit $z^* = \alpha x^* + (1-\alpha) y^*$

Es gilt:
$$\begin{aligned} f(z^*) &= \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^* \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i (\alpha x_i^* + (1-\alpha) y_i^*) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^* \\ &= \alpha f(x^*) + (1-\alpha) f(y^*) \\ &= \alpha m + (1-\alpha) m \\ &= m \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(z^*) = m \quad \Rightarrow z^* \in M^*$, somit ist M^* konvex.

nächstes Tutorium:

- Normalform
- Basis / Nichtbasisvariablen
- Simplex-Algorithmus