# Tutorium 5

## Dualer Simplex Tableau:

**Merke:** Die Schlupfvariablen des primalen Problems korrespondieren mit den Strukturvariablen des dualen Problems und umgekehrt. Das Tableau lässt sich wie folgt erweitern:

| | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $z$ | -300 | -400 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 2 | 2800 |
| $x_4$ | 3 | 2 | 4800 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 900 |

$\Rightarrow$

| | $x_1$ | $x_2$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | -300 | -400 | 0 | |
| $x_3$ | 1 | 2 | 2800 | $y_1$ |
| $x_4$ | 3 | 2 | 4800 | $y_2$ |
| $x_5$ | 0 | 1 | 900 | $y_3$ |
| | $y_4$ | $y_5$ | ✓ | |

Duale (Un)zulässigkeit

Primale (Un)zulässigkeit

Informationen sind implizit schon im linken Tableau.

## Dualer Simplex Algorithmus:

Auswahl Pivotzeile:

- kleinste negative Eintrag $b_i$ der rechten Seite

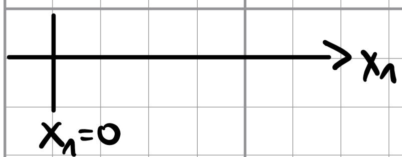
Auswahl Pivotspalte:

- Maximum von $\dfrac{\text{Zielfunktionskoeffizient}}{\text{Element Pivotzeile } (<0)}$
- $\max \left\{ \dfrac{c_j}{a_{rj}} \,\middle|\, a_{rj} < 0 \right\}$

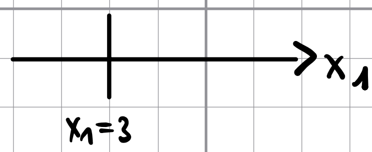
## Dualer Simplex Schritt: gleiche Regeln

# Obere und untere Schranken

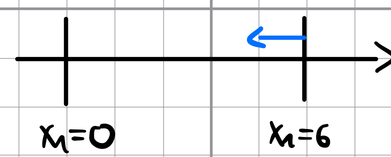
$x \geq 0$ | $x_1 \geq 3$ | $x_1 \geq 0,\ x_1 \leq 6$




normaler Simplex




untere Schranke




obere Schranke

## implizite Modellierung / Auflösung von Schranken für Simplex

untere Schranke: $x_1 \geq 3$

$$\Rightarrow x_1 = x_1' + 3 \quad , \quad x_1' \geq 0$$

obere Schranke: $x_1 \leq 3$

- obere Schranken werden im Simplex implizit beachtet
- Variable $x_j$ (mit oberer Schranke $o_j$) wird durch neue Variable $x_j' = o_j - x_j$ ersetzt, wenn obere Schranke erreicht wird

$\Rightarrow$ Bestimme die 3 Werte $q_1, q_2, q_3$

$$q_1 = \begin{cases} \infty & \text{falls } a_{is} \leq 0 \text{ für alle } i \\ \min\limits_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \,\middle|\, a_{is} > 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} \infty & \text{falls } a_{is} \geq 0 \text{ für alle } i \\ \min\limits_{i=1,\dots,m} \left\{ -\frac{o_{(i)} - x_{(i)}}{a_{is}} \,\middle|\, a_{is} < 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$q_3 = o_s$

Setze $q = \min \{q_1, q_2, q_3\}$

$q = q_1 \Rightarrow$ normaler Simplex

$q = q_2 \Rightarrow$ Ersetze Zeile von Element $a_{is}$
mit $x_i' = o_i - x_i$

$q = q_3 \Rightarrow$ Ersetze Spalte von Element $a_{is}$
mit $x_s' = o_s - x_s$

## Aufgabe 1

Ein Fabrikant stellt zwei Produkte P1 und P2 unter Verwendung von zwei Rohstoffen R1 und R2 her. Von den beiden Rohstoffen stehen 2800 bzw. 4800 Tonnen zur Verfügung. Die Produktion einer Tonne des Produktes P1 erfordert eine Tonne des Rohstoffes R1 und drei Tonnen des Rohstoffes R2. Die Produktion einer Tonne des Produktes P2 erfordert zwei Tonnen des Rohstoffes R1 und zwei Tonnen des Rohstoffes R2. Weiterhin ist es nicht möglich mehr als 900 Tonnen des Produktes P2 herzustellen.

Der Deckungsbeitrag des Produktes P1 beträgt 300 € pro Tonne und der Deckungsbeitrag des Produktes P2 400 € pro Tonne.

a) Stellen Sie ein lineares Optimierungsproblem auf, um ein optimales Produktionsprogramm zu bestimmen und lösen Sie es mit dem primalen Simplex-Algorithmus.

A1) a)

**Entscheidungsvariablen:**

- $x_1$: Produktionsmenge von P1 in Tonnen
- $x_2$: Produktionsmenge von P2 in Tonnen

P:

$$
\begin{array}{llcl}
\max & 300x_1 + 400x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \le & 2800 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & \le & 4800 \\
 & x_2 & \le & 900 \\
 & x_1, x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Simplex:

| | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $z$ | -300 | -400 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 2 | 2800 |
| $x_4$ | 3 | 2 | 4800 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 900 |

$\Longrightarrow$

| | $x_1$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|
| $z$ | -300 | 400 | 360000 |
| $x_3$ | 1 | -2 | 1000 |
| $x_4$ | 3 | -2 | 3000 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 900 |

$\Longrightarrow$

| | $x_3$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|
| $z$ | 300 | -200 | 660000 |
| $x_1$ | 1 | -2 | 1000 |
| $x_4$ | -3 | 4 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 900 |

$\Longrightarrow$

| | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|
| $z$ | 150 | 50 | 660000 |
| $x_1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1000 |
| $x_5$ | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| $x_2$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 900 |

optimaler Punkt $x^* = (1000, 900)$ mit $z^* = 660.000$

b) Geben Sie einen dual zulässigen Punkt des Problems an.

b) Merke: Die Schlupfvariablen des primalen Problems korrespondieren mit den Strukturvariablen des dualen Problems und umgekehrt. Das Tableau lässt sich wie folgt erweitern:

| | $x_1$ | $x_2$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-300$ | $-400$ | $0$ | |
| $x_3$ | $1$ | $2$ | $2800$ | $y_1$ |
| $x_4$ | $3$ | $2$ | $4800$ | $y_2$ |
| $x_5$ | $0$ | $1$ | $900$ | $y_3$ |
| | $y_4$ | $y_5$ | ✓ | |

$\Rightarrow$

| | $x_1$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-300$ | $400$ | $360000$ | |
| $x_3$ | $1$ | $-2$ | $1000$ | $y_1$ |
| $x_4$ | $3$ | $-2$ | $3000$ | $y_2$ |
| $x_2$ | $0$ | $1$ | $900$ | $y_5$ |
| | $y_4$ | $y_3$ | ✓ | |

$\Rightarrow$

| | $x_3$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $300$ | $-200$ | $660000$ | |
| $x_1$ | $1$ | $-2$ | $1000$ | $y_4$ |
| $x_4$ | $-3$ | $4$ | $0$ | $y_2$ |
| $x_2$ | $0$ | $1$ | $900$ | $y_5$ |
| | $y_1$ | $y_3$ | ✓ | |

$\Rightarrow$

| | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $150$ | $50$ | $660000$ | |
| $x_1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1000$ | $y_4$ |
| $x_5$ | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $y_3$ |
| $x_2$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $900$ | $y_5$ |
| | $y_1$ | $y_2$ | ✓ | |

Aus dem letzten Tableau können wir einen dual zulässigen Punkt ablesen. $y^* = (150, 50, 0, 0, 0)$

**Aufgabe 2**

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem $(P)$:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 25 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 30 \\
 & & & & & x_3 & \leq & 20 \\
 & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Transformieren Sie $(P)$ in Normalform und zwar so, dass in jeder Zeile eine Schlupfvariable mit positivem Vorzeichen steht.

A2) a) P:

$$\max \; 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 25 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 &= -25 \\ -4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_6 &= -30 \\ x_3 + x_7 &= 20 \\ x_1, \dots, x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des dualen Simplex-Algorithmus einen zulässigen Punkt für $(P)$.
Welchen Zielfunktionswert hat dieser Punkt? Ist er bereits optimal?

b) Start tableau:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | −3 | −2 | −3 | 0 |
| $x_5$ | 1 | 2 | 1 | 25 |
| $x_6$ | −1 | −2 | −1 | −25 |
| $x_7$ | −4 | −2 | −1 | −30 |
| $x_8$ | 0 | 0 | 1 | 20 |

Q: Was ist Pivotelement?

– Pivotzeile? Auswahl Pivotzeile:
- kleinste negative Eintrag $b_i$ der rechten Seite

– Pivotspalte? Auswahl Pivotspalte:
- Maximum von $\frac{\text{Zielfunktionskoeffizient}}{\text{Element Pivotzeile } (<0)}$
- $\max \left\{ \frac{c_j}{a_{rj}} \,\middle|\, a_{rj} < 0 \right\}$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | −3 | −2 | −3 | 0 |
| $x_4$ | 1 | 2 | 1 | 25 |
| $x_5$ | −1 | −2 | −1 | −25 |
| $x_6$ | −4 | −2 | −1 | −30 |
| $x_7$ | 0 | 0 | 1 | 20 |

$\Longrightarrow$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 9 | 4 | −3 | 90 |
| $x_4$ | −3 | 0 | 1 | −5 |
| $x_5$ | 3 | 0 | −1 | 5 |
| $x_3$ | 4 | 2 | −1 | 30 |
| $x_7$ | −4 | −2 | 1 | −10 |

$\min\{-25, -30\} = -30$

$\max\left\{\frac{-3}{-4}, \frac{-2}{-2}, \frac{-3}{-1}\right\} = 3$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 9 | 4 | -3 | 90 |
| $x_4$ | -3 | 0 | 1 | -5 |
| $x_5$ | 3 | 0 | -1 | 5 |
| $x_3$ | 4 | 2 | -1 | 30 |
| $x_7$ | -4 | -2 | 1 | -10 |

$\Rightarrow$

| | $x_1$ | $x_7$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 2 | -1 | 70 |
| $x_4$ | -3 | 0 | 1 | -5 |
| $x_5$ | 3 | 0 | -1 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 20 |
| $x_2$ | 2 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 5 |

$\min\{-5, -10\} = -10$

$\max\{\frac{9}{-4}, \frac{4}{-2}\} = -2$

| | $x_1$ | $x_7$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 2 | -1 | 70 |
| $x_4$ | -3 | 0 | 1 | -5 |
| $x_5$ | 3 | 0 | -1 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 20 |
| $x_2$ | 2 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 5 |

$\Rightarrow$

| | $x_4$ | $x_7$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{1}{3}$ | 2 | $-\frac{2}{3}$ | $68\frac{1}{3}$ |
| $x_1$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |
| $x_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 20 |
| $x_2$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{3}$ |

$\min\{-5\} = -5$

$\max\{\frac{1}{-3}\} = \frac{1}{-3}$

$\Rightarrow$ Dual zulässig, aber nicht optimal

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des zulässigen Punkts aus Aufgabenteil b) einen optimalen Punkt von $(P)$.

c)

| | $x_4$ | $x_7$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{1}{3}$ | 2 | $-\frac{2}{3}$ | $68\frac{1}{3}$ |
| $x_1$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |
| $x_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 20 |
| $x_2$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{3}$ |

$\Rightarrow$

| | $x_4$ | $x_7$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 3 | 0 | 4 | 75 |
| $x_1$ | 1 | -1 | 2 | 5 |
| $x_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 20 |
| $x_6$ | 4 | -3 | 6 | 10 |

optimaler Punkt ist $x^* = (5, 0, 20)$ mit $z^* = 75$

## Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des dualen Simplex-Algorithmus, dass das folgende lineare Optimierungsproblem keinen zulässigen Punkt besitzt:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 90x_1 & + & 70x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \geq & 2 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A3)

Dualer Simplex

| | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $z$ | $-90$ | $-70$ | $0$ |
| $x_3$ | $2$ | $1$ | $2$ |
| $x_4$ | $\boxed{-1}$ | $1$ | $-2$ |

| | $x_4$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $z$ | $-90$ | $-160$ | $180$ |
| $x_3$ | $2$ | $3$ | $-2$ |
| $x_1$ | $-1$ | $-1$ | $2$ |

Da in der Pivotzeile (Zeile von $x_3$) kein negativer Koeffizient vorliegt, greift die duale Stoppregel II

$\Rightarrow$ Das Problem besitzt eine leere zulässige Menge, d.h. $\mathbb{M} = \emptyset$

## Aufgabe 4

Bestimmen Sie einen optimalen Punkt und den zugehörigen Zielfunktionswert in folgendem linearen Minimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 4x_1 & + & 12x_2 & + & 18x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & & & + & 3x_3 & \geq & 3 \\ & & & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & 5 \\ & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

A4) in Standardform (hier dual kanonische Form):

$$\begin{array}{lrrrcl} -\max & -4x_1 & -12x_2 & -18x_3 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 & & -3x_3 & \leq & -3 \\ & & -2x_2 & -2x_3 & \leq & -5 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

## Dualer Simplex:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 4 | 12 | 18 | 0 |
| $x_4$ | -1 | 0 | -3 | -3 |
| $x_5$ | 0 | -2 | -2 | -5 |

| | $x_1$ | $x_5$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 4 | 6 | 6 | -30 |
| $x_4$ | -1 | 0 | -3 | -3 |
| $x_2$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{5}{2}$ |

| | $x_1$ | $x_5$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 2 | 6 | 2 | -36 |
| $x_3$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 1 |
| $x_2$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{2}$ |

optimaler Punkt $x^* = (0, \frac{3}{2}, 1)$ mit $z^* = -36$

Der Zielfunktionswert des Ausgangsproblems ist $-z^* = 36$.

**Aufgabe 5**

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Ersetzen Sie dabei die Variablen, so dass alle unteren Schranken wegfallen.

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 48 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 23 \\
 & x_1 \geq 4, & & x_2 \geq 2, & & x_3 \geq 5 & &
\end{array}$$

A5) Ersetze die Entscheidungsvariablen wie folgt:

$x_1 = x_1' + 4$, $x_2 = x_2' + 2$, $x_3 = x_3' + 5$

$P'$: $\max \; 3(x_1'+4) + 3(x_2'+2) + 4(x_3'+5)$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 3(x_1'+4) + (x_2'+2) + 2(x_3'+5) &\leq 40 \\ (x_1'+4) + 2(x_2'+2) + 4(x_3'+5) &\leq 48 \\ (x_1'+4) + (x_2'+2) + (x_3'+5) &\leq 12 \\ x_1', x_2', x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} \max \quad 3x_1' + 3x_2' + 4x_3' &+ 38 \\ 3x_1' + x_2' + 2x_3' &\leq 16 \\ x_1' + 2x_2' + 4x_3' &\leq 20 \\ x_1' + x_2' + x_3' &\leq 12 \\ x_1', x_2', x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

Simplex:

| | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-3$ | $-3$ | $-4$ | $38$ |
| $x_4$ | $3$ | $1$ | $2$ | $16$ |
| $x_5$ | $1$ | $2$ | $4$ | $20$ |
| $x_6$ | $1$ | $1$ | $1$ | $12$ |

$\Rightarrow$

| | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $58$ |
| $x_4$ | $\frac{5}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $6$ |
| $x_3'$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $5$ |
| $x_6$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $7$ |

| | $x_4'$ | $x_2'$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{4}{5}$ | $-1$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{314}{5}$ |
| $x_1'$ | $\frac{2}{5}$ | $0$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{12}{5}$ |
| $x_3'$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{22}{5}$ |
| $x_6$ | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{26}{5}$ |

| | $x_4$ | $x_3'$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{3}{5}$ | $2$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{358}{5}$ |
| $x_1'$ | $\frac{2}{5}$ | $0$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{12}{5}$ |
| $x_2'$ | $-\frac{1}{5}$ | $2$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{44}{5}$ |
| $x_6$ | $-\frac{1}{5}$ | $-1$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

Optimal Punkt $x_1'^* = \frac{12}{5}$, $x_2'^* = \frac{44}{5}$, $x_3'^* = 0$ mit $z^* = \frac{358}{5}$

optimaler Punkt Ausgangsproblem:

$x_1^* = \frac{12}{5} + 4 = \frac{32}{5}$, $x_2^* = \frac{44}{5} + 2 = \frac{54}{5}$, $x_3^* = 0 + 5 = 5$ mit $z^* = \frac{358}{5}$

**Aufgabe 6**

Bestimmen Sie für die beiden folgenden linearen Optimierungsprobleme jeweils einen optimalen Punkt mit Hilfe des Simplex-Algorithmus mit impliziter Berücksichtigung oberer Schranken.

a)

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & & & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 1 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
& & & \multicolumn{5}{r}{x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 3,\ x_3 \leq 2} \\
& & & & & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

A6) a) Starttableau

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | -1 | -3 | 2 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 1 | -2 | 1 |
| $x_5$ | 2 | 1 | 2 | 8 |

$s = 2$ $\Rightarrow q_1 = \min\{1, 8\} = 1$

$q_2 = \infty$ (alle $a_{is} \geq 0$)

$q_3 = 3$ $(= o_2)$

$\Rightarrow q = q_1$ und Fall 1

Fall 1: normaler Simplex

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | -1 | -3 | 2 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 1 | -2 | 1 |
| $x_5$ | 2 | 1 | 2 | 8 |

$\Rightarrow$

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | -1 | 3 | -4 | 3 |
| $x_2$ | 0 | 1 | -2 | 1 |
| $x_5$ | 2 | -1 | 4 | 7 |

## Iteration 2:

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $3$ | $-4$ | $3$ |
| $x_2$ | $0$ | $1$ | $-2$ | $1$ |
| $x_5$ | $2$ | $-1$ | $4$ | $7$ |

$s = 3 \Rightarrow q_1 = \frac{7}{4}$

$q_2 = -\frac{3-1}{-2} = 1$

(Zeile 1 entspricht Variable $x_2$ mit $o_2 = 3$ und $x_2 = 1$)

$q_3 = 2$

Z1: $x_2 + x_4 - 2x_3 = 1$

$\Rightarrow q = q_2 = 1$ und Fall 2

Fall 2: $x_2 = 3 - x_2' \Leftrightarrow x_2' = 3 - x_2$

$\Longrightarrow$ $3 - x_2' + x_4 - 2x_3 = 1 \Leftrightarrow x_2' - x_4 + 2x_3 = 2$

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $3$ | $-4$ | $3$ |
| $x_2$ | $0$ | $1$ | $-2$ | $1$ |
| $x_5$ | $2$ | $-1$ | $4$ | $7$ |

$\Longrightarrow$

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $3$ | $-4$ | $3$ |
| $x_2'$ | $0$ | $-1$ | $2$ | $2$ |
| $x_5$ | $2$ | $-1$ | $4$ | $7$ |

- Da $r = 1$ und $x_{(1)} = x_2$ durch $x_2' = 3 - x_2$ und pivotiere $x_2'$ aus der Basis mittels des Pivot-Elements $a_{rs} = a_{13}$

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $3$ | $-4$ | $3$ |
| $x_2'$ | $0$ | $-1$ | $2$ | $2$ |
| $x_5$ | $2$ | $-1$ | $4$ | $7$ |

$\Longrightarrow$

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_2'$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $7$ |
| $x_3$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $x_5$ | $2$ | $1$ | $-2$ | $3$ |

## Iteration 3:

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_2'$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $7$ |
| $x_3$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $x_5$ | $2$ | $1$ | $-2$ | $3$ |

$s = 1 \Longrightarrow q_1 = \frac{3}{2}$

$q_2 = \infty$ (alle $a_{is} \geq 0$)

$q_3 = 1$

Fall 3: obre Schranke $\Rightarrow q = q_3 = 1$ und Fall 3

$x_1' = o_1 - x_1 \Leftrightarrow x_1' = 1 - x_1$

- Ersetze $x_1$ durch $x_1' = 1 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = -x_1' + 1$

| | $x_1$ | $x_4$ | $x_2'$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $7$ |
| $x_3$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $x_5$ | $2$ | $1$ | $-2$ | $3$ |

$\Longrightarrow$

| | $x_1'$ | $x_4$ | $x_2'$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $1$ | $1$ | $2$ | $8$ |
| $x_3$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $x_5$ | $-2$ | $1$ | $-2$ | $1$ |

$\hookrightarrow x_5 + 2x_1 + x_4 - 2x_2' = 3$

$x_5 + 2(-x_1' + 1) + x_4 - 2x_2' = 3 \Longleftrightarrow x_5 - 2x_1' + x_4 - 2x_2' = 1$

$\Rightarrow$ optimaler Punkt $x_1'^* = 0$, $x_2'^* = 0$, $x_3^* = 1$ mit $z^* = 8$

$x_1^* = 1 - 0 = 1$, $x_2^* = 3 - 0 = 3$, $x_3^* = 1$ mit $z^* = 8$

b)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 5 \\
& x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 \\
\end{array}$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-2$ | $-3$ | $2$ | $-5$ | $0$ |
| $x_5$ | $2$ | $2$ | $1$ | $2$ | $5$ |
| $x_6$ | $1$ | $2$ | $-3$ | $4$ | $5$ |

$q_1 = \frac{5}{4}, q_2 = \infty, q_3 = 1$

$\Rightarrow q = q_3 = 1$, d.h. Fall 3

$x_4' = \sigma_4 - x_4$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4'$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-2$ | $-3$ | $2$ | $5$ | $5$ |
| $x_5$ | $2$ | $2$ | $1$ | $-2$ | $3$ |
| $x_6$ | $1$ | $\boxed{2}$ | $-3$ | $-4$ | $1$ |

$q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \infty, q_3 = 1$

$\Rightarrow q = q_1 = \frac{1}{2}$, d.h. Fall 1

norm. Simplex

| | $x_1$ | $x_6$ | $x_3$ | $x_4'$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | $-1$ | $\frac{13}{2}$ |
| $x_5$ | $1$ | $-1$ | $4$ | $2$ | $2$ |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-2$ | $\frac{1}{2}$ |

$q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = -\frac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}, q_3 = 1$

$\Rightarrow q = q_2 = \frac{1}{3}$, d.h. Fall 2

$x_2' = \sigma_2 - x_2$

| | $x_1$ | $x_6$ | $x_3$ | $x_4'$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | $-1$ | $\frac{13}{2}$ |
| $x_5$ | $1$ | $-1$ | $4$ | $2$ | $2$ |
| $x_2'$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\boxed{\frac{3}{2}}$ | $2$ | $\frac{1}{2}$ |

+ Simplex

| | $x_1$ | $x_6$ | $x_2'$ | $x_4'$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{22}{3}$ |
| $x_5$ | $\boxed{\frac{7}{3}}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{8}{3}$ | $-\frac{10}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $x_3$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

$q_1 = \frac{2}{7}, q_2 = -\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2, q_3 = 1$

$\Rightarrow q = q_1 = \frac{2}{7}$, d.h. Fall 1

norm. Simplex

| | $x_5$ | $x_6$ | $x_2'$ | $x_4'$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{54}{7}$ |
| $x_1$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{8}{7}$ | $-\frac{10}{7}$ | $\frac{2}{7}$ |
| $x_3$ | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{3}{7}$ |

Optimaler Punkt $x_1^* = \frac{2}{7}$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = \frac{3}{7}$, $x_4^* = 1$ mit $z^* = \frac{54}{7}$

## nächstes Tutorium:

- parameterische Optimierungsprobleme
- multikriterielle Optimierung