Schnittebene

- damit eine Ungleichung eine gültige Schnittebene beschreibt, darf
  1. Der Optimalpunkt der Relaxierung nicht mehr zulässig sein

  und

  2. kein zulässiger Punkt von P weggeschnitten werden

Gomory-Cuts

- gültige Schnittebenen
  - ↳ ergeben sich aus langer Argumentationskette
  - ↳ lassen sich per "Rechenregel" aus einem Endtableau konstruieren

	x_1	...	x_k	
x_{k+i}	a_{i1}		a_{ik}	b_i

wenn $b_i \notin \mathbb{N}_0$:

$$x_{k+i} + \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = b_i$$

$$\overset{x \geq 0}{\Longrightarrow} x_{k+i} + \sum_{j=1}^{k} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \leq b_i$$

$$\overset{x \in \mathbb{N}_0}{\Longrightarrow} x_{k+i} + \sum_{j=1}^{k} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{k} (\lfloor a_{ij} \rfloor - a_{ij}) x_j \leq \lfloor b_i \rfloor - b_i$$

Herleitung

$$\Longleftrightarrow - \sum_{i \in NBV} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \leq - (b_i - \lfloor b_i \rfloor)$$

Wichtig!

Rechenregel

- Abstand zur nächst-kleineren Zahl und Minus davor (immer alles negativ!)

Gomory-Schnittebenenverfahren

- Initialisierung
  - Löse LP-Relaxierung Q_0 von P_0 (Simplex)
  - Setze $k = 0$.

- Stufe 0
  - falls x_k^* ganzzahlig ⇒ Stopp, x_k^* optimaler Punkt von P
  - falls x_k^* nicht ganzzahlig ⇒ füge Gomory-Cut hinzu

$$-\sum_{i \in NBV} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \leq -(b_i - \lfloor b_i \rfloor)$$

(– Schnittebene in x_1, x_2-Koordinatensystem übertragen (zum Zeichnen) optional)

- Stufe 1
  - Löse Q_k (Kalt- oder Warmstart)
  - prüfe x_k^* auf Ganzzahligkeit

⇒ Wiederholen bis ganzzahlige Lösung

Heuristiken

- weder das B&B-Verfahren, noch das Gomory-Schnittebenen-Verfahren sind polynomial
  - ⇒ große Probleminstanzen dauern oft zu lange

↳ Heuristiken sind Verfahren, die schnell zu einer möglichst guten Lösung kommen (muss nicht optimal sein)

Verfahren des nächsten Nachbarn → TSP (Konstruktionsheuristik)

Eine Tour wird angegeben als $S = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_1)$

1. Wähle $s_1 = s_n = 1$
2. Wähle Stadt, die am nächsten zu Stadt i liegt.
3. Alle Städte abarbeiten

Greedy-Heuristik → Rucksack-Problem (Konstruktionsheuristik)

1. nach normiertem Nutzen absteigend sortieren
2. Initialisiere $x_i = 0$ $\quad C^* = 0$
3. Füge Gegenstände in sortierter Reihenfolge hinzu
   → falls dadurch $C^* >$ Kapazität, dann ignoriere Gegenstand
4. Wiederhole für alle Gegenstände

Tabu-Liste

Keine Auswahl eines Punktes, der in der Tabu-Liste steht

Tabu-Suche

(Verbesserungsheuristik)

- $\bar{x}$ bezeichnet den besten bisher gefundenen zulässigen Punkt
- TL ist Tabu-Liste
- $N(x)$ bezeichne die Nachbarschaft von x
- $z(x)$ bezeichne den Zielfunktionswert von x
- $z^{max} := \max\{z(x) \mid x \in N(x^i) \setminus TL\}$ bezeichne den größten ZFW für Punkte aus $N(x^i)$, die nicht in der Tabu-Liste stehen

1. Initialisierung: Punkt aus Aufgabe
2. Bestimme Nachbarschaft nach Vorschrift aus Aufgabe
3. Bestimme $N(x) \setminus TL$ (die nicht in TL sind)
4. Suche davon z^{max}
5. Update $\bar{x}$, falls $\bar{z} < z^{max}$
6. Füge vorherigen Punkt der Tabu-Liste hinzu
7. Wiederhole so oft bis maximale Iterationsanzahl erreicht oder keine Auswahl mehr möglich ist

Aufgabe 1

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem, das als LP-Relaxierung in der nachfolgenden Aufgabe auftreten wird:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{N}_0 \end{array}$$

A1)

(0)	x_1	x_2	
z	-2	-1	0
x_3	1	1	3
x_4	$\boxed{1}$	-1	0

(1)	x_4	x_2	
z	2	-3	0
x_3	-1	$\boxed{2}$	3
x_1	1	-1	0

(2)	x_4	x_3	
z	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

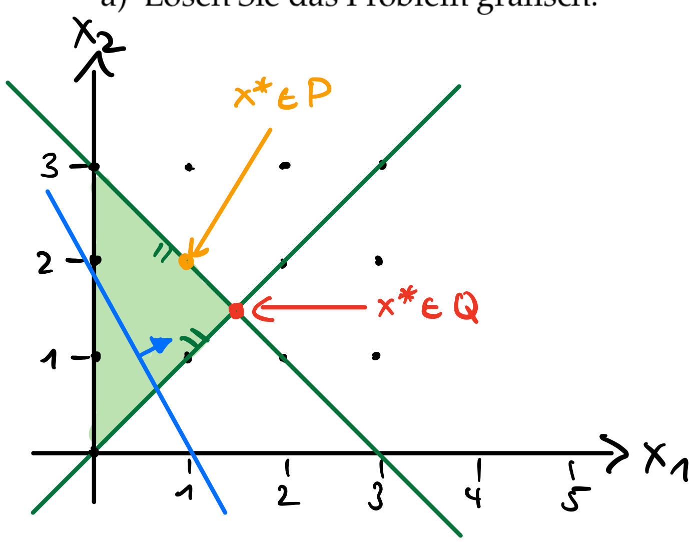
Optimaler Punkt $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$ mit $f(x) = \frac{9}{2}$

Aufgabe 2

Gegeben sei das ganzzahlige lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{N}_0. \end{array}$$

a) Lösen Sie das Problem grafisch.



$2x_1 + x_2 = z \Leftrightarrow x_2 = z - 2x_1$

$x_1 + x_3 \leq 3 \Leftrightarrow x_2 \leq 3 - x_1$

$x_1 - x_2 \leq 0 \Leftrightarrow x_2 \geq x_1$

Der optimale Punkt des ganzzahligen Problems liegt bei $x^* = (1,2)$ mit $z^* = 4$. Der optimale Punkt der Relaxierung lautet $(1.5, 1.5)$ mit $z = 4.5$.

b) Lösen Sie das Problem mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory und zeichnen Sie zur Veranschaulichung des Verfahrens die Schnittebenen in die Grafik aus Teil a) ein.

- Initialisierung

· Löse LP-Relaxierung Q_0 von P_0 (Aufgabe 1)

A1)

(0)	x_1	x_2	
z	-2	-1	0
x_3	1	1	3
x_4	$\boxed{1}$	-1	0

(1)	x_4	x_2	
z	2	-3	0
x_3	-1	$\boxed{2}$	3
x_1	1	-1	0

(2)	x_4	x_3	
z	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Optimaler Punkt $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$ mit $f(x) = \frac{9}{2}$

· setze $k=0$.

$$-\sum_{i \in NBV} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \leq -(b_i - \lfloor b_i \rfloor)$$

- Stufe 0

$x^*_{Q_0}$ ist nicht ganzzahlig (beide Komponenten)

→ Schnittebene z.B. bei x_2-Zeile einfügen

$$-\left(-\tfrac{1}{2} - \lfloor -\tfrac{1}{2} \rfloor\right) x_4 - \left(\tfrac{1}{2} - \lfloor \tfrac{1}{2} \rfloor\right) x_3 \leq -\left(\tfrac{3}{2} - \lfloor \tfrac{3}{2} \rfloor\right)$$

$$-\tfrac{1}{2} x_4 - \tfrac{1}{2} x_3 \leq -\tfrac{1}{2}$$

$$s_1 - \tfrac{1}{2} x_4 - \tfrac{1}{2} x_3 = -\tfrac{1}{2}$$

- Stufe 1

Löse LP-Relaxierung Q_1 von P_1 (Problem mit cut)

→ Dafür füge Schnitt dem Tableau hinzu

(3)	x_4	x_3	
z	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$

(4)	s_1	x_3	
z	1	1	4
x_2	-1	1	2
x_1	1	0	1
x_4	-2	1	1

$x_{B_1}^*$ ist ganzzahlig, d.h. als Gesamtergebnis lässt sich der optimale Punkt $x^* = (x_1^* = 1,\ x_2^* = 2)$ mit optimalem Wert $z^* = 4$ angeben.

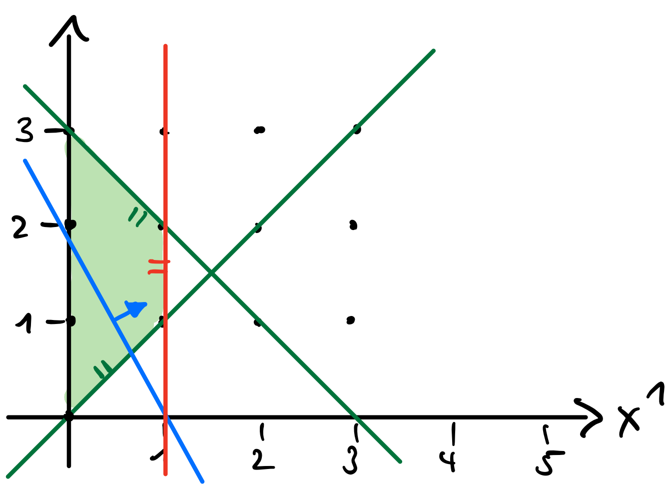
Um die verwendete Schnittebene einzeichnen zu können, muss sie in Strukturvariablen ausgedrückt werden. Aus den beiden letzten Zeilen in Tableau (3) ergibt sich:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad s_1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + s_1 = 1$$ (Aufaddieren)

Mit der Voraussetzung $s_1 \geq 0$ folgt:

$$x_1 \leq 1$$



Aufgabe 3

Für die LP-Relaxierung des Zuschnittproblems aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 13 zu *Einführung in das OR I* erhält man folgendes Optimaltableau:

(4)	x_2	x_4	x_8	x_9	x_6	x_7	
	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3340}{7}$
x_3	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2040}{7}$
x_5	0	0	0	1	1	1	80
x_1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{60}{7}$

Lösen Sie das Problem mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory. Wählen Sie für die Gomory-Schnittebene jeweils diejenige Zeile mit dem kleinstmöglichen Index der zugehörigen nicht-ganzzahligen Basisvariable aus. Zeigen Sie zudem, dass das Problem mehrere optimale ganzzahlige optimale Punkte besitzt.

Vorbemerkung:

Das ganzzahlige lineare Optimierungsproblem des Zuschnittproblems aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 13 zu *Einführung in das OR I* lautete:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\max & 3x_1 & + 2x_2 & + x_3 & + x_4 & + 2x_5 & + x_6 & & & & \text{(\# Produkte)} \\
\text{s.t.} & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & & & & \le & 300 & \text{(\# 6.5m-Leisten)} \\
 & & & & & x_5 & + x_6 & + x_7 & \le & 80 & \text{(\# 5.5m-Leisten)} \\
 & 6x_1 & + 3x_2 & - x_3 & - 4x_4 & + 3x_5 & & - 3x_7 & = & 0 & \text{(Verhältnis Leisten)} \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \in & \mathbb{N}_0 &
\end{array}
$$

$\longrightarrow$ Strukturvariablen $x_1 - x_7$

Man beachte, dass die LP-Relaxierung dieses Problems noch nicht in kanonischer Form vorliegt. Diese lässt sich erhalten, indem man zunächst die dritte Nebenbedingung durch -3 dividiert und anschließend aus der zweiten Zeile x_7 eliminiert. Auf diese Weise wird x_7 in der dritten Nebenbedingung zur Schlupfvariable und für die ersten beiden Nebenbedingungen führt man noch x_8 bzw. x_9 als Schlupfvariablen ein.

$$\boxed{-\sum_{i \in NBV} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \le -(b_i - \lfloor b_i \rfloor)}$$

▸ Initialisierung
$\rightarrow$ erledigt

(4)	x_2	x_4	x_8	x_9	x_6	x_7	
	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3340}{7}$
x_3	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2040}{7}$
x_5	0	0	0	1	1	1	80
x_1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{60}{7}$

▸ Stufe 0

$x_{Q_0}^*$ ist nicht ganzzahlig (x_1 und x_3)

$\rightarrow$ Schnittebene bei x_1-Zeile einfügen

$$s_1 - \frac{4}{7}x_2 - \frac{4}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_8 - \frac{4}{7}x_9 - \frac{4}{7}x_6 - \frac{1}{7}x_7 = -\frac{4}{7}$$

Dualer Simplex

(5)	x_2	x_4	x_8	x_9	x_6	x_7	
	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3340}{7}$
x_3	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2040}{7}$
x_5	0	0	0	1	1	1	80
x_1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{60}{7}$
s_1	$\boxed{-\frac{4}{7}}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$

$\Rightarrow$

(6)	s_1	x_4	x_8	x_9	x_6	x_7	
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	477
x_3	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	291
x_5	0	0	0	1	1	1	80
x_1	1	-1	0	-1	-1	-1	8
x_2	$-\frac{7}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	1

optimale Punkt $x^* = (8, 1, 291, 0, 80, 0, 0)$ mit optimalem Wert $z^* = 477$

Am Endtableau erkennt man, dass x_4 und x_6 ohne Veränderung des ZFW in die Basislösung aufgenommen werden können.

Wir prüfen, ob diese Lösungen auch ganzzahlig sind

- Aufnahme von x_4 in Basis:

(7)	s_1	x_2	x_8	x_9	x_6	x_7	
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	477
x_3	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{1}{2}$	290
x_5	0	0	0	1	1	1	80
x_1	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	9
x_4	$-\frac{7}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	1

Diese Lösung ist auch ganzzahlig.

Es ist eine alternative optimale Lösung.

$x = (9, 0, 290, 1, 80, 0, 0)$

- Aufnahme von x_6 in Basis:

(7)	s_1	x_4	x_8	x_9	x_2	x_7	
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	477
x_3	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	291
x_5	$\frac{7}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	-1	$\frac{3}{4}$	79
x_1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	9
x_6	$-\frac{7}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	1

Diese Lösung ist auch ganzzahlig.

Es ist eine alternative optimale Lösung.

$x = (9, 0, 291, 0, 79, 1, 0)$

Aufgabe 4

Gegeben sei ein symmetrisches Traveling Salesman Problem (TSP) mit folgender Distanzmatrix:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie für das angegebene TSP eine zulässige TSP-Tour mit Hilfe des Verfahrens des nächsten Nachbarn.

A4a) Setze $n = 6$ und $s_0 = s_n = 1$

- $\min\limits_{j=2,\dots,6} d_{1j} = d_{15}$ und somit $s_1 = 5$, $S = (s_1, s_5, s_1)$
- $\min\limits_{j=2,3,4,6} d_{5j} = d_{53}$ und somit $s_2 = 3$, $S = (s_1, s_5, s_3, s_1)$
- $\min\limits_{j=2,4,6} d_{3j} = d_{32}$ und somit $s_3 = 2$, $S = (s_1, s_5, s_3, s_2, s_1)$
- $\min\limits_{j=4,6} d_{2j} = d_{26}$ und somit $s_4 = 6$, $S = (s_1, s_5, s_3, s_2, s_6, s_1)$
- übrig bleibt s_4 $\Rightarrow S = (s_1, s_5, s_3, s_2, s_6, s_4, s_1)$

Diese Tour S hat eine Länge von 24.

b) Zeigen Sie allgemein, dass das Verfahren des nächsten Nachbarn eine Komplexität von $O(n^2)$ hat, wobei n die Anzahl der Städte ist.

A4b)
- In Iteration i des Verfahrens muss man unter $n-i$ Städten die nächste noch nicht besuchte Stadt s_{i-1} finden
- In Iteration i muss man das Minimum von $n-i$ Werten bestimmen
- In elementaren Rechenschritten ausgedrückt geht das in $2(n-1)$ Schritten. Somit ergibt sich die Zahl:

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) = 2(n-1)n - 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) = n^2 - n$$

$\Rightarrow$ Komplexität $O(n^2)$

Aufgabe 5

Gegeben sei folgendes Rucksackproblem:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 10x_1 & + & 5x_2 & + & 20x_3 & + & 4x_4 & & \\ \text{s.t.} & 4x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 7 \\ & & & & & & x_1, x_2, x_3, & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

a) Kann die Greedy-Heuristik sofort angewendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn nein, dann führen Sie eine geeignete Maßnahme durch, um die Greedy-Heuristik anwenden zu können.

A5a) Nein, man muss sie nach ihrem normierten Nutzen sortieren.

	Nutzen	Gewicht	normierter Nutzen	
Gegenstand 1	10	4	10/4 = 2.5	$\rightarrow x_3^{neu}$
Gegenstand 2	5	7	5/7 ≈ 0.71	$\rightarrow x_4^{neu}$
Gegenstand 3	20	3	20/3 ≈ 6.67	$\rightarrow x_1^{neu}$
Gegenstand 4	4	1	4/1 = 4	$\rightarrow x_2^{neu}$

b) Bestimmen Sie einen zulässigen Punkt mit Hilfe der Greedy-Heuristik.

A5b)

Iteration	Veränderung der Variablenbelegung
1	$x_1 = 1$, $N = 20$, $G = 3$
2	$x_2 = 1$, $N = 24$, $G = 4$
3	keine
4	keine

Die Lösung $x=(1,1,0,0)$ ist zulässig, aber nicht optimal. Beispielsweise $x=(1,0,1,0)$ wäre besser.

Aufgabe 6

Gegeben sei das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{llrcrcl}
P: & \max & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\
 & & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{N}_0.
\end{array}
$$

Die Transformationsregel für die Nachbarschaftsmenge $N(x)$ laute „Änderung einer einzelnen Variable um eine Einheit". Die Gedächtnislänge der Tabu-Liste betrage zwei Iterationen. Die Stopp-Kriterien seien 1. „Die maximale Iterationsanzahl von 10 wurde erreicht" und 2. „Keine Auswahl eines neuen Punktes möglich, da es in der Nachbarschaft keinen Punkt gibt, der nicht auf der Tabu-Liste steht".

a) Verbessern Sie den zulässigen Punkt $x = (4,1)$ mit Hilfe der Tabu-Suche.

- bester bisher gefundene Punkt $\bar{x} = (4,1)$ mit ZFW $= 11$
- setze Tabu-Liste $= \emptyset$.

▶ Iteration 1
- setze $x^1 = (4,1)$
- Bestimme $N(x^1) = \{(4,0), \underbrace{(4,2)}_{\notin M}, (3,1), \underbrace{(5,1)}_{\notin M}\}$

  $\Rightarrow N(x^1) = \{(4,0),(3,1)\}$ mit ZFW 8 bzw. 9
- Bestimme $z^{max} = 9$, also $x^2 = (3,1)$
- Füge $(4,1)$ der Tabu-Liste hinzu. $TL = \{(4,1)\}$

$\max \ 2x_1 + 3x_2$

Iteration	aktueller Punkt	Tabu-Liste	Zielfunktionswert	Nachbarschaft
1	$(4,1)$	—	11 $\bar{x} = x^1 = (4,1)$	$\{\underbrace{(4,0)}_{8}, \underbrace{(4,2)}_{\notin M}, \underbrace{(3,1)}_{9}, \underbrace{(5,1)}_{\notin M}\}$
2	$(3,1)$	$(4,1)$ —	9	$\{\underbrace{(3,0)}_{6}, \underbrace{(3,2)}_{12}, \underbrace{(2,1)}_{7}, \underbrace{(4,1)}_{\in TL}\}$
3	$(3,2)$	$(3,1)$ $(4,1)$	12 $\bar{x} = x^3 = (3,2)$	$\{\underbrace{(3,1)}_{\in TL}, \underbrace{(3,3)}_{\notin M}, \underbrace{(2,2)}_{10}, \underbrace{(4,2)}_{\notin M}\}$
4	$(2,2)$	$(3,2)$ $(3,1)$	10	$\{\underbrace{(2,1)}_{7}, \underbrace{(2,3)}_{13}, \underbrace{(1,2)}_{8}, \underbrace{(3,2)}_{\in TL}\}$
5	$(2,3)$	$(2,2)$ $(3,2)$	13 $\bar{x} = x^5 = (2,3)$	$\{\underbrace{(2,2)}_{\in TL}, \underbrace{(2,4)}_{\notin M}, \underbrace{(1,3)}_{11}, \underbrace{(3,3)}_{\notin M}\}$
6	$(1,3)$	$(2,3)$ $(2,2)$	11	$\{\underbrace{(1,2)}_{8}, \underbrace{(1,4)}_{\notin M}, \underbrace{(0,3)}_{9}, \underbrace{(2,3)}_{\in TL}\}$

7	(0,3)	(1,3) (2,3)	9	$\{\underbrace{(0,2)}_{8},\underbrace{(0,4)}_{12},\underbrace{(1,3)}_{\text{ETL}}\}$
8	(0,4)	(0,3) (1,3)	12	$\{\underbrace{(0,3)}_{\text{ETL}},\underbrace{(0,5)}_{\notin M},\underbrace{(1,4)}_{\notin M}\}$

→ Stopp nach Kriterium 2

Der beste gefundene zulässige Punkt ist $\bar{x} = (2,3)$ mit $\bar{z} = 13$

b) Welche Auswirkungen hätte die Reduzierung der Gedächtnislänge auf eine Iteration beim Anwenden der Tabu-Suche aus Teil a)?

Iteration	aktueller Punkt	Tabu-Liste	Zielfunktionswert	Nachbarschaft
1	(4,1)	—	11 $\bar{x} = x^1 = (4,1)$	$\{\underbrace{(4,0)}_{8},\underbrace{(4,2)}_{\notin M},\underbrace{(3,1)}_{9},\underbrace{(5,1)}_{\notin M}\}$
2	(3,1)	(4,1) —	9	$\{\underbrace{(3,0)}_{6},\underbrace{(3,2)}_{12},\underbrace{(2,1)}_{7},\underbrace{(4,1)}_{\text{ETL}}\}$
3	(3,2)	(3,1) ~~(4,1)~~	12 $\bar{x} = x^3 = (3,2)$	$\{\underbrace{(3,1)}_{\text{ETL}},\underbrace{(3,3)}_{\notin M},\underbrace{(2,2)}_{10},\underbrace{(4,2)}_{\notin M}\}$
4	(2,2)	(3,2) ~~(3,1)~~	10	$\{\underbrace{(2,1)}_{7},\underbrace{(2,3)}_{13},\underbrace{(1,2)}_{8},\underbrace{(3,2)}_{\text{ETL}}\}$
5	(2,3)	(2,2) ~~(3,2)~~	13 $\bar{x} = x^5 = (2,3)$	$\{\underbrace{(2,2)}_{\text{ETL}},\underbrace{(2,4)}_{\notin M},\underbrace{(1,3)}_{11},\underbrace{(3,3)}_{\notin M}\}$
6	(1,3)	(2,3) ~~(2,2)~~	11	$\{\underbrace{(1,2)}_{8},\underbrace{(1,4)}_{\notin M},\underbrace{(0,3)}_{9},\underbrace{(2,3)}_{\text{ETL}}\}$
7	(0,3)	(1,3) ~~(2,3)~~	9	$\{\underbrace{(0,2)}_{8},\underbrace{(0,4)}_{12},\underbrace{(1,3)}_{\text{ETL}}\}$
8	(0,4)	(0,3) ~~(1,3)~~	12	$\{\underbrace{(0,3)}_{\text{ETL}},\underbrace{(0,5)}_{\notin M},\underbrace{(1,4)}_{\notin M}\}$

- In diesem Fall hat die Reduzierung der Gedächtnislänge keinen Einfluss auf das Ergebnis in a) (kann aber auch anders sein)
- Es würden keine anderen Punkte in jeder Iteration ausgewählt werden

c) Gegeben sei ein drittes Stopp-Kriterium, das insgesamt maximal zwei Verschlechterungsschritte zulasse. Welche Auswirkungen hätte dieses Stoppkriterium beim Anwenden der Tabu-Suche aus Teil a)?

Der Algorithmus bricht mit dem neuen Stoppkriterium bereits in Iteration 5 ab, da in Teil a) sowohl Iteration 1, 3 und 5 einen Verschlechterungsschritt darstellen.

d) Geben Sie für P eine Transformationsregel für die Nachbarschaftsmenge an, die eine schnellere Tabu-Suche erwarten lässt.

Regel: "Änderung maximal zweier einzelner Variablen um jeweils eine Einheit"

$N(x^1) = \{(4,0),(3,1),(3,0),(3,2)\}$

$N(x^1) \setminus TL = \{(4,0),(3,1),(3,0),(3,2)\}$

$z^{max} = z(3,2) = 12 \Rightarrow \overline{x} = x^2 = (3,2)$

$TL = \{(4,1)\}$

---

nächstes Tutorium:

- nichtlineare Optimierungsprobleme modellieren
- Mathe - Wiederholung
  - Hesse-Matrix
  - Eigenwerte
  - kritische Punkte