Aufgabe 1

Betrachten Sie folgende Modifikation des Investitionsproblems: Der Investor möchte das Entscheidungsproblem erweitern, indem er die Möglichkeit nutzt, nach 6 Monaten sein Kapital zu evaluieren und gegebenenfalls auf die beiden Aktien A und B neu zu verteilen.

Nach jeder Investitionsentscheidung sind drei gleichwahrscheinliche Szenarien für die halbjährliche Entwicklung der Aktien A und B möglich:

Szenario s	Aktie A	Aktie B
1	25%	14%
2	15%	13%
3	6%	12%

Das Start- und das Zielkapital nach einem Jahr bleiben 55 000 € bzw. 71 000 €. Am Ende des Jahres wird wieder eine Prämie von 1% des Überschusses gezahlt, falls der Zielwert übertroffen wurde; eine Strafe von 4% des Fehlbetrags wird fällig, falls der Zielwert unterschritten wurde.

a) Skizzieren Sie einen Szenariobaum für die zwei Investitionsstufen und die drei Szenarien.

Wie kann man die Entscheidungsvariablen wählen?

A1) a)
- x_A: Geldmenge, die in Stufe 1 in Aktie A investiert wird
- x_B: Geldmenge, die in Stufe 1 in Aktie B investiert wird
- $y_{s_1}^A$: Geldmenge, die in Stufe 2 in Aktie A investiert wird, nachdem Szenario s_1 ($s_1 = 1,2,3$) eingetreten ist
- $y_{s_1}^B$: Geldmenge, die in Stufe 2 in Aktie B investiert wird, nachdem Szenario s_1 ($s_1 = 1,2,3$) eingetreten ist
- $y_{s_1 s_2}^+$: Überschuss zum Zielkapital, nachdem Szenario s_1 ($s_1 = 1,2,3$) nach Stufe 1 und Szenario s_2 ($s_2 = 1,2,3$) nach Stufe 2 eingetreten sind
- $y_{s_1 s_2}^-$: Fehlbetrag zum Zielkapital, nachdem Szenario s_1 ($s_1 = 1,2,3$) nach Stufe 1 und Szenario s_2 ($s_2 = 1,2,3$) nach Stufe 2 eingetreten sind

Zusätzlich werden die Parameter r_{is}^{A} und r_{is}^{B} als Rendite von Aktie A bzw. B nach Stufe i $(i=1,2)$ bzgl. Szenario s $(s=1,2,3)$ definiert.

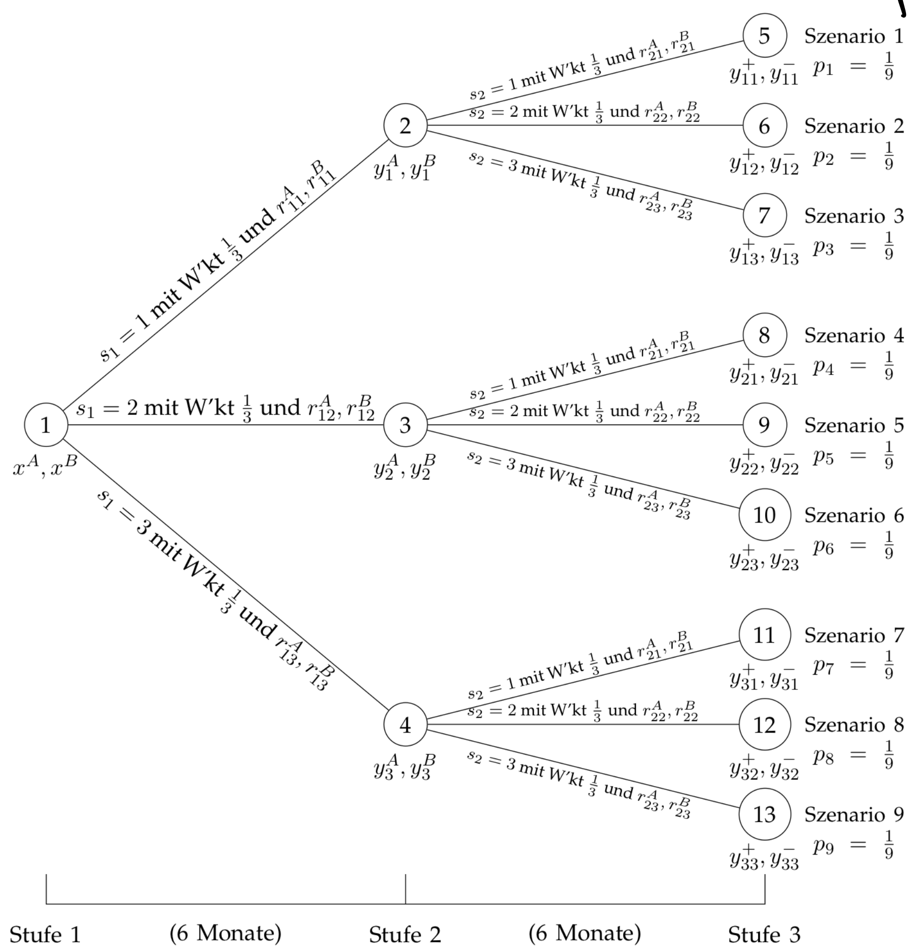
Es gilt:

$$r_{11}^{A} = r_{21}^{A} = 1.25 \qquad r_{11}^{B} = r_{21}^{B} = 1.14$$

$$r_{12}^{A} = r_{22}^{A} = 1.15 \qquad r_{12}^{B} = r_{22}^{B} = 1.13$$

$$r_{13}^{A} = r_{23}^{A} = 1.06 \qquad r_{13}^{B} = r_{23}^{B} = 1.12$$

Damit lässt sich der Szenariobaum aufstellen:



b) Formulieren Sie obigen Sachverhalt als ein mehrstufiges stochastisches lineares Optimierungsproblem.

A1) b)

$$\max \ \frac{1}{9} \sum_{s_1=1}^{3} \sum_{s_2=1}^{3} \left(0.01\, y_{s_1 s_2}^{+} - 0.04\, y_{s_1 s_2}^{-}\right)$$

$$\text{s.t.} \qquad x_A + x_B = 55000$$

S1 nach 6Mon $\quad -1.25x_A - 1.14x_B + y_1^A + y_1^B = 0$

S2 nach 6Mon $\quad -1.15x_A - 1.13x_B + y_2^A + y_2^B = 0$

S3 nach 6Mon $\quad -1.06x_A - 1.12x_B + y_3^A + y_3^B = 0$

S1 nach 6, S1 nach 12 $\quad 1.25y_1^A + 1.14y_1^B - y_{11}^+ + y_{11}^- = 0$

S1 nach 6, S2 nach 12 $\quad 1.15y_1^A + 1.13y_1^B - y_{12}^+ + y_{12}^- = 0$

S1 nach 6, S3 nach 12 $\quad 1.06y_1^A + 1.12y_1^B - y_{13}^+ + y_{13}^- = 0$

$$1.25y_2^A + 1.14y_2^B - y_{21}^+ + y_{21}^- = 0$$

— " —

$$1.15y_2^A + 1.13y_2^B - y_{22}^+ + y_{22}^- = 0$$
$$1.06y_2^A + 1.12y_2^B - y_{23}^+ + y_{23}^- = 0$$
$$1.25y_3^A + 1.14y_3^B - y_{31}^+ + y_{31}^- = 0$$
$$1.15y_3^A + 1.13y_3^B - y_{32}^+ + y_{32}^- = 0$$
$$1.06y_3^A + 1.12y_3^B - y_{33}^+ + y_{33}^- = 0$$

$$x_A, x_B, y_{s1}^A, y_{s1}^B, y_{s1s2}^+, y_{s1s2}^- \geq 0 \qquad s_1, s_2 = 1,2,3$$

$$\max \ \frac{1}{9}\sum_{s_1=1}^{3}\sum_{s_2=1}^{3}\left(0.01y_{s_1s_2}^+ - 0.04y_{s_1s_2}^-\right)$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{s.t.} & x^A & + & x^B & & & & & = & 55\,000 \\
& -1.25x^A & - & 1.14x^B & + & y_1^A & + & y_1^B & = & 0 \\
& -1.15x^A & - & 1.13x^B & + & y_2^A & + & y_2^B & = & 0 \\
& -1.06x^A & - & 1.12x^B & + & y_3^A & + & y_3^B & = & 0 \\
& 1.25y_1^A & + & 1.14y_1^B & - & y_{11}^+ & + & y_{11}^- & = & 71\,000 \\
& 1.15y_1^A & + & 1.13y_1^B & - & y_{12}^+ & + & y_{12}^- & = & 71\,000 \\
& 1.06y_1^A & + & 1.12y_1^B & - & y_{13}^+ & + & y_{13}^- & = & 71\,000 \\
& 1.25y_2^A & + & 1.14y_2^B & - & y_{21}^+ & + & y_{21}^- & = & 71\,000 \\
& 1.15y_2^A & + & 1.13y_2^B & - & y_{22}^+ & + & y_{22}^- & = & 71\,000 \\
& 1.06y_2^A & + & 1.12y_2^B & - & y_{23}^+ & + & y_{23}^- & = & 71\,000 \\
& 1.25y_3^A & + & 1.14y_3^B & - & y_{31}^+ & + & y_{31}^- & = & 71\,000 \\
& 1.15y_3^A & + & 1.13y_3^B & - & y_{32}^+ & + & y_{32}^- & = & 71\,000 \\
& 1.06y_3^A & + & 1.12y_3^B & - & y_{33}^+ & + & y_{33}^- & = & 71\,000 \\
& & & \multicolumn{5}{r}{x^A, x^B, y_{s_1}^A, y_{s_1}^B, y_{s_1s_2}^+, y_{s_1s_2}^-} & \geq & 0 \qquad s_1, s_2 = 1,2,3
\end{array}$$

Anmerkungen: 26 Entscheidungsvariablen

13 Nebenbedingungen (ohne Nichtnegativitätsbed.)

optimale Lösung (Solver):

$x_A \approx 38919$ $\quad$ $x_B \approx 16091$

$y_1^A \approx 66981$ $\quad$ $y_1^B = 0$

$y_2^A = 0$ $\quad$ $y_2^B \approx 62928$

$y_3^A \approx 31255$ $\quad$ $y_3^B \approx 28010$

$y_{11}^+ \approx 12726$ $\quad$ $y_{12}^+ \approx 6028$

$y_{21}^+ \approx 738$ $\quad$ $y_{22}^+ \approx 109$ $\quad$ $y_{23}^- \approx 520$

$y_{32}^- \approx 3405$ $\quad$ $y_{33}^- \approx 6499$

restliche $y_{s_1 s_2}^+, y_{s_1 s_2}^- = 0$

$ZFW = -24.55$ €

c) Erläutern Sie für das genannte Beispiel, wie viele Perioden es gibt und ob bzw. wie diese mit den Entscheidungsstufen zusammenfallen.

A1) c) drei Entscheidungsstufen / Perioden:

- 1. Stufe Designentscheidung x_A, x_B
- 2. Stufe Recourse-Entscheidung abhängig von Szenario s_1 ($s_1 = 1, 2, 3$)
- 3. Stufe Recourse-Entscheidung abhängig von Szenario s_2 ($s_2 = 1, 2, 3$)

$\rightarrow$ keine "echte" Entscheidung $\Rightarrow$ Evaluierungsstufe

In diesem Beispiel entsprechen alle Entscheidungsstufen auch unterschiedlichen Perioden, da zum Zeitpunkt 0 die 1. Stufe Entscheidungen getroffen werden müssen, nach 6 Monaten auf Szenario 1 mit den 2. Stufe Entscheidungen reagiert werden muss und schließlich nach insgesamt 12 Monaten mit den 3. Stufe Entscheidungen die Evaluierungsstufe für den gesamten Planungshorizont ansteht.

Aufgabe 2

Gegeben sei erneut das zweistufige stochastische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrrcrcll} SLP: & \min & -2x & + & \mathbb{E}_\xi[\min y(\omega)] & & & \\ & \text{s.t.} & \frac{1}{2}x & + & y(\omega) & = & \xi(\omega) & \omega \in \Omega \\ & & & & y(\omega) & \geq & 0 & \omega \in \Omega \\ & & & & x & \geq & 0 & \end{array}$$

mit $\xi(\omega_1) = \xi_1 = 3$, $\xi(\omega_2) = \xi_2 = 6$ ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$) und $\mathbb{P}(\omega_1) = p_1 = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(\omega_2) = p_2 = \frac{1}{3}$ ($p_1 + p_2 = 1$).

a) Zeigen Sie, dass SLP weder Relative Complete Recourse noch Complete Recourse noch Simple Recourse besitzt.

A2) a) Es gilt $K_1 = [0, \infty)$.

Aus ÜB 10 A2 wissen wir, dass für $x^* = 8 \in K_1$ und Szenario 1 ($\xi(\omega_1) = \xi_1 = 3$) kein $y \geq 0$ existiert, so dass die Gleichung $\frac{1}{2}x^* + y = \xi_1$ erfüllt ist.

Somit ist $x^* \notin K_2(\omega_1)$ und $x^* \notin K_2$.

$K_1 \not\subseteq K_2 \longrightarrow$ kein Relative Complete Recourse

$\Rightarrow$ auch kein Complete Recourse

$\Rightarrow$ auch kein Simple Recourse

b) Berechnen Sie $z\big(x, \xi(\omega)\big)$ für $x = 8$, $\xi_1 = 3$ und für $x = 8$, $\xi_2 = 6$

A2) b) $z(x, \xi(\omega))$: Wert der optimalen Fortsetzung für die 2. Stufe bei fixierter 1. Stufe Entscheidung x und fixierter Realisierung $\xi(\omega)$

Setze: $c = -2$

$q(\omega) = q = 1$ $\qquad h(\omega) = \xi(\omega)$

$W(\omega) = W = 1$ $\qquad T(\omega) = T = \frac{1}{2}$ $\qquad , \omega \in \Omega$

Die Funktion $z(x, \xi(\omega))$ ist für alle $x \geq 0$ (Restriktion der 1. Stufe $Ax = b$ kommen in SLP nicht vor) definiert durch:

$$z(x, \xi(\omega)) = \begin{cases} c^T x + \min\limits_{y \geq 0} \{ q^T(\omega) \mid Wy = h(\omega) - Tx \} & \text{für } x \in K_1 \cup K_2(\omega) \\ +\infty & \text{für } x \notin K_1 \cup K_2(\omega) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x + \min\limits_{y \geq 0} \{ y \mid y = \xi(\omega) - \frac{1}{2}x \} & \text{für } x \in K_1 \cup K_2(\omega) \\ +\infty & \text{für } x \notin K_1 \cup K_2(\omega) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Einsetzen der beiden Ereignisse.

Für $x = 8$ und $\xi(\omega_1) = 3$ wissen wir aus Teil a), dass $8 \notin K_2(3)$ gilt, d.h. $8 \notin K_1 \cup K_2(3)$. Somit ist $z(8,3) = +\infty$

Für $x = 8$ und $\xi(\omega_2) = 6$ gilt: $x = 8 \in K_1 \cup K_2(6)$, da

$$8 \in K_2(\omega) \Leftrightarrow \exists y \geq 0 : y = 6 - \tfrac{1}{2} 8$$
$$\Leftrightarrow \exists y \geq 0 : y = 2$$

Somit ist $z(8,6) = -2 \cdot 8 + \min\limits_{y \geq 0} \{ y \mid y = 6 - \frac{1}{2} 8 \}$

$= -16 + \min\limits_{y \geq 0} \{ y \mid y = 2 \}$

$= -14.$

Unterschied $Q(x, \xi(\omega))$ und $z(x, \xi(\omega))$ liegt in der Definition mit ∞, berechnen aber sonst das gleiche.

c) Berechnen Sie

$$\begin{aligned} WS &= \mathbb{E}_\xi\left[\min_{x\in K_1} z\big(x,\xi(\omega)\big)\right] \\ RP &= \min_{x\in K_1} \mathbb{E}_\xi\left[z\big(x,\xi(\omega)\big)\right] \\ EV &= \min_{x\in K_1} z(x,\bar{\xi}) \\ \mathbb{E}EV &= \mathbb{E}_\xi\left[z\big(x^*(\bar{\xi}),\xi(\omega)\big)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llcccll} SLP: & \min & -2x & + & \mathbb{E}_\xi[\min y(\omega)] & & \\ & \text{s.t.} & \frac{1}{2}x & + & y(\omega) & = \xi(\omega) & \omega\in\Omega \\ & & & & y(\omega) & \geq 0 & \omega\in\Omega \\ & & & & x & \geq 0 & \end{array}$$

Sind die Ungleichungen $EV \leq RP$ und $EV \leq WS$ erfüllt?

A2) c) 1. Berechnung von WS:

$$WS = \mathbb{E}_\xi[\min_{x\in K_1} z(x,\xi(\omega))] = \mathbb{E}_\xi[z(x^*(\omega),\xi(\omega))] = \mathbb{E}_\xi[z(x^*(\xi),\xi)]$$

Dafür benötigen wir eine Darstellung von $z(x,\xi(\omega))$ für $x\geq 0$ und von $\min_{x\geq 0} z(x,\xi(\omega))$ in Abhängigkeit von x und ξ.

Die Bedingung $y = \xi - \frac{1}{2}x$ und $y \geq 0$ ergeben $\xi - \frac{1}{2}x \geq 0$ bzw. $x \leq 2\xi$, womit folgt, dass $x \in K_1 \cup K_2(\omega)$ äquivalent zu $0 \leq x \leq 2\xi$ ist.

Es gilt

$$z(x,\xi(\omega)) = \begin{cases} -2x + \min_{y\geq 0}\{y \mid y = \xi - \frac{1}{2}x\} & x \in K_1 \cup K_2(\omega) \\ +\infty & x \notin K_1\cup K_2(\omega) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x + \xi - \frac{1}{2}x & \text{für } 0\leq x\leq 2\xi \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{5}{2}x + \xi & \text{für } 0\leq x\leq 2\xi \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\min_{x\geq 0} z(x,\xi) = -4\xi$$

mit $x^*(\xi) = 2\xi$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} WS &= E_\xi[\min_{x\geq 0} z(x,\xi)] \\ &= p_1(-4\xi_1) + p_2(-4\xi_2) \\ &= \tfrac{2}{3}(-4\cdot 3) + \tfrac{1}{3}(-4\cdot 6) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}(-12) + \frac{1}{3}(-24)$$

$$= -16$$

2. Berechnung von RP

$$\begin{array}{llllllll}
SLP: & \min & -2x & + & \mathbb{E}_\xi[\min y(\omega)] & & & \\
& \text{s.t.} & \frac{1}{2}x & + & y(\omega) & = & \xi(\omega) & \omega \in \Omega \\
& & & & y(\omega) & \geq & 0 & \omega \in \Omega \\
& & & & x & \geq & 0 &
\end{array}$$

$$RP = \min_{x \in K_1} \mathbb{E}_\xi[z(x, \xi(\omega))] = \min_{x \in K_1} \mathbb{E}_\xi[z(x, \xi)]$$

$$\mathbb{E}_\xi[z(x,\xi)] = \begin{cases} \mathbb{E}_\xi[-\frac{5}{2}x + \xi] & \text{für } 0 \leq x \leq \min_{\omega \in \Omega}\{2\xi(\omega)\} \\ \mathbb{E}_\xi[+\infty] & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p_1(-\frac{5}{2}x + \xi_1) + p_2(-\frac{5}{2}x + \xi_2) & \text{für } 0 \leq x \leq \min\{2\xi_1, 2\xi_2\} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3}(-\frac{5}{2}x + 3) + \frac{1}{3}(-\frac{5}{2}x + 6) & \text{für } 0 \leq x \leq \min_{\omega \in \Omega}\{6, 12\} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{5}{2}x + 4 & \text{für } 0 \leq x \leq 6 \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $RP = \min_{x \geq 0} \mathbb{E}_\xi[z(x,\xi)] = -11$ und $x^* = 6$

3. Berechnung von EV

$$EV = \min_{x \in K_1} z(x, \bar{\xi}),$$

wobei $\bar{\xi}$ der Erwartungswert der Zufallsvariable ξ ist.

Für SLP gilt: $\bar{\xi} = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 4$

Aus WS bekannt: $\min_{x \geq 0} z(x, \xi) = -4\xi$

$$EV = \min_{x \geq 0} z(x, \bar{\xi}) = \min_{x \geq 0} z(x, 4) = -4 \cdot 4 = -16$$

mit optimalem Punkt $x^*(\bar{\xi}) = x^* = 8$

4. Berechnung EEV

Mit dem optimalen Punkt aus 3. und der Definition von EEV gilt

$$\begin{aligned} EEV &= \mathbb{E}_\xi [z(x^*(\bar{\xi}), \xi(\omega))] \\ &= \mathbb{E}_\xi [z(x^*, \xi(\omega))] \\ &= \tfrac{2}{3} z(8,3) + \tfrac{1}{3} z(8,6) \\ &= \tfrac{2}{3} \cdot (+\infty) + \tfrac{1}{3} \cdot (-14) \\ &= \infty \end{aligned}$$

$EV = -16 \leq -11 = RP$ ✓

$EV = -16 \leq -16 = WS$ ✓

Bemerkungen:

1. Die Gültigkeit der Ungleichung $EV \leq RP$ kann man auch mit Satz 8.11 im OR-Buch ableiten. Dazu prüfen wir die Voraussetzungen des Satzes. Aus Teil b) wissen wir, dass $q = 1$ und $W = 1$ deterministisch sind; somit sind die Voraussetzungen erfüllt und die Ungleichung ist für SLP gültig.

2. Die Gültigkeit der Ungleichung $EV \leq WS$ kann man auch mit Satz 8.12 im OR-Buch ableiten. Dazu wird gefordert, dass q, W und T deterministisch sind und der Zufall somit nur in der rechten Seite h enthalten ist. Dies ist für SLP erfüllt $(q = 1, W = 1, T = \frac{1}{2})$.

nächstes Tutorium:

- zweistufige stochastische Optimierung
- Newsvendor Problem