Modellierung

- Modellieren eines ganzzahligen linearen Optimierungsproblem

  1. Entscheidungsvariablen benennen/bestimmen
     ↳ Index nicht vergessen

  2. Mathematisches Problem / Optimierungsproblem

     2.1 max/min Funktion aufstellen

     2.2 Nebenbedingungen aufstellen
     ↳ Wertebereiche der Entscheidungsvariablen beachten

- Binärvariablen

  ↳ können zum Ein- und Ausschalten von Teilen der zulässigen Menge verwendet werden

  ⤳ Big-M Methode ~ meist: $y_i = \begin{cases} 1, \text{falls} \dots \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

- logische Verknüpfung

AND	OR	XOR	Äquivalenz
$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$(\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2})$	$x_1 \Leftrightarrow x_2$
$x_1 + x_2 = 2$	$x_1 + x_2 \geq 1$	$x_1 + x_2 = 1$	$x_1 = x_2$

$x_1, x_2 \in \{0,1\}$

$x_1 = 1$, wenn x_1 erfüllt

Komplexitätstheorie

- In der Praxis sind die Problemstellungen bei der ganzzahligen Optimierung oft zu groß
  → Das Lösen ist in vernünftiger Zeit nicht mehr möglich

- Der Rechenaufwand / die Zeitkomplexität eines Algorithmus A zur Lösung eines Problems ist die maximale Anzahl von Rechenschritten, die A zur Lösung irgendeiner Probleminstanz mit Größe $\leq n$ benötigt (Worst-Case)

- Laufzeitklassen

Komplexität	Problemgröße n 10	20	100	1000
$O(n)$	0.00001 sec	0.00002 sec	0.0001 sec	0.001 sec
$O(n \log n)$	0.00001 sec	0.00009 sec	0.0007 sec	0.01 sec
$O(n^2)$	0.0001 sec	0.0004 sec	0.01 sec	1 sec
$O(n^3)$	0.001 sec	0.008 sec	1 sec	16.66 min
$O(n^5)$	0.1 sec	3.2 sec	2.77 h	31.7 Jahre
$O(2^n)$	0.001 sec	1 sec	$4 \cdot 10^{16}$ Jahre	-
$O(3^n)$	0.059 sec	58 min	-	-
$O(n!)$	3.63 sec	77146 Jahre	$3 \cdot 10^{144}$ Jahre	-

Rechenschritt $= 10^{-6}$ sec

polynomial

exponentiell

Komplexität des Simplex (Worst-Case)
↳ in Praxis aber eigentlich nicht zu beobachten

- Lineare Optimierungsprobleme → polynomial lösbar
- Ganzzahlige Lineare Optimierungsprobleme → nicht polynomial lösbar

Aufgabe 1

Es sei das folgende gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsproblem mit kontinuierlichen Variablen x_1, x_2 und Binärvariablen x_3, x_4, x_5, x_6 gegeben.

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & -0.2282x_1 & + & x_2 & \leq & M\cdot(1-x_3) \\
 & 0.4816x_1 & - & x_2 & \leq & M\cdot(1-x_4) \\
 & -0.7974x_1 & + & x_2 & \leq & M\cdot(1-x_4) \\
 & 1.2540x_1 & - & x_2 & \leq & M\cdot(1-x_5) \\
 & -2.0765x_1 & + & x_2 & \leq & M\cdot(1-x_5) \\
 & 4.3813x_1 & - & x_2 & \leq & M\cdot(1-x_6) \\
 & & & x_3+x_4+x_5+x_6 & = & 1 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & & & x_3, x_4, x_5, x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

je nach Auswahl von x_3, x_4, x_5, x_6

↳ andere untere und obere Schranke

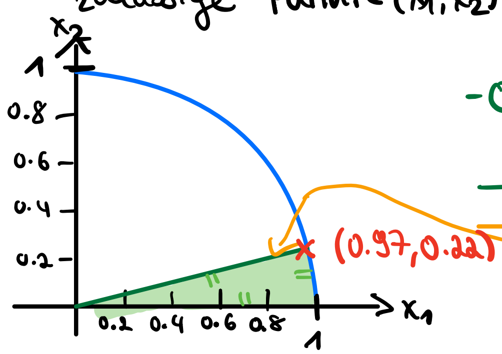
→ kann Nebenbedingung ausschalten

Es sei zudem $M = 10$ gesetzt. Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem alle Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ für die es $(x_3, x_4, x_5, x_6) \in \{0,1\}^4$ gibt, so dass $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ein zulässiger Punkt für das Optimierungsproblem ist und zusätzlich die (nichtlineare) Restriktion $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ erfüllt wird. Die letztgenannte Restriktion beschreibt dabei alle Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1.

da $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$ und $x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\}$

$\Rightarrow$ genau eine Entscheidungsvariable muss den Wert 1 für Zulässigkeit haben

- zulässige Punkte (x_1, x_2) für $x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$

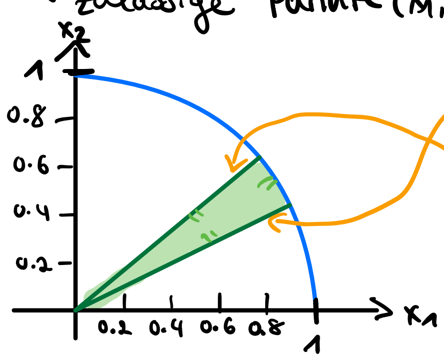


$-0.2282\,x_1 + x_2 \leq M(1-x_3)$

$\longrightarrow\ 0.2282\,x_1 \geq x_2$

$x_1^2 + x_2^2 = 0.97^2 + 0.22^2 = 0.94 + 0.05 = 0.99 \leq 1$

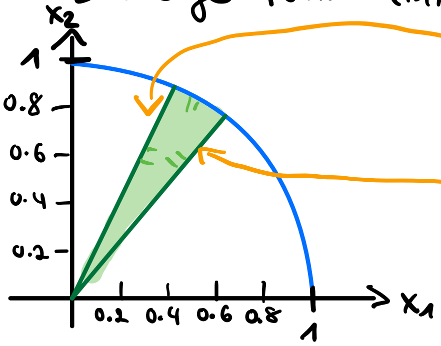
- zulässige Punkte (x_1, x_2) für $x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$



$0.4816\,x_1 - x_2 \leq M(1-x_4)$

$-0.7974\,x_1 + x_2 \leq M(1-x_4)$

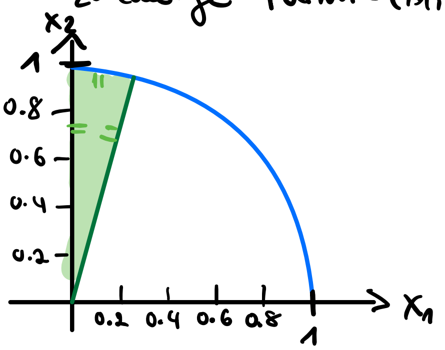
• zulässige Punkte (x_1, x_2) für $x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=1,\ x_6=0$



$1.254x_1 - x_2 \le M(1-x_5)$

$-2.0765x_1 + x_2 \le M(1-x_5)$

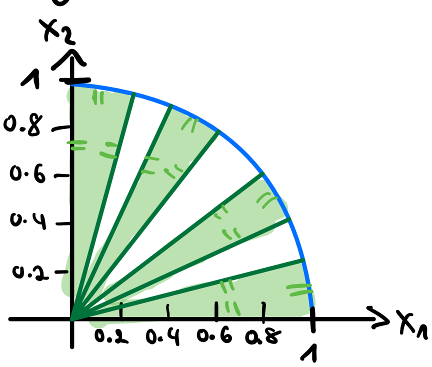
• zulässige Punkte (x_1, x_2) für $x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=0,\ x_6=1$



$4.3813x_1 - x_2 \le M(1-x_6)$

$\Rightarrow$ nicht-konvexe Vereinigung der Mengen

Das M sorgt dafür, dass eine Nebenbedingung erfüllt werden kann, wenn für die zugehörige Auswahlvariable x_i mit $i \in \{3,4,5,6\}$ gilt, dass $x_i = 0$ ist.



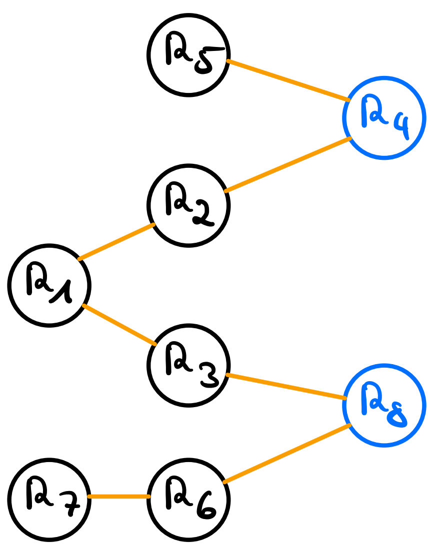
„Schärferes" M wäre z.B. $M=5$, weil keine linke Seite der Nebenbedingungen größer als 5 werden kann.

Aufgabe 2

In eine verfahrenstechnische Anlage sind verschiedene Reaktoren integriert. Die Aufbereitung der Grundstoffe findet im Reaktor R_1 statt. Die aufbereiteten Stoffe fließen ab in die Reaktoren R_2 oder R_3, von denen daher mindestens einer in Betrieb sein muss, falls R_1 eingeschaltet ist. R_2 und R_3 dürfen jeweils auch nur betrieben werden, wenn sie Material aus R_1 erhalten würden. In Reaktor R_4 wird das erste Endprodukt hergestellt. Dazu werden Stoffflüsse aus R_2 oder R_5 benötigt. R_6 steht räumlich sehr nahe an R_5. Da beide sehr heiß werden können, sollten nie beide gleichzeitig eingeschaltet sein. R_6 wird mit Stoffflüssen aus R_7 bedient, ohne die er nicht laufen kann. Umgekehrt muss auch R_6 laufen, wenn R_7 eingeschaltet ist. In Reaktor R_8 wird das zweite Endprodukt hergestellt. Dafür wird Material aus R_6 oder R_3 benötigt.

Existiert eine Konfiguration eingeschalteter Reaktoren, so dass beide Endprodukte gleichzeitig hergestellt werden können? Formulieren Sie den Sachverhalt als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem.

Abhängigkeiten als Graph



Wie wählen wir die Entscheidungsvariablen?

Wie sieht unsere Zielfunktion aus?

Nebenbedingungen aufstellen

1. Entscheidungsvariablen

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Reaktor } R_i \text{ eingeschaltet ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, 8$$

2. Mathematisches Problem aufstellen

- max / min Funktion : $\underline{\max \quad x_4 + x_8}$
- Nebenbedingungen

(1) Für R_1 muss mind. ein Reaktor von R_2 und R_3 laufen.
$\longrightarrow$ $x_1 \le x_2 + x_3$

(2) R_2 und R_3 dürfen nur laufen, wenn sie je Material aus R_1 haben.
$\longrightarrow$ $x_2 + x_3 \le 2x_1$

(3) R_4 braucht Stoffflüsse aus R_2 oder R_5.
$\longrightarrow$ $x_4 \le x_2 + x_5$

(4) R_5 und R_6 nie gleichzeitig an.
$\longrightarrow$ $x_5 + x_6 \le 1$

(5) R_6 geht nicht ohne R_7.
$\longrightarrow$ $x_6 \le x_7$

(6) R_6 muss laufen, wenn R_7 an ist.
$\longrightarrow$ $x_6 \ge x_7$

$$\left.\begin{array}{l} x_6 \le x_7 \\ x_6 \ge x_7 \end{array}\right\} x_6 = x_7$$

(7) R_8 braucht Material aus R_3 oder R_6.
$\longrightarrow$ $x_8 \le x_3 + x_6$

(8) $x_1, x_2, \dots, x_8 \in \{0,1\}$

Optimierungsproblem: $\max \quad x_4 + x_8$

$$\left.\begin{array}{lrrrrl}
\text{s.t.} & x_1 & -x_2 & -x_3 & & \le 0 \\
& -2x_1 & +x_2 & +x_3 & & \le 0 \\
& & -x_2 & +x_4 & -x_5 & \le 0 \\
& & & x_5 & +x_6 & \le 1 \\
& & & x_6 & -x_7 & = 0 \\
& & -x_3 & -x_6 & +x_8 & \le 0 \\
& & & \multicolumn{2}{r}{x_1, x_2, \dots, x_8} & \in \{0,1\}
\end{array}\right\} \text{aufgelöst in andere Form}$$

Aufgabe 3

In einer Schuhfabrik werden Turn- und Wanderschuhe gefertigt. Pro Turnschuh bzw. Wanderschuh wird ein Deckungsbeitrag von 50 € bzw. 65 € erzielt.

Die Schuhe werden auf einer Maschine gefertigt, die derzeit für 250 Minuten pro Tag zur Verfügung steht. Für einen Turnschuh wird diese 6 Minuten lang, für einen Wanderschuh 5 Minuten lang beansprucht. In Kürze steht die Investition in eine neue Maschine an. Zur Auswahl stehen zwei Varianten: Entweder ein vergleichbares Modell mit identischer Leistung oder ein anderes Modell, das für Turnschuhe nur 4 Minuten braucht, dafür aber 10 Minuten pro Wanderschuh. Diese Anlage ist jedoch robuster, so dass damit gerechnet wird, diese für 275 Minuten pro Tag nutzen zu können. Beide Maschinen haben nahezu den gleichen Preis, so dass dieser nicht berücksichtigt werden muss.

a) Modellieren Sie das Problem der Maximierung des Gesamtdeckungsbeitrags mathematisch als gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem mit Hilfe einer Big-M-Formulierung.

3a) 1. Entscheidungsvariablen

x_1 – Anzahl produzierter Turnschuhe
x_2 – Anzahl produzierter Wanderschuhe

$$y = \begin{cases} 1, & \text{falls neue Maschine angeschafft wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Produktion eines Schuhs am nächsten Tag fortgesetzt werden kann, lassen wir nicht-ganzzahlige Anzahlen für x_1 und x_2 zu.

2. Mathematisches Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max\ & 50x_1 + 65x_2 \\ \text{s.t. } & 6x_1 + 5x_2 \le 250 + My \\ & 4x_1 + 10x_2 \le 275 + M(1-y) \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & y \in \{0,1\} \end{aligned} \iff \begin{aligned} \max\ & 50x_1 + 65x_2 \\ \text{s.t. } & 6x_1 + 5x_2 - 250 \le My \\ & 4x_1 + 10x_2 - 275 \le M(1-y) \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & y \in \{0,1\} \end{aligned}$$

3b) b) Geben Sie einen geeigneten Wert für M an.

passender Wert für M lässt sich mit Hilfe der maximal produzierbaren Anzahl für beide Schuh-Typen herleiten.

$\cdot$ Variante 1: $\max \frac{250}{6} = 41,\overline{6}$ Turnschuhe

$\max \frac{250}{5} = 50$ Wanderschuhe

$\cdot$ Variante 2: $\max \frac{275}{4} = 68,75$ Turnschuhe

$\max \frac{275}{10} = 27,5$ Wanderschuhe

$$\begin{aligned} \max\ & 50x_1 + 65x_2 \\ \text{s.t.}\ & 6x_1 + 5x_2 - 250 \leq My \\ & 4x_1 + 10x_2 - 275 \leq M(1-y) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & y \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $0 \leq x_1 \leq 68.75$ und $0 \leq x_2 \leq 50$ muss erfüllt sein

$6 \cdot 68.75 + 5 \cdot 50 - My \leq 250$

$\rightarrow My \geq 412.5$

$4 \cdot 68.75 + 10 \cdot 50 - M(1-y) \leq 275$

$\rightarrow M(1-y) \geq 500$

$\Rightarrow$ größere Wert für M wichtig.

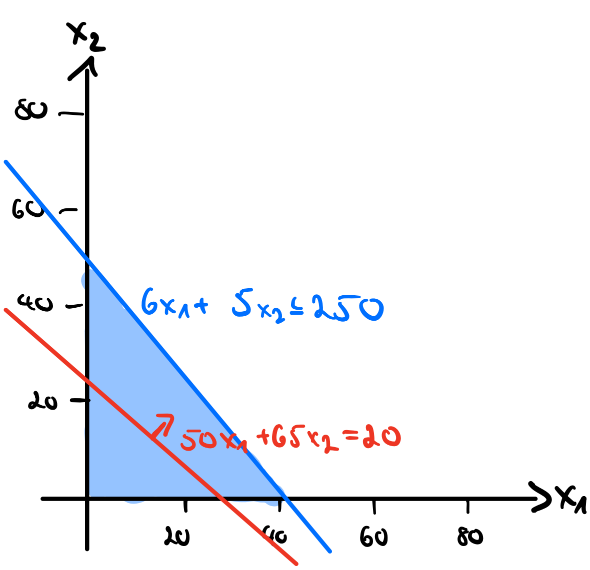
Eine gute Wahl für M wäre 500.

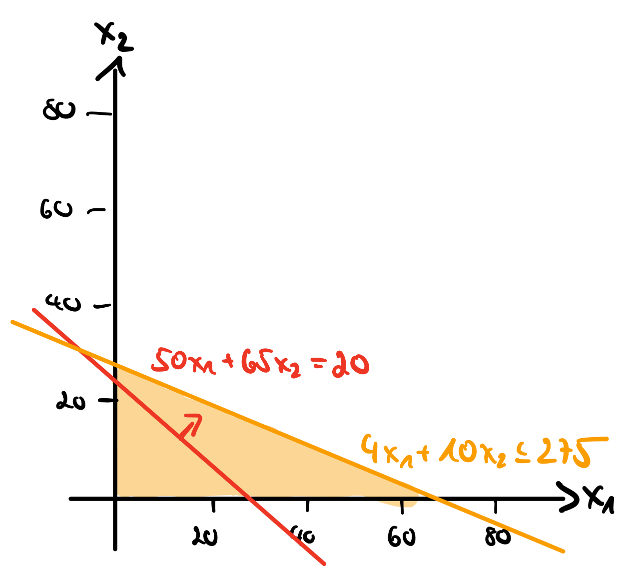
3c) c) Skizzieren Sie die Projektion der zulässigen Menge $\mathbb{M}$ auf den x-Raum, also

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{M}\right\} \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1, x_2, 1) \in \mathbb{M}\right\}.$$

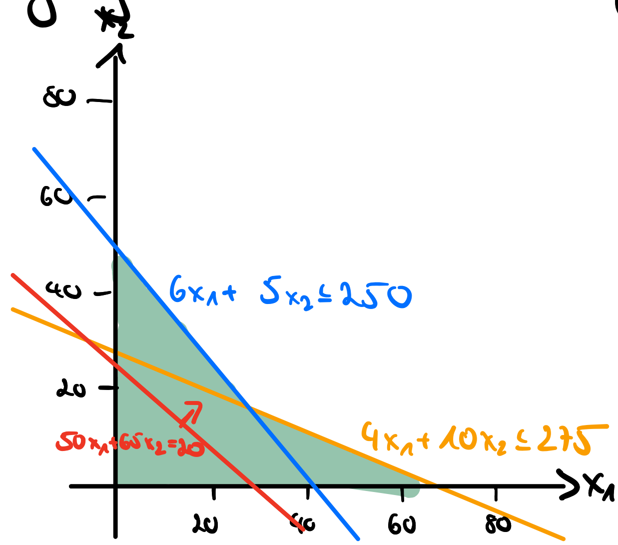
Zeichnen Sie eine Höhenlinie der Zielfunktion ein.

Fallunterscheidung $y=0$ und $y=1$





Vereinigung der nicht-konvexen Menge



Aufgabe 4

Gegeben sei eine Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ paarweise verschiedener natürlicher Zahlen. Betrachten Sie folgenden Algorithmus zur Sortierung der Zahlen in A in aufsteigender Reihenfolge:

1. **setze** $m := n$
2. **wiederhole**
3. **für jedes** i **von** 1 **bis** $m - 1$ **wiederhole**
4. **falls** $a_i > a_{i+1}$ **dann**
5. vertausche a_i und a_{i+1}
6. **ende falls**
7. **ende für**
8. $m := m - 1$
9. **solange** Zahlen vertauscht wurden **und** $m > 1$

$(n-1)$ mal

Tauschen ist mit konstanter Anzahl von Operationen möglich (genauer: 3)
$\rightarrow$ im schlimmsten Fall konstant: c_1

$(m-1)$ mal ausgeführt

Welche Komplexität hat dieser Algorithmus im schlimmsten Fall?

- Das Innere der für-Schleife wird im ersten Durchlauf der wiederhole-Schleife $n-1$ mal ausgeführt, im zweiten Durchlauf $n-2$ mal, usw. insgesamt also

$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \overset{\text{Teleskopsumme}}{=\!=} \frac{n(n-1)}{2}$ Mal

- Die Anzahl der Operationen in Zeile 8 und 9 sind auch konstant $:= c_2$

$\Rightarrow$ Insgesamte Anzahl an Operationen:

$$c_1 \frac{n(n-1)}{2} + c_2(n-1) = \frac{c_1}{2}n^2 + \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right)n - c_2$$

$\Rightarrow$ Komplexität $O(n^2)$, also polynomiell

---

nächstes Tutorium:

- Simplex anwenden (Hausaufgabe)
- Branch & Bound - Verfahren