Ganzzahlige Optimierung

- Die ganzzahlige Optimierung kann als zusätzliche Einschränkung zur bereits bekannten linearen Optimierung verstanden werden. Der Wertebereich der Entscheidungsvariablen ist beschränkt

  z.B.: $x_i \in \mathbb{N}_0$, $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \{0,1\}$ ← Binär

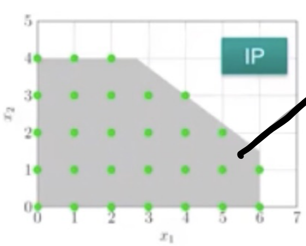
- Treten in einem Optimierungsproblem ganzzahlige und kontinuierliche Entscheidungsvariablen auf, so spricht man von einem gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblem.

- Form:

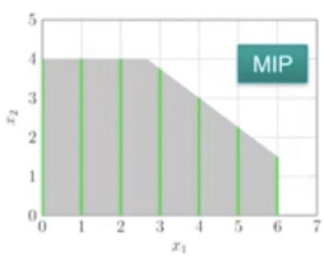
$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

- zulässige Mengen

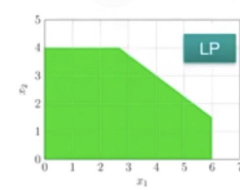
graue Menge = Relaxierung



rein-ganzzahlig



gemischt-ganzzahlig



(nicht ganzzahlig)

- Modellieren eines ganzzahligen linearen Optimierungsproblem

  1. Entscheidungsvariablen benennen/bestimmen
     ↳ Index nicht vergessen

  2. Mathematisches Problem / Optimierungsproblem

     2.1 max/min Funktion aufstellen

2.2 Nebenbedingungen aufstellen

↳ Wertebereiche der Entscheidungsvariablen beachten

- Binärvariablen

  ↳ können zum Ein- und Ausschalten von Teilen der zulässigen Menge verwendet werden

  ⇝ Big-M Methode ∼ meist: $y_i = \begin{cases} 1, \text{falls} \dots \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem mit $a > 0$:

$$
\begin{array}{llrcrcr}
P(a): & \max & 10x_1 & + & x_2 & & \\
& \text{s.t.} & \frac{1}{a}x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
& & \frac{1}{a}x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
& & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{N}_0
\end{array}
$$

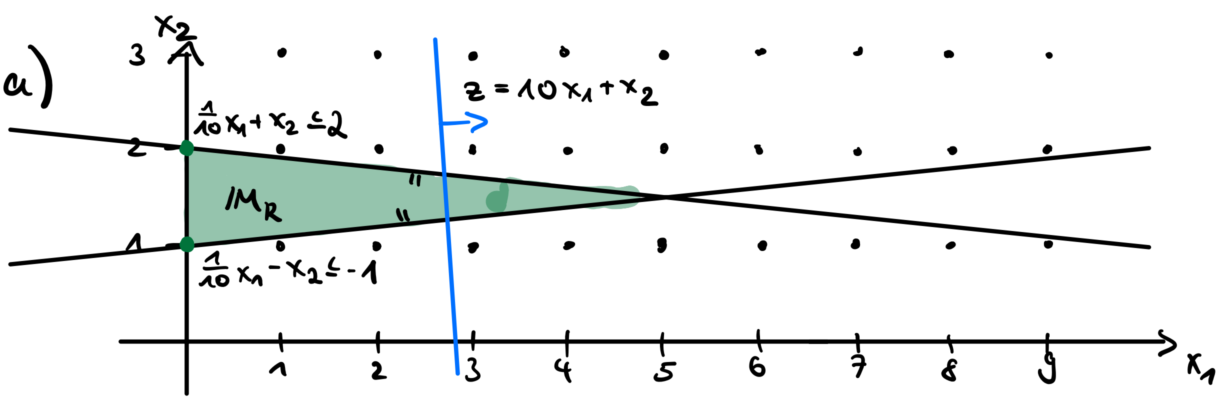
a) Sei $a = 10$. Lösen Sie das ganzzahlige Problem $P(10)$ sowie die zugehörige LP-Relaxierung $Q(10)$ grafisch.

b) Runden Sie den optimalen Punkt von $Q(10)$ auf den nächsten ganzzahligen Punkt. Ist dieser Punkt zulässig für $P(10)$?

c) Wie groß ist die Differenz zwischen dem Optimalwert von $Q(10)$ und dem von $P(10)$? Wie groß ist die Differenz zwischen dem Zielfunktionswert des gerundeten Optimalpunkts von $Q(10)$ und dem Optimalwert von $P(10)$?

d) Zeigen Sie, dass eine Rundung des Optimalpunkts von $Q(a)$ beliebig weit weg vom Optimalpunkt von $P(a)$ liegen kann. Berechnen Sie hierzu den Schnittpunkt der beiden Restriktionen in Abhängigkeit des Parameters $a > 0$ und variieren Sie a.

1a)

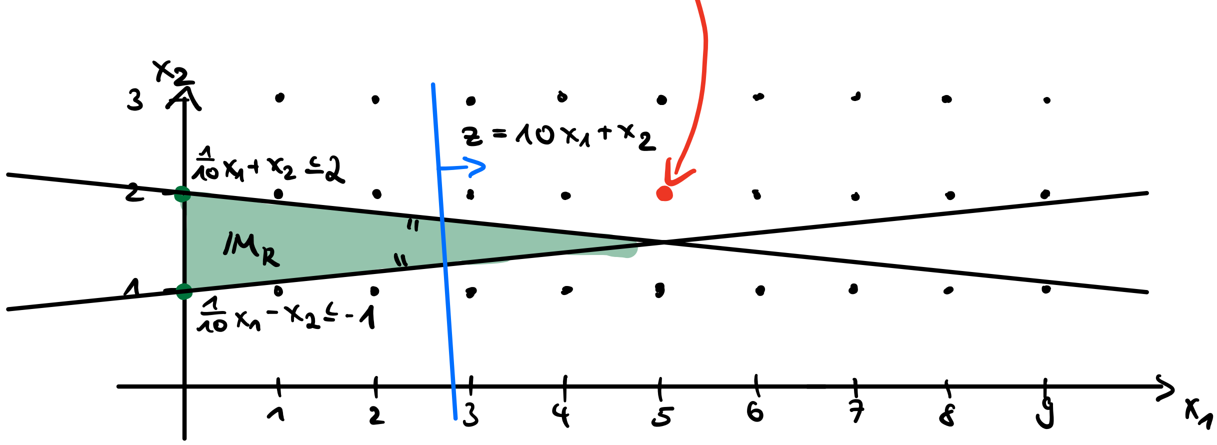


- Die zulässige Menge des ganzzahligen Problems $P(10)$ besteht nur aus den beiden Punkten $(0,1)$ und $(0,2)$. Der zugehörige Optimalpunkt lautet $(0,2)$ mit Maximalwert 2.
- Die zulässige Menge des relaxierten Problems $Q(10)$ besteht aus dem grün-farbenen Bereich. Der zugehörige optimale Punkt lautet $(5, 1.5)$ mit Maximalwert 51.5.

1b)

b) Runden Sie den optimalen Punkt von $Q(10)$ auf den nächsten ganzzahligen Punkt. Ist dieser Punkt zulässig für $P(10)$?

Runden des optimalen Punktes von $Q(10)$ liefert den Punkt $(5,2)$ mit Zielfunktionswert 52.



Diese Punkt ist nicht zulässig.

<u>Beweis:</u> $\frac{1}{10}x_1 + x_2 = \frac{1}{10} \cdot 5 + 2 = 2.5 > 2$ ↯

1c) c) Wie groß ist die Differenz zwischen dem Optimalwert von $Q(10)$ und dem von $P(10)$? Wie groß ist die Differenz zwischen dem Zielfunktionswert des gerundeten Optimalpunkts von $Q(10)$ und dem Optimalwert von $P(10)$?

Differenz der Optimalwerte von $Q(10)$ und $P(10)$:

$$51.5 - 2 = 49.5$$

Differenz zwischen dem Zielfunktionswert des gerundeten Optimalpunkts von $Q(10)$ und dem optimalen von $P(10)$:

$$52 - 2 = 50$$

1d) d) Zeigen Sie, dass eine Rundung des Optimalpunkts von $Q(a)$ beliebig weit weg vom Optimalpunkt von $P(a)$ liegen kann. Berechnen Sie hierzu den Schnittpunkt der beiden Restriktionen in Abhängigkeit des Parameters $a > 0$ und variieren Sie a.

Die zulässige Menge $M(a)$ von $P(a)$ hängt nicht vom Parameter a ab, d.h. es gilt für alle $a > 0$

$$M(a) = \{(0,1), (0,2)\}$$

→ Der optimale Punkt von $P(a)$ ist immer $(0,2)$.

Der Schnittpunkt der beiden Restriktionen ist $(\frac{a}{2}, 1.5)$, da

$2 - \frac{1}{a}x_1 = x_2 = \frac{1}{a}x_1 + 1 \iff \frac{2}{a}x_1 = 1 \iff x_1 = \frac{a}{2}$ und $x_2 = 2 - \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{2} = 1.5$

gilt und liefert für alle $a > 0$ den optimalen Punkt $Q(a)$.

Es folgt: Je größer man a wählt, umso größer wird der Abstand (z.B. der euklidische Abstand $||\cdot||_2$) zwischen dem Optimalpunkt $(0, 2)$ von $P(a)$ und dem Optimalpunkt $(\frac{a}{2}, 1.5)$ von $Q(a)$ und damit auch zwischen dem Optimalpunkt von $P(a)$ und der Rundung des Optimalpunkts von $Q(a)$.

Aufgabe 2

Ein Schreiner, der Tische und Bänke fertigt, möchte seinen Gewinn maximieren. Für einen Tisch lässt sich am Markt ein Preis von 100 € erzielen. Bänke verkauft der Schreiner für 70 €.

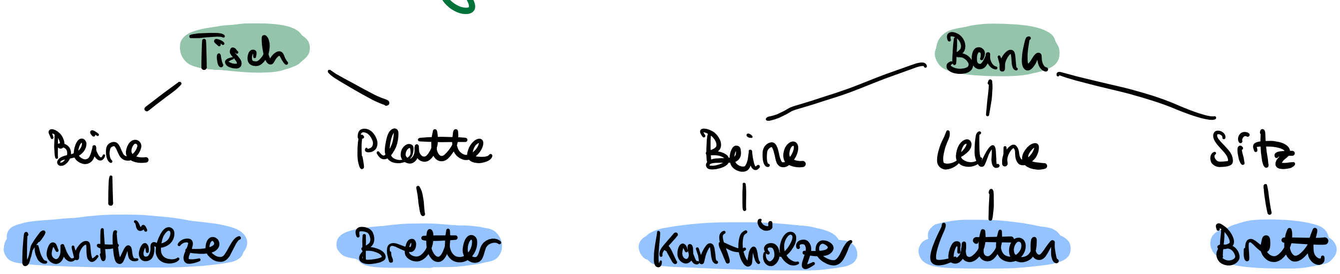
Für einen Tisch benötigt er vier Beine und eine Leimholzplatte. Letztere besteht aus fünf Brettern. Eine Bank wird aus vier Beinen, fünf schmalen Latten für die Rückenlehne und einem Brett als Sitzfläche gefertigt.
Die Beine für Tische und Bänke werden aus Kanthölzern gesägt. Dabei gibt es folgende Möglichkeiten: Erstens können aus einem Kantholz zwei Beine für eine Bank und ein Tischbein gesägt werden. Alternativ sind auch zwei Tischbeine möglich. Erfahrungsgemäß führen andere Schnittmuster zu Verschwendung und sollen daher vermieden werden.

Die Lagerbestände sind in nachstehender Tabelle enthalten. Für die kommende Fertigung darf dieser Bestand aufgebraucht werden. Es soll jedoch nichts zugekauft werden.

	Lagerbestand pro Stück
Bretter	200
Kanthölzer	300
schmale Latten	500

Modellieren Sie das Problem als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem.

Was sind eurer Meinung nach gute Entscheidungsvariablen?



A2) Entscheidungsvariablen:

$x_1 \in \mathbb{N}_0$ – Anzahl Tische

$x_2 \in \mathbb{N}_0$ – Anzahl Bänke

$y_1 \in \mathbb{N}_0$ – Anzahl Kanthölzer nach Schnittmuster 1

$y_2 \in \mathbb{N}_0$ – Anzahl Kanthölzer nach Schnittmuster 2

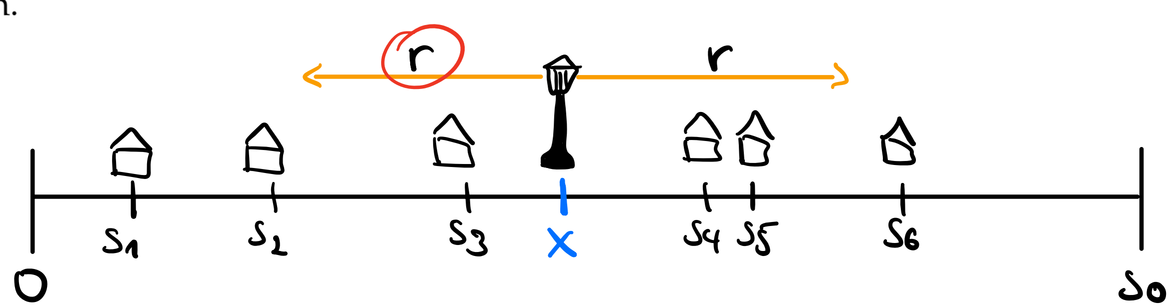
Mathematisches Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{llll}
\max & 100x_1 + 70x_2 & & \\
\text{s.t.} & 5x_1 + x_2 & \leq 200 & \text{Lagerbestand Bretter} \\
 & 5x_2 & \leq 500 & \text{Lagerbestand schmale Latten} \\
 & y_1 + y_2 & \leq 300 & \text{Lagerbestand Kanthölzer} \\
 & 4x_1 & \leq y_1 + 2y_2 & \text{Anzahl Tische begrenzt durch SM} \\
 & 4x_2 & \leq 2y_1 & \text{Anzahl Bänke begrenzt durch SM} \\
 & x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}_0 & & \text{nichtnegativität \& ganzzahligkeit}
\end{array}
$$

Aufgabe 3

In einer schlecht ausgeleuchteten Straße soll eine Straßenlampe platziert werden. Die Länge der Straße beträgt s_0 Meter. Insgesamt gibt es k Häuser, welche jeweils s_i Meter vom Anfang der Straße entfernt sind ($i = 1, \ldots, k$). Der Standpunkt der Lampe soll so gewählt werden, dass eine möglichst große Anzahl von Häusern im Lichtradius r der Lampe liegt.

Formulieren Sie hierzu ein passendes gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem. Nutzen Sie die Big-M-Formulierung. Geben Sie ein hinreichend großes M an.



A3) Entscheidungsvariablen:

$x \geq 0$ – Entfernung der neuen Straßenlampe vom Anfang der Straße

$y_i \in \{0,1\}$ – Ist Haus i im Lichtradius ($y_i = 1$ ja, $y_i = 0$ nein)

Zielfunktion zählt Anzahl erfasster Häuser:

$$\max \sum_{i=1}^{k} y_i$$

Häuser, für die $y_i = 1$ wird, liegen im Lichtradius r, d.h. sie müssen

$$|s_i - x| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad s_i - x \leq r \text{ und } x - s_i \leq r$$

erfüllen:

$$s_i - x \leq r \quad M(y_i - 1) \qquad \text{für } i = 1, \dots, k$$
$$x - s_i \leq r \quad M(y_i - 1) \qquad \text{für } i = 1, \dots, k$$

Aufstellung der Lampe innerhalb der Straße:

$$0 \leq x \leq s_0$$

Mathematisches Optimierungsproblem:

$$\max \sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & s_i - x \leq r + M(1 - y_i) && i = 1, \dots, k \\
& x - s_i \leq r + M(1 - y_i) && i = 1, \dots, k \\
& x \leq s_0 \\
& x \geq 0 \\
& y_i \in \{0,1\} && i = 1, \dots, k
\end{aligned}$$

Was wäre ein hinreichend großes M?

$\rightarrow M = s_0$ Da der Abstand der Lampe zu jedem Haus maximal s_0 Meter beträgt.

Aufgabe 4

Ein Wanderer überlegt, welche der folgenden Gegenstände er für einen mehrtägigen Ausflug in seinen Rucksack packen soll. Dabei muss er beachten, dass das Gesamtgewicht des Rucksacks 20 kg nicht überschreiten darf.

Gegenstand	Index i	Gewicht in kg	Nutzen
Zelt	1	10	25
Schlafsack	2	3	20
Isomatte	3	1	3
Radio	4	2	6
MP3-Player	5	0.1	3
Kerzen	6	1	3
Streichhölzer	7	0.01	4
Taschenlampe	8	2	8
Luftpumpe	9	4	5
Luftmatratze	10	0.5	7

Der Wanderer möchte zudem folgende Rahmenbedingungen für seinen Ausflug berücksichtigen:

- Um auch im Dunkeln Licht zu erhalten, benötigt er auf jeden Fall eine Kerze oder eine Taschenlampe.
- Kerzen mitzunehmen lohnt sich nur, wenn auch Streichhölzer im Rucksack sind.
- Damit er abends auch etwas Unterhaltung hat, will er entweder ein Radio oder einen MP3-Player mitnehmen.
- Er möchte dann und nur dann eine Luftpumpe mitnehmen, wenn er auch eine Luftmatratze dabei hat.

Der Wanderer stellt sich nun die Frage, wie der Rucksack zu packen ist, damit der Gesamtnutzen maximal wird. Modellieren Sie den Sachverhalt als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem.

A4) Entscheidungsvariablen:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Gegenstand eingepackt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, 10$$

Mathematisches Optimierungsproblem:

$$\max \quad 25x_1 + 20x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 8x_8 + 5x_9 + 7x_{10}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 10x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 0.1x_5 + x_6 + 0.01x_7 + 2x_8 + 4x_9 + 0.5x_{10} \leq 20 && (1) \\
& x_6 + x_8 \geq 1 && (2) \\
& -x_6 + x_7 \geq 0 && (3) \\
& x_4 + x_5 = 1 && (4) \\
& x_9 - x_{10} = 0 && (5) \\
& x_1, x_2, \dots, x_{10} \in \{0, 1\} && (6)
\end{aligned}$$

Beschreibung der Nebenbedingungen:

- (1): Maximalgewicht des Rucksacks
- (2): Kerze und/oder Taschenlampe einpacken
- (3): Streichhölzer nur einpacken, wenn Kerze eingepackt wird
- (4): Entweder Radio oder MP3-Player einpacken
- (5): Luftpumpe genau dann einpacken, wenn Luftmatratze eingepackt wird

Aufgabe 5

Ein Spielzeug-Hersteller möchte seine Produktionskosten für die Produktion von 100 Schaukelpferden minimieren. Zur Herstellung eines Schaukelpferdes – das ganz aus Holz besteht – werden ein Sitz, ein Kopf, zwei Haltegriffe und zwei Kufen benötigt.

Die Firma kauft Holz in verschiedenen Formen und Größen. Aus einer Leimholzplatte können zwei Köpfe und ein Sitz oder alternativ ein Kopf, ein Sitz und vier Haltegriffe ausgesägt werden. Außerdem verarbeitet die Firma lange Bretter, aus denen jeweils drei Sitze und vier Haltegriffe hergestellt werden. Haltegriffe können auch aus kurzen Brettern geschnitten werden. In diesem Fall ergeben sich zehn Haltegriffe pro einem kurzen Brett. Die Kufen werden aus Kanthölzern gefräst. Die entsprechende Maschine fertigt drei Kufen aus einem Kantholz.

Die Preise der Materialien sind in nachstehender Tabelle aufgeführt:

Material	Einkaufspreis pro Stück
Leimholzplatten	7 €
Lange Bretter	5 €
Kurze Bretter	2 €
Kanthölzer	3 €

Stellen Sie für den Spielzeug-Hersteller ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem auf, das auf eine Minimierung der Produktionskosten abzielt.

Aufgabe 5

1. Entscheidungsvariablen:

$$
\begin{array}{lll}
\tilde{x}_1 & – & \text{Anzahl Leimholzplatten nach Schnittmuster } \underline{\text{2 Köpfe,}} \text{ 1 Sitz} \\
\hat{x}_1 & – & \text{Anzahl Leimholzplatten nach Schnittmuster } \underline{\text{1 Kopf,}} \text{ 1 Sitz, 4 Haltegriffe} \\
x_2 & – & \text{Anzahl lange Bretter} \\
x_3 & – & \text{Anzahl kurze Bretter} \\
x_4 & – & \text{Anzahl Kanthölzer}
\end{array}
$$

2. Mathematisches Optimierungsproblem / Gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcll}
\min & 7\tilde{x}_1 & + & 7\hat{x}_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & \\
\text{s.t.} & 2\tilde{x}_1 & + & \hat{x}_1 & & & & & & & \geq & 100 & \text{(Anzahl Köpfe)} \\
& \tilde{x}_1 & + & \hat{x}_1 & + & 3x_2 & & & & & \geq & 100 & \text{(Anzahl Sitze)} \\
& & & 4\hat{x}_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & & & \geq & 200 & \text{(Anzahl Haltegriffe)} \\
& & & & & & & & & 3x_4 & \geq & 200 & \text{(Anzahl Kufen)} \\
& & & & & & & \multicolumn{3}{r}{\tilde{x}_1, \hat{x}_1, x_2, x_3, x_4} & \in & \mathbb{N}_0 &
\end{array}
$$

---

nächstes Tutorium:

- Modellierung
- Komplexitätstheorie