Restringierte nichtlineare Optimierung

Straftermverfahren

äußeres Approximationsverfahren

$$P(t) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} h(x_1,x_2) = f(x) + t \cdot \underbrace{\max\{0, g_i(x_1,x_2)\}^2}_{\text{Straftermfunktion } \alpha(x)}$$

→ Bestrafung für $g_i(x) > 0$
→ Bestrafung für unzulässigen Bereich

– Die Funktion $\alpha(x)$

- ist stetig differenzierbar
- gibt ein Maß für die Unzulässigkeit von $x \in \mathbb{R}^n$ an.

▶ Bestimmung der kritischen Punkte durch Fallunterscheidung

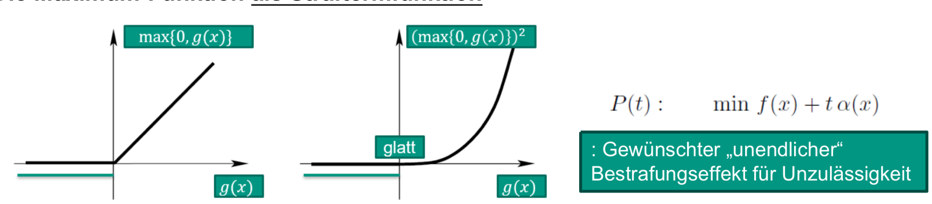
- Fall 1: $g_i(x_1,x_2) \leq 0$, d.h. (x_1,x_2) ist zulässig für P
  $\Rightarrow h = f$ und es gilt $\nabla h(x) \overset{!}{=} 0$

- Fall 2: $g_i(x_1,x_2) > 0$, d.h. (x_1,x_2) ist nicht zulässig für P
  $\Rightarrow h(x) = f(x) + t \cdot (g_i(x_1,x_2))^2$ und es gilt $\nabla h(x) \overset{!}{=} 0$

↳ $t \to \infty$ laufen lassen

Da das Straftermverfahren ein äußeres Approximationsverfahren ist, ist es möglich, dass erst im Grenzfall die gefundene Lösung zulässig wird (d.h. man nähert von außerhalb der zulässigen Menge des optimalen Punkt an)

Die Maximum-Funktion als Straftermfunktion



Barriereverfahren

Innere-Punkte-Verfahren

- Voraussetzung

Bereits die Annäherung an den Rand der zulässigen Menge wird bestraft

  - f und g_i sind stetig differenzierbar
  - Ein Slaterpunkt existiert $\mathbb{M}_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) < 0, i \in I\} \neq \emptyset$

- Idee: Anstatt nur die Unzulässigkeit eines Punktes zu bestrafen, versieht man bereits zulässige Punkte mit Strafkosten, sofern sie in der Nähe des Randes der zulässigen Menge liegen

$$P(t) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} h(x)$$

mit $h(x) = f(x) + t \cdot \beta(x)$

mit $\beta(x) = -\sum_{i \in I} \ln(-g_i(x))$

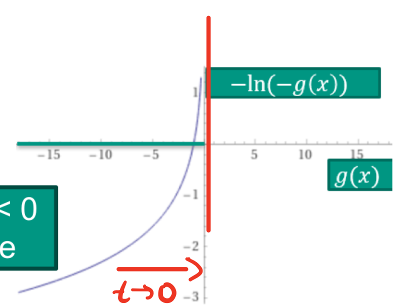
▶ Bestimmung der kritischen Punkte von $h(x)$: $\nabla h(x) \overset{!}{=} 0$

kritische Punkte auf Zulässigkeit überprüfen

↳ $t \to 0$ laufen lassen

$$\beta(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln\big(-g_i(x)\big), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Der (natürliche) Logarithmus als Barrierefunktion



$P(t)$: $\min f(x) + t\,\beta(x)$

: Gewünschte „Nicht-Verfälschung“ auf zulässiger Menge

Definitionsbereich: g(x) < 0
? nur zulässige Punkte

→ auf der Barriere ist Zielfunktion unendlich.

Aufgabe 1

Gegeben sei das nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) = 2x^2 + y^2 \\ \text{s.t.} & x + y \geq 1 \end{array}$$

Bestimmen Sie einen optimalen Punkt des Problems, indem Sie das Straftermverfahren nutzen. Verwenden Sie dabei folgende Straftermfunktion:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\max\{0, g_i(x)\}\Big)^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

A1) Umformulierung des Ausgangsproblems:

$$\min \quad f(x) = 2x^2 + y^2$$

$$\text{s.t.} \quad x \in M$$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x - y \leq 0\}$$

Approximation durch neues Problem:

$$P(t): \min \ h(x,y) = 2x^2 + y^2 + t \cdot (\max\{0, 1-x-y\})^2$$

$\nabla h(x,y) \overset{!}{=} 0$ → Ableiten mit Kettenregel

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - 2t \max\{0, 1-x-y\} \\ 2y - 2t \max\{0, 1-x-y\} \end{pmatrix}$$

1. Fall: $1 - x - y \leq 0$ (zulässig)

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x, y = 0$$

Widerspruch $1 - x - y \leq 0$ ↯

2. Fall: $1 - x - y > 0$ (unzulässig)

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - 2t(1-x-y) \\ 2y - 2t(1-x-y) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 4x + 2tx + 2ty - 2t &= 0 \\ 2y + 2tx + 2ty - 2t &= 0 \end{aligned} \quad \cdot(-1)$$

$$\Rightarrow 4x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} y$$

$$\overset{x=\frac{1}{2}y}{\Longrightarrow} 2y + 2t\left(\frac{1}{2}y\right) + 2ty - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y + 3ty - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow y(2+3t) = 2t$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2t}{2+3t} = \frac{2}{3+\frac{2}{t}}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{3+\frac{2}{t}}$$

$$x^*(t) = \frac{1}{3+\frac{2}{t}} \quad \text{und} \quad y^* = \frac{2}{3+\frac{2}{t}}$$

Den für das Ausgangsproblem optimalen Punkt erhält man schließlich durch den Grenzübergang.

$$x^* = \lim_{t\to\infty} x^*(t) = \frac{1}{3} \qquad y^* = \lim_{t\to\infty} y^*(t) = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei das nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + y^2 - 10y \\ \text{s.t.} & x & - & 8 & \leq & 0 \\ & y & - & 7 & \leq & 0 \\ & & & x, y & \geq & 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Barriereverfahrens die partiellen Ableitungen des zugehörigen unrestringierten nichtlinearen Optimierungsproblems. Verwenden Sie dabei die folgende Barrierefunktion:

$$\beta(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln\big(-g_i(x)\big), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

A2) Umformulierung des Ausgangsproblems:

$$\min \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + y^2 - 10y$$
$$\text{s.t.} \quad x \in \mathbb{M}$$
$$\mathbb{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-8 \leq 0,\ y-7 \leq 0,\ -x \leq 0,\ -y \leq 0\}$$

Approximation durch neues Problem:

$P(t)$: min $h(x,y)$

mit $h(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + y^2 - 10y - t\left(\ln(8-x) + \ln(7-y) + \ln(x) + \ln(y)\right)$

$\nabla h(x,y) \overset{!}{=} 0$ $\rightarrow$ Ableiten mit Kettenregel

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - 6 - t\left(-\frac{1}{8-x} + \frac{1}{x}\right) \\ 2y - 10 - t\left(-\frac{1}{7-y} + \frac{1}{y}\right) \end{pmatrix}$$ $f(x) = \ln(x) \mid f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^3 - 10x^2 + (48-2t)x + 8t = 0$$
$$2y^3 - 24y^2 + (70-2t)y + 7t = 0$$

Für fixes t kann das Gleichungssystem numerisch gelöst werden. Bspw. $t = 0.01 \Rightarrow x = 7.99$ und $y = 4.99$.

Der exakte Optimalpunkt ergibt sich schließlich dem Grenzübergang $t \rightarrow 0$.

Aufgabe 3

Gegeben sei das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} P: \quad \min \quad & f(x_1, x_2) = \tfrac{3}{2}x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \in [0, 2] \\ & x_2 \in [0, 4] \end{aligned}$$

a) Sind die Voraussetzungen für das Barriereverfahren erfüllt?

A3) a) f ist als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar. Wir definieren uns

$$g_1(x) = x_1 - 2 \ , \ g_2(x) = -x_1 \ , \ g_3(x) = 4 - x_2 \ , \ g_4(x) = -x_2$$

g_i $(i \in \{1,2,3,4\})$ sind als lineare Funktionen stetig differenzierbar.

Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(x) \leq 0, i \in I\}$ beschreibt die zulässige Menge von P und besitzt z.B. den Slaterpunkt $(1,1)$.

Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt.

b) Stellen Sie die zum Barriereverfahren gehörenden unrestringierten Optimierungsprobleme $P(t)$ mit Barriereparameter $t > 0$ auf. Verwenden Sie die Barrierefunktion

$$\beta(x_1, x_2) = -\sum_{i \in I} \ln(-g_i(x_1, x_2))$$

und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der neuen Zielfunktion.

b) $$P(t): \min_{x \in \mathbb{R}^2} h(x)$$

mit $h(x) = \frac{3}{2}x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 4x_2 - t\left(\ln(2-x_1) + \ln(x_1) + \ln(4-x_2) + \ln(x_2)\right)$

Die Funktion h ist nur auf dem Inneren der zulässigen Menge des Problems definiert.

Die Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar. Daher muss nach der Fermat'schen Regel jeder lokale Minimalpunkt kritischer Punkt sein.

$$\Rightarrow \nabla h(x) \overset{!}{=} 0 \qquad f(x) = \ln(x) \ \Big| \ f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 3 + \frac{t}{2-x_1} - \frac{t}{x_1} \\ 2x_2 - 4 + \frac{t}{4-x_2} - \frac{t}{x_2} \end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie, dass der Punkt $(1, 2)$ ein globaler Minimalpunkt von $P(1)$ ist.

c) $(x_1, x_2) = (1,2)$ liefert

$$\nabla h(1,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(1,2)$ kritischer Punkt.

Prüfe auf Minimalpunkt:

$$D^2 h(x) = \begin{pmatrix} 3 + \frac{t}{(2-x_1)^2} + \frac{t}{x_1^2} & 0 \\ 0 & 2 + \frac{t}{(4-x_2)^2} + \frac{t}{x_2} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $D^2 h(x)$ sind:

$$\lambda_1 = 3 + \frac{t}{(2-x_1)^2} + \frac{t}{x_1^2} > 0 \quad , \forall t > 0, \forall x \in M$$

$$\lambda_2 = 2 + \frac{t}{(4-x_2)^2} + \frac{t}{x_2^2} > 0 \quad , \forall t > 0, \forall x \in M$$

Daher ist die Hessematrix von h positiv semidefinit auf dem Inneren der zulässigen Menge und folglich ist der kritische Punkt $(1,2)$ ein globaler Minimalpunkt von h für $t=1$.

Aufgabe 4

Ein Investor möchte sein Kapital in Höhe von 55 000 € in die Aktien A und B investieren. Nach einem Jahr soll ein Zielkapital von 71 000 € erreicht werden.

Für die jährliche Entwicklung der beiden Aktien gibt es drei Szenarien. In Szenario 1 steigt Aktie A um 56.25 % und Aktie B um 29.96 %. In Szenario 2 steigt Aktie A um 32.5 % und Aktie B um 27.68 %. In Szenario 3 steigt Aktie A um 12.36 % und Aktie B um 25.44 %. Es wird angenommen, dass alle drei Szenarien gleich wahrscheinlich sind.

Liegt das Kapital am Ende vom Jahr über dem Zielwert, so bekommt der Investor eine Prämie von 1% des Überschusses; liegt es darunter, so muss er eine Strafe von 4 % des Fehlbetrages zahlen. Diese Betrachtung der Abweichung vom Zielkapital entspricht einer konkaven (stückweise linearen) Nutzenfunktion für den Investor.

Wie muss der Investor zum Investitionszeitpunkt sein Kapital auf die Aktien aufteilen, um seinen (erwarteten) Nutzen nach einem Jahr zu maximieren?

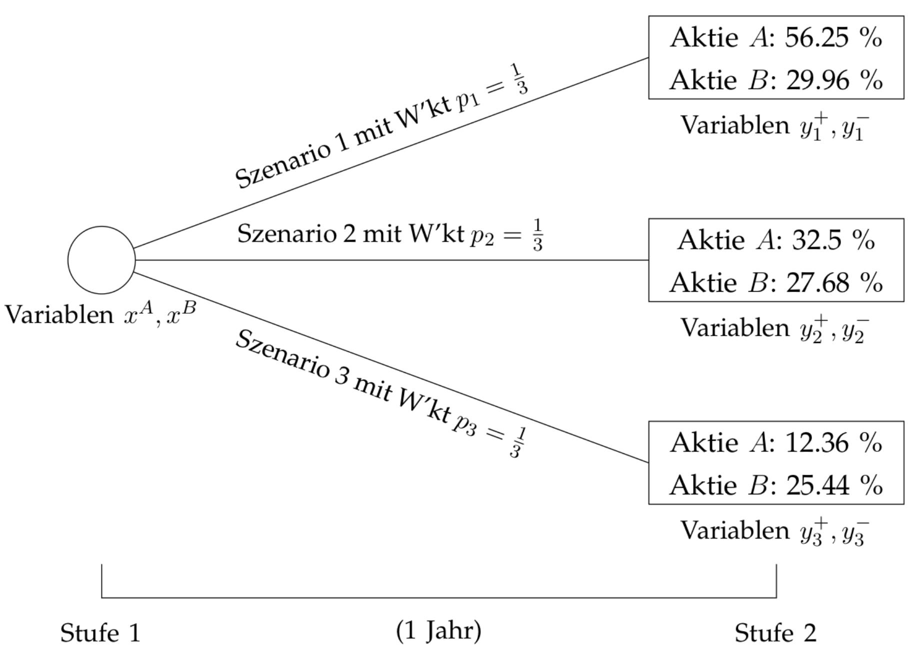
a) Skizzieren Sie einen Szenariobaum für die drei Szenarien im betrachten Zeitraum.

A4) Im Szenariobaum wird der Investitionszeitpunkt als Stufe 1 dargestellt. In Stufe 1 entscheidet der Investor, wie sein Startkapital 55.000 € auf die beiden Aktien A und B zu verteilen. Dazu wählen wir folgende Entscheidungsvariablen:

- x_A: Geldmenge (in €), die in Stufe 1 in Aktie A investiert wird
- x_B: Geldmenge (in €), die in Stufe 1 in Aktie B investiert wird

In Stufe 2 wird betrachtet, ob ein Überschuss oder ein Fehlbetrag aufgetreten ist. Dabei muss berücksichtigt werden, dass nach der Entscheidung in Stufe 1 drei Szenarien auftreten können. Wir modellieren die 6 Variablen:

- y_s^+: Überschuss (in €) zum Zielkapital nach einem Jahr in Szenario s
- y_s^-: Fehlbetrag (in €) zum Zielkapital nach einem Jahr in Szenario s



$$1.5625\, x_A + 1.2996\, x_B - y_1^+ + y_1^- - 71.000 = 0$$

b) Formulieren Sie obigen Sachverhalt als ein zweistufiges stochastisches lineares Optimierungsproblem. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

b) Mit den 8 Variablen können wir die Zielfunktion und die Nebenbedingungen angeben:

- Die Zielfunktion entspricht dem erwarteten Nutzen des Investors:

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3}(y_s^+ - 4y_s^-) = \frac{1}{3}(y_1^+ - 4y_1^- + y_2^+ - 4y_2^- + y_3^+ - 4y_3^-)$$

- Das Startkapital wird in Stufe 1 verteilt:

$$x_A + x_B = 55.000$$

- Nach einem Jahr ist das Zielkapital erreicht:

$$1.5625\, x_A + 1.2996\, x_B - y_1^+ + y_1^- = 71.000$$
$$1.3250\, x_A + 1.2768\, x_B - y_2^+ + y_2^- = 71.000$$
$$1.1236\, x_A + 1.2544\, x_B - y_3^+ + y_3^- = 71.000$$

- Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_A, x_B, y_s^+, y_s^- \geq 0 \qquad s = 1,2,3$$

Das lineare Optimierungsproblem lautet:

$$P: \max \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3}(y_s^+ - 4y_s^-) = \frac{1}{3}(y_1^+ - 4y_1^- + y_2^+ - 4y_2^- + y_3^+ - 4y_3^-)$$

s.t.

$$x_A + x_B = 55.000$$
$$1.5625\, x_A + 1.2996\, x_B - y_1^+ + y_1^- = 71.000$$
$$1.3250\, x_A + 1.2768\, x_B - y_2^+ + y_2^- = 71.000$$

$$1.1236\, x_A + 1.2544\, x_B - y_3^+ + y_3^- = 71.000$$

$$x_A, x_B, y_s^+, y_s^- \geq 0 \qquad s = 1,2,3$$

Bemerkungen:

- In der Zielfunktion kommen die Variablen der 1. Stufe (x^A, x^B) nicht vor. Dennoch ist der optimale Wert von der Wahl für x^A und x^B abhängig, da die Werte von y_s^+ und y_s^- von x^A und x^B abhängig sind.
- Es gibt sowohl Nebenbedingungen nur mit Variablen der 1. Stufe als auch Nebenbedingungen, die die Variablen der 1. und 2. Stufe verknüpfen.

nächstes Tutorium:

- zweistufige stochastische Optimierungsprobleme