zweistufige stochastische lineare Optimierung

- allgemeine SLP Form:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \mathbb{E}_\xi[\min q^T y(\omega)] \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & T(\omega)x + W y(\omega) = h \quad \omega \in \Omega \\ & y(\omega) \geq 0 \quad \omega \in \Omega \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Definition der Zulässigkeitsmengen:

$K_1 := \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 1. Stufe Lösungen, falls es keine 2. Stufe gäbe

$K_2(\omega) := \{x \mid \exists y \geq 0 : W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x\}$ 1. Stufe Lösungen, die für Ereignis ω in 2. Stufe zulässig sind

$K_2 := \bigcap_{\omega \in \Omega} K_2(\omega)$ 1. Stufe Lösungen, die für alle Ereignisse ω in 2. Stufe zulässig sind

- verschiedene Recourse-Arten:
  - Beispiel ÜB 10, Aufgabe 2
  - für $x^* = 8$ lässt sich die Wertfunktion der 2. Stufe nicht lösen aufgrund von Unzulässigkeit => kein Recourse möglich
  - Relative Complete Recourse: $K_1 \subseteq K_2$

    Für gegebenes $\omega \in \Omega$ und jede zulässige Lösung x aus der 1. Stufe existiert eine zulässige Lösung y für die 2. Stufe.

    → Relativ bedeutet hier: Für gegebenes x ist Recourse möglich

- **Complete Recourse:** $\forall (t, \omega)\, \exists y \geq 0 : W y(\omega) = t.$

Für gegebenes $\omega \in \Omega$ und unabhängig von der Wahl für x existiert ein zulässiges y.

→ Recourse ist sogar unabhängig von x möglich

- **Simple Recourse:** $W = [I, -I]$ mit Einheitsmatrix I.

Damit können die 2. Stufe-Nebenbedingungen umformuliert werden zu

$$[I, -I]\, y(\omega) = h(\omega) - T(\omega) x \,,$$

d.h. für beliebige rechten Seiten $h(\omega) - T(\omega)x$ lassen sich $y_j^+(\omega)$, $y_j^-(\omega) \geq 0$ finden, so dass die die 2. Stufe-Nebenbedingungen erfüllt sind.

→ Recourse ist sogar unabhängig von x möglich und auch leicht konstruierbar

- Simple Recourse $\Rightarrow$ Complete Recourse $\Rightarrow$ Relative Complete Recourse
- $\neg$ Relative Complete Recourse $\Rightarrow$ $\neg$ Complete Recourse $\Rightarrow$ $\neg$ Simple Recourse

Newsvendor - Problem (Kioskverkauf-Problem)

- Maximiere Gewinn aus Zeitungsein- und verkauf
- Verkaufspreis, Einkaufspreis, Rückgabepreis
- Nachfrage unsicher
- Maximale Einkaufsmenge

  - Einkaufspreis c [€/Stück]
  - Verkaufspreis q [€/Stück] mit $c < q$
  - Rückgabepreis r [€/Stück] mit $r < c$
  - Maximale Einkaufsmenge u [Stück]
  - Nachfrage d [Stück]

Aufgabe 1

Betrachten Sie erneut das Investitionsproblem aus einer vorigen Aufgabe mit zweistufigem stochastischem linearem Optimierungsproblem P.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
P: & \max & \multicolumn{9}{l}{\frac{1}{3}(0.01y_1^+ - 0.04y_1^- + 0.01y_2^+ - 0.04y_2^- + 0.01y_3^+ - 0.04y_3^-)} \\
& \text{s.t.} & x^A & + & x^B & & & & & = & 55\,000 \\
& & 1.5625x^A & + & 1.2996x^B & - & y_1^+ & + & y_1^- & = & 71\,000 \\
& & 1.325x^A & + & 1.2768x^B & - & y_2^+ & + & y_2^- & = & 71\,000 \\
& & 1.1236x^A & + & 1.2544x^B & - & y_3^+ & + & y_3^- & = & 71\,000 \\
& & & & \multicolumn{5}{r}{x^A, x^B, y_s^+, y_s^-} & \geq & 0 \qquad s = 1,2,3
\end{array}
$$

a) Stellen Sie P als ein zweistufiges stochastisches lineares Minimierungsproblem SLP dar. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

A1) a) • Ereignismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit

- ω_1: Ereignis, dass die Aktie A um 56.25% und die Aktie B um 29.96% steigt
- ω_2: Ereignis, dass die Aktie A um 32.50% und die Aktie B um 27.68% steigt
- ω_3: Ereignis, dass die Aktie A um 12.36% und die Aktie B um 25.44% steigt

• Zufallsvektor $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\xi(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1.5625 \\ 1.2996 \end{pmatrix}, \quad \xi(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1.3250 \\ 1.2768 \end{pmatrix}, \quad \xi(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1.1236 \\ 1.2544 \end{pmatrix}$$

• Zielfunktionskoeffizienten c der 1. Stufe

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Koeffizientenmatrix A der 1. Stufe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Rechte Seite b der 1. Stufe:

$$b = (55.000)$$

• Zielfunktionskoeffizienten $q(\omega)$ der 2. Stufe für Ereignis $\omega \in \Omega$

$$q(\omega): \; q(\omega_1) = q(\omega_2) = q(\omega_3) = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

• Technologiematrix $T(\omega)$ der 2. Stufe für Ereignis $\omega \in \Omega$

$$T(\omega): \; T(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1.5625 & 1.2996 \end{pmatrix}$$

$T(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1.3250 & 1.2768 \end{pmatrix}$

$T(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1.1236 & 1.2544 \end{pmatrix}$

- Recourse-Matrix $W(\omega)$ der 2. Stufe für Ereignis $\omega \in \Omega$

  $W(\omega): W(\omega_1) = W(\omega_2) = W(\omega_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Rechte Seite $h(\omega)$ der 2. Stufe für Ereignis $\omega \in \Omega$

  $h(\omega): h(\omega_1) = h(\omega_2) = h(\omega_3) = (71.000)$

In dieser Form wird P als ein zweistufiges stochastisches lineares Optimierungsproblem SLP bezeichnet. In unserem Fall ist dann $x = (x^A, x^B)^\intercal$ und $y(\omega) = \big(y^+(\omega), y^-(\omega)\big)^\intercal$. Damit ergibt sich die allgemeine Darstellung wie folgt:

$$\begin{array}{llcll} \min & c^\intercal x + \mathbb{E}_\xi[\min q^\intercal y(\omega)] & & & \\ \text{s.t.} & Ax & = & b & \\ & T(\omega)x + Wy(\omega) & = & h & \omega \in \Omega \\ & y(\omega) & \geq & 0 & \omega \in \Omega \\ & x & \geq & 0 & \end{array}$$

→ Die Wahrscheinlichkeiten für jedes Ereignis werden nicht explizit modelliert, da sie implizit im Erwartungswert stehen.

b) Um welche Form eines SLP handelt es sich?

i) SLP mit Relative Complete Recourse

ii) SLP mit Complete Recourse

iii) SLP mit Simple Recourse

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) leicht zu erkennen ist: $W(\omega) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$, was man mit Umkehrung des Vorzeichens in die Form $(I, -I)$ bringen kann → Simple Recourse

Was ist, wenn das nicht ersichtlich ist? → Testen

i) Relative Complete Recourse:

Es gilt: $K_1 = \{x=(x^A,x^B) \in \mathbb{R}^2 \mid x^A + x^B = 55.000,\ x^A, x^B \geq 0\}$

und $\quad K_2(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y = (y^+, y^-) \geq 0 : Wy = h - T(\omega)x\}$.

Sei $x \in K_1$. Dann ist $h - T(\omega)x \in \mathbb{R}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Sei $h - T(\omega)x \leq 0$. Mit $y^+ = T(\omega)x - h \geq 0$ und $y^- = 0$ gilt

$$-y^+ + y^- = h - T(\omega)x$$

Sei $h - T(\omega)x \geq 0$. Mit $y^- = T(\omega)x - h \geq 0$ und $y^+ = 0$ gilt

$$-y^+ + y^- = h - T(\omega)x$$

Es ist $x \in K_2(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und somit $x \in K_2 = \bigcap_{\omega \in \Omega} K_2(\omega)$.

Da $x \in K_1$ beliebig gewählt war, ist $K_1 \subseteq K_2$, d.h. es liegt Relative Complete Recourse vor.

ii) Complete Recourse:

Es muss für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gelten, dass $Wy = -y^+ + y^- = t$ mit $y^+, y^- \geq 0$ erfüllbar ist.

Für $t \leq 0$ setze $y^+ = -t \geq 0$ und $y^- = 0$.

Für $t \geq 0$ setze $y^+ = 0$ und $y^- = t$.

Somit existieren für alle $t \in \mathbb{R}$ jeweils $y^+, y^- \geq 0$ mit $Wy = t$, d.h. es liegt Complete Recourse vor.

iii) Simple Recourse:

Setze $\overline{W} = -W = (1, -1)$ und $\overline{y}(\omega) = \begin{pmatrix} y^-(\omega) \\ y^+(\omega) \end{pmatrix}$

Die Gleichung der 2. Stufe lässt sich damit umformulieren:

$T(w)x + Wy(w) = h \iff T(w)x + \overline{W}\overline{y}(w) = h$,

$\left(K_2(w) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y = (y^+, y^-) \geq 0 : Wy = -y^+ + y^- = h - T(w)x \} \right)$

d.h. es liegt Simple Recourse vor.

Unterschied Simple Recourse / Complete Recourse:

$W_S(w) = (I, -I)$, $W_{CR}(w) = (a, -b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n \geq 0$

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Newsvendor-Problem.

a) Nehmen Sie an, dass die Nachfrage vor dem Einkauf der Zeitungen bekannt ist. Formulieren Sie ein lineares Minimierungsproblem, welches den negativen Gewinn des Zeitungsjungen minimiert. Geben Sie die Lösung des linearen Problems an (in allgemeiner Form).

A2) a) Minimiere negativen Gewinn an Zeitungen:

$$P: \quad \min \quad cx - qy_1 - ry_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 &\leq x \\ y_1 &\leq d \\ x &\leq u \\ x, y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dabei ist

- x: Anzahl an gekauften Zeitungen (Einkaufspreis c)
- y_1: Anzahl an verkauften Zeitungen (Verkaufspreis q)
- y_2: Anzahl an Zeitungen, die zurückgegeben werden (Rückgabepreis r)
- u: Maximale Einkaufsmenge
- d: Nachfrage an Zeitungen

Lösen durch Überlegung:

Da wir die Nachfrage kennen, lohnt es sich nicht, mehr Zeitungen einzukaufen als man verkaufen kann (begrenzt durch Einkaufsmenge u)

$\Rightarrow x^* = \min(d, u)$

$\Rightarrow y_1^* = x^*, \; y_2^* = 0$

b) Das Newsvendor-Problem kann unter der Annahme, dass die Nachfrage d eine Zufallsvariable mit $d : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ ist, als das zweistufige stochastische lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & cx + \mathbb{E}_\xi[Q(x,\omega)] \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq u \end{array}$$

mit der Wertfunktion der 2. Stufe

$$\begin{array}{rlrcrcl} Q(x,\omega) := & \min & -qy_1 & - & ry_2 & & \\ & \text{s.t.} & y_1 & + & y_2 & \leq & x \\ & & y_1 & & & \leq & d(\omega) \\ & & & & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

dargestellt werden.

i) Zeigen Sie, dass für das Newsvendor-Problem Relative Complete Recourse gilt. Warum gelten nicht Complete Recourse bzw. Simple Recourse?

ii) Geben Sie eine möglichst kompakte Darstellung der erwarteten Wertfunktion der 2. Stufe $\mathcal{Q}(x) := \mathbb{E}_\xi[Q(x,\omega)]$ an, indem Sie eine Darstellung für die Wertfunktion der 2. Stufe $\mathcal{Q}(x,\omega)$ finden. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

b) i) Relative Complete Recourse:

Zu zeigen ist, dass für gegebenes $d \geq 0$ und für alle $x \geq 0$ und $x \leq u$ die beiden Ungleichungen $y_1 + y_2 \leq r$ und $y_1 \leq d(\omega)$ mit $y_1, y_2 \geq 0$ erfüllbar sind. Wegen $x, d \geq 0$ lassen sich immer ein $y_1 \geq 0$ und $y_2 \geq 0$ finden, so dass die Ungleichungen erfüllt sind.

$y_1 = x, \; y_2 = 0$. Somit gilt Relative Complete Recourse.

Complete Recourse und Simple Recourse:

Es lassen sich keine $y_1, y_2 \geq 0$ finden, falls d und/oder u negativ sind. Damit finden sich nicht für beliebigen rechte Seiten zulässige $y_1, y_2 \geq 0$. Complete Recourse gilt nicht.

$\Rightarrow$ Simple Recourse gilt nicht.

ii) Die optimalen Punkte y_1^* und y_2^* in allgemeiner Form können für gegebene Einkaufsmenge x und gegebenes Ereignis $\omega \in \Omega$ aus der Wertfunktion der 2. Stufe bestimmt werden.

$y_1^* = \min\{x, d(\omega)\}$, $y_2^* = \max\{x - d(\omega), 0\}$

Für den optimalen Wert $Q(x, \omega)$ erhält man

$$Q(x,\omega) = -q y_1^* - r y_2^* = -q \cdot \min\{x, d(\omega)\} - r \cdot \max\{x - d(\omega), 0\}$$

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_\xi[Q(x,\omega)] = \mathbb{E}_\xi[-q \cdot \min\{x, d(\omega)\} - r \cdot \max\{x - d(\omega), 0\}]$$

Dann sieht das zweistufige stochastische Problem so aus:

$$P: \min \; cx + \mathbb{E}_\xi[-q \cdot \min\{x, d(\omega)\} - r \cdot \max\{x - d(\omega), 0\}]$$

$$\text{s.t.} \quad 0 \leq x \leq u$$

c) Für die zufällige Nachfrage $d(\omega)$ ist die folgende diskrete Verteilung gegeben:

Szenario	Nachfrage	Wahrscheinlichkeit
1	100	0.30
2	150	0.20
3	200	0.30
4	250	0.15
5	300	0.05

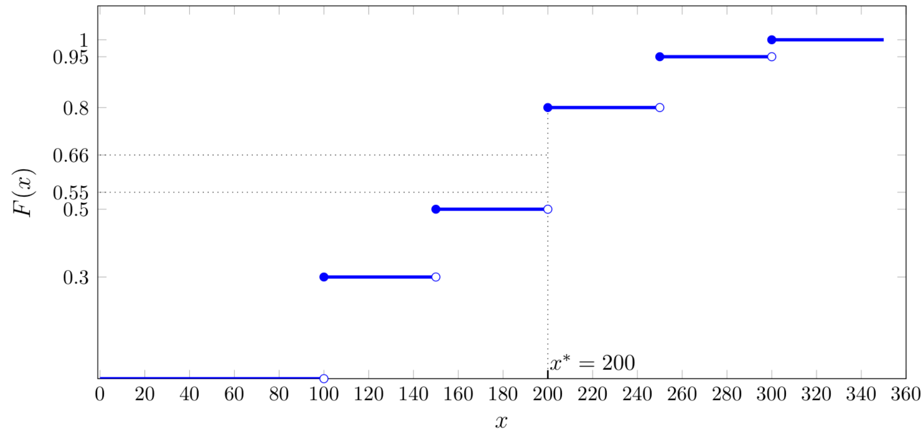
Die maximale Einkaufsmenge ist $u = 250$ und für die Preise gilt $c = 2$ €, $q = 4.5$ € und $r = 0.75$ €.

Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion und bestimmen Sie die optimale Einkaufsmenge x^* anhand der Skizze.

Nehmen Sie an, dass für den Rückkauf $r = 0$ gilt. Wie ändert sich die Lösung des Newsvendor-Problems?

c)

Skizze der Verteilungsfunktion $F(x)$:



optimale Lösung mit Formel berechnen (Resultat aus OR-Buch Seite 300/307)

Wir berechnen den Quotienten $\frac{q-c}{q-r}$

$$\frac{q-c}{q-r} = \frac{4.5-2}{4.5-0.75} = \frac{2}{3} = 66\%$$

Die Nachfrage ist zu 66% kleiner gleich der Einkaufsmenge.

$$F(x^*) = \mathbb{P}(d \le x^*) = \frac{q-c}{q-r}$$

Um das zugehörige x^* zu bestimmen, gehen wir in die Skizze zur vertikalen Achse, tragen dort ungefähr 0.66 ab und bestimmen dazu den kleinsten Wert ℓ auf der horizontalen Achse, für den $F(\ell) \ge 0.66$ gilt, d.h. wir berechnen

$$x^* = \arg\min\left\{F(\ell) \mid F(\ell) \ge \frac{q-c}{q-r}\right\}$$

und erhalten dafür $x^* = 200$.

Für den Fall $r=0$ ergibt sich:

$$\frac{q-c}{q r} = \frac{5}{9} = 0.55 \Rightarrow x^* = 200$$

$$F(150) = 0.5 \le 0.55 \le 0.8 = F(200)$$

nächstes Tutorium:

- mehrstufige stochastische Optimierung
- Recourse-Arten

Anmeldung zur Klausur (11.03.) ab jetzt

→ bis 08.03. anmelden