Aufgabe 1

Betrachten Sie ein Transportproblem mit 3 Angebots- und 4 Bedarfsorten, bei dem einige Nachfragen stochastisch sind. Die Transportkosten (in € je Einheit) sowie weitere Daten sind in folgender Tabelle gegeben.

		Bedarfsorte 1	1	3	4	Angebot
Angebotsorte	1	2	3	11	7	6
	2	1	1	6	1	10
	3	5	8	15	9	10
	Nachfrage	7	5	D_3	D_4	

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Nachfragen an den Bedarfsorten 3 und 4 sind wie folgt gegeben:

d	1	3	5
$P(D_3 = d)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

d	0	4
$P(D_4 = d)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Wenn nach Durchführung der Transporte die Nachfrage tatsächlich von der Transportmenge abweichen sollte, so müssen zum Ausgleich der Differenz weitere Maßnahmen getroffen werden:

- Wenn die Nachfrage die Transportmenge übersteigt, muss die Fehlmenge zu höheren Kosten beschafft werden (z.B. durch Einkauf vor Ort oder Versand per Flugzeug). Die Kosten je Einheit für die Bedarfsorte 3 und 4 betragen dann 14 € bzw. 11 €.
- Wenn die Nachfrage geringer ist als die Transportmenge, muss die überschüssige Menge gelagert, mit Verlust verkauft oder anderweitig abgesetzt werden. Dies verursacht sowohl in Bedarfsort 3 als auch in Bedarfsort 4 Kosten je Einheit von 8 €.

a) Formulieren Sie das Problem als zweistufiges stochastisches lineares Optimierungsproblem. Verwenden Sie dabei Zufallsvariablen für die Nachfragen D_3 und D_4.

Wie wählen wir Entscheidungsvariablen?

– 1. Stufe / 2. Stufe

Gibt es andere Variablen?

1. Stufe Entscheidungsvariablen:

$x_{ij} \geq 0$ Transportmenge von Angebotsort i ($i=1,2,3$) nach Bedarfsort j ($j=1,2,3,4$)

2. Stufe Entscheidungsvariablen:

$Y^+_j \geq 0$ Überschuss in Bedarfsort j ($j=3,4$)

$y_j^- \geq 0$ Fehlbetrag in Bedarfsort j $(j = 3, 4)$

Zufallsvariablen / Zufallsvektor ξ (hier D):

$D_3 \geq 0$ Nachfrage in Bedarfsort 3

$D_4 \geq 0$ Nachfrage in Bedarfsort 4

$D \in \mathbb{R}_+^2$ Zufallsvektor $D = \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$

A1) a) Transportkosten c_{ij}

zweistufiges stochastisches lineares Optimierungsproblem:

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} + \tilde{Q}(x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{33}, x_{34})$$ ← Nachfrage gekoppelt

		Bedarfsorte				Angebot
		1	1	3	4	
Angebotsorte	1	2	3	11	7	6
	2	1	1	6	1	10
	3	5	8	15	9	10
	Nachfrage	7	5	D_3	D_4	

s.t.

Bedarf
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 7$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 5$$

Angebot
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 6$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 10$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 10$$
$$x_{ij} \geq 0$$

2. Stufe Nachfragebedingungen:

$$\tilde{Q}(x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{33}, x_{34}) = \mathbb{E}_D\left[Q(x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{33}, x_{34}, D)\right]$$

mit $Q(x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{33}, x_{34}, D) =$

$$\min \quad 14 y_3^- + 11 y_4^- + 8 y_3^+ + 8 y_4^+$$

s.t.
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_3^+ - y_3^- = D_3$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_4^+ - y_4^- = D_4$$
$$x_{ij}, y_3^+, y_3^-, y_4^+, y_4^- \geq 0$$

b) Formulieren Sie unter Berücksichtigung der vollständigen Daten die extensive Form des stochastischen Problems.

1) b)

Szenario s	1	2	3	4	5	6
D_3	1	3	5	1	3	5
D_4	0	0	0	4	4	4
$\mathbb{P}(s)$	$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}}$	$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}}$	$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}}$	$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}_{\frac{1}{4}}$	$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}_{\frac{1}{4}}$	$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}_{\frac{1}{4}}$

Entscheidungsvariable der 2. Stufe

y_{js}^{+} Überschuss in Bedarfsort j in Szenario s

y_{js}^{-} Fehlbetrag in Bedarfsort j in Szenario s

$\mathbb{P}(s)$

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} & + & \frac{1}{12}\cdot(14y_{31}^{-} & + & 11y_{41}^{-} & + & 8y_{31}^{+} & + & 8y_{41}^{+}) \quad (s=1)\\
 & & + & \frac{1}{12}\cdot(14y_{32}^{-} & + & 11y_{42}^{-} & + & 8y_{32}^{+} & + & 8y_{42}^{+}) \quad (s=2)\\
 & & + & \frac{1}{12}\cdot(14y_{33}^{-} & + & 11y_{43}^{-} & + & 8y_{33}^{+} & + & 8y_{43}^{+}) \quad (s=3)\\
 & & + & \frac{1}{4}\cdot(14y_{34}^{-} & + & 11y_{44}^{-} & + & 8y_{34}^{+} & + & 8y_{44}^{+}) \quad (s=4)\\
 & & + & \frac{1}{4}\cdot(14y_{35}^{-} & + & 11y_{45}^{-} & + & 8y_{35}^{+} & + & 8y_{45}^{+}) \quad (s=5)\\
 & & + & \frac{1}{4}\cdot(14y_{36}^{-} & + & 11y_{46}^{-} & + & 8y_{36}^{+} & + & 8y_{46}^{+}) \quad (s=6)
\end{array}
$$

$$
\text{s.t.}\quad \left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 7\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 5\\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 6\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 10\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 10
\end{array}\right\} \text{1. Stufe}
$$

$$
\text{2. Stufe}\left\{\begin{array}{ll}
x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_{31}^{-} - y_{31}^{+} = 1 & (s=1)\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_{41}^{-} - y_{41}^{+} = 0 & (s=1)\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_{32}^{-} - y_{32}^{+} = 3 & (s=2)\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_{42}^{-} - y_{42}^{+} = 0 & (s=2)\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_{33}^{-} - y_{33}^{+} = 5 & (s=3)\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_{43}^{-} - y_{43}^{+} = 0 & (s=3)\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_{34}^{-} - y_{34}^{+} = 1 & (s=4)\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_{44}^{-} - y_{44}^{+} = 4 & (s=4)\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_{35}^{-} - y_{35}^{+} = 3 & (s=5)\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_{45}^{-} - y_{45}^{+} = 4 & (s=5)\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_{36}^{-} - y_{36}^{+} = 5 & (s=6)\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_{46}^{-} - y_{46}^{+} = 4 & (s=6)
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{lll}
x_{ij} \geq 0 & & i=1,2,3 \quad j=1,2,3,4\\
y_{js}^{-} \geq 0 & & j=3,4 \quad s=1,2,\ldots,6\\
y_{js}^{+} \geq 0 & & j=3,4 \quad s=1,2,\ldots,6
\end{array}
$$

Aufgabe 2

Ein Lederwaren-Hersteller stellt zwei Arten von Handtaschen her: Standard und Deluxe. Der Hersteller möchte die Produktion für das nächste Halbjahr planen. Die Fertigung jeder Tasche erfordert Produktionszeit (in Stunden) in jeder der vier Abteilungen: Schneiden und Färben, Nähen, Endbearbeitung, Qualitätskontrolle. Die in jeder Abteilung verfügbare Zeit im kommenden Halbjahr ist begrenzt. Alle Informationen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

	Schneiden und Färben	Nähen	Endbearbeitung	Qualitätskontrolle	Gewinn (€)
Standard	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	9
Deluxe	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	10
Verfügbare Zeit	630	600	708	135	

Weiterhin hat das Unternehmen kürzlich zwei Forschungsanträge zum Erhalt von finanzieller Unterstützung bei der Entwicklung von Lederwaren mittels innovativer und umweltfreundlicher Technologien eingereicht. Im Falle eines Zuschlags für die Forschungsanträge reduziert sich jedoch die in den vier Abteilungen verfügbare Zeit für die Herstellung der Handtaschen, da sämtliche Maschinen dann auch für die Forschungsprojekte eingesetzt werden müssen. Für jeden der beiden Anträge schätzt der Hersteller die Erfolgswahrscheinlichkeit und die Zeitreduktion in den einzelnen Abteilungen. Die Informationen sind in folgender Tabelle dargestellt. Zudem sind die Ergebnisse der beiden Anträge unabhängig voneinander.

	Erfolgswahrscheinlichkeit	Schneiden und Färben	Nähen	Endbearbeitung	Qualitätskontrolle
Antrag 1	0.5	50	40	80	10
Antrag 2	0.4	30	50	70	15

Die Produktionsplanung für die Handtaschen muss bereits erfolgen, bevor das Ergebnis der beiden Anträge bekannt ist. Nachdem der Hersteller das Ergebnis der beiden Anträge erfahren hat, hat er jedoch noch die folgenden (kostenbehafteten) Anpassungsmöglichkeiten für die Produktion zur Verfügung:

- Einplanung zusätzlicher Produktion von Standard-Handtaschen zu einem reduzierten Gewinn von 8 € pro Tasche.
- Einplanung von Überstunden in den vier Abteilungen mit Kosten von 5, 6, 8 und 4 € für jede zusätzliche Stunde in den Abteilungen Schneiden und Färben, Nähen, Endbearbeitung bzw. Qualitätskontrolle. In der Endbearbeitung sind nur bis zu 100 Überstunden möglich.

a) Formulieren Sie das Problem als zweistufiges stochastisches lineares Optimierungsproblem. Verwenden Sie dabei Zufallsvariablen, die die in den einzelnen Abteilungen verfügbare Zeit angeben.

Wie wählen wir Entscheidungsvariablen?

– 1. Stufe / 2. Stufe

Gibt es andere Variablen?

Entscheidungsvariablen 1. Stufe:

$x_1 \geq 0$ Anzahl produzierter Standard-Handtaschen

$x_2 \geq 0$ Anzahl produzierter Deluxe-Handtaschen

Entscheidungsvariablen der 2. Stufe:

$y \geq 0$ Anzahl zusätzlicher produzierter Standard-Handtaschen

$J_i \geq 0$ Zusätzliche Produktionszeit in Abteilung i

Zufallsvektor / Zufallsvariable ξ:

$T_i \geq 0$ Zufallsvariable für die in Abteilung i verfügbare Produktionszeit

$T \in \mathbb{R}^4_+$ Zufallsvektor

alternative Modellierungen des Zufallsvektors sind möglich

Wir nutzen diese Modellierung für einfache Nebenbedingungen

A2) a) Zweistufiges stochastisches lineares Optimierungsproblem:

$$\max \quad 9x_1 + 10x_2 + \tilde{Q}(x_1, x_2)$$ ← Anträge gekoppelt

$$\text{s.t.} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

2. Stufe Nebenbedingungen:

$$\tilde{Q}(x_1, x_2) = \mathbb{E}_T\left[Q(x_1, x_2, T)\right]$$

mit
$$\tilde{Q}(x_1, x_2) = \max \quad 8y - 5J_1 - 6J_2 - 8J_3 - 4J_4$$
$$\text{s.t.} \quad \frac{7}{10}x_1 + x_2 + \frac{7}{10}y \leq T_1 + J_1$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{1}{2}y \leq T_2 + J_2$$
$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + y \leq T_3 + J_3$$
$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{10}y \leq T_4 + J_4$$
$$J_3 \leq 100$$
$$y \geq 0$$
$$J_1, J_2, J_3, J_4 \geq 0$$

	Schneiden und Färben	Nähen	Endbearbeitung	Qualitätskontrolle	Gewinn (€)
Standard	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	9
Deluxe	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	10
Verfügbare Zeit	630	600	708	135	

A2) b)

b) Formulieren Sie unter Berücksichtigung der vollständigen Daten die extensive Form des stochastischen Problems.

Szenario s	1	2	3	4
Antrag 1	Nein	Ja	Nein	Ja
Antrag 2	Nein	Nein	Ja	Ja
$\mathbb{P}(s)$	$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}_{0.3}$	$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}_{0.3}$	$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}_{0.2}$	$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}_{0.2}$

Entscheidungsvariablen der 2 Stufe:

$y_s \geq 0$ Anzahl zusätzlich produzierter Standard-Handtaschen in Szenario s

$\tau_{is} \geq 0$ zusätzliche Produktionszeit in Abteilung i in Szenario s

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
\max & 9x_1 & + & 10x_2 & + & \underbrace{P(s=1)}_{0.3}\cdot(8y_1 & - & 5\tau_{11} & - & 6\tau_{21} & - & 8\tau_{31} & - & 4\tau_{41}) \quad (s=1) \\
 & & & & + & \underbrace{P(s=2)}_{0.3}\cdot(8y_2 & - & 5\tau_{12} & - & 6\tau_{22} & - & 8\tau_{32} & - & 4\tau_{42}) \quad (s=2) \\
 & & & & + & \underbrace{P(s=3)}_{0.2}\cdot(8y_3 & - & 5\tau_{13} & - & 6\tau_{23} & - & 8\tau_{33} & - & 4\tau_{43}) \quad (s=3) \\
 & & & & + & \underbrace{P(s=4)}_{0.2}\cdot(8y_4 & - & 5\tau_{14} & - & 6\tau_{24} & - & 8\tau_{34} & - & 4\tau_{44}) \quad (s=4)
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{lrcrcrcll}
\text{s.t.} & \frac{7}{10}x_1 & + & x_2 & + & \frac{7}{10}y_1 & \leq & 630 + \tau_{11} & (s=1) \\
 & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{5}{6}x_2 & + & \frac{1}{2}y_1 & \leq & 600 + \tau_{21} & (s=1) \\
 & x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & y_1 & \leq & 708 + \tau_{31} & (s=1) \\
 & \frac{1}{10}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \frac{1}{10}y_1 & \leq & 135 + \tau_{41} & (s=1) \\
 & & & & & \tau_{31} & \leq & 100 & (s=1)
\end{array}
\right\} \text{Szenario 1}
$$

$$
\left.
\begin{array}{rcrcrcll}
\frac{7}{10}x_1 & + & x_2 & + & \frac{7}{10}y_2 & \leq & 630 - 50 + \tau_{12} & (s=2) \\
\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{5}{6}x_2 & + & \frac{1}{2}y_2 & \leq & 600 - 40 + \tau_{22} & (s=2) \\
x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & y_2 & \leq & 708 - 80 + \tau_{32} & (s=2) \\
\frac{1}{10}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \frac{1}{10}y_2 & \leq & 135 - 10 + \tau_{42} & (s=2) \\
 & & & & \tau_{32} & \leq & 100 & (s=2)
\end{array}
\right\} S2
$$

$$
\left.
\begin{array}{rcrcrcll}
\frac{7}{10}x_1 & + & x_2 & + & \frac{7}{10}y_3 & \leq & 630 - 30 + \tau_{13} & (s=3) \\
\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{5}{6}x_2 & + & \frac{1}{2}y_3 & \leq & 600 - 50 + \tau_{23} & (s=3) \\
x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & y_3 & \leq & 708 - 70 + \tau_{33} & (s=3) \\
\frac{1}{10}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \frac{1}{10}y_3 & \leq & 135 - 15 + \tau_{43} & (s=3) \\
 & & & & \tau_{33} & \leq & 100 & (s=3)
\end{array}
\right\} S3
$$

$$
\left.
\begin{array}{rcrcrcll}
\frac{7}{10}x_1 & + & x_2 & + & \frac{7}{10}y_4 & \leq & 630 - 50 - 30 + \tau_{14} & (s=4) \\
\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{5}{6}x_2 & + & \frac{1}{2}y_4 & \leq & 600 - 40 - 50 + \tau_{24} & (s=4) \\
x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & y_4 & \leq & 708 - 80 - 70 + \tau_{34} & (s=4) \\
\frac{1}{10}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \frac{1}{10}y_4 & \leq & 135 - 10 - 15 + \tau_{44} & (s=4) \\
 & & & & \tau_{34} & \leq & 100 & (s=4)
\end{array}
\right\} S4
$$

$$
\begin{array}{rcll}
x_1, x_2 & \geq & 0 & \\
y_1, y_2, y_3, y_4 & \geq & 0 & \\
\tau_{is} & \geq & 0 & i = 1,2,3,4 \quad s = 1,2,3,4
\end{array}
$$

c) Gehen Sie nun nochmal einen Schritt zurück und geben Sie die zugehörige Erwartungswertformulierung an.

A2) c) Berechnen des Erwartungswert der Zufallsvariablen:

$$\overline{T}_1 = \mathbb{P}(s=1) \cdot 630 + \mathbb{P}(s=2) \cdot (630-50) + \mathbb{P}(s=3) \cdot (630-30) + \mathbb{P}(s=4) \cdot (630-50-30)$$

$$= 0{,}3 \cdot 630 + 0{,}3 \cdot 580 + 0{,}2 \cdot 600 + 0{,}2 \cdot 550 = 593$$

$$\overline{T}_2 = 560 \quad , \overline{T}_3 = 640 \quad , \overline{T}_4 = 124$$

$$\max \quad 9x_1 + 10x_2 + 8y - 5J_1 - 6J_2 - 8J_3 - 4J_4$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & \tfrac{7}{10}x_1 + x_2 + \tfrac{7}{10}y \le 593 + J_1 \\
& \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{5}{6}x_2 + \tfrac{1}{2}y \le 560 + J_2 \\
& x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + y \le 640 + J_3 \\
& \tfrac{1}{10}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{10}y \le 124 + J_4 \\
& J_3 \le 100 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \\
& y \ge 0 \\
& J_i \ge 0
\end{aligned}$$

Klausur 11.03.

Anmeldung bis 08.03.