zweistufige stochastische lineare Optimierung

Entscheidung	→	Unsicherheitsrealisierung	→	Entscheidung	mehrstufig →
↓		↓		↓	
Entscheidungsvariablen für 1. Stufe		Eintritt eines Szenario		Entscheidungsvariablen für 2. Stufe	

Modellierungsmöglichkeiten

1. Erwartungswertformulierung:

   Tue unrealistischerweise so, als ob sich immer der Erwartungswert der unsicheren Daten realisiert

   → kann Werte ergeben, die nicht möglich sind

2. Wait-and-See-Modell: (Orakel)

   Tue unrealistischerweise so, als wäre es dir immer möglich zu wissen wie sich die unsicheren Daten realisieren werden ⇝ wird deterministisch

   → Szenarien unabhängig voneinander betrachten

3. Here-and-Now-Modell: (Recourse-Modell) → korrigieren

   Tue realistischerweise so, als wäre es dir nicht möglich zu wissen wie sich die unsicheren Daten realisieren werden und bereite dich deshalb auf alle Szenarien vor

Entscheidung in der ersten Stufe muss pauschal getroffen werden und zwar hoffentlich so, dass diese Entscheidung im Erwartungswert (2. Stufe) gut ist

↳ Umsetzung im Modell (Form für endliche Zufallsvektoren)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x + \sum_{s=1}^{S} p_s q_s^T y_s \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b \\
& T_s x + W_s y_s = h_s \quad \forall s \in S \\
& y_s \geq 0 \quad \forall s \in S \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

c: Zielfunktionskoeffizient der 1. Stufe

x: Entscheidungsvariable der 1. Stufe

A: Koeffizientenmatrix der 1. Stufe

b: rechte Seite der 1. Stufe

q_s: Zielfunktionskoeffizient der 2. Stufe

y_s: Entscheidungsvariable der 2. Stufe

p_s: Wahrscheinlichkeiten für Szenario s

T_s: Technologiematrix der 2 Stufe für Szenario s

→ koppelnde Bedingungen

R_s: Recoursematrix der 2 Stufe für Szenario s

h_s: rechte Seite der 2 Stufe für Szenario s

Erwartungswertformulierung: (unrealistisch)

In der Erwartungswertformulierung nimmt man den Zufall aus der Modellierung heraus, indem man jeden zufälligen Parameter (d.h. jede Zufallsvariable) durch seinen Erwartungswert besetzt.

mit Modell berechnen

→ erwartetes Ergebnis IEEV bei der Verwendung der Lösung des Erwartungswertproblems

(Erwartungswert bei Verwenden der optimalen (1. Stufe) Lösung des "Expected Value (EV)"-Problems)

Erwartungswert der perfekten Information IEVPI:

Der IEVPI vergleicht den Wert WS der Wait-and-See-Lösung mit dem Wert RP der Here-and-Now-Lösung (Recourse-Problem)

$$IEVPI = WS - RP$$

Wait-and-See-Modell:

Im Wait-and-See-Modell wird hypothetisch unterstellt, dass das eintretende Szenario beobachtet werden könnte und erst dann alle Entscheidungen getroffen werden. Welches Szenario wirklich eintritt, weiß man jedoch im Voraus auch im Wait-and-See Modell nicht, so dass man für WS den Erwartungswert über die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung bildet. ← mit Modell berechnen

Stochastische Lösung VSS:

Der Wert der VSS vergleicht den Wert RP der Here-and-Now-Lösung mit dem Wert $\mathbb{E}EV$ des erwarteten Gewinns bei der Verwendung der Lösung der Erwartungswertformulierung

$$VSS = RP - \mathbb{E}EV$$

(RP wird auch mit dem Modell berechnet)

Modellierung von stochastischen Informationen

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ Ereignismenge

$\xi(\omega)$ Realisierung des Zufallsvektors ξ bei Eintritt von Ereignis $\omega \in \Omega$

$\mathbb{P}(\omega) = p_\omega$ Wahrscheinlichkeit für Eintritt von Ereignis $\omega \in \Omega$

Aufgabe 1

Betrachten Sie das Investitionsproblem vom vorigen Übungsblatt mit zweistufigem stochastischem linearem Optimierungsproblem P.

a) Stellen Sie P als ein zweistufiges stochastisches lineares Minimierungsproblem für endliche Zufallsvektoren dar. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

A1a) Gegeben ist das Maximierungsproblem aus der vorigen Aufgabe:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
P: & \max & \frac{1}{3}(y_1^+ - 4y_1^- + y_2^+ - 4y_2^- + y_3^+ - 4y_3^-) \\
& \text{s.t.} & x^A & + & x^B & & & & & = & 55\,000 \\
& & 1.5625x^A & + & 1.2996x^B & - & y_1^+ & + & y_1^- & = & 71\,000 \\
& & 1.325x^A & + & 1.2768x^B & - & y_2^+ & + & y_2^- & = & 71\,000 \\
& & 1.1236x^A & + & 1.2544x^B & - & y_3^+ & + & y_3^- & = & 71\,000 \\
& & & & & & x^A, x^B, & y_s^+, & y_s^- & \geq & 0 \qquad s = 1,2,3
\end{array}
$$

Aufgabe: In Form für endliche Zufallsvektoren bringen

$$
\begin{array}{lllll}
\min & c^T x + \sum_{s=1}^{S} p_s q_s^T y_s & & & \\
\text{s.t.} & Ax & = b & & \\
& T_s x + W_s y_s & = h_s & & \forall s \in S \\
& y_s & \geq 0 & & \forall s \in S \\
& x & \geq 0 & &
\end{array}
$$

Wir wählen:

$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = (1 \quad 1)$ $\quad b = (55.000)$

q_s: $q_1 = q_2 = q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

p_s: $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

T_s: $T_1 = (1.5625 \quad 1.2996)$

$T_2 = (1.3250 \quad 1.2768)$

$T_3 = (1.1236 \quad 1.2544)$

W_s: $W_1 = W_2 = W_3 = (-1 \quad 1)$

$h_S: h_1 = h_2 = h_3 = (71.000)$

In unserem Fall ist dann $x = (x_A, x_B)^T$ und $y_s = (y_s^+, y_s^-)^T$ für $s \in \{1,2,3\}$.

b) Berechnen Sie die den Wert der stochastischen Lösung VSS und den Erwartungswert der perfekten Information $\mathbb{E}VPI$. Es können Optimierungssoftwareprogramme wie z.B. CPLEX benutzt werden, um auftretende lineare Optimierungsprobleme zu lösen.

b) Wir gehen von der Formulierung als Maximierungsproblem aus. Wir berechnen direkt die Prämie des Investors

→ Faktor $\frac{1}{100}$ zu Zielfunktion

Berechnung $\mathbb{E}EV$, RP und WS:

1. $\mathbb{E}EV$

Bilde den Durchschnitt der Renditen

Aktie A: $\frac{1}{3}(56{,}25\% + 32{,}50\% + 12{,}36\%) = 33{,}70\%$

Aktie B: $\frac{1}{3}(29{,}96\% + 27{,}68\% + 25{,}44\%) = 27{,}69\%$

⇒ Der Investor legt Kapital in Aktie A an, da er dort im Durchschnitt den besten Gewinn hat.

→ $x_A = 55.000$, $x_B = 0$ und $EV = 25{,}35$ €

Berechne folgendes Problem:

$$
\begin{aligned}
EV: \max \quad & 0.01\, y^+ - 0.04\, y^- \\
\text{s.t.} \quad & x_A + x_B = 55.000 \\
& 1.3370\, x_A + 1.2769\, x_B - y^+ + y^- = 71.000 \\
& x_A, x_B, y^+, y^- \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
EV_s: & \max & 0.01\, y^+ & -0.04\, y^- & & \\
& s.t. & x_A & + & x_B & = 55.000 \\
& & x_A & & & = 55.000 \\
& & & & x_B & = 0 \\
& & & T_s \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} & & -y_s^+ + y_s^- = 71.000 \\
& & & & & x_A, x_B, y_s^+, y_s^- \geq 0
\end{array}
$$

Szenario s	Variablen 1. Stufe	Variablen 2. Stufe	Prämie/Strafe
1	$x_A = 55.000$, $x_B = 0$	$y_1^+ = 14.937{,}5$, $y_1^- = 0$	149,375 €
2	$x_A = 55.000$, $x_B = 0$	$y_2^+ = 1.875$, $y_2^- = 0$	18,75 €
3	$x_A = 55.000$, $x_B = 0$	$y_3^+ = 0$, $y_3^- = 9202$	−368,08 €

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}EV = \frac{1}{3}\left(149{,}375€ + 18{,}75€ - 368{,}08€\right) = -66{,}65€$$

2. RP (aufgestelltes Problem aus 1a) lösen)

$$
\begin{array}{lllll}
\max & c^T x + \sum_{s=1}^{S} p_s q_s^T y_s & & & \\
s.t. & Ax & & = b & \\
& T_s x + W_s y_s & & = h_s & \forall s \in S \\
& & y_s & \geq 0 & \forall s \in S \\
& & x & \geq 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad x_A = 0, \; x_B = 55.000$

S1: $y_1^+ = 478$, $y_1^- = 0$, $\underbrace{y_2^+ = 0, \; y_2^- = 776}_{S2:}$, $y_3^+ = 0$, $y_3^- = 2008$

$RP = -35{,}54 €$

3. WS

$$WS_S: \max \quad 0.01\, y^+ - 0.04\, y^-$$
$$\text{s.t.} \quad x_A + x_B = 55.000$$
$$T_S \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} - y_S^+ + y_S^- = 71.000$$
$$x_A, x_B, y_S^+, y_S^- \geq 0$$

Szenario s	Variablen 1. Stufe	Variablen 2. Stufe	Prämie / Strafe
1	$x_A = 55.000$, $x_B = 0$ $56.25\% > 29.96\%$	$y_1^+ = 14.937{,}5$, $x_3 = 0$	$149{,}375$ €
2	$x_A = 55.000$, $x_B = 0$ $32.50\% > 27.60\%$	$y_2^+ = 1.875$, $y_2^- = 0$	$18{,}75$ €
3	$x_A = 0$, $x_B = 55.000$ $12.36\% < 25.44\%$	$y_3^+ = 0$, $y_3^- = 2008$	-80.32 €

$$WS = \frac{1}{3}(149{,}375€ + 18{,}75€ - 80{,}32€) = 29{,}27€$$

$$VSS = RP - \mathbb{E}EV = -35.53€ - (-66.65€) = 31.12€$$

$$\mathbb{E}VPI = WS - RP = 29.97€ - (-35.53€) = 64{,}80€$$

Aufgabe 2

Gegeben sei das folgende zweistufige stochastische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llcccll} SLP: & \min & -2x & + & \mathbb{E}_\xi[\min y(\omega)] & & \\ & \text{s.t.} & \frac{1}{2}x & + & y(\omega) & = \xi(\omega) & \omega \in \Omega \\ & & & & y(\omega) & \geq 0 & \omega \in \Omega \\ & & & & x & \geq 0 & \end{array}$$

mit $\xi(\omega_1) = \xi_1 = 3$, $\xi(\omega_2) = \xi_2 = 6$ ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$) und $\mathbb{P}(\omega_1) = p_1 = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(\omega_2) = p_2 = \frac{1}{3}$ ($p_1 + p_2 = 1$).

Berechnen Sie die den Wert der stochastischen Lösung VSS und den Erwartungswert der perfekten Information $\mathbb{E}VPI$. Verifizieren Sie dabei die Ungleichungen $WS \leq RP \leq \mathbb{E}EV$.

A2) Umformulieren des Problems ($\xi(w) - \frac{1}{2}x = y(w)$)

y hat „nur" die Funktion einer Schlupfvariable

$$\boxed{\begin{aligned} SLP': \min_{x,w} \quad & -2x + \mathbb{E}_\xi\left[\min_{x,w} \xi(w) - \tfrac{1}{2}x\right] \\ \text{s.t.} \quad & \xi(w) - \tfrac{1}{2}x \geq 0 \qquad w \in \Omega \\ & x \geq 0 \end{aligned}}$$

Für $\mathbb{E}[\min y(w)]$ aus SLP stellen wir ein neues Problem auf:

→ Berechnung des erwarteten Ergebnis bei der Verwendung der Lösung des Erwartungswertproblems wird die Wertfunktion der 2. Stufe von SLP betrachtet.

$$Q(x,w) := \min_y \; y$$
$$\text{s.t.} \quad \tfrac{1}{2}x + y = \xi(w)$$
$$y \geq 0$$

Berechnung von $\mathbb{E}EV$, RP und WS:

1. $\mathbb{E}EV$

Erwartungswert der Variable

$$\bar{\xi} = p_1 \cdot \xi_1 + p_2 \cdot \xi_2 = \tfrac{2}{3} \cdot 3 + \tfrac{1}{3} \cdot 6 = 4$$

Einsetzen in SLP':

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x + (\bar{\xi} - \tfrac{1}{2}x) \\ \text{s.t.} \quad & \bar{\xi} - \tfrac{1}{2}x \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min \quad & -2x + (\bar{\xi} - \tfrac{1}{2}x) \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x \leq 2\bar{\xi}) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ $\min \; -\frac{5}{2}x + 4$

s.t. $0 \leq x \leq 8$

$\implies$ optimale Punkt ist $x^* = 8$.

Einsetzen in Wertfunktion der 2. Stufe

$$Q(8,3) = \min_{y} \; y \quad \text{s.t.} \; 4 + y = 3, \; y \geq 0$$

$$Q(8,6) = \min_{y} \; y \quad \text{s.t.} \; 4 + y = 6, \; y \geq 0$$

Problem $Q(8,3)$ unlösbar $\Rightarrow$ ZFW ∞

$$IEEV = -2x^* + p_1 \cdot Q(x^*, \omega_1) + p_2 \cdot Q(x^*, \omega_2)$$
$$= -16 + \tfrac{2}{3} \cdot \infty + \tfrac{1}{3} \cdot 2 = \infty$$

2. RP

$$RP := \min_{x} \; -2x + p_1(\xi_1 - \tfrac{1}{2}x) + p_2(\xi_2 - \tfrac{1}{2}x)$$
$$\text{s.t.} \quad x \leq 2\xi_1, \quad x \leq 2\xi_2, \quad x \geq 0$$

$\rightarrow$ Einsetzen von ξ_1, ξ_2, p_1 und p_2

$$\min_{x} \; -2x + \tfrac{2}{3}(3 - \tfrac{1}{2}x) + \tfrac{1}{3}(6 - \tfrac{1}{2}x)$$
$$\text{s.t.} \quad x \leq 6, \quad x \leq 12, \quad x \geq 0$$

$\Rightarrow$ optimale Punkt ist $x^* = 6$.

$\Rightarrow RP = -11$

3. WS

Löse jedes Szenario einzeln:

$$WS_i: \min_{x} \; -2x + \xi_i - \tfrac{1}{2}x$$
$$\text{s.t.} \quad x \leq 2\xi_i, \quad x \geq 0$$

Für $\xi_1 = 3$ gilt:

$$\min_{0 \le x \le 6} -\frac{5}{2}x + 3$$

$\Rightarrow x^* = 6$, $ZFW = -12$

Für $\xi_2 = 6$ gilt:

$$\min_{0 \le x \le 12} -\frac{5}{2}x + 6$$

$\Rightarrow x^* = 12$, $ZFW = -24$

$$WS = p_1 \cdot WS_1^* + p_2 \cdot WS_2^*$$
$$= \frac{2}{3}(-12) + \frac{1}{3}(-24) = -16$$

$$VSS = \mathbb{E}EV - RP = \infty - (-11) = \infty$$

$$\mathbb{E}VPI = RP - WS = -11 - (-16) = 5$$

$$\Rightarrow WS \le RP \le \mathbb{E}EV$$
$$-16 \le -11 \le \infty$$

- Bemerkung:

  Für min-Probleme gilt: $WS \le RP \le \mathbb{E}EV$ (A2)

  Für max-Probleme gilt: $\mathbb{E}EV \le RP \le WS$ (A1) nächstes Tutorium:

- stochastische Optimierung

Diese Woche Online Test (bis 21.01.):

- restringierte nichtlineare Optimierung
- KKT
- Kelley-/und Frank-Wolfe-Verfahren
- Strafterm-/und Barriereverfahren