Branch-and-Bound Verfahren → Lösungsverfahren ganzzahlige Optimierung

- „Verzweigen und Begrenzen" (und ausloten (eng.: Prune))
  - Gesamtproblem in Teilprobleme zerlegen
  - Teilprobleme nur sinnvoll, wenn Bounding-Information (Schranken) sinnvoll (Optimum möglich) sonst Teilproblem ausloten/ignorieren

- dient zum Finden EINER besten/optimalen Lösung (NICHT alle möglichen Lösungen falls maximaler ZFW von Relaxierung schon erreicht wird)

- Metaverfahren: Verschieden instanziierbar von den Details her

- Der Algorithmus:

Relaxierung: Ganzzahligkeitbedingung aufheben

1. (Initialisierung) → LP-Relaxierung lösen
   Setze $\bar{z} = c^\top \bar{x}$ mit einem $\bar{x} \in \mathbb{M}_P$ oder setze $\bar{z} = -\infty$.
   ↳ untere Schranke (schlechteste)
   Löse die LP-Relaxierung Q von P.
   obere Schranke (bestes)
   Falls $z_Q^\star = -\infty$, dann gehe zu Schritt 2.
   Falls $x_Q^\star \in \mathbb{N}_0^n$, setze $\bar{z} = z_Q^\star$, $\bar{x} = x_Q^\star$, und gehe zu Schritt 2.
   Setze *liste* $= [(Q, x_Q^\star, z_Q^\star)]$.

2. (Stoppregel)
   Falls *liste* $= \emptyset$: stopp, denn
   - für $\bar{z} > -\infty$ ist $\bar{x}$ ein optimaler Punkt von P mit optimalem Wert $\bar{z}$,
   - für $\bar{z} = -\infty$ gilt $\mathbb{M}_P = \emptyset$.

3. (Knotenwahl)
   Wähle einen Listeneintrag $(Q, x_Q^\star, z_Q^\star)$ mit maximalem Wert $z_Q^\star$.
   Lösche diesen Eintrag aus *liste*.

Zerlegung in Teilprobleme

4. (Verzweigen)
   Verzweigen nach Variable, die am nächsten an einer Ganzzahl ist.
   Bestimme $\ell_Q = \mathrm{minfrac}(x_Q^\star)$ und branche Q bezüglich $x_{\ell_Q}^\star$ in zwei Teilprobleme Q_a und Q_b.

Bsp. $x_1 = 2.5$
$2 \leq x_1 \leq 3$
$P_1: x_1 \leq 2$ $\quad$ $P_2: x_1 \geq 3$

Bound (Discard) - Nutzung von Schranken für ZFW (Zielfunktionswert)

5 (Ausloten)

a)
- Berechne $z_a^\star$.
- 1,2 Falls $-\infty \leq z_a^\star \leq \bar{z}$, dann gehe zu Schritt 5b). unzulässig / schlechter als aktuell bestes Ergebnis → werte updaten!
- 3 Falls $x_a^\star \in \mathbb{N}_0^n$, dann setze $\bar{z} = z_a^\star$, $\bar{x} = x_a^\star$, lösche alle Einträge $(Q, x_Q^\star, z_Q^\star)$ mit $z_Q^\star \leq \bar{z}$ aus *liste*, und gehe zu Schritt 5b). ganzzahlig und besser
- Nehme $(Q_a, x_a^\star, z_a^\star)$ in *liste* auf. (wenn kein Ausloten nach 1,2,3 passiert)

2 Teilprobleme ($\geq$ und $\leq$)

b)
- Berechne $z_b^\star$.
- Falls $-\infty \leq z_b^\star \leq \bar{z}$, dann gehe zu Schritt 2.
- Falls $x_b^\star \in \mathbb{N}_0^n$, dann setze $\bar{z} = z_b^\star$, $\bar{x} = x_b^\star$, lösche alle Einträge $(Q, x_Q^\star, z_Q^\star)$ mit $z_Q^\star \leq \bar{z}$ aus *liste*, und gehe zu Schritt 2.
- Nehme $(Q_b, x_b^\star, z_b^\star)$ in *liste* auf und gehe zu Schritt 2.

- Notation
  - Relaxierung Q_a von P_a (Teilproblem) mit Optimalpunkt x_a^* und Optimalwert z_a^*
  - Bislang bester gefundener ganzzahliger Punkt $\bar{x}$ mit ZFW $\bar{z}$

Globale (teilproblem-UNspezifische) untere Schranke für opt. ZFW (könnte besser, wissen wir nicht)

Teilproblem spezifische obere Schranke für ZFW

- Gründe zum Ausloten ❗Wichtig: Auswendig wissen❗
  - 1. Q_a unzulässig → P auch unzulässig, wenn Relaxierung schon unzulässig
  - 2. $z_a^* \leq \bar{z}$ → P_a nicht besser
  - \+ 3. $z_a^* > \bar{z}$ und x_a^* ganzzahlig → P_a besser und optimaler Punkt ganzzahlig
    ↳ Update $\bar{x} = x_a$, $\bar{z} = z_a$

- Liste Form

bsp. $\text{Liste} = [(\underset{\text{Problem relaxiert}}{Q_0}, \underbrace{(\tfrac{44}{13}; \tfrac{36}{13})}_{x_0^*}, \underbrace{14.46}_{z_0^*})]$

- Warmstart
  - Simplex nicht von vorne neu, sondern weitermachen mit dem, was man schon hat
    → neue Restriktion zum Endtableau des vorherigen Tableaus hinzufügen und einen dualen Austauschschritt durchführen → viel schneller!

↯ Gegensatz: Kaltstart ⇝ Lösen des neuen Problems von Anfang an mit primalem Simplex

Bsp. Warmstart

	x_3	x_4	
z	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{188}{13}$
x_1	$\frac{8}{65}$	$-\frac{11}{65}$	$\frac{44}{13}$
x_2	$\frac{3}{65}$	$\frac{4}{65}$	$\frac{36}{13}$

$\longrightarrow x_1^* = \frac{44}{13}$ $\quad x_1 = 3\frac{5}{13}$

$\longrightarrow x_2^* = \frac{36}{13}$

Fall 1: $\underbrace{x \leq c_u}_{\text{neue NB}} \longrightarrow x + s = \lfloor x^* \rfloor$

Fall 2: $x \geq c_o \longrightarrow x - s = \lceil x^* \rceil$

$x_1 + s_1 = \lfloor x_1^* \rfloor$ (Fall 1)

$\Longleftrightarrow s_1 = 3 - x_1$

	x_3	x_4	
z	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{188}{13}$
x_1	$\frac{8}{65}$	$-\frac{11}{65}$	$\frac{44}{13}$
x_2	$\frac{3}{65}$	$\frac{4}{65}$	$\frac{36}{13}$
s_1	$-\frac{8}{65}$	$\frac{11}{65}$	$-\frac{5}{13}$

Dualer Simplex

Macht es euch einfach und schreibt alles ordentlich auf. Sonst verliert ihr den Überblick und macht unnötige Fehler.

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden linearen Optimierungsprobleme, die als LP-Relaxierungen in der nachfolgenden Aufgabe auftreten werden.

c)
$$\begin{array}{llcrcl}
\max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
 & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & & & x_2 & \geq & 3 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$-x_2 \leq -3$

Dualer Simplex

d)
$$\begin{array}{llcrcl}
\max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
 & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 5 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

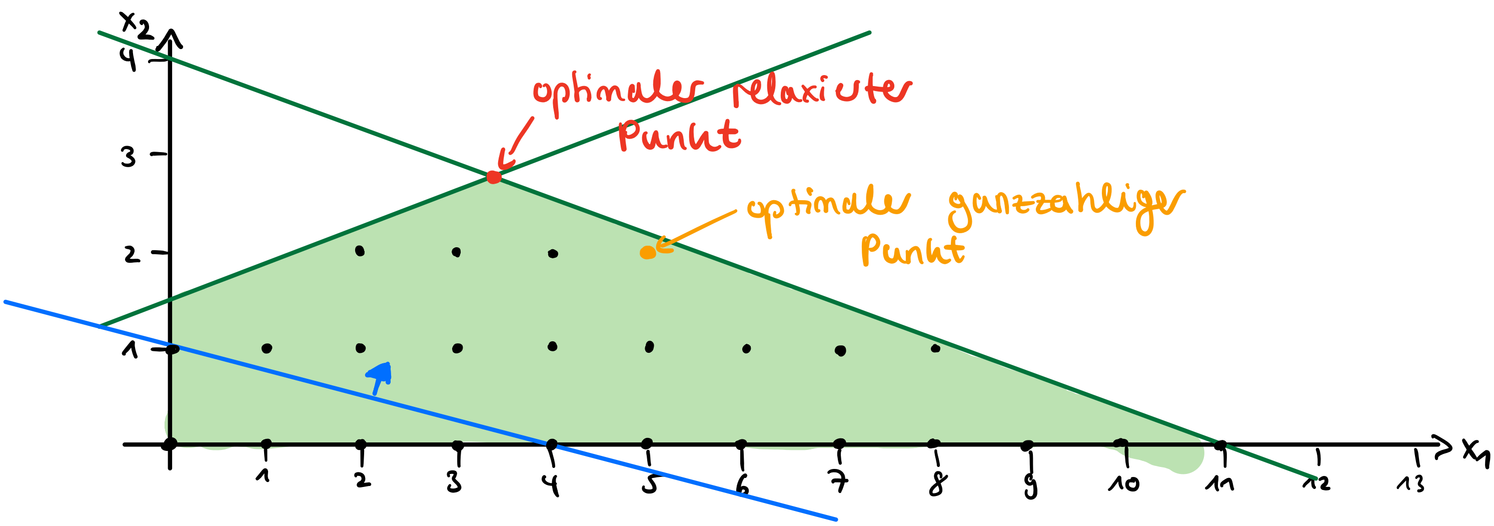
→ genau so bei Aufgabenteil e) und f)

Aufgabe 2

Betrachten Sie das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{llcrcl}
\max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
 & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{N}_0
\end{array}$$

a) Stellen Sie die zulässige Menge des ganzzahligen linearen Optimierungsproblems und die zulässige Menge der zugehörigen LP-Relaxierung grafisch dar.



b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Branch-and-Bound-Algorithmus, zeichnen Sie die einzelnen Verzweigungen der zulässigen Menge in die in Teil a) erstellte Grafik ein, und skizzieren Sie auch den zugehörigen Branch-and-Bound-Baum. Verzweigen Sie dabei immer nach derjenigen Strukturvariable, die am nächsten an einer ganzen Zahl liegt.

Iteration 0

1. Initialisierung (nur bei Iteration 0)

- Setze $P = P_0$
- da der Ursprung $\bar{x} = (0,0)$ zulässig für P_0 $\Rightarrow$ setze $\bar{z} = 0$.
- Löse die LP-Relaxierung Q_0 von P_0

$\boxed{\bar{z}=0, \bar{x}=(0,0)}$

$$
\begin{array}{llrcrcl}
Q_0: & \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
 & & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

(0)	x_1	x_2	
z	-1	-4	0
x_3	4	11	44
x_4	-3	$\boxed{8}$	12

(1)	x_1	x_4	
z	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	6
x_3	$\boxed{\frac{65}{8}}$	$-\frac{11}{8}$	$\frac{55}{2}$
x_2	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$

(2)	x_3	x_4	
z	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{188}{13}$
x_1	$\frac{8}{65}$	$-\frac{11}{65}$	$\frac{44}{13}$
x_2	$\frac{3}{65}$	$\frac{4}{65}$	$\frac{36}{13}$

- Optimaler Punkt von Q_0 ist $x_{Q_0}^* = \left(\frac{44}{13}, \frac{36}{13}\right) \approx (3.38, 2.77)$

  mit $z_{Q_0}^* = \frac{188}{13} \approx 14.46$

  $3: 0{,}38$ $\quad$ $3: 0{,}23$

- Da $x_{Q_0}^*$ nicht ganzzahlig ist und $z_{Q_0}^* \approx 14.46 > 0 = \bar{z}$

  setze Liste $= [(Q_0, (3.38; 2.77), 14.46)]$

- x_1 und x_2 beide nicht ganzzahlig $\rightarrow$ theoretisch egal nach welcher Variable man verzweigt

  ABER: Konvention Prof. Rebennack: $\ell_Q = \min \operatorname{frac}(x_Q^*)$

  ↳ Verzweigen nach Variable, die am nächsten zu einer Ganzzahl

  $\Rightarrow$ hier also x_2

2. Stoppregel: nicht erfüllt, da Liste $\neq \emptyset$ $\quad \boxed{\bar{z}=0, \bar{x}=(0,0)}$

3. Knotenwahl: Wähle $(Q_0, (3.38; 2.77), 14.46)$ und lösche dieses Tupel von Liste $\Rightarrow$ Liste $= \emptyset$ $\quad \boxed{\bar{z}=0, \bar{x}=(0,0)}$

4. Verzweigen: Es gilt $l_{Q_0} = 2 \Rightarrow Q_0$ nach x_2 branchen

$x_1 = 3.38 \longrightarrow x_1 - \lfloor x_1 \rfloor = 0.38$ $\boxed{\underline{z}=0, \bar{x}=(0,0)}$

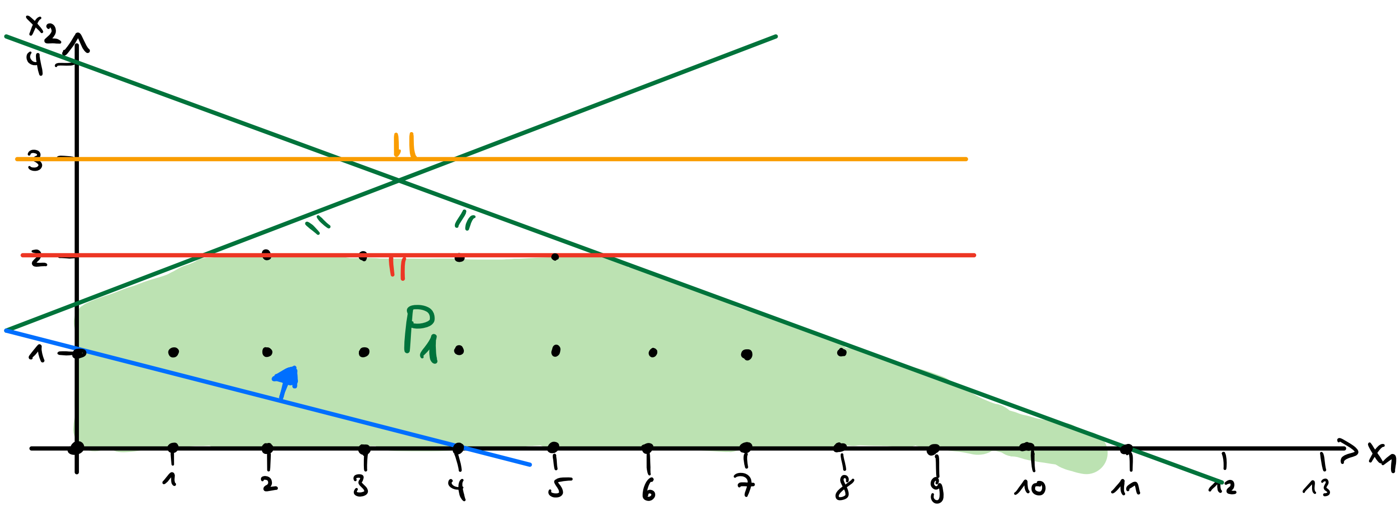
$x_2 = 2.77 \longrightarrow |x_2 - \lceil x_2 \rceil| = |-0.23| = 0.23$

↳ kleinerer und größerer ganzzahliger Wert sind Schranken

$2 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow$ nur Bereich außenrum wichtig

Es folgen 2 Teilprobleme:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
Q_1: & \max & x_1 & + & 4x_2 & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq 44 \\
& & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq 12 \\
& & & & x_2 & \leq 2 \\
& & & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcrcl}
Q_2: & \max & x_1 & + & 4x_2 & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq 44 \\
& & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq 12 \\
& & & & x_2 & \geq 3 \\
& & & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$



5. Ausloten $\boxed{\underline{z}=0, \bar{x}=(0,0)}$

- Löse LP-Relaxierung Q_1 von P_1

(0)	x_1	x_2	
z	-1	-4	0
x_3	4	11	44
x_4	-3	$\boxed{8}$	12
x_5	0	1	2

(1)	x_1	x_4	
z	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	6
x_3	$\frac{65}{8}$	$-\frac{11}{8}$	$\frac{55}{2}$
x_2	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_5	$\boxed{\frac{3}{8}}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

(2)	x_5	x_4	
z	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{28}{3}$
x_3	$-\frac{65}{3}$	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$\frac{50}{3}$
x_2	1	0	2
x_1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

(3)	x_5	x_3	
z	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{2}$
x_4	$-\frac{65}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{2}$
x_2	1	0	2
x_1	$-\frac{11}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{2}$

Da $x^*_{Q_1}$ nicht ganzzahlig ist, wird $(Q_1, (\frac{11}{2}; 2), \frac{27}{2})$ in die Liste aufgenommen. $\Rightarrow$ Liste $= [(Q_1, (\frac{11}{2}; 2), \frac{27}{2})]$

▶ Löse LP-Relaxation Q_2 von P_2

(0)	x_1	x_2	
z	-1	-4	0
x_3	4	11	44
x_4	-3	8	12
x_5	0	$\boxed{-1}$	-3

(1)	x_1	x_5	
z	-1	-4	12
x_3	4	11	11
x_4	$\boxed{-3}$	8	-12
x_2	0	-1	3

(2)	x_4	x_5	
z	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{20}{3}$	16
x_3	$\frac{4}{3}$	$\frac{65}{3}$	-5
x_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	4
x_2	0	-1	3

Problem unzulässig ($M(P_2) = \emptyset$) $\Rightarrow$ P_2 ausloten

Iteration 1 Liste $= [(Q_1, (\frac{11}{2}; 2), \frac{27}{2})]$

2. Stoppregel: nicht erfüllt $\boxed{\bar{z}=0, \bar{x}=(0,0)}$

3. Knotenwahl: Wähle Q_1 $\Rightarrow$ Liste $= \emptyset$ $\boxed{\bar{z}=0, \bar{x}=(0,0)}$

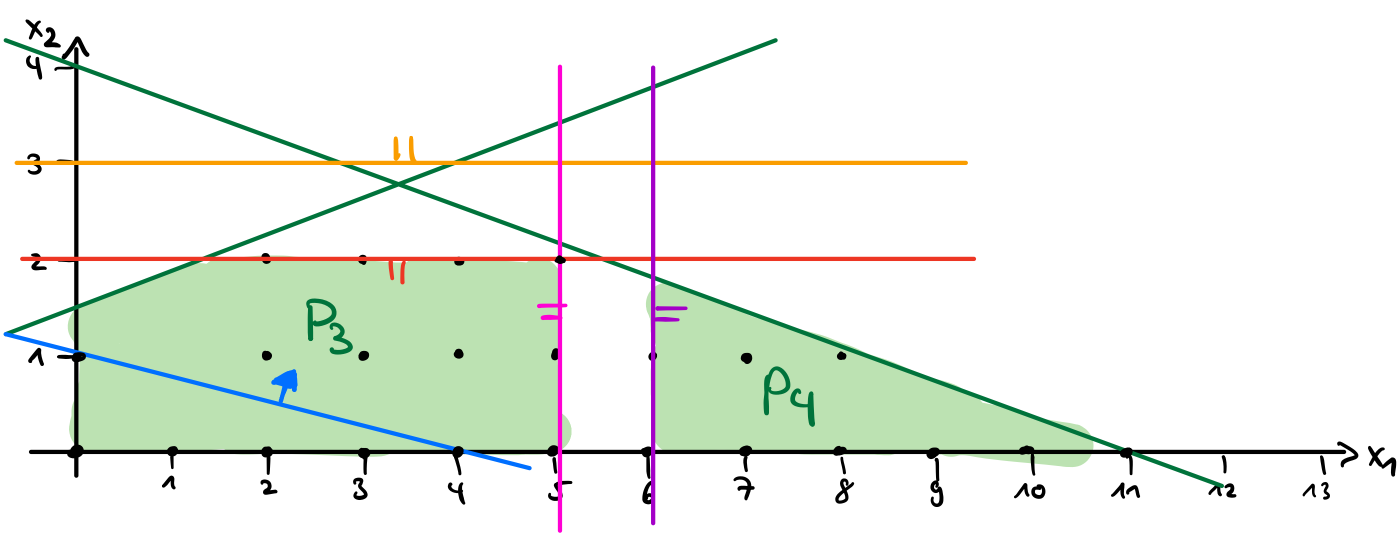
4. Verzweigen: Es gilt $\ell_{Q_1} = 1$ $\Rightarrow$ Q_1 bezüglich x_1 branchen

$$x_1 = \frac{11}{2} = 5.5 \Rightarrow 5 \leq x_1 \leq 6$$

Es folgen 2 Teilprobleme $\boxed{\bar{z}=0, \bar{x}=(0,0)}$

$$
\begin{array}{llrcrcl}
Q_3: & \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
& & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
& & & & x_2 & \leq & 2 \\
& & x_1 & & & \leq & 5 \\
& & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcrcl}
Q_4: & \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
& & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
& & & & x_2 & \leq & 2 \\
& & x_1 & & & \geq & 6 \\
& & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



5. Ausloten

$\overline{z}=0, \overline{x}=(0,0)$

- Löse LP-Relaxierung Q_3 von P_3

(0)	x_1	x_2	
z	-1	-4	0
x_3	4	11	44
x_4	-3	$\boxed{8}$	12
x_5	0	1	2
x_6	1	0	5

(1)	x_1	x_4	
z	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	6
x_3	$\frac{65}{8}$	$-\frac{11}{8}$	$\frac{55}{2}$
x_2	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_5	$\boxed{\frac{3}{8}}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
x_6	1	0	5

(2)	x_5	x_4	
z	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{28}{3}$
x_3	$-\frac{65}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{50}{3}$
x_2	1	0	2
x_1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_6	$-\frac{8}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\frac{11}{3}$

(3)	x_5	x_6	
z	4	1	13
x_3	-11	-4	2
x_2	1	0	2
x_1	0	1	5
x_4	-8	3	11

$x_{Q_3}{}^* = (5,2)$ ist ganzzahlig mit $z_{Q_3}{}^* = 13 > 0 = \overline{z}$

Setze $\overline{x} = (5,2)$ und $\overline{z} = 13$.

$\overline{z}=13, \overline{x}=(5,2)$

P_3 wird ausgelotet $\Rightarrow$ Liste $= \emptyset$

- Löse LP-Relaxierung Q_4 von P_4

(0)	x_1	x_2	
z	-1	-4	0
x_3	4	11	44
x_4	-3	8	12
x_5	0	1	2
x_6	$\boxed{-1}$	0	-6

(1)	x_6	x_2	
z	-1	-4	6
x_3	4	$\boxed{11}$	20
x_4	-3	8	30
x_5	0	1	2
x_1	-1	0	6

(2)	x_6	x_3	
z	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{146}{11}$
x_2	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{20}{11}$
x_4	$-\frac{65}{11}$	$-\frac{8}{11}$	$\frac{170}{11}$
x_5	$-\frac{4}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$
x_1	-1	0	6

$x_{Q_4}{}^* = (6, \frac{20}{11})$ ist nicht-ganzzahlig mit $z_{Q_4}{}^* = \frac{146}{11} > 13 = \overline{z}$

Q_4 in Liste aufnehmen $\Rightarrow$ Liste $= [(Q_4, (6; \frac{20}{11}), \frac{146}{13})]$

Iteration 2

$\overline{z}=13, \overline{x}=(5,2)$

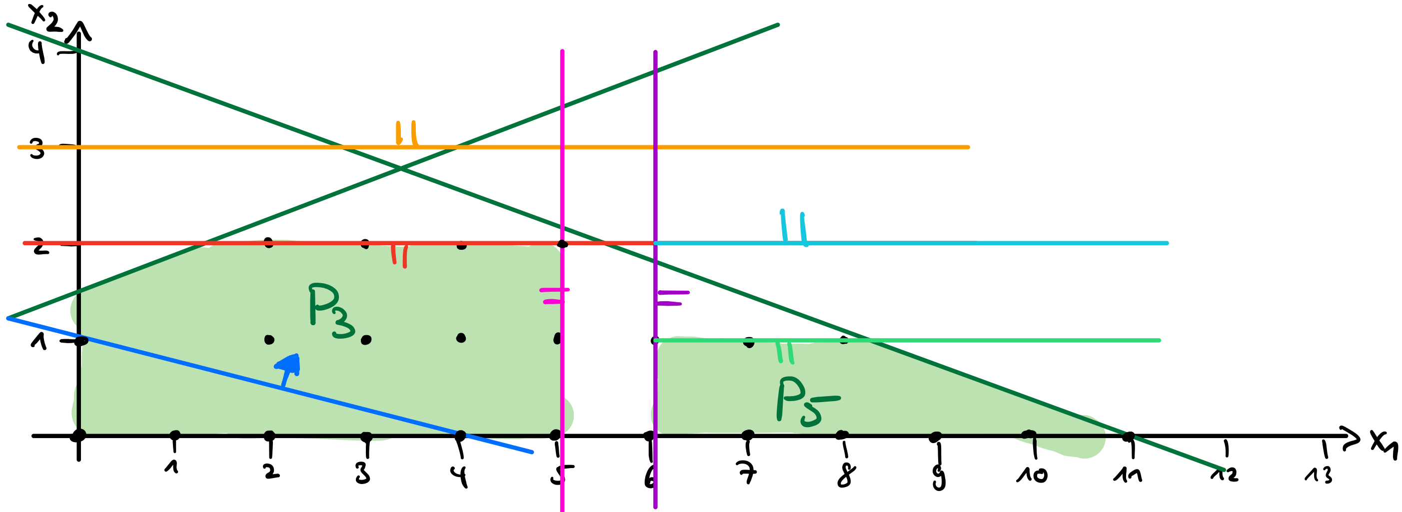
2. Stoppregel: nicht erfüllt $\quad \overline{z}=13, \overline{x}=(5,2)$
3. Knotenwahl: Wähle Q_4 $\Rightarrow$ Liste $= \emptyset$ $\quad \overline{z}=13, \overline{x}=(5,2)$
4. Verzweigen: Es gilt $l_{Q_4} = 2 \Rightarrow Q_4$ bezüglich x_2 branchen

$x_2 = \frac{20}{11} \approx 1.82 \qquad 1 \leq x_2 \leq 2$

$\overline{z}=13, \overline{x}=(5,2)$

Es folgen 2 Teilprobleme

$$
\begin{array}{lllllll}
Q_5: & \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
 & & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & & & & x_2 & \leq & 1 \\
 & & x_1 & & & \geq & 6 \\
 & & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllllll}
Q_6: & \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
 & & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & & & & x_2 & \geq & 2 \\
 & & x_1 & & & \geq & 6 \\
 & & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



5. Ausloten $\boxed{\underline{z}=13, \overline{x}=(5,2)}$

- Löse LP-Relaxierung Q_5 von P_5

(0)	x_1	x_2	
z	-1	-4	0
x_3	4	11	44
x_4	-3	8	12
x_5	0	1	2
x_6	$\boxed{-1}$	0	-6

(1)	x_6	x_2	
z	-1	-4	6
x_3	4	11	20
x_4	-3	8	30
x_5	0	$\boxed{1}$	1
x_1	-1	0	6

(2)	x_6	x_5	
z	-1	4	10
x_3	$\boxed{4}$	-11	9
x_4	-3	-8	22
x_2	0	1	1
x_1	-1	0	6

(3)	x_3	x_5	
z	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{49}{4}$
x_6	$\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{65}{4}$	$\frac{115}{4}$
x_2	0	1	1
x_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{33}{4}$

$x_{Q_5}^* = (\frac{33}{4}, 1)$ ist nicht ganzzahlig mit $z_{Q_5}^* = \frac{49}{4} = 12.25 < 13 = \underline{z}$

$\Rightarrow$ P_5 kann ausgelotet werden $\boxed{\underline{z}=13, \overline{x}=(5,2)}$

- Betrachte Q_6

$$
\begin{array}{llrcrcl}
Q_6: & \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & 4x_1 & + & 11x_2 & \leq & 44 \\
 & & -3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & & & & x_2 & \geq & 2 \\
 & & x_1 & & & \geq & 6 \\
 & & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Die erste NB kann nicht erfüllt werden, da $x_2 \geq 2$ und $x_6 \geq 6$

$\Rightarrow 4 \cdot 6 + 11 \cdot 2 = 46 > 44$ ↯

Das Problem ist unzulässig ($IM(P_6) = \emptyset$)

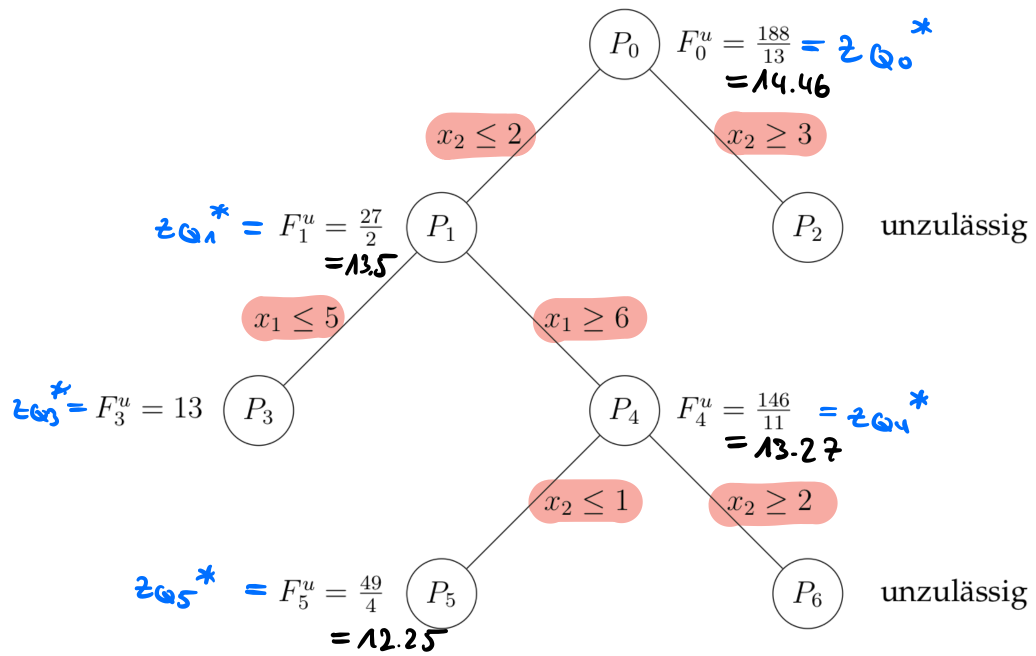
$\Rightarrow$ P_6 kann ausgelotet werden $\boxed{\underline{z}=13, \overline{x}=(5,2)}$

Iteration 3

2. Stoppregel: erfüllt Liste $= \emptyset$ $\boxed{\underline{z}=13, \overline{x}=(5,2)}$

Als Gesamtergebnis lässt sich der optimale Punkt aus P_3 angeben, d.h. $\overline{x} = (x_1^* = 5, x_2^* = 2)$ mit $\underline{z} = z^* = 13$

Vollständiger Branch-and-Bound-Baum:



hinzugefügten NB in rot

Aufgabe 3

Lösen Sie das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem mit Hilfe des Branch-and-Bound-Verfahrens und verzweigen Sie dabei zuerst nach der Variable x_3:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 8 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \in & \mathbb{N}_0
\end{array}$$

Iteration 0

1. Initialisierung

- Setze $P = P_0$
- da der Ursprung $\bar{x} = (0,0,0)$ zulässig für P_0 $\Rightarrow$ setze $\underline{z_0} = 0$
- Löse LP-Relaxierung Q_0 von P_0

$\boxed{\underline{z} = 0,\ \bar{x} = (0,0,0)}$

$$\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 8 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

(0)	x_1	x_2	x_3	
z	-2	-1	-1	0
x_4	$\boxed{2}$	-3	3	4
x_5	4	1	1	8

(1)	x_4	x_2	x_3	
z	1	-4	2	4
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
x_5	-2	$\boxed{7}$	-5	0

(2)	x_4	x_5	x_3	
z	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	4
x_1	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\boxed{\frac{3}{7}}$	2
x_5	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{7}$	0

(3)	x_4	x_5	x_1	
z	0	1	2	8
x_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_2	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}$

Optimaler Punkt von Q_0 ist $x_{Q_0}^* = (0, \frac{10}{3}, \frac{14}{3})$ nicht ganzzahlig

mit $z_{Q_0}^* = 8 > 0 = \bar{z}$

$\Rightarrow$ Liste $= [(Q_0, (0; \frac{10}{3}; \frac{14}{3}), 8)]$

2. Stoppregel: nicht erfüllt $\boxed{\bar{z} = 0,\ \bar{x} = (0,0,0)}$

3. Knotenwahl: Wähle Q_0 $\Rightarrow$ Liste $= \emptyset$ $\boxed{\bar{z} = 0,\ \bar{x} = (0,0,0)}$

4. Verzweigen: $\rightarrow$ Aus Aufgabe an x_3 branchen

$$4 \le \frac{14}{3} = 4.67 = x_3 \le 5 \qquad \boxed{\bar{z} = 0,\ \bar{x} = (0,0,0)}$$

Es folgen 2 Teilprobleme

5. Ausloten $\boxed{\bar{z} = 0,\ \bar{x} = (0,0,0)}$

- Löse LP-Relaxierung Q_1 von P_1

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
Q_1: & \max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
 & \text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \le & 4 \\
 & & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \le & 8 \\
 & & & & & & x_3 & \le & 4 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \ge & 0
\end{array}
$$

(0)	x_1	x_2	x_3	
z	-2	-1	-1	0
x_4	$\boxed{2}$	-3	3	4
x_5	4	1	1	8
x_6	0	0	1	4

(1)	x_4	x_2	x_3	
z	1	-4	2	4
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
x_5	-2	$\boxed{7}$	-5	0
x_6	0	0	1	4

(2)	x_4	x_5	x_3	
z	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	4
x_1	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{7}$	2
x_2	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{14}$	0
x_6	0	0	$\boxed{1}$	4

(3)	x_4	x_5	x_6	
z	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$	4
x_1	$\boxed{\frac{1}{14}}$	$\frac{3}{14}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
x_2	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{20}{7}$
x_3	0	0	1	4

(4)	x_1	x_5	x_6	
z	2	1	0	8
x_4	14	3	-6	4
x_2	4	1	-1	4
x_3	0	0	1	4

Da $x_{Q_1}^* = (0,4,4)$ ganzzahlig ist mit $z_{Q_1}^* = 8 > 0 = \bar{z}$ können wir P_1 ausloten.

$\rightarrow$ Update $\bar{x} = (0,4,4)$, $\bar{z} = 8$ $\boxed{\bar{z} = 8,\ \bar{x} = (0,4,4)}$

- Betrachte Q_2

Wegen der oberen Grenze der Relaxierung $z_{Q_0}^* = 8$ wissen wir, dass $z_{Q_2}^* \le 8 = \bar{z}$ gilt. Wir haben also schon eine optimale Lösung und können Q_2 ausloten.

$\Rightarrow$ Liste $= \emptyset$

Iteration 2:

$\boxed{\bar{z} = 8,\ \bar{x} = (0,4,4)}$

2. Stoppregel: erfüllt

Als Gesamtergebnis lässt sich der optimale Punkt aus P_1 angeben. $\bar{x} = (x_1^* = 0,\ x_2^* = 4,\ x_3^* = 4)$ mit $\bar{z} = z^* = 8$

Aufgabe 4

Ein Wanderer überlegt, welche der folgenden Dinge er in seinem Rucksack mitnehmen soll, wobei das Gesamtgewicht höchstens 10 kg betragen darf.

Gegenstand	Gewicht	Nutzen	i
Beil	4 kg	10	1
Zelt	7	5	2
Schlafsack	3	20	3
Plane	1	4	4

Wie ist der Rucksack zu packen, damit der Gesamtnutzen maximal wird?

a) Stellen Sie das Problem als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem dar und geben Sie die zugehörige LP-Relaxierung an.

1. Entscheidungsvariablen

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Gegenstand } i \text{ eingepackt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad i \in \{1,2,3,4\}$$

2. Modell aufstellen

$$P_1: \quad \max \quad 10x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 4x_4$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

$$Q_1: \quad \max \quad 10x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 4x_4$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_2 \leq 1$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_4 \leq 1$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

b) Führen Sie ausgehend vom unten angegebenen Endtableau der LP-Relaxierung einen Verzweigungsschritt des Branch-and-Bound-Verfahrens aus. → Warmstart

(4)	x_6	x_5	x_8	x_9	
	$\frac{50}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{125}{7}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{248}{7}$
x_2	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
x_1	1	0	0	0	1
x_7	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$
x_3	0	0	1	0	1
x_4	0	0	0	1	1

Iteration 0

1. Initialisierung
   - Setze $P = P_0$
   - Da der Ursprung $\bar{x} = (0,0,0,0)$ zulässig für P_0 ⇒ setze $\bar{z} = 0$
   - Löse LP-Relaxierung Q_0 von P_0 $\boxed{\bar{z} = 0, \bar{x} = (0,0,0,0)}$

(4)	x_6	x_5	x_8	x_9	
	$\frac{50}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{125}{7}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{248}{7}$
x_2	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
x_1	1	0	0	0	1
x_7	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$
x_3	0	0	1	0	1
x_4	0	0	0	1	1

Endtableau aus Aufgabe gegeben

Optimaler Punkt von Q_0 ist $x^*_{Q_0} = (1, \frac{2}{7}, 1, 1)$ nicht ganzzahlig mit $z^*_{Q_0} = \frac{248}{7} > 0 = \bar{z}$, setze Liste $= [(Q_0, (1; \frac{2}{7}; 1, 1), \frac{248}{7})]$

2. Stoppregel: nicht erfüllt $\boxed{\bar{z} = 0, \bar{x} = (0,0,0,0)}$
3. Knotenwahl: Wähle Q_0 ⇒ Liste $= \emptyset$ $\boxed{\bar{z} = 0, \bar{x} = (0,0,0,0)}$
4. Verzweigen: x_2 ist nicht ganzzahlig
   $0 \leq \frac{2}{7} = x_2 \leq 1$ $\boxed{\bar{z} = 0, \bar{x} = (0,0,0,0)}$

5. Ausloten

- Löse LP-Relaxierung Q_1 von P_1

$\rightarrow$ Warmstart: Hinzunahme von $x_2 \leq 0$ mit $x_2 + s_1 = \lfloor x_2 \rfloor$ $\Leftrightarrow$ $s_1 = 0 - x_2$

Um den Simplex (bzw. den dualen Simplex) nicht jedes Mal erneut ausführen zu müssen, wenden wir sog. Warmstarts an. Dabei wird die hinzuzunehmende Nebenbedingung durch eine Schlupfvariable in eine Gleichung überführt und mithilfe der Nichtbasisvariablen ausgedrückt. Die (in Gleichungsform transformierte) hinzuzunehmende Nebenbedingung lässt sich damit im Tableau als zusätzliche Zeile berücksichtigen und es kann mit dem dualen Simplex weitergerechnet werden.

(5)	x_6	x_5	x_8	x_9	
	$\frac{50}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{125}{7}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{248}{7}$
x_2	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
x_1	1	0	0	0	1
x_7	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$
x_3	0	0	1	0	1
x_4	0	0	0	1	1
s_1	$\frac{4}{7}$	$\boxed{-\frac{1}{7}}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$

(6)	x_6	s_1	x_8	x_9	
	10	5	20	4	34
x_2	0	1	0	0	0
x_1	1	0	0	0	1
x_7	0	-1	0	0	1
x_3	0	0	1	0	1
x_4	0	0	0	1	1
x_5	-4	-7	-3	-1	2

Optimaler Punkt $x^*_{Q_1} = (1,0,1,1)$ ist ganzzahlig

mit $z^*_{Q_1} = 34 > 0 = \bar{z}$ $\boxed{\bar{z} = 0,\ \bar{x} = (0,0,0,0)}$

P_1 kann ausgelotet werden

$\longrightarrow$ Update: $\bar{x} = (1,0,1,1)$, $\bar{z} = 34$

$\boxed{\bar{z} = 34,\ \bar{x} = (1,0,1,1)}$

- Löse LP-Relaxierung Q_2 von P_2

$\rightarrow$ Warmstart: Hinzunahme von $x_2 \geq 1$ mit $x_2 - s_2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $s_2 = -1 + x_2$

(7)	x_6	x_5	x_8	x_9	
	$\frac{50}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{125}{7}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{248}{7}$
x_2	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
x_1	1	0	0	0	1
x_7	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$
x_3	0	0	1	0	1
x_4	0	0	0	1	1
s_2	$\boxed{-\frac{4}{7}}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{7}$

(8)	s_2	x_5	x_8	x_9	
	$\frac{25}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{53}{2}$
x_2	-1	0	0	0	1
x_1	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	$-\frac{1}{4}$
x_7	1	0	0	0	0
x_3	0	0	1	0	1
x_4	0	0	0	1	1
x_6	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

(9)	s_2	x_5	x_8	x_1	
	23	4	8	6	25
x_2	-1	0	0	0	1
x_9	-7	-1	3	-4	1
x_7	1	0	0	0	0
x_3	0	0	1	0	1
x_4	7	1	-3	4	0
x_6	0	0	0	1	1

Optimaler Punkt $x^*_{Q_2} = (0,1,1,0)$ ist ganzzahlig

mit $z^*_{Q_2} = 25 < 34 = \overline{z}$ $\boxed{\overline{z} = 34,\ \overline{x} = (1,0,1,1)}$

P_2 kann ausgelotet werden $\Rightarrow$ Liste $= \emptyset$

Iteration 1

2. Stoppregel: erfüllt $\boxed{\overline{z} = 34,\ \overline{x} = (1,0,1,1)}$

Als Gesamtergebnis lässt sich der optimale Punkt aus P_1 angeben

$\overline{x} = (x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 1)$ mit $\overline{z} = z^* = 34$.

---

nächstes Tutorium:

- Schnittebenenverfahren von Gomory
- Heuristik (Verfahren des nächsten Nachbarn)
- Hausaufgabe: LP-Relaxierung rechnen

diese Woche Online-Test:

- Graphische Lösung + Theorie Zulässigkeit (2/8 Aufgaben)
- Modellierung (5/8 Aufgaben)
- Komplexität (1/8 Aufgaben)