Modellierung von nichtlinearen Optimierungsproblemen

→ gleich wie bei linearer Optimierung

1. Entscheidungsvariablen benennen/bestimmen
   ↳ Index nicht vergessen

2. Mathematisches Problem / Optimierungsproblem

   2.1 max/min Funktion aufstellen

   2.2 Nebenbedingungen aufstellen
   ↳ Wertebereiche der Entscheidungsvariablen beachten

kann man tauschen

• Eigenwerte

- Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen
  ↳ $\det(D^2 f(x) - \lambda I)$ ⇝ Faktorisierung, pq-Formel, Mitternachtsformel
- Lösungen für λ sind Eigenwerte
- Allgemein haben symmetrische reelle Matrizen (Hessematrix) die Eigenschaft, dass ihre Eigenwerte allesamt reell sind
- bei allgemein (quadratischen) Matrizen kann man nicht davon ausgehen

  → Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

• kritischer Punkt

Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.
Dann heißt $\bar{x} \in \mathbb{R}$ kritischer Punkt von f, falls der Gradient von f an $\bar{x}$ verschwindet $\Rightarrow$ d.h. es gilt $\nabla f(\bar{x}) = 0$

· Punkt testen (ob kritische Punkt)

1. Gradient $\nabla f_i(x_1,x_2)$ bestimmen

2. einsetzen von gegebenen Punkt (x_1,x_2) in Gradient

3. Wenn $\nabla f_i(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow (x_1,x_2)$ kritische Punkt von f_i

· Charakteristika kritischer Punkte

- Hessematrix $D^2 f(x_1,x_2)$ bestimmen (2. Ableitung)
- Punkt einsetzen
- Eigenwerte der Hessematrix bestimmen (Vorzeichen)

→ alle Eigenwerte positiv ⟶ positiv definit + konvex
↳ lokaler Minimalpunkt

→ alle Eigenwerte negativ → negativ definit + konkav
↳ lokaler Maximalpunkt

→ Eigenwerte positiv & negativ → indefinit + weder konkav noch konvex
↳ Sattelpunkt

Skizzen:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{f(x,y)}{dx} \\ \frac{f(x,y)}{dy} \end{pmatrix} \qquad D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{f(x,y)}{dx}}{dx} & \frac{\frac{f(x,y)}{dy}}{dx} \\ \frac{\frac{f(x,y)}{dx}}{dy} & \frac{\frac{f(x,y)}{dy}}{dy} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1

Es sollen 5000 m^3 einer Ware innerhalb eines Planungszeitraumes vom Produzenten zum Kunden gebracht werden. Die Ware wird in gleichen quaderförmigen Behältern der Höhe x_1, Breite x_2 und Länge x_3 (in m) transportiert, deren Volumen höchstens 1 m^3 ist und die beim Kunden verbleiben. Aus Transportgründen müssen Höhe, Breite und Länge mindestens 0.1 m betragen und die Breite und die Länge ein Verhältnis von 1 zu 2 erfüllen. Das Material für Boden und die vier Seiten der Behälter kostet 4 € pro m^2. Die Deckel können aus einem Material hergestellt werden, das 0.50 € pro m^2 kostet, von dem im Planungszeitraum aber nur 6500 m^2 erhältlich sind. Die Frachtkosten betragen 50 € für jeden Behälter.

Wie sind die Behälter zu bemessen, um die Gesamtkosten möglichst gering zu halten? Formulieren Sie dazu ein nichtlineares Optimierungsproblem. Verwenden Sie für die Höhe, Breite und Länge je eine Entscheidungsvariable.

A1) 1. Entscheidungsvariablen

x_1, x_2, x_3 – Höhe, Breite und Länge eines Behälters

2. Optimierungsproblem aufstellen

⇝ Nebenbedingungen:

Volumenbegrenzung: $x_1 x_2 x_3 \leq 1$

Mindestmaß: $x_1, x_2, x_3 \geq 0.1$

Verhältnis Breite-Länge: $x_2 = 0.5 x_3$

Anzahl Behälter: $n = 5000 / x_1 x_2 x_3$

Gesamtkosten: $50n + 4n(2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3) + 0.5n x_2 x_3$

Kapazitätsgrenze Deckel: $n x_2 x_3 \leq 6500$

Einsetzen von n

$$P: \min \frac{250.000}{x_1 x_2 x_3} + \frac{22.500}{x_1} + \frac{40.000}{x_2} + \frac{40.000}{x_3}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 x_2 x_3 && \leq 1 \\ & x_2 - 0.5 x_3 && = 0 \\ & \frac{5000}{x_1} && \leq 6500 \\ & x_1, x_2, x_3 && \geq 0.1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Ein Unternehmen fertigt zwei Produkte P_1 und P_2, in die u.a. die Einsatzfaktoren R_1 und R_2 eingehen. Folgende Kostenfunktionen wurden für P_1 bzw. P_2 in Abhängigkeit der zugehörigen Mengen x_1 bzw. x_2 ermittelt:

$$K_1(x_1) = 80 + 6\sqrt{4x_1}$$
$$K_2(x_2) = 50 + 3x_2$$

Aufgrund einer Marktanalyse erhielt man weiterhin die den Produkten zugehörigen Preis-Absatz- Funktionen:

$$p_1(x_1) = 12 - \sqrt{5x_1}$$
$$p_2(x_2) = 10 - 2\sqrt[3]{3x_2}$$

Die Produktionsfunktionen von P_1 und P_2 für die Einsatzfaktoren R_1 bzw. R_2 in Abhängigkeit der dafür eingesetzten Mengen r_1 bzw. r_2 lauten wie folgt:

$$x_1 = \min\{\sqrt{9(r_1-3)} - 1, \tfrac{1}{3}r_2\}$$
$$x_2 = \min\{r_1, 4\sqrt{r_2}\}$$

$x_2 \leq r_1 \quad x_2 \leq 4\sqrt{r_2}$

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass von R_1 bzw. R_2 höchstens 100 Mengeneinheiten jeweils zur Verfügung stehen. Das Unternehmen ist an einem Produktionsprogramm mit möglichst hohem Deckungsbeitrag interessiert. Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Optimierungsproblem auf.

$\max\; p_1(x_1) - K_1(x_1) + p_2(x_2) - K_2(x_2)$

A2) 1. Entscheidungsvariablen

x_1, x_2 – Menge von Produkt 1/2

2. Optimierungsproblem aufstellen

→ Zielfunktion:

Deckungsbeitrag für Produkt 1:

$DB_1(x_1) = p_1(x_1) - K_1(x_1) = (12-\sqrt{5x_1})x_1 - 80 - 6\sqrt{4x_1}$

Deckungsbeitrag für Produkt 2:

$DB_2(x_2) = p_2(x_2) - K_2(x_2) = (10-2\sqrt[3]{3x_2})x_2 - 50 - 3x_2$

Gesamtdeckungsbeitrag: $DB_1(x_1) + DB_2(x_2)$

→ Nebenbedingungen:

Aus $x_1 = \min\{\sqrt{9(r_1-3)} - 1, \frac{1}{3}r_2)$ kann man 2 Nebenbe–

dingungen basteln: $x_1 \le \sqrt{9(r_1-3)} - 1$ und $x_1 \le \frac{1}{3} r_2^2$

Individueller Zusammenhang zwischen x_1 und r_1

$$x_1 \le \sqrt{9(r_1-3)} - 1 \iff \frac{x_1+1}{3} \le \sqrt{r_1-3} \iff r_1 \ge \left(\frac{x_1+1}{3}\right)^2 + 3$$

Individueller Zusammenhang zwischen x_2 und r_1

$$x_2 \le r_1 \iff r_1 \ge x_2$$

$\Rightarrow$ Gesamtzusammenhang zwischen x_1, x_2 und r_1:

$$\left(\frac{x_1+1}{3}\right)^2 + 3 + x_2 \le 100 \iff \left(\frac{x_1+1}{3}\right)^2 + x_2 \le 97$$

Individueller Zusammenhang zwischen x_1 und r_2

$$x_1 \le \frac{1}{3} r_2 \iff r_2 \ge 3x_1$$

Individueller Zusammenhang zwischen x_2 und r_2

$$x_2 \le 4\sqrt{r_2} \iff r_2 \ge \frac{1}{16} x_2^2$$

$\Rightarrow$ Gesamtzusammenhang zwischen x_1, x_2 und r_2:

$$3x_1 + \frac{1}{16} x_2^2 \le 100$$

Optimierungsproblem:

$$P: \max\ (12-\sqrt{5x_1})x_1 - 80 - 6\sqrt{4x_1} + (10 - 2\sqrt[3]{3x_2})x_2 - 50 - 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \left(\frac{x_1+1}{3}\right)^2 + x_2 && \le 97 \\ & 3x_1 + \frac{1}{16} x_2 && \le 100 \\ & x_1, x_2 && \ge 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^4 - x_1 x_2$.

a) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $D^2 f(x)$ von f.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von $D^2 f(x)$.

c) Zeigen Sie, dass f nicht konvex ist.

d) Ist f konkav?

A3) a) $\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$

$D^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\det(D^2 f(x_1,x_2) - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$\det \begin{pmatrix} 12x_1^2 - \lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

$= (12x_1^2 - \lambda)(-\lambda) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 12x_1^2\lambda - 1 \overset{!}{=} 0$

$\longrightarrow \lambda_1 = 6x_1^2 + \sqrt{36x_1^4 + 1} \quad > 0 \qquad$ (pq-Formel)

$\lambda_2 = 6x_1^2 - \underbrace{\sqrt{36x_1^4 + 1}}_{> 6x_1^2} \quad < 0 \qquad \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$

c) Da die Vorzeichen der Eigenwerte sowohl positiv, als auch negativ sind, kann f nicht konvex sein.

d) Da die Vorzeichen der Eigenwerte sowohl positiv, als auch negativ sind, kann f nicht konkav sein.

$-f$ konvex $\Leftrightarrow$ f konkav

Aufgabe 4

Gegeben seien die folgenden reellwertigen Funktionen $f_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 5$:

$$f_1(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2x_2^2 + x_2 \qquad f_2(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2x_2^2 + x_1^2)$$

$$f_3(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2x_2^2 + x_1 + x_2 \qquad f_4(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2)$$

$$f_5(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) - x_1$$

Für welche dieser Funktionen ist der Punkt $(0, 0)$ ein kritischer Punkt?

A4) Berechne Gradienten der Funktionen $f_1 - f_5$

$$\nabla f_1(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 + 2x_1 \\ 2x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_3(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 + 1 \\ x_1^2 x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_4(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 + x_1 \\ x_1^2 x_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_5(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \cos x_2 - 1 \\ -\sin x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $(x_1,x_2) = (0,0)$

$$\nabla f_2(0,0) = \nabla f_4(0,0) = \nabla f_5(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_3(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(0,0)$ kritischer Punkt von f_2, f_4 und f_5.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + x^2 - 6xy + y^2 + x + 4y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und jeweils deren Charakteristika (lokaler Maximalpunkt, lokaler Minimalpunkt, Sattelpunkt).

A5) Gradient und Hessematrix von f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x - 6y + 1 \\ -6x + 2y + 4 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte berechnen $\nabla f(x,y) \overset{!}{=} 0$

$$3x^2 + 2x - 6y + 1 = 0$$

$$-6x + 2y + 4 = 0$$

ausrechnen

$$\Rightarrow y = -2 + 3x$$

einsetzen

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 6(-2+3x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{13}{3} = 0$$

Faktorisieren

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x - \frac{13}{3}\right) = 0$$

$$x \cdot x + x \cdot \left(-\frac{13}{3}\right) + (-1) \cdot x + (-1)\left(-\frac{13}{3}\right)$$
$$= x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{3}{3}x + \frac{13}{3}$$
$$= x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{13}{3}$$

⇝ sonst pq-Formel

$$\Rightarrow x \in \left\{1, \frac{13}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) = \left(\frac{13}{3}, 11\right), \quad (x_2, y_2) = (1, 1)$$

Prüfe Charakteristika von (x_1, y_1) und (x_2, y_2):

$$D^2 f\left(\frac{13}{3}, 11\right) = \begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte } 15 \pm \underbrace{\sqrt{205}}_{< 15 = \sqrt{225}}$$

Da beide Eigenwerte positiv sind, ist (x_1, y_1) ein lokaler Minimalpunkt.

$$D^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\quad 5 \pm \underbrace{\sqrt{45}}_{>5=\sqrt{25}}$

Da ein Eigenwert positiv und einer negativ ist, ist (x_2, y_2) ein Sattelpunkt.

Aufgabe 6

Gegeben seien die beiden nichtlinearen Optimierungsprobleme

$$P_1: \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

und

$$P_2: \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Zeigen Sie, dass die globalen Minimalpunkte von P_1 und P_2 übereinstimmen und für die optimalen Zielfunktionswerte v_1^* von P_1 bzw. v_2^* von P_2

$$\sqrt{v_1^*} = v_2^*$$

gilt. Gehen Sie dabei davon aus, dass P_1 und P_2 globale Minimalpunkte besitzen.

Zuerst machen wir folgende Beobachtungen:

- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0$$

D.h. die Zielfunktionswerte von P_1 und P_2 sind für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nichtnegativ.

jedes $x_i^2 \geq 0$ und Summe über x_i^2 ist dann auch ≥ 0

$\sqrt{a} \geq 0$, wenn $a \geq 0$

- Für 2 nichtnegative relle Zahlen a, b mit $a \geq b$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$(**) \quad 0 \le a \le b \iff 0 \le a^2 \le b^2$$

$$(***) \quad 0 \le a \le b \iff 0 \le \sqrt{a} \le \sqrt{b}$$

Sei $b = a + \varepsilon$, dann gilt: $(\varepsilon \ge 0)$

$$a^2 \le b^2 = (a+\varepsilon)^2 = a^2 + \underbrace{2a\varepsilon + \varepsilon^2}_{\ge 0}$$

Mit derselben Argumentation kann man $(***)$ zeigen.

1. Übereinstimmung der globalen Minimalpunkte von P_1 und P_2

Sei x^* globaler Punkt von P_1. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\overset{(*)\text{und}(***)}{\Longrightarrow} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\overset{(*)\text{und}(**)}{\Longleftarrow}$$

Wir haben also gezeigt, dass x^* auch Minimalpunkt von P_2 ist.

- Dass das Ziehen der Wurzel (im reellen Fall) definiert ist und keinen Einfluss auf das Ungleichungszeichen hat, liegt an der Nichtnegativität der Zielfunktionswerte (siehe $(*)$) und der streng monton wachsenden Wurzelfunktion (siehe $(***)$).
- Dass das Quadrieren keinen Einfluss auf das Ungleichungszeichen hat, liegt an der Nichtnegativität der Zielfunktionswerte und der streng monton wachsenden Quadratfunktion (siehe $(**)$).

2. Beziehung der Optimalwerte $\sqrt{v_1^*} = v_2^*$

Sei x^* globaler Minimalpunkt von P_1. Dann gilt:

$$v_1^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2$$

$$\Leftrightarrow v_1^* = \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2$$

Wurzel ziehen auf beiden Seiten

$$\Leftrightarrow \sqrt{v_1^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = v_2^*$$

$$\Rightarrow \sqrt{v_1^*} = v_2^*$$

---

nächstes Tutorium:

- Gradientenverfahren
- Newtonverfahren
- Konvexität & Konkavität

---

diese Woche Online-Test:

- ganzzahlige Optimierung (2/9)
- B & B - Verfahren (3/9)
- Gomory - Schnittebenenverfahren (2/9)
- Greedy - Heuristik (1/9)
- Verfahren des nächsten Nachbarn (1/9)