NLO: Optimalitätsbedingungen im restringierten Fall

→ immer Minimierung

$$
\begin{aligned}
P:\ \min\ & f(x) \\
\text{s.t.}\ & g_i(x) \leq 0 \quad i \in I \quad \text{Ungleichungsrestriktionen} \\
& h_j(x) = 0 \quad j \in J \quad \text{Gleichungsrestriktionen}
\end{aligned}
$$

konvexes Optimierungsproblem

P ist ein konvexes Optimierungsproblem, wenn die Zielfunktion f und die Funktionen g_i $(i \in I)$ konvex und die Funktionen h_j $(j \in J)$ linear sind.

$$
\begin{array}{lrcrcll}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & & \longrightarrow \text{linear} \Rightarrow \text{konvex} \\
\text{s.t.} & (x_1-1)^2 & + & x_2^2 & \leq & 4 & \longrightarrow \text{konvex} \\
& & & x_2 & \geq & 0 & \longrightarrow \text{linear} \Rightarrow \text{konvex}
\end{array}
$$

Gemäß C^2-Charakterisierung für Konvexität ist f genau dann konvex, wenn $D^2 f(x)$ positiv semidefinit ist.

KKT - Bedingungen

Falls $\bar{x}$ ein lokaler Minimalpunkt von P ist, und falls P um $\bar{x}$ linearisierbar ist, dann existieren $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^n$, so dass $\bar{x}, \bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ das sogenannte KKT (Karush-Kuhn-Tucker)-System von P lösen

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) = 0 \qquad (1)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i \in I \quad (2)$$

$g_i(x) = 0$
oder
$g_i(x) < 0$

$$g_i(x) \leq 0 \quad i \in I \quad (3)$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \quad i \in I \quad (4)$$

$$h_j(x) = 0 \quad j \in J \quad (5)$$

Auswendig wissen!

immer erst in richtige Form bringen:
$x_1 \geq 0 \Rightarrow -x_1 \leq 0$

$\Rightarrow$ P sei konvex und $\bar{x}$ sei KKT-Punkt von P. Dann ist $\bar{x}$ globaler Minimalpunkt von P.

KKT - Bedingungen lösen: Aktive Indexmenge

Es seien Ungleichungsrestriktionen $g_i(x) \leq 0$, $i \in I = \{1, \dots, p\}$ gegeben. Sie können an einem Punkt $\bar{x}$ aktiv ($g_i(\bar{x}) = 0$) oder inaktiv ($g_i(\bar{x}) < 0$) sein.

Zu einem zulässigen Punkt $\bar{x}$ heißt $I_0(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$ Menge der aktiven Indizes.

$\Rightarrow$ in (4) schauen welche $\lambda_i = 0$ sind

Lineare Unabhängigkeitsbedingung (LUB)

- An $\bar{x} \in M$ gilt die LUB, falls die Vektoren $\nabla g_i(x)$ (mit $i \in I_0(\bar{x})$) und $h_j(x)$ (mit $j \in J$) linear unabhängig sind.
- Falls an $\bar{x} \in M$ die LUB gilt, dann ist P um $\bar{x}$ linearisierbar.

  $\Rightarrow$ Sonst seperates Berechnen der Punkte, an denen LUB verletzt wurde. Zielfunktionswerte vergleichen

Satz von Weierstraß

P besitzt mindestens einen globalen Minimalpunkt (Maximalpunkt), wenn f stetig ist und die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \mid g_i(x) \leq 0\}$ nichtleer und kompakt ist.

Aufgabe 1

Ein Konsument besitze eine Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, die seinen Nutzen in Abhängigkeit der konsumierten Einheiten x_1 bzw. x_2 der beliebig teilbaren Güter 1 und 2 angibt. Der Preis von Gut i sei p_i Geldeinheiten mit $p_i > 0$ für $i = 1, 2$. Ferner stehen dem Konsumenten $B > 0$ Geldeinheiten zur Verfügung.

a) Stellen Sie das Nutzenmaximierungsproblem des Konsumenten als restringiertes Minimierungsproblem (Minimierung der negativen Nutzenfunktion u) dar für den Fall, dass

 i) die Kosten der gewählten Mengen x_i von Gut i für $i = 1, 2$ in der Budgetmenge liegen,

 ii) genau auf der Budgetgeraden konsumiert wird,

 iii) genau auf der Budgetgeraden konsumiert wird und von Gut 1 mindestens dreimal so viele Einheiten konsumiert werden wie von Gut 2.

A1a) i)

$$\begin{aligned} \min \quad & -u(x_1, x_2) = -x_1 \cdot x_2 \\ \text{s.t.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq B \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \min \quad & -u(x_1, x_2) = -x_1 \cdot x_2 \\ \text{s.t.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 = B \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \min \quad & -u(x_1, x_2) = -x_1 \cdot x_2 \\ \text{s.t.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 = B \\ & 3x_2 \leq x_1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Wiederholen Sie aus Ihren Mathematik-Vorlesungen die Definitionen für die Beschränktheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit einer Menge $\mathbb{M}$.

A1b) 1. Eine Menge $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls ein $R \geq 0$ existiert mit $\|x\| \leq R$ für alle $x \in \mathbb{M}$.

⇝ Alle Punkte liegen in Box/Kugel mit Radius R

2. Eine Menge $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls für alle Folgen $(x^k) \subseteq \mathbb{M}$ mit $\lim_k x^k = x^* \in \mathbb{M}$ auch $x^* \in \mathbb{M}$ gilt.

⇝ Rand gehört auch zur Menge

$\Rightarrow$ Resultat

Die Menge $\mathbb{M} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, wenn die Funktionen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in 1, \dots, m$ stetig sind. Die Stetigkeit der Funktionen g_i ist also ein hinreichendes Kriterium für die Abgeschlossenheit von $\mathbb{M}$.

3. Eine beschränkte und abgeschlossene Menge heißt kompakt.

c) Sind die Probleme aus den Teilen a) i)-iii) lösbar?

i) Die zulässige Menge

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq B ; x_1, x_2 \geq 0\}$$

ist wegen $(0,0) \in \mathbb{M}$ nichtleer.

Setze $g_1(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - B$, $g_2(x) = -x_1$ und $g_3(x) = -x_2$.
Es gilt $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(x) \leq 0 ; i \in 1, 2, 3\}$ mit stetigen Funktionen g_i für $i = 1, 2, 3$. Folglich ist $\mathbb{M}$ abgeschlossen.

Es gilt mit $x_2 \geq 0$; $p_1, p_2 > 0$

$$p_1 x_1 + \underbrace{p_2 x_2}_{\geq 0} \leq B \implies p_1 x_1 \leq B \iff x_1 \leq \frac{B}{p_1} .$$

Selbes umgekehrt für x_2.

Somit gilt für die zulässige Menge

$$\mathbb{M} \subseteq [0, \tfrac{B}{p_1}] \times [0, \tfrac{B}{p_2}] \qquad (p_1, p_2 > 0 \ , B \geq 0).$$

Damit ist $\mathbb{M}$ beschränkt.

Zusammen gilt, dass die zulässige Menge nichtleer und kompakt ist.

Nach dem Satz von Weierstraß ist das Problem damit lösbar.

ii) Die zulässige Menge

$$\mathbb{M} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 = B \ ; \ x_1, x_2 \geq 0 \}$$

ist wegen $(0, \frac{B}{p_2}) \in \mathbb{M}$ nichtleer.

Setze $g_1(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - B$, $g_2(x) = -p_1 x_1 - p_2 x_2 + B$, $g_3(x) = -x_1$ und $g_4(x) = -x_2$. Es gilt $\mathbb{M} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(x) \leq 0 \ ; i \in 1,2,3,4 \}$ mit stetigen Funktionen g_i für $i = 1,2,3,4$. Folglich ist $\mathbb{M}$ abgeschlossen.

$\mathbb{M}$ ist analog zu i) beschränkt und somit kompakt.

iii) Die zulässige Menge

$$\mathbb{M} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 = B \ ; \ 3x_2 \leq x_1 ; \ x_1, x_2 \geq 0 \}$$

ist wegen $(\frac{B}{p_1}, 0) \in \mathbb{M}$ nichtleer.

Setze $g_1(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - B$, $g_2(x) = -p_1 x_1 - p_2 x_2 + B$, $g_3(x) = 3x_2 - x_1$

$g_4(x) = -x_1$ und $g_5(x) = -x_2$. Es gilt $\mathbb{M} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(x) \leq 0 \ ; i \in 1,2,3,4,5 \}$

mit stetigen Funktionen g_i für $i=1,2,3,4,5$. Folglich ist $\mathbb{M}$ abgeschlossen.

$\mathbb{M}$ ist analog zu i) beschränkt und somit kompakt.

Die Aufgabe soll Bedingungen und Anwendung für den Satz von Weierstraß klar machen.

Aufgabe 2

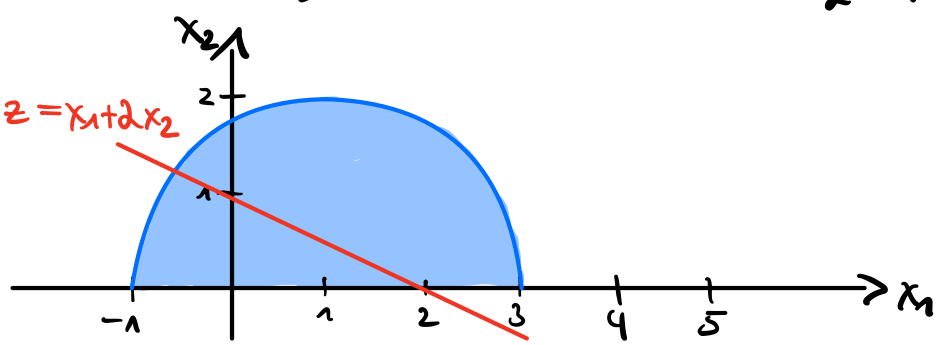
Lösen Sie das nichtlineare Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{s.t.} & (x_1-1)^2 & + & x_2^2 & \leq & 4 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) grafisch,

A2a) Die Nebenbedingungen stellen die Halbkreisfläche mit Radius $\sqrt{4}=2$ um den Punkt $(1,0)$ dar.

$(x_1-1)^2+x_2^2 \leq 4$ und $x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq \sqrt{2x_1-x^2+3}$



Der optimale Punkt lautet approximativ

$x_1^* \approx 1.894$ $\quad x_2^* \approx 1.789$ $\quad$ mit $z^* = 5.427$

b) mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen.

Zuerst muss man das Problem in die richtige Form bringen.

→ Minimalproblem, $\leq$ Bedingungen 0

$$\min \; -x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t.} \quad (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

Aufgrund der linearen Zielfunktion und der aus Teil a) offensichtlichen konvexen zulässigen Menge liegt ein nichtlineares konvexes Optimierungsproblem vor.

KKT-Bedingungen:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0,\ i \in I \\ g_i(x) &\leq 0,\ i \in I \\ \lambda_i g_i(x) &= 0,\ i \in I \\ h_j(x) &= 0,\ j \in J \end{aligned}$$

1. $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2(x_1-1) \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -1 + 2\lambda_1(x_1-1) &= 0 \\ -2 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. $\lambda_i \geq 0 \quad , i \in \{1,2\}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0,\ i \in I \\ g_i(x) &\leq 0,\ i \in I \\ \lambda_i g_i(x) &= 0,\ i \in I \\ h_j(x) &= 0,\ j \in J \end{aligned}$$

3. $g_i(x) \leq 0, i \in \{1,2\}$

$$\begin{aligned} (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

4. $\lambda_i g_i(x) = 0 \quad , i \in \{1,2\}$

$$\begin{aligned} \lambda_1\left((x_1-1)^2 + x_2^2 - 4\right) &= 0 \\ \lambda_2 \cdot (-x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Lösen mit Fallunterscheidung der aktiven Indexmenge.

Fall 1: $I_0(x) = \emptyset$ $\longrightarrow$ $g_1(x) < 0$ und $g_2(x) < 0$

- Aus 4. folgt $\lambda_1, \lambda_2 = 0$
- Eingesetzt in 1. folgt $-1 = 0$ und $-2 = 0$. ↯

$\Rightarrow$ kein KKT-Punkt

Fall 2: $I_0(x) = \{1\}$ $\longrightarrow$ $g_1(x) = 0$ und $g_2(x) < 0$

- Aus 4. folgt

$$\begin{aligned} (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Einsetzen von $\lambda_2 = 0$ in Bed. 1.

$$\begin{aligned} -1 + 2\lambda_1(x_1-1) &= 0 \\ -2 + 2\lambda_1 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2x_1-2} \\ x_2 &= \frac{1}{\lambda_1} \end{aligned}$$

und somit $x_2 = 2x_1 - 2$

- Einsetzen von $x_2 = 2x_1 - 2$ in Bed. 1

$$5x_1^2 + 10x_1 + 1 = 0$$

$$x_{1_{1,2}} = 1 \pm \sqrt{\frac{4}{5}} \qquad x_{2_{1,2}} = \pm 2\sqrt{\frac{4}{5}} \quad \longrightarrow x_2 = 2\sqrt{\frac{4}{5}}$$

- Wegen Bed. 3 muss $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{4}{5}}$ und $x_2 = 2\sqrt{\frac{4}{5}}$
- Bed. 2 erfüllt, da $\lambda_1 = \frac{1}{x_1} \geq 0$ ✓

$\Rightarrow$ Somit ist $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{4}{5}}$ und $x_2 = 2\sqrt{\frac{4}{5}}$ ein KKT-Punkt und gemäß dem Satz von Weierstraß globaler Minimalpunkt.

Für das Ausgangsproblem ist $\left(1+\sqrt{\frac{4}{5}}, 2\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$ optimaler Punkt.

Aufgabe 3

Gegeben sei das nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} P: \quad \min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 - 24x_1 + x_2^2 - 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 16 \\ & x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Ist P ein konvexes Optimierungsproblem? Begründen Sie Ihre Antwort.

A3a) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 24 \\ 2x_2 - 10 \end{pmatrix} \qquad D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \succeq 0$

f ist konvex, da $D^2 f(x)$ positiv semidefinit und alle Nebenbedingungen konvex (linear) sind.

b) Formulieren Sie die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für das Optimierungsproblem und lösen Sie es.

b) Wir sehen
$g_1(x) = x_1 - 16 \qquad g_3(x) = -x_1$
$g_2(x) = x_2 - 7 \qquad g_4(x) = -x_2$

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 - 24x_1 + x_2^2 - 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 16 \\ & x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0,\ i \in I \\ g_i(x) &\leq 0,\ i \in I \\ \lambda_i g_i(x) &= 0,\ i \in I \\ h_j(x) &= 0,\ j \in J \end{aligned}$$

1. $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i g_i(x) : \begin{pmatrix} 2x_1 - 24 + \lambda_1 - \lambda_3 \\ 2x_2 - 10 + \lambda_2 - \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$
2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$
3. $x_1 - 16 \leq 0, \ x_2 - 7 \leq 0, \ -x_1 \leq 0, \ -x_2 \leq 0$
4. $\lambda_1(x_1 - 16) = 0, \ \lambda_2(x_2 - 7) = 0, \ -\lambda_3 x_1 = 0, \ -\lambda_4 x_2 = 0$
5. —

Lösen mit Fallunterscheidung der aktiven Indexmenge.

Fall 1: $I_0(x) = \emptyset \quad \to g_i(x) < 0 \quad \forall i \in I$

- Aus 4. folgt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$

- Eingesetzt aus 1. folgt $x_1 = 12,\ x_2 = 5$.
- Prüfe Bed. 3

$$-4 \leq 0, \quad -2 \leq 0, \quad -12 \leq 0, \quad -5 \leq 0 \quad \checkmark$$

Da alle KKT-Bedingungen erfüllt sind, haben wir einen KKT-Punkt gefunden.

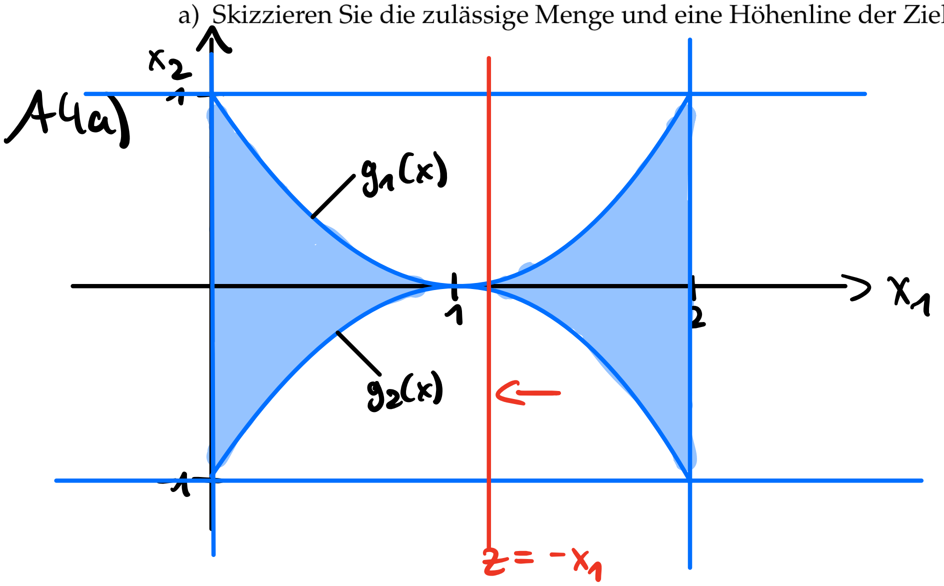
$$f(12,5) = 12^2 - 24 \cdot 12 + 5^2 - 50 = -169$$

Aufgabe 4

Betrachten Sie das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 \\ \text{s.t.} & -(x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 + 1 \leq 0 \\ & -(x_1-1)^2 - (x_2+1)^2 + 1 \leq 0 \\ & \quad 0 \leq x_1 \leq 2 \\ & -1 \leq x_2 \leq 1 \end{array}$$

a) Skizzieren Sie die zulässige Menge und eine Höhenline der Zielfunktion.



b) Untersuchen Sie für alle zulässigen Punkte, ob sie jeweils die Lineare-Unabhängigkeitsbedingung erfüllen.

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -(x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 + 1 \leq 0 \\ g_2(x) &= -(x_1-1)^2 - (x_2+1)^2 + 1 \leq 0 \\ g_3(x) &= -x_1 \\ g_4(x) &= x_1 - 2 \\ g_5(x) &= -x_2 - 1 \\ g_6(x) &= x_2 - 1 \end{aligned}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2(x_1-1) \\ -2(x_2-1) \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -2(x_1-1) \\ -2(x_2+1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_6(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Skizze werden die folgenden Möglichkeiten für die Menge der aktiven Indizes ersichtlich:

- $x = (1,0)$ mit $I_0(x) = \{1,2\}$

  $\nabla g_1(x) = (0,2)$, $\nabla g_2(x) = (0,-2)$ sind linear abhangig

  $\Rightarrow$ LUB an $(1,0)$ verletzt.

- $x = (0,1)$ mit $I_0(x) = \{1,3,6\}$

  $\nabla g_1(x) = (2,0)$, $\nabla g_3(x) = (-1,0)$, $\nabla g_6(x) = (0,1)$

  $\nabla g_1(x)$ und $\nabla g_3(x)$ sind linear abhängig

  $\Rightarrow$ LUB an $(0,1)$ verletzt.

- $x = (0,-1)$ mit $I_0(x) = \{2,3,5\}$

  $\nabla g_2(x) = (2,0)$, $\nabla g_3(x) = (-1,0)$, $\nabla g_5(x) = (0,-1)$

  $\nabla g_2(x)$ und $\nabla g_3(x)$ sind linear abhängig

  $\Rightarrow$ LUB an $(0,-1)$ verletzt.

- $x = (2,1)$ mit $I_0(x) = \{1,4,6\}$

  $\nabla g_1(x) = (-2,0)$, $\nabla g_4(x) = (1,0)$, $\nabla g_6(x) = (0,1)$

  $\nabla g_1(x)$ und $\nabla g_4(x)$ sind linear abhängig

  $\Rightarrow$ LUB an $(2,1)$ verletzt.

- $x=(2,-1)$ mit $I_0(x)=\{2,4,5\}$

  $\nabla g_2(x)=(2,0)$, $\nabla g_4(x)=(1,0)$, $\nabla g_5(x)=(0,-1)$

  $\nabla g_2(x)$ und $\nabla g_4(x)$ sind linear abhängig

  $\Rightarrow$ LUB an $(2,-1)$ verletzt.

- An allen weiteren zulässigen Punkten ist entweder keine oder genau eine Restriktion aktiv. Sofern eine Restriktion aktiv ist, ist die LUB in diesem Beispiel immer erfüllt, da der einzige linear abhängige Vektor – der Nullvektor – durch $\nabla g_3(x)$, $\nabla g_4(x)$, $\nabla g_5(x)$, $\nabla g_6(x)$ für kein x angenommen wird und für $\nabla g_1(x)$, $\nabla g_2(x)$ nur im Mittelpunkt des jeweiligen Kreises, der aber selbst nicht zur zulässigen Menge gehört, angenommen wird.

c) Was bedeuten Ihre Ergebnisse aus Teil b) für das Lösen des Problems?

c) Der Satz von Karush-Kuhn-Tucker setzt die Gültigkeit der LUB voraus.
Die Punkte, an denen die LUB verletzt sind, müssen die ZFW separat berechnet und verglichen werden.

Aufgabe 5

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) &= 0 \\
\lambda_i &\geq 0,\ i \in I \\
g_i(x) &\leq 0,\ i \in I \\
\lambda_i g_i(x) &= 0,\ i \in I \\
h_j(x) &= 0,\ j \in J
\end{aligned}
$$

Betrachten Sie das folgende nichtlineare Optimierungsp

$$
\begin{aligned}
P:\quad \min\quad & f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Überprüfen Sie für jeden Punkt der zulässigen Menge, ob er die Lineare Unabhängigkeitsbedingung erfüllt oder nicht.

b) Lösen Sie P mit Hilfe der KKT-Bedingungen. Berechnen Sie alle KKT-Punkte.

Aufgabe 5

a) Setze $g_1(x) := x_1 + x_2 - 2$, $g_2(x) := -x_1$ und $g_3(x) := -x_2$ mit

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und es gilt $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0, g_3(x) \leq 0\}$.

Eine übersichtliche Bearbeitung der Aufgabe ist mittels der Menge der aktiven Indizes $I_0(x)$ (für alle x aus $\mathbb{M}$) möglich.

- $I_0(x) = \emptyset$: Die LUB ist in diesem Fall, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x_1 + x_2 - 2 < 0, \quad -x_1 < 0, \quad -x_2 < 0$$

  erfüllt, da keine der drei Ungleichungen aktiv ist und auch keine Gleichungsrestriktionen in P existieren ($J = \emptyset$).

- $I_0(x) = \{1\}$: Der Vektor $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist linear unabhängig. Somit erfüllen alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad -x_1 < 0, \quad -x_2 < 0$$

  die LUB.

- $I_0(x) = \{2\}$: Der Vektor $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist linear unabhängig. Somit erfüllen alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x_1 + x_2 - 2 < 0, \quad -x_1 = 0, \quad -x_2 < 0$$

  die LUB.

- $I_0(x) = \{3\}$: Der Vektor $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist linear unabhängig. Somit erfüllen alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x_1 + x_2 - 2 < 0, \quad -x_1 < 0, \quad -x_2 = 0$$

  die LUB.

- $I_0(x) = \{1,2\}$: Die Vektoren $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Somit erfüllen alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit

  $$x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad -x_1 = 0, \quad -x_2 < 0$$

  die LUB.

- $I_0(x) = \{1,3\}$: Die Vektoren $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Somit erfüllen alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit

  $$x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad -x_1 < 0, \quad -x_2 = 0$$

  die LUB.

- $I_0(x) = \{2,3\}$: Die Vektoren $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Somit erüllen alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit

  $$x_1 + x_2 - 2 < 0, \quad -x_1 = 0, \quad -x_2 = 0$$

  die LUB.

- $I_0(x) = \{1,2,3\}$: In diesem Fall muss die LUB nicht weiter betrachtet werden, da keine Punkte $x \in \mathbb{M}$ existieren, so dass alle drei Restriktionen aktiv sind, d.h.

  $$\{x \in \mathbb{M} \,|\, x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad -x_1 = 0, \quad -x_2 = 0\} = \emptyset.$$

Damit erfüllen alle zulässigen Punkte von P die LUB.

b) Wir bilden die Funktion

$$f(x,\lambda) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2$$

und die KKT-Bedingungen lauten dann

$$\left.\begin{array}{rcll} 4x_1 - 2x_2 - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 &=& 0, & (1) \\ 4x_2 - 2x_1 - 6 + \lambda_1 - \lambda_3 &=& 0, & (2) \end{array}\right\} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \nabla g_i(x)$$

$|I_0(x)| = 8$

$$\left.\begin{array}{rcll} \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) &=& 0, & (3a) \\ \lambda_2(-x_1) &=& 0, & (3b) \\ \lambda_3(-x_2) &=& 0, & (3c) \end{array}\right\} \lambda \cdot g_i(x) = 0$$

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq& 0, & (4) \;\} \; \lambda_i \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0, -x_1 \leq 0, -x_2 &\leq& 0. & (5) \;\} \; g_i(x) \leq 0 \end{array}$$

Fallunterscheidungen gemäß Menge der aktiven Indizes:

- $I_0(x) = \emptyset$: Es gilt $\lambda_i = 0$ für alle i (wegen der Komplementaritätsbedingungen). Aus (1) und (2) ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & 2x_2 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & = & 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & 2x_2 & = & 4 \\ & & 6x_2 & = & 16 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrcl} 12x_1 & & = & 28 \\ & 6x_2 & = & 16 \end{array}$$

  Der Punkt $(x_1, x_2) = (\frac{7}{3}, \frac{8}{3})$ ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems, verletzt jedoch die erste Restriktion, denn es gilt

$$g_1\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right) = 5 - 2 > 0.$$

  Der Punkt $(\frac{7}{3}, \frac{8}{3})$ ist nicht zulässig.

- $I_0(x) = \{1\}$: Es ist $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aus (3a) folgt $x_1 + x_2 = 2$. In (1) und (2) eingesetzt, erhalten wir $(x_1, x_2) = (\frac{5}{6}, \frac{7}{6})$ sowie $\lambda_1 = 3$. Da die Bedingungen (3)-(5) ebenfalls erfüllt sind, ist $(\frac{5}{6}, \frac{7}{6})$ ein KKT-Punkt.

- $I_0(x) = \{2\}$: Es gilt $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Aus $g_2(x) = 0$ folgt $x_1 = 0$. Einsetzen in (2) liefert

$$4x_2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{2}.$$

  Einsetzen von λ_1, x_1 und x_2 in (1) liefert

$$-3 - 4 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -7 < 0,$$

  im Widerspruch zu $\lambda_2 \geq 0$.

- $I_0(x) = \{3\}$: Es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sowie $g_3(x) = -x_2 = 0$ (also $x_2 = 0$). Aus (1) ergibt sich wegen

$$4x_1 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

  und durch Einsetzen in (2) erhalten wir

$$-2 - 6 - \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = -8 < 0,$$

  im Widerspruch zu $\lambda_3 \geq 0$.

- $I_0(x) = \{1, 2\}$: Wegen $g_2(x) = 0$ folgt $x_1 = 0$ und mit $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$ erhalten wir unmittelbar $x_2 = 2$. Da g_3 als nicht aktiv vorausgesetzt wurde, gilt $\lambda_3 = 0$. Mit (2) folgt nun jedoch

$$4 \cdot 2 - 6 + \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2 < 0,$$

im Widerspruch zu $\lambda_1 \geq 0$.

- $I_0(x) = \{1,3\}$: Aus $x_2 = 0$ folgt wegen $x_1 + x_2 - 2 = 0$, dass $x_1 = 2$ ist. Mit Bedingung (1) erhält man nun

$$4 \cdot 2 - 4 + \lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = -4 < 0,$$

im Widerspruch zu $\lambda_1 \geq 0$.

- $I_0(x) = \{2,3\}$: Aus (3) folgt $x_1 = x_2 = 0$ sowie $\lambda_1 = 0$. Daher ergibt sich aus (1) die Gleichung

$$-4 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -4 < 0$$

im Widerspruch zu $\lambda_2 \geq 0$.

- $I_0(x) = \{1,2,3\}$: Aus (3) erhalten wir sowohl $x_1 = x_2 = 0$ als auch $x_1 + x_2 = 2$. Das ist nicht lösbar.

Aus den 8 möglichen Fällen erhalten wir somit nur den KKT-Punkt $x^* = (\frac{5}{6}, \frac{7}{6})$, welcher auch der einzige globale Minimalpunkt ist, da jeder zulässige Punkt von P nach Teil a) die LUB erfüllt. (Nach dem Satz von KKT muss der globale Minimalpunkt unter den KKT-Punkten sein.) Der optimale Zielfunktionswert ist $z^* = -\frac{49}{6}$.

Online Test:

- Konvexität
- kritische Punkte
- Gradientenverfahren
- Newtonverfahren

nächstes Tutorium:

- Schnittebenenverfahren von Kelley
- Frank-Wolfe Verfahren