Chance Constraints

Erfüllen einer Nebenbedingung zu einer gewissen Chance

statt $y_1 \leq d(\omega)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(y_1 \leq d(\omega)) \geq \alpha$$

Die Restriktion $y_1 \leq d(\omega)$ wird mit Wahrscheinlichkeit α eingehalten.

Aufgabe 1

Gegeben sei das zweistufige stochastische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llrcll} P: & \min & 2x + & \mathbb{E}_\xi[\min \xi(\omega) y(\omega)] & & \\ & \text{s.t.} & y(\omega) & \geq & 1-x & \omega \in \Omega \\ & & y(\omega) & \geq & 0 & \omega \in \Omega \\ & & x & \geq & 0 & \end{array}$$

mit $\xi_1 = 1, p_1 = \frac{3}{4}$ mit $\xi_2 = 3, p_2 = \frac{1}{4}$.

Zeigen oder widerlegen Sie die Ungleichungen $EV \leq WS$ und $EV \leq RP$. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

A1) Unterschied zur letzten Aufgabe:

- Zufall jetzt in Zielfunktion

Vom letzten Blatt:

$$WS = \mathbb{E}_\xi\left[\min_{x \in K_1} z\big(x, \xi(\omega)\big)\right]$$

$$RP = \min_{x \in K_1} \mathbb{E}_\xi\left[z\big(x, \xi(\omega)\big)\right]$$

$$EV = \min_{x \in K_1} z(x, \bar{\xi})$$

Zuerst stellen wir Problem P als SLP dar. Dazu wählen wir $y = y^+$ und fügen eine Schlupfvariable y^- ein.

$$y^+(\omega) \geq 1 - x \Leftrightarrow x + y^+(\omega) \geq 1$$

$$x + y^+(\omega) + y^-(\omega) = 1$$

$$\begin{array}{llrcll} P: & \min & 2x + & \mathbb{E}_\xi[\min \xi(\omega) y(\omega)] & & \\ & \text{s.t.} & y(\omega) & \geq & 1-x & \omega \in \Omega \\ & & y(\omega) & \geq & 0 & \omega \in \Omega \\ & & x & \geq & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llrcll} \Rightarrow \text{SLP}: & \min & 2x + & \mathbb{E}_\xi[\min \xi(\omega) y^+(\omega)] & & \\ & \text{s.t.} & x + & y^+(\omega) + y^-(\omega) & = 1 & \omega \in \Omega \\ & & & y^+(\omega), y^-(\omega) & \geq 0 & \omega \in \Omega \\ & & & x & \geq 0 & \end{array}$$

Erwartungswert der Zufallvariable ξ

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Aufstellen der Gleichung für $z(x, \xi)$.

$\Rightarrow$ Für welche x gilt: $x \in K_1 \cap K_2(\xi)$

$$\begin{array}{lrcrcrcll} SLP: & \min & 2x + \mathbb{E}_\xi[\min \xi(\omega) y^+(\omega)] & & & & & & \\ & \text{s.t.} & x & + & y^+(\omega) & - & y^-(\omega) & = 1 & \omega \in \Omega \\ & & & & & & y^+(\omega), y^-(\omega) & \geq 0 & \omega \in \Omega \\ & & & & & & x & \geq 0 & \end{array}$$

$$K_1 = [0, \infty)$$

$$K_2(\xi) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y^+, y^- \geq 0 : x + y^+ - y^- = 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : y = 1 - x\}$$
$$= \mathbb{R}$$

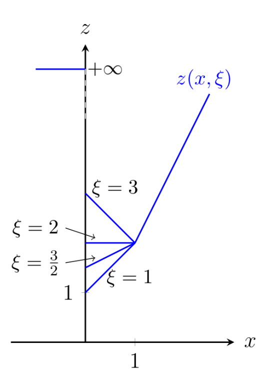
$$K_1 \cap K_2(\xi) = K_1 = [0, \infty)$$

$$z(x, \xi) = \begin{cases} 2x + \min\limits_{y^+, y^- \geq 0} \{\xi y^+ \mid y^+ - y^- = 1 - x\} & \text{für } x \geq 0 \\ +\infty & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x + \min\limits_{y^+ \geq 0} \{\xi y^+ \mid y^+ \geq 1 - x\} & \text{für } x \geq 0 \\ & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 1 \\ 2x + \xi(1 - x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ +\infty & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\bar{\xi} = \frac{3}{2}$$
$$\xi_1 = 1$$
$$\xi_2 = 3$$



Berechnung des Minimums von z bzgl. $x \geq 0$ in Abhängigkeit von ξ

$$\min_{x\geq 0} z(x,\xi) = \begin{cases} 2x^* + \xi(1-x^*) & \text{für } \xi \in [0,2] \quad (x^*=0) \\ 2x^* & \text{für } \xi \in (2,\infty) \quad (x^*=1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \xi & \text{für } \xi \in [0,2] \\ 2 & \text{für } \xi \in (2,\infty) \end{cases} \qquad (*)$$

Berechnung des Erwartungswerts von z bzgl. ξ in Abhängigkeit von x

$$\mathbb{E}_\xi[z(x,\xi)] = \begin{cases} \mathbb{E}_\xi[2x] & \text{für } x > 1 \\ \mathbb{E}_\xi[2x + \xi(1-x)] & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \mathbb{E}_\xi[+\infty] & \text{für } 0 < x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & \text{für } x > 1 \\ 2x + (1-x)\mathbb{E}_\xi[\xi] & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ +\infty & \text{für } 0 < x \end{cases}$$

$$\underset{\mathbb{E}_\xi[\xi]=\frac{3}{2}}{=} \begin{cases} 2x & \text{für } x > 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ +\infty & \text{für } 0 < x \end{cases} \qquad (**)$$

1. Berechnung von EV: $(0 \leq \bar{\xi} \leq 2)$

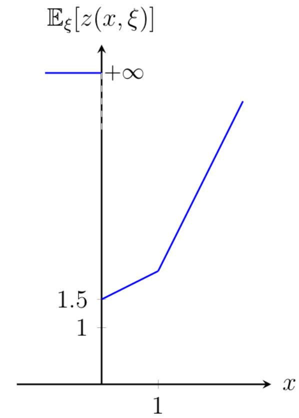
$$\min_{x\geq 0} z(x,\bar{\xi}) \overset{(*)}{=} \bar{\xi} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{6}{4}}}$$

2. Berechnung von WS: $(\xi_1 = 1 \leq 2,\ \xi_2 = 3 > 2)$

$$WS = \mathbb{E}_\xi[z(x,\xi)]$$

$$\overset{(**)}{=} p_1 \cdot \xi_1 + p_2 \cdot 2$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$



3. Berechnung von RP:

$$RP = \min_{x \geq 0} \mathbb{E}_\xi[z(x,\xi)]$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

$$EV = \frac{6}{4} > \frac{5}{4} = WS \quad , \quad EV = \frac{6}{4} \leq \frac{6}{4} = RP$$

Bemerkungen:

1. Das Problem SLP erfüllt nicht die Voraussetzungen der Sätze 8.11 und 8.12 aus dem OR-Buch, da der Zielfunktionskoeffizient q nicht deterministisch ist.
2. Die Ungleichung $EV \leq RP$ aus Satz 8.11 gilt für SLP, obwohl SLP einen zufallsbehafteten Zielfunktionskoeffizienten hat.
3. Für Satz 8.12 hat die Verletzung der Voraussetzungen zur Folge, dass die Ungleichung $EV > WS$ für SLP gilt.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Newsvendor-Problem

$$\begin{array}{lrcl}
\min & cx - qy_1 - ry_2 & & \\
\text{s.t.} & y_1 + y_2 & \leq & x \\
 & y_1 & \leq & d(\omega) \\
 & x & \leq & u \\
 & x, y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

mit Zufallsvariable $\xi(\omega) = d(\omega)$, die folgender diskreter Verteilung folgt:

$z_1 = 1$ wenn $y_1 \leq d_1$

$y_1 \leq d_1 + M(1 - z_1)$

$z_1 = 1 \Rightarrow y_1 \leq d_1$

$z_1 = 0 \Rightarrow y_1 \leq d_1 + M$

Szenario	Nachfrage	Wahrscheinlichkeit
1	100	0.30
2	150	0.20
3	200	0.30
4	250	0.15
5	300	0.05

Zudem seien $u = 250$, $c = 2$ €, $q = 4.5$ € und $r = 0.75$ €.

a) Modellieren Sie ein Optimierungsproblem mit Chance Constraint, welches garantiert, dass mindestens in

i) 95%,

ii) 70% bzw.

iii) 50%

der Fälle die Verkaufsmenge die Nachfrage nicht übersteigt.

A2) a) P:
$$\begin{aligned} \min \quad & cx - qy_1 - ry_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 - x \leq 0 \\ & y_1 \leq d(\omega) \\ & x \leq u \\ & x, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bei einer Chance Constraint ersetzen wir

$y_1 \geq d(\omega)$ mit $\mathbb{P}(y_1 \geq d(\omega)) \geq \alpha$

CC:
$$\begin{aligned} \min \quad & 2x - 4{,}5y_1 - 0{,}75y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 - x \leq 0 \\ & \mathbb{P}(y_1 \leq d(\omega)) \geq \alpha \\ & x \leq 250 \\ & x, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

mit $\alpha = 0.95$ (i), $\alpha = 0.7$ (ii) oder $\alpha = 0.5$ (iii)

Interpretation der NB: $\mathbb{P}(y_1 \leq d(\omega)) \geq \alpha$

Wahrscheinlichkeit, dass wir min. 150 Zeitungen verkaufen:

Szenario	Nachfrage	Wahrscheinlichkeit
1	100	0.30
2	150	0.20
3	200	0.30
4	250	0.15
5	300	0.05

$$\mathbb{P}(150 \leq d(\omega)) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0.7$$

Beispiel mit $y_1 = 225$:

$$\mathbb{P}(225 \leq d(\omega)) = p_4 + p_5 = 0.2$$

$\Rightarrow$ Für $y_1 = 225$ gibt es keinen zulässigen Punkt für $\alpha > 0.2$ (insbesondere 0.95, 0.7 und 0.5)

Interpretation von CC:

- Das Problem CC ist kein zweistufiges Problem. Wir können unsere Entscheidungen nach der Realisierung des Zufalls nicht mehr anpassen.
- Wir integrieren den Zufall beim Finden der optimalen Entscheidungen aber in der Chance Constraint und berücksichtigen die Unsicherheit direkt bei der Optimierung. Man muss dabei beachten, dass die optimale Lösung unter Umständen nicht (zu 100%) zulässig ist.

---

b) Formulieren Sie Ihr Problem aus Teil a) als ein gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem $MILP$ mit Big-M-Parametern.

Überlegen Sie sich zudem für i)-iii) eine optimale Lösung. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

b) Modellierung als MILP:

Einführen neuer Binärvariablen $z_s = \begin{cases} 1, & y_1 \leq d_s \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Mit d_s aus der Aufgabe und Big-M-Parameter M_s kann man ein zu CC äquivalentes MILP aufstellen:

$$
\begin{array}{llrcll}
MILP: & \min & 2x - 4.5y_1 - 0.75y_2 & & & \\
 & \text{s.t.} & y_1 + y_2 - x & \leq & 0 & \\
 & & y_1 & \leq & 100 + M_1(1 - z_1) & z_1 = 1: \; y_1 \leq 100 \\
 & & y_1 & \leq & 150 + M_2(1 - z_2) & z_2 = 1: \; y_1 \leq 150 \\
 & & y_1 & \leq & 200 + M_3(1 - z_3) & \\
 & & y_1 & \leq & 250 + M_4(1 - z_4) & \\
 & & y_1 & \leq & 300 + M_5(1 - z_5) & \\
 & & x & \leq & 250 & \\
 & & 0.3z_1 + 0.2z_2 + 0.3z_3 + 0.15z_4 + 0.05z_5 & \geq & \alpha & (*) \\
 & & z_1, z_2, \ldots, z_5 & \in & \{0, 1\} & \\
 & & x, y_1, y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Bemerkung: Für die Herleitung einer Lösung müssen die Parameter M_s nicht zwingend mit Werten belegt werden. Eine mögliche Belegung wäre aber

$$M_s = 250 \qquad \text{für alle } s = 1, 2, \ldots, 5.$$

$M_s = 150$

Da die maximale Einkaufsmenge 250 ist, können wir maximal 250 Zeitungen verkaufen. Da die M_s die rechten Seiten bei den Nachfragenebenbedingungen erhöhen, können sie als Teil einer nicht einschränkenden Oberschranke für y_1 aus Nachfrage und Big-M-Parameter angesehen werden. Die Menge 250 genügt dabei, um den Big-M-Parametern die Eigenschaften dieser nicht einschränkenden Oberschranke zu geben.

Für die Lösung von $MILP$ erinnern wir uns zunächst an die Lösung des deterministischen Problems aus der Aufgabe. Dort kauft man genauso viele Zeitungen ein, wie man absetzen kann oder man maximal einkaufen kann. Eine Rückgabe ist nicht

Lösen der Probleme aus i), ii) und iii)

i) Sei $\alpha = 0.95$, d.h. wir müssen 95% der Restriktionen $y_1 \leq d(w)$ erfüllen.

Entweder $z_1 = \ldots = z_5 = 1$ oder $z_1 = \ldots = z_4 = 1$, $z_5 = 0$

Bei beiden Alternativen bleibt $y_1 \leq 100$ bindend.

$\Rightarrow y_1^* = 100$, $x^* = 100$, $y_2^* = 0$, $z^* = -250$

$\Rightarrow$ Wir haben trotzdem 100% erfüllt

ii) $\alpha = 0.7$. Die Szenarien sind bzgl. der Nachfragemenge aufsteigend sortiert. Somit ist die Nebenbedingung mit dem kleinsten Index, die erfüllt ist, bindend.

(Wenn S1 gilt, sind S2–S5 erfüllt

Wenn S2 gilt, sind S3–S5 erfüllt, S1 kann verletzt sein)

Dann ist die beste Lösung $z_1 = 0$, $z_2 = \ldots = z_5 = 1$

$0.2 + 0.3 + 0.15 + 0.05 = 0.7$

$\Rightarrow y_1^* = 150$, $x^* = 150$, $y_2^* = 0$, $z^* = -375$

iii) Sei $\alpha = 0.5$.

Mit derselben Argumentation finden wir die folgende beste Lösung.

$z_1 = z_2 = 0$, $z_3 = z_4 = z_5 = 1$

$0.3 + 0.15 + 0.05 = 0.5$

$\Rightarrow y_1^* = 200$, $x^* = 200$, $y_2^* = 0$, $z^* = -500$

Bemerkung: Zusammenfassend kann man für das Newsvendor-Problem zeigen, dass man ein $\tilde{s}$ mit

$$\sum_{s=\tilde{s}}^{S} p_s z_s \geq \alpha$$

finden kann, so dass

$$x^* = y_1^* = d_{\tilde{s}}, y_2^* = 0, z_1^* = \cdots = z_{\tilde{s}-1}^* = 0, z_{\tilde{s}}^* = \cdots = z_S^* = 1$$

ein optimaler Punkt von $MILP$ mit optimalem Wert $-2.5d_{\tilde{s}}$ ist, solange die maximale Einkaufsmenge noch nicht überschritten wurde ($d_{\tilde{s}} \leq u$). Ist die maximale Einkaufsmenge entscheidend für die optimale Lösung, dann kann analog ein Szenario $\tilde{s}$ mit den obigen Eigenschaften gefunden werden und somit ist eine optimale Lösung wieder nur vom Szenario $\tilde{s}$ abhängig.

Für das Problem CC bedeutet das, dass man zur Bestimmung der optimalen Lösung keine z_s benötigt und damit kein $MILP$ lösen muss, sondern nur das entscheidende Szenario $\tilde{s}$ finden muss. Die Sortierung der Nachfragen ist dabei wesentlich und muss vorausgesetzt werden.

nächstes (letztes) Tutorium:

Modellierung von zweistufigen stochastischen Optimierungsproblemen

10. Online Test (05.02. – 11.02.):

- Recourse-Arten
- Newsvendor Problem
- Kennwerte und Metriken
- Allgemeines zur Stochastischen Optimierung