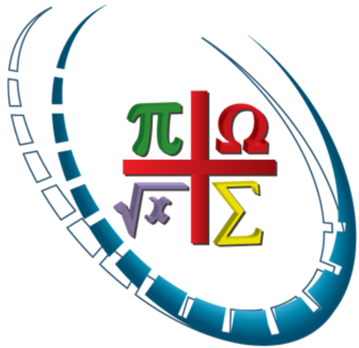
Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

AA3: Intégrale impropre des fonctions particulières



Mathématiques de Base 4 - $2^{\text{ème}}$ année - **A.U.** 2020/2021

Motivation

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle de la forme $[a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (**respectivement** $]a,b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$).
On se donne une intégrale impropre en a ou en b:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Motivation

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle de la forme $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (**respectivement** $]a, b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$).
On se donne une intégrale impropre en a ou en b:

$$\int_a^b f(x)dx$$

☛ **Objectif:**

Présenter quelques intégrales impropres de fonctions particulières et étudier leurs natures.

Intégrale géométrique ou exponentielle

Intégrale géométrique ou exponentielle

Une intégrale géométrique est toute intégrale de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

Exemples:

Intégrale géométrique ou exponentielle

Intégrale géométrique ou exponentielle

Une intégrale géométrique est toute intégrale de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

Exemples:

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx$

Intégrale géométrique ou exponentielle

Intégrale géométrique ou exponentielle

Une intégrale géométrique est toute intégrale de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

Exemples:

- $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$
- $\int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{2}}\,dx$

Intégrale géométrique ou exponentielle

Intégrale géométrique ou exponentielle

Une intégrale géométrique est toute intégrale de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

Exemples:

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{2}}\,dx$

? Pour quelles valuers de α, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ est convergente ?

✏ Distinguons trois cas:

✏ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$,

✏ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$

✏ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

✏ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

- Supposons $\alpha = 0$.

✏ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

- Supposons $\alpha = 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \int_0^X e^{-0.x}\, dx = \Big[x\Big]_0^X = X$$

✏ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

- Supposons $\alpha = 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \int_0^X e^{-0.x}\, dx = \Big[x\Big]_0^X = X$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \lim_{X \to +\infty} X = +\infty.$$

✏ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

- Supposons $\alpha = 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^X e^{-0.x}\,dx = \Big[x\Big]_0^X = X$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{X \to +\infty} X = +\infty.$$

  Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ est **divergente**.

- Supposons $\alpha > 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\,dx = \Big[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big]_0^X = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

- Supposons $\alpha > 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_0^X = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \lim_{X \to +\infty} -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

- Supposons $\alpha > 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\,dx = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_0^X = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{X\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ est **convergente** et vaut $\frac{1}{\alpha}$.

- Supposons $\alpha < 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

- Supposons $\alpha < 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\,dx = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_0^X = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{X\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = +\infty.$$

- Supposons $\alpha < 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \lim_{X \to +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = +\infty.$$

  Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ est **divergente**.

- Supposons $\alpha < 0$.

  Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x}\, dx = \lim_{X \to +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = +\infty.$$

  Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ est **divergente**.

Conclusion

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ est $\begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha > 0 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}$

Intégrale exponentielle ou géométrique

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Intégrale exponentielle ou géométrique

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemples :

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx$ est une intégrale géométrique avec $\alpha = 2 > 0$, donc elle est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$

Intégrale exponentielle ou géométrique

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemples :

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ est une intégrale géométrique avec $\alpha = 2 > 0$, donc elle est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{2}}\,dx$ est une intégrale géométrique avec $\alpha = -\dfrac{1}{2} < 0$, donc elle est divergente.

Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition $(a > 0)$

L'intégrale
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$
est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition $(a > 0)$

L'intégrale
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$
est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$

8

Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition $(a > 0)$

L'intégrale
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$
est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition $(a > 0)$

L'intégrale
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$
est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

Définition $(-\infty < a < b < +\infty)$

Les intégrales

- $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\, dx$

Ou

- $\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\, dx$

sont dites intégrale de Riemann

Exemples:

Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition $(a > 0)$

L'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Définition $(-\infty < a < b < +\infty)$

Les intégrales

➤ $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$

Ou

➤ $\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$

sont dites intégrale de Riemann

Exemples:

- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx$

Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition $(a > 0)$

L'intégrale
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$
est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Définition $(-\infty < a < b < +\infty)$

Les intégrales

➤ $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$

Ou

➤ $\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$

sont dites intégrale de Riemann

Exemples:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^3}\,dx$

Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ est convergente ?

Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas:

9

Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$,

9

Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et

9

Intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

- Supposons $p = 1$.

Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

- Supposons $p = 1$.
  Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^X = \ln(X)$$

Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

- Supposons $p = 1$.
  Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^X = \ln(X)$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty.$$

Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

- Supposons $p = 1$.

  Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^X = \ln(X)$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty.$$

  Ainsi, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est **divergente**.

- Supposons $p > 1$.
  Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_1^X = \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

- Supposons $p > 1$.
  Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_1^X = \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

  Par conséquent,

$$\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}.$$

- Supposons $p > 1$.
  Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_1^X = \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est **convergente** et vaut $\dfrac{1}{p-1}$.

- Supposons $p < 1$.
  Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_1^X = \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

- Supposons $p < 1$.
  Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_1^X = \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = +\infty.$$

- Supposons $p < 1$.
Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^X x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_1^X = \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ est **divergente**.

Conclusion

$$\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx \text{ est } \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } p > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Théorème

Soit $p \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ est convergente si et seulement si $p > 1$.

Théorème

Soit $p \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ est convergente si et seulement si $p > 1$.

Exemples :

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$ est une intégrale de Riemann avec $p = 3 > 1$, donc elle est **convergente** et vaut $\dfrac{1}{2}$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ est une intégrale de Riemann avec $p = \frac{1}{2} < 1$, donc elle est **divergente**.

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

? **Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?**

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$,

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$,

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

- Supposons $p = 1$.

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

- Supposons $p = 1$. Pour tout $X \in]0,1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_X^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_X^1 = -\ln(X)$$

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

- Supposons $p = 1$. Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_X^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_X^1 = -\ln(X)$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to 0^+} -\ln(X) = +\infty.$$

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

? Pour quelles valuers de p, l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

- Supposons $p = 1$. Pour tout $X \in]0,1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_X^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_X^1 = -\ln(X)$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to 0^+} -\ln(X) = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est **divergente**.

- Supposons $p > 1$.
Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_X^1 x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1}$$

- Supposons $p > 1$.
Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \int_X^1 x^{-p}\, dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \to 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{X \to 0^+} \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} = +\infty.$$

- Supposons $p > 1$.
Pour tout $X \in]0,1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_X^1 x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est **divergente**.

- Supposons $p < 1$.
  Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_X^1 x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1}$$

- Supposons $p < 1$.
  Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_X^1 x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to 0^+}\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to 0^+}\frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} = \frac{1}{-p+1}.$$

- Supposons $p < 1$.
  Pour tout $X \in]0,1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_X^1 x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}.x^{-p+1}\right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}.X^{-p+1} = \frac{1}{-p+1}.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ est **convergente** et vaut $\frac{1}{-p+1}$.

Conclusion

$$\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \text{ est } \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } p < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$$

Théorème

Soit $p \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$ ou ($\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$) est convergente si et seulement si $p < 1$.

Théorème

Soit $p \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$ ou ($\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$) est convergente si et seulement si $p < 1$.

Exemples :

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ est une intégrale de Riemann avec $p = 3 > 1$, donc elle est **divergente**.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est une intégrale de Riemann avec $p = \dfrac{1}{2} < 1$, donc elle est **convergente** et vaut 2.

Intégrales de Bertrand :

Définition

Les intégrales de Bertrand sont les intégrales de la forme

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} dx \quad \text{avec} \quad a > 1,$$

Intégrale de Bertrand au voisinage de $+\infty$

$$\int_0^{b} \frac{1}{x^\alpha \mid \ln(x) \mid^\beta} dx \quad \text{avec} \quad b < 1,$$

Intégrale de Bertrand au voisinage de 0

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} dx$ est convergente $\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1. \end{cases}$

  Intégrale de Bertrand au voisinage de $+\infty$

- $\displaystyle\int_0^{b} \frac{1}{x^\alpha \mid \ln(x) \mid^\beta} dx$ est convergente $\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1. \end{cases}$

  Intégrale de Bertrand au voisinage de 0

Exemples :

(1) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x ln(x)} dx$ diverge

(Intégrale de Bertrand au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$).

(2) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^4 ln(x)} dx$ converge

(Intégrale de Bertrand au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha = 4 > 1$ et $\beta = 1$).

(3) $\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{xln^2(x)} dx$ **converge**

(Intégrale de Bertrand au voisinage de $+\infty$ **avec** $\alpha = 1$ **et** $\beta = 2 > 1$**).**

(3) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}ln^3(x)} dx$ **converge**

(Intégrale de Bertrand au voisinage de 0 avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ **et** $\beta = 3$**).**

(4) $\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\sqrt{-\ln(x)}} dx$ **diverge**

(Intégrale de Bertrand au voisinage de 0 avec $\alpha = 1$ **et** $\beta = \frac{1}{2} \leq 1$**).**