$j=\frac{1}{2}$ $\quad \hat{J}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$J_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$

$\sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}.$

$\sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$

$\sigma_i\sigma_j = i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$

$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ als $i\neq j$

$\sigma_i^2 = 1$

$$\overbrace{\{\sigma_i,\sigma_j\}}^{\text{anti-commutator}} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0 \text{ als } i\neq j$$

$= 2$ als $i=j$

$= 2\delta_{ij}$

$[\sigma_i,\sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2\sigma_{ij} = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k;\ i\neq j$

$= 0$ als $i=j$

$= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$$D^{(1/2)}(\varphi\vec{e}_z) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\vec{J}\cdot\vec{e}_z\varphi\right) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\hat{J}_z\varphi\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_z\varphi\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\varphi^n\sigma_z^{\,n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{2}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}\varphi^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)!}\varphi^{2n+1}\sigma_z \qquad \sigma_z^{\,2n}=1 \text{ want } \sigma_z^2=1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2n} - i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2n+1}\right)\sigma_z$$

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sigma_z$$

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}e^{-i\varphi/2}&0\\0&e^{i\varphi/2}\end{pmatrix} \to \varphi=2\pi:\ D^{(1/2)}(2\pi\vec{e}_z) = -\hat{1}$$

$\varphi = 4\pi:\ D^{(1/2)}(4\pi\vec{e}_z) = \hat{1}$

$\boxed{2.3.6}$ Twee impulsmomenten: $\hat{J}_1, \hat{J}_2$
voor deeltjes met spin j_1 en j_2

Directproduct ruimte: $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

$= |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$

$m_1 = -j_1, -j_1+1, \dots, j_1 \to 2j_1+1$

$m_2 = -j_2, -j_2+1, \dots, j_2 \to 2j_2+1$

$\to$ dimensie $= (2j_1+1)(2j_2+1)$

Eigentoestanden van $\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}\}$

$\hat{J}_1^2|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$

$\hat{J}_{1z}|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \hbar m_1|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$

etc.

Totaal impulsmoment $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$

Commuterende set $\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\}$

$[\hat{J}_{1i}, \hat{J}_{1j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_{1k}$

$[\hat{J}_{2i}, \hat{J}_{2j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_{2k}$

$[\hat{J}_{1i}, \hat{J}_{2j}] = 0$

$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$

$\to$ gem. eigenbasis: $|j_1 j_2; jm\rangle$

$\hat{J}_1^2|j_1 j_2; jm\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1 j_2; jm\rangle$

$\hat{J}_2^2 \dots$

$\hat{J}^2|j_1 j_2; jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j_1 j_2; jm\rangle$

$\hat{J}_z|j_1 j_2; jm\rangle = \hbar m|j_1 j_2; jm\rangle,\ m = -j, -j+1, \dots, j$

$$|j_1 j_2; jm\rangle = \sum_{m_1,m_2}\underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; jm\rangle}_{\substack{\text{Clebsch-Gordan coëfficiënten}\\ \langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle}}|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

Relatie m_1, m_2, m

$\hat{J}_z|j_1 j_2; jm\rangle = m\hbar|j_1 j_2; jm$

$$\hat{J}_z|j_1 j_2; jm\rangle = (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z})\sum_{m_1 m_2}\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2}\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle\hbar(m_1+m_2)|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

$$= m\hbar\sum_{m_1 m_2}\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

1) $\boxed{m = m_1 + m_2}$

2) $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

maximale waarde $m_1 = j_1$

$m_2 = j_2$

$m = j_1 + j_2$

maximale eigenwaarde $j = j_1 + j_2$

$$|j_1 j_2; j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = \underbrace{\langle j_1 j_1 j_2 j_2|j_1+j_2\ j_1+j_2\rangle}_{=1\ \cancel{e^{i\delta}}}|j_1 j_2; j_1, j_2\rangle$$

$\begin{cases} -j \leq m \leq j \\ -j_1 \leq m_1 \leq j_1 \\ -j_2 \leq m_2 \leq j_2 \end{cases}$

evalueer voor: $m = j$, $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$

$-j_1 \leq j - j_2 \leq j_1$

$j_2 - j_1 \leq j \leq j_1 + j_2$

$-j_2 \leq j - j_1 \leq j_2$

$j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$

$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$