Grafos - Conceitos Básicos

Prof. Luiz Gustavo Almeida Martins

Grafos: conceitos básicos

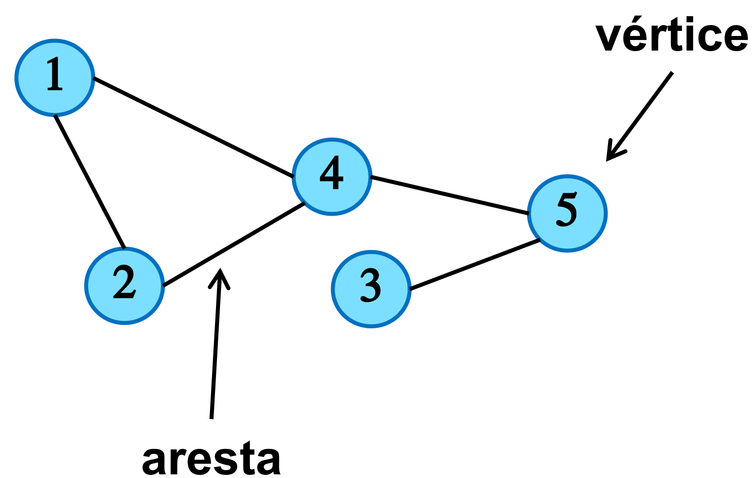
Grafo é um modelo de representação das relações entre **pares de objetos**

Grafos: conceitos básicos

Grafo é um modelo de representação das relações entre **pares de objetos**

Formado por conjunto de **vértices e arestas**

- **Vértice:** objeto simples que pode ter nome e outros atributos
- **Aresta:** conexão entre dois vértices



Grafos: conceitos básicos

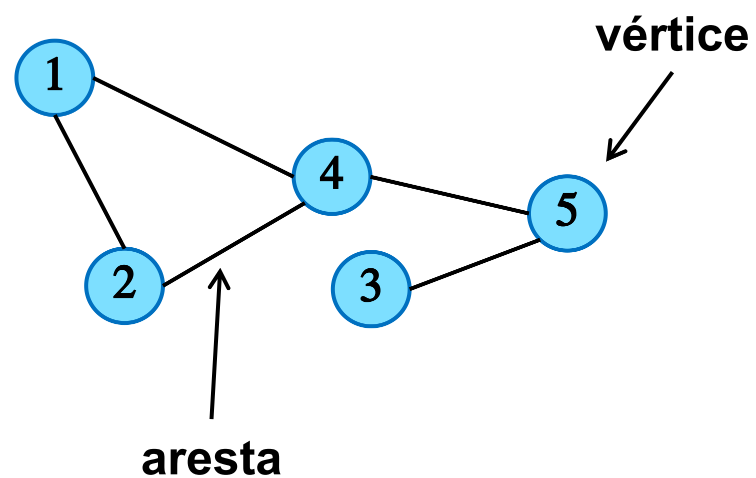
Grafo é um modelo de representação das relações entre **pares de objetos**

Formado por conjunto de **vértices e arestas**

- **Vértice:** objeto simples que pode ter nome e outros atributos
- **Aresta:** conexão entre dois vértices

Notação: ***G = (V, A)***

- ***G***: grafo
- ***V***: conjunto **não vazio** de vértices
- ***A***: conjunto de arestas



Grafos: motivação

Por que estudar grafos?

Grafos: motivação

Por que estudar grafos?

- Abstração útil e interessante
  - Aplicações necessitam mapear relações entre pares de objetos
  - Facilita a representação e melhora o desempenho do algoritmo

Grafos: motivação

Por que estudar grafos?

- Abstração útil e interessante
  - Aplicações necessitam mapear relações entre pares de objetos
  - Facilita a representação e melhora o desempenho do algoritmo
- Existe um legado de algoritmos para processar grafos
  - **Ex:** algoritmo de Dijkstra (caminho mais curto)

Grafos: motivação

Por que estudar grafos?

- Abstração útil e interessante
  - Aplicações necessitam mapear relações entre pares de objetos
  - Facilita a representação e melhora o desempenho do algoritmo
- Existe um legado de algoritmos para processar grafos
  - **Ex:** algoritmo de Dijkstra (caminho mais curto)
- Campo de conhecimento em constante evolução
  - **Ex:** Teoria dos grafos, redes complexas, etc.

Grafos: exemplos de aplicação

Grafo	Vértice	Arestas
Comunicações	telefones, computadores	cabos, fibra ótica
Circuitos	portas, registradores, processadores	fios
Finanças	ações, cotações	transações
Transportes	cidades, aeroportos	rodovias, rotas
Internet	servidores, domínios	conexão
Jogos	posições do tabuleiro	movimento das peças
Redes sociais	pessoas	relacionamentos
Redes neurais	neurônios	sinápses
Compiladores	*tokens*, passos de otimização	ordem de aplicação
Composto químico	moléculas	ligações

Fonte: material do prof. Marcelo K. Albertini

Grafos: exemplos de aplicação

Grafos: direção das arestas

Grafo direcionado (dígrafo):

As arestas indicam uma **orientação** (sentido)

Ex: considere a aresta (*u*,*v*):

- Ela sai do vértice *u* e entra no vértice *v*
- O vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*
- O vértice *u* **NÃO é adjacente** ao vértice *v*

Grafos: direção das arestas

Grafo direcionado (dígrafo):

As arestas indicam uma **orientação** (sentido)

Ex: considere a aresta (u,v):

- Ela sai do vértice u e entra no vértice v
- O vértice v é **adjacente** ao vértice u
- O vértice u **NÃO é adjacente** ao vértice v

Permite a ligação de um vértice a si mesmo (**laço**)

Grafos: direção das arestas

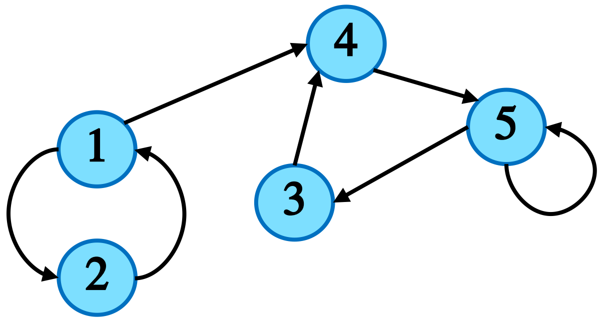
Grafo direcionado (dígrafo):

As arestas indicam uma **orientação** (sentido)

Ex: considere a aresta (*u*,*v*):

- Ela sai do vértice *u* e entra no vértice *v*
- O vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*
- O vértice *u* **NÃO é adjacente** ao vértice *v*

Permite a ligação de um vértice a si mesmo (**laço**)



Grafos: direção das arestas

Grafo não direcionado:

- As arestas indicam uma **relação bilateral**
  - As arestas (*u*,*v*) e (*v*,*u*) são representadas como uma **única aresta**
  - A relação de **adjacência é simétrica:**
    - O vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*
    - O vértice *u* é **adjacente** ao vértice *v*

Grafos: direção das arestas

Grafo não direcionado:

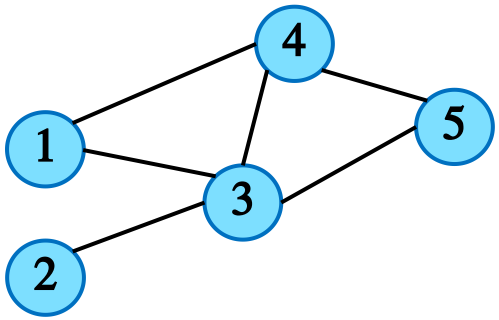
- As arestas indicam uma **relação bilateral**
  - As arestas (*u*,*v*) e (*v*,*u*) são representadas como uma **única aresta**
  - A relação de **adjacência é simétrica:**
    - O vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*
    - O vértice *u* é **adjacente** ao vértice *v*

- Não existe a ligação de um vértice a si mesmo (laço)

Grafos: direção das arestas

Grafo não direcionado:

- As arestas indicam uma **relação bilateral**
  - As arestas (*u*,*v*) e (*v*,*u*) são representadas como uma **única aresta**
  - A relação de **adjacência é simétrica:**
    - O vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*
    - O vértice *u* é **adjacente** ao vértice *v*
- Não existe a ligação de um vértice a si mesmo (laço)



Grafos: grau de um vértice

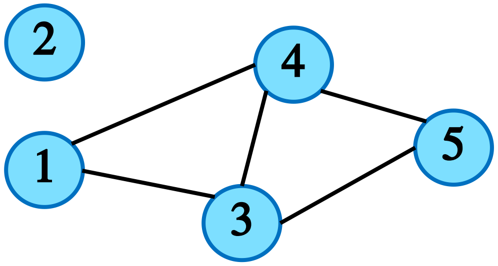
Grau do vértice está relacionado com a quantidade de conexões do vértice

- **Grafo não direcionado:** Nº arestas que incidem no vértice

Grafos: grau de um vértice

Grau do vértice está relacionado com a quantidade de conexões do vértice

Grafo não direcionado: Nº arestas que incidem no vértice

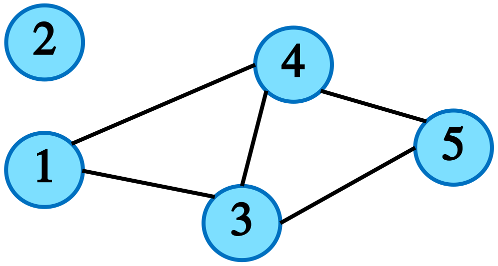


Ex: o vértice 3 tem grau 3

Grafos: grau de um vértice

Grau do vértice está relacionado com a quantidade de conexões do vértice

- **Grafo não direcionado:** Nº arestas que incidem no vértice
- **Grafo direcionado:** Nº de arestas que saem (**grau de saída**) + Nº de arestas que entram (**grau de entrada**)

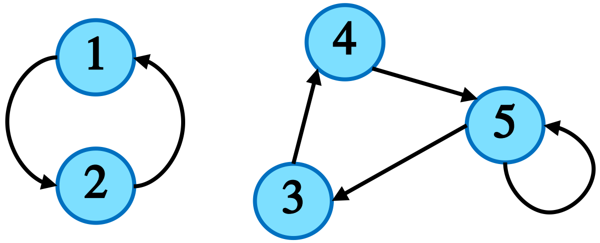


Ex: o vértice 3 tem grau 3

Grafos: grau de um vértice

Grau do vértice está relacionado com a quantidade de conexões do vértice

- **Grafo não direcionado:** Nº arestas que incidem no vértice
- **Grafo direcionado:** Nº de arestas que saem (**grau de saída**) + Nº de arestas que entram (**grau de entrada**)

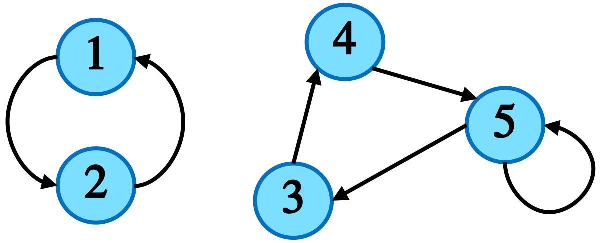


Ex: o vértice 3 tem grau 2

Grafos: grau de um vértice

Grau do vértice está relacionado com a quantidade de conexões do vértice

- **Grafo não direcionado:** Nº arestas que incidem no vértice
- **Grafo direcionado:** Nº de arestas que saem (**grau de saída**) + Nº de arestas que entram (**grau de entrada**)



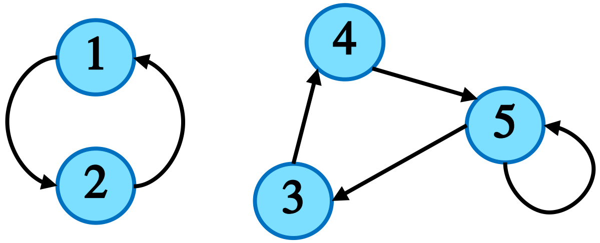
Ex: o vértice 3 tem grau 2

Qual o grau do vértice 5?

Grafos: grau de um vértice

Grau do vértice está relacionado com a quantidade de conexões do vértice

- **Grafo não direcionado:** Nº arestas que incidem no vértice
- **Grafo direcionado:** Nº de arestas que saem (**grau de saída**) + Nº de arestas que entram (**grau de entrada**)



Ex: o vértice 3 tem grau 2

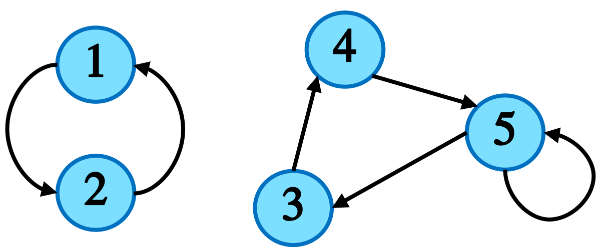
Qual o grau do vértice 5? **4**

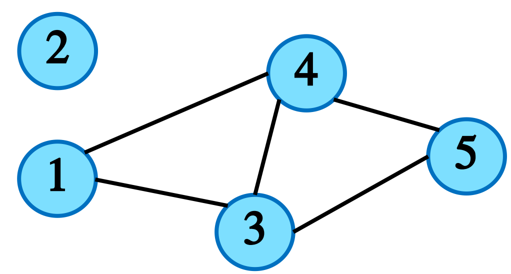
Grafos: grau de um vértice

Grau do vértice está relacionado com a quantidade de conexões do vértice

- **Grafo não direcionado:** Nº arestas que incidem no vértice
- **Grafo direcionado:** Nº de arestas que saem (**grau de saída**) + Nº de arestas que entram (**grau de entrada**)

Um vértice de **grau zero** é dito **isolado** ou **não conectado**





Ex: o vértice 3 tem grau 2

Qual o grau do vértice 5? **4**

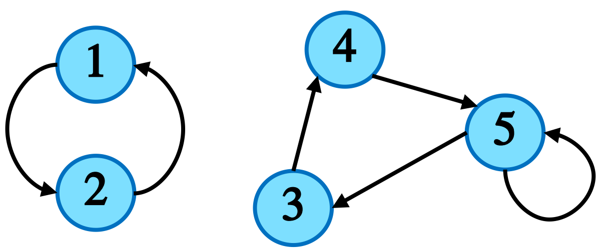
Ex: o vértice 3 tem grau 3

Grafos: grau de um vértice

Grau do vértice está relacionado com a quantidade de conexões do vértice

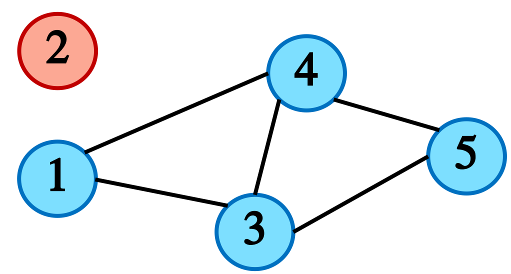
- **Grafo não direcionado:** Nº arestas que incidem no vértice
- **Grafo direcionado:** Nº de arestas que saem (**grau de saída**) + Nº de arestas que entram (**grau de entrada**)

Um vértice de **grau zero** é dito **isolado** ou **não conectado**



Ex: o vértice 3 tem grau 2

Qual o grau do vértice 5? **4**



Ex: o vértice 3 tem grau 3

o vértice 2 tem **grau 0** **(isolado)**

Grafos: caminho entre vértices

Caminho: sequência de vértices ligados por arestas

O caminho entre os vértices *x* e *y* é a sequência de vértices que ligam o vértice *x* ao vértice *y*

Grafos: caminho entre vértices

Caminho: sequência de vértices ligados por arestas

O caminho entre os vértices *x* e *y* é a sequência de vértices que ligam o vértice *x* ao vértice *y*

Um caminho é **simples** se todos os vértices da sequência são **distintos**

Grafos: caminho entre vértices

Caminho: **sequência de vértices** ligados por arestas

O caminho entre os vértices *x* e *y* é a sequência de vértices que ligam o vértice *x* ao vértice *y*

Um caminho é **simples** se todos os vértices da sequência são **distintos**

Dois vértices estão **conectados** se existe pelo menos um caminho entre eles

Grafos: caminho entre vértices

Caminho: sequência de vértices ligados por arestas

O caminho entre os vértices *x* e *y* é a sequência de vértices que ligam o vértice *x* ao vértice *y*

Um caminho é **simples** se todos os vértices da sequência são **distintos**

Dois vértices estão **conectados** se existe pelo menos um caminho entre eles

Se existir um caminho *c* de *x* para *y*, então o vértice *y* é **alcançável** a partir de x via *c*

Grafos: caminho entre vértices

O **comprimento** de um caminho é a **quantidade de arestas** presentes na sequência de vértices

Ex: o caminho formado pela sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tem ***k*** arestas $\{(v_0,v_1),(v_1,v_2), \ldots ,(v_{k-1}, v_k)\}$

Grafos: caminho entre vértices

O **comprimento** de um caminho é a **quantidade de arestas** presentes na sequência de vértices

Ex: o caminho formado pela sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tem ***k*** arestas $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}$

Ciclo: caminho cujo 1º e último vértices são iguais

Deve ter pelo menos uma aresta (*self-loop*)

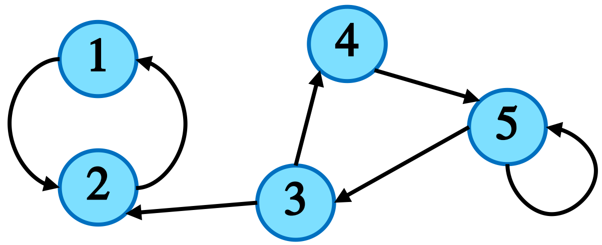
Grafos: caminho entre vértices

O **comprimento** de um caminho é a **quantidade de arestas** presentes na sequência de vértices

Ex: o caminho formado pela sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tem ***k*** arestas $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}$

Ciclo: caminho cujo 1º e último vértices são iguais

Deve ter pelo menos uma aresta (*self-loop*)



O caminho (4,5,3,2,1) é **simples** e tem **comprimento 4**

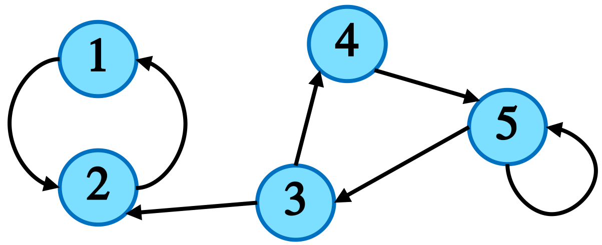
Grafos: caminho entre vértices

O **comprimento** de um caminho é a **quantidade de arestas** presentes na sequência de vértices

Ex: o caminho formado pela sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tem ***k*** arestas $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}$

Ciclo: caminho cujo 1º e último vértices são iguais

Deve ter pelo menos uma aresta (*self-loop*)



O caminho (4,5,3,2,1) é **simples** e tem **comprimento 4**

O caminho (4,5,3,4) é um **ciclo** e tem **comprimento 3**

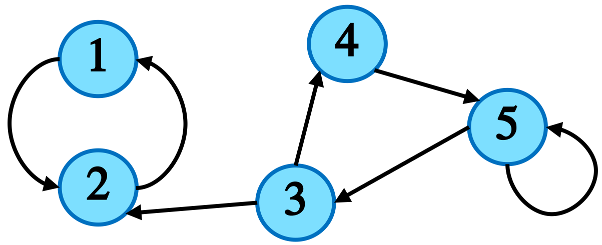
Grafos: caminho entre vértices

O **comprimento** de um caminho é a **quantidade de arestas** presentes na sequência de vértices

Ex: o caminho formado pela sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tem $\boldsymbol{k}$ arestas $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}$

Ciclo: caminho cujo 1º e último vértices são iguais

Deve ter pelo menos uma aresta (*self-loop*)



O caminho (4,5,3,2,1) é **simples** e tem **comprimento 4**

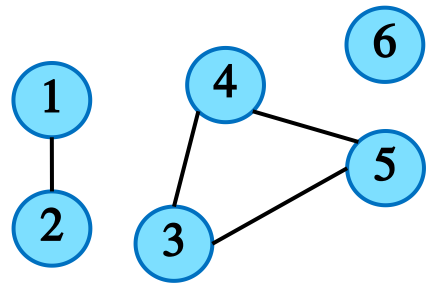
O caminho (4,5,3,4) é um **ciclo** e tem **comprimento 3**

O vértice 4 **não é alcançável** a partir do vértice 1, portanto, eles **não estão conectados**

Grafo não direcionado: componentes conexos

Componentes conexos são as porções conectadas de um grafo

Exemplo:

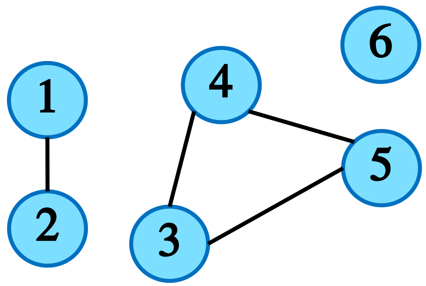


Os componentes conexos são:
{1,2}, {3,4,5} e {6}

Grafo não direcionado: componentes conexos

Componentes conexos são as porções conectadas de um grafo

Exemplo:



Os componentes conexos são:
{1,2}, {3,4,5} e {6}

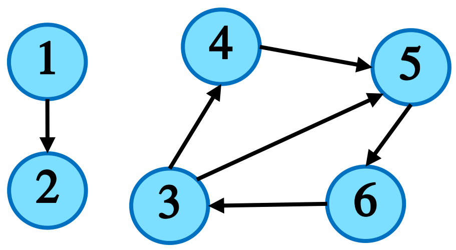
Um **grafo** não direcionado é **conexo** (conectado) se cada vértice tem pelo menos **um caminho para qualquer outro vértice**

- Cada par de vértice está conectado por um caminho
- Grafo tem **exatamente** **um componente conexo**

Grafo direcionado fortemente conectado

Componentes fortemente conexos são os conjuntos de vértices que são **mutuamente alcançáveis**

Exemplo:

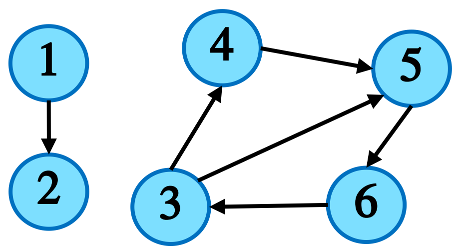


Os componentes fortemente conexos são: {3,4,5,6}, {1} e {2}

Grafo direcionado fortemente conectado

Componentes fortemente conexos são os conjuntos de vértices que são **mutuamente alcançáveis**

Exemplo:



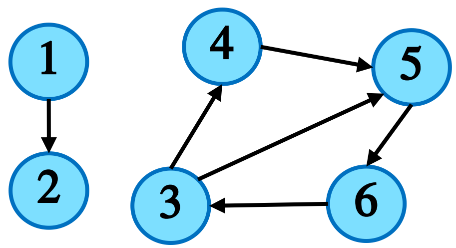
Os componentes fortemente conexos são: {3,4,5,6}, {1} e {2}

(vértice 1 não é alcançável pelo 2)

Grafo direcionado fortemente conectado

Componentes fortemente conexos são os conjuntos de vértices que são **mutuamente alcançáveis**

Exemplo:



Os componentes fortemente conexos são: {3,4,5,6}, {1} e {2}

(vértice 1 não é alcançável pelo 2)

Um **grafo** direcionado é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcancáveis entre si

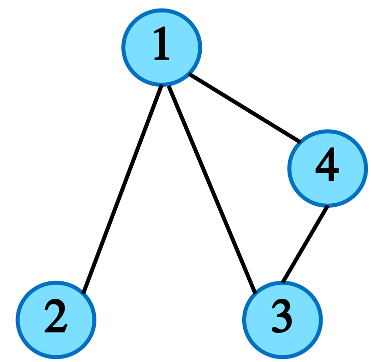
Grafo tem **apenas** **um componente fortemente conexo**

Outras classificações de grafos

Grafo trivial: formado por um vértice e nenhuma aresta

Grafo simples: grafo não direcionado, sem laços (*self-loops*) e múltiplas arestas

Grafo trivial



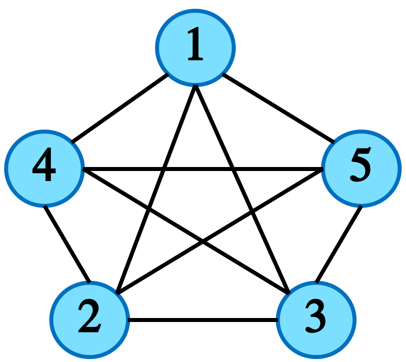
Grafo simples

Outras classificações de grafos

Grafo completo: grafo não direcionado no qual todos os vértices estão conectados entre si

Todos os pares de vértices são adjacentes

Um grafo completo de ***n*** vértices possuin ***n(n-1)/2*** arestas

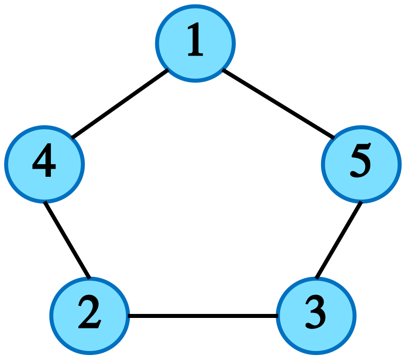


Outras classificações de grafos

Grafo regular: grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau

Todo grafo completo é regular

Nem todo grafo regular é completo



Outras classificações de grafos

Grafo bipartido é um grafo não direcionado no qual:

O conjunto de vértices *V* pode ser particionado em **2 subconjuntos** (V_1 e V_2)

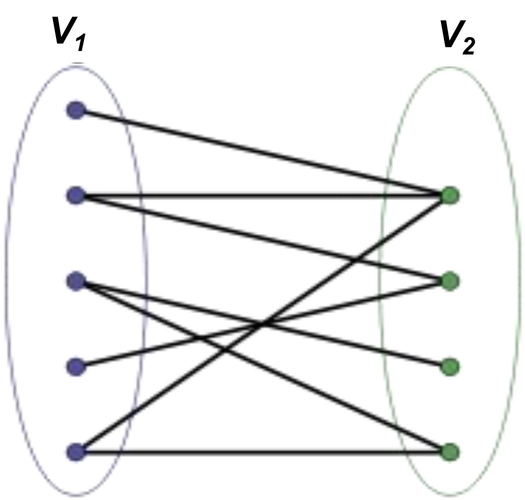
O conjunto de arestas *A* é formado por pares de vértices (u,v), tal que:

Se $u \in V_1$, então $v \in V_2$

Se $u \in V_2$, então $v \in V_1$

Todas as arestas ligam os 2 subconjuntos

- Não conectam vértices do mesmo conjunto



Ex: redes neurais

http://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_bipartido

Outras classificações de grafos

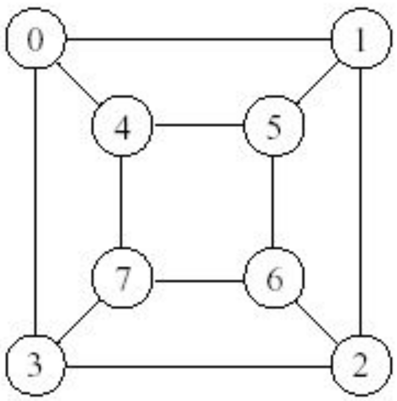
Dois grafos $G = (V,A)$ e $G' = (V',A')$ são **isomorfos** se existir uma função bijetora $\boldsymbol{f: V \rightarrow V'}$, tal que $(u,v) \in A$, **se e somente se**, $(f(u), f(v)) \in A'$

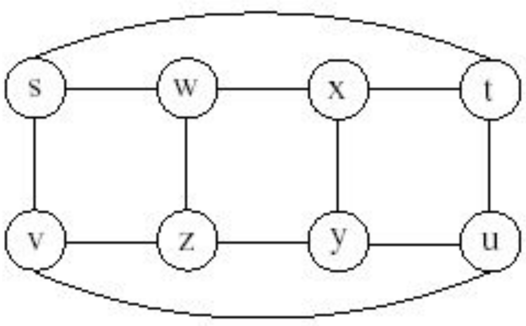
Outras classificações de grafos

Dois grafos $G = (V,A)$ e $G' = (V',A')$ são **isomorfos** se existir uma função bijetora ***f: V → V'***, tal que $(u,v) \in A$, **se e somente se**, $(f(u), f(v)) \in A'$

f: V → V'

f(0) = v
f(1) = s
f(4) = z
f(5) = w
f(7) = y
f(6) = x
f(3) = u
f(2) = t

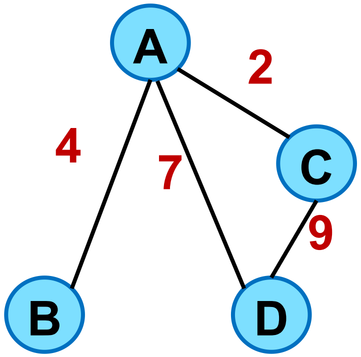




Fonte: adaptado do material da profa. Denise Guliato

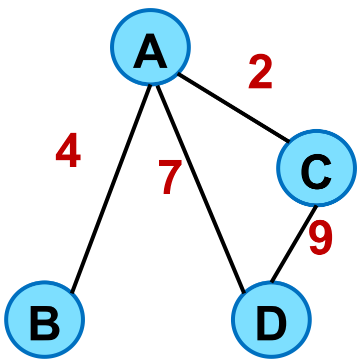
Outras classificações de grafos

Grafo ponderado: possui peso associado às arestas



Outras classificações de grafos

Grafo ponderado: possui peso associado às arestas



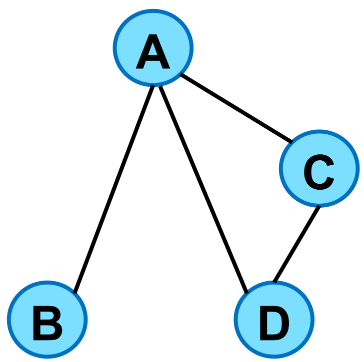
Muito útil para atribuir valores às relações

Ex: distância entre as cidades, *throughput* das conexões da rede, custo das transações, etc.

Outras classificações de grafos

Grafo hamiltoniano: possui um caminho que contém apenas uma ocorrência de todos os **vértices**

- Se o 1o vértice for igual ao último, temos um **ciclo hamiltoniano**



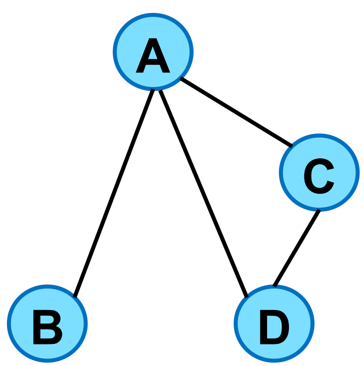
caminho hamiltoniano: (D,C,A,B)

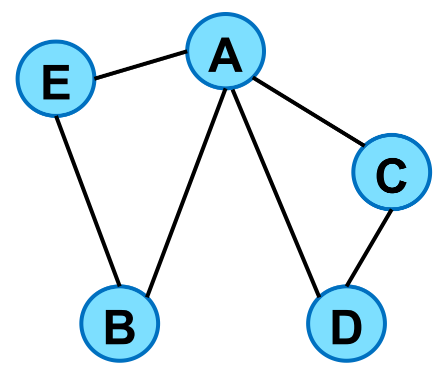
Outras classificações de grafos

Grafo hamiltoniano: possui um caminho que contém apenas uma ocorrência de todos os **vértices**

- Se o 1o vértice for igual ao último, temos um **ciclo hamiltoniano**

Grafo euleriano: possui um caminho que utiliza cada **aresta** do grafo uma única vez





caminho hamiltoniano: (D,C,A,B)

caminho euleriano: (A,C,D,A,B,E,A)

Subgrafos

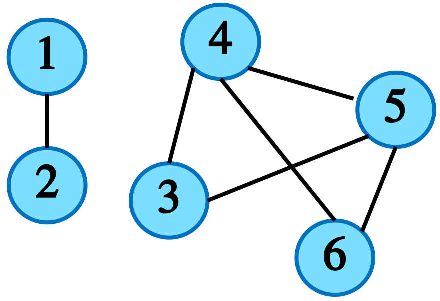
Subgrafos são "pedaços" remanescentes de um grafo após a remoção de vértices e/ou arestas

Definição:

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.
- Dado um conjunto $V' \subseteq V$, o subgrafo induzido por V' é o grafo $G' = (V', A')$, onde $A' = \{(u, v) \in A | u, v \in V'\}$.

Exemplo de subgrafo

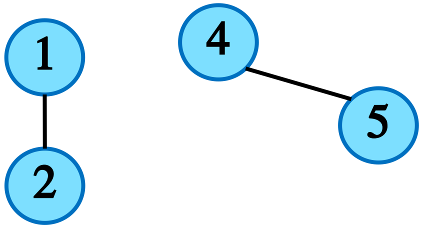
Considere o grafo:



$V : \{1,2,3,4,5,6\}$

$A : \{(1,2), (3,4), (3,5), (4,5), (4,6), (5,6)\}$

Subgrafo induzido pela retirada dos vértices {3, 6}:

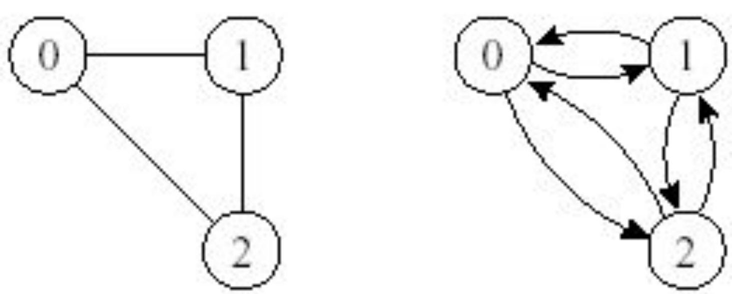


$V' : \{1,2,4,5\}$

$A' : \{(1,2) , (4,5)\}$

Versão Direcionada de um Grafo Não Direcionado

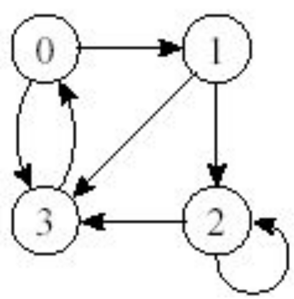
- A versão direcionada de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é um grafo direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $(u, v) \in A$.
- Cada aresta não direcionada (u, v) em G é substituída por duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u)

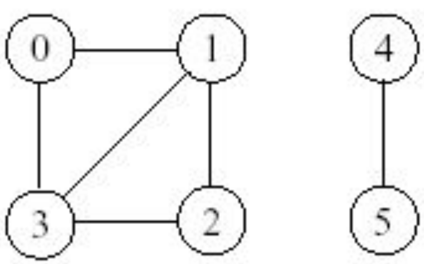


Versão Não Direcionada de um Grafo Direcionado

- A versão não direcionada de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um grafo não direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in A$.

- A versão não direcionada contém as arestas de G sem a direção e sem os *self-loops*.





Problemas de processamento de grafos

Relacionados com os caminhos:

Existe um caminho entre os vértices *x* e *y*?

Qual é o caminho mais curto entre *x* e *y*?

Relacionados com os ciclos:

Existe um ciclo no grafo?

Existe um ciclo que usa cada aresta exatamente uma vez (ciclo de Euler)?

Existe um ciclo que usa cada vértice exatamente uma vez (ciclo de Hamilton)?

Relacionados à conectividade:

Todos os vértices estão conectados entre si (grafo completo)?

Qual é a melhor maneira de conectar todos os vértices (árvore geradora mínima)?

Existe um vértice que ao ser removido disconecta o grafo (biconectividade)?

Grafos: tipo abstrato de dados (TAD)

Antes de lidar com esses problemas é importante tratar os grafos como um **Tipo Abstrato de Dados (TAD)**

Bibliografia

Slides adaptados do material do Prof. Dr. Marcelo K. Albertini e da Profa. Dra. Denise Guliato.

BACKES, A. Linguagem C Descomplicada: portal de vídeo-aulas para estudo de programação. Disponível em: https://programacaodescomplicada.wordpress.com/indice/estrutura-de-dados/

CORMEN, T.H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática, Campus, 2002

ZIVIANI, N. Projeto de algoritmos: com implementações em Pascal e C (2ª ed.), Thomson, 2004

MORAES, C.R. Estruturas de Dados e Algoritmos: uma abordagem didática (2ª ed.), Futura, 2003