Algoritmos de Ordenação

Prof. Luiz Gustavo Almeida Martins

Introdução

- **Ordenação** é a tarefa de colocar um conjunto de dados em uma **determinada ordem**
  - **Outras denomições:** classificação e organização
  - Permite o **acesso mais eficiente** aos dados

Introdução

- **Ordenação** é a tarefa de colocar um conjunto de dados em uma **determinada ordem**
  - **Outras denomições:** classificação e organização
  - Permite o **acesso mais eficiente** aos dados

- É importante para **melhorar a eficiência** de outros processos computacionais
  - **Ex:** métodos de busca e intercalação (fusão), banco de dados, etc.

Introdução

- **Ordenação** é a tarefa de colocar um conjunto de dados em uma **determinada ordem**
  - **Outras denomições:** classificação e organização
  - Permite o **acesso mais eficiente** aos dados

- É importante para **melhorar a eficiência** de outros processos computacionais
  - **Ex:** métodos de busca e intercalação (fusão), banco de dados, etc.

- Os algoritmos de ordenação trabalham sobre **registros**
  - O **campo chave** é usado para controlar a ordenação
  - Muito usado na apresentação de listagens

Exemplo

Arquivo original

Nome	Idade
João	15
Daniel	60
Maria	32

chave = nome

Arquivo ordenado

Nome	Idade
Daniel	60
João	15
Maria	32

Exemplo

Arquivo original

Nome	Idade
João	15
Daniel	60
Maria	32

chave = idade

Arquivo ordenado

Nome	Idade
João	15
Maria	32
Daniel	60

Introdução

A **saída de um algoritmo de ordenação** deve satisfazer duas condições:

- Ser uma **permutação da entrada**

Introdução

A **saída de um algoritmo de ordenação** deve satisfazer duas condições:

- Ser uma **permutação da entrada**
- Estar em uma **ordem crescente ou decrescente**

Introdução

A **saída de um algoritmo de ordenação** deve satisfazer duas condições:

Ser uma **permutação da entrada**

Estar em uma **ordem crescente ou decrescente**

Exemplos:

Entrada: 6 5 7 1 2 4 3

Entrada: V U X Z Y

Introdução

A **saída de um algoritmo de ordenação** deve satisfazer duas condições:

Ser uma **permutação da entrada**

Estar em uma **ordem crescente ou decrescente**

Exemplos:

Entrada: 6 5 7 1 2 4 3
Saída: 1 2 3 4 5 6 7 (ordem crescente)

Entrada: V U X Z Y
Saída: U V X Y Z (ordem crescente)

Introdução

A **saída de um algoritmo de ordenação** deve satisfazer duas condições:

Ser uma **permutação da entrada**

Estar em uma **ordem crescente ou decrescente**

Exemplos:

Entrada: 6 5 7 1 2 4 3
Saída: 7 6 5 4 3 2 1 (ordem decrescente)

Entrada: V U X Z Y
Saída: Z Y X V U (ordem decrescente)

Classificação dos métodos de ordenação

Quanto à origem do arquivo:

- **Ordenação interna:** dados e processo na memória principal
  - Acesso direto e rápido aos dados
- **Ordenação externa:** dados na memória secundária e processo na memória principal
  - Acesso sequencial ou em grandes blocos

Classificação dos métodos de ordenação

Quanto à origem do arquivo:

Ordenação interna: dados e processo na memória principal

Acesso direto e rápido aos dados

Ordenação externa: dados na memória secundária e processo na memória principal

Acesso sequencial ou em grandes blocos

Quanto à estabilidade:

Método estável: algoritmo **preserva a ordem relativa original** dos registros com o mesmo valor de chave

Método não estável: não preserva a ordem em que os registros aparecem no arquivo original

Exemplo

Arquivo original

Nome	Idade
Maria	20
José	60
João	20

método estável

Nome	Idade
Maria	20
João	20
José	60

Arquivos ordenados

método não estável

Nome	Idade
João	20
Maria	20
José	60

Classificação dos métodos de ordenação

Quanto à movimentação:

- **Ordenação dos registros:** realiza a movimentação/cópia dos registros

- **Ordenação por ponteiros:** ordenação é feita sobre uma tabela auxiliar de ponteiros
  - **Não** movimenta os registros originais

Classificação dos métodos de ordenação

Quanto à movimentação:

- **Ordenação dos registros:** realiza a movimentação/cópia dos registros
- **Ordenação por ponteiros:** ordenação é feita sobre uma tabela auxiliar de ponteiros
  - **Não** movimenta os registros originais

Quanto à complexidade:

- **Algoritmos simples:** da ordem de $O(n^2)$
  - **Ex:** *bubble sort*
- **Algoritmos eficientes:** da ordem de $O(n \log n)$
  - **Ex:** *quick sort*

Classificação dos métodos de ordenação

Aspectos de eficiência:

- Adequação da simplicidade/tamanho do problema com o método usado
  - Relacionado com tempo de execução ou memória necessária

Classificação dos métodos de ordenação

Aspectos de eficiência:

- Adequação da simplicidade/tamanho do problema com o método usado
  - Relacionado com tempo de execução ou memória necessária

- Análise é feita pela contagem de **operações críticas**:
  - Comparações entre chaves
  - Movimentação de registros ou ponteiros

Classificação dos métodos de ordenação

Aspectos de eficiência:

- Adequação da simplicidade/tamanho do problema com o método usado
  - Relacionado com tempo de execução ou memória necessária

- Análise é feita pela contagem de **operações críticas**:
  - Comparações entre chaves
  - Movimentação de registros ou ponteiros

Questão: Por que estudar os algoritmos simples?

Classificação dos métodos de ordenação

Aspectos de eficiência:

- Adequação da simplicidade/tamanho do problema com o método usado
  - Relacionado com tempo de execução ou memória necessária

- Análise é feita pela contagem de **operações críticas**:
  - Comparações entre chaves
  - Movimentação de registros ou ponteiros

Questão: Por que estudar os algoritmos simples?

- Facilidade de implementação e entendimento
  - Ilustra com simplicidade os **princípios da ordenação por comparação**

Classificação dos métodos de ordenação

Aspectos de eficiência:

- Adequação da simplicidade/tamanho do problema com o método usado
  - Relacionado com tempo de execução ou memória necessária

- Análise é feita pela contagem de **operações críticas**:
  - Comparações entre chaves
  - Movimentação de registros ou ponteiros

Questão: Por que estudar os algoritmos simples?

- Facilidade de implementação e entendimento
  - Ilustra com simplicidade os **princípios da ordenação por comparação**

- Podem ser mais adequados em alguns casos
  - **Ex:** ordenação de **conjuntos pequenos**

Ordenação por "bolha" (*bubble sort*)

Algoritmo de ordenação **simples**

Não é recomendado para grandes volumes de dados

Ideia:

- Compara **pares de elementos adjacentes** (E_i e E_j)
- Se $E_i > E_j$, **troca as suas posições**
- Repete esse processo até o maior elemento estar no final do arranjo ou não ocorrer mais trocas

```
if ( E[i] > E[i+1]) {
        aux = E[i] ;
        E[i] = E[i+1] ;
        E[i+1] = aux ;
}
```

Código para a troca dos elementos

Bubble sort : 1ª iteração

	0	1	2	3	4	5
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**

Bubble sort : 1ª iteração

	0	1	2	3	4	5			
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	*E[i]*	*E[j]*	troca?
	0	1	2	3	4	5			
	3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**1**	sim

Bubble sort : 1ª iteração

	0	1	2	3	4	5			
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	*E[i]*	*E[j]*	troca?
	0	1	2	3	4	5			
	3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**1**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**6**	não

Bubble sort : 1ª iteração

	0	1	2	3	4	5			
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	*E[i]*	*E[j]*	troca?
	0	1	2	3	4	5			
	3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**1**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**6**	não
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**6**	**2**	sim

Bubble sort : 1ª iteração

	0	1	2	3	4	5			
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	*E[i]*	*E[j]*	troca?
	0	1	2	3	4	5			
	3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**1**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**6**	não
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**6**	**2**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**2**	**6**	**8**	**4**	**6**	**8**	não

Bubble sort : 1ª iteração

	0	1	2	3	4	5	*E[i]*	*E[j]*	troca?
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**			
	0	1	2	3	4	5			
	3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**1**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**6**	não
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**6**	**2**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**2**	**6**	**8**	**4**	**6**	**8**	não
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**2**	**6**	**8**	**4**	**8**	**4**	sim

Bubble sort : 1ª iteração

							E[i]	E[j]	troca?
	0	1	2	3	4	5			
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	*E[i]*	*E[j]*	troca?
	0	1	2	3	4	5			
	3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**1**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**6**	não
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**6**	**2**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**2**	**6**	**8**	**4**	**6**	**8**	não
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**2**	**6**	**8**	**4**	**8**	**4**	sim
	0	1	2	3	4	5			
fim	**1**	**3**	**2**	**6**	**4**	**8**			

Bubble sort : 1ª iteração

	0	1	2	3	4	5			
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	*E[i]*	*E[j]*	troca?
	0	1	2	3	4	5			
	3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**1**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**3**	**6**	não
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**6**	**2**	**8**	**4**	**6**	**2**	sim
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**2**	**6**	**8**	**4**	**6**	**8**	não
	0	1	2	3	4	5			
	1	**3**	**2**	**6**	**8**	**4**	**8**	**4**	sim
	0	1	2	3	4	5			
fim	**1**	**3**	**2**	**6**	**4**	**8**			

maior elemento estará na sua posição ordenada

Bubble sort : outras iterações

	0	1	2	3	4	5
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**

Bubble sort : outras iterações

início

0	1	2	3	4	5
3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**

1 ª iteração

0	1	2	3	4	5
1	**3**	**2**	**6**	**4**	**8**

Bubble sort : outras iterações

	0	1	2	3	4	5
início	**3**	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**

	0	1	2	3	4	5
1 ª iteração	**1**	**3**	**2**	**6**	**4**	**8**

	0	1	2	3	4	5
2ª iteração	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**

Bubble sort : outras iterações

início

0	1	2	3	4	5
3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**

1ª iteração

0	1	2	3	4	5
1	**3**	**2**	**6**	**4**	**8**

2ª iteração

0	1	2	3	4	5
1	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**

3ª iteração

0	1	2	3	4	5
1	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**

Bubble sort : outras iterações

início

0	1	2	3	4	5
3	**1**	**6**	**2**	**8**	**4**

1ª iteração

0	1	2	3	4	5
1	**3**	**2**	**6**	**4**	**8**

2ª iteração

0	1	2	3	4	5
1	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**

3ª iteração

0	1	2	3	4	5
1	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**

4ª iteração $\nexists$ troca (**dados estão ordenados**) - Fim do algoritmo

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux;

  /*controle do número de iterações (n-1)*/
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

      /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
      for (i=0; i < n-1; i++)

        if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
          /*Troca quando necessário*/
          aux = vetor[i];
          vetor[i] = vetor[i+1];
          vetor[i+1]=aux;
        }
}
```

Bubble sort : implementação

n elementos

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux;

  /*controle do número de iterações (n-1)*/
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

      /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
      for (i=0; i < n-1; i++)

        if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
          /*Troca quando necessário*/
          aux = vetor[i];
          vetor[i] = vetor[i+1];
          vetor[i+1]=aux;
        }
}
```

Bubble sort : implementação

n elementos

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux;

  /*controle do número de iterações (n-1)*/
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

     /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
     for (i=0; i < n-1; i++)

       if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
         /*Troca quando necessário*/
         aux = vetor[i];
         vetor[i] = vetor[i+1];
         vetor[i+1]=aux;
       }
}
```

(**n−1**) iterações

Bubble sort : implementação

n elementos

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux;

  /*controle do número de iterações (n-1)*/
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

      /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
      for (i=0; i < n-1; i++)

        if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
          /*Troca quando necessário*/
          aux = vetor[i];
          vetor[i] = vetor[i+1];
          vetor[i+1]=aux;
        }
}
```

(n−1) iterações

(n−1) comparações

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
 int i, iteracao, aux;

 /*controle do número de iterações (n-1)*/
 for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

     /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
     for (i=0; i < n-1; i++)

       if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
         /*Troca quando necessário*/
         aux = vetor[i];
         vetor[i] = vetor[i+1];
         vetor[i+1]=aux;
       }
}
```

***n* elementos**

(***n*−1**) iterações

×

(***n*−1**) comparações

=

g(*n*) = (*n*−1)²

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
 int i, iteracao, aux;

 /*controle do número de iterações (n-1)*/
 for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

     /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
     for (i=0; i < n-1; i++)

       if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
         /*Troca quando necessário*/
         aux = vetor[i];
         vetor[i] = vetor[i+1];
         vetor[i+1]=aux;
       }
}
```

Quantas trocas são realizadas ?

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux;

  /*controle do número de iterações (n-1)*/
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

     /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
     for (i=0; i < n-1; i++)

       if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
         /*Troca quando necessário*/
         aux = vetor[i];
         vetor[i] = vetor[i+1];
         vetor[i+1]=aux;
       }
}
```

Quantas trocas são realizadas ?

Melhor caso (vetor ordenado): nenhuma troca

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux;

  /*controle do número de iterações (n-1)*/
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

     /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
     for (i=0; i < n-1; i++)

       if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
         /*Troca quando necessário*/
         aux = vetor[i];
         vetor[i] = vetor[i+1];
         vetor[i+1]=aux;
       }
}
```

$\boxed{comparações(n) = (n - 1)^2}$

$\boxed{\text{Melhor caso: } trocas(n) = 0}$

$$T(n) = (n-1)^2 + 0 = n^2 - 2n + 1 = O(n^2)$$

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux;

  /*controle do número de iterações (n-1)*/
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

     /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
     for (i=0; i < n-1; i++)

       if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
         /*Troca quando necessário*/
         aux = vetor[i];
         vetor[i] = vetor[i+1];
         vetor[i+1]=aux;
       }
}
```

Iteração	Qtde. de trocas
1	n-1
2	n-2
3	n-3
4	n-4
...	
n-1	n-(n-1) = 1

Quantas trocas são realizadas ?

Pior caso (ordem inversa):
$(n\ (n-1))\ /\ 2$

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux;

  /*controle do número de iterações (n-1)*/
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++)

     /*repeticao interna, percorrimento do vetor (n-1)*/
     for (i=0; i < n-1; i++)

       if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
         /*Troca quando necessário*/
         aux = vetor[i];
         vetor[i] = vetor[i+1];
         vetor[i+1]=aux;
       }
}
```

$$comparações(n) = (n - 1)^2$$

Pior caso: $trocas(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

$$T(n) = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 - 5n + 2}{2} = O(n^2)$$

Bubble sort : implementação

Questões:

O método é estável?

Bubble sort : implementação

Questões:

O método é estável?

Sim. A ordem relativa dos elementos iguais são mantidas.

Bubble sort : implementação

Questões:

O método é estável?

Sim. A ordem relativa dos elementos iguais são mantidas.

O algoritmo apresentado pode ser melhorado?

Bubble sort : implementação

Questões:

O método é estável?

Sim. A ordem relativa dos elementos iguais são mantidas.

O algoritmo apresentado pode ser melhorado?

Sim. Elementos já ordenados não precisam ser novamente comparados

```
...
for (iteracao = n-1; interacao > 0; iteracao--)
        for (i = 0; i < iteracao; i++)
...
```

Bubble sort : implementação

Questões:

O método é estável?

Sim. A ordem relativa dos elementos iguais são mantidas.

O algoritmo apresentado pode ser melhorado?

Sim. Elementos já ordenados não precisam ser novamente comparados

```
...
for (iteracao = n-1; interacao > 0; iteracao--)
        for (i = 0; i < iteracao; i++)
...
```

Se **não houver trocas** em uma iteração, o vetor já está ordenado e o algoritmo pode ser encerrado

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort2 (int vetor[], int n){
  int i, iteracao, aux, troca;

  for (iteracao = n-1; iteracao > 0; iteracao--)

      troca = 0;
      for (i=0; i < iteracao; i++)
        if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
          aux = vetor[i];
          vetor[i] = vetor[i+1];
          vetor[i+1]=aux;
          troca = 1;
        }

      if (troca == 0)
          break;
}
```

Bubble sort : implementação

```
void bubblesort2 (int vetor[], int n){
 int i, iteracao, aux, troca;

 for (iteracao = n-1; iteracao > 0; iteracao--)

    troca = 0;
    for (i=0; i < iteracao; i++)
      if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
        aux = vetor[i];
        vetor[i] = vetor[i+1];
        vetor[i+1]=aux;
        troca = 1;
      }

    if (troca == 0)
        break;
}
```

***n* elementos**

Melhor caso: 1 iteração
Pior caso: (***n-1***) iterações

X

iteracao comparações
(varia a cada iteração)

=

Melhor caso: $g(n) = n\text{-}1 = \boldsymbol{\Omega(n)}$
Pior caso: $g(n) = (n^2-n)/2 = \boldsymbol{O(n^2)}$

Ordenação por "seleção" (*selection sort*)

Um dos algoritmos mais **simples** de ordenação

Ideia:

- Selecione o **menor elemento** da região não ordenada
- Troque-o com o 1º elemento dessa região
- Repita esse processo até restar um único elemento na região não ordenada

Ordenação por "seleção" (*selection sort*)

Um dos algoritmos mais **simples** de ordenação

Ideia:

- Selecione o **menor elemento** da região não ordenada
- Troque-o com o 1º elemento dessa região
- Repita esse processo até restar um único elemento na região não ordenada

Recomendado para **pequenos conjuntos** de dados e para arquivos com **registros grandes**

- Devido ao seu comportamento para a troca de registros

Ordenação por "seleção" (*selection sort*)

- Um dos algoritmos mais **simples** de ordenação

- **Ideia:**
  - Selecione o **menor elemento** da região não ordenada
  - Troque-o com o 1º elemento dessa região
  - Repita esse processo até restar um único elemento na região não ordenada

- Recomendado para **pequenos conjuntos** de dados e para arquivos com **registros grandes**
  - Devido ao seu comportamento para a troca de registros

- Não indicado para grandes conjuntos e **arquivos já ordenados**

Selection sort : exemplo de funcionamento

Iteração

Início 8 5 4 3 6

Selection sort : exemplo de funcionamento

Iteração		**Menor elemento**
Início	8 5 4 3 6	8 5 4 **3** 6
2	**3** 5 4 8 6	

Selection sort : exemplo de funcionamento

Iteração		**Menor elemento**
Início	8 5 4 3 6	8 5 4 **3** 6
2	**3** 5 4 8 6	**3** 5 **4** 8 6
3	**3** **4** 5 8 6	

Selection sort : exemplo de funcionamento

Iteração		**Menor elemento**
Início	8 5 4 3 6	8 5 4 **3** 6
2	**3** 5 4 8 6	**3** 5 **4** 8 6
3	**3** **4** 5 8 6	**3** **4** **5** 8 6
4	**3** **4** **5** 8 6	

Selection sort : exemplo de funcionamento

Iteração		**Menor elemento**
Início	8 5 4 3 6	8 5 4 **3** 6
2	**3** 5 4 8 6	**3** 5 **4** 8 6
3	**3** **4** 5 8 6	**3** **4** **5** 8 6
4	**3** **4** **5** 8 6	**3** **4** **5** 8 **6**
5	**3** **4** **5** **6** 8	

Selection sort : exemplo de funcionamento

Iteração		**Menor elemento**
Início	8 5 4 3 6	8 5 4 **3** 6
2	**3** 5 4 8 6	**3** 5 **4** 8 6
3	**3** **4** 5 8 6	**3** **4** **5** 8 6
4	**3** **4** **5** 8 6	**3** **4** **5** 8 **6**
5	**3** **4** **5** **6** 8	
Fim	**3** **4** **5** **6** **8**	(**vetor ordenado**)

Selection sort : implementação

```
void selectionsort (int vetor[], int n) {
  int i, iteracao, aux, menor;
  // Controle do número de iterações
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++) {

      // Busca o menor elemento
      menor = iteracao;
      for (i=iteracao+1; i < n; i++)
        if (vetor[i] < vetor[menor])
          menor = i;

       // Troca os elementos
       if (iteracao != menor) {
          aux = vetor[iteracao];
          vetor[iteracao] = vetor[menor];
          vetor[menor] = aux;
      }
   }
}
```

Selection sort : implementação

```
void selectionsort (int vetor[], int n) {
  int i, iteracao, aux, menor;
  // Controle do número de iterações
  for (iteracao = 0; iteracao < n-1; iteracao++) {

      // Busca o menor elemento
      menor = iteracao;
      for (i=iteracao+1; i < n; i++)
        if (vetor[i] < vetor[menor])
          menor = i;

      // Troca os elementos
      if (iteracao != menor) {
          aux = vetor[iteracao];
          vetor[iteracao] = vetor[menor];
          vetor[menor] = aux;
      }
  }
}
```

Propriedades:

Ordenação **NÃO estável**

O(*n*²) para comparações: $g(n) = (n^2-n)/2$

O(*n*) para trocas: $g(n) = n$

O(1) para espaço extra

Ordenação por "inserção" (*insertion sort*)

Algoritmo de ordenação **simples** baseado na **organização de cartas de baralho** na mão

Ordenação por "inserção" (*insertion sort*)

Algoritmo de ordenação **simples** baseado na **organização de cartas de baralho** na mão

Ideia:

- Selecione um elemento por vez da região não ordenada
- Coloque-o na posição correta em relação aos elementos já ordenados
- Repita esse processo para todos os elementos

Ordenação por "inserção" (*insertion sort*)

Algoritmo de ordenação **simples** baseado na **organização de cartas de baralho** na mão

Ideia:

- Selecione um elemento por vez da **região não ordenada**
- Coloque-o na **posição correta** em relação aos **elementos já ordenados**
- Repita esse processo para todos os elementos

Indicado para:

- Conjuntos **pequenos** de dados
- Arquivos **quase ordenados**
  - Devido ao comportamento das trocas

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Analogia com as cartas de baralho:

Distribuição das cartas:	**Organização na mão:**
Recebe a carta 10	**10**

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Analogia com as cartas de baralho:

Distribuição das cartas:	**Organização na mão:**
Recebe a carta 10	**10**
Recebe a carta 5	**5** 10

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Analogia com as cartas de baralho:

Distribuição das cartas:	**Organização na mão:**
Recebe a carta 10	**10**
Recebe a carta 5	**5** 10
Recebe a carta 4	**4** 5 10

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Analogia com as cartas de baralho:

Distribuição das cartas:	**Organização na mão:**
Recebe a carta 10	**10**
Recebe a carta 5	**5** 10
Recebe a carta 4	**4** 5 10
Recebe a carta 3	**3** 4 5 10

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Analogia com as cartas de baralho:

Distribuição das cartas:	**Organização na mão:**
Recebe a carta 10	**10**
Recebe a carta 5	**5** 10
Recebe a carta 4	**4** 5 10
Recebe a carta 3	**3** 4 5 10
Recebe a carta 6	3 4 5 **6** 10

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Analogia com as cartas de baralho:

Distribuição das cartas:	**Organização na mão:**
Recebe a carta 15	**10**
Recebe a carta 5	**5** 10
Recebe a carta 4	**4** 5 10
Recebe a carta 3	**3** 4 5 10
Recebe a carta 6	3 4 5 **6** 10

Questão: como fazer esse procedimento em um vetor dado que **não há uma visão global** dos elementos?

Insertion sort : exemplo de funcionamento

- **Solução:** comparar com os elementos já ordenados
  - Percorrer na **ordem contrária** (da direita para a esquerda)
    - Garante **eficiência** (pára sem verificar todos) **e estabilidade**

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Solução: comparar com os elementos já ordenados

Percorrer na **ordem contrária** (da direita para a esquerda)

Garante **eficiência** (pára sem verificar todos) **e estabilidade**

Iteração

Organização

Início 8 5 4 3 9 → 5 **8** 4 3 9

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Solução: comparar com os elementos já ordenados

Percorrer na **ordem contrária** (da direita para a esquerda)

Garante **eficiência** (pára sem verificar todos) **e estabilidade**

Iteração		**Organização**	
Início	8 5 4 3 9 →		5 8 4 3 9
2	5 8 4 3 9 →	5 4 8 3 9 →	4 5 8 3 9

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Solução: comparar com os elementos já ordenados

Percorrer na **ordem contrária** (da direita para a esquerda)

Garante **eficiência** (pára sem verificar todos) **e estabilidade**

Iteração		Organização	
Início	8 5 4 3 9	→	5 8 4 3 9
2	5 8 4 3 9	5 4 8 3 9	4 5 8 3 9
3	4 5 8 6 9	4 5 6 8 9	4 5 6 8 9

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Solução: comparar com os elementos já ordenados

Percorrer na **ordem contrária** (da direita para a esquerda)

Garante **eficiência** (pára sem verificar todos) **e estabilidade**

Iteração		Organização	
Início	8 5 4 3 9		5 8 4 3 9
2	5 8 4 3 9	5 4 8 3 9	4 5 8 3 9
3	4 5 8 6 9	4 5 6 8 9	4 5 6 8 9
4	4 5 6 8 9		4 5 6 8 9

Insertion sort : exemplo de funcionamento

Solução: comparar com os elementos já ordenados

Percorrer na **ordem contrária** (da direita para a esquerda)

Garante **eficiência** (pára sem verificar todos) **e estabilidade**

Iteração		**Organização**	
Início	8 5 4 3 9	→	5 8 4 3 9
2	5 8 4 3 9	→ 5 4 8 3 9 →	4 5 8 3 9
3	4 5 8 6 9	→ 4 5 6 8 9 →	4 5 6 8 9
4	4 5 6 8 9	→	4 5 6 8 9
Fim	4 5 6 8 9		

(**vetor ordenado**)

Insertion sort : implementação

```
void insertionsort (int vetor[], int n) {
  int i, iteracao, aux, elem;
  // Controle do número de iterações
  for (iteracao = 1; iteracao < n; iteracao++) {

      // Busca posicao do elemento
      elem = vetor[iteracao];
      i = iteracao-1;
      while (i >= 0 && vetor[i] > elem) {
          vetor[i+1] = vetor[i];
          i--;
      }
      // Posiciona elemento
      vetor[i+1] = elem;
   }
}
```

Insertion sort : implementação

```
void insertionsort (int vetor[], int n) {
  int i, iteracao, aux, elem;
  // Controle do número de iterações
  for (iteracao = 1; iteracao < n; iteracao++) {

     // Busca posicao do elemento
     elem = vetor[iteracao];
     i = iteracao-1;
     while (i >= 0 && vetor[i] > elem) {
        vetor[i+1] = vetor[i];
        i--;
     }
     // Posiciona elemento
     vetor[i+1] = elem;
  }
}
```

***n* elementos**

(***n*−1**) iterações

×

Melhor caso: 1 comparação
Pior caso: (***n*-*1***) comparações

=

Melhor caso: $g(n) = n\text{-}1 = \boldsymbol{\Omega(n)}$
Pior caso: $g(n) = (n^2 - n)/2 = \boldsymbol{O(n^2)}$

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Algoritmo de ordenação **eficiente** que utiliza a estratégia "**dividir para conquistar**"

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Algoritmo de ordenação **eficiente** que utiliza a estratégia "**dividir para conquistar**"

Ideia: núcleo do método está na **partição** de uma lista não ordenada

A partição rearranja os elementos de uma lista $L[1...n]$ e devolve um índice $i \in \{1...n\}$, tal que:

$$L[1...i-1] \leq L[i] \leq L[i+1...n]$$

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Algoritmo de ordenação **eficiente** que utiliza a estratégia "**dividir para conquistar**"

Ideia: núcleo do método está na **partição** de uma lista não ordenada

A partição rearranja os elementos de uma lista $L[1...n]$ e devolve um índice $i \in \{1...n\}$, tal que:

$$L[1...i-1] \leq L[i] \leq L[i+1...n]$$

O elemento $v = L[i]$ é chamado de **pivô**

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

- **Vantagem:** excelente desempenho
  - Forma **mais rápida ordenação** baseada em comparações de arranjos
    - Se bem implementado, executa quase sempre em $\theta(n \log n)$
    - No pior caso pode executar em tempo $O(n^2)$

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Vantagem: excelente desempenho

- Forma **mais rápida ordenação** baseada em comparações de arranjos
  - Se bem implementado, executa quase sempre em $\theta(n \log n)$
  - No pior caso pode executar em tempo $O(n^2)$

Desvantagens:

- Implementação **recursiva**
- **Não é estável**
- Ineficiente para listas ordenadas ou quando pivô é mal escolhido
  - Partições extremamente desiguais

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Algoritmo:

1. Iniciar com uma lista *L* de *n* itens

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Algoritmo:

1. Iniciar com uma lista *L* de *n* itens
2. Escolher um item pivô *v*, dentre os elementos de *L*

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Algoritmo:

1. Iniciar com uma lista *L* de *n* itens
2. Escolher um item pivô *v*, dentre os elementos de *L*
3. Particionar *L* em duas listas não ordenadas: *L1* e *L2*
   - *L1*: conterá todas as chaves menores que *v*
   - *L2*: conterá todas as chaves maiores que v
   - Elementos iguais a *v* podem fazer parte de *L1* ou *L2*
   - O pivô *v* não faz parte de nenhuma das duas listas

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Algoritmo:

1. Iniciar com uma lista *L* de *n* itens
2. Escolher um item pivô *v*, dentre os elementos de *L*
3. Particionar *L* em duas listas não ordenadas: *L1* e *L2*
   - *L1*: conterá todas as chaves menores que *v*
   - *L2*: conterá todas as chaves maiores que v
   - Elementos iguais a *v* podem fazer parte de *L1* ou *L2*
   - O pivô *v* não faz parte de nenhuma das duas listas
4. Ordenar:
   1. *L1* recursivamente, obtendo a lista ordenada *S1*
   2. *L2* recursivamente, obtendo a lista ordenada *S2*

Ordenação "rápida" (*quick sort*)

Algoritmo:

1. Iniciar com uma lista L de n itens
2. Escolher um item pivô v, dentre os elementos de L
3. Particionar L em duas listas não ordenadas: $L1$ e $L2$
   - $L1$: conterá todas as chaves menores que v
   - $L2$: conterá todas as chaves maiores que v
   - Elementos iguais a v podem fazer parte de $L1$ ou $L2$
   - O pivô v não faz parte de nenhuma das duas listas
4. Ordenar:
   1. $L1$ recursivamente, obtendo a lista ordenada $S1$
   2. $L2$ recursivamente, obtendo a lista ordenada $S2$
5. Concatenar $S1$, v, $S2$ produzindo a lista ordenada S

Quick sort: exemplo 1

Considerando o pivô como o 1º elemento da lista

Na fase de partição formaremos duas sub-listas: *L1* e *L2*

	4	7	1	5	9	3	0
L1	1	3	0				
L2	7	5	9				

Quick sort: exemplo 1

Considerando o pivô como o 1º elemento da lista

Na fase de partição formaremos duas sub-listas: *L1* e *L2*

	4	7	1	5	9	3	0
L1	1	3	0				
L2	7	5	9				

L1 é particionada recursivamente

Como alcançamos o **caso base**, as sub-listas são concatenadas

	1	3	0
L1.1	0		
L1.2	3		
S1	0	1	3

Quick sort: exemplo 1

	4	7	1	5	9	3	0
S1	0	1	3				
L2	7	5	9				

Quick sort: exemplo 1

	4	7	1	5	9	3	0
S1	0	1	3				
L2	7	5	9				

L2 é particionada recursivamente

Como alcançamos o **caso base**, as sub-listas são concatenadas

	7	5	9
L2.1	5		
L2.2	9		
S2	5	7	9

Quick sort: exemplo 1

	4	7	1	5	9	3	0
S1	0	1	3				
S2	5	7	9				

As sub-listas retornadas em cada iteração recursiva são concatenadas até obter a lista ordenada *S*

0	1	3	4	5	7	9

Quick sort: exemplo 2

Considere um arranjo de números ordenados:

0	1	3	4	5	7	9

Qual é o custo em tempo de execução do algoritmo?

Quick sort: exemplo 2

Considere um arranjo de números ordenados:

0	1	3	4	5	7	9

Qual é o custo em tempo de execução do algoritmo?

O(n^2)

Neste caso, usar o 1º elemento como pivô não é uma boa estratégia

	0	1	3	4	5	7	9
L1							
L2	1	3	4	5	7	9	

Quick sort: escolha do pivô

- A escolha do pivô afeta significativamente o desempenho do algoritmo
  - Fase de **partição é a parte crítica**

- Existem várias estratégias possíveis:
  - 1º elemento
  - Elemento do meio
  - Elemento mais próximo da média
  - Mediana
  - Entre outros

Quick sort: exemplo 3

Uso do elemento do meio como pivô:

	1	2	3	4	3	2	1
L1	1	2	3	3	2	1	
L2							

Quick sort: exemplo 3

Uso do elemento do meio como pivô:

	1	2	3	4	3	2	1
L1	1	2	3	3	2	1	
L2							

	1	2	3	3	2	1
L1.1	1	2	2	1		
L1.2	3					

Quick sort: exemplo 3

Uso do elemento do meio como pivô:

	1	2	3	4	3	2	1
L1	1	2	3	3	2	1	
L2							

	1	2	3	3	2	1
L1.1	1	2	2	1		
L1.2	3					

	1	2	2	1
L1.1.1	1	1		
L1.1.2	2			

Quick sort: exemplo 3

Uso do elemento do meio como pivô:

	1	2	3	4	3	2	1
L1	1	2	3	3	2	1	
L2							

	1	2	3	3	2	1
L1.1	1	2	2	1		
L1.2	3					

	1	2	2	1
L1.1.1	1	1		
L1.1.2	2			

	1	1
L1.1.1.1	1	
L1.1.1.2		

Quick sort: exemplo 3

Uso do elemento do meio como pivô:

	1	1
$L_{1.1.1.1}$	1	
$L_{1.1.1.2}$		
$S_{1.1.1}$	1	1

Quick sort: exemplo 3

Uso do elemento do meio como pivô:

	1	1
L1.1.1.1	1	
L1.1.1.2		
S1.1.1	1	1

	1	2	2	1
S1.1.1	1	1		
S1.1.2	2			
S1.1	1	1	2	2

Quick sort: exemplo 3

Uso do elemento do meio como pivô:

	1	1
$L_{1.1.1.1}$	1	
$L_{1.1.1.2}$		
$S_{1.1.1}$	1	1

	1	2	2	1
$S_{1.1.1}$	1	1		
$S_{1.1.2}$	2			
$S_{1.1}$	1	1	2	2

	1	2	3	3	2	1
$S_{1.1}$	1	1	2	2		
$S_{1.2}$	3					
S_1	1	1	2	2	3	3

Quick sort: exemplo 3

Uso do elemento do meio como pivô:

	1	2	3	3	2	1
S1.1	1	1	2	2		
S1.2	3					
S1	1	1	2	2	3	3

	1	2	3	4	3	2	1
S1	1	1	2	2	3	3	
S2							
S	1	1	2	2	3	3	4

Quick sort: escolha do pivô

- Para a escolha do pivô mais adequado é necessário conhecer a **distribuição dos dados**
  - Usa o elemento mais adequado à distribuição

Quick sort: escolha do pivô

- Para a escolha do pivô mais adequado é necessário conhecer a **distribuição dos dados**
  - Usa o elemento mais adequado à distribuição

- Se a distribuição não é conhecida, a escolha deve ser **aleatória**
  - Na média, gera uma partição na proporção **1/4** e **3/4**
  - Se essa proporção ocorrer em **metade das partições**, o tempo de execução esperado é $\boldsymbol{\theta(n \log n)}$

Quick sort: escolha do pivô

Mediana de três:

Estratégia aleatória usada para aumentar as chances de obter o custo $\boldsymbol{\theta(n \log n)}$

Quick sort: escolha do pivô

Mediana de três:

Estratégia aleatória usada para aumentar as chances de obter o custo **O(*n* log *n*)**

Ideia: escolher 3 elementos aleatórios e adotar como pivô o elemento central (mediana entre os 3)

Quick sort: escolha do pivô

Mediana de três:

Estratégia aleatória usada para aumentar as chances de obter o custo **O(*n* log *n*)**

Ideia: escolher 3 elementos aleatórios e adotar como pivô o elemento central (mediana entre os 3)

Indicada apenas na **ordenação de listas grandes**

- Para listas pequenas deve-se usar a escolha aleatória simples
  - O custo da estratégia não compensa

Quick sort em listas encadeadas

Vantajoso tratar o problema como a **partição em 3 listas**:

- *L1* contendo chaves **menores** que o pivô
- *L2* contendo chaves **maiores** que o pivô
- *Lv* contendo chaves **iguais** ao pivô

Ordenação é feita apenas em *L1* e *L2*

- *Lv* não precisa ser ordenado

A concatenação é realizada na forma: S1 → *Lv* → *S2*

	5	7	5	0	6	5	5
L1	0						
L2	7	6					
Lv	5	5	5	5			

Quick sort em arranjos (listas sequenciais)

- Algoritmo realiza ordenação ***in-place***
  - Utiliza **movimentações** dentro do próprio arranjo
  - **NÃO usa de memória auxiliar**

- Deve-se considerar as características do problema para evitar casos de execução quadrática
  - Mesmo algoritmos de livros podem ser lentos

Quick sort em arranjos

Problema: Dado um arranjo *A*, ordene os itens de *A[p]* até *A[r]*

Algoritmo:

Escolha um pivô *v* e substitua-o pelo último item (*A[r]*)

Crie 2 variáveis de controle: *i* = *p*-1 e *j* = *r*

	3	8	4	0	9	7	5
	p		v				r
	3	8	5	0	9	7	4
i							j

O arranjo será ordenado para as posições maiores que *i* e menores que *j*

Quicksort em arranjos: algoritmo

3	8	5	0	9	7	4

i j

Invariantes:

Elementos **à esquerda de *i*** são **menores ou iguais** ao pivô

Elementos **à direita de *j*** são **maiores ou iguais** ao pivô

Operações:

Incrementar *i* até encontrar chave maior ou igual ao pivô

Decrementar *j* até encontrar chave menor ou igual ao pivô

Trocar itens *A[i]* e *A[j]*

Parar quando $i \geq j$

Substituir o pivô com o elemento na posição *i*

Quick sort : implementação

```
int quicksort(int a[], int p, int r) {
  int t;
  if (p < r) {
    int v = (rand()%(r-p))+p;
    int pivo = a[v]; a[v] = a[r]; a[r] = pivo; // Opcional
    int i = p-1; int j = r;

    do {
            do { i++; } while (a[i] < pivo);
            do { j--; } while ((a[j] > pivo) && (j > p));
            if (i < j) {t = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = t;} // troca i com j
    } while (i<j);
    a[r] = a[i]; a[i] = pivo; // Opcional

    // chamadas recursivas
    quicksort(a, p, i-1); quicksort(a, i+1, r);
  }
}
```

Quick sort: análise do algoritmo

O desempenho do algoritmo está relacionado como a **divisão em subproblemas**

Pior caso: gera-se uma partição de tamanho ***n-1*** e outra de tamanho **0** em todas as chamadas recursivas

Melhor caso: o problema é dividido ao meio, ou seja, uma partição tem tamanho ***floor(n/2)*** e outra ***ceil(n/2)-1***

Caso médio: se aproxima do melhor caso

Quick sort: análise do algoritmo

```
void quicksort(int a[], int p, int r) {
  int t;
  if (p < r) {
    int v =(rand()%(r-p))+p; // escolhe pivo aleatoriamente
    int pivo = a[v];
    a[v] = a[r]; a[r] = pivo; // troca pivo e ultimo elemento
    int i = p-1; int j = r;
    do {
      do { i++;} while  (a[i] < pivo);
      do { j--;} while ((a[j] > pivo) && (j > p));
      if (i < j){
        t = a[i], a[i] = a[j], a[j] = t; // troca i com j
      }
    } while (i<j);

    a[r] = a[i], a[i] = pivo;
    quicksort(a, p, i-1);
    quicksort(a, i+1, r);
  }
}
```

Processo de divisão do vetor percorre todo vetor $\theta(n)$

Quick sort: análise do algoritmo

```
void quicksort(int a[], int p, int r) {
  int t;
  if (p < r) {
    int v =(rand()%(r-p))+p; // escolhe pivo aleatoriamente
    int pivo = a[v];
    a[v] = a[r]; a[r] = pivo; // troca pivo e ultimo elemento
    int i = p-1; int j = r;
    do {
      do { i++;} while  (a[i] < pivo);
      do { j--;} while ((a[j] > pivo) && (j > p));
      if (i < j){
        t = a[i], a[i] = a[j], a[j] = t; // troca i com j
      }
   } while (i<j);

   a[r] = a[i], a[i] = pivo;
   quicksort(a, p, i-1);
   quicksort(a, i+1, r);
  }
}
```

Processo de divisão do vetor percorre todo vetor $\theta(n)$

\+

Tempo da 1ª parte

Quick sort: análise do algoritmo

```
void quicksort(int a[], int p, int r) {
  int t;
  if (p < r) {
    int v =(rand()%(r-p))+p; // escolhe pivo aleatoriamente
    int pivo = a[v];
    a[v] = a[r]; a[r] = pivo; // troca pivo e ultimo elemento
    int i = p-1; int j = r;
    do {
      do { i++;} while  (a[i] < pivo);
      do { j--;} while ((a[j] > pivo) && (j > p));
      if (i < j){
        t = a[i], a[i] = a[j], a[j] = t; // troca i com j
      }
    } while (i<j);

    a[r] = a[i], a[i] = pivo;
    quicksort(a, p, i-1);
    quicksort(a, i+1, r);
  }
}
```

Processo de divisão do vetor percorre todo vetor θ(n)

+

Tempo da 1ª parte

+

Tempo da 2ª parte

Quick sort: análise do algoritmo

```
void quicksort(int a[], int p, int r) {
  int t;
  if (p < r) {
    int v =(rand()%(r-p))+p; // escolhe pivo aleatoriamente
    int pivo = a[v];
    a[v] = a[r]; a[r] = pivo; // troca pivo e ultimo elemento
    int i = p-1; int j = r;
    do {
      do { i++;} while  (a[i] < pivo);
      do { j--;} while ((a[j] > pivo) && (j > p));
      if (i < j){
        t = a[i], a[i] = a[j], a[j] = t; // troca i com j
      }
    } while (i<j);

    a[r] = a[i], a[i] = pivo;
    quicksort(a, p, i-1);
    quicksort(a, i+1, r);
  }
}
```

Pior caso

Processo de divisão do vetor percorre todo vetor θ(n)

+

primeira parte: $T(n-1)$

+

segunda parte: 0

Quick sort: análise do algoritmo

```
void quicksort(int a[], int p, int r) {
  int t;
  if (p < r) {
    int v =(rand()%(r-p))+p; // escolhe pivo aleatoriamente
    int pivo = a[v];
    a[v] = a[r]; a[r] = pivo; // troca pivo e ultimo elemento
    int i = p-1; int j = r;
    do {
      do { i++;} while  (a[i] < pivo);
      do { j--;} while ((a[j] > pivo) && (j > p));
      if (i < j){
        t = a[i], a[i] = a[j], a[j] = t; // troca i com j
      }
    } while (i<j);

    a[r] = a[i], a[i] = pivo;
    quicksort(a, p, i-1);
    quicksort(a, i+1, r);
  }
}
```

Pior caso

$$T(n) = T(n-1) + \theta(n)$$

≈ $O(n^2)$

Processo de divisão do vetor percorre todo vetor θ(n)

+

primeira parte: $T(n-1)$

+

segunda parte: 0

Quick sort: análise do algoritmo

```
void quicksort(int a[], int p, int r) {
  int t;
  if (p < r) {
    int v =(rand()%(r-p))+p; // escolhe pivo aleatoriamente
    int pivo = a[v];
    a[v] = a[r]; a[r] = pivo; // troca pivo e ultimo elemento
    int i = p-1; int j = r;
    do {
      do { i++;} while  (a[i] < pivo);
      do { j--;} while ((a[j] > pivo) && (j > p));
      if (i < j){
        t = a[i], a[i] = a[j], a[j] = t; // troca i com j
      }
    } while (i<j);

    a[r] = a[i], a[i] = pivo;
    quicksort(a, p, i-1);
    quicksort(a, i+1, r);
  }
}
```

Melhor caso

Processo de divisão do vetor percorre todo vetor θ(n)

\+

primeira parte: $T(n/2)$

\+

segunda parte: $T(n/2)$

Quick sort: análise do algoritmo

```
void quicksort(int a[], int p, int r) {
  int t;
  if (p < r) {
    int v =(rand()%(r-p))+p; // escolhe pivo aleatoriamente
    int pivo = a[v];
    a[v] = a[r]; a[r] = pivo; // troca pivo e ultimo elemento
    int i = p-1; int j = r;
    do {
      do { i++;} while  (a[i] < pivo);
      do { j--;} while ((a[j] > pivo) && (j > p));
      if (i < j){
        t = a[i], a[i] = a[j], a[j] = t; // troca i com j
      }
    } while (i<j);

    a[r] = a[i], a[i] = pivo;
    quicksort(a, p, i-1);
    quicksort(a, i+1, r);
  }
}
```

Melhor caso

$$T(n) = 2T(n/2) + \theta(n)$$

≈ O(n log n)

Processo de divisão do vetor percorre todo vetor θ(n)

+

primeira parte: $T(n/2)$

+

segunda parte: $T(n/2)$

OUTROS ALGORITMOS

Ordenação por "mistura" (*merge sort*)

Ordenação também baseada no "**dividir para conquistar**"

Ideia:

- **Particiona repetidamente o conjunto de dados** até que cada subconjunto tenha apenas 1 elemento
- **Intercala duas partições** menores a fim de obter um subconjunto maior e ordenado, até restar um único conjunto

Ordenação por "mistura" (*merge sort*)

Ordenação também baseada no "**dividir para conquistar**"

Ideia:

- **Particiona repetidamente o conjunto de dados** até que cada subconjunto tenha apenas 1 elemento
- **Intercala duas partições** menores a fim de obter um subconjunto maior e ordenado, até restar um único conjunto

Vantagem:

- Excelente desempenho: **O(*n* log *n*)** no melhor e pior casos

Ordenação por "mistura" (*merge sort*)

Ordenação também baseada no "**dividir para conquistar**"

Ideia:

- **Particiona repetidamente o conjunto de dados** até que cada subconjunto tenha apenas 1 elemento
- **Intercala duas partições** menores a fim de obter um subconjunto maior e ordenado, até restar um único conjunto

Vantagem:

- Excelente desempenho: **O(*n* log *n*)** no melhor e pior casos

Desvantagens:

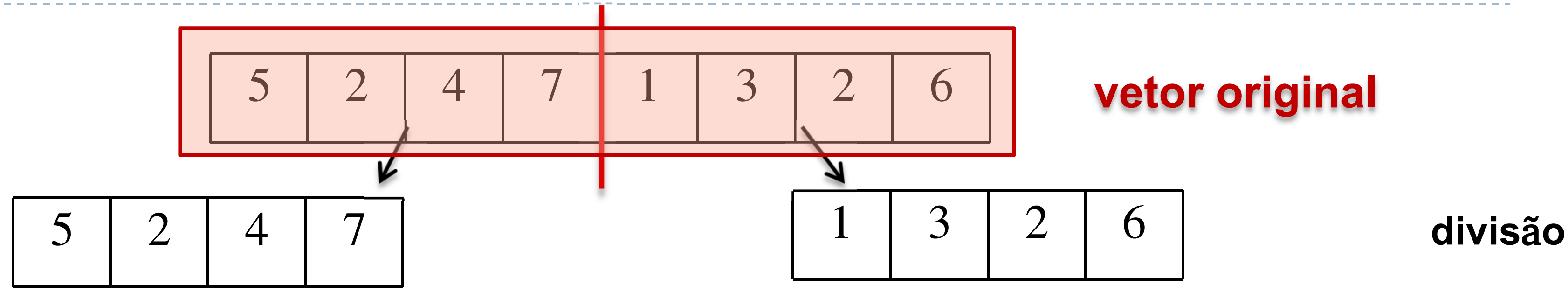
- Implementação **recursiva**
- Precisa de vetor auxiliar (**> custo de memória**)

Merge sort : exemplo de funcionamento

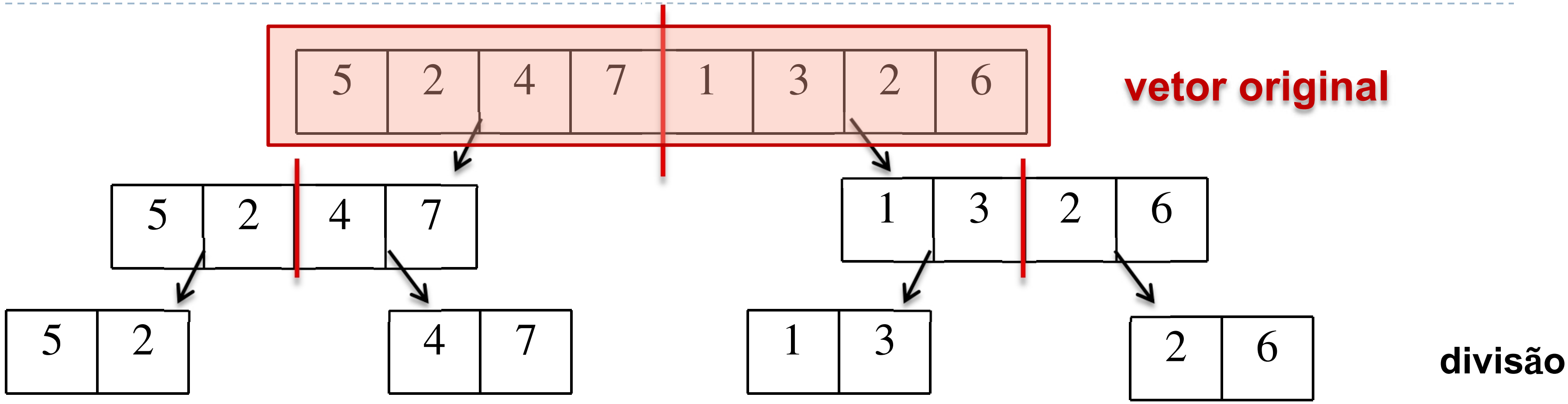
5	2	4	7	1	3	2	6

vetor original

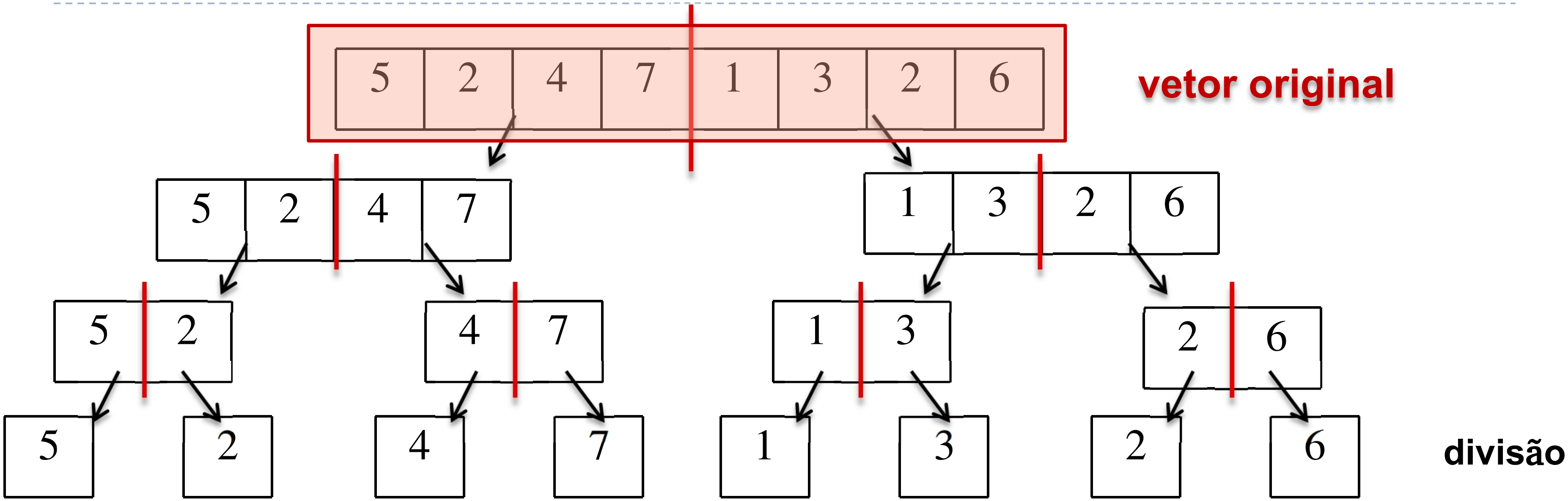
Merge sort : exemplo de funcionamento



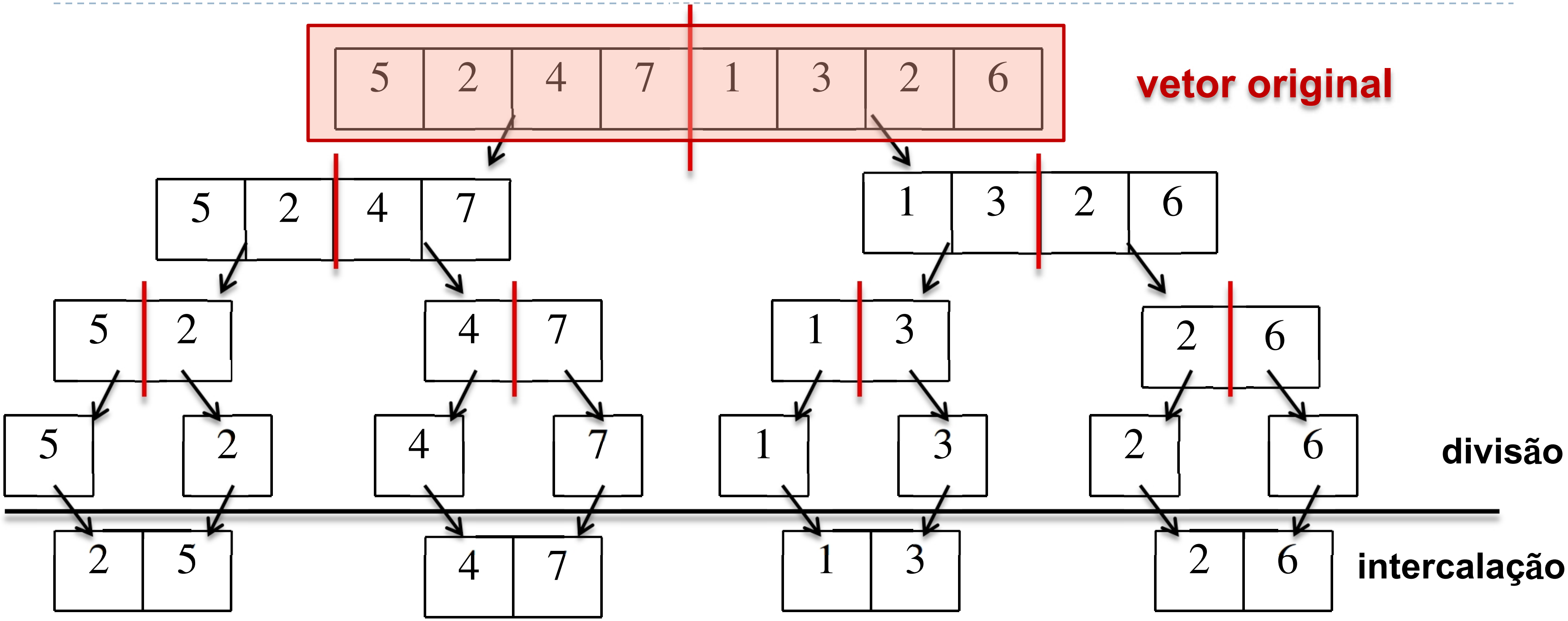
Merge sort : exemplo de funcionamento



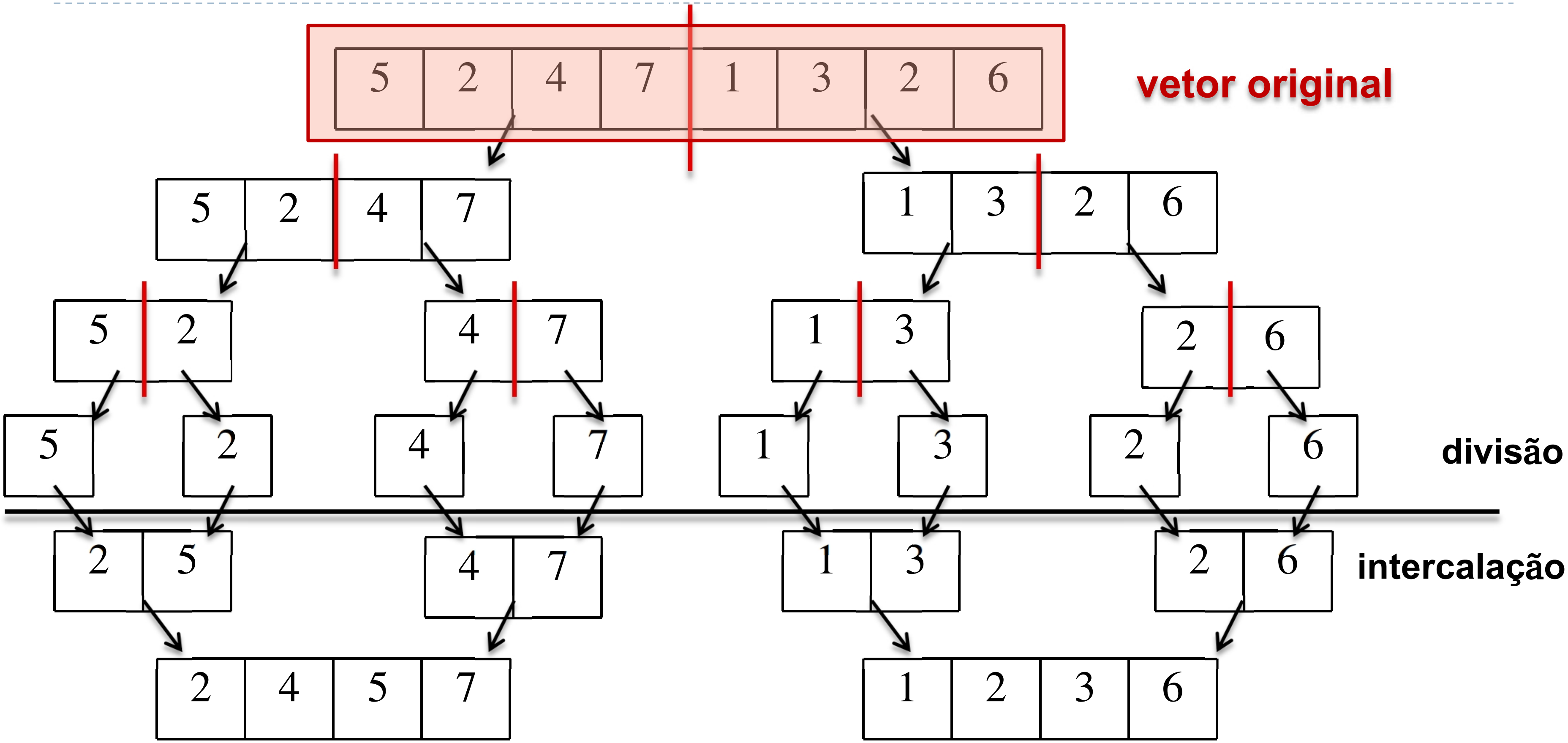
Merge sort : exemplo de funcionamento



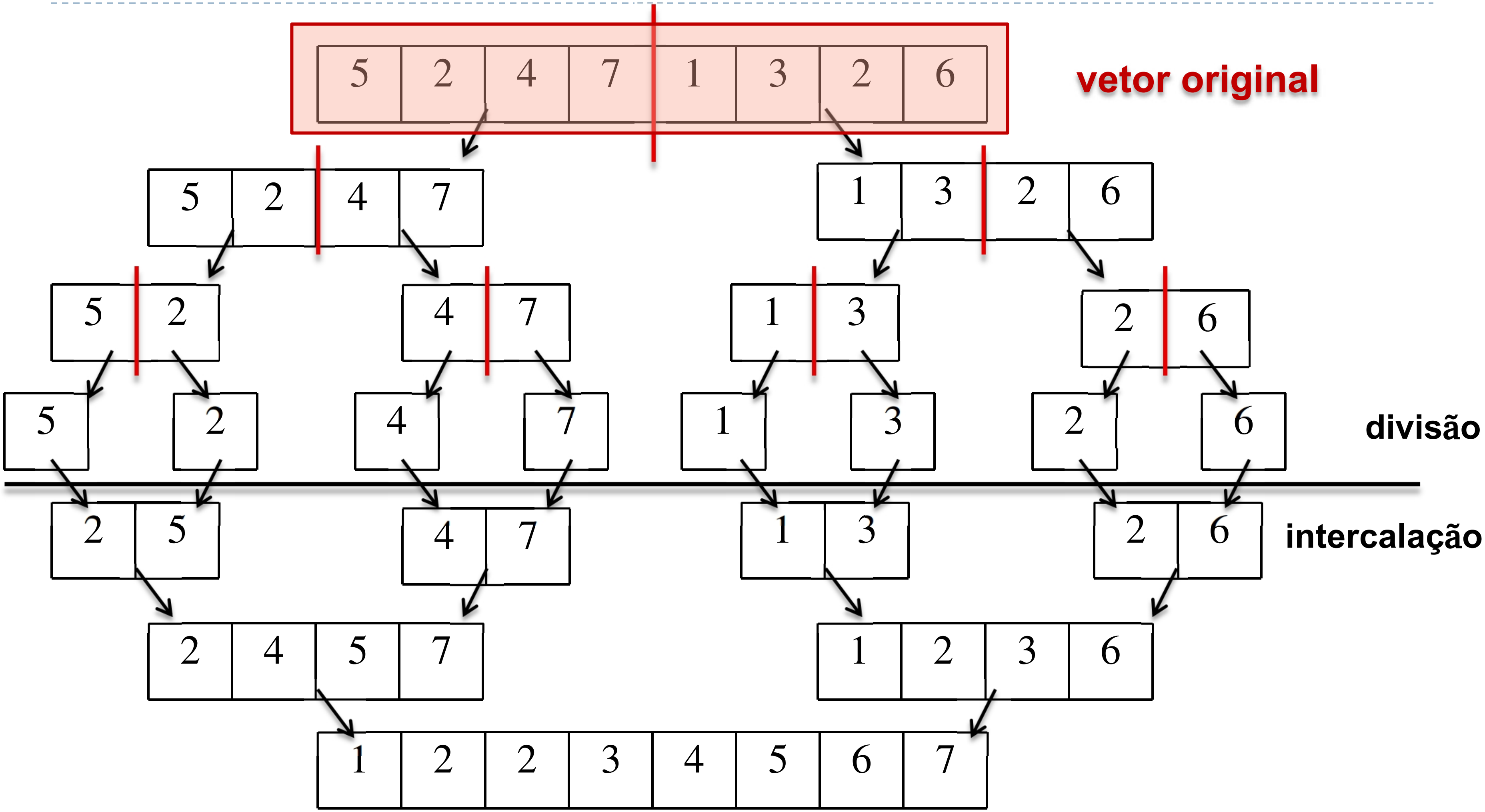
Merge sort : exemplo de funcionamento



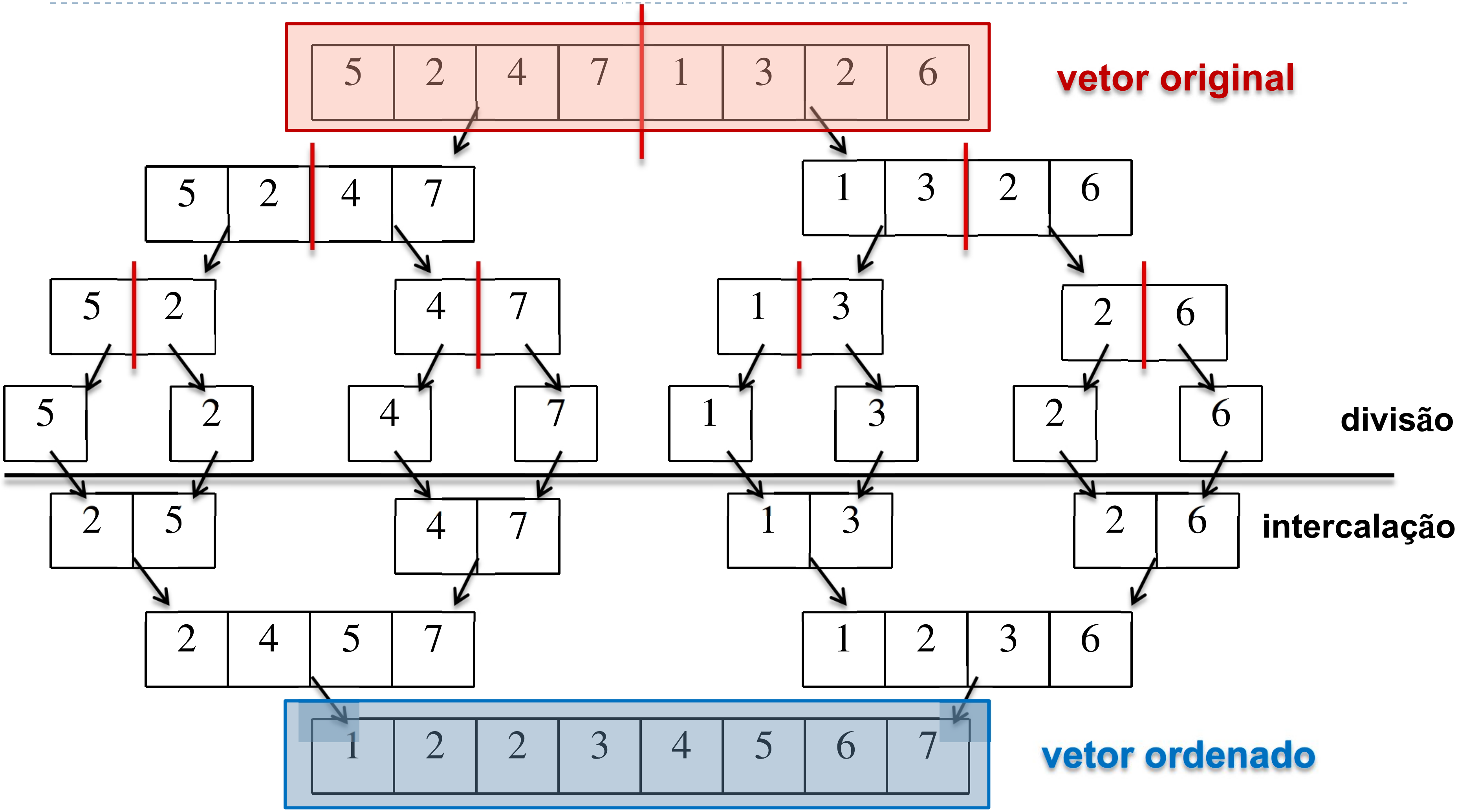
Merge sort : exemplo de funcionamento



Merge sort : exemplo de funcionamento



Merge sort : exemplo de funcionamento



Merge sort : implementação

```
void mergesort (int vetor[], int ini, int fim) {

  if (inicio < fim) {
      int meio = floor((inicio+fim)/2);

      mergesort(vetor, inicio, meio);
      mergesort(vetor, meio+1, fim);

      intercala(vetor, inicio, meio, fim);
   }

}
```

Merge sort : implementação

```
void mergesort (int vetor[], int ini, int fim) {

  if (inicio < fim) {
     int meio = floor((inicio+fim)/2);

     mergesort(vetor, inicio, meio);
     mergesort(vetor, meio+1, fim);

     intercala(vetor, inicio, meio, fim);
  }

}
```

Chama a função para as 2 partições (**passo recursivo**)

Merge sort : implementação

```
void mergesort (int vetor[], int ini, int fim) {

  if (inicio < fim) {
     int meio = floor((inicio+fim)/2);

     mergesort(vetor, inicio, meio);
     mergesort(vetor, meio+1, fim);

     intercala(vetor, inicio, meio, fim);
  }

}
```

Chama a função para as 2 partições (**passo recursivo**)

Mescla as 2 partições a fim de garantir a ordenação

Merge sort : implementação

```
void intercala (int *vetor, int ini, int meio, int fim) {
  int p1 = ini, p2 = meio+1, fim1 = 0, fim2 = 0;
  int tamanho = fim - ini + 1;
  int *vaux = (int*) malloc(tamanho*sizeof(int));

  if (vaux != NULL) {
     int i, j, k;
     // Intercala em um vetor aux
     for (i=0; i < tamanho; i++)

        if (! fim1 && ! fim2) {
          if (vetor[p1] < vetor[p2])
             vaux[i] = vetor[p1++];
          else
             vaux[i] = vetor[p2++];
          if (p1 > meio)  fim1 = 1;
          if (p2 > fim)   fim2 = 1;
        }
        ...
        ...
        else {
          if (! fim1)
             vaux[i] = vetor[p2++];
          else
             vaux[i] = vetor[p1++];
        }
     // Copia vetor aux para o original
     for (j=0, k=ini; j < tamanho; j++, k++)
        vetor[k] = vaux[j];
  }
  free(vaux);
}
```

Merge sort : análise do algoritmo

Qual é a complexidade assintótica do algoritmo？

Merge sort : análise do algoritmo

Qual é a complexidade assintótica do algoritmo?

Resposta depende da análise do tempo gasto:

Particionamento do arquivo (**divisão**)

Merge sort : análise do algoritmo

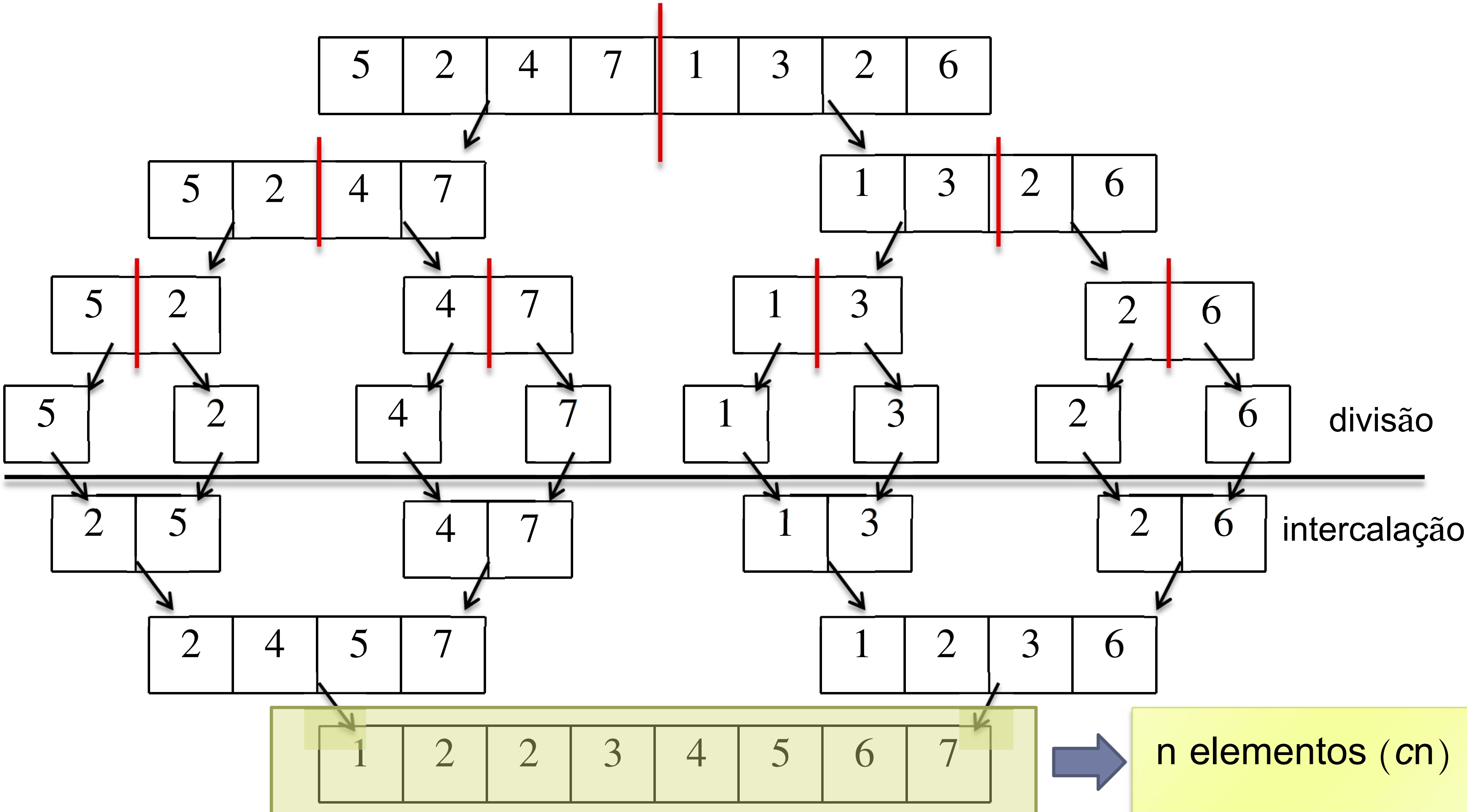
Qual é a complexidade assintótica do algoritmo？

Resposta depende da análise do tempo gasto:

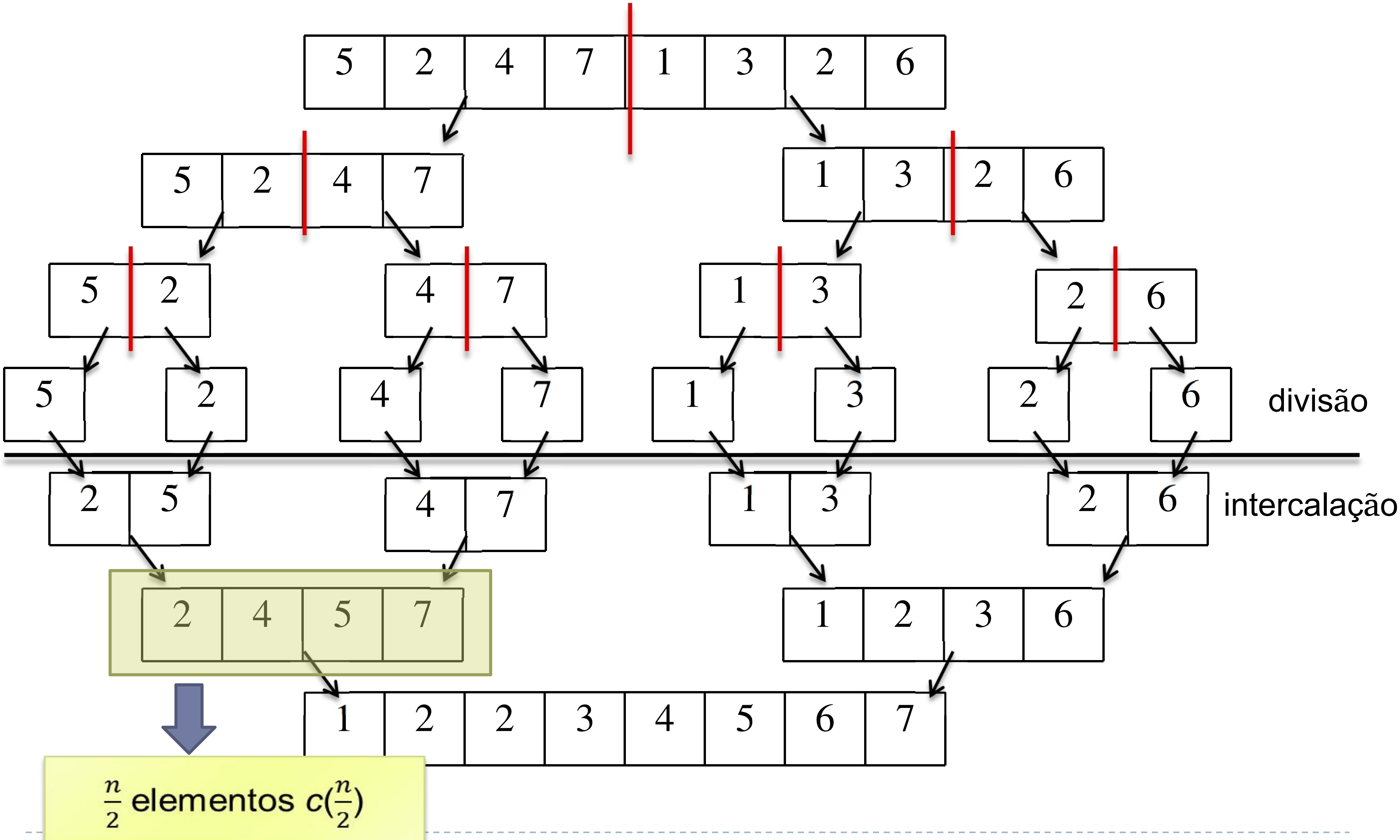
- Particionamento do arquivo (**divisão**)

- **Intercalação** das partições

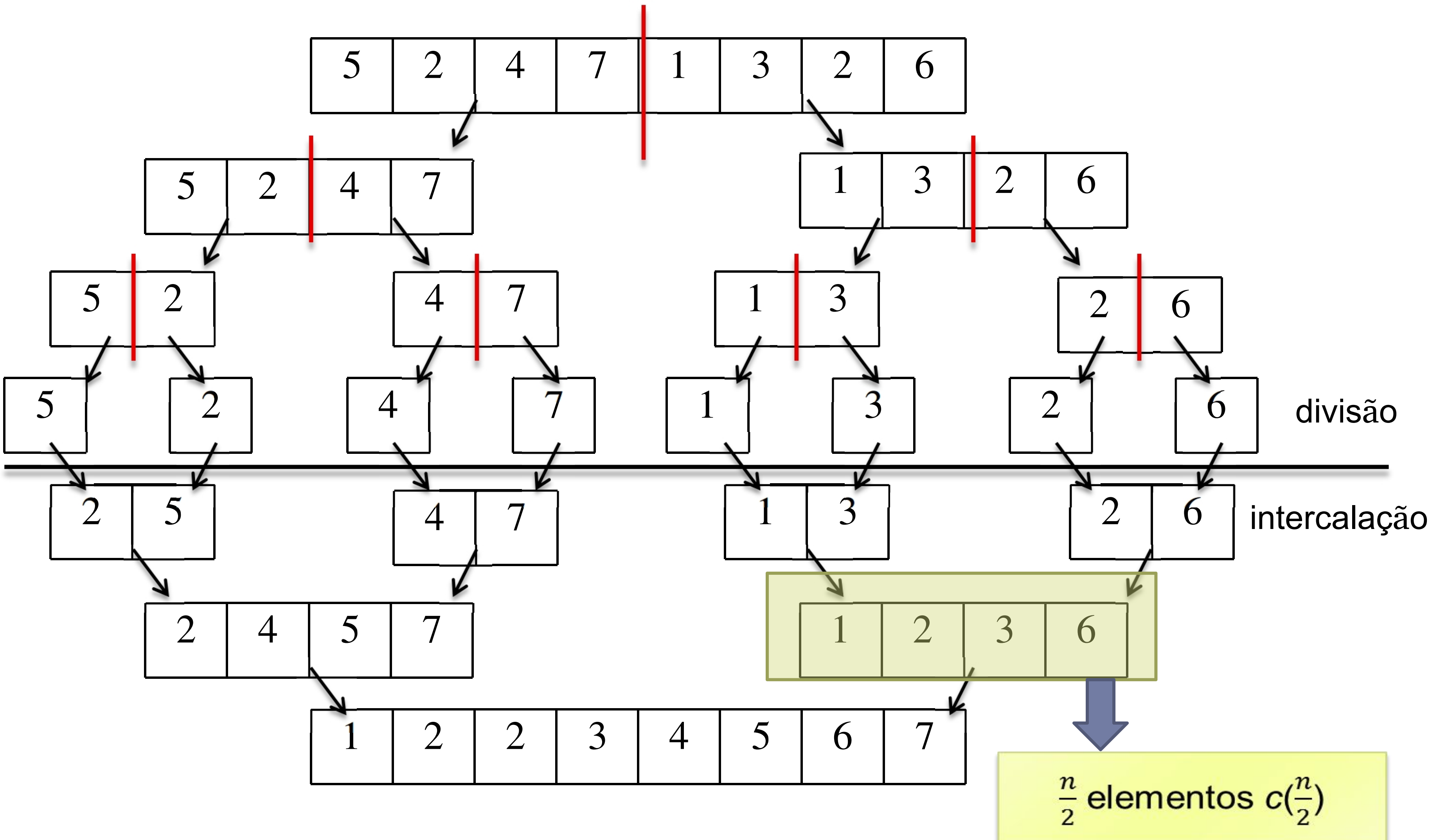
Merge sort : análise da intercalação



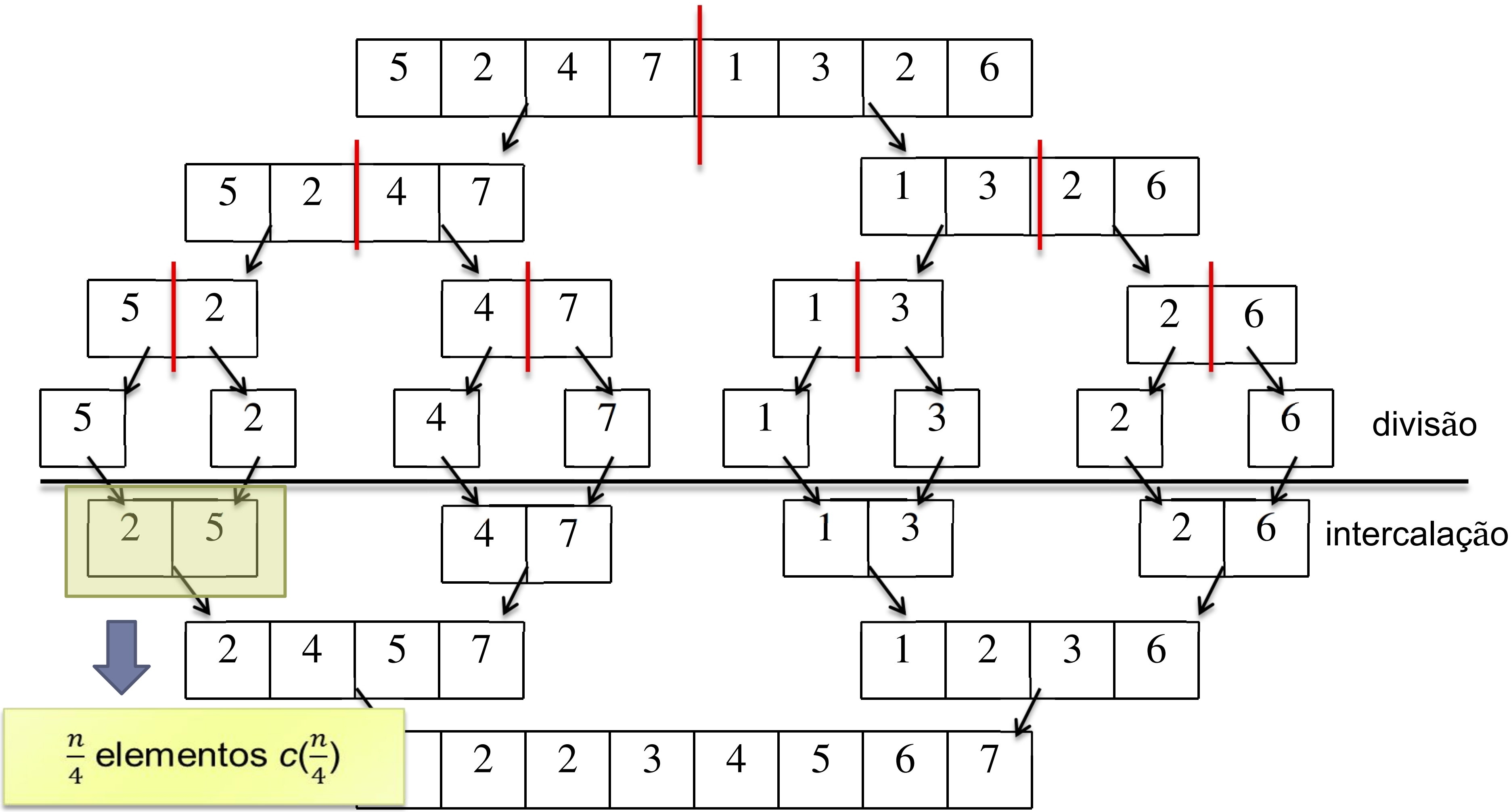
Merge sort : análise da intercalação



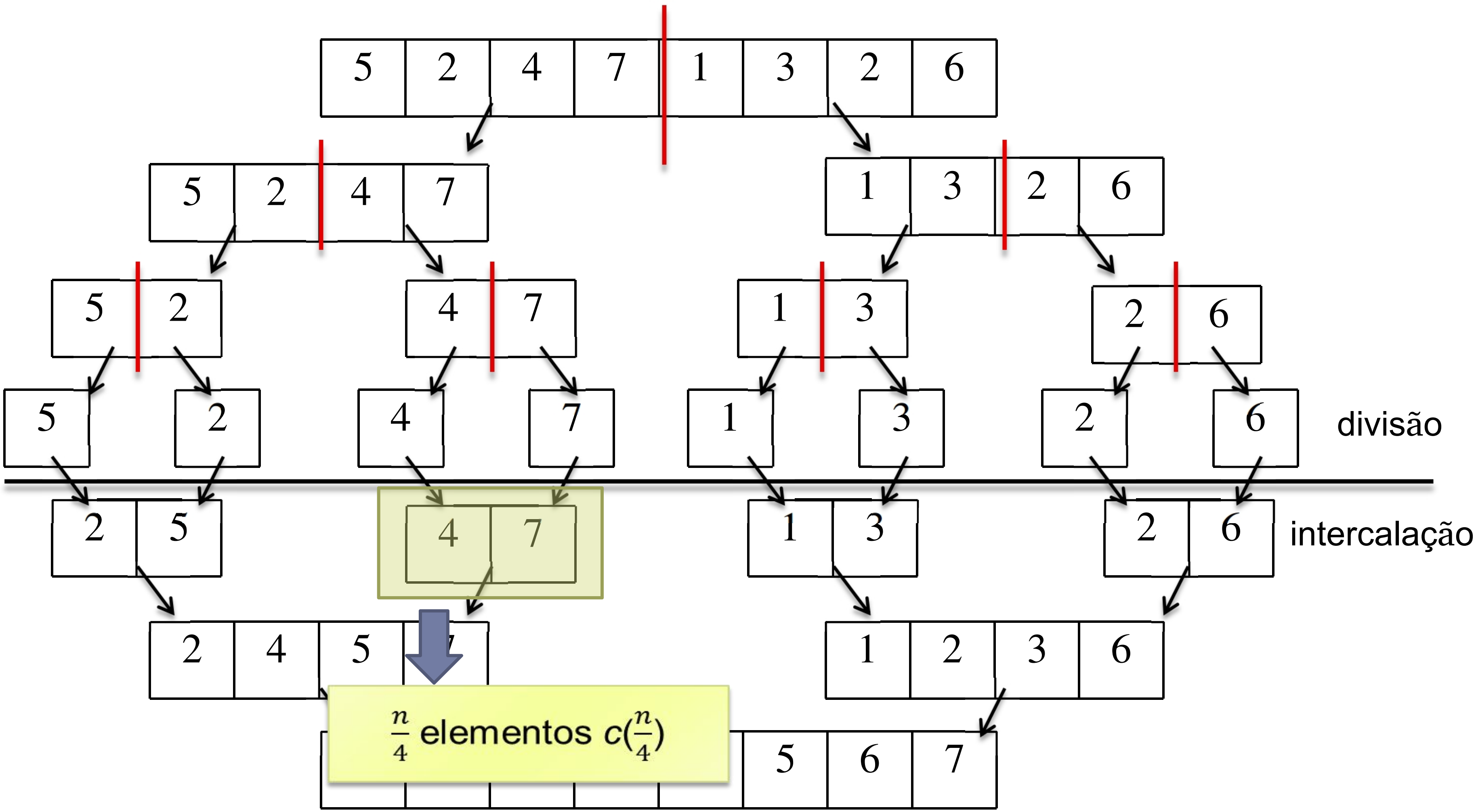
Merge sort : análise da intercalação



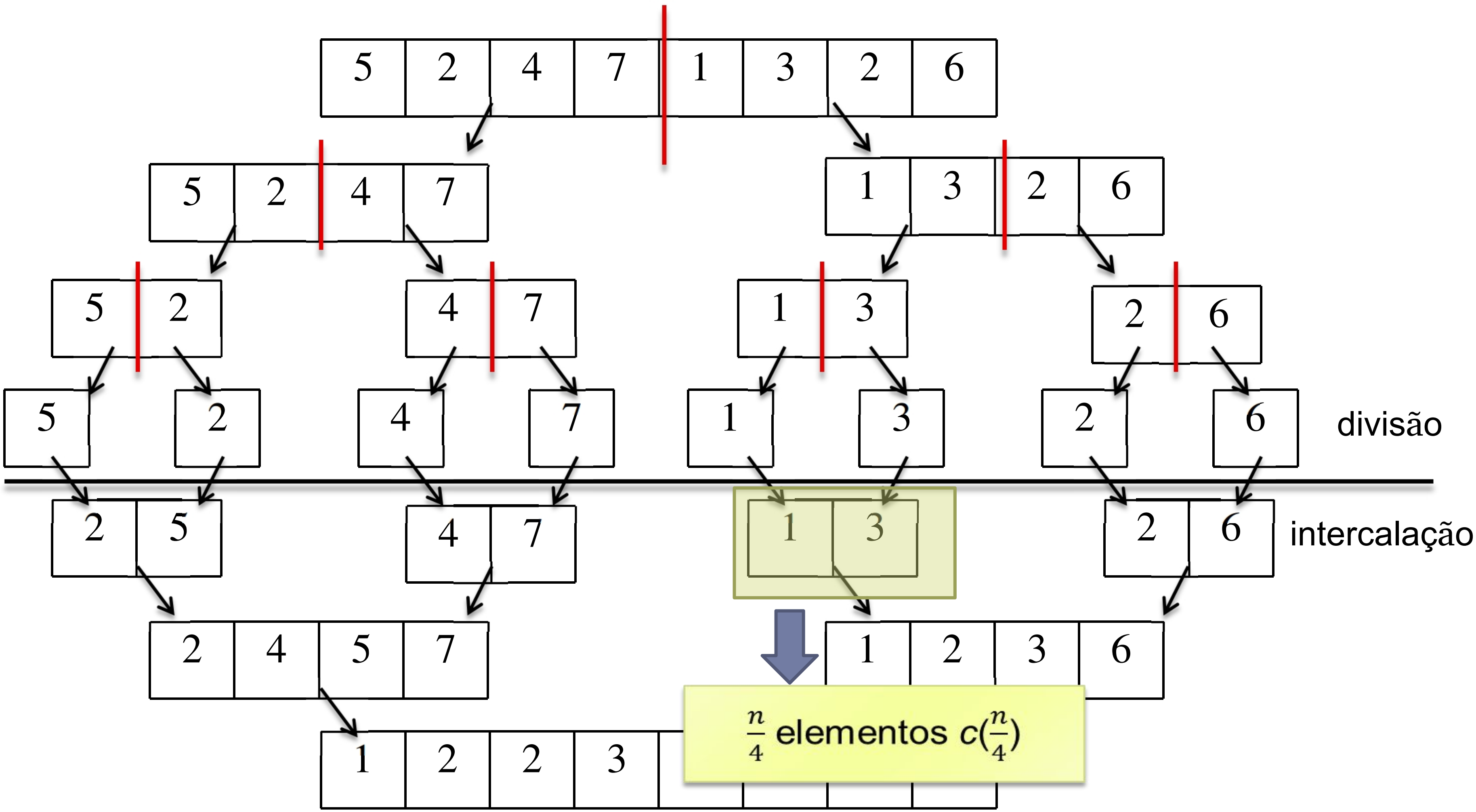
Merge sort : análise da intercalação



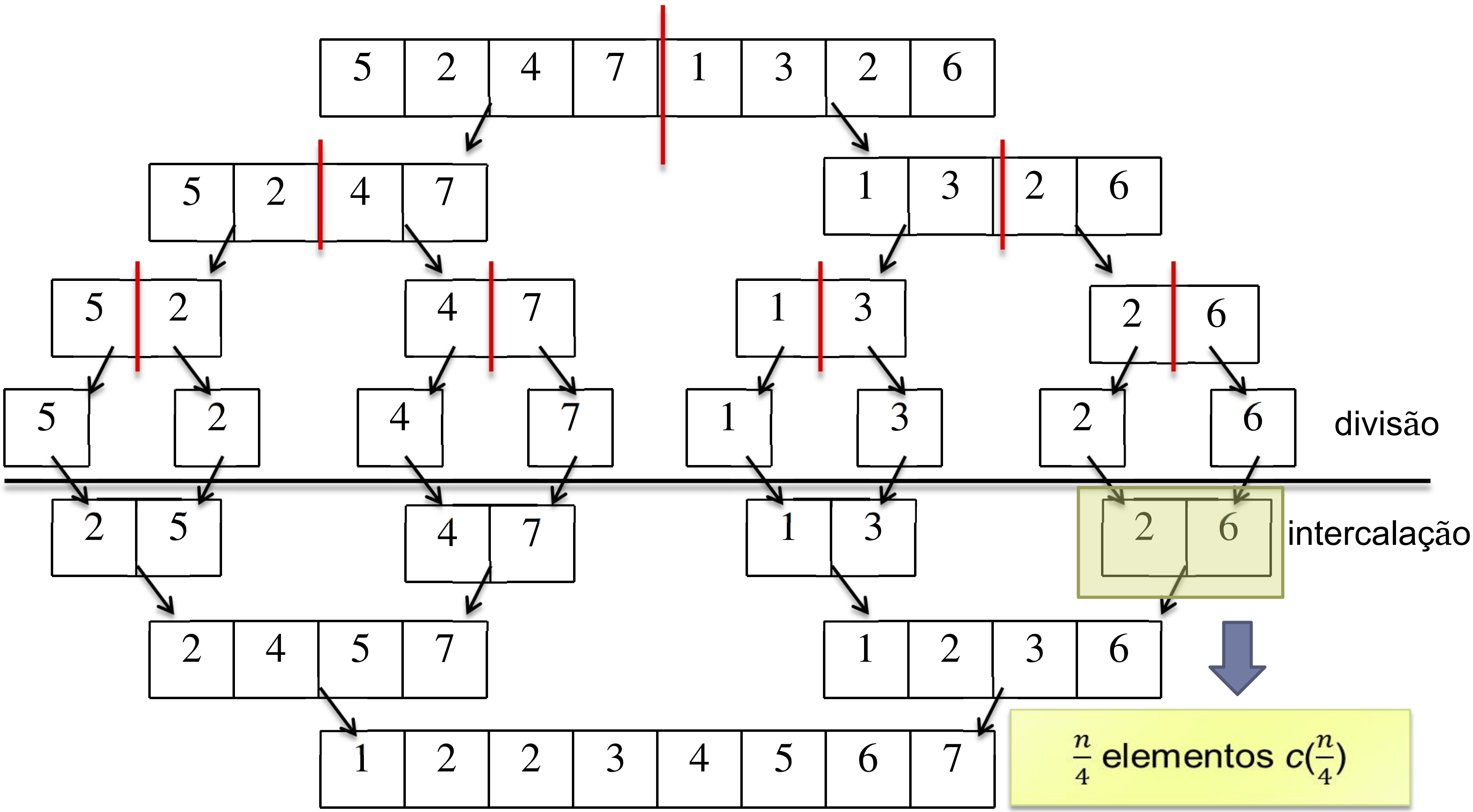
Merge sort : análise da intercalação



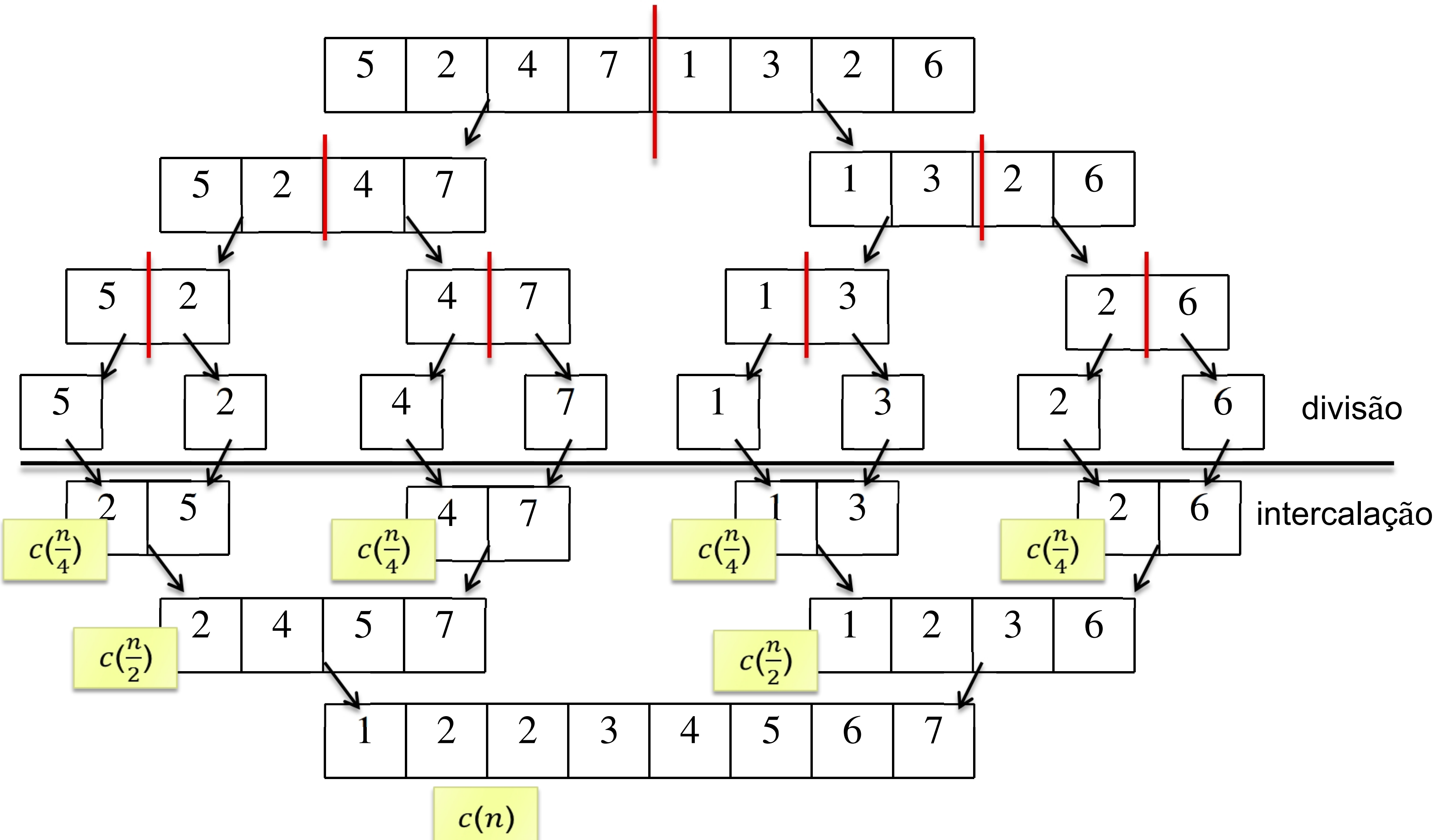
Merge sort : análise da intercalação



Merge sort : análise da intercalação



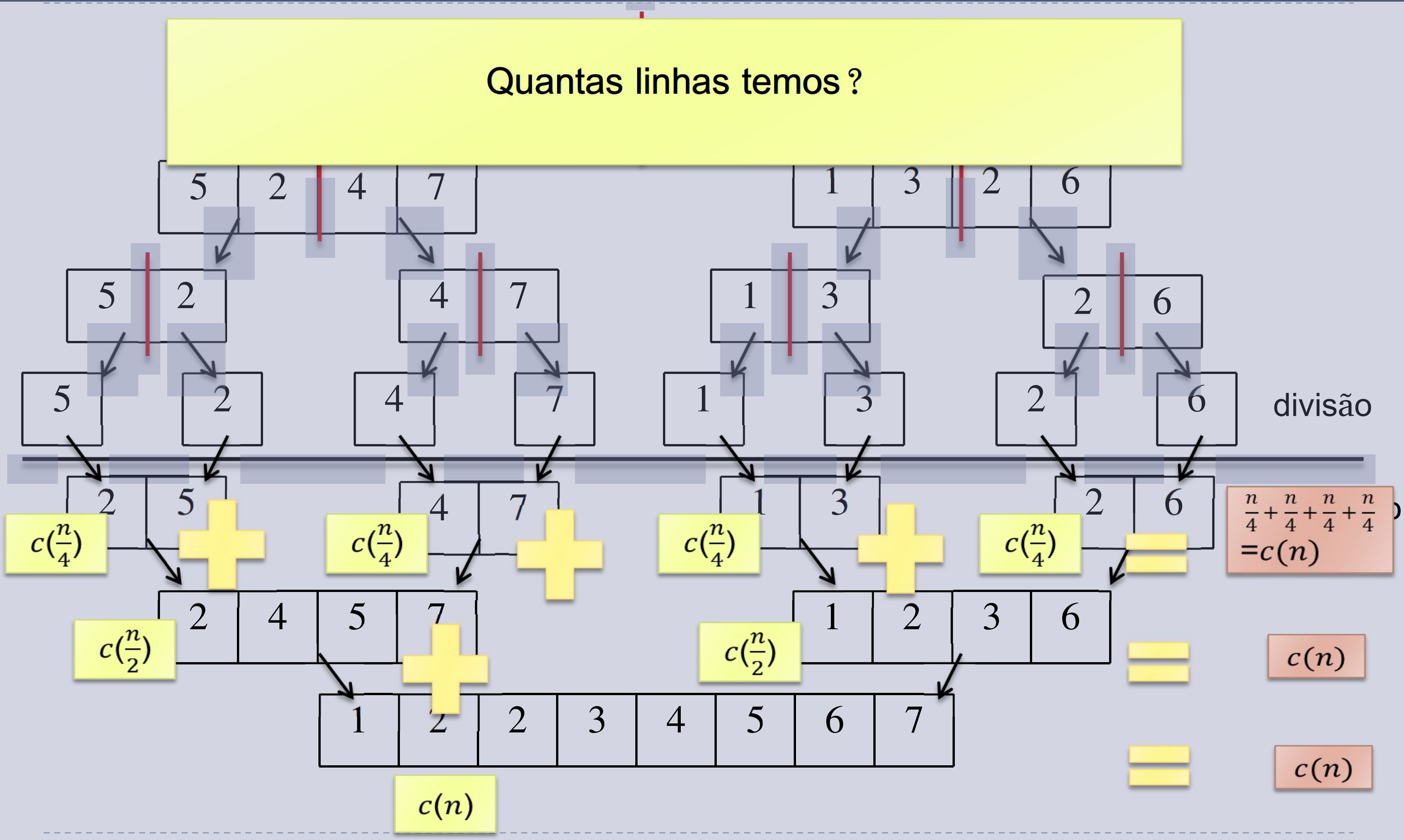
Merge sort : análise da intercalação



Merge sort : análise da intercalação

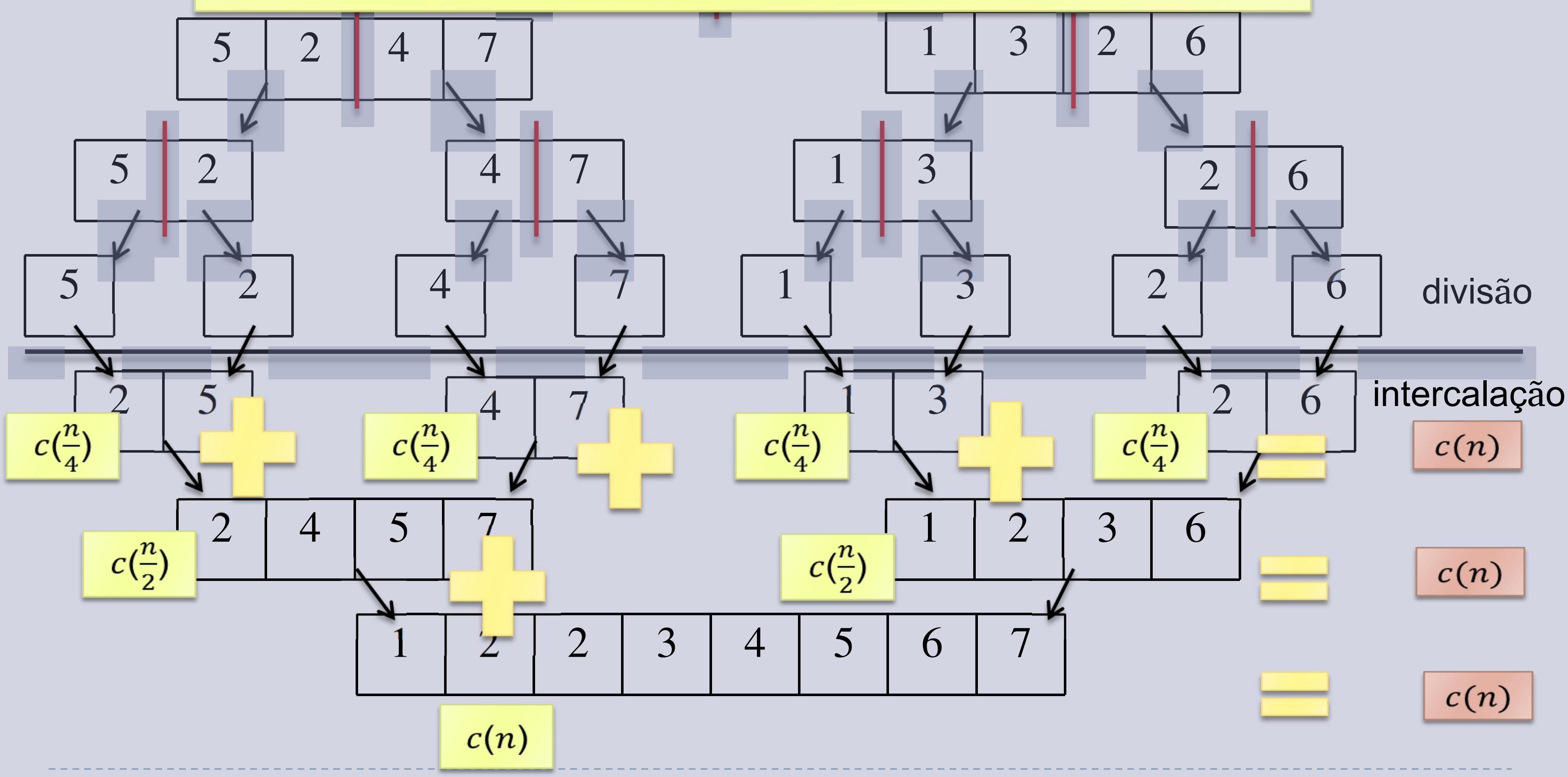
Merge sort : análise da divisão

Quantas linhas temos ?



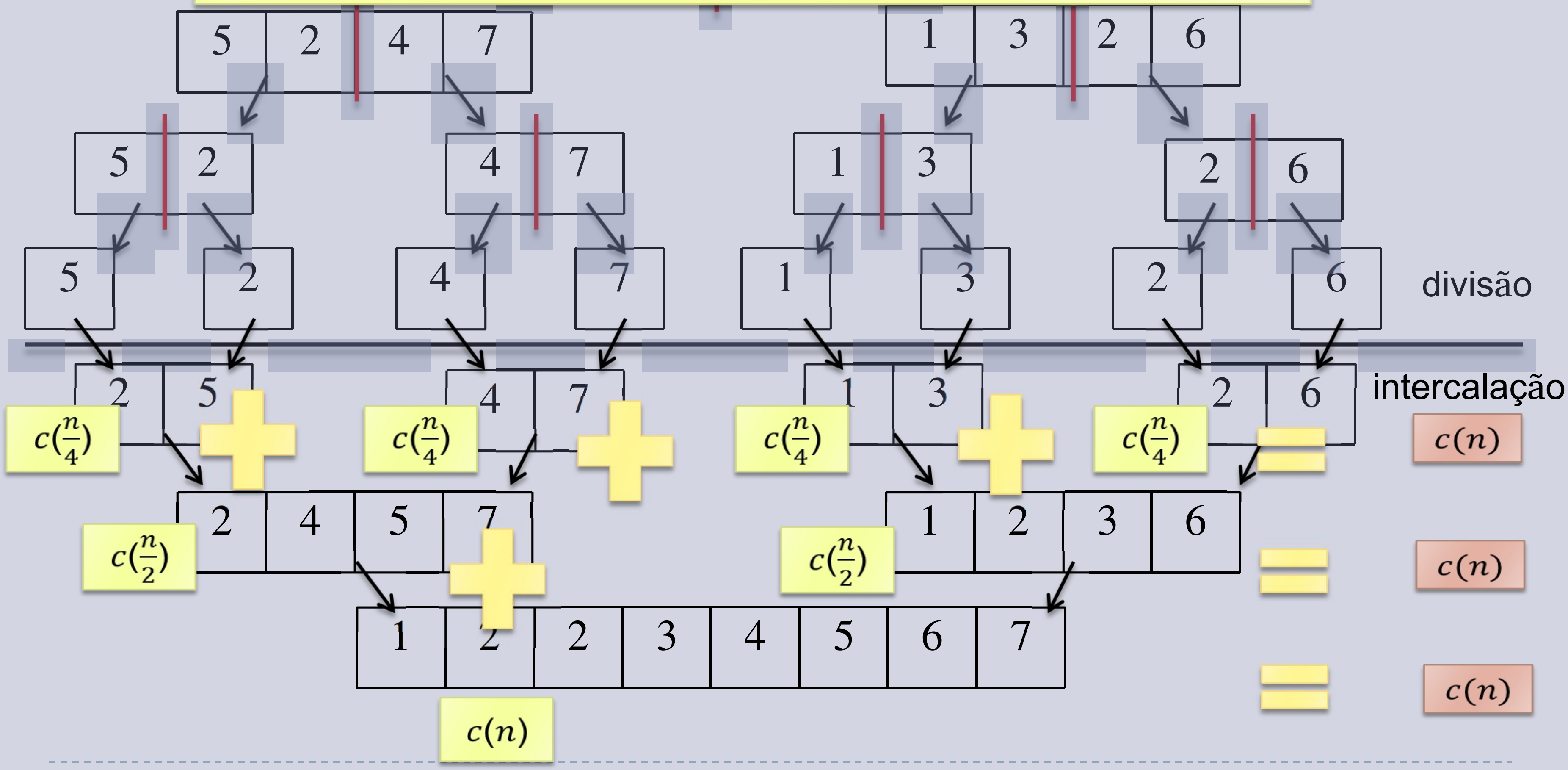
Merge sort : análise da divisão

Quantas vezes podemos dividir ao meio um vetor de tamanho n?



Merge sort : análise da divisão

Quantas vezes podemos dividir ao meio um vetor de tamanho n? $log_2\, n$



Merge sort : análise do algoritmo

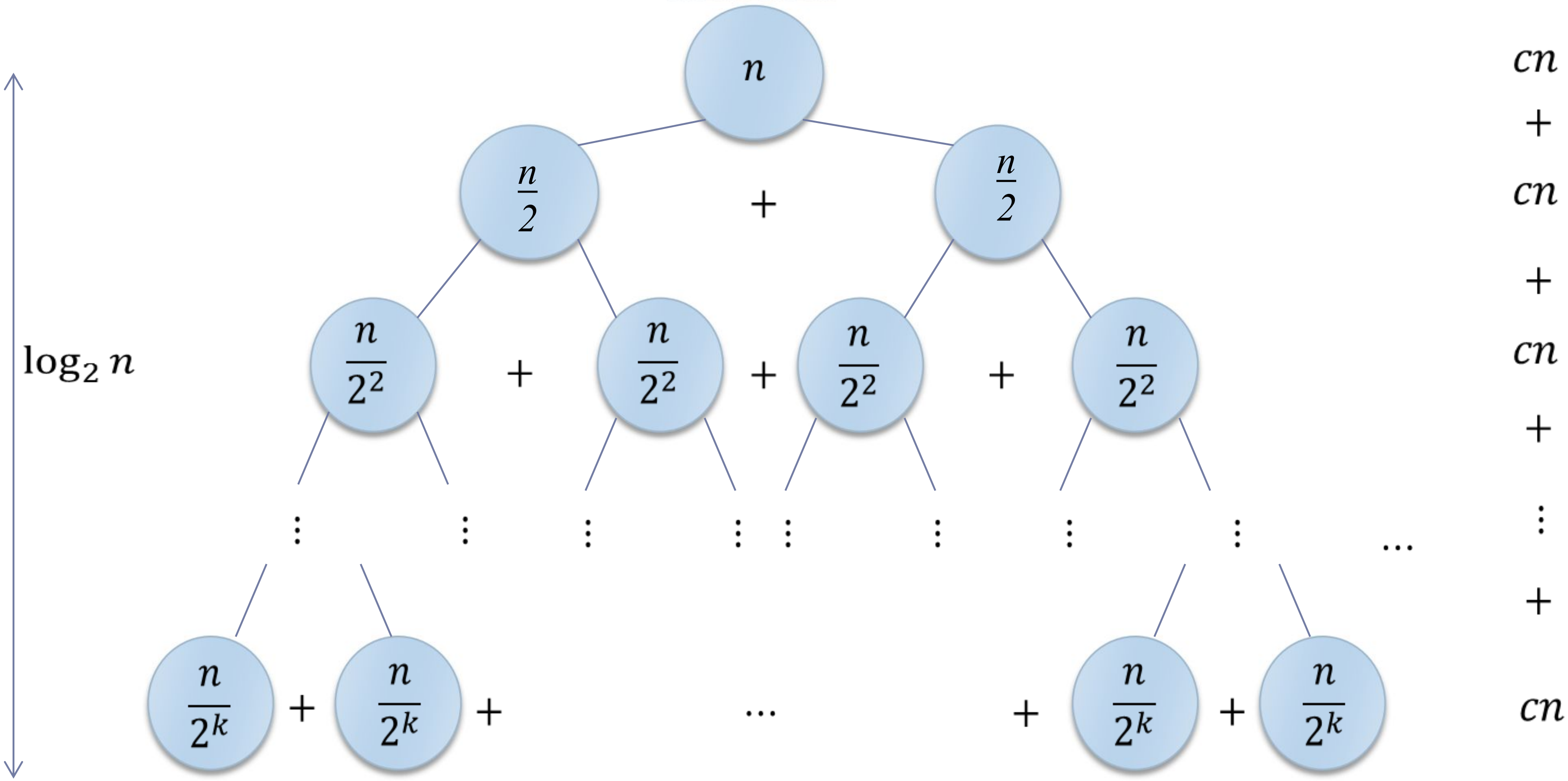
Complexidade assintótica:

Divisão é feita em **O(log *n*)**

Cada nível de intercalação é feita em **O(*n*)**

Custo total = O(*n*) × O(log *n*) = O(*n* log *n*)

Merge sort : análise do algoritmo



$$cn \log_2 n \approx O(n \log n)$$

Resumo (http://bigocheatsheet.com/)

Array Sorting Algorithms

Algorithm	Time Complexity			Space Complexity
	Best	Average	Worst	Worst
Quicksort	O(n log(n))	O(n log(n))	O(n^2)	O(log(n))
Mergesort	O(n log(n))	O(n log(n))	O(n log(n))	O(n)
Bubble Sort	O(n)	O(n^2)	O(n^2)	O(1)
Insertion Sort	O(n)	O(n^2)	O(n^2)	O(1)
Selection Sort	O(n^2)	O(n^2)	O(n^2)	O(1)

Obs: $O(n)$ é obtida na versão modificada do *bubble sort* que verifica se não houve trocas na iteração, aplicada sobre um vetor já ordenado

Bucket sort

Algoritmo simples para ordenação de números inteiros

Ideia:

- Cada elemento é representado por uma posição em um arranjo (**vetor de recipientes**)
  - As repetições de um mesmo número são acumuladas em um recipiente
- Ao final, o conteúdo de cada recipiente é lido de modo sequencial e seu índice é usado para preencher o vetor de saída (**vetor ordenado**)
  - Valor indica a qtde de vezes que o índice será usado

Bucket sort : implementação

```
void bucketsort (int *vetor, int n, int w){
        int *vaux = (int *) malloc((w)*sizeof(int));
        if (vaux) {
          // Preenchimento dos recipientes
          for(int i =0; i < n; i++)
                vaux[vetor[i]]++;

          // Leitura dos recipientes em ordem
          int i =0;
          for(int j = 0; j < w; j++)
             while(vaux[j] > 0) {
                vaux[j] = vaux[j]-1;
                vetor[i] = j;
                i=i+1;
             }
        }
}
```

w é o **tamanho máximo** dos números

Bucket sort : complexidades

Complexidade de tempo:

Cada número é avaliado **uma única vez**

Custo ***O(n)***

Bucket sort : complexidades

Complexidade de tempo:

Cada número é avaliado **uma única vez**

Custo ***O(n)***

Complexidade de espaço:

Viável apenas para inteiros ou números com poucas casas decimais

Cresce com a faixa de valores considerada

Ex: Se *w* é a **qtde. máxima de algarismos** dos números, então a complexidade é $O(10^w)$

Bucket sort : complexidade de espaço

Ex: ordenação de 40 milhões de transações finaceiras

Se 1% das transações forem superiores a 1 milhão de reais, então é viável usar 2 algoritmos de ordenação:

Transações de até 1 milhão - ***bucket sort*** (4 segundos)

Transações superiores - ***bubble sort*** (2,5 minutos)

Bucket sort : complexidade de espaço

Ex: ordenação de 40 milhões de transações finaceiras

Se 1% das transações forem superiores a 1 milhão de reais, então é viável usar 2 algoritmos de ordenação:

Transações de até 1 milhão - ***bucket sort*** (4 segundos)

Transações superiores - ***bubble sort*** (2,5 minutos)

Balanceamento de complexidades:

Bucket sort: complexidade de tempo baixa e complexidade de espaço alta

Bubble sort: complexidade de tempo alta e complexidade de espaço baixa

Exercícios

1. Comparar os métodos de ordenação (exceto o *bucket sort*) em termos de tempo de execução, de número de comparações e de número de trocas.

2. Faça a análise empírica dos métodos de ordenação (exceto o *bucket sort*), utilizando arranjos de 100, 1000 e 10000 números inteiros entre 0 e 500. Considere 3 configurações:
   - Arranjo com elementos em ordem crescente
   - Arranjo com elementos em ordem decrescente
   - Arranjo com elementos em ordem aleatória

3. Faça uma implementação recursiva dos métodos de ordenção simples (bolha, seleção e inserção). Analise a complexidade dessas implementações.

Exercícios

5. Modifique o algoritmo do *quick sort* de modo a adotar a ordenação por inserção quando uma partição tiver tamanho abaixo de *s*. Por fim, determine através de uma análise empírica qual valor de *s* deve ser adotado para alcançar a melhor eficiência.

6. Os algoritmos apresentados realizam uma ordenação destrutiva, na qual o arranjo original é perdido, sendo substituído pelo arranjo ordenado. Uma boa alternativa é a ordenação indireta, realizada através de uma tabela auxiliar que indica a posição do elemento no arranjo original. Implemente um programa que realize esse tipo de ordenação usando o método *select sort*.

7. Pesquise e implemente o método *shell sort.* Depois, faça uma análise comparativa com a ordenação por inserção.

Exercício 3: *bubble sort* recursivo

```
void bubble_rec (int vetor[], int n){
  int i, aux, troca = 0;

      for (i=0; i < n-1; i++)

        if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
          aux = vetor[i];
          vetor[i] = vetor[i+1];
          vetor[i+1] = aux;
          troca = 1;
        }

      if (troca != 0)
          bubble_rec (n-1, vetor);
}
```

Exercício 3: *bubble sort* recursivo

```
void bubble_rec (int vetor[], int n){
  int i, aux, troca = 0;

     for (i=0; i < n-1; i++)

       if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
         aux = vetor[i];
         vetor[i] = vetor[i+1];
         vetor[i+1] = aux;
         troca = 1;
       }

     if (troca != 0)
         bubble_rec (n-1, vetor);
}
```

Iteração mais interna
(**comparação dos pares de elementos**)

Exercício 3: *bubble sort* recursivo

```
void bubble_rec (int vetor[], int n){
  int i, aux, troca = 0;

    for (i=0; i < n-1; i++)

      if (vetor[i] > vetor[i+1]) {
        aux = vetor[i];
        vetor[i] = vetor[i+1];
        vetor[i+1] = aux;
        troca = 1;
      }

    if (troca != 0)
        bubble_rec (n-1, vetor);
}
```

Iteração mais interna
(**comparação dos pares de elementos**)

Passo recursivo
(**existência de trocas na iteração**)

Bibliografia

Slides adaptados do material do Prof. Dr. Bruno Travençolo, do Prof. Autran Macêdo e da Profa. Dra. Denise Guliato.

BACKES, A. Linguagem C Descomplicada: portal de vídeo-aulas para estudo de programação. Disponível em: https://programacaodescomplicada.wordpress.com/indice/estrutura-de-dados/

CORMEN, T.H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática, Campus, 2002

ZIVIANI, N. Projeto de algoritmos: com implementações em Pascal e C (2ª ed.), Thomson, 2004

Bibliografia

MORAES, C.R. Estruturas de Dados e Algoritmos: uma abordagem didática (2ª ed.), Futura, 2003

FEOFILOFF, P. **Quicksort.** Disponível em: http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aula/quick.html

SHEWCHUCK, J. **Data Structures.** Disponível em: http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/61bs09/