Spazi lineari reali

Definizione Uno spazio vettoriale reale è una terna

$$(V, +, \cdot)$$

dove V è un insieme munito di due operazioni

$$+ : V \times V \to V \qquad \text{oper. interna}$$

e

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \qquad \text{oper. esterna}$$

che verificano le seguenti proprietà:

1. $\forall u, v, w \in V \quad (u + v) + w = u + (v + w)$ (proprietà associativa)
2. $\exists\, 0 \in V : \ \forall u \in V \quad u + 0 = 0 + u = u$ (esist. elemento neutro)
3. $\forall u \in V \ \exists\, u' : \quad u + u' = u' + u = 0$ (esistenza dell'opposto)
4. $\forall u, v \in V \quad u + v = v + u$ (proprietà commutativa);
5. $\forall u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$
6. $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$
7. $\forall u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$
8. $\forall u \in V \quad 1 \cdot u = u$

Alcuni esempi

1) $V = \mathbb{R}^n$ (oppure $V = \mathbb{C}^n$) (insieme dei vettori reali o complessi):
se $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ e $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$
allora:
$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n]^T$,
e
$\alpha \cdot \mathbf{x} = [\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n]^T$.

2) $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ (oppure $V = \mathbb{C}^{m \times n}$); (insieme delle matrici reali o complesse con m righe ed n colonne):
se $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$
allora:
$A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$,
e
$\alpha \cdot A = \{\alpha a_{ij}\}$.

Spazi lineari: Esempi

Alcuni esempi

3) $V = C([a, b])$ (insieme delle funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$);
è uno spazio vettoriale munito delle seguenti leggi di composizione:
   - $f, g \in C([a, b]) : f + g = x \mapsto f(x) + g(x)$
   - $\alpha \in \mathbb{R}, f \in C([a, b]) : \alpha \cdot f = x \mapsto \alpha f(x)$

4) $V = C^k([a, b])$ (insieme delle funzioni derivabili k volte in $[a, b]$ con derivata k-esima continua nell'intervallo $[a, b]$);
è uno spazio vettoriale munito delle stesse leggi di composizione viste sopra.

5) $V = P_n$; (insieme dei polinomi di grado al più n).
se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$
allora:
$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$,
e
$\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_n x^n$.

Combinazione lineare di vettori

Definizione

Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, con V sp. vettoriale. Si definisce combinazione lineare di tali vettori ogni elemento v di V della forma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

OSSERVAZIONE

Scegliamo $V = \mathbb{R}^m$. Considerata la matrice $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ le cui colonne sono i vettori v_i ed il vettore colonna $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^T$ allora evidentemente

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = A\mathbf{x}$$

Indipendenza lineare di vettori

Indipendenza lineare

Definizione

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si dicono linearmente dipendenti se esiste una combinazione lineare nulla dei vettori v_i con coefficienti non tutti nulli:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ non tutti nulli, tale che} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0.$$

Definizione

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si dicono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti, cioè:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0.$$

cioè l'unica combinazione lineare nulla dei vettori v_i è quella con coefficienti tutti nulli.

Combinazione lineare di vettori

Definizione

Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, con V sp. vettoriale. Si definisce combinazione lineare di tali vettori ogni elemento v di V della forma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

OSSERVAZIONE

Scegliamo $V = \mathbb{R}^m$. Considerata la matrice $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ le cui colonne sono i vettori v_i ed il vettore colonna $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^T$ allora evidentemente

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = A\mathbf{x}$$

Proprietà delle basi

Teorema

Ogni spazio vettoriale V ammette una base. Due basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la stesso numero di elementi (finito o infinito) che prende il nome di dimensione dello spazio vettoriale V e si indica con $\dim(V)$.

Proposizione

Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

(a) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *costituiscono una base di* V;

(b) *ogni elemento di V può esprimersi in maniera univoca come combinazione lineare dei v_i, cioè:*

$$\forall v \in V \exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ t.c. } v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Base di uno spazio vettoriale

Esempi di basi

- $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n. La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots\dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

  che sono le colonne della matrice identica I.
- Lo spazio vettoriale P_n dei polinomi di grado al più n ha dimensione $n+1$. Infatti un polinomio di grado n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

  non è altro che una combinazione lineare delle potenze

$$x^0, x^1, x^2, \dots, x^n$$

  cioè la base delle potenze.

Spazi normati

Norme su spazi vettoriali

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale reale. Si dice norma un'applicazione

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

che verifica le seguenti proprietà (dette assiomi di norma):

(a) $\forall v \in V: \ \|v\| \geq 0 \quad e \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(b) $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(c) $\forall u, v \in V: \ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(disuguaglianza triangolare).*

La coppia $(V, \|\cdot\|)$ è detta spazio normato

Ogni norma induce canonicamente una distanza. Se $u, v \in V$:

$$d(u, v) = ||u - v|| \quad \text{(distanza tra } u \text{ e } v\text{)}$$

Norme vettoriali

Norme su vettori ($V = \mathbb{R}^n$)

Sia $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ un vettore.

- $||\cdot||_2$ Norma 2 (o norma euclidea).

$$||\mathbf{x}||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$ in Matlab: `>>norm(x)`

- $||\cdot||_1$ Norma 1.

$$||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$ in Matlab: `>>norm(x,1)`

- $||\cdot||_\infty$ Norma infinito.

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$ in Matlab: `>>norm(x,inf)`

Norme vettoriali

Norme su vettori ($V = \mathbb{R}^n$)

$$\boxed{m\|\mathbf{x}\|' \le \|\mathbf{x}\| \le M\|\mathbf{x}\|'}$$

Sia $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ un vettore.

- $\|\cdot\|_2$ Norma 2 (o norma euclidea).

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$$ in Matlab: `>>norm(x)`

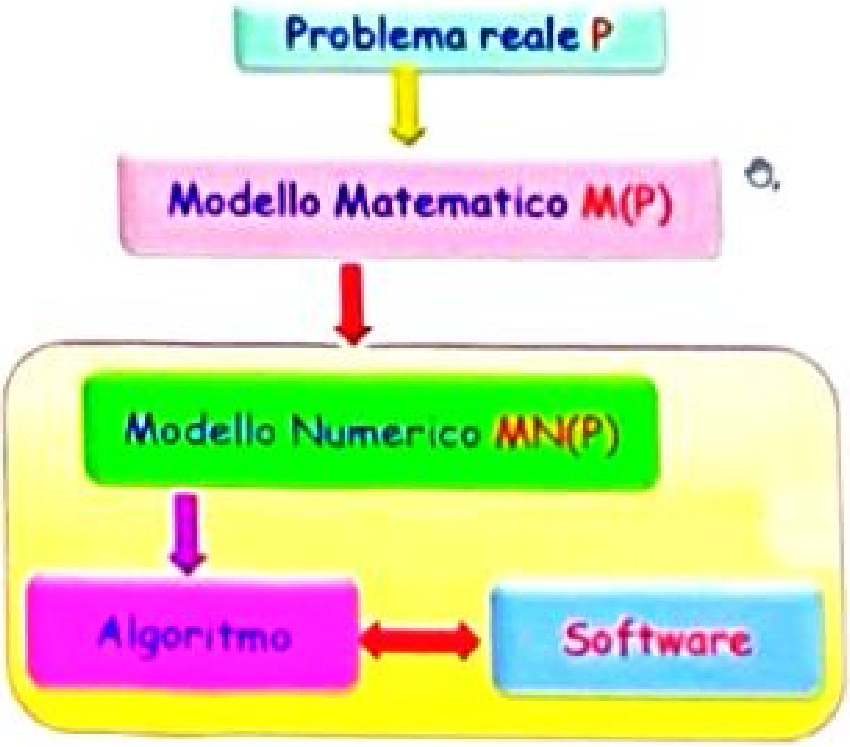
- $\|\cdot\|_1$ Norma 1.

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$ in Matlab: `>>norm(x,1)`

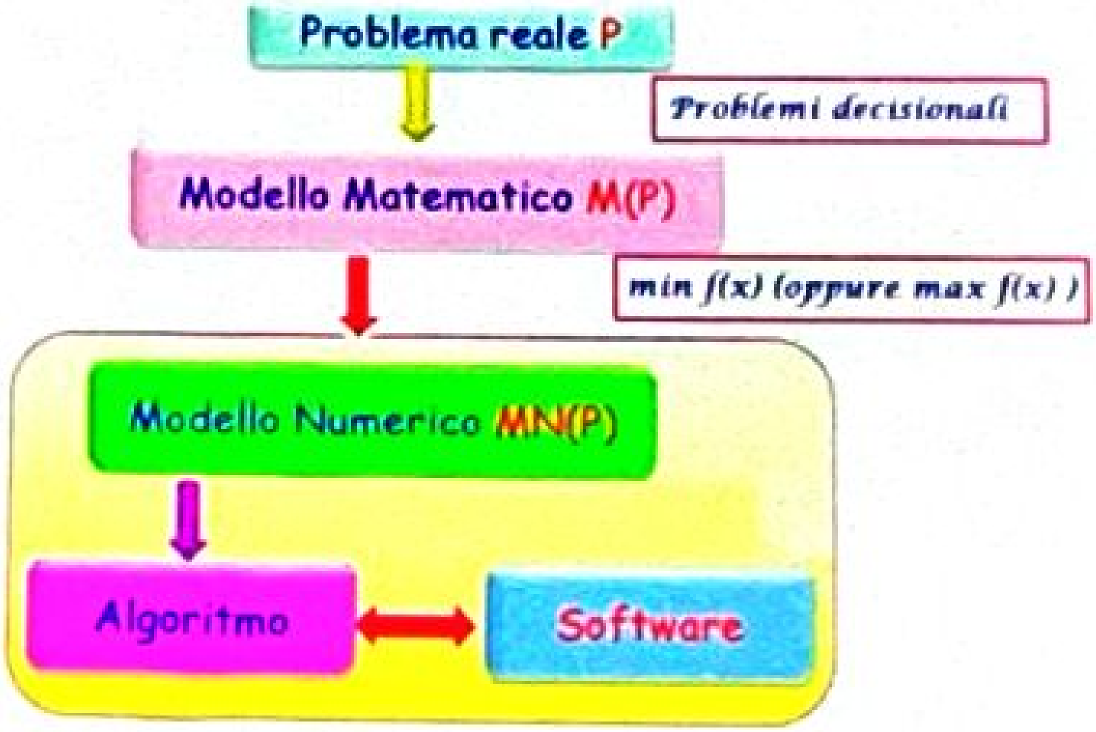
- $\|\cdot\|_\infty$ Norma infinito.

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$ in Matlab: `>>norm(x,inf)`

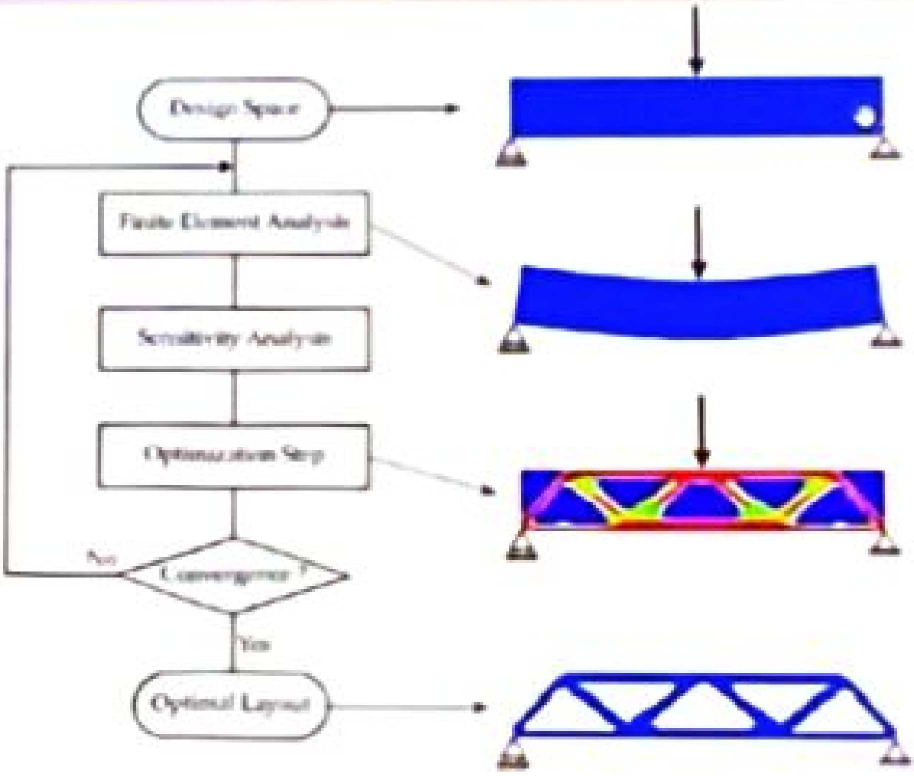
Modello matematico



Modello matematico

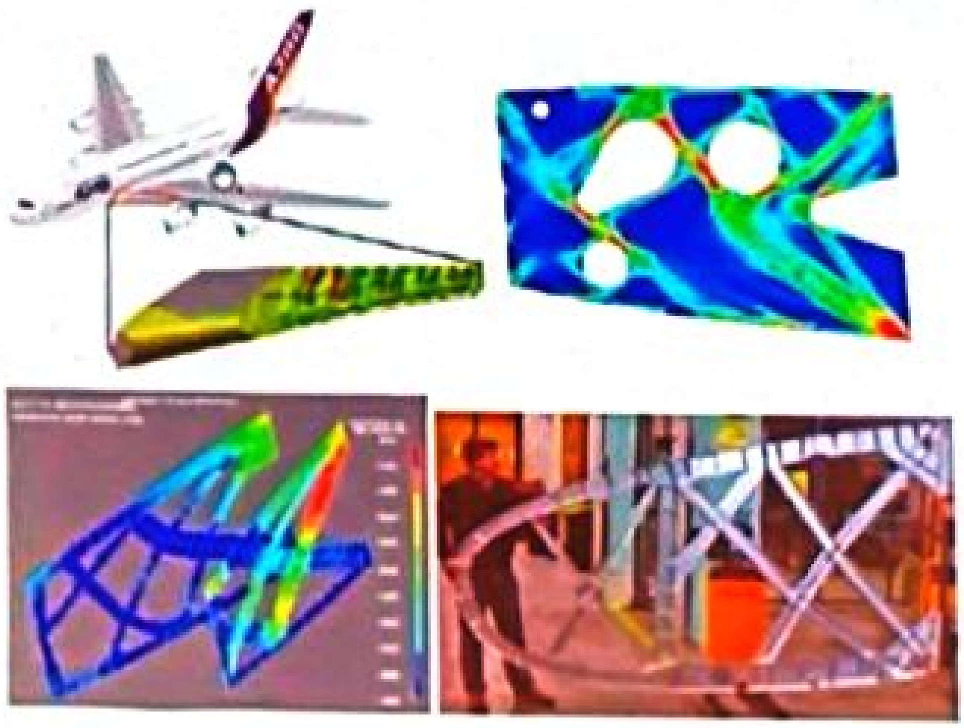


Ottimizzazione topologica



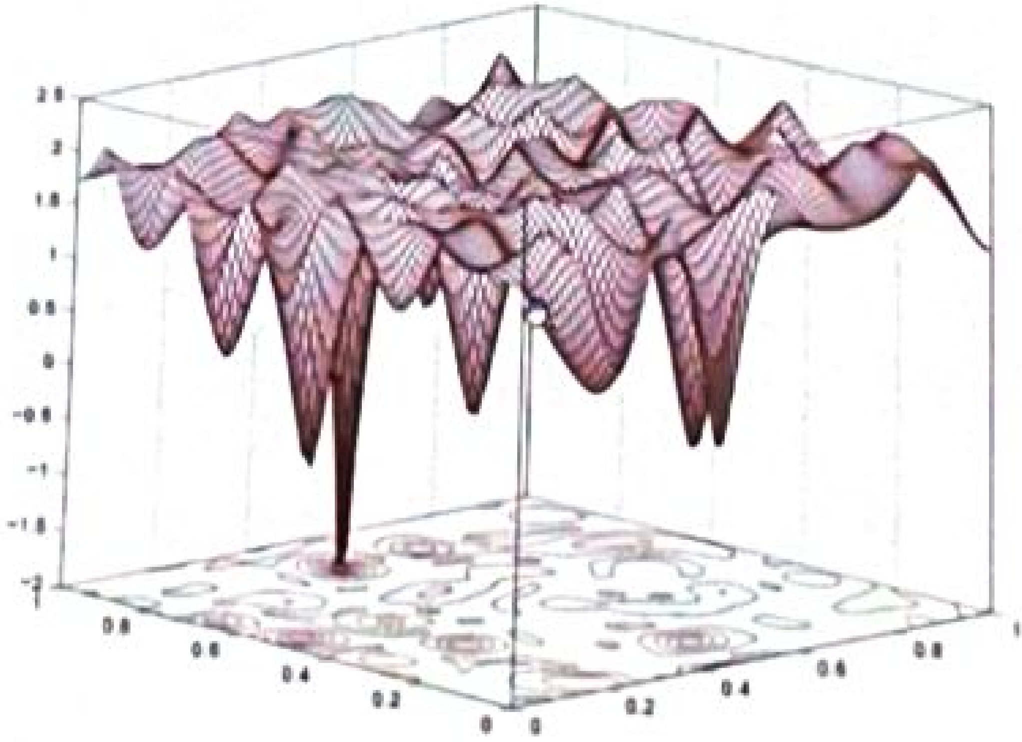
L'ottimizzazione topologica parte da un modello continuo.

Ottimizzazione topologica



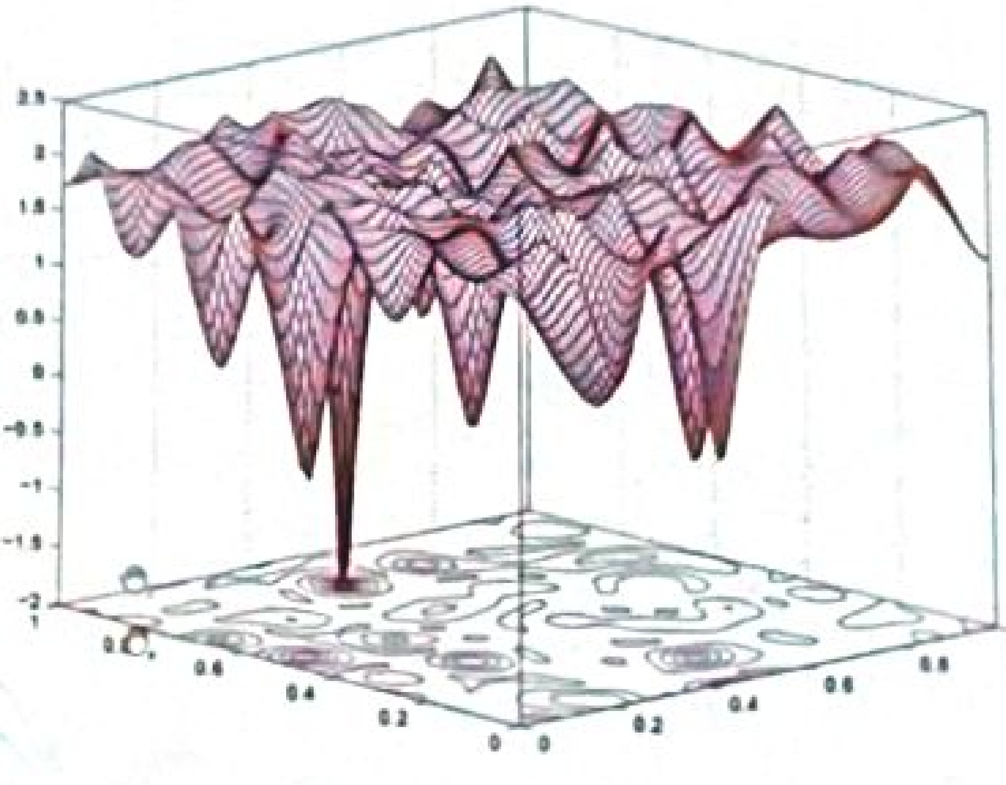
M. Kočvara et al. (2008)

Ottimizzazione globale



Ottimizzazione continua, locale e globale (rilevante dal punto di vista applicativo)

Ottimizzazione globale



$$\min f(x), \qquad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 1$$