Polinomio di Newton: Esempio di prima

$x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$. Si vuole trovare il polinomio di interpolazione di secondo grado di $f(x) = 1/x$.

$\Rightarrow y_0 = 0.5 \quad y_1 = 0.4 \quad y_2 = 0.25$

2	0.5		
2.5	0.4	$\frac{0.4-0.5}{2.5-2} = -0.2$	
4	0.25	$\frac{0.25-0.4}{4-2.5} = -0.1$	$\frac{-0.1+0.2}{4-2} = 0.05$

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0 x_1](x - x_0) + f[x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p_2(x) = 0.5 - 0.2(x-2) + 0.05(x-2)(x-2.5) \\ p_2(x) = 1.15 - 0.425x + 0.05x^2 \end{array}}$$

Errore di interpolazione

Generalmente, a meno di non interpolare un polinomio di grado non superiore a n, il polinomio $p_n(x)$ assume valori diversi dalla funzione $f(x)$, tale che $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, che si vuole interpolare con il polinomio di Lagrange.

Si dice **errore di interpolazione** la funzione

$$\boxed{R(x) = f(x) - p_n(x) \quad x \in [a, b]}$$

che è tale che $R(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$, ma è $R(x) \neq 0$, per $x \neq x_i$.

Se non si sa nulla della $f(x)$, non si può dire nulla su $R(x)$.
Ci sono infinite funzioni $f(x)$, tali che $f(x_i) = y_i$ e sono interpolate dal medesimo polinomio.

Se si possiede una conoscenza qualitativa delle derivate di $f(x)$, allora è possibile calcolare $R(x)$, $x \in [a, b]$.

Errore di interpolazione

Teorema. Sia $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$. Siano $x_0, \dots, x_n$ punti distinti in $[a,b]$ e sia $p_n(x)$ il polinomio di grado al più n che interpola $f(x)$ in $[a,b]$. Allora esiste un punto $\xi \in [a,b]$, dipendente da $x, x_0, \dots, x_n$ e da $f(x)$ tale che

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - p_n(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \\ &= \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

ove $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$.

Errore di interpolazione

Poichè il punto $\xi \in [a, b]$ dipendente da x, per $x_0, \ldots, x_n$ fissati è incognito, la formula dell'errore di interpolazione ha significato teorico. Tuttavia, poichè $f^{(n+1)}(x)$ è continua in $[a, b]$ chiuso e limitato, esiste una costante M tale che

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \qquad x \in [a, b]$$

Pertanto

$$|R(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

Inoltre, poichè $\omega(x)$ è continua in $[a, b]$, esiste ω^* tale che

$$|\omega(x)| \leq \omega^* \qquad x \in [a, b]$$

Pertanto

$$|R(x)| \leq \frac{M\omega^*}{(n+1)!}$$

Assegnata $\epsilon > \frac{M\omega^*}{(n+1)!}$, $p_n(x)$ è una approssimazione di $f(x)$ entro la tolleranza ϵ.

Errore di interpolazione

Per il polinomio di interpolazione nella forma di Newton si ha

$$R(x) = f(x) - p_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n]\omega(x).$$

La formula è generale e fornisce una caratterizzazione di $R(x)$ anche per funzioni $f(x) \notin C^{n+1}[a, b]$.
Tuttavia poiché $R(x)$ è univocamente determinato, se $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, dati $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distinti, segue che esiste ξ dipendente da x e da $x_0, x_1, \ldots x_n$ tale che

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x x_0 x_1 \ldots x_n].}$$

Il concetto di differenza divisa è una generalizzazione della definizione di derivata.

Errore di interpolazione: Esempio

Sia $f(x) = \ln(x)$, $[a, b] = [0.4, 0.8]$. Dati $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.7, x_3 = 0.8$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \ln(x_0) = -0.916291 \\
y_1 &= \ln(x_1) = -0.693147 \\
y_2 &= \ln(x_2) = -0.356675 \\
y_3 &= \ln(x_3) = -0.223144
\end{aligned}
$$

determinare il polinomio di interpolazione di grado 3 di $\ln(x)$ in $[0.4, 0.8]$.

Errore di interpolazione: Esempio

Sia $f(x) = \ln(x)$, $[a, b] = [0.4, 0.8]$. Dati $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.7, x_3 = 0.8$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \ln(x_0) = -0.916291 \\
y_1 &= \ln(x_1) = -0.693147 \\
y_2 &= \ln(x_2) = -0.356675 \\
y_3 &= \ln(x_3) = -0.223144
\end{aligned}
$$

determinare il polinomio di interpolazione di grado 3 di $\ln(x)$ in $[0.4, 0.8]$.

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)(0.4-0.8)} \\
L_1(x) &= \frac{(x-0.4)(x-0.7)(x-0.8)}{0.006} \\
L_2(x) &= \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.8)}{-0.006} \\
L_3(x) &= \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)}{0.012}
\end{aligned}
$$

Errore di interpolazione: Esempio

$$L_0(x) = \frac{(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)(0.4-0.8)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0.4)(x-0.7)(x-0.8)}{0.006}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.8)}{-0.006}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)}{0.012}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_3(x) &= -0.916291L_0(x) - 0.693147L_1(x) + \\ &\quad -0.356675L_2(x) - 0.223144L_3(x) \end{aligned}}$$

Errore di interpolazione: Esempio

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -0.916291 L_0(x) - 0.693147 L_1(x) + \\ &\quad -0.356675 L_2(x) - 0.223144 L_3(x) \end{aligned}$$

Errore numerico di interpolazione

Per $x = 0.6$, $p_3(0.6) = -0.509975$ invece di -0.510826.

$R(0.6) = \ln(0.6) - p_3(0.6) = -0.000851.$

Errore di interpolazione: Esempio

Dalla formula dell'errore di interpolazione si può trovare una maggiorazione di $R(0.6)$ se si conosce la derivata quarta di $\ln(x)$ $(D^4(\ln(x)) = -6/x^4)$.

$$R(x) = \frac{(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)}{4!}\left(-\frac{6}{\xi^4}\right)$$

con ξ dipendente da x appartiene a $(0.4, 0.8)$. Poichè $6/x^4$ è decrescente in tale intervallo con valore massimo in 0.4, si ha

$$|-6/x^4| \leq 6/(0.4)^4 = 234.4$$

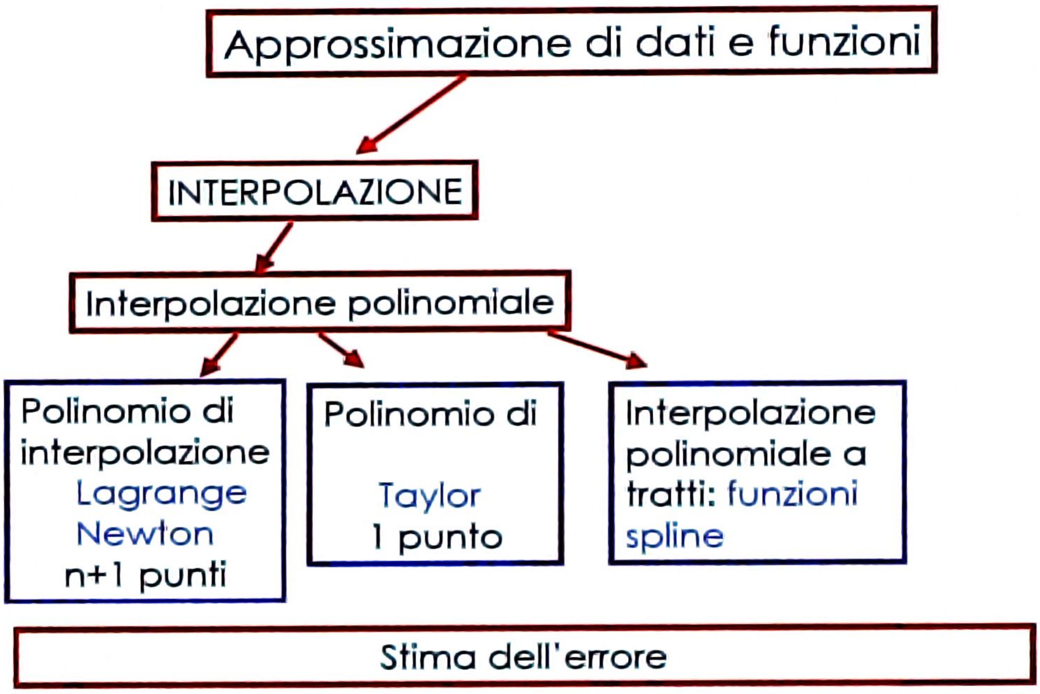
$$|R(x)| \leq |(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8)|\frac{234.4}{24}$$

Per $x = 0.6$,

$$|R(0.6)| \leq 0.0039$$

che è una sovrastima di 0.000851.

Problema di interpolazione



Resto dell'interpolazione

Siano $x_0, \ldots, x_n$ punti distinti in $[a, b]$ e sia $p_n(x)$ il polinomio di grado al più n che interpola $f(x)$ in $[a, b]$, $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$.

Allora esiste un punto $\xi \in [a, b]$, dipendente da $x, x_0, \ldots, x_n$ e da $f(x)$ tale che

$$\boxed{R_n(x) = \quad f(x) - p_n(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}$$

ove $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

Se $|f^{(n+1)}(x)| \le M$, $|\omega(x)| \le \omega^*$, $x \in [a, b]$ $\Longrightarrow$ $\boxed{|R_n(x)| \le \frac{M\omega^*}{(n+1)!}}$

In generale che accade a $\lim_{n \to \infty} \| R_n(x) \|_\infty$?

Dipende dalla scelta nodi e dalle caratteristiche di f!

Resto dell'interpolazione

Nel caso $n = 1$, supponendo $x_0 \leq x \leq x_1$, il resto è dato da

$$R_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\,\frac{f''(\xi)}{2}, \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Posto $M_2 = \max_{x \in (x_0, x_1)} |f''(x)|$ e $h = x_1 - x_0$, si ha

$$\max_{x \in (x_0, x_1)} |(x - x_0)(x - x_1)| = \frac{h^2}{4} \quad \text{e} \quad |\,R_1(x)\,| \leq \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Per $n = 2$, supponendo $x_0 < x_1 < x_2$ e $x_0 \leq x \leq x_2$, il resto è dato da

$$R_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,\frac{f'''(\xi)}{6}, \quad \xi \in (x_0, x_2).$$

Posto $M_3 = \max_{x \in (x_0, x_2)} |f'''(x)|$, si ha

$$|\,R_2(x)\,| \leq \max_{x \in (x_0, x_2)} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|\,\frac{M_3}{6}.$$

Nodi di interpolazione equidistanti

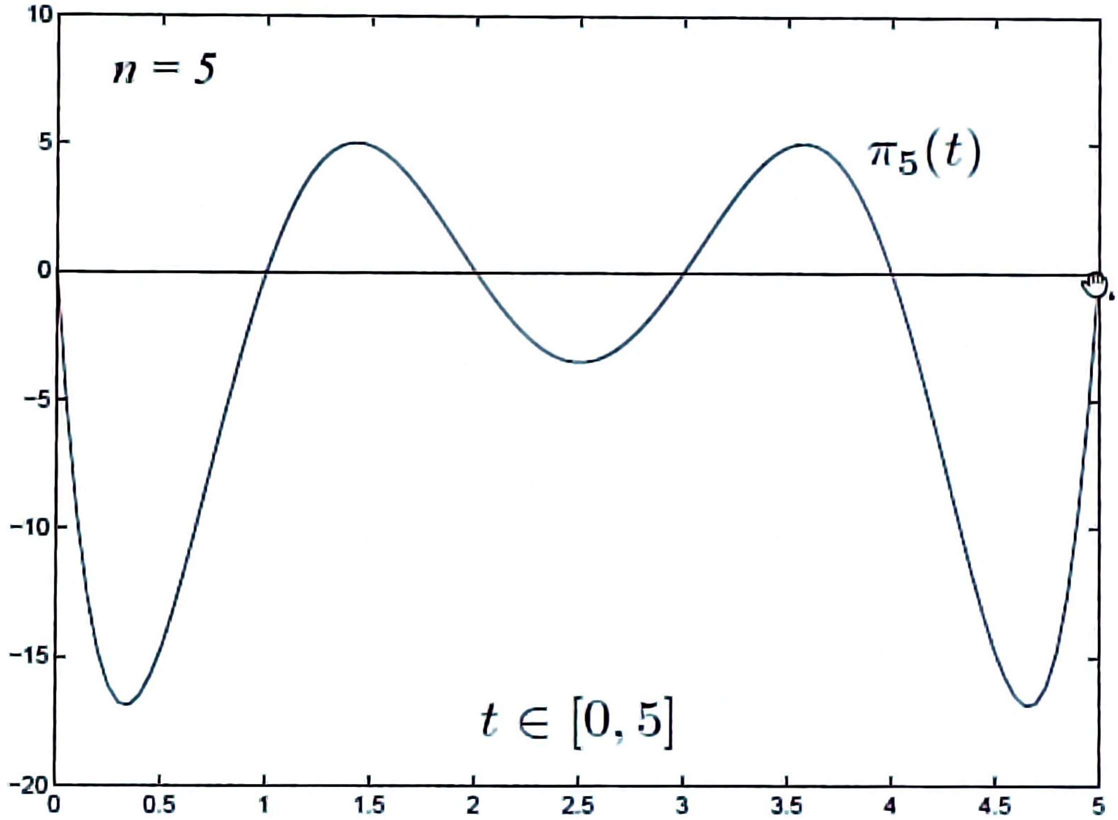
$$R_{\max} = \max_{x\in[a,b]} |R_n(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \frac{M}{(n+1)!},$$

$$M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

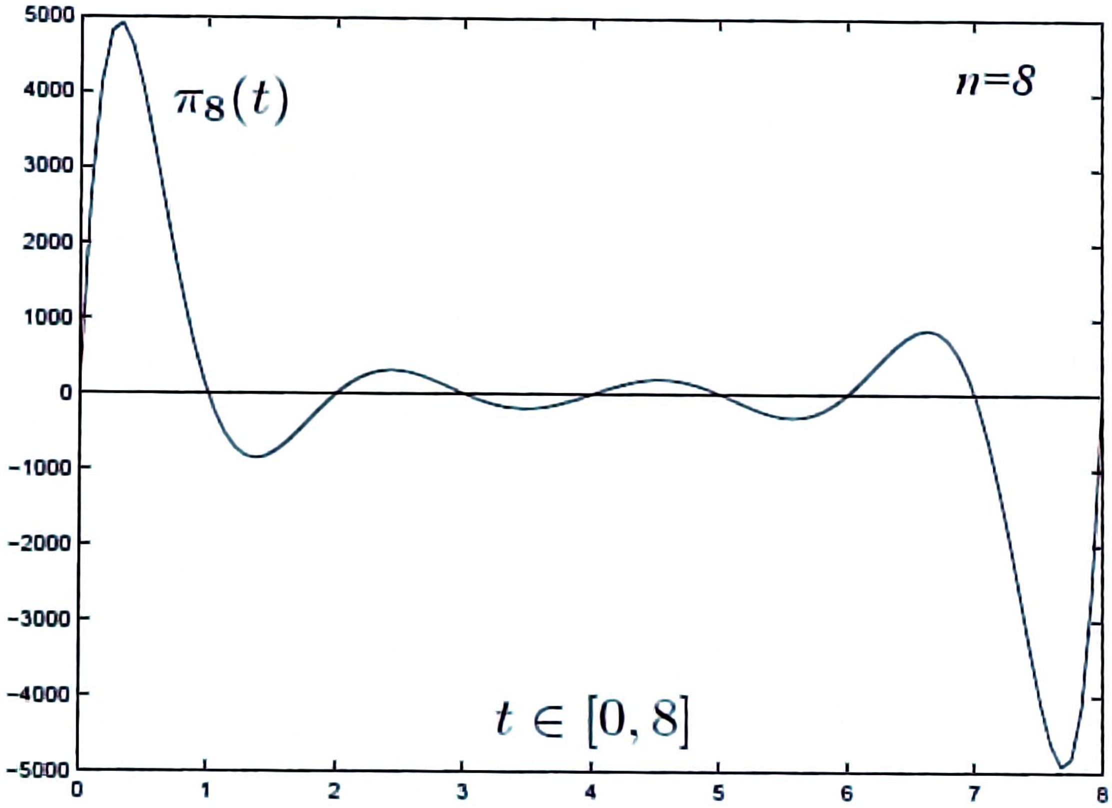
Per i nodi equidistanti (con passo h): $x_i = x_0 + ih$, per $i = 0,\ldots,n$, ponendo $x = x_0 + th$, si ha

$$R_{\max} \leq \max_{t\in[0,n]} |\pi_n(t)|\; h^{n+1} \frac{M}{(n+1)!}, \quad \text{dove} \quad \pi_n(t) = t(t-1)\cdots(t-n).$$

Nodi di interpolazione equidistanti: polinomio nodale per $n = 5$



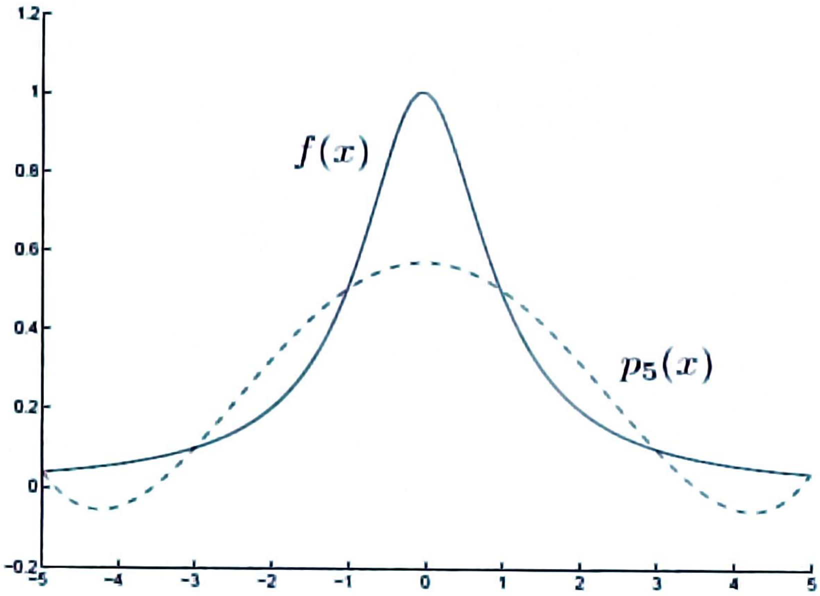
Nodi di interpolazione equidistanti: polinomio nodale per $n = 8$



Fenomeno di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [a,b] = [-5,5] \implies p_n(x), \quad x_i = a + i(b-a)/n,\ i = \overline{0,n}.$$

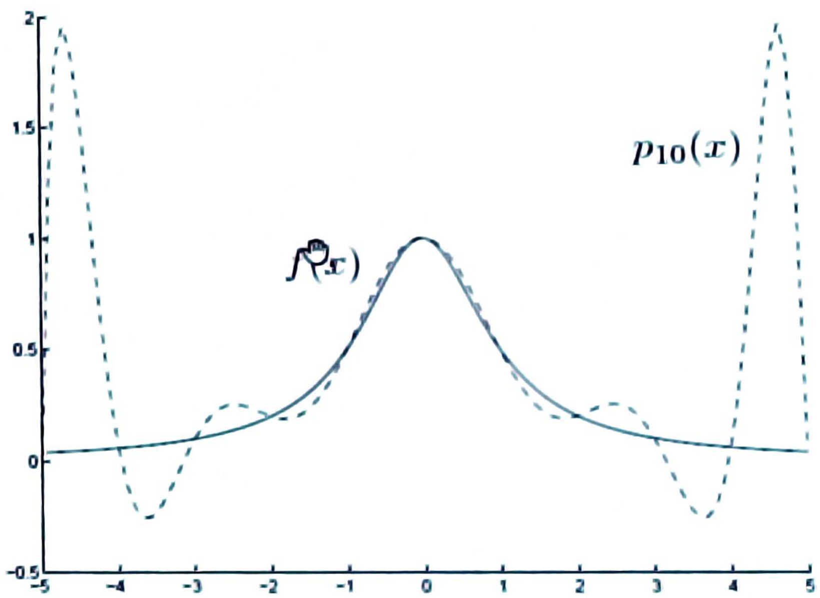
$$p_5(x) = \frac{1}{520}x^4 - \frac{9}{130}x^2 + \frac{59}{104}$$



Fenomeno di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [a,b] = [-5,5] \;\Rightarrow\; p_n(x), \; x_i = a + i(b-a)/n, \; i = \overline{0,n}.$$

$$p_{10}(x) = -\frac{1}{44200}x^{10} + \frac{7}{5525}x^8 - \frac{83}{3400}x^6 + \frac{2181}{11050}x^4 - \frac{149}{221}x^2 + 1,$$



Interpolazione in MATLAB

Il polinomio è individuato dai coefficienti che devono essere memorizzati in un vettore.

In MATLAB i coefficienti devono essere **ordinati** a partire da quello corrispondente al termine di grado **più elevato** fino a quello di grado zero. I coefficienti nulli vanno esplicitati.

$p(x) = 1 - 2x + 4x^3 \Longrightarrow$ `c=[4 0 -2 1]`.

Per valutare un polinomio in uno o più punti si usa il comando `polyval`:

```
>> y = polyval(p,x)
```

- `x` è un vettore dove si specificano le ascisse nelle quale si vuole valutare il polinomio `p`.
- `y` è un vettore che contine i valori di `p` in `x`.

Se `x` e `y` sono due vettori di $n+1$ componenti, il comando `p=polyfit(x,y,n)` calcola il polinomio interpolatore dei dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$.

Interpolazione di Chebyshev

Il fenomeno di Runge può essere evitato utilizzando opportune distribuzioni di nodi.

Nell'intervallo $[a, b]$ consideriamo i nodi x_i dati da:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{x}_i \quad \text{con } \hat{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right), \ i = 0, \ldots, n.$$

I punti $\hat{x}_i \in [-1, 1]$ si dicono nodi di Chebyshev.

Teorema (di Bernstein)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathbf{C}^1$. Sia $p_n(x)$ il polinomio interpolatore di grado n costruito usando i nodi di Chebyshev.
Allora

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n(x)\|_\infty = 0.$$