Integrali impropri

- L'*integrale improprio* rappresenta l'estensione del concetto di integrale definito per funzioni che presentino un numero finito di punti discontinuità nell'intervallo di integrazione, oppure per funzioni il cui intervallo di integrazione risulti illimitato.
- **Infinity Computer**: Anche gli integrali, come le serie, ora devono essere definiti nella maniera più precisa. Per esempio, per l'integrale

$$\int_0^\infty x^2 dx$$

  è necessario definire entrambi gli estremi di integrazione nel modo esplicito.
- Quindi, i numeri infiniti ① e $①^2$ usati al posto del simbolo ∞ danno luogo a due integrali distinti

$$\int_0^{①} x^2 dx = \frac{1}{3}①^3, \qquad \int_0^{①^2} x^2 dx = \frac{1}{3}①^6.$$

Integrali impropri

- **Infinity Computer**: Possiamo calcolare anche gli integrali dove entrambi gli estremi di integrazione sono i numeri infiniti.
- Ad esempio, qui il risultato è un numero infinito

$$\int_{①}^{①^2} x^2 dx = \frac{1}{3}①^6 - \frac{1}{3}①^3.$$

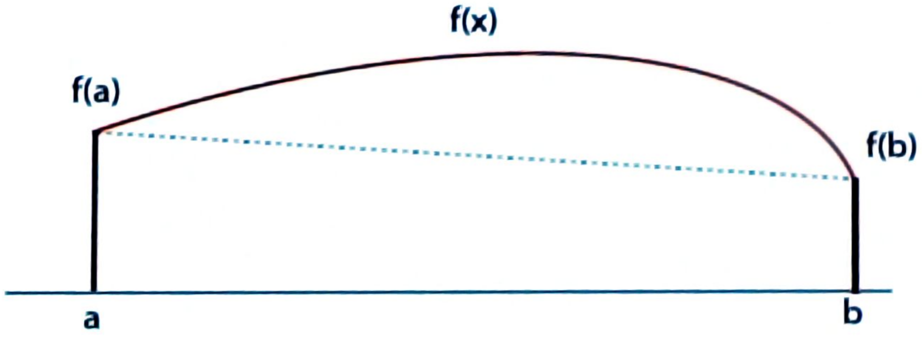
- In questo esempio il risultato è un numero con la parte finita e due parti infinitesime

$$\int_{①}^{①+①^{-2}} x^2 dx = \frac{1}{3}(①^1 + ①^{-2})^3 - \frac{1}{3}①^3 = 1①^0 1①^{-1}\frac{1}{3}①^{-6} \approx 1.$$

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi

Consideriamo ora applicazioni successive della regola dei trapezi, con il passo dimezzato ad ogni iterazione:



- Il passo ad ogni iterazione risulta allora $h_k = (b-a)/2^{k-1}$, con $k = 1$ che corrisponde alla regola dei trapezi applicata su tutto l'intervallo e $h_{k+1} = h_k/2$;
- ad ogni iterazione si aggiungono nuovi punti alla decomposizione dell'intervallo [a,b].

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi

- Usando la formula composta alla k-esima iterazione abbiamo dunque, con $m = 2^{k-1}$,

$$I = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}\, h_k^2\, f''(\xi).$$

- Non è difficile dimostrare che l'errore che compare sopra può essere scritto nella forma di una serie di potenze del tipo $K_1\, h_k^2 + K_2\, h_k^4 + ... = \sum_{j=1}^{\infty} K_j\, h^{2j}$.
- Introducendo

$$R_{k1} = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + f(b)\right]$$

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi

- ... possiamo allora scrivere

$$I = R_{k1} + K_1 h_k^2 + K_2 h_k^4 + \ldots$$

- Il calcolo di R_{k1} non richiede il calcolo della funzione su tutti i nodi che compaiono nella sommatoria, ma soltanto sui nodi che non erano presenti nell'iterazione precedente.
- In particolare:

$$R_{k1} = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j\in\mathcal{N}_1} f(x_j) + f(b) \;\; + 2\sum_{j\in\mathcal{N}_2} f(x_j)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{h_{k-1}}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j\in\mathcal{N}_1} f(x_j) + f(b)\right] +$$

$$+ h_k \sum_{j\in\mathcal{N}_2} f(x_j) = \frac{1}{2} R_{k-1,1} + h_k \sum_{j\in\mathcal{N}_2} f(x_j)$$

dove $\mathcal{N}_1$ ed $\mathcal{N}_2$ sono gli insiemi di indici corrispondenti rispettivamente ai vecchi nodi ed ai nuovi nodi.

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi

- La relazione appena trovata fornisce una relazione di ricorrenza per le R_{k1}. Dalle prime due iterazioni,

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)] \\
R_{21} &= \frac{b-a}{4}\left[f(a)+f(b)+2\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\,R_{11}+\frac{b-a}{2}\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ricostruiamo le iterazioni successive.

Metodo di Romberg

Estrapolazione di Richardson

- Riprendiamo l'espressione scritta in precedenza

$$I = R_{k1} + K_1\, h_k^2 + K_2\, h_k^4 + \dots$$

- e mettiamola a sistema con la stessa calcolata all'iterazione $k+1$, ricordando che $h_{k+1} = h_k/2$:

$$I = R_{k1} + K_1\, h_k^2 + K_2\, h_k^4 + \dots$$
$$I = R_{k+1,1} + K_1\, \frac{h_k^2}{4} + K_2\, \frac{h_k^4}{16} + \dots$$

- Moltiplicando la seconda per 4 e sottraendo si elimina il termine quadratico in k (come già visto in precedenza a proposito dell'estrapolazione di Richardson).

Metodo di Romberg

Estrapolazione di Richardson

- Ricavando I:

$$I = \frac{4\,R_{k+1,1} - R_{k1}}{3} - \frac{1}{4}\,h_k^4 + \dots$$

- Definendo

$$R_{k2} = \frac{4\,R_{k1} - R_{k-1,1}}{3} = R_{k1} + \frac{R_{k1} - R_{k-1,1}}{3}$$

abbiamo

$$I = R_{k2} - \frac{1}{4}\,h_k^4 + \dots$$

per $k = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$, ottenendo così un'approssimazione con errore del quart'ordine.

Metodo di Romberg

Estrapolazione di Richardson

- Il procedimento di estrapolazione può essere continuato ulteriormente, secondo la relazione di ricorrenza

$$R_{kj} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

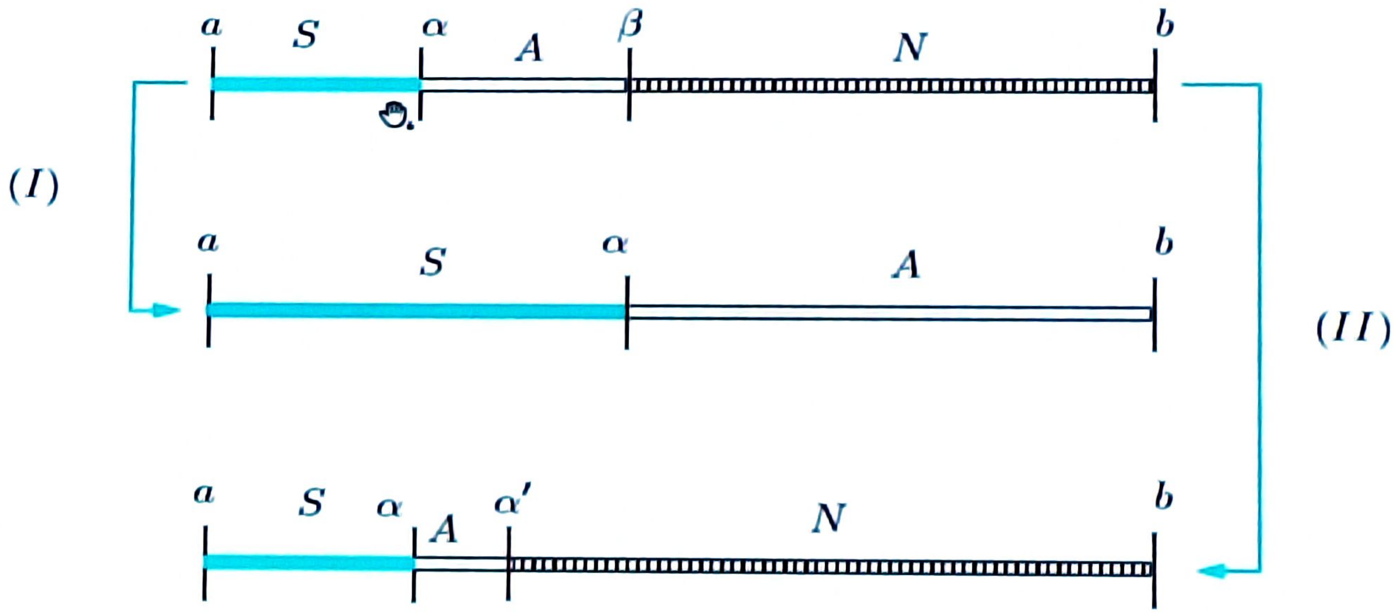
- che si può riassumere nella tabella

$$\begin{array}{cccccc}
R_{11} & & & & & \\
R_{21} & R_{22} & & & & \\
R_{31} & R_{32} & R_{33} & & & \\
R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & \\
R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & R_{n4} & \dots & R_{nn}
\end{array}$$

Formule di quadratura adattive

- L'obiettivo è fornire un'approssimazione di $\int_a^b f(x)\,dx$ garantendo che l'errore sia inferiore ad una tolleranza $\epsilon > 0$ prefissata.
- Usando le stime a posteriori dell'errore, è possibile scegliere il passo di integrazione h delle formule composite in modo di garantire la precisione desiderata.
- Ma l'idea dei metodi adattivi è usare una distribuzione non uniforme del passo d'integrazione sull'intervallo $[a, b]$.
- Un algoritmo ottimale adatta in modo automatico la scelta dell'ampieza del passo al comportamento della funzione $f \rightsquigarrow$ h più piccolo dove la funzione presenta variazioni più forti.

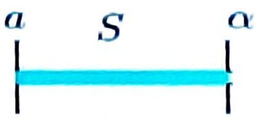
Formule di quadratura adattive



Formule di quadratura adattive

Se devo calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ con errore minore di ϵ, ad un certo punto del calcolo mi troverò a lavorare su un particolare sottointervallo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ $\rightsquigarrow$ Intervallo attivo.

- avrò già calcolato $\int_a^\alpha f(x)\,dx$ con sufficiente accuratezza.

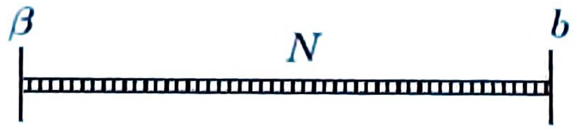


- a questo punto l'obiettivo sarà calcolare l'integrale tra α e β con sufficiente accuratezza

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \epsilon\,\frac{\beta - \alpha}{b - a}\,.$$

(cammino I o II nella figura precedente)

- fatto questo mi preocuperò di calcolare $\int_\beta^b f(x)\,dx$ con sufficiente accuratezza.



Formula di Cavalieri-Simpson adattiva

Se uso, ad esempio, la formula di Cavalieri-Simpson

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \approx I_{CS}^1(f) = \frac{\beta-\alpha}{6}[f(\alpha) + 4f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta)]$$

Per stimare l'errore pero mi serve anche calcolare $I_{CS}^2(f)$.

$$|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - I_{CS}^2(f)| \approx \frac{1}{15}|I_{CS}^2(f) - I_{CS}^1(f)| =: \mathtt{err}$$

- Se $\mathtt{err} < \epsilon\frac{\beta-\alpha}{b-a}$
  - mi tengo come approssimazione di $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ il valore $I_{CS}^2(f)$.
  - l'intervallo attivo diventa $[\beta, b]$.
- Se $\mathtt{err} \geq \epsilon\frac{\beta-\alpha}{b-a}$
  - mi concentro su un sottointervallo più piccolo; l'intervallo attivo diventa $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$

Formula di Cavalieri-Simpson adattiva

- Inizialmente l'intervallo attivo è tutto l'intervallo $[a, b]$.
- L'algoritmo si ferma quando nel spostare l'intervallo attivo trovo che diventa $\alpha = b$.
- In pratica è più conveniente assumere una stima dell'errore più conservativa $\rightsquigarrow$ `err=`$\left| I_{CS}^2 - I_{CS}^1 \right|$`/10`.
- Conviene introdurre un controllo per evitare che il passo d'integrazione diventi troppo piccolo.
  In caso di eccessiva riduzione è da segnalare la presenza di un eventuale punto di singolarità della funzione.

MATLAB: `quad(f,a,b)` formula di Simpson adattativa

Esempio: $I(f) = \int_{-1}^{1} e^{-10(x-1)^2} \simeq 0.28024956081990$

```
>> f=@(x)exp(-10*(x-1).^2); tol = 1.e-04; format long e
>> [q,fcnt]=quad(f,-1,1,tol)
q = 2.802501577170299e-001      fcnt =  21
```

$\Longrightarrow \quad |I(f) - q| \simeq 0.6 \cdot 10^{-6} \leqslant \text{tol} = 10^{-4}$

Formula di Simpson adattiva: Qualche iterazione (V. Comincioli)

Dato $\epsilon > 0$, si vuole ottenere una approssimazione $I_{\mathbf{CS}}$ dell'integrale di $f(x)$ tale che

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - I_{\mathbf{CS}} \right| \leq \epsilon$$

A tale scopo si incomincia ad applicare la formula di Simpson con passo $h = (b-a)/2$. Si ottiene

$$\int_a^b f(x)\, dx = S(a,b) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \ \xi \in (a,b)$$

ove

$$S(a,b) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(b)\right]$$

Il *passo successivo* consiste nel cercare di stimare l'errore $I - S(a,b)$ senza determinare esplicitamente la funzione $f^{(4)}(x)$.

Formula di Simpson adattiva: Qualche iterazione (V. Comincioli)

Il *passo successivo* consiste nel cercare di stimare l'errore $I - S(a,b)$ senza determinare esplicitamente la funzione $f^{(4)}(x)$. Per fare questo, applichiamo la formula di Simpson con passo $h/2 = (b-a)/4$ ottenendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overbrace{\frac{h}{6}\left[f(a)+4f(a+\frac{h}{2})+f(a+h)\right]}^{S(a,\frac{a+b}{2})} + \overbrace{\frac{h}{6}\left[f(a+h)+4f(a+\frac{3}{2}h)+f(b)\right]}^{S(\frac{a+b}{2},b)} -$$
$$-\left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\overline{\xi}), \quad \overline{\xi} \in (a,b)$$

Si ha quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(a,\frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2},b) - \frac{1}{16}\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\overline{\xi})$$

Supponiamo ora

$$f^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\overline{\xi})$$

Si tratta di un'ipotesi in generale non verificata, ma che permette di ottenere utili indicazioni sull'errore. Il *successo* della tecnica dipenderà da quanto *poco* l'ipotesi precedente si discosta dal vero.

Formula di Simpson adattiva: Qualche iterazione (V. Comincioli)

Dalle equazioni precedenti si ricava

$$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \approx \frac{16}{15}\left[S(a,b) - S(a,\frac{a+b}{2}) - S(\frac{a+b}{2},b)\right]$$

da cui la seguente stima

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \left[S(a,\frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2},b)\right]\right| \approx \frac{1}{15}\left|S(a,b) - S(a,\frac{a+b}{2}) - S(\frac{a+b}{2},b)\right|$$

Se pertanto

$$\left|S(a,b) - S(a,\frac{a+b}{2}) - S(\frac{a+b}{2},b)\right| < 15\epsilon \qquad (*)$$

allora si ha

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \left[S(a,\frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2},b)\right]\right| \leq \epsilon$$

In pratica, per tenere conto dell' ipotesi $f^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\overline{\xi})$, anziché 15ϵ si prende una stima più *conservativa*, ad esempio 10ϵ.

Se la disuguaglianza $(*)$ non è verificata, si applica la procedura di stima dell'errore su ogni intervallo $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Nel caso in cui la stima su ciascuno degli intervalli segnali un errore $< \epsilon/2$, **STOP.**

Altrimenti, se su uno degli intervalli la stima dell'errore non passa il test, tale intervallo viene ulteriormente suddiviso e ognuno dei sottointervalli viene esaminato per vedere se l'errore è $< \epsilon/4$, e così di seguito.

Formula di Simpson adattiva: Qualche iterazione (V. Comincioli)

$$I = \int_1^3 \frac{100}{x^2} \sin \frac{10}{x}\, dx \simeq -1.42602475...$$

Utilizzando la procedura adattiva con $\epsilon = 1.E{-}4$
si trova il valore -1.426021 con un errore $\approx 3.E{-}6$.

Tale risultato viene ottenuto con 84 valutazioni **di $f(x)$**.
Con la formula di Simpson a passo uniforme
con 256 valutazioni si ottiene un errore $2.4\,E{-}6$.

Formula di Simpson adattiva: Qualche iterazione (V. Comincioli)

$$I = \int_1^3 \frac{100}{x^2} \sin \frac{10}{x}\, dx \simeq -1.42602475...$$

Utilizzando la procedura adattiva con $\epsilon = 1.E{-}4$
si trova il valore -1.426021 con un errore $\approx 3.E{-}6$.

Tale risultato viene ottenuto con 84 valutazioni **di** $f(x)$.
Con la formula di Simpson a passo uniforme
con 256 valutazioni si ottiene un errore $2.4\,E{-}6$.