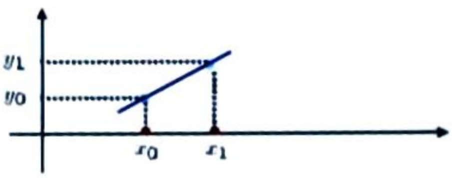
Polinomio di interpolazione nella forma di Lagrange

Dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ distinti, si vuole calcolare il polinomio di grado 1 tale che $p_1(x_i) = y_i$, $i = 0, 1$, ossia l'equazione della retta passante per i punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.

Polinomio di interpolazione nella forma di Lagrange

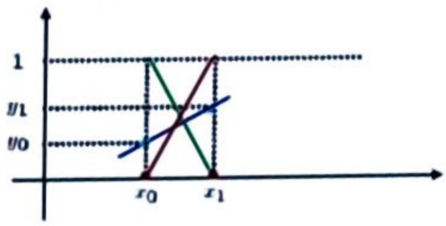
Dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ distinti, si vuole calcolare il polinomio di grado 1 tale che $p_1(x_i) = y_i$, $i = 0, 1$, ossia l'equazione della retta passante per i punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$



$$p_1(x_0) = y_0,\ p_1(x_1) = y_1.$$

$$p_1(x) = \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{L_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{L_1(x)} y_1$$



Proprietà

- $p_1(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1$
- $\begin{cases} L_0(x_0) = 1 & L_1(x_0) = 0 \\ L_0(x_1) = 0 & L_1(x_1) = 1 \end{cases}$
- $L_0(x), L_1(x)$ sono polinomi di grado 1

Polinomio di interpolazione nella forma di Lagrange

Nel caso generale si deve costruire per ogni punto k-esimo, $k = 0, \ldots, n$, un polinomio $L_k(x)$ di grado n tale che $L_k(x_i) = 0, \quad i \neq k, \quad L_k(x_k) = 1$.

Allora $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ sono zeri di $L_k(x)$:

$$L_k(x) = \alpha(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)$$

e, poichè $L_k(x_k) = 1$, deve essere

$$\alpha = \frac{1}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

Base di Lagrange

$$\boxed{L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}} \; k = 0, \ldots, n \qquad L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

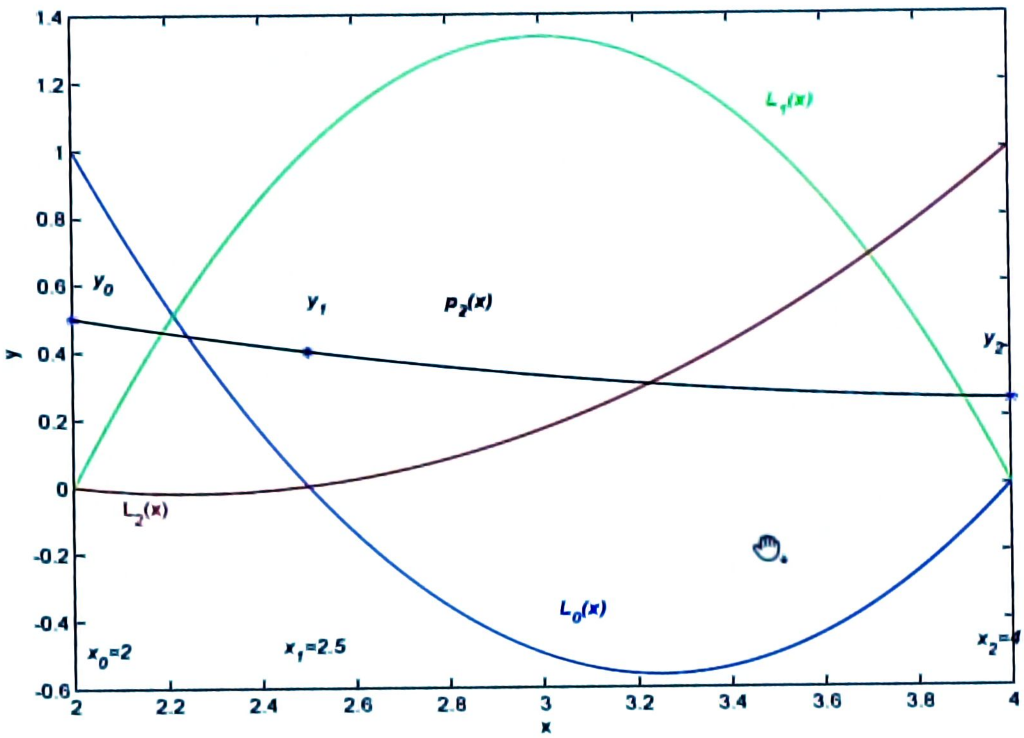
Polinomio di Lagrange: Esempio

Siano $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$. Trovare il polinomio di interpolazione di secondo grado di $f(x) = 1/x$: $\Rightarrow y_0 = 1/x_0 = 0.5$, $y_1 = 1/x_1 = 0.4$, $y_2 = 1/x_2 = 0.25$.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10 \\
L_1(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = (-4x^2 + 24x - 32)/3 \\
L_2(x) &= \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = (x^2 - 4.5x + 5)/3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= 0.5.(x^2 - 6.5x + 10) + 0.4.(-4x^2 + 24x - 32)/3 + \\
&+ 0.25(x^2 - 4.5x + 5)/3 = \\
&= 0.05x^2 - 0.425x + 1.15
\end{aligned}$$

Polinomio di Lagrange: Esempio



Polinomio di Lagrange

- Per calcolare
$$L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$
per il den. e numeratore sono necessari n-1 prodotti. ➡ $\mathcal{O}(2n^2)$

- Se si aggiunge un punto di osservazione, occorre ricalcolare tutti gli $L_k(x)$

Troviamo una diversa rappresentazione del polinomio di interpolazione che consenta di calcolarlo con una minore complessità e di derivare da un polinomio di grado n uno di grado superiore se si aggiungono coppie di dati (x_i, y_i) usando i calcoli eseguiti.

Polinomio di interpolazione nella forma di Newton

Sia $p_n(x)$ interpolante (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$
Aggiungo (x_{n+1}, y_{n+1}) e cerco di scrivere $p_{n+1}(x)$ sfruttando il lavoro già fatto

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + q_{n+1}(x), \qquad q_{n+1}(x) = ???$$

Che sappiamo di $q_{n+1}(x)$?

1. è un polinomio di grado $n+1$
2. $p_{n+1}(x_i) = p_n(x_i) + q_{n+1}(x_i)$, $i = 0, ..., n \Downarrow$
   $y_i = y_i + q_{n+1}(x_i) \Longrightarrow q_{n+1}(x_i) = 0 \Downarrow$
   $q_{n+1}(x)$ ha come radici x_i, $i = 0, ..., n$

$$q_{n+1}(x) = a_{n+1}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) = a_{n+1}\omega_{n+1}(x)$$

$$a_{n+1} = \frac{y_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\omega_{n+1}(x_{n+1})}$$

Polinomio di interpolazione nella forma di Newton

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + a_{n+1}\omega_{n+1}(x)$$
$$p_{n+1}(x) = p_{n-1}(x) + a_n\omega_n(x) + a_{n+1}\omega_{n+1}(x)$$
$$p_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k\omega_k(x)$$

Base di Newton:

$$\begin{aligned}
\omega_0(x) &\equiv 1 \\
\omega_1(x) &= x - x_0 \\
\omega_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\
&\vdots \\
\omega_{n+1}(x) &= \Pi_{k=0}^{n}(x - x_k)
\end{aligned}$$

Differenze divise

Siano x_i, $i = 0, \dots, n$ nodi distinti

Definizione

Differenza divisa di ordine 0 relativa al nodo x_k

$$f[x_k] := f(x_k)$$

Definizione

Differenza divisa di ordine k relativa ai nodi $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] := \frac{f[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] - f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}]}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

Proprietà

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0x_1](x - x_0) + f[x_0x_1x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad \dots f[x_0x_1 \dots x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}}$$

Polinomio di Newton

Esempio *(S. Berrone, PoliTo)*

Siano $(x_0, y_0) = (-2, 2)$, $(x_1, y_1) = (1, -7)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$, $(x_3, y_3) = (4, -7)$

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
-2	2			
1	-7	$\frac{-7-2}{1+2} = -3$		
3	-5	$\frac{-5+7}{3-1} = 1$	$\frac{1+3}{3+2} = \frac{4}{5}$	
4	-7	$\frac{-7+5}{4-3} = -2$	$\frac{-2-1}{4-1} = -1$	$\frac{-1-\frac{4}{5}}{4+2} = -\frac{3}{10}$

$$p_3(x) = 2 - 3(x+2) + \frac{4}{5}(x+2)(x-1) - \frac{3}{10}(x+2)(x-1)(x-3)$$

Poiché il polinomio di interpolazione di grado al più n è unico, il **polinomio di Newton** è il polinomio di interpolazione di $f(x)$ in $x_0, \ldots, x_n$. I punti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ possono essere ordinati come si vuole.