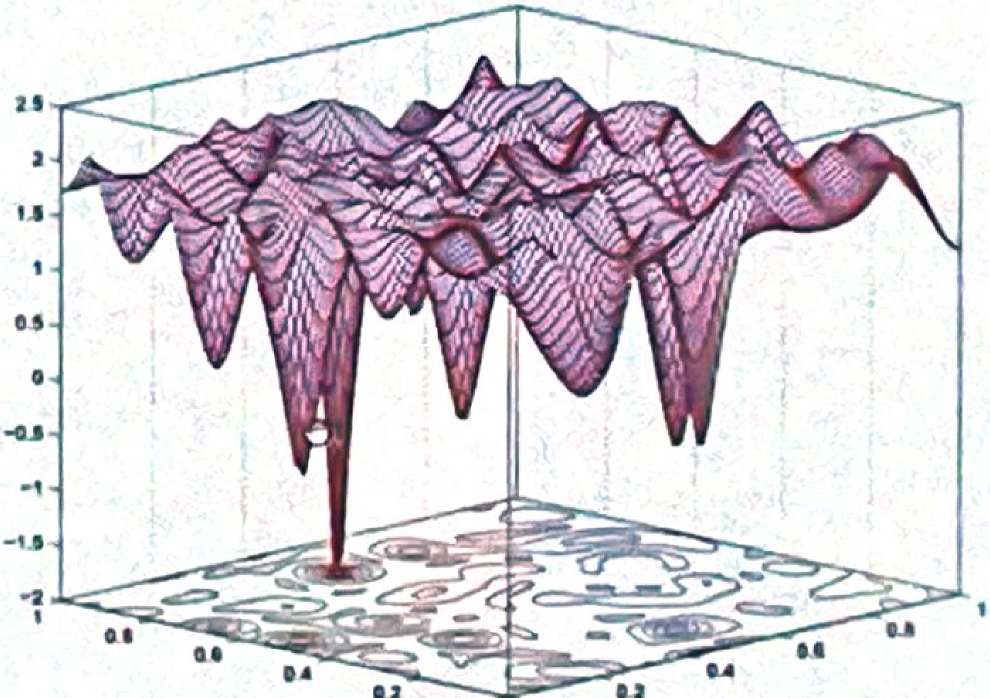
Ottimizzazione globale



$$\min f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 1$$

Ottimizzazione globale: Modello continuo

$$\min f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 1$$

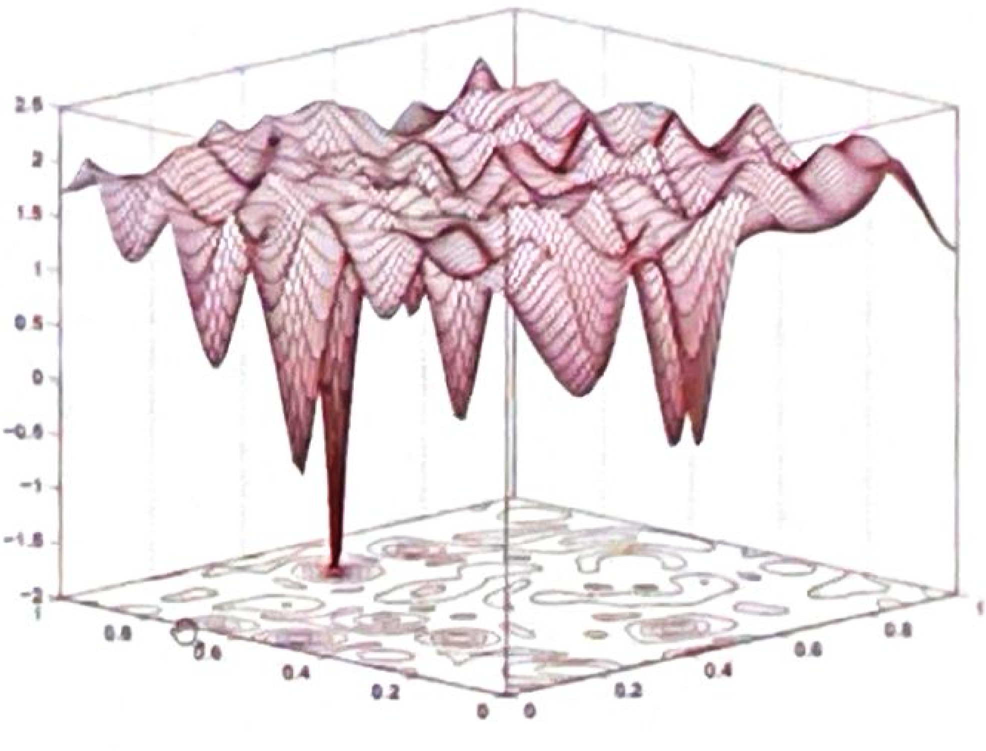
- la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è detta *funzione obiettivo*;
- l'insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *insieme (regione) ammissibile*.

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n : g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \ldots, m\};$$

$$D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, a_i < b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Esistenza e unicità della soluzione. Teorema di Weierstrass.

Ottimizzazione globale



$$\Omega = D = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

Ottimizzazione globale

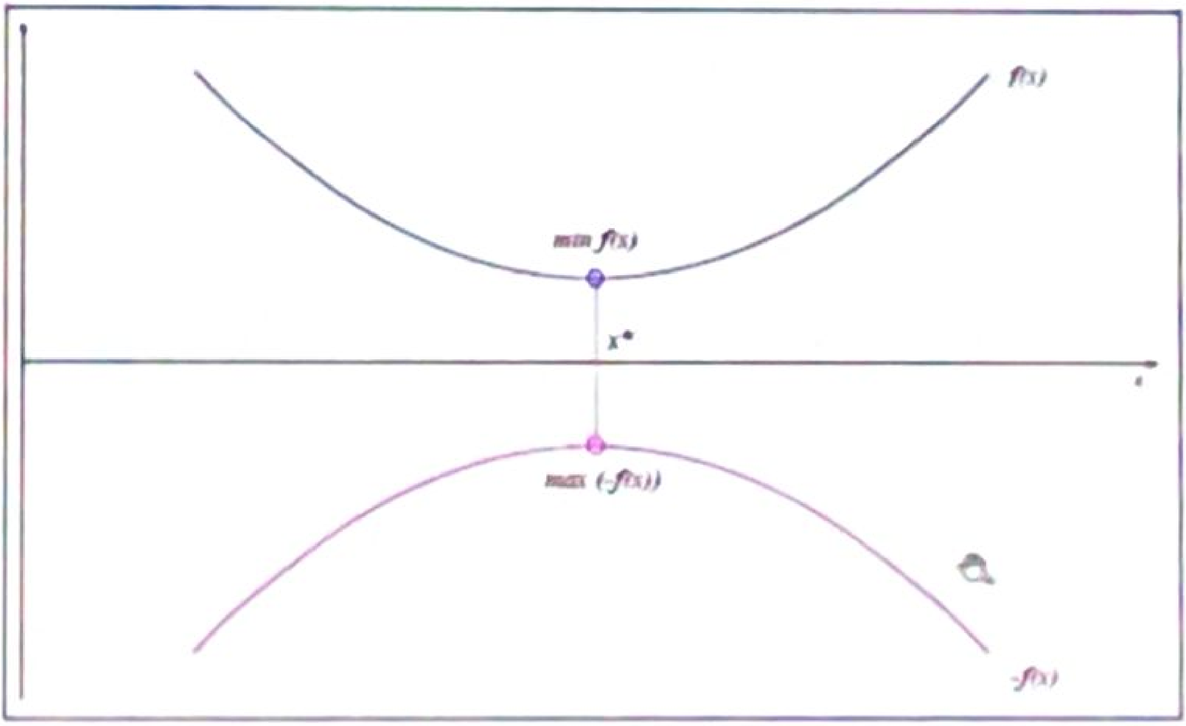
- Un punto $x^* \in \Omega$ si dice *punto di minimo globale* di f su Ω se

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

- Un punto $\hat{x} \in \Omega$ si dice *punto di minimo locale* di f su Ω se esiste un intorno $B(\hat{x};\gamma)$, con $\gamma > 0$ tale che

$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega \cap B(\hat{x};\gamma).$$

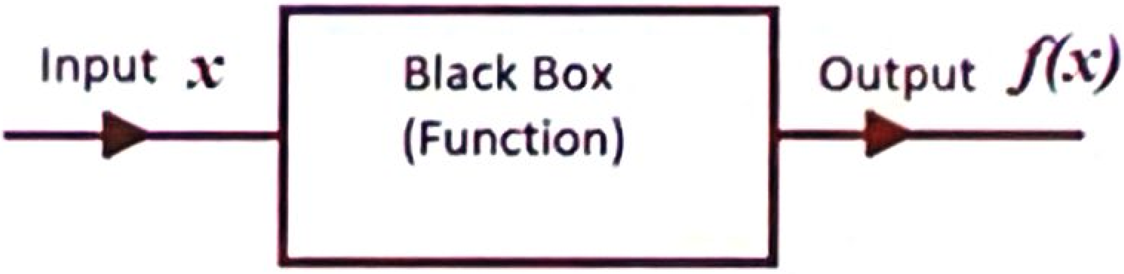
$\min f(x) = -\max(-f(x))$



Problema di ottimizzazione globale

$$f^* = f(x^*) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

La soluzione esiste (Teorema di Weierstrass) e supponiamo sia unica.

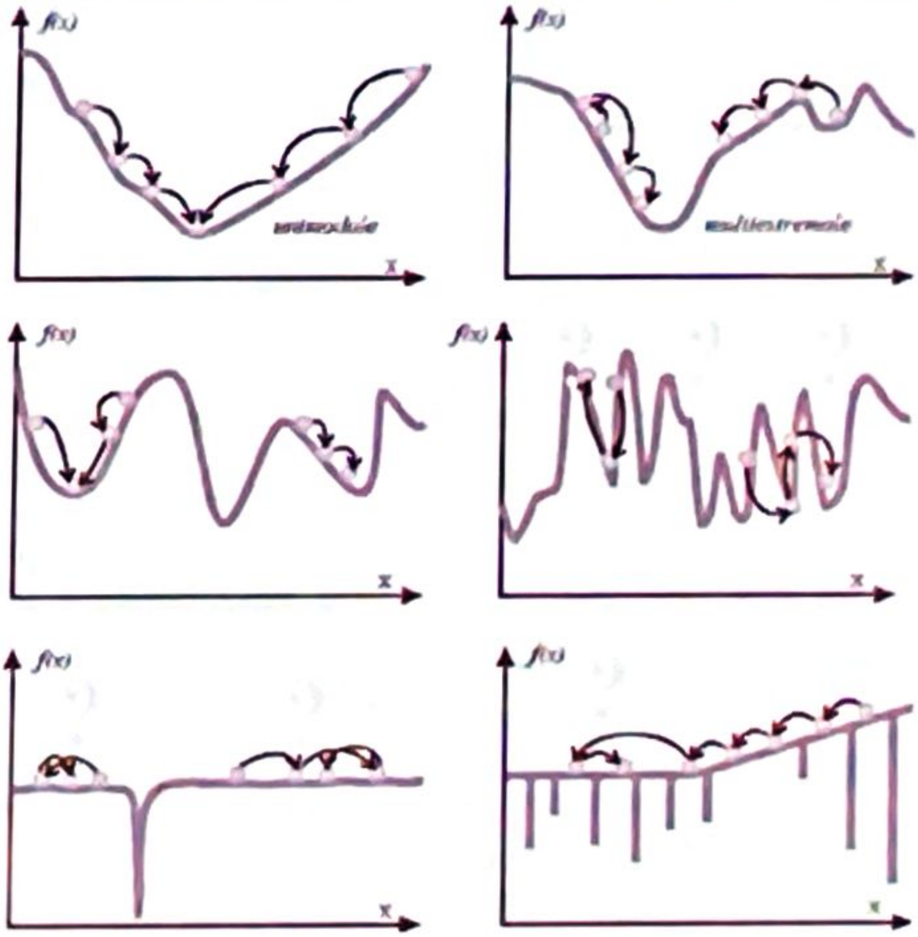


La funzione obiettivo è data da un simulatore e non si ha una sua rappresentazione analitica $\Rightarrow$ **costo computazionale elevato!**

$\Rightarrow$ **no derivate!**

$\Rightarrow$ **molti minimi locali!**

Possibili tipologie di $f(x)$ (da T. Weise et al. (2009))

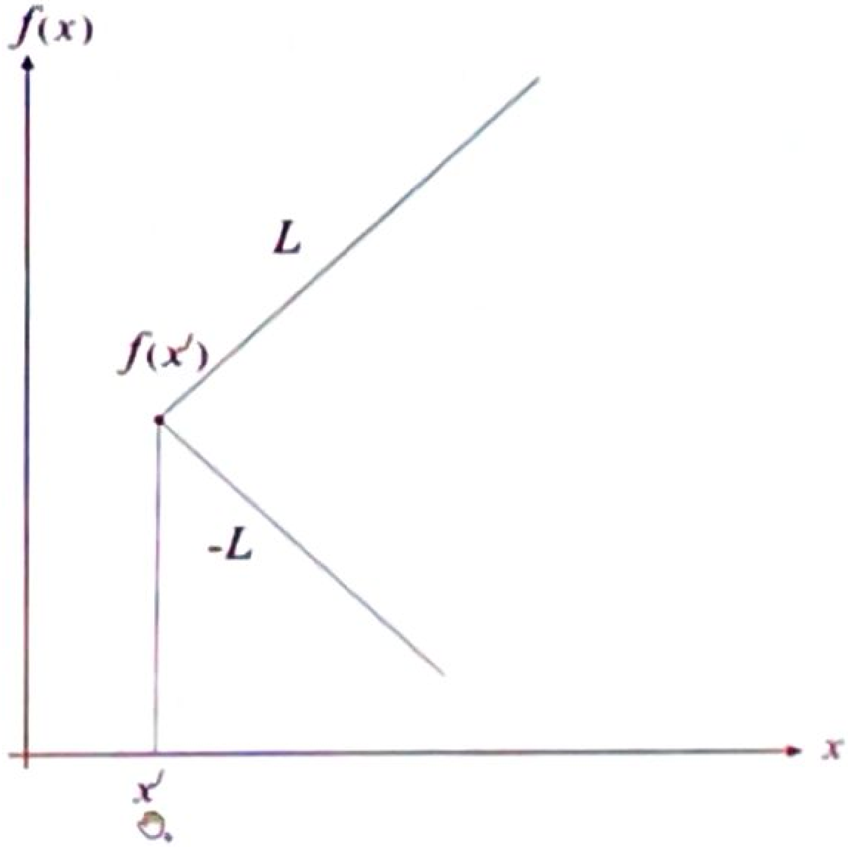


Condizione di Lipschitz

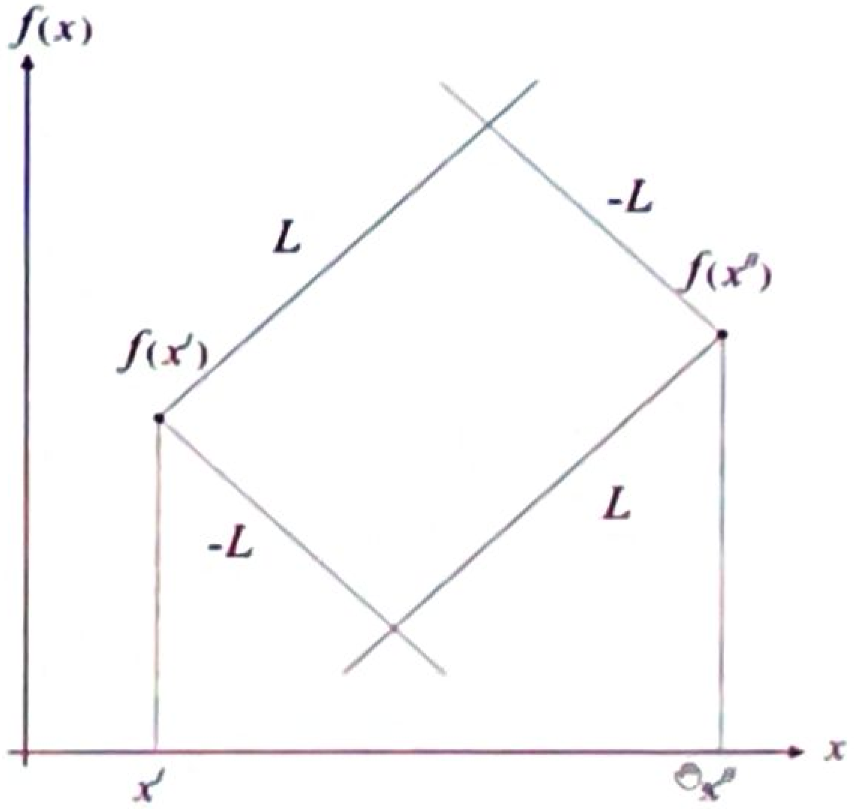
$$| f(x') - f(x'') | \leq L | x' - x'' |, \quad x', x'' \in [a, b],$$

dove L, $0 < L < \infty$, è detta *costante di Lipschitz*.

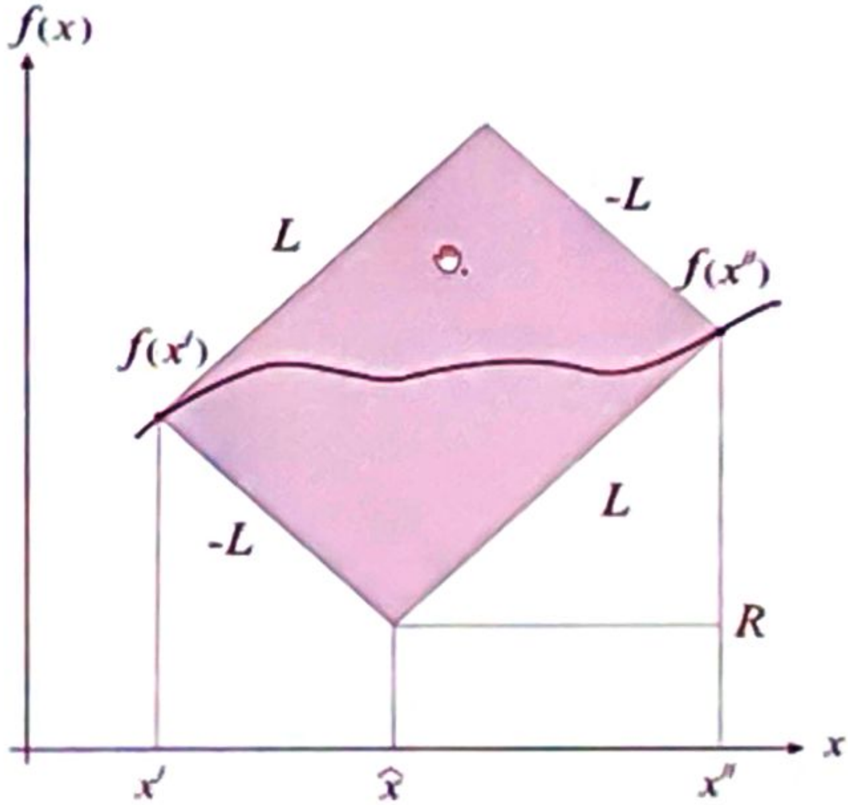
$f(x) \le f(x') + L(x - x'),\quad f(x) \ge f(x') - L(x - x'),\quad x > x'$



$f(x) \le f(x'') - L(x - x''), \;\; f(x) \ge f(x'') + L(x - x''), \;\; x < x''$



$f(x) \geq F(x) = \max\{f(x') - L(x - x'),\ f(x'') + L(x - x'')\}$



Valori importanti della minorante $F(x)$, $x \in [x', x'']$

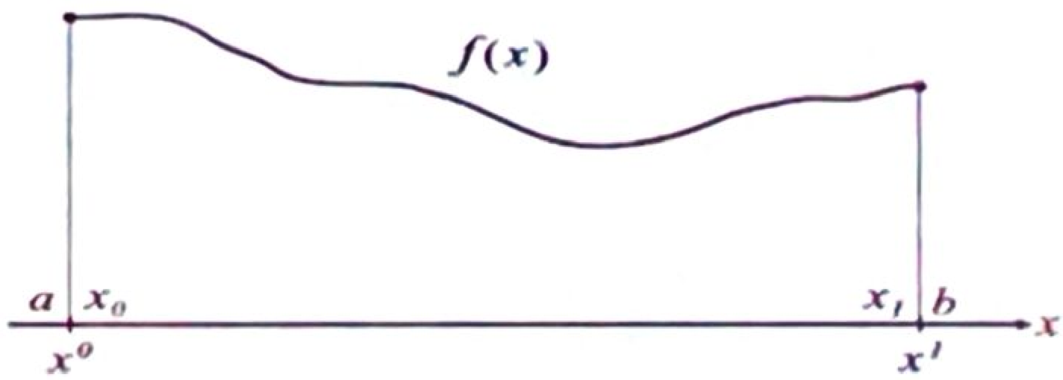
- Stima R del minimo di $f(x)$, $x \in [x', x'']$:

$$R = F(\hat{x}) = \frac{f(x') + f(x'')}{2} - L\frac{x'' - x'}{2}.$$

- **Valore $\hat{x}$:**

$$\hat{x} = \frac{x' + x''}{2} - \frac{f(x'') - f(x')}{2L}.$$

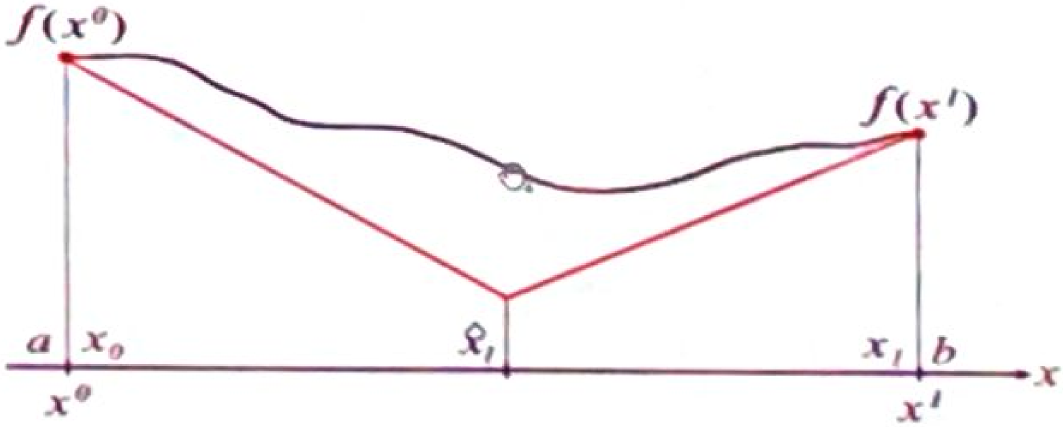
Algoritmo di Piyavski - Shubert (1972): Interpretazione geometrica



$x^0, x^1, \ldots$ – punti di valutazione di $f(x)$;
$x_0, x_1, \ldots$ – punti di valutazione di $f(x)$ ordinati in modo crescente

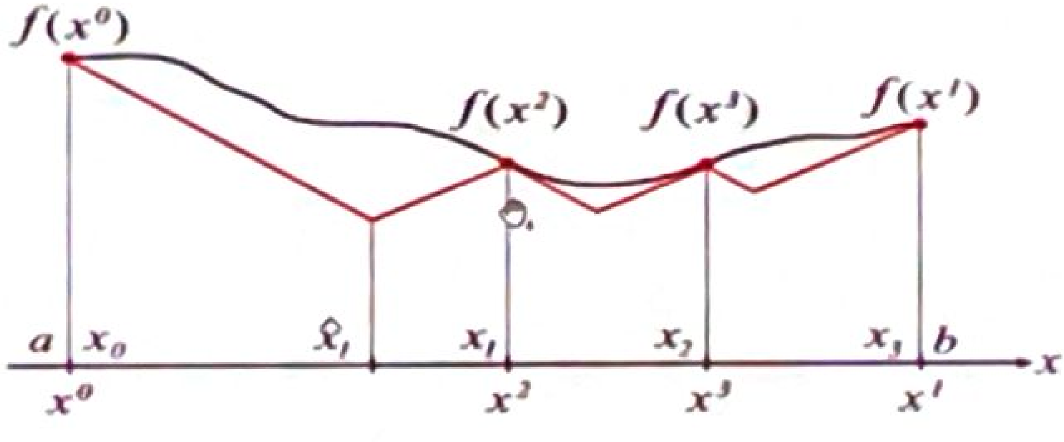
Algoritmo di Piyavski: Interpretazione geometrica

Prima iterazione



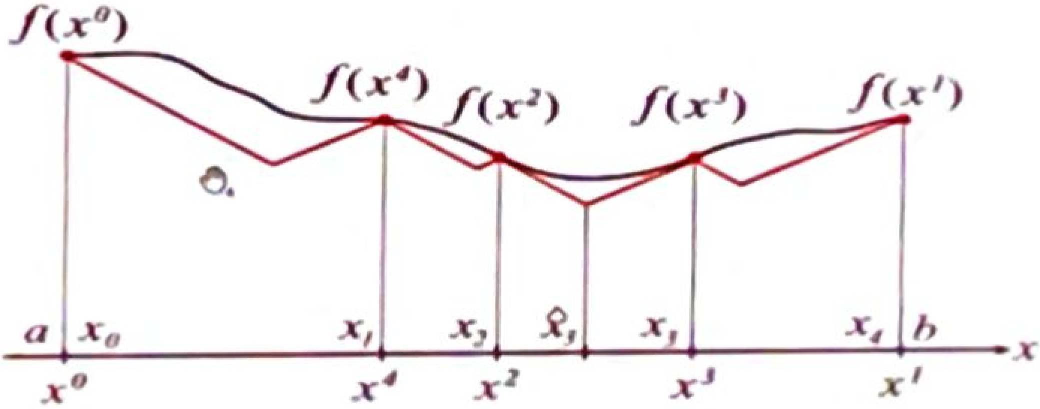
Algoritmo di Piyavski: Interpretazione geometrica

Terza iterazione



Algoritmo di Piyavski: Interpretazione geometrica

Quarta iterazione



Algoritmo di Piyavski: Idee di base

Ad ogni iterazione k del metodo, si utilizzano due sistemi di indici per la successione di punti di valutazione di $f(x)$:

$x^0, x^1, \ldots, x^k$ con i corrispondenti valori $z^0 = f(x^0)$, $z^1 = f(x^1)$, $\ldots$, $z^k = f(x^k)$;

e

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ con i corrispondenti valori $z_0 = f(x_0)$, $z_1 = f(x_1), \ldots, z_k = f(x_k)$.

Algoritmo di Piyavski: Idee di base

- **Costante di Lipschitz $\hat{L}$ data a priori**

$$L > \hat{L}.$$

- **Suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in k sottointervalli**

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k], \quad k \geq 1.$$

- **Caratteristica dell'intervallo di suddivisione $[x_{i-1}, x_i]$**

$$R_i = R_{[x_{i-1}, x_i]} = F(\hat{x}_i) = \frac{z_{i-1} + z_i}{2} - L\frac{x_i - x_{i-1}}{2}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

- **Nuovo punto di valutazione di $f(x)$**

$$x^{k+1} = \hat{x}_t = \frac{x_{t-1} + x_t}{2} - \frac{z_t - z_{t-1}}{2L}, \quad t = \arg\min_{1 \leq i \leq k} R_i$$

Algoritmo di Piyavski: Schema iterativo

Input:

$f(x)$ – simulatore per le valutazioni della funzione obiettivo;
a, b – estremi dell'intervallo di definizione di $f(x)$;
$\hat{L}$ – costante di Lipschitz di $f(x)$;
ε – tolleranza (accuratezza) prefissata.

Algoritmo di Piyavski: Schema iterativo

Inizializzazione:

$x^0 = a$, $z^0 := f(x^0)$, e $x^1 = b$, $z^1 := f(x^1)$.

$k := 1$ (contatore di iterazioni).

Algoritmo di Piyavski: Schema iterativo

Passo 1:

Riordino dei punti di valutazione di $f(x)$:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$

Algoritmo di Piyavski: Schema iterativo

Passo 2:

Aggiornamento della minorante $F_k(x) \leq f(x)$:

$$F_k(x) = \max_{0 \leq i \leq k} \{z_i - L|x - x_i|\}, \quad x \in [a, b].$$

Calcolo delle caratteristiche R_i:

$$R_i = \frac{z_{i-1} + z_i}{2} - \hat{L}\frac{x_i - x_{i-1}}{2} = F_k(\hat{x}_i), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Algoritmo di Piyavski: Schema iterativo

Passo 3:

Scelta del sottointervallo t con la minima caratteristica R_t per la suddivisione:

$$t = \arg \min_{1 \leq i \leq k} R_i.$$

Algoritmo di Piyavski: Schema iterativo

Passo 4:

Criterio d'arresto:

se

$$x_t - x_{t-1} \leq \varepsilon,$$

l'algoritmo si ferma e restituisce le approssimazioni x_k^* (f_k^*) della soluzione x^* (f^*) al problema:

$$f_k^* = \min_{0 \leq i \leq k} f(x_i), \qquad x_k^* = \arg\min_{0 \leq i \leq k} f(x_i);$$

altrimenti, si avanza al Passo 5.