Universidade Federal de Uberlândia
FEELT – Faculdade de Engenharia Elétrica

SISTEMAS E CONTROLE

Roteiro 01a – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos

Professor: Dr. Eder Alves de Moura

Gabriel Cardoso Mendes de Ataide 11811ECP008

Uberlândia
Agosto 2023

SUMÁRIO

Atividade 01

Analisando o conteúdo do primeiro vídeo a), os primeiros 20 minutos do vídeo b), apresente um texto de até 20 linhas, que explica como Henri Poincaré, as equações diferenciais e o problema dos três corpos estão conectados com o surgimento da área de sistemas dinâmicos.

a) Marcelo Viana - Matemática dos Sistemas Dinâmicos (https://youtu.be/j93YbXrOYDg)
b) Marcelo Viana (IMPA) Sistemas Dinâmicos (https://youtu.be/12ibbpfDrHo)

Resolução

No final do século XIX, Henri Poincaré emergiu como uma figura influente na matemática, suas contribuições para a teoria das equações diferenciais foram fundamentais para o desenvolvimento da área de sistemas dinâmicos. Poincaré explorou o comportamento complexo e imprevisível de sistemas não-lineares, lançando as bases para o estudo da sensibilidade às condições iniciais, um conceito central na teoria do caos.

Um exemplo dessa conexão é o "problema dos três corpos", que envolve a dinâmica gravitacional de três corpos celestes em órbita. Poincaré abordou esse problema com a sua inovadora análise das soluções de equações diferenciais não-integráveis, revelando a sensibilidade extrema às condições iniciais. Sua abordagem foi uma antecipação do que mais tarde seria conhecido como o "efeito borboleta", onde pequenas variações iniciais podem levar a diferenças drásticas nos resultados ao longo do tempo.

Essas investigações conduziram ao nascimento da teoria dos sistemas dinâmicos, que explora padrões emergentes, atratores e bifurcações em sistemas complexos ao longo do tempo. A obra de Poincaré não apenas inspirou estudos matemáticos profundos, mas também influenciou áreas como a física, a biologia e a economia, onde os conceitos de sistemas dinâmicos desempenham um papel fundamental na compreensão de fenômenos aparentemente caóticos.

Atividade 02

Assista aos vídeos e responda às questões. É possível ativar as legendas traduzidas para o português.

- Visão geral sobre Equações Diferenciais – 3Blue1Brown (Videos 1, 2, 3 e 5)

https://youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDNPOjrT6KVlfJuKtYTftqH6

- This is why you're learning differential equations – Zach Star

https://www.youtube.com/watch?v=ifbaAqfqpc4

a) Explique a diferença entre uma ODE e uma PDE e quando elas são aplicadas.

b) O que representa um gráfico de espaço físico e quais informações ele pode nos dar.

c) Explique o significado matemático e sua aplicação física do uso de uma potência elevada à uma matriz (e^A). Dê um exemplo.

Resolução item A

Equações diferenciais são ferramentas matemáticas essenciais para descrever relações entre funções e suas derivadas, são amplamente usadas em várias disciplinas científicas para modelar e compreender fenômenos em constante mudança. Existem duas categorias principais:

Equações Diferenciais Ordinárias (ODEs), envolvem uma única variável independente e suas derivadas em relação a essa variável. Em outras palavras, elas lidam com funções de apenas uma variável. São frequentemente usadas para modelar sistemas que evoluem no tempo ou em uma dimensão específica. Exemplos incluem movimento de partículas, decaimento radioativo, crescimento populacional e circuitos elétricos simples.

Equações Diferenciais Parciais (PDEs), envolvem múltiplas variáveis independentes e suas derivadas em relação a essas variáveis. Elas são usadas para descrever fenômenos que variam em mais de uma dimensão. As PDEs são comumente empregadas para modelar sistemas distribuídos no espaço, como campos físicos, propagação de ondas, difusão de calor e processos em fluidos. Existem diferentes tipos de PDEs, como as parabólicas, elípticas e hiperbólicas, cada uma com suas propriedades e aplicações específicas.

Ou seja, a principal diferença entre ODEs e PDEs está na quantidade de variáveis independentes e na natureza das dimensões envolvidas. ODEs lidam com sistemas unidimensionais ao longo do tempo, enquanto PDEs abrangem sistemas multidimensionais espaciais e temporais. Ambas as categorias de equações diferenciais desempenham papéis cruciais na modelagem e na compreensão de uma ampla gama de fenômenos físicos, biológicos e engenheiros.

Resolução Item B

Um gráfico de espaço físico é uma representação visual de como uma ou mais variáveis físicas ou propriedades variam em relação a uma ou mais dimensões espaciais. Ele é usado para visualizar e compreender como uma grande variedade de fenômenos se distribuem no espaço.
As informações que um gráfico de espaço físico pode nos fornecer incluem:

Distribuição Espacial: Mostra como a propriedade ou variável em questão varia em diferentes pontos do espaço, permitindo identificar padrões de distribuição, áreas de maior ou menor intensidade e a dependência espacial do fenômeno estudado.

Tendências e Variações: Pode revelar tendências de aumento, diminuição ou variações em diferentes partes do espaço. Isso ajuda a compreender as relações entre as variáveis envolvidas e a identificar regiões de interesse.

Localização de Extremos: Pode mostrar onde ocorrem valores máximos, mínimos ou pontos de inflexão. Isso é útil para identificar pontos de interesse, como pontos de concentração máxima de uma substância ou áreas críticas.

Padrões de Propagação: Para fenômenos que se propagam no espaço, como ondas ou calor, o gráfico pode mostrar como essas propagações ocorrem, permitindo analisar velocidades, direções e características específicas.

Interferência e Interação: Em sistemas complexos, o gráfico pode revelar interações entre diferentes elementos. Isso é particularmente útil em campos como a física de partículas, onde interações de partículas podem ser visualizadas para entender como colisões e processos ocorrem.

Análise Comparativa: Com gráficos de espaço físico, é possível comparar diferentes situações ou momentos no tempo para entender como as propriedades se alteram e como os fenômenos evoluem.

Identificação de Padrões Não Óbvios: Às vezes, padrões não evidentes podem emergir quando os dados são visualizados no espaço físico, levando a insights novos e inesperados.

Resolução item C

Refere-se à matriz exponencial de A, tem aplicações significativas em diversos campos, especialmente na teoria de sistemas dinâmicos, física quântica e outros contextos onde matrizes são usadas para modelar transformações ou evoluções ao longo do tempo.

A matriz exponencial é definida usando a série de Taylor:

$e^A = I + A + (1/2!) A^2 + (1/3!) A^3 + ...$

onde I é a matriz identidade e A^n denota a matriz A elevada à potência n. A série continua indefinidamente, permitindo representar a função exponencial de uma matriz como uma soma de termos que envolvem potências crescentes da matriz.

Aplicações físicas:
Teoria de Sistemas Dinâmicos: A matriz exponencial é usada para descrever a evolução temporal de sistemas lineares invariantes no tempo. Em mecânica quântica, por exemplo, ela descreve a evolução de operadores que representam observáveis físicos.

Circuitos Elétricos e Engenharia de Controle: É aplicada para analisar circuitos elétricos lineares e modelar sistemas dinâmicos lineares, como sistemas de controle.

Decomposição de Matrizes: A matriz exponencial também é usada em técnicas de decomposição de matrizes, como a decomposição de Jordan, que é usada para simplificar matrizes complexas.

Mecânica Quântica: Na mecânica quântica, a matriz exponencial de um operador é usada para calcular o operador que representa a evolução temporal de um sistema quântico.

Exemplo:
Considere a matriz A = [2 -1; 1 3]. A matriz exponencial e^A é dada por:

e^A = I + A + (1/2!) A^2 + (1/3!) A^3 + ...

Calculando as potências da matriz A e somando os termos, podemos obter a matriz exponencial e^A. Isso é útil em vários contextos, como prever o comportamento de sistemas dinâmicos lineares ou resolver equações diferenciais lineares.

Atividade 03

Utilizando o material:

- Everything You Need to Know About Control Theory (https://youtu.be/lBC1nEq0_nk)
- History of Control System (https://ieeecss.org/history)

Escreva um texto, de até 20 linhas, definindo o que é um sistema de controle e faça um resumo dos tópicos que são fundamentais para os sistemas de controle.

Resolução

É um conjunto de componentes e processos interligados que visa regular o comportamento ou desempenho de um sistema dinâmico de interesse, envolve a medição contínua ou periódica do estado do sistema, comparação desse estado com um objetivo ou referência desejada e a geração de ações de controle para ajustar as entradas do sistema. Tópicos fundamentais nos sistemas de controle incluem:

Modelagem do Sistema: Representar o sistema físico ou processo através de modelos matemáticos que descrevem seu comportamento e dinâmica. Isso envolve equações diferenciais, equações de transferência, modelos de espaço de estados, entre outros.

Feedback e Controle: Utilizar informações do estado atual do sistema, compará-las com o estado desejado e gerar sinais de controle para corrigir desvios e ajustar as entradas.

Controladores: Projetar algoritmos e dispositivos que determinam as ações de controle com base nas informações de feedback. Controladores podem ser PID (Proporcional-Integral-Derivativo), controladores de estado, adaptativos, entre outros.

Estabilidade: Analisar e garantir a estabilidade do sistema é crucial para evitar comportamentos indesejados, como oscilações ou divergências.

Resposta Transiente e Estacionária: Avaliar como o sistema responde a mudanças nas entradas e como ele se comporta ao longo do tempo, alcançando um estado estacionário.

Malha Aberta e Malha Fechada: Compreender a diferença entre sistemas de controle em malha aberta (sem feedback) e em malha fechada (com feedback) e suas implicações.

Projeto e Otimização de Sistemas de Controle: Projetar controladores para atender requisitos específicos, como desempenho, estabilidade, robustez e consumo de energia.

Atividade 04

Reproduza os Exemplos 1.3; 1.4; 1.6; e 1.7, apresentados em sala de aula

Exemplo 1.3 - Sistema Massa, Mola e Amortecedor

Código:

```python
% Parâmetros do sistema
m = 3;  % Massa (kg)
k = 20;  % Constante da mola (N/m)
b = 1.5; % Constante do amortecedor (N*s/m)
g = 9.81; % Aceleração devido à gravidade (m/s^2)

% Condições iniciais
x0 = 0.5; % Posição inicial (m)
v0 = 0;  % Velocidade inicial (m/s)

% Tempo de simulação
tspan = [0, 10]; % Intervalo de tempo [t_inicial, t_final]

% Função que define o sistema de equações diferenciais
% dx/dt = v
% dv/dt = (1/m) * (-k * x - b * v) + g
ode = @(t, Y) [Y(2); (1/m) * (-k * Y(1) - b * Y(2)) + g];

% Condições iniciais combinadas [posição; velocidade]
y0 = [x0; v0];

% Resolvendo o sistema de equações diferenciais
[t, Y] = ode45(ode, tspan, y0);

% Obtendo as soluções individuais (posição e velocidade)
x = Y(:, 1);
v = Y(:, 2);

% Criando uma figura para os gráficos
figure;

% Plotando o gráfico de posição
subplot(1, 2, 1);
plot(t, x);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Posição (m)');
title('Sistema Massa-Mola-Amortecedor com Gravidade - Posição');

% Plotando o gráfico de velocidade
subplot(1, 2, 2);
```

```
plot(t, v);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Velocidade (m/s)');
title('Sistema Massa-Mola-Amortecedor com Gravidade - Velocidade');

% Ajustando o layout
sgtitle('Sistema Massa-Mola-Amortecedor com Gravidade');
```

Gráficos:

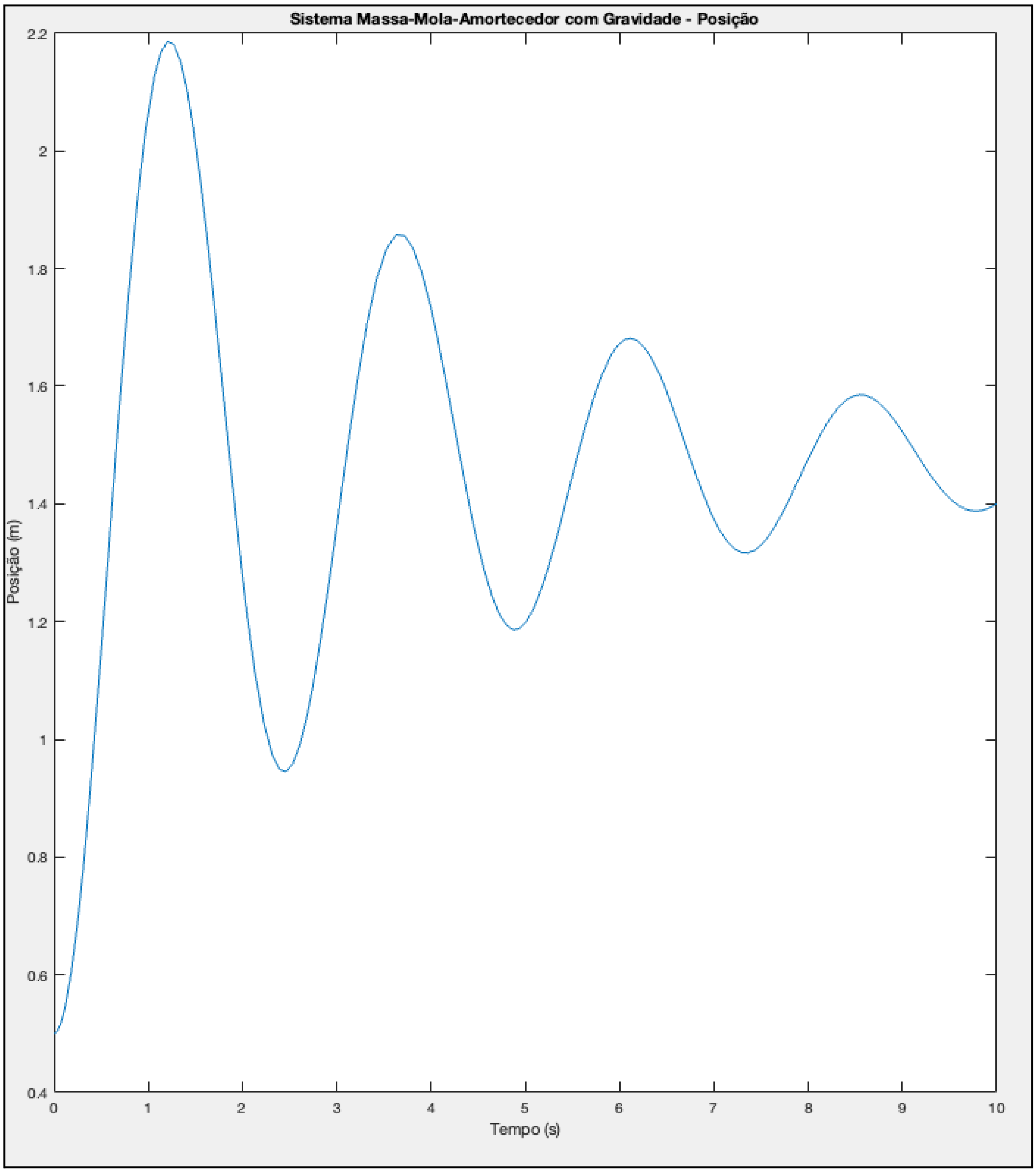

Figura 1 - Massa com Mola - Posição.

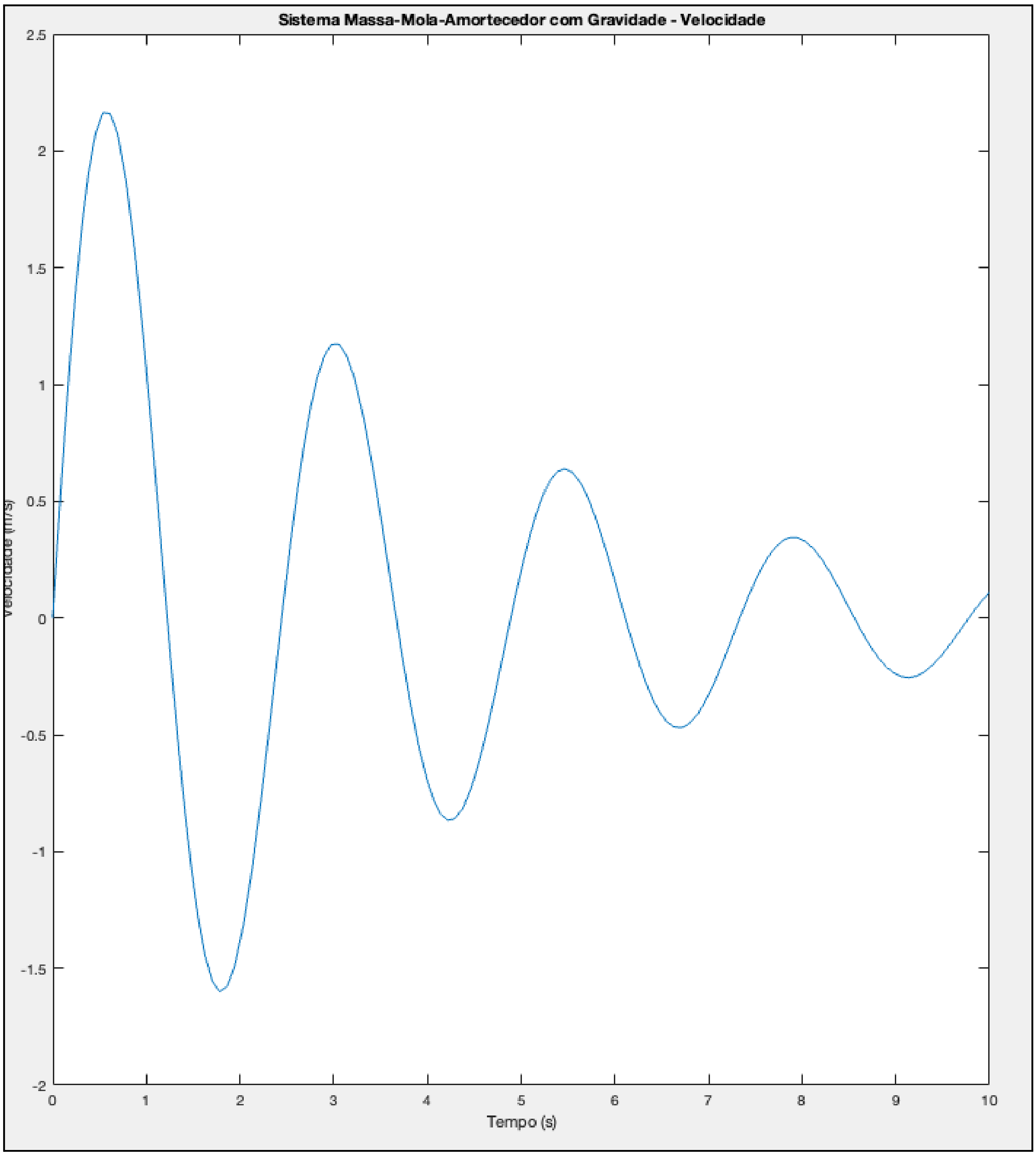

Figura 2 - Massa Mola - Velocidade.

Exemplo 1.4 - Circuito RLC

Código:

```
Python
% Parâmetros do circuito RLC
R = 1e3;  % Resistência (ohms)
L = 1e-3;  % Indutância (H)
C = 1e-6;  % Capacitância (F)

% Condições iniciais
v0 = 10;  % Tensão inicial no capacitor (V)
i0 = 0;   % Corrente inicial (A)
% Tempo de simulação
tspan = [0, 0.1]; % Intervalo de tempo [t_inicial, t_final]

% Função que define o sistema de equações diferenciais para o circuito RLC
% dv/dt = -1/(R*C) * v - (1/L) * i
% di/dt = v/L
ode = @(t, Y) [(-1/(R*C)) * Y(1) - (1/L) * Y(2); Y(1)/L];

% Condições iniciais combinadas [tensão no capacitor; corrente]
y0 = [v0; i0];

% Resolvendo o sistema de equações diferenciais
[t, Y] = ode45(ode, tspan, y0);

% Obtendo as soluções individuais (tensão no capacitor e corrente)
v_capacitor = Y(:, 1);
i_indutor = Y(:, 2);

% Criando uma figura para os gráficos
figure;

% Plotando o gráfico de tensão no capacitor
subplot(1, 2, 1);
plot(t, v_capacitor);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Tensão no Capacitor (V)');
title('Circuito RLC - Tensão no Capacitor');

% Plotando o gráfico de corrente no indutor
subplot(1, 2, 2);
plot(t, i_indutor);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Corrente no Indutor (A)');
title('Circuito RLC - Corrente no Indutor');
% Ajustando o layout
sgtitle('Circuito RLC - Simulação');
```

Gráficos:

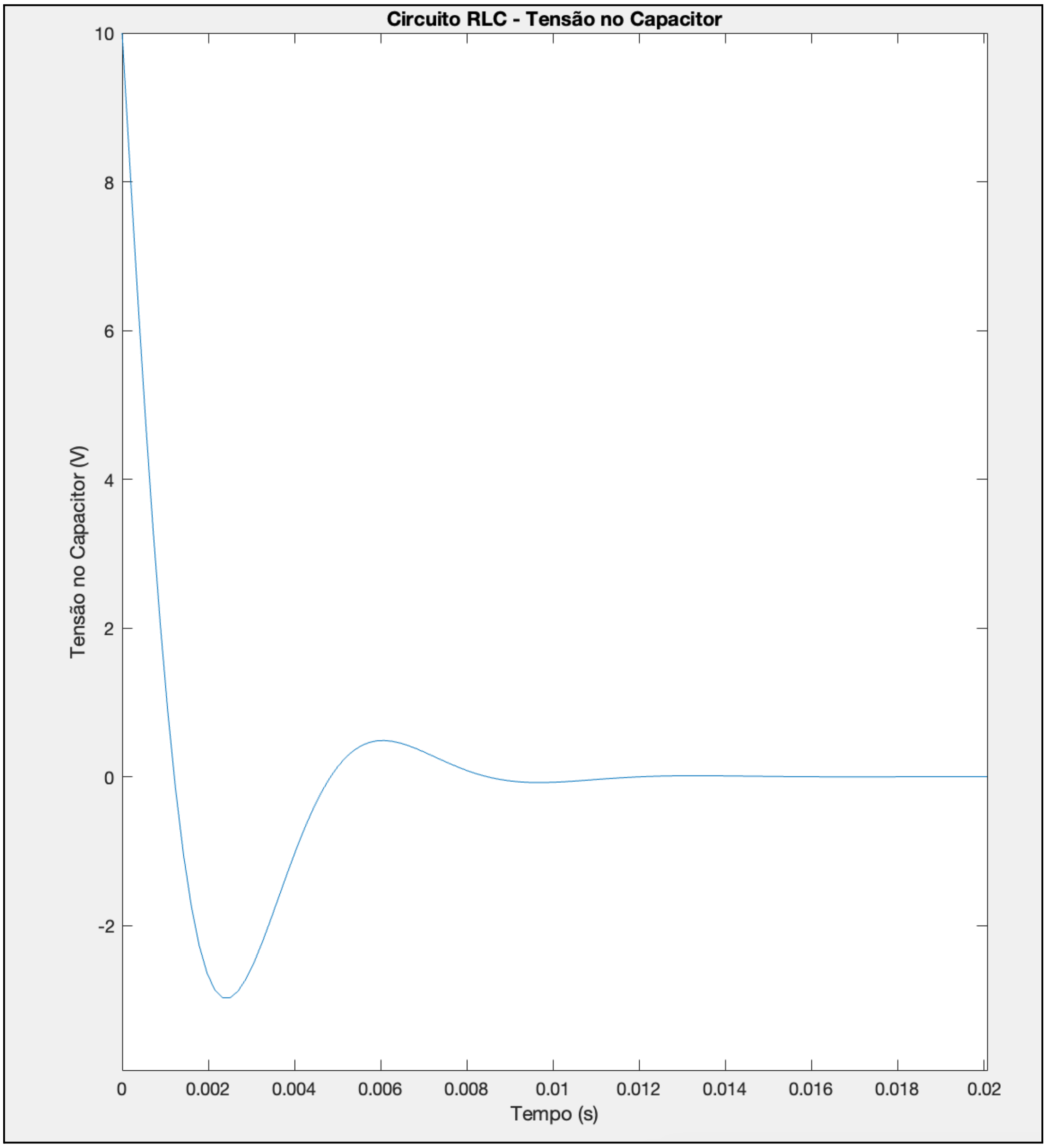

Figura 3 - Circuito RLC - Tensão no Capacitor.

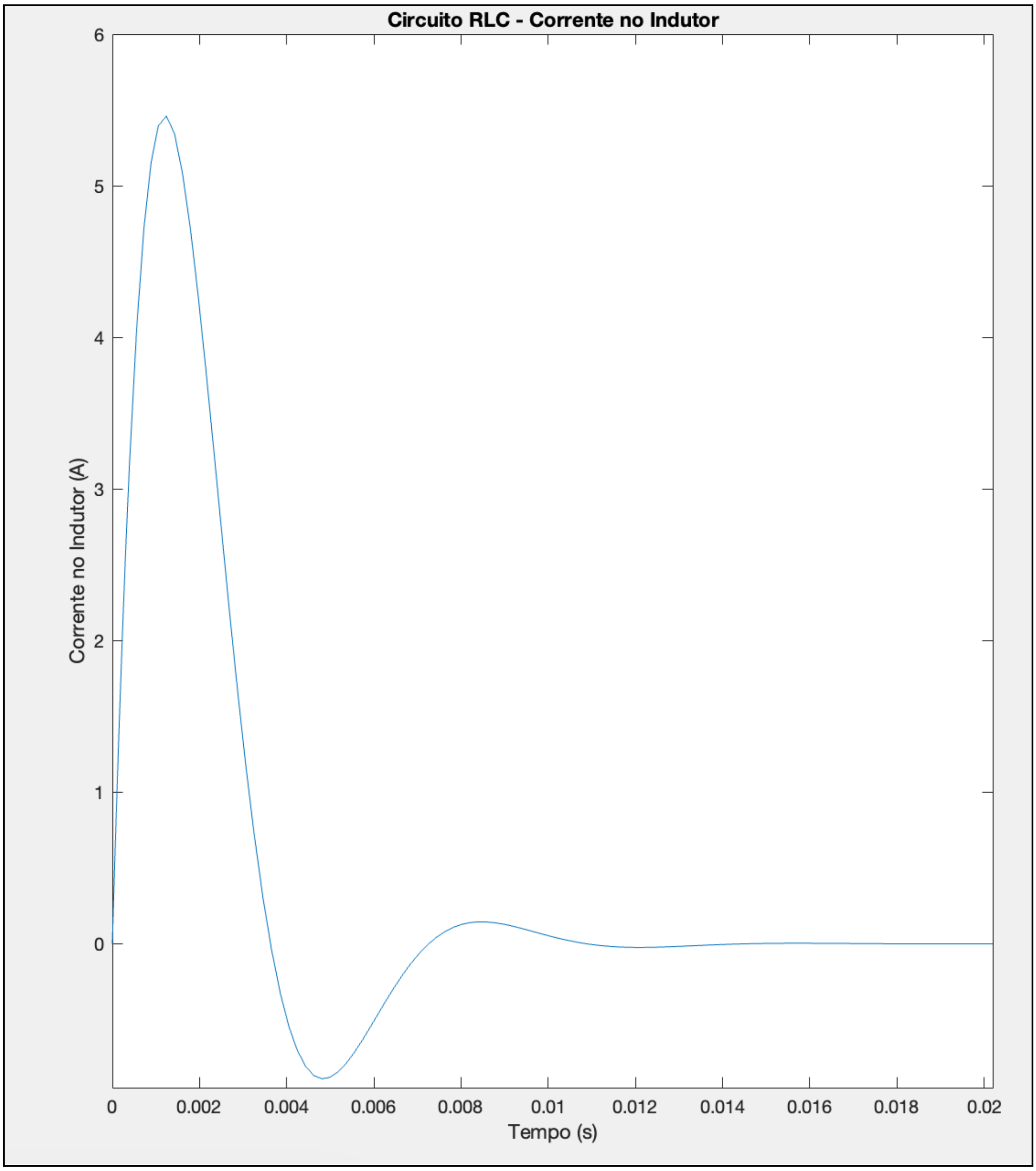

Figura 4 - Circuito RLC - Corrente do Indutor.

Exemplo 1.6 - Queda livre com resistência do ar

Código:

```
Python
% Parâmetros do problema
g = 9.81;  % Aceleração devido à gravidade (m/s^2)
b = 0.3;  % Coeficiente de arrasto (kg/m)
m = 5;    % Massa (kg)

% Condições iniciais
y0 = 100;  % Altura inicial (metros)
v0 = 0;   % Velocidade inicial (m/s)

% Tempo de simulação
tspan = [0, 20]; % Intervalo de tempo [t_inicial, t_final]

% Função que define o sistema de equações diferenciais para queda livre com resistência do ar
% dy/dt = v
% dv/dt = -g - (b/m) * v^2
ode = @(t, Y) [Y(2); -g - (b/m) * Y(2)^2];

% Condições iniciais combinadas [posição (altura); velocidade]
y0 = [y0; v0];

% Resolvendo o sistema de equações diferenciais
[t, Y] = ode45(ode, tspan, y0);

% Obtendo as soluções individuais (posição e velocidade)
posicao = Y(:, 1);
velocidade = Y(:, 2);

% Criando uma figura para os gráficos
figure;

% Plotando o gráfico de altura
subplot(1, 2, 1);
plot(t, posicao);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Altura (m)');
title('Queda Livre com Resistência do Ar - Altura');

% Plotando o gráfico de velocidade
subplot(1, 2, 2);
plot(t, velocidade);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Velocidade (m/s)');
title('Queda Livre com Resistência do Ar - Velocidade');

% Ajustando o layout
sgtitle('Queda Livre com Resistência do Ar - Simulação');
```

Gráficos:

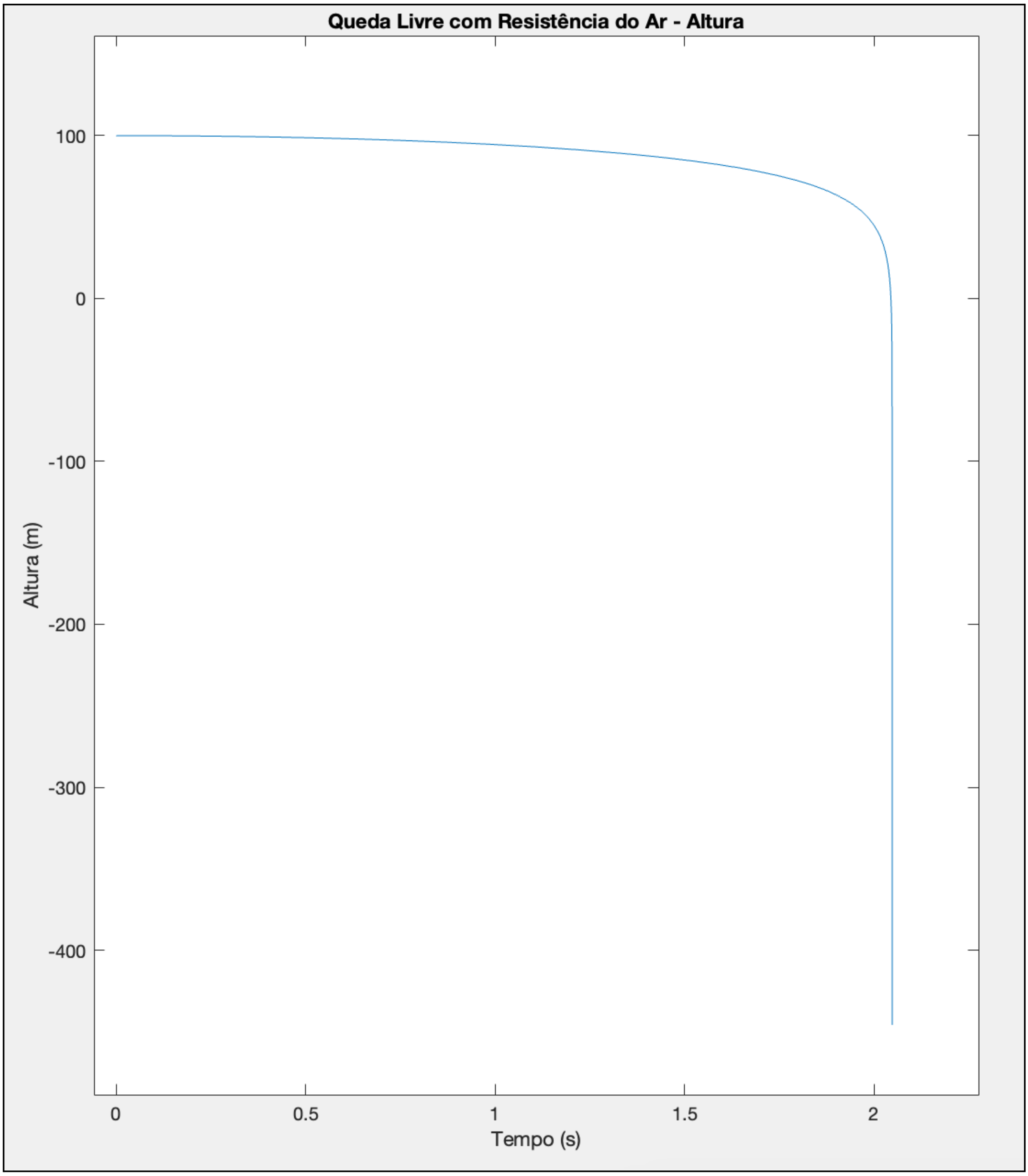

Figura 5 - Queda Livre com Resistência do Ar - Altura.

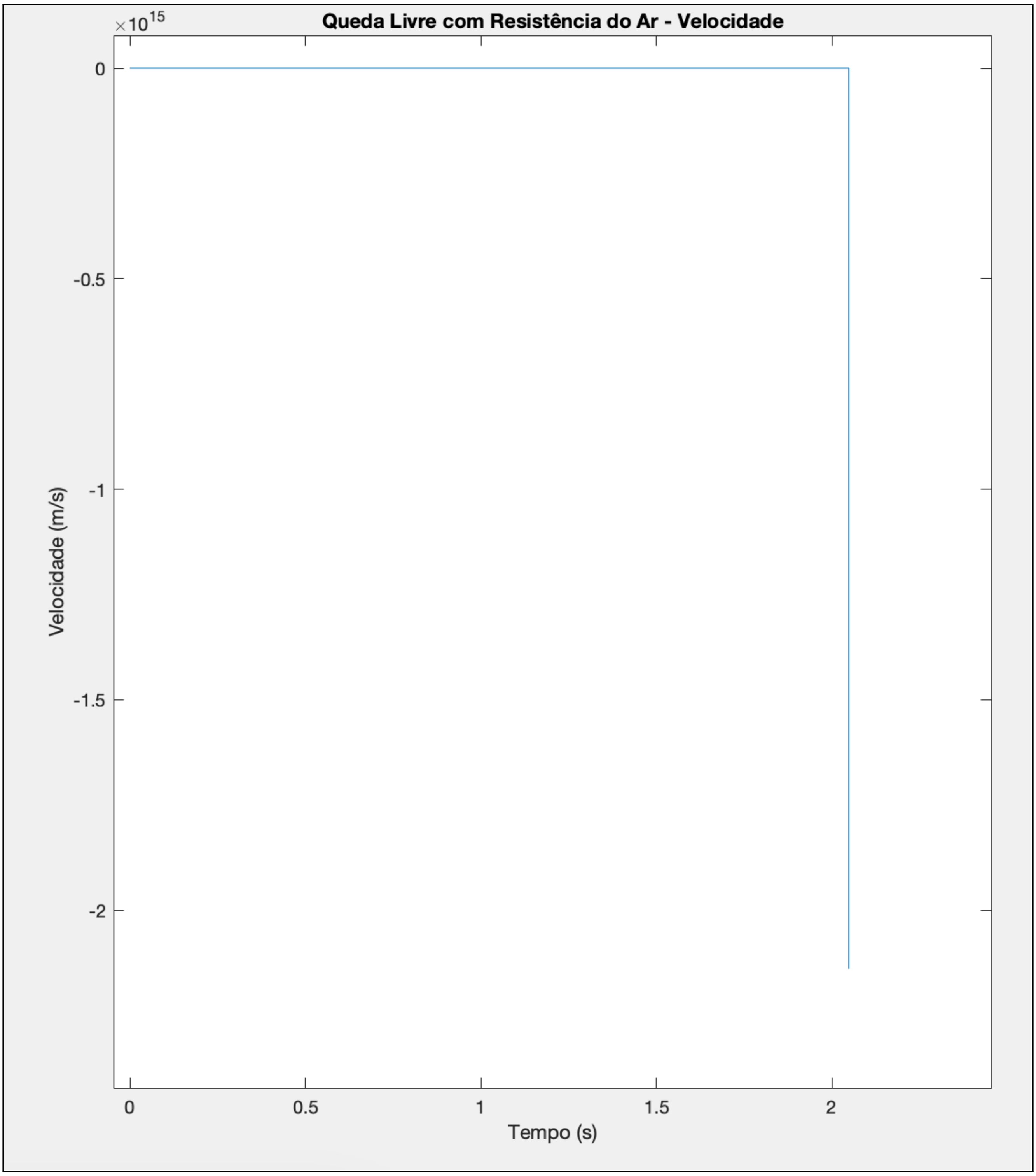

Figura 6 - Queda Livre com Resistência do Ar - Velocidade.

Exemplo 1.7 - Pêndulo

Código:

```
Python
% Parâmetros do pêndulo
m = 1.2;  % Massa (kg)
r = 0.1;  % Raio da esfera (m)
l = 1.5;  % Comprimento do pêndulo (m)
b = 1.5;  % Coeficiente de arrasto (kg/m)
g = 9.81;  % Aceleração devido à gravidade (m/s^2)
Tc = 0;   % Torque constante (N*m)
theta0 = deg2rad(30); % Ângulo inicial (radianos)

% Condições iniciais
omega0 = 0; % Velocidade angular inicial (rad/s)

% Tempo de simulação
tspan = [0, 10]; % Intervalo de tempo [t_inicial, t_final]

% Função que define o sistema de equações diferenciais para o pêndulo
% dtheta/dt = omega
% domega/dt = (-b/m) * omega - (g/l) * sin(theta) + (Tc/(m * l^2))
ode = @(t, Y) [Y(2); (-b/m) * Y(2) - (g/l) * sin(Y(1)) + (Tc/(m * l^2))];

% Condições iniciais combinadas [ângulo; velocidade angular]
y0 = [theta0; omega0];

% Resolvendo o sistema de equações diferenciais
[t, Y] = ode45(ode, tspan, y0);

% Obtendo as soluções individuais (ângulo e velocidade angular)
theta = Y(:, 1);
omega = Y(:, 2);

figure;

% Plotando o gráfico de ângulo
subplot(1, 2, 1);
plot(t, rad2deg(theta));
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Ângulo (graus)');
title('Pêndulo Simples - Ângulo');

% Plotando o gráfico de velocidade angular
subplot(1, 2, 2);
plot(t, omega);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Velocidade Angular (rad/s)');
title('Pêndulo Simples - Velocidade Angular');

sgtitle('Pêndulo Simples - Simulação');
```

Gráficos:

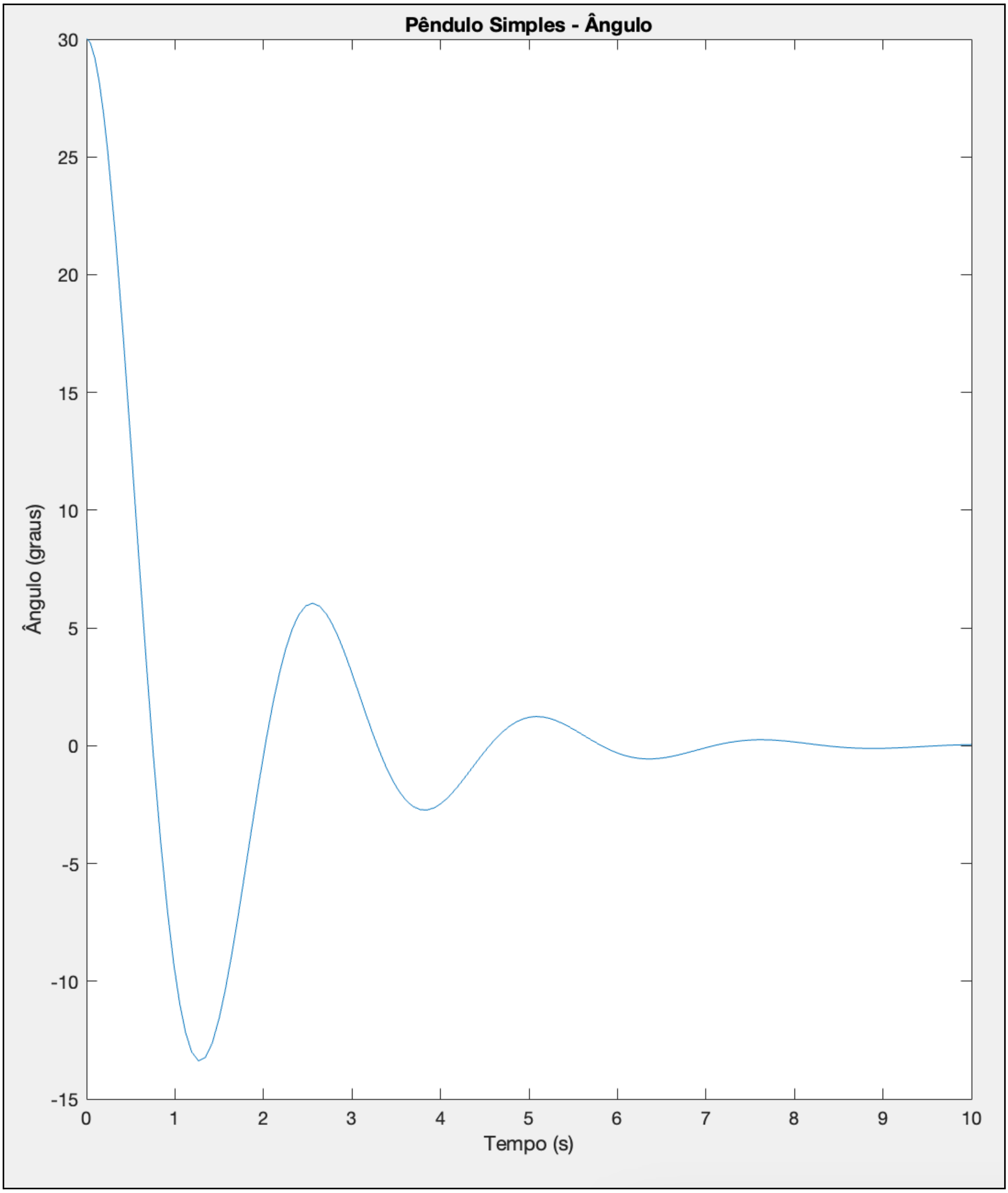

Figura 7 - Pêndulo Simples - Ângulo

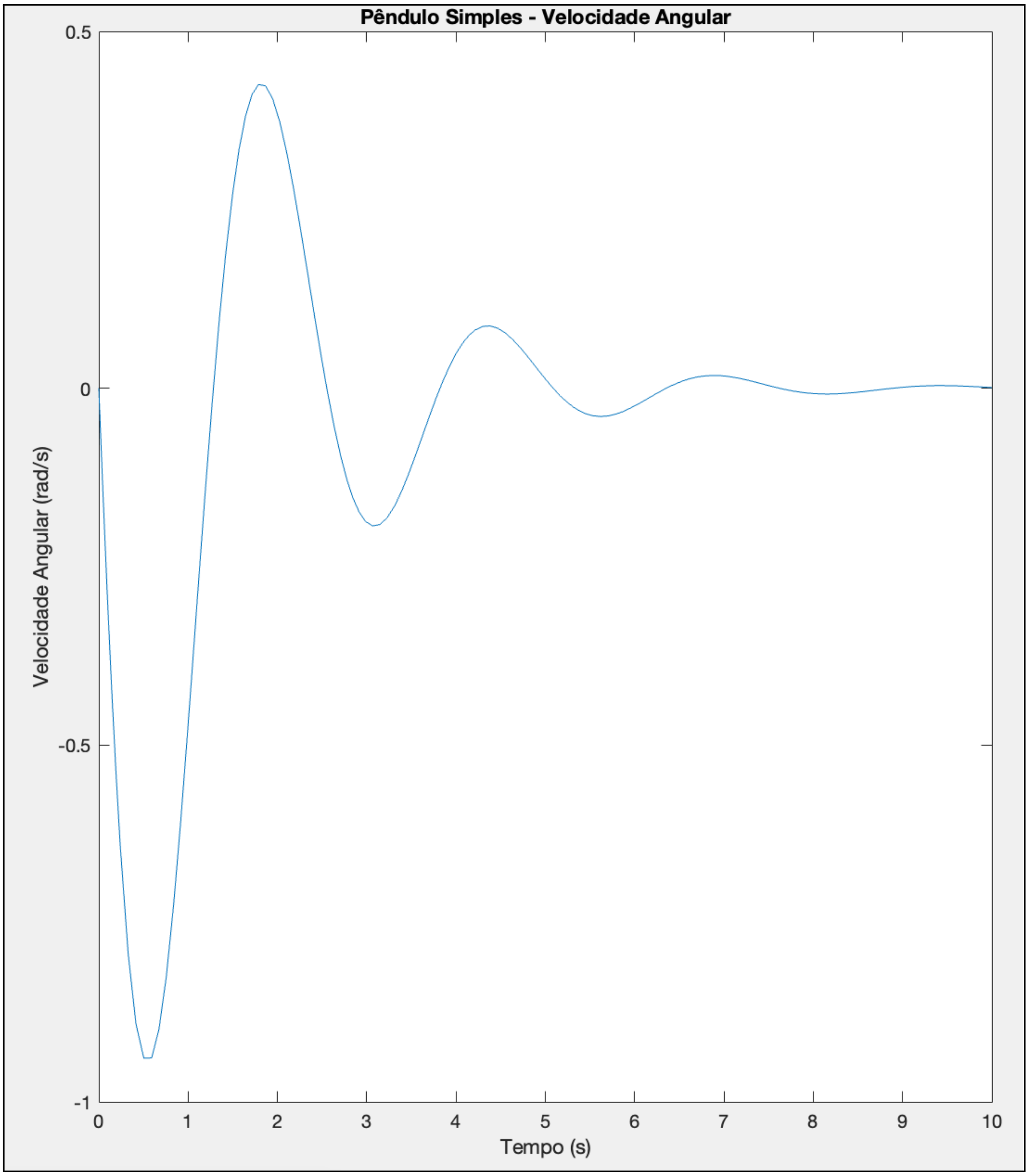

Figura 8 - Pêndulo Simples - Velocidade Angular.

Referências Bibliográficas

- VIANA, Marcelo. "Marcelo Viana - Matemática dos Sistemas Dinâmicos". Youtube History of Science. Disponível em: <https://youtu.be/j93YbXrOYDg>. Acesso em: 08 de agosto de 2023.
- VIANA, Marcelo. "Marcelo Viana (IMPA) Sistemas Dinâmicos". Youtube Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: <https://youtu.be/12ibbpfDrHo>. Acesso em: 08 de agosto de 2023.
- WIKIPÉDIA. "Henri Poincaré". Wikipédia. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9>. Acesso em: 08 de agosto de 2023.