Algoritmo de Grover: Ket vs Qiskit

Gabriel Carneiro

May 23, 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

2022-05-23

Algoritmo de Grover: Ket vs Qiskit

Algoritmo de Grover:
Ket vs Qiskit

Gabriel Carneiro

May 23, 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Problema

Encontrar determinado elemento em uma lista desordenada de tamanho 2^n.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \neq x_0 \\ 1, x = x_0 \end{cases}$$

Cada elemento da lista será codificado em um estado da base computacional.

Problema

Encontrar determinado elemento em uma lista desordenada de tamanho 2^n.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \neq x_0 \\ 1, x = x_0 \end{cases}$$

Cada elemento da lista será codificado em um estado da base computacional.

1. Cada estado da base

Algoritmo

1. $H^{\otimes n} \left|0\right\rangle^{\otimes n}$
2. Aplicar operador de Grover G k vezes:
   - 2.1 Aplicar oráculo;
   - 2.2 Aplicar a porta de Hadamard em todos os qubits;
   - 2.3 Aplicar o operador $2 \left|0\right\rangle \left\langle 0\right| - I$;
   - 2.4 Aplicar a porta de Hadamard em todos os qubits.

Algoritmo

1. $H^{\otimes n} \left|0\right\rangle^{\otimes n}$
2. Aplicar operador de Grover G k vezes:
   - 2.1 Aplicar oráculo;
   - 2.2 Aplicar a porta de Hadamard em todos os qubits;
   - 2.3 Aplicar o operador $2 \left|0\right\rangle \left\langle 0\right| - I$;
   - 2.4 Aplicar a porta de Hadamard em todos os qubits.

Notação Auxiliar

$$\mathbb{B}_n : \text{conjunto de todas as palavras de n bits.}$$
$$\mathbb{M} : \text{conjunto de todos itens desejados.}$$
$$N = 2^n \begin{cases} n : \text{número de qubits.} \\ N : \text{número de itens.} \end{cases}$$
$$M : \text{número de itens desejados.}$$
$$|\alpha\rangle := \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ f(x)=0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N-M}}$$
$$|\beta\rangle := \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ f(x)=1}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{M}} : \text{itens desejados.}$$
$$S := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}.$$

Notação Auxiliar

$\mathbb{B}_n$: conjunto de todas as palavras de n bits.
$\mathbb{M}$: conjunto de todos itens desejados.
$N = 2^n \begin{cases} n : \text{número de qubits.} \\ N : \text{número de itens.} \end{cases}$
M : número de itens desejados.
$|\alpha\rangle := \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ f(x)=0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N-M}}$
$|\beta\rangle := \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ f(x)=1}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{M}}$: itens desejados.
$S := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$.

Primeira Aplicação de G

$$
\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |+\rangle^{\otimes n} \\
&= \sum_{x \in \mathbb{B}_n} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ x \neq x_0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N}} + \frac{|x_0\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ x \neq x_0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N-1}} + \frac{|x_0\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |\beta\rangle
\end{aligned}
$$

Primeira Aplicação de G

$$
\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |+\rangle^{\otimes n} \\
&= \sum_{x \in \mathbb{B}_n} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ x \neq x_0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N}} + \frac{|x_0\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ x \neq x_0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N-1}} + \frac{|x_0\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |\beta\rangle
\end{aligned}
$$

Primeira Aplicação de G: Oráculo

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= O_F\,|\psi_0\rangle \\
&= \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}\,|\alpha\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}}\,|\beta\rangle
\end{aligned}
$$

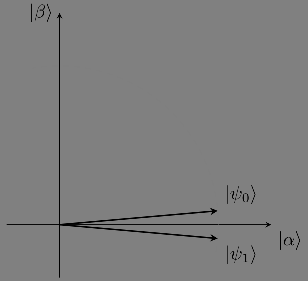
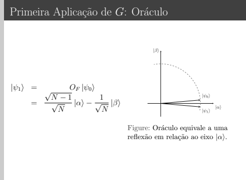


Figure: Oráculo equivale a uma reflexão em relação ao eixo $|\alpha\rangle$.


Primeira Aplicação de G: Oráculo
$|\psi_1\rangle = O_F\,|\psi_0\rangle = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}\,|\alpha\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}}\,|\beta\rangle$
Figure: Oráculo equivale a uma reflexão em relação ao eixo $|\alpha\rangle$.

Primeira Aplicação de G: Difusor

$$
\begin{aligned}
2\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| - I &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \left|0\ldots0\right\rangle\left\langle 0\ldots0\right| - \left|0\ldots1\right\rangle\left\langle 0\ldots1\right| - \cdots - \left|1\ldots1\right\rangle\left\langle 1\ldots1\right|
\end{aligned}
$$

Primeira Aplicação de G: Difusor

Primeira Aplicação de G: Difusor

$$
\begin{aligned}
2\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| - I &= 2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times 1}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{1\times n} - \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & 0\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}\\
&= \begin{bmatrix}2 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{n\times n} - \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & 0\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & -1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & 0\\0 & 0 & \cdots & -1\end{bmatrix}_{n\times n}\\
&= \left|0\ldots 0\right\rangle\left\langle 0\ldots 0\right| - \left|0\ldots 1\right\rangle\left\langle 0\ldots 1\right| - \cdots - \left|1\ldots 1\right\rangle\left\langle 1\ldots 1\right|\\
&= -\left|0\ldots 0\right\rangle\left\langle 0\ldots 0\right| + \left|0\ldots 1\right\rangle\left\langle 0\ldots 1\right| + \cdots + \left|1\ldots 1\right\rangle\left\langle 1\ldots 1\right|
\end{aligned}
$$

Primeira Aplicação de G: Difusor

Primeira Aplicação de G: Difusor

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= (2\,|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - I)\,|\psi_1\rangle \\ &= 2\,\langle\psi_0 \mid \psi_1\rangle\,|\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle \end{aligned}$$

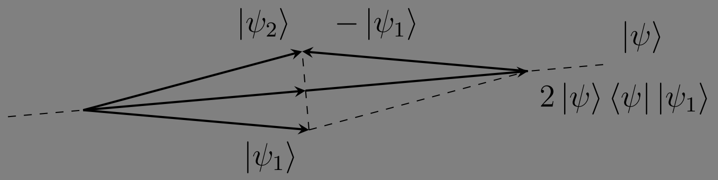


Figure: Difusor equivale a uma reflexão em relação $|\psi\rangle$.

2022-05-23

Algoritmo de Grover: Ket vs Qiskit

└Primeira Aplicação de G: Difusor

Primeira Aplicação de G: Difusor

$|\psi_2\rangle = (2\,|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - I)\,|\psi_1\rangle = 2\,\langle\psi_0 \mid \psi_1\rangle\,|\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle$

Figure: Difusor equivale a uma reflexão em relação $|\psi\rangle$.

Primeira Aplicação de G

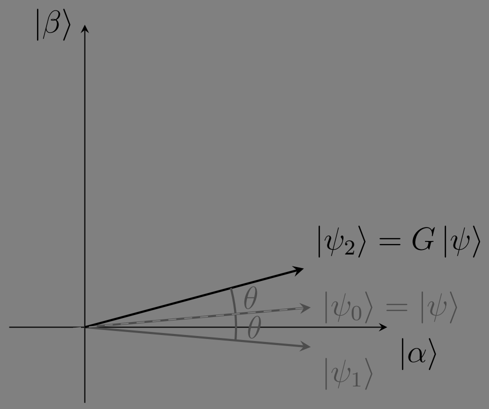
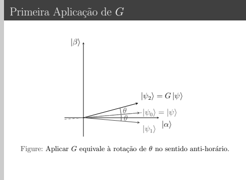


Figure: Aplicar G equivale à rotação de θ no sentido anti-horário.



Aplicações Sucessivas de G

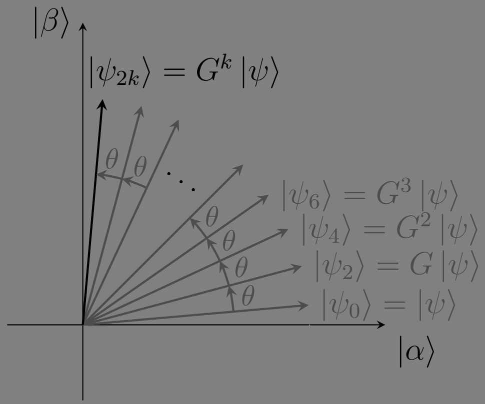
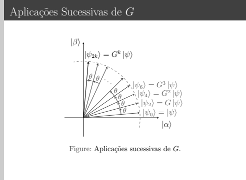


Figure: Aplicações sucessivas de G.



Acerto, k e θ

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}} \\
\theta &= \arccos\left(\frac{N-2}{N}\right) \\
P_a &= \frac{N-1}{N}
\end{aligned}
$$

Acerto, k e θ

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}} \\
\theta &= \arccos\left(\frac{N-2}{N}\right) \\
P_a &= \frac{N-1}{N}
\end{aligned}
$$

Ket vs Qiskit

Ket	Qiskit

Ket vs Qiskit

Ket	Qiskit

Ket vs Qiskit

Ket	Qiskit
$\|q_0 \dots q_n\rangle$	$\|q_n \dots q_0\rangle$

Ket vs Qiskit

Ket	Qiskit
$\|q_0 \dots q_n\rangle$	$\|q_n \dots q_0\rangle$

Ket vs Qiskit

Ket	Qiskit
$\lvert q_0 \dots q_n \rangle$	$\lvert q_n \dots q_0 \rangle$
`H(qubits)`	`qc.h(qubits)`

Ket vs Qiskit

Ket	Qiskit
$\lvert q_0 \dots q_n \rangle$	$\lvert q_n \dots q_0 \rangle$
`H(qubits)`	`qc.h(qubits)`

Ket vs Qiskit

Ket	Qiskit
$\lvert q_0 \dots q_n \rangle$	$\lvert q_n \dots q_0 \rangle$
`H(qubits)`	`qc.h(qubits)`
`ctrl()`	`qc.mcx()`

2022-05-23

Algoritmo de Grover: Ket vs Qiskit

└─Ket vs Qiskit

Ket vs Qiskit

Ket	Qiskit
$\lvert q_0 \dots q_n \rangle$	$\lvert q_n \dots q_0 \rangle$
`H(qubits)`	`qc.h(qubits)`
`ctrl()`	`qc.mcx()`

Ket vs Qiskit: Código

```
def phase_oracle(qubits: quant, state: int) -> None:
    ctrl(qubits, Z, qubits[-1], on_state=state)

    return None
```


Ket vs Qiskit: Código

```
def phase_oracle(qubits: quant, state: int) -> None:
    ctrl(qubits, Z, qubits[-1], on_state=state)

    return None
```

Ket vs Qiskit: Código

```python
def phase_oracle(qc: QuantumCircuit, state: int) -> None:
    state: str = bin(state)[2:]
    state = "0" * (qc.num_qubits - len(state)) + state
    flip_qubits: List[Qubit] = []
    state = state[::-1]
    for i in range(len(state)):
        if (state[i] == "0"):
            flip_qubits.append(qc.qubits[i])

    if flip_qubits:
        qc.x(flip_qubits)
    qc.h(qc.qubits[-1])
    qc.mcx(qc.qubits[:-1], qc.qubits[-1])
    qc.h(qc.qubits[-1])
    if flip_qubits:
        qc.x(flip_qubits)

    return None
```


└Ket vs Qiskit: Código

Ket vs Qiskit: Código

Ket vs Qiskit: Código

```
def grover_diffuser(qubits: quant):
    H(qubits)

    ctrl(qubits, Z, qubits[-1], on_state=0)

    H(qubits)

    return None
```


Ket vs Qiskit: Código

def grover_diffuser(qubits: quant):
H(qubits)
ctrl(qubits, Z, qubits[-1], on_state=0)
H(qubits)
return None

Ket vs Qiskit: Código

```python
def grover_diffuser(qc: QuantumCircuit) -> None:
    qc.h(qc.qubits)
    qc.x(qc.qubits)

    # Make a multi controlled z gate
    qc.h(qc.num_qubits - 1)
    qc.mcx(qc.qubits[:-1], qc.num_qubits - 1)
    qc.h(qc.num_qubits - 1)

    qc.x(qc.qubits)
    qc.h(qc.qubits)

    return None
```


Ket vs Qiskit: Código

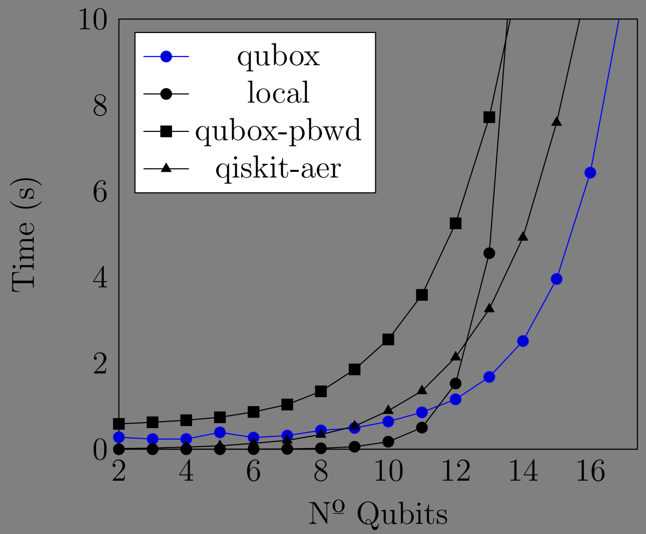
Parâmetros dos Testes

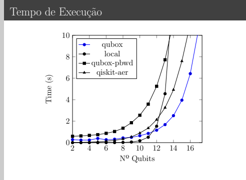
- 100 replicações.
- n qubits, $n \in [2, 20)$.
- 1 estado aleatório marcado.

Parâmetros dos Testes

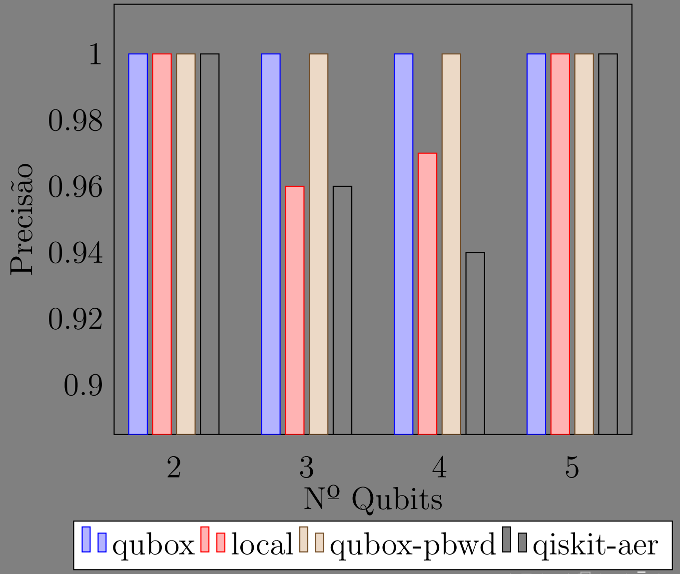
- 100 replicações.
- n qubits, $n \in [2, 20)$.
- 1 estado aleatório marcado.

Tempo de Execução





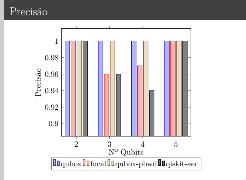
Precisão



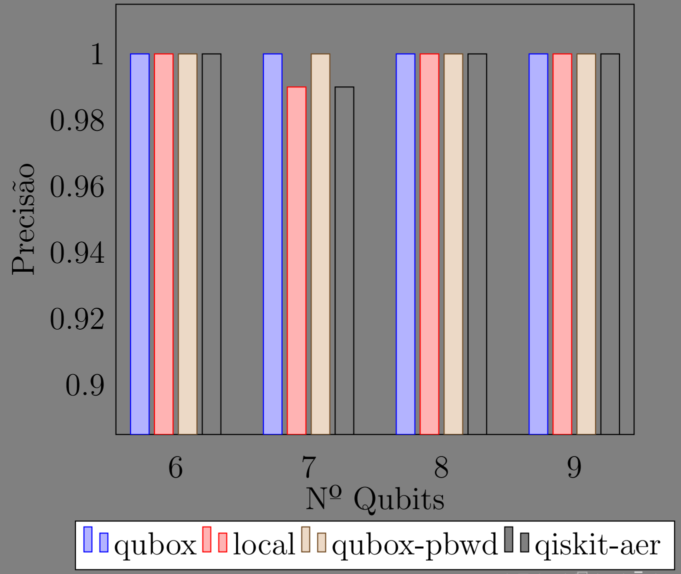
2022-05-23

Algoritmo de Grover: Ket vs Qiskit

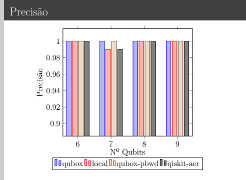
└Precisão



Precisão

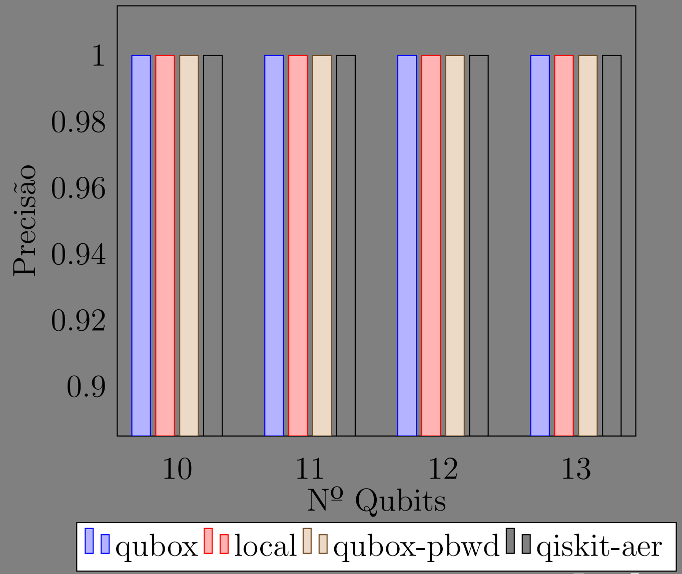


Precisão
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
6
7
8
9
Nº Qubits
qubox
local
qubox-pbwd
qiskit-aer



Precisão
Nº Qubits
qubox
local
qubox-pbwd
qiskit-aer

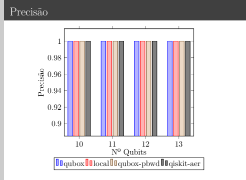
Precisão



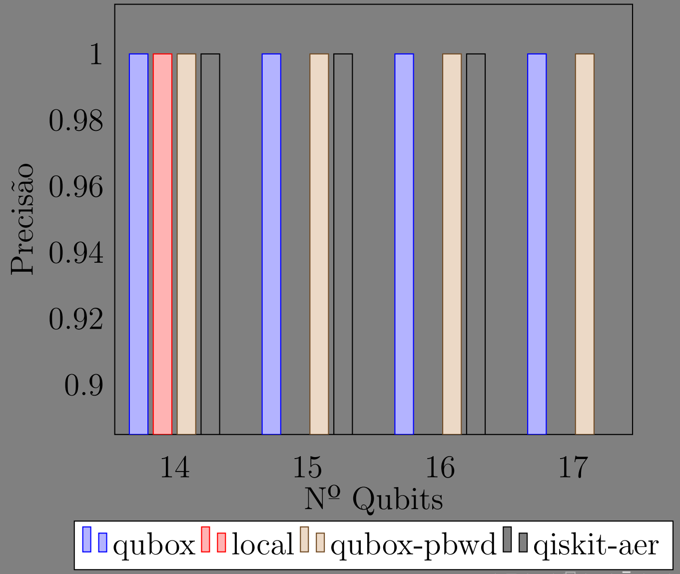
2022-05-23

Algoritmo de Grover: Ket vs Qiskit

└─Precisão



Precisão



1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
Precisão
14
15
16
17
Nº Qubits
qubox
local
qubox-pbwd
qiskit-aer