Algoritmo de Grover: Ket vs Qiskit

Gabriel Carneiro

May 22, 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Problema

Encontrar determinado elemento em uma lista desordenada de tamanho 2^n.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \neq x_0 \\ 1, x = x_0 \end{cases}$$

Cada elemento da lista será codificado em um estado da base computacional.

Algoritmo

1. $H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n}$
2. Aplicar operador de Grover G k vezes:
    1. Aplicar oráculo;
    2. Aplicar a porta de Hadamard em todos os qubits;
    3. Aplicar o operador $2|0\rangle\langle 0| - I$;
    4. Aplicar a porta de Hadamard em todos os qubits.

Notação Auxiliar

$$\mathbb{B}_n : \text{conjunto de todas as palavras de n bits.}$$

$$\mathbb{M} : \text{conjunto de todos itens desejados.}$$

$$N = 2^n \begin{cases} n : \text{número de qubits.} \\ N : \text{número de itens.} \end{cases}$$

$$M : \text{número de itens desejados.}$$

$$|\alpha\rangle := \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ f(x)=0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N-M}}$$

$$|\beta\rangle := \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ f(x)=1}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{M}} : \text{itens desejados.}$$

$$S := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}.$$

Primeira Aplicação de G

$$
\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |+\rangle^{\otimes n} \\
&= \sum_{x \in \mathbb{B}_n} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ x \neq x_0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N}} + \frac{|x_0\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{x \in \mathbb{B}_n \\ x \neq x_0}} \frac{|x\rangle}{\sqrt{N-1}} + \frac{|x_0\rangle}{\sqrt{N}} \\
&= \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |\beta\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= O_F\,|\psi_0\rangle \\
&= \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}\,|\alpha\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}}\,|\beta\rangle
\end{aligned}
$$

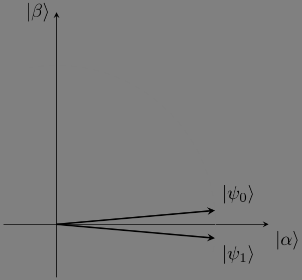


Figure: Oráculo equivale a uma reflexão em relação ao eixo $|\alpha\rangle$.

Primeira Aplicação de G: Difusor

$$
\begin{aligned}
2\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| - I &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \left|0\dots 0\right\rangle\left\langle 0\dots 0\right| - \left|0\dots 1\right\rangle\left\langle 0\dots 1\right| - \cdots - \left|1\dots 1\right\rangle\left\langle 1\dots 1\right|
\end{aligned}
$$

Primeira Aplicação de G: Difusor

$$
\begin{aligned}
2\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| - I &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\
&= \left|0\dots 0\right\rangle\left\langle 0\dots 0\right| - \left|0\dots 1\right\rangle\left\langle 0\dots 1\right| - \cdots - \left|1\dots 1\right\rangle\left\langle 1\dots 1\right| \\
&= -\left|0\dots 0\right\rangle\left\langle 0\dots 0\right| + \left|0\dots 1\right\rangle\left\langle 0\dots 1\right| + \cdots + \left|1\dots 1\right\rangle\left\langle 1\dots 1\right|
\end{aligned}
$$

Primeira Aplicação de G: Difusor

$$
\begin{aligned}
|\psi_2\rangle &= (2\,|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - I)\,|\psi_1\rangle \\
&= 2\,\langle\psi_0 \mid \psi_1\rangle\,|\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle
\end{aligned}
$$

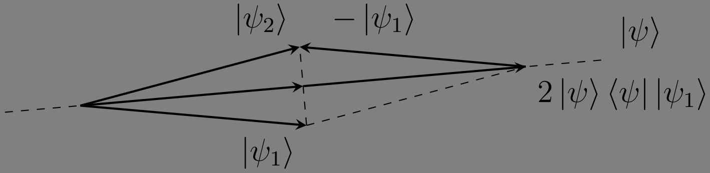


Figure: Difusor equivale a uma reflexão em relação $|\psi\rangle$.

Primeira Aplicação de G

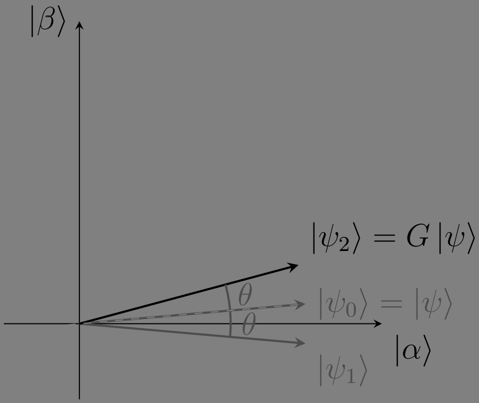


Figure: Aplicar G equivale à rotação de θ no sentido anti-horário.

Aplicações Sucessivas de G

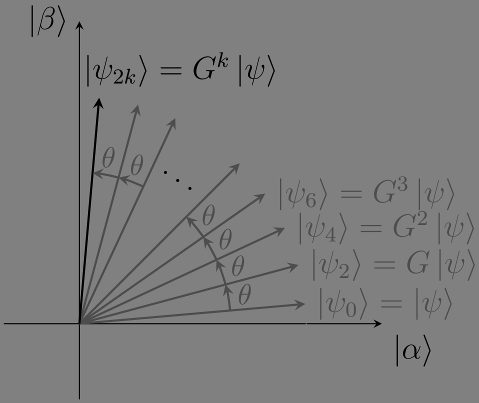


Figure: Aplicações sucessivas de G.

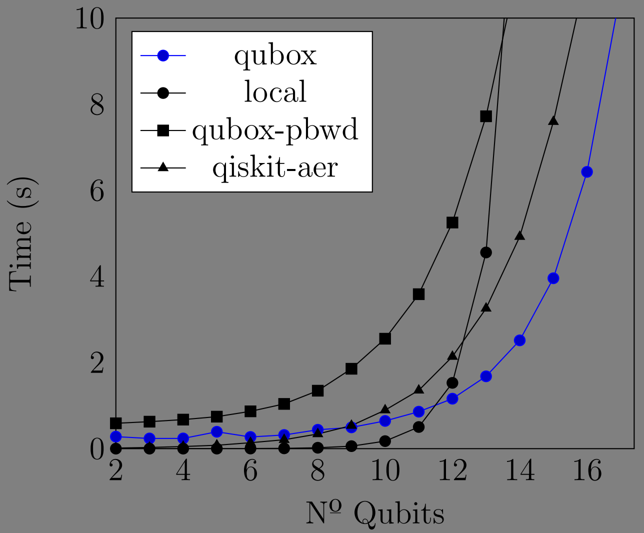
Acerto, k e θ

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}} \\
\theta &= \arccos\left(\frac{N-2}{N}\right) \\
P_a &= \frac{N-1}{N}
\end{aligned}
$$

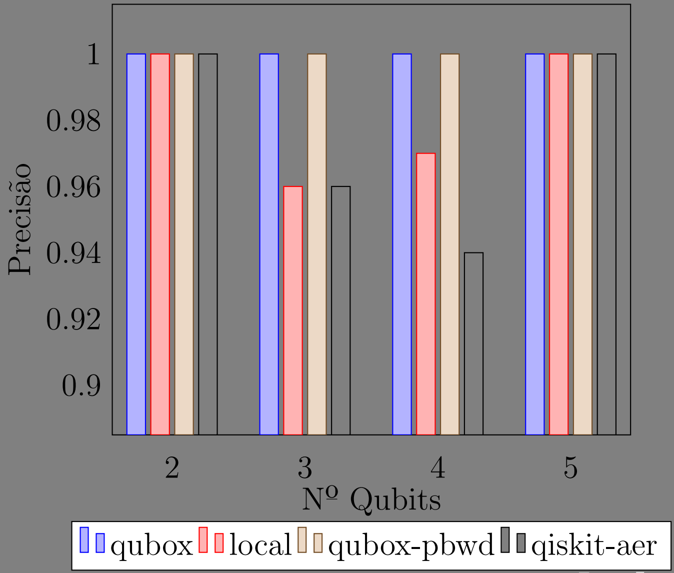
Parâmetros dos Testes

- 100 replicações.
- n qubits, $n \in [2, 20)$.
- 1 estado aleatório marcado.

Tempo de Execução

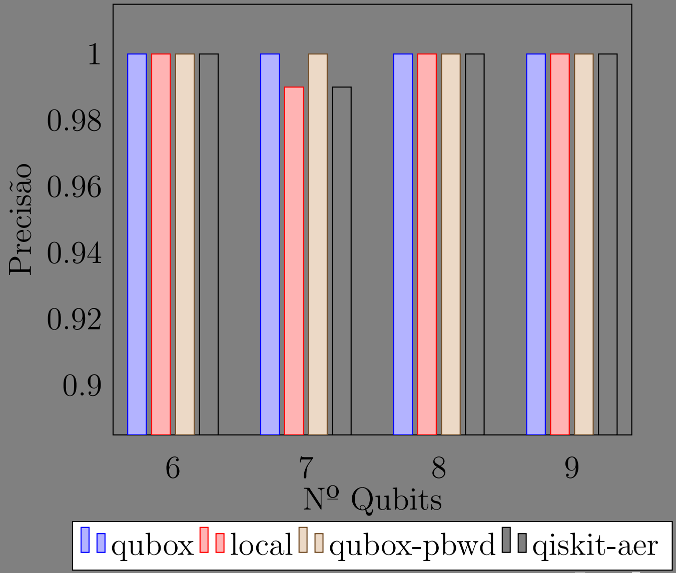


Precisão



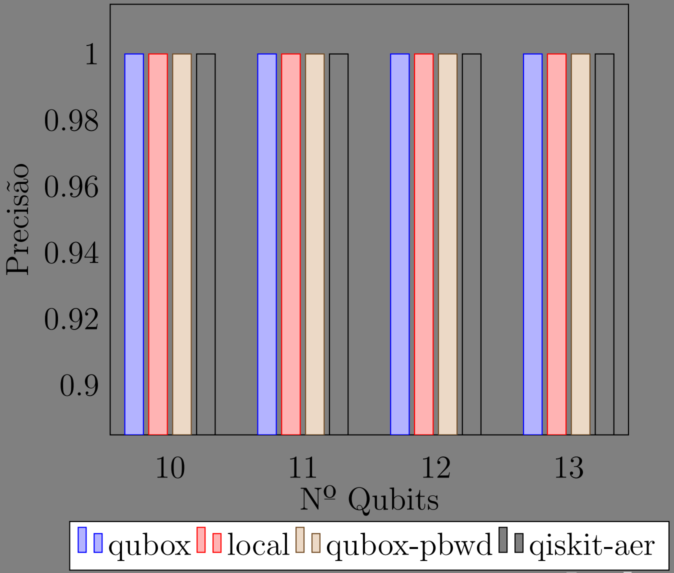
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
Precisão
2
3
4
5
Nº Qubits
qubox
local
qubox-pbwd
qiskit-aer

Precisão



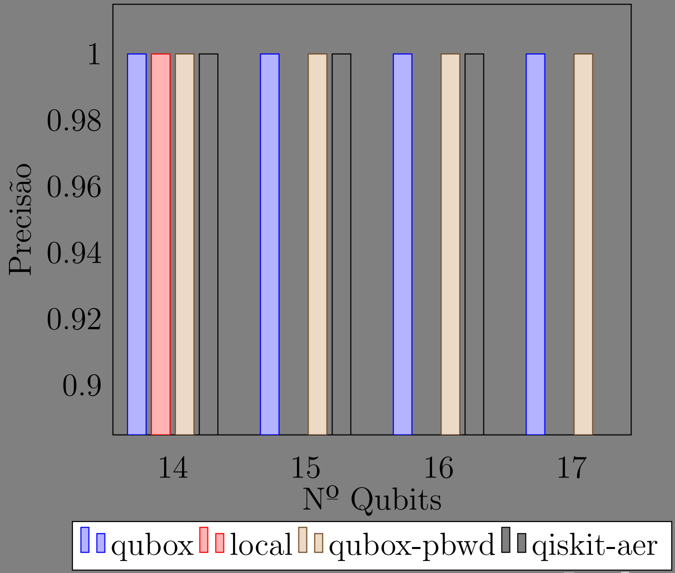
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
Precisão
6
7
8
9
Nº Qubits
qubox
local
qubox-pbwd
qiskit-aer

Precisão



1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
Precisão
10
11
12
13
Nº Qubits
qubox
local
qubox-pbwd
qiskit-aer

Precisão



1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
Precisão
14
15
16
17
Nº Qubits
qubox
local
qubox-pbwd
qiskit-aer