

Lista 02 - Prova Automática de Teoremas

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro (19103977)

Mikaella Cristina Bernardo Vieira (18103860)

1. Prove algo referente a lista 1.

Seja $\text{SerialKiller}(x) = \text{SK}(x)$, $\text{Apelido}(x, y) = A(x, y)$ e $\text{TotaldeVitimas}(x, z) = \text{TV}(x, z)$, onde x representa o serial killer, y o seu apelido e z o número de vítimas.

Do texto, sabe-se que conjunto G é:

- (1) $\text{SK}(\text{Albert_Fish})$
- (2) $A(\text{Albert_Fish}, \text{Maniaco_da_Lua})$
- (3) $\text{TV}(\text{Albert_Fish}, 15)$

Provaremos que Albert Fish é um serial killer que matou 15 vítimas, e cujo apelido era Maníaco da Lua. Logo,

$$W = \text{SK}(\text{Albert_Fish}) \wedge A(\text{Albert_Fish}, \text{Maniaco_da_Lua}) \wedge \text{TV}(\text{Albert_Fish}, 15)$$

Negando W :

$$\neg(\text{SK}(\text{Albert_Fish}) \wedge A(\text{Albert_Fish}, \text{Maniaco_da_Lua}) \wedge \text{TV}(\text{Albert_Fish}, 15))$$
$$\neg\text{SK}(\text{Albert_Fish}) \vee \neg A(\text{Albert_Fish}, \text{Maniaco_da_Lua}) \vee \neg\text{TV}(\text{Albert_Fish}, 15)$$

Tem-se $H = G \cup \{\neg W\}$:

- (1) $\text{SK}(\text{Albert_Fish})$
- (2) $A(\text{Albert_Fish}, \text{Maniaco_da_Lua})$
- (3) $\text{TV}(\text{Albert_Fish}, 15)$
- (4) $\neg\text{SK}(\text{Albert_Fish}) \vee \neg A(\text{Albert_Fish}, \text{Maniaco_da_Lua}) \vee \neg\text{TV}(\text{Albert_Fish}, 15)$

Resolução:

- (5) $\neg A(\text{Albert_Fish}, \text{Maniaco_da_Lua}) \vee \neg\text{TV}(\text{Albert_Fish}, 15)$ de (1) e (4)
- (6) $\neg\text{TV}(\text{Albert_Fish}, 15)$ de (2) e (5)
- (7) \square de (3) e (6)

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

a. $(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$

Negando o teorema

$$\neg((P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)))$$

Eliminando implicação

$$\neg(\neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg(\neg(P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)))$$

$$\neg(\neg(P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)))$$

$$\neg(\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \wedge \neg((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$$

$$(P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge R))$$

$$(P \wedge (\neg Q \vee R)) \wedge ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R))$$

$$P \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)$$

Conjunto G :

- (1) P
- (2) $\neg Q \vee R$
- (3) $\neg P \vee Q$
- (4) $\neg P \vee \neg R$

Resolução:

$$(5) \quad R \vee \neg P \quad \text{de (2) e (3)}$$

$$(6) \quad \neg P \quad \text{de (5) e (4)}$$

$$(7) \quad \square \quad \text{de (6) e (1)}$$

b. $\exists x.\forall y.P(x, y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x, y)$

Negando o teorema

$$\neg(\exists x.\forall y.P(x, y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x, y))$$

Eliminando a implicação

$$\neg(\neg(\exists x.\forall y.P(x, y)) \vee \forall y.\exists x.P(x, y))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg\neg(\exists x.\forall y.P(x, y)) \wedge \neg(\forall y.\exists x.P(x, y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x, y) \wedge \neg(\forall y.\exists x.P(x, y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x, y) \wedge \exists y.\neg(\exists x.P(x, y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x, y) \wedge \exists y.\forall x.\neg P(x, y)$$

Renomeação das variáveis

$$\exists x_1.\forall y_1.P(x_1, y_1) \wedge \exists y_2.\forall x_2.\neg P(x_2, y_2)$$

Eliminação dos quantificadores

$$P(a, y_1) \wedge \neg P(x_2, b)$$

Conjunto G :

$$\begin{array}{ll} (1) & P(a, y_1) \\ (2) & \neg P(x_2, b) \end{array}$$

Resolução:

$$(3) \quad \square \quad \text{de (1) e (2) com } \theta : \{x_2/a, y_1/b\}$$

c. $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

Negando o teorema

$$\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

Eliminando implicação

$$\neg(\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x))) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg(\forall x.\neg(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

$$\neg(\forall x.(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

$$\neg(\forall x.(\neg P(x) \vee \neg Q(x))) \wedge \neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$$

$$\exists x.\neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge (\neg(\exists x.P(x)) \vee \neg(\exists x.Q(x)))$$

$$\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \vee \forall x.\neg Q(x))$$

Renomeação das variáveis

$$\exists x_1.(P(x_1) \wedge Q(x_1)) \wedge (\forall x_2.\neg P(x_2) \vee \forall x_3.\neg Q(x_3))$$

Mover quantificadores para o início da fórmula

$$\exists x_1.\forall x_2.\forall x_3.P(x_1) \wedge Q(x_1) \wedge (\neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3))$$

Eliminação dos quantificadores

$$P(a) \wedge Q(a) \wedge (\neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3))$$

Conjunto G :

- (1) $P(a)$
- (2) $Q(a)$
- (3) $\neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3)$

Resolução:

- (4) $\neg Q(x_3)$ de (1) e (3) com $\theta : \{x_2/a\}$
- (5) \square de (2) e (4) com $\theta : \{x_3/a\}$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se denegar o teorema):

- a.** $(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
- b.** $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$
- c.** $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$