Lista 02 - Prova Automática de Teoremas

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro (19103977)

Mikaella Cristina Bernardo Vieira (18103860)

1. Prove algo referente a lista 1.

Seja `SerialKiller(x) = SK(x)`, `Apelido(x, y) = A(x, y)` e `TotaldeVitimas(x, z) = TV(x, z)`, onde `x` representa o serial killer, `y` o seu apelido e `z` o número de vítimas.

Do texto, sabe-se que conjunto G é:

(1)	SK(Albert_Fish)
(2)	A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua)
(3)	TV(Albert_Fish, 15)

Provaremos que Albert Fish é um serial killer que matou 15 vítimas, e cujo apelido era Maníaco da Lua. Logo,

$$W = \text{SK(Albert\_Fish)} \wedge \text{A(Albert\_Fish, Maniaco\_da\_Lua)} \wedge \text{TV(Albert\_Fish, 15)}$$

Negando W:

$$\neg(\text{SK(Albert\_Fish)} \wedge \text{A(Albert\_Fish, Maniaco\_da\_Lua)} \wedge \text{TV(Albert\_Fish, 15)})$$

$$\neg\text{SK(Albert\_Fish)} \vee \neg\text{A(Albert\_Fish, Maniaco\_da\_Lua)} \vee \neg\text{TV(Albert\_Fish, 15)}$$

Tem-se $H = G \cup \{\neg W\}$:

(1)	SK(Albert_Fish)
(2)	A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua)
(3)	TV(Albert_Fish, 15)
(4)	¬SK(Albert_Fish) ∨ ¬A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua) ∨ ¬TV(Albert_Fish, 15)

Resolução:

(5)	¬A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua) ∨ ¬TV(Albert_Fish, 15)	de (1) e (4)
(6)	¬TV(Albert_Fish, 15)	de (2) e (5)
(7)	□	de (3) e (6)

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

a. $(P \land (\neg Q \lor R)) \to ((P \land \neg Q) \lor (P \land R))$

Negando o teorema

$$\neg((P \land (\neg Q \lor R)) \to ((P \land \neg Q) \lor (P \land R)))$$

Eliminando implicação

$$\neg(\neg(P \land (\neg Q \lor R)) \lor ((P \land \neg Q) \lor (P \land R)))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg((\neg P \lor \neg(\neg Q \lor R)) \lor ((P \land \neg Q) \lor (P \land R)))$$

$$\neg((\neg P \lor (Q \land \neg R)) \lor ((P \land \neg Q) \lor (P \land R)))$$

$$\neg(\neg P \lor (Q \land \neg R)) \land \neg((P \land \neg Q) \lor (P \land R))$$

$$(P \land \neg(Q \land \neg R)) \land (\neg(P \land \neg Q) \land \neg(P \land R))$$

$$(P \land (\neg Q \lor R)) \land ((\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor \neg R))$$

$$P \land (\neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor \neg R)$$

Conjunto G:

(1)	P
(2)	$\neg Q \lor R$
(3)	$\neg P \lor Q$
(4)	$\neg P \lor \neg R$

Resolução:

(5)	$R \lor \neg P$	de (2) e (3)
(6)	$\neg P$	de (5) e (4)
(7)	$\square$	de (6) e (1)

b. $\exists x.\forall y.P(x,y) \to \forall y.\exists x.P(x,y)$

Negando o teorema

$$\neg(\exists x.\forall y.P(x,y) \to \forall y.\exists x.P(x,y))$$

Eliminando a implicação

$$\neg(\neg(\exists x.\forall y.P(x,y)) \vee \forall y.\exists x.P(x,y))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg\neg(\exists x.\forall y.P(x,y)) \wedge \neg(\forall y.\exists x.P(x,y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x,y) \wedge \neg(\forall y.\exists x.P(x,y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x,y) \wedge \exists y.\neg(\exists x.P(x,y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x,y) \wedge \exists y.\forall x.\neg P(x,y)$$

Renomeação das variáveis

$$\exists x_1.\forall y_1.P(x_1,y_1) \wedge \exists y_2.\forall x_2.\neg P(x_2,y_2)$$

Eliminação dos quantificadores

$$P(a,y_1) \wedge \neg P(x_2,b)$$

Conjunto G:

$$\begin{array}{ll} (1) & P(a,y_1) \\ (2) & \neg P(x_2,b) \end{array}$$

Resolução:

$$(3) \quad \square \quad \text{de (1) e (2) com } \theta : \{x_2/a, y_1/b\}$$

c. $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

Negando o teorema

$$\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

Eliminando implicação

$$\neg(\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x))) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg(\forall x.\neg(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

$$\neg(\forall x.(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

$$\neg(\forall x.(\neg P(x) \vee \neg Q(x))) \wedge \neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$$

$$\exists x.\neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge (\neg(\exists x.P(x)) \vee \neg(\exists x.Q(x)))$$

$$\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \vee \forall x.\neg Q(x))$$

Renomeação das variáveis

$$\exists x_1.(P(x_1) \wedge Q(x_1)) \wedge (\forall x_2.\neg P(x_2) \vee \forall x_3.\neg Q(x_3))$$

Mover quantificadores para o início da fórmula

$$\exists x_1.\forall x_2.\forall x_3.P(x_1) \wedge Q(x_1) \wedge (\neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3))$$

Eliminação dos quantificadores

$$P(a) \wedge Q(a) \wedge (\neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3))$$

Conjunto G:

$$\begin{array}{ll} (1) & P(a) \\ (2) & Q(a) \\ (3) & \neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3) \end{array}$$

Resolução:

$$\begin{array}{lll} (4) & \neg Q(x_3) & \text{de (1) e (3) com } \theta : \{x_2/a\} \\ (5) & \square & \text{de (2) e (4) com } \theta : \{x_3/a\} \end{array}$$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se denegar o teorema):

a. $(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

(1)	$\neg((P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q))$	Negando o teorema			
(2)	$P \wedge \neg Q$	de (1) R.C. $\rightarrow$			
(3)	$P \rightarrow Q$	de (1) R.C. $\rightarrow$			
(4)	P	de (2) R.C. $\wedge$			
(5)	$\neg Q$	de (2) R.C. $\wedge$			
(6)	$\neg P$	de (3) R.D. $\rightarrow$	|	Q	de (3) R.D. $\rightarrow$
(7)	$\square$	de (4) e (6)	|	$\square$	de (5) e (6)

b. $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

(1)	$\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$	Negando o teorema			
(2)	$\exists x.(P(x) \wedge Q(x))$	de (1) R.C. $\rightarrow$			
(3)	$\neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$	de (1) R.C. $\rightarrow$			
(4)	$\exists x.P(x)$	de (2) R.C. $\wedge$			
(5)	$\exists x.Q(x)$	de (2) R.C. $\wedge$			
(6)	$P(\pi)$	de (4) R.E. $\theta : \{x/\pi\}$			
(7)	$Q(\pi)$	de (5) R.E. $\theta : \{x/\pi\}$			
(8)	$\neg P(\pi) \vee \neg Q(\pi)$	de (3) R.E. $\theta : \{x/\pi\}$			
(9)	$\neg P(\pi)$	de (8) R.D. $\vee$	|	$\neg Q(\pi)$	de (8) R.D. $\vee$
(10)	$\square$	de (6) e (9)	|	$\square$	de (7) e (9)

c. $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$