Lista 02 - Prova Automática de Teoremas

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro (19103977)

Mikaella Cristina Bernardo Vieira (18103860)

1. Prove algo referente a lista 1.

Seja `SerialKiller(x) = SK(x)`, `Apelido(x, y) = A(x, y)` e `TotaldeVitimas(x, z) = TV(x, z)`, onde `x` representa o serial killer, `y` o seu apelido e `z` o número de vítimas.

Do texto, sabe-se que conjunto G é:

(1)	SK(Albert_Fish)
(2)	A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua)
(3)	TV(Albert_Fish, 15)

Provaremos que Albert Fish é um serial killer que matou 15 vítimas, e cujo apelido era Maníaco da Lua. Logo,

W = SK(Albert_Fish)∧A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua)∧TV(Albert_Fish, 15)

Negando W:

¬(SK(Albert_Fish) ∧ A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua) ∧ TV(Albert_Fish, 15))

¬SK(Albert_Fish) ∨ ¬A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua) ∨ ¬TV(Albert_Fish, 15)

Tem-se $H = G \cup \{\neg W\}$:

(1)	SK(Albert_Fish)
(2)	A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua)
(3)	TV(Albert_Fish, 15)
(4)	¬SK(Albert_Fish) ∨ ¬A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua) ∨ ¬TV(Albert_Fish, 15)

Resolução:

(5)	¬A(Albert_Fish, Maniaco_da_Lua) ∨ ¬TV(Albert_Fish, 15)	de (1) e (4)
(6)	¬TV(Albert_Fish, 15)	de (2) e (5)
(7)	□	de (3) e (6)

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

a. $(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$

Negando o teorema

$$\neg((P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)))$$

Eliminando implicação

$$\neg(\neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg((\neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)))$$

$$\neg((\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)))$$

$$\neg(\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \wedge \neg((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$$

$$(P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge R))$$

$$(P \wedge (\neg Q \vee R)) \wedge ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R))$$

$$P \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)$$

Conjunto G:

(1)	P
(2)	$\neg Q \vee R$
(3)	$\neg P \vee Q$
(4)	$\neg P \vee \neg R$

Resolução:

(5)	$R \vee \neg P$	de (2) e (3)
(6)	$\neg P$	de (5) e (4)
(7)	$\square$	de (6) e (1)

b. $\exists x.\forall y.P(x,y) \to \forall y.\exists x.P(x,y)$

Negando o teorema

$$\neg(\exists x.\forall y.P(x,y) \to \forall y.\exists x.P(x,y))$$

Eliminando a implicação

$$\neg(\neg(\exists x.\forall y.P(x,y)) \vee \forall y.\exists x.P(x,y))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg\neg(\exists x.\forall y.P(x,y)) \wedge \neg(\forall y.\exists x.P(x,y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x,y) \wedge \neg(\forall y.\exists x.P(x,y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x,y) \wedge \exists y.\neg(\exists x.P(x,y))$$

$$\exists x.\forall y.P(x,y) \wedge \exists y.\forall x.\neg P(x,y)$$

Renomeação das variáveis

$$\exists x_1.\forall y_1.P(x_1,y_1) \wedge \exists y_2.\forall x_2.\neg P(x_2,y_2)$$

Eliminação dos quantificadores

$$P(a,y_1) \wedge \neg P(x_2,b)$$

Conjunto G:

$$\begin{array}{ll} (1) & P(a,y_1) \\ (2) & \neg P(x_2,b) \end{array}$$

Resolução:

$$(3) \quad \Box \quad \text{de (1) e (2) com } \theta : \{x_2/a, y_1/b\}$$

c. $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

Negando o teorema

$$\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

Eliminando implicação

$$\neg(\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x))) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

Redução do escopo das negações

$$\neg(\forall x.\neg(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

$$\neg(\forall x.(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$$

$$\neg(\forall x.(\neg P(x) \vee \neg Q(x))) \wedge \neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$$

$$\exists x.\neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge (\neg(\exists x.P(x)) \vee \neg(\exists x.Q(x)))$$

$$\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \vee \forall x.\neg Q(x))$$

Renomeação das variáveis

$$\exists x_1.(P(x_1) \wedge Q(x_1)) \wedge (\forall x_2.\neg P(x_2) \vee \forall x_3.\neg Q(x_3))$$

Mover quantificadores para o início da fórmula

$$\exists x_1.\forall x_2.\forall x_3.P(x_1) \wedge Q(x_1) \wedge (\neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3))$$

Eliminação dos quantificadores

$$P(a) \wedge Q(a) \wedge (\neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3))$$

Conjunto G:

$$\begin{array}{ll} (1) & P(a) \\ (2) & Q(a) \\ (3) & \neg P(x_2) \vee \neg Q(x_3) \end{array}$$

Resolução:

$$\begin{array}{lll} (4) & \neg Q(x_3) & \text{de (1) e (3) com } \theta : \{x_2/a\} \\ (5) & \square & \text{de (2) e (4) com } \theta : \{x_3/a\} \end{array}$$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se denegar o teorema):

a. $(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

(1)	$\neg((P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q))$			Negando o teorema
(2)	$P \wedge \neg Q$			de (1) R.C. $\rightarrow$
(3)	$P \rightarrow Q$			de (1) R.C. $\rightarrow$
(4)	P			de (2) R.C. $\wedge$
(5)	$\neg Q$			de (2) R.C. $\wedge$
(6)	$\neg P$	$\mid$	Q	de (3) R.D. $\rightarrow$
(7)	$\square$	$\mid$	$\square$	de (4), (5) e (6)

b. $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

(1)	$\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$			Negando o teorema
(2)	$\exists x.(P(x) \wedge Q(x))$			de (1) R.C. $\rightarrow$
(3)	$\neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$			de (1) R.C. $\rightarrow$
(4)	$P(\pi) \wedge Q(\pi)$			de (2) R.E. $\theta : \{x/\pi\}$
(5)	$P(\pi)$			de (4) R.C. $\wedge$
(6)	$Q(\pi)$			de (4) R.C. $\wedge$
(7)	$\neg\exists x.P(x)$	$\mid$	$\neg\exists x.Q(x)$	de (3) R.D. $\wedge$
(8)	$\neg P(\pi)$	$\mid$	$\neg Q(\pi)$	de (7) R.E. $\theta : \{x/\pi\}$
(9)	$\square$	$\mid$	$\square$	de (5), (6) e (8)

c. $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$

(1)	$\neg(\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x)))$			Negando o teorema
(2)	$\forall x.(P(x) \vee Q(x))$			de (1) R.C. $\rightarrow$
(3)	$\neg(\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$			de (1) R.C. $\rightarrow$
(4)	$\neg\exists x.P(x)$			de (3) R.C. $\vee$
(5)	$\neg\forall x.Q(x)$			de (3) R.C. $\vee$
(6)	$\neg P(t)$			de (4) R.E. $\theta : \{x/t\}$
(7)	$\neg Q(t)$			de (5) R.U. $\theta : \{x/t\}$
(8)	$P(t) \vee Q(t)$			de (2) R.U. $\theta : \{x/t\}$
(9)	$P(t)$	$\mid$	$Q(t)$	de (8) R.D. $\vee$
(10)	$\square$	$\mid$	$\square$	de (6), (7) e (9)