Problemas de Empacotamento

métodos de solução baseados em *bottom-left*

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro
Orientador: Pedro Belin Castellucci
Coorientador: Rafael de Santiago

Universidade Federal de Santa Catarina

17 de maio de 2023

Problemas de Empacotamento
métodos de solução baseados em *bottom-left*
Gabriel Medeiros Lopes Carneiro
Orientador: Pedro Belin Castellucci
Coorientador: Rafael de Santiago
Universidade Federal de Santa Catarina
17 de maio de 2023

Meu nome é Gabriel e hoje vou apresentar uma prévia do meu tcc.
O trabalho trata sobre métodos de solução baseados em *bottom-left* para problema de empacotamento, ele foi feito sob orientação do professor Pedro e teve coorientação do professor Rafael.

Sumário

Sumário
1. Conceitos básicos
2. Problema
3. *Bottom-left*
4. Resultados
5. Conclusão

Como nem todos podem estar familiarizados com alguns termos, vou fazer uma breve revisão de conceitos básicos.
Depois vou explicar o problema em si, passando por suas características e classificações.
Vou mostrar o que é *bottom-left*, como ela funciona e as adaptações feitas com base nela.
Também vou mostrar os resultados obtidos ao rodar instâncias de teste.
Por fim, apresentarei a conclusões que podem ser feitas a partir do trabalho.

Modelos de otimização

$$\min/\max f(x), x \in \mathcal{X}.$$

- x: variável de decisão, $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- $\mathcal{X}$: conjunto factível ou domínio;
- $f(x)$: função objetivo.

Modelos de otimização

$$\min/\max f(x), x \in \mathcal{X}.$$

- x: variável de decisão, $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- $\mathcal{X}$: conjunto factível ou domínio;
- $f(x)$: função objetivo.

Modelos de otimização são aproximações da realidade, representam o problema de maneira simples e objetiva, usando restrições. Geralmente quer minimizar ou maximizar uma função $f(x)$ com x obedecendo algumas restrições.

- x: variável de decisão, $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- $\mathcal{X}$: conjunto factível ou domínio, possui todas as soluções possíveis para o problema.
- $f(x)$: função objetivo, a qual determinará o critério de escolha da solução.

Tipos de soluções

- Factível.
  - Ótima.
  - Problema ilimitado.
- Problema infactível.

Tipos de soluções
- Factível.
  - Ótima.
  - Problema ilimitado.
- Problema infactível.

- Factível: satisfaz todas as restrições do problema.
- Ótima: melhor solução factível.
- Problema ilimitado: não é possível encontrar uma solução ótima, ou seja, sempre é possível achar uma melhor.
- Problema infactível: quando o problema não possui solução, geralmente devido a muitas restrições.

Conceitos básicos

Modelo contínuo × discreto

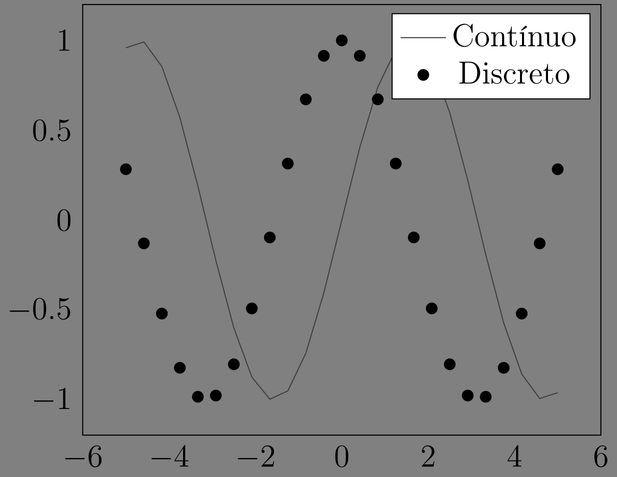
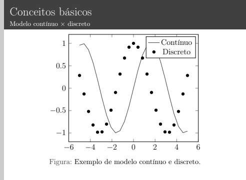


Figura: Exemplo de modelo contínuo e discreto.



Um modelo é contínuo quando sua região factível é contínua, ou seja, dado um ponto dessa região todos os seus vizinhos também serão uma solução.

Modelos discretos não possuem seu domínio contínuo.

Métodos exatos × heurísticos

Exatos

- Solução ótima.
- Tempo.
- Recursos.

Heurísticos

- Solução factível.
- Simplicidade.
- Grande porte.

Métodos exatos × heurísticos
Exatos
- Solução ótima.
- Tempo.
- Recursos.
Heurísticos
- Solução factível.
- Simplicidade.
- Grande porte.

Métodos exatos sempre vão garantir a solução ótima para o problema, porém encontrar tal solução pode requerer grande tempo e/ou muitos recursos computacionais.
Já heurísticas buscam por soluções factíveis e são geralmente usadas em problemas de grande porte.
O problema de interesse é NP-difícil, então buscar uma solução ótima fica praticamente inviável devido a limitações de tempo e recursos computacionais. Uma heurística será utilizada para obter uma solução boa em tempo hábil.

Problema

Alocar peças em um espaço.

- Difícil resolução.
- N-dimensional.
- Tipos de peças.
- Classificação.
- Variantes.

Problema

Alocar peças em um espaço.

- Difícil resolução.
- N-dimensional.
- Tipos de peças.
- Classificação.
- Variantes.

A premissa do problema é simples, alocar peças em um espaço. Pode parecer algo bobo de resolver, mas é de difícil resolução já que pode possuir N-dimensões e diversos tipos de peças, de modo é preciso separar o problema em diferentes classes e ainda existem variantes dentro das classificações.

N-dimensões

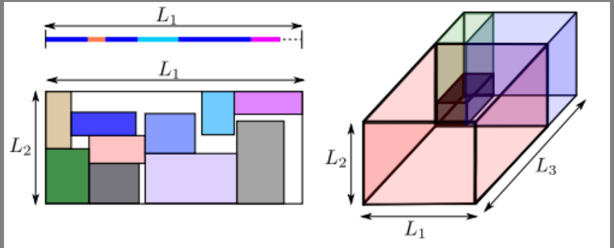
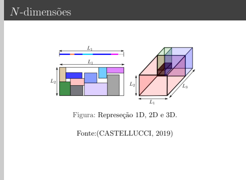


Figura: Represeção 1D, 2D e 3D.

Fonte:(CASTELLUCCI, 2019)



- O caso 1D pode ser usado para empilhar caixas de mesma profundidade e largura.
- Já no 2D poderia ser aplicado em casos onde somente a profundidade é fixa.
- E o 3D seria alocar caixas em um depósito ou container.
- O trabalho se concentra somente no caso 2D.

Problema

Restrições

$$x_i \in \{0, \ldots, W - w_i\}, y_i \in \{0, \ldots, H - h_i\} \; (i \in \mathcal{I}') \qquad (1)$$

$$[x_i, x_i + w_i) \cap [x_j, x_j + w_j) = \emptyset \text{ ou } [y_i, y_i + h_i) \cap [y_j, y_j + h_j) = \emptyset \; (i, j \in \mathcal{I}', i \neq j) \qquad (2)$$

Problema
Restrições
$x_i \in \{0, \ldots, W - w_i\}, y_i \in \{0, \ldots, H - h_i\} \; (i \in \mathcal{I}')$ (1)
$[x_i, x_i + w_i) \cap [x_j, x_j + w_j) = \emptyset$ ou $[y_i, y_i + h_i) \cap [y_j, y_j + h_j) = \emptyset \; (i, j \in \mathcal{I}', i \neq j)$ (2)

Como já definimos a dimensão do problema, podemos ver as restrições do modelo.
A primeira restrição garante que um item só é alocado no recipiente se couber nele.
Já a segunda impede sobreposição entre as peças.

Tipos de peças

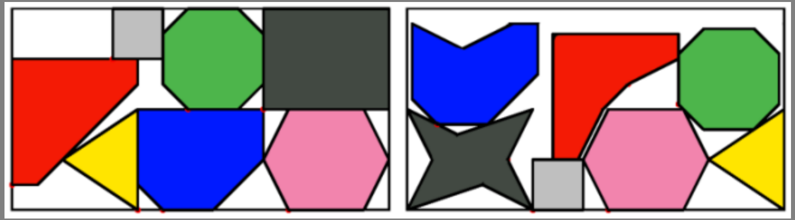


Figura: Exemplos de peças regulares (esquerda) e irregulares (direita).

Fonte:(BARTMEYER et al., 2021)

Tipos de peças

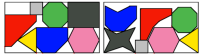


Figura: Exemplos de peças regulares (esquerda) e irregulares (direita).

Fonte:(BARTMEYER et al., 2021)

- Regulares: Possuem formato convexo.
- Irregulares: Possuem formato côncavo.
- Outra forma de se definir é checar se existe alguma reta que atravesse o objeto em dois pontos diferentes.
- O trabalho foca em peças regulares retangulares.

Classificação

- Empacotamento em faixa.

Classificação
- Empacotamento em faixa.

- Dado um conjunto de itens e uma caixa com comprimento fixo, queremos encontrar uma solução de altura mínima.

Classificação

- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.

Classificação
- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.

- Dado um conjunto de itens e uma caixa com comprimento fixo, queremos encontrar uma solução de altura mínima.
- Nesse caso, queremos maximizar o valor da caixa (geralmente é a área da caixa).

Classificação

- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.
- Empacotamento em caixas.

Classificação

- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.
- Empacotamento em caixas.

- Dado um conjunto de itens e uma caixa com comprimento fixo, queremos encontrar uma solução de altura mínima.
- Nesse caso, queremos maximizar o valor da caixa (geralmente é a área da caixa).
- Minimizar o número de caixas necessárias para empacotar todos os itens.

Classificação

- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.
- Empacotamento em caixas.
- Empacotamento ortogonal.

Classificação
- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.
- Empacotamento em caixas.
- Empacotamento ortogonal.

- Dado um conjunto de itens e uma caixa com comprimento fixo, queremos encontrar uma solução de altura mínima.
- Nesse caso, queremos maximizar o valor da caixa (geralmente é a área da caixa).
- Minimizar o número de caixas necessárias para empacotar todos os itens.
- Alocar todos os itens numa caixa.
- Todos os problemas são NP-difícil, com exceção do ortogonal (NP-completo).

Variantes

- Corte guilhotinado.

Variantes
- Corte guilhotinado.

- Consiste em cortar a caixa de forma paralela a um dos lados de forma recursiva.

Variantes

- Corte guilhotinado.
- Rotações ortogonais.

Variantes
- Corte guilhotinado.
- Rotações ortogonais.

- Consiste em cortar a caixa de forma paralela a um dos lados de forma recursiva.
- É um modo de relaxar o problema, permitindo rotações de 90° nos itens.

Variantes

- Corte guilhotinado.
- Rotações ortogonais.
- Restrições de carga e descarga.

Variantes

- Corte guilhotinado.
- Rotações ortogonais.
- Restrições de carga e descarga.

- Consiste em cortar a caixa de forma paralela a um dos lados de forma recursiva.
- É um modo de relaxar o problema, permitindo rotações de 90° nos itens.
- Algumas peças precisam ser posicionadas em certa posição ou próximas a outras.

Variantes

- Corte guilhotinado.
- Rotações ortogonais.
- Restrições de carga e descarga.
- Caixas de tamanho variável.

Variantes

- Corte guilhotinado.
- Rotações ortogonais.
- Restrições de carga e descarga.
- Caixas de tamanho variável.

- Consiste em cortar a caixa de forma paralela a um dos lados de forma recursiva.
- É um modo de relaxar o problema, permitindo rotações de 90° nos itens.
- Algumas peças precisam ser posicionadas em certa posição ou próximas a outras.
- Define que caixas não precisam ter o mesmo tamanho (aplicável somente para Empacotamento em Caixas).

Bottom-left

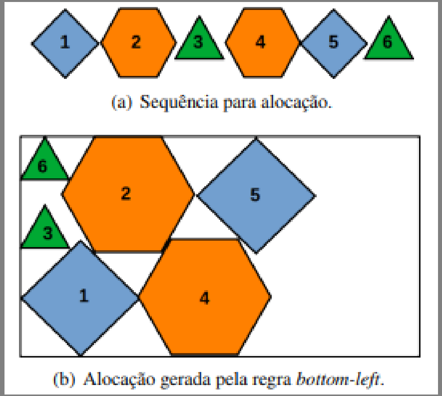
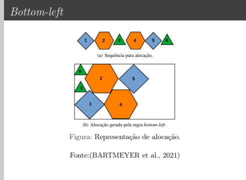


Figura: Representação de alocação.

Fonte:(BARTMEYER et al., 2021)



Como o problema é NP-difícil uma heurística será usada e a *bottom-left* foi a escolhida.
Ela é bem simples, dado uma lista como entrada, os itens são retirados um a um e posicionados no ponto mais a baixo a mais a esquerda quanto for possível.
Caso a peça não caiba em nenhuma posição ela não entra na solução e passa-se para a próxima da fila.
Aqui fica claro que a sequência de alocação tem impacto direto na qualidade da solução e é um ponto a ser resolvido. Como definir essa ordenação? Existe algum critério que se sobressai dos demais?

Critérios de ordenação

- Área.
- Perímetro.
- Largura.
- Altura.
- Id.

Critérios de ordenação
- Área.
- Perímetro.
- Largura.
- Altura.
- Id.

5 critérios de ordenação foram escolhidos: área, perímetro, largura, altura e id.

A ordenação por id considera a ordem em que os itens foram colocados na lista (ou criados), ou seja, seria a forma padrão de resolver.

Cada critério pode ser usado de forma crescente ou decrescente.

Com os critérios definidos, podemos passar para os próximos pontos do problema, que são a sobreposição e o domínio infinito.

Sobreposição e domínio infinito

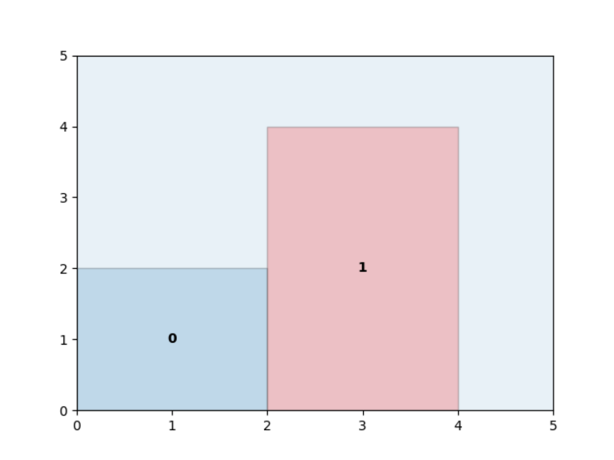
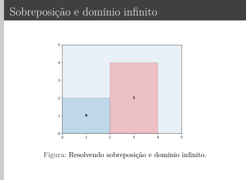


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



Supondo que estejamos em um estado do modelo como mostra a figura, onde o item 0 foi o primeiro alocado e o item 1 foi alocado a sua direita na posição (2, 0), porque não cabia logo acima na posição (0, 2) devido a restrição 1.

Sobreposição e domínio infinito

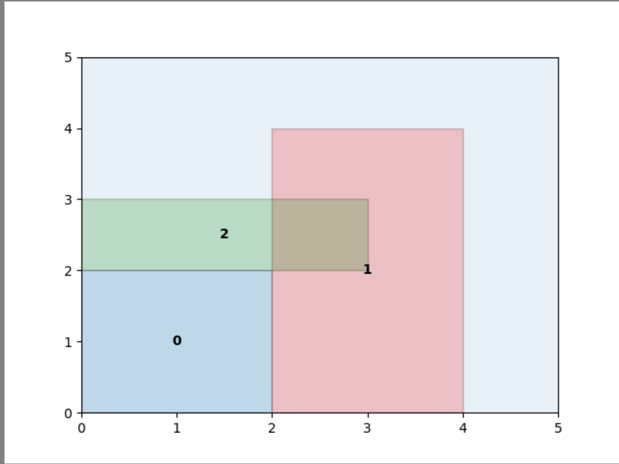
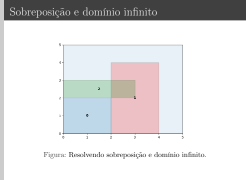


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



Agora queremos alocar um terceiro item de largura 3 e altura 1. Ao posicionar a peça na posição (0, 2) percebe-se que a restrição 1 é satisfeita, porém a restrição 2 não.

Sobreposição e domínio infinito

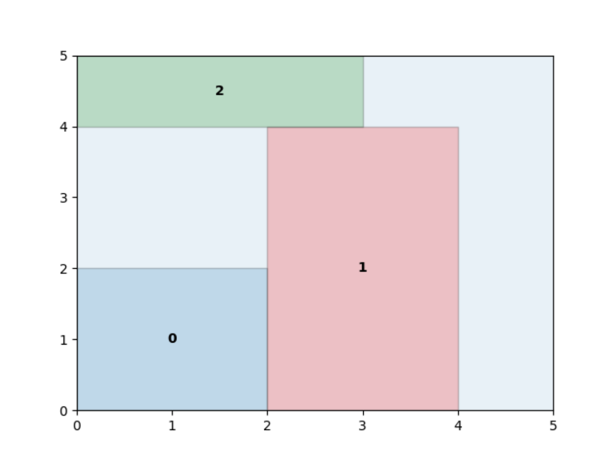
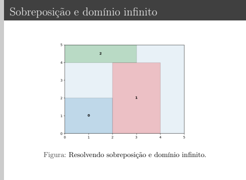


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



Nesse caso, com poucas peças, com caixa pequena e um auxílio visual é fácil dizer que a posição (0, 4) é válida, mas como chegar até ela? Existem infinitos pontos entre as coordenadas (0, 2) e (0, 4).

Sobreposição e domínio infinito

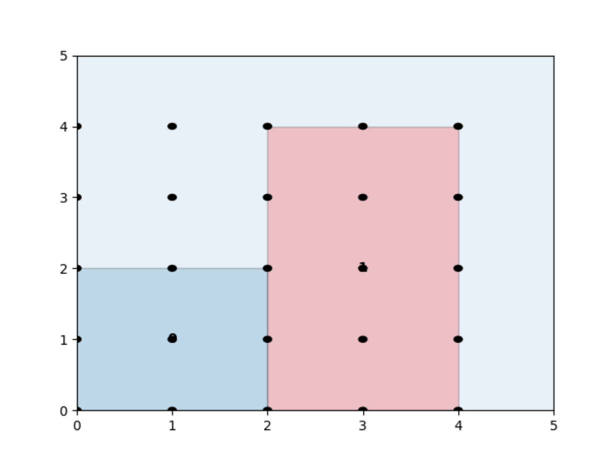
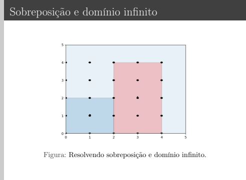


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



Como todas as instâncias tratam somente de peças e recipientes com valores inteiros uma abordagem possível seria discretizar o domínio.

Sobreposição e domínio infinito

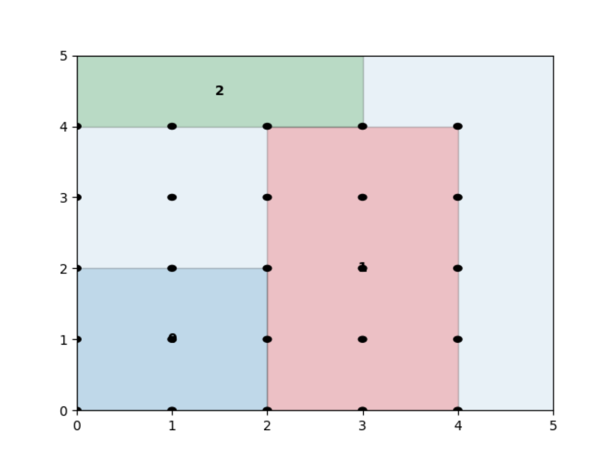
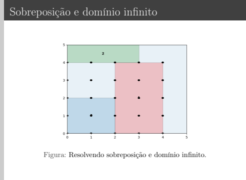


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



Dessa forma somente coordenadas de valores inteiros precisariam ser checadas, resolvendo parcialmente o problema com o domínio, já que ainda temos muitos pontos para checar, principalmente em instâncias grandes. Mas isso não resolve a parte de sobreposição. Para cada ponto ainda é necessário verificar se existe sobreposição com cada uma das peças já alocadas, algo extremamente custoso. Além disso, a discretização só funcionaria em casos como os das intâncias, com valores inteiros, não sendo aplicável em vários problemas do mundo real.

Regiões

- Vertical.
- Horizontal.
- max(área).
- Nenhuma.

Regiões

- Vertical.
- Horizontal.
- max(área).
- Nenhuma.

Ambos os problemas, de sobreposição e de domínio infinito, podem ser resolvidos utilizando a estratégia de criação de regiões. Utilizando essa técnica é possível ignorar a restrição 2. Nela, ao posicionar uma peça, duas regiões são criadas e o item seguinte somente será posicionado se couber em uma dessas regiões.
O domínio passa a ser somente o canto inferior esquerdo de cada uma das regiões e sobreposições não são mais possíveis. Além disso, a regra para definir se uma peça cabe em dada região é igual a restrição 1, tornando o algoritmo de solução bem simples. Escolhi criar as regiões de 4 formas diferentes, para identificar se isso teria algum impacto na solução.

Regiões

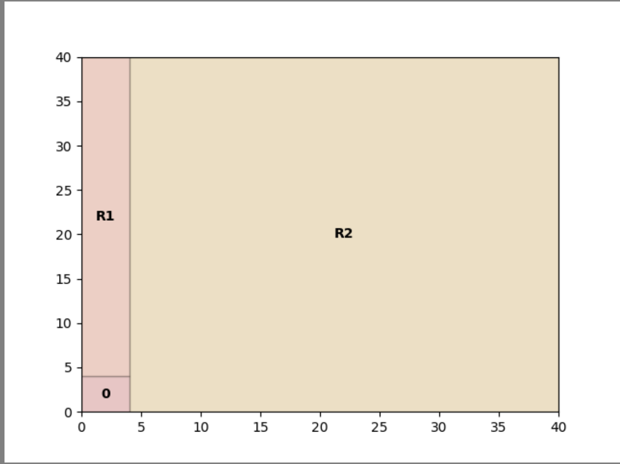
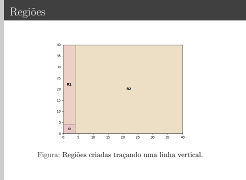


Figura: Regiões criadas traçando uma linha vertical.



A primeira é traçando uma linha vertical a partir do canto superior direito de cada peça alocada. Nas figuras, retângulos indicados com um R no começo são regiões.

Regiões

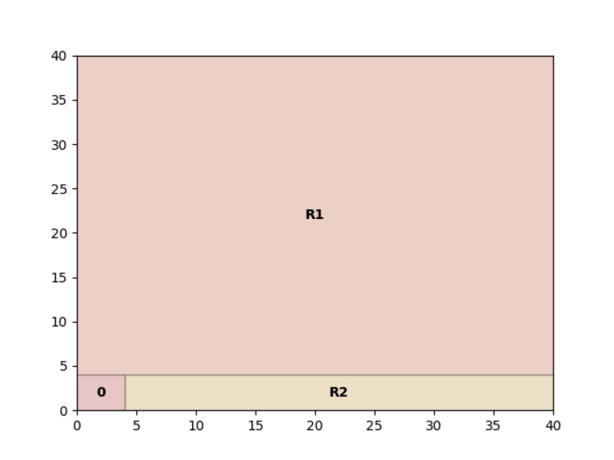
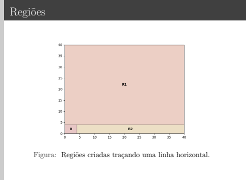


Figura: Regiões criadas traçando uma linha horizontal.



A segunda é igual a primeira, porém usando uma linha horizontal.

Regiões

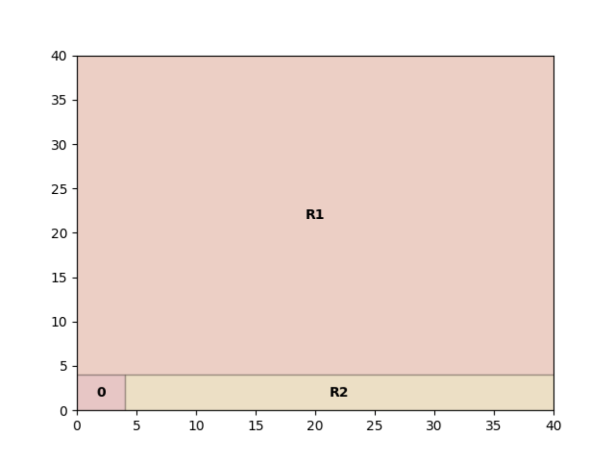
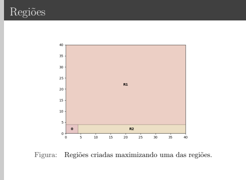


Figura: Regiões criadas maximizando uma das regiões.



Já na terceira é traçada uma linha (vertical ou horizontal) que maximize a área de uma das regiões geradas, basicamente identifica qual dos dois primeiros métodos gera a maior área. Isso é interessente pois dá uma garantia maior de que o item seguinte será alocado, em contrapartida pode gerar muitas regiões pequenas que podem não ser utilizadas, diminuindo a qualidade da solução.

Regiões

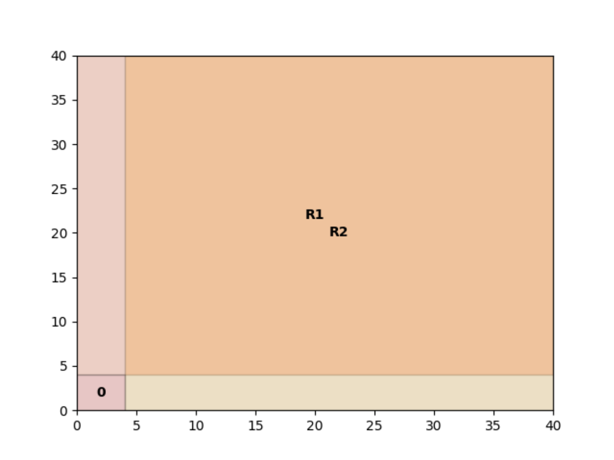
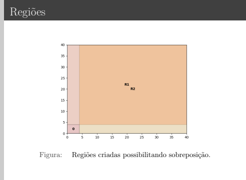


Figura: Regiões criadas possibilitando sobreposição.

UFSC



No último modo nenhuma linha é traçada, todas as regiões vão até o final do recipiente. Nesse caso sobreposições de peças podem ocorrer, então verificações são necessárias para cumprir a restrição 2. Teoricamente ao permitir sobreposições possibilita que mais peças sejam alocadas. Esse modo foi criado justamente para verificar isso e qual seu custo.

Testes

- 45 instâncias.
  - BKW.
  - GCUT.
  - NGCUT.
  - OF.
  - OKP.
- 5 testes por configuração.
- $45 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 9000$ execuções.
- ± 5 horas.

Testes
- 45 instâncias.
  - BKW.
  - GCUT.
  - NGCUT.
  - OF.
  - OKP.
- 5 testes por configuração.
- $45 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 9000$ execuções.
- ± 5 horas.

Para testar os métodos de solução criados foram usados 5 conjuntos de instâncias: BKW, GCUT, NGCUT, OF e OKP, totalizando 45 instâncias de teste.
Cada método foi executado 5 vezes em cada uma das instâncias para se obter um média, também foi calculado a mediana e desvio padrão.
Como temos 45 instâncias, 5 critérios de ordenação, cada critério pode ser crescente ou decrescente, 4 formas de criar regiões e cada uma dessas combinações foi executada 5 vezes, temos o total de 9000 execuções.
O tempo somado de todas as execuções foi de aproximadamente 5 horas (valor que ainda será alterado, pois falta rodar a maior instância com o método de solução mais demorado).

Comparativo

Ordenação

Tabela: Comparativo entre ordenação crescente e decrescente.

Descending	Wons	Draws	Quality %	Items %	Time (s)
F	167	8	57.306	47.6518	2.37153
T	736	8	78.9136	46.3642	1.77985

Comparativo
Ordenação
Tabela: Comparativo entre ordenação crescente e decrescente.
Descending Wons Draws Quality % Items % Time (s)
F 167 8 57.306 47.6518 2.37153
T 736 8 78.9136 46.3642 1.77985

A primeira coisa que fica evidente com os resultados é discrepância na qualidade de solução entre a ordenação crescente e a decrescente, algo já esperado.

Comparativo

Ordenação

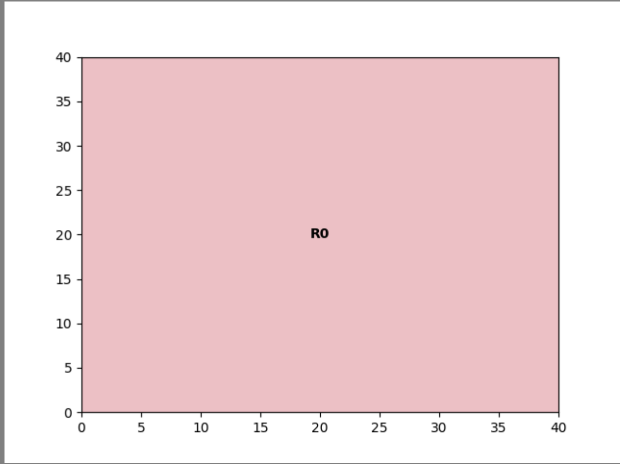
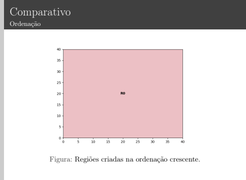


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.



Isso se deve a como as regiões são criadas, as figuras mostram o caso para ordenação crescente com a altura como critério e linha horizontal para criar a região.

Comparativo

Ordenação

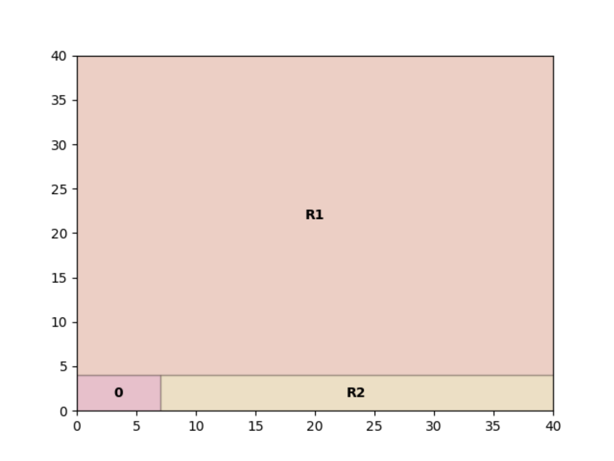
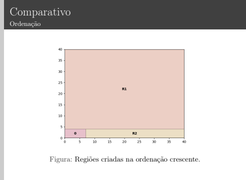


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.



Ao posicionar uma peça uma das regiões ficará com a mesma altura do item recém-posicionado, como a ordenação é crescente a próxima peça terá no mínimo a mesma altura, mas o provável é que seja mais alta, impossibilitando que seja alocada nessa região.

Comparativo

Ordenação

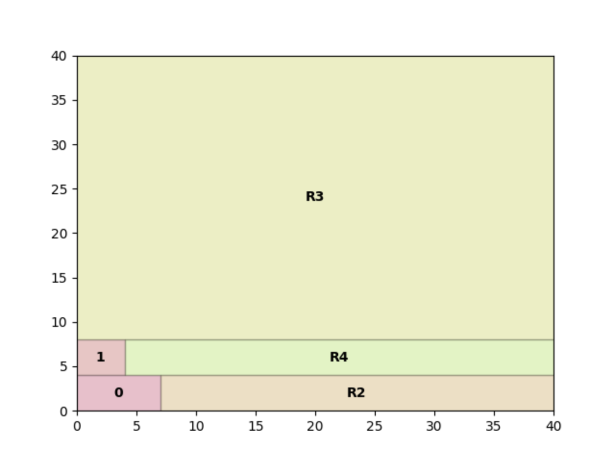
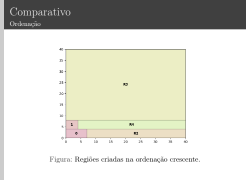


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.



Fazendo com que muitas regiões fiquem sem poder receber peças.

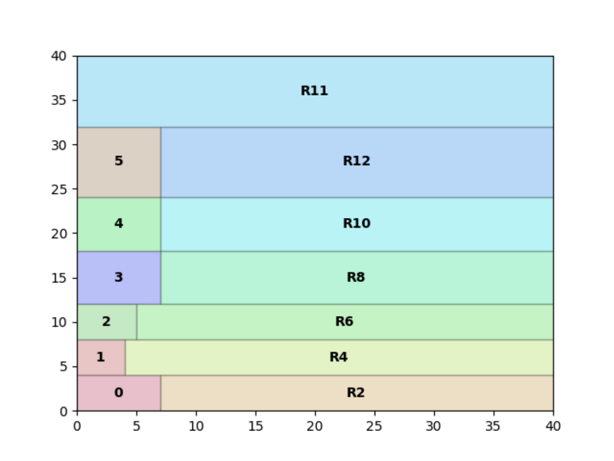
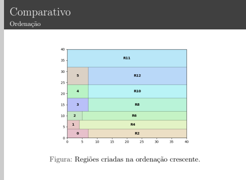


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.



Essa figura mostra o estado final do modelo e grande parte do espaço ainda está livre. Algo semelhante ocorre com outros critérios de ordenação e criação regiões.

Comparativo

Regiões

Tabela: Comparativo entre criação de regiões.

SplitMode	Wons	Draws	Quality %	Items %	Time (s)
V	155	102	65.0025	45.6288	0.00243109
H	122	101	63.0163	44.1025	0.00723233
M	189	158	69.5409	48.7214	0.0133133
N	334	195	73.3659	48.5347	8.23366

Comparativo
Regiões
Tabela: Comparativo entre criação de regiões.
SplitMode Wons Draws Quality % Items % Time (s)
V 155 102 65.0025 45.6288 0.00243109
H 122 101 63.0163 44.1025 0.00723233
M 189 158 69.5409 48.7214 0.0133133
N 334 195 73.3659 48.5347 8.23366

Indo para o comparativo entre regiões percebemos que a que permite sobreposições se saiu melhor, tanto em quantidade como em qualidade, porém com um custo autíssimo de tempo. Regiões criadas com linhas verticais e horizontais foram mais rápidas, mas com soluções de pior qualidade. Enquanto maximizando as regiões criadas levou um pouco a mais de tempo, mas também com acréscimo na qualidade. Ter sobreposição demora em torno de 1000 vezes mais. Mas por que tanta diferença entre com e sem sobreposição?

Comparativo

Regiões

- Sem sobreposição: $R = O\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)$.
- Com sobreposição: $R = O\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right), S = O\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i-1)\right)$.

  $n = 3152 \rightarrow S = 10\,438\,481\,552$.

Comparativo
Regiões
- Sem sobreposição: $R = O\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)$.
- Com sobreposição: $R = O\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right), S = O\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i-1)\right)$.
$n = 3152 \rightarrow S = 10\,438\,481\,552$.

Como dito antes, sem sobreposições temos somente que checar se um item cabe em uma região, no pior caso teremos que fazer isso para $(n^2 + n)/2$ regiões. Enquanto com sobreposição, além de ter esse número de regiões, para cada uma delas também será necessário checar possíveis sobreposições com as peças já alocadas, sendo o número de verificações igual o somatório de $i(i-1)$, no pior caso, algo extremamente custoso. Por exemplo, para uma instância com 3152 itens podem ser necessárias mais de 10 bilhões de verificações de sobreposição. Então, aquela diferença de 1000 vezes mais fica ainda maior de acordo com a quantidade de itens a serem alocados.

Conclusão

- Resultados inesperados.
- Múltiplos métodos de solução.

Conclusão

- Resultados inesperados.
- Múltiplos métodos de solução.

Referências

BARTMEYER, Petra Maria et al. Aprendizado por reforço aplicado ao problema de empacotamento de peças irregulares em faixas. **Anais**, 2021. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/directbitstream/455094df-864a-4fad-8a97-c5f59fd3d6ca/3051981.pdf>.

CASTELLUCCI, Pedro Belin. **Consolidation problems in freight transportation systems: mathematical models and algorithms**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/90e7/bd898951e1350c2694478b63fbcde508e189.pdf>.

Referências

BARTMEYER, Petra Maria et al. Aprendizado por reforço aplicado ao problema de empacotamento de peças irregulares em faixas. **Anais**, 2021. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/directbitstream/455094df-864a-4fad-8a97-c5f59fd3d6ca/3051981.pdf>.

CASTELLUCCI, Pedro Belin. **Consolidation problems in freight transportation systems: mathematical models and algorithms**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/90e7/bd898951e1350c2694478b63fbcde508e189.pdf>.