

# Problema de empacotamento de retângulos

avaliação de métodos de solução baseados em *bottom-left*

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro  
Orientador: Pedro Belin Castellucci  
Coorientador: Rafael de Santiago

Universidade Federal de Santa Catarina

23 de junho de 2023



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

Meu nome é Gabriel e hoje vou apresentar uma prévia do meu tcc.

O trabalho trata sobre a avaliação de métodos de solução baseados em *bottom-left* para problema de empacotamento. Ele foi feito sob orientação do professor Pedro e teve coorientação do professor Rafael.

Problema de empacotamento de retângulos  
avaliação de métodos de solução baseados em *bottom-left*

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro  
Orientador: Pedro Belin Castellucci  
Coorientador: Rafael de Santiago

Universidade Federal de Santa Catarina

23 de junho de 2023



1. Problema
2. *Bottom-left*
3. Resultados
4. Conclusão



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

### └ Sumário

Vou começar explicando alguns termos que devo usar ao longo da apresentação.

Depois vou explicar o problema em si, passando por suas características e classificações.

Vou mostrar o que é *bottom-left*, como ela funciona e as adaptações feitas com base nela.

Também vou mostrar os resultados obtidos ao rodar instâncias de teste.

Por fim, vou apresentar algumas conclusões que podem ser feitas a partir do trabalho.

1. Problema
2. *Bottom-left*
3. Resultados
4. Conclusão

Alocar peças em um espaço.

- Difícil resolução.
- $N$ -dimensional.
- Tipos de peças.
- Classificação.
- Variantes.



└ Problema

└ Problema

Alocar peças em um espaço.

- Difícil resolução.
- $N$ -dimensional.
- Tipos de peças.
- Classificação.
- Variantes.

A premissa do problema é simples, alocar peças em um espaço. Pode parecer algo bobo de resolver, mas é de difícil resolução já que pode possuir  $N$ -dimensões e diversos tipos de peças, de modo que é preciso separar o problema em diferentes classes e ainda existem variantes dentro das classificações.

# Problema

$N$ -dimensões

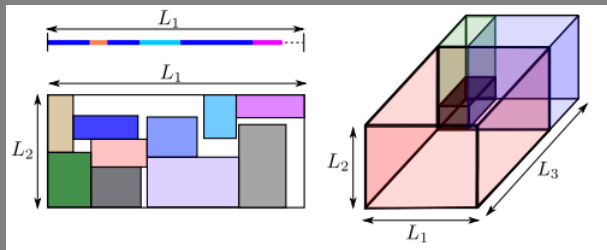


Figura: Representação 1D, 2D e 3D.

Fonte: CASTELLUCCI (2019).



2023-06-23

Problema de empacotamento de retângulos

└ Problema

└ N-dimensões

└ Problema

Problema  
N-dimensões

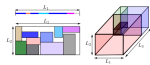


Figura: Representação 1D, 2D e 3D.

Fonte: CASTELLUCCI (2019).

Como eu disse, o problema pode ter  $N$ -dimensões, aqui vou citar alguns exemplos.

- O caso 1D pode ser usado para empilhar caixas de mesma profundidade e largura.
- Já no 2D poderia ser aplicado em casos onde somente a profundidade é fixa.
- E o 3D seria alocar caixas em um depósito ou container.
- O trabalho se concentra somente no caso 2D.

# Problema

## Restrições

2023-06-23

- Problema de empacotamento de retângulos
  - Problema
    - Restrições
      - Problema

Problema
Restrições
$x_i \in \{0, \dots, W - w_i\}, y_i \in \{0, \dots, H - h_i\} \quad (i \in \mathcal{I}')$
$[x_i, x_i + w_i] \cap [x_j, x_j + w_j] = \emptyset \text{ ou } [y_i, y_i + h_i] \cap [y_j, y_j + h_j] = \emptyset \quad (i, j \in \mathcal{I}', i \neq j)$

$$x_i \in \{0, \dots, W - w_i\}, y_i \in \{0, \dots, H - h_i\} \quad (i \in \mathcal{I}') \tag{1}$$
$$[x_i, x_i + w_i] \cap [x_j, x_j + w_j] = \emptyset \text{ ou } [y_i, y_i + h_i] \cap [y_j, y_j + h_j] = \emptyset \quad (i, j \in \mathcal{I}', i \neq j) \tag{2}$$

Como já definimos a dimensão do problema, podemos ver as restrições do modelo.

A primeira restrição garante que um item só é alocado no recipiente se couber nele.

Já a segunda impede sobreposição entre as peças.



# Problema

## Classificação

- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.
- Empacotamento em caixas.
- Empacotamento ortogonal.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

- └ Problema
  - └ Classificação
    - └ Problema

Problema  
Classificação

- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.
- Empacotamento em caixas.
- Empacotamento ortogonal.

- Empacotamento em faixa: Dado um conjunto de itens e uma caixa com comprimento fixo, queremos encontrar uma solução de altura mínima.
- Empacotamento da mochila: Nesse caso, queremos maximizar o valor da caixa (geralmente é a área da caixa).
- Empacotamento em caixas: Minimizar o número de caixas necessárias para empacotar todos os itens.
- Empacotamento ortogonal: Alocar todos os itens numa caixa.
- Todas classificações do problema são NP-difícil, com exceção da ortogonal (NP-completo)(IORI; LIMA et al., 2022).

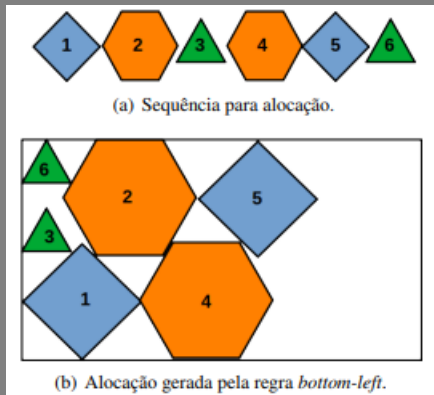


Figura: Representação de alocação.

Fonte:(BARTMEYER et al., 2021)



2023-06-23

Problema de empacotamento de retângulos

└ *Bottom-left*

└ *Bottom-left*

Bottom-left

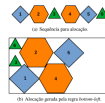


Figura: Representação de alocação.  
Fonte:(BARTMEYER et al., 2021)

Como o problema é NP-difícil uma heurística será usada e a *bottom-left* foi a escolhida.

Ela é bem simples, dado uma lista como entrada, os itens são retirados um a um e posicionados no ponto mais a baixo a mais a esquerda quanto for possível.

Caso a peça não caiba em nenhuma posição ela não entra na solução e passa-se para a próxima da fila.

Aqui fica claro que a sequência de alocação tem impacto direto na qualidade da solução e é um ponto a ser resolvido. Mas como definir essa ordenação? Existe algum critério que se sobressai dos demais?

- Área.
- Perímetro.
- Largura.
- Altura.
- Id.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Critérios de ordenação

└ Bottom-left

Bottom-left  
Critérios de ordenação

- Área.
- Perímetro.
- Largura.
- Altura.
- Id.

A partir desse ponto começa de fato o desenvolvimento do trabalho.

5 critérios de ordenação foram escolhidos: área, perímetro, largura, altura e id.

A ordenação por id considera a ordem em que os itens foram colocados na lista (ou criados), ou seja, seria a forma padrão de resolver.

Cada critério pode ser usado de forma crescente ou decrescente. Com os critérios definidos, podemos passar para os próximos pontos do problema, que são a sobreposição e o domínio infinito.



# Bottom-left

Sobreposição e domínio infinito

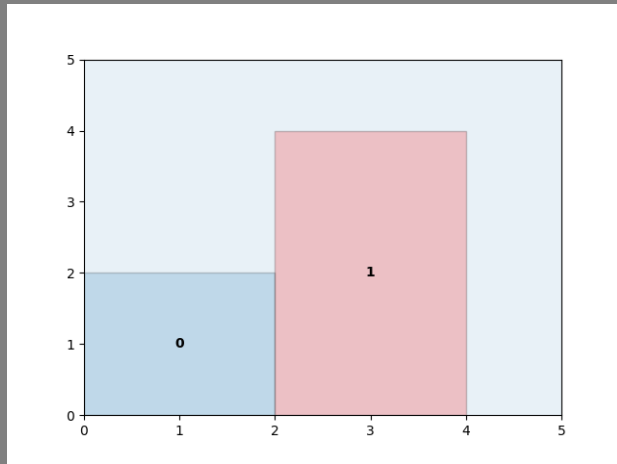


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



2023-06-23

Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Sobreposição e domínio contínuo

└ Bottom-left

Bottom-left  
Sobreposição e domínio infinito

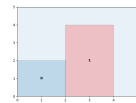


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.

Supondo que estejamos em um estado do modelo como mostra a figura, onde o item 0 foi o primeiro alocado e o item 1 foi alocado a sua direita na posição (2, 0), porque não cabia logo acima na posição (0, 2) devido a Restrição 1.

# Bottom-left

Sobreposição e domínio infinito

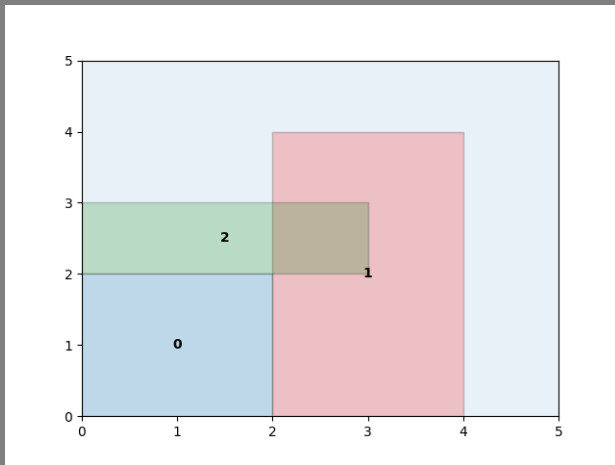


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Sobreposição e domínio contínuo

└ Bottom-left

Bottom-left  
Sobreposição e domínio infinito

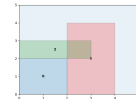


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.

Agora queremos alocar um terceiro item de largura 3 e altura 1. Ao posicionar a peça na posição (0, 2) percebe-se que a Restrição 1 é satisfeita, porém a Restrição 2 não.

# Bottom-left

Sobreposição e domínio infinito

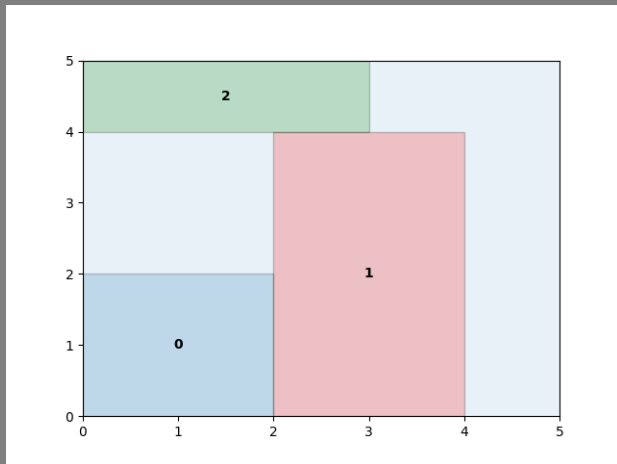


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Sobreposição e domínio contínuo

└ Bottom-left

Bottom-left  
Sobreposição e domínio infinito

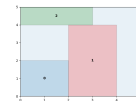


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.

Nesse caso, com poucas peças, com caixa pequena e um auxílio visual é fácil dizer que a posição  $(0, 4)$  é válida, mas como chegar até ela? Existem infinitos pontos entre as coordenadas  $(0, 2)$  e  $(0, 4)$ .

*Bottom-left*

## Sobreposição e domínio infinito

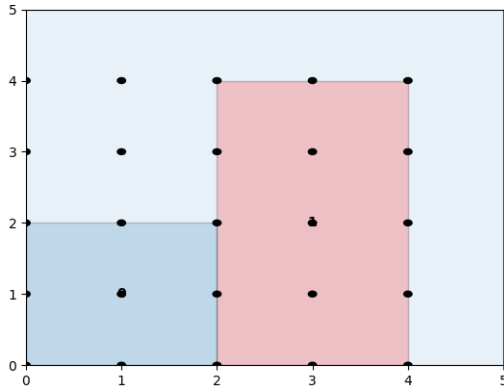


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



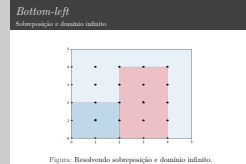
2023-06-23

# Problema de empacotamento de retângulos

└ *Bottom-left*

## └ Sobreposição e domínio contínuo

└ *Bottom-left*



Como todas as instâncias tratam somente de peças e recipientes com valores inteiros uma abordagem possível seria discretizar o domínio.

# Bottom-left

Sobreposição e domínio infinito

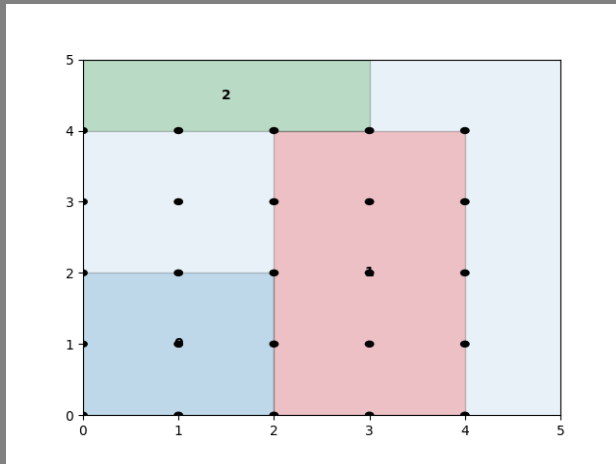


Figura: Resolvendo sobreposição e domínio infinito.



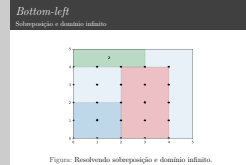
2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Sobreposição e domínio contínuo

└ Bottom-left



Dessa forma somente coordenadas de valores inteiros precisariam ser checadas, resolvendo parcialmente o problema com o domínio, já que ainda temos muitos pontos para checar, principalmente em instâncias grandes. Mas isso não resolve a parte de sobreposição. Para cada ponto ainda é necessário verificar se existe sobreposição com cada uma das peças já alocadas, algo extremamente custoso. Além disso, a discretização não funcionaria tão bem em casos diferentes, com valores não inteiros, prejudicando a aplicação em vários problemas do mundo real.

Bottom-left  
Regiões

Tabela: Resumo das regiões.

Modo	Divisão	Restrição 2	Tipo
1	Vertical	Trivial	Simples
2	Horizontal	Trivial	Simples
3	Maior área	Trivial	Simples
4	Regiões sobrepostas	Não trivial	Complexas

Tabela: Resumo das regiões.

Modo	Divisão	Restrição 2	Tipo
1	Vertical	Trivial	Simples
2	Horizontal	Trivial	Simples
3	Maior área	Trivial	Simples
4	Regiões sobrepostas	Não trivial	Complexas

Ambos os problemas, de sobreposição e de domínio infinito, podem ser resolvidos utilizando a estratégia de criação de regiões. Utilizando essa técnica é possível ignorar a Restrição 2. Nela, ao posicionar uma peça, duas regiões são criadas e o item seguinte somente será posicionado se couber em uma dessas regiões. O domínio passa a ser somente o canto inferior esquerdo de cada uma das regiões e sobreposições não são mais possíveis. Além disso, a regra para definir se uma peça cabe em dada região é igual a Restrição 1, tornando o algoritmo de solução bem simples. Escolhi criar as regiões de 4 formas diferentes, para identificar se isso teria algum impacto na solução.



# Bottom-left

## Regiões

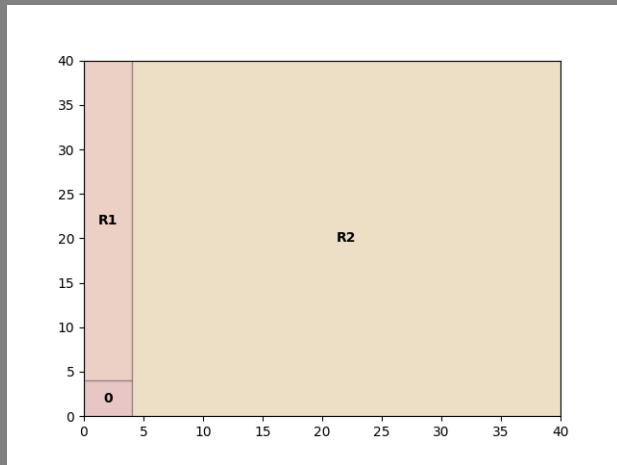


Figura: Regiões criadas traçando uma linha vertical.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Regiões

└ Bottom-left

Bottom-left  
Regiões

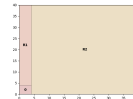


Figura: Regiões criadas traçando uma linha vertical.

A primeira é traçando uma linha vertical a partir do canto superior direito de cada peça alocada. Nas figuras, retângulos indicados com um R no começo são regiões.

# Bottom-left

Regiões

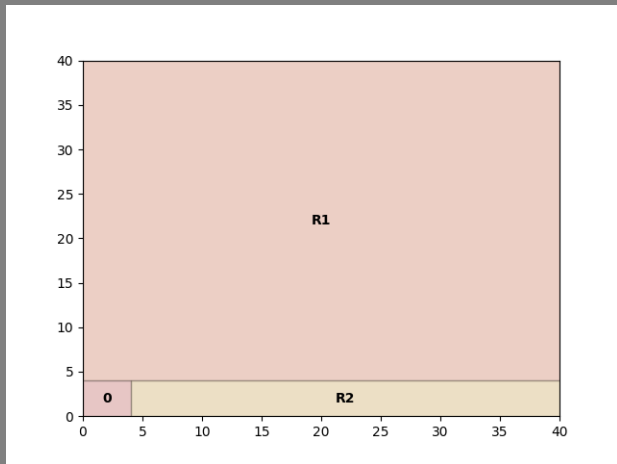


Figura: Regiões criadas traçando uma linha horizontal.



2023-06-23

Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Regiões

└ Bottom-left

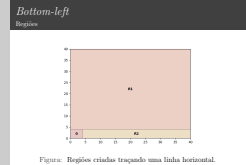


Figura: Regiões criadas traçando uma linha horizontal.

A segunda é igual a primeira, porém usando uma linha horizontal.



# Bottom-left

## Regiões

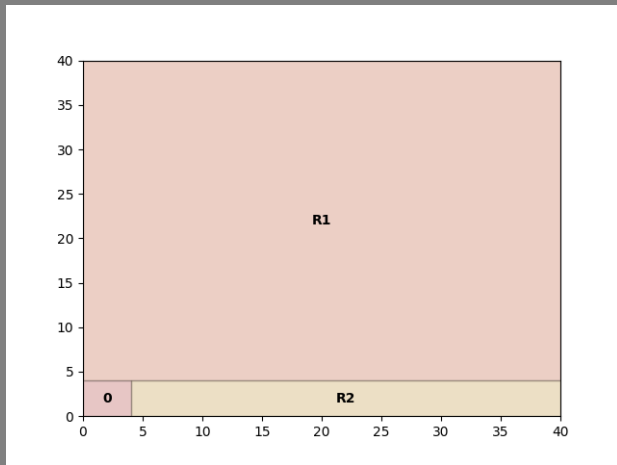


Figura: Regiões criadas maximizando uma das regiões.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Regiões

└ Bottom-left

Bottom-left  
Regiões

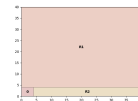


Figura: Regiões criadas maximizando uma das regiões.

Já na terceira é traçada uma linha (vertical ou horizontal) que maximize a área de uma das regiões geradas, basicamente identifica qual dos dois primeiros métodos gera a maior área. Isso é interessante pois dá uma garantia maior de que o item seguinte será alocado, em contrapartida pode gerar muitas regiões pequenas que podem não ser utilizadas, diminuindo a qualidade da solução.

# Bottom-left

## Regiões

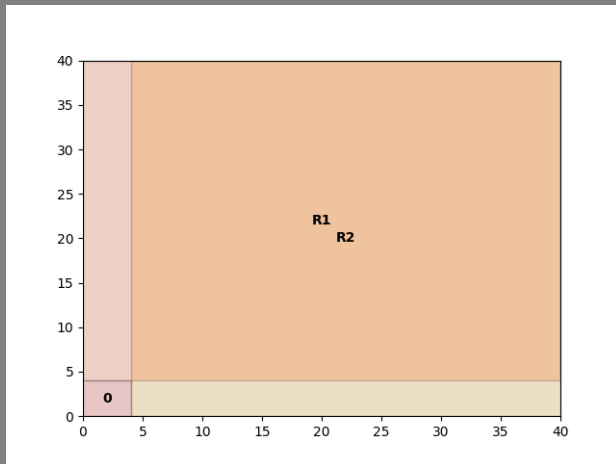


Figura: Regiões criadas possibilitando sobreposição.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Regiões

└ Bottom-left

Bottom-left  
Regiões

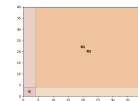


Figura: Regiões criadas possibilitando sobreposição.

No último modo nenhuma linha é traçada, todas as regiões vão até o final do recipiente. Nesse caso sobreposições de peças podem ocorrer, então verificações são necessárias para cumprir a Restrição 2. Teoricamente ao permitir sobreposições possibilita que mais peças sejam alocadas. Esse modo foi criado justamente para verificar isso e qual seu custo.

Tabela: Resumo das regiões.

Modo	Divisão	Restrição 2	Tipo
1	Vertical	Trivial	Simples
2	Horizontal	Trivial	Simples
3	Maior área	Trivial	Simples
4	Regiões sobrepostas	Não trivial	Complexas

Bottom-left  
Regiões

Tabela: Resumo das regiões.

Modo	Divisão	Restrição 2	Tipo
1	Vertical	Trivial	Simples
2	Horizontal	Trivial	Simples
3	Maior área	Trivial	Simples
4	Regiões sobrepostas	Não trivial	Complexas



- 45 instâncias.
  - BKW.
  - GCUT.
  - NGCUT.
  - OF.
  - OKP.
- 5 testes por configuração.
- $45 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 9000$  execuções.
- $\pm 5$  horas.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Bottom-left

└ Testes

└ Bottom-left

Bottom-left  
Testes

- 45 instâncias.
  - BKW.
  - GCUT.
  - NGCUT.
  - OF.
  - OKP.
- 5 testes por configuração.
- $45 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 9000$  execuções.
- $\pm 5$  horas.

Para testar os métodos de solução criados foram usados 5 conjuntos de instâncias: BKW, GCUT, NGCUT, OF e OKP, totalizando 45 instâncias de teste.

Cada método foi executado 5 vezes em cada uma das instâncias para se obter uma média, também foi calculado a mediana e desvio padrão.

Como temos 45 instâncias, 5 critérios de ordenação, cada critério pode ser crescente ou decrescente, 4 formas de criar regiões e cada uma dessas combinações foi executada 5 vezes, temos o total de 9000 execuções.

O tempo somado de todas as execuções foi de aproximadamente 5 horas (valor que ainda será alterado, pois falta rodar a maior instância com o método de solução mais demorado).

Resultados

Ordenação

Tabela: Comparativo entre ordenação crescente e decrescente.

Decrescente	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Sim	736	8	78.9136	1.7798e+00
Não	167	8	57.3060	2.3715e+00

Tabela: Comparativo entre ordenação crescente e decrescente.

Decrescente	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Sim	736	8	78.9136	1.7798e+00
Não	167	8	57.3060	2.3715e+00

A primeira coisa que fica evidente com os resultados é discrepância na qualidade de solução entre a ordenação crescente e a decrescente, algo já esperado.



# Resultados

## Ordenação

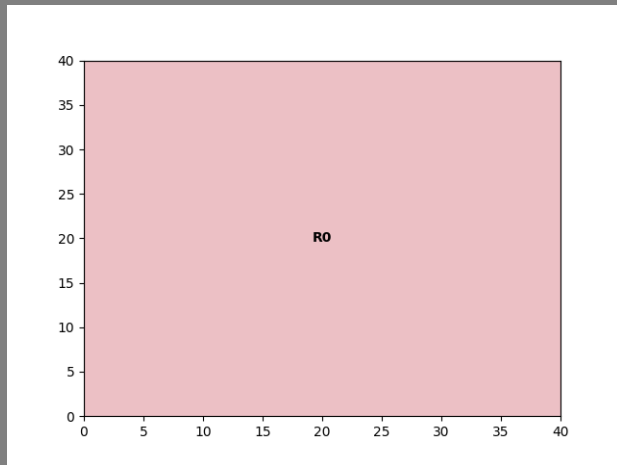


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Resultados

└ Comparativo - Ordenação

└ Resultados

Resultados  
Ordenação

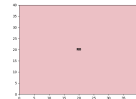


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.

Isso se deve a como as regiões são criadas, as figuras mostram o caso para ordenação crescente com a altura como critério e linha horizontal para criar a região.

# Resultados

## Ordenação

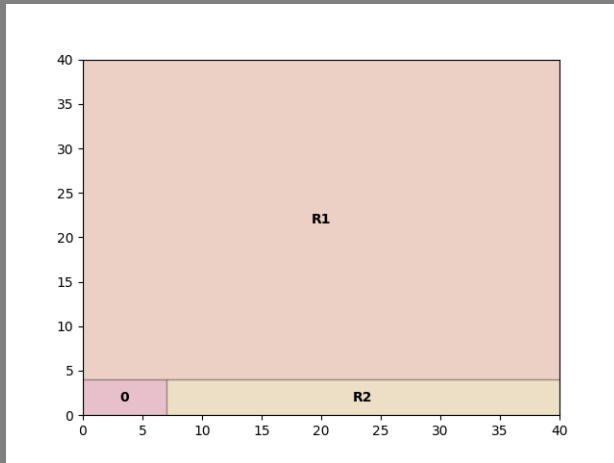


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Resultados

└ Comparativo - Ordenação

└ Resultados

Resultados  
Ordenação

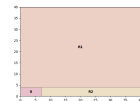


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.

Ao posicionar uma peça uma das regiões ficará com a mesma altura do item recém-posicionado, como a ordenação é crescente a próxima peça terá no mínimo a mesma altura, mas o provável é que seja mais alta, impossibilitando que seja alocada nessa região.

# Resultados

## Ordenação

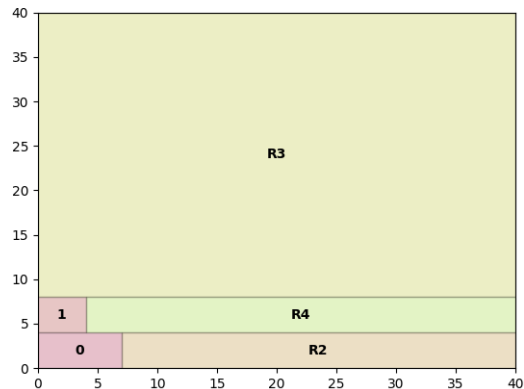


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└ Resultados

└ Comparativo - Ordenação

└ Resultados

Resultados  
Ordenação

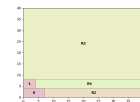


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.

Fazendo com que muitas regiões fiquem sem poder receber peças.



# Resultados

## Ordenação

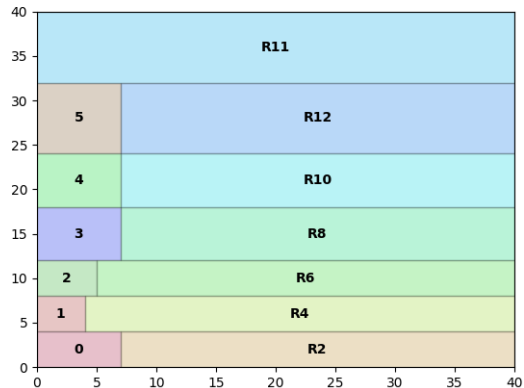


Figura: Regiões criadas na ordenação crescente.



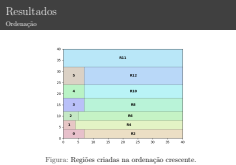
2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

### Resultados

#### Comparativo - Ordenação

#### Resultados



Essa figura mostra o estado final do modelo e grande parte do espaço ainda está livre. Algo semelhante ocorre com outros critérios de ordenação e criação regiões.

Resultados

Critérios de ordenação

Tabela: Resultado para os critérios de ordenação.

Ordenação	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Área	63	39	82.7353	1.5874e+00
Perímetro	71	38	84.6986	1.5769e+00
Altura	40	16	77.4182	1.5655e+00
Largura	66	24	81.1899	2.0805e+00
Id	16	5	68.5261	2.0889e+00

Tabela: Resultado para os critérios de ordenção.

Ordenação	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Área	63	39	82.7353	1.5874e+00
Perímetro	71	38	84.6986	1.5769e+00
Altura	40	16	77.4182	1.5655e+00
Largura	66	24	81.1899	2.0805e+00
Id	16	5	68.5261	2.0889e+00

Os próximos resultados consideram somente os casos com ordenação decrescente, já que se fosse considerado a ordenação crescente faria com que a média ficasse abaixo do resultado real, além de poder causar interpretações erradas na coluna de quantidade de vitórias. Aqui fica claro que ter algum critério de ordenação melhora e muito na solução, já que ordenar por ID teve um péssimo desempenho. Mas o curioso é que todos os demais critérios são competitivos entre si. A literatura em geral usa somente ordenação pela área, esses resultados podem indicar que algumas instâncias possuem características que torne mais interessante outro método de ordenação.



Resultados

Regiões

Tabela: Comparativo entre criação de regiões.

Divisão	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Vertical	98	79	76.4030	2.7157e-03
Horizontal	70	60	75.9970	6.2101e-03
Maior área	104	89	79.7175	1.3743e-02
Sobrepostas	176	119	83.6420	7.2176e+00

Tabela: Comparativo entre criação de regiões.

Divisão	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Vertical	98	79	76.4030	2.7157e-03
Horizontal	70	60	75.9970	6.2101e-03
Maior área	104	89	79.7175	1.3743e-02
Sobrepostas	176	119	83.6420	7.2176e+00

Indo para o comparativo entre regiões percebemos que a que permite sobreposições se saiu melhor, tanto em quantidade como em qualidade, ainda que na maioria dos casos não foi a única que encontrou a melhor solução, porém com um custo autíssimo de tempo. Regiões criadas com linhas verticais e horizontais foram mais rápidas, mas com soluções de pior qualidade. Enquanto maximizando as regiões criadas levou um pouco a mais de tempo, mas também com acréscimo na qualidade. Aqui a gente percebe que ter sobreposição demora em torno de 1000 vezes mais. Mas por que tanta diferença entre com e sem sobreposição?



- Sem sobreposição:  $R = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right)$ .
- Com sobreposição:  $R = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right), S = O\left(\frac{n^3 - n}{3}\right)$ .  
 $n = 3152 \rightarrow R = 4\,969\,128, S = 10\,438\,481\,552$ .

- Sem sobreposição:  $R = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right)$ .
- Com sobreposição:  $R = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right), S = O\left(\frac{n^3 - n}{3}\right)$ .  
 $n = 3152 \rightarrow R = 4\,969\,128, S = 10\,438\,481\,552$ .

Como dito antes, sem sobreposições temos somente que checar se um item cabe em uma região, no pior caso teremos que fazer isso para  $(n^2 + n)/2$  regiões. Enquanto com sobreposição, além de ter esse número de regiões, para cada uma delas também é necessário checar possíveis sobreposições com as peças já alocadas, sendo o número de verificações igual o somatório de  $(n^3 - n)/3$ , isso no pior caso, algo extremamente custoso. Por exemplo, para uma instância com 3152 itens podem ser necessárias mais de 10 bilhões de verificações de sobreposição. Então, aquela diferença de 1000 vezes fica ainda maior de acordo com a quantidade de itens a serem alocados.

# Resultados

Melhores combinações de solução

Tabela: Resultados da comparação entre todas combinações.

R	O	Desc.	W	D	Quality %	Time (s)
V	W	T	9	8	84.5497	2.4820e-03
M	P	T	7	6	85.8682	1.2944e-02
N	A	T	13	11	87.2957	6.4349e+00
N	W	T	16	10	85.9266	8.4384e+00



2023-06-23

- Problema de empacotamento de retângulos
  - Resultados
    - Comparativo - Ordenação
      - Resultados

Resultados

Melhores combinações de solução

Tabela: Resultados da comparação entre todas combinações.

R	O	Desc.	W	D	Quality %	Time (s)
V	W	T	9	8	84.5497	2.4820e-03
M	P	T	7	6	85.8682	1.2944e-02
N	A	T	13	11	87.2957	6.4349e+00
N	W	T	16	10	85.9266	8.4384e+00

Aqui eu mostro uma tabela com os resultados das combinações que se saíram melhores. Em termos de quantidade, quem se saiu melhor foi a criação de regiões com sobreposição, com a largura como critério de ordenação. Já em qualidade o melhor resultado foi obtido com sobreposição e ordenação por área. A maximização de regiões e ordenação por perímetro ficou bem próxima, ainda mais consirando o custo-benefício. A primeira linha da tabela mostra a combinação entre a criação de regiões na vertical e ordenação pela largura, esse resultado é bem interessante pois têm um dos menores tempos e ainda consegue ser competitivo tanto em qualidade quanto em quantidade.

Resultados

Sobreposição

Tabela: Resultados para sobreposição.

Superposição	Qualidade %	Tempo Total (s)
Não	90.8278	1.6299e+01
Sim	87.2957	2.8313e+02

Tabela: Resultados para sobreposição.

Superposição	Qualidade %	Tempo Total (s)
Não	90.8278	1.6299e+01
Sim	87.2957	2.8313e+02

Na última tabela eu trouxe os números da comparação entre regiões com e sem sobreposição. Na primeira linha temos os resultados de todas as combinações possíveis com regiões sem sobreposição e o tempo total que levou para executar todas as instâncias. Já na segunda linha somente o critério de ordenação pela área foi considerado, já que obtive os melhores resultados. Os demais critérios não foram considerados pois esse sozinho já ultrapassa o tempo de todos os métodos sem sobreposição, caso fossem considerados o tempo total seria cerca de 10 vezes maior enquanto a qualidade teria pouco acréscimo.

Aqui fica nítido que compensa muito mais, tanto em qualidade quanto em tempo, rodar todas as combinações possíveis com regiões sem sobreposição e escolher o melhor resultado.



- Múltiplos métodos de solução.
- Resultados inesperados.
- Com sobreposição  $\times$  sem sobreposição.
  - Escalabilidade.



- Múltiplos métodos de solução.
- Resultados inesperados.
- Com sobreposição  $\times$  sem sobreposição.
  - Escalabilidade.

Bom, indo para as conclusões. Foram testados vários métodos de solução, todos baseados em *bottom-left*, ficou evidente que ordenar a lista de entrada de forma decrescente é vantajoso.

Tivemos alguns resultados inesperados como a competitividade entre todos os critérios de ordenação, sendo necessária uma investigação sobre características das instâncias. E também a pouca, ou nenhuma, vantagem em termos de qualidade quando usamos regiões que permitem sobreposições.

De modo geral, pode-se resolver um problema com todas as combinações que usem regiões sem sobreposição e buscar a de melhor solução, já que seu tempo de execução é pequeno. Resolver usando regiões com sobreposição só é recomendado em casos onde o modelo será usado mais de uma vez e sem alterações.

Por fim, caso se queira aumentar a escala dos problemas, seja na dimensão ou na quantidade de itens, compensa somente trabalhar com regiões sem sobreposição. No caso de aumentar a dimensão seu custo é baixo, sendo necessário verificar somente um parâmetro extra.

ANDOIN, Mikel Garcia de et al. Hybrid quantum-classical heuristic for the bin packing problem. In: PROCEEDINGS of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. [S.l.: s.n.], 2022. p. 2214–2222.

ARENALES, Marcos et al. **Pesquisa Operacional**. [S.l.]: Elsevier, 2007.

BAKER, Brenda S; COFFMAN JR, E G; RIVEST, Ronald L. Orthogonal Packings in Two Dimensions. **SIAM Journal on Computing**, Society for Industrial e Applied Mathematics, v. 9, n. 4, p. 846, 1980.





BARTMEYER, Petra Maria et al. Aprendizado por reforço aplicado ao problema de empacotamento de peças irregulares em faixas. **Anais**, 2021. Disponível em:

<<https://repositorio.usp.br/directbitstream/455094df-864a-4fad-8a97-c5f59fd3d6ca/3051981.pdf>>.

BEASLEY, J E. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 36, n. 4, p. 297–306, 1985.

\_\_\_\_\_. An Exact Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Tree Search Procedure.. **Operations Research**, v. 33, n. 1, 1985.



BELLUZZO, Luciano; MORABITO, Reinaldo. Otimização nos padrões de corte de chapas de fibra de madeira reconstituída: um estudo de caso. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 25, p. 391–415, 2005. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/pope/a/tTXXckvGTHbDfZQkmzCqdkp>>.

BURKE, E K; KENDALL, G; WHITWELL, G. A new placement heuristic for the orthogonal stock-cutting problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 52, n. 4, p. 655–671, 2004.

CALAFIORE, Giuseppe C; EL GHAOU, Laurent. **Optimization models**. [S.l.]: Cambridge university press, 2014.



# Referências IV

CASTELLUCCI, Pedro Belin. **Consolidation problems in freight transportation systems: mathematical models and algorithms**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/90e7/bd898951e1350c2694478b63fbcde508e189.pdf>>.

CAVALI, Roberto. Problemas de corte e empacotamento na indústria de Móveis: um estudo de caso. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2004. Disponível em: <[https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali\\_r\\_me\\_sjrp.pdf](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali_r_me_sjrp.pdf)>.

CHEHRAZAD, Sahar; ROOSE, Dirk; WAUTERS, Tony. A fast and scalable bottom-left-fill algorithm to solve nesting problems using a semi-discrete representation. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 300, n. 3, p. 809–826, 2022



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

### └─ Conclusão

### └─ Referências

CASTELLUCCI, Pedro Belin. **Consolidation problems in freight transportation systems: mathematical models and algorithms**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/90e7/bd898951e1350c2694478b63fbcde508e189.pdf>>.

CAVALI, Roberto. Problemas de corte e empacotamento na indústria de Móveis: um estudo de caso. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2004. Disponível em: <[https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali\\_r\\_me\\_sjrp.pdf](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali_r_me_sjrp.pdf)>.

CHEHRAZAD, Sahar; ROOSE, Dirk; WAUTERS, Tony. A fast and scalable bottom-left-fill algorithm to solve nesting problems using a semi-discrete representation. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 300, n. 3, p. 809–826, 2022.

CHEN, Mao et al. An efficient deterministic heuristic algorithm for the rectangular packing problem. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 137, p. 106097, 2019.

CINTRA, G F et al. Algorithms for two-dimensional cutting stock and strip packing problems using dynamic programming and column generation q. **European Journal of Operational Research**, v. 191, p. 61–85, 2008.

CÔTÉ, Jean-François; DELL’AMICO, Mauro; IORI, Manuel. Combinatorial Benders’ cuts for the strip packing problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 62, n. 3, p. 643–661, 2014.



DELORME, Maxence; IORI, Manuel; MARTELLO, Silvano. Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 255, n. 1, p. 1–20, 2016.

\_\_\_\_\_. Logic based Benders' decomposition for orthogonal stock cutting problems. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 78, p. 290–298, 2017.

DYCKHOFF, Harald. A typology of cutting and packing problems. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 145–159, 1990.



DELORME, Maxence; IORI, Manuel; MARTELLO, Silvano. Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 255, n. 1, p. 1–20, 2016.

\_\_\_\_\_. Logic based Benders' decomposition for orthogonal stock cutting problems. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 78, p. 290–298, 2017.

DYCKHOFF, Harald. A typology of cutting and packing problems. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 145–159, 1990.

# Referências VII

FEKETE, Sándor P; SCHEPERS, Jörg. A new exact algorithm for general orthogonal d-dimensional knapsack problems. In: SPRINGER. ALGORITHMS—ESA'97: 5th Annual European Symposium Graz, Austria, September 15–17, 1997 Proceedings 5. [S.l.: s.n.], 1997. p. 144–156.

FIRAT, Hüseyin; ALPASLAN, Nuh. An effective approach to the two-dimensional rectangular packing problem in the manufacturing industry. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 148, p. 106687, 2020.

FUJIMURA, Toru. Quantum Algorithm for Bin-Packing Problem by Quarter Method. **Global Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 17, n. 1, p. 9–15, 2021.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└─ Conclusão

└─ Referências

FEKETE, Sándor P; SCHEPERS, Jörg. A new exact algorithm for general orthogonal d-dimensional knapsack problems. In: SPRINGER. ALGORITHMS—ESA'97: 5th Annual European Symposium Graz, Austria, September 15–17, 1997 Proceedings 5. [S.l.: s.n.], 1997. p. 144–156.

FIRAT, Hüseyin; ALPASLAN, Nuh. An effective approach to the two-dimensional rectangular packing problem in the manufacturing industry. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 148, p. 106687, 2020.

FUJIMURA, Toru. Quantum Algorithm for Bin-Packing Problem by Quarter Method. **Global Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 17, n. 1, p. 9–15, 2021.

FURINI, Fabio; MALAGUTI, Enrico; THOMOPULOS, Dimitri. Modeling two-dimensional guillotine cutting problems via integer programming. **INFORMS Journal on Computing**, INFORMS, v. 28, n. 4, p. 736–751, 2016.

HILLIER, Frederick S. Introduction to operations research. 1967.

HOPPER, E B C H; TURTON, Brian C H. An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2D packing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 128, n. 1, p. 34–57, 2001.

HOPPER, Eva; TURTON, Brian CH. A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2D strip packing problems. **Artificial Intelligence Review**, Springer, v. 16, p. 257–300, 2001.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└─ Conclusão

└─ Referências

FURINI, Fabio; MALAGUTI, Enrico; THOMOPULOS, Dimitri. Modeling two-dimensional guillotine cutting problems via integer programming. **INFORMS Journal on Computing**, INFORMS, v. 28, n. 4, p. 736–751, 2016.

HILLIER, Frederick S. Introduction to operations research. 1967.

HOPPER, E B C H; TURTON, Brian C H. An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2D packing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 128, n. 1, p. 34–57, 2001.

HOPPER, Eva; TURTON, Brian CH. A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2D strip packing problems. **Artificial Intelligence Review**, Springer, v. 16, p. 257–300, 2001.

HUANG, Wenqi; CHEN, Duanbing. An efficient heuristic algorithm for rectangle-packing problem. **Simulation Modelling Practice and Theory**, Elsevier, v. 15, n. 10, p. 1356–1365, 2007.

IORI, Manuel; DE LIMA, Vinícius L. et al. Exact solution techniques for two-dimensional cutting and packing. **European Journal of Operational Research**, v. 289, n. 2, p. 399–415, 2021. ISSN 0377-2217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.06.050>. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221720306111>>.

IORI, Manuel; LIMA, Vinícius Loti de et al. 2DPackLib: a two-dimensional cutting and packing library. **Optimization Letters**, Springer, v. 16, n. 2, p. 471–480, 2022.



2023-06-23

Problema de empacotamento de retângulos

└─ Conclusão

└─ Referências



KENMOCHI, Mitsutoshi et al. Exact algorithms for the two-dimensional strip packing problem with and without rotations. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 198, n. 1, p. 73–83, 2009.

MARTIN, Mateus et al. Models for the two-dimensional rectangular single large placement problem with guillotine cuts and constrained pattern. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 27, n. 2, p. 767–793, 2020.

MERCA, Mircea. An alternative to Faulhaber’s formula. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 122, n. 6, p. 599–601, 2015.



MICHALEWICZ, Zbigniew; FOGEL, David B. **How to solve it: modern heuristics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

MORABITO NETO, Reinaldo; WIDMER, Joao Alexandre. **Abordagem em grafo-e-ou para o problema do empacotamento: aplicacao ao carregamento de paletes e containeres**. 1992. Tese (Doutorado). Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/item/000734666>>.

MRAD, Mehdi. An arc flow-based optimization approach for the two-stage guillotine strip cutting problem. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 66, n. 11, p. 1850–1859, 2015.



2023-06-23

Problema de empacotamento de retângulos

└─ Conclusão

└─ Referências

MICHALEWICZ, Zbigniew; FOGEL, David B. **How to solve it: modern heuristics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

MORABITO NETO, Reinaldo; WIDMER, Joao Alexandre.

**Abordagem em grafo-e-ou para o problema do empacotamento: aplicacao ao carregamento de paletes e containeres**. 1992. Tese (Doutorado). Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/item/000734666>>.

MRAD, Mehdi. An arc flow-based optimization approach for the two-stage guillotine strip cutting problem. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 66, n. 11, p. 1850–1859, 2015.

# Referências XII

OLIVEIRA, Jose Fernando; FERREIRA, Jose Soeiro. An improved version of Wang's algorithm for two-dimensional cutting problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 256–266, 1990.

QUEIROZ, Layane Rodrigues de Souza. **Estudo de problemas de corte de itens irregulares com incertezas**. 2022. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-10032022-110656/en.php>>.

RAKOTONIRAINY, Rosephine G; VUUREN, Jan H van. Improved metaheuristics for the two-dimensional strip packing problem. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 92, p. 106268, 2020.



2023-06-23

## Problema de empacotamento de retângulos

└─ Conclusão

└─ Referências

Referências XII

OLIVEIRA, Jose Fernando; FERREIRA, Jose Soeiro. An improved version of Wang's algorithm for two-dimensional cutting problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 256–266, 1990.

QUEIROZ, Layane Rodrigues de Souza. **Estudo de problemas de corte de itens irregulares com incertezas**. 2022. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-10032022-110656/en.php>>.

RAKOTONIRAINY, Rosephine G; VUUREN, Jan H van. Improved metaheuristics for the two-dimensional strip packing problem. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 92, p. 106268, 2020.

SCHEITHAUER, Guntram. **Introduction to cutting and packing optimization: Problems, modeling approaches, solution methods**. [S.l.]: Springer, 2017. v. 263.

SILVA, Lorrany Cristina da; QUEIROZ, Thiago Alves de; TOLEDO, Franklina Maria Bragion de. Integer formulations for the integrated vehicle routing problem with two-dimensional packing constraints. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 42, 2022.

VELASCO, André Soares; UCHOA, Eduardo. Improved state space relaxation for constrained two-dimensional guillotine cutting problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 272, n. 1, p. 106–120, 2019.



2023-06-23

Problema de empacotamento de retângulos

└─ Conclusão

└─ Referências

WÄSCHER, Gerhard; HAUSSNER, Heike; SCHUMANN, Holger. An improved typology of cutting and packing problems. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007.

WEI, Lijun et al. A skyline heuristic for the 2D rectangular packing and strip packing problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 215, n. 2, p. 337–346, 2011.

WOLSEY, Laurence A. **Integer programming**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020.

