UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro

Problemas de Empacotamento: um comparativo entre métodos de solução

Florianópolis, SC
2022

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro

Problemas de Empacotamento

Trabalho de conclusão de curso submetido ao curso de Ciências da Computação da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Bacharel em Ciências da Computação.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Departamento de Informática e Estatística
Ciências da Computação

Orientador: Prof. Dr. Pedro Belin Castellucci
Coorientador: Prof. Dr. Rafael de Santiago

Florianópolis, SC

Resumo

Este trabalho estuda estratégias de otimização para o problema de empacotamento de itens retangulares, com o uso da técnica *bottom-left*. A escolha dessa técnica se deve a dificuldade de usar métodos exatos para resolução em tempo hábil. Algoritmos serão implementados e instâncias de teste serão escolhidas para fins comparativos com os resultados de outros autores.

Palavras-chave: problema de empacotamento, otimização, heurística, pesquisa operacional.

Abstract

This work studies optimization strategies for the packing problem of rectangular items, using the bottom-left technique. The choice of this technique is due to the difficulty of using exact methods for timely resolution. Algorithms will be implemented and test instances will be chosen for comparative purposes with the results of other authors.
Keywords: packing problem, optimization, heuristic, operational research.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Este trabalho visa estudar o Problema de Empacotamento de peças retangulares em uma caixa também retangular no espaço de duas dimensões, sendo sua solução considerada NP-difícil (IORI et al., 2022). Antes de abordar o problema (Capítulo 3) e buscar soluções alguns conceitos básicos são mostrados na Capítulo 2.

O Capítulo 2 foca em definições sobre otimização (seção 2.2) e em modelos de otimização (seção 2.1 e seção 2.3). No Capítulo 3 é dada a definição do problema (seção 3.1), para então mostrar algumas classificações (seção 3.2) e variantes (seção 3.3), por fim é explicada a heurística *bottom-left* (seção 3.4), a qual será utilizada na resolução das instâncias de teste.

O problema tem várias a aplicaações nas indústrias de móveis, têxtil e metal-mecânica (QUEIROZ, 2022; CAVALI, 2004; BELLUZZO; MORABITO, 2005), além ser extramente útil em carregamento de paletes e conteiners (NETO; WIDMER, 1992).

Basicamente, pode-se aplicá-lo em qualquer área que precise de organização ou logística, bem como situações que envolvam o corte de algum material. Ao utilizar soluções para resolver problemas de empacotamento, é possível reduzir o desperdício de materiais e impacto ambiental, diminuir tempo de entregas e otimizar espaços de estoque.

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é estudar e compreender o problema de empacotamento bem como suas aplicações no mundo real. Outros objetivos mais específicos são: revisar a bibliografia, escolher uma heurística, implementar um algoritmo para solucionar o problema, definir instâncias de teste e analisar os dados obtidos e compará-los com os de outros autores.

2 Conceitos Básicos

Antes de estudar o problema, são necessários alguns conceitos básicos e definição formal de termos importantes para a área de Pesquisa Operacional e otimização. Pesquisa Operacional pode ser entendida como o estudo e a aplicação de métodos científicos para tomada de decisões em problemas complexos (ARENALES et al., 2007, p.IX). Ela permite modelar, analisar e solucionar tais problemas de modo, geralmente, satisfatório.

Neste capítulo será mostrado o que são modelos de otimização (seção 2.1) e seus tipos (seção 2.3), além de algumas definições sobre otimização (seção 2.2).

2.1 Modelos de Otimização

Modelos são aproximações de realidade, representam o problema de maneira simples e objetiva, usando restrições. Eles são o que baseiam a Pesquisa Operacional. De forma geral, um modelo de otimização quer minimizar ou maximizar uma função $f(x)$ com x obedecendo algumas restrições. Pode-se então representar o modelo do seguinte modo:

$$\min f(x), x \in \mathcal{X}.$$

Onde

- x: variável de decisão, $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- $\mathcal{X}$: conjunto factível ou domínio, possui todas as soluções possíveis para o problema.
- $f(x)$: função objetivo, a qual determinará o critério de escolha da solução.

2.2 Definições

A seguir serão dadas as definições de quatro expressões que aparecem com frequência no estudo de problemas de otimização.

Uma solução x' é **factível** somente se satisfaz todas as restrições dados ao problema, ou seja, $x' \in \mathcal{X}$. Existem casos onde o problema não tem solução, possivelmente por muitas restrições terem sido aplicadas. Isso é chamado **problema infactível** e $\mathcal{X} = \emptyset$. Se para toda solução for possível encontrar outra melhor o problema é dito **ilimitado**.

Uma solução x' é **ótima** somente se for **factível** e possuir resultado melhor que as demais soluções, isto é, $f(x') \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$ (caso seja um problema de maximização é necessário substituir "$\leq$" por "$\geq$"). Importante observar que existe somente solução ótima se o problema não for infactível nem ilimitado.

2.3 Tipos de Modelo

É importante saber diferenciar os modelos devido ao método de resolução que varia para cada um deles.

2.3.1 Modelo Linear x Não-linear

Modelos lineares possuem como função objetivo uma função linear e todas as restrições também são lineares. Exemplos:

- $f(x) = ax + b$.
- $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 5$.

Já os não-lineares não obedecem essa regra, podendo ter suas variáveis se multiplicando ou funções trigonométricas e logarítmicas. Exemplos:

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.
- $f(x_1, x_2) = \tan(x_1 + x_2)$.

2.3.2 Modelo Contínuo x Discreto

Um modelo é contínuo quando sua região factível é contínua, ou seja, dado um ponto dessa região todos os seus vizinhos também serão uma solução. Modelos discretos não possuem seu domínio contínuo.

2.3.3 Modelo Determinístico x Estocástico

Em modelos determinísticos seus dados são conhecidos, enquanto os estocásticos possuem uma incerteza quanto aos dados.

2.3.4 Tipos de Programação

Com base nas categorias de modelo é possível também dividir métodos de programação (planejamento) para sua solução.

- Linear: modelo linear contínuo determinístico.
- Inteira: modelo linear discreto determinístico.
- Estocástica: modelo linear contínuo estocástico.
- Não-linear: modelo não-linear contínuo determinístico.

2.4 Métodos Exatos x Heurísticas

Métodos exatos sempre vão garantir a solução ótima para o problema, porém encontrar tal solução pode requerer grande tempo e/ou muitos recursos computacionais. Já heurísticas buscam por soluções factíveis e são geralmente usadas em problemas de grande porte.

3 Problema de Empacotamento

O problema de empacotamento, é um problema de otimização de difícil resolução. Seu objetivo é simples, colocar peças em um espaço N-dimensional, na Figura 1 é possível ver representações para os casos 1D, 2D e 3D. Tanto as peças quanto o espaço, podem ser de formato regular (convexo) ou não (côncavo). Pensando no caso 2D, triângulos, retângulos, círculos e outros polígonos convexos são considerados regulares, enquanto estrelas e outros polígonos côncavos são irregulares.

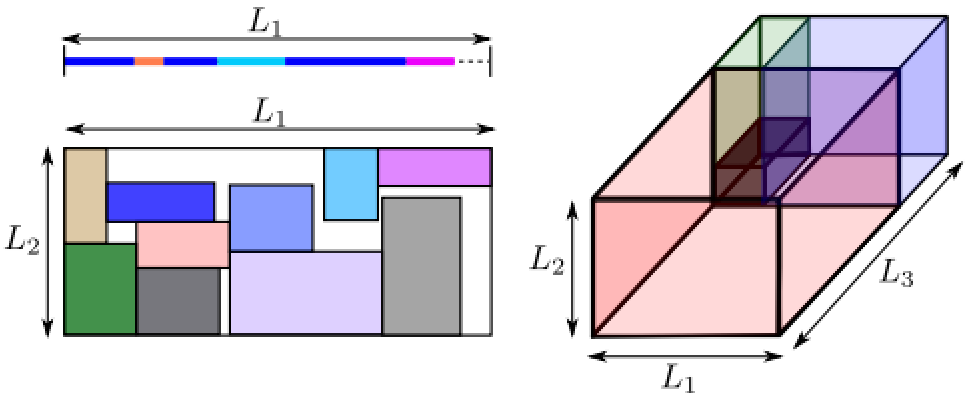


Figura 1 – Representação para o problema de empacotamento 1D, 2D e 3D.
Fonte:(CASTELLUCCI, 2019)

Outra forma de definir se uma peça é regular ou não, é o número de parâmetros necessários para representá-la. Se forem preciso três ou mais é irregular, caso contrário, regular (BARTMEYER et al., 2021). A Figura 2 mostra alguns exemplos de ambos tipos de peças.

O foco deste trabalho será em problemas de empacotamento 2D de peças e objetos retangulares ortogonais, sem qualquer variante (seção 3.3). Por mais simples que seja, é uma categoria muito importante do problema, visto que, no mundo real, a maioria do que temos interesse em resolver se encaixa nessas características. Existem até mesmo instâncias padronizadas para realizar comparativos entre algoritmos (IORI et al., 2022).

3.1 Definição

De acordo com (IORI et al., 2022), dado uma caixa retangular $\mathcal{B} = (W, H)$ de comprimento $W \in \mathbb{Z}_+$ e altura $H \in \mathbb{Z}_+$ e um conjunto $\mathcal{I}$ de itens também retangulares, onde cada item $i \in \mathcal{I}$ com comprimento $w_i \in \mathbb{Z}_+, w_i \leq W$ e altura $h_i \in \mathbb{Z}_+, h_i \leq H$. Um empacotamento $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ em $\mathcal{B}$ pode ser descrito como uma função $\mathcal{F} : \mathcal{I}' \to \mathbb{Z}_+^2$ que mapeie cada item $i \in \mathcal{I}'$ para um par de coordenadas $\mathcal{F}(i) = (x_i, y_i)$, de forma

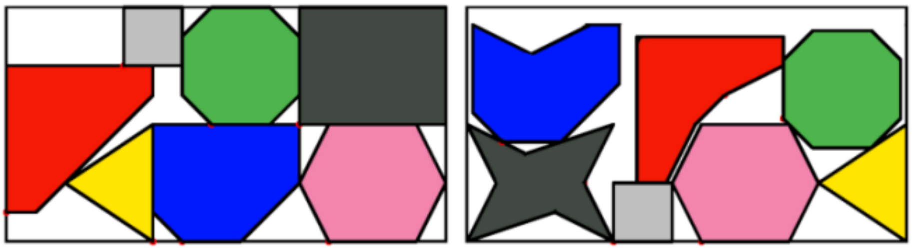


Figura 2 – A figura da direita mostra paças regular e irregulares. A esquerda possui as mesmas peças porém com seus contornos convexos.
Fonte:(BARTMEYER et al., 2021)

$$x_i \in \{0, \dots, W - w_i\}, y_i \in \{0, \dots, H - h_i\}(i \in \mathcal{I}') \quad (3.1)$$

$$[x_i, x_i + w_i) \cap [x_j, x_j + w_j) = \emptyset \text{ ou } [y_i, y_i + h_i) \cap [y_j, y_j + h_j) = \emptyset(i, j \in \mathcal{I}', i \neq j). \quad (3.2)$$

Nessa forma de representação a caixa está posicionada no plano cartesiano, com seu canto inferior esquerdo na origem. Já as coordenadas $\mathcal{F}(i) = (x_i, y_i)$ representam a posição em que o canto inferior esquerdo da peça será alocado. As Restrições 3.1 garantem que cada item deve estar inteiramente na caixa, enquanto as Restrições 3.2 impedem sobreposição entre peças. Ambas restrições indicam uma orientação fixa, ou seja, peças não podem ser rotacionadas.

3.2 Classificação

Por existirem diferentes objetivos na solução de um problema de empacotamento foram criadas algumas classificações. Algumas delas (as principais) são mostradas em (IORI et al., 2021), as quais serão exploradas em seguida, juntamente com alguns exemplos já vistos no Capítulo 1.

O objetivo do **Empacotamento 2D em Faixa** é encontrar um empacotamento de altura mínima para um dado conjunto de itens em uma caixa com comprimento fixo. Muito aplicado na área têxtil para minimizar o comprimento de tecido cortado para fazer peças de roupas.

No **Empacotamento 2D da Mochila** deve-se encontrar $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}'$ que maximize o valor de $\mathcal{B}$. Geralmente o valor é dado pela área de caixa ocupada pelos itens, dessa forma, outra interpretação do problema seria minimizar a area desperdiçada (vazia). Pode ser utilizado para maximizar o número de peças cortadas de um pedaço de couro, por exemplo.

Já o **Empacotamento 2D em Caixas** envolve encontrar uma solução que minimize o número de caixas necessárias para empacotar todos os itens. As caixas podem possuir diferentes tamanhos, mas a maioria dos problemas lida com as mesmas dimensões. Facilmente aplicável na área logística e de transporte, seja minimizando o número de paletes ou veículos de entrega.

Por fim, no **Empacotamento 2D Ortogonal** busca-se uma solução, caso exista, para empacotar **todos** os itens na caixa. Usado em situações onde se precisa alocar todos os itens dentro de um caminhão.

Todos os problemas descritos são NP-difícil, com exceção do Ortogonal, sendo NP-completo (IORI et al., 2022).

3.3 Variantes

Variantes são pequenas alterações no escopo do problema, também podem ser vistas como restrições ou relaxamento. Existem quatro mais comuns (IORI et al., 2022), os quais são descritos a seguir.

Corte guilhotinado consiste em cortar a caixa de forma paralela a um de seus lados recursivamente, é útil na resolução de problemas de corte (problemas de empacotamento podem ser reduzidos para essa categoria e vice-versa). **Rotações ortogonais** são um modo de relaxar o problema, permitindo rotações de 90 graus para os itens a serem alocados.

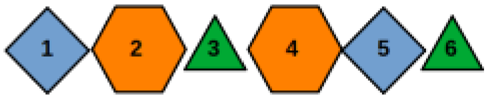
Restrições de carga e descarga implicam que algumas peças **devem** ser posicionadas em dada posição, usando como exemplo um caminhão de entregas, visa evitar situações onde um produto precisa ser descarregado para se ter acesso a um item mais a fundo e então carregar novamente o primeiro item. Existem variantes aplicáveis somente a algumas categorias do problema, é o caso de **caixas de tamanho variável** que pode ser unida ao **Empacotamento 2D em Caixas** e define que caixas não têm de ter as mesmas dimensões.

3.4 Bottom-Left

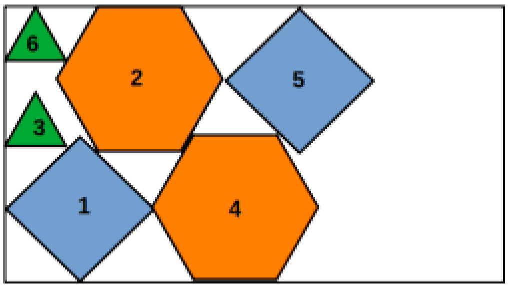
Como descrito na seção 3.2, a maioria das classes do problema são NP-difíceis. Isso torna métodos de soluções exatos, os quais buscam pela solução ótima, extremamente custosos em tempo e recursos computacionais em instâncias de porte moderado, muitas vezes sendo inviável por falta de algum desses dois motivos. Consequentemente a literatura é dominada por abordagens que usem heurísticas e meta-heurísticas, sendo a *bottom-left* uma das principais estratégias de solução e será usada no estudo deste trabalho.

Sua premissa é simples, dado uma fila como entrada, enquanto ela não estiver vazia, basta retirar o primeiro item dela e alocar no canto mais a baixo e a esquerda quanto for possível (BARTMEYER et al., 2021), sem sobreposições entre peças (seção 3.1). Caso não exista uma posição válida, a peça é desconsiderada e passa-se para próxima da fila. A Figura 3 mostra um exemplo de alocação para um dado conjunto de peças regulares.

Vale destacar que a própria ordem da fila pode gerar resultados diferentes, alterando a qualidade da solução. Um dos resultados esperados deste trabalho é comparar diferentes formas de ordenação e identificar se há alguma que se destaque na qualidade de solução, para isso será usado um conjunto de instâncias.



(a) Sequência para alocação.



(b) Alocação gerada pela regra *bottom-left*.

Figura 3 – Representação de alocação usando *bottom-left*.
Fonte: (BARTMEYER et al., 2021)

4 Próximos Passos

Para os próximos passos deste trabalho será necessário escolher um conjunto de instâncias para teste, implementar os algoritmos necessários, gerar dados através das instâncias, analiza-los e comparar com os resultados de outros autores, bem como finalizar a escrita da monografia. A Tabela 1 mostra um cronograma de planejamento das próximas tarefas.

Atividade	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
Definir algoritmos	x				
Definir instâncias	x				
Implementar algoritmos	x	x			
Analisar resultados		x	x		
Escrever monografia	x	x	x	x	x
Entrega TCC 2					x

Tabela 1 – Cronograma

Referências

ARENALES, M. et al. *Pesquisa Operacional*. [S.l.]: Elsevier, 2007.

BARTMEYER, P. M. et al. Aprendizado por reforço aplicado ao problema de empacotamento de peças irregulares em faixas. *Anais*, 2021. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/directbitstream/455094df-864a-4fad-8a97-c5f59fd3d6ca/3051981.pdf>.

BELLUZZO, L.; MORABITO, R. Otimização nos padrões de corte de chapas de fibra de madeira reconstituída: um estudo de caso. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 25, p. 391–415, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/pope/a/tTXXckvGTHbDfZQkmzCqdkp>.

CASTELLUCCI, P. B. *Consolidation problems in freight transportation systems: mathematical models and algorithms*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/90e7/bd898951e1350c2694478b63fbcde508e189.pdf>.

CAVALI, R. Problemas de corte e empacotamento na indústria de móveis: um estudo de caso. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2004. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali_r_me_sjrp.pdf>.

IORI, M. et al. Exact solution techniques for two-dimensional cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v. 289, n. 2, p. 399–415, 2021. ISSN 0377-2217. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221720306111>.

IORI, M. et al. 2dpacklib: a two-dimensional cutting and packing library. *Optimization Letters*, Springer, v. 16, n. 2, p. 471–480, 2022.

NETO, R. M.; WIDMER, J. A. *Abordagem em grafo-e-ou para o problema do empacotamento: aplicacao ao carregamento de paletes e conteineres*. Tese (Doutorado), 1992. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/item/000734666>.

QUEIROZ, L. R. d. S. *Estudo de problemas de corte de itens irregulares com incertezas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2022. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-10032022-110656/en.php>.