

# Problema de empacotamento de retângulos

avaliação de métodos de solução baseados em *bottom-left*

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro  
Orientador: Pedro Belin Castellucci  
Coorientador: Rafael de Santiago

Universidade Federal de Santa Catarina

26 de junho de 2023



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

Boa tarde, meu nome é Gabriel e hoje vou apresentar o meu tcc. O trabalho trata sobre a avaliação de métodos de solução baseados em *bottom-left*, para o problema de empacotamento de retângulos. Ele foi feito sob orientação do professor Pedro e teve coorientação do professor Rafael.

Problema de empacotamento de retângulos  
avaliação de métodos de solução baseados em *bottom-left*

Gabriel Medeiros Lopes Carneiro  
Orientador: Pedro Belin Castellucci  
Coorientador: Rafael de Santiago

Universidade Federal de Santa Catarina

26 de junho de 2023



1. Problema

2. Métodos de solução

3. Resultados

4. Conclusão



### └ Sumário

Eu vou começar explicando o problema em si, passando por suas características e abordando a versão de estudo do trabalho.

Vou mostrar o que é *bottom-left*, como ela funciona e os métodos de solução criados com base nela.

Também vou mostrar os resultados obtidos ao rodar instâncias de teste.

E, por fim, vou apresentar algumas conclusões que podem ser feitas a partir do trabalho.

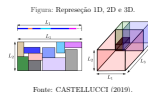
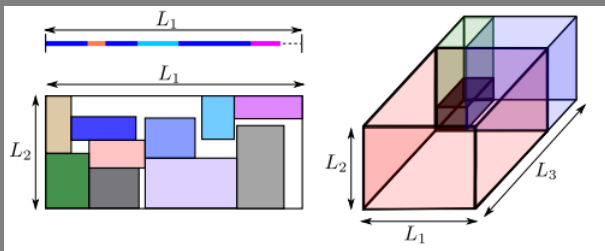


Figura: Representação 1D, 2D e 3D.



Fonte: CASTELLUCCI (2019).

A premissa do problema é simples, alocar peças em um espaço. É algo simples, mas de difícil resolução, podendo possuir  $N$ -dimensões e diversos tipos de peças, de modo que é preciso separar o problema em diferentes classes e ainda existem variantes dentro dessas classificações. Como exemplos:

Temos o caso 1D que pode ser usado para cortar uma barra de ferro em certos tamanhos, de forma que seu desperdício seja mínimo.

Já o 2D poderia ser aplicado para alocação de paletes com altura fixa em um caminhão ou depósito.

O caso 3D pode ser usado para alocar caixas em um depósito ou container, e acredito que esse seja o mais simples de pensar em aplicações.

# Problema

## Restrições

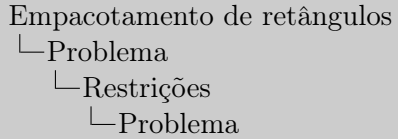
- Recipiente  $\mathcal{B} = (W, H)$ .
- Conjunto de itens  $\mathcal{I}$ .
- Conjunto solução  $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ .

$$x_i \in \{0, \dots, W - w_i\}, y_i \in \{0, \dots, H - h_i\} \quad (i \in \mathcal{I}') \tag{1}$$

$$[x_i, x_i + w_i) \cap [x_j, x_j + w_j) = \emptyset \text{ ou } [y_i, y_i + h_i) \cap [y_j, y_j + h_j) = \emptyset \quad (i, j \in \mathcal{I}', i \neq j) \tag{2}$$



2023-06-26



O trabalho lida somente com peças retangulares, então a dimensão de interesse é 2D. Para resolver o problema ele será representado como um modelo de otimização, portanto, são necessárias algumas restrições para o modelo.

Então, dado um recipiente  $\mathcal{B}$  de largura  $W$  e altura  $H$ , um conjunto de itens  $\mathcal{I}$  e um conjunto solução  $\mathcal{I}'$ . Tem-se duas restrições. A primeira restrição garante que um item só é alocado no recipiente se couber nele.

Já a segunda impede sobreposição entre as peças.

Problema
Restrições
<ul style="list-style-type: none"><li>• Recipiente <math>\mathcal{B} = (W, H)</math>.</li><li>• Conjunto de itens <math>\mathcal{I}</math>.</li><li>• Conjunto solução <math>\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}</math>.</li></ul>
$x_i \in \{0, \dots, W - w_i\}, y_i \in \{0, \dots, H - h_i\} \quad (i \in \mathcal{I}') \tag{1}$
$[x_i, x_i + w_i) \cap [x_j, x_j + w_j) = \emptyset \text{ ou } [y_i, y_i + h_i) \cap [y_j, y_j + h_j) = \emptyset \quad (i, j \in \mathcal{I}', i \neq j) \tag{2}$

# Problema

## Empacotamento da mochila

Dado:

- Recipiente  $\mathcal{B} = (W, H)$ .
- Conjunto de itens  $\mathcal{I}$ .
- Cada item  $i \in \mathcal{I}$  possui um valor  $p_i$ .

Encontrar:

- Conjunto solução  $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ .

De forma que:

$$\max \sum_{i \in \mathcal{I}'} p_i$$



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

### └ Problema

#### └└ Empacotamento da mochila

#### └└└ Problema

Como já mencionado, existem muitas versões do problema e a de interesse é o empacotamento da mochila.

Nessa versão, dado um recipiente  $\mathcal{B}$  e um conjunto de itens, onde cada item  $i$  possui um valor  $p_i$ , deve-se encontrar um conjunto solução que maximize o somatório dos valores dos itens alocados.

No trabalho, o valor  $p_i$  é a área do item  $i$ . Ou seja, o objetivo é maximizar a área ocupada do recipiente  $\mathcal{B}$ .

Problema

Empacotamento da mochila

Dado:

- Recipiente  $\mathcal{B} = (W, H)$ .
- Conjunto de itens  $\mathcal{I}$ .
- Cada item  $i \in \mathcal{I}$  possui um valor  $p_i$ .

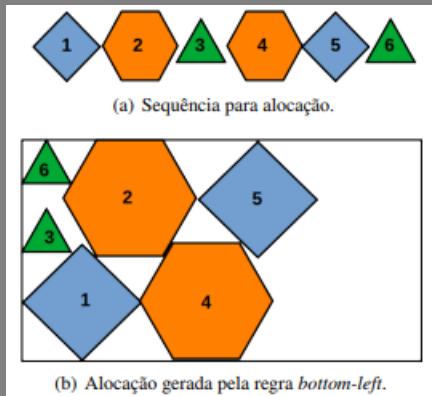
Encontrar:

- Conjunto solução  $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ .

De forma que:

$$\max \sum_{i \in \mathcal{I}'} p_i$$

Figura: Representação de alocação.



Fonte: BARTMEYER et al. (2021).

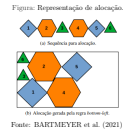


2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

### └ Métodos de solução

### └ Métodos de solução



Como o problema é NP-difícil, usar métodos exatos exigiria muitos recursos computacionais e/ou tempo de execução. Então, a heurística *bottom-left* foi escolhida para solucionar o problema.

Ela é bem simples, dado uma lista como entrada, os itens são retirados um a um e posicionados no ponto mais a baixo e mais a esquerda quanto for possível.

Caso a peça não caiba em nenhuma posição ela não entra na solução e passa-se para a próxima da fila.

Aqui fica claro que a sequência de alocação tem impacto direto na qualidade da solução. Mas como definir essa ordenação? Existe algum critério que seja melhor que os demais? Para responder essas perguntas, escolhi alguns critérios para ordenar a lista e comparar suas soluções.

# Métodos de solução

## Critérios de ordenação

- Área.
- Perímetro.
- Largura.
- Altura.
- Id.



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

- └ Métodos de solução
  - └ Critérios de ordenação
    - └ Métodos de solução

Métodos de solução  
Critérios de ordenação

- Área.
- Perímetro.
- Largura.
- Altura.
- Id.

A partir desse ponto começa de fato o desenvolvimento do trabalho.

Onde 5 critérios de ordenação foram escolhidos: área, perímetro, largura, altura e id. Com cada critério podendo ser usado de forma crescente ou decrescente.

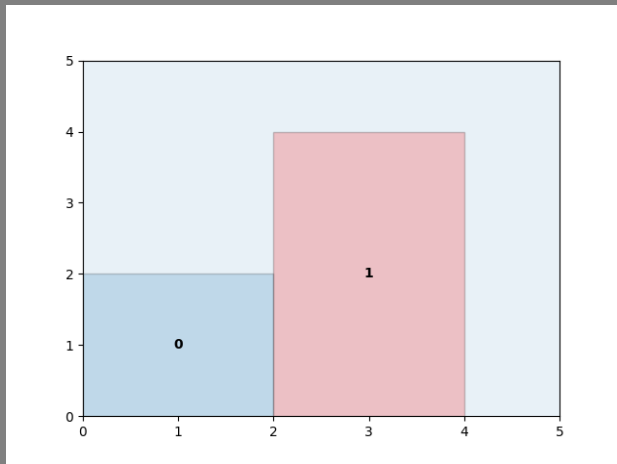
A ordenação por id considera a ordem em que os itens foram colocados na lista (ou criados), ou seja, seria a forma padrão de resolver, sem ordenações.

Agora que os critérios foram definidos, podemos passar para os próximos desafios do problema, que são a sobreposição e o domínio contínuo.

# Métodos de solução

Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0 e 1 posicionados.



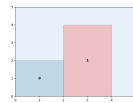
2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

- └ Métodos de solução
  - └ Sobreposição e domínio contínuo
    - └ Métodos de solução

Métodos de solução  
Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0 e 1 posicionados.



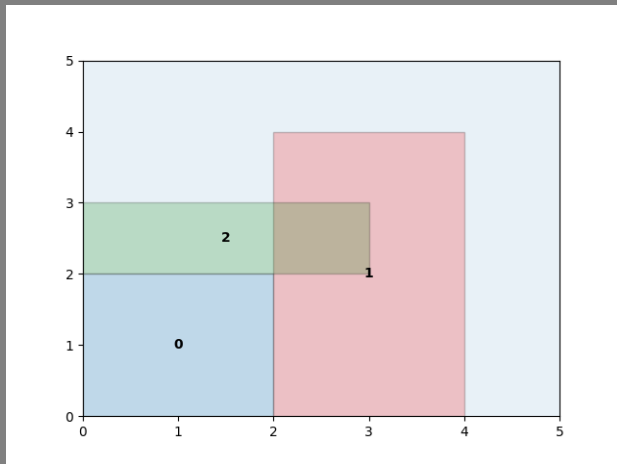
Bom, supondo que estejamos em um estado do algoritmo como mostra a figura, onde o item 0 foi o primeiro alocado e o item 1 foi alocado a sua direita na posição (2, 0), porque não cabia logo acima na posição (0, 2) devido a Restrição 1.



# Métodos de solução

## Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0, 1 e 2 posicionados, mas com sobreposição.



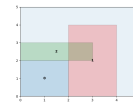
2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

- └ Métodos de solução
  - └ Sobreposição e domínio contínuo
    - └ Métodos de solução

Métodos de solução  
Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0, 1 e 2 posicionados, mas com sobreposição.

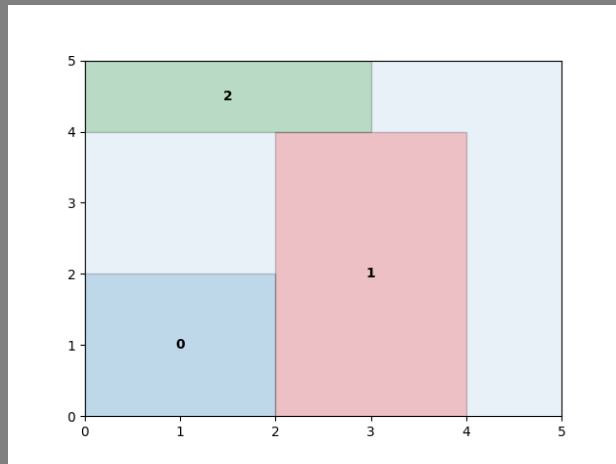


Agora queremos alocar um terceiro item, de largura 3 e altura 1. Ao posicionar a peça na posição (0, 2) percebe-se que a Restrição 1 é satisfeita, porém a Restrição 2 não.

# Métodos de solução

Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0, 1 e 2 posicionados, sem sobreposição.



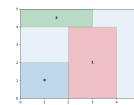
2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

- └ Métodos de solução
  - └ Sobreposição e domínio contínuo
    - └ Métodos de solução

Métodos de solução  
Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0, 1 e 2 posicionados, sem sobreposição.

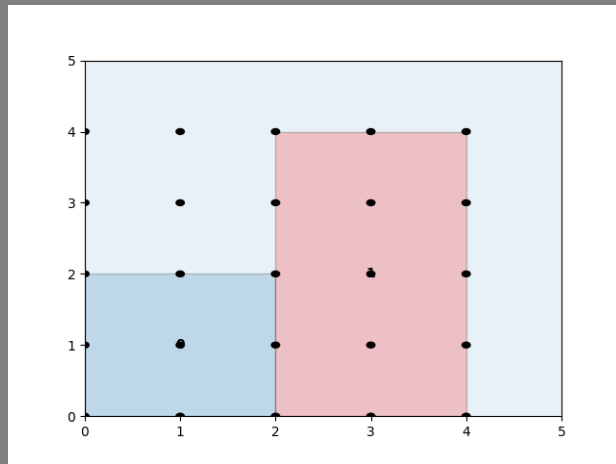


Nesse caso, com poucas peças alocadas e um auxílio visual, é fácil dizer que a posição  $(0, 4)$  é a primeira posição válida de acordo com a *bottom-left*. Mas como chegar até ela? Existem infinitos pontos entre as coordenadas  $(0, 2)$  e  $(0, 4)$ .

# Métodos de solução

Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0 e 1 posicionados, com domínio discreto.



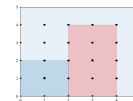
2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

- └ Métodos de solução
  - └ Sobreposição e domínio contínuo
    - └ Métodos de solução

Métodos de solução  
Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0 e 1 posicionados, com domínio discreto.

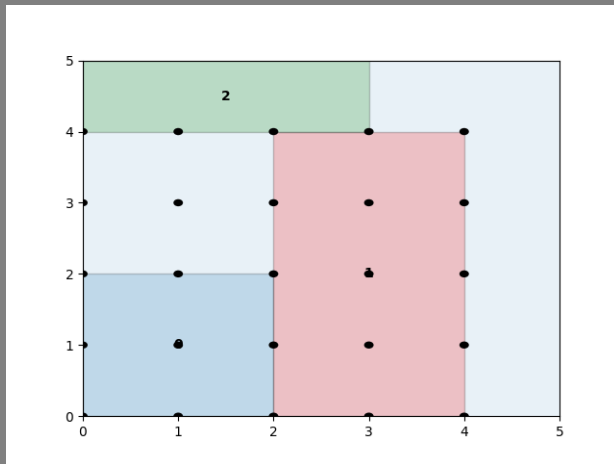


Como todas as instâncias de teste usadas tratam somente de peças e recipientes com valores inteiros uma abordagem possível seria discretizar o domínio.

# Métodos de solução

## Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0, 1 e 2 posicionados, com domínio discreto.



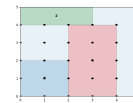
2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

- └ Métodos de solução
  - └ Sobreposição e domínio contínuo
    - └ Métodos de solução

Métodos de solução  
Sobreposição e domínio infinito

Figura: Itens 0, 1 e 2 posicionados, com domínio discreto.



Dessa forma somente coordenadas de valores inteiros precisariam ser cheçadas, resolvendo parcialmente o problema com o domínio, já que ainda temos muitos pontos para checar, principalmente em recipientes grandes. Mas isso não resolve a parte de sobreposição. Para cada ponto ainda é necessário verificar se existe sobreposição com cada uma das peças já alocadas, algo extremamente custoso. Além disso, a discretização não funcionaria tão bem em casos com valores não inteiros, prejudicando a aplicação em vários problemas do mundo real.

Métodos de solução

Regiões

Tabela: Resumo das regiões.

Modo	Divisão	Restrição 2	Tipo
1	Vertical	Trivial	Simples
2	Horizontal	Trivial	Simples
3	Maior área	Trivial	Simples
4	Regiões sobrepostas	Não trivial	Complexas

Tabela: Resumo das regiões.

Modo	Divisão	Restrição 2	Tipo
1	Vertical	Trivial	Simples
2	Horizontal	Trivial	Simples
3	Maior área	Trivial	Simples
4	Regiões sobrepostas	Não trivial	Complexas

Ambos desafios, de sobreposição e de domínio contínuo, podem ser resolvidos utilizando a estratégia de criação de regiões. Utilizando essa técnica a Restrição 2 é trivialmente satisfeita. Nela, ao posicionar uma peça, duas regiões são criadas e o item seguinte somente será posicionado se couber em uma dessas regiões.

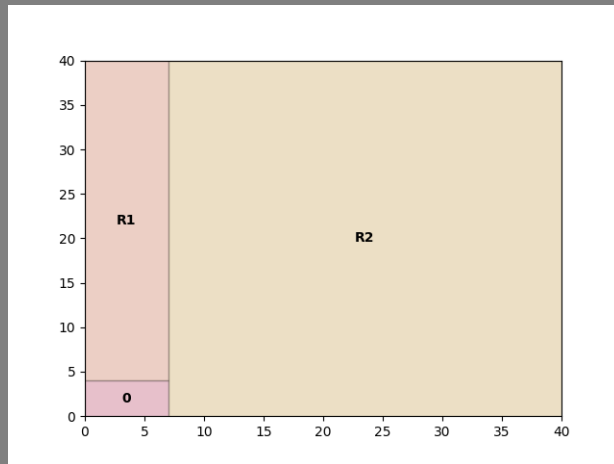
O domínio passa a ser somente o canto inferior esquerdo de cada uma das regiões e sobreposições não são mais possíveis. Além disso, a regra para definir se uma peça cabe em dada região é igual a Restrição 1, tornando o algoritmo de solução bem simples. Eu escolhi criar as regiões de 4 formas diferentes, para identificar se isso teria algum impacto na solução. Teoricamente, resolver trivialmente a Restrição 2, pode causar prejuízos na qualidade de solução. Então, um dos modos não resolve trivialmente a Restrição 2 e foi criado verificar seu custo-benefício.



# Métodos de solução

## Regiões

Figura: Regiões criadas traçando uma linha vertical.



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

└ Métodos de solução

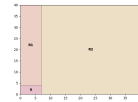
└ Regiões

└ Métodos de solução

Métodos de solução

Regiões

Figura: Regiões criadas traçando uma linha vertical.

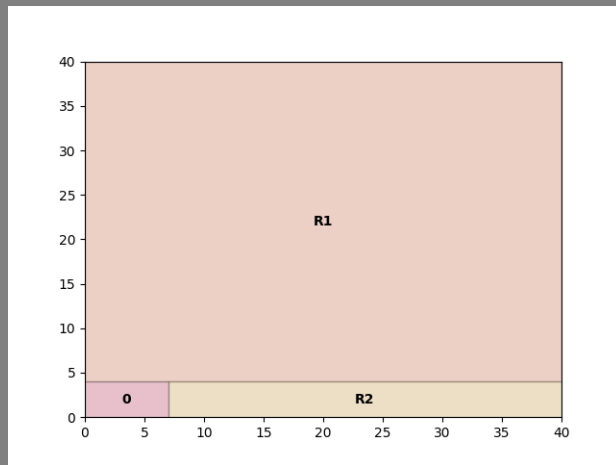


A primeira forma de criar regiões é traçando uma linha vertical a partir do canto superior direito de cada peça alocada. Nas figuras, retângulos indicados com um R são regiões.

# Métodos de solução

## Regiões

Figura: Regiões criadas traçando uma linha horizontal.



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

└ Métodos de solução

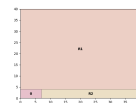
└ Regiões

└ Métodos de solução

Métodos de solução

Regiões

Figura: Regiões criadas traçando uma linha horizontal.

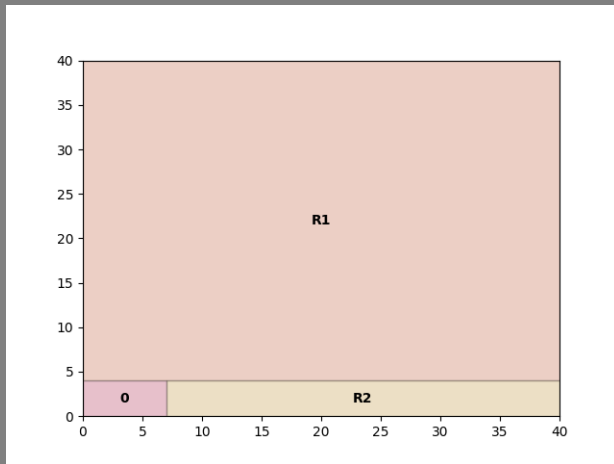


A segunda é semelhante a primeira, porém usando uma linha horizontal.

# Métodos de solução

## Regiões

Figura: Regiões criadas maximizando uma das regiões.



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

└ Métodos de solução

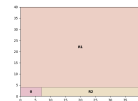
└└ Regiões

└└└ Métodos de solução

Métodos de solução

Regiões

Figura: Regiões criadas maximizando uma das regiões.



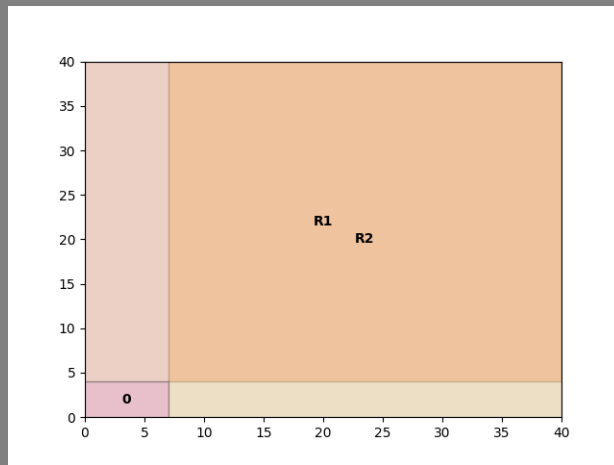
Já na terceira, é traçada uma linha (vertical ou horizontal) que maximize a área de uma das regiões geradas, basicamente identifica qual dos dois primeiros métodos gera a região de maior área e traça a reta correspondente. Isso é interessante pois dá uma garantia maior de que o item seguinte será alocado, em contrapartida pode gerar muitas regiões pequenas que podem não ser utilizadas, diminuindo a qualidade da solução.



# Métodos de solução

## Regiões

Figura: Regiões criadas possibilitando sobreposições.



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

└ Métodos de solução

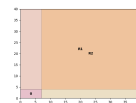
└ Regiões

└ Métodos de solução

Métodos de solução

Regiões

Figura: Regiões criadas possibilitando sobreposições.



No último modo nenhuma linha é traçada, todas as regiões vão até o final do recipiente, ficando sobrepostas. Nesse caso sobreposições de peças podem ocorrer, então verificações são necessárias para cumprir a Restrição 2.

Métodos de solução

Regiões

Tabela: Resumo das regiões.

Modo	Divisão	Restrição 2	Tipo
1	Vertical	Trivial	Simples
2	Horizontal	Trivial	Simples
3	Maior área	Trivial	Simples
4	Regiões sobrepostas	Não trivial	Complexas

Tabela: Resumo das regiões.

Modo	Divisão	Restrição 2	Tipo
1	Vertical	Trivial	Simples
2	Horizontal	Trivial	Simples
3	Maior área	Trivial	Simples
4	Regiões sobrepostas	Não trivial	Complexas

Resumindo os modos das regiões, 3 geram regiões simples e resolvem trivialmente a Restrição 2 e o último deveria apresentar melhores resultados na qualidade de solução, já que a Restrição 2 é não-trivial.



- 45 instâncias.
- $45 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 1800$  casos de teste.
- 5 testes por configuração.
- $1800 \cdot 5 = 9000$  execuções.



2023-06-26

Empacotamento de retângulos

└ Resultados

└└ Testes

└└└ Resultados

Resultados  
Testes

- 45 instâncias.
- $45 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 1800$  casos de teste.
- 5 testes por configuração.
- $1800 \cdot 5 = 9000$  execuções.

Para testar os métodos de solução criados foram usadas 45 instâncias de teste.

Como temos 45 instâncias, 5 critérios de ordenação, cada critério pode ser crescente ou decrescente, e 4 formas de criar regiões, temos o total de 1800 casos a serem testados.

Cada caso foi executado 5 vezes para se obter uma média, totalizando 9000 execuções.

Resultados

Ordenação

Tabela: Comparativo entre ordenação crescente e decrescente.

Decrescente	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Sim	736	8	78.9136	1.7798e+00
Não	167	8	57.3060	2.3715e+00

Tabela: Comparativo entre ordenação crescente e decrescente.

Decrescente	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Sim	736	8	78.9136	1.7798e+00
Não	167	8	57.3060	2.3715e+00

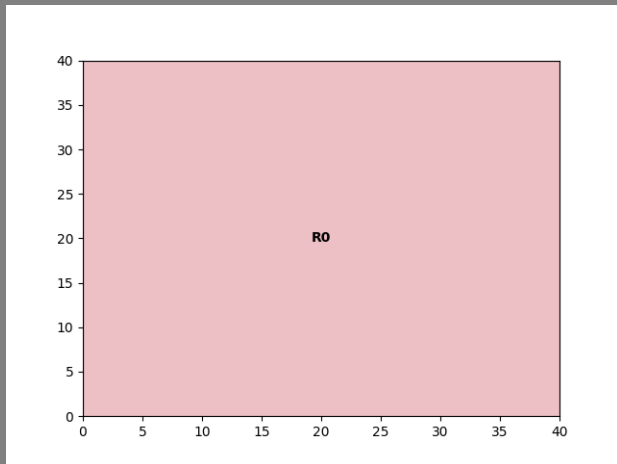
Nas tabelas, a coluna “Qualidade” indica qualidade da solução obtida pelo método, ou seja, a porcentagem, em média, da área ocupada dos recipientes. A coluna “Vitórias” indica quantas vezes o critério obteve o melhor resultado, quando comparado aos demais, e a coluna “Empates” indica quantas vezes obteve o melhor resultado, mas não foi o único a conseguir. A primeira coisa que fica evidente com os resultados é discrepância na qualidade de solução entre a ordenação crescente e a decrescente, algo já esperado.



# Resultados

## Ordenação

Figura: Regiões criadas na ordenação crescente - estado inicial.



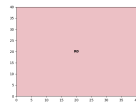
2023-06-26

Empacotamento de retângulos  
└ Resultados  
└ Comparativo - Ordenação  
└ Resultados

Resultados

Ordenação

Figura: Regiões criadas na ordenação crescente - estado inicial.

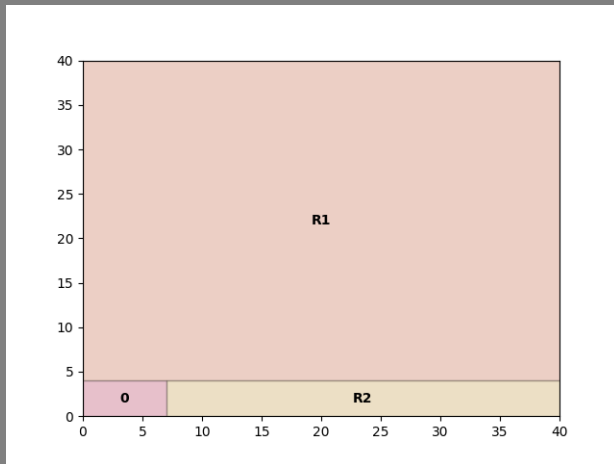


Isso se deve a como as regiões são criadas, as figuras mostram o caso para ordenação crescente pela altura e linha horizontal para criação de regiões.

# Resultados

## Ordenação

Figura: Regiões criadas na ordenação crescente - estado 1.

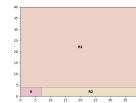


2023-06-26

Empacotamento de retângulos  
└ Resultados  
└ Comparativo - Ordenação  
└ Resultados

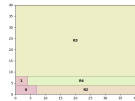
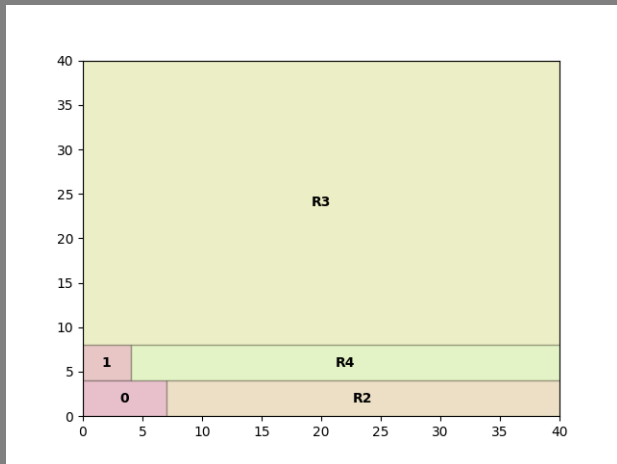
Resultados  
Ordenação

Figura: Regiões criadas na ordenação crescente - estado 1.



Ao posicionar uma peça, uma das regiões ficará com a mesma altura do item recém-posicionado. Como a ordenação é crescente, a próxima peça terá no mínimo a mesma altura, mas o provável é que seja mais alta, impossibilitando que seja alocada nessa região.

Figura: Regiões criadas na ordenação crescente - estado 2.

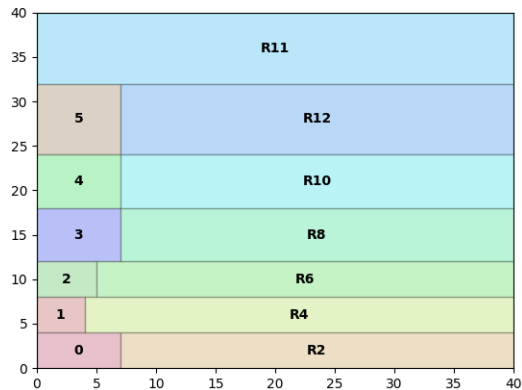


O mesmo ocorre para o segundo e demais itens, fazendo com que muitas regiões fiquem sem poder receber peças.

# Resultados

## Ordenação

Figura: Regiões criadas na ordenação crescente - estado final.

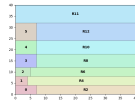


2023-06-26

Empacotamento de retângulos  
└ Resultados  
└ Comparativo - Ordenação  
└ Resultados

Resultados  
Ordenação

Figura: Regiões criadas na ordenação crescente - estado final.



Essa figura mostra o estado final do algoritmo e grande parte do espaço ainda está livre, mas não será preenchido pois todas as peças restantes são mais altas que as regiões. Algo semelhante ocorre com outros critérios de ordenação e criação regiões.



Resultados

Critérios de ordenação

Tabela: Resultado para os critérios de ordenação.

Ordenação	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Área	63	39	82.7353	1.5874e+00
Perímetro	71	38	84.6986	1.5769e+00
Altura	40	16	77.4182	1.5655e+00
Largura	66	24	81.1899	2.0805e+00
Id	16	5	68.5261	2.0889e+00

Tabela: Resultado para os critérios de ordenção.

Ordenação	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Área	63	39	82.7353	1.5874e+00
Perímetro	71	38	84.6986	1.5769e+00
Altura	40	16	77.4182	1.5655e+00
Largura	66	24	81.1899	2.0805e+00
Id	16	5	68.5261	2.0889e+00

Em relação aos critérios de ordenação, fica claro que ter algum critério de ordenação melhora e muito a solução, já que ordenar por ID teve um péssimo desempenho. Mas o curioso é que todos os demais critérios são competitivos entre si. A literatura em geral usa somente ordenação pela área (CHEN et al., 2019), então esses resultados podem indicar que algumas instâncias possuem características que torne mais interessante outro método de ordenação.



Resultados

Regiões

Tabela: Comparativo entre criação de regiões.

Divisão	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Vertical	98	79	76.4030	2.7157e-03
Horizontal	70	60	75.9970	6.2101e-03
Maior área	104	89	79.7175	1.3743e-02
Sobrepostas	176	119	83.6420	7.2176e+00

Tabela: Comparativo entre criação de regiões.

Divisão	Vitórias	Empates	Qualidade %	Tempo (s)
Vertical	98	79	76.4030	2.7157e-03
Horizontal	70	60	75.9970	6.2101e-03
Maior área	104	89	79.7175	1.3743e-02
Sobrepostas	176	119	83.6420	7.2176e+00

Indo para o comparativo entre regiões percebemos que a que permite sobreposições se saiu melhor, tanto quantitativa quanto qualitativamente, ainda que na maioria dos casos não foi a única que encontrou a melhor solução, e também teve custo altíssimo de tempo. Regiões criadas com linhas verticais e horizontais foram mais rápidas, mas com soluções de pior qualidade. Enquanto maximizando as regiões levou um pouco a mais de tempo, mas também teve acréscimo na qualidade. Aqui a gente percebe que precisar resolver a Restrição 2, faz com que o algoritmo de solução demore em torno de 1000 vezes mais.



Resultados

Sobreposição

Tabela: Resultados para sobreposição.

Sobreposição	Qualidade %	Tempo Total (s)
Não	90.8278	1.6299e+01
Sim	87.2957	2.8313e+02

Tabela: Resultados para sobreposição.

Sobreposição	Qualidade %	Tempo Total (s)
Não	90.8278	1.6299e+01
Sim	87.2957	2.8313e+02

Na última tabela eu trouxe os números da comparação entre regiões simples e complexas. Na primeira linha, temos os resultados de todas as combinações possíveis com regiões simples e o tempo total que levou para executar todas as instâncias, aqui a coluna “Qualidade” representa a média da melhor solução de cada instância. Já na segunda linha somente a ordenação decrescente pela área e regiões complexas foi considerada, já que obtive os melhores resultados. Os demais critérios não foram considerados pois esse sozinho já ultrapassa o tempo de todos os métodos sem sobreposição, caso fossem considerados o tempo total seria cerca de 10 vezes maior enquanto a qualidade teria pouco acréscimo. Aqui fica nítido que compensa muito mais, tanto em qualidade quanto em tempo, rodar todas as combinações possíveis com regiões simples e escolher o melhor resultado. Mas por que tanta



- Sem sobreposição:  $R = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right)$ .
- Com sobreposição:  $R = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right), S = O\left(\frac{n^3 - n}{3}\right)$ .  
 $n = 3152 \rightarrow R = 4\,969\,128, S = 10\,438\,481\,552$ .

- Sem sobreposição:  $R = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right)$ .
- Com sobreposição:  $R = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right), S = O\left(\frac{n^3 - n}{3}\right)$ .  
 $n = 3152 \rightarrow R = 4\,969\,128, S = 10\,438\,481\,552$ .

Isso se deve a complexidade dos algoritmos. Como dito antes, sem sobreposições temos apenas que checar se um item cabe em uma região, no pior caso teremos que fazer isso para  $(n^2 + n)/2$  regiões, onde  $n$  é número de itens. Enquanto com sobreposição, além de ter esse número de regiões, para cada uma delas também é necessário checar possíveis sobreposições com as peças já alocadas, sendo o número de verificações igual a  $(n^3 - n)/3$ , isso no pior caso, algo extremamente custoso. Por exemplo, para uma instância com 3152 itens podem ser necessárias mais de 10 bilhões de verificações de sobreposição. Então, aquela diferença de 1000 vezes fica ainda maior de acordo com a quantidade de itens a serem alocados.

- Múltiplos métodos de solução.
- Resultados interessantes.
- Com sobreposição  $\times$  sem sobreposição.
  - Escalabilidade.



- Múltiplos métodos de solução.
- Resultados interessantes.
- Com sobreposição  $\times$  sem sobreposição.
  - Escalabilidade.

Bom, indo para as conclusões. Foram testados vários métodos de solução, todos baseados em *bottom-left*, e ficou evidente que ordenar a lista de entrada de forma decrescente é vantajoso. Tivemos alguns resultados interessantes, como a competitividade entre todos os critérios de ordenação, sendo necessária uma investigação sobre características das instâncias. E também a pouca, ou nenhuma, vantagem em termos de qualidade quando usamos regiões que permitem sobreposições. De modo geral, pode-se resolver um problema com todas as combinações que usem regiões simples e buscar a de melhor solução, já que seu tempo de execução é pequeno. Resolver usando regiões com sobreposição só é recomendado em casos onde o modelo será usado várias vezes e não sofrerá alterações. Por fim, caso se queira aumentar a escala, seja na dimensão ou na quantidade de itens, compensa somente trabalhar com regiões sem sobreposição. No caso de aumentar a dimensão seu custo é baixo, sendo necessário verificar somente um parâmetro extra para cada item.

BARTMEYER, Petra Maria et al. Aprendizado por reforço aplicado ao problema de empacotamento de peças irregulares em faixas. **Anais**, 2021. Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/directbitstream/455094df-864a-4fad-8a97-c5f59fd3d6ca/3051981.pdf>>.

BELLUZZO, Luciano; MORABITO, Reinaldo. Otimização nos padrões de corte de chapas de fibra de madeira reconstituída: um estudo de caso. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 25, p. 391–415, 2005. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/pope/a/tTXXckvGTHbDfZQkmzCqdkp>>.



Bom, era isso o que tinha para apresentar, obrigado pela atenção.

CASTELLUCCI, Pedro Belin. **Consolidation problems in freight transportation systems: mathematical models and algorithms**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/90e7/bd898951e1350c2694478b63fbcde508e189.pdf>>.

CAVALI, Roberto. Problemas de corte e empacotamento na indústria de Móveis: um estudo de caso. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2004. Disponível em: <[https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali\\_r\\_me\\_sjrp.pdf](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali_r_me_sjrp.pdf)>.

CHEN, Mao et al. An efficient deterministic heuristic algorithm for the rectangular packing problem. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 137, p. 106097, 2019.



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

└─ Conclusão

└─ Referências

CASTELLUCCI, Pedro Belin. **Consolidation problems in freight transportation systems: mathematical models and algorithms**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/90e7/bd898951e1350c2694478b63fbcde508e189.pdf>>.

CAVALI, Roberto. Problemas de corte e empacotamento na indústria de Móveis: um estudo de caso. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2004. Disponível em: <[https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali\\_r\\_me\\_sjrp.pdf](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94286/cavali_r_me_sjrp.pdf)>.

CHEN, Mao et al. An efficient deterministic heuristic algorithm for the rectangular packing problem. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 137, p. 106097, 2019.

IORI, Manuel; DE LIMA, Vinícius L. et al. Exact solution techniques for two-dimensional cutting and packing. **European Journal of Operational Research**, v. 289, n. 2, p. 399–415, 2021. ISSN 0377-2217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.06.050>. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221720306111>>.

IORI, Manuel; LIMA, Vinícius Loti de et al. 2DPackLib: a two-dimensional cutting and packing library. **Optimization Letters**, Springer, v. 16, n. 2, p. 471–480, 2022.





# Problema

## Tipos de peças

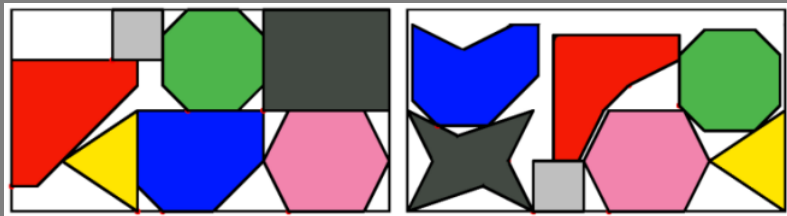
2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

- └ Extras
  - └ Tipos de peças
    - └ Problema



Figura: Exemplos de peças convexas (esquerda) e côncavas (direita).



Fonte: BARTMEYER et al. (2021).

- Convexas: todos ângulos internos são menores que  $180^\circ$ .
- Côncavas: pelo menos um ângulo interno maior que  $180^\circ$ .
- Regulares: peças convexas com todos lados e ângulos iguais.
- Irregulares: pelo menos um lado ou ângulo diferente.
- Outra forma de se definir entre convexa ou não é checar se existe alguma reta que atravessasse o objeto em dois pontos diferentes, se sim, é côncava.
- O trabalho foca em peças retangulares.



# Problema

## Classificação

- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.
- Empacotamento em caixas.
- Empacotamento ortogonal.



2023-06-26

## Empacotamento de retângulos

- └ Extras
  - └ Classificação
    - └ Problema

Problema  
Classificação

- Empacotamento em faixa.
- Empacotamento da mochila.
- Empacotamento em caixas.
- Empacotamento ortogonal.

- Empacotamento em faixa: Dado um conjunto de itens e uma caixa com comprimento fixo, queremos encontrar uma solução de altura mínima.
- Empacotamento da mochila: Nesse caso, queremos maximizar o valor da caixa (geralmente é a área da caixa).
- Empacotamento em caixas: Minimizar o número de caixas necessárias para empacotar todos os itens.
- Empacotamento ortogonal: Alocar todos os itens numa caixa.
- Todas classificações do problema são NP-difícil, com exceção da ortogonal (NP-completo)(IORI; LIMA et al., 2022; IORI; DE LIMA et al., 2021).

- Corte guilhotinado.
- Rotações ortogonais.
- Restrições de carga e descarga.
- Caixas de tamanho variável.



- Corte guilhotinado.
- Rotações ortogonais.
- Restrições de carga e descarga.
- Caixas de tamanho variável.

Aqui vou citar algumas variantes do problema, mas nenhuma foi usada no trabalho.

- Corte guilhotinado: Consiste em cortar a caixa de forma paralela a um dos lados de forma recursiva.
- Rotações ortogonais: É um modo de relaxar o problema, permitindo rotações de  $90^\circ$  nos itens.
- Restrições de carga e descarga: Algumas peças precisam ser posicionadas em certa posição ou próximas a outras.
- Caixas de tamanho variável: Define que caixas não precisam ter o mesmo tamanho (aplicável somente para Empacotamento em Caixas).

# Resultados

Melhores combinações de solução

Tabela: Resultados da comparação entre todas combinações.

Regiões	Ordenação	Desc.	V	E	Qualidade %	Tempo (s)
Vertical	Largura	Sim	9	8	84.5497	2.4820e-03
Maior área	Perímetro	Sim	7	6	85.8682	1.2944e-02
Sobrepostas	Área	Sim	13	11	87.2957	6.4349e+00
Sobrepostas	Largura	Sim	16	10	85.9266	8.4384e+00



2023-06-26

- Empacotamento de retângulos
  - └ Extras
    - └ Variantes
      - └ Resultados

Aqui eu mostro uma tabela com os resultados das combinações que se saíram melhores. Em termos de quantidade, quem se saiu melhor foi a criação de regiões com sobreposição, com a largura como critério de ordenação. Já em qualidade o melhor resultado foi obtido com sobreposição e ordenação por área. A maximização de regiões e ordenação por perímetro ficou bem próxima, ainda mais consirando o custo-benefício. A primeira linha da tabela mostra a combinação entre a criação de regiões na vertical e ordenação pela largura, esse resultado é bem interessante pois têm um dos menores tempos e ainda consegue ser competitivo tanto em qualidade quanto em quantidade.

Resultados  
Melhores combinações de solução

Tabela: Resultados da comparação entre todas combinações.

Regiões	Ordenação	Desc.	V	E	Qualidade %	Tempo (s)
Vertical	Largura	Sim	9	8	84.5497	2.4820e-03
Maior área	Perímetro	Sim	7	6	85.8682	1.2944e-02
Sobrepostas	Área	Sim	13	11	87.2957	6.4349e+00
Sobrepostas	Largura	Sim	16	10	85.9266	8.4384e+00

Resultados

Conjuntos de instâncias

Tabela: Resultados para os conjuntos de instância.

Conjunto	Qualidade %	Itens %	Tempo Total (s)
BKW	94.4783	85.7782	1.2688e+01
GCUT	84.6060	20.0994	2.0189e-01
NGCUT	88.2085	35.0307	8.1531e-01
OF	92.0714	34.0580	1.0821e-02
OKP	93.9360	22.8232	1.1026e-01

Tabela: Resultados para os conjuntos de instância.

Conjunto	Qualidade %	Itens %	Tempo Total (s)
BKW	94.4783	85.7782	1.2688e+01
GCUT	84.6060	20.0994	2.0189e-01
NGCUT	88.2085	35.0307	8.1531e-01
OF	92.0714	34.0580	1.0821e-02
OKP	93.9360	22.8232	1.1026e-01

Nessa tabela eu trouxe os resultados separados de acordo com o conjunto de instância, a BKW demorou mais por ter os maiores números de itens a serem alocados dentre todas as instâncias. Em geral, temos bons resultados para cada conjunto, mas vale investigar se algum deles possui alguma característica que torne melhor determinado método de solução.

