Métodos Numéricos
Teoremas, propiedades y más

Cristian

21 de abril de 2019

Índice

1. Disclaimer

Este documento fue hecho como resumen de teoremas, propiedades, etc. para la materia *Metodos Númericos* de la carrera *Ciencias de la Computación* de la *Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*. De ninguna manera pretende remplazar las clases ni asegura estar completo/correcto. A su vez, las propiedades y sus demostraciones están basadas en mis apuntes de las clases al menos que se indique lo contrario. Esto quiere decir que puede no coincidir con demostraciones de otras fuentes o de otras cursadas.
En caso de encontrar algún posible error se recomienda verificarlo con un docente de la materia y en caso de efectivamente serlo, subirlo como issue indicando como se confirmó que lo era (por ejemplo, docente que lo confirmo o libro).

2. Practica 1

2.1. Definiciones, propiedades,etc.

Definición 1

$v_0, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ son linialmente independientes si

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 0 \ldots k$$

Definición 2

Una matriz es inversible $\Leftrightarrow$ su determinante es distinto de cero.

Definición 3

Traza de A es $\sum_i^n a_{ii}$

Definición 4

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se dice triangular superior (t.s.) si $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

Definición 5

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se dice triangular inferior (t.i.) si $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$

Propiedad 1

Producto de t.s. da t.s.

Propiedad 2

Producto de t.i. da t.i.

Propiedad 3

$(AB)^t = B^t A^t$

Propiedad 4

Determinante

- A inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- Sea A triangular, $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- $det(A) = det(A^t)$
- $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$
- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Definición 6

Nucleo de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$Nu(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0 \in \mathbb{R}^m\}$$

Definición 7

Imagen de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m / \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = y\}$$

Propiedad 5

Teorema de la dimensión $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$dim(Nu(A)) + dim(Im(A)) = n$$

Definición 8

- Rango fila de A es cantidad de filas l.i.

- Rango columna de A es cantidad de columnas l.i.

Propiedad 6

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, son equivalentes

- A inversible.
- $\nexists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, tal que $Ax = 0$
- Las columnas de A son l.i.
- Las filas de A son l.i.

[1]

Propiedad 7

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- Si A t.i. $\Rightarrow A^{-1}$ es t.i.

[2]

Definición 9

Norma vectorial
$\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ define una norma vectorial si

- $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

[1] ej 21 práctica 1
[2] ej 23 práctica 1

Definición 10

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$

Definición 11

$\|x\|_\infty = max_{1 \leq i \leq n}(|x_i|)$

2.2. Ejercicios

3. Practica 2

3.1. Definiciones, propiedades,etc.

3.2. Ejercicios

4. Practica 3

4.1. Definiciones, propiedades,etc.

Definición 12

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice simetrica definida positiva (s.d.p.) si

$$A \text{ es simétrica.}$$

$$x^t A x > 0 \ \forall x \neq \vec{0} \text{ con } x \in \mathbb{R}^n$$

Propiedad 8

A sdp $\Rightarrow$ A es inversible.

Dem

Supongamos A no inversible. $\exists\ x^* \neq \vec{0} / Ax^* = \vec{0} \Rightarrow x^{*t} A x^* = 0$ Abs!

Propiedad 9

Sea A simétrica. DP $\Leftrightarrow$ las submatrices principales son no singulares. [3]

Propiedad 10

Sea A sdp $\Rightarrow$ $A = LU$

Propiedad 11

Sea A sdp $\Leftrightarrow$ $A = LL^t$ (*factorización de Cholesky*) donde L es triangular inferior con no necesariamente 1s en la diagonal. [4]

Propiedad 12

Sea A sdp. $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$

[3] $\Rightarrow$ de teórica. $\Leftarrow$ ejercicio 9 de práctica 3

[4] $\Rightarrow$ de teórica. $\Leftarrow$ de ejercicio 8 de práctica 3 que dice
Si $A = LL^t$ es una factorización de A con L una matriz triangular inferior con elementos de la diagonal positivos, A es sdp.

- Si x e y son l.i. $|x^tAy| < \sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$
- Si x e y son l.d. $|x^tAy| = \sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$

[5]

4.2. Ejercicios

[5] Ejercicio 4 de práctica 3