**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
**Seconda prova intercorso - Classe 1 (resto 0)**
8/6/2020

Ogni esercizio vale 10 punti. Sono valutati i tre esercizi che ricevono punteggio più elevato.

**Esercizio 1** Una sequenza booleana è costituita da 5 bit uguali a **0** e 4 bit uguali a **1**. Se si scelgono a caso 3 bit di tale sequenza, sia $X$ la variabile aleatoria che descrive il numero di bit uguali a **0** presenti tra quelli scelti. Ricavare le seguenti quantità:
(i) la densità di probabilità discreta $p(k) = P(X = k)$, per $k = 0, 1, 2, 3$
(ii) la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico
(iii) $P(X \geq 2 | X \geq 1)$ e $P(X < 2 | X < 3)$
(iv) il valore atteso di $|X - 2|$.

**Esercizio 2** Sia $X$ una variabile aleatoria continua avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x-1)^2, & \text{per } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la costante $c$.
(ii) Calcolare il valore atteso $\mu = E(X)$ e la varianza $\sigma^2 = Var(X)$.
(iii) Posto $Y = (X - 1)/2$, ricavare $E(Y)$, $E(Y^2)$ e $Var(Y)$.

**Esercizio 3** Il tempo di esecuzione di una procedura è descritto da una variabile aleatoria esponenziale $X$ avente valore atteso 4 minuti.
(i) Quanto vale la probabilità che l'esecuzione della procedura termini prima di 4 minuti?
(ii) Quanto vale la probabilità che l'esecuzione della procedura termini dopo 2 minuti?
(iii) Se l'esecuzione della procedura non ha avuto termine a 2 minuti dall'inizio, quanto vale la probabilità che termini prima dei successivi 2 minuti?
(iv) Se $Y$ è una variabile aleatoria che ha la stessa distribuzione di $X$, e se le due variabili sono indipendenti, calcolare $E(X + Y)$, $E(X \cdot Y)$, $E[(X - Y)^2]$.

**Esercizio 4** Un esperimento consiste nel lanciare a caso 4 monete. Sia $X$ il numero di volte che esce testa, e sia $Y$ il numero d'ordine del primo lancio in cui esce testa, mentre $Y = 0$ se non esce mai testa.
(i) Ricavare la probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ per ogni $x$ e $y$.
(ii) Stabilire se $X$ e $Y$ sono indipendenti.
(iii) Ricavare la covarianza di $(X, Y)$ e commentare il risultato ottenuto.
(iv) Determinare $P(X = Y \,|\, X \leq 1)$ e $P(X \leq 1 \,|\, X = Y)$.

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
**RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI**
8/6/2020 – Classe 1 (resto 0)

**Esercizio 1** Poiché si estraggono a caso 3 bit da una sequenza costituita da 9 bit, in un problema in cui l'ordine non è rilevante si ha che il numero di combinazioni possibili è

$$\binom{9}{3} = \frac{(9)_3}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84.$$

(i) Quindi $X$ ha distribuzione ipergeometrica con densità di probabilità discreta data da

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{4}{3-k}}{84}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Si ha

$$p(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{4}{3}}{84} = \frac{1 \cdot 4}{84} = \frac{4}{84} = 0{,}048 \qquad p(1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{84} = \frac{5 \cdot 6}{84} = \frac{30}{84} = 0{,}357$$

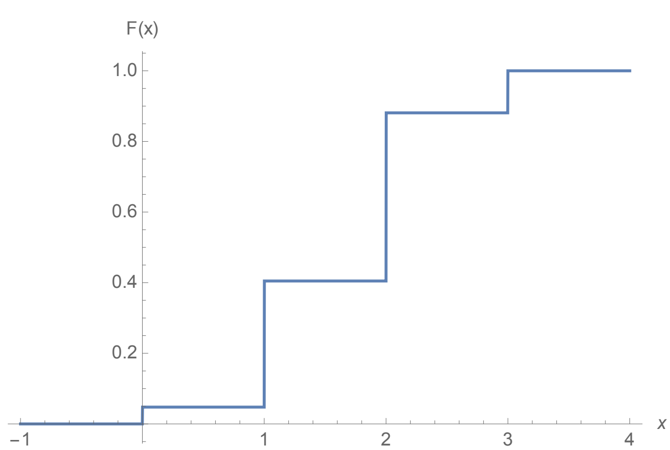
$$p(2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{84} = \frac{10 \cdot 4}{84} = \frac{40}{84} = 0{,}476 \qquad p(3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{0}}{84} = \frac{10 \cdot 1}{84} = \frac{10}{84} = 0{,}119.$$

(ii) La funzione di distribuzione $F(x) = P(X \le x) = \sum_{k:\, k \le x} p(k)$ è data da

$$F(x) = 0, \quad x < 0; \qquad F(x) = \frac{4}{84}, \quad 0 \le x < 1; \qquad F(x) = \frac{34}{84}, \quad 1 \le x < 2;$$

$$F(x) = \frac{74}{84}, \quad 2 \le x < 3; \qquad F(x) = 1, \quad x \ge 3.$$

L'andamento grafico di $F(x)$ è il seguente:



(iii) Si ha

$$P(X \geq 2|X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - F(2^-)}{1 - F(1^-)} = \frac{1 - \frac{34}{84}}{1 - \frac{4}{84}} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

e

$$P(X < 2|X < 3) = \frac{P(X < 2, X < 3)}{P(X < 3)} = \frac{P(X < 2)}{P(X < 3)} = \frac{F(2^-)}{F(3^-)} = \frac{\frac{34}{84}}{\frac{74}{84}} = \frac{34}{74} = \frac{17}{37} = 0{,}459.$$

(iv) Il valore atteso di $|X - 2|$ è

$$E(|X - 2|) = \sum_{k=0}^{3} |k - 2| \, p(k) = 2 \cdot \frac{4}{84} + 1 \cdot \frac{30}{84} + 0 \cdot \frac{40}{84} + 1 \cdot \frac{10}{84} = \frac{48}{84} = \frac{4}{7} = 0{,}571.$$

**Esercizio 2** La densità di probabilità di $X$ è

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x-1)^2, & \text{per } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Per ricavare la costante $c$ richiediamo che sia $f(x) \geq 0$ per ogni $x$ reale, e $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Quindi deve essere $c \geq 0$, e inoltre (ponendo $y = x - 1$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c \int_0^2 (x-1)^2\,dx = c \int_{-1}^1 y^2\,dy = c\,\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = c\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = c\,\frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{3}{2}.$$

(ii) Il valore atteso di $X$ è

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x\,(x-1)^2\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4} - 2\,\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}\left[\frac{16}{4} - 2\,\frac{8}{3} + \frac{4}{2}\right] = \frac{3}{2}\left[6 - \frac{16}{3}\right] = 1.$$

Inoltre

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x^2\,(x-1)^2\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5} - 2\,\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{2}\left[\frac{32}{5} - 2\,\frac{16}{4} + \frac{8}{3}\right] = \frac{3}{2}\left[-\frac{8}{5} + \frac{8}{3}\right] = \frac{8}{5}.$$

pertanto la varianza è

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{8}{5} - 1^2 = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

(iii) Posto $Y = (X-1)/2$, per ricavare $E(Y)$, $E(Y^2)$ e $Var(Y)$ notiamo che

$$E(Y) = E\left(\frac{X-1}{2}\right) = \frac{\mu - 1}{2} = 0,$$

$$E(Y^2) = E\left(\frac{(X-1)^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\,E[(X-1)^2] = \frac{1}{4}\,\sigma^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{20} = 0{,}15 = Var(Y).$$

**Esercizio 3** La variabile aleatoria $X$ è esponenziale con valore atteso $\mu = E(X) = 4 = 1/\lambda$, quindi $\lambda = 1/4$, e pertanto la funzione di distribuzione di $X$ è

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-x/4}, \qquad x \geq 0.$$

(i) La probabilità che l'esecuzione della procedura termini prima di 4 minuti è

$$P(X \leq 4) = F(4) = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}368 = 0{,}632$$

(ii) La probabilità che termini dopo 2 minuti è

$$P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-1/2}) = e^{-1/2} = 0{,}607$$

(iii) Se l'esecuzione della procedura non ha avuto termine a 2 minuti dall'inizio, la probabilità che termini prima dei successivi 2 minuti è

$$P(X < 4 \,|\, X > 2) = \frac{P(X < 4, X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(2 < X < 4)}{P(X > 2)} = \frac{F(4) - F(2)}{1 - F(2)}$$

$$= \frac{1 - e^{-1} - (1 - e^{-1/2})}{1 - (1 - e^{-1/2})} = \frac{e^{-1/2} - e^{-1}}{e^{-1/2}} = \frac{0{,}607 - 0{,}368}{0{,}607} = 0{,}393$$

invero, dalla proprietà di assenza di memoria si ha

$$P(X < 4 \,|\, X > 2) = 1 - P(X > 4 \,|\, X > 2) = P(X < 2) = F(2) = 1 - e^{-1/2} = 0{,}393.$$

(iv) Se $Y$ è una variabile aleatoria che ha la stessa distribuzione di $X$, e se le due variabili sono indipendenti, si ha, per la linearità

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2\,E(X) = 2 \cdot 4 = 8,$$

per l'indipendenza

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = 4 \cdot 4 = 16,$$

e inoltre

$$E[(X - Y)^2] = E[X^2 - 2\,X\,Y + Y^2] = E[X^2] - 2\,E[X\,Y] + E[Y^2] = 32 - 2 \cdot 16 + 32 = 32,$$

essendo

$$E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 16 + 16 = 32 = E[Y^2].$$

Equivalentemente, si ha

$$E[(X - Y)^2] = E[(X - \mu - (Y - \mu))^2] = E[(X - \mu)^2] - 2\,E[(X - \mu)(Y - \mu)] + E[(Y - \mu)^2]$$

$$= Var(X) - 2\,Cov(X, Y) + Var(Y) = 2\,Var(X) = 2\,\frac{1}{\lambda^2} = 2 \cdot 16 = 32.$$

**Esercizio 4** Un esperimento consiste nel lanciare a caso 4 monete. Sia $X$ il numero di volte che esce testa, e sia $Y$ il numero d'ordine del primo lancio in cui esce testa, mentre $Y = 0$ se non esce mai testa.

(i) Per ricavare la probabilità congiunta $p(x, y)$ notiamo che

| $\omega$ | $X$ | $Y$ | $\omega$ | $X$ | $Y$ | $\omega$ | $X$ | $Y$ | $\omega$ | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0000 | 0 | 0 | 0100 | 1 | 2 | 1000 | 1 | 1 | 1100 | 2 | 1 |
| 0001 | 1 | 4 | 0101 | 2 | 2 | 1001 | 2 | 1 | 1101 | 3 | 1 |
| 0010 | 1 | 3 | 0110 | 2 | 2 | 1010 | 2 | 1 | 1110 | 3 | 1 |
| 0011 | 2 | 3 | 0111 | 3 | 2 | 1011 | 3 | 1 | 1111 | 4 | 1 |

quindi

| $x \setminus y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/16 |
| 1 | 0 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 4/16 |
| 2 | 0 | 3/16 | 2/16 | 1/16 | 0 | 6/16 |
| 3 | 0 | 3/16 | 1/16 | 0 | 0 | 4/16 |
| 4 | 0 | 1/16 | 0 | 0 | 0 | 1/16 |
| $p_Y(y)$ | 1/16 | 8/16 | 4/16 | 2/16 | 1/16 | 1/10 |

(ii) Si ha che $X$ e $Y$ non sono indipendenti, essendo

$$p(0,0) = \frac{1}{16} \neq p_X(0)\, p_Y(0) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16}$$

(iii) Risulta

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{8}{16} + 2 \cdot \frac{4}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$E(X\,Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{16}$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{49}{16} = 3{,}0625$$

La covarianza di $(X, Y)$ è quindi

$$Cov(X, Y) = E(X\,Y) - E(X)\,E(Y) = \frac{49}{16} - 2 \cdot \frac{13}{8} = -\frac{3}{16} = -0{,}1875 < 0$$

pertanto $X$ e $Y$ sono negativamente correlate.

(iv) Si ha

$$P(X = Y \,|\, X \leq 1) = \frac{P(X = Y, X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{2/16}{5/16} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

e

$$P(X \leq 1 \,|\, X = Y) = \frac{P(X \leq 1, X = Y)}{P(X = Y)} = \frac{2/16}{4/16} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$