Esempio. In un esperimento si generano sequenze di n bit casuali, tali che ogni bit, indipendentemente dagli altri, assume valore **1** oppure **0** con probabilità $1/2$. Dati gli eventi $A = \{$almeno un bit assume valore **1**$\}$, $B_k = \{$esattamente k bit assumono valore **1**$\}$ e $C_k = \{$i primi k bit assumono valore **1**$\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, calcolare

(i) $P(A)$, $P(B_k)$ e $P(C_k)$;

(ii) $P(A \cap B_k)$, $P(A \cap C_k)$ e $P(B_k \cap C_k)$;

(iii) $P(A \cup B_k \mid C_k)$ e $P(B_k \mid C_k)$.

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ $\quad P(\overline{A}) = \frac{1}{2^n}$ $\quad P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}$

"nessun bit ha valore 1"
(n bit sono = 0)

$$P(B_k) = \frac{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$P(C_k) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = 2^{-k} = \frac{1}{2^k}$$

$P(A \cap B_k) = P(B_k)$

$P(A \cap C_k) = P(C_k)$

$P(B_k \cap C_k) = \frac{1}{2^n}$

$$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot \ldots}_{\substack{k \\ 1}}\ \underbrace{\ldots\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{\substack{n-k \\ 0}}$$

$P(A \cup B_k \mid C_k) \overset{*}{=} P(A \mid C_k) = 1$ $\quad P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$

$P(B_k \mid C_k) = \frac{1}{2^{n-k}}$

$$\overset{*}{=} P(A \mid C_k) + P(B_k \mid C_k) - P(A \cap B_k \mid C_k)$$

$$= \underbrace{\frac{P(A \cap C_k)}{P(C_k)}}_{\frac{P(C_k)}{P(C_k)} = 1} + \underbrace{\frac{P(B_k \cap C_k)}{P(C_k)}}_{\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^n} \cdot 2^k = \cancel{\frac{1}{2^{n-k}}}} - \underbrace{\frac{P(A \cap B_k \cap C_k)}{P(C_k)}}_{\cancel{\frac{1}{2^{n-k}}}} = 1$$

Esempio. Un negozio di elettronica riceve prodotti da tre fornitori F_1, F_2, F_3. Il 50% dei prodotti disponibili è fornito da F_1, il 20% da F_2 ed il 30% da F_3. Tuttavia, il 5% dei prodotti forniti da F_1 presenta dei difetti, mentre per F_2 e F_3 tale percentuale è pari a 3% e 6%, rispettivamente.

(i) Scelto a caso un prodotto, qual è la probabilità che sia difettoso?

(ii) Se un prodotto a caso è difettoso, qual è la probabilità che sia stato fornito da F_1?

$P(F_1) = \frac{1}{2}$ $\quad P(F_2) = \frac{1}{5}$ $\quad P(F_3) = \frac{3}{10}$ $\quad$ D = "il prodotto è difettoso"

$P(D \mid F_1) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ $\quad P(D \mid F_2) = \frac{3}{100}$

$P(D \mid F_3) = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$

$$P(D) = P(D \mid F_1) \cdot P(F_1) + P(D \mid F_2) \cdot P(F_2) + P(D \mid F_3) \cdot P(F_3)$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{50} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{40} + \frac{3}{500} + \frac{9}{500}$$

$$= \frac{1}{40} + \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{500}_{125}} = 0.049 = 4{,}9\%$$

$$\frac{25 + 24}{1000} = \frac{49}{1000}$$

$$P(F_1 \mid D) = \frac{P(D \mid F_1) \cdot P(F_1)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{49}{1000}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{40}} \cdot \frac{\cancel{1000}^{\,25}}{49} = \frac{25}{49}$$

Esempio. Si effettuano 3 trasmissioni indipendenti su di un canale di comunicazione rumoroso, per cui ad ogni trasmissione (indipendentemente dalle altre) l'output risulta essere **1** con probabilità 0,6 e **0** con probabilità 0,4. Posto

$A = \{$per almeno una delle 3 trasmissioni l'output è **0**$\}$,

$B = \{$nelle prime 2 trasmissioni i valori in output sono diversi$\}$,

(i) stabilire se A e B sono indipendenti,

(ii) calcolare $P(\overline{A} \mid B)$ e $P(\overline{B} \mid A)$,

(iii) ricavare $P(\overline{A} \cup B)$.

A e B indipendenti
$\iff P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6) = 1 - 0{,}216 = 0{,}784$

$P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$

$P(A \cap B) = P(B) = 0{,}48$ $\quad$ A e B non sono indipendenti

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - 1 = 0$$

$$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{0{,}48}{0{,}784} = 0{,}38$$

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) = 0{,}216 + 0{,}48 = 0{,}696$$

Esempio. Una lista contiene alcuni nominativi di dipendenti di un'azienda. Sappiamo che il 30% dei nominativi della lista sono dirigenti, e il restante 70% sono impiegati. Inoltre, il 50% dei nominativi della lista sono laureati, e il restante 50% sono diplomati. Infine, il 40% dei laureati della lista sono dirigenti.

Se si sceglie un nominativo della lista a caso, calcolare la probabilità che

(i) sia un dirigente diplomato,

(ii) sia un impiegato laureato,

(iii) sia un dirigente o un laureato.

(iv) Se si sceglie un nominativo a caso tra gli impiegati, qual è la probabilità che sia un laureato?

$P(\text{DIRIG}) = \frac{3}{10}$

$P(\text{IMPIEG}) = \frac{7}{10}$

$P(L) = P(D) = \frac{1}{2}$

$P(\text{DIRIG} \mid L) = \frac{2}{5}$

$\hookrightarrow = \frac{P(\text{DIRIG} \cap L)}{P(L)}$

$P(\text{DIRIG} \cap D)$

$P(\text{DIRIG}) = P(\text{DIRIG} \cap L) + P(\text{DIRIG} \cap D)$

$$\Rightarrow P(\text{DIRIG} \cap D) = \underbrace{P(\text{DIRIG})}_{3/10} - \underbrace{P(\text{DIRIG} \cap L)}_{= P(\text{DIRIG} \mid L) \cdot P(L)}$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{IMPIEG.} \cap L) = \underbrace{P(\text{IMPIEG.})}_{7/10} - P(\text{IMPIEG} \cap D)$$

$$= \frac{7}{10} - \left(P(D) - P(\text{DIRIG} \cap D)\right)$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{10}_{5}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{DIRIG} \cup L) = P(\text{DIRIG}) + P(L) - P(\text{DIRIG.} \cap L)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(L \mid \text{IMPIEG}) = \frac{P(\text{IMPIEG} \cap L)}{P(\text{IMPIEG})} = \frac{3/\cancel{10}}{7/\cancel{10}} = \frac{3}{7}$$

Esempio. Si lanciano indipendentemente 3 monete, di cui le prime 2 sono non truccate mentre la terza è truccata, nel senso che mostra testa con probabilità $1/3$ e croce con probabilità $2/3$. Posto $A = \{$esce testa almeno una volta nei 3 lanci$\}$ e $B = \{$nei primi 2 lanci si ha lo stesso risultato$\}$, stabilire se ognuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa, giustificando le risposte:

(i) $P(\overline{A}) + P(\overline{B}) \leq 1$; V

(ii) A e B sono indipendenti; F

(iii) $P(B \mid A) = P(A \cup B)$; F

(iv) $P(A \mid B) = 1 - P(A \mid \overline{B})$. F

- TTT
- TCT
- CTT
- TTC

- CCC
- CTC
- CCT
- TCC

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$$P(\overline{A}) + P(\overline{B}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} \leq 1 \text{ ok}$$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ $\quad P(A \cap B) =$

TTC
TTT
CCT

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{\cancel{6}} = \frac{1}{3}$$

$$P(B \mid A) \overset{?}{=} P(A \cup B)$$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{\,2}}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6}{6} = 1$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{3}{6} \cdot 2 = 1$$