Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 20/4/2018 – ore 9-11

Esercizio 1 Un esperimento consiste nel generare un vettore $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, in cui ciascun elemento v_k indipendentemente dagli altri può assumere valore 0, 1 o 2 con uguale probabilità.
(i) Determinare la cardinalità dello spazio campionario. [**1 punto**]
(ii) Calcolare la probabilità che i primi due elementi sono pari a 0. [**2 punti**]
(iii) Qual è la probabilità che il vettore contenga almeno un elemento pari ad 1? [**2 punti**]
(iv) Sapendo che il vettore contiene almeno un elemento pari ad 1, qual è la probabilità che i primi due elementi sono pari a 0? [**3 punti**]

Esercizio 2 Una rete è guasta nel 15% dei casi. Le richieste di utilizzo della rete vengono effettuate in orario serale nel 25% dei casi. Se una richiesta di uso della rete viene effettuata in orario serale allora la rete è guasta con probabilità 0,4.
(i) Calcolare la probabilità condizionata che la rete sia funzionante dato che la richiesta di uso viene effettuata in orario non serale. [**3 punti**]
(ii) Si può affermare che gli eventi “rete guasta” e “richiesta effettuata in orario serale” sono indipendenti? [**3 punti**]

Esercizio 3 Il *data base* di un corso universitario contiene 120 nominativi, riferiti a 50 studenti del I anno, 40 studenti del II anno, e 30 studenti del III anno. La percentuale di studenti che hanno superato l'esame di lingua inglese è 20% per gli studenti del I anno, 50% per quelli del II anno, e 90% per quelli del III anno.
(i) Se si sceglie a caso un nominativo dal *data base*, quanto vale la probabilità che lo studente abbia superato l'esame di lingua inglese? [**3 punti**]
(ii) Se lo studente scelto a caso ha superato l'esame di lingua inglese, qual è la probabilità che sia del I anno? del II anno? del III anno? [**3 punti**]
(iii) Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto (ii) vale 1. [**1 punto**]

Esercizio 4 Nel lancio a caso di 3 dadi, diciamo che si ha una pseudo-concordanza al lancio k-esimo se in tale lancio esce il numero k oppure $k+1$ (per $k = 1, 2, 3$).
(i) Quanto vale la probabilità che nei primi 2 lanci si abbia almeno una pseudo-concordanza? [**3 punti**]
(ii) Quanto vale la probabilità che nei 3 lanci si abbia una sola pseudo-concordanza? [**3 punti**]
(iii) Stabilire se i seguenti eventi sono indipendenti:

$A = \{$nei primi 2 lanci si ha almeno una pseudo-concordanza$\}$,

$B = \{$nei ultimi 2 lanci si ha al più una pseudo-concordanza$\}$.

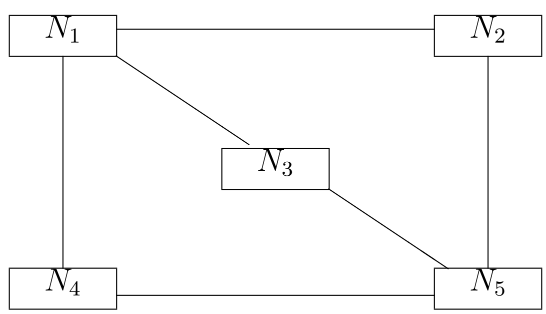
[**3 punti**]

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 20/4/2018 – ore 11-13

Esercizio 1 Una rete è costituita da 3 unità; la prima è funzionante con probabilità 1/4, la seconda è funzionante con probabilità 1/2, la terza è funzionante con probabilità 3/4, ognuna indipendentemente dalle altre.
(i) Quanto vale la probabilità che nessuna unità della rete sia funzionante? [**2 punti**]
(ii) Quanto vale la probabilità che almeno una unità della rete sia funzionante? [**2 punti**]
(iii) Quanto vale la probabilità che la terza unità della rete sia funzionante sapendo che almeno una unità della rete è funzionante? [**3 punti**]

Esercizio 2 Si scelgono a caso 3 squadre tra le 20 del campionato di calcio di Serie A, di cui 5 hanno più di 60 punti. Poniamo:
$A = \{$al più una delle 3 squadre scelte ha più di 60 punti$\}$,
$B = \{$almeno una delle 3 squadre scelte ha più di 60 punti$\}$.
(i) Calcolare $P(A)$ e $P(B)$. [**3 punti**]
(ii) Stabilire se A e B sono eventi indipendenti. [**4 punti**]

Esercizio 3 Ciascuno dei 6 archi del seguente grafo, indipendentemente dagli altri, può essere guasto o funzionante. La probabilità di funzionamento di ognuno è qui indicata:
$P(N_1, N_2) = P(N_1, N_3) = P(N_2, N_5) = 1/2, \quad P(N_1, N_4) = P(N_3, N_5) = P(N_4, N_5) = 2/3.$



Si invia un messaggio scegliendo uno dei percorsi: (N_1, N_2, N_5), (N_1, N_3, N_5), (N_1, N_4, N_5).
(i) Se si sceglie a caso uno dei 3 percorsi, quanto vale la probabilità che il messaggio sia inviato su un percorso i cui archi sono entrambi funzionanti? [**3 punti**]
(ii) Se il messaggio è inviato su un percorso i cui archi sono entrambi funzionanti, qual è la probabilità che sia (N_1, N_2, N_5)? (N_1, N_3, N_5)? (N_1, N_4, N_5)? [**3 punti**]
(iii) Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto (ii) vale 1. [**1 punto**]

Esercizio 4 Un'urna contiene 12 biglie, di cui 3 sono bianche, 4 sono rosse, 5 sono blu. Si effettuano 3 estrazioni senza reinserimento.
(i) Qual è la probabilità che le biglie estratte siano di colori diversi? [**3 punti**]
(ii) Qual è la probabilità che tra le biglie estratte ve ne sia almeno una blu? [**3 punti**]
(iii) Qual è la probabilità che le biglie estratte siano dello stesso colore? [**3 punti**]

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 20/4/2018 – ore 9-11

Esercizio 1 Un esperimento consiste nel generare un vettore $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, in cui ciascun elemento v_k indipendentemente dagli altri può assumere valore 0, 1 o 2 con uguale probabilità.
(i) La cardinalità dello spazio campionario corrisponde al numero di disposizioni composte di 3 oggetti in n classi, quindi

$$|S| = 3^n.$$

(ii) La probabilità dell'evento $A = \{\text{i primi due elementi sono pari a } 0\}$ è

$$P(A) = \frac{3^{n-2}}{3^n} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

poiché la sua cardinalità corrisponde al numero di disposizioni composte di 3 oggetti in $n-2$ classi. Equivalentemente, essendo $E_k = \{\text{l'elemento } k\text{-esimo vale } 0\}$, si ha

$$P(A) = P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

(iii) La probabilità dell'evento $B = \{\text{il vettore contiene almeno un elemento pari ad } 1\}$ è

$$P(B) = P(G_1 \cup \ldots \cup G_n) = 1 - P(\overline{G}_1 \cap \ldots \cap \overline{G}_n) = 1 - P(\overline{G}_1) \cdots P(\overline{G}_n)$$

essendo $G_k = \{\text{l'elemento } k\text{-esimo vale } 1\}$. Poiché risulta

$$P(\overline{G}_k) = 1 - P(G_k) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

si ha

$$P(B) = 1 - \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(iv) Sapendo che il vettore contiene almeno un elemento pari ad 1, la probabilità condizionata che i primi due elementi sono pari a 0 è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

essendo $P(B|A) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ la probabilità che un vettore di lunghezza $n-2$ contenga almeno un elemento pari ad 1.

Esercizio 2 Ponendo $A = \{$la rete è guasta$\}$ e $B = \{$la richiesta di uso della rete viene effettuata in orario serale$\}$, dalle ipotesi note risulta

$$P(A) = 0{,}15 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}85 \qquad P(B) = 0{,}25 \qquad P(\overline{B}) = 0{,}75 \qquad P(A|B) = 0{,}4.$$

Da ciò segue che $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}10$ e quindi risulta

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}05$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}75 - 0{,}05 = 0{,}7$$

(i) Pertanto, la probabilità condizionata che la rete sia funzionante dato che la richiesta di uso viene effettuata in orario non serale è

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}7}{0{,}75} = \frac{14}{15} = 0,9\overline{3}.$$

(ii) Gli eventi A e B non sono indipendenti, poiché

$$P(A \cap B) = 0{,}1 \neq P(A)P(B) = 0{,}15 \cdot 0{,}25 = 0{,}0375 = \frac{3}{80}.$$

Esercizio 3 Sia $A = \{$lo studente scelto ha superato l'esame di lingua inglese$\}$ e $B_k = \{$lo studente scelto è iscritto all'anno k-esimo$\}$, $k = 1, 2, 3$.
(i) Se si sceglie a caso un nominativo dal *data base*, la probabilità che lo studente abbia superato l'esame di lingua inglese è (per la legge delle alternative):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i) = \frac{50}{120}\,0{,}2 + \frac{40}{120}\,0{,}5 + \frac{30}{120}\,0{,}9 = \frac{10 + 20 + 27}{120} = \frac{57}{120} = 0{,}475.$$

(ii) Se lo studente scelto a caso ha superato l'esame di lingua inglese, la probabilità che sia del I anno, del II anno, del III anno è:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{10/120}{57/120} = \frac{10}{57},$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{20/120}{57/120} = \frac{20}{57},$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{27/120}{57/120} = \frac{27}{57}.$$

(iii) Verifica:

$$\sum_{i=1}^{3} P(B_i|A) = \frac{10}{57} + \frac{20}{57} + \frac{27}{57} = 1.$$

Esercizio 4 Nel lancio a caso di 3 dadi, diciamo che si ha una pseudo-concordanza al lancio k-esimo se in tale lancio esce il numero k oppure $k+1$ (per $k = 1, 2, 3$). Quindi, se si pone $C_k = \{$si ha una pseudo-concordanza al lancio k-esimo$\}$ per $k = 1, 2, 3$ si ha

$$P(C_k) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(i) La probabilità che nei primi 2 lanci si abbia almeno una pseudo-concordanza è, per l'indipendenza,

$$P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1)P(C_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

e quindi

$$P(C_1 \cup C_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

(ii) La probabilità che nei 3 lanci si abbia una sola pseudo-concordanza è

$$P(C_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3) + P(\overline{C}_1 \cap C_2 \cap \overline{C}_3) + P(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

(iii) Per stabilire se i seguenti eventi sono indipendenti:

$A = \{$nei primi 2 lanci si ha almeno una pseudo-concordanza$\}$,

$B = \{$nei ultimi 2 lanci si ha al più una pseudo-concordanza$\}$,

notiamo che

$$P(A) = P(C_1 \cup C_2) = \frac{5}{9},$$

$$P(B) = P(C_2 \cap \overline{C}_3) + P(\overline{C}_2 \cap C_3) + P(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_3) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9},$$

$$P(A \cap B) = P(C_2 \cap \overline{C}_3) + P(C_1 \cap \overline{C}_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Pertanto A e B non sono indipendenti, essendo

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9} \neq P(A)\,P(B) = \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 20/4/2018 – ore 11-13

Esercizio 1 Sia $F_k = \{$l'unità k-esima è funzionante$\}$, per $k = 1, 2, 3$. Allora risulta:
(i) La probabilità che nessuna unità della rete sia funzionante è

$$P(\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \overline{F}_3) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{3}{32} = 0{,}09375.$$

(ii) La probabilità che almeno una unità della rete sia funzionante è

$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = 1 - P(\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \overline{F}_3) = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32} = 0{,}90625.$$

(iii) La probabilità che la terza unità della rete sia funzionante sapendo che almeno una unità della rete è funzionante è

$$P(F_3 | F_1 \cup F_2 \cup F_3) = \frac{P(F_3)}{P(F_1 \cup F_2 \cup F_3)} = \frac{3/4}{29/32} = \frac{24}{29} = 0{,}8276.$$

Esercizio 2 Si scelgono a caso 3 squadre tra le 20 del campionato di calcio di Serie A, di cui 5 hanno più di 60 punti, con
$A = \{$al più una delle 3 squadre scelte ha più di 60 punti$\}$,
$B = \{$almeno una delle 3 squadre scelte ha più di 60 punti$\}$.
(i) Si ha

$$P(A) = \frac{\binom{5}{0}\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{455}{1140} + \frac{525}{1140} = \frac{980}{1140} = 0{,}8596$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = 1 - \frac{455}{1140} = \frac{685}{1140} = 0{,}6009.$$

(ii) Gli eventi A e B non sono eventi indipendenti poiché

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{525}{1140} = 0{,}4605 \neq P(A)\,P(B) = 0{,}5165.$$

Esercizio 3 Definiamo gli eventi $F = \{\text{il percorso scelto è funzionante}\}$, e $S_{ijk} = \{\text{si è scelto il percorso } (N_i, N_j, N_k)\}$. Si ha

$$P(S_{125}) = P(S_{135}) = P(S_{145}) = \frac{1}{3},$$

$$P(F|S_{125}) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad P(F|S_{135}) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \qquad P(F|S_{145}) = \frac{2}{3}\,\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

(i) Quindi, se si sceglie a caso uno dei 3 percorsi, la probabilità che il messaggio sia inviato su un percorso i cui archi sono entrambi funzionanti è

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|S_{125})P(S_{125}) + P(F|S_{135})P(S_{135}) + P(F|S_{145})P(S_{145}) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right)\frac{1}{3} = \frac{37}{36}\,\frac{1}{3} = \frac{37}{108} = 0{,}3426. \end{aligned}$$

(ii) Si ha pertanto, per la formula di Bayes,

$$P(S_{125}|F) = \frac{P(F|S_{125})P(S_{125})}{P(F)} = \frac{9/108}{37/108} = \frac{9}{37} = 0{,}243$$

$$P(S_{135}|F) = \frac{P(F|S_{135})P(S_{135})}{P(F)} = \frac{12/108}{37/108} = \frac{12}{37} = 0{,}324$$

$$P(S_{145}|F) = \frac{P(F|S_{145})P(S_{145})}{P(F)} = \frac{16/108}{37/108} = \frac{16}{37} = 0{,}432.$$

(iii) Si verifica che la somma delle probabilità calcolate al punto (ii) vale 1:

$$P(S_{125}|F) + P(S_{135}|F) + P(S_{145}|F) = \frac{9}{37} + \frac{12}{37} + \frac{16}{37} = 1.$$

Esercizio 4 Un'urna contiene 12 biglie, di cui 3 sono bianche, 4 sono rosse, 5 sono blu. Si effettuano 3 estrazioni senza reinserimento.

(i) La probabilità che le biglie estratte siano di colori diversi è

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2}} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} = 0{,}\overline{27}.$$

(ii) La probabilità che tra le biglie estratte ve ne sia almeno una blu è

$$1 - \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = 1 - \frac{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}}{220} = 1 - \frac{35}{220} = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44} = 0{,}8409.$$

(iii) La probabilità che le biglie estratte siano dello stesso colore è

$$\frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1 + 4 + 10}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} = 0{,}0682.$$