Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Prima prova intercorso - Classe 1 (resto 0)
4/5/2020 (accesso alle 14:00, prova dalle 15:00 alle 17:00)

Esercizio 1 Da un'urna contenente 3 biglie numerate da 1 a 3 si estraggono a caso 3 biglie (con reinserimento). Diciamo che si ha una discordanza nella j-esima estrazione se in tale estrazione viene estratta una biglia avente numero diverso da j, per $j = 1, 2, 3$.
(i) Calcolare la probabilità che si abbiano in totale k discordanze, per $k = 0, 1, 2, 3$.
(ii) Determinare la somma delle probabilità ottenute al punto (i). Si può dare una giustificazione al risultato ottenuto?

Esercizio 2 In un corso universitario il 30% degli studenti effettua tirocinio esterno e segue il corso d'inglese. Inoltre, tra gli studenti che seguono il corso d'inglese, il 60% effettua tirocinio interno. Infine, l'80% degli studenti effettua tirocinio interno oppure segue il corso d'inglese. Se si sceglie uno studente a caso, qual è la probabilità
(i) che effettui tirocinio interno?
(ii) che effettui tirocinio interno e segua il corso d'inglese?
(iii) che effettui tirocinio esterno e non segua il corso d'inglese?
(iv) Sussiste indipendenza tra l'effettuare tirocinio esterno e seguire il corso d'inglese?

Esercizio 3 Si estrae una biglia a caso da un'urna che ne contiene 4, numerate **000**, **011**, **101** e **110**. Sia $A_i =$"si estrae una biglia con **0** nella posizione i-esima", $i = 1, 2, 3$. Stabilire se le seguenti relazioni sono soddisfatte:
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2)$, $\qquad P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_3)$,
$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)\,P(A_3)$, $\qquad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$.
Cosa si può affermare circa l'indipendenza degli eventi A_1, A_2 e A_3?

Esercizio 4 Nell'esecuzione di una procedura informatica si può verificare un errore fatale. Da un'indagine svolta risulta che l'errore può essere causato o da un'errata scrittura del software, oppure dall'errato inserimento dell'input. Valgono le seguenti condizioni:
• Se l'input non viene inserito correttamente, la procedura ha il 90% di probabilità di incorrere in un errore fatale.
• Se l'input viene inserito correttamente, si verifica un errore fatale con probabilità 1%.
• L'input non viene inserito correttamente solo 1 volta su 100.
(i) Qual è la probabilità che si verifichi un errore fatale?
(ii) Se si verifica un errore fatale, qual è la probabilità che l'errore sia stato causato dall'errato inserimento dell'input?
(iii) L'occorrenza di un errore è indipendente dall'errato inserimento dell'input, o meno?

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
4/5/2020 – - Classe 1 (resto 0)

Esercizio 1 Le estrazioni sono indipendenti, poiché sono con reinserimento. In ogni prova si ha una discordanza con probabilità $p = 2/3$.
(i) Quindi, se poniamo $A_k = \{\text{si hanno } k \text{ discordanze}\}$, per $k = 0, 1, 2, 3$ si ha

$$P(A_k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k} = \binom{3}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k},$$

ovvero

$$P(A_0) = \binom{3}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} = 0{,}037$$

$$P(A_1) = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} = 0{,}222$$

$$P(A_2) = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} = 0{,}444$$

$$P(A_3) = \binom{3}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{3-3} = 1 \cdot \frac{8}{27} \cdot 1 = \frac{8}{27} = 0{,}296.$$

(ii) Per la formula del binomio, di Newton, si ha

$$\sum_{k=0}^{3} P(A_k) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^3 = 1,$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^{3} P(A_k) = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} + \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = 1.$$

La somma è pari a 1 in quanto gli eventi A_k, per $k = 0, 1, 2, 3$, sono necessari e a 2 a 2 incompatibili.

Esercizio 2 Nell'esperimento della scelta a caso di uno studente poniamo $A = \{$lo studente effettua tirocinio esterno$\}$ e $B = \{$lo studente segue il corso d'inglese$\}$. Dalle ipotesi segue

$$P(A \cap B) = 0{,}3 \qquad P(\overline{A}|B) = 0{,}6 \qquad P(\overline{A} \cup B) = 0{,}8$$

(i) Risulta

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(A \cap B)$$

e quindi

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5.$$

(ii) Si ha

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}|B)\, P(B) = P(\overline{A}|B)\, [P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)]$$

ossia

$$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6\, [0{,}3 + P(\overline{A} \cap B)] = 0{,}18 + 0{,}6\, P(\overline{A} \cap B).$$

Si ricava quindi

$$0{,}4\, P(\overline{A} \cap B) = 0{,}18$$

da cui segue

$$P(\overline{A} \cap B) = \frac{0{,}18}{0{,}4} = 0{,}45.$$

(iii) Essendo $P(\overline{A}) = 0{,}5$ si ha $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}5$ e quindi

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2.$$

(iv) Non sussiste indipendenza, in quanto $P(\overline{A}|B) = 0{,}6 \neq P(\overline{A}) = 0{,}5$.

Esercizio 3 Descriviamo gli eventi A_i, $i = 1, 2, 3$, e le rispettive probabilità:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{011, 000\} \quad \Rightarrow \quad P\left(A_1\right) = \frac{1}{2} \\ A_2 &= \{101, 000\} \quad \Rightarrow \quad P\left(A_2\right) = \frac{1}{2} \\ A_3 &= \{110, 000\} \quad \Rightarrow \quad P\left(A_3\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{000\} \quad \Rightarrow \quad P\left(A_1 \cap A_2\right) = \frac{1}{4} \\ A_1 \cap A_3 &= \{000\} \quad \Rightarrow \quad P\left(A_1 \cap A_3\right) = \frac{1}{4} \\ A_2 \cap A_3 &= \{000\} \quad \Rightarrow \quad P\left(A_2 \cap A_3\right) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{000\} \quad \Rightarrow \quad P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \frac{1}{4}.$$

Di conseguenza,
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2)$, $\qquad P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_3)$,
$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)\, P(A_3)$, $\qquad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3)$.
Gli eventi A_1, A_2, A_3 sono indipendenti a coppie, ma non sono indipendenti.

Esercizio 4 Consideriamo gli eventi:

- $A =$ "si verifica un errore fatale";
- $B =$ "l'input non viene inserito correttamente".

Per ipotesi sappiamo che

- $P(A|B) = 0{,}9$;
- $P\left(A|\overline{B}\right) = 0{,}01$;
- $P(B) = \frac{1}{100} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$

(i) La probabilità che si verifichi un errore fatale è

$$P(A) = P(A|B)\,P(B) + P\left(A|\overline{B}\right)P(\overline{B}) = 0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 0{,}0189.$$

(ii) Dal teorema di Bayes abbiamo che:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A|B)\,P(B) + P\left(A|\overline{B}\right)P(\overline{B})} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}0189} \\ &= \frac{0{,}009}{0{,}0189} = \frac{10}{21} \\ &\simeq 0{,}47619. \end{aligned}$$

(iii) Poiché

$$P(A)\,P(B) = 0{,}0189 \cdot 0{,}01 = 0{,}000189 \neq P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = 0{,}009,$$

allora non c'è indipendenza tra l'occorrenza di un errore e l'errato inserimento dell'input. Ciò si ricava anche dal fatto che

$$P(A|B) = 0{,}9 \neq P(A) = 0{,}0189.$$