Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Seconda prova intercorso - (ore 9-11)
Fisciano, 04/06/2019

Esercizio 1
Da un'urna contenente 2 biglie nere e 2 biglie bianche si effettuano 4 estrazioni in sequenza. Sia X la variabile aleatoria che conta in quale estrazione si è ottenuta una biglia nera per la seconda volta.
(i) Ricavare la distribuzione di probabilità di X; **(3 punti)**
(ii) determinare la funzione di distribuzione $F_X(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico; **(3 punti)**
(iii) calcolare valore atteso e varianza di X; **(2 punti)**
(iv) valutare $P(0 < X \leq 3 | X > 2)$. **(2 punti)**

Esercizio 2
Sia X una variabile aleatoria normale di valore medio $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
Posto $Y = X/n$, per $n \in \mathbb{N}$,
(i) determinare il valore atteso e la varianza di Y; **(2 punti)**
(ii) calcolare $P(Y > \frac{1}{n} \,|\, Y \leq \frac{2}{n})$; **(4 punti)**
(ii) individuare il valore di n tale che $P(Y > n) = 0{,}0668$. **(4 punti)**

Esercizio 3
Si consideri la variabile aleatoria doppia (X, Y), avente la seguente densità discreta congiunta

$x \backslash y$	1	2
1	c	$\frac{c}{2}$
2	$\frac{(1-c)}{2}$	$c - \frac{1}{2}$

(i) Determinare la costante c e ricavare le densità marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$; **(3 punti)**
(ii) stabilire se X ed Y sono indipendenti e identicamente distribuiti; **(3 punti)**
(iii) calcolare $Cov(X, Y)$ e $Var(X + Y)$ **(4 punti)**.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Seconda prova intercorso - (ore 11-13)
Fisciano, 04/06/2019

Esercizio 1
Un esperimento consiste nel generare a caso sequenze di bit di lunghezza 4. Ogni bit assume valore 0 con probabilità 1/3 e valore 1 con probabilità 2/3, indipendentemente dagli altri. Sia X la variabile aleatoria che conta in quale posizione compare il valore 1 per la prima volta.
(i) Ricavare la distribuzione di probabilità di X; **(2,5 punti)**
(ii) determinare la funzione di distribuzione $F_X(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico; **(2,5 punti)**
(iii) calcolare valore atteso e varianza di X; **(2,5 punti)**
(iv) valutare $P(X > 0 \,|\, X < 4)$. **(2,5 punti)**

Esercizio 2
Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore della costante c; **(3 punti)**
(ii) ricavare $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico; **(4 punti)**
(iii) determinare il valore atteso e la varianza di X. **(3 punti)**

Esercizio 3
Un esperimento consiste nel lanciare due dadi equi, ciascuno con 4 facce. Siano X ed Y le variabili aleatorie così definite:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se la somma degli esiti dei due dadi è un numero pari,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se l'esito del primo dado è strettamente maggiore di quello del secondo,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la densità discreta congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ e le densità marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$; **(3 punti)**
(ii) stabilire se X e Y sono indipendenti; **(3 punti)**
(iii) calcolare $Cov(X, Y)$ e $Var(X - Y)$. **(4 punti)**

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Seconda prova intercorso - (ore 9-11)
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 04/06/2019

Esercizio 1 Il numero delle possibili sequenze è dato dal numero delle permutazioni di 4 oggetti di cui $k_1 = 2$ e $k_2 = 2$ identici tra loro. Si hanno quindi le seguenti $4!/(2! \cdot 2!) = 6$ possibili sequenze

ω	X
nnbb	2
nbnb	3
nbbn	4
bnbn	4
bnnb	3
bbnn	4

e, pertanto,

(i)

$$P(X=2) = \frac{1}{6}, \qquad P(X=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad P(X=4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(ii)
$F(x) = 0$ per $x < 2$,
$F(x) = 1/6$ per $2 \leq x < 3$,
$F(x) = 1/2$ per $3 \leq x < 4$,
$F(x) = 1$ per $x \geq 4$.
(iii)

$$E(X) = 2 \cdot \frac{2}{12} + 3 \cdot \frac{4}{12} + 4 \cdot \frac{6}{12} = \frac{10}{3},$$
$$E(X^2) = 4 \cdot \frac{2}{12} + 9 \cdot \frac{4}{12} + 16 \cdot \frac{6}{12} = \frac{35}{3},$$
$$Var(X) = \frac{35}{3} - \frac{100}{9} = \frac{5}{9}.$$

(iv)

$$P(0 < X \leq 3 | X > 2) = \frac{P(2 < X \leq 3)}{P(X > 2)} = \frac{P(X=3)}{1 - P(X \leq 2)} = \frac{2/6}{5/6} = 2/5 = 0{,}4.$$

Esercizio 2 Risulta

(i)

$$E(Y) = \frac{E(X)}{n} = \frac{1}{n}, \quad Var(Y) = \frac{Var(X)}{n^2} = \frac{4}{n^2}.$$

(ii)

$$P(Y > 1/n \,|\, Y < 2/n) = \frac{P(1/n < Y < 2/n)}{P(Y < 2/n)} = \frac{P(\frac{1/n-1/n}{2/n} < Z < \frac{2/n-1/n}{2/n})}{P(Z < \frac{2/n-1/n}{2/n})}$$

$$= \frac{P(0 < Z < 0{,}5)}{P(Z < 0{,}5)} = \frac{\Phi(0{,}5) - \Phi(0)}{\Phi(0{,}5)} = \frac{0{,}6915 - 0{,}5}{0{,}6915} = 0{,}277.$$

(iii)

$$0{,}0668 = P(Y > n) = P(Z > \frac{n^2-1}{2}) = 1 - \Phi\left(\frac{n^2-1}{2}\right),$$

e quindi

$$\Phi\left(\frac{n^2-1}{2}\right) = 0{,}9332 \equiv \Phi\left(\frac{3}{2}\right),$$

da cui si ricava

$$\frac{n^2-1}{2} = \frac{3}{2},$$

ossia $n = 2$. (La soluzione $n = -2$ non è accettabile)

Esercizio 3

(i) Distribuzioni congiunta e marginali sono date da:

$x\backslash y$	1	2	$P(X=x)$
1	c	$\frac{c}{2}$	$\frac{3}{2}c$
2	$\frac{(1-c)}{2}$	$c-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}c$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}c-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}c$

Pertanto deve essere

$$\frac{4}{2}c = 1, \text{ ossia } c = 1/2.$$

Con il valore di $c = 1/2$ si ottiene

$x\backslash y$	1	2	$P(X=x)$
1	$1/2$	$1/4$	$3/4$
2	$1/4$	0	$1/4$
$P(Y=y)$	$3/4$	$1/4$	1

(ii) Non sono indipendenti, essendo

$$p_{X,Y}(2,2) = 0 \neq p_X(2) \cdot p_Y(2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Invece X ed Y sono identicamente distribuite.

(iii)

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4}, \qquad E(X) = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}, \qquad E(Y) = \frac{5}{4},$$

$$E(X^2) = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}, \qquad E(Y^2) = \frac{7}{4},$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}, \qquad Var(Y) = \frac{3}{16},$$

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{6}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{1}{16},$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Seconda prova intercorso - (ore 11-13)
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 04/06/2019

Esercizio 1

Risulta

ω	p	X
0000	1/81	0
0001	2/81	4
0010	2/81	3
0011	4/81	3
0100	2/81	2
0101	4/81	2
0110	4/81	2
0111	8/81	2
1000	2/81	1
1001	4/81	1
1010	4/81	1
1011	8/81	1
1100	4/81	1
1101	8/81	1
1110	8/81	1
1111	16/81	1

(i)

$P(X=0)=\frac{1}{81}$, $P(X=1)=\frac{54}{81}$, $P(X=2)=\frac{18}{81}$, $P(X=3)=\frac{6}{81}$, $P(X=4)=\frac{2}{81}$.

(ii) $F(x)=0$ per $x<0$,
$F(x)=1/81$ per $0\le x<1$,
$F(x)=55/81$ per $1\le x<2$,
$F(x)=73/81$ per $2\le x<3$,
$F(x)=79/81$ per $3\le x<4$,
$F(x)=1$ per $x\ge 4$.

(iii)

$$E(X)=1\cdot\frac{54}{81}+2\cdot\frac{18}{81}+3\cdot\frac{6}{81}+4\cdot\frac{2}{81}=\frac{116}{81},$$
$$E(X^2)=1\cdot\frac{54}{81}+4\cdot\frac{18}{81}+9\cdot\frac{6}{81}+16\cdot\frac{2}{81}=\frac{212}{81},$$
$$Var(X)=\frac{212}{81}-\left(\frac{116}{81}\right)^2=\frac{3716}{6561}.$$

(iv)

$$P(X>0\,|\,X<4)=\frac{P(0<X<4)}{P(X<4)}=\frac{F_X(4^-)-F_X(0)}{F_X(4^-)}=\frac{78}{79}.$$

Esercizio 2 Risulta

(i)

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{3c}{2} = 1 \iff c = 2/3$$

e pertanto $f(x) = \frac{2x}{3}$, $1 < x < 2$.

(ii) Essendo $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, si ha $F(x) = 0$ per $x < 1$;

$$F(x) = \int_1^x \frac{2t}{3}\mathrm{d}t = \frac{x^2-1}{3} \quad \text{per } 1 \leq x < 2;$$

$F(x) = 1$ per $x \geq 2$.

(iii) Risulta

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_1^2 \frac{2x^2}{3}\mathrm{d}x = \frac{14}{9},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_1^2 \frac{2x^3}{3}\mathrm{d}x = \frac{5}{2},$$

$$Var(X) = \frac{5}{2} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{13}{162}.$$

Esercizio 3

Risulta

ω	X	Y
11	1	0
12	0	0
13	1	0
14	0	0
21	0	1
22	1	0
23	0	0
24	1	0
31	1	1
32	0	1
33	1	0
34	0	0
41	0	1
42	1	1
43	0	1
44	1	0

(i) Distribuzioni congiunta e marginali sono date da:

$x\backslash y$	0	1	$p_X(x)$
0	4/16	4/16	8/16
1	6/16	2/16	8/16
$p_Y(y)$	10/16	6/16	1

(ii) Non sono indipendenti, essendo

$$p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{4} \neq p_X(0) \cdot p_Y(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16}.$$

(iii)

$$E(X \cdot Y) = \frac{2}{16}, \qquad E(X) = \frac{8}{16}, \qquad E(Y) = \frac{6}{16},$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \qquad Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{3}{8} - \frac{9}{64} = \frac{15}{64},$$

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = -\frac{1}{16},$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = \frac{1}{4} + \frac{15}{64} + \frac{2}{16} = \frac{39}{64}.$$