Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Prima prova intercorso - Classe 1 (resto 0)
28/4/2021 (aula 3)

Esercizio 1 Un canale di trasmissione è soggetto ad errore, ossia ogni volta che si invia un bit, indipendentemente da altri invii, questo può essere modificato con la probabilità indicata:

bit trasmesso	bit ricevuto	probabilità	bit trasmesso	bit ricevuto	probabilità
0	**0**	0,8	**1**	**0** (errore)	0,3
0	**1** (errore)	0,2	**1**	**1**	0,7

(i) Calcolare la probabilità che trasmettendo la sequenza binaria **011**
– si verifichi un solo errore,
– si verifichi almeno un errore.
(ii) Se nel trasmettere la sequenza **011** si è verificato un solo errore, qual è la probabilità che l'errore si sia verificato nella trasmissione del primo bit?
(iii) Se nel trasmettere la sequenza **011** si è verificato almeno un errore, qual è la probabilità che si sia verificato un errore nella trasmissione del primo bit?

Soluzione
(i) Poniamo $A = \{\text{trasmettendo la sequenza } \mathbf{011} \text{ si verifica un solo errore}\}$,
$E_k = \{\text{si verifica un errore nella trasmissione del } k\text{-esimo bit}\}$, per $k = 1, 2, 3$. Si ha

$$P(A) = P[(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3)].$$

Poiché gli eventi sono incompatibili, dalla proprietà di additività segue

$$P(A) = P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) + P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3).$$

Per l'indipendenza degli invii, si ha

$$P(A) = P(E_1)P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}) + P(\overline{E_1})P(E_2)P(\overline{E_3}) + P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(E_3).$$

Poiché $P(E_1) = 0{,}2$ e $P(E_2) = P(E_3) = 0{,}3$, e ricordando che $P(\overline{E_k}) = 1 - P(E_k)$, si ha

$$P(A) = 0{,}2\,(1 - 0{,}3)(1 - 0{,}3) + (1 - 0{,}2)\,0{,}3\,(1 - 0{,}3) + (1 - 0{,}2)(1 - 0{,}3)\,0{,}3$$

da cui segue

$$P(A) = 0{,}434.$$

La probabilità che trasmettendo la sequenza binaria **011** si verifichi almeno un errore è

$$P(B) := P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 1 - P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}),$$

quindi si ha

$$P(B) = 1 - (1 - 0{,}2)\,(1 - 0{,}3)\,(1 - 0{,}3) = 0{,}608.$$

(ii) $P(E_1|A) = \dfrac{P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})}{P(A)} = \dfrac{0{,}2\,(1 - 0{,}3)(1 - 0{,}3)}{0{,}434} = 0{,}2258.$

(iii) $P(E_1|E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \dfrac{P(E_1)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}608} = 0{,}3289.$

Esercizio 2 Una procedura esegue un dato compito in meno di 10 secondi nel 70% delle esecuzioni. Inoltre, la procedura esegue il compito ricorrendo a moduli esterni nel 60% delle esecuzioni. Infine, nel 60% delle esecuzioni che non ricorrono a moduli esterni la procedura esegue il compito in meno di 10 secondi. Per un'esecuzione scelta a caso, qual è la probabilità
(i) che esegua il compito in meno di 10 secondi e non ricorra a moduli esterni?
(ii) che non esegua il compito in meno di 10 secondi e non ricorra a moduli esterni?
(iii) che esegua il compito in meno di 10 secondi oppure ricorra a moduli esterni?
(iv) che esegua il compito in meno di 10 secondi e ricorra a moduli esterni?
(v) C'è indipendenza tra eseguire il compito in meno di 10 secondi e ricorrere a moduli esterni?

Soluzione
Ponendo $A = \{$la procedura esegue il compito in meno di 10 secondi$\}$,
$B = \{$la procedura esegue il compito ricorrendo a moduli esterni$\}$,
risulta $\quad P(A) = 0{,}7 \quad P(B) = 0{,}6 \quad P(A|\overline{B}) = 0{,}6.$
Quindi si ha:
(i)
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B})\, P(\overline{B}) = 0{,}6\,(1 - 0{,}6) = 0{,}24$$
(ii)
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}4 - 0{,}24 = 0{,}16$$
(iii)
$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$$
(iv)
$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}7 - 0{,}24 = 0{,}46$$
(v)
$$P(A) \neq P(A|\overline{B}) \quad \Rightarrow \quad A \text{ e } B \text{ non sono indipendenti.}$$

Esercizio 3 Un esperimento consiste nello scegliere a caso 3 bit da una sequenza costituita da 6 bit pari a **0** e da 5 bit pari a **1**.
(i) Qual è la cardinalità dello spazio campionario?
(ii) Qual è la probabilità che almeno uno dei bit scelti sia pari a **0**?
(iii) Qual è la probabilità che i bit scelti siano tutti uguali?
(iv) Se i bit scelti sono tutti uguali, qual è la probabilità che siano tutti pari a **0**?

Soluzione
(i) Si ha

$$|S| = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 165.$$

(ii)

$$1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{5}{3}}{|S|} = 1 - \frac{10}{165} = \frac{155}{165} = \frac{31}{33} = 0{,}\overline{93}$$

(iii)

$$\frac{\binom{6}{0}\binom{5}{3}}{|S|} + \frac{\binom{6}{3}\binom{5}{0}}{|S|} = \frac{10}{165} + \frac{20}{165} = \frac{30}{165} = \frac{2}{11} = 0{,}\overline{18}$$

(iv)

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{5}{0}}{\binom{6}{0}\binom{5}{3} + \binom{6}{3}\binom{5}{0}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$$

Esercizio 4 Supponiamo che il 15% della popolazione è infetto da un virus.
Se una persona infetta effettua un test, la probabilità che il test evidenzi presenza di virus è 0,9.
Se una persona sana effettua un test, la probabilità che il test evidenzi assenza di virus è 0,95.

Se una persona scelta a caso nella popolazione si sottopone al test,
(i) qual è la probabilità che il test evidenzi presenza del virus?
(ii) qual è la probabilità che la persona sia infetta se il test evidenzia presenza del virus?
(iii) La presenza di virus è indipendente dal fatto che il test evidenzi presenza del virus, o meno?

Soluzione
Ponendo $A = \{$una persona scelta a caso nella popolazione è infetta$\}$,
$B = \{$il test evidenzia presenza di virus$\}$,
risulta $\quad P(A) = 0{,}15 \quad P(B|A) = 0{,}9 \quad P(\overline{B}|\overline{A}) = 0{,}95.$
Quindi si ha:
(i)

$$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|\overline{A})\,P(\overline{A}) = 0{,}9 \cdot 0{,}15 + (1 - 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}15) = 0{,}1775$$

(ii)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}15}{0{,}1775} = 0{,}7606$$

(iii)

$$P(A) \neq P(A|B) \quad \Rightarrow \quad A \text{ e } B \text{ non sono indipendenti.}$$