Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica – Classe 1

Seconda prova intercorso – 31/5/2021, ore 16

Esercizio 1 Sia X una variabile aleatoria che assume valori in $S = \{1, 2, 4, 8\}$ e tale che

$$p(2k) = \frac{p(k)}{k} \qquad \text{per } k = 1, 2, 4.$$

(i) Determinare $p(k) = P(X = k)$, per $k \in S$.
(ii) Ricavare $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.
(iii) Calcolare il valore di α tale che $E[X(\alpha - X)] = 0$.
(iv) Per $k = 2, 4, 8$ ricavare $P(X = k|X > 1)$, e $E(X|X > 1) = \sum_k k\, P(X = k|X > 1)$.

Esercizio 2 Il tempo di durata di una batteria (in giorni) è descritto da una variabile aleatoria continua X avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(x+2)^2}, & x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore di c.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di X.
(iii) Calcolare la mediana di X.
(iv) Se vi sono 5 batterie che hanno tempo di durata dello stesso tipo di X, sotto ipotesi di indipendenza, qual è la probabilità che almeno 2 di esse abbiano durata maggiore di un giorno?

Esercizio 3 In un esperimento si generano a caso 2 coppie di bit: (b_1, b_2) e (b_3, b_4). Sia X il numero complessivo di bit pari a $\mathbf{1}$, e sia Y il numero di bit uguali in ordine nelle due coppie:

$$X = \sum_{k=1}^{4} I(b_k = \mathbf{1}), \qquad Y = \sum_{i=1}^{2} I(b_i = b_{2+i}),$$

dove I è la funzione indicatrice, tale che $I(A) = 1$ se A è vera, e $I(A) = 0$ se A è falsa.
(i) Ricavare la funzione di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Ricavare valore atteso e varianza di X e di Y, ed il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iv) Calcolare $P(X = k|Y = 2)$ per $k = 0, \ldots, 4$ e $E(X|Y = 2)$.

Esercizio 4 Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale tale che

$$E(1 - X) + \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{2} X\Big) = 0, \qquad E(X) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}(X) = 0.$$

(i) Ricavare $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.
(ii) Determinare $P(X > 0)$, $P(X < 1)$, $P(X < 1|X > 0)$,
(iii) Se Y è una variabile aleatoria avente la stessa distribuzione di X, e indipendente da X, ricavare $E(X - Y)$, $\mathrm{Var}(X - Y)$ e $E[(X + Y)^2]$.
(iv) Se T è una variabile aleatoria avente la stessa distribuzione di X, tale che $Cov(X, T) = 1$, ricavare $E(X - T)$, $\mathrm{Var}(X - T)$ e $E[(X + T)^2]$.