Esercizio 2 Una procedura effettua la generazione a caso di 4 interi x_1, x_2, x_3, x_4 con la seguente regola: ciascun numero x_i, indipendentemente dagli altri, viene scelto a caso (senza reimmissione) nell'insieme dei primi 4 numeri interi positivi, quindi $x_i \in \{1, 2, \ldots, 4\}$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

(i) Determinare la cardinalità dello spazio campionario.

(ii) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di interi consecutivi uguale sulla procedura genera un numero uguale a 1, ottenere la funzione di probabilità $p(x) = P(X = x)$, per $x = 1, 2, 3, 4$.

(iii) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

(iv) Valutare le seguenti probabilità: $P(X \leq 2)$, $P(X = 1)$, $P(X > 2|X > 1)$

1222
1234
1233
1224
1223
1232

1)

$|S| = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

II) X = num di volte in cui si genera 1

$P(X=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X=2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{4+6+4}{48} = \frac{22}{48} = \frac{11}{24}$

1 x x
1 x 1

1 x x
1 x x

$P(X=3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{6+1}{24} = \frac{1}{4}$

1 1 x
1 1 1

1 x 1
1 1 x

$P(X=4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$\sum_{k=1}^{4} P(X=k) = \frac{1}{4} + \frac{11}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$E[X] = \sum_{k=1}^{4} k \cdot P(X=k) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{11}{24} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{11}{12} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$

$= 1 + \frac{15}{12} = \frac{25}{12}$

$Var\ X = E[X^2] - (E[X])^2 = 5 - \left(\frac{25}{12}\right)^2 = \frac{95}{144}$

$E[X^2] = \sum_{k=1}^{4} k^2 \cdot P(X=k) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{11}{24} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{24} =$

$= \frac{5}{2} + \frac{15}{6} = \frac{30}{6} = 5$

$P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{11}{24} = \frac{17}{24}$

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(X > 2 | X > 1) = \frac{P(X > 2 \cap X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = \frac{1 - P(X \leq 2)}{3/4} = \frac{1 - \frac{17}{24}}{3/4} = \frac{7}{24} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{18}$

Esercizio 3 Il tempo di durata dell'incisione di una procedura è descritto da una variabile aleatoria continua X avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(x+1)^2} & x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore di c.

(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di $F(x) = P(X \leq x)$.

(iii) Calcolare la mediana di X, ossia il valore m tale che $F(m) = 1/2$.

(iv) Se un dato evento si verifica indipendentemente dalla procedura, quanto vale la probabilità che esso si verifichi nel tempo di durata maggiore di 1?

$\int_0^{+\infty} \frac{c}{(x+1)^2} dx = 1 \iff c \int_0^{+\infty} (x+1)^{-2} dx = 1 \iff c \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{+\infty} = 1$

$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$\iff c\left(0 - (-1)\right) = 1 \iff c = 1$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{(t+1)^2} dt$

$= \left[-\frac{1}{(t+1)}\right]_0^x = -\frac{1}{x+1} - (-1) = 1 - \frac{1}{x+1}$

$F(m) = \frac{1}{2} \iff 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{m+1}$

$\iff m + 1 = 2 \iff m = 1$

p = prob. di successo $= P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{1+1}\right) = \frac{1}{2}$

$\binom{4}{2}(p)^2 \cdot (1-p)^{4-2} = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{3}{8}$

α = il presente cancer

β = β presenta cancer

Esercizio 1 Un dispositivo effettua un controllo automatico su ogni di lotto β_i (i) ricevuto da una controllata di divisione. Dalle precedenti osservazioni risulta che un dato di tipo α presenta un malfunzionamento con probabilità 0.3, mentre un dato di tipo $\bar{\alpha}$ presenta un malfunzionamento a causa sua probabilità 0.1. Inoltre se un dato di tipo α non presenta errore, allora il dato di tipo β presenta errori con probabilità 0.2.

(i) Determinare la probabilità che un dato di tipo β presenti errori.

(ii) Calcolare la probabilità che un dato di tipo α presenti errori sapendo che il dato di tipo β presenta errori.

(iii) Si supponga che un dato sia privo "il dato di tipo α presenta errore", "il dato di tipo β presenta errore" sono indipendenti e positivamente correlati o negativamente correlati.

(iv) Supponendo che in una settimana il dispositivo riceva 7 controlli indipendenti, qual è la probabilità che in una settimana si presenti almeno una volta un errore in un dato di tipo α?

$P(\alpha) = 0.4 \quad P(\beta|\alpha) = 0.3 \quad P(\beta|\bar{\alpha}) = 0.2$

$P(\beta) = P(\beta|\alpha) \cdot P(\alpha) + P(\beta|\bar{\alpha}) \cdot P(\bar{\alpha}) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.9$

$= 0.12$

$P(\alpha|\beta) = \frac{P(\beta|\alpha) \cdot P(\alpha)}{P(\beta)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.21} = 0.14$

$P(\alpha \cap \beta) = P(\alpha) \cdot P(\beta)$

$P(\alpha|\beta) = \frac{P(\alpha \cap \beta)}{P(\beta)}$

$P(\alpha) \cdot P(\beta) = 0.4 \cdot 0.21 = 0.084$

$P(\alpha \cap \beta) = P(\alpha|\beta) \cdot P(\beta) = 0.14 \cdot 0.21$

$= 0.029$

$P(\alpha \cap \beta) > P(\alpha) \cdot P(\beta)$ pos. correlati

$P(\alpha \cap \beta) < P(\alpha) \cdot P(\beta)$ neg. correlati

$P(\text{almeno 1 err. } \alpha \text{ in 7 gg}) = 1 - P(\text{nessun err. } \alpha \text{ in 7 gg})$

$= 1 - (0.9)^7$

29/01/2013

Esercizio 3 Un esperimento consiste nel lanciare 3 monete, di cui le prime 2 sono non truccate, mentre la terza è truccata, nel senso che mostra testa con probabilità 1/4. Sia X il numero di volte che esce testa nei 3 lanci, e Y il numero di variazioni, dove una variazione corrisponde ad un risultato diverso da quello ottenuto nel lancio precedente.

(i) Calcolare la densità congiunta di (X, Y).

(ii) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$ e la covarianza di (X, Y).

(iii) Calcolare il valore medio e la varianza di X e di Y.

(iv) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).

Y \ X	0	1	2	3	$P_Y(y)$
0	3/16	0	0	1/16	1/4
1	0	1/16	1/16	0	1/2
2	0	3/16	1/16	0	1/4
$P_X(x)$	3/8	1/4	3/16	1/16	1

n volte sup. testa

n variaz.

$p(0,0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

$p(1,0) = 0$

$p(2,0) = 0$

$p(3,0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$p(0,1) = 0$

$p(1,1) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}_{TCC} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}_{CCT} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$p(2,1) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}_{TTC} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}_{CTT} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$p(3,1) =$

$p(0,2) = 0$

$p(1,2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

$p(2,2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$p(3,2) = 0$

X e Y indip. $\iff \forall x, y \quad p(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

MA $p(0,0) = 0$ e $P_X(0) = 7/16$, $P_Y(0) = 1/4$

$\frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{64} \neq 0$

X e Y non sono indip.

$E[X] = 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$

$E[X^2] = 1 \cdot \frac{7}{16} + 4 \cdot \frac{5}{16} + 9 \cdot \frac{1}{16} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$

$Var\ X = \frac{9}{4} - \frac{25}{16} = \frac{11}{16}$

$E[Y^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$Var\ Y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X} \cdot \sqrt{Var Y}} = \frac{1/8}{\frac{\sqrt{11}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$

X, Y indip. $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = \frac{11}{8} - \frac{5}{4} \cdot 1 = \frac{11}{8} - \frac{5}{4} = \frac{1}{8}$

$E[X \cdot Y] = \sum_{x,y \in S} x \cdot y \cdot p(x,y) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{3}{4} + \frac{10}{16} = \frac{11}{8}$

Esercizio 2 Un sistema prevede tre linee di comunicazione collegate ad un elaboratore centrale secondo il seguente schema

Le tre linee funzionano indipendentemente l'una dall'altra e ha a certain linea è attiva con probabilità p_i, $i = 1, 2, 3$. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di linee di comunicazione funzionanti.

(i) Determinare $P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, 3$.

(ii) Ricavare $P(x) = P(X \leq x)$ mostrandone l'andamento grafico.

(iii) Calcolare $P(X \geq 2)$.

(iv) Calcolare $E[X]$.

(v) Facoltativo: Determinare $P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, 3$, nell'ipotesi in cui ciascuna delle tre linee sia attiva con probabilità $1/2$.

$P(A_1) = 1/6$

$P(A_2) = 2/6 = 1/3$

$P(A_3) = 3/6 = 1/2$

X = num di linee funzionanti

se $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{6}$

$P(X = x) = \binom{3}{x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}$

$P(X=0) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$

$P(X=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{18} = \frac{1}{3} + \frac{5}{36} = \frac{17}{36}$

$P(X=2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$P(X=3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$

$\sum_{k=0}^{3} P(X=k) = \frac{5}{18} + \frac{17}{36} + \frac{2}{9} + \frac{1}{36} = \frac{1}{2} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{9+5+4}{18} = 1$

Esercizio 1 Un esperimento consiste nel contare superiore ordinate (rosso, giallo, verde) e nel successivo lancio di 3 dadi.

(i) Indicare il numero complessivo dei risultati $|S| = D_{3,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

(ii) Considerati i seguenti eventi:

A = $\{$ 3 numeri selezionati sono crescenti $\}$,

B = $\{$ 3 numeri selezionati sono pari $\}$,

C = $\{$ 3 numeri selezionati sono dispari $\}$,

studiare la loro indipendenza.

(iii) Stabilire se le seguenti relazioni sono vere o false:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$, $P(A \cap B) = P(B)$

123 124 125
134 135
145

234 235
245
345

$P(A) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

$P(C) = \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

$P(A) = 1/6$
$P(B) = 1/10$
$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{60}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{60}$

$P(A \cap B) = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

$P(B \cap C) = \frac{2}{60} = \frac{1}{10}$

$P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$

A, B NON IND.

B, C NON IND.

$P(A \cap C) = \frac{1}{60}$

$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$

A, C NON IND.