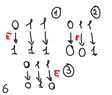
Esercizio 1 - Un canale di trasmissione è soggetto ad errore, senza aggiunta della parità, in modo indipendente. Nella sola metà dei casi, quando essere modificato, si ha perdita/inversione.

bit trasmesso	bit ricevuto	probabilità	bit trasmesso	bit ricevuto	probabilità
0	1 (errore)	0,2	1	0 (errore)	0,4
0	0	0,8	1	1	0,6

(i) Calcolare la probabilità che trasmettendo la sequenza binaria 011 si verifichi un solo errore,
si verifichi almeno un errore.
(ii) Se si trasmette la sequenza 011 e si verifica un solo errore, qual è la probabilità che l'errore si sia verificato nella trasmissione del primo bit?
(iii) Se ad trasmettere la sequenza 011 si è verificato almeno un errore, qual è la probabilità che si sia verificato nella trasmissione del primo bit?



$$P(E=1) = \underbrace{0{,}2}_{P(0\to 1)} \cdot \underbrace{0{,}6 \cdot 0{,}6}_{P(1)} + \underbrace{0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}_{P(2)}$$

$$+ \underbrace{0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}_{P(3)} = 0{,}456$$

$$P(E\geq 1) = 1 - P(E=0) \qquad P(E=0) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6$$
$$= 1 - (0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6) = 0{,}712$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \qquad P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$
$$P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$P(0\to 1) = 0{,}2$
$P(0\to 1) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6$

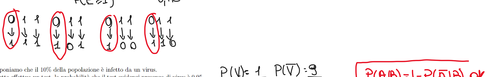
$$P(0\to 1 \mid E=1) = \frac{P(0\to 1 \cap E=1)}{P(E=1)}$$

$$\boxed{P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)}$$

Però che, sapendo già che un errore, tale errore sia sulla 1ª cifra

$$= \frac{P(1)}{P(E=1)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6}{0{,}456} = 0{,}158$$

$$P(0\to 1 \mid E\geq 1) = \frac{P(0\to 1 \cap E\geq 1)}{P(E\geq 1)} = \frac{0{,}2(0{,}6\,0{,}6 + 0{,}4\,0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4)}{0{,}712}$$



Esercizio 4 Supponiamo che il 10% della popolazione è infetto da un virus.
Se una persona infetta effettua un test, la probabilità che il test evidenzi presenza di virus è 0,95.
Se una persona sana effettua un test, la probabilità che il test evidenzi assenza di virus è 0,9.
Se una persona scelta a caso nella popolazione si sottopone al test,
(i) qual è la probabilità che il test evidenzi presenza del virus?
(ii) qual è la probabilità che la persona sia infetta se il test evidenzia presenza del virus?
(iii) La presenza di virus è indipendente dal fatto che il test evidenzi presenza del virus, o meno?

$V =$ "la persona ha il virus"
$T =$ "il test è positivo"

$$P(V) = \frac{1}{10} \qquad P(\bar{V}) = \frac{9}{10}$$
$$P(T|V) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$$
$$P(\bar{T}|\bar{V}) = \frac{9}{10} \qquad P(T|\bar{V}) = 1 - P(\bar{T}|\bar{V}) = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B) \text{ ok}}$$
$$\boxed{P(A|B) \neq 1 - P(A|\bar{B})}$$

$$P(T) = P(T \cap V) + P(T \cap \bar{V}) = P(T|V) \cdot P(V) + P(T|\bar{V}) \cdot P(\bar{V})$$
$$= \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{19}{20} + \frac{9}{10}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{37}{20} = \frac{37}{200}$$

$$P(V|T) = \frac{P(T|V) \cdot P(V)}{P(T)} = \frac{\frac{19}{20} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{37}{200}} = \frac{19}{200} \cdot \frac{200}{37} = \frac{19}{37}$$

T e V sono indipendenti?

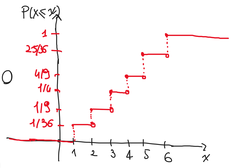
$$P(T \cap V) \overset{?}{=} P(T) \cdot P(V)$$
$$P(T) \cdot P(V) = \frac{37}{200} \cdot \frac{1}{10} = \frac{37}{2000}$$
$$P(T \cap V) = P(T|V) \cdot P(V) = \frac{19}{200} \neq$$

Esercizio 2 - Un esperimento consiste nel lanciare due volte un dado non truccato. Sia X la variabile aleatoria che descrive il massimo degli esiti dei due lanci.
(i) Determinare la distribuzione di probabilità di X, ossia $P(X = k)$, $k = 1, 2, \ldots, 6$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Sia $C =$ {il primo lancio ha avuto esito 3}; calcolare $P(X = k|C)$, per $k = 1, 2, \ldots, 6$.
(iv) Determinare $E(X) \in E(X|C)$.

$X =$ massimo esito di 2 lanci di un dado a 6 facce

$$P(X=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$
$$P(X=2) = P(2,2) + P(1,2) + P(2,1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$P(X=3) = P(3,3) + P(3,2) + P(2,3) + P(3,1) + P(1,3) = \frac{5}{36}$$
$$P(X=4) = P(4,4) + P(4,3) + P(3,4) + P(4,2) + P(2,4) + P(4,1) + P(1,4)$$
$$= \frac{7}{36}$$
$$P(X=5) = \frac{1}{36} + \frac{8}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$
$$P(X=6) = \frac{1}{36} + \frac{10}{36} = \frac{11}{36}$$
$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \overset{?}{=} 1$$
$$\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{se } k=1 \\ \frac{1}{12} & \text{se } k=2 \\ \frac{5}{36} & \text{se } k=3 \\ \frac{7}{36} & \text{se } k=4 \\ \frac{1}{4} & \text{se } k=5 \\ \frac{11}{36} & \text{se } k=6 \end{cases}$$



$$F(x) = P(X \leq x) \quad \text{se } x < 1 \quad P(X \leq x) = 0$$
$$P(X \leq 1) = \frac{1}{36}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<1 \\ 1/36 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1/9 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1/4 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 4/9 & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ 25/36 & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

$$P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$
$$P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{9} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$
$$P(X \leq 4) = \frac{1}{4} + \frac{7}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$
$$P(X \leq 5) = \frac{4}{9} + \frac{9}{36} = \frac{25}{36}$$
$$P(X \leq 6) = \frac{25}{36} + \frac{11}{36} = 1$$

se $x > 6$ $P(X \leq x) =$

$C =$ "il 1° lancio ha esito 3"

$$P(X=k|C) \quad k = 1, \ldots, 6$$
$$P(X=1|C) = 0$$
$$P(X=2|C) = 0$$
$$P(X=3|C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(X=4|C) = \frac{1}{6}$$
$$P(X=5|C) = 1/6$$
$$P(X=6|C) = 1/6$$

$$\sum_{k=1}^{6} P(X=k|C) = 0 + 0 + \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$E(X) = ?$ $\quad E(X|C) = ?$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(X=k) = 1 \cdot P(X=1) + 2\,P(X=2) + \ldots + 6 \cdot P(X=6)$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36}$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36}$$

$$E(X|C) = 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot (4+5+6) = \frac{3}{2} + \frac{15}{6} = \frac{8}{2} = 4$$