Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 11/6/2018 – ore 9-11

Esercizio 1 In ogni nodo del seguente grafo viene generato indipendentemente un bit a caso, ciascuno pari a **1** o a **0** con probabilità 1/2.

Diciamo che un arco è attivo se in almeno uno dei due nodi su cui insiste viene generato un bit pari a **1**. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero totale di archi attivi.
(i) Determinare la densità discreta $p(k) = P(X = k)$. **[2 punti]**
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$ e mostrarne il grafico. **[2 punti]**
(iii) Determinare valore atteso $\mu = E[X]$ e varianza $\sigma^2 = Var[X]$. **[2 punti]**
(iv) Calcolare $P(|X - \mu| > \sigma)$. **[2 punti]**

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua che descrive il tempo di esecuzione di un dato algoritmo. Supponiamo che la densità di probabilità di X sia

$$f(x) = \begin{cases} c\,x & \text{per } 0 < x < 10, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la costante c. **[2 punti]**
(ii) Determinare il valore atteso $\mu = E[X]$ del tempo di esecuzione dell'algoritmo. **[2 punti]**
(iii) Per quale valore di m risulta $P(X > m) = 1/2$? **[2 punti]**
(iv) Calcolare $P(X > \mu)$. **[2 punti]**

Esercizio 3 Si consideri la variabile aleatoria doppia (X, Y) avente funzione di probabilità congiunta riportata nella seguente tabella:

$x \setminus y$	0	1	2
0	$0{,}2 - p$	0,1	0,1
1	0,1	p	0,1
2	0,1	0,1	0,2

(i) Determinare i valori ammissibili di p. **[2 punti]**
(ii) Stabilire se esiste qualche valore di p per cui X e Y sono indipendenti. **[2 punti]**
(iii) Stabilire se esiste qualche valore di p per cui X e Y sono non correlate. **[2 punti]**
(iv) Calcolare $P(X = Y)$. **[2 punti]**

Esercizio 4 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X avente distribuzione normale di valore atteso $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 4$, e con Y uniforme in $(-1, 2)$.
(i) Calcolare $P(X > 0, Y > 0)$. **[2 punti]**
(ii) Ricavare $E[2X - Y + 1]$. **[2 punti]**
(iii) Determinare $Var[2X - Y + 1]$. **[2 punti]**

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 11/6/2018

Esercizio 5 Si consideri un canale di comunicazione soggetto ad errore, ossia tale che
- se si invia un bit **0**, allora si riceve **0** con probabilità 0,9 e si riceve **1** con probabilità 0,1;
- se si invia un bit **1**, allora si riceve **1** con probabilità 0,8 e si riceve **0** con probabilità 0,2.

Supponiamo di inviare la sequenza **001**, dove l'esito dell'invio di ciascun bit è indipendente dagli altri invii.
(i) Quanto vale la probabilità che non ci siano errori?
(ii) Quanto vale la probabilità che ci siano almeno 2 errori?
(iii) Quanto vale la probabilità che ci siano almeno 2 errori sapendo che c'è un errore nel terzo invio?

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 11/6/2018 – ore 9-11

Esercizio 1 (i) Esaminiamo i valori di X e la relativa densità discreta $p(k) = P(X = k)$:

$N_1\,N_2\,N_3\,N_4$	X		$N_1\,N_2\,N_3\,N_4$	X
0 0 0 0	0		1 0 0 0	2
0 0 0 1	1		1 0 0 1	3
0 0 1 0	1		1 0 1 0	3
0 0 1 1	2		1 0 1 1	2
0 1 0 0	2		1 1 0 0	3
0 1 0 1	2		1 1 0 1	3
0 1 1 0	3		1 1 1 0	3
0 1 1 1	3		1 1 1 1	3

k	0	1	2	3
$p(k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{8}{16}$

(ii) La funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$ è data da:
$F(x) = 0$ per $x < 0$,
$F(x) = 1/16$ per $0 \leq x < 1$,
$F(x) = 3/16$ per $1 \leq x < 2$,
$F(x) = 8/16$ per $2 \leq x < 3$,
$F(x) = 1$ per $x \geq 3$.
(iii) Il valore atteso è dato da

$$\mu = E[X] = \sum_{k=0}^{3} k\, p(k) = \frac{1}{16}(2 + 10 + 24) = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Il momento del secondo ordine è

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{3} k^2\, p(k) = \frac{1}{16}(2 + 20 + 72) = \frac{94}{16} = \frac{47}{8} = 5{,}875.$$

Pertanto la varianza è

$$\sigma^2 = Var[X] = E[X^2] - \mu^2 = \frac{94}{16} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{94}{16} - \frac{81}{16} = \frac{13}{16} = 0{,}8125.$$

(iv) La deviazione standard è $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}8125} = 0{,}9014$ e quindi

$$P(|X-\mu| > \sigma) = 1-P(|X-\mu| \leq \sigma) = 1-P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = 1-P(1{,}35 \leq X \leq 3{,}15)$$

$$= 1 - p(2) - p(3) = 1 - \frac{5}{16} - \frac{8}{16} = \frac{3}{16} = 0{,}1875.$$

Esercizio 2 (i) Essendo $f(x) = c\,x$ per $0 < x < 10$, richiedendo che sia $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che sia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, segue che deve essere $c \geq 0$ e

$$1 = c \int_0^{10} x\,dx = c\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=10} = c\,50 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{50} = 0{,}02.$$

(ii) Il valore atteso è

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{1}{50}\int_0^{10} x^2\,dx = \frac{1}{50}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=10} = \frac{1000}{150} = \frac{20}{3} = 6{,}\overline{6}.$$

(iii) Risulta $P(X > m) = 1/2$ per

$$\frac{1}{2} = P(X > m) = \int_m^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{50}\int_m^{10} x\,dx = \frac{1}{50}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=m}^{x=10} = 1 - \frac{m^2}{100}$$

e quindi per $m^2 = 50$. Dovendo essere $m > 0$ si ha $m = \sqrt{50} = 7{,}0711$.
(iv) Per calcolare $P(X > \mu)$ notiamo che

$$P(X > \mu) = 1 - \frac{\mu^2}{100} = 1 - \frac{1}{100}\left(\frac{20}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}.$$

Esercizio 3 (i) Poiché (X, Y) ha funzione di probabilità congiunta

$x \setminus y$	0	1	2
0	$0{,}2 - p$	$0{,}1$	$0{,}1$
1	$0{,}1$	p	$0{,}1$
2	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}2$

deve essere $p(x, y) \geq 0$ per ogni x e y, ed inoltre $\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} p(x, y) = 1$. Quindi deve essere $0{,}2 - p \geq 0$, $p \geq 0$ e $0{,}2 - p + p + 0{,}8 = 1$, e pertanto si ottiene $0 \leq p \leq 0{,}2$.
(ii) Poiché

$$p(2, 2) = 0{,}2 \neq p_X(2)p_Y(2) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$$

non esiste nessun valore di p per cui X e Y sono indipendenti.
(iii) Poiché X e Y sono scambiabili, X e Y sono identicamente distribuite. Pertanto risulta

$$E(X) = E(Y) = 0\,(0{,}4 - p) + 1\,(0{,}2 + p) + 2 \cdot 0{,}4 = 1 + p.$$

Inoltre, $E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot p + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}2 + p$, cosicché

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)\,E(Y) = 1{,}2 + p - (1 + p)^2 = 0{,}2 - p - p^2.$$

Segue che $Cov(X, Y) = 0$ per $p = \dfrac{-1 - \sqrt{1{,}8}}{2}$ (non accettabile) e per $p = \dfrac{-1 + \sqrt{1{,}8}}{2} = 0{,}1708$ (accettabile).
(iv) Risulta

$$P(X = Y) = \sum_x \sum_{y=x} p(x, y) = 0{,}2 - p + p + 0{,}2 = 0{,}4.$$

Esercizio 4 (i) Poiché X e Y sono indipendenti, con X avente distribuzione normale di valore atteso $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 4$, e con Y uniforme in $(-1, 2)$, si ha

$$P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0)P(Y > 0) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{-\mu}{\sigma}\right)\frac{2}{3} = P\left(Z > -1\right)\frac{2}{3},$$

essendo Z normale standard, e $P(Y > 0) = \frac{2-0}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$. Si ha $P\left(Z > -1\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0{,}8413$, e quindi $P(X > 0, Y > 0) = 0{,}8413 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}5609$.
(ii) Per ricavare $E[2X - Y + 1]$, dalla proprietà di linearità del valore atteso segue

$$E[2X - Y + 1] = 2 \cdot E[X] - E[Y] + 1 = 2 \cdot 2 + \frac{-1+2}{2} + 1 = 2 \cdot 2 - 0{,}5 + 1 = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

(iii) Per ricavare $Var[2X - Y + 1]$, dalla proprietà della varianza segue

$$Var[2X - Y + 1] = Var[2X] + Var[-Y] = 4\,Var[X] + Var[Y] = 4 \cdot 4 + \frac{(2-(-1))^2}{12}$$

e pertanto $Var[2X - Y + 1] = 16 + \dfrac{9}{12} = 16 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{67}{4} = 16{,}75$.

Esercizio 5 Si consideri un canale di comunicazione soggetto ad errore, ossia tale che
- se si invia un bit **0**, allora si riceve **0** con probabilità 0,9 e si riceve **1** con probabilità 0,1;
- se si invia un bit **1**, allora si riceve **1** con probabilità 0,8 e si riceve **0** con probabilità 0,2.
Si invia la sequenza **001**, dove l'esito dell'invio di ciascun bit è indipendente dagli altri invii.
(i) Poniamo $E_k = \{\text{si ha errore all'invio del bit } k\text{-esimo}\}$ per $k = 1, 2, 3$. Si ha dunque $P(E_1) = P(E_2) = 0{,}1$ e $P(E_3) = 0{,}2$; pertanto la probabilità che non ci siano errori è

$$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}648.$$

(ii) La probabilità che ci siano almeno 2 errori è

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

$$= P(E_1)P(E_2)P(\overline{E_3}) + P(E_1)P(\overline{E_2})P(E_3) + P(\overline{E_1})P(E_2)P(E_3) + P(E_1)P(E_2)P(E_3)$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2) + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}008 + 0{,}036 + 0{,}002 = 0{,}046.$$

(iii) La probabilità che ci siano almeno 2 errori sapendo che c'è un errore nel terzo invio è

$$\frac{P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0{,}036 + 0{,}002}{0{,}2} = \frac{0{,}038}{0{,}2} = 0{,}19.$$