

## Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

### I prova intercorso - Classe 1 (resto 0)

25/5/2023

**Esercizio 1** Un esperimento consiste nel generare a caso un vettore booleano di lunghezza 4.

(i) Calcolare le probabilità degli eventi seguenti:

$A = \{\text{il terzo e il quarto bit sono uguali}\};$

$B = \{\text{almeno uno dei primi due bit è pari a } 1\};$

$C = \{\text{tre bit del vettore sono pari a } 1\}.$

(ii) Calcolare le seguenti quantità e commentare i risultati in termini di indipendenza:

$P(A \cap B) - P(A)P(B),$   $P(A \cap C) - P(A)P(C),$

$P(B \cap C) - P(B)P(C),$   $P(A \cap B \cap C) - P(A)P(B)P(C).$

(iii) Determinare le seguenti probabilità condizionate:  $P(C|B), P(C|\bar{B}), P(A \cup B|C).$

**Esercizio 2** Sia  $X$  una variabile aleatoria continua avente densità di probabilità

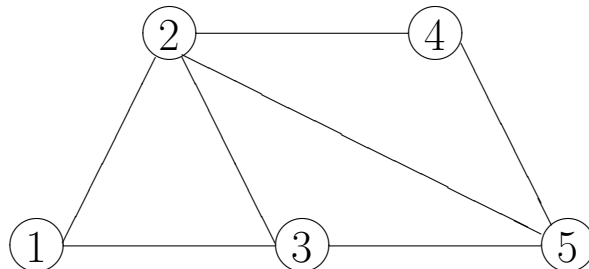
$$f(x) = \begin{cases} c(x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la costante di normalizzazione  $c$

(ii) Ricavare la funzione di distribuzione  $F(x) = P(X \leq x)$ , mostrandone l'andamento grafico.

(iii) Calcolare il quantile  $q$  tale che  $F(q) = 7/8$  e valutare  $P(X > 1/2 | X > 1/3).$

**Esercizio 3** Un esperimento consiste nello scegliere a caso 2 archi del grafo in figura.



Sia  $X$  il numero di archi scelti collegati direttamente al nodo 5, e sia  $Y$  il numero di archi scelti presenti nell'elenco seguente:  $(1, 2), (1, 3), (2, 3).$

(i) Determinare la funzione di probabilità  $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ ; stabilire se le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  sono scambiabili e se sono indipendenti.

(ii) Ricavare la covarianza di  $(X, Y)$  e stabilire se risulta  $P(X = Y) < P(X + Y = 2).$

(iii) Calcolare  $\text{Var}(X - Y)$  e  $\text{Var}(X - \tilde{X})$ , con  $X$  e  $\tilde{X}$  indipendenti e identicamente distribuite.

**Esercizio 4** Sono date 3 urne, con l'urna  $k$ -esima contenente  $k$  biglie bianche e  $4 - k$  biglie nere, con  $k = 1, 2, 3$ . Si lanciano 2 monete non truccate; se esce testa  $k - 1$  volte si estraggono due biglie a caso dall'urna  $k$ -esima, con  $k = 1, 2, 3$ .

(i) Calcolare  $P(B) = P(\{\text{le due biglie estratte sono bianche}\})$ .

(ii) Calcolare  $P(N) = P(\{\text{le due biglie estratte sono nere}\})$ .

(iii) Ricavare la probabilità che le due biglie estratte siano bianche sapendo che le due biglie estratte hanno lo stesso colore.