Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Soluzioni della I prova intercorso - Classe 1 (resto 0)
25/5/2023

Esercizio 1 Un esperimento consiste nel generare a caso un vettore booleano di lunghezza 4.
(i) Calcolare le probabilità degli eventi seguenti:
$A = \{$il terzo e il quarto bit sono uguali$\}$;
$B = \{$almeno uno dei primi due bit è pari a $\mathbf{1}\}$;
$C = \{$tre bit del vettore sono pari a $\mathbf{1}\}$.
(ii) Calcolare le seguenti quantità e commentare i risultati in termini di indipendenza:
$P(A \cap B) - P(A)\,P(B)$, $P(A \cap C) - P(A)\,P(C)$,
$P(B \cap C) - P(B)\,P(C)$, $P(A \cap B \cap C) - P(A)\,P(B)\,P(C)$.
(iii) Determinare le seguenti probabilità condizionate: $P(C|B)$, $P(C|\overline{B})$, $P(A \cup B|C)$.

Soluzione (i) Lo spazio campionario $S = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4\}$ ha cardinalità $|S| = 2^4 = 16$. Risulta:

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_3) : \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3\}, \qquad P(A) = \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{B} = \{(0, 0, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{0, 1\}, i = 3, 4\}, \qquad P(\overline{B}) = \frac{2^2}{2^4} = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{3}{4},$$

$$C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4; \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 3\}, \qquad P(C) = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

(ii) Gli eventi A e B sono indipendenti, essendo

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}, \qquad P(A \cap B) - P(A)\,P(B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

Gli eventi A e C sono indipendenti, essendo

$$P(A \cap C) = \frac{1}{8}, \qquad P(A \cap C) - P(A)\,P(C) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Gli eventi B e C non sono indipendenti, ma positivamente correlati, essendo

$$P(B \cap C) = P(C) = \frac{1}{4}, \qquad P(B \cap C) - P(B)\,P(C) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Gli eventi A, B e C non sono indipendenti, in quanto

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{8}, \qquad P(A \cap B \cap C) - P(A)\,P(B)\,P(C) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}.$$

(iii) Si ha

$$P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3},$$

$$P(C|\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap C)}{P(\overline{B})} = \frac{P(C) - P(B \cap C)}{P(\overline{B})} = \frac{1/4 - 1/4}{3/4} = 0,$$

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

$$= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{1/8}{1/4} + \frac{1/4}{1/4} - \frac{1/8}{1/4} = 1,$$

oppure $P(A \cup B|C) = \dfrac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C)}{P(C)} = 1$, essendo $C \subset A \cup B$.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x-1)^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la costante di normalizzazione c
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \le x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare il quantile q tale che $F(q) = 7/8$ e valutare $P(X > 1/2 \,|\, X > 1/3)$.

Soluzione (i) Deve essere $f(x) \ge 0$, quindi $c > 0$. Inoltre, la condizione $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ fornisce

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^1 (x-1)^2\,dx = c\int_0^1 y^2\,dy = c\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{c}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 3,$$

avendo posto $y = 1 - x$.
(ii) La funzione di distribuzione è data da:

$$F(x) = 0 \quad \text{per } x < 0;$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 3\int_0^x (t-1)^2\,dt = 3\int_{1-x}^1 y^2\,dy = y^3\Big|_{1-x}^1 = 1 - (1-x)^3 \quad \text{per } 0 \le x < 1;$$

$$F(x) = 1 \quad \text{per } x \ge 1.$$

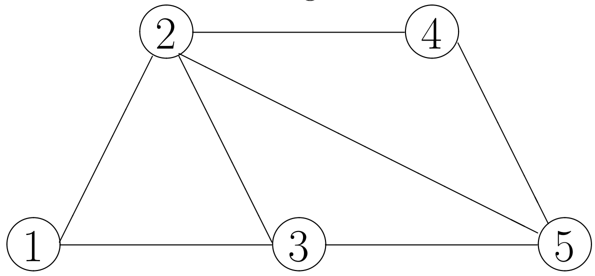
(iii) Per calcolare il quantile q tale che $F(q) = 7/8$ notiamo che

$$F(q) = \frac{7}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 1-(1-q)^3 = \frac{7}{8} \quad \Leftrightarrow \quad (1-q)^3 = \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 1-q = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{2}.$$

Per valutare $P(X > 1/2 \,|\, X > 1/3)$ notiamo che

$$P(X > 1/2 \,|\, X > 1/3) = \frac{P(X > 1/2)}{P(X > 1/3)} = \frac{(1-1/2)^3}{(1-1/3)^3} = \frac{(1/2)^3}{(2/3)^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \approx 0{,}4219.$$

Esercizio 3 Un esperimento consiste nello scegliere a caso 2 archi del grafo in figura.



Sia X il numero di archi scelti collegati direttamente al nodo 5, e sia Y il numero di archi scelti presenti nell'elenco seguente: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$.
(i) Determinare la funzione di probabilità $p(x,y) = P(X=x, Y=y)$; stabilire se le variabili aleatorie X e Y sono scambiabili e se sono indipendenti.
(ii) Ricavare la covarianza di (X,Y) e stabilire se risulta $P(X=Y) < P(X+Y=2)$.
(iii) Calcolare $\mathrm{Var}(X-Y)$ e $\mathrm{Var}(X-\tilde{X})$, con X e $\tilde{X}$ indipendenti e identicamente distribuite.

Soluzione (i) Lo spazio campionario ha cardinalità $|S| = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$. Risulta

$x \setminus y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	0	3/21	3/21	2/7
1	3/21	9/21	0	4/7
2	3/21	0	0	1/7
$p_Y(y)$	2/7	4/7	1/7	1

Si ricava che $p(x,y) = p(y,x)$ per ogni $x, y = 0, 1, 2$ pertanto X e Y sono scambiabili. Inoltre $p(0,0) = 0 \neq p_X(0)\, p_Y(0) = (2/7)^2$ pertanto X e Y non sono indipendenti.
(ii) Risulta

$$E(X) = E(Y) = \sum_{x=0}^{3} x\, p_X(x) = 1\,\frac{4}{7} + 2\,\frac{1}{7} = \frac{6}{7} \approx 0{,}8571$$

$$E(X\,Y) = \sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{3} x\, y\, p(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{9}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \approx 0{,}4286$$

$$Cov(X,Y) = E(X\,Y) - E(X)\,E(Y) = \frac{3}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = -\frac{15}{49} \approx -0{,}3061.$$

(iii) Si ha

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2\, p_X(x) = 1\,\frac{4}{7} + 4\,\frac{1}{7} = \frac{8}{7} \approx 1{,}1429$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{8}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{20}{49} = 0{,}4082.$$

Pertanto si ha

$$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,Cov(X,Y) = 2\,\frac{20}{49} - 2\left(-\frac{15}{49}\right) = \frac{70}{49} = \frac{10}{7} \approx 1{,}4286$$

$$\mathrm{Var}(X-\tilde{X}) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(\tilde{X}) = 2\,\mathrm{Var}(X) = 2\,\frac{20}{49} = \frac{40}{49} \approx 0{,}8163.$$

Esercizio 4 Sono date 3 urne, con l'urna k-esima contenente k biglie bianche e $4-k$ biglie nere, con $k=1,2,3$. Si lanciano 2 monete non truccate; se esce testa $k-1$ volte si estraggono due biglie a caso dall'urna k-esima, con $k=1,2,3$.
(i) Calcolare $P(B)=P(\{\text{le due biglie estratte sono bianche}\})$.
(ii) Calcolare $P(N)=P(\{\text{le due biglie estratte sono nere}\})$.
(iii) Ricavare la probabilità che le due biglie estratte siano bianche sapendo che le due biglie estratte hanno lo stesso colore.

Soluzione
L'urna U_1 contiene 1 biglia bianca e 3 biglie nere;
l'urna U_2 contiene 2 biglie bianche e 2 biglie nere;
l'urna U_3 contiene 3 biglie bianche e 1 biglia nera.
Sia A_k l'evento che si realizza se lanciando le 2 monete esce testa $k-1$ volte. Le 2 monete mostrano testa 0 volte (cc), 1 volta (ct, tc), 2 volte (tt), con probabilità rispettivamente 1/4, 1/2, 1/4, quindi $P(A_1)=1/4$, $P(A_2)=1/2$, $P(A_3)=1/4$.
(i) Pertanto si ha

$$P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(B|A_k)\,P(A_k)=0\,\frac{1}{4}+\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}}\,\frac{1}{2}+\frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}}\,\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\,\frac{1}{4}=\frac{5}{24}\approx 0{,}2083$$

(ii) Inoltre risulta

$$P(N)=\sum_{k=1}^{3}P(N|A_k)\,P(A_k)=\frac{\binom{1}{0}\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}\,\frac{1}{4}+\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\,\frac{1}{2}+0\,\frac{1}{4}=\frac{3}{6}\,\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}=\frac{5}{24}\approx 0{,}2083$$

(iii) Si ricava infine

$$P(B|B\cup N)=\frac{P(B)}{P(B)+P(N)}=\frac{5/24}{5/24+5/24}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$