5 Biglie $\begin{cases} 2 \text{ da } 0 \\ 1 \text{ da } 5 \\ 2 \text{ da } 10 \end{cases}$

$P(A) = P(\text{un giocatore vince almeno } 10\,€)$

$P(B) = P(\text{un giocatore vince } 2 \text{ volte } 5\,€)$

4 estrazioni

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0{,}87$

tutti giocatori non vince una volta che ogni $\in^2$

$P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}$

$\binom{4}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$

$\binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{3^3}{5^3} = \frac{4}{5}\cdot\frac{27}{125} = \frac{108}{625}$

$\binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{12}{25}$

$\binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{16}{125}$

$\binom{4}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

$P(A) = \frac{81}{625} + \frac{108}{625} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{16}{625} = 0{,}87$

$P(B) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{1}{5^2}\cdot\frac{4^2}{5^2} = 6\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{16}{25} = 0{,}0576$

Esercizio 1. Si sa che una variabile aleatoria continua ha densità di tipo triangolare se ha una densità del tipo $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare a e b in modo che f sia una densità.
(2) Determinare la funzione di ripartizione F della variabile aleatoria X con densità f.
(3) Calcolare $P(X \leq 1/2)$ e $P(X \geq 1/2 \mid X \leq 3/4)$.
(4) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 (ax+b)\,dx = 1$

$\left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + b = 1$

$\Leftrightarrow b = 1 - \frac{a}{2}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{50} & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \frac{x}{50}\,dx$

$= \frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{50}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{100}$

$E[X] = \int_0^{10} x\cdot f(x)\,dx$

$= \int_0^{10} x\cdot\frac{x}{50}\,dx = \frac{1}{50}\int_0^{10} x^2\,dx$

$= \frac{1}{50}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{1}{150}\cdot 1000 = \frac{20}{3}$

$Var X = E[X^2] - (E[X])^2$

$\int_0^{10} x^2 f(x)\,dx$

$P(X > m) = \frac{1}{2}$

$P(X > m) = 1 - P(X \leq m) = 1 - F(m) = 1 - \frac{m^2}{100} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{m^2}{100} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = 50 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{50}$

$\Leftrightarrow m = \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$

$P(X \geq m) = \int_m^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \int_m^{10} f(x)\,dx = \int_m^{10} \frac{x}{50}\,dx = \frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_m^{10}$

$= \frac{1}{50}\left[50 - \frac{m^2}{2}\right] = 1 - \frac{m^2}{100} = \frac{1}{2}$

$P(X \geq \mu) = P(X \geq \frac{20}{3}) = 1 - P(X \leq \frac{20}{3}) = 1 - F(\frac{20}{3}) = 1 - \left(\frac{20}{3}\right)^2\frac{1}{400} = 1 - \frac{400}{9}\cdot\frac{1}{400} = \frac{5}{9}$

$= \int_{20/3}^{10} f(x)\,dx = \int_{20/3}^{10} \frac{x}{50}\,dx = \frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{20/3}^{10} = \frac{1}{50}\left(50 - \frac{100}{2\cdot\frac{400}{9}}\right) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

Esercizio 2
Sia X una variabile aleatoria normale di valore medio $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
Posto $Y = X/n$, per $n \in \mathbb{N}$,
(i) determinare il valore atteso e la varianza di Y; (2 punti)
(ii) calcolare $P(Y > \frac{1}{n} \mid Y \leq \frac{2}{n})$. (4 punti)
(ii) individuare $\bar{n}$ di n tale che $P(Y > \bar{n}) = 0.0668$. (4 punti)

$Y = \frac{X}{n}$ $\quad E[Y] = ?$ $\quad Var\ Y = ?$

$E[Y] = E\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n}E[X] = \frac{1}{n}$

$Var(Y) = Var\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n^2}Var\ X = \frac{4}{n^2}$

$P(Y > \frac{1}{n} \mid Y \leq \frac{2}{n}) = \frac{P(Y > \frac{1}{n} \cap Y \leq \frac{2}{n})}{P(Y \leq 2/n)} = \frac{P(\frac{1}{n} < Y \leq \frac{2}{n})}{P(Y \leq 2/n)} = \frac{0{,}6915}{0{,}1915}$

$1/n$ $\quad 2/n$

$X \sim N(\mu, 2^2)$

$P(Y \leq \frac{2}{n}) = P(\frac{X}{n} \leq \frac{2}{n}) = P(X \leq 2)$

$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{2-1}{2}\right)$

$= P(Z \leq \frac{1}{2}) = 0{,}6915$

$P(\frac{1}{n} < Y \leq \frac{2}{n}) = P(\frac{1}{n} < \frac{X}{n} \leq \frac{2}{n}) = P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 0{,}6915 - 0{,}5 = 0{,}1915$

$P(X \leq 1) = P\left(Z \leq \frac{1-1}{2}\right) = P(Z \leq 0) = 0{,}5$

$P(Y > n) = P(\frac{X}{n} > n) = P(X > n^2) = P(Z > \frac{n^2-1}{2}) = 0{,}0668$

$1 - P(Z \leq \frac{n^2-1}{2}) = 0{,}0668$

$\Leftrightarrow P(Z \leq \frac{n^2-1}{2}) = \Phi(\frac{n^2-1}{2}) = 0{,}9332 \Leftrightarrow \frac{n^2-1}{2} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow n^2 = 4 \Leftrightarrow n = \pm 2 \Leftrightarrow \bar{n} = 2$

4.6) Ogni mattina alla stazione ferroviaria arriva esattamente un treno tra le 8:00 e le 9:00, ed un altro treno arriva tra le 9:00 e le 10:00. I tempi di arrivo e le probabilità sono qui riportati:

treno A	8:10	8:30	8:50
treno B	9:10	9:30	9:50
probabilità	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Se un viaggiatore arriva alle 8:20 qual è il suo tempo medio di attesa del treno?

X = tempo di attesa $\quad X \in \{10, 30, 50, 70, 90\}$

$P(X = 10) = \frac{1}{2}$ $\quad P(X = 50) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(X = 30) = \frac{1}{3}$ $\quad P(X = 70) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$P(X = 90) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

$E[X] = \frac{1}{2}\cdot 10 + \frac{1}{3}\cdot 30 + \frac{1}{36}\cdot 50 + \frac{1}{12}\cdot 70 + \frac{1}{18}\cdot 90$

Esercizio 1. Un dispositivo elettronico automatico ne esegue di due tipi. Il secondo tipo di dispositivo è più complesso del primo e quindi il dispositivo ha una probabilità del 10% di essere di tipo 2 rispetto alla probabilità 0.1. Inoltre, se un dato di tipo 1 presenta errore, allora il dato di tipo 2 presenta errore con probabilità 0.3. Invece, se un dato di tipo 2 non presenta errore, allora il dato di tipo 1 presenta errore con probabilità 0.2.
(1) Calcolare la probabilità che un dato di tipo 2 presenti errore.
(2) Sapendo che un dato di tipo 2 presenta errore, qual è la probabilità che il dato di tipo 2 presenta errore?
(3) Sapendo che un dato qualunque presenta errore, "il dato di tipo 2 presenta errore" sono indipendenti o positivamente correlati o negativamente correlati.
(4) Supponendo che la sua settimana il dispositivo riceva 7 controlli indipendenti, qual è la probabilità che in una settimana si presenti almeno una volta un errore in un dato di tipo 2?

$P(B) = ?$
$P(A) = 0{,}1$
$P(B|A) = 0{,}3$
$P(B|\bar{A}) = 0{,}2$

$P(B) = P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\bar{A})\cdot P(\bar{A})$

$= \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2}{10}\cdot\frac{9}{10} = \frac{3}{100} + \frac{18}{100} = \frac{21}{100}$

$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{21}{100}} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$P(A) = \frac{1}{10}$ $\quad P(B) = \frac{21}{100}$ $\quad \Rightarrow P(A)\cdot P(B) = \frac{21}{600}$

$P(A \cap B) = P(B|A)\cdot P(A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{100}$

$P(A \cap B) = \frac{21}{1000} < \frac{3}{100} = P(A \cap B)$ Positivamente correlati

$P(\text{"almeno 1 errore" in 7 controlli}) = 1 - P(\text{"0 errori" in 7 controlli})$

$= 1 - \binom{7}{0}\cdot P(A)^0\cdot P(\bar{A})^7 = 1 - (0{,}9)^7$

$P(X = 0) = \binom{7}{0}(p)^0(1-p)^{7-0}$