

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

28/4/2021 (aula 1) - Classe 1 (resto 0)

Esercizio 1 Un canale di trasmissione è soggetto ad errore, ossia ogni volta che si invia un bit, indipendentemente da altri invii, questo può essere modificato con la probabilità indicata:

bit trasmesso	bit ricevuto	probabilità	bit trasmesso	bit ricevuto	probabilità
0	0	0,7	1	0 (errore)	0,2
0	1 (errore)	0,3	1	1	0,8

- (i) Calcolare la probabilità che trasmettendo la sequenza binaria **011**
- si verifichi un solo errore,
 - si verifichi almeno un errore.
- (ii) Se nel trasmettere la sequenza **011** si è verificato un solo errore, qual è la probabilità che l'errore si sia verificato nella trasmissione del primo bit?
- (iii) Se nel trasmettere la sequenza **011** si è verificato almeno un errore, qual è la probabilità che si sia verificato un errore nella trasmissione del primo bit?

Soluzione

(i) Poniamo $A = \{\text{trasmettendo la sequenza } \mathbf{011} \text{ si verifica un solo errore}\}$,
 $E_k = \{\text{si verifica un errore nella trasmissione del } k\text{-esimo bit}\}$, per $k = 1, 2, 3$. Si ha

$$P(A) = P[(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3)].$$

Poiché gli eventi sono incompatibili, dalla proprietà di additività segue

$$P(A) = P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) + P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3).$$

Per l'indipendenza degli invii, si ha

$$P(A) = P(E_1)P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}) + P(\overline{E_1})P(E_2)P(\overline{E_3}) + P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(E_3).$$

Poiché $P(E_1) = 0,3$ e $P(E_2) = P(E_3) = 0,2$, e ricordando che $P(\overline{E_k}) = 1 - P(E_k)$, si ha

$$P(A) = 0,3(1 - 0,2)(1 - 0,2) + (1 - 0,3)0,2(1 - 0,2) + (1 - 0,3)(1 - 0,2)0,2$$

da cui segue

$$P(A) = 0,416.$$

La probabilità che trasmettendo la sequenza binaria **011** si verifichi almeno un errore è

$$P(B) := P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 1 - P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}),$$

quindi si ha

$$P(B) = 1 - (1 - 0,3)(1 - 0,2)(1 - 0,2) = 0,552.$$

(ii) $P(E_1|A) = \frac{P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3})}{P(A)} = \frac{0,3(1 - 0,2)(1 - 0,2)}{0,416} = 0,4615.$

(iii) $P(E_1|E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{P(E_1)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,552} = 0,5434.$

Esercizio 2 Una procedura esegue un dato compito in meno di 10 secondi nel 70% delle esecuzioni. Inoltre, la procedura esegue il compito ricorrendo a moduli esterni nel 60% delle esecuzioni. Infine, nell'80% delle esecuzioni che non ricorrono a moduli esterni la procedura esegue il compito in meno di 10 secondi. Per un'esecuzione scelta a caso, qual è la probabilità

- (i) che esegua il compito in meno di 10 secondi e non ricorra a moduli esterni?
- (ii) che non esegua il compito in meno di 10 secondi e non ricorra a moduli esterni?
- (iii) che esegua il compito in meno di 10 secondi oppure ricorra a moduli esterni?
- (iv) che esegua il compito in meno di 10 secondi e ricorra a moduli esterni?
- (v) C'è indipendenza tra eseguire il compito in meno di 10 secondi e ricorrere a moduli esterni?

Soluzione

Ponendo $A = \{\text{la procedura esegue il compito in meno di 10 secondi}\}$,

$B = \{\text{la procedura esegue il compito ricorrendo a moduli esterni}\}$,

risulta $P(A) = 0,7$ $P(B) = 0,6$ $P(A|\overline{B}) = 0,8$.

Quindi si ha:

(i)

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B}) P(\overline{B}) = 0,8 (1 - 0,6) = 0,32$$

(ii)

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 0,4 - 0,32 = 0,08$$

(iii)

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,08 = 0,92$$

(iv)

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0,7 - 0,32 = 0,38$$

(v)

$$P(A) \neq P(A|\overline{B}) \Rightarrow A \text{ e } B \text{ non sono indipendenti.}$$

Esercizio 3 Un esperimento consiste nello scegliere a caso 3 bit da una sequenza costituita da 4 bit pari a **0** e da 6 bit pari a **1**.

- (i) Qual è la cardinalità dello spazio campionario?
- (ii) Qual è la probabilità che almeno uno dei bit scelti sia pari a **0**?
- (iii) Qual è la probabilità che i bit scelti siano tutti uguali?
- (iv) Se i bit scelti sono tutti uguali, qual è la probabilità che siano tutti pari a **0**?

Soluzione

- (i) Si ha

$$|S| = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120.$$

- (ii)

$$1 - \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{|S|} = 1 - \frac{20}{120} = \frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$$

- (iii)

$$\frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{|S|} + \frac{\binom{4}{3} \binom{6}{0}}{|S|} = \frac{20}{120} + \frac{4}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0,2$$

- (iv)

$$\frac{\binom{4}{3} \binom{6}{0}}{\binom{4}{0} \binom{6}{3} + \binom{4}{3} \binom{6}{0}} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} = 0,\bar{6}$$

Esercizio 4 Supponiamo che il 10% della popolazione è infetto da un virus.

Se una persona infetta effettua un test, la probabilità che il test evidenzi presenza di virus è 0,85.

Se una persona sana effettua un test, la probabilità che il test evidenzi assenza di virus è 0,9.

Se una persona scelta a caso nella popolazione si sottopone al test,

(i) qual è la probabilità che il test evidenzi presenza del virus?

(ii) qual è la probabilità che la persona sia infetta se il test evidenzia presenza del virus?

(iii) La presenza di virus è indipendente dal fatto che il test evidenzi presenza del virus, o meno?

Soluzione

Ponendo $A = \{\text{una persona scelta a caso nella popolazione è infetta}\}$,

$B = \{\text{il test evidenzia presenza di virus}\}$,

risulta $P(A) = 0,1$ $P(B|A) = 0,85$ $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,9$.

Quindi si ha:

(i)

$$P(B) = P(B|A) P(A) + P(B|\bar{A}) P(\bar{A}) = 0,85 \cdot 0,1 + (1 - 0,9) \cdot (1 - 0,1) = 0,175$$

(ii)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)} = \frac{0,85 \cdot 0,1}{0,175} = 0,4857$$

(iii)

$$P(A) \neq P(A|B) \Rightarrow A \text{ e } B \text{ non sono indipendenti.}$$