Progettazione di Algoritmi **Anno Accademico 2021–2022**

Note per la Lezione 18

Ugo Vaccaro

Per la risoluzione di Problemi di Ottimizzazione (ovvero problemi per cui desideriamo trovare la "migliore" soluzione all'interno di un insieme di possibili soluzioni), si possono usare, oltre gli algoritmi basati su Programmazione Dinamica, anche gli algoritmi cosiddetti Greedy.

Informalmente, un algoritmo Greedy costruisce una soluzione ad un dato problema *iterativamente in passi*:

- L'algoritmo inizia con il trovare una soluzione ad un sottoproblema di piccola taglia;
- Ad ogni passo aggiunge una nuova parte alla soluzione precedentemente computata, fino ad ottenere una soluzione al problema intero;
- La nuova parte di soluzione che viene scelta ad ogni dato passo è quella che, tra *tutte* le possibili parti che si potrebbero aggiungere, risulta essere la migliore (ad es., in un problema di ottimizzazione di massimo, potrebbe essere quella che ci dà il maggior incremento di valore alla soluzione parziale fin'ora calcolata, in un problema di minimo potrebbe essere quella che causa il minor incremento di costo).

Vediamo un'applicazione della tecnica Greedy ad un problema già visto, ovvero il Problema del cambio delle monete. Formalmente, abbiamo il seguente problema:

Input: Un valore monetario V, ed un vettore di valori di monete $v[1] \dots v[n]$, con $v[1] > v[2] > \dots > v[n] = 1$.

Output: Un insieme S di *cardinalità minima* di monete, la cui somma dei valori sia esattamente pari a V.

In accordo all'idea Greedy prima delineata, un possibile algoritmo potrebbe essere quello in cui si cerca di esprimere il valore monetario V utilizzando, se possibile, sempre la moneta di valore massimo il cui valore sia $\leq$ del valore corrente che vogliamo cambiare. Più precisamente, avremmo il seguente algoritmo.

```
Cambio_greedy (V,v[1]...v[n])
1. S=∅
2. WHILE (V>0) {
3.     sia i la moneta di massimo valore tale che v[i]≤V
4.     S=S∪{i},
5.     V=V-v[i]
     }
6. RETURN S
```

Eseguendo l'algoritmo `Cambio_greedy` con il seguente input: `v[1]=10,v[2]=5,v[3]=1,V=37`, otterremmo che l'insieme S ha la seguente composizione, ad ogni iterazione del ciclo `WHILE`.

$S = \{1\}$, $S = \{1, 1\}$, $S = \{1, 1, 1\}$, $S = \{1, 1, 1, 2\}$, $S = \{1, 1, 1, 2, 3\}$, $S = \{1, 1, 1, 2, 3, 3\}$

Mostriamo che l'algoritmo `Cambio_greedy` restituisce l'insieme S di cardinalità minima, *sull'esempio in questione.* La prova è per induzione su V.

Sia $V > 10$, proviamo innanzitutto che la soluzione ottima, ovvero quella con il minor numero di monete, (sia essa $Opt(V)$) **deve** contenere la moneta 1 di valore 10. Infatti, se non la contenesse, allora al suo posto $Opt(V)$ contiene o 10 occorrenze della moneta 3 (di valore 1) o 2 occorrenze della moneta 2 (di valore 5), oppure 5 occorrenze della moneta 3 ed una occorrenza della moneta 2. In ogni caso, sostituendo a tali occorrenze **una sola** occorrenza della moneta 1 di valore 10 diminueremmo il numero di monete in $Opt(V)$, contro l'ipotesi che $Opt(V)$ fosse un insieme di cardinalitá minima.

Per ipotesi induttiva, l'insieme S' prodotto dall'algoritmo `Cambio_greedy`$(V-10, v[1]v[2]v[3])$ è una soluzione ottima per il sottoproblema di esprimere il valore monetario $V-10$ usando le monete $v[1], v[2], v[3]$, ovvero $S' = Opt(V-10)$. Di conseguenza, vale che $S = S' \cup \{10\} = Opt(V-10) \cup \{10\} = Opt(V)$.

Ma allora perchè abbiamo precedentemente usato Programmazione Dinamica? Perchè l'algoritmo `Cambio_greedy` non fornisce la soluzione ottima su tutti gli input. Infatti, nel caso in cui $V = 12$, e $v[1] = 10, v[2] = 6, v[3] = 1$, l'algoritmo `Cambio_greedy` restituirebbe la soluzione $S = \{1, 3, 3\}$ di cardinalità 3, mentre la soluzione con il minor numero di monete è chiaramente $\{2, 2\}$. Il problema di stabilire se, dati V e $v[1], \ldots v[n]$, l'algoritmo Greedy restituisce una soluzione ottima, non è agevole da risolvere, ma di questo non ci occuperemo.

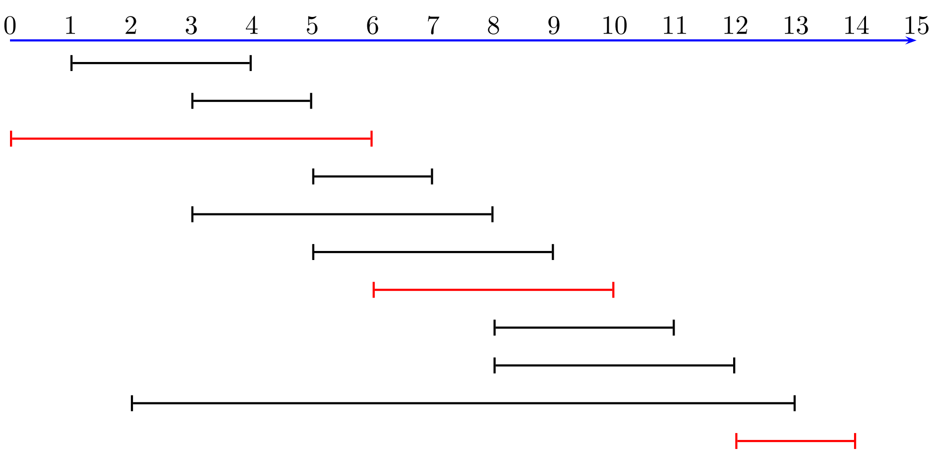
Come primo esempio di applicazione della tecnica Greedy, consideriamo il problema della Selezione di attività.

Input del problema: Supponiamo di avere un insieme $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ di attività, dove ciascuna attività A_i ha un tempo di *inizio* s_i, ed un tempo di *fine* f_i, con $s_i < f_i$ (in altre parole, l'attività A_i deve essere svolta nell'intervallo temporale $[s_i, f_i]$)

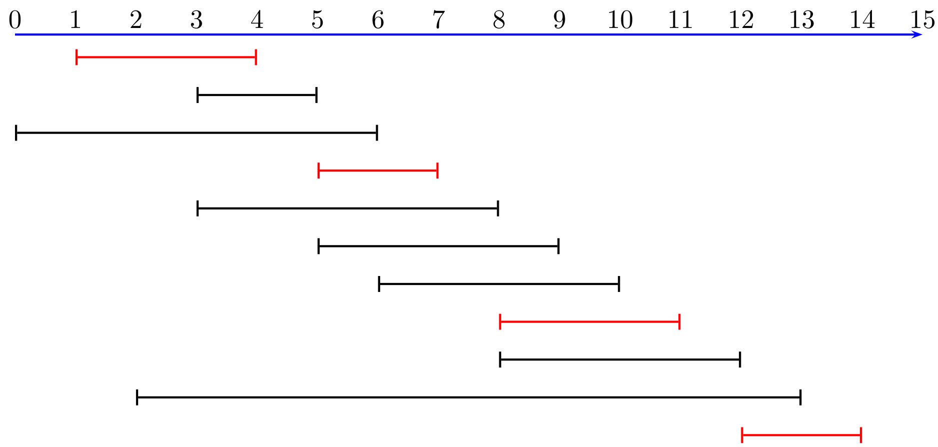
Le attività in A devono essere assegnate ad una *risorsa*, sotto la condizione che se A_i ed A_j vengono entrambe assegnate alla risorsa, allora $[s_i, f_i] \cap [s_j, f_j] = \emptyset$ (in tal caso, diremo che l'attività A_i ed A_j sono *compatibili*). In altri termini, possono essere assegnate alla risorsa solo attività il cui svolgimento temporale non si sovrappone (si pensi, ad esempio, alle attività come a dei corsi ed alla risorsa come ad un'aula in cui essi si devono svolgere).

Output del problema: Calcolare un sottoinsieme di $S \subseteq A$ di attività a due a due compatibili, di cardinalità *massima*.

Vediamo un esempio, con $n = 11$, $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_{11}\}$, $A_1 = [1, 4]$, $A_2 = [3, 5]$, $A_3 = [0, 6]$, $A_4 = [5, 7]$, $A_5 = [3, 8]$, $A_6 = [5, 9]$, $A_7 = [6, 10]$, $A_8 = [8, 11]$, $A_9 = [8, 12]$, $A_{10} = [2, 13]$, $A_{11} = [12, 14]$. In tal caso, una prima possibile soluzione sarebbe: A_3, A_7, A_{11}.

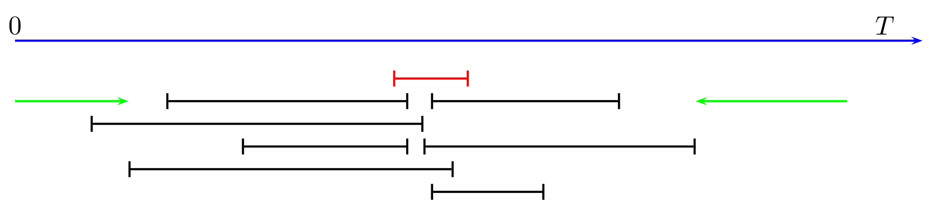


Una seconda possibile soluzione sarebbe A_1, A_4, A_8, A_{11}.



Costruiamo un pò di intuizione per l'algoritmo Greedy. Ricordiamo che l'algoritmo Greedy costruisce la soluzione iterativamente, effettuando ad ogni passo la scelta che in quel momento sembra essere la migliore. Chiedamoci quindi quale potrebbe essere la prima *migliore* scelta (ovvero la prima attività A_i) da effetture. Visto che vogliamo alla fine aver scelto un insieme di *cardinalità massima* di attività che non si intersecano tra di loro, sembrerebbe ragionevole scegliere come prima attività da inserire nella soluzione una che richieda il *minor tempo* di essere svolta, cosí da *massimizzare* il tempo utile rimanente in cui svolgere eventuali altre attività.

L'idea sembra promettente, però immaginiamo la situazione seguente:



L'attività in rosso è quella che richiede il minor tempo. Le attività in nero sono le restanti altre. Poichè tutte si intersecano con quella in rosso, una volta aver scelto quella in rosso non possiamo scegliere nessun altra attività. Quindi l'algoritmo produrrebbe una soluzione consistente di una sola attività, chiaramente *non ottima* in quanto di attività disgiunte ve ne sono due, indicate dalle frecce verdi.

L'idea non è però del tutto sbagliata (in particolare, porterebbe ad una soluzione che ha cardinalità almeno pari alla metà di quella ottima, e provare questo fatto ciò potrebbe essere un utile esercizio...). In più l'idea, opportunamente sviluppata, può portare alla determinazione della soluzione ottima al problema, ovvero a determinare un insieme di attività a due a due compatibili, di cardinalità *massima*.

L'osservazione di base è che nella soluzione ottima o ci sarà la prima attività A_1 oppure essa non sarà presente. Se essa sarà presente, allora ci rimane di trovare la *migliore* soluzione possibile ai sottoproblemi A' ed A'' relativi ad attività compatibili con A_1:

$$A' = \{A_j : \ f_j < s_1\} \quad A'' = \{A_k : \ s_k > f_1\}.$$

Se invece A_1 non é presente, allora occorrerà risolvere in maniera ottima il sottoproblema relativamente alle attività $\{A_2, \ldots, A_n\}$. La soluzione ottima al problema globale sarà la migliore di quella che potremmo ottenere dalle due alternative disopra. Queste considerazioni danno origine ad una equazione di ricorrenza e relativo algoritmo di Programmazione Dinamica di complessità $O(n^2)$ (sviluppare un tale algoritmo sarebbe un ulteriore utile esercizio.)

Possiamo però semplificare le cose e far di meglio. Prima osservazione: Se le attività fossero ordinate in accordo ai loro tempi di fine, allora l'attività A_1 sarebbe quella che termina prima di tutte. Pertanto, il sottoproblema $A' = \{A_j : f_j < s_1\}$ prima individuato sarebbe vuoto. Seconda osservazione: Se le attività fossero ordinate in accordo ai loro tempi di fine, allora scegliendo l'attività A_1, avremmo *massimizzato* il tempo libero che ci rimane, in cui poter eventualmente eseguire le restanti attività. Ciò ci lascia pensare che forse *conviene* prenderla l'attività A_1, e quindi ignorare il sottoproblema derivante dalla non presa in considerazione di A_1. Il seguente algoritmo usa l'idea più sofisticata qui descritta:

1. Ordina le attività in base al loro *tempo di fine* (sia $A_1, \ldots, A_n$ tale sequenza ordinata).

2. Scegli la *prima* attività A_1

3. Elimina tutte le attività che si intersecano con A_1 (ovvero che iniziano prima che A_1 finisca)

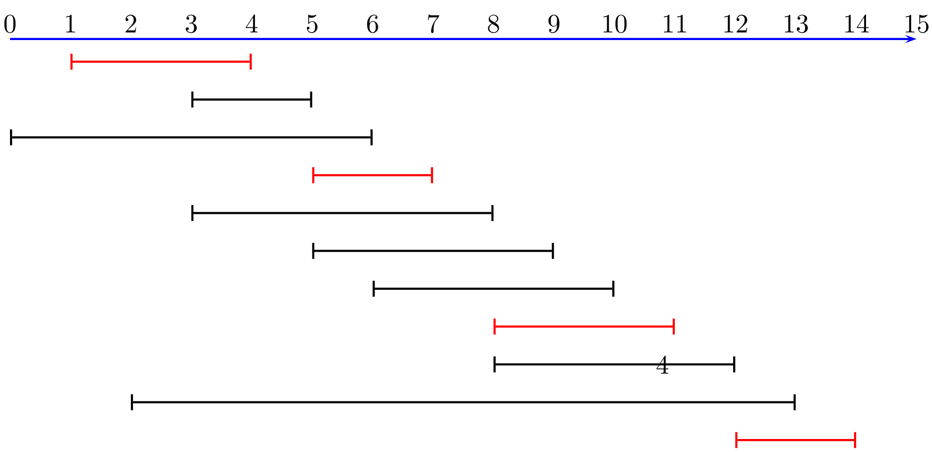
4. Ricorsivamente risolvi il problema sulle attività che restano.

Più formalmente, avremo il seguente algoritmo.

```
Greedy_Activity_Selector(s_1,...,s_n, f_1,...,f_n)
1. Ordina le attività in accordo alle f_i
2. S={A_1},  j=1
3. FOR (i=2, i<n+1, i=1+1) {
4.   IF (s_i ≥ f_j) {
5.     S=S∪{A_i}
6.     j=i
     }
   }
7.   RETURN S
```

La complessità dell'algoritmo è chiaramente dominata dal tempo richiesto nell'esecuzione dell'ordinamento nel passo 1., in quanto il resto dell'algoritmo può essere realizzato in tempo $O(n)$. Pertanto, l'intero algoritmo richiede tempo $\Theta(n \log n)$ nel caso peggiore.

Vediamo un esempio di esecuzione dell'algoritmo, in cui $n = 11$, $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_{11}\}$, con $A_1 = [1, 4]$, $A_2 = [3, 5]$, $A_3 = [0, 6]$, $A_4 = [5, 7]$, $A_5 = [3, 8]$, $A_6 = [5, 9]$, $A_7 = [6, 10]$, $A_8 = [8, 11]$, $A_9 = [8, 12]$, $A_{10} = [2, 13]$, $A_{11} = [12, 14]$. Le attività in rosso sono quelle selezionate dall'algoritmo.

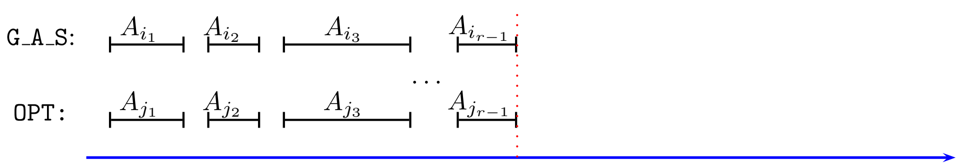


Proviamo che l'algoritmo sopra descritto produce un insieme di attività mutualmente non intersecanti di cardinalità massima.

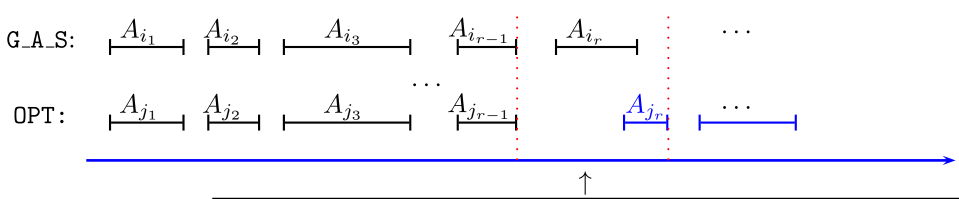
Teorema 1: L'algoritmo `Greedy_Activity_Selector` (`G_A_S`) produce un sottoinsieme S di attività a due a due compatibili, di cardinalitá massima.
Prova. Che le attività scelte dall'algoritmo `G_A_S` siano mutualmente compatibili è ovvio dal modo con cui l'algoritmo opera. Per la prova che l'insieme prodotto dall'algoritmo è di cardinalità massima, procediamo per contraddizione. Supponiamo che la soluzione prodotta da **`G_A_S`** **non** sia quella di di cardinalità massima, che denotiamo con `OPT`.

- Siano $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ le attività selezionate da `G_A_S`.
- Siano $A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}$ le attività in una *soluzione ottima* (`OPT`), con $r-1$ il più grande intero per cui $A_{i_1} = A_{j_1}, \ldots, A_{i_{r-1}} = A_{j_{r-1}}$ ($r-1$ può anche essere $= 0$).

Ovvero, siamo in una situazione siffatta:

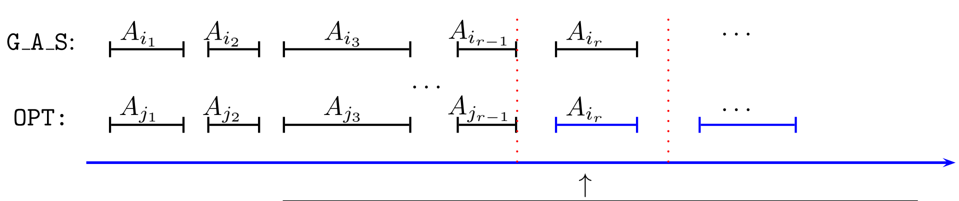


mentre



Per come funziona l'algoritmo `G_A_S`, A_{i_r} termina *prima* di A_{j_r}

Perchè allora non sostituiamo l'attività A_{j_r} in `OPT` con A_{i_r}? Facciamolo, ed otteniamo



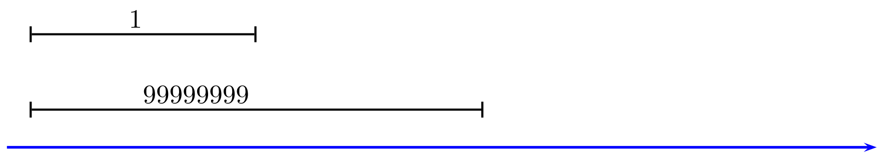
La soluzione `OPT` rimane *compatibile*, *ottima*, ma adesso contraddice la massimalità di $r-1$, assurdo!

Con questo, il teorema è provato.

$\square$

Notiamo che l'algoritmo `G_A_S` può *non* produrre soluzioni ottime nel caso in cui le attività abbiano associato un valore ed occorre selezionare un sottoinsieme di attività compatibili di valore totale *massimo*. In altre parole, abbiamo provato che `G_A_S` produce soluzioni ottime solo quando tutte le attività abbiano valore =1.

Esempio:



La soluzione prodotta da `G_A_S` ha valore totale 1, quella di valore ottimo ha valore 99999999. Questo è il motivo per cui abbiamo usato PD per risolvere il problema delle attività quando ciascuna di esse ha un arbitrario valore.