Esercizio 2 Un esperimento consiste nel generare sequenze di n bit casuali, tali che ogni bit, indipendentemente dagli altri, assume valore 1 oppure 0 con probabilità 1/2. Considerati gli eventi A= {almeno un bit assume valore 1}, B_k = {esattamente k bit assumono valore 1} e C_k = {i primi k bit assumono valore 1}, $k = 1, 2, \ldots, n$, calcolare
(i) $P(A)$, $P(B_k)$ e $P(C_k)$; **[3 punti]**
(ii) $P(A \cap B_k)$, $P(A \cap C_k)$ e $P(B_k \cap C_k)$; **[3 punti]**
(iii) $P(A \cup B_k \mid C_k)$. **[4 punti]**

$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{1}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{n-k}$

$P(A) = 1 - P(n \text{ bit tutti} = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}$

$P(B_k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{2^n} = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$ $\qquad \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(C_k) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k}$

$P(A \cap B_k) = P(B_k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$ $\qquad B_k \Rightarrow A \Leftrightarrow B_k \subset A$, $\quad A \cap B_k = B_k$

$P(A \cap C_k) = P(C_k) = \frac{1}{2^k}$

$P(B_k \cap C_k) = \frac{1}{2^n}$

$P(A \cup B_k \mid C_k) = 1$

Esercizio 3 Si consideri la variabile aleatoria doppia (X, Y) avente funzione di probabilità congiunta riportata nella seguente tabella:

$x \setminus y$	0	1	2
0	0,2 − p	0,1	0,1
1	0,1	p	0,1
2	0,1	0,1	0,2

(i) Determinare i valori ammissibili di p. **[2 punti]**
(ii) Stabilire se esiste qualche valore di p per cui X e Y sono indipendenti. **[2 punti]**
(iii) Stabilire se esiste qualche valore di p per cui X e Y sono non correlate. **[2 punti]**
(iv) Calcolare $P(X = Y)$. **[2 punti]**

$\begin{cases} 0{,}2 - p \geq 0 \Rightarrow p \leq 0{,}2 \\ p \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq p \leq 0{,}2}$

$0{,}8 + \cancel{p} + 0{,}2 - \cancel{p} = 1$ ok

X e Y indip. $\Leftrightarrow$
$P(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y) \quad \forall x, y$

$P_X(x) = P(X=x) = \sum_Y P(x, Y)$

$x \setminus y$	0	1	2	$P_X(x)$
0	0,2−p	0,1	0,1	0,4−p
1	0,1	p	0,1	0,2+p
2	0,1	0,1	0,2	0,4
$P_Y(y)$	0,4−p	0,2+p	0,4	

$P(0,0) = 0{,}2 - p$
$P_X(0) \cdot P_Y(0) = (0{,}4 - p)(0{,}4 - p)$ $\qquad (0{,}4 - p)^2 = 2 - p$
$\Leftrightarrow 0{,}16 - 0{,}8 \cdot p + p^2 = 0{,}2 - p$

$P(2,2) = 0{,}2 \neq$
$P_X(2) \cdot P_Y(2) = 0{,}16$ $\qquad$ X e Y dipendenti $\forall p$

$P(X=Y) = p(0,0) + p(1,1) + p(2,2) = 0{,}2 - \cancel{p} + \cancel{p} + 0{,}2 = 0{,}4$

Esercizio 4 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X avente distribuzione normale di valore atteso $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 4$, e con Y uniforme in $(-1, 2)$.
(i) Calcolare $P(X > 0, Y > 0)$. **[2 punti]**
(ii) Ricavare $E[2X - Y + 1]$. **[2 punti]**
(iii) Determinare $Var[2X - Y + 1]$. **[2 punti]**

$X \sim \mathcal{N}(2,2)$ $\qquad Y \sim Unif(\overset{\alpha}{-1}, \overset{\beta}{2})$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{altrimenti} \\ \frac{1}{3} & \text{se } -1 < Y < 2 \end{cases}$

$P(X>0, Y>0) = P(X>0) \cdot P(Y>0) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}8413$ $\qquad \phi(-1) = 1 - \phi(1)$

$P(X>0) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} > \frac{0-2}{2}\right) = P(Z > -1) = 1 - P(Z \leq -1) = 1 - \phi(-1)$

$= 1 - (1 - \phi(1)) = \phi(1) = 0{,}8413$

$P(Y>0) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - \int_{-1}^{0} \frac{1}{3} dx$
$\int_0^2 \frac{1}{3} dx$
$= 1 - \left[\frac{1}{3} \cdot x\right]_{-1}^{0}$
$= 1 - \left[0 + \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} P(X > x) &= \int_x^{+\infty} f(z)dz \\ P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f(z)dz \end{aligned}}$$

In generale se $X \sim Unif(a, b)$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ 1 & \text{se } x \geq b \end{cases}$ $\qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$E[2X - Y + 1] = 2E[X] - E[Y] + 1 = 4 - \left(\frac{2-1}{2}\right) + 1 = 4 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{2}$

$Var[2X - Y + 1] = 4 Var X + Var Y$ $\qquad X, Y \quad E[X - Y] = E[X] - E[Y]$
$= 16 + \frac{(b-a)^2}{12} = 16 + \frac{9}{12}$ $\qquad Var[X - Y] = Var X + Var Y - Cov(X, Y)$
$= 16 + \frac{3}{4} = \frac{67}{4}$

Esercizio 3 Il tempo di esecuzione di una procedura è descritto da una variabile aleatoria esponenziale X avente valore atteso 4 minuti.
(i) Quanto vale la probabilità che l'esecuzione della procedura termini prima di 4 minuti?
(ii) Quanto vale la probabilità che l'esecuzione della procedura termini dopo 2 minuti?
(iii) Se l'esecuzione della procedura non ha avuto termine a 2 minuti dall'inizio, quanto vale la probabilità che termini prima dei successivi 2 minuti?
(iv) Se Y è una variabile aleatoria che ha la stessa distribuzione di X, e se le due variabili sono indipendenti, calcolare $E(X + Y)$, $E(X \cdot Y)$, $E[(X - Y)^2]$.

$X \sim Exp\left(\frac{1}{4}\right)$ $\qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$E[X] = 4 \qquad \lambda = \frac{1}{E[X]}$ $\qquad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$P(X < 4) = F_X(4) = 1 - e^{-\frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$

$P(X > 2) = 1 - F_X(2) = \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{\cancel{4}_2} \cdot \cancel{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$P(X < 4 \mid X > 2) = \frac{P(X < 4, X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(2 < X < 4)}{P(X > 2)} = \frac{F_X(4) - F_X(2)}{1 - F_X(2)}$
$= P(X < 2)$

$= \frac{\cancel{1} - e^{-1} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{2}}}{\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}}{e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} - \frac{e^{-1}}{e^{-\frac{1}{2}}} = 1 - e^{-1+\frac{1}{2}}$
$= 1 - e^{-\frac{1}{2}}$
$= F_X(2)$