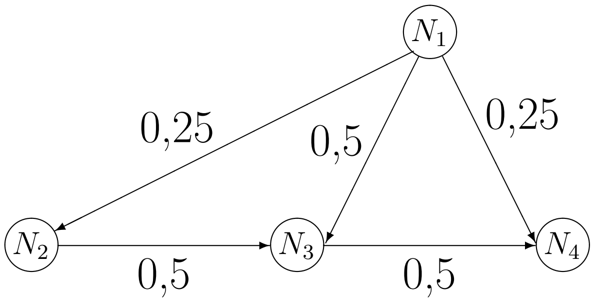
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Prima prova intercorso - Classe 1 (resto 0)
Fisciano, 11/4/2019 (ore 11-13)

Esercizio 1 Si consideri un sistema costituito da 4 unità collegate mediante archi orientati come in figura, dove su ogni arco è indicata la probabilità che esso sia attivo, indipendentemente dagli altri archi.



(i) Calcolare la probabilità che almeno uno dei tre percorsi che portano da N_1 ad N_4 sia attivo. **[4 punti]**
(ii) Sapendo che almeno uno dei tre percorsi che portano da N_1 ad N_4 è attivo, calcolare la probabilità che sia attivo il percorso $N_1 \to N_3 \to N_4$. **[6 punti]**

Esercizio 2 Un esperimento consiste nel generare sequenze di n bit casuali, tali che ogni bit, indipendentemente dagli altri, assume valore 1 oppure 0 con probabilità 1/2. Considerati gli eventi A= $\{$almeno un bit assume valore 1$\}$, $B_k = \{$esattamente k bit assumono valore 1$\}$ e $C_k = \{$i primi k bit assumono valore 1$\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, calcolare
(i) $P(A)$, $P(B_k)$ e $P(C_k)$; **[3 punti]**
(ii) $P(A \cap B_k)$, $P(A \cap C_k)$ e $P(B_k \cap C_k)$; **[3 punti]**
(iii) $P(A \cup B_k \,|\, C_k)$. **[4 punti]**

Esercizio 3 Un negozio di elettronica riceve notebooks da tre fornitori F_1, F_2, F_3. Il 50% dei notebooks disponibili è fornito da F_1, il 20% da F_2 ed il 30% da F_3. Tuttavia, il 5% dei notebooks forniti da F_1 presenta dei difetti, mentre per F_2 e F_3 tale percentuale è pari a 3% e 6%, rispettivamente.
(i) Scelto a caso un notebook, qual è la probabilità che sia difettoso? **[4 punti]**
(ii) Se un notebook scelto a caso è difettoso, qual è la probabilità che sia stato fornito da F_1? **[6 punti]**

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Prima prova intercorso - Classe 1 (resto 0)
Fisciano, 11/4/2019 (ore 13-15)

Esercizio 1 Si effettuano 3 trasmissioni indipendenti su di un canale di comunicazione rumoroso, per cui ad ogni trasmissione (indipendentemente dalle altre) l'output risulta essere **1** con probabilità 0,6 e **0** con probabilità 0,4. Posto

$A = \{$per almeno una delle 3 trasmissioni l'output è $\mathbf{0}\}$,

$B = \{$nelle prime 2 trasmissioni i valori in output sono diversi$\}$,

(i) stabilire se A e B sono indipendenti, [**4 punti**]
(ii) calcolare $P(\overline{A}|B)$ e $P(\overline{B}|A)$, [**4 punti**]
(iii) ricavare $P(\overline{A} \cup B)$. [**2 punti**]

Esercizio 2 Una lista contiene alcuni nominativi di dipendenti di un'azienda. Sappiamo che il 30% dei nominativi della lista sono dirigenti, e il restante 70% sono impiegati. Inoltre, il 50% dei nominativi della lista sono laureati, e il restante 50% sono diplomati. Infine, il 40% dei laureati della lista sono dirigenti.

Se si sceglie un nominativo della lista a caso, calcolare la probabilità che
(i) sia un dirigente diplomato, [**3 punti**]
(ii) sia un impiegato laureato, [**3 punti**]
(iii) sia un dirigente o un laureato. [**2 punti**]

(iv) Se si sceglie un nominativo a caso tra gli impiegati, qual è la probabilità che sia un laureato? [**2 punti**]

Esercizio 3 Da un'urna contenente 3 biglie bianche e 3 biglie nere si estraggono 3 biglie senza reinserimento.
(i) Calcolare la probabilità che tra le 3 estratte vi sia almeno una biglia bianca. [**2 punti**]
(ii) Se tra le 3 estratte vi è almeno una biglia bianca, qual è la probabilità che tutte le biglie estratte siano bianche? [**3 punti**]
(iii) Calcolare la probabilità che le 3 biglie estratte abbiano lo stesso colore. [**2 punti**]
(iv) Calcolare la probabilità che tra le 3 estratte vi sia almeno una biglia bianca sapendo che la prima biglia estratta è nera. [**3 punti**]

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI - Classe 1 (resto 0)
Fisciano, 11/4/2019 (ore 11-13)

Esercizio 1 Dati gli eventi $E_1 = \{$il percorso $N_1 \to N_4$ è attivo$\}$, $E_2 = \{$il percorso $N_1 \to N_3 \to N_4$ è attivo$\}$ ed $E_3 = \{$il percorso $N_1 \to N_2 \to N_3 \to N_4$ è attivo$\}$, risulta

$$P(E_1) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad P(E_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad P(E_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

(i) La probabilità che almeno uno dei tre percorsi che portano da N_1 ad N_4 sia attivo è

$$\begin{aligned} &P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) \\ &\quad -P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}0625 - 0{,}25 \cdot 0{,}25 - 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 \\ &\quad +0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 = \frac{59}{128} = 0{,}4609. \end{aligned}$$

(ii) Sapendo che almeno uno dei tre percorsi che portano da N_1 ad N_4 è attivo, la probabilità che sia attivo il percorso $N_1 \to N_3 \to N_4$ è

$$P(E_2 \,|\, E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{P(E_2 \cap (E_1 \cup E_2 \cup E_3))}{P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)} = \frac{P(E_2)}{P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)} = \frac{0{,}25}{0{,}4609} = \frac{32}{59} = 0{,}5424.$$

Esercizio 2 Sia $k = 1, 2, \ldots, n$. Risulta

(i)

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$P(B_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n},$$

$$P(C_k) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k}.$$

(ii)

$$P(A \cap B_k) = P(B_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n},$$

$$P(A \cap C_k) = P(C_k) = \frac{1}{2^k},$$

$$P(B_k \cap C_k) = P(A \cap B_k \cap C_k) = \frac{1}{2^n}.$$

(iii)

$$P(A \cup B_k \,|\, C_k) = P(A \,|\, C_k) + P(B_k \,|\, C_k) - P(A \cap B_k \,|\, C_k) = 1 + \frac{1}{2^{n-k}} - \frac{1}{2^{n-k}} = 1.$$

Esercizio 3 Consideriamo gli eventi $F_i = \{\text{il componente proviene dal fornitore } i\text{-esimo}\}$, $i = 1, 2, 3$ e sia $A = \{\text{il componente è difettoso}\}$. Dai dati del problema si ha

$$P(F_1) = 0{,}5; \qquad P(F_2) = 0{,}2; \qquad P(F_3) = 0{,}3.$$

(i) Se si sceglie a caso un notebook, la probabilità che sia difettoso è

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \,|\, F_1) \cdot P(F_1) + P(A \,|\, F_2) \cdot P(F_2) + P(A \,|\, F_3) \cdot P(F_3) \\ &= 0{,}05 \cdot 0{,}5 + 0{,}03 \cdot 0{,}2 + 0{,}06 \cdot 0{,}3 = 0{,}025 + 0{,}006 + 0{,}018 = 0{,}049. \end{aligned}$$

(ii) Se un notebook scelto a caso è difettoso, la probabilità che sia stato fornito da F_1 è

$$P(F_1 \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, F_1) P(F_1)}{P(A)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}5}{0{,}049} = \frac{0{,}025}{0{,}049} = 0{,}5102.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI - Classe 1 (resto 0)
Fisciano, 11/4/2019 (ore 13-15)

Esercizio 1 (i) Sia $U_k = \{\text{nella trasmissione } k\text{-esima l'output è } \mathbf{1}\}$ per $k = 1, 2, 3$. Poiché tali eventi sono indipendenti si ha:

$$P(A) = P(\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \cup \overline{U_3}) = P(\overline{U_1 \cap U_2 \cap U_3}) = 1 - P(U_1) \cdot P(U_2) \cdot P(U_3)$$
$$= 1 - (0{,}6)^3 = 1 - 0{,}216 = 0{,}784.$$

Inoltre,

$$P(B) = P(U_1 \cap \overline{U_2}) + P(\overline{U_1} \cap U_2) = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48.$$

Poiché $B \subset A$ si ha

$$P(A \cap B) = P(B) = 0{,}48 \neq P(A) \cdot P(B),$$

pertanto A e B non sono indipendenti.

(ii) Gli eventi $\overline{A}$ e B sono incompatibili, e quindi risulta

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = 0.$$

Inoltre,

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{P(\overline{U_1} \cap \overline{U_2}) + P(U_1 \cap U_2 \cap \overline{U_3})}{P(A)}$$

$$= \frac{P(\overline{U_1}) \cdot P(\overline{U_2}) + P(U_1) \cdot P(U_2) \cdot P(\overline{U_3})}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}784} = \frac{0{,}304}{0{,}784} = 0{,}3878.$$

(iii) Poiché $\overline{A}$ e B sono incompatibili, si ha

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) = 0{,}216 + 0{,}48 = 0{,}696.$$

Esercizio 2 Sia $A = \{\text{un nominativo scelto a caso è di dirigente}\}$ e $B = \{\text{un nominativo scelto a caso è di laureato}\}$, cosicché $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}5$ e $P(A|B) = 0{,}4$. Pertanto si ha

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2.$$

(i) La probabilità che un nominativo scelto a caso sia di dirigente diplomato è

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1.$$

(ii) La probabilità che un nominativo scelto a caso sia di impiegato laureato è

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3.$$

(iii) La probabilità che un nominativo scelto a caso sia di un dirigente o un laureato è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}6.$$

(iv) Se si sceglie un nominativo a caso tra gli impiegati, la probabilità che sia un laureato è

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}4286.$$

Esercizio 3 Da un'urna contenente 3 biglie bianche e 3 biglie nere si estraggono 3 biglie senza reinserimento. Poniamo $B_k = \{\text{si estraggono } k \text{ biglie bianche}\}$ per $k = 0, 1, 2, 3$. Si ha

$$P(B_k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}} = \begin{cases} 1/20 & \text{per } k = 0, 3 \\ 9/20 & \text{per } k = 1, 2. \end{cases}$$

(i) La probabilità che tra le 3 estratte vi sia almeno una biglia bianca è

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{3} B_k\right) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k) = 1 - P(B_0) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95.$$

(ii) Se tra le 3 estratte vi è almeno una biglia bianca, la probabilità che tutte le biglie estratte siano bianche è

$$P(B_3 | B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \frac{P(B_3)}{P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)} = \frac{1/20}{19/20} = \frac{1}{19} = 0{,}0526.$$

(iii) La probabilità che le 3 biglie estratte abbiano lo stesso colore è

$$P(B_0 \cup B_3) = P(B_0) + P(B_3) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

(iv) La probabilità che tra le 3 estratte vi sia almeno una biglia bianca sapendo che la prima biglia estratta è nera è data da

$$1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = 1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$$

(corrisponde ad avere almeno una biglia bianca quando si estraggono 2 biglie da un'urna contenente 3 biglie bianche e 2 biglie nere).