Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 15/01/2013 – ore 9

Esercizio 1

Risulta:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 1 - \frac{189}{625} = \frac{436}{625} = 0{,}6976,$$
$$P(B) = \frac{6 \cdot 5!}{10^5} = \frac{9}{1250} = 0{,}0072, \quad P(C) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \binom{5}{2}}{10^5} = \frac{63}{1250} = 0{,}0504$$
$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = 0, \quad P(A \cap C) = P(C) = \frac{63}{1250} = 0{,}0504.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
&P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}6976 \cdot 0{,}0072 = 0{,}0050,\\
&P(A \cap C) = 0{,}0504 \neq P(A) \cdot P(C) = 0{,}6976 \cdot 0{,}0504 = 0{,}0352,\\
&P(B \cap C) = 0 \neq P(B) \cdot P(C) = 0{,}0072 \cdot 0{,}0504 = 0{,}0004,\\
&P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}6976 \cdot 0{,}0072 \cdot 0{,}0504 = 0{,}0003,
\end{aligned}$$

e quindi gli eventi A, B e C non sono indipendenti.

Esercizio 2

(i) Risulta

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{8}{3}}{\binom{19}{3}} = \frac{86}{969} = 0{,}0887,$$
$$P(X = 1) = \frac{5 \cdot 6 \cdot 8}{\binom{19}{3}} = \frac{80}{323} = 0{,}2477,$$
$$P(X = -1) = 1 - \left(\frac{86}{969} + \frac{80}{323}\right) = \frac{643}{969} = 0{,}6636.$$

(ii) Si ha che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ 643/969 = 0{,}6636 & -1 \leq x < 1, \\ (643/969) + (80/323) = 883/969 = 0{,}9112 & 1 \leq x < 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

(iii)

$$E(X) = -\frac{643}{969} + \frac{80}{323} + 2 \cdot \frac{86}{969} = -\frac{77}{323} = -0{,}2384,$$
$$E(X^2) = \frac{643}{969} + \frac{80}{323} + 4 \cdot \frac{86}{969} = \frac{409}{323} = 1{,}2663,$$
$$Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{409}{323} - \left(\frac{77}{323}\right)^2 = 1{,}2094.$$

(iv)

$$E(Y) = -\frac{643}{969} + \frac{80}{323} + \frac{1}{2} \cdot \frac{86}{969} = -\frac{120}{323} = -0{,}3715.$$

Esercizio 3

(i) La variabile X_i ha distribuzione di Bernoulli con parametro

$$p = P(X_i = 1) = \frac{50}{99} = 0{,}5051.$$

Si ha quindi

$$E(X_i) = p = \frac{50}{99}, \qquad Var(X_i) = p(1-p) = \frac{50}{99}\left(1 - \frac{50}{99}\right) = \frac{2450}{9801} = 0{,}2499.$$

(ii) Risulta

$$E(X) = \sum_{i=1}^{50} E(X_i) = 50 \cdot \frac{50}{99} = \frac{2500}{99} = 25{,}2525.$$

Inoltre, essendo

$$E(X_i X_j) = P(X_i = 1)P(X_j = 1 \,|\, X_i = 1) = \frac{50}{99} \cdot \frac{49}{97} = 0{,}2551,$$

si ha che

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{50}{99} \cdot \frac{49}{97} - \left(\frac{50}{99}\right)^2 = \frac{50}{950697},$$

e quindi

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{50} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j) = 50 \cdot \frac{2450}{9801} + 2\binom{50}{2} \cdot \frac{50}{950697} = 12{,}6276.$$

(iii) Per la disuguaglianza di Markov si ha che

$$P(X \geq 50) \leq E(X)/50 = \frac{1}{50} \cdot \frac{2500}{99} = \frac{50}{99} = 0{,}5051.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 29/01/2013 – ore 9

Esercizio 1 (i) Posto $H = \{$in 2 nodi adiacenti della rete (e solo in quelli) si genera $\mathbf{1}\}$, la probabilità richiesta è:

$$P(H) = P(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}\cap A_4)+P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3\cap A_4)+P(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\cap\overline{A_4}).$$

Tenendo presente che gli eventi A_i sono indipendenti, e che $P(A_k) = k/4$, si ha

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 0 = 0,$$

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(A_4) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{3}{32},$$

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)P(A_4) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{9}{32},$$

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \overline{A_4}) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)P(\overline{A_4}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 0 = 0.$$

Pertanto si ha

$$P(H) = \frac{3}{32}+\frac{9}{32} = \frac{3}{8}.$$

(ii) Risulta:

$$P(A_1|H) = 0, \quad P(A_2|H) = \frac{3/32}{3/8} = \frac{1}{4}, \quad P(A_3|H) = \frac{9/32}{3/8} = \frac{3}{4}, \quad P(A_4|H) = \frac{3/8}{3/8} = 1.$$

Esercizio 2 (i) La densità di X è data da

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} p, & 0 < x < 1 \\ 1-p, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) Il valore medio di X è:

$$E(X) = \int_0^1 px\,dx + \int_1^2 (1-p)x\,dx = p\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + (1-p)\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{p}{2}+(1-p)\frac{3}{2} = \frac{3}{2}-p.$$

Inoltre

$$E(X^2) = \int_0^1 px^2\,dx + \int_1^2 (1-p)x^2\,dx = p\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 + (1-p)\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{p}{3}+(1-p)\frac{7}{3} = \frac{7}{3}-2p,$$

e quindi la varianza è

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{7}{3}-2p-\left(\frac{3}{2}-p\right)^2 = \frac{1}{12}+p-p^2.$$

(iii) Il valore medio $E(X) = \frac{3}{2} - p$ è decrescente, e quindi è massimo per $p = 0$ e minimo per $p = 1$. Poiché

$$\frac{d}{dp} Var(X) = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{12} + p - p^2\right) = 1 - 2p,$$

la varianza è massima per $p = 1/2$, ed è minima per $p = 0$ e $p = 1$.

Esercizio 3 (i) Notiamo che

	X	Y	P
ccc	0	0	3/16
cct	1	1	1/16
ctc	1	2	3/16
ctt	2	1	1/16
tcc	1	1	3/16
tct	2	2	1/16
ttc	2	1	3/16
ttt	3	0	1/16

$x\backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	3/16	0	0	3/16
1	0	4/16	3/16	7/16
2	0	4/16	1/16	5/16
3	1/16	0	0	1/16
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1

(ii) Ad esempio risulta $p(0,0) = 3/16 \neq p_X(0)\, p_Y(0) = (3/16)(1/4)$, quindi X e Y non sono indipendenti.
(iii) Si ha

$$E(X) = \frac{7+10+3}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}, \qquad E(Y) = \frac{8+8}{16} = 1,$$

$$E(X^2) = \frac{7+20+9}{16} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}, \qquad E(Y^2) = \frac{8+16}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2},$$

$$Var(X) = \frac{9}{4} - \frac{25}{16} = \frac{11}{16}, \qquad Var(Y) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

(iv) Essendo

$$E(X \cdot Y) = \frac{4+6+8+4}{16} = \frac{11}{8},$$

il coefficiente di correlazione è

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\, Var(Y)}} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X)\, E(Y)}{\sqrt{Var(X)\, Var(Y)}} = \frac{1/8}{\sqrt{11/32}} = \frac{1}{\sqrt{22}} = 0{,}2132$$

quindi X e Y sono positivamente correlate.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 19/2/2013

Esercizio 1 (i) Risulta:

$$P(A) = \binom{3}{1}\Big(\frac{2}{5}\Big)\Big(\frac{3}{5}\Big)^2 = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} = \frac{54}{125} = 0{,}432$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \Big(\frac{4}{5}\Big)^3 = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125} = 0{,}488$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{54}{125} - \binom{3}{1}\Big(\frac{2}{5}\Big)\Big(\frac{2}{5}\Big)^2 = \frac{54}{125} - \frac{24}{125} = \frac{30}{125} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

e quindi $P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B) = 0{,}2108$ da cui segue che A e B non sono indipendenti.
(ii) In generale, la relazione $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$ è soddisfatta se e solo se $P(B \cap C) = 0$. Poichè risulta

$$P(B \cap C) = \Big(\frac{1}{5}\Big)^3 = \frac{1}{125} = 0{,}008$$

allora si ha $P(B \cup C) \neq P(B) + P(C)$ in quanto B e C non sono eventi incompatibili.
(iii) Si ha

$$P(C) = 2\Big(\frac{2}{5}\Big)^3 + \Big(\frac{1}{5}\Big)^3 = \frac{17}{125} = 0{,}136$$

$$P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{1/125}{61/125} = \frac{1}{61} = 0{,}016$$

e quindi $P(C) \neq P(C|B)$, da cui segue che B e C non sono indipendenti.

Esercizio 2 (i) Si ha

$$p(2) = P(\mathbf{00}...) + P(\mathbf{11}...) = \frac{\binom{2}{0}\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{2}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{n-2}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-2)(n-3)+2}{n(n-1)}$$

$$p(3) = P(\mathbf{100}...) + P(\mathbf{011}...) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{n-3}{1}}{\binom{n}{2}} + \frac{\binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{n-3}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-3)+2}{n(n-1)}$$

$$p(4) = P(\mathbf{0100}...) = \frac{\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{n-4}{1}}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-4)}{n(n-1)}$$

$$p(5) = P(\mathbf{10100}...) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{n-5}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

$$p(6) = P(\mathbf{010100}...) = \frac{\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{n-6}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

pertanto

$$\sum_{k=2}^{6} p(k) = \frac{(n-2)(n-3)+2+2(n-3)+2+2(n-4)+2+2}{n^2-n} = \frac{n^2-n}{n^2-n} = 1.$$

(ii) Si ricava quindi

$$E(X) = \sum_{k=2}^{6} k\,p(k) = \frac{2(n-2)(n-3)+4+6(n-3)+6+8(n-4)+10+12}{n^2-n} = 2\Big(1+\frac{3}{n}\Big)$$

da cui segue

$$\lim_{n\to+\infty} E(X) = 2$$

Esercizio 3 (i) Per $z > 2$ risulta

$$P(X > z \,|\, X > 2) = \frac{P(X > z)}{P(X > 2)} = \frac{1-F(z)}{1-F(2)} = \frac{1-F(z)}{4/5}$$

quindi $P(X > z \,|\, X > 2) = 0{,}25$ per $1 - F(z) = 1/5$, ossia $F(z) = 4/5$, da cui $z = 5$.
(ii) Notiamo che

$$P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

mentre

$$P(X > 5 \,|\, X > 2) = \frac{P(X > 5)}{P(X > 2)} = \frac{1-F(5)}{1-F(2)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$$

quindi $P(X > 5 \,|\, X > 2) \neq P(X > 3)$, pertanto X non soddisfa la proprietà di assenza di memoria.
(iii) Notiamo che $S = X_1 + X_2$, con X_1, X_2 variabili i.i.d. uniformi in $(1,6)$, ossia aventi densità di probabilità

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 1 < x < 6 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $i = 1,2$ risulta $E(X_i) = 3{,}5$ e $Var(X_i) = 25/12 = 2{,}08\overline{3}$; si ottiene pertanto

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 7, \qquad Var(S) = Var(X_1) + Var(X_2) = \frac{50}{12} = 4{,}1\overline{6}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 29/4/2013 – ore 12

Esercizio 1 Considerati gli eventi $E = \{\text{il valore giunto nel nodo } B \text{ è } \mathbf{0}\}$, $F = \{\text{il valore giunto nel nodo } B \text{ è } \mathbf{1}\}$ e $C_i = \{\text{il bit generato in } A \text{ arriva al nodo } N_i\}$, $(i = 1, 2, 3)$, si ha

$$\begin{aligned} P(E) &= P(C_2 \,|\, \text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{0}) P(\text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{0}) \\ &\quad + P(C_3 \,|\, \text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{1}) P(\text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{1}) \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{18}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(F) &= P(C_2 \,|\, \text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{1}) P(\text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{1}) \\ &\quad + P(C_1 \,|\, \text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{0}) P(\text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{0}) \\ &= \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Quindi

(i)

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{7}{18} + \frac{1}{4} = \frac{23}{36},$$

(ii)

$$\begin{aligned} &P(\text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{1} \,|\, E) \\ &= \frac{P(E \,|\, \text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{1}) \cdot P(\text{nel nodo } A \text{ è stato generato } \mathbf{1})}{P(E)} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \right) / \frac{7}{18} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 Sia Y_i la variabile aleatoria che descrive l'esito del lancio del dado i-esimo, per $i = 1, 2$. Si ha pertanto $X = \max(Y_1, Y_2)$, dove Y_1 ed Y_2 sono indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione uniforme discreta in $\{1, \ldots, 6\}$.

(i) Per $k = 1, \ldots, 6$ si ha

$$P(X = k) = \sum_{j=1}^{k-1} P(Y_1 = k, Y_2 = j) + \sum_{j=1}^{k-1} P(Y_1 = j, Y_2 = k) + P(Y_1 = k, Y_2 = k)$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{k-1} P(Y_1 = k) P(Y_2 = j) + P(Y_1 = k, Y_2 = k) = 2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2k-1}{36}.$$

(ii) Risulta quindi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 1/36 & 1 \le x < 2, \\ 4/36 & 2 \le x < 3, \\ 9/36 & 3 \le x < 4, \\ 16/36 & 4 \le x < 5, \\ 25/36 & 5 \le x < 6, \\ 1 & x \ge 6. \end{cases}$$

(iii) Si ha inoltre

$$P(X = k \,|\, C) = \begin{cases} 0 & k = 1, 2, \\ \frac{3/36}{1/6} = \frac{1}{2} & k = 3, \\ \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} & k = 4, \\ \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} & k = 5, \\ \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} & k = 6. \end{cases}$$

(iv) I valori medi richiesti sono:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{161}{36} = 4{,}4722,$$

$$E(X \,|\, C) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 4.$$

Esercizio 3 Essendo X uniforme in $(-1, 1)$, si ha che $E(X) = 0$, $Var(X) = 1/3$ e la funzione di distribuzione è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ (x+1)/2 & -1 \le x < 1, \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

Essendo Y esponenziale di valore atteso $E(Y) = 2$, si ha che $Var(Y) = 4$ e

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-y/2} & y \ge 0. \end{cases}$$

Risulta quindi

(i)

$$P(X \ge 0, Y \le 2) = P(X \ge 0) \cdot P(Y \le 2) = [1 - F_X(0)] \cdot F_Y(2) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0{,}316.$$

(ii)

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = 0,$$

(iii)

$$Var(2X + Y) = 4Var(X) + Var(Y) = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} = 5{,}333.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 19/6/2013 – ore 9

Esercizio 1 Considerati gli eventi $S = \{$il messaggio è uno SPAM$\}$ ed $E = \{$il sistema valuta come SPAM il messaggio ricevuto$\}$, risulta $P(S) = 0{,}7$, $P(\bar{S}) = 0{,}3$, $P(E \,|\, S) = 0{,}9$, $P(\bar{E} \,|\, S) = 0{,}1$, $P(\bar{E} \,|\, \bar{S}) = 0{,}8$ e $P(E \,|\, \bar{S}) = 0{,}2$. Pertanto

(i)
$$P(E) = P(E \,|\, S)P(S) + P(E \,|\, \bar{S})P(\bar{S}) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}69.$$

(ii)
$$P(S \,|\, E) = \frac{P(E \,|\, S)P(S)}{P(E)} = \frac{0{,}63}{0{,}69} = 0{,}913.$$

Esercizio 2 (i) Essendo
$$\int_{-2}^{1} c|x|\mathrm{d}x = \frac{5\,c}{2},$$
deve essere $c = 2/5$.

(ii) Risulta
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2, \\ \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{2}{5}(-y)\mathrm{d}y = \frac{4 - x^2}{5} & -2 \leq x < 0, \\ \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{2}{5}(-y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{x} \frac{2}{5}y\mathrm{d}y = \frac{4 + x^2}{5} & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

(iii) Si ha che
$$E(X) = \int_{-2}^{0} \frac{2}{5}(-x^2)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{2}{5}x^2\mathrm{d}x = -\frac{14}{15}.$$

(iv)
$$P(X < 0 \,|\, X \geq -1) = \frac{P(-1 \leq X < 0)}{P(X \geq -1)} = \frac{F_X(0) - F_X(-1)}{1 - F_X(-1)} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3 (i) Distribuzioni congiunta e marginali sono date da:

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
0	θ	$p-\theta$	p
1	$1-p-\theta$	θ	$1-p$
$p_Y(y)$	$1-p$	p	1

(ii) Risulta
$$P(X \geq Y) = p(0,0) + p(1,0) + p(1,1) = \theta + 1 - p,$$
che assume valore massimo per $p = \theta$.

(iii) Essendo $E(X \cdot Y) = \theta$, $E(X) = 1 - p$, $E(Y) = p$, $Var(X) = Var(Y) = p(1-p)$, risulta
$$\rho(X,Y) = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\theta - p(1-p)}{p(1-p)},$$
quindi
$$\rho(X,Y) = \frac{1}{2} \iff \frac{\theta - p(1-p)}{p(1-p)} = \frac{1}{2} \iff \theta = \frac{3p(1-p)}{2}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 12/7/2013

Esercizio 1 Sia U_B = {l'urna scelta contiene una biglia bianca} e sia B = {la biglia estratta è bianca}.
(i) Dalla formula delle alternative segue:

$$P(B) = P(B|U_B)\,P(U_B) + P(B|\overline{U_B})\,P(\overline{U_B}) = 1\,p + \frac{1}{2}\,(1-p) = \frac{1}{2}\,(1+p).$$

(ii) Dalla formula di Bayes segue:

$$P(U_B|B) = \frac{P(B|U_B)\,P(U_B)}{P(B)} = \frac{1\,p}{\frac{1}{2}\,(1+p)} = \frac{2p}{1+p}.$$

(iii) Risulta $P(U_B|B) = 1/2$ per

$$\frac{2p}{1+p} = \frac{1}{2}, \quad \text{ossia } p = \frac{1}{3}.$$

Risulta $P(U_B|B) = 1/3$ per

$$\frac{2p}{1+p} = \frac{1}{3}, \quad \text{ossia } p = \frac{1}{5}.$$

Esercizio 2 (i) La funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{c}\,\log(x+1), & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

è continua in $x = 1$ se $F(1^-) = 1$, ossia se $c = \log 2 = 0{,}6931$; in tal caso $F(x)$ è la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua X.
(ii) La densità di probabilità di X è, per $c = \log 2$,

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c\,(x+1)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(iii) Per $k = 1, 2, \ldots$ si ha, per $c = \log 2$,

$$E[(X+1)^k] = \frac{1}{c}\int_0^1 (x+1)^{k-1}dx = \frac{(x+1)^k}{c\,k}\Big|_0^1 = \frac{2^k - 1}{c\,k}.$$

(iv) Ricordando che $Var(X) = Var(X+1)$ si ha, per $c = \log 2$,

$$Var(X) = Var(X+1) = E[(X+1)^2] - [E(X+1)]^2 = \frac{3}{2c} - \frac{1}{c^2} = \frac{3c-2}{2c^2}.$$

Esercizio 3 (i) Essendo $X = B_1$ **or** B_2 e $Y = B_2$ **and** B_3, si ha:

$B_1B_2B_3$	X	Y	P
0 0 0	0	0	$(1-p)^3$
0 0 1	0	0	$p(1-p)^2$
0 1 0	1	0	$p(1-p)^2$
0 1 1	1	1	$p^2(1-p)$
1 0 0	1	0	$p(1-p)^2$
1 0 1	1	0	$p^2(1-p)$
1 1 0	1	0	$p^2(1-p)$
1 1 1	1	1	p^3

pertanto la distribuzione di probabilità congiunta di (X, Y) è

$x\backslash y$	0	1	$p_X(x)$
0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$2p(1-p)$	p^2	$1-(1-p)^2$
$p_Y(y)$	$1-p^2$	p^2	1

(ii) Richiedendo che risulti $p(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$ per $x, y = 0, 1$ si trae che le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti per $p = 0$ e per $p = 1$.
(iii) Risulta

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = p^2 - [1-(1-p)^2] \cdot p^2 = p^2(1-p)^2,$$

$$Var(X) = (1-p)^2[1-(1-p)^2], \qquad Var(Y) = p^2(1-p^2),$$

e pertanto

$$R_1(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}, \qquad R_2(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{Var(Y)} = 1.$$

Poiché risulta

$$\frac{d}{dp} R_1(X, Y) = \frac{2p^2}{[1-(1-p)^2]^2} \geq 0, \qquad \frac{d}{dp} R_2(X, Y) = 0,$$

segue che $R_1(X, Y)$ è crescente per $p \in [0, 1]$, e pertanto raggiunge il massimo per $p = 1$, mentre $R_2(X, Y)$ è costante per $p \in [0, 1]$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 13/9/2013

Esercizio 1 Si considerino gli eventi $U=\{$la sorgente d'informazione genera $\mathbf{1}\}$ ed $R=\{$il decodificatore registra $\mathbf{1}\}$.
(i) Dalla formula di Bayes segue:

$$P(U|R)=\frac{P(R|U)\,P(U)}{P(R|U)\,P(U)+P(R|\bar{U})\,P(\bar{U})}=\frac{0{,}8\cdot 0{,}15}{0{,}8\cdot 0{,}15+0{,}2\cdot 0{,}85}=\frac{0{,}12}{0{,}12+0{,}17}=0{,}4138.$$

(ii) Posto $A=\{$in tre invii indipendenti il segnale generato è sempre lo stesso$\}$, si ha che

$$P(A)=P(\mathbf{111})+P(\mathbf{000})=(0{,}85)^3+(0{,}15)^3=0{,}6175.$$

Esercizio 2 (i) Risulta

$$F(q)=\frac{1}{4}\iff q=1.$$

(ii) Si ha che

$$P(X>1)=1-F(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$
$$P(X\ge 2)=1-F(2^-)=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$
$$P(1<X<2\,|\,X>1)=\frac{P(1<X<2)}{P(X>1)}=\frac{F(2^-)-F(1)}{1-F(1)}=\frac{\frac{2}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

(iii)

$$E(X)=\int_0^2\Big(1-\frac{x}{4}\Big)\,\mathrm{d}x=\Big[x-\frac{x^2}{8}\Big]_0^2=2-\frac{4}{8}=\frac{3}{2}.$$

Esercizio 3 (i) Essendo

gioco	moneta	dado	X	Y	P
$\mathcal{G}$	testa	numero pari	1	1	1/4
$\mathcal{G}$	testa	numero dispari	-1	-1	1/4
$\mathcal{H}$	croce	numero pari	-1	1	1/4
$\mathcal{H}$	croce	numero dispari	1	-1	1/4

la distribuzione di probabilità congiunta di (X,Y) è data da

$x\backslash y$	-1	1	$p_X(x)$
-1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

Inoltre, risultando $p(x,y)=p_X(x)\,p_Y(y)$ per $x,y=-1,1$, le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti.

(ii) Si ricava facilmente che $E(X) = E(Y) = 0$, $Var(X) = E(X^2) = Var(Y) = E(Y^2) = 1$.
(iii) Risulta

$$P(Z = z \,|\, X = x) = \frac{P(Z = z, X = x)}{P(X = x)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}, \qquad \forall x, z,$$

quindi le variabili Z e X sono indipendenti. Analogamente

$$P(Z = z \,|\, Y = y) = \frac{P(Z = z, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}, \qquad \forall y, z,$$

pertanto anche le variabili Z ed Y sono indipendenti. Inoltre

$$P(Z = 1 \,|\, X = 1, Y = 1) = \frac{P(Z = 1, X = 1, Y = 1)}{P(X = 1, Y = 1)} = \frac{1/4}{1/4} = 1,$$

e quindi la variabile Z ed il vettore (X, Y) non sono indipendenti, essendo $P(Z = 1) = 1/2$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 9/1/2014 – ore 9

Esercizio 1 Consideriamo gli eventi $T_k = \{k \text{ dei dadi lanciati sono truccati}\}$ $(k = 0, 1, 2)$ e $V = \{\text{si realizza una vincita, ossia la somma dei 2 dadi è 7}\}$.

(i) Risulta

$$P(V|T_0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(V|T_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(V|T_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

con riferimento alle seguenti sequenze nei 3 casi:
se vale $T_0 : (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)$,
se vale $T_1 : (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (5', 2)$,
se vale $T_2 : (2, 5); (2, 5'); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (5', 2)$.

(ii) Per la formula delle alternative si ha

$$P(V) = P(V|T_0)P(T_0) + P(V|T_1)P(T_1) + P(V|T_2)P(T_2) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6},$$

essendo

$$P(T_k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{4}{2}}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

(iii) Si ha infine (notiamo che T_1 e V sono indipendenti):

$$P(T_1|V) = \frac{P(V|T_1)P(T_1)}{P(V)} = P(T_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 2 Ponendo $E_j = \{\text{nel modulo } j\text{-esimo è presente un errore}\}$, $j = 1, 2$, risulta:

$$P(X = 0) = P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) = P(\overline{E}_1)P(\overline{E}_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X = 1) = P(E_1 \cap \overline{E}_2) + P(\overline{E}_1 \cap E_2) = P(E_1)P(\overline{E}_2) + P(\overline{E}_1)P(E_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12},$$

$$P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

(i) Quindi
$F(x) = 0$ per $x < 0$,
$F(x) = 1/2$ per $0 \le x < 1$,
$F(x) = 11/12$ per $1 \le x < 2$,
$F(x) = 1$ per $x \ge 2$.
(ii) Si ha:

$$\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{12} = 0{,}5833, \qquad E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{3}{4},$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{3}{4} - \frac{49}{144} = \frac{59}{144} = 0{,}4097, \qquad \sigma = \sqrt{0{,}4097} = 0{,}6401.$$

(iii) Pertanto:

$$P(|X - \mu| \le \sigma) = P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P(-0{,}0568 \le X \le 1{,}2234) = \frac{11}{12} = 0{,}9167.$$

Esercizio 3 Si ha

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
1 2 3 4	4	4	3 1 2 4	1	2
1 2 4 3	2	2	3 1 4 2	0	2
1 3 2 4	2	2	3 2 1 4	2	4
1 3 4 2	1	2	3 2 4 1	1	2
1 4 2 3	1	2	3 4 1 2	0	4
1 4 3 2	2	4	3 4 2 1	0	2
2 1 3 4	2	2	4 1 2 3	0	0
2 1 4 3	0	0	4 1 3 2	1	2
2 3 1 4	1	2	4 2 1 3	1	2
2 3 4 1	0	0	4 2 3 1	2	2
2 4 1 3	0	2	4 3 2 1	0	0
2 4 3 1	1	2	4 3 1 2	0	2

(i) Pertanto la densità discreta di (X, Y) è:

$x \backslash y$	0	2	4	$p_X(x)$
0	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{9}{24}$
1	0	$\frac{8}{24}$	0	$\frac{8}{24}$
2	0	$\frac{4}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{6}{24}$
4	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

(ii) Si ha $p(0,0) = \frac{1}{6} \neq p_X(0)p_Y(0)$; quindi X e Y non sono indipendenti.
(iii) Si ricava facilmente:

$$E(X) = 1, \qquad E(Y) = 2, \qquad E(X \cdot Y) = \frac{8}{3},$$

e quindi

$$Cov(X, Y) = \frac{2}{3}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 9/1/2014 – ore 12

Esercizio 1

Considerato l'evento A_k = {Il k-esimo studente chiamato estrae la commissione **A**} ($k = 1, 2, 3$), risulta

(i)

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2)P(A_2 \,|\, A_1)P(A_1) + P(A_3 \,|\, A_1 \cap \bar{A}_2)P(\bar{A}_2 \,|\, A_1)P(A_1) \\ &\quad + P(A_3 \,|\, \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)P(\bar{A}_2 \,|\, \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) + P(A_3 \,|\, \bar{A}_1 \cap A_2)P(A_2 \,|\, \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(ii)

$$P(A_1 \cup A_2 \,|\, \bar{A}_3) = \frac{P(A_1 \cap \bar{A}_3) + P(A_2 \cap \bar{A}_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3)}{P(\bar{A}_3)} = \frac{\frac{5}{18} + \frac{5}{18} - \frac{5}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6},$$

essendo

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \bar{A}_3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_3 \,|\, A_2 \cap A_1)P(A_2 \,|\, A_1)P(A_1) + P(\bar{A}_3 \,|\, \bar{A}_2 \cap A_1)P(\bar{A}_2 \,|\, A_1)P(A_1) \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{18}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_2 \cap \bar{A}_3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_3 \,|\, A_2 \cap A_1)P(A_2 \,|\, A_1)P(A_1) + P(\bar{A}_3 \,|\, A_2 \cap \bar{A}_1)P(A_2 \,|\, \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{18}, \end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_3 \,|\, A_2 \cap A_1)P(A_2 \,|\, A_1)P(A_1) = \frac{5}{36}.$$

Esercizio 2

(i) Si ha che

$$P(X = 0) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{6}\right)\left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{5}{18},$$

$$P(X = 1) = P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{17}{36},$$

$$P(X = 2) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{36}.$$

(ii) Risulta

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{5}{18} & 0 \leq x < 1, \\ \frac{27}{36} & 1 \leq x < 2, \\ \frac{35}{36} & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

(iii)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}.$$

(iv)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{17}{36} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \frac{1}{36} = 1.$$

(v) Nell'ipotesi in cui ciascuna delle tre linee sia attiva con probabilità 1/6, la variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale, con $P(X=x) = \binom{3}{x}(1/6)^x(5/6)^{3-x}$ per $x = 0, 1, 2, 3$.

Esercizio 3

(i) Deve essere $p \geq 0$ e

$$p + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} + 2p + 2p + 2p + p + \frac{p}{2} = 1,$$

da cui si deduce $p = 0{,}1$. Quindi per la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali si ottiene

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	0,1	0,05	0,05	0,2
1	0,05	0,2	0,2	0,45
2	0,2	0,1	0,05	0,35
$p_Y(y)$	0,35	0,35	0,3	1

(ii) Si ha $p(0,0) = 0{,}1 \neq p_X(0)\, p_Y(0) = 0{,}07$, quindi X e Y non sono indipendenti;

(iii) Risulta

$$E(XY) = 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 + 20{,}1 + 40{,}05 = 1,$$

$$E(X) = 0{,}45 + 0{,}7 = 1{,}15, \qquad E(Y) = 0{,}35 + 0{,}6 = 0{,}95,$$

e pertanto

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - 1{,}0925 = -0{,}0925.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 23/1/2014

Esercizio 1 Indichiamo con C_k l'evento che si realizza quando k computer sono funzionanti. Dalle ipotesi segue che C_k ha probabilità binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 4/5$, e quindi

$$P(C_k) = \binom{10}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{10-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 10.$$

(i) La probabilità che tutti gli operatori tranne uno possono accedere ad un computer funzionante vale pertanto

$$P(C_7) = \binom{10}{7} \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}2013.$$

(ii) La probabilità che tutti gli operatori possono accedere ad un computer funzionante è

$$P(T) \equiv P(C_8 \cup C_9 \cup C_{10}) = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{10-k} = 0{,}6778.$$

(iii) Pertanto si ha

$$P(C_8 \,|\, T) = \frac{P(C_8)}{P(T)} = \frac{0{,}302}{0{,}6778} = 0{,}4455; \qquad P(C_9 \,|\, T) = \frac{P(C_9)}{P(T)} = \frac{0{,}2684}{0{,}6778} = 0{,}396;$$

$$P(C_{10} \,|\, T) = \frac{P(C_{10})}{P(T)} = \frac{0{,}1074}{0{,}6778} = 0{,}1584.$$

Esercizio 2 (i) Per determinare la costante c calcoliamo l'integrale della densità di probabilità di X:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = c\int_0^2 |x-1|dx = c\left[\int_0^1 (-x+1)dx + \int_1^2 (x-1)dx\right]$$

$$= c\left[\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)_1^2\right] = c\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = c,$$

pertanto $c = 1$.
(ii) Essendo $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, si ha $F(x) = 0$ per $x < 0$;

$$F(x) = \int_0^x (-t+1)dt = x - \frac{x^2}{2} \quad \text{per } 0 \leq x < 1;$$

$$F(x) = \int_0^1 (-t+1)dt + \int_1^x (t-1)dt = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - x + 1 = \frac{x^2}{2} - x + 1 \quad \text{per } 1 \leq x < 2;$$

$F(x) = 1$ per $x \geq 2$.
(iii) Risulta

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x(-x+1)dx + \int_1^2 x(x-1)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)_1^2$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1.$$

(iv) Quindi

$$P(X > 1/2 \,|\, X \le 3/2) = \frac{F(3/2) - F(1/2)}{F(3/2)} = 1 - \frac{3/8}{5/8} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

(v) Se Y è una variabile aleatoria normale avente lo stesso valore medio di X, ossia $E(Y) = 1$, e tale che $Var(Y) = 4$, si ha

$$P(Y > 1/2 \,|\, Y \le 3/2) = 1 - \frac{F_Y(1/2)}{F_Y(3/2)} = 1 - \frac{\Phi\left(\frac{1/2-1}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{3/2-1}{2}\right)} = 1 - \frac{\Phi(-0{,}25)}{\Phi(0{,}25)} = 1 - \frac{1-\Phi(0{,}25)}{\Phi(0{,}25)}$$

$$= 1 - \frac{1 - 0{,}5987}{0{,}5987} = 1 - \frac{0{,}4013}{0{,}5987} = 0{,}3297,$$

essendo

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\frac{Y-1}{2} \le \frac{y-1}{2}\right) = P\left(Z \le \frac{y-1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{y-1}{2}\right),$$

con $Z = (Y-1)/2$ variabile normale standard.

Esercizio 3 I valori di X e Y sono

bit selezionati	bit non sel.	X	Y
1 1 1	0 0	3	1
1 1 0	1 0	2	0
1 1 0	0 1	2	0
1 0 1	1 0	2	0
1 0 1	0 1	2	0
1 0 0	1 1	1	1
0 1 1	1 0	2	0
0 1 1	0 1	2	0
0 1 0	1 1	1	1
0 0 1	1 1	1	1

(i) Quindi la densità discreta di (X, Y) è

$$p(1,1) = \frac{3}{10}, \qquad p(2,0) = \frac{3}{5}, \qquad p(3,1) = \frac{1}{10}.$$

(ii) X e Y non sono indipendenti, essendo

$$p(1,0) = 0 \neq \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5} = p_X(1)\, p_Y(0).$$

Inoltre risulta $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{3}{5} - \frac{9}{5} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{3}{25}$.
(iii) Le distribuzioni condizionate e le medie condizionate sono:

$$p_{X|Y}(2 \,|\, 0) = 1; \qquad E(X \,|\, Y = 0) = 2;$$

$$p_{X|Y}(1 \,|\, 1) = \frac{3}{4}, \quad p_{X|Y}(3 \,|\, 1) = \frac{1}{4}; \qquad E(X \,|\, Y = 1) = \frac{3}{2}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 13/2/2014

Esercizio 1 Sia $T_i = \{\text{esce testa al lancio } i\text{-esimo}\}$ $(i = 1, 2, 3)$, con $P(T_1) = P(T_2) = 1/2$ e $P(T_3) = 1/3$.
(i) Si ha quindi, per l'indipendenza:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap \overline{T}_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(\overline{B}) = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto, si ricava $P(\overline{A}) + P(\overline{B}) \leq 1$.
(ii) Gli eventi A e B non sono indipendenti in quanto risulta

$$P(A \cap B) = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq P(A)P(B).$$

(iii) Si ha $P(B \,|\, A) \neq P(A \cup B)$ poiché

$$P(B \,|\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{5/6} = \frac{2}{5},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1.$$

(iv) Risulta $P(A \,|\, B) \neq 1 - P(A \,|\, \overline{B})$, essendo

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3};$$

$$P(A \,|\, \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(T_1 \cap \overline{T}_2) + P(\overline{T}_1 \cap T_2)}{P(\overline{B})} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

Esercizio 2 Risulta

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}, \qquad P(X = 2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10},$$

$$P(X = -1) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = \frac{3}{5}.$$

(i) Pertanto
$F(x) = 0$, per $x < -1$,
$F(x) = 3/5$, per $-1 \leq x < 1$,
$F(x) = 9/10$, per $1 \leq x < 2$,
$F(x) = 1$, per $x \geq 2$.
(ii) Si ha:

$$E(X) = -\frac{3}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = -\frac{1}{10}, \qquad E(X^2) = \frac{3}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{13}{10},$$

e pertanto

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{100} = \frac{129}{100} = 1{,}29.$$

(iii) Risulta:

$$P(X > 1 \,|\, X \geq 0) = \frac{P(X > 1)}{P(X \geq 0)} = \frac{1 - F(1)}{1 - F(0^-)} = \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}.$$

(iv) Poiché Y ha distribuzione normale di media $E(Y) = -1/10$ e varianza $Var(Y) = 9$, si ha

$$P(Y > 1 \,|\, Y \geq 0) = \frac{P(Y > 1)}{P(Y \geq 0)} = \frac{P(Z > 11/30)}{P(Z \geq 1/30)} = \frac{P(Z > 11/30)}{P(Z \geq 1/30)} = \frac{1 - \Phi(0{,}37)}{1 - \Phi(0{,}03)}$$

$$= \frac{1 - 0{,}6443}{1 - 0{,}5120} = \frac{0{,}3557}{0{,}4880} = 0{,}7289.$$

dove $Z = (Y + 1/10)/3$ ha distribuzione normale standard.

Esercizio 3 (i) Imponendo che sia $p(x, y) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p(x, y) = 1$, si ha

$$c + \frac{c}{2} + 2c + c = c\frac{9}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{2}{9}$$

pertanto la distribuzione congiunta di (X, Y) è

$x \setminus y$	1	2	$p_X(x)$
1	2/9	1/9	1/3
2	4/9	2/9	2/3
$p_Y(y)$	2/3	1/3	1

(ii) Si verifica facilmente che $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ per ogni $x, y = 1, 2$; pertanto X e Y sono indipendenti. X e Y non sono identicamente distribuite perché $p_X(w) \neq p_Y(w)$ per $w = 1, 2$.
(iii) Si ha:

$$E(X-Y) = E(X)-E(Y) = \frac{5}{3}-\frac{4}{3} = \frac{1}{3}, \qquad Var(X-Y) = Var(X)+Var(Y) = \frac{2}{9}+\frac{2}{9} = \frac{4}{9},$$

essendo

$$E(X) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}, \qquad E(X^2) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3, \qquad Var(X) = 3 - \frac{25}{9} = \frac{2}{9},$$

$$E(Y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \qquad E(Y^2) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2, \qquad Var(Y) = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

(iv) Risulta

$$P(X = 1 \,|\, X + Y = 3) = \frac{p(1, 2)}{p(1, 2) + p(2, 1)} = \frac{1/9}{5/9} = \frac{1}{5}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
(16/4/2014)

Esercizio 1 Sia $S = \{\text{il messaggio è spam}\}$, $E = \{\text{il messaggio è valutato come spam}\}$.
(i) $P(E) = P(E|S)\,P(S) + P(E|\overline{S})\,P(\overline{S}) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}6$.
(ii) $P(S|E) = P(E|S)\,P(S)/P(E) = (0{,}8 \cdot 0{,}6)/0{,}6 = 0{,}8$.
(iii) $P(S|\overline{E}) = P(\overline{E}|S)\,P(S)/P(\overline{E}) = (0{,}2 \cdot 0{,}6)/0{,}4 = 0{,}3$.

Esercizio 2 (i) Per determinare la costante c calcoliamo l'integrale della densità di probabilità di X:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = c\int_0^2 (x-1)^2 dx = c\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^2 = c\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right] = c\cdot\frac{2}{3},$$

pertanto $c = 3/2$.
(ii) Essendo $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, si ha $F(x) = 0$ per $x < 0$;

$$F(x) = \frac{3}{2}\int_0^x (t-1)^2 dt = \frac{3}{2}\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^x = \frac{(x-1)^3+1}{2} = \frac{x^3-3x^2+3x}{2} \qquad \text{per } 0 \le x < 2;$$

$F(x) = 1$ per $x \ge 2$.
(iii) Risulta

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^2 x\frac{3(x-1)^2}{2}dx = \frac{3}{2}\int_0^2 (x^3-2x^2+x)dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)_0^2 = \frac{3}{2}\left(4 - \frac{16}{3} + 2\right) = 1.$$

(iv) Quindi si ha

$$P(X \le 3/2 \,|\, X > 1/2) = \frac{F(3/2)-F(1/2)}{1-F(1/2)} = \frac{2/16}{9/16} = \frac{2}{9} = 0{,}\overline{2}.$$

(v) Se Y è una variabile aleatoria normale avente lo stesso valore medio di X, ossia $E(Y) = 1$, e tale che $Var(Y) = 4$, si ha

$$P(Y \le 3/2 \,|\, Y > 1/2) = \frac{F_Y(3/2)-F_Y(1/2)}{1-F_Y(1/2)} = \frac{\Phi\left(\frac{3/2-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1/2-1}{2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{1/2-1}{2}\right)} = \frac{\Phi(0{,}25)-\Phi(-0{,}25)}{1-\Phi(-0{,}25)}$$

$$= \frac{0{,}5987-(1-0{,}5987)}{1-(1-0{,}5987)} = \frac{0{,}1974}{0{,}5987} = 0{,}3297$$

poiché, con $Z = (Y-1)/2$ variabile aleatoria normale standard, risulta

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\frac{Y-1}{2} \le \frac{y-1}{2}\right) = P\left(Z \le \frac{y-1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{y-1}{2}\right).$$

Esercizio 3 (i) Imponendo $p(x,y) \geq 0$ si ha $(1/2)-p \geq 0$ e $p \geq 0$; inoltre $\sum_{x,y} p(x,y) = 1$ per ogni p, da cui segue $0 \leq p \leq 1/2$.
(ii) Le densità marginali di X e di Y si ottengono dalla tabella:

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	$(1/2)-p$	$1/8$	0	$(5/8)-p$
1	$1/8$	p	$1/8$	$(1/4)+p$
2	0	$1/8$	0	$1/8$
$p_Y(y)$	$(5/8)-p$	$(1/4)+p$	$1/8$	1

(iii) X e Y non sono indipendenti, in quanto $p(2,2) = 0 \neq p_X(2)\, p_Y(2) = 1/64$.
(iv) Risulta $E(X) = E(Y) = 1/2 + p$ e $E(X \cdot Y) = 1/2 + p$, da cui segue

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 1/2 + p - (1/2+p)^2 = \frac{1}{4} - p^2.$$

Poiché

$$\frac{d}{dp} Cov(X,Y) = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{4} - p^2\right) = -2p,$$

la covarianza è decrescente per $0 \leq p \leq 1/2$. Quindi la covarianza è massima per $p = 0$, con $Cov(X,Y)|_{p=0} = 1/4$, ed è minima per $p = 1/2$, con $Cov(X,Y)|_{p=1/2} = 0$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 23/6/2014 – ore 12

Esercizio 1 (i) Risulta $S = \{(x_1, x_2, x_3), x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, x_i \neq x_j, i \neq j\}$ e $|S| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
(ii) Si ha che

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{60} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}, \quad P(C) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}.$$

Inoltre

$$P(A \cap B) = \frac{1}{60}, \quad P(A \cap C) = \frac{1}{60}, \quad P(B \cap C) = 0, \quad P(A \cap B \cap C) = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B), \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C), \\ P(B \cap C) &\neq P(B) \cdot P(C), \\ P(A \cap B \cap C) &\neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C), \end{aligned}$$

e pertanto i tre eventi non sono indipendenti.
(iii) Essendo $P(A \cap B) = \frac{1}{60} \neq 0$ la relazione $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ non vale. Essendo $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - 1 + P(A \cap B)$, la relazione $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B})$ non è valida, in quanto $P(A \cap B) = \frac{1}{60} \neq 1$. Infine $P(A \,|\, B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{1/60}{1/10} = \frac{1}{6} \neq P(B)$.

Esercizio 2 (i) Se X ha distribuzione esponenziale di media $\mu = 2$, risulta $\lambda = 1/2$ e pertanto

$$P(X > 1) = 1 - F_X(1) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) = \mathrm{e}^{-1/2}.$$

Inoltre, per la proprietà di assenza di memoria,

$$P(X > 2 \,|\, X > 1) = P(X > 1) = \mathrm{e}^{-1/2}.$$

(ii) Se X ha distribuzione normale di media $\mu = 2$, e varianza $\sigma^2 = 4$, risulta

$$P(X > 1) = P\Big(\frac{X-2}{2} > \frac{1-2}{2}\Big) = P(Z > -1/2) = 1 - \Phi(-1/2) = \Phi(1/2) = 0{,}6915,$$

e

$$P(X > 2 \,|\, X > 1) = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = \frac{P(Z > 0)}{\Phi(1/2)} = \frac{1 - \Phi(0)}{\Phi(1/2)} = \frac{0{,}5}{0{,}6915} = 0{,}723.$$

Esercizio 3 Si ha

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$P(\{\omega\})$
ttt	3	0	1/12
ttc	2	1	2/12
tct	2	2	1/12
tcc	1	1	2/12
ctt	2	1	1/12
ctc	1	2	2/12
cct	1	1	1/12
ccc	0	0	2/12

e pertanto la densità discreta di (X, Y) è:

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	$\frac{2}{12}$	0	0	$\frac{2}{12}$
1	0	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$
2	0	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{12}$
$p_Y(y)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	1

(ii) Si ha $p(0,1) = 0 \neq p_X(0)p_Y(1)$; quindi X e Y non sono indipendenti.
(iii) Si ricava facilmente:

$$E(X) = \frac{5+8+3}{12} = \frac{4}{3}, \qquad E(Y) = \frac{6+6}{12} = 1, \qquad E(X \cdot Y) = \frac{3+4+6+4}{12} = \frac{17}{12},$$

e quindi

$$Cov(X, Y) = \frac{17}{12} - \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{1}{12}.$$

(iv) Essendo

$$P(X = x \,|\, Y = 0) = \frac{p(x, 0)}{p_Y(0)},$$

risulta

$$P(X = 0 \,|\, Y = 0) = \frac{2/12}{3/12} = \frac{2}{3}, \quad P(X = 1 \,|\, Y = 0) = 0,$$

e

$$P(X = 2 \,|\, Y = 0) = 0, \quad P(X = 3 \,|\, Y = 0) = \frac{1/12}{3/12} = \frac{1}{3}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 9/7/2014

Esercizio 1 (i) Poichè gli eventi A_1, A_2 e A_3 sono indipendenti, e risulta

$$P(A_1) = \frac{5}{8}, \quad P(A_2) = \frac{3}{4}, \quad P(A_3) = \frac{7}{8},$$

usando la formula di De Morgan si ha

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = 1 - \frac{3}{256} = \frac{253}{256} = 0{,}9883.$$

(ii) Si ha

$$P(A_1 | A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \frac{5/8}{253/256} = \frac{160}{253} = 0{,}6324.$$

(iii) Si ha

$$P(\overline{A_3} | A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_3 | A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \frac{P(A_3)}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$$

$$= 1 - \frac{7/8}{253/256} = 1 - \frac{224}{253} = 0{,}1146.$$

(iii) $A_1 \cap A_2$ e $A_2 \cup A_3$ non sono eventi indipendenti, essendo

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{32} = 0{,}4687$$

$$P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2)P(A_3) = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{31}{32} = 0{,}9687$$

$$P((A_1 \cap A_2) \cap (A_2 \cup A_3)) = P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)) = P(A_1 \cap A_2) = 0{,}4687$$

Esercizio 2 (i) Si ha

ω	$X(\omega)$	ω	$X(\omega)$
0 0 0 0	4	1 0 0 0	3
0 0 0 1	3	1 0 0 1	2
0 0 1 0	2	1 0 1 0	1
0 0 1 1	2	1 0 1 1	2
0 1 0 0	2	1 1 0 0	2
0 1 0 1	1	1 1 0 1	2
0 1 1 0	2	1 1 1 0	3
0 1 1 1	3	1 1 1 1	4

e quindi $p(1) = \frac{1}{8}$, $p(2) = \frac{1}{2}$, $p(3) = \frac{1}{4}$, $p(4) = \frac{1}{8}$.

(ii) Pertanto,

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{19}{8} = 2{,}375$$

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{8} = \frac{51}{8} = 6{,}375$$

e quindi

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{51}{8} - \left(\frac{19}{8}\right)^2 = \frac{47}{64} = 0{,}7344.$$

(iii) Risulta $E(X) > H(X)$ poiché, ricordando che $\log_2 2^k = k$, si ha

$$H(X) = \sum_{x=1}^{4} p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

Esercizio 3 (i) Poiché X e Y sono variabili aleatorie indipendenti si ha

$$P(X - X^2 > 0, Y - Y^2 > 0) = P(0 < X < 1) \cdot P(0 < Y < 1)$$

$$= P(0 - 1 < X - 1 < 1 - 1) \cdot P\left(\frac{0+1}{2} < \frac{Y+1}{2} < \frac{1+1}{2}\right)$$

$$= P(-1 < Z_1 < 0) \cdot P(0{,}5 < Z_2 < 1) = [\Phi(0) - \Phi(-1)][\Phi(1) - \Phi(0{,}5)]$$

$$= [\Phi(1) - \Phi(0)][\Phi(1) - \Phi(0{,}5)] = (0{,}8413 - 0{,}5)(0{,}8413 - 0{,}6915) = 0{,}3413 \cdot 0{,}1498 = 0{,}0511$$

essendo $Z_1 = X - 1$ e $Z_2 = \dfrac{Y+1}{2}$ variabili normali standard indipendenti.

(ii) Poiché $Z = X + Y$, si ha

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 1 - 1 = 0,$$

$$Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = 1 + 4 = 5,$$

e

$$Cov(Z, X) = Cov(X + Y, X) = Var(X) + Cov(Y, X) = Var(X) = 1,$$

essendo X e Y indipendenti.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 4/9/2014

Esercizio 1 (i) La scelta a caso di una coppia di archi da un insieme di cardinalità 6 si può effettuare in $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ modi, quindi lo spazio campionario ha cardinalità 15.
(ii) Essendo $C_k = \{$almeno uno dei 2 archi scelti è connesso al nodo $N_k\}$, si ha

$$P(C_1) = 1 - \frac{\binom{5}{2}}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \qquad P(C_2) = 1 - \frac{\binom{2}{2}}{15} = \frac{14}{15}, \qquad P(C_3) = 1 - \frac{\binom{4}{2}}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$$

$$P(C_4) = 1 - \frac{\binom{4}{2}}{15} = \frac{9}{15}, \qquad P(C_5) = 1 - \frac{\binom{3}{2}}{15} = \frac{12}{15}.$$

(iii) Si ha

$$P(C_1 \cap C_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \neq P(C_1)P(C_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{15},$$
$$P(C_1 \cap C_3) = \frac{2}{15} \neq P(C_1)P(C_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5},$$

quindi non sussiste indipendenza.
(iv) Per grafi qualsiasi aventi n archi, indicando con g_k il grado del nodo N_k, si ha

$$P(C_k) = 1 - \frac{\binom{n-g_k}{2}}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{(n-g_k)(n-g_k-1)}{n(n-1)}.$$

Esercizio 2 (i) Poiché X ha densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (x+1), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

si ha

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_{-1}^{1}(x+1)dx = c\left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{-1}^{1} = c\left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - (-1)\right) = 2c,$$

e quindi $c = 1/2$.
(ii) La funzione di distribuzione è data da $F(x) = 0$ per $x < -1$;

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x}(t+1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)_{-1}^{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} - (-1)\right) = \frac{(x+1)^2}{4}$$

per $-1 \leq x < 1$, e $F(x) = 1$ per $x \geq 1$.
(iii) Si ha

$$P(X > 0 \,|\, X \leq 1/2) = \frac{P(0 < X \leq 1/2)}{P(X \leq 1/2)} = \frac{F(1/2) - F(0)}{F(1/2)} = \frac{5}{9} = 0{,}5555.$$

(iv) Per $n = 1, 2, \ldots$ i momenti sono:

$$E(X^n) = \int_{-1}^{1} x^n \frac{(x+1)}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^{n+2}}{n+2} + \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$$

quindi $E(X^n) = \frac{1}{n+1}$ per n pari, e $E(X^n) = \frac{1}{n+2}$ per n dispari.

Esercizio 3 (i) I valori assunti da (X, Y) sono:

1º estr. \ 2º estr.	1	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,1)	(1,2)	(1,1)	(1,2)
2	(1,1)	(2,0)	(2,1)	(2,0)	(2,1)
3	(1,2)	(2,1)	(3,2)	(3,1)	(3,2)
4	(1,1)	(2,0)	(3,1)	(4,0)	(4,1)
5	(1,2)	(2,1)	(3,2)	(4,1)	(5,2)

quindi la distribuzione congiunta è:

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
1	0	4/25	5/25	9/25
2	3/25	4/25	0	7/25
3	0	2/25	3/25	5/25
4	1/25	2/25	0	3/25
5	0	0	1/25	1/25
$p_Y(y)$	4/25	12/25	9/25	1

(ii) La densità di probabilità condizionata $p(x|2) = P(X = x|Y = 2) = \frac{p(x,2)}{p_Y(2)}$ è data da

$$p(1|2) = \frac{5}{9}, \qquad p(3|2) = \frac{3}{9}, \qquad p(5|2) = \frac{1}{9}, \qquad p(x|2) = 0 \quad \text{altrimenti,}$$

quindi la media condizionata è

$$E(X|Y = 2) = 1 \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{3}{9} + 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{19}{9} = 2{,}\overline{1}.$$

(iii) Per calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y) notiamo che

$$E(X) = \frac{9 + 14 + 15 + 12 + 5}{25} = \frac{55}{25} = 2{,}2 \qquad E(Y) = \frac{30}{25} = 1{,}2$$

$$E(X \cdot Y) = \frac{4 + 10 + 8 + 6 + 18 + 8 + 10}{25} = \frac{64}{25} = 2{,}56.$$

Pertanto si ha

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) = 2{,}56 - 2{,}2 \cdot 1{,}2 = -0{,}08 < 0$$

da cui segue che X e Y sono negativamente correlate.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 14/11/2014

Esercizio 1 (i) Considerato l'evento A={il vettore contiene almeno uno zero}, risulta

$$
\begin{aligned}
&P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(x_1 = 1, x_2 = 1, \ldots, x_n = 1) \\
&= 1 - P(x_1 = 1)P(x_2 = 1 \,|\, x_1 = 1)P(x_3 = 1 \,|\, x_1 = 1, x_2 = 1) \cdots P(x_n = 1 \,|\, x_1 = 1, \ldots, x_{n-1} = 1) \\
&= 1 - P(x_1 = 1)P(x_2 = 1 \,|\, x_1 = 1)P(x_3 = 1 \,|\, x_2 = 1) \cdots P(x_n = 1 \,|\, x_{n-1} = 1) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

(ii) Risulta

$$
P(x_3 = 0 \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, x_3 = 0)P(x_3 = 0)}{P(A)} = \frac{P(x_3 = 0)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}},
$$

essendo

$$
P(x_2 = 0) = P(x_2 = 0 \,|\, x_1 = 0)P(x_1 = 0) + P(x_2 = 0 \,|\, x_1 = 1)P(x_1 = 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2},
$$

e pertanto

$$
P(x_3 = 0) = P(x_3 = 0 \,|\, x_2 = 0)P(x_2 = 0) + P(x_3 = 0 \,|\, x_2 = 1)P(x_2 = 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.
$$

(iii) Si ha $P(A) = 2/3$ quando $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2/3$ ossia quando $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2/3$. Ciò si realizza per $n = 2$.

Esercizio 2 (i) Si ha $p(x) = P(X = x) = P(|D_1 - D_2| = x) = P(D_1 - D_2 = \pm x)$. Pertanto,

$$
p(0) = \frac{3}{18}, \quad p(1) = \frac{5}{18}, \quad p(2) = \frac{4}{18}, \quad p(3) = \frac{3}{18}, \quad p(4) = \frac{2}{18}, \quad p(5) = \frac{1}{18}.
$$

(ii) Risulta quindi

$$
F(x) = \begin{cases}
0 & x < 0, \\
\frac{3}{18} & 0 \le x < 1, \\
\frac{8}{18} & 1 \le x < 2, \\
\frac{12}{18} & 2 \le x < 3, \\
\frac{15}{18} & 3 \le x < 4, \\
\frac{17}{18} & 4 \le x < 5, \\
1 & x \ge 5.
\end{cases}
$$

(iii) Si ricava poi

$$E(X) = \sum_{x=0}^{5} x\, p(x) = \frac{1}{18}\,(5+8+9+8+5) = \frac{16}{9} = 1{,}9\overline{4}.$$

(iv) Si ha

$$P(X \geq 2 \,|\, X \leq 4) = \frac{P(2 \leq X \leq 4)}{P(X \leq 4)} = \frac{\frac{4}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}}{\frac{17}{18}} = \frac{9}{17} = 0{,}5294.$$

Esercizio 3 Se X_i $(i = 1, 2, \ldots, 40)$ è la variabile aleatoria che rappresenta il numero di manufatti prodotti dall'azienda tessile durante il giorno i-esimo, si ha

$$X = \sum_{i=1}^{40} X_i.$$

(i) Quindi

$$E(X) = \sum_{i=1}^{40} E(X_i) = \sum_{i=1}^{40} 2 = 80,$$

e, in virtù dell'ipotesi di indipendenza delle variabili X_i,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{40} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{40} 4 = 160.$$

(ii) In virtù del Teorema Centrale del Limite,

$$\begin{aligned} P(50 \leq X \leq 100) &\approx P\left(\frac{50-80}{\sqrt{160}} \leq Z \leq \frac{100-80}{\sqrt{160}}\right) = P(-2{,}37 \leq Z \leq 1{,}58) \\ &= \Phi(1{,}58) - \Phi(-2{,}37) = \Phi(1{,}58) - 1 + \Phi(2{,}37) = 0{,}9429 - 1 + 0{,}9911 = 0{,}934. \end{aligned}$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 8/1/2015 - ore 12

Esercizio 1 (i) Probabilità che il numero 1 sia tra i 2 estratti:

$$P(U) = \frac{1}{N+1} + \frac{N}{N+1} \cdot \frac{1}{N} = \frac{2}{N+1}; \qquad \text{oppure:} \quad P(U) = \frac{\binom{1}{1}\binom{N}{1}}{\binom{N+1}{2}} = \frac{2}{N+1}.$$

(ii) Probabilità che tra i 2 numeri estratti vi sia il numero N sapendo che tra i 2 estratti vi è il numero 1:

$$P(B|U) = \frac{P(B \cap U)}{P(U)} = \frac{2}{N},$$

essendo

$$P(B \cap U) = \frac{\binom{1}{1}\binom{N-2}{0}\binom{2}{1}}{\binom{N+1}{2}} = \frac{4}{(N+1)N}.$$

(iii) Per $A = \{\text{i 2 numeri estratti sono diversi}\}$ risulta

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{N-1}{0}\binom{2}{2}}{\binom{N+1}{2}} = 1 - \frac{2}{(N+1)N} = \frac{N^2+N-2}{(N+1)N} = \frac{(N-1)(N+2)}{(N+1)N}.$$

Per $B = \{\text{almeno uno dei 2 numeri estratti è } N\}$ si ha

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{N-1}{2}\binom{2}{0}}{\binom{N+1}{2}} = 1 - \frac{(N-1)(N-2)}{(N+1)N} = \frac{2(2N-1)}{(N+1)N}.$$

Per stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti notiamo che:

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{N-1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{N+1}{2}} = \frac{4(N-1)}{(N+1)N},$$

da cui segue che $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ per $(N-1)(N+2)2(2N-1) = 4(N-1)(N+1)N$, ossia per $N = 1$ e $N = 2$.
(iv) Quando $N \to \infty$ si ha

$$\lim_{N\to\infty} P(U) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N+1} = 0, \qquad \lim_{N\to\infty} P(B|U) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} P(A \cap B) = 0 = \lim_{N\to\infty} P(A)P(B).$$

Esercizio 2 (i) La funzione di distribuzione: $F(x) = 0$ per $x < 0$; $F(x) = x^2/2$ per $0 \le x < 1$; $F(x) = x/2$ per $1 \le x < 2$; $F(x) = 1$ per $x \ge 2$.
(ii) $E(X) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x/2) dx = (x^3/3)_0^1 + (x^2/4)_1^2 = 13/12 = 1{,}08\overline{3}$.
(iii) $P(X \le 3/2 \,|\, X > 1/2) = \dfrac{P(1/2 < X \le 3/2)}{P(X > 1/2)} = \dfrac{F(3/2) - F(1/2)}{1 - F(1/2)} = \dfrac{3/4 - 1/8}{1 - 1/8} = \dfrac{5}{7} =$ 0,7143.

Esercizio 3 (i) $p(x,y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c \geq 0$,

$$1 = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p(x,y) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} c\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-y-1|} = c\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1\right) = \frac{9}{4}c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4}{9}.$$

(ii)

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{1} p(x,y) = \frac{4}{9}\sum_{y=0}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-y-1|} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x=0, \\ \frac{2}{3}, & x=1. \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=0}^{1} p(x,y) = \frac{4}{9}\sum_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-y-1|} = \begin{cases} \frac{2}{3}, & y=0, \\ \frac{1}{3}, & y=1. \end{cases}$$

Quindi X e Y non sono identicamente distribuite, ma sono indipendenti in quanto

$$p(0,0) = \frac{2}{9} = p_X(0)p_Y(0) = \frac{2}{9},$$

$$p(0,1) = \frac{1}{9} = p_X(0)p_Y(1) = \frac{1}{9},$$

$$p(1,0) = \frac{4}{9} = p_X(1)p_Y(0) = \frac{4}{9},$$

$$p(1,1) = \frac{2}{9} = p_X(1)p_Y(1) = \frac{2}{9}.$$

(iii) Poiché X e Y sono indipendenti, si ha $\rho(X,Y) = 0$.
(iv) Per calcolare $E(X-Y)$ e $Var(X-Y)$ notiamo che

$$E(X) = \frac{2}{3}, \qquad E(Y) = \frac{1}{3}, \qquad Var(X) = Var(Y) = \frac{2}{9},$$

e quindi, ricordando che X e Y sono indipendenti:

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{4}{9}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 22/1/2015

Esercizio 1 (i) Sia F l'evento che si realizza quando la linea usata è funzionante, e H_j l'evento che si realizza quando si usa la linea L_j, e quindi $P(F|H_j) = j/4$. Inoltre, se il risultato del lancio del dado è k, allora si usa la linea L_j, dove $j = \lfloor k/3 + 1 \rfloor$, secondo il seguente schema:

$$k = 1 \;\Rightarrow\; j = \lfloor 1/3 + 1 \rfloor = 1; \qquad k = 2 \;\Rightarrow\; j = \lfloor 2/3 + 1 \rfloor = 1;$$

$$k = 3 \;\Rightarrow\; j = \lfloor 3/3 + 1 \rfloor = 2; \qquad k = 4 \;\Rightarrow\; j = \lfloor 4/3 + 1 \rfloor = 2;$$

$$k = 5 \;\Rightarrow\; j = \lfloor 5/3 + 1 \rfloor = 2; \qquad k = 6 \;\Rightarrow\; j = \lfloor 6/3 + 1 \rfloor = 3,$$

e quindi

$$P(H_1) = \frac{1}{3}, \qquad P(H_2) = \frac{1}{2}, \qquad P(H_3) = \frac{1}{6}.$$

Si ha pertanto:

$$P(F) = \sum_{j=1}^{3} P(F|H_j)P(H_j) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{24} = 0{,}458\overline{3}.$$

(ii) Per la formula di Bayes si ha

$$P(H_j|F) = \frac{P(F|H_j)P(H_j)}{P(F)} = \begin{cases} \dfrac{2}{11}, & j = 0, \\ \dfrac{6}{11}, & j = 1, \\ \dfrac{3}{11}, & j = 2. \end{cases}$$

(iii) Quindi

$$\sum_{j=1}^{3} P(H_j|F) = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} + \frac{3}{11} = 1.$$

Esercizio 2 (i) $f(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; c \geq 0$,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_0^3 (x-1)^2 dx = c\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^3 = c\,\frac{8+1}{3} = c\,3 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{3}.$$

Funzione di distribuzione: $F(x) = 0$ per $x < 0$; $F(x) = \frac{1}{3}\int_0^x (t-1)^2 dt = [\frac{1}{9}(t-1)^3]_0^x = \frac{1}{9}(x-1)^3 + \frac{1}{9}$ per $0 \leq x < 3$; $F(x) = 1$ per $x \geq 3$.
(ii) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^3 x\frac{1}{3}(x-1)^2 dx = \frac{1}{3}[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2]_0^3 = \frac{9}{4}$.
(iii) $P(X > \xi) = 8/9 \;\Leftrightarrow\; P(X \leq \xi) = 1/9 \;\Leftrightarrow\; F(\xi) = 1/9$
$\Leftrightarrow\; \frac{1}{9}(\xi-1)^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \;\Leftrightarrow\; (\xi-1)^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \xi - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \xi = 1.$

Esercizio 3 (i) $p(x,y) \geq 0 \ \Rightarrow \ p \geq 0; \quad 1 = \sum_{i,j=0}^{2} p(x,y) = 8p \ \Rightarrow \ p = \frac{1}{8}$. Quindi

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

(ii) Segue che X e Y sono identicamente distribuite. Inoltre,

$$p(0,0) = \frac{1}{8} \neq p_X(0) p_Y(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

pertanto X e Y non sono indipendenti.
(iii) Si ha

$$E(X) = \sum_{x=0}^{2} x \, p_X(x) = \frac{19}{16} = 1{,}1875 = E(Y)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 \, p_X(x) = \frac{33}{16} = 2{,}0625 = E(Y^2)$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{33}{16} - \left(\frac{19}{16}\right)^2 = \frac{167}{256} = 0{,}6523 = Var(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{x,y=0}^{2} x \, y \, p(x,y) = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{13}{8} - \frac{19}{16} \cdot \frac{19}{16} = \frac{55}{256} = 0{,}2148$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2\,\frac{19}{16} = \frac{19}{8} = 2{,}375$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 2\,\frac{167}{256} + 2\,\frac{55}{256} = \frac{111}{64} = 1{,}7344.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 17/2/2015

Esercizio 1 Lo spazio campionario è costituito da $\binom{5}{3} = 10$ sequenze, ognuna avente probabilità 1/10.
(i) Denotando con F_k l'evento che si realizza quando l'algoritmo si ferma al passo k-esimo, si ha:

$$F_1 = \emptyset, \qquad F_2 = \{11001, 11010, 11100\},$$

$$F_3 = \{01101, 01110, 10101, 10110\}, \qquad F_4 = \{00111, 01011, 10011\},$$

e quindi $P(F_1) = 0$, $P(F_2) = 3/10$, $P(F_3) = 4/10$, $P(F_4) = 3/10$.
(ii) Ponendo $B = \{$il bit successivo al secondo **1** è pari a **1**$\}$, si ha

$$B = \{11100, 01110, 10110, 00111, 01011, 10011\}$$

e pertanto $P(B) = 6/10 = 3/5$.
(iii) Per calcolare $P(F_k|B)$ si fa uso della formula di Bayes:

$$P(F_k|B) = \frac{P(B|F_k)P(F_k)}{P(B)} \qquad (1 \le k \le 4)$$

da cui segue:

$$P(F_1|B) = 0, \quad P(F_2|B) = \frac{P(B|F_2)P(F_2)}{P(B)} = \frac{(1/3)(3/10)}{6/10} = \frac{1}{6},$$

$$P(F_3|B) = \frac{P(B|F_3)P(F_3)}{P(B)} = \frac{(1/2)(4/10)}{6/10} = \frac{1}{3}, \quad P(F_4|B) = \frac{P(B|F_4)P(F_4)}{P(B)} = \frac{(1)(3/10)}{6/10} = \frac{1}{2}.$$

(iv) Si ha quindi:

$$P(F_1|B) + P(F_2|B) + P(F_3|B) + P(F_4|B) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1.$$

Esercizio 2 (i) Poiché X è una variabile aleatoria normale di media $\mu = -1$ e varianza $\sigma^2 = 4$, la variabile

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X + 1}{2}$$

è normale standard. Quindi risulta:

$$P(A) = P(X > -2) = P\left(\frac{X+1}{2} > \frac{-2+1}{2}\right) = P(Z > -0{,}5) = 1 - \Phi(-0{,}5) = \Phi(0{,}5) = 0{,}6915$$

$$P(B) = P(X < 2) = P\left(\frac{X+1}{2} < \frac{2+1}{2}\right) = P(Z < 1{,}5) = \Phi(1{,}5) = 0{,}9332$$

$$P(A \cap B) = P(-2 < X < 2) = P\left(-0{,}5 < Z < 1{,}5\right) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-0{,}5)$$
$$= \Phi(1{,}5) - [1 - \Phi(0{,}5)] = 0{,}9332 - 1 + 0{,}6915 = 0{,}6247.$$

Segue che

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}6915 \cdot 0{,}9332 = 0{,}6453 > 0{,}6247 = P(A \cap B),$$

ossia $P(A|B) < P(A)$; pertanto A e B sono correlati negativamente.
(ii) Posto $Y = 1 - 2X$, si ha

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E[X(1-2X)] - E(X)E(1-2X)$$
$$= E(X) - 2E(X^2) - E(X)[1 - 2E(X)] = -2[E(X^2) - \{E(X)\}^2] = -2\sigma^2 = -8.$$

Esercizio 3 (i) Risulta

ω	X	Y	ω	X	Y
ccc	0	3	tcc	1	2
cct	1	2	tct	2	1
ctc	1	1	ttc	2	2
ctt	2	2	ttt	3	3

Quindi la distribuzione congiunta di (X,Y) e le distribuzioni marginali di X e Y sono

$x \backslash y$	1	2	3	$p_X(x)$
0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(ii) Il coefficiente di correlazione di (X,Y) è nullo poiché

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - (1{,}5)(2) = 0,$$

essendo

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5 \qquad E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$

(iii) X e Y non sono indipendenti, essendo

$$p(0,1) = 0 \neq p_X(0) \cdot p_Y(1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}.$$

(iv) Si ha

$$P(X = Y) = \sum_{x=1}^{3} p(x,x) = \frac{1}{2},$$

$$P(X \leq 2, Y > 1) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=2}^{3} p(x,y) = \frac{5}{8}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 16/4/2015

Esercizio 1 (i) Lo spazio campionario S è costituito dalle sequenze di n bit casuali, con $n \geq 4$. Poiché $A = \{$almeno 1 dei primi 3 bit assume valore $\mathbf{1}\}$ e $B = \{$il primo e l'ultimo bit assumono stesso valore$\}$, si vede facilmente che $A \cup B \neq S$, e quindi A e B non sono eventi necessari. Infatti, $A \cup B$ non contiene le sequenze del tipo $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, b_4, b_5, \ldots, b_{n-1}, \mathbf{1})$.
(ii) Notiamo che $\overline{A}$ si realizza quando i primi 3 bit hanno valore $\mathbf{0}$; quindi si ha

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

L'evento B contiene le sequenze del tipo $(\mathbf{0}, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, \mathbf{0})$ e $(\mathbf{1}, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, \mathbf{1})$, e pertanto

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Inoltre,

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

poiché $A \cap B$ contiene le sequenze del tipo $(\mathbf{1}, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, \mathbf{1})$ ed anche quelle del tipo $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, b_4, b_5, \ldots, b_{n-1}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, b_4, b_5, \ldots, b_{n-1}, \mathbf{0})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, b_4, b_5, \ldots, b_{n-1}, \mathbf{0})$. Si ricava che gli eventi A e B sono indipendenti, essendo $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.
(iii) Notiamo che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2} - \frac{7}{16} = \frac{15}{16}.$$

Inoltre, per l'indipendenza di A e B, si ha

$$P(\overline{B} \mid A) = P(\overline{B}) = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che la relazione $P(A \cup B) - P(\overline{B} \mid A) < 1/2$ è vera.
(iv) Per la legge di De Morgan e per l'indipendenza di A e B si ha

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \cup B) + P(\overline{A}) = 1 - \frac{15}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

quindi la relazione $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \mid B) < 1/2$ è vera.

Esercizio 2 (i) Derivando la funzione di distribuzione si ha la densità di probabilità di X:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) Si ha

$$\mu = E(X) = \int_0^{1/2} x dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} + \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{8},$$

$$E(X^2) = \int_0^{1/2} x^2 dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} + \frac{x^3}{6}\Big|_1^2 = \frac{1}{24} + \frac{7}{6} = \frac{29}{24},$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{29}{24} - \frac{49}{64} = \frac{85}{192} = 0{,}4427.$$

(iii) Per ricavare il valore di h tale che $P(|X-\mu| < h) = 5/8$ notiamo che

$$P(|X-\mu| < h) = P\left(\frac{7}{8} - h < X < \frac{7}{8} + h\right) = F\left(\frac{7}{8} + h\right) - F\left(\frac{7}{8} - h\right) = \frac{7}{16} + \frac{h}{2} - \frac{7}{8} + h,$$

quindi

$$\frac{7}{16} + \frac{h}{2} - \frac{7}{8} + h = \frac{5}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} h = \frac{17}{16} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{17}{24} = 0{,}7083.$$

Esercizio 3 (i) Risulta

ω	X	Y	ω	X	Y	ω	X	Y	ω	X	Y
0000	4	0	0100	3	0	1000	2	0	1100	1	1
0001	1	0	0101	2	1	1001	1	1	1101	2	1
0010	2	0	0110	1	1	1010	2	1	1110	1	1
0011	1	1	0111	2	1	1011	3	1	1111	4	1

Quindi la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e Y sono

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
1	1/16	5/16	3/8
2	2/16	4/16	3/8
3	1/16	1/16	1/8
4	1/16	1/16	1/8
$p_Y(y)$	5/16	11/16	1

(i) Risulta $p(1,0) = 1/16 \neq p_X(1) \cdot p_Y(0) = (3/8) \cdot (5/16) = 15/128$, quindi X e Y non sono indipendenti. Si ha che X e Y sono negativamente correlate, essendo

$$E(X) = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = 2, \qquad E(Y) = \frac{11}{16}, \qquad E(XY) = \frac{5}{16} + \frac{8}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4},$$

e quindi $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = \frac{5}{4} - 2 \cdot \frac{11}{16} = -\frac{1}{8} < 0$.
(ii) Si trae infine

$$P(X = Y) = p(1,1) = \frac{5}{16}, \qquad P(X \geq 2, Y \geq 1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8},$$

$$P(X \geq 2, Y \geq 1 \,|\, X \neq Y) = \frac{6/16}{11/16} = \frac{6}{11}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 25/6/2015

Esercizio 1 (i) Poniamo, per $k = 1, 2, 3$,
$A_k = \{$si verifica un errore di tipo A nel trasmettere il bit k-esimo$\}$,
$B_k = \{$si verifica un errore di tipo B nel trasmettere il bit k-esimo$\}$,
$E_k = \{$si verifica un errore di tipo qualsiasi nel trasmettere il bit k-esimo$\}$.
Risulta: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0{,}2$. Inoltre: $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}1$ e $P(B_3) = 0{,}2$.
Inoltre $E_k = A_k \cup B_k$. Quindi, trasmettendo la sequenza binaria **001**, la probabilità che si verifichi un solo errore, di tipo A, è

$$P(I_A) = P(A_1\,\overline{E_2}\,\overline{E_3}) + P(\overline{E_1}\,A_2\,\overline{E_3}) + P(\overline{E_1}\,\overline{E_2}\,A_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}266$$

avendo usato l'indipendenza degli eventi. Analogamente, trasmettendo la sequenza binaria **001**, la probabilità che si verifichi un solo errore, di tipo B, è

$$P(I_B) = P(B_1\,\overline{E_2}\,\overline{E_3}) + P(\overline{E_1}\,B_2\,\overline{E_3}) + P(\overline{E_1}\,\overline{E_2}\,B_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}182$$

pertanto la probabilità che si verifichi un solo errore, di tipo qualsiasi, è dato dalla somma delle probabilità precedenti, trattandosi di eventi incompatibili, quindi:

$$P(I_A \cup I_B) = P(I_A) + P(I_B) = 0{,}266 + 0{,}182 = 0{,}448$$

(ii) Se nel trasmettere la sequenza **001** si è verificato un solo errore, di tipo qualsiasi, la probabilità che l'errore si sia verificato nella trasmissione del terzo bit si ottiene usando la formula di Bayes:

$$P(\overline{E_1}\,\overline{E_2}\,E_3 | I_A \cup I_B) = \frac{P(\overline{E_1}\,\overline{E_2}\,E_3)}{P(I_A \cup I_B)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4}{0{,}448} = \frac{0{,}196}{0{,}448} = 0{,}4375.$$

Esercizio 2 Se X è una variabile aleatoria avente valore medio e varianza

$$E(X) = 3{,}5 \qquad Var(X) = 6{,}25$$

posto $Y = X - 1$, si ha
(i) $\mu = E(Y) = E(X - 1) = E(X) - 1 = 2{,}5$
$\sigma^2 = Var(Y) = Var(X - 1) = Var(X) = 6{,}25$
e quindi $\sigma = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.
(ii) Nel caso in cui Y ha distribuzione esponenziale, di parametro λ, poiché $\mu = E(Y) = 1/\lambda$, si ha $\lambda = 1/\mu = 1/2{,}5 = 0{,}4$. Pertanto risulta

$$P(|Y - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < Y < \mu + \sigma) = P(0 < Y < 5) = 1 - e^{-\lambda \cdot 5} = 1 - e^{-2} = 0{,}8647$$

e

$$P(Y > \sigma) = P(Y > 2{,}5) = e^{-\lambda \cdot 2{,}5} = e^{-1} = 0{,}3679$$

Se Y ha distribuzione normale, ponendo $Z = (Y-\mu)/\sigma$ (con Z normale standard) si ha

$$P(|Y-\mu| < \sigma) = P(\mu-\sigma < Y < \mu+\sigma) = P(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}) = P(-1 < Z < 1)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1-\Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 = 0{,}6826$$

Infine:

$$P(Y > \sigma) = P(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{\sigma-\mu}{\sigma}) = P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = 0{,}5$$

Esercizio 3

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
cccc	0	0	tccc	1	0
ccct	1	0	tcct	2	3
cctc	1	0	tctc	2	2
cctt	2	1	tctt	3	0
ctcc	1	0	ttcc	2	1
ctct	2	2	ttct	3	0
cttc	2	3	tttc	3	0
cttt	3	0	tttt	4	0

(i) Pertanto densità discreta congiunta di (X, Y) e densità marginali sono:

$x \backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$	0	0	0	$\frac{4}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$
3	$\frac{4}{16}$	0	0	0	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
$p_Y(y)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(ii) Si ha (notiamo che X è binomiale)

$$E(X) = 2, \qquad E(Y) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}, \qquad E(X \cdot Y) = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} + \frac{6}{8} = \frac{3}{2},$$

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) + E(X)\, E(Y) = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{3}{4} = 0$$

e pertanto il coefficiente di correlazione di (X, Y) è nullo.
(iii) Si ricava facilmente che X e Y non sono indipendenti, essendo:

$$p(0,0) = \frac{1}{16} \neq p_X(0) p_Y(0) = \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{8}$$

(iv) Infine si ha

$$P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}, \qquad P(X \geq 2, Y < 2) = \frac{7}{16}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 14/7/2015

Esercizio 1 Indichiamo con A_k^i l'evento che si realizza quando dalla i-esima cartella si estraggono k file riservati, con $i = 1, 2$ e $k = 0, 1, 2$. Notiamo che risulta

$$P(A_k^i) = \frac{\binom{2}{k}\binom{6}{2-k}}{\binom{8}{2}} \quad \Rightarrow \quad P(A_0^i) = \frac{15}{28} \qquad P(A_1^i) = \frac{12}{28} \qquad P(A_2^i) = \frac{1}{28},$$

e che gli eventi A_k^1 e A_h^2 sono indipendenti.
(i) La probabilità che i 4 file estratti siano tutti pubblici (ossia nessuno sia riservato) è

$$P(A_0^1 \cap A_0^2) = P(A_0^1)P(A_0^2) = \left(\frac{15}{28}\right)^2 = 0{,}287.$$

(ii) La probabilità che almeno uno dei 4 file estratti sia riservato è

$$P(\overline{A_0^1 \cap A_0^2}) = 1 - P(A_0^1 \cap A_0^2) = 1 - 0{,}287 = 0{,}713.$$

(iii) La probabilità che tra i 4 file estratti vi sia un solo file riservato è

$$P(R) := P(A_0^1 \cap A_1^2) + P(A_1^1 \cap A_0^2) = P(A_0^1)P(A_1^2) + P(A_1^1)P(A_0^2) = 2\,\frac{15}{28}\,\frac{12}{28} = \frac{45}{98} = 0{,}4592.$$

(iv) La probabilità che tra i 4 file estratti vi sia un solo file riservato, sapendo che almeno uno dei 4 file estratti è riservato, è

$$P(R \,|\, \overline{A_0^1 \cap A_0^2}) = \frac{P(R \cap (\overline{A_0^1 \cap A_0^2}))}{P(\overline{A_0^1 \cap A_0^2})} = \frac{P(R)}{P(\overline{A_0^1 \cap A_0^2})} = \frac{0{,}4592}{0{,}713} = 0{,}644.$$

Esercizio 2 Posto $p(k) = P(X = k)$, risulta

$$p(0) = \frac{4}{5}\,\frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad p(1) = \frac{1}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\,\frac{1}{4} = \frac{7}{20} = 0{,}35 \qquad p(2) = \frac{1}{5}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

(i) Quindi la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$ è:
– $F(x) = 0$ per $x < 0$,
– $F(x) = 0{,}6$ per $0 \leq x < 1$,
– $F(x) = 0{,}95$ per $1 \leq x < 2$,
– $F(x) = 1$ per $x \geq 2$.
(ii) Il valore medio μ e la deviazione standard σ di X sono

$$\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{2} k\,p(k) = \frac{9}{20} = 0{,}45 \qquad E(X^2) = \sum_{k=0}^{2} k^2\,p(k) = \frac{11}{20} = 0{,}55$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0{,}55 - (0{,}45)^2 = 0{,}3475 \qquad \sigma = \sqrt{0{,}3475} = 0{,}5895$$

(iii) Si ha

$$P(|X - \mu| > \sigma) = P(X < \mu - \sigma) + P(X > \mu + \sigma) = P(X < -0{,}1395) + P(X > 1{,}0395)$$
$$= F(-0{,}1395) + 1 - F(1{,}0395) = 0 + 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

Esercizio 3 (i) Essendo $p(x,y) = c\,|x-y|$, per $x = 0,1,2$ e $y = 0,1,2$ si ha

$$\sum_{i,j=1}^{2} p(x,y) = 8c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{8}.$$

Quindi

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
$p_Y(y)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

(ii) X e Y non sono indipendenti, essendo $p(0,0) = 0 \neq p_X(0)\,p_Y(0) = (3/8)^2$.
(iii) Per calcolare il coefficiente di correlazione di (X,Y) notiamo che X e Y sono identicamente distribuite, con

$$E(X) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 = E(Y), \quad E(X^2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}, \quad Var(X) = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} = Var(Y)$$

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad Cov(X,Y) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}.$$

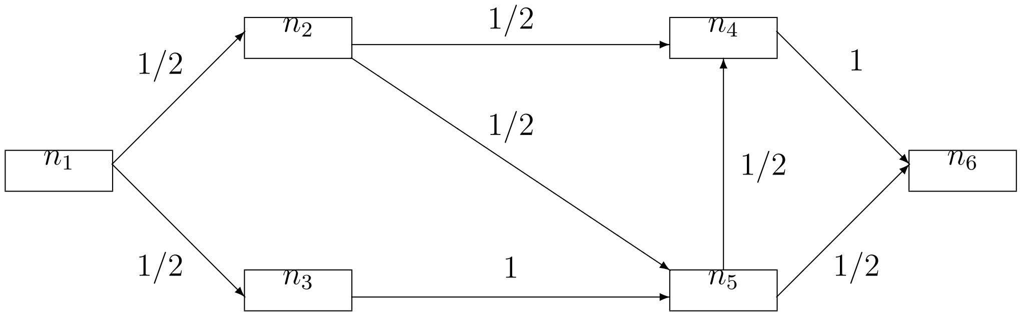
(iv) Si ha

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0,$$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 2\,\frac{3}{4} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 4/9/2015

Esercizio 1 (i) Dalla rete



si trae che i 5 possibili percorsi da n_1 a n_6 sono

$$\pi_1 = [n_1, n_2, n_4, n_6]; \qquad P(\pi_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\pi_2 = [n_1, n_2, n_5, n_4, n_6]; \qquad P(\pi_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

$$\pi_3 = [n_1, n_2, n_5, n_6]; \qquad P(\pi_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\pi_4 = [n_1, n_3, n_5, n_4, n_6]; \qquad P(\pi_4) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\pi_5 = [n_1, n_3, n_5, n_6]; \qquad P(\pi_5) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(ii) Per $k = 1, \ldots, 5$ si ha $P(N_k) = \displaystyle\sum_{i:\ N_k \in \pi_i} P(\pi_i)$, e quindi si ricava facilmente:

$$P(N_1) = 1, \quad P(N_2) = \frac{1}{2}, \quad P(N_3) = \frac{1}{2}, \quad P(N_4) = \frac{5}{8}, \quad P(N_5) = \frac{3}{4}, \quad \big(P(N_6) = 1\big).$$

(iii) Sapendo che il messaggio è passato per n_4 qual è la probabilità che sia passato per n_3 è

$$P(N_3|N_4) = \frac{P(N_3 \cap N_4)}{P(N_4)} = \frac{P(\pi_4)}{5/8} = \frac{1/4}{5/8} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

(iv) Gli eventi N_3 e N_4 non sono indipendenti, essendo $P(N_3|N_4) \neq P(N_3)$.

Esercizio 2 (i) Per la variabile aleatoria X risulta

$$f(x) = \begin{cases} x/100, & 0 \le x < 10, \\ 1/10, & 10 \le x < 15, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/200, & 0 \le x < 10, \\ x/10 - 1/2, & 10 \le x < 15, \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) Il valore atteso di X è

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{10} \frac{x^2}{100}dx + \int_{10}^{15} \frac{x}{10}dx = \frac{x^3}{300}\Big|_0^{10} + \frac{x^2}{20}\Big|_{10}^{15} = \frac{10}{3} + \frac{25}{4} = \frac{115}{12} = 9{,}58\overline{3}.$$

(iii) Se il task non è stato completato nei primi 6 minuti, la probabilità che si completi nei successivi 6 minuti è

$$P(6 < X \leq 12 \,|\, X > 6) = \frac{P(6 < X \leq 12)}{P(X > 6)} = \frac{F(12) - F(6)}{1 - F(6)} = \frac{26}{41} = 0{,}6341$$

essendo $F(6) = 36/200 = 9/50$ e $F(12) = 7/10$.

Esercizio 3 Lanciando una moneta 4 volte, se X descrive il numero di volte che esce testa e Y descrive il numero di variazioni nei risultati riscontrati, si ha

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
cccc	0	0	tccc	1	1
ccct	1	1	tcct	2	2
cctc	1	2	tctc	2	3
cctt	2	1	tctt	3	2
ctcc	1	2	ttcc	2	1
ctct	2	3	ttct	3	2
cttc	2	2	tttc	3	1
cttt	3	1	tttt	4	0

(i) Quindi la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali sono

$x \backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$
3	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(ii) Risulta, ad esempio, $p(0,0) \neq p_X(0)p_Y(0)$ e pertanto X e Y non sono indipendenti.
(iii) La covarianza di (X, Y) è

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) = 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

essendo $E(X) = 2$, $E(Y) = \frac{3}{2}$, $E(X \cdot Y) = \frac{1}{16}(2 + 4 + 4 + 8 + 12 + 6 + 12) = 3$.
Infine, si ha $P(Y > 1 \,|\, X > 1, Y > 0) = \dfrac{P(X > 1, Y > 1)}{P(X > 1, Y > 0)} = \dfrac{6/16}{10/16} = 3/5$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 6/11/2015

Esercizio 1 Da un'urna contenente 90 biglie se ne estraggono due senza reinserimento.
(i) Posto $A = \{$la biglia numero 90 non è tra le due estratte$\}$, si ha

$$P(A) = \frac{\binom{1}{0}\binom{89}{2}}{\binom{90}{2}} = \frac{89 \cdot 88/2}{90 \cdot 89/2} = \frac{44}{45} = 0{,}9\overline{7}.$$

(ii) Sia $B = \{$la biglia numero 1 è tra le due estratte$\}$; allora risulta

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{88}{1}/\binom{90}{2}}{\binom{1}{1}\binom{89}{1}/\binom{90}{2}} = \frac{88}{89} = 0{,}9888.$$

(iii) Se le estrazioni sono con reinserimento si ha

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \left(\frac{89}{90}\right)^2 = 0{,}9779$$

essendo $A_i = \{$nella i-esima estrazione non esce la biglia numero 90$\}$, $i = 1, 2$, con A_1 e A_2 eventi indipendenti. Inoltre, in tal caso risulta

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2\,\frac{1}{90}\,\frac{88}{90}}{2\,\frac{1}{90}\,\frac{89}{90}} = \frac{88}{89} = 0{,}9888.$$

Esercizio 2 Notiamo che

$$P(X > 3 \,|\, X > 2) = \frac{P(\{X > 3\} \cap \{X > 2\})}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)}.$$

(i) Se X ha distribuzione esponenziale e $Var(X) = 1$, allora ricordando che $E(X) = 1/\lambda$, si ha $\lambda = 1$ e quindi $F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-x}$, $x \ge 0$, da cui segue

$$P(X > 3 \,|\, X > 2) = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1} = 0{,}3679.$$

Si perviene a tale risultato anche usando la proprietà di assenza di memoria:
$$P(X > 3 \,|\, X > 2) = P(X > 3 - 2) = P(X > 1) = e^{-1} = 0{,}3679.$$
(ii) Se X ha distribuzione normale, con $E(X) = 1$ e $Var(X) = 1$, allora $Z = X - 1$ ha distribuzione normale standard; pertanto $P(X > x) = P(Z > x - 1) = 1 - \Phi(x - 1)$ e quindi

$$P(X > 3 \,|\, X > 2) = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{1 - \Phi(2)}{1 - \Phi(1)} = \frac{1 - \Phi(2)}{1 - \Phi(1)} = \frac{1 - 0{,}9772}{1 - 0{,}8413} = \frac{0{,}0228}{0{,}1587} = 0{,}1437.$$

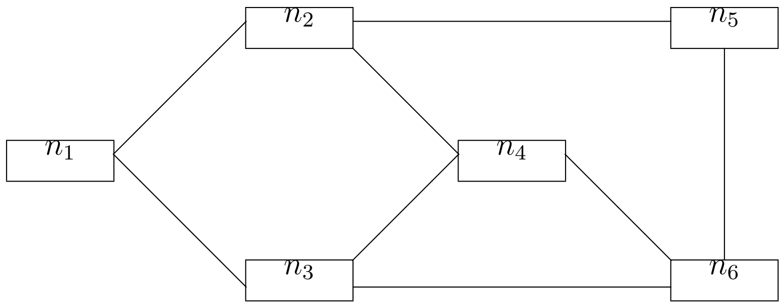
(iii) Se X è uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, b)$, e si ha $Var(X) = 1$, allora ricordando che $Var(X) = (b - a)^2/12 = b^2/12$, si ha $b^2 = 12$ ossia $b = 2\sqrt{3}$. Pertanto si ha $P(X \le x) = \frac{x}{2\sqrt{3}}$, $0 \le x \le 2\sqrt{3}$, da cui segue

$$P(X > 3 \,|\, X > 2) = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3}}}{1 - \frac{2}{2\sqrt{3}}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 - 0{,}866}{1 - 0{,}577} = \frac{0{,}134}{0{,}423} = 0{,}317.$$

(iv) Se X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p \in (0,1)$, con $Var(X) = 1$, ricordando che $Var(X) = np(1-p)$ si ha $4p(1-p) = 1$, ossia $4p^2 - 4p + 1 = 0$, da cui segue $(2p-1)^2 = 0$ e dunque $p = 1/2$. Se segue $P(X = x) = \binom{4}{x}\frac{1}{2^4}$ per $0 \le x \le 4$ e quindi

$$P(X > 3 \,|\, X > 2) = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{P(X = 4)}{P(X = 3) + P(X = 4)} = \frac{\binom{4}{4}\frac{1}{2^4}}{\binom{4}{3}\frac{1}{2^4} + \binom{4}{4}\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Esercizio 3 Si scelgono a caso 2 nodi del seguente grafo.



Consideriamo le variabili aleatorie $X = \alpha + \beta$ e $Y = |\alpha - \beta|$, con α e β i gradi dei nodi scelti.

nodi	α	β	X	Y	nodi	α	β	X	Y	nodi	α	β	X	Y
$n_1 - n_2$	2	3	5	1	$n_2 - n_3$	3	3	6	0	$n_3 - n_5$	3	2	5	1
$n_1 - n_3$	2	3	5	1	$n_2 - n_4$	3	3	6	0	$n_3 - n_6$	3	3	6	0
$n_1 - n_4$	2	3	5	1	$n_2 - n_5$	3	2	5	1	$n_4 - n_5$	3	2	5	1
$n_1 - n_5$	2	2	4	0	$n_2 - n_6$	3	3	6	0	$n_4 - n_6$	3	3	6	0
$n_1 - n_6$	2	3	5	1	$n_3 - n_4$	3	3	6	0	$n_5 - n_6$	2	3	5	1

(i) La distribuzione congiunta di (X,Y) e le distribuzioni marginali sono:

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
4	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{15}$
5	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$
6	$\frac{6}{15}$	0	$\frac{6}{15}$
$p_Y(y)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$	1

(ii) X e Y non sono indipendenti, essendo $p(4,1) = 0 \neq p_X(4)p_y(1)$.
(iii) Il coefficiente di correlazione è $\rho(X,Y) = -\sqrt{5/14} = -0{,}5976$ essendo:

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{15} + 5 \cdot \frac{8}{15} + 6 \cdot \frac{6}{15} = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}, \qquad E(Y) = \frac{8}{15}, \qquad E(X \cdot Y) = 5 \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{3},$$

$$E(X^2) = 16 \cdot \frac{1}{15} + 25 \cdot \frac{8}{15} + 36 \cdot \frac{6}{15} = \frac{432}{15} = \frac{144}{5}, \qquad E(Y^2) = \frac{8}{15},$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{144}{5} - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{16}{45},$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{56}{225},$$

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) = \frac{8}{3} - \frac{16}{3} \cdot \frac{8}{15} = -\frac{8}{45}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 7/1/2016

Esercizio 1 Consideriamo gli eventi $T_1 = \{$la centrale riceve richieste d'intervento dalla città di Salerno$\}$, $T_2 = \{$la centrale riceve richieste d'intervento dalla città di Avellino$\}$, $T_3 = \{$la centrale riceve richieste d'intervento dalla città di Atripalda$\}$ e $T_4 = \{$la centrale riceve richieste d'intervento dalla città di Mercato San Severino$\}$. Dai dati del problema risulta $P(T_1) = 0{,}8$, $P(T_2) = 0{,}5$, $P(T_3) = 0{,}05$ e $P(T_4) = 0{,}3$. Sia poi $E_k = \{$la richiesta d'intervento arriva esattamente da k città$\}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, ed $F = \{$la richiesta d'intervento arriva da non più di due città$\}$.

(i)

$$P(E_1) = P(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \cap \bar{T}_4) + P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3 \cap \bar{T}_4) + P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3 \cap \bar{T}_4)$$
$$+P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \cap T_4) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95$$
$$+0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95 = 0{,}3645.$$

(ii)

$$P(F) = 1 - P(E_3) - P(E_4) = 1 - P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap \bar{T}_4) - P(T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3 \cap T_4)$$
$$-P(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3 \cap T_4) - P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4) - P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4)$$
$$= 1 - [0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}3$$
$$+0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}3] = 0{,}8585.$$

(iii)

$$P(T_4 \,|\, E_1) = \frac{P(T_4 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \cap T_4)}{P(E_1)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}3}{0{,}3645} = 0{,}0781.$$

Esercizio 2 Lo spazio campionario S è formato dalle sequenze binarie di lunghezza 7 con esattamente 4 cifre uguali ad uno. Risulta pertanto $|S| = \binom{7}{4} = 35$.

(i) La distribuzione di probabilità di X è data da

$$P(X = 1) = \frac{\binom{6}{3}}{35} = \frac{20}{35}, \quad P(X = 2) = \frac{\binom{5}{3}}{35} = \frac{10}{35}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}, \quad P(X = 4) = \frac{1}{35}.$$

(ii) La funzione di distribuzione di X è
$F(x) = 0$ per $x < 1$,
$F(x) = 20/35$ per $1 \leq x < 2$,
$F(x) = 30/35$ per $2 \leq x < 3$,
$F(x) = 34/35$ per $3 \leq x < 4$,
$F(x) = 1$ per $x \geq 4$.

(iii)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{20}{35} + 2 \cdot \frac{10}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} + 4 \cdot \frac{1}{35} = \frac{56}{35} = 1{,}6$$
$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{20}{35} + 4 \cdot \frac{10}{35} + 9 \cdot \frac{4}{35} + 16 \cdot \frac{1}{35} = \frac{112}{35} = 3{,}2$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 112/35 - (56/35)^2 = \frac{16}{25} = 0{,}64.$$

(iv)

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{20}{35} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{35} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{35} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{35} = \frac{319}{420} = 0{,}7595.$$

Esercizio 3 (i) Dovendo essere $p(x,y) \geq 0 \ \forall x,y$, e $\sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} p(x,y) = 1$ si deduce la condizione $p = 1/4$. Si ottiene quindi

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	1/8	1/4	1/8	1/2
1	0	1/8	3/8	1/2
$p_X(x)$	1/8	3/8	1/2	1

(ii) Si ha $p(0,0) = 1/8 \neq p_X(0) \cdot p_Y(0) = 1/16$, quindi X e Y non sono mai indipendenti.

(iii) La covarianza è data da

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 3/16,$$

essendo

$$E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{8},$$
$$E(X) = \frac{4}{8}, \qquad E(Y) = \frac{3}{8} + \frac{8}{8} = \frac{11}{8}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 27/1/2016

Esercizio 1 Un vettore booleano di lunghezza 6 contiene 3 bit pari a **1** e 3 bit pari a **0**, distribuiti a caso, quindi lo spazio campionario ha cardinalità $|S| = \binom{6}{3} = (6\cdot5\cdot4)/(3\cdot2) = 20$. Un algoritmo esamina i bit del vettore uno per volta, e si ferma in corrispondenza del secondo bit pari a **1**. Sia $A_k = \{$l'algoritmo si ferma al passo k-esimo$\}$, con $2 \le k \le 5$.
(i) Risulta:

$$P(A_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \qquad P(A_3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10},$$

$$P(A_4) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \qquad P(A_5) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Sia $B = \{$il bit successivo al secondo **1** è pari a **0**$\}$.
(ii) Si ricava:

$$P(B|A_2) = \frac{3}{4}, \qquad P(B|A_3) = \frac{2}{3}, \qquad P(B|A_4) = \frac{1}{2}, \qquad P(B|A_5) = 0.$$

(iii) Pertanto, per la formula delle alternative, la probabilità che il bit successivo al secondo **1** sia pari a **0** è

$$P(B) = \sum_{k=2}^{5} P(B|A_k)P(A_k) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} + 0\cdot\frac{1}{5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4}(3-x), & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

(i) La densità di probabilità di X è

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x\left(1-\dfrac{x}{2}\right), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) Il valore atteso di X è:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^2 x\,\frac{3}{2}x\left(1-\frac{x}{2}\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{3}{16}x^4\right]_0^2 = \frac{8}{2} - 3 = 1.$$

(iii) Si ha

$$P(X>1\,|\,X>1/2) = \frac{P(\{X>1\}\cap\{X>1/2\})}{P(X>1/2)} = \frac{P(X>1)}{P(X>1/2)} = \frac{1-F(1)}{1-F(1/2)},$$

quindi

$$P(X > 1 \,|\, X > 1/2) = \frac{1 - F(1)}{1 - F(1/2)} = \frac{1 - 1/2}{1 - 5/32} = \frac{16}{27} = 0{,}5926.$$

(iv) Analogamente, se Z è una variabile aleatoria normale standard, si ha

$$P(Z > 1 \,|\, Z > 1/2) = \frac{1 - F_Z(1)}{1 - F_Z(1/2)} = \frac{1 - \Phi(1)}{1 - \Phi(1/2)} = \frac{1 - 0{,}8413}{1 - 0{,}6915} = \frac{0{,}1587}{0{,}3085} = 0{,}5144.$$

Esercizio 3 Risulta

ω	X	Y	ω	X	Y	ω	X	Y	ω	X	Y
0000	0	0	0100	1	0	1000	1	0	1100	2	1
0001	1	0	0101	2	1	1001	2	1	1101	3	3
0010	1	0	0110	2	0	1010	2	1	1110	3	2
0011	2	0	0111	3	1	1011	3	2	1111	4	4

(i) Quindi la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e Y sono

$x\backslash y$	0	1	2	3	4	$p_X(x)$
0	1/16	0	0	0	0	1/16
1	4/16	0	0	0	0	4/16
2	2/16	4/16	0	0	0	6/16
3	0	1/16	2/16	1/16	0	4/16
4	0	0	0	0	1/16	1/16
$p_Y(y)$	7/16	5/16	2/16	1/16	1/16	1

(ii) X e Y non sono indipendenti: ad esempio $p(0,0) = 1/16 \neq p_X(0) \cdot p_Y(0) = (1/16)(7/16)$.
(iii) Si ha

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{4} p(k,k) = \frac{1}{16} + 0 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16},$$

$$E[(X - Y)^2] = \sum_{k=0}^{4} \sum_{h=0}^{4} (k-h)^2 p(k,h) = \frac{3}{16} \cdot 0 + \frac{10}{16} \cdot 1 + \frac{3}{16} \cdot 4 = \frac{11}{8} = 1{,}375.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 10/2/2016

Esercizio 1 (i) Si ha $P(\overline{A}) = P(\{\text{nessun bit ha valore } \mathbf{1}\})$, e quindi

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad P(B) = P(\mathbf{00}) + P(\mathbf{11}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(ii) Risulta $P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B)$ per ogni $n \geq 2$, quindi A e B non sono indipendenti.
(iii) Si ha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1,$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Esercizio 2 (i) Essendo X una variabile aleatoria continua avente densità

$$f(x) = \frac{1}{2} - c\,x \quad \text{per } 0 < x < 1$$

si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ per

$$1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - c\,x\right) dx = \left[\frac{x}{2} - c\,\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - c\,\frac{1}{2}$$

ossia per $c = -1$, e in tal caso $f(x) \geq 0$ per ogni x reale.
(ii) Per la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$ si ha:
$F(x) = 0$ per $x < 0$;

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + t\right) dt = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} \quad \text{per } 0 \leq x < 1;$$

$F(x) = 1$ per $x \geq 1$.
(iii)

$$E(X) = \int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2} + x\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}.$$

(iv)

$$P\left(X > \frac{1}{4} \,\Big|\, X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)} = \frac{F(1/2) - F(1/4)}{F(1/2)} = \frac{1/4 + 1/8 - 1/8 - 1/32}{1/4 + 1/8} = \frac{7}{12}.$$

Esercizio 3 (i) La funzione di probabilità congiunta $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$ si ricava notando che

$$P(X = 0, Y = 1) = P(BBB) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(BBN) + P(BNB) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$$

$$P(X = 2, Y = 1) = P(BNN) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 1, Y = 2) = P(NBB) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 2, Y = 2) = P(NBN) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 2, Y = 3) = P(NNB) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 3, Y = 0) = P(NNN) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	0	1/20	0	0	1/20
1	0	6/20	3/20	0	9/20
2	0	3/20	3/20	3/20	9/20
3	1/20	0	0	0	1/20
$p_Y(y)$	1/20	10/20	6/20	3/20	1

(ii) Essendo

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\, p_X(x) = \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20} = \frac{3}{2}$$

$$E(Y) = \sum_{x=0}^{3} y\, p_Y(y) = \frac{10}{20} + \frac{12}{20} + \frac{9}{20} = \frac{31}{20}$$

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{3} x\, y\, p(x,y) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{12}{20} + \frac{18}{20} = \frac{48}{20}$$

La covarianza di (X, Y) è

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{48}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{31}{20} = \frac{3}{40} = 0{,}075 > 0$$

quindi X e Y sono positivamente correlate, e dunque non sono indipendenti.
(iii) Si ha $P(X = x \,|\, Y = 1) = p(x,1)/p_Y(1) = 2 \cdot p(x,1)$ per $x = 0,1,2,3$ e pertanto
$P(X = 0 \,|\, Y = 1) = 1/10$,
$P(X = 1 \,|\, Y = 1) = 6/10$,
$P(X = 2 \,|\, Y = 1) = 3/10$,
$P(X = 3 \,|\, Y = 1) = 0$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 5/4/2016

Esercizio 1 Definiamo i seguenti eventi: $A = \{w_1 < w_2 < w_3\}$ e $B_k = \{w_1 = k\}$; risulta:
(i)

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{5^3} = \frac{10}{125} = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

(ii)

$$P(B_1 \,|\, A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{2}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$P(B_2 \,|\, A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{0}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P(B_3 \,|\, A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{2}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{2}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

(iii)

$$\sum_{i=1}^{3} P(B_i \,|\, A) = \frac{6+3+1}{10} = 1.$$

Esercizio 2 (i) Si ha

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{per } x \geq 0$$

e $f(x) = 0$ altrimenti.
(ii) Risulta

$$E[V(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2 = 0{,}6931.$$

(iii) Poiché per $x \geq 0$ risulta

$$P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1},$$

$$P(X > 2x \,|\, X > x) = \frac{P(X > 2x)}{P(X > x)} = \frac{1/(2x+1)}{1/(x+1)} = \frac{x+1}{2x+1},$$

si ha

$$P(X > 2x \,|\, X > x) \geq P(X > x) \iff \frac{x+1}{2x+1} \geq \frac{1}{x+1} \iff x^2 + 2x + 1 \geq 2x + 1$$

e quindi la condizione è soddisfatta per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 3

ω	X	Y	ω	X	Y
0 0 0 0	0	1	1 0 0 0	1	0
0 0 0 1	1	0	1 0 0 1	2	1
0 0 1 0	1	0	1 0 1 0	2	0
0 0 1 1	2	0	1 0 1 1	3	0
0 1 0 0	1	0	1 1 0 0	2	0
0 1 0 1	2	0	1 1 0 1	3	0
0 1 1 0	2	1	1 1 1 0	3	0
0 1 1 1	3	0	1 1 1 1	4	1

(i) Quindi

$x\backslash y$	0	1	$p_x(x)$
0	0	1/16	1/16
1	4/16	0	4/16
2	4/16	2/16	6/16
3	4/16	0	4/16
4	0	1/16	1/16
$p_Y(y)$	3/4	1/4	1

(ii) Essendo

$$p(0,0) = 0 \neq p_X(0)\, p_Y(0) = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4},$$

si ha che X e Y non sono indipendenti.
(iii) X ha distribuzione binomiale, quindi

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Inoltre

$$E(Y) = \frac{1}{4}, \qquad E(XY) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{2} - 2\,\frac{1}{4} = 0,$$

da cui segue che il coefficiente di correlazione di (X,Y) è nullo.
(iv) Si ha

$$P(X+Y \leq 1 | X+Y \leq 3) = \frac{P(X+Y \leq 1)}{P(X+Y \leq 3)} = \frac{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{4}{16}} = \frac{1}{3}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 27/6/2016

Esercizio 1 Consideriamo i seguenti eventi: $B_i = \{\text{viene scelta la moneta } M_i\}$, $i = 1, 2$, e $A = \{\text{nei tre lanci della moneta si realizza 2 volte testa ed 1 volta croce}\}$; poiché $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$, risulta:
(i)

$$P(B_1 \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, B_1)P(B_1)}{P(A \,|\, B_1)P(B_1) + P(A \,|\, B_2)P(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2}\right]}{\frac{1}{2} \cdot \left[\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{3}{5}\right]} = \frac{125}{221};$$

(ii)

$$P(B_2 \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, B_2)P(B_2)}{P(A \,|\, B_1)P(B_1) + P(A \,|\, B_2)P(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[\binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{3}{5}\right]}{\frac{1}{2} \cdot \left[\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{3}{5}\right]} = \frac{96}{221}.$$

Esercizio 2 (i) La distribuzione di probabilità di X è data da

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{8}, \quad P(X = -2) = \frac{1}{8}.$$

(ii) La funzione di distribuzione di X è
$F(x) = 0$ per $x < -2$,
$F(x) = 1/8$ per $-2 \leq x < 1$,
$F(x) = 5/8$ per $1 \leq x < 2$,
$F(x) = 7/8$ per $2 \leq x < 3$,
$F(x) = 1$ per $x \geq 3$.
(iii) Si ha:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 25/8 - (9/8)^2 = \frac{119}{64},$$

e quindi

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{119}}{8},$$

Esercizio 2 (i) La distribuzione congiunta è data da:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{4}{x}\binom{5}{y}\binom{3}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}, \quad 0 \leq x + y \leq 3$$

Quindi

$x\backslash y$	0	1	2	3	$p_x(x)$
0	1/220	15/220	30/220	10/220	56/220
1	12/220	60/220	40/220	0	112/220
2	18/220	30/220	0	0	48/220
3	4/220	0	0	0	4/220
$p_Y(y)$	35/220	105/220	70/220	10/220	1

$$P(X = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{8}{3-x}}{\binom{12}{3}}, \quad 0 \le x \le 3$$

$$P(Y = y) = \frac{\binom{5}{y}\binom{7}{3-y}}{\binom{12}{3}}, \quad 0 \le y \le 3$$

(ii) La covarianza è data da

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = -15/44,$$

essendo

$$E(X \cdot Y) = \frac{60}{220} + \frac{80}{220} + \frac{60}{220} = \frac{200}{220},$$

$$E(X) = \frac{112 + 96 + 12}{220} = 1, \qquad E(Y) = \frac{105 + 140 + 30}{220} = \frac{275}{220}.$$

Inoltre,

$$E(X^2) = \frac{112 + 36 + 192}{220} = \frac{340}{220}, \qquad E(Y^2) = \frac{105 + 280 + 90}{220} = \frac{95}{44}.$$

e quindi

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{6}{11}, \quad Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{105}{176}.$$

Pertanto

$$\rho(X,Y) = -\frac{15/44}{\sqrt{6/11 \cdot 105/176}} = -\sqrt{\frac{5}{14}} = -0{,}598.$$

(iii)

$$P(X < 2 \,|\, X + Y \le 2) = \frac{P(X < 2, X + Y \le 2)}{P(X + Y \le 2)}$$

$$= \frac{p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(1,1)}{p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,0)} = \frac{59}{68} = 0{,}867.$$

$$P(X + Y \le 2 \,|\, X \le 2) = \frac{P(X \le 2, X + Y \le 2)}{P(X \le 2)}$$

$$= \frac{p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,0)}{p_X(0) + p_X(1) + p_X(2)} = \frac{17}{27} = 0{,}629.$$