Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 15/01/2013

Esercizio 1 Un algoritmo genera sequenze di lunghezza $n = 5$, del tipo $(x_1, \ldots, x_5)$, dove $x_i \in \mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Dati i seguenti eventi: $A = \{$la sequenza contiene almeno due numeri uguali$\}$, $B = \{$la sequenza contiene esattamente una volta tutti i multipli positivi di 2 presenti in $\mathcal{D}\}$ e $C = \{$la sequenza contiene esattamente due volte il numero 0 mentre le altre cifre sono distinte tra loro$\}$, si studi l'indipendenza di A, B e C.

Esercizio 2 Un'urna contiene 5 biglie rosse, 6 blu ed 8 verdi. Si estrae un blocco di 3 biglie. Se hanno il medesimo colore si vincono 2 euro, se hanno tutte colore diverso si vince 1 euro, negli altri casi si perde 1 euro. Sia X la variabile aleatoria che descrive la vincita del gioco.
(i) Determinare $P(X = x)$, specificando i possibili valori di x.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di X, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare il valore medio e la varianza di X.
(iv) Determinare il valore medio di $Y = 1/X$.

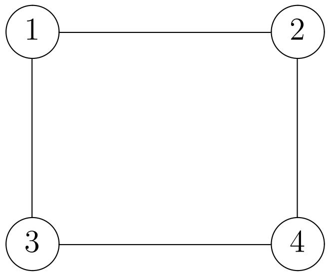
Esercizio 3 Una scatola contiene 50 buste da lettera (numerate da 1 a 50) e 50 biglietti da visita. Il contenuto della scatola viene diviso in 50 coppie in modo casuale. Si ponga, (per $i = 1, 2, \ldots, 50$),

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-esima busta è accoppiata ad un biglietto da visita,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di coppie formate da una busta ed una lettera, ossia $X = \sum_{i=1}^{50} X_i$.
(i) Calcolare il valore medio e la varianza di X_i, $(i = 1, 2, \ldots, 50)$.
(ii) Calcolare il valore medio e la varianza di X.
(iii) Fare uso della disuguaglianza di Markov per ricavare una limitazione superiore per $P(X \geq 50)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 29/01/2013

Esercizio 1 Si consideri la seguente rete, dove in ogni nodo (indipendentemente dagli altri) viene generato un bit a caso secondo la seguente regola: posto $A_k = \{$nel nodo k-esimo si genera $\mathbf{1}\}$, si ha $P(A_k) = k/4$, per $k = 1, 2, 3, 4$.



(i) Calcolare la probabilità che in 2 nodi adiacenti della rete (e solo in quelli) si generi $\mathbf{1}$.
(ii) Sapendo che in 2 nodi adiacenti della rete (e solo in quelli) si è generato $\mathbf{1}$, calcolare la probabilità dell'evento A_k, per $k = 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 2 Si consideri la variabile aleatoria continua X, avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p\,x, & 0 \le x < 1 \\ (1-p)\,x + 2p - 1, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2, \end{cases}$$

con $0 \le p \le 1$.
(i) Ricavare la densità di probabilità di X mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare il valore medio e la varianza di X.
(iii) Determinare minimi e massimi di $E(X)$ e $Var(X)$ al variare di $p \in [0, 1]$.

Esercizio 3 Un esperimento consiste nel lanciare 3 monete, di cui le prime 2 sono non truccate, mentre la terza è truccata, nel senso che mostra testa con probabilità 1/4. Sia X il numero di volte che esce testa nei 3 lanci, e Y il numero di variazioni, dove una variazione corrisponde ad un risultato diverso da quello ottenuto nel lancio precedente.
(i) Calcolare la densità discreta di (X, Y).
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il valore medio e la varianza di X e di Y.
(iv) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 19/2/2013

Esercizio 1 Una moneta speciale, quando viene lanciata a caso, mostra testa con probabilità 2/5, croce con probabilità 2/5, o si ferma sul bordo laterale con probabilità 1/5. Nell'esperimento che consiste nell'effettuare 3 lanci indipendenti di tale moneta, sia

$A = \{\text{esce una volta testa}\}$,
$B = \{\text{almeno una volta la moneta si ferma sul bordo laterale}\}$,
$C = \{\text{nei tre lanci si ha lo stesso risultato}\}$.

Stabilire se le seguenti relazioni sono vere o false, commentando i risultati ottenuti:
(i) $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$,
(ii) $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$,
(iii) $P(C) = P(C|B)$.

Esercizio 2 Un vettore booleano di lunghezza n, con $n \geq 6$, contiene 2 bit pari a **1** mentre i rimanenti sono pari a **0**. Una procedura consiste nell'esaminare i bit del vettore, uno per volta partendo dall'inizio, fermandosi non appena si esaminano 2 bit uguali consecutivi. Si consideri la variabile aleatoria X che descrive quanti passi compie la procedura prima di fermarsi.
(i) Ricavare la densità di probabilità $p(k) = P(X = k)$, verificando che $\sum_k p(k) = 1$.
(ii) Calcolare il valore medio di X e valutarne il limite per $n \to +\infty$.

Esercizio 3 Il tempo di calcolo richiesto da un algoritmo è descritto da una variabile aleatoria X avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x-1}{5}, & 1 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

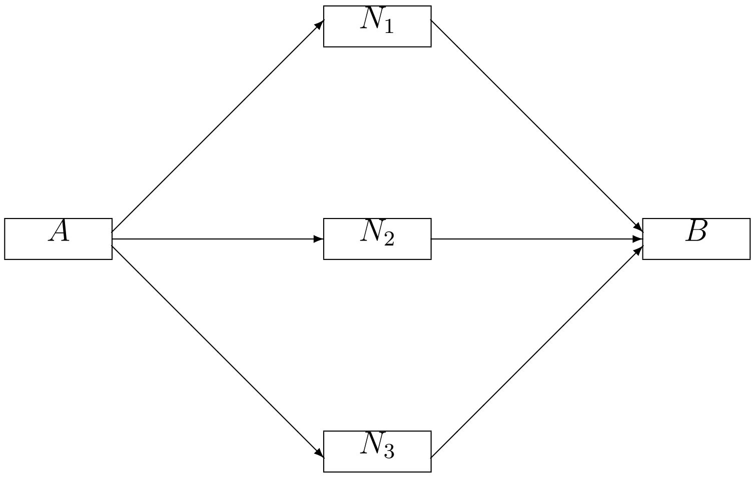
(i) Ricavare il valore z tale che $P(X > z \,|\, X > 2) = 0{,}25$.
(ii) Stabilire se la seguente relazione è vera o falsa, commentando il risultato ottenuto:

$$P(X > 5 \,|\, X > 2) = P(X > 3).$$

(iii) Indicando con S il tempo di calcolo totale richiesto da 2 esecuzioni indipendenti dell'algoritmo, determinare valore medio e varianza di S.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 29/4/2013

Esercizio 1 Un esperimento consiste nel generare a caso un bit $x \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ nel nodo A. Il bit x generato viene trasferito con probabilità $(x+i)/(6+3x)$, (con $x = 0, 1$; $i = 1, 2, 3$) nel nodo N_i, dove viene trasformato nel valore $x + 2 - i$ ed inviato al nodo B.



(i) Si calcoli la probabilità che il valore giunto nel nodo B sia $\mathbf{0}$ oppure che sia $\mathbf{1}$.
(ii) Se nel nodo B è giunto il valore $\mathbf{0}$, qual è la probabilità che in A sia stato generato il bit $\mathbf{1}$?

Esercizio 2 Un esperimento consiste nel lanciare due volte un dado non truccato. Sia X la variabile aleatoria che descrive il massimo degli esiti dei due lanci.
(i) Determinare la distribuzione di probabilità di X, ossia $P(X = k)$, $k = 1, 2, \ldots, 6$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Sia $C = \{$il primo lancio ha avuto esito 3$\}$; calcolare $P(X = k \,|\, C)$, per $k = 1, 2, \ldots, 6$.
(iv) Determinare $E(X)$ e $E(X \,|\, C)$.

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X uniforme nell'intervallo $(-1, 1)$, e Y esponenziale di valore atteso $E(Y) = 2$.
(i) Determinare $P(X \geq 0, Y \leq 2)$.
(ii) Calcolare $E(X \cdot Y)$.
(iii) Calcolare $Var(2X + Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 19/6/2013

Esercizio 1 Un sistema di gestione della posta elettronica riceve un messaggio, che si suppone sia *spam* con probabilità 0,7 e *non spam* con probabilità 0,3. Il sistema effettua un controllo su ogni messaggio ricevuto; se riceve un messaggio *spam* lo valuta come tale con probabilità 0,9 (e lo valuta come *non spam* con probabilità 0,1), mentre se riceve un messaggio *non spam* lo valuta come tale con probabilità 0,8 (e lo valuta come *spam* con probabilità 0,2).
(i) Calcolare la probabilità che il sistema valuti come *spam* il messaggio ricevuto.
(ii) Se il sistema ha valutato come *spam* il messaggio ricevuto, qual è la probabilità che sia effettivamente *spam*?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} c\,|x| & \text{per } -2 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Derminare il valore della costante c.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di X, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare $E(X)$.
(iv) Calcolare $P(X < 0 \,|\, X \geq -1)$.

Esercizio 3 Si consideri la variabile aleatoria doppia (X, Y) avente distribuzione di probabilità

$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 1, Y = 1) = \theta,$$

$$P(X = 1, Y = 0) = 1 - p - \theta, \qquad P(X = 0, Y = 1) = p - \theta,$$

con $0 \leq \theta \leq 1/2$ e $\theta \leq p \leq 1 - \theta$.
(i) Determinare le distribuzioni di probabilità marginali di X e Y.
(ii) Calcolare $P(X \geq Y)$ e determinarne il massimo al variare di p nel suo insieme di variabilità.
(iii) Determinare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$ e stabilire per quale valore di θ sia $\rho(X, Y) = 1/2$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Fisciano, 12/7/2013

Esercizio 1 Sono date n urne, di cui $n\,p$ contengono una biglia bianca, e le rimanenti $n\,(1-p)$ urne contengono una biglia nera (con $n\,p$ numero intero). Si sceglie un'urna a caso, e in tale urna si inserisce una nuova biglia, di colore bianco. Da tale urna si estrae poi una biglia a caso.
(i) Calcolare la probabilità che la biglia estratta sia bianca.
(ii) Se la biglia estratta è bianca, qual è la probabilità che la biglia rimasta nell'urna scelta sia bianca?
(iii) Per quale scelta di p la probabilità calcolata al punto (ii) vale 1/2?, e 1/3?

Esercizio 2 (i) Per quale valore di c la seguente funzione è la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua X?

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{c}\,\log(x+1), & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

(ii) Determinare la densità di probabilità di X, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare $E[(X+1)^k]$, per $k = 1, 2, \ldots$
(iv) Determinare $Var(X)$. [Suggerimento: si ricordi la relazione tra $Var(X)$ e $Var(X+1)$]

Esercizio 3 In un esperimento si generano 3 bit aleatori, descritti da variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti B_1, B_2, B_3, ciascuna di parametro $p \in [0,1]$.
(i) Posto $X = B_1$ **or** B_2 e $Y = B_2$ **and** B_3, ricavare la distribuzione di probabilità congiunta di (X, Y).
(ii) Stabilire per quali valori di $p \in [0,1]$ le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare le seguenti quantità:

$$R_1(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}, \qquad R_2(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)},$$

determinando il massimo di entrambe per $p \in [0,1]$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 13/9/2013

Esercizio 1 Una sorgente d'informazione genera un segnale sotto forma di bit. Nel 15% dei casi il segnale è **1**, mentre nell'85% dei casi il segnale è **0**. Il segnale viene ricevuto da un decodificatore automatico, che registra esattamente il segnale nell'80% dei casi, sia quando il segnale generato è **1**, sia quando è **0**.
(i) Qual è la probabilità che il segnale generato sia effettivamente **1** se il decodificatore ha registrato il segnale **1**?
(ii) Qual è la probabilità che in 3 invii indipendenti il segnale generato sia sempre lo stesso?

Esercizio 2 Si consideri la seguente funzione di distribuzione:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(i) Ricavare il primo quartile, ossia il reale q tale che $F(q) = 1/4$.
(ii) Con riferimento al valore di q ricavato al punto (i), calcolare

$$P(X > q), \quad P(X \geq q+1), \quad P(q < X < q+1|X > q).$$

(iii) Determinare il valore atteso

$$E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx.$$

Esercizio 3 2 giocatori lanciano una moneta; se esce testa giocano al gioco $\mathcal{G}$, se esce croce giocano al gioco $\mathcal{H}$.
1. Nel gioco $\mathcal{G}$ si lancia un dado; se esce un numero pari entrambi i giocatori vincono 1 euro, mentre se esce un numero dispari entrambi i giocatori perdono 1 euro.
2. Nel gioco $\mathcal{H}$ si lancia un dado; se esce un numero pari il primo giocatore perde 1 euro e il secondo giocatore vince 1 euro, mentre se esce un numero dispari il primo giocatore vince 1 euro e il secondo giocatore perde 1 euro.

Indichiamo con X la vincita del primo giocatore, e con Y la vincita del secondo giocatore.
(i) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e stabilire se X e Y sono indipendenti.
(ii) Calcolare il valore medio e la varianza di X e di Y.
(iii) [facoltativo] Poniamo $Z = 1$ se la moneta lanciata inizialmente dà testa, e $Z = 0$ altrimenti. Calcolare $P(Z = z|X = x)$ e $P(Z = z|Y = y)$ per ogni scelta di $x = -1, 1$, $y = -1, 1$ e $z = 0, 1$. Stabilire se Z e X sono indipendenti, e se Z e Y sono indipendenti. Determinare $P(Z = 1|X = 1, Y = 1)$ e stabilire se Z e (X, Y) sono indipendenti.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 9/1/2014 – ore 9

Esercizio 1 Un giocatore ha a disposizione 4 dadi, di cui i primi 2 sono non truccati mentre il terzo e il quarto sono truccati entrambi in modo che il numero 6 è stato cambiato in 5. Un gioco consiste nel lanciare una coppia di dadi, scelta a caso tra i 4 dadi a disposizione. Si vince se la somma dei 2 dadi lanciati è 7.
(i) Calcolare la probabilità condizionata di vincita nei 3 casi: quando i 2 dadi lanciati sono entrambi truccati, quando sono entrambi non truccati, e quando sono uno truccato e l'altro non truccato.
(ii) Calcolare la probabilità assoluta di vincita.
(iii) Se il giocatore ha vinto, qual è la probabilità che abbia vinto lanciando un dado truccato ed uno non truccato?

Esercizio 2 Un programma consiste di 2 moduli distinti. Nel primo modulo è presente un errore con probabilità 1/4, e non sono presenti errori con probabilità 3/4. Nel secondo modulo, indipendentemente dal primo, è presente un errore con probabilità 1/3, e non sono presenti errori con probabilità 2/3. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero totale di errori presenti nel programma.
(i) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare valore medio μ e deviazione standard σ di X.
(iii) Determinare $P(|X - \mu| \leq \sigma)$.

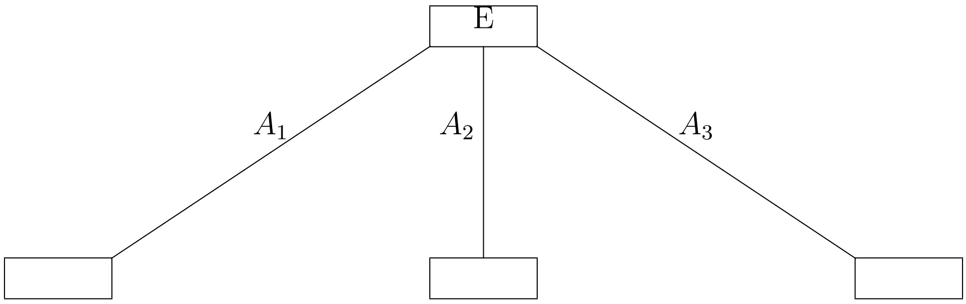
Esercizio 3 Un esperimento consiste nell'estrarre senza reinserimento le biglie da un'urna contenente 4 biglie numerate da 1 a 4. Diciamo che si ha una concordanza nell'estrazione k-esima se in tale estrazione esce la biglia avente numero k, con $k = 1, 2, 3, 4$. Diciamo che si ha una pseudo-concordanza se in un'estrazione avente indice pari si estrae una biglia avente numero pari, oppure se in un'estrazione avente indice dispari si estrae una biglia avente numero dispari.

Sia X la variabile aleatoria che conta quante concordanze si realizzano nelle 4 estrazioni, e sia Y la variabile aleatoria che conta quante pseudo-concordanze si realizzano nelle 4 estrazioni.
(i) Calcolare la densità discreta di (X, Y).
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare la covarianza di (X, Y).

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 9/1/2014 – ore 12

Esercizio 1 Un gruppo di 10 candidati deve sostenere una prova alla presenza di una commissione. Ciascun candidato è chiamato, secondo un certo ordine, al sorteggio della commissione d'esame (la commissione **A** o la commissione **B**). Il sorteggio avviene secondo la seguente regola: ogni candidato estrae a caso (senza reinserimento) una biglia da un'urna contenente 10 biglie di cui 5 recanti la lettera **A** e 5 la lettera **B**. La lettera sulla biglia identifica la relativa commissione d'esame.
(i) Qual è la probabilità che il terzo candidato chiamato al sorteggio estragga la commissione **A**?
(ii) Se il terzo candidato chiamato al sorteggio estrae la commissione **B**, qual è la probabilità che almeno uno tra il primo ed il secondo candidato chiamati al sorteggio abbia estratto la commissione **A**?

Esercizio 2 Un sistema prevede tre linee di comunicazione collegate ad un elaboratore centrale secondo il seguente schema:



Le tre linee funzionano indipendentemente l'una dall'altra e la j-esima linea è attiva con probabilità $j/6$, $j = 1, 2, 3$. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di linee di comunicazione funzionanti.
(i) Determinare $P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, 3$.
(ii) Ricavare $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare $P(X \geq 1)$.
(iv) Determinare $E(X)$.
(v) [Facoltativo] Determinare $P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, 3$, nell'ipotesi in cui ciascuna delle tre linee sia attiva con probabilità $1/6$.

Esercizio 3 Un programma consiste di due moduli distinti. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di errori nel primo modulo ed Y la variabile aleatoria che descrive il numero di errori nel secondo modulo. Si supponga che X ed Y abbiano la seguente distribuzione congiunta

$x \backslash y$	0	1	2
0	p	$p/2$	$p/2$
1	$p/2$	$2p$	$2p$
2	$2p$	p	$p/2$

(i) Determinare i valori ammissibili di p.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti e calcolare $Cov(X, Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 23/1/2014

Esercizio 1 Un gruppo di lavoro formato da 8 operatori accede ad un centro di calcolo dove vi sono 10 computer, ognuno dei quali (indipendentemente dagli altri) è funzionante con probabilità 4/5.
(i) Quanto vale la probabilità che tutti gli operatori tranne uno possono accedere ad un computer funzionante?
(ii) Quanto vale la probabilità che tutti gli operatori possono accedere ad un computer funzionante?
(iii) Se tutti gli operatori possono accedere ad un computer funzionante, quanto vale la probabilità che i computer funzionanti siano 8?, e che siano 9?, e che siano 10?

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot |x-1|, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la costante c.
(ii) Ricavare $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare $E(X)$.
(iv) Calcolare $P(X > 1/2 \,|\, X \leq 3/2)$.
(v) [Facoltativo] Calcolare $P(Y > 1/2 \,|\, Y \leq 3/2)$, dove Y è una variabile aleatoria normale avente lo stesso valore medio di X e tale che $Var(Y) = 4$.

Esercizio 3 Un esperimento consiste nel selezionare a caso 3 bit da una sequenza booleana di lunghezza 5, costituita da 3 bit pari a **1** e da 2 bit pari a **0**. Sia X la variabile aleatoria che descrive quanti dei 3 bit selezionati sono pari a **1**. Sia $Y = 1$ se i 2 bit non selezionati sono uguali e sia $Y = 0$ altrimenti.
(i) Ricavare la densità discreta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti e calcolare $Cov(X, Y)$.
(iii) Determinare le distribuzioni condizionate

$$p_{X|Y}(x \,|\, 0) = P(X = x \,|\, Y = 0), \qquad p_{X|Y}(x \,|\, 1) = P(X = x \,|\, Y = 1)$$

e le medie condizionate

$$E(X \,|\, Y = 0), \qquad E(X \,|\, Y = 1).$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 13/2/2014

Esercizio 1 Si lanciano indipendentemente 3 monete, di cui le prime 2 sono non truccate mentre la terza è truccata, nel senso che mostra testa con probabilità 1/3 e croce con probabilità 2/3. Posto $A = \{\text{esce testa almeno una volta nei 3 lanci}\}$ e $B = \{\text{nei primi 2 lanci si ha lo stesso risultato}\}$, stabilire se ognuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa, giustificando le risposte:
(i) $P(\overline{A}) + P(\overline{B}) \leq 1$;
(ii) A e B sono indipendenti;
(iii) $P(B \,|\, A) = P(A \cup B)$;
(iv) $P(A \,|\, B) = 1 - P(A \,|\, \overline{B})$.

Esercizio 2 Un gioco consiste nell'estrarre due biglie a caso da un'urna contenente 2 biglie rosse e 3 biglie nere. Si vince 1 euro se le due biglie estratte sono entrambe nere, si vincono 2 euro se sono entrambe rosse, si perde 1 euro se hanno colore diverso. Sia X la variabile aleatoria discreta che descrive la vincita al gioco.
(i) Ricavare $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Determinare $E(X)$ e $Var(X)$.
(iii) Calcolare $P(X > 1 \,|\, X \geq 0)$.
(iv) [Facoltativo] Calcolare $P(Y > 1 \,|\, Y \geq 0)$, dove Y è una variabile aleatoria normale avente lo stesso valore medio di X e tale che $Var(Y) = 9$.

Esercizio 3 Si consideri la variabile aleatoria doppia (X, Y) avente densità discreta congiunta

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) = c \cdot 2^{x-y}; \qquad x, y = 1, 2.$$

(i) Determinare la costante c.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti e identicamente distribuite.
(iii) Calcolare $E(X - Y)$ e $Var(X - Y)$.
(iv) Valutare $P(X = 1 \,|\, X + Y = 3)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 16/4/2014

Esercizio 1 Un sistema di gestione della posta elettronica riceve un messaggio, che si suppone sia *spam* con probabilità 0,6 e *non spam* con probabilità 0,4. Il sistema effettua un controllo su ogni messaggio ricevuto; se riceve un messaggio *spam* lo valuta come tale con probabilità 0,8 (e lo valuta come *non spam* con probabilità 0,2), mentre se riceve un messaggio *non spam* lo valuta come tale con probabilità 0,7 (e lo valuta come *spam* con probabilità 0,3).
(i) Calcolare la probabilità che il sistema valuti come *spam* il messaggio ricevuto.
(ii) Se il sistema ha valutato come *spam* il messaggio ricevuto, qual è la probabilità che sia effettivamente *spam*?
(iii) Se il sistema ha valutato come *non spam* il messaggio ricevuto, qual è la probabilità che esso sia *spam*?

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (x-1)^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la costante c.
(ii) Ricavare $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare $E(X)$.
(iv) Calcolare $P(X \leq 3/2 \,|\, X > 1/2)$.
(v) [Facoltativo] Calcolare $P(Y \leq 3/2 \,|\, Y > 1/2)$, dove Y è una variabile aleatoria normale avente lo stesso valore medio di X e tale che $Var(Y) = 4$.

Esercizio 3 La variabile aleatoria doppia (X, Y) ha densità discreta

$x \backslash y$	0	1	2
0	$(1/2) - p$	$1/8$	0
1	$1/8$	p	$1/8$
2	0	$1/8$	0

(i) Determinare i valori di p ammissibili.
(ii) Ricavare la densità marginale di X e quella di Y.
(iii) Stabilire se esiste un valore di p per cui X e Y sono indipendenti.
(iv) Calcolare $Cov(X, Y)$, e determinarne massimo e minimo al variare di p.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 23/6/2014

Esercizio 1 Un esperimento consiste nel costruire sequenze ordinate (ossia disposizioni) di lunghezza 3 senza ripetizione dall'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
(i) Descrivere lo spazio campionario e determinarne la cardinalità;
(ii) Considerati i seguenti eventi:
$A = \{$i 3 numeri selezionati sono ordinati in senso crescente$\}$,
$B = \{$i 3 numeri selezionati sono primi$\}$,
$C = \{$i 3 numeri selezionati sono dispari$\}$,
studiare la loro indipendenza.
(iii) Stabilire se le seguenti relazioni sono vere o false:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}), \qquad P(A|B) = P(B).$$

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua di media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 4$. Calcolare

$$P(X > 1) \qquad \text{e} \qquad P(X > 2 \,|\, X > 1),$$

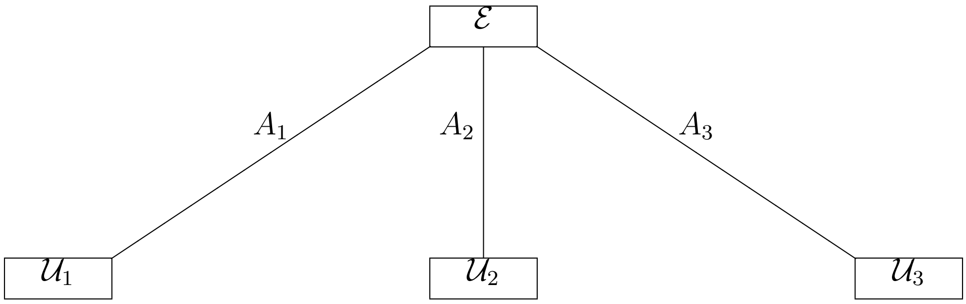
quando
(i) X ha densità esponenziale,
(ii) X ha densità normale.

Esercizio 3 Sono date 3 monete, di cui la prima e la seconda sono non truccate, ovvero danno testa o croce con probabilità 1/2. Invece la terza moneta è truccata, nel senso che dà testa con probabilità 1/3 e croce con probabilità 2/3.

Nell'esperimento che consiste nel lanciare a caso le 3 monete, sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di volte che esce testa, e sia Y la variabile aleatoria che descrive il numero di variazioni (intendendo che si realizza una variazione quando in un lancio si ha un risultato diverso dal lancio precedente).
(i) Calcolare la densità discreta di (X, Y).
(ii) Stabilire se (X, Y) sono indipendenti.
(iii) Calcolare la covarianza di (X, Y).
(iv) Valutare $P(X = x \,|\, Y = 0)$ per i valori di x ammissibili.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 9/7/2014

Esercizio 1 Un sistema è costituito da tre unità secondarie collegate tramite linee di comunicazione ad un elaboratore centrale secondo il seguente schema:



Le tre linee funzionano indipendentemente l'una dall'altra e la k-esima linea è attiva con probabilità

$$P(A_k) = \frac{1}{2} + \frac{k}{8}, \quad k = 1, 2, 3.$$

(i) Calcolare la probabilità che almeno una linea sia attiva.
(ii) Se risulta attiva almeno una linea qual è la probabilità che la prima linea sia attiva?
(iii) Se risulta attiva almeno una linea qual è la probabilità che la terza linea non sia attiva?
(iv) [Facoltativo] Stabilire se $A_1 \cap A_2$ e $A_2 \cup A_3$ sono eventi indipendenti.

Esercizio 2 Sia S l'insieme costituito da tutte le sequenze booleane del tipo (b_1, b_2, b_3, b_4). Nell'esperimento che consiste nello scegliere a caso una sequenza di S, sia X la variabile aleatoria che descrive la lunghezza della più lunga sottosequenza che contiene valori tutti uguali.
(i) Determinare la densità di probabilità $p(x) = P(X = x)$.
(ii) Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.
(iii) Posto

$$H(X) = \sum_x p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)},$$

stabilire se risulta $E(X) > H(X)$.

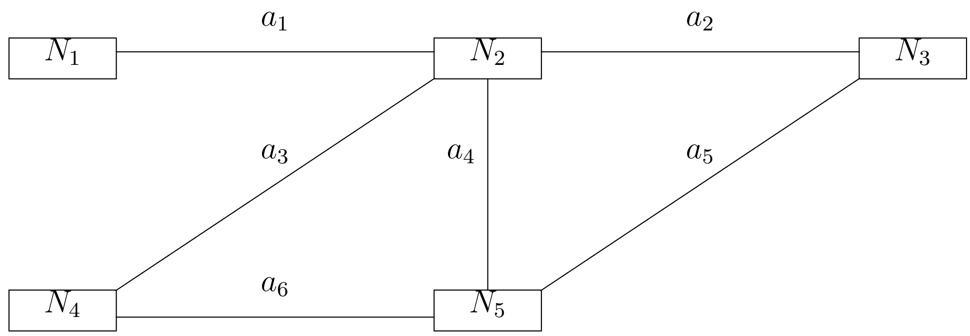
Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti aventi distribuzione normale, con

$$E(X) = 1, \quad Var(X) = 1, \qquad E(Y) = -1, \quad Var(Y) = 4.$$

(i) Calcolare $P(X - X^2 > 0, Y - Y^2 > 0)$.
(ii) Posto $Z = X + Y$, determinare $E(Z)$, $Var(Z)$ e $Cov(Z, X)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 4/9/2014

Esercizio 1 Si consideri l'esperimento che consiste nello scegliere a caso una coppia di archi del seguente grafo:



(i) Determinare la cardinalità dello spazio campionario.
(ii) Calcolare la probabilità degli eventi $C_k = \{$almeno uno dei 2 archi scelti è connesso al nodo $N_k\}$, per $k = 1, 2, \ldots, 5$.
(iii) Cosa si può dire sull'indipendenza di C_1 e C_2, e di C_1 e C_3?
(iv) [Facoltativo] Descrivere una procedura per calcolare $P(C_k)$ per grafi qualsiasi, conoscendo il grado di ogni nodo (ricordando che il numero di archi connessi ad un nodo prende il nome di grado del nodo).

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (x+1), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la costante c.
(ii) Ricavare $F(x) = P(X \le x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare $P(X > 0 \,|\, X \le 1/2)$.
(iv) Determinare i momenti $E(X^n)$, per $n = 1, 2, \ldots$.

Esercizio 3 Nell'estrazione con reinserimento di 2 biglie da un'urna contenente numeri da 1 a 5, sia X il numero minimo estratto, e sia Y il numero di volte che esce un numero dispari.
(i) Determinare la densità di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ e le densità marginali.
(ii) Ricavare la densità di probabilità condizionata $p(x|2) = P(X = x|Y = 2)$ e calcolare la media condizionata $E(X|Y = 2)$.
(iii) Stabilire se le variabili X e Y sono positivamente correlate o se sono negativamente correlate.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 14/11/2014

Esercizio 1 Un algoritmo genera sequenze booleane $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di lunghezza $n \geq 2$ secondo le seguenti regole:

- L'elemento x_1 può essere 0 oppure 1 con la stessa probabilità.
- Se $x_j = 1$ allora si ha $x_{j+1} = 1$ con probabilità 2/3 e $x_{j+1} = 0$ con probabilità 1/3, $(j = 1, \ldots, n-1)$. Analogamente, se $x_j = 0$ allora si ha $x_{j+1} = 1$ con probabilità 1/3 e $x_{j+1} = 0$ con probabilità 2/3, $(j = 1, \ldots, n-1)$.

(i) Calcolare la probabilità che il vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contenga almeno uno zero.
(ii) Se il vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contiene almeno uno zero, qual è la probabilità che sia $x_3 = 0$?
(iii) Per quale valore di n la probabilità calcolata al punto (i) vale 2/3?

Esercizio 2 Sia $X = |D_1 - D_2|$ la variabile aleatoria che descrive il valore assoluto della differenza dei risultati D_1 e D_2 che si ottengono lanciando indipendentemente 2 dadi.
(i) Determinare la densità discreta $p(x) = P(X = x)$, per $x = 0, 1, \ldots, 5$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare il valore medio di X.
(iv) Calcolare $P(X \geq 2 \,|\, X \leq 4)$.

Esercizio 3 Si supponga che il numero di manufatti prodotti da un'azienda tessile in un giorno sia descritto da una variabile aleatoria di media 2 e varianza 4, e che i prodotti di giorni distinti possano essere considerati indipendenti. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di manufatti prodotti dall'azienda in 40 giorni.
(i) Si valuti $E(X)$ e $Var(X)$.
(ii) Determinare un'approssimazione per $P(50 \leq X \leq 100)$ basata sul Teorema Centrale del Limite.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 8/1/2015 - ore 12

Esercizio 1 Un'urna contiene $N+1$ biglie; le prime $N-1$ sono numerate da 1 a $N-1$, mentre le ultime 2 hanno entrambe numero N. Consideriamo l'esperimento che consiste nell'estrarre 2 biglie a caso senza reinserimento da tale urna.
(i) Calcolare la probabilità che il numero 1 sia tra i 2 estratti.
(ii) Calcolare la probabilità che tra i 2 numeri estratti vi sia il numero N sapendo che tra i 2 estratti vi è il numero 1.
(iii) Stabilire se i seguenti eventi sono indipendenti:
$A = \{$i 2 numeri estratti sono diversi$\}$,
$B = \{$almeno uno dei 2 numeri estratti è $N\}$.
(iv) Esaminare le risposte dei quesiti precedenti quando $N \to \infty$.

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \le x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Determinare $E(X)$.
(iii) Calcolare $P(X \le 3/2 \,|\, X > 1/2)$.

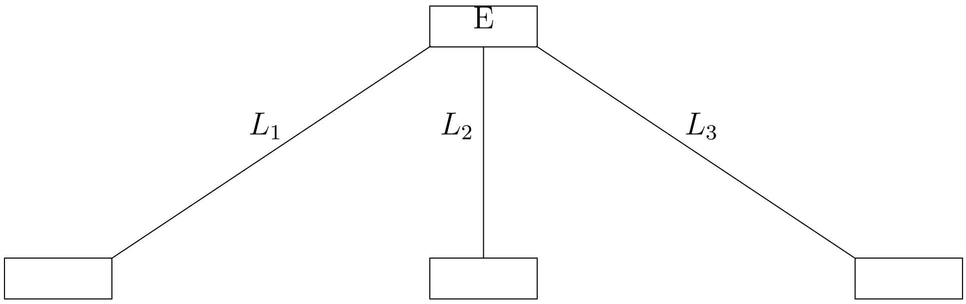
Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie di Bernoulli, con funzione di densità congiunta

$$p(x,y) = P(X = x, Y = y) = c \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-y-1|}; \qquad x = 0,1; \;\; y = 0,1.$$

(i) Calcolare la costante c.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti e identicamente distribuite.
(iii) Determinare il coefficiente di correlazione di (X,Y).
(iv) Calcolare $E(X-Y)$ e $Var(X-Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 22/1/2015

Esercizio 1 Un sistema prevede tre linee di comunicazione collegate ad un elaboratore centrale secondo il seguente schema:



Nello scegliere quale linea usare si lancia un dado; se il risultato è $k \in \{1, \ldots, 6\}$ allora si usa la linea L_j, dove $j = \lfloor k/3 + 1 \rfloor$. Inoltre, la linea L_j è funzionante con probabilità $j/4$, per $j = 1, 2, 3$, indipendentemente dalle altre.
(i) Calcolare la probabilità che la linea usata sia funzionante.
(ii) Se la linea usata è funzionante, qual è la probabilità che la linea usata sia la linea L_j (per $j = 1, 2, 3$)?
(iii) Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto (ii) sia 1.

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x-1)^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare $E(X)$.
(iii) Determinare il quantile superiore ξ tale che $P(X > \xi) = 8/9$.

Esercizio 3 Un programma consiste di due moduli distinti. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di errori nel primo modulo ed Y la variabile aleatoria che descrive il numero di errori nel secondo modulo. Si supponga che X ed Y abbiano la seguente distribuzione congiunta

$x \backslash y$	0	1	2
0	p	$p/2$	$p/2$
1	$p/2$	p	p
2	$p/2$	p	$2p$

(i) Determinare i valori ammissibili di p.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti e identicamente distribuite.
(iii) Calcolare $Cov(X, Y)$, $E(X + Y)$ e $Var(X + Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 17/2/2015

Esercizio 1 Un vettore booleano di lunghezza 5 contiene 3 bit pari a **1** e 2 bit pari a **0**, distribuiti a caso. Un algoritmo esamina i bit del vettore uno per volta, e si ferma in corrispondenza del secondo bit pari a **1**.
(i) Qual è la probabilità che l'algoritmo si fermi al passo k-esimo ($1 \leq k \leq 4$)?
(ii) Qual è la probabilità che il bit successivo al secondo **1** sia pari a **1**?
(iii) Se il bit successivo al secondo **1** è pari a **1**, qual è la probabilità che l'algoritmo si sia fermato al passo k-esimo ($1 \leq k \leq 4$)?
(iv) Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto (iii) è pari a 1.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria normale di media $\mu = -1$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
(i) Posto $A = \{X + 2 > 0\}$ e $B = \{2 - X > 0\}$, stabilire se tali eventi sono indipendenti oppure se sono correlati positivamente o negativamente.
[Teniamo presente che se $P(A|B) > P(A)$ allora gli eventi A e B sono correlati positivamente; se $P(A|B) < P(A)$ allora sono correlati negativamente.]
(ii) Posto $Y = 1 - 2X$, ricavare $Cov(X, Y)$.

Esercizio 3 Un esperimento consiste nel lanciare a caso 3 monete non truccate. Sia X il numero di volte che esce testa, e sia Y la lunghezza della più lunga sottosequenza contenente risultati identici.
(i) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e Y.
(ii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iv) Determinare $P(X = Y)$ e $P(X \leq 2, Y > 1)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 16/4/2015

Esercizio 1 Si consideri una sequenza di n bit casuali, con $n \geq 4$, tali che ognuno indipendentemente dagli altri assuma valore **1** o **0** con probabilità 1/2. Posto

$A = \{$almeno 1 dei primi 3 bit assume valore **1**$\}$,

$B = \{$il primo e l'ultimo bit assumono stesso valore$\}$,

Stabilire se ognuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

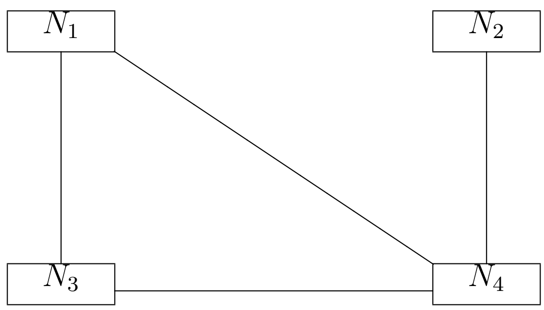
(i) A e B sono eventi necessari;
(ii) A e B sono eventi indipendenti;
(iii) $P(A \cup B) - P(\overline{B} \mid A) < 1/2$;
(iv) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \mid B) < 1/2$.

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ \dfrac{x}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(i) Ricavare la densità di probabilità di X, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare il valore atteso $\mu = E(X)$ e la varianza $\sigma^2 = Var(X)$.
(iii) Determinare il valore di h tale che $P(|X - \mu| < h) = 5/8$.

Esercizio 3 Si consideri il seguente grafo:



Supponiamo che in ciascuno dei 4 nodi si generi un bit a caso; ovvero ognuno dei 4 bit può assumere valore **0** o **1** con probabilità 1/2 indipendentemente dagli altri. Consideriamo la variabile aleatoria bidimensionale (X, Y), dove X denota quanti sono gli archi concordanti (diciamo che un arco è concordante se i bit dei 2 nodi su cui insiste sono uguali) e

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se almeno 2 bit sono pari a } \mathbf{1}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Stabilire se X e Y sono indipendenti oppure positivamente (o negativamente) correlate.
(ii) Determinare $P(X = Y)$, $P(X \geq 2, Y \geq 1)$ e $P(X \geq 2, Y \geq 1 \mid X \neq Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 25/6/2015

Esercizio 1 Un canale di trasmissione è soggetto ad errore nel senso che ogni volta che si trasmette un bit, indipendentemente dalle altre trasmissioni, questo può essere modificato con la probabilità indicata nella seguente tabella:

bit trasmesso	bit ricevuto	probabilità
0	**0**	0,7
0	**?** (errore di tipo A)	0,2
0	**1** (errore di tipo B)	0,1
1	**0** (errore di tipo B)	0,2
1	**?** (errore di tipo A)	0,2
1	**1**	0,6

(i) Calcolare la probabilità che trasmettendo la sequenza binaria **001**
– si verifichi un solo errore, di tipo A,
– si verifichi un solo errore, di tipo B,
– si verifichi un solo errore, di tipo qualsiasi.
(ii) Se nel trasmettere la sequenza **001** si è verificato un solo errore, di tipo qualsiasi, qual è la probabilità che l'errore si sia verificato nella trasmissione del terzo bit?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria avente valore medio e varianza

$$E(X) = 3{,}5; \qquad Var(X) = 6{,}25.$$

Posto $Y = X - 1$,
(i) determinare $\mu = E(Y)$ e $\sigma^2 = Var(Y)$;
(ii) calcolare $P(|Y - \mu| < \sigma)$ e $P(Y > \sigma)$
– nel caso in cui Y ha distribuzione esponenziale;
– nel caso in cui Y ha distribuzione normale.

Esercizio 3 Un esperimento consiste nel lanciare a caso 4 monete non truccate. Sia X il numero di volte che esce testa, e sia

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se solo nel secondo lancio esce un risultato uguale a quello del primo} \\ 2, & \text{se solo nel terzo lancio esce un risultato uguale a quello del primo} \\ 3, & \text{se solo nel quarto lancio esce un risultato uguale a quello del primo} \\ 0, & \text{se non si verifica nessuno dei casi precedenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e Y.
(ii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iv) Determinare $P(X \neq Y)$ e $P(X \geq 2, Y < 2)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 14/7/2015

Esercizio 1 Nell'archivio di una banca dati sono presenti 2 cartelle, ognuna delle quali contiene 8 file, di cui 6 pubblici e 2 riservati. Da ogni cartella si estraggono 2 file a caso (senza reinserimento).
(i) Calcolare la probabilità che i 4 file estratti siano tutti pubblici.
(ii) Calcolare la probabilità che almeno uno dei 4 file estratti sia riservato.
(iii) Calcolare la probabilità che tra i 4 file estratti vi sia un solo file riservato.
(iv) Calcolare la probabilità che tra i 4 file estratti vi sia un solo file riservato, sapendo che almeno uno dei 4 file estratti è riservato.

Esercizio 2 Un programma consiste di 2 moduli distinti. Nel primo modulo è presente un errore con probabilità 1/5, e non sono presenti errori con probabilità 4/5. Nel secondo modulo, indipendentemente dal primo, è presente un errore con probabilità 1/4, e non sono presenti errori con probabilità 3/4. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero totale di errori presenti nel programma.
(i) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare il valore medio μ e la deviazione standard σ di X.
(iii) Determinare $P(|X - \mu| > \sigma)$.

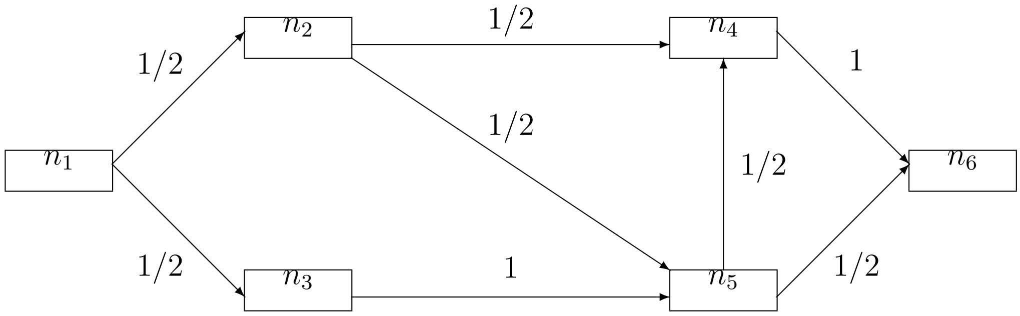
Esercizio 3 Sia (X, Y) la variabile aleatoria doppia discreta avente funzione di probabilità

$$p(x, y) = c\,|x - y|, \qquad x = 0, 1, 2 \qquad y = 0, 1, 2.$$

(i) Ricavare c.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iv) Calcolare $E(X - Y)$ e $Var(X - Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 4/9/2015

Esercizio 1 Si consideri la seguente rete, costituita da 6 nodi ($n_1, \ldots, n_6$) e 8 archi orientati:



Un messaggio viene trasmesso dal nodo n_1 al nodo n_6 secondo il seguente protocollo:
• se da un nodo si dirama un unico arco in uscita (ad esempio da n_3 a n_5), allora il messaggio viene trasmesso direttamente su tale arco;
• se da un nodo si diramano due archi in uscita (ad esempio da n_1 a n_2, e da n_1 a n_3), allora il messaggio viene trasmesso su uno dei due archi a seguito dell'esito del lancio di una moneta (indipendentemente dagli altri lanci).

Pertanto su ogni arco della rete è indicata la probabilità che un messaggio giunto al nodo in ingresso sia trasmesso su di esso.
(i) Individuare i 5 possibili percorsi da n_1 a n_6, denotati con $\pi_1, \ldots, \pi_5$ (ad esempio $\pi_1 = [n_1, n_2, n_4, n_6]$), e calcolare la probabilità che il messaggio sia trasmesso su ciascun percorso.
(ii) Per $k = 1, \ldots, 5$ valutare $P(N_k) = \sum\limits_{i: N_k \in \pi_i} P(\pi_i)$, con $N_k =$"il messaggio transita per n_k".
(iii) Sapendo che il messaggio è passato per n_4 qual è la probabilità che sia passato per n_3?
(iv) Stabilire se gli eventi N_3 e N_4 sono indipendenti.

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria continua che descrive il tempo di completamento (in minuti) di un task, avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} x/100, & 0 \le x < 10, \\ 1/10, & 10 \le x < 15, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la funzione di distribuzione di X, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare il valore atteso di X.
(iii) Se il task non è stato completato nei primi 6 minuti, qual è la probabilità che si completi nei successivi 6 minuti?

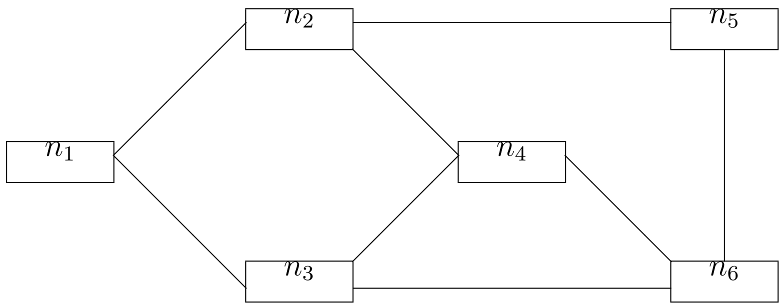
Esercizio 3 Un esperimento consiste nel lanciare una moneta 4 volte a caso. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di volte che esce testa. Sia Y la variabile aleatoria che descrive il numero di variazioni nei risultati riscontrati.
(i) Ricavare la distribuzione congiunta di (X, Y), e le distribuzioni marginali.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare la covarianza di (X, Y) e $P(Y > 1 \,|\, X > 1, Y > 0)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 6/11/2015

Esercizio 1 Da un'urna contenente 90 biglie numerate da 1 ad 90 se ne estraggono due a caso senza reinserimento.
(i) Calcolare la probabilità che la biglia numero 90 non sia tra le due estratte.
(ii) Calcolare la probabilità che la biglia numero 90 non sia tra le due estratte sapendo che la biglia numero 1 è estratta.
(iii) Cosa cambia se i quesiti (i) e (ii) si riferiscono al caso di estrazioni con reinserimento?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria tale che $Var(X) = 1$; calcolare $P(X > 3 \,|\, X > 2)$ nei seguenti casi:
(i) X ha distribuzione esponenziale;
(ii) X ha distribuzione normale di valore atteso $E(X) = 1$;
(iii) X è uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, b)$;
(iv) X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p \in (0, 1)$.

Esercizio 3 Si consideri il problema che consiste nella scelta a caso di 2 nodi del seguente grafo.



Indichiamo con α e β i gradi dei 2 nodi scelti. (Ricordiamo che il grado di un nodo è il numero di archi connessi ad esso.) Consideriamo le variabili aleatorie

$$X = \alpha + \beta, \qquad Y = |\alpha - \beta|.$$

(i) Ricavare la distribuzione congiunta di (X, Y), e le distribuzioni marginali.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 7/1/2016

Esercizio 1 La centrale operativa dell'Ufficio di Protezione Civile delle province di Avellino e Salerno può ricevere richieste d'intervento dalle città di Salerno, Avellino, Atripalda e Mercato San Severino. La richiesta d'intervento di ciascuna città è indipendente da quella delle altre. La probabilità che la centrale riceva richieste di intervento (nell'intervallo di tempo di un minuto) dalla città di Salerno è 0,8, da Mercato San Severino 0,3, da Avellino 0,5 ed infine da Atripalda 0,05.
(i) Qual è la probabilità che la richiesta d'intervento arrivi esattamente da una città nell'intervallo di tempo di un minuto?
(ii) Qual è la probabilità che la richiesta d'intervento arrivi da non più di due città nell'intervallo di tempo di un minuto?
(iii) Sapendo che la centrale operativa ha ricevuto la richiesta d'intervento da esattamente una città, qual è la probabilità che sia giunta dalla città di Mercato San Severino?

Esercizio 2 Sette terminali numerati di un sistema interattivo sono collegati da una linea di comunicazione ad un computer centrale. Di questi, esattamente quattro sono pronti a trasmettere un messaggio (stato **ON**), e la distribuzione di tali quattro terminali tra i sette è uniforme. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di terminali interrogati (in ordine dal n.1 al n.7) prima di trovare il primo terminale nello stato **ON**.
(i) Ricavare la distribuzione di probabilità di X.
(ii) Determinare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare valore medio e varianza di X.
(iv) Posto $Y = 1/X$, determinare $E(Y)$.

Esercizio 3 Si consideri la variabile aleatoria doppia (X, Y) avente la seguente funzione di probabilità congiunta

$x \backslash y$	0	1	2
0	1/8	$1/2 - p$	$p - 1/8$
1	0	1/8	$2p - 1/8$

(i) Determinare i valori ammissibili di p.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare $Cov(X, Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 27/1/2016

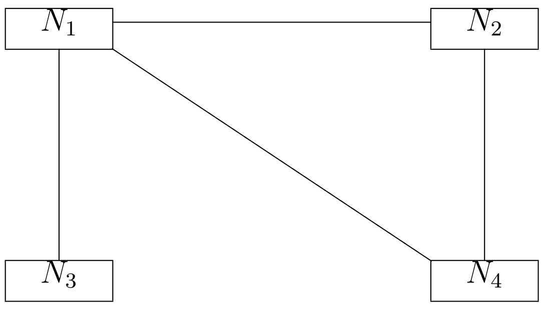
Esercizio 1 Un vettore booleano di lunghezza 6 contiene 3 bit pari a **1** e 3 bit pari a **0**, distribuiti a caso. Un algoritmo esamina i bit del vettore uno per volta, e si ferma in corrispondenza del secondo bit pari a **1**.
(i) Qual è la probabilità che l'algoritmo si fermi al passo k-esimo ($2 \leq k \leq 5$)?
(ii) Qual è la probabilità che il bit successivo al secondo **1** sia pari a **0**, sapendo che l'algoritmo si ferma al passo k-esimo ($2 \leq k \leq 5$)?
(iii) Qual è la probabilità che il bit successivo al secondo **1** sia pari a **0**?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4}(3-x), & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(i) Ricavare la densità di probabilità di X, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Determinare il valore atteso $\mu = E(X)$.
(iii) Calcolare $P(X > 1 \,|\, X > 1/2)$.
(iv) Calcolare $P(Z > 1 \,|\, Z > 1/2)$, dove Z è una variabile aleatoria normale standard.

Esercizio 3 Si consideri il seguente grafo, dove ciascuno dei 4 nodi è attivo o non attivo con probabilità 1/2, indipendentemente dagli altri. Sia X il numero di nodi attivi, e sia Y il numero di archi del grafo che insistono su 2 nodi entrambi attivi.



(i) Calcolare la distribuzione congiunta $P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare $P(X = Y)$ e $E[(X - Y)^2]$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 10/2/2016

Esercizio 1 Si consideri una sequenza di n bit casuali, con $n \geq 2$, tali che ognuno indipendentemente dagli altri assuma valore **1** o **0** con probabilità 1/2. Poniamo

$A = \{$almeno 1 bit assume valore **1**$\}$,

$B = \{$i primi 2 bit assumono stesso valore$\}$.

(i) Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ e $P(A \cap B)$.
(ii) Stabilire se esiste un valore di $n \geq 2$ per cui A e B sono indipendenti.
(iii) Calcolare $P(A \cup B)$ e $P(\overline{A} \cup B)$.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - c\,x & \text{per } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Derminare il valore della costante c.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di X, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare $E(X)$.
(iv) Calcolare

$$P\left(X > \frac{1}{4} \,\Big|\, X \leq \frac{1}{2}\right).$$

Esercizio 3 Si consideri l'esperimento che consiste nell'effettuare 3 estrazioni (senza reinserimento) da un'urna contenente 3 biglie bianche e 3 biglie nere. Sia X il numero di volte che esce una biglia nera, e sia Y la variabile aleatoria così definita:

$$Y = \begin{cases} k & \text{se esce una biglia bianca per la prima volta all'estrazione } k\text{-esima} \\ 0 & \text{se non esce mai una biglia bianca.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la funzione di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Calcolare la covarianza di (X, Y) e commentare il risultato ottenuto. In particolare, cosa si può dire sull'indipendenza di (X, Y)?
(iii) Determinare $P(X = x \,|\, Y = 1)$ per $x = 0, 1, 2, 3$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 5/4/2016

Esercizio 1 Da un'urna che contiene 5 biglie numerate da 1 a 5 si effettuano 3 estrazioni con reinserimento. Denotando con w_1, w_2 e w_3 i numeri estratti,
(i) calcolare la probabilità che sia $w_1 < w_2 < w_3$;
(ii) calcolare la probabilità che sia $w_1 = k$ (per $k = 1, 2, 3$) sapendo che $w_1 < w_2 < w_3$;
(iii) verificare che la somma delle 3 probabilità calcolate al punto (ii) è 1.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua che descrive il tempo di completamento di una procedura, avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(i) Determinare la densità $f(x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Supponiamo che si consegua una vincita pari a $V(X) = X + 1$ se il tempo di completamento della procedura è minore di 1, altrimenti non si vince nulla, ossia $V(X) = 0$. Valutare la vincita attesa $E[V(X)]$.
(iii) Stabilire per quali valori di $x \geq 0$ sussiste la seguente relazione:

$$P(X > 2x \,|\, X > x) \geq P(X > x).$$

Esercizio 3 Nell'esperimento che consiste nel generare a caso una sequenza di 4 bit, sia X il numero di bit pari a **1**, e sia $Y = 1$ se la sequenza è palindroma, $Y = 0$ altrimenti.
(i) Determinare la funzione di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iv) Valutare $P(X + Y \leq 1 | X + Y \leq 3)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 27/6/2016

Esercizio 1 Un esperimento consiste nello scegliere a caso una tra 2 monete (M_1 e M_2); M_1 non è truccata, mentre M_2 è truccata (lanciando M_2 esce testa con probabilità 2/5). La moneta scelta viene lanciata per 3 volte. Se nei 3 lanci esce testa 2 volte e croce 1 volta,
(i) qual è la probabilità che la moneta lanciata sia M_1?
(ii) qual è la probabilità che la moneta lanciata sia M_2?

Esercizio 2 In un gioco si lancia un dado per 3 volte. Si vincono k euro se esce un numero pari per la prima volta al lancio k-esimo ($k = 1, 2, 3$); si perdono 2 euro se non esce mai un numero pari. Indicando con X la variabile aleatoria che descrive la vincita complessiva, ricavare
(i) la funzione di probabilità $f(x) = P(X = x)$,
(ii) la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico,
(iii) la vincita attesa $E(X)$ e la deviazione standard σ_X.

Esercizio 3 Da una lista contenente 4 nominativi di impiegati, 5 nominativi di operai e 3 nominativi di dirigenti, si estraggono a caso 3 nomi (senza reinserimento). Indicando con X il numero di impegati estratti e con Y il numero di operai estratti,
(i) ricavare la funzione di probabilità congiunta $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ e le funzioni di probabilità marginali $f_X(x) = P(X = x)$ e $f_Y(y) = P(Y = y)$,
(ii) determinare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$,
(iii) calcolare $P(X < 2 \,|\, X + Y \leq 2)$ e $P(X + Y \leq 2 \,|\, X \leq 2)$.