

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

I prova intercorso - Classe 1 (resto 0)

20/5/2022

Esercizio 1 Un dispositivo effettua un controllo automatico su coppie di dati (α, β) ricevuti da una centralina di rilevazione. Dalle precedenti osservazioni risulta che un dato di tipo α presenta errore con probabilità 0,1. Inoltre, se un dato di tipo α presenta errore, allora il dato di tipo β presenta errore con probabilità 0,3. Invece, se un dato di tipo α non presenta errore, allora il dato di tipo β presenta errore con probabilità 0,2.

- (i) Calcolare la probabilità che un dato di tipo β presenti errore.
- (ii) Calcolare la probabilità che un dato di tipo α presenti errore sapendo che il dato di tipo β presenta errore.
- (iii) Stabilire se gli eventi “il dato di tipo α presenta errore” e “il dato di tipo β presenta errore” sono indipendenti o positivamente correlati o negativamente correlati.
- (iv) Supponendo che in una settimana il dispositivo effettui 7 controlli indipendenti, qual è la probabilità che in una settimana si presenti almeno una volta un errore in un dato di tipo α ?

Esercizio 2 Una procedura effettua la generazione a caso di 4 numeri a_1, a_2, a_3, a_4 con la seguente regola: ciascun numero a_k , indipendentemente dagli altri, viene scelto a caso (ossia uniformemente) nell'insieme dei primi k numeri interi positivi, quindi $a_k \in \{1, 2, \dots, k\}$ per $k = 1, 2, 3, 4$.

- (i) Determinare la cardinalità dello spazio campionario.
- (ii) Indicando con X la variabile aleatoria discreta che descrive quante volte la procedura genera un numero uguale a 1, ricavare la funzione di probabilità $p(x) = P(X = x)$, per $x = 1, 2, 3, 4$.
- (iii) Calcolare il valore atteso e la varianza di X .
- (iv) Valutare le seguenti probabilità: $P(X \leq 2)$, $P(X > 1)$, $P(X > 2 | X > 1)$.

Esercizio 3 Il tempo di durata dell'esecuzione di una procedura è descritto da una variabile aleatoria continua X avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(x+1)^2}, & x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (i) Determinare il valore di c .
- (ii) Ricavare la funzione di distribuzione di $F(x) = P(X \leq x)$.
- (iii) Calcolare la mediana di X , ossia il valore m tale che $F(m) = 1/2$.
- (iv) Se si effettuano 4 esecuzioni indipendenti della procedura, quanto vale la probabilità che esattamente due di esse abbiano durata maggiore di 1?

Esercizio 4 La variabile aleatoria doppia discreta (X, Y) ha funzione di probabilità congiunta indicata in tabella:

$x \setminus y$	0	1	2
0	1/8	p	1/8
1	1/8	$1/2 - p$	1/8

- (i) Determinare i valori ammissibili di p .
- (ii) Stabilire se vi sono valori di p tali che X e Y sono indipendenti.
- (iii) Ricavare il valore atteso e la varianza di X , ed il valore atteso e la varianza di Y .
- (iv) Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$ e commentare il risultato ottenuto.