2.4) Da un elenco di 10 impiegati, di cui 6 laureati e 4 diplomati, se ne selezionano 3 a caso.
(i) Calcolare la probabilità che almeno uno degli impiegati selezionati sia diplomato.
(ii) Calcolare la probabilità che gli impiegati selezionati siano tutti diplomati.
(iii) Calcolare la probabilità che tra i 3 impiegati selezionati vi sia un solo diplomato.

10 IMPIEGATI $\begin{cases} 6 \text{ LAUREATI} \\ 4 \text{ DIPLOMATI} \end{cases}$ $k=3$ IMP SELEZIONATI

A = "ALMENO 1 impiegato è diplomato" $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$\bar{A}$ = "I 3 impiegati scelti sono laureati"

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{6,3}}{C_{10,3}} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{6!}{3!3!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{\cancel{6}^{1} \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{\frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{6}$$

* ES URNA CON 10 PALLINE 4 ROSSE
ESTRAGGO 5 6 BIANCHE

P("PRIME 3 PALLINE ESTRATTE SONO R")

$$= \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}$$

B = "scegliamo 3 impiegati diplomati"

$$P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4!}{3!1!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8}} = \frac{1}{30}$$

C = "2 IMPIEGATI LAUREATI, 1 DIPLOMATO"

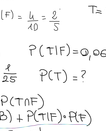
$$P(C) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{3}}{\frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}$$

2.9) Supponiamo che l'invio di un messaggio su di una linea di comunicazione avvenga con trasmissione sincrona nel 70% dei casi, e con trasmissione asincrona nel 30% dei casi. Inoltre, la trasmissione avviene senza errori nel 90% dei casi, e con errori nel 10% dei casi. La probabilità che una trasmissione sia sincrona e non dia errori è pari a 0.65. Quanto vale la probabilità che una trasmissione sia sincrona e presenti errori?

A = "TRASMISSIONE ASINCRONA" $\bar{A}$ = "TRASMISS. SINCRONA"

$P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ $P(\bar{A}) = \frac{7}{10}$ E = "TRASMISS. CON ERRORI"
$\bar{E}$ = " " SENZA " "

$P(E) = \frac{1}{10}$ $P(\bar{E}) = \frac{9}{10}$ $P(A \cap \bar{E}) = 0{,}65$
$P(\bar{A} \cap \bar{E}) = ?$



$\bar{A} = (\bar{A} \cap E) \cup (\bar{A} \cap \bar{E})$

$P(\bar{A} \cap \bar{E}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap E)$

$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap E) + P(\bar{A} \cap \bar{E})$
$\Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{E}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap E)$

$\bar{E} = (E \cap A) \cup (\bar{E} \cap A)$

$P(\bar{E}) = P(E \cap A) + P(E \cap \bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A} \cap E) = P(E) - P(E \cap A)$

$\Rightarrow P(\bar{A} \cap E) = P(A) - \left[P(E) - P(E \cap A) \right] = P(A) - P(E) + P(A \cap E)$
$= \frac{3}{10} - \frac{9}{10} + 0{,}65$
$= \frac{30}{100} - \frac{90}{100} + \frac{65}{100} = \frac{5}{100} = 5\%$

La Banca d'Italia si serve di due categorie di intermediari: banche (per il 60%) e finanziarie (per il 40%). Le statistiche mostrano che le banche hanno probabilità 0.04 di subire una truffa, mentre le finanziarie hanno probabilità 0.06 di subire una truffa. Qual è la probabilità che un intermediario scelto a caso subisca una truffa?

$P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $P(F) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ T = "truffa"

$P(T|B) = 0{,}04$ $P(T|F) = 0{,}06 = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$

$P(T|B) = \frac{P(T \cap B)}{P(B)}$ $P(T) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ $P(T) = ?$

$\Rightarrow P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$

$T = (T \cap B) \cup (T \cap F)$
$P(T) = P(T \cap B) \cup (T \cap F))$
$= P(T \cap B) + P(T \cap F)$

$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap F)$
$= P(T|B) \cdot P(B) + P(T|F) \cdot P(F)$
$= \frac{1}{25} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{25} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{125}$

LEGGE DELLE ALTERNATIVE

A evento $B_1, B_2, \dots, B_n$ ins. di alternative per l'evento A ("causa")
("effetto")

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Quesito 8
La Banca d'Italia si serve di due categorie di intermediari: banche (per il 60%) e finanziarie (per il 40%). Le statistiche mostrano che le banche hanno probabilità 0.04 di subire una truffa, mentre le finanziarie hanno probabilità 0.06 di subire una truffa. Se un intermediario scelto a caso subisce una truffa, qual è la probabilità che sia una banca?

$P(B) = \frac{3}{5}$ $P(F) = \frac{2}{5}$ $P(T|B) = \frac{1}{25}$ $P(T|F) = \frac{3}{50}$

$$P(B|T) = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{25} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{6}{125}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{125}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{1}{2}$$

TEOREMA DI BAYES

Evento A e $B_1, B_2, \dots, B_n$ insieme di alternative per A

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

Quesito 4
In un database vi sono 150 cartelle di utenti di un sistema di servizio, di cui 25 hanno priorità di 1° tipo e i rimanenti hanno priorità di 2° tipo. Inoltre, il 20% degli utenti che hanno priorità di 2° tipo sono iscritti al gruppo di controllo. In totale, 40 utenti sono iscritti al gruppo di controllo. Se si scelgono a caso due cartelle qual è la probabilità che almeno una di esse sia di un utente avente priorità di 1° tipo ed iscritto al gruppo di controllo?

150 CARTELLE 25 1° TIPO
125 2° TIPO

20% DI 125 = 25 ISCRITTI AL GRUPPO DI CONTROLLO CON PRIORITÀ DI 2° TIPO

A = "ALMENO 1 su 2 cartelle è del tipo 1 ∩ C"

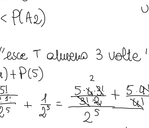
TOT. ISCRITTI AL GRUPPO DI CONTROLLO = 40

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$\bar{A}$ = "entrambe le cartelle estratte NON sono DEL TIPO 1 ∩ C"

2° TIPO = 125

15 CON PRIORITÀ
1° TIPO SONO NEL G.C.



$\Rightarrow$ NON SONO NEL GC. $= 25 - 15 = 10$

$|1 \cap C| = 135$

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{135}{2}}{\binom{150}{2}} = \frac{\frac{135!}{2!133!}}{\frac{150!}{2!148!}}$$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \dots$

Quesito 5
Se estraiamo 3 biglie a caso da un'urna che contiene 6 biglie bianche e 5 nere, qual è la probabilità che al più una sia bianca?

6 BIANCHE
5 NERE
11 BIGLIE 3 estrazioni

P("al più una biglia è bianca")
$= P$("3 biglie nere") $+ P$("1 bianca, 2 nere")

$$= \frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{11!}{3!8!}} + \frac{\frac{6!}{5!} \cdot \frac{5!}{3!2!}}{\frac{11!}{3!8!}} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\frac{11 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9}}{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\frac{11 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9}}{\cancel{2}}}$

$= \frac{2}{33} + \frac{4}{11} = \frac{14}{33}$

Quesito 3
Si lancia una moneta 5 volte. Sia A_2 l'evento che si ottenga se non testa almeno 2 volte, per $i = 2, 5$.
☐ A. $P(A_2) = P(A_5)$
☐ B. $P(A_2) > P(A_5)$
☐ C. $P(A_2) < C)$

☐ D. gli eventi considerati sono a 2 a 2 incompatibili
☐ E. nessuna delle risposte precedenti

A_2 = "esce testa almeno 2 volte"

A_5 = "esce testa almeno 2 volte"
$P(A_5) = 1 - P(\bar{A_5})$
$= 1 - P$("5 croce")
$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
$= 1 - \frac{1}{2^5}$

$\bar{A_5}$ = "esce testa 5 volte"
$P(\bar{A_5}) = \frac{1}{2^5}$

$P(A_2) > P(A_5)$ perché $P(A_2) = P($"esce testa 2 volte"
$\cup$ " ... 3 volte"
$\cup$ " ... 4 volte"
$\cup$ " ... 5 volte"
A_5

$A_5 \subset A_2$

$\Rightarrow P(A_5) < P(A_2)$

$P(A_3) = P($"esce T almeno 3 volte"$)$
$= P(3) + P(4) + P(5)$

$$= \frac{\frac{5!}{3!2!}}{2^5} + \frac{\frac{5!}{4!1!}}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{\frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} + \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} + 1}{2^5}$$

$D_{2,5}$

$$= \frac{16}{2^5} = \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2}$$