



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA

(86.54) REDES NEURONALES

2^{do} cuatrimestre 2024

Trabajo práctico N° 1

Septiembre de 2024

Alumno	Padrón	Correo electrónico
Gonzalez, Leonel	— # 108107 —	legonzalez@fi.uba.ar

Índice

1. Introducción	2
2. Conceptos fundamentales	2
2.1. Modelo de Hopfield	2
2.1.1. Entrenamiento de la red	2
2.1.2. Evaluación de la red	3
3. Desarrollo	3
3.1. Red para imágenes de 50x50	3
3.1.1. Evaluando la red	3
3.1.2. Estados espurios	5
3.2. Red para imágenes de 45x60	6
3.2.1. Evaluando la red	6
3.3. Red de 6 imágenes	8
3.4. Análisis estadístico	8
3.4.1. Capacidad estadística	8
4. Conclusiones	11

1. Introducción

En el presente trabajo se tiene por objetivo llevar a cabo la implementación de una red de Hopfield, analizar su proceso de aprendizaje y su capacidad para almacenar y recuperar los patrones enseñados. Para tal fin se obtuvieron patrones a partir de dos sets de imágenes BMP de distintos tamaños, en principio con redes distintas para procesar imágenes de tamaño específico, posteriormente se creó una red capaz de procesar ambos sets, rellenando los espacios vacíos con ceros para unificar los tamaños de los patrones que son las entradas de la red. Con el fin de evaluar las capacidades de la red se agregaron distorsiones a las imágenes originales, alterando el valor de algunos píxeles o eliminando partes de la imagen y luego contrastando los patrones recuperados con los originales.

Adicionalmente se realizó un estudio estadístico de las capacidades de la red, se le enseñó una serie de patrones pseudoaleatorios y se evaluó su precisión en la recuperación bajo determinadas cotas de error.

2. Conceptos fundamentales

2.1. Modelo de Hopfield

En este trabajo se desarrolló una red de Hopfield, la cual es un tipo de red neuronal con memoria asociativa, esto significa que la red es capaz de recuperar patrones almacenados en ella a partir de la presentación parcial o ruidosa de uno de los patrones los cuales le fueron enseñados, ya que la red buscará el patrón más cercano de los que conoce al patrón presentado en un proceso que se conoce como “asociación”, la red asocia la entrada recibida con uno de los patrones aprendidos y lo restaura. Esta red maneja estados binarios, donde los valores de cada una de sus neuronas pueden ser 1 o -1.

La red de Hopfield se caracteriza por presentar un conjunto de neuronas los cuales están completamente interconectadas entre sí, es decir, cada neurona está conectada con todas las demás, pero no hay conexiones de las neuronas consigo mismas, estas conexiones definen lo que se denomina la matriz de pesos de la red $W_{n \times n}$, en donde sus elementos se denotan como ω_{ij} y representan la conexión entre la i -ésima neurona con la j -ésima.

La red, además, presenta simetría en sus conexiones, siendo los pesos sinápticos que conectan a las neuronas j e i iguales.

$$\omega_{ji} = \omega_{ij}$$

Por lo tanto la matriz W será simétrica y su diagonal constará de ceros, ya que esto representa que no hay conexiones de las neuronas consigo mismas.

2.1.1. Entrenamiento de la red

Los patrones que la red aprende se incorporan a esta a partir de la matriz de pesos sinápticos, para ello se implementa la regla de Hebb la cual puede ser aplicada de forma asincrónica (a cada peso por separado) o sincrónica, para la forma asincrónica resulta:

$$\omega_{ij} = \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} \text{ para } i \neq j$$

donde ξ_i^{μ} es el elemento i del patrón μ mientras que en la forma sincrónica se aplica como:

$$W_{n \times n} = PP^{\top} - pI_{n \times n} \quad (1)$$

donde P es la matriz de patrones $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)_{n \times p}$, donde hay p patrones.

Aquellos patrones que la red aprende se comportan como puntos que minimizan la energía de la red, permitiendo la convergencia de la red.

2.1.2. Evaluación de la red

Para la actualización de las neuronas frente a una entrada dada, se presentan las opciones de actualización asincrónica, es decir, que se actualice una neurona a la vez, y la sincrónica, es decir, que se actualicen todas las neuronas a la vez. Para la actualización asincrónica el proceso se lleva a cabo como:

$$h_i = \sum_j \omega_{ij} x_j$$

donde x_i es el valor de actual de cada una de las neuronas que están conectadas a la neurona a actualizar.

Al valor obtenido se le aplica la función de activación signo definida como:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donde se obtiene la regla de actualización de la neurona como:

$$y_i = \text{sgn}(h_i)$$

Mientras que de la forma sincrónica la actualización de la neurona se realiza como:

$$h = W_{n \times n} X$$

donde se aplica la función de activación resultando:

$$Y = \text{sgn}(h)$$

3. Desarrollo

Una vez descritos los aspectos fundamentales de las redes se procede a su implementación, el lenguaje de programación elegido para dicho propósito es python.

Para la implementación se optó por desarrollar la red en el contexto de una clase, cuyos atributos serían la cantidad de neuronas que tendría la red, con una matriz con tantas filas y columnas como la cantidad de neuronas de la misma, dicha matriz fue denominada matriz de pesos.

Se definieron métodos de entrenamiento, predicción y de manejo de datos. Una vez creada la estructura del modelo de Hopfield, se instanciaron las distintas redes para llevar a cabo el análisis de los aspectos de la red.

3.1. Red para imágenes de 50x50

Para procesar imágenes de 50x50 se requirió que la red posea 2500 neuronas para aprender los valores de los 2500 bits que conforman las imágenes. Este set poseía 3 imágenes, las cuales se pasaron por un proceso de binarización, empleando uno de los métodos de la clase, en el que el blanco fue llevado a 1 y el negro a -1. Se empleó un método de entrenamiento sincrónico ajustando todos los pesos sinápticos al mismo tiempo de acuerdo a la ecuación (1), llegado a este punto, con la estructura de la red creada, se pasó al proceso de evaluación de la misma.

3.1.1. Evaluando la red

Para la evaluación de la red se le presentó una serie de patrones ruidosos y se verificó la convergencia de la red, para las primeras pruebas los patrones ruidosos fueron obtenidos a partir de los patrones originales tras ser editados con un software de edición apropiado, los resultados de la red se observan en la figura (1) donde la red logró converger apropiadamente a los patrones iniciales. Esta prueba permitió comprobar de forma simple la capacidad de la red para aprender patrones y ser capaz de recuperarlos bajo un nivel de distorsión bajo.

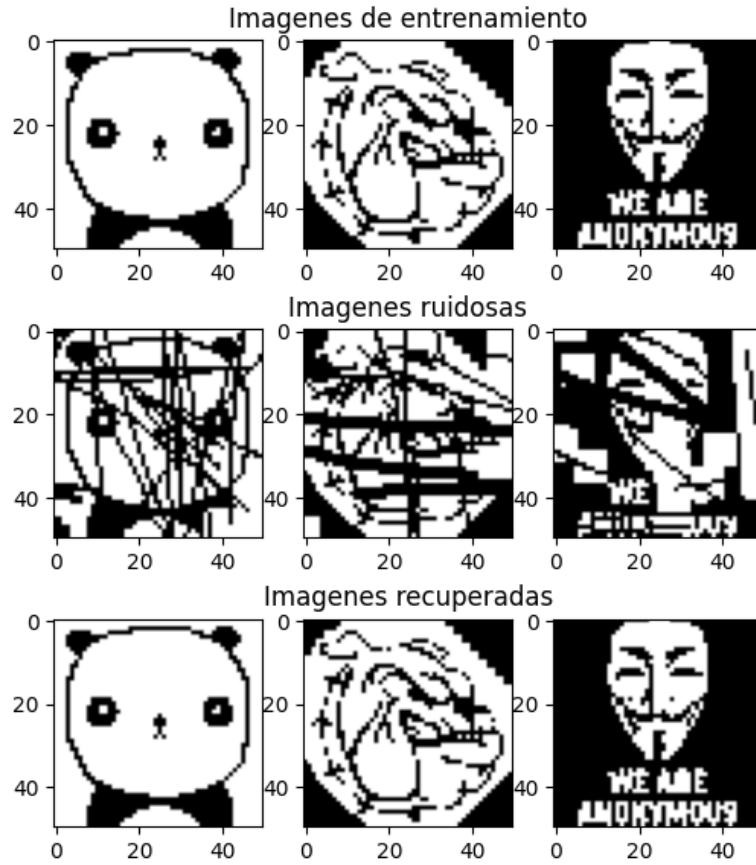


Figura 1: Resultados de entrenamiento de la primer red

Para realizar pruebas adicionales se observó la capacidad de respuesta de la red bajo distintos porcentajes de ruido, para ello se ideó un método de clase que cambia el valor de un porcentaje de los bits de la imagen, estos bits son elegidos de forma aleatoria, de esta manera se testearon los límites de la capacidad de convergencia de la red. En la figura (2) se observan los resultados de la red al evaluar distintos valores de ruido sobre la imagen del panda, siendo el porcentaje de ruido de las imágenes 25 %, 50 % y 75 % respectivamente. En el primer y segundo caso se logró recuperar satisfactoriamente la imagen mientras que en el último caso la red convergió a un patrón distinto que no fue enseñado explícitamente, estos patrones son denominados patrones espurios y se profundizará más en ellos en secciones posteriores.

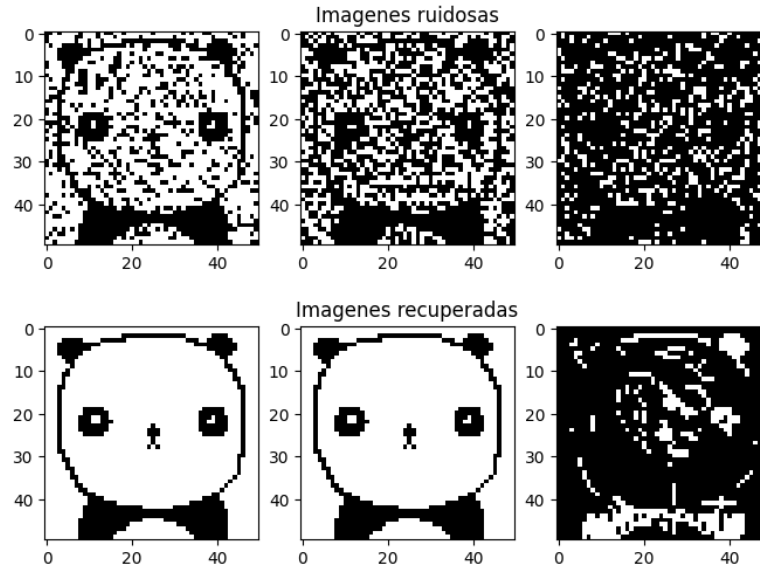


Figura 2: Test de tolerancia al ruido de la red

Adicionalmente se realizo una combinación lineal de patrones, el resultado obtenido se muestra en la figura(3) en este caso se obtuvo que la red no convergió a ninguno de los patrones sino que convergió a una combinación de todos, otro de los estados espurios, particularmente al complemento visto anteriormente.

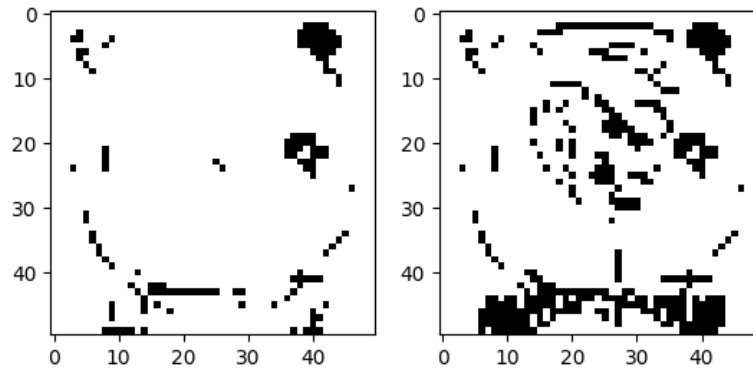


Figura 3: Combinación lineal de patrones

3.1.2. Estados espurios

Los estados espurios en una red de Hopfield son estados estables que no corresponden a ninguno de los patrones originalmente almacenados en la red. Estos estados espurios pueden aparecer durante el proceso de recuperación de un patrón, causando que la red converja hacia un estado incorrecto. Estos estados no deseados son un fenómeno común en redes de Hopfield cuando se almacenan varios patrones, especialmente si la red está sobrecargada con demasiados de ellos.

Existen múltiples tipos de patrones espurios, que pueden originarse tales como:

- **Patrón inverso:** Debido de la simetría de los pesos de la red el inverso de los patrones aprendidos actúa como estado estable.
- **Combinación de patrones:** La combinación lineal de los patrones almacenados es un estado estable de la red, produciéndose como patrones espurios.

- **Patrones aleatorios:** Cuando se excede la capacidad de la red al enseñarle una gran cantidad de ellos se aumenta la posibilidad de encontrar patrones aleatorios sin origen en ningún otro patrón.

El primer y segundo tipos de patrón espurio ya los observamos en la etapa de evaluación de la red, para altos niveles de ruido y para la combinación lineal de patrones. En la figura(4) se observan los estados espurios inversos obtenidos, para obtener estos estados se tomo los patrones de prueba que se probaron inicialmente, se invirtieron el valor de sus bits y se dejo a la red evolucionar, convergiendo a los patrones inversos buscados.

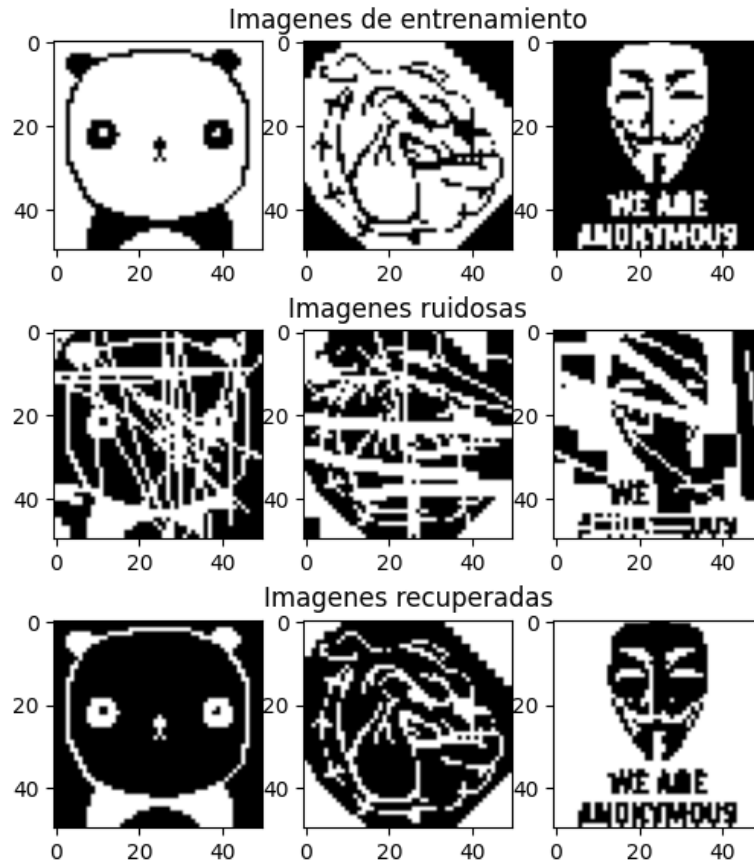


Figura 4: Estados espurios inversos

3.2. Red para imágenes de 45x60

La segunda red implementada es de 2700 neuronas, las necesarias para procesar las imágenes de este tamaño. Se siguió un proceso similar al realizado para la primer red.

3.2.1. Evaluando la red

Nuevamente se presentaron patrones con ruido obtenidos de distorsionar los patrones originales, en la figura(5) se observo una convergencia exitosa de la red a los patrones deseados.

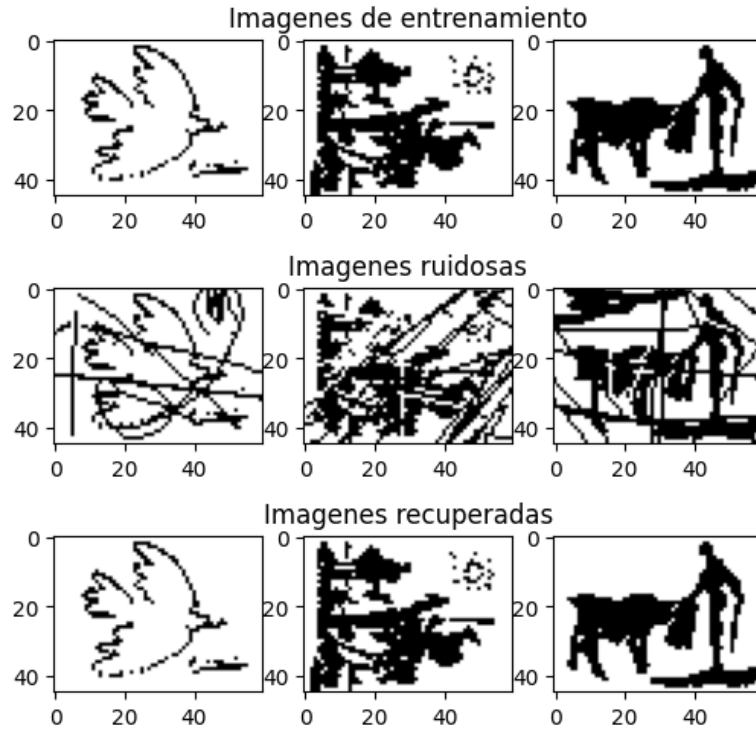


Figura 5: resultados de la red 2

Se realizó para uno de los patrones un agregado de ruido progresivo al igual que en la red anterior, el nivel de ruido agregado es de 25 %, 50 % y 75 % respectivamente, en este caso se observa que para un nivel de ruido del 75 % la red converge al inverso del patrón original, verificando que para elevados niveles de ruido la red tiende al valor espurio, debido a que la similitud con este es mayor que con el valor original.

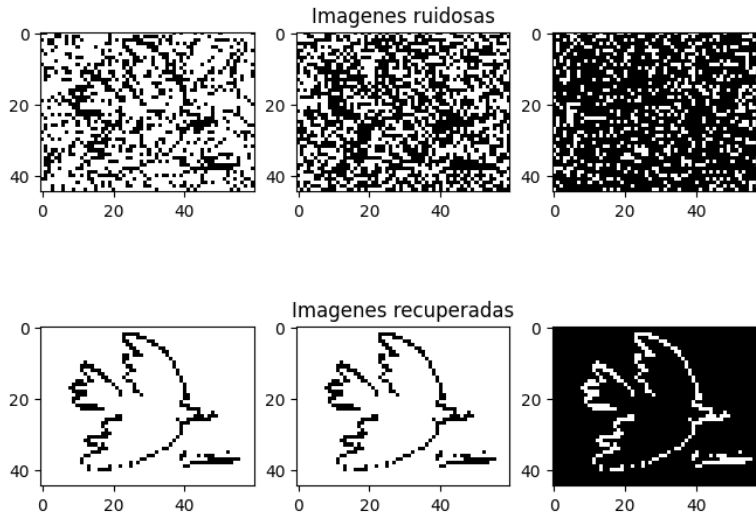


Figura 6: Tolerancia al ruido de la red 2

La segunda red implementada presentó un comportamiento comparable al de la primera red, siendo la principal diferencia entre estas el tamaño con las que fueron implementadas.

3.3. Red de 6 imágenes

La tercer red implementada es una red de 2700 neuronas, la cantidad necesaria para procesar las imágenes más grandes, para las imágenes que no tienen menos bits se realizo un relleno con ceros cuando se realizo la transformación a patrón desde la imagen.

Para este ultimo caso se observo que la red no aprendió apropiadamente todos los patrones, ya que el patrón referido a la paloma y al panda presentan múltiples imperfecciones, esto se puede atribuir a que se la red se encuentra sobrecargada, habiendo excedidos la cantidad total de patrones que es capaz de aprender, además de que los patrones en los que la red falla presentan cierta similitud en la distribución de píxeles blancos lo que puede entenderse como una correlación entre ambos casos, esta correlación puede afectar la capacidad de la predicción de la red, para profundizar en este ultimo punto se realizara un estudio estadístico del asunto.

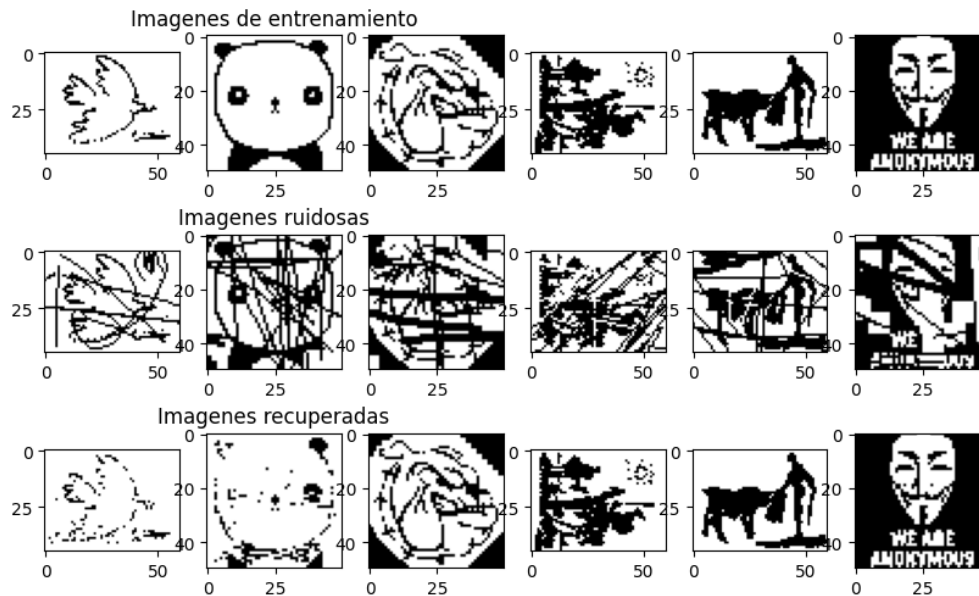


Figura 7: Resultados de la red 6

Debido a que esta red no aprende apropiadamente todos los patrones carece de sentido el realizar evaluaciones adicionales.

3.4. Análisis estadístico

Se realizo un análisis estadístico generando un conjunto de patrones binarios pseudoaleatorios, estos patrones le fueron presentados a la red para evaluar su capacidad de acuerdo a distintas propiedades, los patrones fueron creados con tantos elementos como neuronas poseía la red, además se empleo una distribución Bernoulli de probabilidad 0,5 para obtener dichos valores.

3.4.1. Capacidad estadística

La capacidad de la red en el contexto de una red de Hopfield se refiere a la cantidad máxima de patrones que la red puede almacenar y recuperar de manera confiable sin que se produzcan errores significativos. Esta capacidad está determinada por el número de neuronas en la red y tiene un límite definido para asegurar que los patrones almacenados puedan ser recuperados correctamente.

La capacidad de la red depende de multiples factores entre ellos:

- **Número de neuronas (N):** Cuantas más neuronas haya en la red, mayor será la cantidad de patrones que se pueden almacenar. Esto se debe a que cada neurona representa una

unidad de almacenamiento de información.

- **Correlación entre los patrones:** Si los patrones almacenados están muy correlacionados, la capacidad efectiva de la red disminuye, ya que se aumenta la probabilidad de confundir o mezclar los patrones almacenados.

Para realizar el primer análisis se realizaron patrones descorrelacionados, se establecieron múltiples cotas de error evaluar la red, estas cotas determinan cuantos errores estamos dispuestos a tolerar en los patrones obtenidos. El error de la red se obtiene como:

$$\text{Error} = \frac{\#errores}{N \cdot M}$$

donde se divide la cantidad total de errores en todos los patrones, por el producto de la cantidad de neuronas N y la cantidad de patrones aprendidos M . Para contabilizar los errores se colocó a la red un patrón conocido como entrada, se realizó una única actualización sincrónica de la red, y finalmente se contaron las diferencias del resultado con el patrón original.

En la tabla 1 se plasmaron los resultados esperados y los obtenidos para una red de 500 neuronas, los resultados obtenidos, se presenta la cantidad máxima de patrones que esta es capaz de almacenar para la cota indicada, además los valores de capacidades obtenidos presentan magnitudes similares con los valores teóricos esperados, las diferencias que se aprecian se pueden atribuir a la cantidad de neuronas empleadas, cuanto mayor sea el número de estas más cercano al comportamiento teórico se obtendrá será el resultado, también existe un componente de aleatoriedad en el proceso debido a la naturaleza del mismo.

P_{error}	p_{max}/N teórico	p_{max}/N obtenido	p_{max} obtenido
0,001	0,105	0,106	53
0,0036	0,138	0,146	73
0,01	0,185	0,192	96
0,05	0,37	0,368	184
0,1	0,61	0,61	305

Tabla 1: Resultados estadísticos

Tras realizar el estudio anterior, se realizó para una misma cota de error una evaluación de la cantidad de patrones que la red es capaz de almacenar, el comportamiento esperado es el de una función lineal creciente, ya que la capacidad para una misma cota tiene un valor teórico constante. En la figura (8) se presenta el comportamiento obtenido, se observa una clara tendencia lineal creciente cuya pendiente se corresponde con la capacidad para la cota de error de 0,001, sin embargo se observan múltiples oscilaciones estas, nuevamente, se deben al componente aleatorio del proceso.

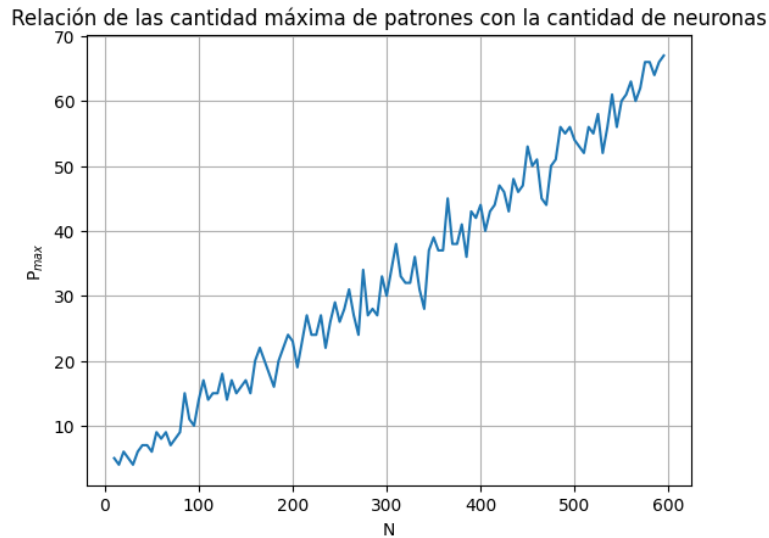


Figura 8: Aumento de los patrones en función de las neuronas

En el último estudio realizado se generaron patrones correlacionados, la correlación puede entenderse como una medida de la similitud de dos patrones para este análisis, los patrones con elevada correlación poseen pocas diferencias en sus valores. Para generar patrones correlacionados se parte de un patrón base, luego se modifica una cantidad de sus valores igual a:

$$\text{bits a cambiar} = (1 - \text{correlación deseada}) \frac{N}{2}$$

por lo que cuanto mayor sea la correlación menor será la cantidad de bits a cambiar, mas valores coincidirán entre un patrón y otro, el caso contrario se produce cuando se busca correlación baja, un cambio de muchos valores permitirá un valor de correlación bajo. Si se modificaran todos los valores del patrón se obtendría el inverso, entonces la correlación sería de modulo cercana a uno pero negativa, lo que no es lo deseado.

Una vez desarrollada una forma de obtener patrones correlacionados se procedió a evaluar para las distintas cotas la capacidad de la red en función de la correlación de los patrones, en la figura(9) se presenta el resultado obtenido, para las cotas que admiten mas error, es esperable que la capacidad en principio sea superior, pero en todos los casos para valores de correlación cercanos a 0.4 la capacidad decae prácticamente a cero, lo que implica que la red neuronal se confunde y comete más errores debido a la similitud entre los patrones.

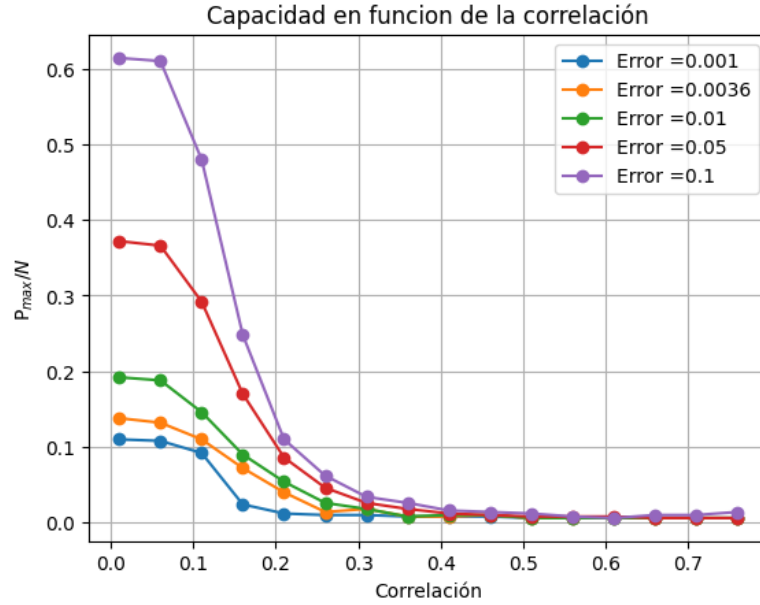


Figura 9: Variación de la capacidad con la correlación

No se realizó el estudio para una correlación de uno ya que este caso resulta trivial, para una correlación unitaria todos los patrones serán idénticos entre sí, por lo que no se le estarían presentando nuevos patrones a la red, y por tanto la probabilidad de cometer errores es nula.

4. Conclusiones

En este trabajo se cumplieron los objetivos previstos, realizando un análisis en profundidad de las características de la red y en su funcionamiento, se logró ser capaz de explicar los distintos comportamientos presentados por la red, entendiendo su capacidad de almacenamiento y recuperación, así como también sus limitaciones, los estados espurios que en ella se generan, que pueden afectar el comportamiento deseado de la misma siendo fuentes de error, también se comprendió la dependencia de la capacidad con la cantidad de neuronas, siendo la capacidad prácticamente independiente al mantenerse constante, así como también con la correlación de los patrones, siendo esto último una de las características que la red tiene mayor dificultad para manejar y de las que producen que la red incurra en un mayor error ya que para valores de correlación mayores a 0,2 la capacidad se reduce en gran medida, mientras que para 0,4 la capacidad se vuelve prácticamente nula.