

Capitolo 1

Modellazione

1.1 Equazioni del modello

Il sistema fisico, preso in considerazione per lo svolgimento della tesina, è quello mostrato in Figura 1.1. Il sistema è composto da un pistone di massa m_2 collegato al telaio attraverso una coppia molla-smorzatore di costanti k_2, b_2 . Il pistone è vincolato a muoversi senza attrito verticalmente. Su di esso è presente una guida che ingrana su una ruota dentata di massa trascurabile e di raggio nominale R . Tale ruota è collegata tramite una molla rotoidale di costante k_1 ad un'asta di lunghezza L e massa trascurabile, alla cui estremità è collegato un corpo di massa m_1 . L'asta è inoltre collegata al telaio attraverso uno smorzamento viscoso di costante b_1 . Il pistone è attuato tramite un motore che genera una forza verticale F .

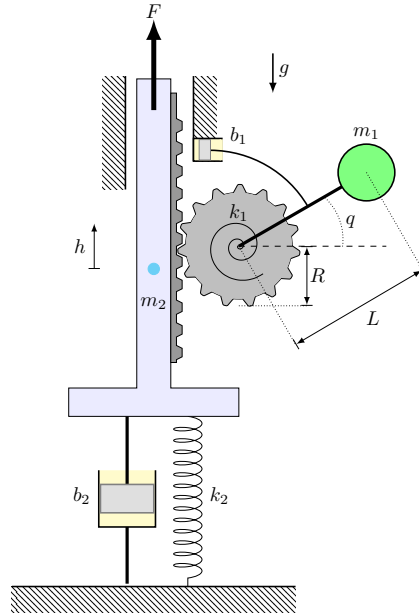


Figura 1.1: *Rappresentazione del sistema fisico*

Indicando con h lo spostamento verticale della massa m_2 e con q la rotazione dell'asta rispetto alla direzione orizzontale (positiva in senso antiorario), e considerando che per $h = 0$ e $q = 0$ entrambe le molle sono a riposo, le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$\begin{cases} m_1 L^2 \ddot{q} &= -b_1 \dot{q} - k_1 \left(\frac{h}{R} + q \right) - g L m_1 \cos(q) \\ m_2 \ddot{h} &= -b_2 \dot{h} - \frac{k_1}{R} \left(\frac{h}{R} + q \right) - k_2 h - m_2 g + F \end{cases} \quad (1.1)$$

Tabella 1.1: Variabili e parametri del sistema

	Nome	Significato	Unità SI	Valore
Variabili	q	Angolo asta	$[rad]$	\sim
	\dot{q}	Velocità angolare asta	$[rad/s]$	\sim
	\ddot{q}	Accelerazione angolare asta	$[rad/s^2]$	\sim
	h	Altezza pistone	$[m]$	\sim
	\dot{h}	Velocità pistone	$[m/s]$	\sim
	\ddot{h}	Accelerazione pistone	$[m/s^2]$	\sim
Ingresso				
	F	Forza verticale	$[N]$	\sim
Parametri				
	m_1	Massa della sfera	$[Kg]$	4
	m_2	Massa del pistone	$[Kg]$	1
	k_1	Costante elastica	$[N/m]$	0.5
	k_2	Costante elastica	$[N/m]$	0.5
	b_1	Costante smorzatore	$[Ns/m]$	0.5
	b_2	Costante smorzatore	$[Ns/m]$	0.5
	R	Raggio ruota dentata	$[m]$	0.5
	L	Lunghezza asta	$[m]$	1
	g	Accelerazione di gravità	$[m/s^2]$	9.81

1.2 Rappresentazione in forma di stato

Per ottenere la rappresentazione in forma di stato dalle equazioni (1.1), si definiscono i vettori delle variabili di stato e dell'ingresso di controllo:

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ h \\ \dot{h} \end{bmatrix} \quad u = F$$

Le variabili di stato rappresentano rispettivamente: l'angolo dell'asta (stato 1), la sua velocità angolare (stato 2), l'altezza del pistone nel (stato 3) e la sua velocità (stato 4). L'ingresso di controllo è la forza verticale erogata da un motore. Dopo semplici sostituzioni e messe in evidenza il sistema in forma di

stato risulta essere:

$$\begin{cases} \dot{x}(1) &= x(2) \\ \dot{x}(2) &= -\frac{b_1 x(2)}{L^2 m_1} - \frac{k_1}{L^2 m_1} \left(x(1) + \frac{x(3)}{R} \right) - \frac{g \cos(x(1))}{L} \\ \dot{x}(3) &= x(4) \\ \dot{x}(4) &= -\frac{b_2 x(4)}{m_2} - \frac{k_2 x(3)}{m_2} - \frac{k_1}{R m_2} \left(x(1) + \frac{x(3)}{R} \right) - g + \frac{u}{m_2} \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2.1 Linearizzazione

Le equazioni del modello presentano chiaramente delle non linearità. Al fine di proseguire con lo studio e determinare delle leggi di controllo occorre pertanto linearizzare il sistema. Ponendo a zero eventuali segnali di disturbo, è necessario determinare i punti di equilibrio del sistema, ovvero determinare il valore degli ingressi e il valore assunto dagli stati in modo tale che esso risulti come in configurazione mostrata in Figura 1.2.

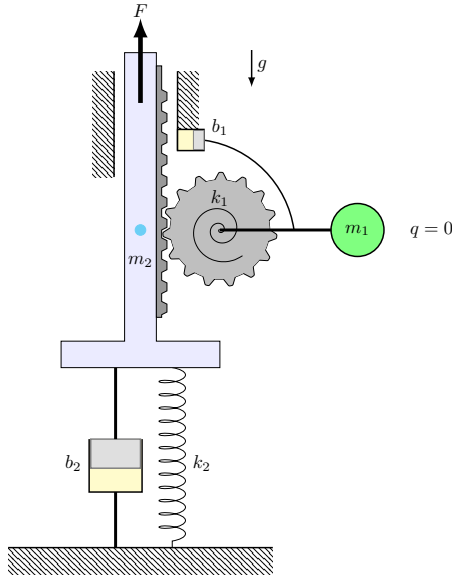


Figura 1.2: *Sistema in equilibrio*

Ponendo uguale a zero i termini che rappresentano le velocità e le accelerazioni nel sistema (1.1), risulta abbastanza banale il calcolo del punto di equilibrio, che risulta essere:

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g m_1 L \frac{R}{k_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_{eq} = m_2 g + \left(k_2 + \frac{k_1}{R^2} \right) x_{eq}\{3\}$$

Se assumiamo spostamenti angolari sufficientemente piccoli possiamo considerare:

$$\cos(q) \simeq 1$$

Dai calcoli troviamo che le matrici A e B linearizzate alla coppia di equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{L^2 m_1} & -\frac{b_1}{L^2 m_1} & -\frac{k_1}{RL^2 m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{Rm_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_2 R^2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D che completano il quartetto risultano essere:

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad D = [0]$$

1.2.2 Discretizzazione

Dopo aver linearizzato il sistema si procede con la sua discretizzazione. Di fondamentale importanza risulta essere la scelta di un opportuno tempo di campionamento T_s . Esistono numerose euristiche per valutare il tempo di campionamento, in particolare per questo progetto è stato scelto di valutarlo attraverso il calcolo del tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema (vedi grafico in Figura ??). Sappiamo valere che:

$$T_s \leq \frac{T_a}{40}$$

Essendo il tempo di assestamento del sistema $T_a = 0.77$, ne consegue che il tempo di campionamento dovrà risultare essere minore di $T_s \leq \frac{0.77}{40} = 0.019$. La scelta è $T_s = 0.01$.

1.2.3 Analisi di stabilità

Una volta ottenute le matrici a tempo discreto si passa alla valutazione della stabilità del sistema. Si ricordi che, un sistema lineare stazionario tempo discreto risulta asintoticamente stabile se e solo se gli autovalori della matrice A hanno tutti modulo minore di (teorema di Lyapunov ridotto). Gli autovalori associati alla matrice A sono:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.9982 \pm 0.0361i \\ 0.9979 \pm 0.0137i \end{bmatrix}$$

Il punto di equilibrio su cui il sistema è stato linearizzato è dunque localmente asintoticamente stabile. Sono state inoltre valutate le proprietà di raggiungibilità della coppia (A, B) e di osservabilità della coppia (A, C) . Il sistema risulta essere sia completamente raggiungibile, sia completamente osservabile.

Capitolo 2

Command Governor

Il Command Governor (o gestore del riferimento), indicato usualmente con la sigla CG, è un dispositivo non lineare che viene aggiunto ad un processo asintoticamente stabile al fine di risolvere problemi di inseguimento vincolato. È una particolare strategia di controllo predittivo le cui predizioni sono ricavate sulla base delle misure dello stato attuale dell'impianto e di un suo modello dinamico che permette di prevedere l'effetto delle possibili azioni di controllo. Tali predizioni vengono valutate secondo un qualche criterio o indice di qualità in modo da selezionare l'azione di controllo più appropriata.

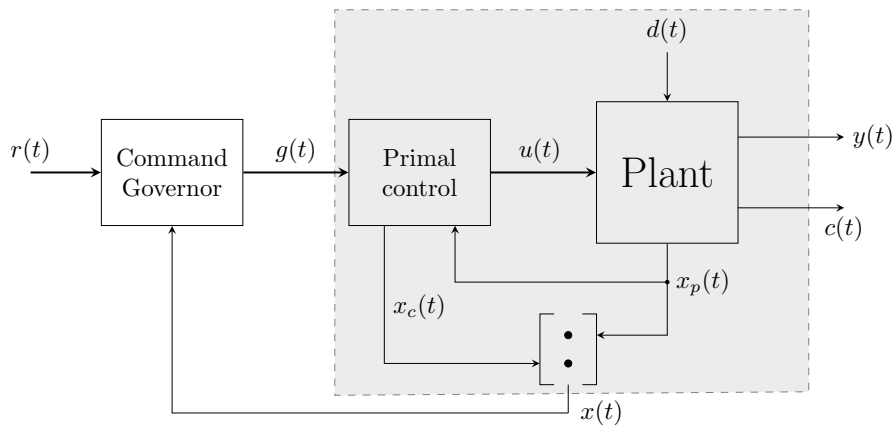


Figura 2.1: *Schema di controllo Command Governor*

Dallo schema in Figura 2.1 si evince la struttura del sistema di controllo, che è costituita da:

Plant: sistema fisico da controllare;

Primal controller: (*controllore primale* o *pre-compensatore*) è progettato in modo da rendere asintoticamente stabile l'impianto da controllare a ciclo aperto. Non influenza in alcun modo le prestazioni del CG e non interferisce con i vincoli;

Command Governor: ha il compito di correggere il segnale di riferimento in ingresso al modello esteso, garantendo il soddisfacimento dei vincoli.

Il modello esteso evidenziato nel riquadro verde in Figura 2.1, è il sottosistema costituito dal pre-compensatore e impianto. Lo stato $x(t)$ sarà uno stato esteso dovuto alla giustapposizione del processo e del controllore primale. Nel caso in cui i vincoli non vengono violati, allora accadrà che il segnale in uscita dal CG coinciderà esattamente con il segnale di riferimento originario:

$$g(t) \equiv r(t)$$

2.1 Controllore primale

Il controllore primale è un classico controllore LQ con effetto integrale a tempo discreto, che risolve il problema dell'asservimento con errore nullo per un segnale d'ingresso a gradino. Sarebbe stato possibile adottare anche altre strategie di controllo, come ad esempio l'uso di un regolatore standard PID. Inserire un effetto integrale nel modello esteso assicura che il sistema risulti *Offset-free*. Questa proprietà garantisce che a regime l'uscita asservirà perfettamente il riferimento; tuttavia non è un'assunzione decisiva, strettamente necessaria alla progettazione del gestore di riferimento. L'unica proprietà che deve essere garantita è l'asintotica stabilità del sistema. Lo schema generale di un controllore LQI è mostrato in Figura 2.2.

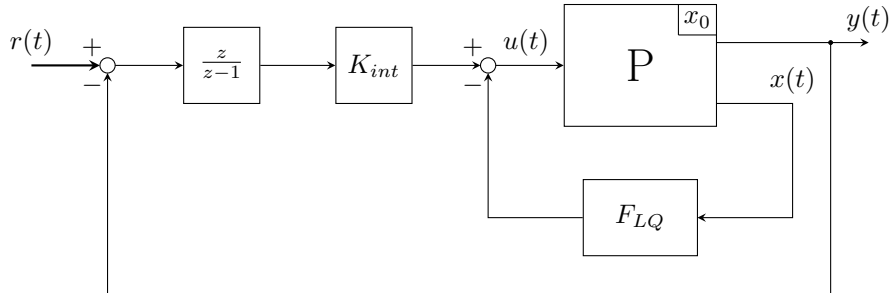


Figura 2.2: *Schema controllore primale*

La presenza del blocco $\frac{z}{z-1}$ introduce l'effetto integrale desiderato, ma anche un ulteriore stato che giustapposto con il vettore di stato in uscita dall'impianto costituirà lo stato esteso, come già spiegato in precedenza.

2.2 Simulazione

Al fine di procedere con la simulazione occorre definire quali siano i vincoli che il controllore deve soddisfare. Verranno inseriti vincoli geometrici sullo stato, in particolare sulla massima escursione angolare dell'asta e sulla velocità di rotazione della stessa, e un vincolo sul segnale attuatore, ovvero sulla forza massima e minima erogabile dal motore atta al moto verticale del pistone. I valori assunti dai vincoli sono riportati nella Tabella 2.1

$$q_{min} \leq q \leq q_{MAX}$$

$$\dot{q}_{min} \leq \dot{q} \leq \dot{q}_{MAX}$$

$$F_{min} \leq F \leq F_{MAX}$$

Tabella 2.1: Valore delle variabili vincolate

Variabili	Nome	Valore	Unità SI	Note
	q_{Max}	$2\pi/9$	$[rad]$	$+40^\circ$
	q_{min}	$-2\pi/9$	$[rad]$	-40°
	\dot{q}_{Max}	0.15	$[rad/s]$	
	\dot{q}_{min}	-0.15	$[rad/s]$	
	F_{Max}	20	$[N]$	
	F_{min}	-20	$[N]$	

Il segnale di riferimento scelto da fa asservire al modello è mostrato in Figura 2.3. La costruzione di tale segnale è del tutta arbitraria e non rappresenta necessariamente una reale configurazione di funzionamento dell'apparato meccanico in esame.

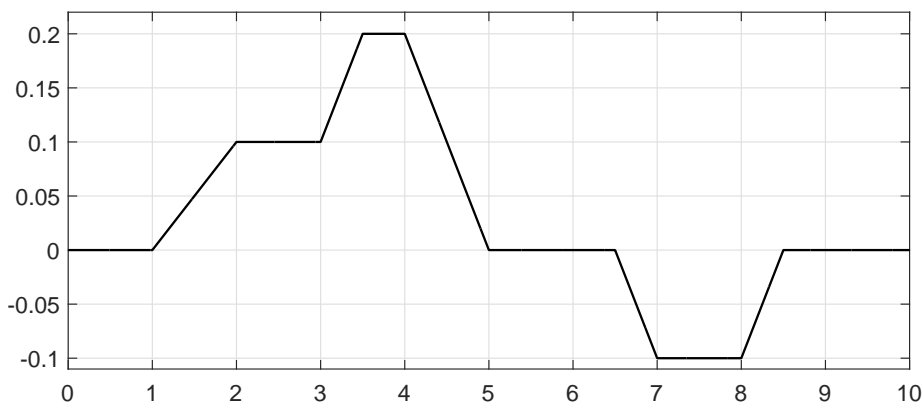


Figura 2.3: Segnale di riferimento da asservire

In Figura 2.4 è mostrato l'andamento che rappresenta l'angolo di inclinazione dell'asta. Nonostante i vincoli e le non linearità del sistema, la variabile asservita abbastanza fedelmente il riferimento originale. Grazie ad un efficace controllo garantito dal *Primal Controller* l'andamento complessivo non presenta sovrae-longazioni, per cui non si arriva mai a violare i vincoli. Inoltre il segnale di asservimento richiesto è ben al di sotto dei vincoli, per cui risulta, per queste scelte, omissibile il vincolo geometrico sull'angolo.

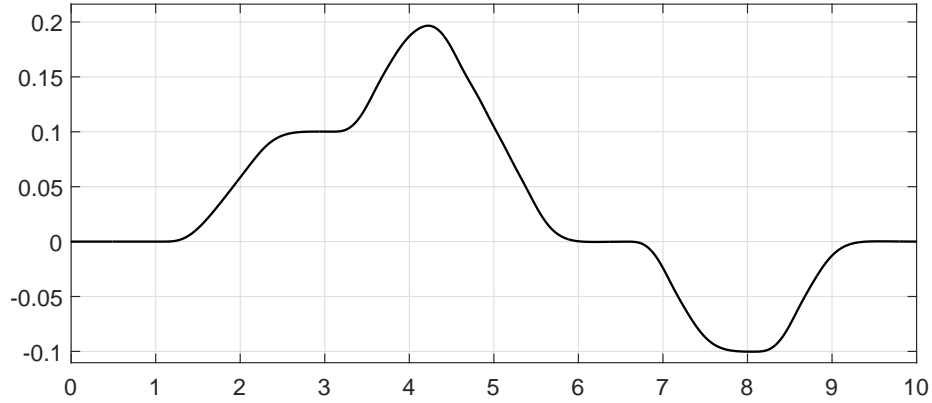


Figura 2.4: *Variabile di stato asservita*

In Figura 2.5 è mostrato l'andamento della variabile di stato che rappresenta la velocità angolare dell'asta. Come si nota, in più punti essa arriva a saturare il proprio valore, segno che in quegli istanti di tempo i vincoli venivano violati.

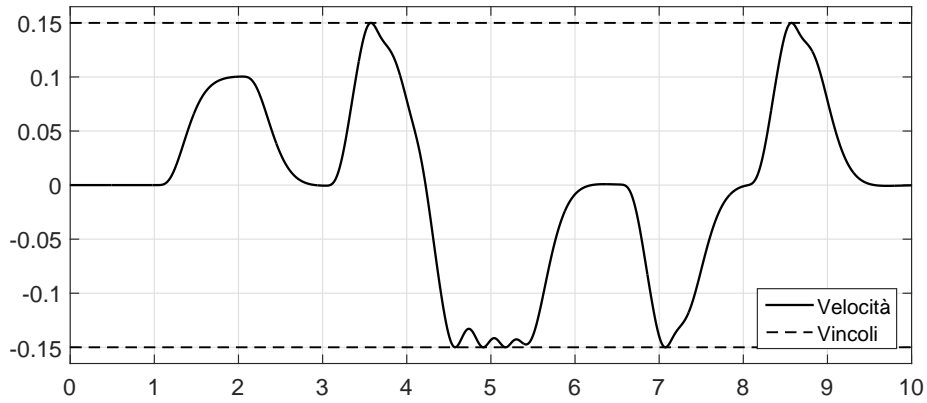


Figura 2.5: *Velocità angolare asta con vincoli*

In Figura 2.6 è invece mostrato l'andamento del segnale attuatore in ingresso all'impianto. Anche in questo caso si vede come il segnale saturi in più punti.

In Figura 2.7 è mostrato l'andamento del segnale in uscita dal blocco Command governor, in particolare in Figura 2.8, si rende palese in quali istanti di tempo qualcuna delle variabili vincolate viola i vincoli imposti. Dove risultano perfettamente sovrapposti è evidente che i vincoli non sono oltrepassati, dunque il blocco del gestore del riferimento deve risultare trasparente tale che $g(t) \equiv r(t)$.

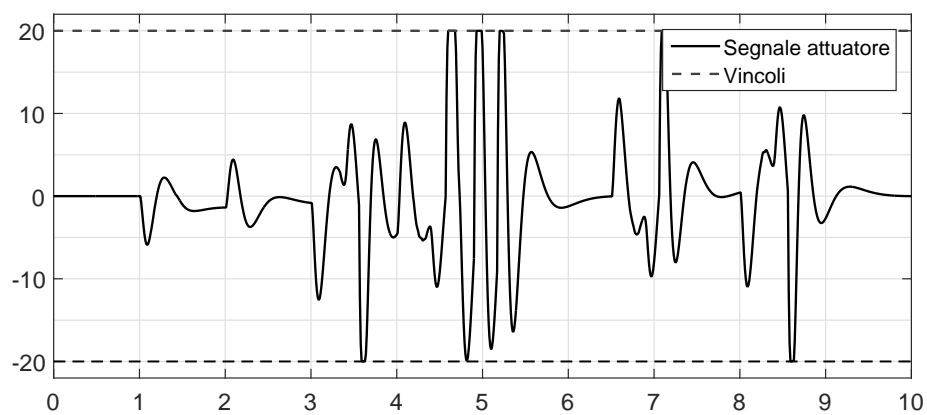


Figura 2.6: *Segnale attuatore*

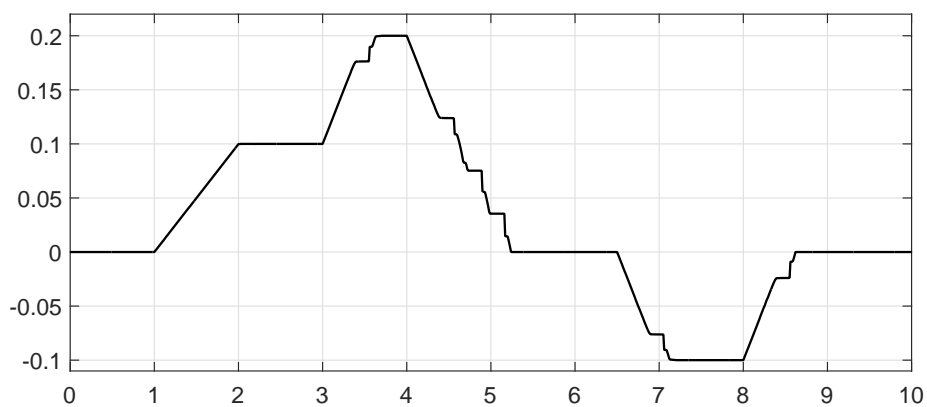


Figura 2.7: *Segnale di riferimento da asservire*

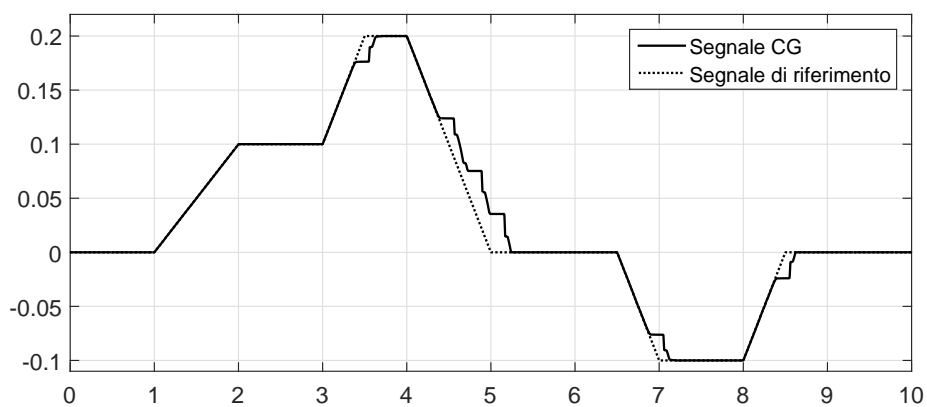


Figura 2.8: *Segnale di riferimento vs Segnale CG*