Неравенства и суммы

Пример 1. Не проводя вычислений, сравните дроби $\frac{2010}{2011}$ и $\frac{2009}{2010}$.

Решение (1 вариант).

$$\frac{2010}{2011} = 1 - \frac{1}{2011}, \quad \frac{2009}{2010} = 1 - \frac{1}{2010}.$$

Поскольку $\frac{1}{2010} > \frac{1}{2011}$, то $1 - \frac{1}{2010} < 1 - \frac{1}{2011}$, $\frac{2009}{2010} < \frac{2010}{2011}$.

Ответ: $\dfrac{2009}{2010} < \dfrac{2010}{2011}$.

Решение (2 вариант). Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2009}{2010} = \frac{2009 \cdot 2011}{2010 \cdot 2011}, \quad \frac{2010}{2011} = \frac{2010 \cdot 2010}{2010 \cdot 2011}.$$

Поскольку знаменатели дробей равны, сравним их числители:

$$2009 \cdot 2011 = 2009 \cdot 2010 + 2009,$$

$$2010 \cdot 2010 = 2009 \cdot 2010 + 2010.$$

Значит $2009 \cdot 2011 < 2010 \cdot 2010$, $\dfrac{2009}{2010} < \dfrac{2010}{2011}$.

Ответ: $\dfrac{2009}{2010} < \dfrac{2010}{2011}$.

Пример 2. Найдите сумму всех чисел от 1 до 99.

Решение (1 вариант).

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 = \underbrace{(1 + 99) + (2 + 98) + \ldots + (49 + 51)}_{49 \text{ раз}} + 50 = 100 \cdot 49 + 50 = 4950.$$

Ответ: 4950.

Решение (2 вариант). Пусть $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99$. Тогда

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & 98 & + & 99 \\ + & & & & & & & & & & & \\ & S & = & 99 & + & 98 & + & 97 & + \ldots + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S & = & (1+99) & + & (2+98) & + & (3+97) & + \ldots + & (98+2) & + & (99+1) \end{array}$$

$$2S = 100 \cdot 99$$

$$2S = 9900$$

$$S = 4950$$

Ответ: 4950.

Пример 3. Найдите сумму $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$.

Решение.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.$$

Ответ: 0,99.

Пример 4. Докажите, что $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\ldots+\dfrac{1}{100}>1$.

Решение. Поскольку $\dfrac{1}{11}>\dfrac{1}{100}$, $\dfrac{1}{12}>\dfrac{1}{100}$, $\ldots$, $\dfrac{1}{99}>\dfrac{1}{100}$, то

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{100}>\frac{1}{10}+\underbrace{\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100}}_{90\text{ раз}}=\frac{1}{10}+\frac{90}{100}=1.$$

Значит $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\ldots+\dfrac{1}{100}>1$, что и требовалось доказать.

Задачи

Задача 1.1. Не прибегая к вычислениям, сравните дроби:

а) $\dfrac{1234565}{1234566}$ и $\dfrac{1234567}{1234568}$ **б)** $\dfrac{271828}{271829}$ и $\dfrac{314159}{314160}$ **в)** $\dfrac{2010}{2011}$ и $\dfrac{20102011}{20112010}$.

Задача 1.2. Сравните произведения

а) $975973971 \cdot 975973975$ и 975973973^2 **б)** 150^{100} и $100^{50} \cdot 200^{50}$

Задача 1.3. Не прибегая к вычислениям, расположите дроби

$$\frac{197385}{197388},\ \frac{179482}{179485} \text{ и } \frac{197385+179482}{197388+179485}$$

в порядке возрастания.

Задача 1.4. Заменим в произведении $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ все числа на 150. Увеличится оно от этого или уменьшится? Тот же вопрос для суммы.

Задача 1.5. Увеличится или уменьшится сумма $\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{101}+\ldots+\dfrac{1}{199}+\dfrac{1}{200}$, если все члены в ней заменить на $1/150$?

Задача 1.6. Найдите сумму всех чисел от 250 до 500.

Задача 1.7. Найдите сумму всех нечетных чисел от 1 до 1000.

Задача 1.8. Чему равна сумма всех натуральных чисел, меньших 1000 и дающих остаток 3 при делении на 7?

Задача 1.9. Найдите суммы

а) $\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{2}{99\cdot 101}$ **в)** $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$

б) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{97\cdot 100}$.

Задача 1.10. Докажите, что $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\dfrac{100}{101}\cdot\dfrac{1}{103}<1$.

Задача 1.11. Докажите, что $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{100^2}<2$.

Задача 1.12. Докажите, что $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{98}-\dfrac{1}{99}+\dfrac{1}{100}>\dfrac{1}{5}$.

Задача 1.13.

а) Докажите, что $\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+\ldots+\dfrac{1}{20}>\dfrac{1}{2}$.

б) Сравните $\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+\ldots+\dfrac{1}{200}$ и 2.

в) Найдется ли такое количество слагаемых, что сумма $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots$ будет больше 10?

Задача 1.14. Что больше:

$$1\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\ldots+1\right) \text{ или } \frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{20}?$$

Задача 1.15. Что больше: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{50}$ или $\frac{1}{50}\left(\frac{49}{1}+\frac{48}{2}+\ldots+\frac{2}{48}+\frac{1}{49}\right)$?

Задача 1.16. Докажите, что $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Критерии оценок	«**5**» - 12 задач	«**4**» - 9 задач	«**3**» - 6 задач	«**2**» - 3 задачи

Рассуждения от противного и принцип Дирихле

Пример 1. В классе 30 учащихся. Докажите, что найдется трое учащихся, родившихся в одном и том же месяце.

Решение. Предположим, что в каждом месяце родилось меньше трех учащихся, т.е. не более двух. Тогда всего учащихся не более $2 \cdot 12 = 24$ человек. Значит наше предположение неверно и найдется месяц, в котором родилось не менее трех учащихся.

Пример 2. Шесть мальчиков съели 13 конфет. Докажите, что найдутся два мальчика, которые съели поровну конфет (возможно, что ни одной).

Решение. Предположим, что все мальчики съели разное число конфет. Найдем, какое наименьшее число конфет они могли тогда съесть: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Но конфет они съели меньше, значит наше предположение неверно, и найдутся два мальчика, которые съели одинаковое число конфет.

Пример 3. В семи кабинетах стоят 107 парт. Докажите, что для проведения письменного экзамена можно выбрать из этих кабинетов три, в которых вместе не менее 47 парт.

Решение. Рассмотрим три кабинета, в которых находится больше всего парт. Пусть в них вместе не более 46 парт. Тогда в каком-то одном из них не более 15 парт. *(Если бы в каждом было не менее 16 парт, то в этих трех кабинетах парт было бы не меньше, чем* $16 \cdot 3 = 48$*, что противоречит предположению.)* Но тогда в оставшихся четырех кабинетах не более $15 \cdot 4 = 60$ парт *(поскольку выбрали три самых «больших» кабинета)*. А всего в семи кабинетах не более $46 + 60 = 106$ парт, что противоречит условию. Значит предположение неверно, и найдется три кабинета, в которых вместе не менее 47 парт.

Пример 4. В походе участвовало 18 школьников. Докажите, что среди них либо были пять школьников из одного класса, либо в походе приняли участие школьники не менее чем из пяти классов.

Решение. Предположим, что в походе приняли участие школьники не более чем четырех классов, причем из каждого не более четырех учащихся. Тогда всего в походе участвовало не более $4 \cdot 4 = 16$ учащихся, что противоречит условию. Значит предположение неверно, и в походе приняли участие либо школьники не менее чем пяти классов, либо не менее пяти учащихся из одного класса.

Задачи

Задача 2.1. В коробке «Ассорти» 50 конфет трех видов. Докажите, что конфет какого-то вида не менее 17.

Задача 2.2. На школьном дворе гуляют 25 детей в возрасте от 7 до 14 лет. Докажите, что найдутся четыре школьника одинакового возраста.

Задача 2.3. Какое наименьшее количество учащихся должно быть в школе, чтобы гарантированно можно было найти трех учащихся, отмечающих день рождения в один и тот же день?

Задача 2.4. Докажите, что существуют две различные степени семерки такие, что три их последние цифры совпадают.

Задача 2.5. В соревнованиях по бегу участвуют 100 спортсменов. Известно, что среди любых 12 из них найдутся двое знакомых между собой. Докажите, что как бы ни раздали спортсменам стартовые номера (не обязательно от 1 до 100), найдутся два знакомых спортсмена, номера которых начинаются с одинаковой цифры.

Задача 2.6. **а)** В течение учебного года 70 учащихся девятых классов написали три срезовые контрольные работы. За каждую ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Докажите, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за все три контрольные. **б)** А сколько школьников точно имеют одинаковые наборы оценок (не важно, в каком порядке и за какие контрольные оценки получены)?

Задача 2.7. **а)** Докажите принцип Дирихле: если в n клетках сидит не менее $kn+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее $k+1$ кроликов. **б)** Укажите, что является «клетками», а что — «кроликами» в предыдущих задачах.

Задача 2.8. В пять школ поставили 58 компьютеров, в каждую не меньше 10. Докажите, что найдутся две школы, которые получили компьютеров поровну.

Задача 2.9. Для награждения по итогам школьного конкурса имеется 70 конфет. При каком наибольшем количестве конкурсантов им можно будет раздать конфеты так, что все они получат разное количество конфет? А если помимо этого еще требуется, чтобы каждый из конкурсантов получил не менее 3 конфет?

Задача 2.10. Докажите, что если в n клетках сидит менее $n(n-1)/2$ кроликов, то найдутся две клетки, в которых сидит одинаковое количество кроликов (может быть, ни одного).

Задача 2.11. На заводе 7 цехов, в которых работает 360 человек. Докажите, что в каких-то пяти из этих цехов работает не менее 258 человек.

Задача 2.12. Пять мальчиков собрали 53 гриба, причем известно, что никакие двое не собрали грибов поровну. Докажите, что какие-то трое из них собрали не менее 36 грибов.

Задача 2.13. В отряде в летнем лагере собраны ребята 10, 11, 12 и 13 лет. Их 23 человека и вместе им 253 года. Сколько в отряде 12-летних ребят, если известно, что их в полтора раза больше, чем 13-летних?

Задача 2.14. В классе 20 человек. Средняя оценка за последнюю контрольную оказалась равной ровно 4, причем есть все оценки от 1 до 5. Какое наименьшее количество пятерок могло быть за эту работу?

Задача 2.15. В коробке 70 карандашей. Докажите, что найдутся либо 9 карандашей одного цвета, либо 9 карандашей разного цвета.

Задача 2.16. Придумайте аналогичную задачу, чтобы нашлось либо n разноцветных, либо n одноцветных карандашей. Каким наименьшим числом карандашей вам удастся обойтись? Объясните, почему это число действительно наименьшее.

Задача 2.17. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

Задача 2.18. Числа от 1 до 9 некоторым образом разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

Задача 2.19. На складе имеется несколько ящиков общей массой 10 тонн, причем масса каждого не превосходит тонны. Какое наименьшее количество трехтонок нужно заказать, чтобы точно суметь вывезти их все за один раз?

Задача 2.20. Сумма любых семи натуральных чисел из набора меньше 15, а сумма всех чисел из набора равна 100. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе?

Критерии оценок	«**5**» - 16 задач	«**4**» - 13 задач	«**3**» - 10 задач	«**2**» - 7 задач

Принцип Дирихле: более сложные задачи

Пример 1. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Решение. У каждого человека в этой компании может быть 0, 1, 2, 3 или 4 знакомых, всего 5 вариантов. Если у некоторого человека A имеется 4 знакомых, то каждый в компании знаком с человеком A, и не может быть человека, имеющего 0 знакомых. Значит в компании либо не будет человека, имеющего 4 знакомых, либо не будет человека, имеющего 0 знакомых. Имеем 5 человек и 4 варианта возможных количеств знакомых (либо 0, 1, 2, 3, либо 1, 2, 3, 4). Тогда по принципу Дирихле найдутся два человека, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Пример 2. Докажите, что из 52 различных натуральных чисел не превосходящих 100 всегда можно выбрать два, одно из которых на три больше другого.

Решение. Разделим первые 100 натуральных чисел на три последовательности, в первой из которых 34, а в двух других по 33 числа:

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 100,$$

$$2, 5, 8, 11, \ldots, 98,$$

$$3, 6, 9, 12, \ldots, 99.$$

В каждой из последовательностей любые два соседних числа отличаются на три.

Докажем, что какие-то два из данных 52 чисел окажутся стоящими рядом в одной из последовательностей. Разобьем числа в каждой из последовательностей на группы из двух соседних чисел. В первой последовательности получится 17 пар, во второй и третьей последовательности по 16 пар и по одному непарному числу. Всего получим 17+16+1+16+1=51 группу. Поскольку чисел 52, а групп 51, то какие-то два из данных чисел попадут в одну группу. Но числа одной группы различаются на 3, значит среди данных 52 чисел есть два, отличающиеся на три.

Задачи

Задача 3.1. Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани, которые имеют одинаковое число сторон.

Задача 3.2. В канун Нового года 10 друзей посылали праздничные открытки друг другу. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, пославшие открытки друг другу.

Задача 3.3. На большую «шахматную» доску 2007×2007 поставили 2007 ладей так, что ни одна из них не бьет другую. Докажите, что в любом квадрате 1004×1004 найдется хотя бы одна ладья.

Задача 3.4. Петя пытается занумеровать вершины куба числами от 1 до 8 так, чтобы суммы чисел на концах каждого ребра куба были различны. Удастся ли ему это сделать?

Задача 3.5. На шахматной доске стоят фигуры: на каждой горизонтали есть хотя бы одна фигура, а на разных горизонталях стоит разное число фигур. Докажите, что можно убрать часть фигур так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали останется ровно одна фигура.

Задача 3.6. В поход пошло 30 школьников. Оказалось, что среди любых десяти из них обязательно найдется трое одноклассников. Докажите, что в походе приняло участие не менее 8 человек из одного класса.

Задача 3.7. Докажите, что из 51 натурального числа первой сотни можно выбрать 6 так, что никакие два из них не имеют одинаковых цифр в одном разряде.

Задача 3.8. Верно ли, что среди любых а) 34 б) 32 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два, одно из которых вдвое больше другого?

Задача 3.9. Даны 70 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 200. Докажите, что какие-то два из них отличаются на 4, 5 или 9.

Задача 3.10. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

Задача 3.11. Из ряда $1, 2, \ldots, 200$ каким-то способом выбрано 101 число. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

Задача 3.12 (у). На пир собралось 100 людоедов. Известно, что среди любых 10 хотя бы один оказался в желудке у другого (из этой десятки). Докажите, что есть «матрешка» из 12 людоедов, каждый из которых (кроме последнего) находится в желудке у следующего.

Задача 3.13 (у). Пять школьников решили в воскресенье посмотреть все новые фильмы последнего месяца. Для этого был выбран семизальный кинотеатр, в котором сеансы начинаются в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00, 20.40 и 22.00. На каждый сеанс школьники делились на две группы, одна шла в один зал, а другая — в другой. Вечером выяснилось, что каждый из школьников побывал в каждом из залов. Докажите, что в каждом из залов был сеанс, на котором никто из школьников не был.

Задача 3.14 (у). В течение прошлого учебного года Саша каждый день решал хотя бы одну задачу по математике. Однако, боясь перетрудиться, за неделю он решал не более 12 задач. Докажите, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых Саша решил ровно 20 задач.

Задача 3.15 (у). В банде 50 гангстеров. Все вместе они ни в одной разборке ни разу не участвовали, а каждые двое встречались на разборках ровно по разу. Докажите, что кто-то из гангстеров был не менее, чем на восьми разборках.

Задача 3.16 (у). В каждом из двух одинаковых правильных 16-угольников отметили по 7 вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоугольники друг на друга, чтобы не менее 4 отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.

Критерии оценок	«**5**» - 10 задач	«**4**» - 7 задач	«**3**» - 5 задач	«**2**» - 3 задачи

Рассуждения от противного и принцип Дирихле в геометрии

Пример 1. Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

Решение. Легко проверить, что «шахматная» раскраска доски, при которой закрашено ровно 32 поля, удовлетворяет условию задачи.

Попробуем выяснить, можно ли закрасить больше клеток. Пусть оказалось закрашено **не менее** 33 полей. Разобьем доску на 16 квадратов размером 2×2. Тогда по принципу Дирихле хотя бы в одном из квадратов закрашено **не менее** 3 полей. *(Если в каждом квадрате закрашено не более 2 полей, то всего на доске закрашено не более* $2 \cdot 16 = 32$ *полей.)* Но если в одном квадрате 2×2 закрашено **не менее** 3 полей, то там очевидно можно выбрать уголок, состоящий из трех закрашенных клеток. Значит предположение неверно и на доске не может быть более закрашено более 32 клеток.

Ответ: 32 поля.

Пример 2. На окружности длиной 1 закрашено несколько дуг, причем расстояние между любыми двумя закрашенными точками вдоль по окружности не равно 0,1. Докажите, что сумма длин закрашенных дуг не превосходит 0,5.

Решение. Будем для определенности считать, что дуги покрасили в красный цвет. На расстоянии 0,1 по часовой стрелке от каждой красной точки найдем соответствующую ей точку и покрасим ее в синий цвет. При этом мы не можем случайно перекрасить красную точку в синий цвет, поскольку тогда на окружности существовали бы две точки красного цвета на расстоянии 0,1 друг от друга, что противоречит условию. После такой окраски каждой красной дуге будет соответствовать дуга синего цвета точно такой же длины, но «повернутая» на 0,1 по часовой стрелке. Значит сумма длин красных дуг равна сумме длин синих дуг, при этом они нигде не накладываются друг на друга и вместе имеют длину не более 1. Значит сумма длин красных дуг не превосходит 0,5, что и требовалось доказать.

Пример 3. На квадратном столе со стороной 70 см лежит 100 квадратных салфеток со стороной 10 см, которые не вылезают за край стола. Докажите, что в стол можно вбить гвоздь, который проткнет не менее трех салфеток.

Решение. Предположим, что любой гвоздь протыкает **не более** двух салфеток. Это означает, что в любом месте стол покрыт **не более** чем в два «слоя», и суммарная площадь всех лежащих на столе салфеток **не превосходит** $2 \cdot (70\text{ см})^2 = 9\,800\text{ см}^2$. Однако суммарная площадь всех салфеток на столе равна $100 \cdot (10\text{ см})^2 = 10\,000\text{ см}^2$. Противоречие, значит наше предположение неверно и в стол можно вбить гвоздь, который проткнет **не менее** 3 салфеток.

Задачи

4 ∘ 1. На журнальном столике лежит 10 газет и журналов, полностью покрывая его (некоторые возможно вылезают за край стола). Докажите, что можно убрать 5 из них так, что оставшиеся будут закрывать не менее половины стола.

4 ∘ 2. На плоскости дано 50 точек, причем не все они находятся на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек проводится прямая. Докажите, что найдется точка, через которую проходит не менее 8 из этих прямых.

4 ∘ 3. Шарообразная планета окружена 37 точечными астероидами. Доказать, что в любой момент на поверхности планеты найдется точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 17 астероидов. (Астероид, расположенный на линии горизонта, не виден.)

4 ∘ 4. На плоскости отметили 15 точек так, что из любых трех отмеченных точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что существует круг единичного радиуса, который закрывает не менее 8 отмеченных точек.

4 ∘ 5 (у). На прямой отметили 101 отрезок. Докажите, что либо 11 из этих отрезков имеют общую точку, либо можно найти 11 отрезков, никакие два из которых не пересекаются.

4 ∘ 6. Для того, чтобы застеклить 15 окон различных размеров и форм, заготовлено 15 стекол в точности по окнам (окна такие, что в каждом окне должно быть одно стекло). Стекольщик, не зная, что стекла подобраны, работает так: он подходит к очередному окну и перебирает неиспользованные стекла до тех пор, пока не найдет достаточно большое (то есть либо в точности подходящее, либо такое, из которого можно вырезать подходящее), если же такого стекла нет, то переходит к следующему окну, и так, пока не обойдет все окна. Составлять стекло из нескольких частей нельзя. Какое максимальное число окон может остаться незастекленными?

4 ∘ 7. Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке из трех клеток было по крайней мере одно черное поле?

4 ∘ 8. Квадратная площадь размером 100 м $\times$ 100 м выложена квадратными плитами 1 м $\times$ 1 м четырех цветов: белого, красного, черного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (то есть не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

4 ∘ 9. На шахматной доске поставили 10 королей (возможно и в соседние клетки). Докажите, что обязательно найдется пустая клетка, находящаяся под боем не менее двух королей.

4 ∘ 10. В квадратном ковре со стороной 2 м моль проела 80 дырок. Докажите, что из ковра можно вырезать неиспорченный молью квадратик со стороной 20 см. Рассмотрите два случая: **а)** дырки точечные; **б)** дырки круглые, каждая радиусом не более 1 см.

4 ∘ 11. В парке растет 10000 деревьев, посаженных квадратно-гнездовым способом (100 рядов по 100 деревьев). Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

4 ∘ 12. Каждая грань кубика $3 \times 3 \times 3$ разбита на 9 квадратов 1×1. Какое наибольшее количество из получившихся 54 квадратов можно покрасить так, чтобы никакие два из окрашенных квадратов не имели общих вершин?

4 ∘ **13.** В клетки квадратной таблицы 6×6 записаны числа от 1 до 36. Всегда ли можно выбрать такие две клетки, соседние по стороне или вершине, что сумма чисел в этих клетках делится на 4?

4 ∘ **14 (у).** На окружности длиной 1 закрашено несколько дуг, причем расстояние между любыми двумя закрашенными точками вдоль по окружности не равно 0,4. Докажите, что сумма длин закрашенных дуг не превосходит 0,4.

4 ∘ **15.** В квадрате со стороной 1 расположено девятнадцать окружностей, радиус каждой из которых не менее 0,05 (окружности могут пересекаться). Верно ли, что обязательно найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата и имеющая общие точки по крайней мере с четырьмя окружностями?

4 ∘ **16.** Внутри квадрата со стороной 1 находится 10 фигур, общая площадь которых более 9. Докажите, что найдется точка, которая принадлежит всем этим фигурам.

4 ∘ **17.** Квадрат 16×16 разрезан на фигурки вида «Т» из четырех клеток. Докажите, что найдется прямая, идущая по линиям сетки и рассекающая не менее **а)** 7; **б)** 8 фигурок.

4 ∘ **18.** Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Докажите, что найдутся, по крайней мере, две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

Критерии оценок	«**5**» - 10 задач	«**4**» - 7 задач	«**3**» - 5 задач	«**2**» - 3 задачи

Комбинаторика: правило суммы и произведения

Пример 1. Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых используются только нечетные цифры?

Решение. Представим, что мы начали выписывать все такие четырехзначные числа. Для начала напишем первую цифру. Поскольку нечетных цифр всего пять (1, 3, 5, 7, 9), то она может быть любой из пяти. Если мы написали первой цифрой 1, то к ней можно приписать любую из тех же пяти цифр и получить числа 11, 13, 15, 17, 19. Аналогично можно к 3 приписать любую из пяти цифр, а также к 5, 7 и 9. Получаем, что из каждого из пяти имевшихся однозначных чисел получилось по 5 новых. Всего получилось $5 \cdot 5 = 25$ различных двузначных чисел, в которых используются только нечетные цифры: 11, 13, 15, ..., 97, 99. Продолжим выписывать все четырехзначные числа. К числу 11 можно приписать любую из пяти цифр и получить 111, 113, 115, 117, 119. Точно также к любому из оставшихся 24 двузначных чисел можно приписать одну из пяти цифр и получить пять новых. А раз из каждого двузначного числа получается 5 трехзначных, то всего трехзначных чисел станет $25 \cdot 5 = 125$.

Итак, у нас получилось 125 трехзначных чисел. К каждому из них можно приписывать по очереди любую нечетную цифру и получать пять четырехзначных чисел. Но раз из каждого трехзначного числа получаются по пять новых, то всего четырехзначных чисел станет $125 \cdot 5 = 625$, что и является ответом к задаче.

Коротко решение можно было бы записать так:

поскольку на каждом из четырех мест может стоять любая из пяти цифр, то всего существует $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ *таких четырехзначных чисел.*

Ответ: 625.

Пример 2. Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых используются только нечетные цифры и все цифры которых различны?

Решение. Будем действовать также, как и в предыдущей задаче: начнем выписывать все такие числа. В качестве первой цифры напишем любую из пяти. Но дальше к 1 можно приписать второй цифрой только 3, 5, 7, 9, а еще одну 1 уже нельзя. Значит с первой цифрой 1 получится только 4 двузначных числа: 13, 15, 17 и 19. Точно также произойдет и с любой другой первой цифрой: к ней можно будет приписать любую из четырех цифр. Значит с каждой из первых пяти цифр получится 4 двузначных числа, а всего их окажется $4 \cdot 5 = 20$. Возьмем каждое из получившихся 20 двузначных чисел и посмотрим, сколько трехзначных чисел из него можно получить. В любом двузначном числе уже задействовано две нечетных цифры, значит к нему можно приписать любую из оставшихся трех цифр. Из любого имеющегося двузначного числа получаем три трехзначных числа, а поскольку двузначных чисел было всего 20, то трехзначных чисел будет $20 \cdot 3 = 60$. Теперь в записи каждого трехзначного числа использовано три нечетных цифры, поэтому к каждому можно приписывать любую из двух неиспользованных нечетных цифр и получать по два четырехзначных числа. (Так, из числа 397 можно получить 3971 и 3975.) Значит всего искомых четырехзначных чисел получится $60 \cdot 2 = 120$.

Короткий способ записи решения выглядит следующим образом:

на первом месте может стоять любая из 5 цифр, на втором любая из оставшихся четырех, на третьем любая из оставшихся трех, на четвертом любая их оставшихся двух, значит всего таких чисел существует $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Ответ: 120.

Пример 3. Сколько существует четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, причем хотя бы одна из них равна 5?

Решение. Основная сложность задачи состоит в том, что не ясно, какая из цифр по счету является 5, условию задачи удовлетворяют и те числа, в которых цифр 5 несколько. В первой задаче удалось выяснить, что число четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, равно 625. Найдем теперь количество четырехзначных чисел, в которых все цифры нечетны, но нет ни одной цифры 5. Это четырехзначные числа, в записи которых встречаются только четыре цифры: 1, 3, 7, 9. Начнем проводить рассуждения как в первой задаче. На первом, втором, третьем и четвертом месте может находиться любая из четырех цифр. Значит всего таких чисел может быть $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.

Итак, количество четырехзначных чисел, в которых встречаются цифры 1, 3, 5, 7, 9, равно 625, а количество четырехзначных чисел, в которых встречаются цифры 1, 3, 7, 9, т.е. все цифры которых нечетны, но нет ни одной цифры 5, равно 256. Тогда количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, но есть хотя бы одна цифра 5, равно $625 - 256 = 369$.

Коротко решение можно было бы записать так:

количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$; *количество четырехзначных чисел, которые состоят из цифр 1, 3, 7, 9 равно* $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$; *тогда количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, причем хотя бы одна из них 5, равно* $625 - 256 = 369$.

Ответ: 369.

Задачи

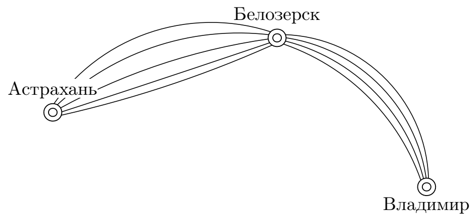
6 ∘ 1. В магазине имеются 3 красных, 5 зеленых и 4 голубых шапки, а также шарфы трех цветов: 7 красных, 2 зеленых и 5 голубых. **а)** Сколькими способами Маша может выбрать себе шапку и шарф? **б)** А сколькими способами можно выбрать шапку и шарф одного цвета? **в)** Разных цветов?

6 ∘ 2. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

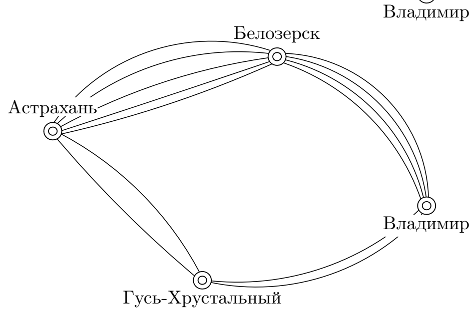
6 ∘ 3. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров **а)** все цифры которых четны? **б)** в которых любые две соседние цифры различны? **в)** все цифры которых различны? **г)** в которых есть не менее двух одинаковых цифр? **д)** содержащих цифру 7? **е)** в которых есть хотя бы одна четная цифра? **ж)** в которых ровно две одинаковые цифры? **з)** в которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

6 ∘ 4. Автомобильные номера в одном регионе РФ состоят либо из 3 букв и 3 цифр, либо из 2 букв и 4 цифр, при этом порядок следования букв и цифр в номере фиксирован. Из букв используются не все, а только а, в, е, к, м, н, о, р, с, т, у, х. Какое максимальное число автомобилей может быть в одном регионе?

6 ∘ 5.



а) В стране три города: Астрахань, Белозерск и Владимир. Из Астрахани в Белозерск ведёт 5 дорог, а из Белозерска во Владимир – 4 дороги. Сколькими способами можно проехать из Астрахани во Владимир?



б) В стране построили город Гусь-Хрустальный и несколько новых дорог: две из Астрахани в Гусь-Хрустальный и две из Гуся-Хрустального во Владимир. Сколькими способами можно теперь проехать из Астрахани во Владимир?

6 ∘ 6. В 7б классе работают три преподавателя: Алексей Анатольевич, Дмитрий Викторович и Андрей Юрьевич. Обращаясь к преподавателю, Ваня обычно меняет его имя на имя другого преподавателя, либо меняет отчество на отчество другого преподавателя, либо и то, и другое вместе. **а)** Сколькими способами он может позвать преподавателя? **б)** Сколькими способами он может это сделать, если стало известно, что он может менять местами имя и отчество (то есть назвать Алексея Анатольевича Анатолием Алексеевичем или Виктором Дмитриевичем)?

6 ∘ 7. а) Сколько можно составить разных (не обязательно осмысленных) слов из k букв, используя русский алфавит? **б)** А если потребовать, чтобы буквы в словах не повторялись? **в)** Сколькими способами можно переставить буквы в слове из k различных букв?

6 ∘ 8. 33 богатыря решили продемонстрировать Черномору все возможные построения. Каждую секунду они перестраиваются по-новому. Смогут ли они показать Черномору все построения за один час? За один день? За один год? За один век?

6 ∘ 9. Световое табло состоит из лампочек, каждая из которых может быть включена или выключена. Какое наименьшее количество лампочек должно находиться на табло, чтобы с его помощью можно было передать 100 различных сигналов?

6 ∘ 10.

а) Для передачи сигналов на флоте используют специальные сигнальные флаги определенных видов. На корабле имеется большое количество флагов каждого вида. На мачту можно вывесить последовательность из трех флагов. Сколько можно таким образом передать сигналов, если количество различных видов флагов равно 10?

б) Какое количество разных видов флагов должно быть на корабле (флагов каждого вида при этом много), чтобы с их помощью можно было передать не менее 50 различных сигналов?

6 ∘ 11. а) В заборе 20 досок, каждую надо покрасить в синий, зеленый или желтый цвет, причем соседние доски красятся в разные цвета. Сколькими способами это можно сделать? **б)** А если требуется еще, чтобы хоть одна из досок обязательно была синей?

6 ∘ 12. а) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга? **б)** Тот же вопрос для двух королей.

6 ∘ 13. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 различных ладей так, чтобы они не били друг друга?

6 ∘ 14. а) Сколько различных строк можно составить из 0 и 1, чтобы в каждой строке было 8 цифр? **б)** На столе 8 различных конфет. Сколькими способами можно съесть несколько из них? **в)** Сколькими способами можно распределить 8 вновь пришедших учеников по трем классам?

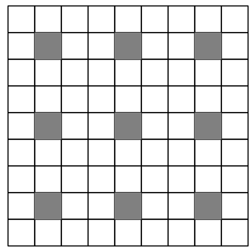
6 ∘ 15. Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд). **а)** Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время?

6 ∘ 16. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

6 ∘ 17. Сколькими способами можно покрасить квадрат 2×2, составленный из 4 квадратиков, если каждый квадратик надо покрасить в один из n цветов, и соседние (имеющие общую сторону) квадратики должны быть покрашены по-разному?

6 ∘ 18. а) Сколькими способами можно разбить 7 юношей и 7 девушек на пары для танцев? **б)** 14 школьников на пары?

6 ∘ 19. В таблицу размера $k \times l$ записывают числа $+1$ и -1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялось 1. Сколькими способами это можно сделать?



6 ∘ 20. В квадратной таблице из 9×9 клеток отмечены 9 клеток так, как показано на рисунке справа. Сколькими путями можно из левой нижней клетки попасть в правую верхнюю, двигаясь только по неотмеченным клеткам вверх или вправо?

Критерии оценок	**5** - 17 задач	**4** - 15 задач	**3** - 10 задач	**2** - 8 задач

Сравнение количеств

Очень часто в повседневной жизни нам приходится сравнивать количества различных объектов. Во многих случаях нас интересует не само количество тех или иных объектов, а скорее ответ на вопрос: каких из них больше? Так, при игре в слова победителем считается тот, кто придумал больше слов. Поэтому при подведении итогов совсем не обязательно считать количество слов каждого, достаточно как-то придумать, как сравнить эти количества. Приведем несколько примеров, как можно проводить такие сравнения без всяких подсчетов и вычислений.

Пример 1. Предположим, что воспитатель детского сада во время утренней прогулки решил выяснить, кого у него в группе больше: мальчиков или девочек. Попробовать их посчитать довольно сложно, поскольку они все время двигаются и есть опасность кого-то посчитать два раза, а кого-то пропустить. Наверно одним из самых простых выходов в данной ситуации является следующий: перед возвращением в корпус предложить детям построиться парами мальчик-девочка. Если у них это получится, то мальчиков и девочек в группе поровну. Если же какие-то мальчики окажутся без пары, то мальчиков больше. В противном же случае больше девочек.

Пример 2. Предположим, что первоклассники Петя и Вася решили выяснить, кто из них может сделать больше приседаний. Считать сначала, сколько может присесть первый, а потом второй, им не подходит, поскольку после двух десятков приседаний они боятся сбиться со счета и ошибиться. Поэтому можно предложить им начать приседать одновременно и делать приседания синхронно (т.е. тоже одновременно). В этом случае тот, кто первый не сможет больше приседать, и будет проигравшим.

Пример 3. Пусть в зале собралось некоторое количество людей, и мы хотим установить, хватит ли на них на всех стульев (или надо принести еще). Тем самым нам нужно сравнить количество людей и количество стульев. Можно конечно попытаться пересчитать и людей, и стулья. Но это осложняется тем, что люди постоянно перемещаются, некоторые стулья мы можем не заметить, да и количество тех и других может оказаться довольно значительным. Вместо этого предложим всем людям сесть на стулья. Если все люди сумели сесть и свободных стульев при этом не осталось, то количество людей равно количеству стульев. Если же, к примеру, окажется, что все стулья заняты, а какое-то количество людей все еще продолжает стоять, то стульев меньше, чем людей.

На самом деле во всех трех примерах мы делали некоторую однотипную операцию, которая имеет также и математическую формулировку.

Определение 7.1. Говорят, что между двумя множествами установлено **взаимно-однозначное соответствие** (или **биекция**), если любому элементу (объекту) первого множества соответствует единственный элемент (объект) второго множества и наоборот.

В первом примере мы рассматривали множество мальчиков и множество девочек. Строя их парами мальчик-девочка, мы как раз и пытались установить взаимно-однозначное соответствие между множеством мальчиков и множеством девочек.

Во втором примере первое множество состояло из таких объектов, как отдельные приседания Пети, а второе — из отдельных приседаний Васи. После этого мы пытались сравнить количество отдельных приседаний в первом множестве и во втором, чтоб определить победителя. Для этого мы первому приседанию Пети ставили в соответствие первое приседание Васи, второму приседанию Пети — второе приседание Васи и т.д. Тем самым мы пытались установить биекцию между этими двумя множествами.

В третьем примере мы пробовали установить биекцию между множеством людей и множеством стульев. В случае, если бы все стулья оказались заняты людьми, а часть людей еще продолжала бы стоять, можно было бы сказать, что нам удалось установить взаимно-однозначное соответствие между множеством стульев и частью множества людей.

Все сказанное выше позволяет сделать два очевидных утверждения:

Утверждение. Если имеются два конечных множества A и B с одинаковым количеством элементов, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, разбив их на пары: первому элементу множества A можно поставить в соответствие первый элемент множества B, второму элементу множества A — второй элемент множества B и т.д.

Обратное утверждение. Если между двумя конечными множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.[1]

В дальнейшем нам будет полезнее и нас будет больше интересовать именно второе утверждение, а также небольшое не менее очевидное добавление к нему.

Утверждение. Если между конечным множеством A и частью конечного множества B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в множестве B больше элементов, чем в множестве A.

Прежде чем переходить к решению математических задач, отметим их некоторое отличие от разобранных ранее примеров. Если люди могли сами находить себе стулья, то в математических задачах объекты не смогут сами разбиться на пары без нашего участия и четкого описания, какому объекту какой соответствует. Поэтому решение математических задач, в которых устанавливается биекция, должно состоять из трех этапов. Если эти этапы перевести на язык людей и стульев, то они выглядят следующим образом:

1. Указать, какому человеку на какой стул садиться.
2. Проверить, что разные люди при этом должны будут сесть на разные стулья, т.е. убедиться, что нескольким людям не указано на один и тот же стул.
3. Выяснить, для каждого ли стула есть человек, который должен на него сесть.

Разберем теперь примеры решения задач.

Пример 4. Каких чисел больше: трехзначных, у которых цифры идут в порядке убывания, или семизначных с убывающим порядком цифр?

Решение. Возьмем произвольное семизначное число с убывающим порядком цифр. Все цифры в этом числе различны, рассмотрим те три цифры, которые не используются в его записи. Их можно единственным образом записать в порядке убывания и получить трехзначное число. Тем самым каждому семизначному числу с убывающим порядком цифр будет поставлено в соответствие трехзначное число с убывающим порядком цифр. Так, числу 9865420 будет поставлено в соответствие число 731. (Можно считать, что мы проверили, что каждому человеку (семизначному числу) соответствует какой-то стул (трехзначное число).)

Поскольку семь различных цифр выписываются единственным образом в убывающем порядке, значит разные семизначные числа не могут состоять из одинаковых цифр и разным семизначным числам будут соответствовать разные трехзначные. (Теперь мы проверили, что на каждом стуле сидит не более одного человека.)

По любому трехзначному числу с убывающим порядком цифр можно восстановить соответствующее ему семизначное число, для этого достаточно выписать в убывающем все цифры, которые отсутствуют в записи этого трехзначного числа. (Проверили, что на каждом стуле кто-то сидит).

Это означает, что нам удалось установить взаимно-однозначное соответствие между множеством семизначных чисел с убывающим порядком цифр и множеством трехзначных чисел с убывающим порядком цифр, а значит тех и других чисел поровну.

Ответ: поровну.

Пример 5. Каких трехзначных чисел больше: с возрастающим порядком цифр или с убывающим?

Решение. Если в числе с возрастающим порядком цифр переставить их в обратном порядке, то получится число с убывающим порядком цифр, например $259 \to 952$. Такая перестановка всегда возможна, поскольку последняя цифра числа с возрастающим порядком цифр обязательно отлична от нуля, именно она окажется на первом месте. Значит любому числу с возрастающим порядком цифр соответствует число с убывающим порядком цифр.

[1] Во всех формулировках мы пишем словосочетание «конечное множество». Это делается специально, поскольку множества бывают и бесконечные, например множества натуральных и целых чисел. Для них тоже определяется понятие биекции, однако ее свойства в случае бесконечных множеств оказываются немного другими.

Поскольку при перестановке цифр в обратном порядке из двух различных чисел не может получиться одно и то же, то разным числам с возрастающим порядком цифр будут соответствовать разные числа.

Однако пока рано делать вывод, что и тех, и других чисел поровну. Если проводить аналогию со стульями, то пока удалось рассадить всех людей на стулья, причем на каждом сидит ровно один человек. Но все ли стулья заняты?

Заметим, что не всем числам с убывающим порядком цифр соответствует какое-либо число с возрастающим порядком цифр. Так, не найдется числа, которое соответствовало бы числу 530 (им должно было бы стать число 035, но оно не трехзначное). А значит чисел с убывающим порядком цифр больше (не на каждом стуле кто-то сидит).

Ответ: с убывающим порядком цифр больше.

Задачи

Все задачи с этого листка можно и нужно сдавать устно.

7 ∘ 1. В зале 8 светильников. Сравните количество способов включить ровно 5 из них с количеством различных слов, которые можно получить из слова АХАХАХАА, переставляя в нем буквы.

7 ∘ 2. Город имеет форму прямоугольника 3×5, разбитого улицами на кварталы 1×1. Сравните количество кратчайших путей, которые ведут из левого нижнего угла в правый верхний, с количествами из предыдущей задачи.

7 ∘ 3. а) Сравните количество решений уравнения $x + y + z + t = 5$ в натуральных числах и количество решений этого же уравнения в целых неотрицательных числах. Каких решений больше? **б)** Совпадает ли какое-то из этих количеств с количествами из двух предыдущих задач?

7 ∘ 4. У Маши и Даши есть мешок с конфетами 9 видов. К Новому году Маша составляет различные наборы, в каждом из которых 4 конфеты разного вида, а Даша — аналогичные наборы, но из 5 конфет. У какой из девочек получится составить больше наборов?

7 ∘ 5. У Маши и Даши на кухне есть черный и белый хлеб, сдобные булочки, вареная и копченая колбаса, ветчина, «Российский» сыр, плавленый сыр, масло, кетчуп и майонез. К празднику они решили приготовить как можно больше бутербродов различного вида. Маша делает все бутерброды без масла, а Даша — исключительно с маслом. У какой из девочек получится сделать больше видов бутербродов? (Бутерброды, отличающиеся только порядком ингредиентов или их количеством, считаются одинаковыми.)

7 ∘ 6. Учительница подготовила к уроку 10 примеров. Она хочет выдать Пете и Васе на дом задания, составленные из этих примеров так, чтобы им достались разные примеры. (Порядок примеров в задании не важен, количество примеров в заданиях может быть различным, не обязательно раздавать все примеры. Так, возможен случай, когда Пете не будет задано ни одного примера, а Васе все 10 или тоже ни одного.) Докажите, что количество способов, которыми она может это сделать, равно количеству различных последовательностей из нулей, единиц и двоек длины 10.

7 ∘ 7. Докажите, что если учительница из предыдущей задачи захочет выдать Пете и Васе задания так, чтобы Вася получил все те примеры, которые получил и Петя, а также, возможно, и какие-то еще, то количество способов это сделать будет таким же, как и в предыдущей задаче.

7 ∘ 8. У Пети и Васи есть по одинаковому набору из 12 кубиков: 3 красных, 3 синих, 3 желтых и 3 зеленых. Петя строит из всех своих кубиков башню, а Вася — стену размером 3×4. При этом оба хотят, чтобы любые два соседних по грани кубика в их постройках имели разный цвет. Кто из них может соорудить больше различных построек?

7 ∘ 9. Каких способов больше: расселить пять друзей на ночь в трех комнатах (гостиной, спальне и на кухне) или раздать пять одинаковых карамелек трем детям?

7 ∘ 10. Каких способов больше: выбрать из 10 человек пять в команду по мини-футболу или разбить их на две равные команды по мини-футболу?

7 ∘ 11. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Каких делителей у него больше: четных или нечетных? (1 и само число тоже считаются делителями)

7 ∘ 12. а) На окружности отмечено 100 синих точек и одна красная. Чего больше: треугольников с вершинами в синих точках или четырехугольников, одна из вершин которых красная, а три — синие? **б)** Многоугольников, все вершины которых синие, или многоугольников, у которых одна из вершин красная?

7 ∘ 13. Меню школьной столовой постоянно и состоит из 11 блюд. Петя и Вася решили поспорить, кто из них дольше сможет питаться в школьной столовой. Условия спора следующие: Петя каждый день съедает четное число блюд (возможно, что и ни одного), а Вася — нечетное, причем каждый день необходимо съедать новый набор блюд. Кто из них победит в споре?

7 ∘ 14. А кто победит в споре, если блюд будет 10?

7 ∘ 15. Предположим, что одно из блюд в столовой — компот. Кто из них выпьет больше компотов за время спора в каждом из случаев?

7 ∘ 16. В одной деревне 10 юношей и 10 девушек. Для одного танца нужно из этих 20 молодых людей выбрать группу, в которой поровну юношей и девушек, а для другого — просто выбрать группу из 10 молодых людей[2]. Каждый день они танцуют как первый танец, так и второй (оба по одному разу), причём и тот, и другой — по-новому. Могут ли они за некоторое количество дней станцевать первый танец всеми способами, станцевав при этом всеми способами и второй танец?

7 ∘ 17. а) Каких способов больше: раздать 10 пирожков с повидлом четырем школьникам или разложить 10 одинаковых синих шариков по 4 одинаковым картонным коробкам? **б)** Совпадает ли какое-нибудь из этих количеств с количеством решений уравнения $x + y + z + t = 10$ в целых неотрицательных числах?

7 ∘ 18. Сравните количество способов раздать 20 конфет шести детям так, чтобы каждый получил хотя бы одну конфету и количество способов раздать 15 конфет тем же детям, если некоторым из них можно вообще не давать конфет.

7 ∘ 19. При каком значении a количество решений уравнения $x + y + z + t = 10$ в целых неотрицательных числах равно количеству решений уравнения $x + y + z + t = a$ в натуральных числах?

7 ∘ 20. Придумайте уравнение, количество решений которого в натуральных числах было бы равно числу способов расположить в ряд 4 черных и 10 белых шаров так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом.

7 ∘ 21. Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

7 ∘ 22. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной, а плохим, если стрелки расположены в обратном порядке. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

7 ∘ 23. Дана шахматная доска. Ее вертикали перенумерованы числами от **1** до **8**, а горизонтали обозначены латинскими буквами от **a** до **h**. Рассматриваются покрытия доски доминошками, содержащими две соседние клетки[3]. Каких разбиений больше — тех, которые содержат доминошку **a1-a2**, или тех, которые содержат доминошку **b2-b3**?

Критерии оценок	«**5**» - 18 задач	«**4**» - 14 задач	«**3**» - 10 задач	«**2**» - 6 задач

[2] Юношей или девушек — не важно.

[3] Доминошки при этом не накладываются.

Подсчеты с кратностью

Пример 1. В спортзале находятся трое школьников. Сколькими способами тренер может поставить их в шеренгу?

Решение. Первым можно поставить любого из трех школьников, следующим можно поставить любого из двух оставшихся. Поскольку для каждого из трех вариантов выбора первого школьника существует два варианта выбора второго школьника, то двух школьников можно поставить $2 \cdot 3 = 6$ вариантами. Тогда последний школьник в шеренге для каждого из вариантов уже определяется однозначно. Значит и число способов поставить трех школьников в шеренгу равно 6.

Коротко решение запишется так:

первым можно поставить любого из 3 школьников, следующего — любого из 2 оставшихся, а последний школьник определяется однозначно, всего способов $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.[1]

Ответ: 6.

Если обозначить школьников буквами A, B и C, то можно выписать и все варианты их расстановки: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Но в этом случае довольно трудно объяснить, почему выписаны все возможные случаи и почему других нет, хотя это и может казаться очевидным.

Пример 2. В классе 20 человек. **а)** Сколькими способами можно выбрать из них трех человек для поездки на олимпиады по матетматике, физике и информатике, которые проводятся в один день. **б)** А сколькими способами можно выбрать трех человек для участия в олимпиаде по математике?

Решение. Для начала попробуем разобраться, в чем различие между двумя пунктами в условии задачи. Пусть было решено отправить на олимпиаду Иванова, Петрова и Сидорова. Тогда на этом некоторый окончательный выбор в случае пункта б) был сделан и теперь именно эти три человека пойдут на олимпиаду по математике. А в случае пункта а) еще не все понятно, ведь варианты, когда Иванов идет на олимпиаду по математике, а Петров — на олимпиаду по физике или Иванов — на олимпиаду по физике, а Петров — на олимпиаду по математике, являются различными. Поэтому в пункте а) нужно выбрать не только три человека, но после этого еще указать, на какую олимпиаду какой из них пойдет, а значит и количество способов должно получиться больше, чем в пункте б).

Начнем считать количество вариантов в пункте а). Для этого составим следующий список:

1. Олимпиада по математике: ________________
2. Олимпиада по физике: ___________________
3. Олимпиада по информатике: ______________

Начнем теперь в каждой из строк записывать фамилию ученика. Первую можно записать 20 способами, вторую можно записать любую из 19 оставшихся, третью — любую из оставшихся 18. Всего $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ способов.

б) Попробуем сделать список похожий на список из предыдущего пункта, только выглядеть теперь он будет следующим образом:

Олимпиада по математике

[1] Выражение $n!$ (читается «эн факториал») обозначает произведение всех чисел от 1 до n, причем считается, что $0! = 1$.

1. ______________________
2. ______________________
3. ______________________

Тогда превую фамилию можно вписать в него 20 способами, вторую — 19, третью — 18. Как и в пункте а) оказывается $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ способов заполнить этот список. Но списки «1. Иванов, 2. Петров, 3. Сидоров» и «1. Петров, 2. Сидоров, 3. Иванов» были посчитаны нами как разные, хотя на самом деле соответствуют отправке на олимпиаду одной и той же группы школьников. Значит среди 6840 списков некоторые будут отличаться только порядком фамилий, но окажутся совершенно одинаковыми с точки зрения поездки на олимпиаду. Представим, что нам удалось составить на листах бумаги все 6840 списков. Попробуем разложить эти листы на несколько стопок, причем в каждой стопке списки будут содержать одни и те же три фамилии, но отличаться их порядком. Тогда любые два списка из одной стопки будут соответствовать отправке на олимпиаду одной и той же группы школьников, а два списка из разных стопок — двум разным группам школьников, которые отличаются по составу хотя бы на одного человека.

Посчитаем, сколько списков попало в каждую стопку. Раз в одной стопке указаны фамилии трех людей, но в разных порядках, то количество списков в стопке равно количеству способов вписать три определенных фамилии в один список. Итак, если есть три определенных фамилии, то на первое место можно записать любую из трех фамилий, второй можно записать любую из двух оставшихся, ну а последняя определяется однозначно. Получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ способов. Данные вычисления полностью совпадают с вычислениями первой задачи. Значит в каждой стопке находится по 6 списков, задающих одинаковые группы людей, а всего списков 6840. Тогда всего стопок, а значит и вариантов, будет $6840 : 6 = 1140$.

Приведем короткий способ записи решения задачи:

а) На олимпиаду по математике можно отправить любого из 20 школьников, по физике — любого из 19 оставшихся, по информатике — любого из 18, всего способов $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

б) Первого школьника можно выбрать 20 способами, второго — 19, третьего — 18, при этом количество способов, отличающихся лишь порядком выбора школьников равно количеству различных перестановок в группе из трех школьников, т.е. $3! = 6$, *значит количество способов равно* $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140$.

Ответ: а) 6840; б) 1140.

Задачи

8 ∘ 1. а) Сколькими способами можно выбрать четырех человек в классе из 20 человек для участия в школьном спектакле на роли Медведя, Волка, Лисы и Зайца? **б)** А сколькими способами можно выбрать в этом классе четырех дежурных? **в)** А выбрать старосту, двух дежурных и ответственного за проездные билеты, если все это должны быть разные люди?

8 ∘ 2. а) Сколькими способами в заборе из 9 досок можно покрасить 4 доски в красный цвет и 5 в синий? **б)** А покрасить 4 доски в красный цвет и 5 в синий в заборе из 12 досок?

8 ∘ 3. Сколькими способами из двух взрослых и десяти школьников можно выбрать 4 человека для приготовления обеда так, чтобы среди них был хотя бы один взрослый?

8 ∘ 4. В магазине имеются в продаже рубашки семи фасонов и двенадцать видов галстуков. **а)** Сколькими способами можно купить три рубашки трех разных фасонов и два разных галстука? **б)** А пять рубашек трех разных фасонов?

8 ∘ 5. а) Сколькими способами можно расселить 9 приезжих в двухместный, трехместный и четырехместный номера гостиницы? **б)** А расселить 10 человек по пяти двухместным номерам?

8 ∘ 6. У Пети 7 различных открыток, а у Васи — 5. Сколькими способами они могут обменять три открытки одного на три открытки другого?

8 ∘ 7. а) Сколькими способами можно из 10 спортсменов выбрать 5 для участия в соревнованиях? **б)** А разделить их на две команды по 5 человек для игры в футбол?

8 ∘ 8. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров, в которых все цифры различны и идут в возрастающем порядке?

8 ∘ 9. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах **а)** ТОРГ; **б)** НАПИТОК; **в)** ВОСТОРГ; **г)** БАРАБАН; **д)** $\underbrace{\text{АА}\ldots\text{А}}_{5\text{ раз}}\underbrace{\text{ББ}\ldots\text{Б}}_{7\text{ раз}}$?

8 ∘ 10. а) Сколькими способами можно выбрать 4 карты одинаковой масти из колоды в 52 карты? **б)** А 9 карт одинаковой масти? **в)** Объясните совпадение результатов.

8 ∘ 11. а) Сколько существует различных последовательностей из 4 нулей и 7 единиц? **б)** Найдите число решений уравнения $a+b+c+d+e+f=10$, если a, b, c, d, e, f могут принимать значения только 1 или 2.

8 ∘ 12. Сколько решений имеет уравнение $x+y+z+t=9$ **а)** в целых неотрицательных числах; **б)** в натуральных числах?

8 ∘ 13. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, синий или зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать? (Не обязательно использовать все цвета.)

8 ∘ 14. Фабрика игрушек выпускает пирамидки, все грани которых — правильные равносторонние треугольники. Далее каждая из граней раскрашивается в один из нескольких цветов, причем разные грани окрашиваются в разные цвета. **а)** Сколько различных видов пирамидок одинакового размера может выпустить фабрика, если для окрашивания пирамидок имеется 4 различных краски? **б)** А если красок 10?

8 ∘ 15. На гранях игрального кубика написаны числа от 1 до 6, каждое ровно по разу. Сколько существует различных игральных кубиков, если считать различными два кубика, которые нельзя спутать, как ни переворачивай?

8 ∘ 16. У мамы есть 10 разных конфет. Сколькими способами она может раздать некоторые из них двум детям? (Она может раздать все конфеты, а может не дать и ни одной.)

8 ∘ 17. На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в этих точках?

8 ∘ 18. а) Сколькими способами можно разложить 10 различных шаров по 4 цветным коробкам? **б)** А 10 одинаковых шаров по 4 цветным коробкам?

8 ∘ 19. В волейбольной секции 24 спортсмена. Сколькими способами их можно разделить на 4 команды по 6 спортсменов в каждой для проведения тренировочного турнира?

8 ∘ 20. У Пети имеется набор из 24 кубиков, окрашенных в 4 цвета: красный, синий, желтый и зеленый, при этом кубиков каждого цвета поровну. Сколько различных стенок 4×6 он может из них построить, если **а)** известно, какая сторона стенки является передней; **б)** не известно, какая сторона стенки передняя, а какая задняя?

Критерии оценок	«**5**» - 17 задач	«**4**» - 14 задач	«**3**» - 11 задач	«**2**» - 8 задач

Графы. Степени вершин и число ребер

Определение 10.1. Пусть задано некоторое конечное множество объектов или элементов, некоторые из которых попарно связаны между собой. Тогда данное множество элементов, а также весь набор связей между этими элементами называются **графом**. В этом случае данные объекты или элементы называются **вершинами графа**, а связи между ними — **ребрами графа**. Вершины, связанные ребром, называются **концами** этого **ребра**. Такие вершины называются **смежными**.

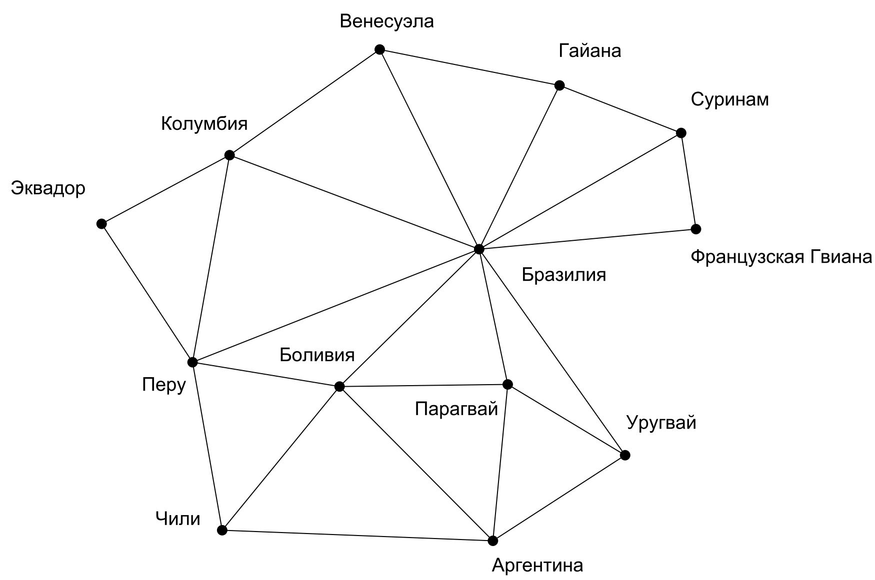
Пример 1. В качестве примеров графов можно привести следующие:

а) Люди — вершины графа, ребрами связаны те из них, которые знакомы друг с другом.

б) Страны — вершины графа, ребрами связаны страны, имеющие общую границу.

в) Вершинами графа являются ученые и языки, если ученый говорит на некотором языке, то ученый и этот язык соединяются ребрами.

Вершины графа (элементы) часто бывает удобным изображать точками, а ребра (связи между элементами) — линиями. Так, на рисунке приведен пример одного из графов. Вершины в нем — это страны Южной Америки, а связаны те из них, которые имеют общий участок границы. Благодаря такому способу изображения оказывается проще понять, сколько и какие у каждой страны соседи, через какие страны нужно проехать, чтобы попасть из одной страны в другую и т.п.



Отметим, что из определения графа следует, что любое ребро соединяет две различные вершины, а любые две вершины либо не связаны, либо между ними существует связь — ребро. Однако иногда бывает полезно расширить понятие графа.

Определение 10.2. Мультиграфом называется граф, в котором разрешается, чтобы некоторые пары ребер соединялись более чем одним ребром. Несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, называются **кратными**.

Данный вид графов бывает иногда полезен. Например мультиграфом зачастую является система городов и связывающих их дорог, поскольку некоторые два города могут оказаться соединены сразу несколькими дорогами.

Определение 10.3. Петлей называется ребро, соединяющее вершину саму с собой. Граф, в котором допускается наличие петель, называется **псевдографом**.

Например, если в качестве элементов рассмотреть множество букв какого-нибудь языка и соединить ребрами те из них, которые в словах данного языка могут стоять рядом, то получим псевдограф, поскольку в некоторых словах встречаются две одинаковые буквы подряд. Другим примером псевдографа может являться схема движения прогулочных теплоходов между пристанями: некоторые маршруты могут начинаться у одной пристани, а заканчиваться у другой, а некоторые — начинаться и заканчиваться у одной и той же пристани.

К сожалению некоторой единой терминологии в теории графов до сих пор не сложилось. В отдельных случаях, определяя граф, считают, что он может содержать петли и кратные ребра, а граф, в котором петли и ребра отсутствуют, отдельно выделяют и называют простым графом. Однако в дальнейшем изложении мы будем считать, граф не содержит ни петель, ни кратных ребер, если не будет оговорено обратное.

Определение 10.4. Степенью вершины называется количество ребер, выходящих из этой вершины. Если это количество четно, то вершина называется четной, в противном случае вершина называется нечетной.

Теорема 1. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству всех ребер.

Доказательство. Степень вершины — это количество концов ребер, сходящихся в этой вершине. Поэтому сумма степеней всех вершин графа равна количеству всех концов ребер, которые есть в графе. Но у каждого ребра ровно два конца, значит общее количество ребер в два раза меньше количества концов всех ребер, откуда и получаем утверждение теоремы. □

Поскольку удвоенное количество ребер — четное число, то сумма степеней всех вершин любого графа должна также являться четным числом. Помимо этого данная теорема имеет еще два довольно простых, но часто используемых следствия.

Следствие 1. Число нечетных вершин любого графа четно.

Действительно, если бы нечетных вершин в графе было бы нечетное число, то сумма степеней всех нечетных вершин выражалась бы нечетным числом. А сумма степеней любого количества четных вершин выражается четным числом. Поэтому сумма степеней всех вершин графа будет нечетным числом, что противоречит предыдущему замечанию.

Прежде чем сформулировать второе следствие дадим еще одно определение.

Определение 10.5. Граф называется **полным**, если в нем любые две вершины соединены ребром.

Следствие 2. Количество ребер в полном графе на n вершинах равно $n(n-1)/2$.

Доказательство. В полном графе каждая из n вершин имеет степень $n-1$, поскольку соединена ребрами со всеми вершинами, кроме самой себя. Поэтому сумма степеней всех вершин равна $n(n-1)$, а количество ребер в два раза меньше суммы степеней вершин, т.е. $n(n-1)/2$. □

Задачи

10 ∘ 1 (у). Людоед захватил маленькую принцессу. Он нарисовал на земле k квадратов в ряд. Людоед обещал отпустить принцессу, если она сможет пропрыгать по всем квадратам по разу и снова вернуться на первый, при этом прыгать с любого квадратика на соседний нельзя, можно прыгать только через один или через два квадратика (например, с 5 можно прыгнуть только на 2, 3, 7 или 8). Если принцесса не выполнит задание, людоед ее съест. Помогите принцессе спастись при **а)** $k=5$; **б)** $k=10$.

10 ∘ 2 (у). Можно ли расставить числа от 1 до 9 по кругу, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

10 ∘ 3 (у). В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Леша и Дима по три, Семен и Илья по две, Женя — одну. С кем сыграл Леша?

10 ◦ 4 (у). В углах доски 3×3 стоят шахматные кони — два черных и два белых. **а)** Можно ли поменять черных и белых коней местами? **б)** Можно ли поменять одного черного коня с одним белым? Если это можно сделать, то в каждом из случаев укажите, какое минимальное количество ходов для этого нужно.

10 ◦ 5 (у). Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы пять друзей, а у любых двух – ровно два общих друга?

10 ◦ 6. В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

10 ◦ 7. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятерок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.

10 ◦ 8. У Пети 28 одноклассников. У них различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

10 ◦ 9 (у). Верно ли утверждение теоремы листка для мультиграфов? Как следует определить степень вершины, из которой выходит петля, чтобы утверждение теоремы осталось верным для псевдографов?

10 ◦ 10. В соревновании по круговой системе с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно?

10 ◦ 11. Рассмотрим граф, вершинами которого являются клетки шахматной доски, а ребрами соединены пары клеток, отстоящие друг от друга на ход коня. Сколько ребер в данном графе?

10 ◦ 12. Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

10 ◦ 13. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

10 ◦ 14. Занятия кружка по математике посещает 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с 3 из кружковцев, а каждый мальчик ровно с 5?

10 ◦ 15. Существует ли многогранник, у которого 17 треугольных граней и 2 четырехугольных?

10 ◦ 16. Семеро друзей, разъезжаясь в отпуск, условились, что каждый из них пошлет открытки троим из остальных. Может ли случиться так, что каждый из них получит открытки именно от тех друзей, которым напишет сам?

10 ◦ 17. Существует ли граф, содержащий более одной вершины, никакие две вершины которого не имеют одинаковой степени?

10 ◦ 18. Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

10 ◦ 19. Чемпионат лагеря по футболу проводился по круговой системе. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Если две команды набирали одинаковое число очков, то место определялось по разнице забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал семь очков, второй призер — пять, третий — три. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

10 ◦ 20. Квадрат разрезан на прямоугольники так, что никакая точка квадрата не является вершиной сразу четырех прямоугольников. Докажите, что число точек квадрата, являющихся вершинами прямоугольника, четно.

Критерии оценок	«**5**» - 15 задач	«**4**» - 12 задач	«**3**» - 9 задач	«**2**» - 6 задач

Связные графы

Определение 11.1. Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер, которая обладает следующими свойствами:

1. она начинается и заканчивается вершиной;
2. вершины и ребра в ней чередуются;
3. любое ребро последовательности имеет своими концами две вершины: непосредственно предшествующую ему в этой последовательности и следующую сразу за ним.

Первая и последняя вершины в этой последовательности называются началом и концом маршрута.

Проиллюстрировать данное определение можно на примере путешествия между городами: сначала мы записываем начальный город нашего путешествия, потом дорогу, по которой из него выезжаем, потом город, в который прибываем, потом следующую дорогу, по которой едем дальше и т.д., пока не закончим путешествие в каком-нибудь городе, который и будет записан последним. Заметим, что согласно определению маршрута в нем одна и та же вершина или ребро могут встречаться несколько раз. Также можно отметить, что для задания маршрута достаточно указать только последовательность вершин, поскольку по ней последовательность ребер восстанавливается однозначно. Хотя в случае мультиграфа определение маршрута не меняется, но задать сам маршрут одной лишь последовательностью вершин может не получиться, поскольку для некоторых пар вершин ребро, соединяющее их, однозначно не определяется.

Определение 11.2. Путем называется такой маршрут, в котором никакое ребро не встречается дважды. Иногда его также называют **цепью**.

Определение 11.3. Граф называется **связным** если между любыми двумя его вершинами существует маршрут. В противном случае граф называется **несвязным**.

Определение 11.4. Любой несвязный граф состоит из нескольких связных графов, каждый из которых называется **компонентой связности графа**. В частности у связного графа ровно одна компонента связности.

Теорема 1. Граф на n вершинах, степень каждой из которых не менее $(n-1)/2$, связен.

Доказательство. Предположим, что данный граф не является связным. Рассмотрим одну из его компонент связности и выберем в ней произвольную вершину. Поскольку эта вершина соединена не менее, чем с $\frac{n-1}{2}$ другими вершинами, то всего вместе с ней в этой компоненте связности не менее $\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$ вершин. Аналогично в любой другой компоненте связности не менее $\frac{n+1}{2}$ вершин. Поскольку несвязный граф имеет хотя бы две компоненты связности, то количество вершин в этих двух компонентах не менее $\frac{n+1}{2}\cdot 2=n+1$, а это противоречит условию, что в графе n вершин. Значит сделанное предположение неверно и граф является связным. $\square$

Теорема 2. Связный граф, в котором степень каждой вершины четна, при удалении любого ребра остается связным.

Доказательство. Пусть мы удалили ребро, которое соединяло вершины A и B. Если после этого вершины A и B оказались в разных компонентах связности, то рассмотрим компоненту связности G_A, содержащую вершину A. Поскольку количество ребер, выходящих из вершины A, уменьшилось на единицу, то степень вершины A также уменьшилась на единицу и стала нечетной, а степени всех остальных вершин в G_A остались четными. Но это противоречит тому, что в любом графе количество нечетных вершин четно. (Это утверждение верно и для любой компоненты связности графа, поскольку сама по себе она тоже является графом.) А значит вершины A и B не могли оказаться в разных компонентах связности.

Однако если вершины A и B оказались в одной компоненте связности, то существует маршрут $\mathcal{M}$ их соединяющий. Пусть X и Y — две произвольные вершины графа. Тогда между ними до удаления ребра существовал маршрут. Если в этом маршруте не содержалось ребра AB, то и в получившемся графе эти вершины связаны тем же маршрутом. Если же в в нем содержалось ребро AB один или несколько раз, то в любом месте, где оно появлялось, его вместе с вершинами A и B можно заменить на маршрут $\mathcal{M}$, проходимый в прямом или обратном порядке в зависимости от того, проходилось ли ребро AB от вершины A к вершине B или наоборот. Но это означает, что граф остался связным. □

Теорема 3. Если из полного графа на n вершинах удалить не более $n-2$ ребер, то граф останется связным.

Доказательство. Докажем, что для разделения полного графа на несколько компонент связности необходимо удалить более $n-2$ ребер, из этого и будет следовать утверждение теоремы. Предположим, что мы удалили некоторое количество ребер, в результате чего образовалось несколько компонент связности. Пусть в одной из них оказалось k вершин, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Во всех остальных компонентах (может одной, может нескольких) оказалось $n-k$ вершин. В полном графе каждая из k вершин была соединена ребром с каждой из этих $n-k$ вершин. Поскольку теперь эти ребра исчезли, то количество ребер, выходящих из каждой из k вершин уменьшилось хотя бы на $n-k$, а общее количество ребер уменьшилось на $k(n-k)$. Осталось показать, что пришлось удалить более $n-2$ ребер, т.е. $k(n-k) > n-2$. Для этого рассмотрим разность $k(n-k)-(n-2)$. Имеем:

$$k(n-k)-(n-2) = kn-k^2-n+2 = (kn-n)-(k^2-1)+1 =$$

$$= (k-1)n-(k-1)(k+1)+1 = (k-1)(n-k-1)+1.$$

Поскольку $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то каждая из скобок $(k-1)$ и $(n-k-1)$ неотрицательна, а значит разность $k(n-k)-(n-2)$ больше 0. Тем самым мы доказали, что количество ребер, которое необходимо удалить из полного графа, чтобы сделать его несвязным, больше $n-2$, откуда и следует утверждение теоремы. □

Задачи

11 ∘ 1 (у). Докажите, что если в графе от некоторой вершины существует маршрут до любой другой, то граф связен.

11 ∘ 2 (у). Докажите, что если в графе между некоторыми двумя вершинами существует маршрут, то существует также и путь, соединяющий эти две вершины.

11 ∘ 3 (у). В государстве 50 городов, причем от каждого города можно доехать до любого другого, возможно с пересадками. Какое наименьшее число дорог может быть в этом государстве?

11 ∘ 4. На плоскости нарисованы вершины графа, пронумерованные числами от 2 до 30. При этом две вершины с номерами a и b соединены ребром только в том случае, если одно из чисел a или b делится на другое. Сколько компонент связности имеет этот граф?

11 ∘ 5. Летом Иван отдыхал в молодежном лагере «Восход», где вместе с ним находилось всего 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причем у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Докажите, что Иван может узнать адрес Николая, т.е. существует цепочка из школьников, которая начинается с Ивана и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами.

11 ∘ 6. Степень каждой вершины связного графа – не менее 100. Одно ребро выкинули. Может ли получиться несвязный граф?

11 ∘ 7. В локальной компьютерной сети от сервера отходит 21 провод, от остальных компьютеров – по 4 провода, а от принтера – один провод. Докажите, что с сервера можно послать документ на принтер.

11 ∘ 8. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

11 ∘ 9. На конференции присутствуют 50 ученых, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

11 ∘ 10. В стране любые два города соединены или железной дорогой, или авиалинией. Доказать, что один из видов транспорта позволяет добраться из любого города в любой.

11 ∘ 11. На листе бумаги отмечено 2011 точек. Двое играют в следующую игру: каждый своим ходом соединяет две отмеченные точки линией. Запрещается соединять пару точек повторно. Проигрывает тот, после хода которого из любой точки можно пройти в любую другую, двигаясь от вершины к вершине по проведенным линиям. Кто выигрывает при правильной игре?

11 ∘ 12. В стране, кроме столицы, больше 100 городов. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами. Каждый из остальных городов соединен авиалиниями ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно перелететь в любой другой (может быть, с пересадками). В связи с экономическим кризисом было принято решение закрыть половину дорог из столицы. Докажите, что это можно сделать таким образом, чтобы после этого снова можно было бы из любого города перелететь в любой другой.

11 ∘ 13. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

11 ∘ 14. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с n другими. Докажите, что если отменить любые $n-1$ рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолетах (с пересадками).

11 ∘ 15. В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км, и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам меньше 500 км. Когда одна дорога оказалась закрытой на ремонт, выяснилось, что из каждого города можно проехать по оставшимся дорогам в любой другой. Доказать, что при этом можно проехать меньше 1500 км.

11 ∘ 16. Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)?

11 ∘ 17. На турбазе 12 домиков, между которыми крот прокопал 56 непересекающихся подземных ходов (два домика соединяются не более чем одним ходом). Докажите, что крот из любого домика может попасть в любой другой, передвигаясь по этим ходам.

11 ∘ 18. Докажите, что граф на n вершинах, имеющий более $(n-1)(n-2)/2$ ребер, связный.

11 ∘ 19. Каждая пара депутатов парламента либо дружит, либо враждует, причем имеется хотя бы одна пара враждующих депутатов. При этом неукоснительно соблюдаются условия «друг моего друга — мой друг» и «друг моего врага — мой враг». Известно, что в парламенте 50 депутатов, и что каждый из них послал открытки всем своим друзьям из числа коллег. **а)** Какое наименьшее число открыток могло быть послано? **б)** А наибольшее?

11 ∘ 20. Числом связности χ графа называется наименьшее число вершин, удаление которых (вместе с выходящими из них ребрами) приводит к несвязному или одновершинному графу. Числом реберной связности λ графа называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Данные величины показывают, насколько граф «прочен», как много вершин и ребер нужно из него удалить, чтобы он «распался» на части. **а)** Приведите примеры графа, для которого $\chi = 2, \lambda = 3$. **б)** Докажите, что для любого связного графа выполняется соотношение $\chi \leqslant \lambda \leqslant \delta$, где δ — минимальная из степеней вершин графа.

Критерии оценок	«**5**» - 15 задач	«**4**» - 11 задач	«**3**» - 7 задач	«**2**» - 3 задач

Деревья

Определение 12.1. Замкнутый путь, т.е. такой, начало и конец которого совпадают, называется **циклом**.

Определение 12.2. Путь называется **простым**, если никакая вершина в нем не встречается дважды.

Определение 12.3. Цикл называется **простым**, если никакая вершина в нем кроме начальной и конечной не встречается дважды.

Определение 12.4. **Деревом** называется связный граф, не имеющий циклов.

Определение 12.5. Вершина графа называется **висячей**, если из нее выходит ровно одно ребро.

Теорема 12.1. В любом дереве на $n \geqslant 2$ вершинах есть не менее двух висячих вершин.

Доказательство. Возьмем произвольную вершину дерева A, которая она не является висячей. Если таковой не найдется, то все вершины являются висячими, а поскольку в графе их сего не менее 2, то утверждение теоремы доказано. Итак, если вершина A не является висячей, то из нее выходит не менее двух ребер. Пройдем по одному из них, попадем в следующую вершину. Если она также не является висячей, то из нее ведет какое-то еще ребро кроме того, по которому мы в нее пришли. Пойдем по этому ребру в следующую вершину и т.д. Поскольку вершин в графе конечное число, то данный процесс не может продолжаться бесконечно. Дважды оказаться в одной вершине невозможно. (Предположим, что путь, по которому мы движемся, повторно привел в некоторую вершину X. Тогда часть пути от первого прихода в X до второго является циклом, что невозможно по определению дерева.) Значит в какой-то момент времени мы придем в вершину B, из которой не сможем продолжить путь. Но если из этой вершины нельзя выйти дальше по некоторому новому ребру, то в эту вершину ведет только одно ребро, а значит она является висячей.

Таким же образом, выйдя из первоначальной вершины A по другому выходящему из нее ребру, мы опять придем в висячую вершину. Докажем, что она отлична от висячей вершины B, в которой мы оказались в предыдущий раз. Предположим, что это не так. Тогда получается, что нашлись два пути, которые ведут из A в B. Они различны, поскольку выходят из A по двум разным ребрам. Раз они заканчиваются в одну вершину B, то в какой-то момент они оба приводят в одну вершину. Назовем первую их общую вершину C (она может совпадать с B, а может и отличаться от нее). Но тогда от A до C можно добраться по ребрам одного пути, а обратно от C в A вернуться по другому пути, что противоречит определению дерева. Значит два пути, которые выходят из A, не имеют общих вершин, а потому заканчиваются в двух различных висячих вершинах. $\square$

Теорема 12.2. Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число вершин в нем на одну больше числа ребер.

Доказательство. В данной теореме необходимо доказать два утверждения. Первое из них: если связный граф — дерево, то число вершин в нем на одну больше числа ребер. Второе: если в связном графе число вершин в нем на одну больше числа ребер, то он является деревом.

Докажем первое утверждение. Если в графе единственная вершина, то утверждение очевидно. Пусть нам дано дерево на $n \geqslant 2$ вершинах. Выберем в нем произвольную висячую вершину. Из нее выходит ровно одно ребро. Удалим из графа эту вершину вместе с выходящим ребром. Получим некоторый новый граф. Поскольку предыдущий граф был связен, то легко понять, что и новый граф также является связным. Также, как следует из определения дерева, в исходном графе не было циклов. Понятно, что после удаления ребра циклы появиться не могли. Итак, мы получили некоторый новый граф, который является связным и не содержит циклов. Значит этот новый граф опять является деревом. Если в этом дереве не менее 2 вершин, то вновь можно найти в нем висячую вершину и удалить ее вместе с выходящим из нее ребром. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока возможно. Поскольку в графе некоторое конечное число вершин, то в какой-то момент времени от исходного дерева останется одна единственная вершина и процесс остановится. Но раз на каждом шаге мы удаляли одну вершину и одно ребро, то вершин и ребер было удалено поровну, да еще одна вершина осталась в конце. Значит в исходном дереве вершин было на одну больше, чем ребер. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть нам дан связный граф, в котором вершин на одну больше, чем ребер, но который деревом не является. Тогда в нем существует хотя бы один цикл. Возьмем какой-нибудь из циклов и выберем на нем вершины A и B, между которыми есть ребро. Тогда от вершины A до вершины B можно добраться либо по ребру AB, либо по другой части цикла без ребра AB, назовем его C_{AB}. Удалим из графа ребро AB и покажем, что он остался связным. Действительно, если между любыми двумя вершинами X и Y существовал некоторый маршрут, который не проходил по ребру AB, то этот маршрут остался и после удаления ребра AB. Если же маршрут между вершинами X и Y содержал в себе ребро AB, то в том месте его можно заменить на C_{AB}. Но это означает, что граф после удаления ребра вновь остался связным. Будем удалять по одному ребру до тех пор, пока в графе не исчезнут циклы, поскольку ребер конечное количество, то в некоторый момент мы остановимся. Тогда мы придем к новому связному графу без циклов, который является деревом. Но на основании первого утверждения в нем число вершин на одну больше числа ребер. Поскольку на каждом шаге мы удалял только ребра и не меняли количество вершин, то в исходном графе число вершин не могло быть также на одну больше числа ребер. Приходим к противоречию, значит исходное предположение было неверно. Второе утверждение доказано. $\square$

Задачи

12 ∘ 1 (у). Приведите пример пути, который не является простым. Приведите пример цикла, который не является простым.

12 ∘ 2 (у). Рассмотрим такое определение дерева: «Деревом называется граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем.» Докажите, что оно эквивалентно другому определению дерева.

12 ∘ 3 (у). Докажите, что если из дерева удалить любое ребро, оно перестанет быть связным графом

12 ∘ 4. В некоторой островной стране 79 городов, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

12 ∘ 5. В другой островной стране 47 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

12 ∘ 6. В парке «Лотос» невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

12 ∘ 7. Администрация парка «Лотос» решила провести реконструкцию парка. Теперь от каждого перекрёстка или тупика можно добраться до любого другого, а также у дорожек и перекрёстков поставлены светильники: каждый перекресток и тупик освещается четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников установлено, если в парке стало 18 перекрестков и тупиков?

12 ∘ 8. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

12 ∘ 9 (у). Доказать, что в связном графе с циклами вершин не больше чем ребер.

12 ∘ 10 (у). Докажите, что из связного графа можно удалить несколько ребер так, чтобы осталось дерево[1].

12 ∘ 11. Нарисуйте все 9 скелетов графа, представляющего куб.

12 ∘ 12. В связном графе В вершин и Р ребер. Какое наибольшее число ребер можно удалить, чтобы граф все еще оставался связным?

12 ∘ 13 (у). Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.

12 ∘ 14. Есть некоторая сеть метро, в которой с любой станции можно добраться до любой другой не поднимаясь на поверхность. Докажите, что можно закрыть какую-то одну станцию без права проезда через нее так, чтобы и после этого возможно было бы добраться с любой станции на любую другую.

12 ∘ 15. Клетчатая прямоугольная сетка $m \times n$ связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть? Как зависит ответ от значений m и n?

---

[1] любое такое дерево называется **скелетом** или **остовным деревом** графа

12 ∘ 16. Посылку (куб) зашили на почте в мешковину в форме куба. Играют двое получившие посылку. За один ход разрешается сделать разрез вдоль любого ребра куба, по которому еще не делался разрез. Проигрывает тот, после хода которого мешковина распадается на две части. Кто может выиграть?

12 ∘ 17. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Сколько спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое?

12 ∘ 18. В дереве есть 8 вершин степени три, 10 вершин степени 4 и несколько висячих вершин. Других вершин нет. Найти число висячих вершин.

12 ∘ 19. Насыщенным углеводородом называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода[2].

12 ∘ 20. В ныне суверенном Зурбагане сеть железных дорог устроена так: все города стоят на кольце; кроме того, столица соединена отдельными ветками с каждым из городов, кроме соседей по кольцу. Правительство Зурбагана разбило сеть на участки между соседними городами и постановило разделить эти участки между двумя компаниями так, чтобы можно было проехать между любыми двумя городами как по дорогам только первой компании, так и по дорогам только второй компании. Можно ли выполнить постановление правительства?

12 ∘ 21. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более **а)** 198 перелетов; **б)** 196 перелетов.

12 ∘ 22. **Расстоянием** между двумя произвольными вершинами дерева будем называть длину простого пути, соединяющего их. **Удаленностью** вершины дерева назовем сумму расстояний от нее до всех остальных вершин. Докажите, что в дереве, у которого есть две вершины с удаленностями, отличающимися на 1, — нечетное число вершин.

12 ∘ 23. У царя Гвидона было три сына. Из его потомков 100 имели по два сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

12 ∘ 24. Можно ли провести в каждом квадратике на поверхности кубика Рубика диагональ так, чтобы получился несамопересекающийся путь?

12 ∘ 25. Некоторые из сорока городов страны попарно соединены авиалиниями, принадлежащими одной из десяти авиакомпаний. Из каждого города можно перелететь в любой другой без пересадок, и каждая авиалиния действует в обоих направлениях. Докажите, что существует компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе, с числом перелетов не менее трех, причем каждый промежуточный город в путешествии будет посещаться только один раз.

Критерии оценок	«**5**» - 20 задач	«**4**» - 16 задач	«**3**» - 12 задач	«**2**» - 8 задач

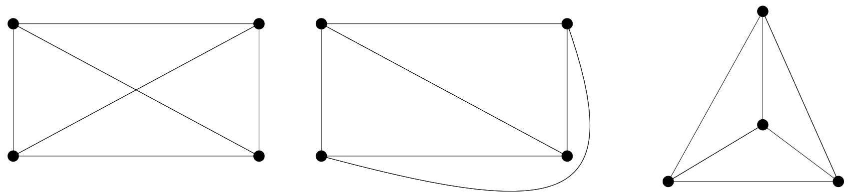
[2] если вы не понимаете таких слов, то любой преподаватель объяснит вам, о чем речь в данной задаче

Теорема Эйлера

Определение 13.1. Граф называется **планарным**, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались.

Определение 13.2. Граф называется **плоским**, если он изображен на плоскости так, что его ребра не пересекаются.

На первом рисунке изображен полный граф на четырех вершинах K_4, ребра которого пересекаются. Однако его можно изобразить так, чтобы его ребра не пересекались, пример такого изображения представлен на втором рисунке. Это означает, что полный граф K_4 является планарным, однако изображение его на первом рисунке плоским не является, а на втором — является. Оказывается, что можно изобразить граф K_4 и так, чтобы все его ребра были отрезками, способ сделать это представлен на третьем рисунке.



Оказывается, что и в общем случае верна следующая теорема, которую мы оставим без доказательства по причине сложности оного.

Теорема 13.1 (Вагнер, Фари, Штейн)**.** Каждый планарный граф можно изобразить на плоскости так, что каждое его ребро будет отрезком прямой, при этом ребра не будут пересекаться.

Возьмем произвольный плоский граф и обозначим число вершин в графе V, число ребер — E, а число частей, на которые граф делит плоскость — F (каждая из этих частей называется **гранью**).[1] В качестве граней считаются не только те части, которые оказываются «внутри» графа и ограничены со всех сторон ребрами (внутренние грани), но и та бесконечная часть, которая оказывается «снаружи» (внешняя грань). Так, для графа K_4 на последнем рисунке $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$. Оказывается, что для любого плоского графа существует равенство, которое связывает величины V, E и F.

Теорема 13.2 (Эйлера)**.** Для связного плоского графа верно равенство $V - E + F = 2$.

Доказательство. Пусть на плоскости изображен некоторый граф G. Удалим некоторые ребра из данного графа так, чтобы получилось какое-нибудь остовное дерево этого графа. Поскольку число вершин любого дерева на одну больше числа числа ребер, то для этого дерева $E = V - 1$, $F = 1$, и доказываемая формула верна. Теперь начнем восстанавливать исходный граф G из его остовного дерева, для чего будем последовательно добавлять по одному удаленные ребра. При добавлении ребра число вершин никак не меняется, а вот число ребер и число граней увеличивается на 1. Поэтому равенство при добавлении ребра остается верным, а значит окажется верным и после добавления любого числа ребер, в частности для исходного графа G. □

[1] Буквы V, E и F являются начальными буквами английских слов «vertex», «edge» и «face», которые как раз и переводятся как «вершина», «ребро» и «грань».

Теорема 13.3. Для плоского графа при $F \geqslant 2$ верно неравенство $3F \leqslant 2E$.

Доказательство. Пусть $E_1, E_2, \ldots E_F$ — число ребер ограничивающих грани с номерами от первого до F соответственно. Поскольку каждое ребро разделяет две грани, то в сумме $E_1 + E_2 + \ldots + E_F$ любое ребро может встретиться не более двух раз. (Ребро либо встречается дважды, если разделяет две какие-то грани, либо вообще не встречается, например если оно идет от висячей вершины.) Поэтому данная сумма не превосходит $2E$. С другой стороны, поскольку каждая грань ограничена не менее, чем тремя ребрами, то каждое из слагаемых суммы $E_1 + E_2 + \ldots + E_F$ не менее трех, а всего слагаемых F, поэтому данная сумма не менее $3F$. Итак, имеем

$$3F \leqslant E_1 + E_2 + \ldots + E_F \leqslant 2E,$$

откуда и получаем требуемое неравенство. □

Задачи

13 ∘ 1. Нарисуйте плоский граф с 6 вершинами, чтобы степень каждой из них была равна 4, а ребра изображались бы отрезками. Пронумеруйте все вершины, ребра и грани данного графа и проверьте, что для него верна теорема Эйлера.

13 ∘ 2. Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсам. Сколько будет построено универсамов?

13 ∘ 3. Разумные муравьи с планеты Тямти-Лямти живут в колониях. Колонии состоят из ячеек, которые муравьи строят из палочек. В одной ячейке живет один муравей. Палочки соединяются между собой при помощи специального раствора, причем соединять можно только концы палочек. Известно, что для создания колонии муравьи использовали 58 палочек, которые скрепили в 30 местах. Сколько муравьев живет в колонии?

13 ∘ 4 (у). а) Верна ли формула Эйлера для плоского связного графа на сфере? **б)** Приведите пример плоского связного графа на торе,[2] для которого формула Эйлера оказывается неверна.

13 ∘ 5. На острове Щекотан планеты Тямти-Лямти расположено 5 колоний разумных муравьев. Известно, что эти колонии составлены из 1200 палочек и имеют 300 мест их соединения. Сколько муравьев живет на острове?

13 ∘ 6. Докажите, что для случая произвольного плоского графа, не обязательно связного, формула Эйлера имеет вид $V - E + F = C + 1$, где C — число компонент связности данного графа.

13 ∘ 7. Пусть каждая из граней включая внешнюю ограничена тремя ребрами.[3] Докажите, что тогда $2E = 3F$.

13 ∘ 8. Внутри треугольника отметили 10 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами треугольника так, что исходный треугольник разбился на несколько маленьких треугольничков. Сколько таких треугольничков получилось?

[2]тор — это математическое название поверхности бублика

[3]Такой граф называется **плоской триангуляцией**.

13 ∘ 9. Из-за недостатка земли и строительного материала на острове Болтай каждая ячейка в колонии разумных муравьев построена из трех палочек. Сколько палочек нужно для построения колонии и сколько муравьев живет в ней, если колония имеет 1200 мест соединения палочек, а снаружи ограничена 500 палочками.

13 ∘ 10. Докажите, что для планарного графа с количеством вершин $V \geqslant 3$ справедливо неравенство $E \leqslant 3V - 6$.

Неравенство, связывающее число вершин и число ребер планарного графа, является очень важным, поскольку является критерием планарности графов. С помощью него можно доказывать то, что те или иные графы не являются планарными.

13 ∘ 11. Докажите, что полный граф на 5 вершинах не является планарным.

13 ∘ 12. Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнезда которой устанавливают электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, служат напыленные металлические дорожки. Поскольку проводники не изолируются, то дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то одну из дорожек переносят на другую сторону платы. Конструктор Иванов придумал хорошую схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, что все проводники будут расположены на одной ее стороне?

13 ∘ 13. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причем так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

13 ∘ 14. Докажите, что в планарном графе найдется вершина степени не более 5.

13 ∘ 15 (у). а) Докажите, что вершины планарного графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы вершины, соединенные ребром, имели разный цвет. **б)** Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.[4]

13 ∘ 16. Инженер Иванов придумал схему печатной суперплаты, которая может заменить целый компьютер. Плата состоит из 200 приборов и 2000 проводников. Ясно, что для реализации такой схемы нужно будет использовать многослойную плату, на которой проводники будут размещены в разных слоях. Докажите, что разработанную инженером Ивановым схему нельзя изготовить в виде трехслойной платы.

13 ∘ 17. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что граф, составленный либо из всех красных ребер, либо из всех синих, не является плоским.

13 ∘ 18 (у). Докажите, что число вершин V, ребер E и граней F любого выпуклого многогранника связано формулой $V - E + F = 2$.

13 ∘ 19. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

13 ∘ 20 (у). На плоскости отмечено n точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две еще не соединенные точки. При этом требуется, чтобы ломаные не самопересекались и не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не

[4] Существует теорема, согласно которой любую такую карту можно покрасить в четыре цвета (так называемая проблема четырех красок). Однако строгого хорошего ее доказательства, которое бы не использовало компьютерный перебор тысяч вариантов, до сих пор не найдено.

может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от n)?

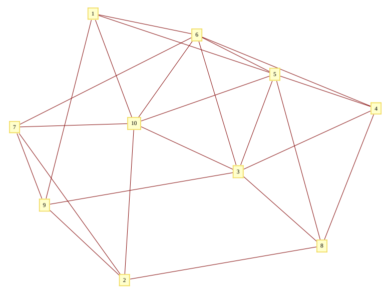
13 ◦ 21 (у). На плоскости нарисовано n маленьких крестиков (у каждого крестика четыре коротких луча одинаковой длины). Каждый ход представляет собой соединение линией двух свободных лучей крестиков (лучей разных крестиков или одного). После этого проведённую линию пересекают коротенькой чёрточкой, что представляет собой простановку на этой линии нового крестика, свободные концы которого можно использовать в игре. Каждый луч крестика можно использовать только один раз, а проведённые линии не должны пересекаться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от n)?

13 ◦ 22. Многогранник называется правильным, если все его грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, а степени всех вершин равны. Иногда такие многогранники называют **платоновыми телами**. Одним из примеров правильного многогранника является куб, у которого все грани — правильные четырехугольники, а степень каждой вершины равна 3. Докажите, что правильных многогранников не более 5 (на самом деле их ровно 5).

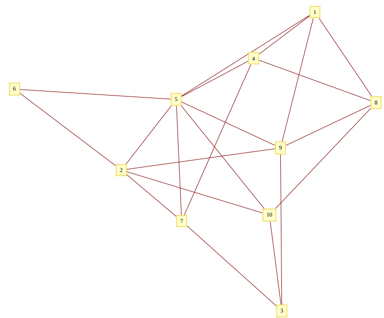
Критерии оценок	«**5**» - 15 задач	«**4**» - 12 задач	«**3**» - 9 задач	«**2**» - 6 задач

Эйлеровы графы

14 ∘ 1 (у). Племя Мумбо-Юмбо живет на небольшом архипелаге недалеко от Новой Зеландии. Некоторые из островов архипелага соединены между собой мостами так, что с любого острова при желании можно добраться на любой другой по этим мостам. Турист прилетел на остров Троекратный и сумел обойти все острова архипелага, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист **а)** не с него начал и не на нем закончил? **б)** с него начал, но не на нем закончил? **в)** с него начал и на нем закончил?

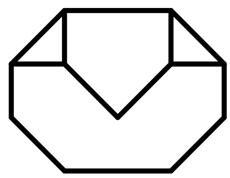


14 ∘ 2 (у). а) Годом позже турист решил осмотреть архипелаг племени Ухти-Тухти. В туристической компании ему сообщили, что можно совершить осмотр, пройдя по каждому мосту, соединяющему острова, ровно один раз. Докажите, что в архипелаге существует не более двух островов, с которых ведет нечетное число мостов. **б)** Может ли остров, с которого ведет нечетное число мостов, быть только один?



14 ∘ 3 (у). Можно ли нарисовать графы, изображенные на рисунке справа (первые два сверху), не отрывая карандаша от бумаги?

14 ∘ 4. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям, план которого изображен на рисунке, так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз? (схема парка — справа, самая нижняя)



14 ∘ 5 (у). Докажите, что если в графе существует путь, проходящий по любому ребру ровно один раз, то в этом графе не более двух вершин нечетной степени.

14 ∘ 6. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами.

Определение 14.1. **Цикл** графа называется **эйлеровым**, если любое ребро графа встречается в нем ровно один раз.

Определение 14.2. **Граф**, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.

Определение 14.3. **Путь** в графе называется **эйлеровым**, если любое ребро графа встречается в нем ровно один раз.

14 ∘ 7. а) Докажите, что связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четную степень.[1] **б)** Докажите, что в связном графе существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда не более двух вершин графа имеют нечетную степень.

14 ∘ 8 (у). Докажите, что связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда его можно разбить на непересекающиеся по ребрам простые циклы.

[1] Данная теорема носит название теоремы Эйлера и была доказана в 1736 году.

14 ◦ 9. Метро города Урюпинска состоит из трех линий (линии метро бывают прямые или кольцевые) и имеет по крайней мере две конечные станции и по крайней мере два пересадочных узла, причем ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую можно перейти по крайней мере в двух местах. Нарисуйте пример такой схемы метро, если известно, что это можно сделать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза один и тот же отрезок.

14 ◦ 10. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? **б)** Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

14 ◦ 11. Какой максимальной длины можно вырезать кусок проволоки из каркаса куба со стороной 10 см?

14 ◦ 12. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4, представить в виде объединения **а)** восьми ломаных длины 5; **б)** пяти ломаных длины 8?

14 ◦ 13. а) Город в плане выглядит как квадрат 5×5, каждая сторона квартала-квадратика — участок улицы длиной 100 м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы? **б)** Изменится ли ответ в задаче, если еще потребовать, чтобы каток вернулся в исходное место?

14 ◦ 14. Докажите, что связный граф с $2n$ нечетными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

14 ◦ 15. Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба с ребром 10 см? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на 90° и 180°, но ломать её нельзя.)

14 ◦ 16. Пешеход обошел шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

14 ◦ 17. Экспозиция картинной галереи представляет собой связную систему коридоров, на обеих стенах которых развешаны картины. Всегда ли можно предложить такой маршрут осмотра экспозиции, при котором посетитель проходит вдоль каждой стены ровно один раз?

14 ◦ 18. Турист приехал в Минск на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на площади Бангалор, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно. (Не обязательно проходить по каждой такой улице.)

14 ◦ 19. На занятии 20 школьников решили каждый по 6 задач, причем каждая задача была решена ровно двумя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор всех задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно по 3 задачи.

14 ◦ 20. Рассеяный математик забыл трехзначный код своего замка. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд, даже если перед этим были набраны какие-то другие цифры. Математик набирает одну цифру за секунду. Докажите, что математик сможет открыть замок за **а)** 29 секунд, если в коде использованы только цифры 1, 3 и 7; **б)** за 1002 секунды, если в коде использованы все 10 цифр.

Критерии оценок	«**5**» - 16 задач	«**4**» - 13 задач	«**3**» - 10 задач	«**2**» - 7 задач

Десятичная запись числа

Пример 1. Докажите, что число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из последних двух цифр данного числа, делится на 4.

Решение. Запишем число в виде $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0}$. Тогда его можно представить в виде

$$\overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0} = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 00} + \overline{x_1 x_0} = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2} \cdot 100 + \overline{x_1 x_0} = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2} \cdot 25 \cdot 4 + \overline{x_1 x_0}.$$

Поскольку первое слагаемое делится на 4, то исходное число делится на 4 тогда и только тогда, когда $\overline{x_1 x_0}$ делится на 4.

Пример 2. Докажите, что если к произвольному двузначному числу приписать двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то полученное четырехзначное число будет делиться на 11.

Решение. Пусть нам дано число $\overline{ab}$. Тогда после описанной в условии задачи операции получим число $\overline{abba}$. Поскольку

$$\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \cdot 91a + 11 \cdot 10b = 11(91a + 10b),$$

то полученное четырехзначное число действительно делится на 11.

Задачи

15 ◦ 1. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 8 и 16.

15 ◦ 2. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 5, 25, 125.

15 ◦ 3. Напишите наибольшее целое число, **а)** в котором все цифры различны; **б)** которое делится на 4 и все цифры которого различны.

15 ◦ 4. Напишите наименьшее целое число, составленное из всех цифр, которое делится на **а)** 5; **б)** 20.

15 ◦ 5. Придумайте 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр.

15 ◦ 6. Найдите четыре натуральных делителя числа 179179179, отличные от единицы и самого числа.

15 ◦ 7. Докажите, что в натуральном числе, запись которого состоит из нескольких цифр, произведение цифр меньше самого числа.

15 ◦ 8. Докажите, что если к произвольному трехзначному числу приписать его же, то полученное шестизначное число будет делиться на 7, 11 и 13.

15 ◦ 9. Докажите, что число $\overline{ababab}$ делится на 7, 13, 37.

15 ◦ 10. Существует ли такое трехзначное число $\overline{abc}$, что $\overline{abc} - \overline{cba}$ является квадратом натурального числа?

15 ◦ 11. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

15 ◦ 12. Найдите все такие двузначные числа, что сумма такого числа и числа с теми же цифрами, записанными в обратном порядке, есть полный квадрат.

15 ◦ 13. Пусть N — произвольное натуральное число, не меньшее 10. Зачеркнем последнюю цифру числа N и к полученному числу прибавим число, равное удвоенной зачеркнутой цифре. Получилось число N_1. Докажите, что либо числа N и N_1 оба делятся на 19, либо оба числа на 19 не делятся.

15 ∘ 14. Дано пятизначное число, которое делится на 41. Докажите, что если переставить первую цифру этого числа в конец, то полученное число тоже будет делиться на 41.

15 ∘ 15. Найдите все трехзначные числа, каждая натуральная степень которых оканчивается на три цифры, составляющие первоначальное число.

15 ∘ 16. а) Последняя цифра квадрата равна 6. Докажите, что предпоследняя нечетна. **б)** Докажите, что если предпоследняя цифра квадрата нечетна, то последняя равна 6.

15 ∘ 17. На доске было написано двузначное число. Вова заметил, что при приписывании к этому числу спереди любой цифры, полученное трехзначное число все время делится на исходное. Какое двузначное число могло быть записано первоначально?

15 ∘ 18. Если некоторое четырехзначное число умножить на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получится восьмизначное число, у которого последние три цифры нули. Найдите все такие числа.

15 ∘ 19. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

15 ∘ 20. И квадрат натурального числа, и само число содержит в своей записи только нули и единицы. Докажите, что число, возводимое в квадрат, является степенью десяти.

Критерии оценок	«**5**» - 15 задач	«**4**» - 12 задач	«**3**» - 9 задач	«**2**» - 6 задач

Признаки делимости на 3 и 9

16 ∘ 1. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 3 и 9.

16 ∘ 2. Простое или составное число 123456789? Изменится ли ответ, если в числе произвольным образом переставить цифры?

16 ∘ 3. Запишите без доказательства признаки делимости на
а) 6; **б)** 90; **в)** 24; **г)** 150.

16 ∘ 4. Найдите цифры сотен и единиц числа $42{*}4{*}$, если известно, что оно делится на 72.

16 ∘ 5. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две соседние цифры у них 97?

16 ∘ 6. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

16 ∘ 7. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

16 ∘ 8. Какие три цифры можно вычеркнуть в числе 123456789 так, чтобы получившееся 6-значное число делилось на 72? Укажите все возможные варианты.

16 ∘ 9. Число 35! равно $10333147966386144929{*}66651337523200000000$. Найдите цифру, замененную звездочкой.

16 ∘ 10. Некоторое двузначное число кратно трем. Если между его цифрами вставить 0 и к полученному трехзначному числу прибавить удвоенную цифру его сотен, то получится число, в 9 раз больше первоначального. Найдите исходное двузначное число.

16 ∘ 11. Петя считает, что если число делится на 27, то и его сумма цифр делится на 27. Вася считает, что если сумма цифр числа делится на 27, то и число делится на 27. Кто из них прав?

16 ∘ 12. Докажите, что числа от 1 до 2010 включительно нельзя выписать подряд в некотором порядке так, чтобы полученное число было точным кубом.

16 ∘ 13. Докажите, что остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 9.

16 ∘ 14. Из числа вычли сумму цифр. Докажите, что результат делится на 9.

16 ∘ 15. Верно ли, что если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9?

16 ∘ 16. Незнайка перемножил все числа от 1 до 100. Подсчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова подсчитал сумму цифр и т.д. В конце концов получилось однозначное число. Какое?

16 ∘ 17. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется после умножения их на любое однозначное число от 2 до 9.

16 ∘ 18. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали тоже самое и так далее, 100 раз. Докажите, что в результате получится 0.

16 ∘ 19. У числа 2^{2011} зачеркнули первую цифру и прибавили ее к оставшемуся числу. С результатом проделали ту же операцию и т.д. до тех пор, пока не получили 10-значное число. Докажите, что в этом числе есть две одинаковые цифры.

16 ∘ 20. Возьмем любое 2011-значное число, делящееся на 9. Сумму его цифр обозначим за a, сумму цифр числа a через b, сумму цифр b — через c. Чему равно c?

16 ∘ 21. Решите уравнение $x + S(x) + S(S(x)) = 2011$, где через $S(x)$ обозначена сумма цифр числа x.

16 ∘ 22. Докажите, что если $S(x) = S(2x)$, то число x делится на 9.

Критерии оценок	«**5**» - 18 задач	«**4**» - 16 задач	«**3**» - 14 задач	«**2**» - 12 задач

Признаки делимости

Пример 1. Докажите, что число $\overline{abcde}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда $a-b+c-d+e$ делится на 11.

Доказательство. Запишем число следующим образом:

$$\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e.$$

Далее, из равенств

$$10d = 11d - d,$$

$$100c = 110c - 10c = 110c - 11c + c,$$

$$1000b = 1100b - 100b = 1100b - 110b + 10b = 1100b - 110b + 11b - b,$$

$$10000a = 11000a - 1000a = 11000a - (1100a - 110a + 11a - a) = 11000a - 1100a + 110a - 11a + a$$

получаем, что

$$\overline{abcde} = 11000a - 1100a + 110a - 11a + 1100b - 110b + 11b + 110c - 11c + 11d + a - b + c - d + e.$$

Поскольку сумма

$$11000a - 1100a + 110a - 11a + 1100b - 110b + 11b + 110c - 11c + 11d = 11 \cdot (909a + 91b + 9c + d)$$

делится на 11, то само число $\overline{abcde}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда $a-b+c-d+e$ делится на 11, что и требовалось доказать.

Можно доказать это и иначе, пользуясь следующей последовательностью равенств:

$$\overline{abcde} = \overline{abcd}\cdot 10 + e = \overline{abcd}\cdot 11 - \overline{abcd} + e = \overline{abcd}\cdot 11 - \overline{abc}\cdot 10 - d + e = \overline{abcd}\cdot 11 - \overline{abc}\cdot 11 + \overline{abc} - d + e =$$

$$= \overline{abcd}\cdot 11 - \overline{abc}\cdot 11 + \overline{ab}\cdot 10 + c - d + e = \overline{abcd}\cdot 11 - \overline{abc}\cdot 11 + \overline{ab}\cdot 11 - \overline{ab} + c - d + e =$$

$$= \overline{abcd}\cdot 11 - \overline{abc}\cdot 11 + \overline{ab}\cdot 11 - 10a - b + c - d + e = \overline{abcd}\cdot 11 - \overline{abc}\cdot 11 + \overline{ab}\cdot 11 - 11a + a - b + c - d + e.$$

Пример 2. Докажите, что число $\overline{abcd}$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $\overline{bcd} - a$ делится на 13.

Доказательство. Заметим, что

$$\overline{abcd} = 1000a + \overline{bcd} = 1001a - a + \overline{bcd} = 77 \cdot 13a + \overline{bcd} - a.$$

Поскольку $77 \cdot 13a$ делится на 13, то число $\overline{abcd}$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $\overline{bcd} - a$ делится на 13, что и требовалось доказать.

Задачи

17 ∘ 1. Сформулируйте и докажите признак делимости на 11 для шестизначного числа.

17 ∘ 2. Сформулируйте признак делимости на 11 для произвольного числа.

17 ∘ 3. Докажите признак делимости на 11 для произвольного числа.

17 ∘ 4. Не проводя деления выясните, какой остаток при делении на 11 дает число 123456789. А число 234567891?

17 ∘ 5. Придумайте число, делящееся на 11, в записи которого использованы все 10 цифр по одному разу.

17 ∘ 6. A — шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что A не делится на 11.

17 ∘ 7. Пусть a, b, c, d — различные цифры. Докажите, что $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на $\overline{aabb}$.

17 ∘ 8. К числу приписали число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что полученное число составное.

17 ∘ 9. Докажите, что разность числа, имеющего нечетное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

17 ∘ 10. Докажите, что если число делится на 99, то сумма его цифр не менее 18.

17 ∘ 11. **а)** Пользуясь тем, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, докажите, что $\overline{abcdef}$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $\overline{abc} - \overline{def}$ делится на 7. **б)** Верно ли тоже самое утверждение для делимости на 11 и 13?

17 ∘ 12. Не проводя деления выясните, делится ли число 93483 на 7 и на 13.

17 ∘ 13. Сформулируйте признаки делимости на 7 и на 13 для произвольного числа.

17 ∘ 14. Докажите признаки делимости на 7 и на 13 для произвольного числа.

17 ∘ 15. Сформулируйте признак делимости на 91. Проверьте, делится ли число 1123456698 на 91.

17 ∘ 16. Докажите, что число делится на $99\ldots9$ (k девяток) тогда и только тогда, когда сумма его граней по k цифр (грани идут справа налево) делится на $99\ldots9$. (Например, 1200798 делится на 999, так как $1 + 200 + 798$ делится на 999.)

17 ∘ 17. Пользуясь тем, что $999 = 27 \cdot 37$, сформулируйте признаки делимости на 27 и 37.

17 ∘ 18. Докажите признаки делимости на 27 и 37.

17 ∘ 19. Докажите, что число, десятичная запись которого состоит из 300 одинаковых цифр, делится на 37.

17 ∘ 20. Трехзначное число, все цифры которого различны и отличны от 0, делится на 37. Докажите, что перестановками цифр этого числа можно получить еще два числа, делящихся на 37.

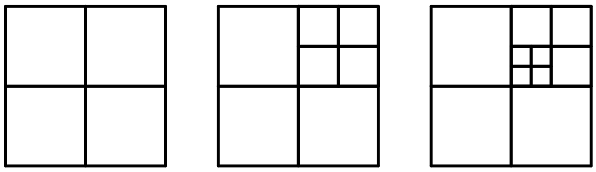
17 ∘ 21. Шестизначное число, записанное шестью отличными от нуля различными цифрами, делится на 37. Докажите, что перестановками цифр этого числа можно получить еще по крайней мере 23 различных числа, делящихся на 37.

Критерии оценок	«**5**» - 15 задач	«**4**» - 12 задач	«**3**» - 9 задач	«**2**» - 6 задач

Постепенное конструирование

Пример 1. Разрежьте квадрат на **а)** 4; **б)** 7; **в)** 10; **г)** 2011 квадратов (квадраты не обязательно одинаковые).

Решение. Найти способ разрезания квадрата на 4 части несложно, он изображен на рисунке. Теперь подумаем, как разрезать квадрат на 7 частей. Придумать сходу простой способ как для случая 4 частей не получается. Попробуем использовать способ разрезания квадрата на 4 части. Если в нем взять один из получившихся квадратиков и разрезать таким же образом на 4 части, то получим как раз 7 квадратов. Для получения 10 квадратов можно повторить эту операцию: возьмем любой из имеющихся 7 квадратов, например самый маленький, и разрежем на 4 квадрата.



Так можно продолжать разрезать квадраты сколь угодно долго. На каждом шаге мы выбираем квадрат и режем его на 4 части. При этом сам квадрат исчезает, а вместо него появляются 4 новых, т.е. количество квадратов возрастает на 3. Если сначала был 1 квадрат, то потом становится 4, после 7, 10, 13, 16, ...

Остается понять, получим ли мы когда-нибудь таким образом 2011 квадратов. Изначально имелся 1 квадрат, значит для получения 2011 квадратов их количество должно увеличиться на 2010. Но на каждом шаге количество квадратов увеличивается на 3, поэтому необходимо будет совершить $2010 : 3 = 669$ разрезаний квадратов на 4 части, после чего и будет получено 2011 квадратов.

Заметим, что в случае 2011 квадратов мы не стали рисовать картинку и приводить пример разрезания, а доказали, что это можно сделать и объяснили, каким образом. Описание процесса, в результате которого может быть получено требуемое в задаче, тоже является решением, в дальнейшем такие решения будут встречаться все чаще и чаще. Такие решения называются конструктивными.

Пример 2. Придумайте 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Решение. Придумать сразу 10 чисел довольно сложно, попробуем упростить себе задачу, начать с меньшего количества чисел. Придумать два таких числа нельзя, попробуем придумать три. Как их придумывать не ясно, но после некоторых раздумий можно например найти числа 1, 2 и 3 (кто-то может найдет и другие). Действительно, $1 + 2 + 3 = 6$, а 6 делится и на 1, и на 2, и на 3. Как теперь придумать 4 таких числа? Попробуем добавить к имеющимся числам еще какое-то число, чтобы условие не нарушилось. Несложно заметить, что это должно быть число 6, тогда общая сумма станет 12, а она будет делиться на каждое из чисел 1, 2, 3, 6. Теперь понятно как действовать дальше. Добавив к имеющимся числам 12, получим сумму 24, а она делится на 1, 2, 3, 6, 12. Теперь добавим число 24 и получим уже шесть чисел, потом таким же образом семь, восемь и так далее можно получить любое требуемое количество чисел. Исходя из приведенных выше рассуждений искомые 10 чисел могут быть следующими: 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

Стоит отметить, что вместо решения исходной задачи мы решали следующую задачу:

Задача. Придумайте **а)** 3; **б)** 4; **в)** 5; **г)** 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

В этом и состоит сущность идеи постепенного конструирования. Вместо отыскания решения исходной сложной задачи, ее упрощают, решая сначала для небольшого количества объектов (квадратов, чисел), опираясь на это пример находят способ решить ее для все большего и большего числа объектов, пока не приходят к требуемому количеству. Условие задачи при этом иногда приходится самостоятельно разбить на пункты.

Еще одно замечание. В этой задаче после слова «решение» кратко записан мыслительный процесс, который приводит нас к ответу. Если же требуется записать именно решение такой задачи в стандартном понимании (например на олимпиаде), то достаточно написать требуемые 10 чисел и показать, что они удовлетворяют условию. Сам мыслительный процесс записывать при этом совершенно не обязательно.

Пример 3. Давным-давно в СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копеечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

Решение. Попробуем начать составлять суммы большие 7 копеек. Получаем:

$8 = 5 + 3;$ $9 = 3 + 3 + 3;$ $10 = 5 + 5;$

$11 = 5 + 3 + 3;$ $12 = 3 + 3 + 3 + 3;$ $13 = 5 + 5 + 3.$

Можно заметить, что как и в случае с квадратами, если мы можем составить сумму в 8 копеек, то можем составить и сумму в 11 копеек. Для этого нужно добавить всего лишь монету в 3 копейки. Добавляя еще монету в 3 копейки наберем сумму в 14 копеек, потом в 17, 20, ... Из суммы в 9 копеек последовательным добавлением монет по 3 копейки можно получить 12, 15, 18, ... копеек. А из суммы в 10 копеек таким же способом можно получить 13, 16, 19, ... копеек. Видим, что действительно любая сумма встретится в какой-то одной из этих последовательностей, а значит монетами в 3 и 5 копеек можно набрать любую сумму, большую 7 копеек.

Если быть точнее, то из суммы в 8 копеек с помощью добавления монет по 3 копейки можно получить любую большую сумму, которая дает тот же остаток, что и 8 при делении на 3, т.е. остаток 2. Из 9 копеек — любую большую 9 и кратную 3 сумму, а из 10 — любую большую сумму, дающую остаток 1 при делении на 3. Поскольку других остатков кроме 0, 1 и 2 нет, то любое большее 7 число попадет в одну из этих групп, а значит будет представлено в виде суммы троек и пятерок.

Задачи

Задачи этого листка принимаются только полностью, решение одного пункта не считается решением части задачи.

19 ∘ 1. Докажите, что уголок из трех клеток можно разрезать на а) 4; б) 16; в) 1024 одинаковых уголка, но меньшего размера.

19 ∘ 2. а) Придумайте 3 различных натуральных числа, чтобы каждые два имели общий делитель, больший 1, но при этом чтобы НОД всех трёх чисел был равен 1. **б)** Придумайте 4 таких числа; **в)** 10 чисел.

19 ∘ 3. Представьте 1 в виде суммы 7 различных дробей, числители которых равны 1.

19 ∘ 4. а) Придумайте набор из семи гирь, с помощью которого на чашечных можно взвесить любой целый вес от 1 до 127 граммов. Гири разрешается ставить только на одну чашку весов. **б)** Пусть теперь гири можно ставить на обе чашки весов. Придумайте набор из пяти гирь, с помощью которого можно взвесить любой целый вес от 1 до 121 грамма.

19 ∘ 5. Разрежьте квадрат на **а)** 6; **б)** 7; **в)** 8 квадратов (не обязательно равного размера). **г)** Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов начиная с шести.

19 ∘ 6. а) В группе из четырех человек, говорящих на разных языках, любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Доказать, что их можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык. **б)** То же для группы из любого четного числа человек больше 2.

19 ∘ 7. Докажите, что если после очередной денежной реформы в России будут введены в обращение монеты достоинством в 5 и 26 копеек, то пользуясь только ими можно будет уплатить без сдачи любую сумму, начиная с 1 рубля.

19 ∘ 8. Укажите все денежные суммы в целое число рублей, которые во времена СССР можно заплатить двумя способами: в виде чётного и нечётного числа купюр (в обращении имелись купюры в 1, 3, 5, 10, 25, 50, 100 руб).

19 ∘ 9. а) Можно ли прямоугольник 5×9 разрезать на уголки из трех клеток? **б)** Приведите пример прямоугольника, стороны которого больше 1, площадь делится на 3, но который нельзя разрезать на уголки из трех клеток. **в)** Докажите, что если прямоугольник $l \times 3k$ можно разрезать на уголки из трех клеток, то и прямоугольник $(l+2) \times 3k$ можно разрезать на уголки из трех клеток. **г)** Докажите такое же утверждение для прямоугольников $m \times 2n$ и $(m+3) \times 2n$. **д)** Укажите все значения p и q, при которых прямоугольник $p \times q$ можно разрезать на уголки из трех клеток.

19 ∘ 10. Докажите, что прямоугольник, площадь которого делится на 8, а каждая из сторон не менее 2, можно разрезать на фигурки из четырех клеток в форме буквы «Г».

19 ∘ 11. На столе стоят восемь стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

19 ∘ 12. В девять одинаковых мензурок налито до краев девять разных жидкостей (в каждую мензурку — своя особая жидкость), кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли составить одинаковые смеси этих жидкостей в каждой из девяти мензурок, оставив при этом десятую мензурку пустой? Выливать жидкости не разрешается, из мензурки можно отмерить и отлить любую часть имеющейся там жидкости.

19 ∘ 13 (у). Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

19 ∘ 14. Известно, что в туристическом клубе каждый участник знаком не более чем с пятью другими. Докажите, что можно разделить участников на не более чем шесть групп для похода выходного дня таким образом, что ни в какую группу не попадут двое знакомых.

19 ∘ 15. 7 воров хотят поделить добычу. Каждый уверен, что он поделил бы добычу на равные части, но остальные ему не верят. Как действовать ворам, чтобы после раздела каждый был уверен, что у него не менее 1/7 части добычи?

19 ∘ 16 (у). N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

19 ∘ 17 (у). Прямоугольник $m \times n$ называется прочным, если его можно разбить на доминошки так, что любой разрез прямоугольника пересекает хотя бы одну доминошку. Докажите, что: **а)** прямоугольник $2 \times n$ — непрочный; **б)** прямоугольник $3 \times n$ — непрочный; **в)** прямоугольник $4 \times n$ — непрочный; **г)** прямоугольники 5×6 и 6×8 — прочные; **д)** если прямоугольник $m \times n$ — прочный, то и прямоугольник $m \times (n+2)$ — прочный; **е)** при любом разбиении прямоугольника 6×6 на доминошки любая прямая пересекает в нем четное число доминошек; **ж)** прямоугольник 6×6 — непрочный. **з)** Какие прямоугольники являются прочными, а какие нет?

19 ∘ 18 (у). Представьте произвольное число в виде суммы необязательно различных натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

Пошаговая закономерность

Данный листок посвящен поиску закономерностей в различных пошаговых процессах и строгому их доказательству. В некоторых задачах эту закономерность необходимо найти, это и составляет основную сложность задачи. В других же задачах закономерность уже сформулирована, трудность представляет восприятие условия задачи как процесса и разбиении его на шаги. Основной идеей доказательства является следующая: если утверждение верно в начальный момент времени, а также если из верности утверждения в какой-то момент времени следует его верность после следующего шага или операции, то утверждение верно в любой последующий момент времени.

Пример 1. Строители строят одноэтажный дом из бетонных плит, окрашенных с одной стороны в синий цвет, а с другой — в жёлтый. Сначала строятся наружные стены, а потом одна за другой ставятся прямые перегородки от любой из стен до другой стены. Докажите, что если снаружи дом синий, то сколько бы перегородок в нём не провели, там обязательно найдётся комната, стены которой жёлтые.

Решение. Представим себе процесс строительства дома. Сначала построили стены дома, получилась одна большая комната. Затем построили одну перегородку, стало две комнаты. Потом построили вторую перегородку, она разделила одну из комнат на две, стало три комнаты. Так продолжается до тех пор, пока не построят все требуемые перегородки. Будем называть строительство перегородки шагом. Тогда в задаче требуется доказать, что вне зависимости от количества шагов, а значит и после любого такого шага, хотя бы одна комната будет с желтыми стенами.

Изначально были только внешние стены, синие снаружи и желтые внутри, никаких перегородок не было, а значит была одна большая желтая комната. После первого шага перегородка разделила желтую комнату на две. С одной стороны перегородка была синяя, комната, прилегающая к этой стороне перегородки, будет иметь одну синюю стену и три желтых. Вторая же комната будет прилегать к желтой стороне перегородки, поэтому все стены в ней будут желтого цвета. Итак, после первого шага обязательно есть комната с желтыми стенами.

Посмотрим, что может произойти после второго шага. Если вторая перегородка строится в комнате с синей стеной, то комната с желтыми стенами остается нетронутой и продолжает существовать после второго шага. Если же вторую перегородку строят в комнате с желтыми стенами, то, как и после первого шага, вместо этой комнаты возникают две: в одной из них одна из стен синяя, а остальные три желтые, в другой же все стены оказываются желтые. Видим, что как бы ни строили вторую перегородку, обязательно какая-нибудь из комнат будет иметь желтые стены.

Теперь зададимся вопросом: а может ли после какого-то шага комната с желтыми стенами исчезнуть? Пусть мы построили какое-то количество перегородок, причем комната с желтыми стенами у нас еще есть. Начинаем строить следующую перегородку. Если она строится вне комнаты с желтыми стенами, то комната с желтыми стенами остается. Если же ее строят в этой комнате, то в одной из двух новых комнат все стены окажутся желтыми.

Итак, мы проверили, что изначально была одна комната с желтыми стенами, а также доказали, что после строительства каждой следующей перегородки комната с желтыми стенами исчезнуть не может. Значит сколько бы перегородок в доме не провели, там обязательно найдется комната, стены которой желтые.

Стоит обратить внимание, что в окончательном решении совершенно не нужно описывать, что произойдет после первого и второго шага. Эти рассуждения помогают понять, что может происходить после каждого следующего шага, что может измениться, а что сохраняется. Для получения полного решения достаточно установить два факта: 1) наличие комнаты с желтыми стенами изначально; 2) если после какого-то шага была комната с желтыми стенами, то после следующего шага она не может исчезнуть и вновь будет в наличии.

Пример 2. На доске написаны числа 1, 8, 5, 4. Каждую минуту вместо каждого из чисел записывают сумму трех других чисел. Может ли в некоторый момент первое число стать четным?

Решение. Попробуем проделать несколько операций, описанных в условии. Сначала получим числа 17, 10, 13, 14, затем 37, 44, 41, 40. Можно заметить, что на первом и третьем месте всегда стоят нечетные числа, а на втором и четвертом — четные. Проверим, будет ли верно наше предположение на следующем шаге. Получим числа 125, 118, 121, 122, для них наше предположение тоже оказалось верно. Значит остается попробовать доказать эту закономерность.

Докажем, что на на первом и третьем месте всегда стоят нечетные числа, а на втором и четвертом — четные. Для исходных чисел это утверждение верно. Пусть теперь в некоторый момент времени первое и третье числа на доске нечетные, а второе и четвертое — четные. Тогда на следующем шаге (в следующую минуту) вместо первого числа окажется написана сумма второго третьего и четвертого чисел, т.е. одного нечетного и двух четных, а значит число нечетное. Второе число будет равно сумме двух нечетных чисел и одного четного, т.е. окажется числом четным; третье — сумме двух четных и одного нечетного, а значит нечетным; четвертое — сумме двух нечетных чисел и одного четного, т.е. четным.

Итак, мы установили два факта:

1. изначально первое и третье числа нечетные, а второе и четвертое — четные;
2. если после какого-то шага первое и третье числа нечетные, а второе и четвертое — четные, то и минуту спустя первое и третье числа окажутся нечетными, а второе и четвертое — четными.

Значит в любой момент времени первое и третье числа будут нечетными, а второе и четвертое — четными, поэтому первое число стать четным не может.

Способ решения данных задач носит название **метода математической индукции**. Суть его заключается в следующем:

1. *(база индукции)* устанавливается, что изначально некоторый объект (число, фигура, комната) обладает некоторым свойством (является четным, желтым и т.п.);
2. *(шаг индукции)* доказывается, что после каждого следующего шага (этапа, операции, строительства перегородки) это свойство не может исчезнуть, если оно было в начале этого шага;
3. *(вывод)* на основании первых двух пунктов делается вывод, что данное свойство объекта сохраняется во время всего процесса.

При письменном оформлении задач обязательно наличие в тексте решения всех трех пунктов, в противном случае задача не может считаться решенной.

Свойство объекта, которое не меняется во время некоторого процесса имеет свое отдельное название, **инвариант**.

Задачи

20 ∘ 1 (у). С числом разрешается проделывать следующие операции: увеличить его на 2 или умножить на 3. **а)** Можно ли с помощью таких операций получить из числа 1 число 1000? **б)** А из числа 10 число 2011?

20 ∘ 2 (у). Правила хорошего тона запрещают женщине стоять первой в очереди, а мужчине стоять перед женщиной. Может ли в очереди, где все правила соблюдены, оказаться женщина?

20 ∘ 3. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.

20 ∘ 4. Маленькому Коле подарили ножницы. Он отрезал от занавески треугольный кусок, после чего принялся резать его на части: Коля выбирает какой-нибудь из уже имеющихся кусочков занавески, после чего разрезает его прямолинейным разрезом на две части. Докажите, что сколько бы Коля так не работал, среди получившихся кусочков занавески всегда можно будет найти треугольник. Пусть после нескольких таких разрезаний получилось пять треугольных кусков занавески. Может ли спустя какое-то время их оказаться только три?

20 ∘ 5. Есть три кучи камней. Разрешается к любой из них добавить столько камней, сколько есть в двух других кучах, или из любой кучи выбросить столько камней, сколько есть в двух других кучах. Например: $(12, 3, 5) \to (12, 20, 5)$ или $(12, 3, 5) \to (4, 3, 5)$. Можно ли, начав с куч 4321, 321 и 43, сделать одну из куч пустой?

20 ∘ 6. На доске написано несколько чисел, среди которых есть как четные, так и нечетные. Можно выбрать любые два числа, найти их сумму, после чего записать ее на доску вместо любого из этих двух чисел. Можно ли несколькими такими операциями добиться того, чтобы все числа стали четными?

20 ∘ 7. По кругу написано 10 чисел: 5 единиц и 5 минус единиц. Каждую минуту между любыми двумя соседними числами записывают их сумму, после чего имевшиеся до этого момента числа стирают. Чему будет равна сумма чисел, которые будут написаны спустя один час?

20 ∘ 8. а) Из нескольких кубиков со стороной 1 склеили тело так, что любые два кубика либо склеены по грани, либо их грани не соприкасаются. Может ли площадь поверхности такого тела быть равной 2011? **б)** Укажите все значения, которые может принимать площадь поверхности такого тела.

20 ∘ 9. На доске записано число 123456789. У написанного числа выбираются две соседние цифры, если ни одна из них не равна 0, из каждой цифры вычитается по 1, и выбранные цифры меняются местами (например, из 123456789 можно за одну операцию получить 123436789). Какое наименьшее число может быть получено в результате таких операций?

20 ∘ 10. Из листа клетчатой бумаги вырезали квадрат со стороной 20 см, стороны которого идут по сторонам клеточек. Его разрешается разрезать на две части разрезом, проходящим по сторонам клеточек. После этого такую же операцию разрешается проделать с любой из получившихся частей и т.д. Можно ли несколькими такими разрезаниями получить несколько фигур, сумма периметров которых равна 234,5 см? (Сторона одной клетки равна 0,5 см.)

20 ∘ 11. На экране монитора отображаются четыре числа: 0, 1, 7, 9. Каждую минуту вместо каждого из чисел компьютер записывает сумму трех других чисел. Перед компьютером сидит программист Петя, который может нажатием кнопки в любой момент уменьшить все числа на экране на единицу. Может ли он добиться того, чтобы в некоторый момент последние два числа на экране были равны 5 и 10?

20 ∘ 12. В двух сосудах находится поровну воды. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. В каком сосуде окажется больше воды после 100 переливаний: в первом или во втором?

20 ∘ 13.[1] На доске написано число 102. Петя прибавляет к числу, записанному на доске, число, составленное из тех же чисел, но в другом порядке. Полученный результат он записывает на доску вместо имеющегося там числа. (Так, вместо числа 102 он может например получить $102 + 210 = 312$ или $102 + 021 = 123$.) Может ли после нескольких таких операций на доске оказаться число 2011?

20 ∘ 14. На доске написаны числа 0, 1, 2. За одну операцию каждое из трех чисел умножается на 2, после чего результат увеличивается на 1. Полученные три новых числа записываются на доску вместо трех имевшихся ранее. Может ли после нескольких таких операций среди трех записанных на доске чисел найтись два, разность которых делится на 3? Докажите, что в любой момент времени сумма всех трех чисел на доске делится на 3.

20 ∘ 15. По кругу записаны 3 различных числа. Каждую минуту к каждому из чисел прибавляют следующее за ним по часовой стрелке, и три полученных при этом числа вновь записывают по кругу вместо имевшихся. Могут ли после нескольких таких операций какие-то два числа оказаться равными? Пусть первоначально были записаны числа 5, 9 и 16. Могут ли через некоторое время появиться такие три числа, что разность между какими-то двумя из них будет делиться на 3?

20 ∘ 16. Электронные часы у Васи испортились. Теперь время на них каждую секунду меняется по следующему закону: к количеству часов прибавляется количество минут, к количеству минут — количество секунд, к количеству секунд — количество часов, находятся остатки полученных трех чисел на 24, 60 и 60 соответственно и отображаются на экране. (Так, если в некоторый момент часы показывали 12:43:56, то через секунду будут показывать 07:39:08, еще через секунду 22:47:15). Пусть в момент поломки часы показывали 10:20:09. Могут ли через некоторое время часы показать 12:24:46; 01:03:05; 20:09:11? Докажите, что между моментами, когда часы показывают одинаковое время, проходит кратное 6 число секунд.

20 ∘ 17. На доске написаны числа 332, 541, 826, 179. Каждую минуту вместо каждого из чисел записывают последние три цифры суммы трех других чисел. Может ли через некоторое время последнее число стать равным 169?

20 ∘ 18. Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся команды A, B и C такие, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C выиграла у A.

[1] Здесь полезно было бы вспомнить разные факты про признаки делимости чисел и постараться применить их (если что-то удалось вспомнить) к решению задач второй половины листка.

Индукция

Покажем применение принципа математической индукции для решения такой задачи:

Пример 1. Докажите, что $1 + 2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Решение.

База: При $n = 1 : 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$.

Шаг: Допустим, утверждение задачи верно для n. Докажем его для $n + 1$. Посмотрим:

$$1 + 2 + \ldots + 2^{n+1} = 1 + 2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1.$$

Утверждение доказано.

Вывод: Утверждение верно при любом натуральном n, что и требовалось доказать.

Задачи

21 ∘ 1. На доске написаны два числа $1, 1$. Затем между ними вписывают их сумму; получается $1, 2, 1$. Затем между каждыми двумя снова вписывают их сумму: $1, 3, 2, 3, 1$. Такое действие выполняют ещё 10 раз. **а)** Сколько чисел будет на доске? **б)** Какова будет их сумма?

21 ∘ 2. В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная лишь ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

21 ∘ 3. Докажите, что квадрат $2^n \times 2^n$ без одной клетки при любом натуральном $n \geqslant 2$ можно разрезать на «уголки» из трех клеток.

21 ∘ 4. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

21 ∘ 5. а) Игрушка «Ханойская башня» имеет три стержня. На одном находится пирамидка из нескольких колец, уменьшающихся снизу вверх. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что все кольца можно переложить с одного стержня на другой при любом числе колец. **б)** Докажите, что в игрушке «Ханойская башня» с n кольцами можно переложить все кольца за $2^n - 1$ перекладываний. **в)** Докажите, что меньшим числом перекладываний обойтись нельзя.

21 ∘ 6. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

21 ∘ 7. В небольшом северном государстве зимой дороги заносит снегом настолько, что из одного населенного пункта в другой можно добраться либо по воздуху на вертолете, либо водным путем с помощью парома. При этом любые два населенных пункта связаны напрямую хотя бы одним из этих способов. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы из любого населенного пункта можно было добраться до любого другого, возможно, что с пересадками.

21 ∘ 8. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой не более чем с одной пересадкой.

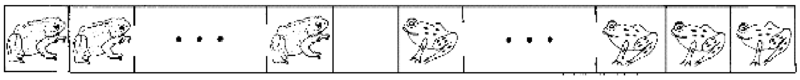
21 ∘ 9. Перед шеренгой новобранцев из N солдат стоит капрал и командует: «Нале-ВО!» По этой команде некоторые солдаты поворачиваются налево, остальные — направо. После этого через каждую секунду каждые два солдата, оказавшиеся лицом друг к другу, поворачиваются друг к другу затылками. **а)** Докажите, что через конечное время движение прекратится. **б)** Оцените, через сколько секунд это заведомо произойдет.

21 ∘ 10. На кольцевой автотрассе стоит несколько машин, в баках которых находится количество бензина, достаточное для того, чтобы объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин может объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.

21 ∘ 11. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета так, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

21 ∘ 12. В таблице из трех строк и 2010 столбцов произвольным образом расставлены фишки: 2010 белых, 2010 красных и 2010 синих. Докажите, что можно так переставить фишки в каждой строке, чтобы в каждом столбце оказались фишки всех трех цветов. Докажите, что в случае с n фишками можно обойтись менее чем $2n$ перестановками.

21 ∘ 13. В игрушке "лягушки против жаб,"которую вы видите на рисунке ниже,



необходимо поменять лягушек и жаб местами. Правила игры следующие: жабы и лягушки могут перемещаться на соседние с ними клетки, либо перепрыгивать через рядом стоящую лягушку (или жабу) на свободную клетку, причём жабы двигаются только влево, а лягушки — только вправо. Докажите, цели можно добиться при любом количестве лягушек и жаб (изначально они расположены именно так, как показано на картинке).

4 и 9

23 ∘ 1. В кафе предлагают 4 вида напитков и 9 видов пирожных. Сколькими способами можно заказать напиток и пирожное?

23 ∘ 2. а) В подвале у людоеда томятся 9 пленников. Сколькими способами он может выбрать 4 из них себе на завтрак, обед, полдник и ужин? **б)** А выбрать четверых, чтобы отпустить их на свободу?

23 ∘ 3. а) Сколько различных девятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4? **б)** А четырехзначных чисел из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

23 ∘ 4. Сколько чисел, делящихся на 4, можно составить из 4 единиц и 9 двоек?

23 ∘ 5. Сколько 9-значных чисел делятся на 4?

23 ∘ 6. а) Сколько существует 9-значных чисел, в записи которых участвует ровно 4 четверки? **б)** А сколько из них делятся на 4?

23 ∘ 7. Найдите количество 9-тизначных чисел, в десятичной записи которых содержится хотя бы одна цифра 4.

23 ∘ 8. Колода состоит из 36 карт: по 9 карт каждой из 4 мастей. **а)** Сколькими способами из колоды можно выбрать 4 карты разной масти? **б)** А 4 карты одной масти?

23 ∘ 9. а) Сколькими способами можно раздать 36 карт 4 игрокам, каждому по 9 карт? **б)** Сколькими способами можно разделить 36 школьников на 4 команды по 9 человек для участия в школьных соревнованиях?

23 ∘ 10. В секции бокса занимается 9 человек. Сколькими способами можно выбрать из них 4 для проведения двух показательных боев? Рассмотрите случаи: **а)** бои проводятся одновременно; **б)** бои проходят в два разных дня. (Боксерам не все равно, кто будет их противником.)

23 ∘ 11. а) Сколькими способами можно раздать 9 одинаковых конфет 4 школьникам? **б)** А если конфеты различны?

23 ∘ 12. Сколько решений имеет уравнение $a+b+c+d=9$ **а)** в целых неотрицательных числах; **б)** в натуральных числах?

23 ∘ 13. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из 9 букв. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

23 ∘ 14. На каждой из двух параллельных прямых отмечено по 9 точек. Сколько существует различных 4-хугольников с вершинами в этих точках?

23 ∘ 15. В шахматном кружке занимаются 4 девочки и 9 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из 4 человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

23 ∘ 16. Имеется 16 шариков 4 цветов, по 4 шарика каждого цвета. Сколькими способами их можно разложить в 9 различных коробок?

23 ∘ 17. Сколько различных натуральных делителей у числа $4^9 \cdot 9^4$?

23 ∘ 18. Сколькими способами можно составить комиссию из 4 человек, выбирая ее членов из 9 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

23 ∘ 19. У Пети и у Коли по 9 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом 4 конфетами?

23 ∘ 20. Параллелограмм пересекает 9 прямых, параллельных одной паре его сторон, и 4 прямых, параллельных другой паре его сторон. Сколько различных параллелограммов (не обязательно маленьких) можно выделить на получившейся картинке?

23 ∘ 21. Найдите наибольшее количество весов, которое можно взвесить с помощью 4 гирь и двухчашечных весов без стрелки, если **а)** гири разрешается класть только на одну чашку весов; **б)** гири можно класть на обе чашки весов.

23 ∘ 22. Сколькими способами можно составить букет из 9 цветков, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы и тюльпаны?

23 ∘ 23. Сколькими способами клетки таблицы 9×9 можно покрасить в 4 цвета так, чтобы соседние по стороне или углу клетки имели разный цвет?

23 ∘ 24. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 4 красными и 9 синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено? (Две погремушки считаются одинаковыми, если одна из них может быть получена из другой только передвижением шариков по кольцу и переворачиванием.)

Число сочетаний

Определение 24.1. Числом сочетаний из n элементов по k называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов. Обозначение: C_n^k (читается «це из n по k»). Иногда используется обозначение $\binom{n}{k}$.

24 ∘ 1 (у). Группа из 9 школьников отправилась в поход. Сколькими способами можно из этих 9 школьников выбрать троих для приготовления обеда? А выбрать шестерых и отправить за дровами? Объясните совпадения результатов. Как записываются эти количества с помощью C_n^k?

24 ∘ 2 (у). На примере предыдущей задачи объясните, почему $C_n^k = C_n^{n-k}$.

24 ∘ 3. Запишите ответы к любым 10 задачам или пунктам задач предыдущего листка с помощью C_n^k.

24 ∘ 4 (у). а) Что означают и чему равны C_n^0 и C_n^n? **б)** Докажите, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

24 ∘ 5 (у). Докажите, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ **а)** используя формулу для C_n^k; **б)** не пользуясь формулами, а только лишь определением C_n^k.

24 ∘ 6 (у). Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд). **а)** Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время?

24 ∘ 7 (у). Пользуясь решением предыдущей задачи, докажите равенства:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n2^{n-1}$.

24 ∘ 8 (у). Петя и Вася решили поспорить, кто из них дольше сможет питаться в школьной столовой. Условия спора следующие: Петя каждый день съедает четное число блюд (возможно, что и ни одного), а Вася — нечетное, причем каждый день необходимо съедать новый набор блюд. Кто из них победит в споре?

24 ∘ 9 (у). Докажите равенство $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

24 ∘ 10 (у). Вася съедает каждый день в столовой, меню которой состоит из n блюд, нечетное число блюд. **а)** Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время? **в)** Какие равенства на число сочетаний можно получить из этой задачи?

24 ∘ 11 (у).

а) Пользуясь задачей 23.15, докажите равенство $C_{13}^4 - C_9^4 = C_4^1 C_9^3 + C_4^2 C_9^2 + C_4^3 C_9^1 + C_4^4 C_9^0$.

б) Докажите, что $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \dots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$.

24 ∘ 12. Докажите равенство $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$.

24 ∘ 13. Докажите равенство $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$.

24 ∘ 14. Докажите равенство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.

24 ∘ 15 (у). а) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a+b)^3$, $(a+b)^4$. **б)** Раскроем скобки и приведем подобные в выражении $(a+b)^n$. Объясните, почему каждое слагаемое будет иметь вид $a^k b^{n-k}$ умноженное на некоторое число.

24 ∘ 16 (у). *(Бином Ньютона)* Докажите, что

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Другими словами, докажите, что коэффициент при $a^k b^{n-k}$ после раскрытия скобок выражении $(a+b)^n$ равен C_n^k.

Треугольник Паскаля

Определение 25.1. Треугольником Паскаля называют числовой треугольник, изображенный на рисунке (по краям треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
. & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}
$$

В треугольнике Паскаля строки нумеруются сверху вниз, нумерация начинается с нуля. Выше выписаны строки с номерами от 0 до 4. Числа в строках нумеруются слева направо также начиная с нуля.

25 ∘ 1. Выпишите строки треугольника Паскаля с 0 по 10. Результат выучите наизусть.

25 ∘ 2. Запишите рассказанное вам доказательство того, что k-ое число n-ой строки равно C_n^k.

25 ∘ 3 (у). Решите приведенные ниже задачи, пользуясь треугольником Паскаля.
а) Сколькими способами можно выбрать в походе 3 человека для приготовления обеда среди 9 туристов? **б)** Сколькими способами среди 10 школьников выбрать 4 дежурных, причем Вася и Петя не должны оказаться дежурными одновременно? **в)** Сколькими способами из 3 сержантов и 8 солдат можно составить отряд из 4 человек так, чтобы в нем было не менее одного сержанта? **г)** Сколькими способами можно выбрать среди 7 супружеских пар комиссию из 3 человек так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

25 ∘ 4 (у). Решите приведенные ниже задачи, пользуясь треугольником Паскаля.
а) На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках? **б)** На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в этих точках? **в)** Сколько существует четырехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке? **г)** Сколько существует трехзначных чисел, цифры которых нечетны и идут в убывающем порядке?

25 ∘ 5. Докажите тождество $C_{n-1}^{k-1} \cdot C_n^{k+1} \cdot C_{n+1}^k = C_{n-1}^k \cdot C_{n+1}^{k+1} \cdot C_n^{k-1}$ **а)** пользуясь только формулой для числа сочетаний; **б)** не пользуясь ей; **в)** с помощью треугольника Паскаля. **г)** Данное равенство называется *свойством шестиугольника*. Попробуйте объяснить, почему.

25 ∘ 6 (у). Докажите тождество $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ с помощью треугольника Паскаля.

25 ∘ 7 (у). Вычислите сумму чисел в $1, 2, 3, \dots, 7$ строках треугольника Паскаля. Найдите и докажите наблюдаемую закономерность.[1]

25 ∘ 8 (у). Запишем в треугольник Паскаля вместо чисел слово «треугольник» следующим

[1] Полезно провести рассуждения в том же виде, как и в задаче 2.

образом:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \text{т} & & & & & \\
 & & & & \text{р} & & \text{р} & & & & \\
 & & & \text{е} & & \text{е} & & \text{е} & & & \\
 & & \text{у} & & \text{у} & & \text{у} & & \text{у} & & \\
 & \text{г} & & \text{г} & & \text{г} & & \text{г} & & \text{г} & \\
. & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}$$

Сколькими способами, двигаясь по данной таблице, можно прочитать слово «треугольник»?

25 ∘ 9 (у). Рассмотрим прямоугольную сетку квадратов размерами $m \times n$ — шахматный город, состоящий из «кварталов», разделенных $n-1$ горизонтальными и $m-1$ вертикальными «улицами». Каково число различных кратчайших путей на этой сетке, ведущих из левого нижнего угла (точка $(0;0)$) в правый верхний угол (точку $(m;n)$)?

25 ∘ 10 (у). В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?

25 ∘ 11 (у). Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком (не считая краев) из четных чисел?

25 ∘ 12 (у). Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком (не считая краев) из чисел, делящихся на 3?

Определение 25.2. Лучи, параллельные сторонам треугольника Паскаля, называются **диагоналями**. Причем лучи, параллельные правой стороне, называются правыми диагоналями, а левой — левыми диагоналями.

25 ∘ 13. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над данным числом.[2]

25 ∘ 14. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит данное число (сами эти диагонали в данный параллелограмм не включаются).

25 ∘ 15. а) Используя числа второй диагонали треугольника Паскаля, найдите сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$. **б)** Выразите многочлен n^2 через C_n^2 и C_n^1 **в)** Найдите сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

25 ∘ 16. Выразите многочлен n^3 через C_n^3, C_n^2 и C_n^1.

25 ∘ 17. Найдите сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

25 ∘ 18 (у). Объясните, каким образом можно получить формулу для нахождения суммы $1^{10} + 2^{10} + \ldots + n^{10}$.

[2]Если в этой и следующей задачах вы не очень поняли, о каких числах идет речь и что нужно доказать, не стесняйтесь обратиться с вопросом к преподавателю.

Комбинаторика и алгебра

26 ∘ 1. *(Бином Ньютона)* Докажите, что

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Другими словами, докажите, что коэффициент при $a^k b^{n-k}$ после раскрытия скобок выражении $(a+b)^n$ равен C_n^k.

26 ∘ 2. а) Раскройте скобки в выражениях $(x+y)^9$ и $(x-y)^9$. **б)** Раскройте скобки в выражениях $(2x-3y)^5$. **в)** Какие коэффициенты будут при ab^{13} и $a^{11}b^3$ после раскрытия скобок в выражении $(a+b)^{14}$.

26 ∘ 3. Найдите наибольший коэффициент в многочлене **а)** $(a+b)^{12}$; **б)** $(a+2b)^{10}$.

26 ∘ 4. Используя формулу бинома, докажите, что **а)** сумма чисел в любой строке треугольника Паскаля есть степень 2; **б)** знакопеременная сумма чисел в любой строке равна 0.

26 ∘ 5. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена **а)** $(a+b)^{12}$; **б)** $(5a-3b)^{10}$; **в)** $(a+b-c)^{12}$.

26 ∘ 6. В многочлене $(a+b-c)^{12}$ найдите сумму всех всех коэффициентов при одночленах, **а)** не содержащих a; **б)** содержащих b.

26 ∘ 7 (у). а) При игре в преферанс каждому из трех игроков раздают по 10 карт, а две карты кладут в прикуп. Сколькими способами можно раздать карты Коле, Роме и Саше для игры в преферанс? **б)** В выражении $(p+q+r+s)^{32}$ раскрыли скобки. Найдите коэффициент при $p^2q^{10}r^{10}s^{10}$.

26 ∘ 8. а) Найдите коэффициент при ab^2c^3 в многочлене $(a+b+c)^6$. **б)** Найдите коэффициент при $a^{10}b^{15}c^{20}$ в многочлене $(a+b+c)^{45}$. **в)** Найдите коэффициент при $abcde$ в многочлене $(a+b+c+d+e)^5$.

26 ∘ 9. В выражении $(x_1+\ldots+x_k)^n$ раскрыли скобки и привели подобные. Найдите коэффициент при $x_1^{i_1}\ldots x_k^{i_k}$. Этот коэффициент называется **мультиномиальным коэффициентом** и обозначается $C_n^{i_1,i_2,\ldots i_k}$ или $\binom{n}{i_1,i_2,\ldots i_k}$.

26 ∘ 10. Докажите, что $C_n^{i_1,\ldots,i_k} = C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} C_{n-i_1-i_2}^{i_3} \ldots C_{n-i_1-i_2-\ldots-i_{k-1}}^{i_k}$ **а)** пользуясь формулой для числа сочетаний; **б)** не используя эту формулу.

26 ∘ 11. Докажите, что коэффициент при x^{10}, который получится после раскрытия скобок и приведения подобных в $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10})^3$, равен числу решений уравнения $a+b+c=10$ в целых неотрицательных числах и найдите это число.

26 ∘ 12 (у). Докажите, что число способов разменять 20 долларов бумажками в 1, 2 и 5 долларов равно коэффициенту при x^{20} в

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{20})(1+x^2+x^4+x^6\ldots+x^{20})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}).$$

26 ∘ 13 (у). Петя вычислил произведение $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$. Вася доказал, что, имея по одной гире в 1, 2, 4, 8 и 16 граммов, можно набрать любой вес от 1 до 31 грамма, причём единственным способом. Юра сказал Пете и Васе: «Вы решали одну и ту же задачу». Почему он так сказал?

26 ∘ 14. Придумайте задачу по комбинаторике, эквивалентную задаче о нахождении коэффициента при одночлене $x^3y^3z^3$ в многочлене $(x+y+z)^9$, и решите её.

26 ∘ 15. Докажите, что для любого неотрицательного числа h верны неравенства

а) $(1+h)^n \geqslant 1+nh$;

б) $(1+h)^n \geqslant 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3$.

26 ∘ 16. Найдите такое натуральное число $n>1$, для которого верны неравенства: **а)** $1,001^n > 1000$; **б)** $1,001^n > 100n$; **в)** $0,999^n < 0,001$; **г)** $1,001^n > n^2$.

26 ∘ 17 (у). Почему равенства $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$ похожи на строки треугольника Паскаля? Найдите с помощью треугольника Паскаля 11^6.

26 ∘ 18. Вычислите с помощью бинома Ньютона и треугольника Паскаля 1001^{10}.

26 ∘ 19 (у). С помощью бинома Ньютона раскроем скобки в многочлене $(1+x)^{n+m}$. Теперь раскроем скобки отдельно в каждом из выражений $(1+x)^n$ и $(1+x)^m$, после чего перемножим их. **а)** Какой получится коэффициент при x^k в каждом из случаев? **б)** Исходя из данных вычислений, докажите равенство $C_{n+m}^k = C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1}+\ldots+C_n^kC_m^0$.

По аналогии с предыдущей задачей решите следующие 4 задачи.

26 ∘ 20. Исходя из того, что C_n^k — коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$, докажите, что $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$.

26 ∘ 21. Исходя из того, что C_n^k — коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$, докажите, что $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2$.

26 ∘ 22. Исходя из того, что C_n^k — коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$, докажите, что $C_r^mC_m^k = C_r^kC_{r-k}^{m-k}$.

26 ∘ 23. Исходя из того, что C_n^k — коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$, докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+\ldots+C_{k-1}^{k-1}$.

26 ∘ 24. Из задачи про обеды известно, что $0\cdot C_n^0+1\cdot C_n^1+\ldots+n\cdot C_n^n = n\cdot 2^{n-1}$. Попробуйте найти формулу для суммы

$$0\cdot C_n^0\cdot x^0 + 1\cdot C_n^1x^1+\ldots+n\cdot C_n^nx^n$$

при произвольном x. Задача про количество съеденных блюд будет являться частным случаем этой формулы при $x=1$.

Деление с остатком

Теорема 28.1. *Для любого целого числа a и любого натурального числа b существуют единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$ и $0 \leqslant r < b$.*

В этом случае число q называется *неполным частным*, а целое неотрицательное число r называется *остатком* от деления a на b.

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что для любого целого a и натурального b числа q и r существуют, а потом то, что они определяются единственным образом.

Существование. Возьмем числовую прямую с отмеченной на ней точкой 0 — началом отсчета. Также отметим на ней число a. Начнем откладывать в обе стороны от точки 0 отрезки длины b и отмечать их концы. На прямой помимо a появятся точки $\ldots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \ldots$. Поскольку точка a находится на каком-то конкретном расстоянии от начала отсчета, то в некоторый момент очередной отложенный отрезок длины b «накроет» ее. В итоге точка a либо окажется между точками qb и $(q+1)b$ — концами очередного отрезка, либо совпадет с одним из них, будем считать, что с qb. Значит можно записать следующее неравенство: $qb \leqslant a < (q+1)b$. Уменьшая все части данного двойного неравенства на qb, получим $0 \leqslant a - qb < b$. Если теперь в этом неравенстве обозначим $a - qb = r$, то получим $0 \leqslant r < b$, и $a = qb + r$.

Тем самым мы показали, как можно найти числа q и r, удовлетворяющие условию теоремы. Теперь докажем, что данная пара чисел — единственная, удовлетворяющая условиям.

Единственность. Предположим, что помимо пары чисел q и r существует еще пара чисел q' и r', отличающаяся от первой хотя бы одним из чисел q' или r', причем

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b,$$

$$a = bq' + r', \quad 0 \leqslant r' < b.$$

Тогда $bq + r = bq' + r'$. Если в последнем равенстве $q = q'$, то и $r = r'$, что означает совпадение пар чисел q, r и q', r' и противоречит предположению. Пусть $q \neq q'$. Будем считать, что $q' > q$ (случай $q' < q$ полностью аналогичен). Из равенства $bq + r = bq' + r'$ получаем $r - r' = b(q' - q)$. Поскольку числа q и q' — целые, $q' > q$, то $q' - q \geqslant 1$, $r - r' \geqslant b$. С другой стороны числа r и r' — неотрицательные и меньше b, поэтому их разность должна быть обязательно меньше b. Приходим к противоречию, значит предположение о существовании второй пары чисел q', r неверно. Единственность доказана. □

Скажем теперь несколько слов по поводу этой теоремы. Собственно делить числа друг на друга с остатком учат еще в начальной школе. Однако данная теорема дает некоторые новые сведения и возможности. Во-первых, здесь четко определяется, что значит разделить одно число на другое с остатком, дается строгое определение неполного частного и остатка. Также доказывается, что такое деление можно провести всегда, причем единственным образом. Но более важный факт заметен не сразу. В начальной школе делились с остатком только натуральные числа на натуральные. В теореме же речь идет о делении любого <u>целого</u> числа на натуральное. И отличие здесь оказывается существенным. Разберем пример.

Пример 1. Найти остаток от деления числа -23 на 7.

В большинстве случаев начинают рассуждать следующим образом: «Поскольку остаток от деления 23 на 7 равен 2, а целое частное 3, это всем ясно, то в случае числа -23 получим остаток -2, а целое частное -3.» Но данный ответ неверный. Если вспомнить определение остатка, то он должен быть целым неотрицательным числом, меньшим 7, т.е. может принимать значения $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, и равняться -2 никак не может. После данного пояснения самым распространенным является ответ: «Ну тогда остаток будет 2, как и в случае числа 23.» Однако он тоже оказывается неверным.

Начнем рассуждать исходя из определения. Нам необходимо представить число -23 в виде $-23 = 7q + r$. Поскольку в этом равенстве r не может быть отрицательным, то $7q$ не может быть больше -23 и должно делиться на 7. Ближайшее не превосходящее -23 число, делящееся на 7, равно -28. Тогда $-23 = -28 + 5 = 7 \cdot (-4) + 5$, а значит остаток от деления -23 на 7 равен 5, целое частное равно -4.

Ответ: 5.

Остатки обладают следующими замечательным свойствами:

Теорема 28.2. *Пусть целые числа a_1 и a_2 при делении на натуральное число b дают остатки r_1 и r_2 соответственно. Тогда*

а) *остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b;*

б) *остаток от деления $a_1 - a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 - r_2$ на b;*

в) *остаток от деления $a_1 a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 r_2$ на b.*

Докажем какое-нибудь одно из утверждений, например б).

Доказательство. По условию числа a_1 и a_2 можно записать в виде $a_1 = bq_1 + r_1$, $a_2 = bq_2 + r_2$, тогда $a_1 - a_2 = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$. С другой стороны, если остаток от деления $a_1 - a_2$ на b равен r, то $a_1 - a_2 = bq + r$, и верно неравенство $0 \leqslant r < b$. Значит $b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 = bq + r$ откуда имеем: $r_1 - r_2 = bq - b(q_1 - q_2) + r = bQ + r$. Поскольку в последнем равенстве Q — некоторое целое число, $0 \leqslant r < b$, то это и означает, что остаток от деления $r_1 - r_2$ на b равен r — остатку от деления $a_1 - a_2$ на b. $\square$

Данная теорема позволяет существенно облегчить процесс нахождения остатков от деления некоторых числовых выражений.

Пример 2. Найти остаток от деления числа $59 \cdot 60 \cdot 61 - 62$ на 7.

Поскольку остатки от деления чисел 59, 60, 61 и 62 на 7 равны соответственно 3, 4, 5 и 6, то искомый остаток равен остатку от деления числа $3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 = 60 - 6 = 54$ на 7, т.е. равен 5.

Ответ: 5.

Для более короткой записи этого решения полезно знать следующее определение.

Определение 28.1. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю n,* где n — натуральное число, если a и b дают один и тот же остаток при делении на n.

Обозначение: $a \equiv b \pmod{n}$.

С помощью новых обозначений решение последней задачи можно записать следующим образом:

$59 \cdot 60 \cdot 61 - 62 \equiv 3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 \equiv 60 - 6 \equiv 54 \pmod{7}$.

Ответ: 5.

Стоит сказать и о том, что значит a делится на b.

Определение 28.2. Пусть a и b — целые числа. Тогда b называется делителем a, если существует такое целое число q, что $a = bq$. В этом случае a называется *кратным b, q — частным от деления a* на b.

Обозначение: $b|a$, читается «b делит a.»

Заметьте, что определение делимости дается для целых чисел a и b, а в случае деления с остатком одно из чисел было натуральным. Если бы в определении деления с остатком число b могло принимать отрицательные значения, то неравенство $0 \leqslant r < b$ было бы невозможным. Несложно понять, что при положительных b верна следующая теорема.

Теорема 28.3. *Натуральное число b является делителем числа a тогда и только тогда, когда остаток от деления a на b равен 0.*

Задачи

28 ∘ 1. Найдите частное и остаток от деления a на b, если

а) $a = 387$, $b = 12$;
б) $a = 17$, $b = 31$;
в) $a = -10$, $b = 3$;
г) $a = -387$, $b = 12$;
д) $a = (n+1)^2$, $b = n$, n — натуральное;
е) $a = n^2+2n-1$, $b = n$, n — натуральное.

28 ∘ 2. При делении целого числа a на 67 получили частное 29 и остаток r. Найдите наибольшее возможное значение a.

28 ∘ 3. Целое число a при делении на натуральное число b дает остаток r. Какой остаток при делении на b дает число $-a$?

28 ∘ 4. Положительное число делится на 24, а после прибавления 1 делится на 23. Может ли так быть?

28 ∘ 5. Известно, что числа 1270 и 1449 дают при делении на натуральное число a одинаковые остатки. Найдите это число.

28 ∘ 6. Натуральное число A при делении на 2008 дает в остатке 179, и при делении на 2009 дает в остатке 179. Найдите остаток от деления этого числа на 14.

28 ∘ 7. Рассмотрим остатки от деления m последовательных натуральных чисел на m. Может ли в этой последовательности встретиться два одинаковых числа? Три одинаковых?

28 ∘ 8. Целые числа a, b, c дают при делении на 7 остатки 1, 4, 5 соответственно. Найдите остатки от деления на 7 чисел:[1] **а)** $a+b+c$; **б)** $2a-3b+4c$; **в)** bc; **г)** c^3; **д)** a^n, где n — произвольное натуральное число.[2]

28 ∘ 9. Пусть целые числа a_1 и a_2 при делении на натуральное число b дают остатки r_1 и r_2 соответственно. Докажите, что

а) остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b;
б) остаток от деления a_1a_2 на b равен остатку от деления r_1r_2 на b.

28 ∘ 10. Найдите остатки от деления

а) $2011 \cdot 2012 + 2013 \cdot 2014$ на 6;
б) $736^3 - 355 \cdot 354 \cdot 353$ на 7;
в) $9^9 + 9^{19} + 9^{29}$ на 8.

[1]Пользоваться в этой задаче теоремой 28.2 нельзя, решайте с помощью определения.
[2]Воспользуйтесь биномом Ньютона.

28 ∘ 11. Какие остатки может давать 13^n при делении на 12?

28 ∘ 12. Какие остатки может давать $2n^2 + 11n + 19$ при делении на $n + 4$ в зависимости от натурального значения n?

28 ∘ 13. Докажите, что числа a и b сравнимы по модулю n тогда и только тогда, когда разность $a - b$ делится на n.

28 ∘ 14. Пусть целые числа x, y, m, и n таковы, что $x \equiv m \pmod b$ и $y \equiv n \pmod b$. Докажите, что

а) $x + y \equiv m + n \pmod b$;
б) $x - y \equiv m - n \pmod b$;
в) $xy \equiv mn \pmod b$.

Другими словами, докажите, что сравнения можно складывать, вычитать и перемножать.

28 ∘ 15. Пусть $z|x$, $z|y$, и при этом $x \equiv y \pmod b$. Верно ли тогда, что и $\frac{x}{z} \equiv \frac{y}{z} \pmod b$?

28 ∘ 16. Какие остатки от деления на 3 могут давать **а)** целые числа; **б)** квадраты целых чисел?

28 ∘ 17. Докажите, что из любых пяти целых чисел можно найти три, сумма которых делится на 3.

28 ∘ 18. **а)** Существуют ли четыре таких натуральных числа, что сумма любых трех из них есть простое число? **б)** Существуют ли пять таких чисел?

28 ∘ 19. Пусть сумма двух чисел делится на n, а остаток от деления одного из этих чисел на n равен r. Что можно сказать об остатках от деления **а)** второго числа на n? **б)** квадратов этих чисел на n? **в)** кубов этих чисел на n?

28 ∘ 20. Докажите, что среди 31 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 60.

28 ∘ 21. Назовем число n удобным, если $n^2 + 1$ делится на 1000001. Докажите, что среди чисел $1, 2, \ldots, 1000000$ четное число удобных.

28 ∘ 22. Найдите остаток от деления $(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$ на $(n + 2)$.

Остатки степеней

В предыдущем листке мы разобрались, как искать остатки от деления различных выражений на некоторое число b. Для этого можно в выражении сразу заменить каждое из чисел на его остаток от деления на число b и далее работать с этими остатками. Но данный способ помогает не всегда.

Пример 1. Найти остаток от деления числа 33^{35} на 34.

В данном случае заменять число 33 на его остаток от деления на 34 бессмысленно, поскольку этот остаток и равен самому числу 33. Возводить же это число в 35 степень тоже занятие довольно затруднительное. Поэтому сделаем следующий трюк: раз число 33 дает тот же остаток при делении на 34, что и число -1, то воспользуемся равенством $33 \equiv -1 \pmod{34}$. Тогда получим

$$33^{35} \equiv (-1)^{35} \equiv -1 \equiv 33 \pmod{34}.$$

Ответ: 33.

Заменять числа на отрицательные с тем же остатком оказывается полезным приемом, иногда это может заметно облегчить вычисления.

Пример 2. Найти остаток от деления числа $2^{50} + 3^{25}$ на 7.

Опять же, вычислять 2^{50} и 3^{25} совсем не хочется. Если попробуем заменить данные числа на отрицательные как и в предыдущей задаче, то получим равенства

$$2 \equiv -5 \pmod{7}, \quad 3 \equiv -4 \pmod{7}.$$

Возводить -5 и -4 в 50 и 25 степень не лучше. Но здесь можно заметить другое полезное равенство: $2^2 = 4$, а $3 \equiv -4 \pmod{7}$. Тогда будем иметь:

$$2^{50} + 3^{25} \equiv 4^{25} + (-4)^{25} \equiv 4^{25} - 4^{25} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Ответ: 0.

Здесь нам опять повезло и нашелся способ не возводить число в степень. Но так бывает не всегда. Оказывается, что возведение в степень в том случае, если требуется найти только остаток, занятие не всегда такое уж и сложное.

Пример 3. Найти остаток от деления числа 179^{101} на 7.

Сразу же заменяя число 179 на его остаток от деления на 7, получим $179^{101} \equiv 4^{101} \pmod{7}$. Далее ни замена $4^{101} \equiv (-3)^{101} \pmod{7}$, ни равенство $4^{101} = 2^{202}$, не дают никакого видимого упрощения. Попробуем начать возводить в степень, каждый раз заменяя число большее 7 на его остаток от деления на 7. Получим:

$$4^1 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$4^2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$4^3 \equiv 4^2 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{7},$$

$$4^4 \equiv 4^3 \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$4^5 \equiv 4^4 \cdot 4 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$4^6 \equiv 4^5 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{7},$$

$$4^7 \equiv 4^6 \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7.$$

Тут наверно можно остановиться и посмотреть, какие получаются результаты: $4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, \ldots$. Наблюдается закономерность. Было бы хорошо ей воспользоваться. Но прежде необходимо доказать, что закономерность действительно есть и будет наблюдаться далее. Попробуем объяснить, откуда она берется. Остатков от деления на 7 бывает всего семь. Поэтому если мы будем последовательно возводить некоторое число в $1, 2, 3, 4, \ldots$ степени и вычислять их остатки от деления на 7, то в какой-то момент один из остатков встретится второй раз. (По принципу Дирихле это произойдет не позже, чем при восьмом возведении.) Но это пока еще не означает, что будет закономерность в повторении этих остатков. Посмотрим, когда в первый раз остатки у нас совпали. Это были первая и четвертая строки: $4^1 \equiv 4 \pmod 7$ и $4^4 \equiv 4 \pmod 7$. Но поскольку 4^2 и 4^5 получаются из 4 и 4^4 после умножения их на 4, а остатки от деления 4 и 4^4 одинаковые, то и остатки от деления 4^2 и 4^5 окажутся одинаковые. Точно также остатки от деления следующих степеней четверки — 4^3 и 4^6 — совпадут. Остаток каждой последующей степени четверки будет совпадать с ее остатком в степени на три меньше. Поэтому все дальнейшие результаты автоматически определяются первыми тремя, остатки от деления $4, 4^4, 4^7, 4^{10}, \ldots, 4^{3k+1}$ будут равны 4, остатки от деления $4^2, 4^5, 4^8, 4^{11}, \ldots, 4^{3k+2}$ будут равны 2, а остатки от деления $4^3, 4^6, 4^9, 4^{12}, \ldots, 4^{3k}$ будут равны 1. Поскольку $4^{101} = 4^{3\cdot 33+2}$, то остаток от деления будет равен 2.

Ответ: 2.

Можно предложить и другой способ решения этой задачи, в котором используется равенство $4^3 \equiv 1 \pmod 1$. В этом случае

$$4^{101} \equiv \left(4^3\right)^{33} \cdot 4^2 \equiv 1^{33} \cdot 4^2 \equiv 2 \pmod 7.$$

Пример 4. Докажите, что $4 \cdot 5^{2n} + 3 \cdot 6^{2n+1}$ делится на 11 при любом натуральном n.

Решение. В силу истинности сравнений

$$4 \cdot 5^{2n} + 3 \cdot 6^{2n+1} \equiv 4 \cdot 25^n + 18 \cdot 36^n \equiv 4 \cdot 3^n + 7 \cdot 3^n \equiv 11 \cdot 3^n \equiv 0 \pmod{11},$$

делаем вывод, что выражение $4 \cdot 5^{2n} + 3 \cdot 6^{2n+1}$ делится на 11 при любом натуральном n.

Задачи

29 ◦ 1. Найдите остатки от деления 2^{2009} на $3, 5, 7, \ldots, 17$.

29 ◦ 2. Какие остатки могут получаться от деления 7^n на 8 при натуральных n?

29 ◦ 3. Найдите остаток от деления **а)** 3^{100} на 7; **б)** 7 на 3^{100}.

29 ◦ 4. Найдите остаток от деления 7^{777} на 15.

29 ◦ 5. Пусть $a^n \equiv 1 \pmod b$. Докажите тогда, что если $k \equiv l \pmod n$, то $a^k \equiv a^l \pmod b$.

29 ◦ 6. Верно ли утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи: пусть n таково, что если $k \equiv l \pmod n$, то $a^k \equiv a^l \pmod b$. Верно ли тогда, что $a^n \equiv 1 \pmod b$?

29 ◦ 7. Найдите последнюю цифру числа $7^{7^{7^7}}$.

29 ◦ 8. Делится ли $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2008}$ на 3?

29 ◦ 9. Найдите остаток от деления числа $10^{10} + 10^{100} + \ldots + 10^{10^{10}}$ на 7.

29 ◦ 10. Докажите, что **а)** $13^{999} + 23^{999}$ делится на 36; **б)** $40^{100} + 81^{101}$ делится на 41; **в)** $2009^{2009} + 1$ делится на 30; **г)** $2^{41} + 1$ делится на 83; **д)** $2^{50} + 3^{50}$ делится на 13.

29 ◦ 11. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

29 ◦ 12. Докажите, что $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2006 \cdot 2008 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2005 \cdot 2007$ делится на 2009.

29 ◦ 13. Докажите, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2006^3 + 2007^3$ делится на 2007 и на 2008.

29 ◦ 14. Докажите, что $2^{2005} + 3^{2005}$ делится на 11 и на 25, но не делится на 7.

29 ◦ 15. Какое число нужно прибавить к числу $(n^2 - 1)^{100}(n^3 + 1)^{99}$, чтобы результат делился на n?

29 ◦ 16. Докажите, что при любом натуральном n

а) $18^n - 11^n$ делится на 7; **б)** $7^n + 5^{2n+1}$ делится на 3; **в)** $2^{3n} - 1$ делится на 7;
г) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ делится на 11; **д)** $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

29 ◦ 17. Докажите, что $5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1}$ делится на 19 при любом натуральном n.

29 ◦ 18. Докажите, что $7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{4n}$ делится на 100 при любом натуральном n.

29 ◦ 19. Докажите, что $10^n + 5$ делится на 15 при любом натуральном n.

29 ◦ 20. Докажите, что $5^{3^n} + 7$ делится на 12 при любом натуральном n.

29 ◦ 21. а) Докажите, что $10^n - 1$ делится на 11 при любом четном натуральном n. **б)** Докажите, что $10^n + 1$ делится на 11 при любом нечетном натуральном n.

29 ◦ 22. Пользуясь теорией остатков докажите, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$ при любом нечетном натуральном n. Чему равно частное?

29 ◦ 23. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при любом нечетном натуральном n.

29 ◦ 24. а) Верно ли, что пятая степень любого числа оканчивается на ту же цифру, что и само число? **б)** Для каких степеней это утверждение верно?

29 ◦ 25. На какую цифру оканчиваются числа[1] **а)** 3^{2011}; **б)** $33^{77} + 77^{33}$; **в)** $7^{17^{27}}$?

29 ◦ 26. Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$.

29 ◦ 27. На какую цифру оканчивается число $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2$ в зависимости от различных натуральных значений n?

29 ◦ 28. Найдите две последние цифры числа $99^{99} + 51^{51}$.

[1] Данный вопрос эквивалентен следующему: «Найдите остаток от деления на 10 чисел...»

Возможные остатки квадратов и кубов

Выясним, какие остатки может давать квадрат целого числа a при делении на 3. Само число a может давать при делении на 3 остатки 0, 1 или 2. Если $a \equiv 0 \pmod 3$, то $a^2 \equiv 0 \pmod 3$, если $a \equiv 1 \pmod 3$, то $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, если $a \equiv 2 \pmod 3$, то $a^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$. Сведем результаты в таблицу, в верхней строке которой напишем остатки от деления a на 3, а в нижней — остатки от деления a^2 на 3.

остатки от деления на 3			
остаток a	0	1	2
остаток a^2	0	1	1

Видим, что квадрат целого числа может давать при делении на 3 только остатки 0 и 1, а вот остаток 2 невозможен. Попробуем составить аналогичные таблицы для остатков квадратов чисел при делении на 4 и 5. Получим

остатки от деления на 4				
остаток a	0	1	2	3
остаток a^2	0	1	0	1

остатки от деления на 5					
остаток a	0	1	2	3	4
остаток a^2	0	1	4	4	1

Видим, что в случае деления на 4 возможны остатки 0 и 1, а в случае деления на 5 — остатки 0, 1 и 4. Оказывается, что для любого натурального числа $n > 2$ верен следующий факт: при делении целого числа на n возможно n различных остатков $0, 1, \ldots, n-1$, а квадраты целых чисел при делении на n дают меньше, чем n различных остатков. Если быть еще точнее, то остатков от деления квадратов целых чисел не более $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$. Оказывается, что подобным свойством обладают и остатки от деления кубов целых чисел на натуральное число n при некоторых значениях n. Также интересно понаблюдать за тем, какие остатки дают более высокие степени.

Данные факты оказываются интересны не только сами по себе, но и используются для выяснения свойств равенств и выражений, содержащих степени целых чисел. Одно из самых известных таких равенств — это теорема Пифагора: если в прямоугольном треугольнике x и y — длины катетов, а z — длина гипотенузы, то всегда верно равенство $x^2+y^2 = z^2$. Существуют тройки натуральных чисел $(x; y; z)$, которые удовлетворяют этому равенству. Самая известная из них $(3; 4; 5)$, вот например еще две: $(5; 12; 13)$ и $(8; 15; 17)$. Наверно с самого момента возникновения этого равенства люди пытались ответить на вопросы: конечное или бесконечное количество таких троек взаимно простых натуральных чисел, существует ли формула для получения всех таких натуральных троек, есть ли какие-то особенные свойства, которыми обладают числа любой такой тройки. Здесь мы подробнее остановимся на последнем вопросе.

Очевидно, что хотя бы одно число в тройке должно быть четным, поскольку сумма двух нечетных чисел не может равняться нечетному числу. Оказывается, что это не все, и верно более сильное утверждение: если целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 = z^2$, то хотя бы одно из двух чисел x или y обязательно делится на 3, также какое-то одно из этих двух чисел делится на 4 и хотя бы одно из трех чисел делится на 5. Если переформулировать это на геометрический язык, то получим следующее утверждение: в прямоугольном треугольнике с целочисленными сторонами длина какого-то катета делится на 3, какого-то катета делится на 4, а одной из сторон делится на 5. Можно убедиться в истинности этого утверждения для троек, приведенных в качестве примера ранее.

Доказательство. Предположим, что в равенстве $x^2 + y^2 = z^2$ ни x, ни y не делятся на 3. Тогда, согласно первой таблице, их квадраты x^2 и y^2 могут давать только остаток 1 при делении на 3, а сумма их квадратов $x^2 + y^2$ дает остаток 2 при делении на 3. Тогда и z^2 должно давать остаток 2. Но согласно таблице квадраты чисел не могут давать остаток 2 при делении на 3, значит предположение неверно и хотя бы одно из чисел x или y делится на 3.

Теперь разберемся с делимостью на 5. Если ни одно из чисел x, y, z не делится на 5, то согласно таблице их квадраты при делении на 5 могут давать только остатки 1 и 4. Значит в правой части равенства $x^2 + y^2 = z^2$ стоит число, дающее остаток 1 или 4 при делении на 5. Какие остатки может давать сумма в левой части. Проще всего понять это с помощью таблицы. Запишем в первой строке таблицы возможные остатки от деления x^2 на 5, в первом столбце — остатки y^2, а в пересечениях строк и столбцов будем писать остатки от деления $x^2 + y^2$ на 5. Получим:

		ост. x^2	
		1	4
ост.	1	2	0
y^2	4	0	3

Видим, что $x^2 + y^2$ может давать только остатки 0, 2 и 3. Но эти остатки не совпадают с теми, которые может давать z^2, значит в случае, если ни одно из чисел x, y, z не делится на 5, равенство $x^2 + y^2 = z^2$ невозможно.

Доказательство того, что x или y обязательно делится на 4, предлагается провести самостоятельно. Отметим лишь, что в этом случае будет недостаточно рассмотреть остатки от деления на 4 правой и левой части, это поможет лишь доказать, что какое-то одно из двух чисел четно. После этого необходимо провести либо какие-то дополнительные рассуждения, либо рассматривать остатки от деления на другое число.

В этой задаче нам было понятно, что стоит рассматривать остатки от деления на 3 и 5, поскольку речь шла про делимость на 3 и 5. Однако не во всех задачах ясно, остатки от деления на какие числа стоит рассматривать. Зачастую основная сложность в задаче — понять, что нужно работать с остатками, причем угадать, на какое число.

Пример 1. Может ли число $200\ldots009$ быть квадратом целого числа при каком-то количестве нулей?

Решение. Рассмотрим остаток от деления данного числа на 3. Он равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3 (почему?), т.е. равен 2. Но если бы это был квадрат какого-то целого числа, то согласно первой таблице он мог бы давать только остатки 0 и 1 при делении на 3. Значит являться квадратом целого числа число $200\ldots009$ не может.

Немного иначе решение этой задачи можно было бы записать так:

Поскольку $200\ldots009 \equiv 2 \pmod 3$, а a^2 сравнимо с 0 или 1 по модулю 3 для любого целого a, то число $200\ldots009$ не может являться квадратом целого числа.

Посмотрим еще раз на решение этой задачи. При решении был выбран модуль 3, по которому рассмотрели остаток числа $200\ldots009$ и возможные остатки квадратов целых чисел. Но почему именно 3 и как до него нужно было догадаться? На самом деле остаток от деления на 3 числа $200\ldots009$ можно было найти, поэтому его и взяли. Если бы данный модуль не помог, то стоило бы попробовать какой-то другой или совсем другую идею решения.

Пример 2. Докажите, что уравнение $8x^2 - 5y = 11$ не имеет решения в целых числах.

Решение. Если бы равенство $8x^2 - 5y = 11$ было верно при каких-то x и y, то при любом натуральном m было бы верно сравнение $8x^2 - 5y \equiv 11 \pmod{m}$. Попробуем взять какое-то «удобное» значение m. Заметим, что $5y \equiv 0 \pmod 5$, поэтому полезно попробовать взять $m = 5$, это освободит нас от одной неизвестной. Тогда получим $8x^2 - 5y \equiv 11 \pmod 5$ или $3x^2 \equiv 1 \pmod 5$. Согласно таблице $x^2 \equiv 0, 1$ или $4 \pmod 5$, то $3x^2 \equiv 0, 3$ или $2 \pmod 5$, поэтому сравнение $3x^2 \equiv 1 \pmod 5$ не может быть выполнено ни при каких значениях x, а значит и уравнение $8x^2 - 5y = 11$ не имеет решений ни при каких значениях x.

Задачи

30 ◦ 1. Составьте таблицы остатков от деления на m квадратов и кубов целых чисел для $m = 3, 4, 5, 7, 8, 16$.

Полученные таблицы сохраните, каждая из них точно понадобится для решения нескольких задач данного листка. По мере решения листка придется составить и использовать таблицы остатков от деления на другие числа. Возможно, что самые «полезные» в этом отношении числа и не вошли в этот список. Для того, чтобы не выписывать таблицы каждый раз заново, полезно сохранять их и держать в одном месте.

30 ◦ 2 (у). Может ли квадрат целого числа иметь вид **а)** $5q + 2$; **б)** $3q - 1$; **в)** $6q + 2$, $6q - 1$, где q — целое число?

30 ◦ 3 (у). На какие цифры не может оканчиваться квадрат целого числа?

30 ◦ 4 (у). Докажите, что остатков от деления квадратов целых чисел на натуральное число n возможно не более, чем $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.[1] Достигается ли когда-нибудь равенство?

30 ◦ 5. Возьмем произвольное натуральное число n, найдем сумму его цифр, потом найдем сумму цифр результата и т.д. В итоге получим однозначное число r.

- **а)** Докажите, что r равно остатку от деления n на 9, если n не делится на 9, и 9, если n делится на 9.
- **б)** Чему может равняться r, если n — точный квадрат?
- **в)** Точный куб?

30 ◦ 6. Существует ли натуральное число n такое, что **а)** $n^2 + 1$ делится на 3; **б)** $n^3 + 3$ делится на 99?

30 ◦ 7. Докажите, что сумма квадратов трех целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

30 ◦ 8. Докажите, что если при целых x и y число $x^2 + y^2$ делится на 3, то x и y делятся на 3.

30 ◦ 9. а) Целые числа a, b, c и d таковы, что $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ делится на 5. Докажите, что $abcd$ делится на 625. **б)** Целые числа a, b, и c таковы, что $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 9. Докажите, что abc делится на 3.

30 ◦ 10. Сколько существует пар натуральных чисел x и y, не превосходящих 1000, таких, что число $x^2 + y^2$ делится на 49?

30 ◦ 11. a, b, c — натуральные числа, причем $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

[1] $[a]$ — целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее данное. Так, $[2] = 2$, $[5{,}7] = 5$, $[-2{,}3] = -3$.

30 ∘ 12. Сумма трех натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из нее можно выбрать два числа, разность которых тоже делится на 9.

30 ∘ 13. а) Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа? **б)** А трех нечетных чисел?

30 ∘ 14. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является полным квадратом.

30 ∘ 15. Докажите, что число $100\ldots00500\ldots001$ (в каждой из двух групп по 100 нулей) не является кубом целого числа.

30 ∘ 16. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:
а) $12x + 5 = y^2$; **б)** $x^2 - 5y + 3 = 0$; **в)** $x^2 + y^2 = 2011$.

30 ∘ 17. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:
а) $a^2 - 3b^2 = 8$; **б)** $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$; **в)** $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Угадай модуль

31 ∘ 1. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2007$; **в)** $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1999$;
б) $x^4 + y^4 + z^4 = 125$; **г)** $8x^3 - 13y^3 = 17$.

31 ∘ 2. а) p, $p + 10$, $p + 14$ — простые числа. Найдите p.
б) p и $2p + 1$ — простые числа, $p > 3$. Докажите, что число $4p + 1$ — составное.
в) p, $4p^2 + 1$, $6p^2 + 1$ — простые числа. Найдите p.

31 ∘ 3. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в простых числах:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$; **б)** $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 = v^2$.

31 ∘ 4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с целочисленными сторонами длина одного из катетов всегда делится на 4.

31 ∘ 5. Числа $1, 2, \ldots, 1982$ возводятся в квадрат и записываются подряд в некотором порядке. Может ли полученное многозначное число быть полным квадратом?

31 ∘ 6. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины ребер — целые числа, объем — простое число, а площадь поверхности — квадрат целого числа?

31 ∘ 7. Докажите, что сумма четных степеней трех последовательных целых чисел не может равняться четной степени числа.

31 ∘ 8. Найти все натуральные числа, непредставимые в виде разности квадратов каких-либо натуральных чисел.

31 ∘ 9. Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы **а)** двух квадратов; **б)** трех квадратов[1]; **в)** трех кубов.

31 ∘ 10. Докажите, что $a^3 + b^3 + 4$ не является кубом целого числа ни при каких натуральных a и b.

31 ∘ 11. Докажите, что число $2009k + 3$ не является кубом целого числа ни при каком k.

31 ∘ 12. Докажите, что $6n^3 + 3$ не является шестой степенью целого числа ни при каком натуральном n.

31 ∘ 13. Существуют ли натуральные m, n и k такие, что $5^m + 6^n + 11^k$ является квадратом целого числа?

31 ∘ 14. При каких натуральных k число $7^k - 6^k$ является квадратом целого числа?

31 ∘ 15. Может ли число $5^n + 1$ делиться на $5^k - 1$ при каких-то натуральных n и k?

31 ∘ 16. Докажите, что если одно из чисел $2^n - 1$, $2^n + 1$, где $n > 2$, простое, то второе является составным.

31 ∘ 17. Пусть P_n — произведение первых n простых чисел $(n > 1)$. Докажите, что числа $P_n - 1$ и $P_n + 1$ не являются полными квадратами.

31 ∘ 18. Докажите, что если $p > 1$ — целое число, то $3^p + 1$ не может делиться на 2^p.

31 ∘ 19. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

31 ∘ 20. Найдется ли такое натуральное n, что $n^2 + n + 1$ делится на **а)** 2004? **б)** 2005?

31 ∘ 21. Найдите все простые p, что число $p^2 + 11$ имеет ровно 6 различных натуральных делителей (включая 1 и само число).

[1] Зато доказано, что любое натуральное число представимо в виде суммы квадратов четырех целых чисел.

31 ∘ 22. Квадрат целого числа оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Какими?

31 ∘ 23. Определите число цифр в последовательности ненулевых одинаковых цифр, которой может оканчиваться полный квадрат, и найдите наименьший квадрат, который оканчивается на такую максимальную последовательность.

31 ∘ 24. Существуют ли такие целые числа a и b, для которых $ab(a+b) = 200700002008$?