1. Комбинаторика

Для конечных множеств $A_1, \ldots, A_n$ выполнено

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots .$$

В частности, для $n = 2$,

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

и для $n = 3$,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - \big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|\big) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Правило суммы

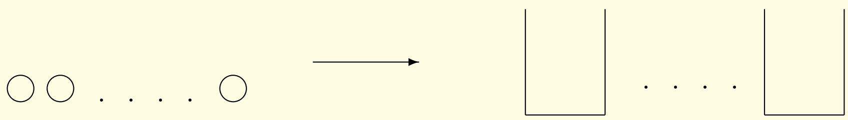
В n ящиках лежат $N_1, \ldots, N_k$ различимых шаров. Сколько имеется способов вытащить из этих ящиков один шар?
Ответ: $N_1 + \ldots + N_k$.

Правило произведения

В n ящиках лежат $N_1, \ldots, N_k$ различимых шаров. Сколько имеется способов вытащить из этих ящиков k шаров, вынимая из каждого ящика по одному шару?
Ответ: $N_1 \cdot \ldots \cdot N_k$.

Стандартные задачи

Задача 1. Сколько имеется способов разложить n $\frac{\text{различимых}}{\text{неразличимых}}$ шаров в k различимых ящиков так, что в каждый ящик можно положить $\frac{\text{не более одного}}{\text{любое число}}$ шаров?



n шаров

k ящиков

Ответ:

	в каждом ящике не более 1 шара	в каждом ящике любое число шаров
шары различимы	$\frac{k!}{(k-n)!}$	k^n
шары неразличимы	$\binom{k}{n}$	$\binom{n+k-1}{k-1}$

Задача 2. Сколько имеется способов разложить $n_1 + \ldots + n_m$ шаров, среди которых n_1 одинаковых шаров 1-го типа, …, n_m одинаковых шаров m-го типа в $n_1 + \ldots + n_m$ различимых ящиков так, что в каждом ящике окажется ровно один шар?

Ответ:

$$\binom{n_1 + \ldots + n_m}{n_1, \ldots, n_m} := \frac{(n_1 + \ldots + n_m)!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_m!}$$

В частности, число способов разложить n различимых шаров в n различимых ящиков так, что в каждом ящике окажется ровно один шар равно $n!$.

Замечание. В русскоязычных текстах приняты следующие обозначения и терминология:

	в каждом ящике не более 1 шара	в каждом ящике любое число шаров
шары различимы	A_k^n (Размещения без повторений)	k^n (Размещения с повторениями)
шары неразличимы	C_k^n (Сочетания без повторений)	C_{k+n-1}^{k-1} (Сочетания с повторениями)

Число способов разложить n различимых шаров в n различимых ящиков так, что в каждом ящике окажется ровно один шар называют *числом перестановок без повторений.*

Задача 3. Сколько имеется способов разложить n неразличимых шаров в k различимых ящиков так чтобы количество ящиков с шарами было равно r?

Решение. Раскладываем в 2 шага.

Шаг 1. Выбираем r ящиков и в каждый из них кладем по одному шару. Количество способов сделать это равно $\binom{k}{r}$.

Шаг 2. Произвольно раскладываем оставниеся $n-r$ шаров в выбранные r ящиков. Количество способов сделать это равно $\binom{n-1}{r-1}$.

По правилу произведения, количество способов равно $\binom{k}{r}\cdot\binom{n-1}{r-1}$.

Следует понимать, что не для всякой задачи по комбинаторике есть простая формула дающая ответ.

Комбинаторные тождества

- $$(x_1+\ldots+x_p)^n = \sum_{j_1+\ldots+j_p=n}\binom{n}{j_1,\ldots,j_p}x_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot x_p^{j_p}.$$
  В частности, для $p=2$,
  $$(x+y)^n = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}.$$
- $$\sum_{m=1}^{n} mt^m = \frac{t(1-(n+1)t^n+nt^{n+1})}{(1-t)^2}.$$
- $$\sum_{j_1+\ldots+j_p=m}\binom{n_1}{j_1}\cdot\ldots\cdot\binom{n_p}{j_p} = \binom{n_1+\ldots+n_p}{m} \quad \text{(тождество Вандермонда).}$$
  В частности, для $p=2$,
  $$\sum_{j_1+j_2=m}\binom{n_1}{j_1}\binom{n_2}{j_2} = \binom{n_1+n_2}{m}.$$
- $$\sum_{n_1+n_2=n}\binom{n_1}{j_1}\binom{n_2}{j_2} = \binom{n+1}{j_1+j_2+1} \quad \text{(еще одно тождество Вандермонда).}$$
  В частности, полагая $j_1=0, j_2=m$, получаем
  $$\sum_{m\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

2. Графы

Эйлеров граф – это граф в котором существует путь проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Теорема Эйлера. *Граф эйлеров тогда и только тогда, когда число вершин нечетной степени равно* 0 *(в этом случае путь будет замкнутым, т.е. циклом) или* 2 *(в этом случае путь будет незамкнутым: начнется в одной вершине нечетной степени и закончится в другой вершине нечетной степени).*

Гамильтонов граф – это граф, который содержит Гамильтонов цикл. Гамильтонов цикл – это цикл, который проходит через каждую вершину графа ровно один раз.

Теорема Дирака. *Если $|V| \geqslant 3$ и степень каждой вершины графа не меньше $\frac{|V|}{2}$, где V – множество вершин графа, то для этого графа существует гамильтонов цикл.*

Планарный граф – это граф, который можно нарисовать на плоскости без самопересечений.

Формула Эйлера. Для связного планарного графа имеем: $|V| - |E| + |F| = 2$, где V – вершины графа, E – ребра графа, F – грани графа.

Теорема Куратовского. *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит K_5 и $K_{3,3}$.*

Пусть $G = (V, E)$ – граф. Подмножество вершин $I \subset V$ называется *изолированным*, если никакие две вершины из I не смежны; подмножество вершин $C \subset V$ называется *кликой*, если всякие две вершины из C смежны.

Теорема Турана.

(1) *В каждом графе $G = (V, E)$ имеется изолированное множество вершин, содержащее не менее $\frac{|V|^2}{|V|+2|E|}$ вершин.*

(2) *В каждом графе $G = (V, E)$ имеется клика, содержащяя не менее $\frac{|V|^2}{|V|^2-2|E|}$ вершин.*

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G – это минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Максимальная (соотв. минимальная) степень вершин графа G обозначаются через $\Delta(G)$ (соотв. $\delta(G)$).

Теорема (Brooks) *Пусть G – связный граф, не являющийся полным графом и не являющийся циклом нечетной длины. Тогда $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Теорема (Szekeres-Wilf) $\chi(G) \leqslant 1 + \max\limits_{H \subseteq G} \delta(H)$ *для всякого графа G.*

Теорема Холла. *Пусть $G(X \bigsqcup Y, E)$ – двудольный граф. Для того, чтобы существовало паросочетание, в которое входят все вершины из X, необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества $A \subset X$ было выполнено*

$$|A| \leqslant |\{y \in Y \mid y \text{ соединен ребром с вершиной из } A\}|$$

Теорема Кёнига. *Рассмотрим матрицу, состоящую из нулей и единиц. Тогда максимальное число ладей, которые можно поставить на единицы так чтобы они не били друг друга равно минимальному суммарному количеству строк и столбцов, которыми можно покрыть единицы.*