信息学奥林匹克联赛(NOIP)模拟赛

提高组 思路提示与题解

1.序列

(sequence.cpp/c)

【问题描述】

给出一个长度为 n 的整数序列，a1,a2,…,an，序列中的数互不相同

给出质数 p

请问有多少序列中的有序数对(x,y)满足

$$(x^2+y)^2 \equiv (x^2-y)^2+1 \pmod p$$

对于 30%的数据，1≤n≤1000

枚举

对于 100%的数据，1≤n≤100000，0<=ai<=10^9，p 是质数

化简

$$(x^2+y)^2 \equiv (x^2-y)^2+1 \pmod p$$

得到

$$4x^2y \equiv 1 \pmod p$$

即

$$4x^2\text{和 } y \text{ 互为乘法逆元} \pmod p$$

注意特判没有乘法逆元的情况

2.汽水

(soda.cpp/c)

【问题描述】

现在有 K 种不同浓度的糖浆，浓度分别为 a1/M,a2/M,…,ak/M

这 K 种原料的数量是无限的

每次可以将整数毫升的几种糖浆匀兑到一起，就可以得到新的浓度的糖浆

问：想要得到浓度为N/M的糖浆，至少要用多少毫升的原料糖浆
如果得不到，输出-1

对于20%的数据 M<=8。
对于额外10%的数据 K=2。
对于额外20%的数据 K=3。
对于100%的数据 N<=M<=1000，K<=100000,ai<=M

DP
将每种糖浆都减去N，那么问题就变成了凑0
不妨设每种糖浆使用了ki升
那么就是要求让$\sum ki*(ai-N)=0$的最小的$\sum ki$

变成一个图论模型，点 i 表示当前的和为 i。那么利用不同的糖浆连边，本质是要找一个从 0 开始的最小的环，用 BFS 即可。

有浓度（已经减去平均值的浓度）为 a 的糖浆，那么所有 点 x 向点 x+a 连边

注意到我们只需要开到[-M,M]这个区间即可。

3. 树

(tree.cpp/c)

【问题描述】
对于一棵树，我们可以用邻接表存储，也可以直接存储每个点的父亲是谁
不妨用fa[i]数组来存储，对于根节点，他的父亲是他本身
现在给出一个数组fa[i]，但是它有点问题，不能表示一棵树，你能否尽可能少的修改fa[i]中的元素，使其表示的结构是一棵树
请问最少修改的元素个数是多少

【数据范围及约定】
对于30%的数据，1≤n≤15
对于70%的数据，1≤n≤1000
对于100%的数据，1≤n≤200000

原图是一个每个点向外连一条边的森林
熟悉的结构？
如何找合适的根？

断开哪些边以重新连接？

直接画画图就看出来了。 图的结构非常简单，不会有复杂的环。是一个基环内向树的森林。显然当只有一个联通分量的时候，我们只需要断环上的任意一条边就可以变成一颗树。

多个联通分量的时候，我们可以让树的联通分量当根，剩下的每个联通分量朝这个根连边即可。

4. DAG

给出一个无向图，请你给边定向成为一个有向无环图（DAG），使得最长路最短。

这里的最长路指经过的边的数量

输入格式

第一行 ，两个整数 n,m，分别表示给出的无向图点数和边数。

接下来m行，每行两个正整数u,v，表示一条无向图。

输入数据保证无重边无自环。编号从1开始。

输出格式

一行一个整数，表示最短的最长路。

容易发现，最后的答案就是$x-1$。其中x为最小染色数或者最小独立集覆盖。
染色是指给每个节点染一个颜色，有边相连的节点颜色不同。
独立集覆盖是指把图划分成若干个子集，每个子集里的点两两没有边相连。

解法3：$O(n^2 2^n)$预处理出子图中的所有独立集。然后状压dp。f_S表示子图点集合为S时的最小独立集覆盖。枚举子集里的独立集转移。时间复杂度$\sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^i = O(3^n)$。