十连测 Day 7

tqyaaaaang

A. dls的生日礼物

原问题等价于给定 n 个区间，将区间染成两种颜色，使得同种颜色的区间互不相交。

那么一个简单的想法即为将每个区间当成一个点，两个区间如果相交，则连边。即定义图 $G=<V,E>$，满足

$$E=\{(u,v)\mid |[l_u,r_u]\cap[l_v,r_v]|>1\}$$

那么一种选择染色的方案合法当且仅当它是图 G 上的二染色，即任意一条边的两个端点的颜色不同。因此若想答案不为 0，图 G 一定要是二分图，而此时若假设 G 中联通块的个数为 $f(G)$，则方案数就为 $2^{f(G)}$。

注意到这张图是区间图，可以发现既为区间图又为二分图的图是一棵树（证明留作练习，提示：反证法），因此 G 中边数为 $O(n)$ 级别的，则可以直接建出 G，跑一遍 DFS 即可。找需要连的边可以用 set，复杂度为 $O(n\log n)$。

我们还可以考虑将所有区间按 r_i 排序，依次处理。由于每个联通块都覆盖了一段连续的区间，因此只需要维护当前 i 之前所有区间组成的联通块分别为哪些区间，然后考虑当前区间和之前的多少区间相交即可。这个过程可以直接用单调栈维护，复杂度虽然为 $O(n\log n)$，但是瓶颈仅在排序，因此常数较小。

时间复杂度：$O(n\log n)$

B. dls的生日宴会

这个过程和有序序列中进行 k 分查找非常相似。首先发现由于每一轮的 k 都应当至少为 1，因此总轮数最多为 $\lceil\log n\rceil$。因此我们可以考虑枚举用了多少轮完成。

我们假设一共操作了 m 轮，其中第 i 轮选择的 k 为 k_i，则这种方案一定可以找出dls在哪当且仅当

$$m\le\prod_{i=1}^{m}k_i$$

证明考虑类似 k 分查找的过程直接归纳即可。

那么我们就是要找出一组 k_i，满足上述条件，且 $\sum k_i-m$ 最小，也就是要 $\sum k_i$ 最小。

考虑枚举 $\sum k_i$，那要想判断是否存在一组 k_i 满足上述条件，我们只需要找到在满足 $\sum k_i$ 一定的情况下 $\prod k_i$ 最大能为多少即可。由均值不等式，可以知道对于最大的 k_i，一定满足 $\forall i,j,|k_i-k_j|\le 1$。这是因为若存在 $k_i-k_j\ge 2$，则把它们换成 k_i-1 和 k_j+1 不会使答案更劣。这样我们就可以 $O(1)$ 的找到最优的 k_i 的分配方案，也就可以 $O(1)$ 判断是否合法了。

注意到对于任意 $\sum k_i$，最大的 $\prod k_i$ 是单调的，因此可以二分 $\sum k_i$，因此这部分复杂度为 $O(\log n)$。再由于轮数不超过 $O(\log n)$ 次，因此总复杂度为 $O(\log^2 n)$。

时间复杂度：$O(T \log^2 n)$

C. dls的生日派对

考虑对于一组询问 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，其中 $x_1 \le x_2$，$y_1 \le y_2$。若 $||x_2 - x_1| - |y_2 - y_1|| \le 1$，则合理安排初始方向即可让答案恰好为起点到终点的曼哈顿距离。

接下来我们假设 $|x_2 - x_1| < |y_2 - y_1|$。则最优方案应该为按曼哈顿距离走到两条横向道路 i 和 $i+1$ 之间，然后沿着 a_i 的那条边反复横跳，即按照 下 - 右 - 上 - 右 - 下 - 右 - 上 - 右 $\ldots$ 这样的模式走，最后再从这条边之间沿曼哈顿距离走到终点。

我们假设选择的边为 i，我们需要额外反复横跳 t 次（这里一次指一次向下加一次向上）。可以发现 $t = \left\lfloor \frac{|x_2 - x_1| - |y_2 - y_1|}{2} \right\rfloor$。那么 i 有三种情况：第一种情况为 $x_1 \le i < x_2$，此时我们只需要在沿曼哈顿距离走向终点的过程中经过 i 这条边时进行反复横跳即可，因此可以之间选择 $[x1, x2]$ 中间最短的边作为 i，额外的花费即为 $2t \cdot a_i$。第二种情况为 $i < x_1$，而第三种情况为 $i \ge x_2$，这两种情况类似，我们在这里只讨论一种。

我们考虑 $i \ge x_2$ 的情况，那么此时方案应当为沿着曼哈顿距离走到 $x_2 - 1$ 这条边，并越过 x_2 线，然后继续走到边 i，在边 i 处反复横跳一些次之后再沿曼哈顿距离走回到 x_2。注意到这里要求 $i < x_2 + t$ 此时额外花费应为

$$2 \cdot \left(\sum_{j=x_2}^{i} a_j + a_i \cdot (t - (i - (x_2 - 1))) \right)$$

我们假设

$$ps_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$$

则可将上式化为

$$2 \cdot ((t + x_2 - 1)a_i - i \cdot a_i + ps_i - ps_{x_2 - 1})$$

注意到这是一个等差数列的形式，即为对于每个位置 i，可以提供一个等差数列 $f_i(x) = a_i x + (ps_i - i \cdot a_i)$，然后最小的额外花费就可以写成

$$2 \cdot \left(\min_{x_2 \le i < x_2 + t} f_i(t + x_2 - 1) - ps_{x_2 - 1} \right)$$

则可以将所有询问离线下来，然后用线段树分治处理一段区间 $[l, r]$ 内的 $\min\limits_{l \le i \le r} f_i(x)$，这可以用凸包或是线段树（李超树）维护，即可将单个询问拆成 $O(\log n)$ 个区间处理。

直接实现是 $O(n \log^2 n)$ 的，精细实现可以做到 $O(n \log n)$。

时间复杂度：$O(n \log^2 n)$ 或 $O(n \log n)$