AULA PRÁTICA 5
DECOMPOSIÇÃO QR

1) MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT

Escreva uma função Scilab function [Q,R] = qr_GS(A) que implementa o Método de Gram-Schmidt para determinar a decomposição QR de uma matriz A com colunas linearmente independentes.
Testar a sua função com algumas matrizes de ordens diferentes. Para cada uma delas, testar a precisão do método verificando a ortogonalidade da matriz Q (comparando Q^TQ com a matriz identidade) e a acurácia da decomposição QR (comparando QR com A).

2) MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO

Escreva uma função Scilab function [Q,R] = qr_GSM(A) que implementa o Método de Gram-Schmidt Modificado.
Testar a sua função com as mesmas matrizes usadas nos testes do item anterior. Comparar a precisão dos dois Métodos.

3) (**OPCIONAL)** MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO COM PIVOTEAMENTO DE COLUNAS

Escreva uma função Scilab function [Q,R,P] = qr_GSP(A) que implementa o Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas. Nesse Método, na primeira iteração, escolhe-se a maior entre as colunas da matriz A para ser a primeira, fazendo a troca necessária, e normalizando para obter q_1. A partir da segunda iteração, a cada iteração subtrai-se das colunas restantes as projeções delas sobre o subespaço gerado pela última coluna ortonormal obtida e escolhe-se aquela de maior norma resultante para ser a próxima coluna processada. Para tal faz-se a troca necessária. O objetivo desse procedimento é escolher sempre a “melhor coluna”, isto é, a mais independente das anteriores. Essa função deverá retornar também a matriz de permutação P que contém as trocas de colunas efetuadas, de forma que AP = QR.
Testar a sua função com as mesmas matrizes usadas nos testes dos itens anteriores.
Comparar a precisão e estabilidade dos Métodos.

4) MÉTODO DE HOUSEHOLDER

Escreva uma função Scilab function [U,R] = qr_House(A) que implementa o Método de Householder para determinar a decomposição QR de uma matriz A, **de ordem m x n.** A matriz U, triangular inferior, deve conter em suas colunas os vetores unitários que geraram as matrizes dos refletores de Householder usadas para gerar a decomposição QR.
Faça duas versões:
versão 1, na qual a matriz U será de ordem m x n;
versão 2, na qual a matriz U será de ordem m x k, onde k = min(m-1,n).
Comente sobre a diferença entre essas duas versões.

Escreva também uma função Scilab function [Q] = constroi_Q_House(U) que constrói a matriz ortogonal Q da decomposição A = QR a partir da matriz U retornada pela função function [U,R] = qr_House(A).

4.1) Testar as suas funções com as mesmas matrizes usadas nos testes dos itens anteriores. Comparar os resultados e a precisão dos Métodos.

4.2) Calcule a decomposição QR (reduzida) usando os métodos de Gram-Schmidt, Gram-Schmidt-Modificado, Householder e a função “qr” do Scilab para cada uma das matrizes a seguir:

1. M1 = testmatrix(‘magi’,7)
2. H = testmatrix(‘hilb’, 7)
3. M2 = textmatrix(‘magi’,6)

Compare os resultados (ortogonalidade de Q e acurácia de QR) para os quatro métodos, com cada uma dessas três matrizes. Comente.

5) ALGORITMO QR para AUTOVALORES

Escreva uma função Scilab function [S] = espectro(A, tol) que calcula os autovalores de uma matriz simétrica A usando o Algoritmo QR. Os autovalores calculados devem ser devolvidos no vetor S. Use como critério de parada a norma infinito da diferença entre dois espectros consecutivos menor do que uma tolerância tol dada (10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, ...). Teste a sua função com matrizes simétricas das quais você saiba quais são os autovalores.