ФГБОУ ВО
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА РЕЛЕЙНОЙ ЗАЩИТЫ И АВТОМАТИЗАЦИИ ЭНЕРГОСИСТЕМ

Теория автоматического управления и системы автоматического управления
Лабораторная работа №2
на тему:
Устойчивость стационарных систем автоматического управления.

Выполнил:	Гулов М.С.
Группа:	Э-13м-23
Проверил:	Дегтярев Д.А.

Москва 2023

ПОДГОТОВКА

1. Исходные данные:

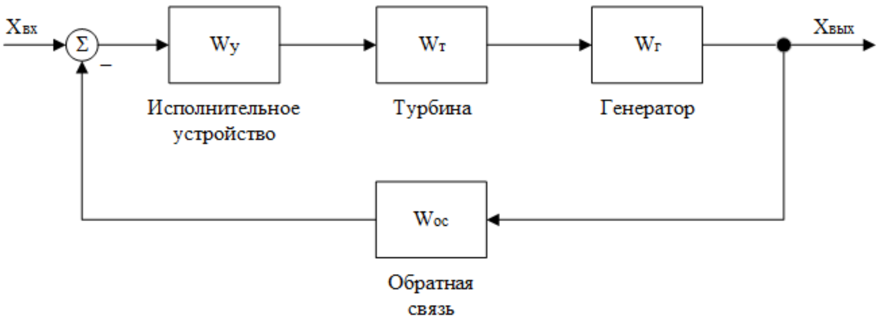

Рис. 1.1 – Исходная схема

Табл. 1.1 – Таблица данных варианта

№ Варианта	$k_у$	$T_у$, с	$T_г$, с	**Турбина**	$T_{гт}$, с	$T_{пт}$, с	$k_{пт}$	**Обратная связь**	$k_{ос}$	$T_{ос}$, с
4	23	8.0	10.0	Паро-	-	4.0	2.0	АГ	6	1.0

Табл. 1.2 – Таблица звеньев с учетом данных варианта

Наименование элемента		**Условное обозначение**	**Передаточная функция**
обратная связь	Апериодическая, гибкая	$W_{ос}$	$\frac{6p}{p+1}$
генератор		$W_г$	$\frac{1}{10p+1}$
турбина	паровая	$W_т$	$\frac{2}{4p+1}$
исполнительное устройство		$W_у$	$\frac{23}{8p+1}$

2. Эквивалентные передаточные функции замкнутой и разомкнутой системы:

$$W_{раз} = W_у \cdot W_т \cdot W_г \cdot W_{ос} = \frac{6p}{p+1} \cdot \frac{1}{10p+1} \cdot \frac{2}{4p+1} \cdot \frac{23}{8p+1}$$
$$= \frac{276p}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 23p + 1}$$

$$W_{внут} = W_у \cdot W_т \cdot W_г = \frac{1}{10p+1} \cdot \frac{2}{4p+1} \cdot \frac{23}{8p+1} = \frac{46}{320p^3 + 152p^2 + 22p + 1}$$

$$W_{зам} = \frac{W_{внут}}{1 + W_{внут} \cdot W_{ос}} = \frac{\frac{46}{320p^3 + 152p^2 + 22p + 1}}{1 + \frac{46}{320p^3 + 152p^2 + 22p + 1} \cdot \frac{6p}{p+1}}$$
$$= \frac{46 \cdot (p+1)}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 299p + 1}$$

3. Переходная характеристика замкнутой системы:

$$h(t) = L^{-1}\left\{W(p) \cdot \frac{1}{p}\right\} = L^{-1}\left\{W_{зам} \cdot \frac{1}{p}\right\} = \frac{46 \cdot p + 46}{(320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 299p + 1) \cdot p}$$

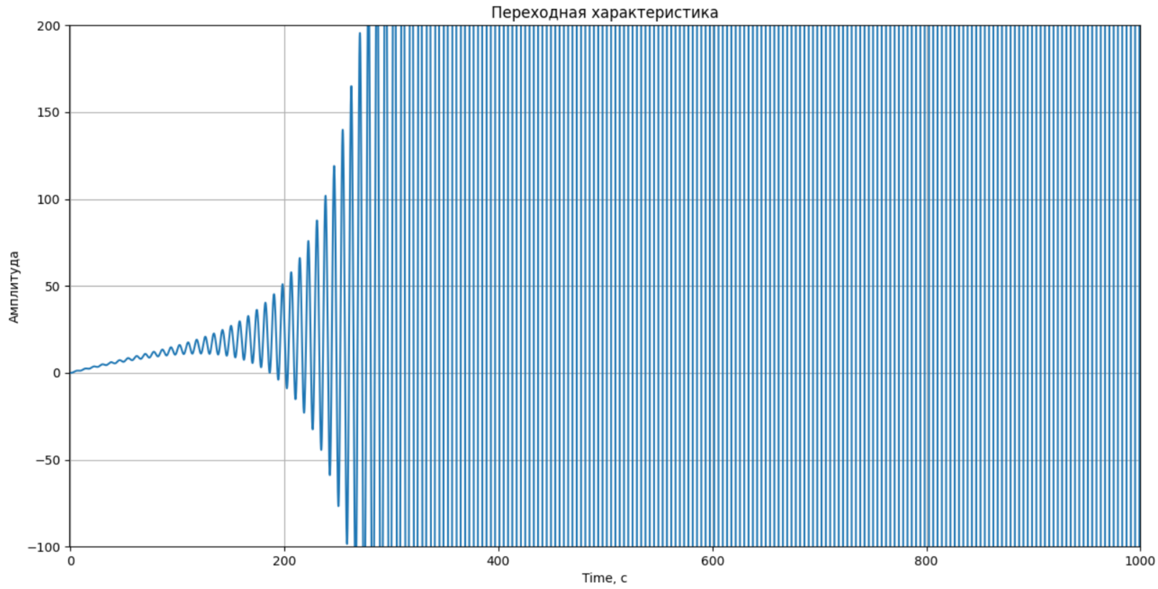

Рис. 3.1 – Переходная характеристика передаточной функции замкнутой системы

Видно, что система не устойчива.

4. Полюса передаточной функции замкнутой системы:

$$W_{зам} = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{46 \cdot (p+1)}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 299p + 1}$$
$$D(p) = 320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 299p + 1 = 0$$

Полюсами передаточной функции называются корни его характеристического уравнения, т.е. при:

$$D(p) = 0.$$

Уравнение имеет 4 корня вида $p_i = \pm\alpha_i \pm j\beta_i$

Определим корни:

$$p_1 = -1{,}5206$$
$$p_2 = 0{,}02448 + j0{,}783$$
$$p_3 = 0{,}02448 - j0{,}783$$
$$p_4 = -0{,}0033$$

НЕ все корни лежат в отрицательной полуплоскости, следовательно САУ не устойчива!!!

5. Определение устойчивости САУ с помощью критериев устойчивости:

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{46 \cdot (p+1)}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 299p + 1}$$

$$D(p) = 320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 299p + 1$$

Критерий Гурвица:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 472 & 299 & 0 & 0 \\ 320 & 174 & 1 & 0 \\ 0 & 472 & 299 & 0 \\ 0 & 320 & 174 & 1 \end{vmatrix} = 472 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 472 & 299 & 0 & 0 \\ 320 & 174 & 1 & 0 \\ 0 & 472 & 299 & 0 \\ 0 & 320 & 174 & 1 \end{vmatrix} = 472 * 174 - 299 * 320 = -13552 < 0$$

Первый и второй миноры матрицы уже разных знаков, следовательно САУ не устойчива!!!

Критерий Рауса:

Вспомогательные коэффициенты	**Номер строки**	**Номер столбца**		
		1	**2**	**3**
	1	$c_{11} = 320$	$c_{12} = 174$	1
	2	$c_{21} = 472$	$c_{22} = 299$	0
$r_3 = \frac{320}{472}$	3	$c_{31} = 174 - \frac{320}{472} \cdot 299 = -28{,}712$	$c_{32} = 1 - \frac{320}{472} \cdot 0 = 1$	0
$r_4 = \frac{472}{-28{,}712}$	4	$c_{41} = 299 - \frac{472}{-28{,}712} \cdot 1 = 315{,}439$	0	0
$r_5 = \frac{-28{,}712}{315{,}439}$	5	1	0	0

НЕ все элементы первого столбца Рауса имеют положительный знак, следовательно САУ не устойчива!!!

Критерий Михайлов:

$$D(p) = 320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 299p + 1$$

$$D(j\omega) = 320 \cdot (j\omega)^4 + 472 \cdot (j\omega)^3 + 174 \cdot (j\omega)^2 + 299(j\omega) + 1$$
$$= 320 \cdot \omega^4 - 472j\omega^3 - 174\omega^2 + 299j\omega + 1$$

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = 320 \cdot \omega^4 - 174\omega^2 + 1$$

$$V(\omega) = -472\omega^3 + 299\omega$$

Для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты от 0 до +, начинаясь при = 0 на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости; n – порядок характеристического уравнения.

$\boldsymbol{\omega}$	0	0,1	0,5	1
$\boldsymbol{U(\omega)}$	1	-0,708	-22,5	147

$V(\omega)$	0	29,428	90,5	-173

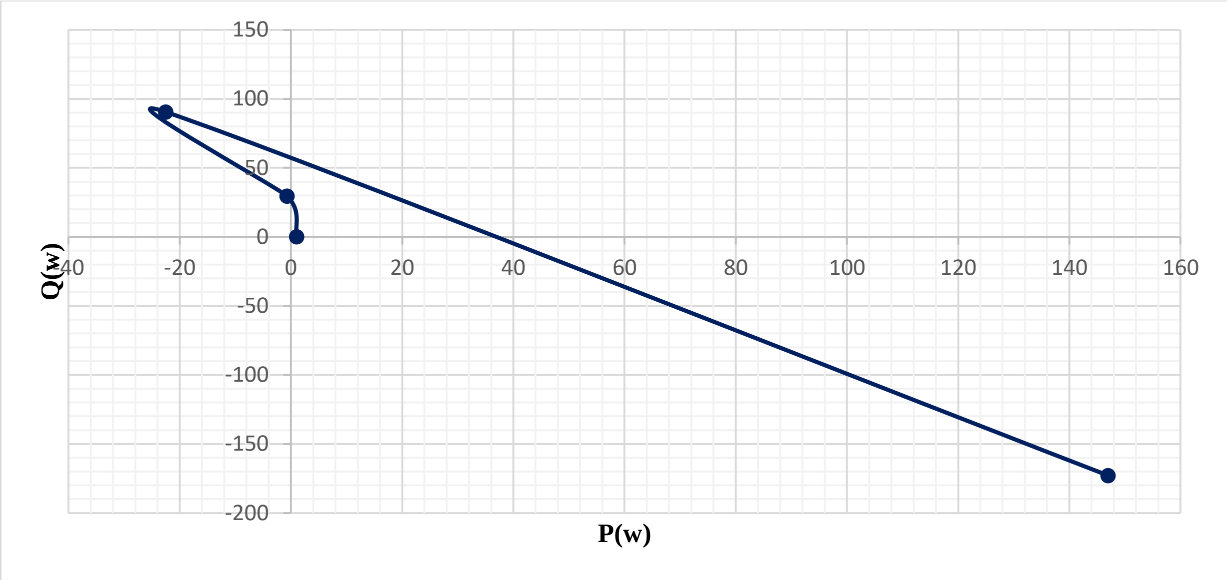

Рис. 5.1 – Годограф Михайлова

Годограф не проходит последовательно через четыре квадранта (что соответствует порядку характеристического уравнения); САУ не устойчива!!!

Критерий Найквиста:

Используем передаточную характеристику разомкнутой системы для определения устойчивости системы по Найквисту:

$$W_{\text{раз}} = \frac{276p}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 23p + 1}$$

Для того, чтобы разомкнутая АСР в замкнутом состоянии была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы годограф АФХ обратной передаточной функции $W_{\text{раз}}^{-1}$ устойчивой разомкнутой АСР охватывал точку (-1; j0) **(По обратному Найквисту)** и не охватывал **(по прямому Найквисту).**

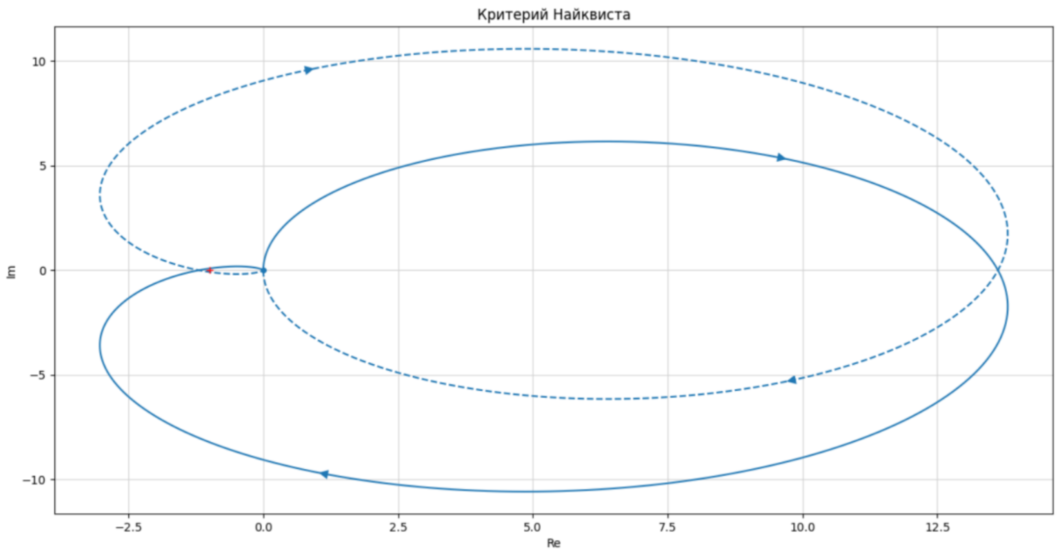

Рис. 5.2 – Годограф Найквиста

АФХ охватывает точку (-1; 0j), следовательно система не устойчива по критерию Найквиста (проверка осуществлялась в программе на python)

6. Логарифмические частотные характеристики:

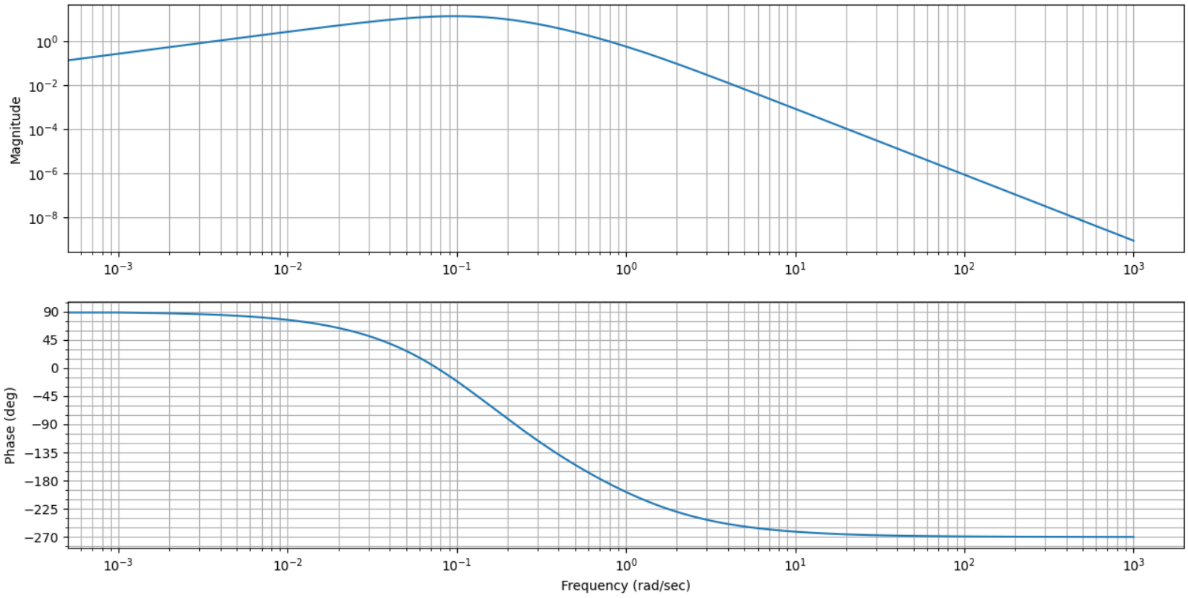

Рис. 6.1 – ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы

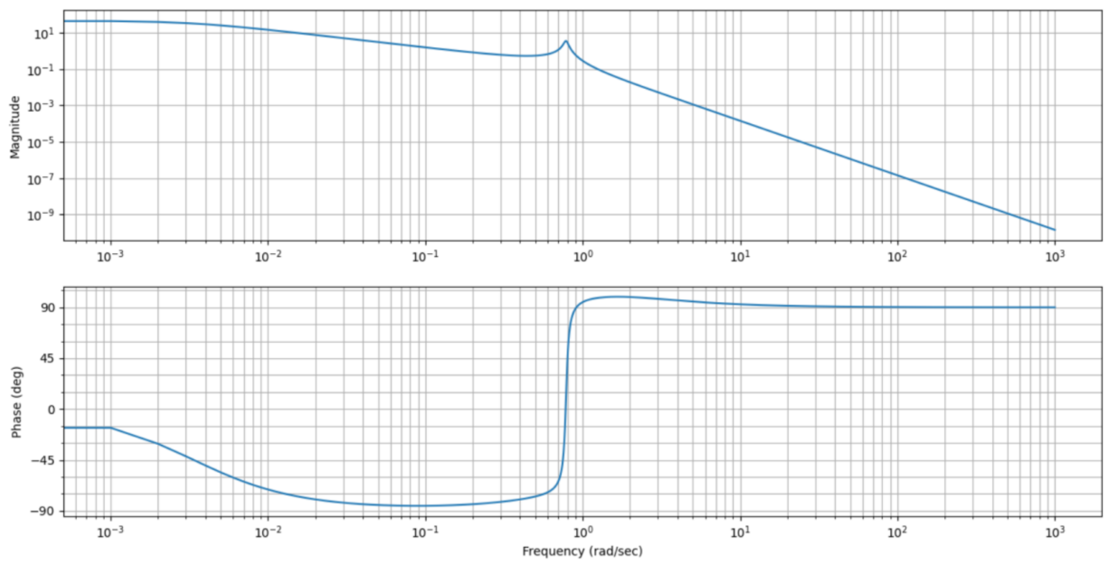

Рис. 6.2 – ЛАЧХ и ЛФЧХ замкнутой системы

7. Определение запаса устойчивости при помощи частотных характеристик:

Запаса по устойчивости нет, так как САУ неустойчива!

8. Определение диапазона устойчивости:

Использование метода Гурвица:

Используем метод Гурвица для определения коэффициента обратной связи, при котором система находится на границе устойчивости.

$$k_{\text{ос}} = 5{,}0196$$

Для определения коэффициента был использован метод Гурвица, написанный в python.

D-разбиение:

$$F(p) = 320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 23p + 1$$

Необходимо заменить оператор Лапласа на p на jω, т.е. привести уравнение к комплексному виду:

$$F(j\omega) = 320(j\omega)^4 + 472(j\omega)^3 + 174(j\omega)^2 + 23(j\omega) + 1$$

Решим данное уравнение относительно искомой переменной k:

$$F(j\omega) = D_{\text{раз}}(j\omega) + K_{\text{раз}}(j\omega)$$

$$k = D_{\text{раз}}(j\omega) + K_{\text{раз}}(j\omega)$$

$$46kj\omega = 320(\omega)^4 - 472j(\omega)^3 - 174(\omega)^2 + 23(j\omega) + 1$$

$$= \frac{320(\omega)^4 - 472j(\omega)^3 - 174(\omega)^2 + 23(j\omega) + 1}{46j\omega}$$

$$k = 320(\omega)^4 - 472j(\omega)^3 - 174(\omega)^2 + 23(j\omega) + 1$$

$$= \frac{(320(\omega)^4 - 472j(\omega)^3 - 174(\omega)^2 + 23(j\omega) + 1) * (-j\omega)}{46j\omega * (-j\omega)}$$

$$k = \frac{-472\omega^4 - 23\omega^2}{46\omega^2} + j\frac{-320\omega^5 + 174\omega^3 - \omega}{46\omega^2}$$

Построим график изменения искомой переменной при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

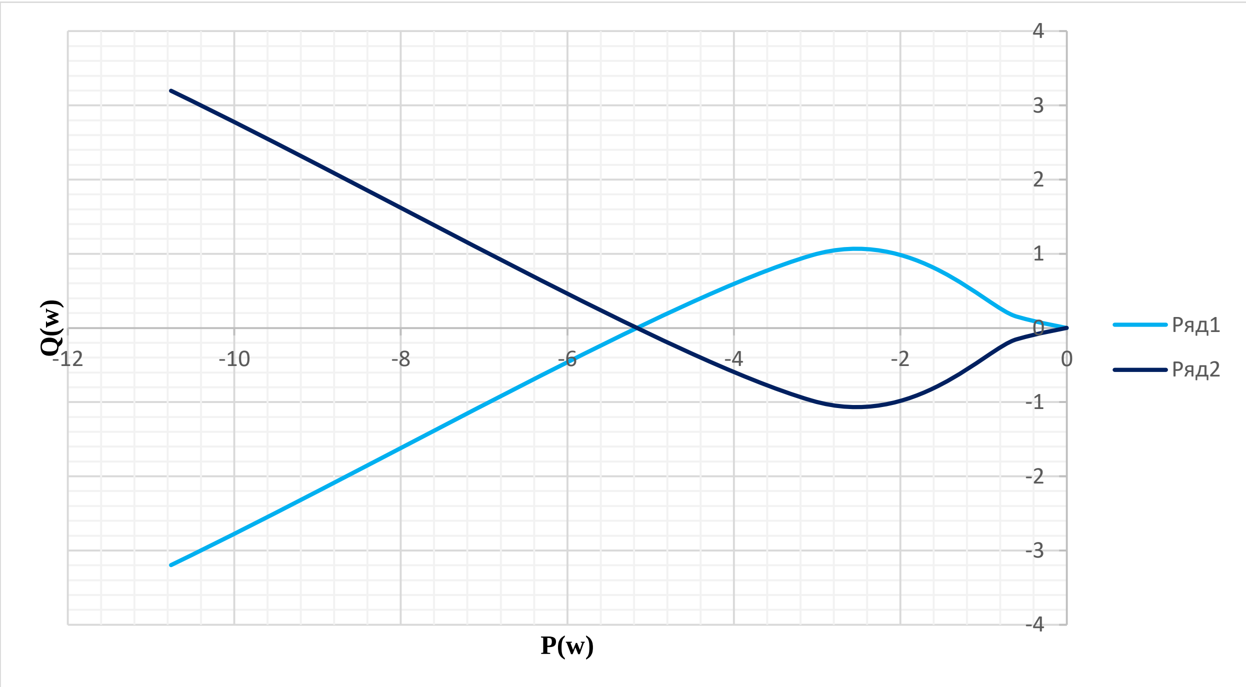

Рис. 8.1 – График D-разбиения

Диапазон устойчивости для D-разбиения составляет (-5,2; 0,0000001).

В точке 0 – неопределенность.

9. Проверка устойчивости:

Повторим решение пунктов 2-7 с измененным параметром $k_{\text{ос}} = 5{,}0196$.

Эквивалентные передаточные функции:

$$W_{\text{раз}} = W_{\text{у}} \cdot W_{\text{т}} \cdot W_{\text{г}} \cdot W_{\text{ос}} = \frac{5{,}0196p}{p+1} \cdot \frac{1}{10p+1} \cdot \frac{2}{4p+1} \cdot \frac{23}{8p+1}$$
$$= \frac{230{,}9p}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 23p + 1}$$
$$W_{\text{внут}} = W_{\text{у}} \cdot W_{\text{т}} \cdot W_{\text{г}} = \frac{1}{10p+1} \cdot \frac{2}{4p+1} \cdot \frac{23}{8p+1} = \frac{46}{320p^3 + 152p^2 + 22p + 1}$$
$$W_{\text{зам}} = \frac{W_{\text{внут}}}{1 + W_{\text{внут}} \cdot W_{\text{ос}}} = \frac{\frac{46}{320p^3 + 152p^2 + 22p + 1}}{1 + \frac{46}{320p^3 + 152p^2 + 22p + 1} \cdot \frac{5{,}0196p}{p+1}}$$
$$= \frac{46 \cdot (p+1)}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 253{,}9p + 1}$$

Переходная характеристика замкнутой системы:

$$h(t) = L^{-1}\left\{W(p) \cdot \frac{1}{p}\right\} = L^{-1}\left\{W_{\text{зам}} \cdot \frac{1}{p}\right\} = \frac{46 \cdot p + 46}{(320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 253{,}9p + 1) \cdot p}$$

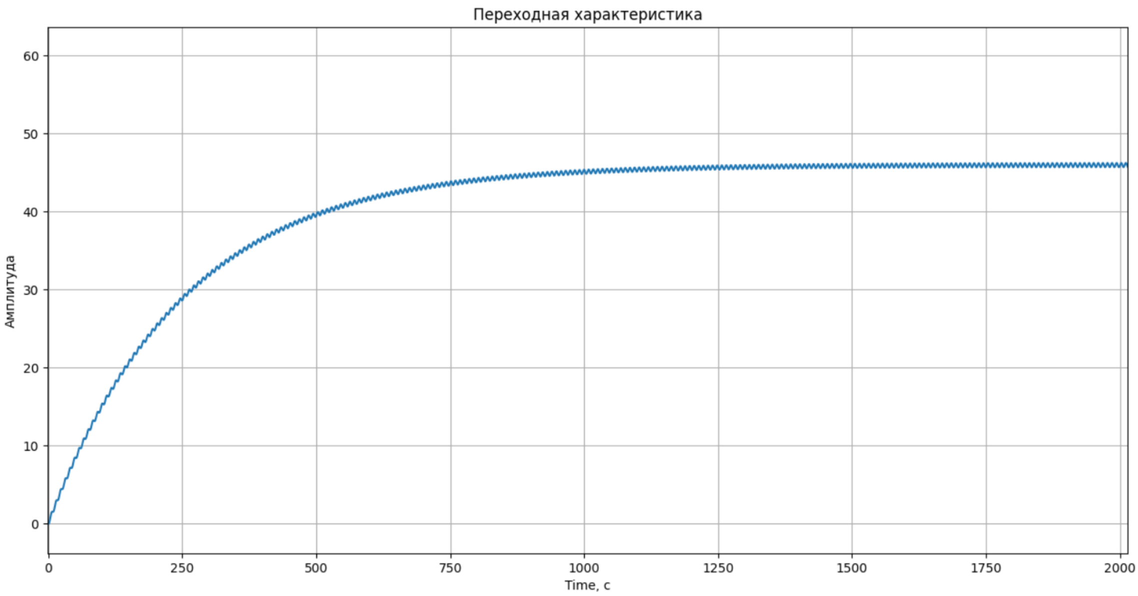

Рис. 9.1 – Переходная характеристика при $k_{\text{ос}} = 5{,}0196$

Полюсы передаточной функции:

$$W_{\text{зам}} = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{46 \cdot (p+1)}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 253{,}9p + 1}$$
$$D(p) = 320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 253{,}9p + 1 = 0$$

Полюсами передаточной функции называются корни его характеристического уравнения, т.е. при:

$$D(p) = 0.$$

Уравнение имеет 4 корня вида $p_i = \pm\alpha_i \pm j\beta_i$

Определим корни:

$$p_1 = -1{,}471$$
$$p_2 = 0 + j0{,}733$$
$$p_3 = 0 - j0{,}733$$
$$p_4 = -0{,}0039$$

Все корни лежат либо на отрицательной действительной полуоси, либо на мнимой оси, следовательно САУ находится на границы устойчивости;

Определение устойчивости САУ по критериям:

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{46 \cdot (p+1)}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 253{,}9p + 1}$$
$$D(p) = 320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 253{,}9p + 1$$

Критерий Гурвица:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 472 & 253{,}9 & 0 & 0 \\ 320 & 174 & 1 & 0 \\ 0 & 472 & 253{,}9 & 0 \\ 0 & 320 & 174 & 1 \end{vmatrix} = 880 > 0$$

Первый коэффициент передаточной функции больше нуля и все определители (миноры) матрицы также больше нуля, следовательно система устойчива (находится на границе устойчивости) по критерию Гурвица.

Критерий Рауса:

Вспомогательные коэффициенты	Номер строки	Номер столбца		
		1	**2**	**3**
	1	$c_{11} = 320$	$c_{12} = 174$	1
	2	$c_{21} = 472$	$c_{22} = 253{,}9$	0
$r_3 = \frac{320}{472}$	3	$c_{31} = 174 - \frac{320}{472} \cdot 253{,}9 = 1{,}86$	$c_{32} = 1 - \frac{320}{472} \cdot 0 = 1$	0
$r_4 = \frac{472}{1{,}86}$	4	$c_{41} = 253{,}9 - \frac{472}{1{,}86} \cdot 1 = 0{,}14 \sim 0$	0	0
$r_5 = \infty$	5	1	0	0

Все элементы первого столбца Рауса имеют положительный знак (один из них очень близок к 0), следовательно система устойчива (находится на границе устойчивости) по критерию Рауса.

Критерий Михайлов:

$$D(p) = 320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 253{,}9p + 1$$
$$D(j\omega) = 320 \cdot (j\omega)^4 + 472 \cdot (j\omega)^3 + 174 \cdot (j\omega)^2 + 253{,}9(j\omega) + 1$$
$$= 320 \cdot \omega^4 - 472j\omega^3 - 174\omega^2 + 299j\omega + 1$$
$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$
$$U(\omega) = 320 \cdot \omega^4 - 174\omega^2 + 1$$
$$V(\omega) = -472\omega^3 + 253{,}9\omega$$

$\boldsymbol{\omega}$	0	0,1	0,5	1
$\boldsymbol{U(\omega)}$	1	-0,708	-22,5	147
$\boldsymbol{V(\omega)}$	0	29,428	90,5	-173

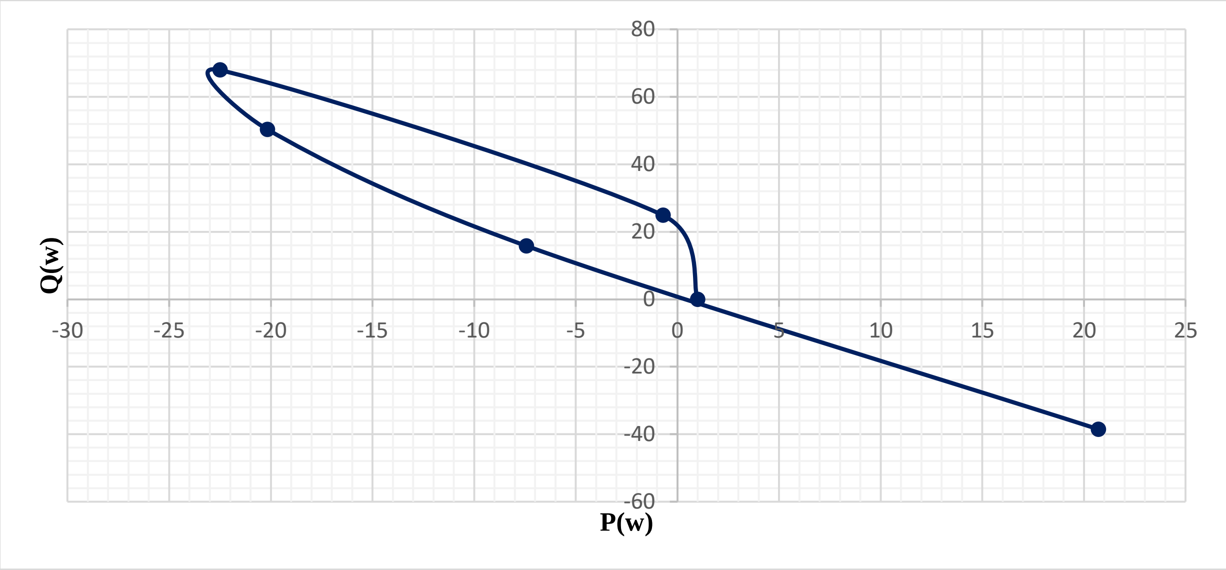

Рис. 9.2 – Годограф Михайлова

<u>Критерий Найквиста:</u>

Используем передаточную характеристику разомкнутой системы для определения устойчивости системы по Найквисту:

$$W_{\text{раз}} = W_{\text{раз}} = \frac{230{,}9p}{320p^4 + 472p^3 + 174p^2 + 23p + 1}$$

Для того, чтобы разомкнутая АСР в замкнутом состоянии была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы годограф АФХ обратной передаточной функции $W_{\text{раз}}{}^{-1}$ устойчивой разомкнутой АСР охватывал точку (-1; j0).

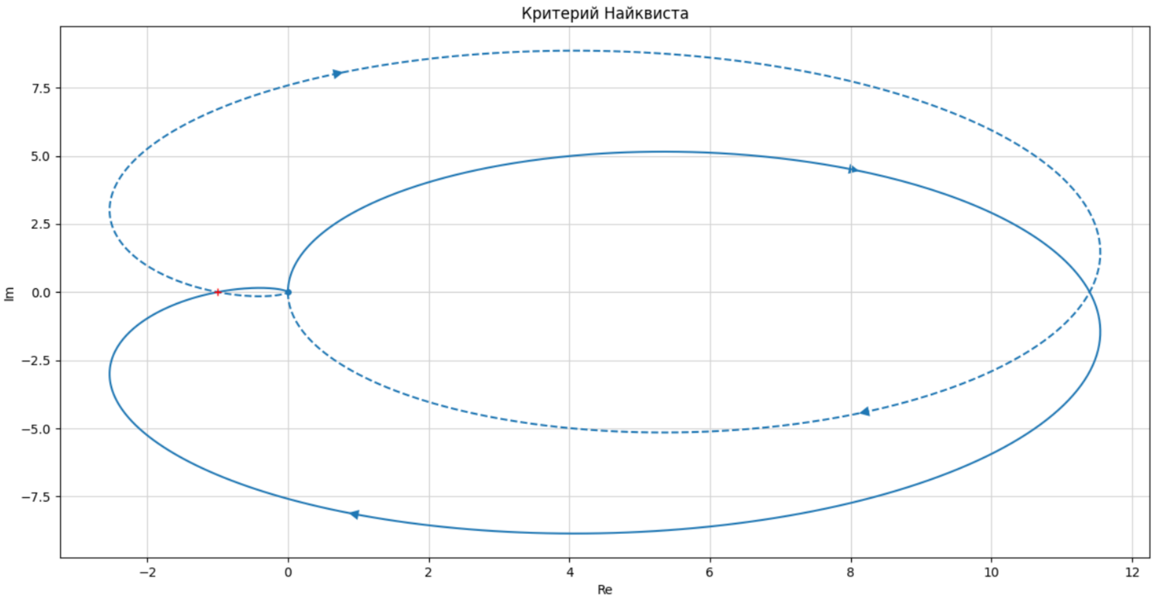

Рис. 9.3 – Годограф Найквиста

АФХ охватывает точку (-1; 0j) (практически касается), следовательно система устойчива (находится на границе устойчивости) по критерию Найквиста.

Логарифмические частотные характеристики:

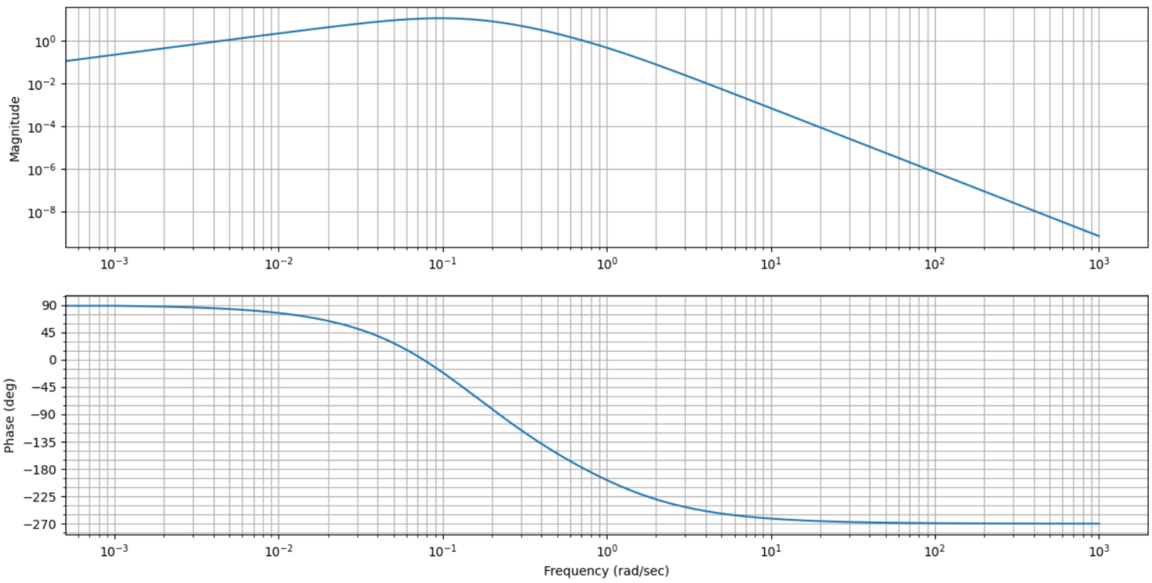

Рис. 9.4 – ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы

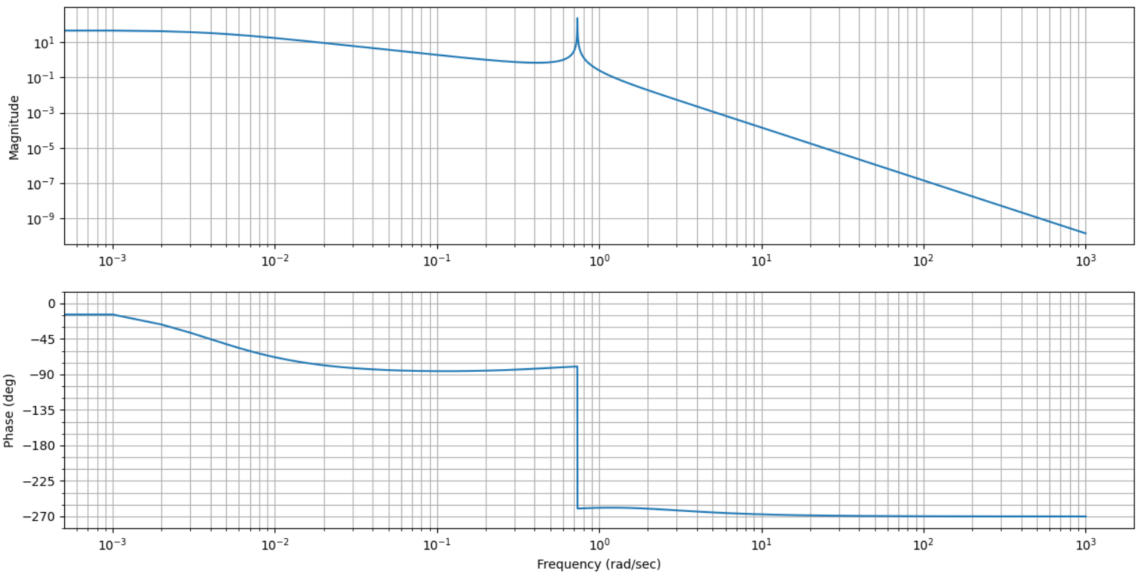

Рис. 9.5 – ЛАЧХ и ЛФЧХ замкнутой системы

Определение запаса устойчивости:

По логарифмическим характеристикам не удастся определить запас устойчивости, так как мы строим их, когда система уже находится на границе устойчивости, при заданном $k_{\text{ос}}$, поэтому можно сказать, что при дальнейшем уменьшении данного коэффициента система войдет в свою устойчивость, то есть запаса по устойчивости начнет появляться и увеличиваться.