POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Questionnaire
Examen final

MTH1102

COPIE

Nom [redacted]

Sign[redacted]

[redacted]

Samedi	8 décembre 2018	2h30	13h30 à 16h00

Réservé	
1. 6.5	/11
2. 9	/10
3. 5	/8
4. 7	/10
5. 7	/11
TOTAL	
34.5	/50

Documentation	*Calculatrice*	*Outils électroniques*
☐ Aucune	☐ Aucune	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**
☐ Toute	☐ Toutes	
☒ Voir directives particulières	☒ Non programmable (AEP)	

Directives particulières

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) puis passez à la question suivante.

Important

Cet examen contient 5 questions sur un total de 17 pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de 50 %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Formules d'intégration

Ces formules peuvent être utilisées sans justification supplémentaire dans vos calculs.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^4(x)\,dx = \frac{3}{4}\pi$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^6(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^6(x)\,dx = \frac{5}{8}\pi$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^n(x)\,dx = 0$ si n impair.

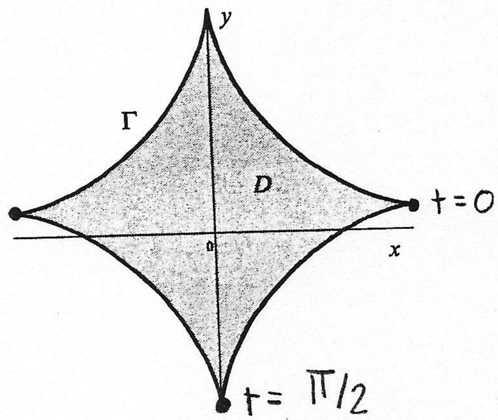
Question 1 [11 points]

6.5/11

Soit Γ la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos^3(t)\,\vec{\imath} + [\tfrac{1}{8} - \sin^3(t)]\,\vec{\jmath}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

représentée ci-dessous.



$0 = \cos^3(t)$

a) Soit C la partie de Γ située en dessous de l'axe des x. Calculez la longueur de C.
b) Calculez l'aire de la région D délimitée par Γ (en gris sur la figure).
c) Soit le champ vectoriel défini par $\vec{F}(x,y) = \vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$. Calculez le travail effectué par $\vec{F}$ le long de Γ.

Réponse :

2.5/4 a) $L(C) = \int \|r'(t)\|\,dt$ ✓ 1/1

Bornes

$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{8} - \sin^3(t)$

$\frac{1}{8} = \sin^3(t)$

$\frac{1}{2} = \sin(t)$

$\pm\frac{\pi}{6} = t$ ✗ 0.5/1

$t = \frac{\pi}{6} \to \frac{5\pi}{6}$

$r'(t) = -3\sin^2(t)\,\vec{\imath} + -3\cos^2(t)\,\vec{\jmath}$

$\|r'(t)\| = \sqrt{[-3\sin^2(t)]^2 + [-3\cos^2(t)]^2}$ ✗ 0.5/1

$= \sqrt{9\sin^4(t) + 9\cos^4(t)}$

$= \sqrt{9\sin^2(t)\sin^2(t) + 9\cos^2(t)\cos^2(t)}$

$\sqrt{9(1)(1)}$

$= 3$

$$L(C) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 3\,dt$$

$$= 2 \cdot 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$$

$$= 6t \Big|_0^{\pi/6}$$

$$= \pi$$

Cos 1/1

2/4 b) $A(D) = -\int x\,dy$ 1/2

$x = \cos^3(t)\,\vec{i}$ $dy = [r'(t)]\,dt$

$$= [-3\sin^2(t)\,\vec{i} + -3\cos^2(t)\,\vec{j}]\,dt$$

$$A = -\int_0^{2\pi} [-3\sin^2(t)\vec{i} - 3\cos^2(t)\vec{j}][\cos^3(t)\vec{i}]\,dt$$

$$= +3\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^3(t)\,dt$$

expliqué à la page suivante

$u = \cos^3(t)$
$du = -3\sin^2(t)\,dt$

$$A = 3\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt$$
$$= -\int_0^{2\pi} u\,du$$
$$= -\frac{u^2}{2}\Big|_0^{2\pi}$$
$$= -\frac{\cos^6(t)}{2}\Big|_0^{2\pi} = -\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right] = 0$$

X 1/2

*calculons l'orientation

t	x	y
0	1	1/8
$\frac{\pi}{2}$	0	−7/8
π	−1	1/8

$r(t) = \cos^3(t)\,\vec{i} + \left[\frac{1}{8} - \sin^3(t)\right]\vec{j}$

on peut remarquer que c'est dans le sens horaire. $\ominus$ À rajouter devant $\int x\,dy$.

c) Travail = $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$= \oint_{-\pi}^{\pi} [\vec{i} - x\vec{j}][-3\sin^2(t)\,\vec{i} + -3\cos^2(t)\,\vec{j}]\,d$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-3\sin^2(t) + \underbrace{(-\cos^3(t))}_{r(t)}(-3\cos^2(t))\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -3\sin^2 t + 3\cos^5(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -3\sin^2 t \quad + \int_0^{2\pi} 3\cos^5(t)\,dt$$

$$= -3\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]\Big|_0^{2\pi} + 0$$

$$= -3\left[\pi\right]$$

$$= -3\pi \quad X \cdot 2/3$$

Question 2 [10 points]

9/10

a) Pour chacun des trois énoncés ci-dessous, dites s'il est vrai ou faux. Donnez une courte justification pour chaque réponse.

(i) L'intégrale de tout champ vectoriel autour d'une courbe fermée est nulle.

(ii) Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel ayant des dérivées partielles continues alors le flux de rot $\vec{F}$ à travers une surface fermée lisse S est nécessairement nul.

(iii) Si $\vec{F}(x,y,z) = y^3\,\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j} - 4z\,\vec{k}$, alors le travail W effectué par $\vec{F}$ le long d'une courbe C allant du point $(1,0,3)$ au point $(-2,1,-1)$ est $W = 14$.

La question suivante est indépendante de la partie a).

b) Donnez une paramétrisation de la ligne de courant du champ vectoriel

$$\vec{G}(x,y) = -x^2\,\vec{i} + \frac{1}{y}\,\vec{j}$$

passant par le point $(3,-1)$.

Réponse :

a) i) Faux
2/3 Il faut que le $\vec{F}$ soit conservatif. ✓ 1/1

ii) Faux ✗ 0/1
La courbe doit également être fermée.

$$\underset{x}{P\,\vec{i}} + \underset{y}{Q\,\vec{j}} + \underset{z}{R\,\vec{k}}$$

iii) $\vec{F}$ est conservatif, car

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

on peut donc utiliser le potentiel

$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \xrightarrow{\nabla f = F} f(B) - f(A)$

$P = y^3$
$Q = 3xy^2$
$R = -4z$

$\boxed{P = \frac{\partial f}{\partial x}}$ $\boxed{Q = \frac{\partial f}{\partial y}}$ $\boxed{R = \frac{\partial f}{\partial z}}$

$\int y^3\,dx = \int df \Rightarrow y^3x + H(y,z) = f$

$\int 3xy^2\,dy = \int df \Rightarrow xy^3 + f(x,z) = f$

$\int -4z\,dz = \int df \Rightarrow -2z^2 + K(x,y) = f$

$f = y^3x - 2z^2 + C$

En évaluant au point $(1,0,3)$ et $(-2,1,-1)$

$W = f(B) - f(A)$

$= [1^3 \cdot -2 - 2\cdot(-1)^2] - [0^3 \cdot 1 - 2\cdot 3^2]$

$= [-2-2] - [-18]$

$= -4 + 18$

$= 14$

VRAI ✓ 1/1

b) 7/7

$\frac{dx}{dt} = -x^2$ $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}$ ✓ 2/2

$\int \frac{dx}{-x^2} = \int dt$ $\int y\,dy = \int dt$

$$\int \frac{dx}{-x^2} = \int dt$$

$$\int -x^{-2}\,dx = \int dt$$

$$\frac{1}{x} + C_1 = t + C_2$$

$$x(t) = \frac{1}{t+C}$$ ✓

$$\int y\,dy = \int dt$$

$$\frac{y^2}{2} + C_3 = t + C_4$$

$$y^2 = 2t + C_5$$ ✓ 2/2

$$y(t) = \pm\sqrt{2t + C_5}$$

En posant $t=0 \Rightarrow x = 3$ et $y=-1$

$$3 = \frac{1}{0+C}$$

$$C = \frac{1}{3}$$ ✓

$$-1 = -\sqrt{C}$$

$$1 = C$$ ✓ 2/2

Donc, les équations paramétriques de $\vec{G}(x,y) = -x^2\vec{\imath} + \frac{1}{y}\vec{\jmath}$ passant par $(3,-1)$ sont

$$x = \frac{1}{t+\frac{1}{3}}$$ 1/1

$$y = -\sqrt{2t+1}$$

où $-\frac{1}{3} < t \leq \infty$

* doit exclure $-\frac{1}{3}$
* $2t+1 > 0$
  $2t > -1$
  $t > -1/2$

S

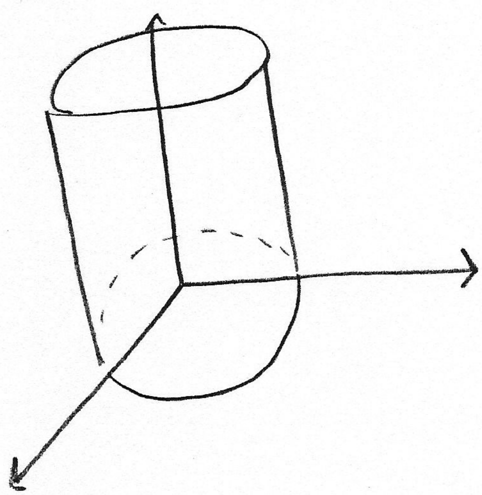
Question 3 [8 points]

Soit S la partie du paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ située à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 25$ (c'est-à-dire la région de l'espace où $x^2 + y^2 \leq 25$).

a) Utilisez l'équation cartésienne ou cylindrique de S pour en donner une paramétrisation, en incluant le domaine des paramètres.

b) Calculez l'aire de la surface S.

Réponse :



a) S donc a paramètres

$x = x$ où
$y = y$ $-\sqrt{\frac{25}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{25}{2}}$
$z = xy$ $\cancel{-\sqrt{\frac{25}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{25}{2}}}$

$$\boxed{\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k}}$$

1/2

b) $A(S) = \iint dS$

Calculons le dS

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + y\vec{k}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + x\vec{k}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \sqrt{(-y)^2 + (-x)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{y^2 + x^2 + 1}$$

Donc

$$A = \iint_S \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\, dx\, dy$$

passons en polaire

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \quad 0 \le r \le 5 \\ y &= r\sin\theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi \end{aligned}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \sqrt{r^2 + 1}\; r\, dr\, d\theta$$

en posant
$u = r^2 + 1$
$du = 2r\,dr$
$\frac{1}{2} du = r\,dr$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^5 \sqrt{u}\, du\, d\theta$$

il faut changer bornes

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_0^5 d\theta$$

$4/6$

$$= 3{,}72 \int_0^{2\pi} d\theta$$

réponse exacte exigée.

$$= \cancel{3{,}72\, \theta \Big|_0^{2\pi}}$$

$$A = \cancel{7{,}45\pi}$$

Question 4 [10 points]

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\,\vec{\imath} + 2\sin(t)\,\vec{\jmath} + 4[\sin(t) - \cos(t)]^2\,\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.

a) Montrez que C est une courbe fermée située sur la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = u\,\vec{\imath} + v\,\vec{\jmath} + (v-u)^2\,\vec{k}.$$

b) À l'aide du théorème de Stokes, calculez la circulation du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = 2yz\,\vec{\imath} + xz\,\vec{\jmath} + [xy + \sin(z^2)]\,\vec{k}$$

$\iint \mathrm{Rot}\,F \cdot dS$

autour de C.

Réponse :

a) Il est possible de remarquer que la courbe est déjà sur la surface. En effet, en posant $u = 2\cos(t)$ et $v = 2\sin(t)$,

$$\vec{R}(u,v) = 2\cos(t)\,\vec{\imath} + 2\sin(t)\,\vec{\jmath} + [2\cos(t) - 2\sin(t)]^2\,\vec{k}$$

$$= 2\cos(t)\,\vec{\imath} + 2\sin(t)\,\vec{\jmath} + 2^2[\cos(t) - \sin(t)]$$

Donc, pour démontrer que la courbe est fermée, il faut que $r(0) = r(2\pi)$

$r(0) \Rightarrow x = 2\cos(0) = 2$
$y = 2\sin(0) = 0$
$z = 4[\sin(0) - \cos(0)]^2 = 4$

2/2

$r(2\pi) \Rightarrow x = 2\cos(2\pi) = 2$
$y = 2\sin(2\pi) = 0$
$z = 4[\sin(2\pi) - \cos(2\pi)]^2$

Puisque $r(0)$ est bien égal à $r(2\pi)$, la courbe est fermée !

CQFD

b) circulation avec le $\stackrel{\Delta}{=}$ $\iint \text{Rot}\vec{F} \bullet dS$
theoreme de Stokes

énoncer $\vec{F}$ 0/1

calculons le $\text{Rot}\vec{F}$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & xz & xy+\sin(z^2) \end{vmatrix}$

$= (x-x)\vec{i} - (y-2y)\vec{j} + (z-2z)\vec{k}$

$= 0\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ 1/1

$\boxed{\begin{array}{c}(v-u)(v-u) \\ v^2-2uv+u^2\end{array}}$

calculons le dS $\quad \vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (v^2 - 2uv + u^2)\vec{k}$

$\frac{\partial r}{\partial u} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + (-2v + 2u)\vec{k}$

$\frac{\partial r}{\partial v} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + (2v - 2u)\vec{k}$

$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2v+2u \\ 0 & 1 & 2v-2u \end{vmatrix}$

$= (2v-2u)\vec{i} - (2v-2u)\vec{j} + \vec{k}$ 1/1

Transformons le $Rot\vec{F}$ pour qu'il soit par rapport à u, v. $y = v$ $z = (v-u)^2$

$$Rot\vec{F} = y\vec{j} - z\vec{k} \Rightarrow v\vec{j} - (v-u)^2\vec{k}$$

$$Rot\vec{F} \cdot dS = \left[v\vec{j} - (v-u)^2\vec{k}\right]\left[(2v-2u)\vec{i} + (-2v+2u)\vec{j} + \vec{k}\right]$$

$$= -2v^2 + 2uv - 2v^2 + 2uv - u^2$$

$$= \cancel{-3v^2 - u^2} + 4uv$$

0/1

orientation?

En se situant au plan $z=0$, on peut remarquer qu'il y a un cercle de rayon 2.
Donc, je vais transformer en polaire.

$u = r\cos(\theta)$ $0 \leq r \leq 2$
$v = r\sin(\theta)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

2/2

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (-4r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta + 4r\cos\theta\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (-3\sin^2\theta\, r^3 + 4r^2\cos\theta\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

calcul: 1/2

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{3r^4}{4}\bigg|_0^2 \sin^2\theta + \frac{4r^3}{3}\bigg|_0^2 \cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -12\sin^2\theta + 10{,}6\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

réponse?

$$= -12\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]\bigg|_0^{2\pi} + 10{,}6\sin^2\theta\bigg|_0^{2\pi}$$

$$= -12\pi + 0 \qquad = \cancel{-12\pi}$$

Question 5 [11 points]

a) Soit B le solide délimité par le cône C d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et par le paraboloïde P d'équation $z = 42 - x^2 - y^2$. Soit S la surface de B. On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y, z) = [x + ye^{-z^3}]\,\vec{i} + [2y - xe^{-z^3}]\,\vec{j} + 5z\,\vec{k}.$$

(i) Calculez le volume du solide B.

(ii) On sait que le flux vers le haut à travers le paraboloïde P est égal à $\Phi_P = 6264\pi$. En utilisant le théorème de flux-divergence, calculez le flux vers le haut, Φ, de $\vec{F}$ à travers le cône C.

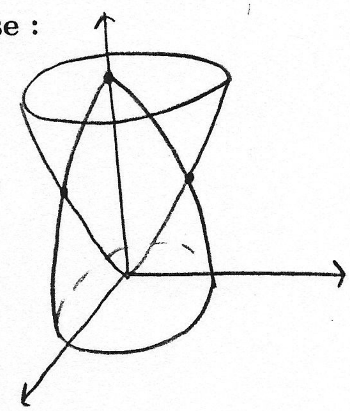
La question suivante est indépendante de la partie a).

b) Soit E un solide de densité constante δ, délimité par une surface Σ. Montrez que le moment d'inertie de E par rapport à l'axe des z est donné par

$$I_z = \delta \oiint_{\Sigma} [(x^2 + y^2)z]\,\vec{k} \cdot d\vec{S}.$$

Réponse :

i)



Transformons le z en cylindrique

$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$

$z = 42 - (x^2+y^2) = 42 - r^2$

Point de rencontre

$r = 42 - r^2$

$0 = (42 - r^2 - r)$

$0 = (6 - r)(7 + r)$

Donc le plus grand rayon possible est 6

Les bornes sont donc

$0 \leq r \leq 6$

$r \leq z \leq 42 - r^2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

a)
$$\int_0^{2\pi}\int_0^6\int_r^{42-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^6 r\left[(42-r^2)-r\right]dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[42r-r^3-r^2\right]dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{42r^2}{2}\Big|_0^6 - \frac{r^4}{4}\Big|_0^6 - \frac{r^3}{3}\Big|_0^6\right]d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[756-324-72\right]d\theta$$
$$= 360\int_0^{2\pi}d\theta$$
$$= 360\,\theta\Big|_0^{2\pi}$$
$$= 720\pi$$

3

3

b)
$$\Phi = \iiint \operatorname{div}\vec{F}\,dS - \Phi_s$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F} &= \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\\ \text{où } P &= x+ye^{-z^3}\\ Q &= 2y-xe^{-z^3}\\ R &= 5z\end{aligned}\right\}\ \operatorname{div}\vec{F} = 1+2+5=8$$

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dS = 8\underbrace{\iiint_V dS}_{\text{Volume}} = 8\cdot 720\pi$$
$$= 5760\pi$$

puisque le ϕ_p est vers l'interieur, on doit $(\cancel{+}-1)$.

$$\phi = \iiint \operatorname{div} F \, dS - \phi_p$$

$$= -5760\pi - -6264\pi = \cancel{12\,024\,\pi}$$

flux à travers le cône

$$\frac{4.0}{5}$$

b) $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}\,\delta$ ← par rapport à l'axe des z

Formule du moment d'inertie

$$I_z = \iint \delta(x,y,z)\, z^2 \, dA$$

$$\frac{0}{3}$$