POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Questionnaire
Examen final

COPIE

MTH1102D

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom : Toubal [redacted]		
[redacted]		Groupe : 01

Réservé	
1.	9 /10
2.	11 /11
3.	9 /9
4.	12 /12
5.	8 /8
TOTAL	49 /50

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
MTH1102D – Calcul II	TOUS	Hiver 2019
Professeur	*Local*	*Téléphone*
Jean Guérin	A-520.23	4098

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Mardi	23 avril 2019	2h30	9h30 à 12h00

Documentation	*Calculatrice*	*Outils électroniques*
☐ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Non programmable (AEP)	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**

Directives particulières

- **Un aide-mémoire est inclus à la fin de l'examen.**

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) puis passez à la question suivante.

Important

Cet examen contient **5** questions sur un total de **18** pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de **50** %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

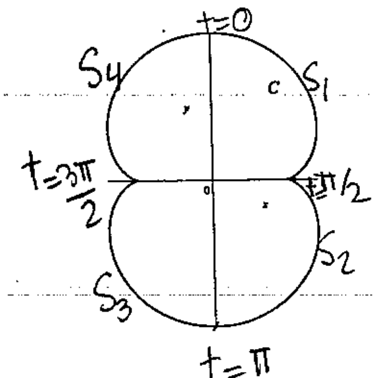
L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1 [10 points]

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [3\sin(t) + \sin(3t)]\,\vec{i} + [3\cos(t) + \cos(3t)]\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Cette courbe est illustrée ci-dessous.



Courbe fermée

9

a) Calculez la longueur de la courbe C.

Indice : utilisez l'identité $\sin(t)\sin(3t) + \cos(t)\cos(3t) = 2\cos^2(t) - 1$.

b) Calculez l'aire de la région du plan $\mathbb{R}^2$ délimitée par la courbe C.

Indice : utilisez les formules d'intégration de l'aide-mémoire.

c) Soit le champ vectoriel
$$\vec{F}(x,y) = [x+y]\,\vec{i} + [3x - \cos(y^2)]\,\vec{j}.$$

Sans faire de calculs, expliquez brièvement deux méthodes différentes pour évaluer l'intégrale $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

d) Calculez le travail effectué par le champ $\vec{F}$ autour de la courbe C avec la méthode de votre choix.

Réponse :

$$L = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \qquad \vec{r}\,'(t) = (3\cos t + 3\cos(3t))\,\vec{i} + (-3\sin t - 3\sin(3t))\,\vec{j}$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(3\cos t + 3\cos(3t))^2 + (-3\sin t - 3\sin(3t))^2}$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t + 9\cos^2(3t) + 18\cos t\cos(3t) + 9\sin^2 t + 9\sin^2(3t) + 18\sin t\sin(3t)}$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{9 + 9 + 18(2\cos^2 t - 1)} = \sqrt{36\cos^2 t} = 6\cos t$$

Comme la longueur dépend de l'orientation, on doit mesurer chaque segment individuellement et additionner leur valeur absolu.

Soit : S_1, le segment de $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

S_2, " " " $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

S_3, " " " $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

S_4, " " " $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$

$$L = \left|\int_{S_1} 6\cos t\,dt\right| + \left|\int_{S_2} 6\cos t\,dt\right| + \left|\int_{S_3} 6\cos t\,dt\right| + \left|\int_{S_4} 6\cos t\,dt\right|$$

on a que $\int 6\cos t\,dt = 6\sin t$

donc

$$L = \left|\Big[6\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|\Big[6\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right| + \left|\Big[6\sin t\Big]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + \left|\Big[6\sin\right.$$

3/3

$$L = |6| + |-6| + |6| + |-6|$$

$$L = 24$$

b) Appliquons Green, la courbe est parcourue du sens horaire donc on ajoute un $-$

orientation négative

$x = 3\sin t + \sin(3t)$

$dy = -3\sin t - 3\sin(3t)$

$$A = -\oint_C x\,dy$$

$$= -\oint_C (3\sin t + \sin(3t)) \cdot (-3\sin t - 3\sin(3t))\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} -9\sin^2 t - 12\sin t\sin(3t) - 3\sin^2(3t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} -9\sin^2 t\,dt + \underbrace{\int_0^{2\pi} -12\sin t\sin(3t)\,dt}_{\text{formule d'intégration}} + -\int_0^{2\pi} 3\sin^2(3t$$

3

3

$$= +9\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt + 0 + 3\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(6t)}{2}$$

$$= 9\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} + 3\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(6t)}{12}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 9[\pi] + 3[\pi] = 12\pi$$

c) 1^er méthode : on peut utiliser la formule $\oint_C \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,d$ avec la paramétrisation de la courbe

2^e méthode : On peut utiliser le théorème de Green avec la formule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d$ car la courbe est fermée (voir shéma)

d) Utilisons le thm de Green (car $\cos(y^2)$ est potentiellem plus compliqué à intégrer)

On a que

$$Q = (3x - \cos(y^2)) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3$$

$$P = (x+y) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

On a alors

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \iint_D 3-1 \, dA$$

$$= 2A(D)$$

$$= 2 \cdot \underbrace{12\pi}_{\text{voir b)}} = 24$$

$\frac{2}{3}$

et donc $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 24$

11/11

Question 2 [11 points]

Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) Soit le champ $\vec{r}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et la fonction $r(x,y,z) = ||\vec{r}(x,y,z)\,||$. Utilisez la formule

$$\operatorname{div}(f\vec{F}) = f\operatorname{div}\vec{F} + \nabla f\cdot\vec{F}$$

pour calculer $\operatorname{div}(r\,\vec{r})$. Exprimez votre réponse sous forme simplifiée.

b) Soit le champ vectoriel $\vec{G}(x,y,z) = (axy + 2xz)\,\vec{i} + (x^2 + 3y^2)\,\vec{j} + x^2\,\vec{k}$, où a est une constante.

(i) Déterminez pour quelle valeur de a le champ $\vec{G}$ est conservatif. Justifiez soigneusement votre réponse.

(ii) Pour la valeur de a trouvée en (i), calculez le travail effectué par $\vec{G}$ le long de la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos(t^3\pi)\,\vec{i} + (2-t)\,\vec{j} + (3-t^2)\,\vec{k},$$

$0 \le t \le 2$.

Réponse :

$f = r$ et $\vec{F} = \vec{r}$

$\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3$ ✓

$r = ||\vec{r}(x,y,z)|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\nabla r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$ ✓

$\nabla r\cdot\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+\ldots$

$\nabla r\cdot\vec{r} = \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\operatorname{div}(r\vec{r}) = r\cdot\operatorname{div}\vec{r} + \nabla r\cdot\vec{r}$

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 3 + \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad \left(\frac{a}{a^{1/2}} = a^{1/2}\right)$

$$\operatorname{div}(r\vec{r}) = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

ou encore

$4\,\mathbf{r} = 4\,\|\vec{r}(x,y,z)\|$

b) Un champ vectoriel $\vec{G}$ en 3D est conservatif lorsque $\operatorname{rot}\vec{G} = \vec{0}$ et qu'il est défini dans $\mathbb{R}^3$. Or, $\vec{G} \in \mathbb{R}^3$, car il n'y a aucune discontinuités (fonction polynominal). Reste à trouver la valeur de a pour laquelle $\operatorname{rot}\vec{G} = \vec{0}$

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ axy+2xz & x^2+3y^2 & x^2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - (2x-2x)\vec{j} + (2x-ax)\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \vec{0} \Rightarrow (2x-ax)\vec{k} = 0\vec{k}$$

$$2x - ax = 0$$

$$2x = ax$$

$$\boxed{a=2}$$

b) Comme on sait que $\vec{G}$ est conservatif, trouvant le potentiel f tel que $\vec{G} = \nabla f$

$$f_x = 2xy + 2xz$$
$$f_y = x^2 + 3y^2$$
$$f_z = x^2$$

$$\int f_x \, dx = \int (2xy + 2xz) \, dx$$

$$f(x,y,z) = x^2 y + x^2 z + g(y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = x^2 + h'(y,z) = f_y = x^2 + 3y^2$$

$$g'(y,z) = 3y^2$$

$$g(y,z) = y^3 + h(z);$$

$$f(x,y,z) = x^2 y + x^2 z + y^3 + h(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = x^2 + h'(z) = x^2$$

$$h'(z) = 0$$

$h(z) = C$, où C est une constante arbitraire

$$f(x,y,z) = x^2 y + x^2 z + y^3 + C$$

Posons $C = 0$, car c'est une valeur arbitraire

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

$$W = \int_0^2 \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(2)) - f(\vec{r}(0)) = f(1, 0, -1) - f(1, 2;$$

$$W = -1 - (2 + 3 + 8) = -14$$

Question 3 [9 points]

9

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$.

a) Soit S la partie du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ située en dessous du plan $z = 2$.

(i) Montrez que S peut être paramétrée par

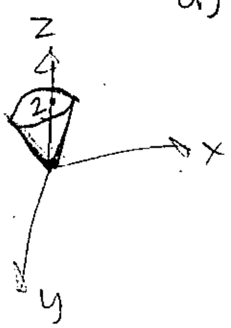
$$\vec{R}(u, v) = v\cos(u)\,\vec{i} + v\sin(u)\,\vec{j} + v\,\vec{k}$$

avec $0 \le u \le 2\pi$ et $0 \le v \le 2$.

(ii) Calculez le flux de $\vec{F}$ à travers S si la surface est orientée au point $(0, 1, 1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k})$.

b) Sachant que le champ $\vec{F}$ est tangent au cylindre T défini par $x^2 + y^2 = a^2$ en tout point, que pouvez-vous dire du flux de $\vec{F}$ à travers T ? Voir verso de la page 10!!

Réponse :



a) i) on a que $x = v\cos u$
$y = v\sin u$
$z = v$

avec $z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(v\cos u)^2 + (v\sin u)^2} = \sqrt{v^2} = v$ ✓

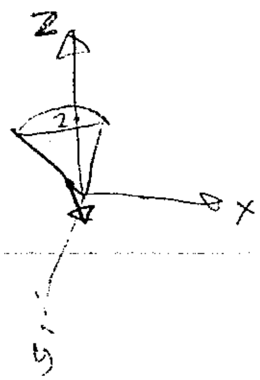
l'intersection : $2 = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 4 = x^2 + y^2$ ✓ qui peut être param. par $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$0 \le r \le 2$ ✓
$0 \le \theta \le 2\pi$

ce qui est équivalent à celle de $\vec{R}(u,v)$

2/2 OK.

$d\vec{S} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} dS \quad dS = \|\vec{n}\| dA$

ii) $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$



$\iint_D \vec{F}_{(\vec{R}(u,v))} \cdot \pm(\vec{R}_u \times \vec{R}_v)\, dA$

$\vec{R}_u = (-v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j} + 0\vec{k})$
$\vec{R}_v = (\cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + 1\vec{k})$

orientation négative

$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} = (v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + \underbrace{(-v\sin^2 u - v\cos^2 u)}_{-v}\vec{k})$

$\vec{n} = \vec{R}_u \times \vec{R}_v = (v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} - v\vec{k})$

respecte l'orientation donnée au point $(0,1,1)$ donc on pren $+(\vec{R}_u \times \vec{R}_v)$

$(0,1,1)$ équivaut à : $v = 1$, car $v\vec{k} = 1\vec{k}$

$1\sin u\,\vec{j} = 1\vec{j}$
$\sin u = 1$
$u = \frac{\pi}{2}$ dans l'intervalle $0 \leq u \leq 2\pi$

4/4

et donc $\frac{\vec{n}(\frac{\pi}{2},1)}{\|\vec{n}(\frac{\pi}{2},1)\|} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k}) \therefore$

$\vec{F}(\vec{R}(u,v)) = -v\sin u\,\vec{j} + v\cos u\,\vec{j} + v^2\vec{k}$

$\iint_D \vec{F}(\vec{R}(u,v)) \cdot (\vec{R}_u \times \vec{R}_v)\, dA = \iint_D -v^2\cos u\sin u + v^2\sin u\cos u - v^3\, dA$

$\int_0^{2\pi}\int_0^2 -v^3\, dv\, du = \int_0^{2\pi} du \left[-\frac{v^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \cdot -4 = \boxed{-8\pi}$

h) normal

b) On a que $\vec{F} \parallel \vec{T}$ et donc que $\vec{F} \perp \vec{n}$

et donc on a

$$\iint_T \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\, dA = \iint_D 0\, dA = 0$$

Aucun flux ne traverse la surface.

7/7

12/12

Question 4 [12 points]

Soit S_1 le paraboloïde hyperbolique $z = x^2 - y^2$, S_2 le paraboloïde elliptique $z = 3x^2 + y^2 - 8$ et C la courbe d'intersection de ces deux surfaces.

$y = \pm\sqrt{-3x^2+8}$

a) Donnez une paramétrisation de la courbe C et montrez que c'est une courbe fermée.

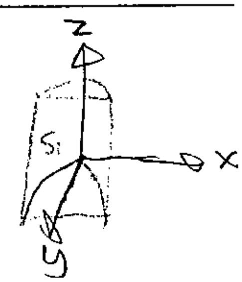
b) Calculez l'aire de la partie Σ du paraboloïde hyperbolique S_1 qui est délimitée par la courbe C.

c) Calculez la circulation du champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y, z) = [z - \cos(x^2)]\,\vec{i} + [2x - \sin(y^2)]\,\vec{j} + [x + y - z^3]\,\vec{k}$$

autour de C, si la courbe est parcourue dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.

Réponse :



a) Intersection : $x^2 - y^2 = 3x^2 + y^2 - 8$

$8 = 2x^2 + 2y^2$

$x^2 + y^2 = 4$ ✓ Le cercle de rayon

$x = 2\cos\theta$
$y = 2\sin\theta$ } ✓ selon la projection en xy de l'intersection

$z = x^2 - y^2 = 4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta = 4\cos(2\theta)$ ✓ } selon le paraboloïde hyperbolique (équivalent pour les 2 S)

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\vec{r}(t) = 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} + 4\cos(2\theta)\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Courbe fermée si $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$

$\vec{r}(0) = (2, 0, 4)$ $\quad \vec{r}(2\pi) = (2, 0, 4)$

donc la courbe est fermée

+3/3

b) $A = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$

S: $z = x^2 - y^2$ ✓

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ✓

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$

$A = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$

$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta$

D: disque $x^2+y^2 \leq 4$ ✓

selon a)

$\int \frac{\cancel{r}\sqrt{u}}{8\cancel{r}}\, du$ $\quad u = 4r^2+1$, $du = 8r\,dr$

$= \frac{2u^{3/2}}{8.3} = \frac{u^{3/2}}{12}$

polaire: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$A = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[\frac{(4r^2+1)^{3/2}}{12}\right]_0^2$

$0 \leq r \leq 2$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$A = 2\pi \cdot \frac{1}{12}\left(17^{3/2} - 1\right)$

$A = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$

$+5/5$

c) Appliquons Stokes (courbe fermée)

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad ✓$$

$$\text{rot}\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z-\cos(x^2) & 2x-\sin(y^2) & x+y-z^3 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} + -(1-1)\vec{j} + (2-0)\vec{k}$$

$$= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \quad ✓$$

$\vec{n} = \oplus\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$, car dans le sens positif (antihoraire) ✓

En utilisant $z = 3x^2 + y^2 - 8$

$$\vec{n} = (-6x, -2y, 1)$$

+4/4

$$\iint_D (1\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (-6x\vec{i} - 2y\vec{j} + 1)\, dA$$

$$= \iint_D -6x + 2 \; dA$$

D: disque $x^2+y^2 \leq 4$

polaire: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (-6r\cos\theta + 2)r \; dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-6\cos\theta \frac{r^3}{3} + r^2\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -16\cos\theta + 4 \; d\theta = 0 + 4[\theta]_0^{2\pi} = 8\pi$$

Question 5 [8 points]

8/8

Soit S la surface d'un solide B de densité constante.

a) Montrez que la masse de B peut être calculée à l'aide de la formule

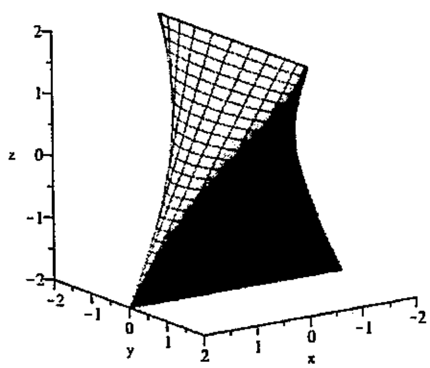
$$m = \sigma \oiint_S z\,\vec{k}\cdot d\vec{S},$$

où σ est une constante positive correspondant à la densité.

b) Utilisez la formule démontrée en a) pour calculer la masse de la surface S représentée ci-dessous et paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = (1-u)\cos(v)\,\vec{i} + (1+u)\sin(v)\,\vec{j} + 2u\,\vec{k}, \quad -1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Supposez que la densité est constante et égale à 1.



Réponse :

On a que $\rho(x,y,z) = \sigma$ ✓

$$m = \iiint_B \rho(x,y,z)\,dV = \sigma \iiint_B dV = \sigma \iiint_B dV$$ ✓

Appliquons le théorème du flux-divergence en suppos[ant] une surface fermée, on a :

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\,dV$$ ✓

On peut donc poser que

$$\operatorname{div}\vec{F} = 1$$

un $\vec{F}$ qui respecterait l'énoncé serait

$$\vec{F} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k}$$

, mais n'importe quelle expression qui donnerait $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ fonctionnera

on aura donc

$$m = \sigma \iiint_B dV = \sigma \oiint_S 0\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k} \cdot d\vec{S}$$

$$m = \sigma \oiint_S z\vec{k}\, d\vec{S}$$

b) $\sigma = 1$

$$\vec{n} = \pm(\vec{R_u} \times \vec{R_v})$$

$$m = \iint_D z\vec{k} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\vec{R_u} = -\cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{R_v} = -(1-u)\sin v\,\vec{i} + (1+u)\cos v\,\vec{j} + 0$$

$$\vec{R_u} \times \vec{R_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos v & \sin v & 2 \\ (-1+u)\sin v & (1+u)\cos v & 0 \end{vmatrix} = -2(1+u)\cos v\,\vec{i} + 2(-1+u)\sin v\,\vec{j} + (-(1+u)\cos^2 v - ((-1+u)\sin^2 v)$$

$$\vec{n} = +2(-1+u)\cos v\,\vec{i} + 2(-1+u)\sin v\,\vec{j} + (-(1+u)\cos^2 v + (-1+u)\sin^2 v$$

on utilise $-\vec{n}$ pour respecter l'orientation du vecteur position de la surface

$$m = \iint_D 2u\vec{k} \cdot -\vec{n}\, dA = \iint_D 2u \cdot -((-1-u)\cos^2 v + (1-u)\sin^2 v)\, dS$$

$$m = -\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} (-2u - 2u^2)\underbrace{\cos^2 v}_{\frac{1+\cos(2v)}{2}} + (2u - 2u^2)\underbrace{\sin^2 v}_{\frac{1-\cos(2v)}{2}} \, dv\, du$$

$$= -\int_{-1}^{1} \left[(-2u-2u^2)\left(\frac{v}{2} + \frac{\sin(2v)}{4}\right)\right]_0^{2\pi} + \left[(2u-2u^2)\left(\frac{v}{2} - \frac{\sin(2v)}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\int_{-1}^{1} (-2u-2u^2)\pi + (2u-2u^2)\pi \, du$$

$$= -\pi \left[\cancel{-u^2} - \frac{2}{3}u^3 \cancel{+u^2} - \frac{2}{3}u^3\right]_{-1}^{1} = -\pi\left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= -\pi \cdot \frac{-8}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

$$m = \frac{8\pi}{3}$$

Analyse vectorielle

1. $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$, $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$, $\vec{e}_z = \vec{k}$
2. $\vec{e}_\rho = \sin(\phi)\cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\phi)\sin(\theta)\vec{\jmath} + \cos(\phi)\vec{k}$, $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$, $\vec{e}_\phi = \cos(\phi)\cos(\theta)\vec{\imath} + \cos(\phi)\sin(\theta)\vec{\jmath} - \sin(\phi)\vec{k}$
3. $\displaystyle\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$
4. $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$
5. $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$
6. $\displaystyle\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV$

Formules d'intégration

1. $\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = 0$
2. $\int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^k(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^k(x)\sin(x)\,dx = 0,\ k \in \mathbb{N}$
3. $\int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(kx)\,dx = 0,\ k \in \mathbb{N}$