POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Questionnaire examen final

MTH1102

Sigle du cours

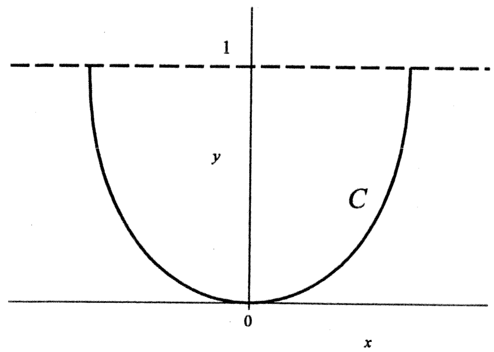
Réservé		
1.	11	/1
2.	9	/9
3.	8	/8
4.	14	/14
5.	8	/8
TOTAL		
	50	/50

Question 1 [11 points]

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\vec{\imath} + t^2\,\vec{\jmath}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Cette courbe est illustrée ci-dessous.



a) Calculez la longueur de la courbe C.

b) Montrez que l'aire de la région R délimitée par la courbe C et par la droite horizontale $y = 1$ est donnée par

$$A = \int_C x\,dy,$$

et ce même si la courbe C n'est pas fermée.

c) Calculez l'aire de R.

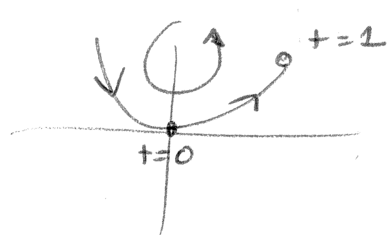
d) Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = (x + y)\,\vec{\imath} + [3x - \cos(y^2)]\,\vec{\jmath}.$$

Évaluez l'intégrale $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$.

Réponse :

orientation de la courbe



à $t=0$, $\vec{r}(0) = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$

à $t=1$ $\vec{r}(1) = (1-\frac{1}{3})\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$

$= \frac{2}{3}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

c'est dans le sens anti horaire $\Rightarrow$ c'est (+)

a) $L = \int_C \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$

$\vec{r}(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\vec{i} + t^2\vec{j}$ $\qquad -1 < t < 1$

$\Rightarrow \vec{r}\,'(t) = (1 - t^2)\vec{i} + 2t\vec{j}$

$\Rightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2}$

$= \sqrt{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}$

$= \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}$

$= \sqrt{(t^2+1)^2}$

$= t^2 + 1$ ✓

3/3

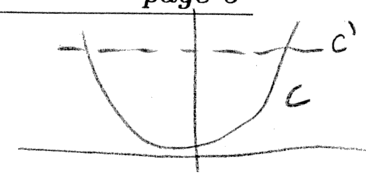
$L = \int_{-1}^{1} t^2 + 1 \; dt$

$= \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{-1}{3} - 1\right)$

$= \frac{2}{3} + 2$

$\boxed{= \frac{8}{3}}$ ✓



b) $A = \oint x\,dy = \int_C x\,dy + \int_{C'} x\,dy$

la courbe c' n'a aucune variation en y.
on peut la paramètrée comme $\begin{cases} x = x \\ y = 1 \end{cases}$

alors, $\int_{c'} x\,dy = \int_{c'} x \cdot 0 = 0$ ✓ 1/1

alors $A = \int_c x\,dy$ ∎

c) $A = \int_c x\,dy$ $\quad \begin{cases} x = t - \frac{t^3}{3} \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow dy = 2t\,dt$

$$A = \int_{-1}^{1} \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \cdot 2t\,dt = \int_{-1}^{1} 2t^2 - \frac{2}{3}t^4\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{2}{15}t^5\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{15} - \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{15}\right) = \frac{4}{3} - \frac{4}{15} = \frac{20}{15} - \frac{4}{15} = \boxed{\frac{16}{15}}$$ ✓ 2/2

d) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ S/S avec $d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,dt$ (calculé en a))
$= \left((1-t^2)\vec{i} + 2t\vec{j}\right)dt$

avec $x = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ et $y = t^2$, $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + [3x - \cos(y^2)]\vec{j}$

$$\vec{F} = \left[t - \frac{t^3}{3} + t^2\right]\vec{i} + \left[3t - t^3 - \cos t^4\right]\vec{j}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(\left[t - \frac{t^3}{3} + t^2\right]\vec{i} + \left[3t - t^3 - \cos t^4\right]\vec{j}\right) \cdot \left([1-t^2]\vec{i} + 2t\vec{j}\right) dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[t - \frac{t^3}{3} + t^2\right][1-t^2] + [3t - t^3 - \cos(t^4)][2t] \; dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t - \frac{t^3}{3} + t^2 - t^3 + \frac{t^5}{3} - t^4 + 6t^2 - 2t^4 - 2t\cos(t^4) \; dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{3} - 3t^4 - \frac{4t^3}{3} + 7t^2 + t - 2t\cos t^4 \; dt$$

$$= \left[\frac{t^6}{18} - \frac{3t^5}{5} - \frac{t^4}{3} + \frac{7t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} - \boxed{\int_{-1}^{1} \cos t^4\, dt}$$

$$= 2\left[\frac{-3t^5}{5} + \frac{7t^3}{3}\right]_0^1 - 0$$

$$= 2\left[\frac{-3}{5} + \frac{7}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{15}[-9 + 35]$$

$$= \frac{52}{15} \checkmark$$

c'est une fonction paire ;

$f(x) = \cos x^4$

$f(-x) = \cos(-x)^4$
$= \cos(x)$
$= f(x)$

intégrée sur un domaine symétrique.
donc, c'est nul.

$\int_{-1}^{1} \cos t^4\, dt = 0$ ✓

Question 2 [9 points]

a) Trouvez un potentiel pour le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = [-6x + yz^2]\,\vec{i} + [xz^2 + 8yz]\,\vec{j} + [2xyz + 4y^2]\,\vec{k}.$$

b) Évaluez l'intégrale

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

où C_1 est la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = (t - t^2)\,\vec{i} + (t^3 - 2t)\,\vec{j} + (2 - t)\,\vec{k}$, $-1 \le t \le 2$.

c) Évaluez l'intégrale

$$\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

où C_2 est une ellipse dans l'espace.

Réponse :

a) $\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ on cherche f.

$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x + yz^2 \Rightarrow f = \int -6x + yz^2\,dx = \frac{-6x^2}{2} + yz^2x + g(z,y) + cst$

$\frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + 8yz \Rightarrow f = \int xz^2 + 8yz\,dy = xz^2y + \frac{8y^2z}{2} + h(x,z) + cst$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz + 4y^2 \Rightarrow f = \int (2xyz + 4y^2)\,dz = xz^2y + 4y^2z + j(x,y) + cst$

$f = xyz^2 + j(x,y) + h(x,z) + g(z,y) + cst$

$\Rightarrow f = xyz^2 - 3x^2 + 4y^2z + cst$ ✓

X

b) $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ avec $\vec{r}(t) = (t - t^2)\vec{i} + (t^3 - 2t)\vec{j} + (2 - t)\vec{k}$, $-1 \le t \le 2$

le champs $\vec{F}$ est un champs conservatif car $f(x, y, z)$ existe tel que $\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

donc $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(t_2)) - f(\vec{r}(t_1))$

$t_2 = 2$

$\Rightarrow \vec{r}(t_2) = (2 - 2^2)\vec{i} + (2^3 - 2 \cdot 2)\vec{j} + (2 - 2)\vec{k} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$

$t_1 = -1$

$\Rightarrow \vec{r}(t_1) = (-1 - (-1)^2)\vec{i} + ((-1)^3 - 2(-1))\vec{j} + (2 - (-1))\vec{k} = -2\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$

avec $f(x, y, z) = xyz^2 - 3x^2 + 4y^2z + cst$

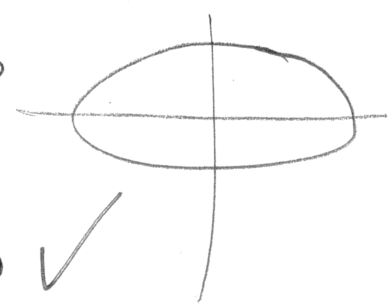
$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(-2, 4, 0) - f(-2, 1, 3)$

$= (0 - 12 + 0 + cst) - (-18 - 12 + 12 + cst)$

$= 18 - 12 = \boxed{6}$ ✓

c) une ellipse est une courbe fermée. →

$\vec{F}$ est un champs conservatif.



$\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_0, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = 0$ ✓

Question 3 [8 points]

Soit S la partie du paraboloïde hyperbolique $z = x^2 - y^2 + 1$ située à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 25$. L'*intérieur* du cylindre est défini par $x^2 + y^2 \leq 25$. Calculez l'aire de S.

Réponse :

Aire $= \iint \| d\vec{S} \|$

il faut paramètrer la surface.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta + 1 \end{aligned} \quad \text{avec} \begin{cases} 0 < r < 5 \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}}$$

$= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$

$= r^2(\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)) + 1$

$= r^2(2\cos^2\theta - 1) + 1$

$\vec{r}(\theta, r) = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j} + (r^2(2\cos^2\theta - 1) + 1)\vec{k}$

$\vec{r}_\theta = -r\sin\theta\,\vec{i} + r\cos\theta\,\vec{j} + 2r^2 \cdot 2\cos\theta \cdot (-\sin\theta)\,\vec{k}$

$\vec{r}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + (2\cos^2\theta - 1)\vec{k}$

$d\vec{S} = |\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_r| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -4r^2\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\cos^2\theta - 1 \end{vmatrix}$

~~intersection paraboloïde - cylindre~~

~~cylindre : $x^2 + y^2 = 25$~~

~~$\Rightarrow x^2 = 25 - y^2$~~

~~paraboloïde : $z = x^2 - y^2 - 1$~~

~~$\Rightarrow z = 25 - y^2 - y^2 - 1$~~

~~$z = 24 - 2y^2$~~

voir le verso de cette → feuille

À corriger

$$\vec{r}(\theta, r) = r\cos\theta\, i + r\sin\theta\, j + (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)\vec{k}$$

$$\vec{r}_\theta = -r\sin\theta\, i + r\cos\theta\, j + (r^2 \cdot 2\cos\theta(-\sin\theta) - r^2 \cdot 2\sin\theta \cdot \cos\theta)\vec{k}$$

$$= -r\sin\theta\, i + r\cos\theta\, j - 4r^2\cos\theta\sin\theta\, \vec{k}$$

$$\vec{r}_r = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j} + (2r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta)\vec{k}$$

$$= \cos\theta\, i + \sin\theta\, j + 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\vec{k}$$

$$\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -4r^2\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{vmatrix}$$

$$= \left(2r^2\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 4r^2\cos\theta\sin^2\theta\right)\vec{i}$$
$$-\left(-2r^2\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 4r^2\cos^2\theta\sin\theta\right)\vec{j}$$
$$-r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\vec{k}$$

$$\|\partial s\| = \sqrt{\left(2r^2\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 4r^2\cos\theta\sin^2\theta\right)^2 + \left(2r^2\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 4r^2\cos^2\theta\sin\theta\right)^2 + (-r)^2}$$

$$= \sqrt{4r^4\cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin^2\theta)^2 + 4r^4\sin^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\cos^2\theta)^2 + r^2}$$

$$= \sqrt{4r^4\cos^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 4r^2\sin^2\theta(-(\cos^2\theta + \sin^2\theta))^2 + r^2}$$

$$= \sqrt{4r^4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2} = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2+1}$$

$$\boxed{\text{alors } \|ds\| = r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta}$$

suite →

$$\vec{dS} = (-r\cos\theta(2\cos^2\theta-1) + \sin\theta\cdot 4r^2\cos\theta\sin\theta)\vec{i}$$
$$-(-r\sin\theta(2\cos^2\theta-1) + \cos\theta\cdot 4r^2\cos\theta\sin\theta)\vec{j}$$
$$+(-r\sin^2\theta - r\cos^2\theta)\vec{k} \quad d\theta\, dr$$

$$= ([-2r\cos^3\theta + r\cos\theta + 4r^2\cos\theta\sin^2\theta]\vec{i}$$
$$+ [2r\sin\theta\cos^2\theta - r\sin\theta]\vec{j} - r\vec{k})\, d\theta\, dr$$

$$S = \iint \|\vec{dS}\|$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^5 r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta \qquad u = 4r^2+1 \quad du = 8r\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\int \frac{1}{8}\sqrt{u}\, du\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^5 d\theta$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{12}\left[(100+1)^{3/2} - (1)^{3/2}\right]$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{6}\left[10201\sqrt{101} - 1\right]}$$

Question 4 [14 points]

14/14

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\,\vec{i} + 2\sin(t)\,\vec{j} + [3 + 2\sin(t) - 4\cos(t)]\,\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) (i) Montrez que C est une courbe fermée et trouvez l'équation d'un plan (de la forme $z = ax + by + c$) qui contient C.

(ii) Calculez le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = \cos(x^5)\,\vec{i} + (xz + y^{1/5})\,\vec{j} + z^5\,\vec{k}$$

autour de la courbe C.

OK

8/8

La partie b) est indépendante de la partie a).

b) Soit Γ une courbe fermée située sur le plan $x + y + z = d$, où d est une constante, et $\vec{G}$ le champ défini par $\vec{G}(x,y,z) = z\,\vec{i} + 2x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$. Montrez que le travail de $\vec{G}$ autour de Γ ne dépend que de l'aire de la partie du plan délimitée par Γ.

Réponse :

a) i) C est une courbe fermée si $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$

$\vec{r}(0) = 2\vec{i} + 0\vec{j} + (-1)\vec{k}$
$\vec{r}(2\pi) = 2\vec{i} + 0\vec{j} + (-1)\vec{k}$
$\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3 + 2\sin t - 4\cos t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= 3 + 2\sin t - 4\cos t \\ &= 3 + (2\sin t) - 2\cdot(2\cos t) \\ &= 3 + y - 2x \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad z = -2x + y + 3$

C'est un plan de la forme $z = ax + by + c$ avec $a = -2$, $b = 1$ $c = 3$ qui contient C.

X

ii)

À corriger

Question 4 a) ii) (suite)

$$W = \iint (-x\vec{i} + z\vec{k}) \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})\, dx\, dy$$

$$= \iint (-x\vec{i} + (-2x+y+3)\vec{k}) \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})\, dx\, dy$$

$$= \iint -2x - 2x + y + 3 \; dx\, dy$$

$$= \iint -4x + y + 3 \; dx\, dy$$

coordonnée polaires avec $0 < r < 2$, $0 < \theta < 2\pi$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (-4(r\cos\theta) + r\sin\theta + 3)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} -4r^2\cos\theta + r^2\sin\theta + 3r \; dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-4r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta + \frac{3r^2}{2} \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{32}{3}\cos\theta + \frac{8}{3}\sin\theta + 6 \; d\theta$$

$$= \left[\cancel{-\frac{32}{3}\sin\theta} - \cancel{\frac{8}{3}\cos\theta} + 6\theta \right]_0^{2\pi}$$ ✓

$$= 6 \cdot 2\pi = \boxed{12\pi}$$

ii) $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\vec{F} \cdot d\vec{s}$ (THM)

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \cos(x^5) & (xz + y^{1/5})\vec{j} & z^5 \end{vmatrix} = -x\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k}$$
$$= -x\vec{i} + (-2x + y + 3)\vec{k} \, *$$

Paramétrisation de la surface:

$$* \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -2x + y + 3 \end{cases}$$ ✓

$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (-2x + y + 3)\vec{k}$

bornes

$0 < t < 2\pi$

$x = 2\cos(t) \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$y = 2\sin(t) \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$

$$d\vec{s} = \pm|\vec{r_x} \wedge \vec{r_y}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2\vec{i} - 1\vec{j} + \vec{k})\, dx\, dy$$

OK

voir page à côté

aucune indication sur le sens de C ou l'orientation de la normale de S. alors on prend $d\vec{s} = +|\vec{r_x} \wedge \vec{r_y}|$ ✓

---

erreur de signe

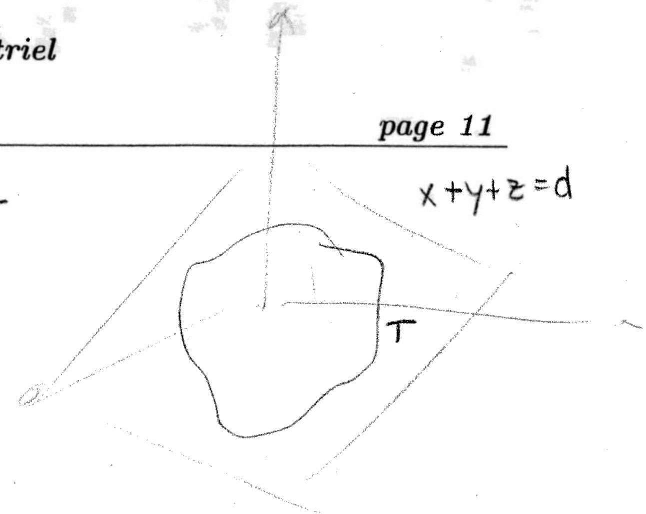
$$W = \iint (-x\vec{i} \overset{*}{+} z\vec{k}) \cdot (-2\vec{i} - 1\vec{j} + \vec{k})\, dx\, dy = \iint -2x + (-2x + y + 3)\, dx\, dy$$

$$= \iint y + 3\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r\sin\theta + 3)r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\sin\theta + 3r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin\theta + \frac{3r^2}{2}\right]_0^2 = \int_0^{2\pi}\left[\frac{8}{3}\sin\theta + 6\right]d\theta = \left[-\frac{8}{3}\cos\theta + 6\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[-\frac{8}{3} + \frac{8}{3} + 12\pi\right] = \boxed{12\pi}$$ ✓

b) Mq le travail de $\vec{G}$ autour de T ne dépend que de l'aire de la partie du plan délimitée par T



travail de $\vec{G}$ autour de T avec T fermé

$$\vec{G} = z\vec{i} + 2x\vec{j} + y\vec{k}$$

$$W = \int \vec{G} \cdot \vec{dr}$$

THM: $$\oint_T \vec{G} \cdot \vec{dr} = \iint_S \text{rot}\,\vec{G} \cdot \vec{dS} = \iint_S \text{rot}\,\vec{G} \cdot \vec{n}\, dS$$

3

$$\text{rot}\,\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & 2x & y \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

paramétrisation plan

$x = x$
$y = y$
$z = d - x - y$

$$\vec{n} = \frac{\vec{dS}}{\|\vec{dS}\|} = \frac{|\vec{r_x} \wedge \vec{r_y}|}{\|\vec{r_x} \wedge \vec{r_y}\|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\|\vec{r_x} \wedge \vec{r_y}\|} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$W = \oint_T \vec{G} \cdot \vec{dr} = \iint_S \text{rot}\,\vec{G} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_S (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\right) \cdot dS$$

$$= \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - 1 + 2)\, dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint dS$$

, avec le travail qui ne dépend que de dS.

X

Question 5 [8 points]

cylindre bol

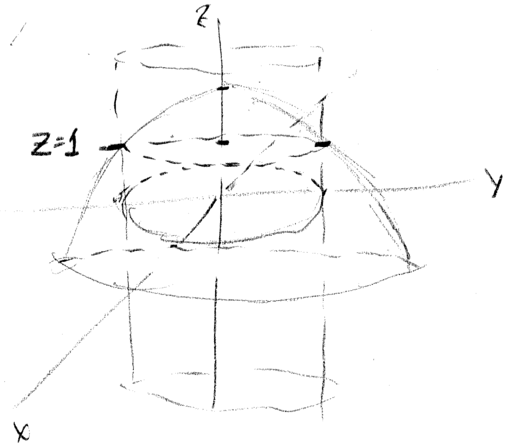
Soit S la surface du solide B délimité par les surfaces $\boxed{z = 0}$, $\boxed{x^2 + y^2 = 9}$ et $\boxed{z = 10 - x^2 - y^2}$.

~~a)~~ Calculez le volume de B.

~~b)~~ Calculez le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = [x + \arctan(z^2)]\,\vec{i} + [2y + \arctan(z^2)]\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ à travers S.

Réponse :

$V = \int dV$



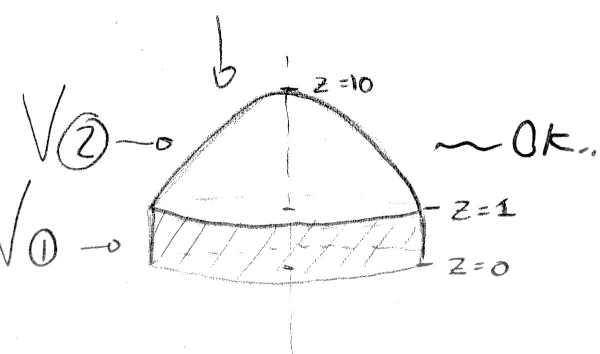
intersection cylindre-bol.

$z = 10 - (x^2 + y^2)$

$z = 10 - 9$?

$z = 1$

on évalue le volume en 2 partie $(V = V_1 + V_2)$



① $V_1 = \iiint dV$

en coordonnées cylindrique...

$V_1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$

$= [z]_0^1 \, [\theta]_0^{2\pi} \, \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^3$?

$= 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{9}{2} = \boxed{9\pi}$

<u>bornes 1</u>

$0 < \theta < 2\pi$

$0 < \rho < 3$

$0 < z < 1$

équation du cylindre :

$x^2 + y^2 = 9$

$\Rightarrow \rho^2 = 9 \Rightarrow \rho = 3$

② bornes.

$1 \leq z \leq 10 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow 1 \leq z \leq 10 - (x^2 + y^2)$

$\Rightarrow 1 \leq z \leq 10 - \rho^2$

$0 < \rho < 3$

$0 < \theta < 2\pi$

$V_2 = \iiint dV$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_1^{10-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$

$= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int_0^3 \rho \cdot [z]_1^{10-\rho^2} d\rho$

$= 2\pi \int_0^3 \rho (10 - \rho^2 - 1) \, d\rho$

$= 2\pi \int_0^3 9\rho - \rho^3 \, d\rho$

$= 2\pi \left[\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^3$

$= 2\pi \left[\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right]$

$= 2\pi \cdot \frac{81}{4} = \boxed{\frac{81\pi}{2}}$

$V_{tot} = V_1 + V_2$

$= 9\pi + \frac{81}{2}\pi$ ~~ok~~... (long)

$= \frac{18\pi + 81\pi}{2}$

$\boxed{= \frac{99}{2}\pi}$ ✓

b) $\Phi = \iint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV$, $\vec{F} = [x + \arctan(z^2)] \vec{i} + [2y + \arctan z$ ... $+3z$

$\operatorname{div} \vec{F} = 1 + 2 + 3 = 6$ ✓

$\Phi = \iiint 6 \, dV = 6 \iiint dV = 6 \cdot \frac{99}{2}\pi = \boxed{297\pi}$ ✓