POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire Examen final

MTH2302D

Sigle du cours

COPIE

Identification de l'étudiant(e)		
Nom : Charara	Prénom : Hadi	
Signature : Hadi Charara	Matricule : 1891631	Groupe : 03

Réservé	
1.	2 /8
2.	3 /8
3.	2 /6
4.	3 /10
5.	8 /14
6.	0,5 /4
TOTAL	18,5 /50

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
MTH2302D – Probabilités et statistique	TOUS	Automne 2018

Professeur	*Local*	*Téléphone*
Luc Adjengue	A-520.33	4475

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Mercredi	19 décembre 2018	2h30	9h30 à 12h00

Documentation	*Calculatrice*	*Outils électroniques*
☐ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Non programmable (AEP)	Les appareils électroniques personnels sont interdits.

Directives particulières

1. Ne détachez aucune feuille de ce questionnaire.
2. Les 3 dernières pages constituent une annexe (ne pas détacher)
3. Documentation permise **: une feuille 8,5x11 recto-verso manuscrite.**
4. Chaque réponse doit être complète et accompagnée d'une justification.

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) puis passez à la question suivante.

Important

Cet examen contient [6] questions sur un total de [14] pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de [50] %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

2

Question nº 1 : (8 points)

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_{24}$ un échantillon aléatoire d'une variable X distribuée selon une loi normale $N(0,\, \sigma^2)$. C'est-à-dire $X \sim N(0,\, \sigma^2)$. Soit $\overline{X}$ et S la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.

2

a) (2 points) Calculer $P\left(\overline{X} > a\sigma\right)$ où $a = 0{,}4$.

$P(\bar{X} > a\sigma) = P(\bar{X} \quad > a\sigma \quad)$

$= P\left(\frac{\bar{X}}{S} > \frac{a\sigma}{S}\right)$ car $\mu = 0$

$S = \sqrt{\frac{\sigma^2}{24}}$ $\qquad P(Z > 2a\sqrt{6}) = P(Z > 1{,}96)$

$= -0{,}975 + 1 = 0{,}025$

0

b) (2 points) Calculer $P\left(\overline{X} > bS\right)$ où $b = 0{,}51$.

$P(\bar{X} > bS) = P\left(Z > \frac{bS}{S}\right)$ car $\mu = 0$

$= P(Z > 0{,}51) = 1 - P(Z < 0{,}51)$

$= 1 - 0{,}69497 \simeq 0{,}305$

Question nº 1 : (suite)

c) **(2 points)** Calculer $P(S > c\sigma)$ où $c = 1{,}18$.

$P(S > c\sigma)$

$= P(S > c\sigma)$

$= P(S^2 > c^2\sigma^2)$

$= P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} > c^2\right)$

$= P(W > c^2)$, degré 1

$P(W > 1{,}39)$

$\approx P(W > \chi^2_{0,25,1}) \approx 0{,}25$.

d) **(2 points)** Pour estimer σ^2 à partir de X_1 et X_2 seulement, on propose les estimateurs

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(X_1^2 + X_2^2\right) \text{ et } W_2 = \frac{1}{3}\left(X_1^2 + X_2^2\right).$$

Quel est le meilleur des deux estimateurs selon l'erreur quadratique moyenne ?

Aide *: On a* $E(X^2) = \sigma^2$ *et* $V(X^2) = 2\sigma^4$.

~~Biais~~ $EQM_{W_1}(\hat{\theta}) = W_1(\hat{\theta}) + [\text{Biais}(\hat{\theta})]^2$

$= \sigma^2 + (\sigma^2 - 2\sigma^4)$

Question n° 2 : (8 points) 3

Le tableau suivant présente la distribution des fréquences d'un échantillon de 110 observations d'une variable discrète X.

	Valeurs de X				
	1	2	3	4	5
Nombre d'observations	18	20	25	21	26

0,5

a) (3 points) Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon.

$\bar{X} = \frac{1}{5}(18+20+25+21+26) = 22$

$s^2 = \frac{1}{5-1}\left[(18-22)^2+(20-22)^2+(25-22)^2 + (21-22)^2+(26-22)^2\right] = \frac{23}{2}$.

écart-type $s = \sqrt{\frac{23}{2}} \simeq 3,4$

Question nº 2 : (suite)

On veut tester l'hypothèse selon laquelle la fonction de masse de la variable X est définie par

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } x = 1, 2, \ldots, 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1

b) (1 point) Formuler les hypothèses H_0 et H_1 du test à effectuer.

$H_0 : X \sim \text{Uniforme}[1;5]$

$H_1 : X \nsim \text{Uniforme}[1;5]$.

1,5

c) (4 points) Effectuer le test approprié et conclure au seuil $\alpha = 5\%$.

Test d'ajustement : $Q = \chi_0^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

$= 12,11$

$\chi^2_{\cancel{4}\, 5}(0{,}05) = 3{,}84$

Or, $Q > \chi_5^2(0{,}05)$, d'où H_0 est rejetée. Donc ce n'est pas un bon modèle pour la variable X.

Question n° 3 : (6 points) 2

L'ingénieure responsable d'une chaîne de montage évalue qu'une opération d'entretien peut être ou bien courte (durée de moins d'une heure) ou bien longue (durée d'une heure ou plus), et aussi avec ou sans remplacement de pièces. Le tableau suivant présente l'effectif des quatre types d'entretiens effectués dans la dernière année, avec la variable aléatoire X représentant la modalité de durée et la variable aléatoire Y la modalité de remplacement.

Y	X: 0 : durée courte	X: 1 : durée longue	
0 : sans remplacement	23	30	53
1 : avec remplacement	11	36	47
	34	66	100

On définit le paramètre $p_1 = P(X = 1|Y = 0)$, c'est-à-dire la proportion des entretiens sans remplacement qui sont de longue durée, ainsi que le paramètre $p_2 = P(X = 1|Y = 1)$, c'est-à-dire la proportion des entretiens avec remplacement qui sont de longue durée.

a) **(2 points)** Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour $p_1 - p_2$.

$P(X=1 | Y=0) - P(X=1 | Y=1)$

2

b) **(3 points)** Peut-on affirmer qu'il y a une relation significative entre X et Y ? Donner la conclusion d'un test d'hypothèse au seuil $\alpha = 0{,}05$.

Test d'indépendance : H_0: X, Y indépendants
H_1: X,Y dépendants.

Question n° 3 : (suite)

$$Q = \chi_0^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad \text{avec} \quad E_{ij} = \frac{O_{i.} O_{.j}}{O_{..}}$$

$$Q = 2{,}085 + 2{,}35 = \cancel{2}{,}436$$

$$\chi_1^2 (0{,}05) = 3{,}84$$

Or, $Q \not> \chi_1^2(0{,}05)$, d'où les variables X et Y sont dépendantes.

c) **(1 point)** Donner une interprétation du test effectué en **b)** qui s'applique au test de l'hypothèse $H_0 : p_1 = p_2$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : p_1 \neq p_2$.

Comme les variables sont dépendantes $p_1 = p_2$, donc H_0 est non rejetée et p_2 est rejetée.

Question n° 4 : (10 points)

Afin d'évaluer l'efficacité d'un certain régime amaigrissant R, on fait suivre ce régime à 5 sujets différents. Le tableau suivant présente, pour chaque sujet, les mesures de poids (en kg) obtenues avant et après le régime.

Poids	Sujet				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Avant R	84	75	93	79	84
Après R	81	74	92	78	84

Aide *: pour les 5 mesures de poids avant le régime, on a* $\overline{X} = 83$ *et* $S^2 = 45{,}5$.

On suppose que le poids (X_A) des sujets avant le régime et celui (X_B) après le régime sont distribués selon des lois normales $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ et $N(\mu_B, \sigma_B^2)$.

Important *: formuler les hypothèses H_0 et H_1 pour chaque cas de test.*

a) **(2 points)** Calculer un intervalle de confiance pour la variance du poids des sujets avant le régime au niveau de confiance 95%. Interpréter brièvement le résultat.

~~μ connue $= 83$.~~

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}\right]$$ avec $n=5$, $\alpha = 0{,}05$, $\alpha/2 = 0{,}025$, $1-\alpha/2 = 0{,}975$ et

$\sigma^2 \in [16{,}0 ; 379{,}2]$. On a, $S^2 \in [16, 379{,}2]$, d'où cette estimation est correcte au seuil de 0,05.

$\chi^2_{0{,}025;4} = 11{,}14$

$\chi^2_{0{,}975;4} = 0{,}48$ $S^2 = 45{,}5$

b) **(3 points)** On compte mesurer le poids d'un sixième sujet avant le régime. Calculer un intervalle de prévision pour cette mesure à un niveau de confiance 95 %. Interpréter brièvement le résultat.

$X_A \sim N(\mu_A, \sigma^2_A)$

$$X_6 \in \left[83 - z_{\alpha/2}\sqrt{S^2\left(1+\frac{1}{5}\right)} ; 83 + z_{\alpha/2}\sqrt{S^2\left(1+\frac{1}{5}\right)}\right]$$

$z_{\alpha/2} = 1{,}96$

~~X_6~~

Question n° 4 : (suite)

$X_6 \in [83 - 1{,}96\sqrt{45{,}5 \times 1{,}2}\ ;\ 83 + 1{,}96\sqrt{45{,}5\times 1{,}2}]$

$X_6 \in [68{,}5 ; 97{,}5]$. D'où, le prochain poids appartiendra à l'intervalle $[68{,}5 ; 97{,}5]$ à un niveau de confiance de 95%.

c) **(5 points)** À un seuil $\alpha = 5\%$, peut-on conclure qu'il y a en moyenne une baisse de poids après avoir suivi le régime R? Commenter brièvement sur l'efficacité de ce régime.

On formule les hypothèses.

$H_0 : \mu_A = \mu_B$ (pas de différence de poids) ✓

$H_1 : \mu_A > \mu_B$ (une baisse de poids).

Soit $D = X_A - X_B$

$\bar{D} = \frac{1}{5}(3 + 1 + 1 + 1 + 0) = \frac{6}{5}$ ✓

$T_0 = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}}$ $\quad S_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}$

-1 $\quad \cancel{=} \frac{1}{4}\left[\left(3-\frac{6}{5}\right)^2 + 3\left(1-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(0-\frac{6}{5}\right)^2\right]$

$T_0 = \frac{6/5}{\cancel{6/5} / \sqrt{5}} = \cancel{\sqrt{5} = 2{,}23}$

$\cancel{= \frac{6}{5}}$ -1

Question n° 4 : (suite)

$t_{\alpha;n-1} = t_{0,05;4} = 2,13$ ✓

On, $T_0 > t_{\alpha;n-1}$, d'où l'hypothèse H_0 est rejetée et H_1 est acceptée.

D'où, le poids moyen a baissé. Donc, le régime est efficace. ✓

Question nº 5 : (14 points)

Pour un certain type de véhicule automobile, on veut établir l'équation liant le poids (X en milliers de livre) à la performance kilométrique (Y en mille par gallon). Une expérience menée avec un échantillon de 18 véhicules de ce type a permis d'obtenir 18 observations, sur les deux variables. On envisage un modèle de régression linéaire simple, d'équation

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon,$$

où β_0 et β_1 sont des paramètres, et ε une erreur aléatoire. On suppose que $\varepsilon \sim N(0,\ \sigma^2)$.

L'ajustement du modèle aux 18 observations recueillies, $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, 18$, a donné les résultats partiels suivants :

$$\sum_{i=1}^{18} x_i = 51{,}75 \ ; \quad \sum_{i=1}^{18} x_i^2 = 157{,}00 \ ; \quad \sum_{i=1}^{18} y_i^2 = 11\,284{,}40;$$
$$\sum_{i=1}^{18} y_i = 429{,}80 \ ; \quad \sum_{i=1}^{18} x_i y_i = 1\,174{,}74.$$

a) **(4 points)** Calculer $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$. Donner l'équation de la droite des moindres carrés.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^{18} x_i y_i - 18 \times \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18} x_i \times \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18} y_i}{\sum_{i=1}^{18} x_i^2 - 18 \times \left(\frac{1}{18} \times \sum_{i=1}^{18} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1174{,}74 - 51{,}75 \times 429{,}80 \times \frac{1}{18}}{157 - 18 \times \left(\frac{1}{18} \times \cancel{429{,}8}\ 51{,}75\right)^2} = -7{,}41$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \frac{1}{18}\left(\sum_{i=1}^{18} y_i - \hat{\beta}_1 \times \sum_{i=1}^{18} x_i\right) = 45{,}2$$

$$\boxed{Y = 45{,}2 - 7{,}41X}$$

4

Question nº 5 : (suite)

b) **(3 points)** Compléter le tableau d'analyse de la variance ci-dessous, en laissant les cases inutiles vides. Quelle conclusion peut-on en tirer au seuil $\alpha = 0{,}05$?

Source de variation	Somme des carrés	Nombre de degrés d.l.	Moyenne des carrés	F_0
Régression	451,5	1	451,5	12,68
Erreur	570,23	n - 2	35,6	
Total	1 021,73	n - 1		

$$SS_R = \beta_1 \times S_{XY} = -7{,}41 \times (1174{,}74 - 51{,}75 \times 429{,}80 \times \tfrac{1}{18})$$

$$= 451{,}5$$

$$R^2 = \frac{SS_R}{S_{YY}} = 1 - \frac{SS_E}{S_{YY}}$$

$$SS_E = S_{YY}\left(1 - \frac{SS_R}{S_{YY}}\right) = S_{YY} - SS_R$$

$$= 1021{,}73 - 451{,}5$$

c) **(2 points)** Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour le paramètre β_1.

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{S_{xx}}\right)}$$

$$-7{,}41 \mp T_{16}(0{,}025)\sqrt{35{,}6\left(\frac{1}{18} + \frac{(\frac{1}{18} \times \sum_{i=1}^{18} x_i - 1)^2}{157 - 18(\frac{1}{18} \times 51{,}75)^2}\right)}$$

$$-7{,}41 \mp 2{,}12 \times 4{,}15$$

$$-7{,}41 \mp 8{,}798$$

$\beta_1 \in [-16{,}208 ; 1{,}388]$ au seuil $\alpha = 0{,}05$.

Question n° 5 : (suite)

d) **(3 points)** On veut prédire la performance kilométrique Y_0 pour un véhicule de 3 000 livres. Donner un intervalle de prévision pour Y_0 au niveau de confiance 95 %.

$$Y_0 \in \pm t_{\alpha/2;\, n-2} \sqrt{MS_E\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x}-x_0)^2}{S_{xx}}\right]}$$

$$\in \pm 2,12 \times \sqrt{35,6}$$

①

3

e) **(2 points)** Calculer le coefficient de détermination R^2 et interpréter ce résultat.

$R^2 = \frac{SSR}{SYY} = \frac{451,5}{1021,73} = 0,442$. Or, R^2 est loin de 1, d'où on pourrai essayer d'améliorer le modèle en ajoutant une variable X^2 comme il n'est pas idéal.

2

Question n° 6 : (4 points) 0,5

Cette question est constituée de deux parties indépendantes l'une de l'autre.

a) **(2 points)** 0,5 Un ingénieur utilise 5 composants pour former un système en parallèle (redondance active). La durée de fonctionnement de chaque composant est modélisée par une loi Exp(1).

Quelle est la probabilité que le système fonctionne encore après 2 unités de temps, étant donné qu'au moins un composant fonctionnait encore après 1 unité de temps ?

$$P(T>2 \mid T>1) = \frac{P(T>2 \cap T>1)}{P(T>1)}$$

0

b) **(2 points)** On considère un système d'attente $M/M/1/2$ avec $\lambda = 5$ et $\mu = 6$.

Combien de clients sont servis en moyenne entre deux périodes où le serveur est libre ?

$$\rho = \frac{5}{6} \qquad \overline{N_s} = \cancel{\pi_s} \qquad 1 - \pi_0 = \rho^0(1-\rho)/(1-\rho^{K+1})$$

$$= (1-\rho)/(1-\rho^3) = \frac{1}{6} / \left(\frac{25}{36}\right) = \frac{25}{6} =$$

Question n° 6 : (suite)

Intervalles de confiance $(1-\alpha)$

Une moyenne μ

- σ^2 connue, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ou n grand : $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- σ^2 inconnue et $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: $\overline{X} \pm t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$
- σ^2 inconnue et n grand : $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

Une variance σ^2

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ connue : $S_\mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$

$$\left[\frac{nS_\mu^2}{\chi^2_{\alpha/2;n}};\quad \frac{nS_\mu^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n}}\right]$$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ inconnue : $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}};\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}\right]$$

- pour σ, avec n grand : $\left[S/(1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}});\quad S/(1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}})\right]$

Une proportion p

- n est très grand : $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Différence de deux moyennes $\mu_1 - \mu_2$

- σ_1^2, σ_2^2 connues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$

ou n_1, n_2 grands : $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

- σ_1^2, σ_2^2 inconnues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}};\ S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

- σ_1^2, σ_2^2 inconnues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}};\quad \nu = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$$

- n_1, n_2 grands

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

- Données couplées, $D_i = X_{1,i} - X_{2,i}, i = 1, \ldots, n$

$$\overline{D} \pm t_{\alpha/2;n-1}\frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

Rapport de deux variances σ_1^2/σ_2^2

- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\alpha/2;n_2-1;n_1-1};\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2;n_2-1;n_1-1}\right]$$

Différence de deux proportions $p_1 - p_2$

- n_1 et n_2 grands

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Tests paramétriques (seuil α)

Une moyenne. Critères de rejet de $H_0 : \mu = \mu_0$ contre H_1

$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
• σ^2 connue, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ou n grand : statistique $Z_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$		
si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$
• σ^2 inconnue et $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: statistique du test $T_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$		
si $T_0 < -t_{\alpha;n-1}$	si $T_0 > t_{\alpha;n-1}$	si $\lvert T_0\rvert > t_{\alpha/2;n-1}$
• σ^2 inconnue et n grand : statistique du test $Z_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$		
si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$

Une variance. Critères de rejet de $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre H_1

$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
• $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: la statistique du test $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
si $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha;n-1}$	$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha;n-1}$	si $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2;n-1}$ ou si $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2;n-1}$
• n est grand $(n \geq 40)$: la statistique du test $Z_0 = \frac{S-\sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}}$		
si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$

Une proportion. Critères de rejet de $H_0 : p = p_0$ contre H_1

$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p \neq p_0$
• si n est très grand : la statistique du test $Z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$		
si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$

Deux moyennes. Critères de rejet de $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre H_1

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
• σ_1^2, σ_2^2 connues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ ou n_1, n_2 grands; statistique du test $Z_0 = \frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$		
si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$
• σ_1^2, σ_2^2 inconnues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$; la statistique du test $T_0 = \frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$; avec $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$		
si $T_0 < -t_{\alpha;n_1+n_2-2}$	si $T_0 > t_{\alpha;n_1+n_2-2}$	si $\lvert T_0\rvert > t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}$
• σ_1^2, σ_2^2 inconnues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$; la statistique du test $T_0 = \frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$; avec $\nu = \frac{(S_1^2/n_1+S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$		
si $T_0 < -t_{\alpha;\nu}$	si $T_0 > t_{\alpha;\nu}$	si $\lvert T_0\rvert > t_{\alpha/2;\nu}$
• n_1, n_2 grands : la statistique du test $Z_0 = \frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$		
si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$
• Données couplées, $D_i = X_{1,i} - X_{2,i}, i = 1, \ldots, n$: statistique $T_0 = \frac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}}$		
si $T_0 < -t_{\alpha;n-1}$	si $T_0 > t_{\alpha;n-1}$	si $\lvert T_0\rvert > t_{\alpha/2;n-1}$

Deux variances. Critères de rejet de $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contre H_1

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
• $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$: la statistique du test $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$		
si $F_0 < F_{1-\alpha;n_1-1;n_2-1}$	si $F_0 > F_{\alpha;n_1-1;n_2-1}$	si $F_0 < F_{1-\alpha/2;n_1-1;n_2-1}$ ou si $F_0 > F_{\alpha/2;n_1-1;n_2-1}$

La fonction de répartition d'une loi $N(0,1)$: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-u^2/2\}du.$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992

α	0,25	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
z_α	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291
$z_{\alpha/2}$	1,150	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807	3,291	3,481

Calcul de β et n (cas d'une moyenne μ)

$X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ avec σ^2 connue et niveau (seuil) critique α.

Hypothèses	valeur de β	valeur de n
$H_0: \mu = \mu_0$ contre $H_1: \mu < \mu_0$	$\beta(\mu) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{(\mu-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu-\mu_0)^2}$
$H_0: \mu = \mu_0$ contre $H_1: \mu > \mu_0$	$\beta(\mu) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{(\mu-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu-\mu_0)^2}$
$H_0: \mu = \mu_0$ contre $H_1: \mu \neq \mu_0$	$\beta(\mu) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{(\mu-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{(\mu-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n \approx \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu-\mu_0)^2}$

Calcul de β et n (cas de deux moyennes $\mu_1,\ \mu_2$)

$X_1 \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$; $X_2 \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ avec σ_1^2, σ_2^2 connues et niveau (seuil) critique α.

Hypothèses	valeur de β	$n = n_1 = n_2$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$\beta(\mu_1,\mu_2) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$	$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1-\mu_2)^2}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$\beta(\mu_1,\mu_2) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$	$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1-\mu_2)^2}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$\beta(\mu_1,\mu_2) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$	$n \approx \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1-\mu_2)^2}$

Quelques centiles

$\chi^2_{0,01;1} = 6,63$
$\chi^2_{0,025;2} = 7,38$
$\chi^2_{0,025;5} = 12,83$
$\chi^2_{0,95;1} = 0,004$

$\chi^2_{0,025;1} = 5,02$
$\chi^2_{0,05;2} = 5,99$
$\chi^2_{0,05;5} = 11,07$
$\chi^2_{0,95;2} = 0,10$

$\chi^2_{0,05;1} = 3,84$
$\chi^2_{0,025;3} = 9,35$
$\chi^2_{0,025;6} = 14,45$
$\chi^2_{0,975;3} = 0,22$

$\chi^2_{0,10;1} = 2,71$
$\chi^2_{0,05;3} = 7,81$
$\chi^2_{0,05;6} = 12,59$
$\chi^2_{0,975;4} = 0,48$

$\chi^2_{0,25;1} = 1,32$
$\chi^2_{0,025;4} = 11,14$
$\chi^2_{0,025;9} = 19,02$
$\chi^2_{0,975;15} = 6,27$

$\chi^2_{0,50;1} = 0,45$
$\chi^2_{0,05;4} = 9,49$
$\chi^2_{0,05;9} = 16,92$
$\chi^2_{0,10;23} = 32,00$

$t_{0,05;2} = 2,92$
$t_{0,025;10} = 2,23$
$t_{0,025;15} = 2,13$
$t_{0,01;23} = 2,50$

$t_{0,025;4} = 2,78$
$t_{0,05;10} = 1,81$
$t_{0,05;16} = 1,75$
$t_{0,05;24} = 1,71$

$t_{0,05;4} = 2,13$
$t_{0,05;11} = 1,80$
$t_{0,025;16} = 2,12$
$t_{0,05;25} = 1,71$

$t_{0,025;8} = 2,31$
$t_{0,025;11} = 2,20$
$t_{0,025;18} = 2,10$
$t_{0,05;26} = 1,71$

$t_{0,05;8} = 1,86$
$t_{0,05;14} = 1,76$
$t_{0,05;22} = 1,72$
$t_{0,05;28} = 1,70$

$t_{0,05;9} = 1,83$
$t_{0,025;14} = 2,14$
$t_{0,025;23} = 2,07$
$t_{0,05;30} = 1,70$

$F_{0,25;1,1} = 5,83$
$F_{0,01;2,4} = 18,00$
$F_{0,025;7,9} = 4,20$

$F_{0,025;1,10} = 6,94$
$F_{0,01;6,3} = 27,91$
$F_{0,025;9,7} = 4,82$

$F_{0,025;1,16} = 6,11$
$F_{0,025;3,6} = 6,60$
$F_{0,025;9,11} = 3,59$

$F_{0,05;1,16} = 4,49$
$F_{0,05;3,15} = 3,29$
$F_{0,025;11,9} = 3,91$

$F_{0,025;4,6} = 6,23$
$F_{0,05;4,10} = 3,47$
$F_{0,025;15,8} = 4,10$

$F_{0,025;6,4} = 9,20$
$F_{0,05;4,4} = 6,39$
$F_{0,025;8,15} = 3,20$

Rappel : $F_{1-\alpha;\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{F_{\alpha;\nu_2,\nu_1}}$