Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

A. Faux. Il est vrai que la pression augmente avec la profondeur dans un fluide soumis à la gravité. Par contre, cela n'est pas en contradiction avec la propriété d'isotropie : en un point donné du fluide, la pression mesurée sera la même dans toutes les directions, puisque la pression est un scalaire.

B. i. La force gravitationnelle que le bloc exerce sur la Terre.

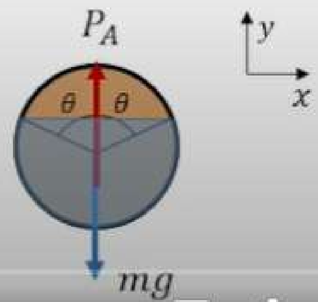
ii. La force de frottement du bloc qui agit sur le sol.

C. Vrai. Le moment du couple est un vecteur libre : sa valeur ne dépend pas du point de référence choisi pour calculer le moment. Ainsi, peu importe le point d'application du couple sur une pièce rigide, son effet de rotation sera le même.

D. On applique l'équilibre statique sur le billot, en tenant compte de la poussée d'Archimède.

$$\sum F_y = P_A - mg = 0 \implies \rho_e g V_{\text{sub}} - \rho_b V_{\text{tot}} g = 0$$

Le volume submergé est illustré en transparence sur la figure. On le calcule en décomposant la surface en secteur de disque et en triangles.



$$\rho_e \left[\left(1 - \frac{2\theta}{2\pi}\right) \pi R^2 + R\cos\theta\, R\sin\theta \right] L = \rho_b (\pi R^2 L)$$

$$\boxed{\rho_e(\pi - \theta + \cos\theta \sin\theta) = \rho_b \pi}$$

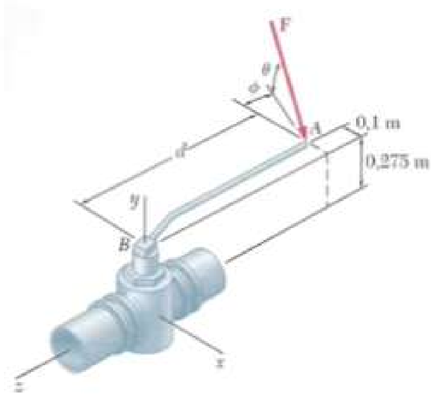
2:25 / 16:40

Q2 – Solution (1/2)

A. Les composantes de la force $\vec{F}$ sont :

$$\vec{F} = F\left(\cos\theta\cos\phi\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \left(163\,\vec{\imath} - 100\,\vec{\jmath} + 59{,}2\,\vec{k}\right)\mathrm{N}}$$



B. Système force couple équivalent de $\vec{F}$ au point B :

Force équivalente $\boxed{\vec{F}_B = \vec{F} = \left(163\,\vec{\imath} - 100\,\vec{\jmath} + 59{,}2\,\vec{k}\right)\mathrm{N}}$

Couple équivalent $\vec{M}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -0{,}1 & 0 & -0{,}8 \\ 163 & -100 & 59{,}2 \end{vmatrix} (\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$

$$\boxed{\vec{M}_B = \left(-80{,}0\vec{\imath} - 124\vec{\jmath} + 10{,}0\vec{k}\right)\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}$$

5:23 / 16:40

Q2 – Solution (2/2)

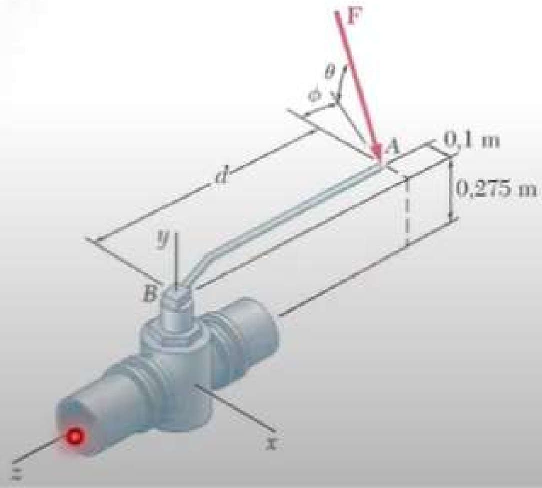
c. Moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe oz.

Moment de $\vec{F}$ par rapport à l'origine: $\vec{M}_O^F = \vec{M}_B + \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_B$

avec $$\vec{r}_{OB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}275 & 0 \\ 163 & -100 & 59{,}2 \end{vmatrix} = \left(16{,}28\vec{\imath} - 44{,}83\vec{k}\right) \mathrm{N \cdot m}$$

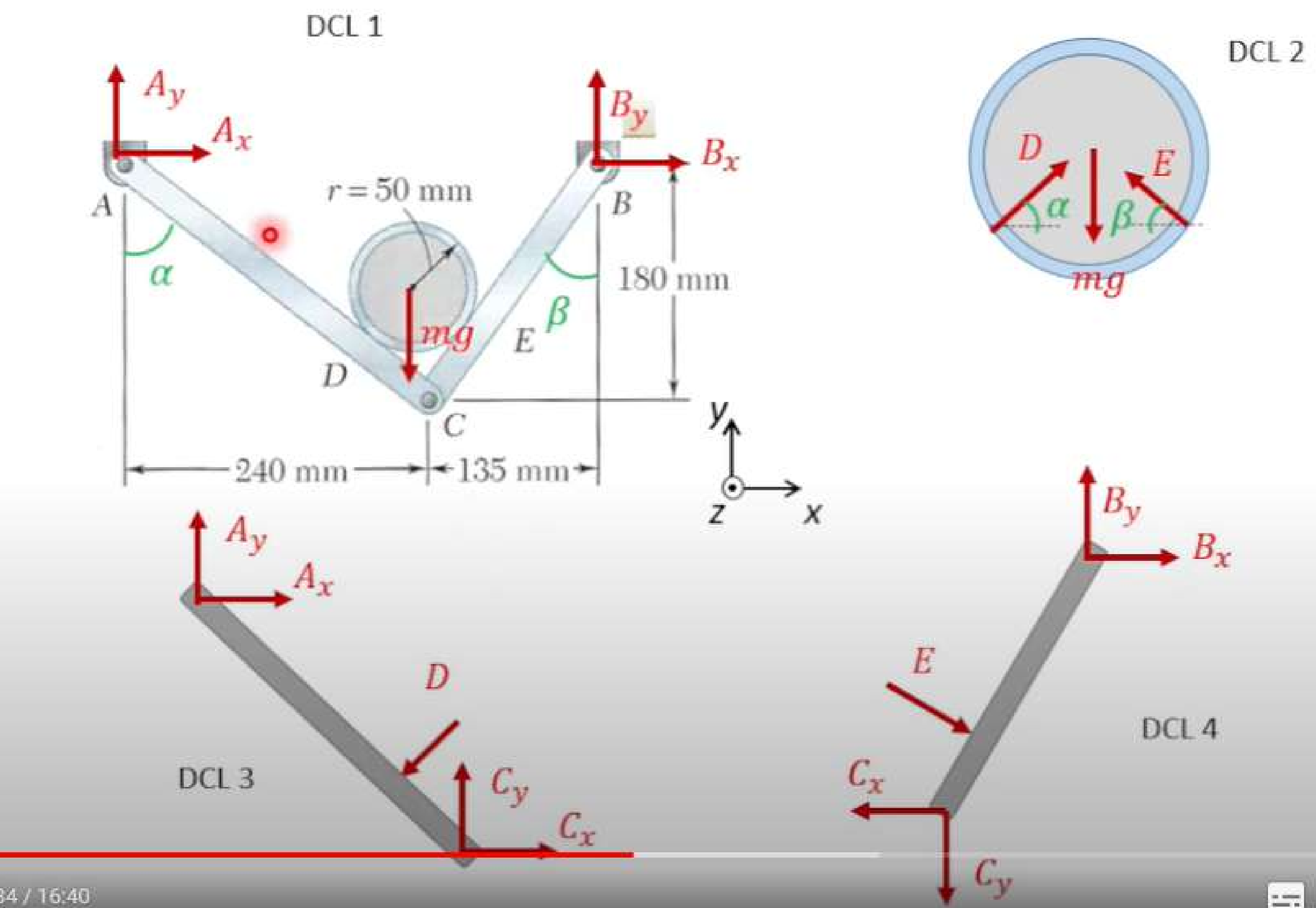
$$\vec{M}_O^F = \left(-63{,}7\vec{\imath} - 124\vec{\jmath} - 34{,}8\vec{k}\right) \mathrm{N \cdot m}$$

$$\boxed{\vec{M}_{OZ}^F = (\vec{M}_O^F \cdot \vec{k})\vec{k} = -34{,}8\,\vec{k}\ (\mathrm{N \cdot m})}$$



Q3 – Solution (1/3)

A. DCL



7:34 / 16:40

Q3 – Solution (2/3)

B. Réactions en D et en E:

DCL2: $\sum F_x = 0 \Rightarrow D\cos\alpha = E\cos\beta$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow D\sin\alpha + E\sin\beta = mg$

avec: $\alpha = \tan^{-1}\frac{240}{180} = 53{,}13°$

et: $\beta = \tan^{-1}\frac{135}{180} = 36{,}87°$

$$\Rightarrow D\sin\alpha + D\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta = mg$$

$$\Rightarrow D = \frac{mg}{\sin\alpha + \cos\alpha\tan\beta} \Rightarrow \boxed{D = 234\text{ N}}$$

$$E = D\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow \boxed{E = 177\text{ N}}$$

Q3 – Solution (3/3)

C. Réaction en C

DCL3: $\sum M_A = 0 \Rightarrow -D\,\overline{AD} + 0{,}18\,C_x + 0{,}24\,C_y = 0$ avec: $\overline{AD} = \sqrt{0{,}24^2 + 0{,}18^2} - 0{,}05 = 0{,}250\ \mathrm{m}$

DCL4: $\sum M_B = 0 \Rightarrow E\,\overline{BE} - 0{,}18\,C_x + 0{,}135\,C_y = 0$ avec: $\overline{BE} = \sqrt{0{,}135^2 + 0{,}18^2} - 0{,}05 = 0{,}175\ \mathrm{m}$

$$\begin{cases} 0{,}18\,C_x + 0{,}24\,C_y = 58{,}6 & (1) \\ 0{,}18\,C_x - 0{,}135\,C_y = 30{,}91 & (2) \end{cases} \Rightarrow (1) - (2) \Rightarrow \boxed{C_y = 74{,}6\ \mathrm{N}}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{C_x = 227{,}6\ \mathrm{N}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 239\ \mathrm{N}}$$

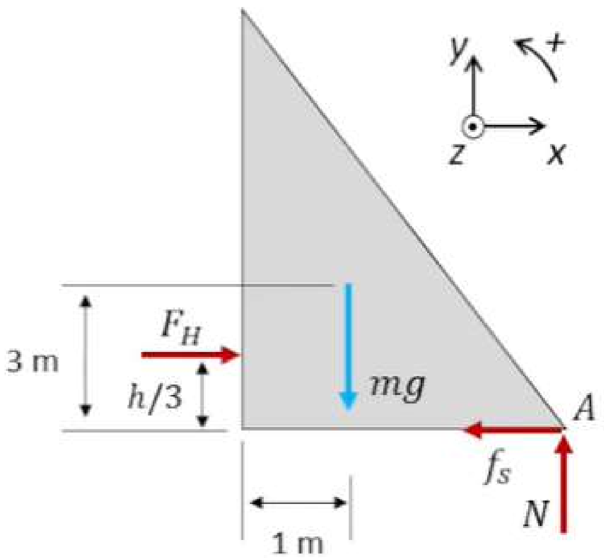
9:55 / 16:40

Q4 – Solution (1/2)

A. DCL bloc de béton (base L, hauteur H, profondeur e)

La distance qui caractérise la position de la force hydrostatique doit apparaître sur le DCL.

Sur le point de basculer, la normale et le frottement statique s'appliquent en A.



B. Hauteur maximale de l'eau pour ne pas basculer

Masse du bloc

$$m = \rho_b\left(\frac{LHe}{2}\right) = 291\ 600\ \text{kg}$$

Force hydrostatique

$$F_H = \rho_e g\frac{h}{2}A = \rho_e g\frac{h}{2}(he) = \frac{1}{2}\rho_e geh^2$$

Équilibre statique

$$\sum M_A = \left(\frac{2L}{3}\right)mg - \left(\frac{h}{3}\right)F_H = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\rho_b L^2Heg = \frac{1}{6}\rho_e geh^3 \Rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{2\frac{\rho_b}{\rho_e}L^2H} = 6{,}16\ \text{m}}$$

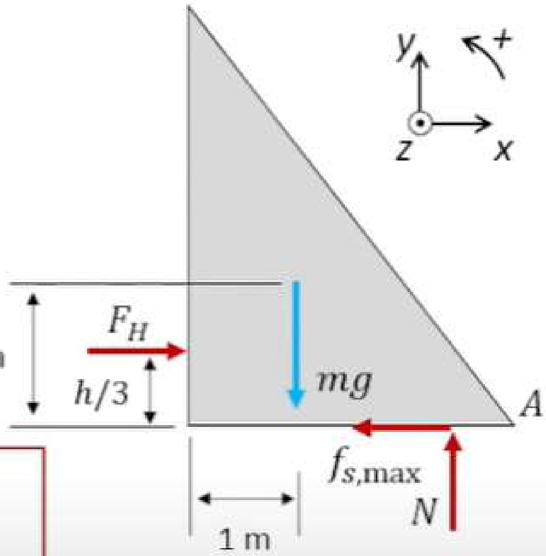
11:44 / 16:40

Q4 – Solution (2/2)

C. Hauteur maximale de l'eau pour ne pas glisser

On calcule la hauteur d'eau nécessaire pour faire glisser le bloc. On s'intéresse donc à l'instant où le frottement statique est maximal.

$$f_s = f_{s,\max} = \mu_s N$$



Équilibre statique

$$\sum F_y = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\sum F_x = F_H - \mu_s N = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_e g e h^2 = \mu_s mg$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \sqrt{\mu_s \frac{\rho_b}{\rho_e} LH} = 5{,}92\ \mathrm{m}}$$

$$m = \rho_b\left(\frac{LHe}{2}\right)$$

Note : le DCL n'est pas demandé en C, mais dans ce cas la normale et le frottement ne s'appliquent pas nécessairement en A, puisque le bloc n'est pas forcément sur le point de basculer.

D. Puisque 5,92 m < 6,16 m, alors le bloc glissera avant de basculer.

14:53 / 16:40