Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

A. Faux. S'il n'y a qu'une seule force non conservative et qu'elle ne fait pas de travail (ex. : une force de réaction en un point fixe ou une force qui agit perpendiculaire au déplacement), alors l'énergie mécanique est conservée.

B. i. La somme des variations des longueurs de chaque segment du câble doit être nulle afin que la longueur du câble soit conservée. En utilisant les axes positifs sur la figure :

$$\sum \Delta\ell_i = \Delta\ell_A + \Delta\ell_B = -2\Delta y_A + \Delta x_B = 0.$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient : $v_B = 2v_A$.

ii. La vitesse relative de A par rapport à B est donnée par :

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \frac{v_B}{2}\vec{j} - v_B\vec{i} = \left(-\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)\ \mathrm{m/s}$$

C. On sépare la pièce en un rectangle, un carré et une tige mince en forme de quart de cercle. Par symétrie, on aura $\bar{x} = \bar{y}$. Il suffit de faire le calcul en x, par exemple.

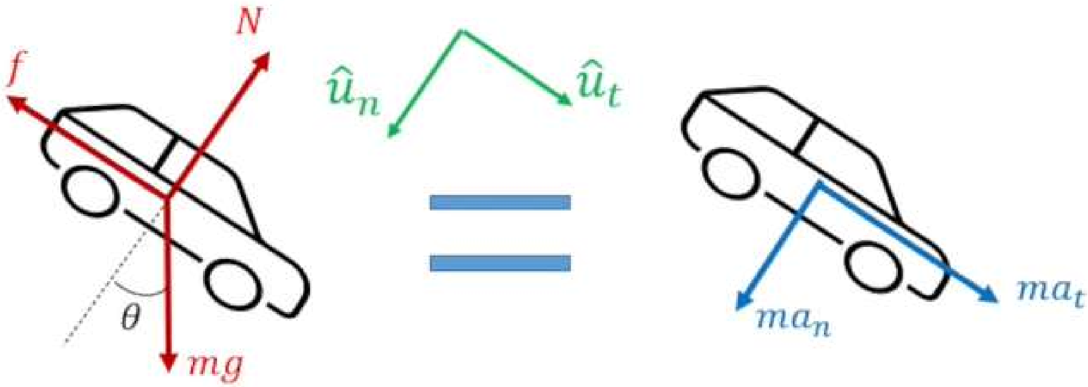
$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i} = \frac{\rho_s 2a^2 \cdot \frac{a}{2} + \rho_s a^2 \cdot \frac{3a}{2} + \rho_\ell \frac{\pi}{2} a \cdot \left(a + \frac{2a}{\pi}\right)}{\rho_s 2a^2 + \rho_s a^2 + \rho_\ell \frac{\pi}{2} a} = \frac{10 \cdot 0{,}125 + 5 \cdot 0{,}375 + 0{,}9817 \cdot 0{,}4092}{15{,}9817}$$

$$= \frac{1{,}25 + 1{,}875 + 0{,}4017}{15{,}9817} = \frac{3{,}5267}{15{,}9817} = 22{,}1\ \mathrm{cm}$$

La position du CM est donc (22,1; 22,1) cm.

Q2 – Solution (1/2)

A. DCL-DCE de la voiture



B. La grandeur de la vitesse au point A :

Selon le DCL-DCE $\sum F_n = mg\cos\theta - N = m\dfrac{v^2}{R}$

Au point A : $\theta = 0,\ N = \frac{4}{5}mg$ et $v = v_A$ ➡ $\dfrac{1}{5}mg = m\dfrac{v_A^2}{R}$

➡ $\boxed{v_A = \sqrt{\dfrac{gR}{5}} = 19{,}8\ \text{m/s}}$

Q2 – Solution (2/2)

C. Expression de la force de frottement $f(\theta)$:

$\frac{dv}{dt}$ constant implique que le mouvement est un MUA dans la direction tangentielle.

La 4[ème] équation du MUA appliquée entre A et B donne: $v_B^2 = v_A^2 + 2a_t(R\theta_0) = 0$

avec: $\theta_0 = \cos^{-1}\frac{h}{R} = 0{,}4510 \text{ rad } (= 25{,}84°)$

L'accélération tangentielle vaut donc :

$$\Rightarrow \quad a_t = \frac{-v_A^2}{2R\theta_0} = \frac{-gR/5}{2R\theta_0} = \frac{-g}{10\theta_0} = -2{,}175 \text{ m/s}^2$$

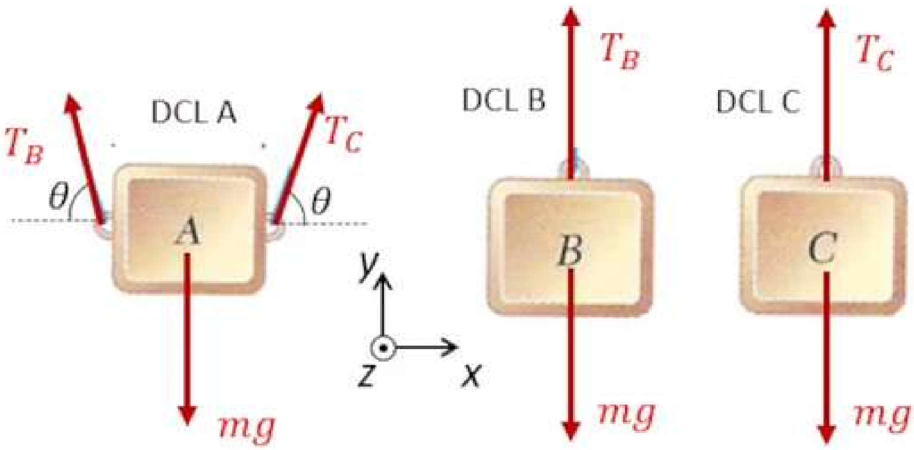
Selon le DCL-DCE $\sum F_t = mg\sin\theta - f(\theta) = ma_t \Rightarrow f(\theta) = mg\sin\theta - ma_t$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(\theta) = mg\left(\sin\theta + \frac{1}{10\theta_0}\right)} \quad \text{ou:} \quad \boxed{f(\theta) = (9{,}81\sin\theta + 2{,}18)\text{ kN}}$$

Q3 – Solution (1/3)

A. Angle θ_0 à l'équilibre:

On fait les DCL chacun des blocs



Les DCL B et C donnent:

$$\sum F_y = 0 \implies T_B = T_C = mg$$

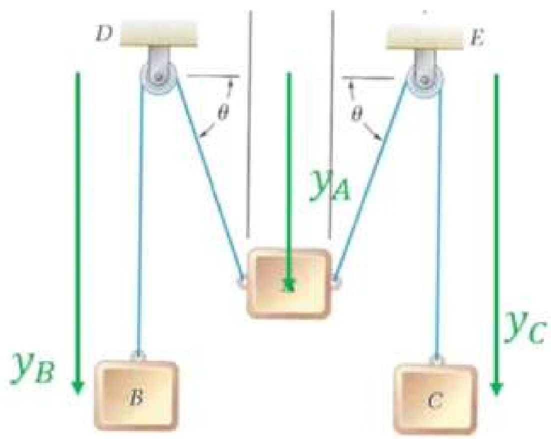
Le DCL A donne:

$$\sum F_y = 0 \implies T_B \sin\theta_{eq} + T_C \sin\theta_{eq} = mg \qquad \implies \sin\theta_{eq} = 1/2$$

$$\boxed{\theta_{eq} = 30°}$$

Q3 – Solution (2/3)

B. Relation entre v_A, v_B et v_C:



La longueur de chacune des cordes est constante. On choisissant les origines des systèmes d'axes de chaque bloc comme montré sur la figure ci-contre on peut écrire:

$$y_B + \sqrt{y_A^2 + a^2} = y_C + \sqrt{y_A^2 + a^2} = constante$$

En dérivant cette équation par rapport au temps:

$$v_B + \frac{y_A}{\sqrt{y_A^2 + a^2}} v_A = v_c + \frac{y_A}{\sqrt{y_A^2 + a^2}} v_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = v_C = -v_A \sin\theta = -\frac{v_A}{2}}$$

C. Vitesse v_A lorsque $\theta = \theta_{eq}$:

Il y a conservation de l'énergie mécanique du système A+B+C lorsque les blocs sont en mouvement, car les seules forces non conservatives en jeu sont les tensions dans les câbles et que celles-ci effectuent un travail nul (pour chaque segment de corde, il y a deux forces de même module, de même orientation et de sens opposé, de sorte que leurs travaux se compensent).

$$\Delta E = \Delta T + \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E = mg\Delta y_A + mg\Delta y_B + mg\Delta y_C + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = 0$$

Q3 – Solution (3/3)

La variation de hauteur de A est : $\Delta y_A = -a\tan\theta_{eq} = -\frac{a}{\sqrt{3}} = -0{,}2887\text{ m}$

Les variations de hauteur de B et C sont : $\Delta y_B = \Delta y_C = \sqrt{(\Delta y_A)^2 + a^2} - a = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)a = 0{,}07735\text{ m}$

La conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\Delta E = mg\Delta y_A + mg\Delta y_B + mg\Delta y_C + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -g\frac{a}{\sqrt{3}} + g\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)a + g\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)a + \frac{1}{2}v_A^2 + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_A^2\left(1 + 2\cdot\frac{1}{4}\right) = ga\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{4}{3}(2-\sqrt{3})ga} = 1{,}32\text{ m/s}}$$

Q4 – Solution (1/3)

A.

i. L'énergie mécanique n'est pas conservée. Plusieurs explications possibles. On peut dire que la collision est parfaitement inélastique, alors par définition l'énergie mécanique n'est pas conservée. L'étudiant peut aussi parler de déformation au niveau des voitures, donc pertes d'énergie à ce niveau (déformation, son, etc.).

ii. La quantité de mouvement est conservée car $\sum F_{ext} = 0$ (il n'y a pas de force externe non-impulsive durant la collision).

B. Distance sur laquelle les voitures ont glissé

Il faut d'abord trouver la vitesse de l'amas de voitures juste après la collision. On applique la conservation de la quantité de mouvement en x et en y, entre les instants juste avant et juste après l'impact :

$$L_{ix} = L_{fx}$$

$$m_A v_A + m_B v_B \sin 20 = (m_A + m_B) v_{fx}$$

$$v_{fx} = \frac{m_A v_A + m_B v_B \sin 20}{m_A + m_B} = \frac{2500 \cdot 75 + 3000 \cdot 54 \sin 20}{2500 + 3000} = 44{,}16 \text{ km/h} = 12{,}27 \text{ m/s}$$

$$L_{iy} = L_{fy}$$

$$m_A \overset{0}{v_A} + m_B v_B \cos 20 = (m_A + m_B) v_{fy}$$

$$v_{fy} = \frac{m_B v_B \cos 20}{m_A + m_B} = \frac{3000 \cdot 54 \cos 20}{2500 + 3000} = 27{,}68 \text{ km/h} = 7{,}69 \text{ m/s}$$

Q4 – Solution (2/3)

La grandeur de la vitesse des voitures juste après l'impact est donc :

$v_f = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{12{,}27^2 + 7{,}69^2} = 14{,}48 \text{ m/s}$

On applique ensuite le principe Travail-Énergie entre l'instant juste après la collision et l'instant où les voitures s'immobilisent après avoir glissé :

$$\sum U_{NC} = \Delta T + \Delta V$$

Ici, il n'y a aucune variation d'énergie potentielle après la collision ($\Delta V = 0$). Le travail non-conservatif est donné par la force de frottement cinétique $f_k = \mu_k N$. Dans la direction verticale :

$$\sum F_y = 0$$

$$N - (m_A + m_B)g = 0 \Rightarrow N = (m_A + m_B)g$$

Comme la force de frottement est constante, on peut écrire :

$$U_{NC} = \vec{f_k} \cdot \Delta\vec{s} = f_k \Delta s \cos 180° = -\mu_k N \Delta s = -\mu_k (m_A + m_B) g \Delta s$$

Pour la variation d'énergie cinétique, on s'est qu'à la fin du glissement, la vitesse est nulle :

$$\Delta T = T_f - T_i = 0 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2$$

Q4 – Solution (3/3)

En égalisant, on trouve :

$$-\mu_k \cancel{(m_A + m_B)} g \Delta s = -\frac{1}{2} \cancel{(m_A + m_B)} v^2$$

$$\boxed{\Delta s = \frac{v^2}{2\mu_k g} = \frac{14{,}48^2}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}81} = 21{,}4 \text{ m}}$$

C. Force moyenne pendant l'impact

Pour trouver la force moyenne exercée sur la voiture B, on se réfère au principe d'impulsion-QM :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{Imp}} = \Delta \vec{L} &= m_B \overrightarrow{v_f} - m_B \vec{v}_{B,i} \\ &= m_B[(12{,}27\vec{\imath} + 7{,}69\vec{\jmath}) - (15 \sin 20\, \vec{\imath} + 15 \cos 20\, \vec{\jmath})] \\ &= (21{,}4\vec{\imath} - 19{,}2\vec{\jmath})\ \text{kN} \cdot s\end{aligned}$$

La force moyenne vaut donc :

$$\overrightarrow{\text{Imp}} = \vec{F}_{moy} \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\text{Imp}}}{\Delta t} = \frac{21{,}4\vec{\imath} - 19{,}2\vec{\jmath}}{200 \cdot 10^{-3}} = (107\vec{\imath} - 96{,}0\vec{\jmath})\text{kN}}$$