Stærðfræðigreining IV(STÆ401G)

Heimaverkefni

Mismunaaðferðir – Bútaaðferð

Deadline 23.04.2021 um kl. 16:00

Þetta verkefni skiptist í tvo hluta. Í fyrri hlutanum búum við til forrit sem finnur nálgunarlausn fyrir Helmholtz-jöfnu með mismunaaðferð. Svo á að teikna mynd af nálgunarlausninni. Í seinni hlutanum notum við bútaaðferð til að leysa jaðargildisverkefni sem lýsir varmajafnvægi.

Þið megið nota hvaða forritunarmál sem er, t.d. Matlab, Python, Octave, Mathematica, Julia, Maple, eða Fortran. Skýrslan skal þó unnin í LaTeX.

Skiladagur verkefnisins er föstudagurinn 23. apríl kl. 16:00 á canvas. Nemendur geta unnið saman í hópum að verkefninu, minsta lagi 2 og mesta lagi 4 í hverjum. Það er nægilegt að einn nemandi skili skýrslunni og forritum fyrir hvern hóp.

Gangi ykkur vel!

1 Helmholtz-jafna og mismunaaðferð

Skilgreinum opið mengi D með

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 < x < L_1 \, , 0 < y < L_2\} \, . \tag{1}$$

Lítum á eftirfarandi jaðargildiverkefni

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0 \, , & (x,y) \in D \, , \\ u(x,0) = w(x) \, , \quad u(x,L_2) = v(x) \, , & 0 \leq x \leq L_1 \, , \\ \partial_x u(0,y) = \partial_x u(L_1,y) = 0 \, , & 0 < y < L_2 \, , \end{cases} \tag{2}$$

þar sem Δ er Laplace-virkinn $\Delta u(x,y) = \partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y)$, og λ^2 er jákvæður fasti. Föll w og v eru tilgreindað neðan. Jafnan í (2) kallast Helmholtz jafna og hún er mjög mikilvæg t.d. í stærðfræði, eðlisfræði, verkfræði, efnafræði, t.d. sjáið hér.

Við viljum finna tölulega nálgunarlaun á jaðargildiverkefninu (2) með því að nota mismunaaðferð. Mælt er með því að styðjast við niðurstöður úr 5.4 og 5.3.1 í Edbook.

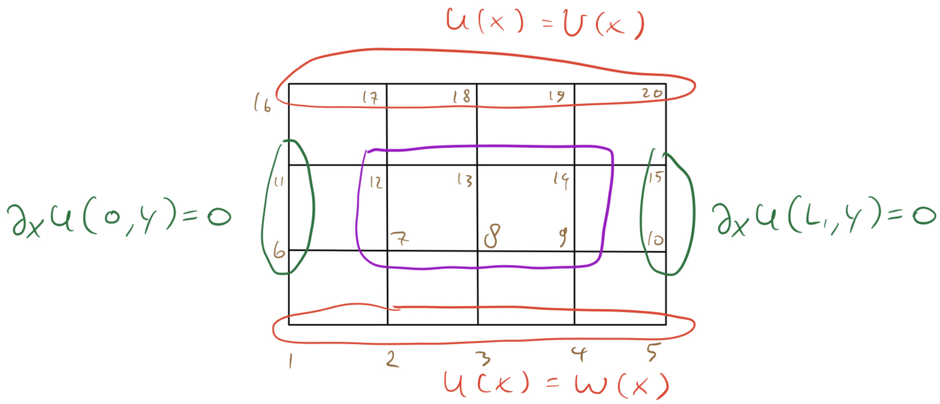

Figure 1: Dæmi um grind fyrir $L_1 = 1$, $L_2 = 2$ og $h = 1/2$. Það mun vera þægilegt aða aðgreina innri punktana, Dirichllet punktana og von Neumann punktana og nota þá röðun á vísum punktanna sem hér er kynnt.

Forrit

1. Við tökum $N := L_1/h$ og $M := L_2/h$. Skrifð forrit til þess að reikna nálgunargildi c_j með því að leysa jöfnuhneppið

$$[A]\vec{c} = \vec{b}$$

   þar sem A er $P \times P$ fylki, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ eru vigrar í $\mathbb{R}^P$, þar sem $P = (M+1)(N+1)$. Stakið c_i í lausnarvigrinum $\vec{c}$ er nálgunargildi fyrir $u(x_j, y_p)$. Notið vörpunina $\sigma(x_j, y_p) = j + (p-1)(N+1)$.

2. Forritið þarf að lesa inn L_1, L_2, h, λ, og reikna út gildi c_ℓ eins og lýst er hér að ofan. Það flýtir fyrir útreikningum að nota strjál fylki.

3. Forritið þarf að nota mismunaaðferð.

Skýrslan

I) Útfærið aðferðina sem lýst er hér að ofan. Forrit ykkar allra á að byrja á skilgreiningu falls sem heitir *helmholtzeq*, tekur inn breyturnar L_1, L_2, h, λ og skilar $(M+1)\times(N+1)$ fylkinu `HZ` sem inniheldur nálgunargildin fyrir u í hornpunktum á þríhyrningsnetinu. Fyrsta línan í `HZ` á að innihalda nálgunargildi u þegar $y = 0$ og $x \in \{0, h, 2h, \ldots, L_1\}$. Önnur línan í `HZ` á að innihalda nálgunargildi u þegar $y = h$ og $x \in \{0, h, 2h, \ldots, L_1\}$, o.s.fv. Í skýrslunni er mikilvægt að þið útskýrið hvernig fylkið A og vigurinn $\vec{b}$ eru byggð upp í forritinu.

II) **Prófunarkeyrsla**. Setjið $\lambda = \frac{1}{100}, L_1 = L_2 = 1, h = \frac{1}{4}$ og veljið w, v eins og hér

$$w(x) = 1\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \qquad v(x) = 0\,, \quad 0 \le x \le 1\,. \tag{3}$$

Lausnin

$$
\texttt{HZ} = \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. & 1. \\ 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.75 \\ 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} . \tag{4}
$$

III) Prófið forritið ykkar á móti beinni lausn. Veljið föllin w, v eins og í (3), setjið

$$
L_1 = 1\,, \quad L_2 = 2\,, \quad h = \frac{1}{20}\,,
$$

og $\lambda = 1$ og 10. Berið saman lausnir ykkar á móti beinni lausn:

$$
u_e(x,y) = \frac{\sin \lambda (L_2 - y)}{\sin \lambda L_2} \tag{5}
$$

Lausnina u_e (5) má reikna með aðskilnaði breytistærða. Það dugir að teikna þrívíða mynd af $u(x,y)$ sem við reiknað út og af lausninni u_e á tvívíða svæðinu D og fyrir $\lambda = 1$ og 10. Setjið myndirnar í skýrsluna. Hvað er í gangi fyrir stærri gildi af λ?

IV) Veljið föllin w, v eins og hér

$$
w(x) = -\frac{u_0 x}{L_1}\left(\frac{x}{L_1} - 1\right)^2 \left(1 + \frac{x}{L_1}\right), \qquad 0 \le x \le L_1\,, \tag{6}
$$

$$
v(x) = \frac{u_1 x}{L_1}\left(1 - \frac{x}{L_1}\right)\left(1 + \frac{x}{L_1}\right)^2, \qquad 0 \le x \le L_1\,, \tag{7}
$$

þar sem $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ eru fastar. Setjið

$$
L_1 = L_2 = 1,\;\; u_0 = 10,\;\; u_1 = 1\,,\;\; h = \frac{1}{50}\,.
$$

Setjið teikningu af grafi lausnarinnar $u(x,y)$ þegar

$$
\lambda = \frac{1}{100}\,, \quad \frac{1}{10}\,, \quad 1\,, \quad 10\,, \quad 30
$$

í skýrsluna.

2 Varmajafnvægi nálgað með bútaaðferð

Í þessu verkefni finnum við nálgun á varmajafnvægi í tveimur víddum með blönduðum jaðarskilyrðum. Nálgunarlausnin byggir á bútaaðferð á þríhyrningsneti.

Hitastigið $u = u(x, y, t)$ í punkti (x, y) á tíma $t > 0$ í tvívíðri plötu ákvarðast af varmaleiðnijöfnunni

$$\partial_t u = \kappa \Delta u \,, \tag{8}$$

Við munum til þæginda setja $\kappa = 1$. Til að leysa jöfnuna er nauðsynlegt að ákvarða upphafshitastigið $u(x, y, 0)$. Þegar $t \to +\infty$ munu áhrif upphafshitastigsins fjara út og lausnin nálgast stöðugt ástand sem uppfyllir $\Delta u = 0$. Þetta er verkefnið sem við höfum áhuga á að leysa.

Jaðargildisverkefnið er á forminu

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = -\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \,, \\ u(x,0) = \psi_1(x), & 0 \le x \le a \,, \\ u(x,b) = \psi_2(x), & 0 \le x \le a \,, \\ \left.\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, & 0 < y < b \,, \\ \left.\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, & 0 < y < b \,. \end{cases} \tag{9}$$

Jaðarskilyrðin á jöðrunum $x = 0$ og $x = a$ segja okkur að þessir tveir jaðrar séu einangraðir. Jaðarskilyrðin á jöðrunum $y = 0$ og $y = b$ segja okkur að t.d. hitastig u er þekkt á þessum tveimur jöðrum. Fallið $\psi_1(x)$ er þannig að

$$\psi_1(x) = \beta_1 \left(\sin\left(\frac{2\pi}{a}(x - \tfrac{1}{2}) \right) + 1 \right), \quad 0 \le x \le a,$$

þar sem β_1 er fasti. Fallið $\psi_2(x)$ er gefið með

$$\psi_2(x) = \beta_2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}(x - 1) \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad 0 \le x \le a,$$

þar sem β_2 er fasti.

Í bútaaðferðinni sem er notuð til að finna nálgunargildi á u er lagt til að nota rétthyrnda þríhyrninga með jafnlangar skammhliðar. Myndin hér fyrir neðan sýnir dæmi um þríhyrningana þegar $a = 2$, $b = 1$ og fjöldi þríhyrninga eftir x-ás er 10 og 5 eftir y-ásnum.

Við viljum leysa verkefnið með bútaaðferð þegar $a = 2$, $b = 1$ og fjöldi þríhyrninga eftir x-ás er 100 og 50 eftir y-ás.

Skýrslan

I) Útfærið aðferðina sem lýst er hér að ofan. Forrit ykkar allra á að byrja á skilgreiningu falls sem heitir *Varmajafnvaegi*, tekur inn breyturnar a, b, beta1, beta2, h

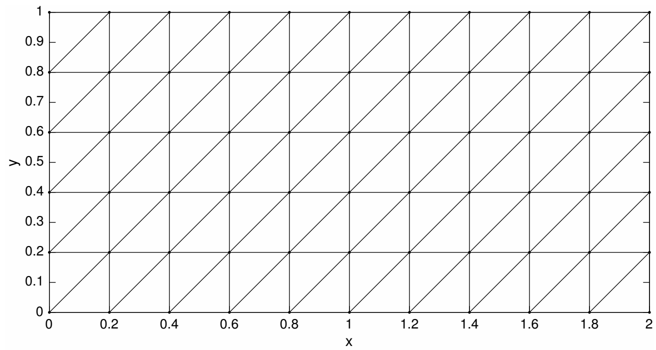

Figure 2: Þríhyrningsnet.

og skilar út fylkinu `V` sem inniheldur nálgunargildin fyrir u í hornpunktum á þríhyrningsnetinu, bæði þar sem stuðlar þúfugrunnfallanna eru ekki þekktir og þar sem þeir eru þekktir. Fyrsta línan í `V` á að innihalda nálgunargildi u þegar $y = 0$ og $x \in \{0, h, 2h, ..., a\}$, önnur línan í `V` á að innihalda nálgunargildi u þegar $y = h$ og $x \in \{0, h, 2h, ..., a\}$ o.s.fv. Inntakið eru stikarnir a, b, β_1 og β_2. Síðasta inntakið er h sem er lengd skammhliða þríhyrninganna. Athugið að a og b verða að vera heiltölu margfeldi af h. Í skýrslunni er það mikilvægt að þið útskýrið hvernig fylkið A og vigurinn $\vec{b}$ eru byggð upp í forritinu.

II) Setjið $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $a = b = 1, h = \frac{1}{4}$. Lausnin er

$$\mathtt{HZ} = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 2. & 1. \\ 0.553571 & 0.419643 & 0.75 & 1.08036 & 0.946429 \\ 0.375 & 0.375 & 0.5 & 0.625 & 0.625 \\ 0.196429 & 0.205357 & 0.25 & 0.294643 & 0.303571 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}. \tag{10}$$

III) Leysið verkefnið þegar $a = 2$, $b = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$ og fjöldi þríhyrninga eftir x-ás er 100 og 50 eftir y-ás. Teiknið tvær myndir af fletinum miðað við þessi gildi, það er, annars vegar þrívítt graf af fletinum og hins vegar jafnhæðarlínur flatarins.

T.d. í `Matlab` getið þið notað skipunina `surf(x,y,V')` til að teikna þrívítt graf og skipunina `contour(x,y,V')` til að teikna jafnhæðarlínur. Athugið að hér hefur fylkinu verið bylt til þess að teikningarnar komi rétt út í xy-hnitunum.

IV) Leysið verkefnið með því að velja ykkar eigin ψ_1 og ψ_2. Veljið ψ_1 og ψ_2 sem eru samfelld föll. Teiknið þrívíða mynd af $u(x, y)$ á tvívíða svæðinu sem skilgreint. Setjið myndina í skýrsluna. Myndin á einnig að fara á forsíðu skýrslunnar.

`Forrit`-Eddan 2021

Við verðum með samkeppni um fallegustu myndina af varmajafnvægis-fletinum á forsíðu skýrslanna ykkar. Samkeppnin ber yfirskriftina `Forrit`-Eddan 2021.