Рк 2. Задача 2. Решение

Рассмотрим язык

$$L = \left\{ \, w_1 a w_2 w_3 \; \middle| \; |w_1| > 0 \; \wedge \; \left(w_1 = w_2^R \; \vee \; w_1 = w_3^R\right) \right\}.$$

Класс DCFL замкнут относительно дополнения и пересечения с регулярными языками. Значит, если L — DCFL, то язык

$$L' = \overline{L} \cap R$$

тоже DCFL, а следовательно, КС.

Возьмем регулярный язык

$$R = cb^+c \; a \; cb^+c \; c \; b^+c.$$

Достаточно показать, что L' не КС.

Пусть p — константа из леммы Огдена. Обозначим

$$M = \text{НОК}(1, 2, \ldots, p)$$

Рассмотрим слово

$$w = cb^pc \; a \; cb^{p+M}c \; c \; b^{p+M}c.$$

Очевидно, $w \in R$.

Покажем, что $w \notin L$. Здесь

$$w_1 = cb^pc.$$

Это палиндром, поэтому $w_1^R = w_1$. Тогда условия

$$w_1 = w_2^R \quad \text{или} \quad w_1 = w_3^R$$

эквивалентны соответственно

$$w_2 = cb^pc \quad \text{или} \quad w_3 = cb^pc.$$

Хвост после символа a равен

$$cb^{p+M}c \; c \; b^{p+M}c.$$

Ни один его префикс не равен cb^pc, поскольку после первой буквы c идут $p+M$ букв b до следующей c, а не p. По той же причине ни один суффикс хвоста не равен cb^pc. Значит, не существует разбиения хвоста на w_2w_3, при котором выполнялось бы $w_2 = cb^pc$ или $w_3 = cb^pc$.

Следовательно, $w \notin L$, то есть $w \in \overline{L}$, и значит $w \in L' = \overline{L} \cap R$.

Отметим p позиций внутри блока b^p в слове w (в части w_1).

Пусть для слова w выполнено разбиение из леммы Огдена:

$$w = uvxyz,$$

причём v и y содержат хотя бы одну отмеченную позицию.

Если v или y задевает символ c, то при накачке с $i = 0$ нарушается форма префикса cb^+c, и полученное слово не лежит в R. Значит, оно не лежит в L'.

Иначе v и y состоят только из букв b внутри отмеченного блока b^p. Пусть $|v| = x$, $|y| = y$. Тогда $x \geq 1$, $y \geq 1$ и $x + y \leq p$.

Выберем

$$i = \frac{M}{x+y} + 1.$$

Это целое число, поскольку M делится на любое число от 1 до p, в частности на $x + y$.

Тогда длина первого блока b после накачки станет

$$p + (i-1)(x+y) = p + M,$$

то есть накачанное слово имеет вид

$$cb^{p+M}c \; a \; cb^{p+M}c \; c \; b^{p+M}c,$$

и, следовательно, принадлежит R.

Теперь покажем, что это слово принадлежит L. Выберем разбиение хвоста после a так, чтобы

$$w_2 = cb^{p+M}c,$$

то есть w_2 — это первый блок после a. Так как $cb^{p+M}c$ является палиндромом, имеем $w_2^R = w_2$, и потому

$$w_1 = cb^{p+M}c = w_2^R.$$

Значит, накачанное слово лежит в L, а значит не лежит в $\overline{L}$, следовательно не лежит в L'.

Получили противоречие с леммой Огдена. Следовательно, L' не КС.

Значит, L' не DCFL. Если бы L был DCFL, то L' был бы DCFL. Противоречие. Значит, L не DCFL.