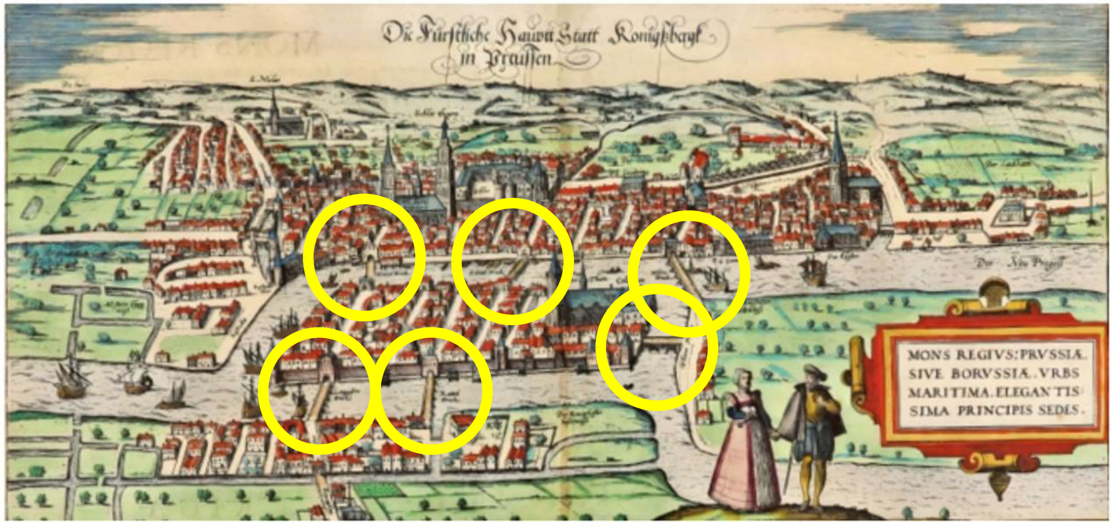
Teoria dos
GRAFOS

Aula 01: Introdução aos Grafos

Prof. José Alberto S. Torres

A cidade de **Königsberg**

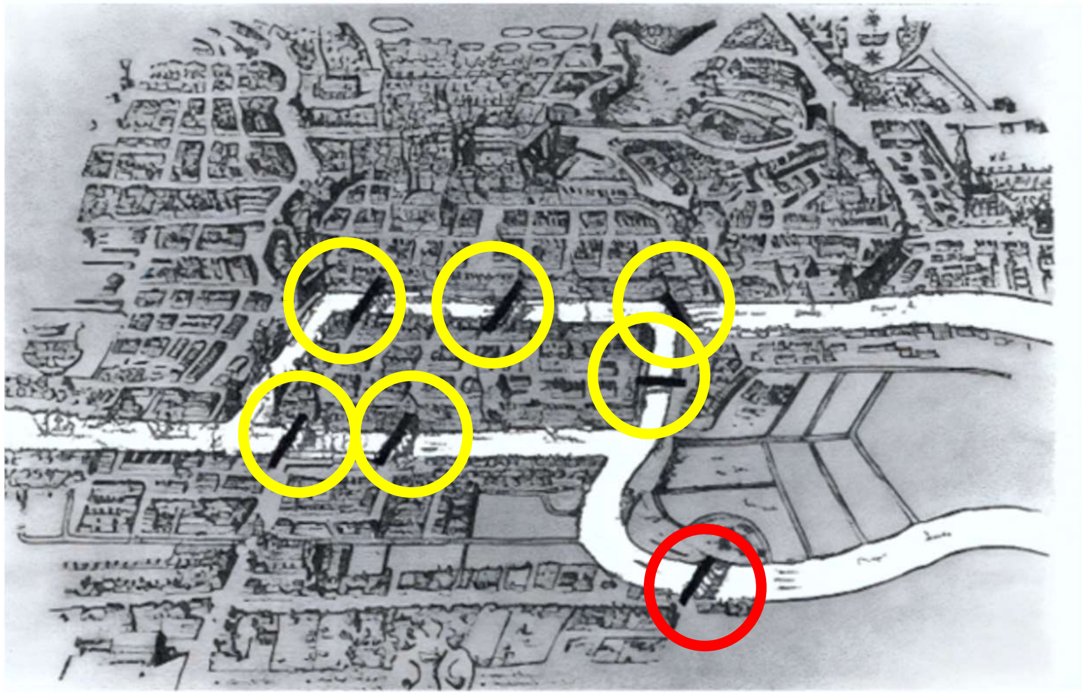
- Para compreender bem o potencial dos grafos é essencial entender sua origem e o que motivou seu surgimento.
- Em 1581, a cidade de Königsberg possuía duas ilhas: Kneiphof e Lomse, que podiam ser acessadas por seis pontes.



IESB
Centro Universitário

A cidade de **Königsberg**

- Com o passar dos anos, outra ponte foi construída de modo a conectar uma das ilhas diretamente com outra parte do continente.
- Dessa forma, seis pontes interligavam as duas ilhas às margens do Rio Pregel e uma sétima fazia a conexão entre elas.



A teoria dos **grafos**

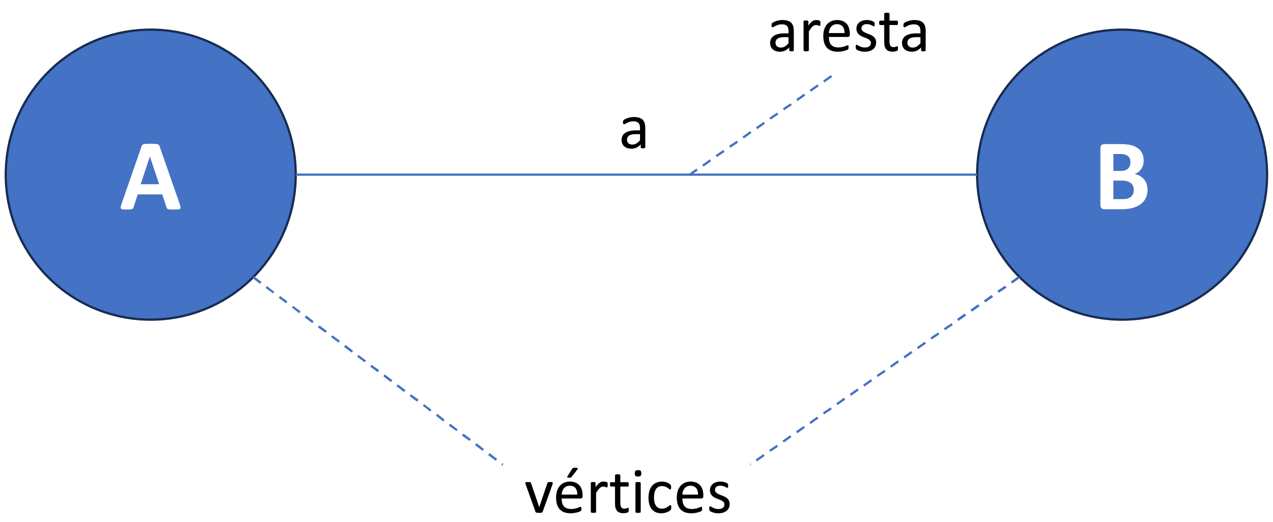
- Desta singularidade geográfica, surgiu um desafio matemático na época, o de **apresentar um caminho que percorresse cada uma das sete pontes, atravessando-a uma única vez, e conseguir retornar ao ponto de partida do caminho**.
- Esse desafio perdurou até que Leonhard Euler (1707 – 1782) apresentou uma proposta matemática em 1736, a qual **originou a teoria dos grafos**.

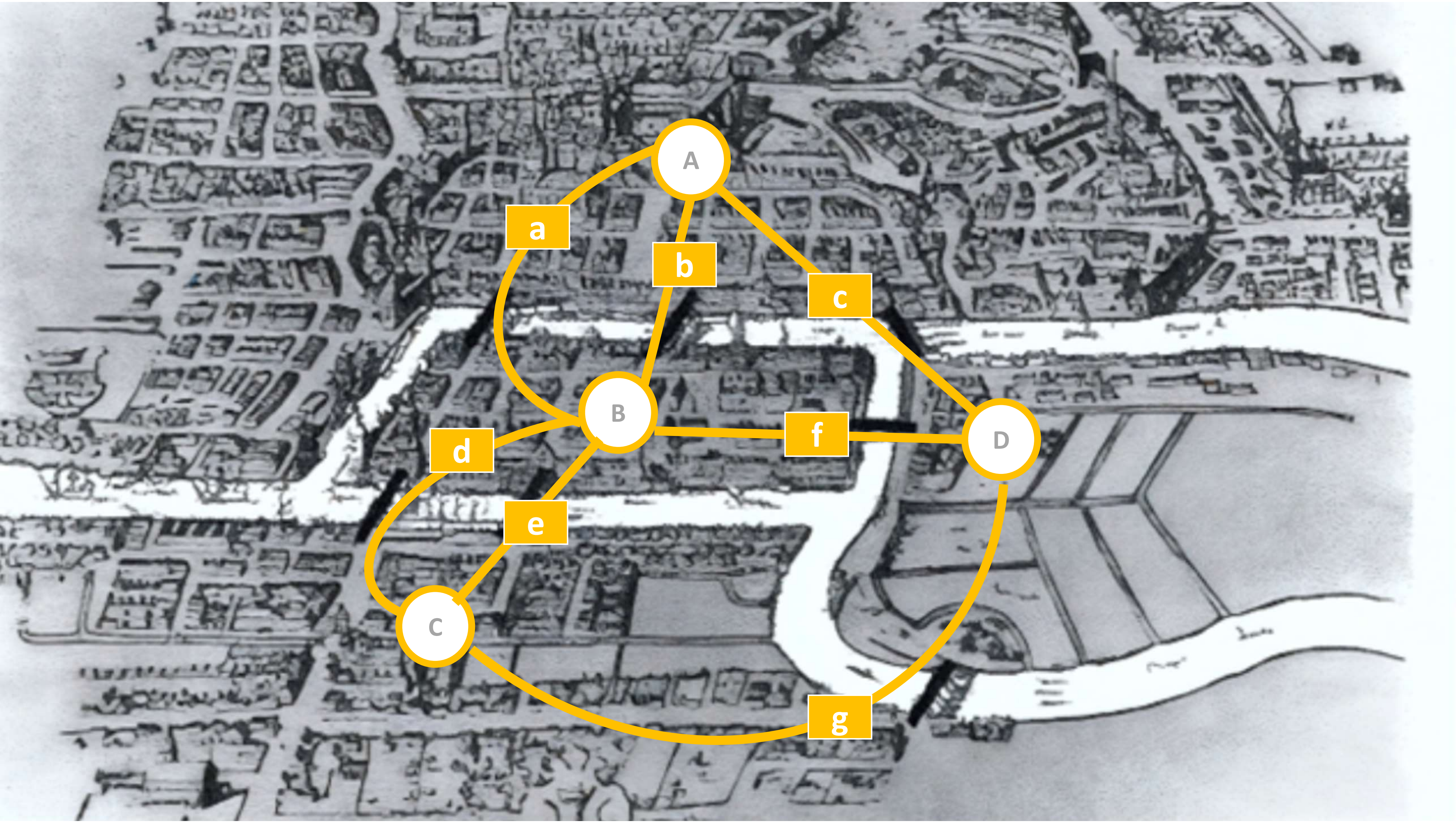
A teoria dos **grafos**

- A ideia de Euler consistia em fazer uma modelagem do cenário, **excluindo as informações não pertinentes ao problema** - largura da ilha, comprimento das pontes, pontos que não estavam relacionados ao caminho a ser percorrido.
- Nessa abstração foram definidos **pontos de conexão (vértices) e os elementos que os conectavam entre si (arestas)**.

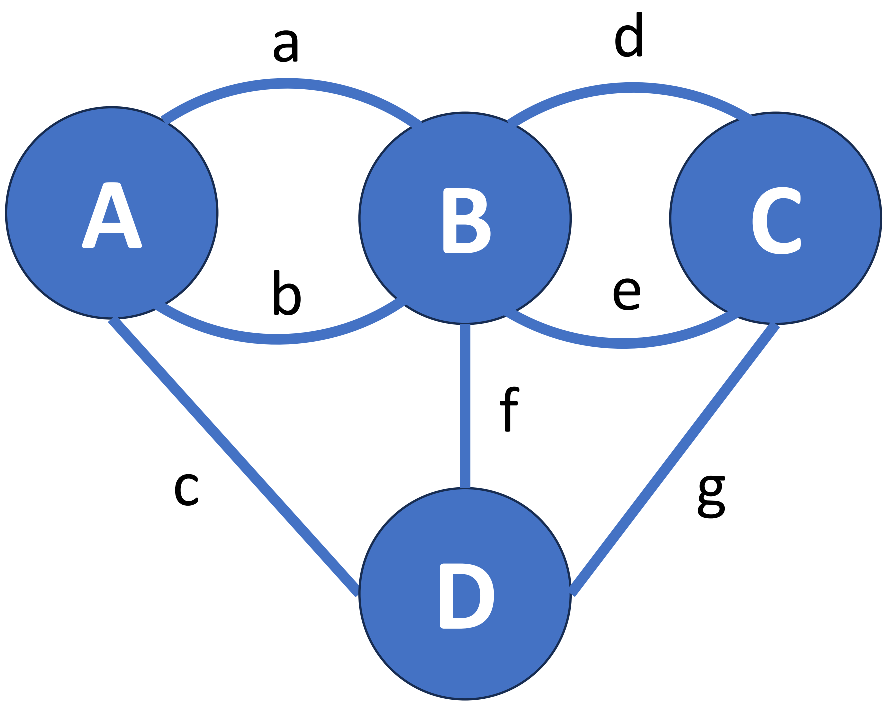
Representação

- Os **pontos** foram representados por **círculos** e os **elementos que os conectavam por retas**.




A
a
b
c
B
f
D
d
e
C
g

Representação



- Por meio dessa representação, Euler conseguiu provar que **o problema não tinha solução,** ao demonstrar que o gráfico representativo não poderia ser percorrido da maneira solicitada.

Atividade 1

- Vamos seguir os passos de Euler e modelar um sistema que todos conhecemos: o mapa do metrô de brasilia.
- O desafio é transformar este mapa num grafo. Para isso, precisam de definir claramente e justificar:
  - O que os vossos **vértices (V)** representam?
  - O que as vossas **arestas (E)** representam?
- Desejem o grafo final na ferramenta que preferirem.

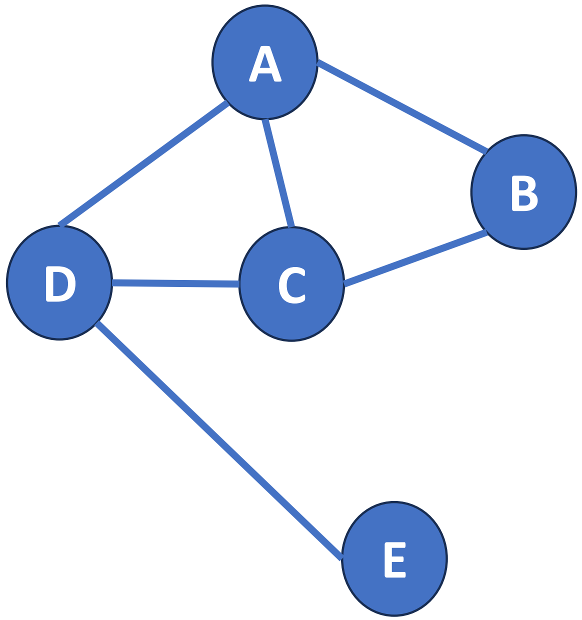
TAÇÃO 29
STAÇÃO 28
CEILÂNDIA
CEILÂNDIA NORTE
CEILÂNDIA CENTRO
GUARIROBA
CEILÂNDIA SUL
CEILÂNDIA
CENTRO METROPOLITANO
ONOYAMA
TAGUATINGA
PRAÇA DO RELÓGIO
ESTRADA PARQUE
CONCESSIONÁRIAS
ÁGUAS CLARAS
ARNIQUEIRAS
GUARÁ I
FEIRA
GUARÁ
GUARÁ II
TAGUATINGA SUL
ÁGUAS CLARAS
PARK WAY
CAND
SAMAMBAIA
FURNAS
SAMAMBAIA SUL
SAMAMBAIA
ESTAÇÃO 34
ESTAÇÃO 35
RECANTO DA EMAS
RIACHO FUNDO
NÚCLEO BANDEIRANT

Caminho de **Euler**

- Para percorrer cada um dos pontos (A, B, C ou D) é preciso ter duas linhas de conexão, uma entrando no ponto e outra saindo.
- Sendo assim, Euler procurou identificar **em quais tipos de grafos era possível realizar esse tipo de caminho fechado**, no qual cada reta era visitada uma única vez.
- O caminho com essa proposta ficou conhecido como **Caminho de Euler**, e um grafo que se restringe a esse caminho foi chamado de **Grafo de Euler**.
- Um caminho de Euler em um grafo G é um caminho que usa cada arco G exatamente uma vez - O Caminho de Euler é **focado em percorrer arestas.**

Atividade 2

- **Desafio do Carteiro** - Este grafo representa um pequeno bairro. As arestas são as ruas e os vértices são os cruzamentos. Um carteiro precisa de percorrer cada rua exatamente uma vez para entregar a correspondência, começando e terminando no depósito (vértice A). É possível criar essa rota? Porquê ou porque não?



Teorema das **Quatro cores**

- Embora estabelecida há mais de 200 anos, muito pouco foi realizado nos anos subsequentes ao trabalho de Euler.
- Por volta de meados do século XIX, três desenvolvimentos isolados contribuiriam enormemente para despertar o interesse pela área.
- O primeiro é a formulação do problema das quatro cores, cuja autoria acredita-se ser de Francis Guthrie.

Teorema das **Quatro cores**

- O problema das quatro cores consiste em **colorir os países de um mapa arbitrário plano, cada país com uma cor**, de tal forma que **países fronteiriços possuam cores diferentes**.
- O problema então consiste em obter tal coloração usando não mais de 4 cores.
- É simples apresentar um exemplo de um mapa onde **3 cores não são suficientes**.

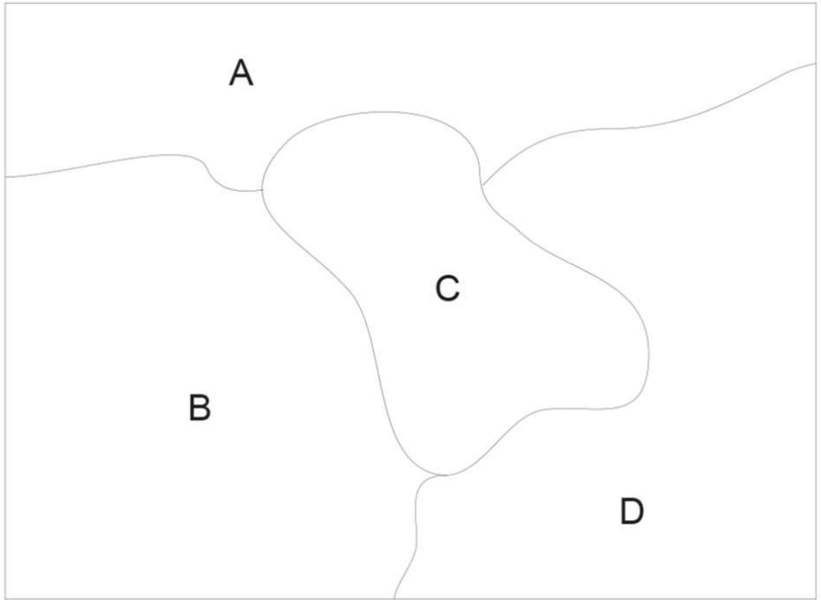
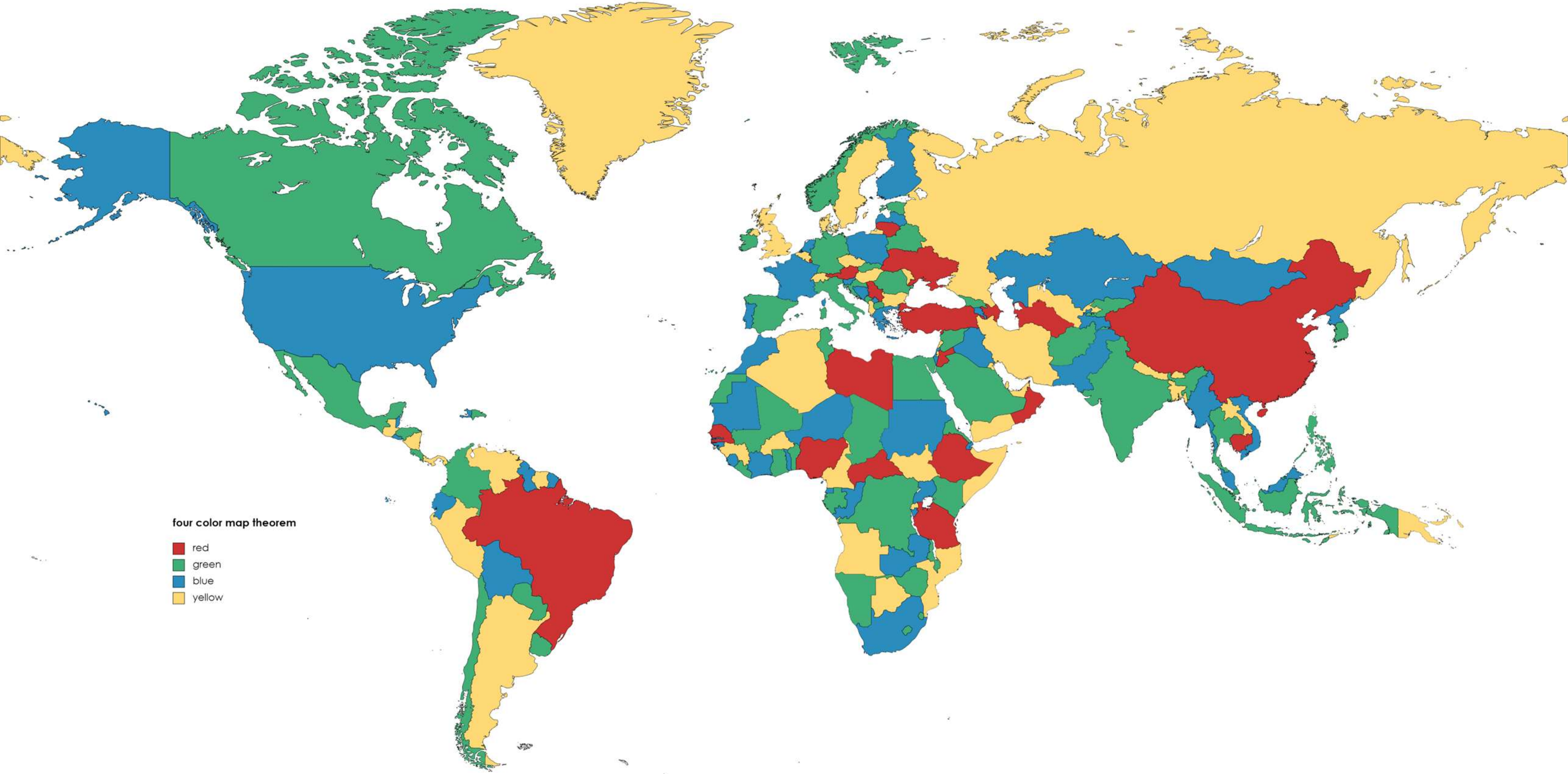


Figura 1.2: Quatro cores são necessárias

Teorema das **Quatro cores**

- Foi formulada uma prova de que **5 cores são suficientes**.
- Conjeturou-se então que 4 cores também seriam suficientes.
- Esta conjetura permaneceu em aberto até 1977, quando foi provada por Appel e Haken – 1000 horas de computação através de prova exaustiva.



Created with mapchart.net

Teorema das **quatro cores**

- Além da importância do tópico de coloração, o problema das 4 cores desempenhou um papel muito relevante para o desenvolvimento geral da teoria dos grafos, pois serviu de motivação para o trabalho na área e ensejou o desenvolvimento de outros aspectos teóricos, realizados na tentativa de resolver a questão

Ciclo **Hamiltoniano**

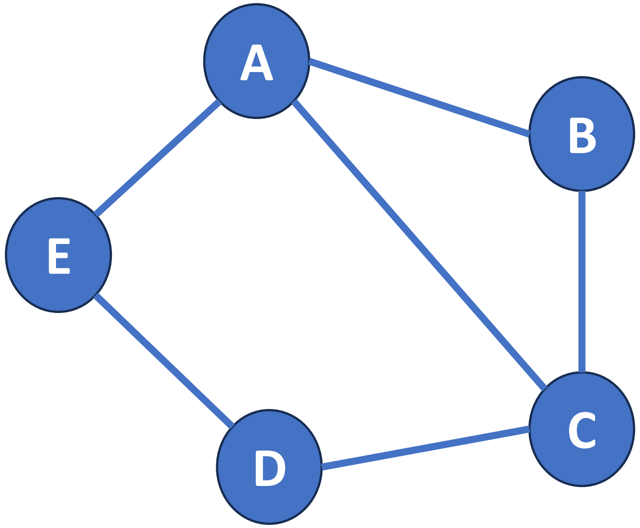
- Outro desenvolvimento importante foi a formulação do problema do ciclo Hamiltoniano, por Hamilton.
- No problema do caminho hamiltoniano existem n cidades, onde cada par de cidades pode ser adjacentes ou não, arbitrariamente.
- Partindo de uma cidade qualquer, o problema consiste em **determinar um trajeto que passe exatamente uma vez em cada cidade e retorne ao ponto de partida**, e tal que cada par de cidades consecutivas no trajeto seja sempre adjacente.
- O ciclo Hamiltoniano é focado em percorrer vértices.

Ciclo **Hamiltoniano**

- Uma **solução de força bruta** consiste, por exemplo, em **examinar cada permutação** do conjunto das cidades e **verificar se esta corresponde ou não a um trajeto com as condições exigidas**.
- Essa solução não é satisfatória do ponto de vista algorítmico, pois **apenas no caso em que n é muito pequeno torna-se possível examinar as n! permutações**.
- Até a data atual, não foi encontrada uma solução algorítmica satisfatória, ou seja, não são conhecidas condições necessárias e suficientes, razoáveis, de existência de tais trajetos.

Atividade 3

- **Desafio do turista** - Este grafo representa uma cidade. Os vértices são pontos turísticos importantes. Um turista, com pouco tempo, quer visitar cada ponto turístico exatamente uma vez, começando e terminando no seu hotel (vértice A). É possível criar esse roteiro? Porquê ou porque não?"



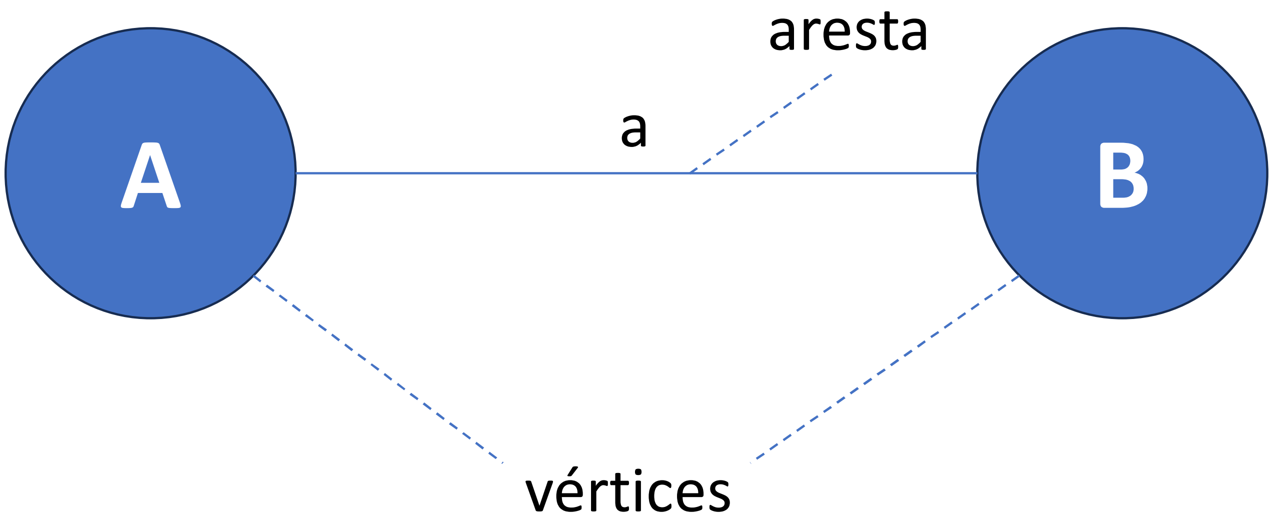
Outros trabalhos

- No século XX o interesse pelos grafos aumentou e, por volta da década de 1930, resultados fundamentais na teoria foram obtidos por Kuratowski, König e Menger entre outros.
- Os anos mais recentes confirmam, de certa forma, a ideia de ser a teoria de grafos uma área ainda com vastas regiões inexploradas.

Definição de Grafo

- Um grafo G consiste em uma **coleção V de vértices** e uma **coleção de arestas E**, para as quais escrevemos G = (V, E).
- Diz-se que **cada aresta e ∈ E une dois vértices**, que são chamados de seus pontos extremos.
- Se **e une u**, **v ∈ V**, escrevemos **e = {u, v}**. Os vértices u e v, neste caso, são ditos adjacentes.
- Diz-se que a aresta e é incidente aos vértices u e v, respectivamente.

Definição de **Grafos**



V = {A, B}
E = {(A, B)}

Definição de **Grafos**

- Um grafo **pode ou não possuir peso** (weight) nas arestas, se tornando um **grafo ponderado** ou também chamado de **valorado**.
- O **peso** é definido pelo par **(G, w)**, em que G se refere ao grafo e w à função que define para cada aresta de G qual é o seu peso w(e).
- O **peso** também pode ser chamado de **custo** e sua importância é permitir ou definir qual o melhor caminho para percorrer um grafo conforme o peso em cada aresta.

Complemento de um Grafo

- O complemento de um grafo G, denotado como $\overline{G}$, é o grafo obtido de G removendo todas as suas arestas e unindo exatamente aqueles vértices que não eram adjacentes em G.
- Se tomarmos um gráfico G e seu complemento $\overline{G}$ "juntos", obtemos um grafo completo.

Direcionamento de Grafos

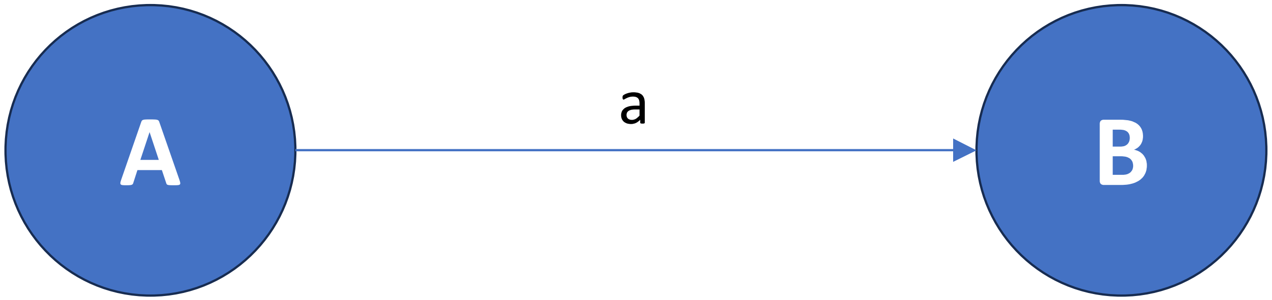
- Um grafo pode ser de dois tipos: **direcionado** ou **não direcionado**.
- Outros termos que se referem ao direcionamento de um grafo são: **dirigido ou orientado** e, na sua forma negativa, **não dirigido ou não orientado**.
- O direcionamento de um grafo indica se **a conexão entre dois vértices possui um direcionamento ou não**, ou seja, se uma aresta possui um vértice de origem e outro de chegada.

Direcionamento de Grafos

- Um grafo direcionado também é chamado de **dígrafo**.
- As situações de uso desses grafos direcionados são diversas, podemos exemplificar com um das **ruas de uma cidade**, onde **nem todas são de mão dupla**.

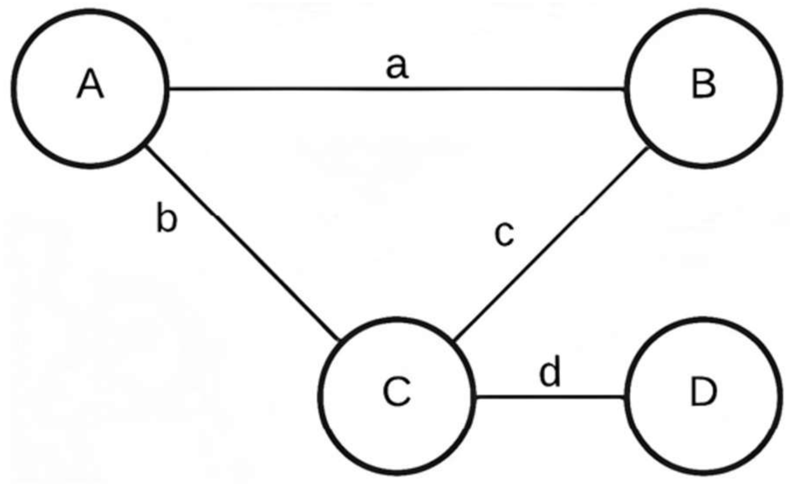
Direcionamento de Grafos

- Quando o grafo é não direcionado, não temos um vértice exclusivo de saída.
- O sentido de percorrê-lo é do vértice A para o B e vice-versa, e sua representação é como uma reta.



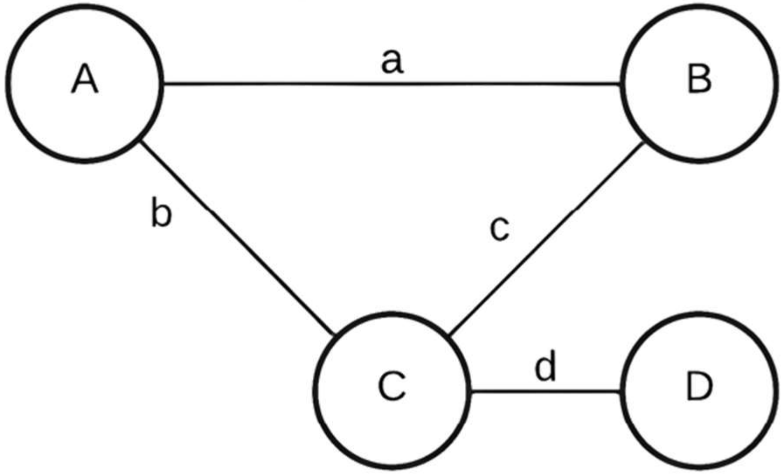
Ordem de um Grafo

- A ordem de um grafo G é obtida pelo número de vértices dele, denotado pela cardinalidade do conjunto de vértices desse grafo |V|.
- Ordem(G) = 4



Tamanho de um Grafo

- O tamanho de um grafo G é a soma da cardinalidade dos conjuntos de vértices |V| com a do conjunto de arestas |E| dele, temos então que o **tamanho do grafo G é obtido por |V| + |E|**.
- A cardinalidade de |V| é 4 e a cardinalidade de |E| é 4, pois temos as arestas a, b, c e d.
- O tamanho do grafo é obtido por |V| mais |E| = 4 + 4 = 8, podendo ser representada por: Tamanho (G3) = |V| + |E| = 8



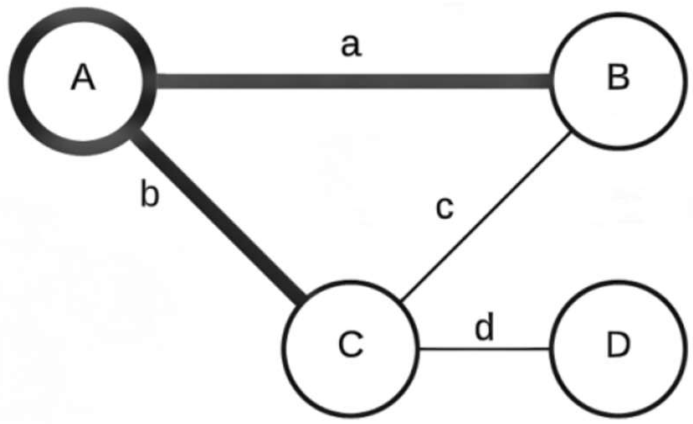
Grau de um Grafo

- O número de arestas incidentes com um vértice v é chamado de grau de v, denotado por δ(v).
- Os laços são contados duas vezes.
- Para todos os grafos G, **a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas**, ou seja:

$$\sum_{v \in V(G)} \delta(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Grau de um Grafo

- Em um grafo não direcionado, o grau (degree) de um vértice é a **quantidade de arestas que estão conectadas com o vértice**.
- Para o vértice A temos duas arestas conectadas; a e b, assim o grau do vértice é 2.
- Da mesma maneira, podemos indicar o grau de todos os vértices do grafo:
  - Grau (A) = 2
  - Grau (B) = 2
  - Grau (C) = 3
  - Grau (D) = 1

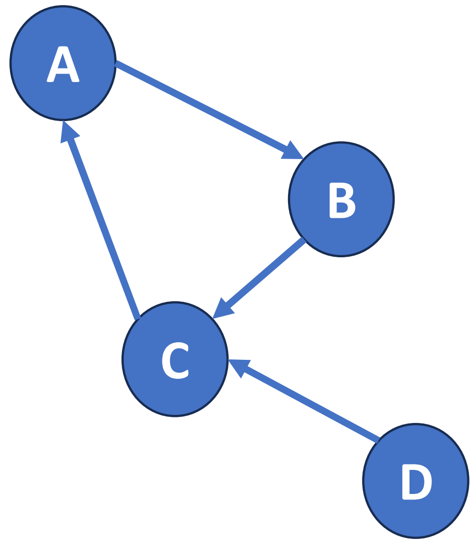


Graus de **entrada** e **saída**

- Agora, quando tivermos um grafo direcionado, **cada vértice terá dois tipos de graus**, o de **entrada** e o de **saída**.
- **Grau de entrada (in-degree):** para um vértice v, é o número de arestas que entram em v. Não existe uma notação padrão que indique que é o grau de entrada. Podendo utilizar ge (v).
- **Grau de saída (out-degree):** para um vértice v, é número de arestas que saem de v. Podendo ser representado por gs (v).

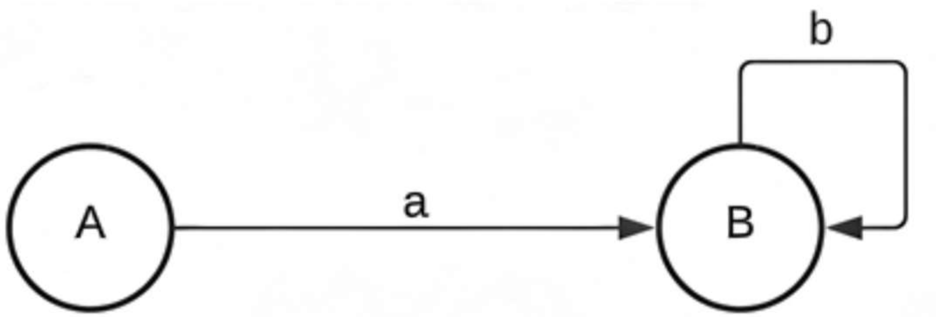
Graus de **entrada** e **saída**

- Quais os graus destes vértices?
  - ge (A) = 1
  - ge (B) = 1
  - ge (C) = 2
  - ge (D) = 0
  - gs (A) = 1
  - gs (B) = 1
  - gs (C) = 1
  - gs (D) = 1



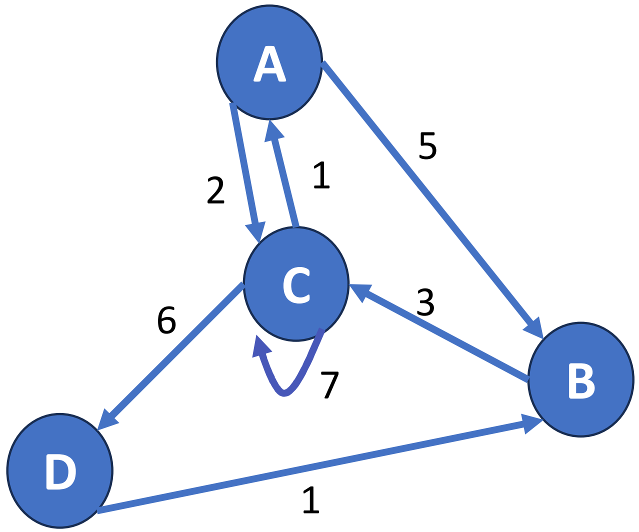
Laço de um grafo

- Dizemos que uma aresta é um laço ou arco **quando o vértice de saída é o mesmo de entrada**, ou seja, é uma aresta que conecta um vértice com ele mesmo.
- O laço pode ocorrer em um grafo direcionado ou não direcionado.
- Nessa situação, a aresta deve ser contabilizada tanto no grau de entrada quanto no grau de saída.



Atividade 4

- Analisem este grafo. Notem que ele é direcionado, ponderado e contém um laço. O seu trabalho é preencher a seguinte 'Ficha Técnica' para este grafo.
  - Grau de entrada de cada vértice
  - Grau de saída de cada vértice
  - Grau total se não fosse direcionado
  - Ordem do grafo
  - Tamanho do Grafo
  - Qual o laço?
  - É ponderado?




DÚVIDAS