CHAPTER 2

2계 선형상미분방정식

2.1 Homogeneous Linear ODEs of Second Order

1. $F(x,z,z')=0$의 일차미분방정식이 된다.

2. $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'}{dy}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dy}z$ 이므로 $F\left(y,z,\dfrac{dz}{dy}z\right)=0$인 일차미분방정식이 된다.

3. $y'=z$ 으로 치환하면, $z'=z$ 이므로 $z=c_1e^x$ 이다. 따라서 일반해는 $y=c_1e^x+c_2$ 이다.

4. $y'=z$ 으로 치환하면 $2xz'=3z$, $\dfrac{1}{z}dz=\dfrac{3}{2x}dx$ 이므로 $\ln|z|=\dfrac{3}{2}\ln|x|+c^*$, $z=\tilde{c}x^{\frac{3}{2}}$ 이다.
따라서 일반해는 $y=c_1x^{\frac{5}{2}}+c_2$ 이다.

5. $y'=z$ 으로 치환하면, $z'=\dfrac{dz}{dy}z$ 이므로 방정식은 일계미분방정식 $yz\dfrac{dz}{dy}=3z^2$ 으로 정리된다.
$\dfrac{dz}{z}=\dfrac{3dy}{y}$ 이므로 $\ln|z|=3\ln|y|+c^*$이다.
따라서 $z=\tilde{c}y^3$ 이므로, 일반해는 $y^2=\dfrac{1}{c_1x+c_2}$ 이다.

6. 미분방정식을 정리하면, $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ 이다.
식 (9)에 의하여
$$u'=\frac{x^2}{\cos^2x}e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{x^2}{\cos^2x}e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{\cos^2x}$$
이므로 $y_2=\dfrac{\cos x}{x}\tan x=\dfrac{\sin x}{x}$ 이다.
따라서 일반해는 $y=c_1\dfrac{\cos x}{x}+c_2\dfrac{\sin x}{x}$ 이다.

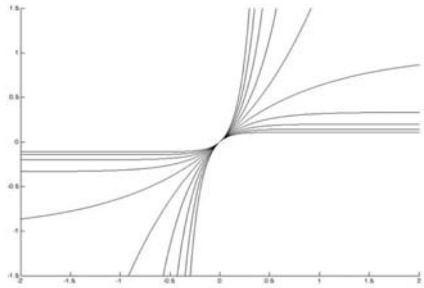
7. $y'=z$ 으로 치환하면, $z'=\dfrac{dz}{dy}z$ 이므로 방정식은 일계미분방정식 $z\dfrac{dz}{dy}+z^3\cos y=0$ 으로 정리된다.
$\dfrac{dz}{z^2}=-\cos y\,dy$, $z=\dfrac{1}{\sin y+c_1}$ 이므로 일반해는 $-\cos y+c_1y=x+c_2$ 이다.

8. $y'=z$ 으로 치환하면, $z'=1+z^2$ 이고 $\dfrac{dz}{1+z^2}=dx$ 이므로 $\arctan z=x+c_1$, $z=\tan(x+c_1)$ 이다.
따라서 일반해는 $y=-\ln|\cos(x+c_1)|+c_2$ 이다.

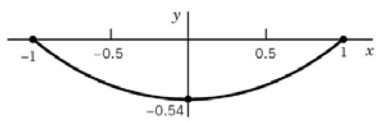
9. 방정식을 정리하면 $y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{4}{x^2}y=0$이다.
식 (9)에 의하여
$$u'=\frac{1}{x^4}e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x^4}e^{-\ln|x|}=\frac{1}{x^5}$$
이므로 $y_2=x^2\displaystyle\int\frac{1}{x^5}dx=-\frac{1}{4x^2}$ 이다.
따라서 일반해는 $y=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x^2}$ 이다.

10. $y'=z$ 으로 치환하면, $z'=\dfrac{dz}{dy}z$ 이므로 방정식은 일계미분방정식 $z\dfrac{dz}{dy}+\left(1+\dfrac{1}{y}\right)z^2=0$ 으로 정리된다.
$\dfrac{dz}{z}=-\left(1+\dfrac{1}{y}\right)dy$ 이므로 $\ln|z|=-y-\ln|y|+c^*$이다.
따라서 $z=\dfrac{c_1}{y}e^{-y}$ 이다. 이 식을 다시 정리하면 $ye^ydy=c_1dx$이므로 일반해는 $ye^y-e^y=c_1x+c_2$ 이다.

11. 문제의 조건을 모델링하면 방정식 $y''=2y'$과 초기조건 $y(0)=0$, $y'(0)=1$을 얻는다. $y'=z$ 으로 치환하면, $z'=2z$, $z(0)=1$ 이므로 $z=c_1e^{2x}$ 이다.
$z(0)=c_1=1$ 이므로 $z=e^{2t}$ 이다.
$y'=e^{2t}$ 이므로 $y=\dfrac{1}{2}e^{2t}+c_2$ 이다. $y(0)=\dfrac{1}{2}+c_2=0$ 이므로 $c_2=-\dfrac{1}{2}$ 이고 $y=\dfrac{1}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{2}$ 이다.



12. 주어진 문제를 정리하면
$y''=\sqrt{1+(y')^2}$, $y(-1)=0$, $y(1)=0$ 이다. $y'=z$ 으로 치환하면, $z'=\sqrt{1+z^2}$, $\dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=dx$ 이므로
$\operatorname{arcsinh}z=x+c_1$, $z=\sinh(x+c_1)$ 이다.
즉, $y'=\sinh(x+c_1)$ 이므로 $y=\cosh(x+c_1)+c_2$ 이다
초기조건에 의하여 $y(-1)=\cosh(-1+c_1)+c_2=0$,
$y(1)=\cosh(1+c_1)+c_2=0$ 이므로 $c_1=0$, $c_2=-\cosh1$ 이고 $y=\cosh x-\cosh1$ 이다.



13. 모델링하면 방정식 $y'+y''=k$ $(k>0)$을 얻는다.
$y'=z$ 으로 치환하면, $z'=k-z$ 이고 $\dfrac{dz}{z-k}=-dt$ 이므로 $\ln|z-k|=-t+c^*$, $z=k+\tilde{c}e^{-t}$ 이다.
따라서 일반해는 $y=c_1e^{-t}+kt+c_2$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=y_0$,
$y'(0)=k-c_1=v_0$ 이므로 $c_1=k-v_0$, $c_2=y_0+v_0-k$ 이고 특수해는 $y=(k-v_0)e^{-t}+kt+y_0+v_0-k$ 이다.

14. 모델링하면 방정식 $y'=\dfrac{1}{y''}$ 을 얻는다.
$y'=z$ 으로 치환하면, $zz'=1$ 이고 $zdz=dt$

이므로 $\frac{1}{2}z^2 = t + c^*$, $z = \sqrt{2t + c_1}$ 이다.

따라서 일반해는 $y = \frac{1}{3}(2t + c_1)^{3/2} + c_2$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = \frac{1}{3}(c_1)^{3/2} + c_2 = y_0$,

$y'(0) = \sqrt{c_1} = v_0$ 이므로 $c_1 = (v_0)^2$, $c_2 = y_0 - \frac{1}{3}(v_0)^3$

이고 특수해는 $y = \frac{1}{3}(2t + v_0{}^2)^{3/2} + y_0 - \frac{1}{3}v_0{}^3$ 이다.

15. $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$ 라 하자.

(a) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \cot 3x \neq const$ 이므로 일차독립이다.

$y_1{}' = -3\sin 3x$, $y_2{}' = 3\cos 3x$ 이고

$y_1{}'' = -9\cos 3x$, $y_2{}'' = -9\sin 3x$ 이므로

y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해이다.

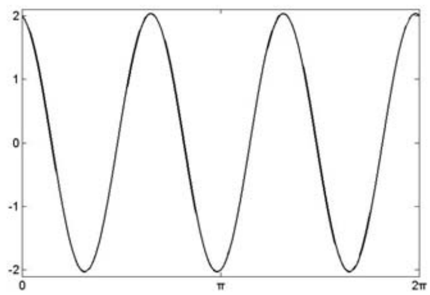
즉, y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해의 기저이다.

(b) 일반해는 $y = c_1\cos 5x + c_2\sin 5x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 = 2$, $y'(0) = 3c_2 = -1$

이므로 $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{1}{3}$ 이고 특수해는

$y = 2\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x$ 이다.



16. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ 라 하자.

(a) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{-x}}{xe^{-x}} = \frac{1}{x} \neq const$ 이므로 일차독립이다.

$y_1{}' = -e^{-x}$, $y_2{}' = e^{-x} - xe^{-x}$ 이고

$y_1{}'' = e^{-x}$, $y_2{}'' = -2e^{-x} + xe^{-x}$ 이므로

y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해이다.

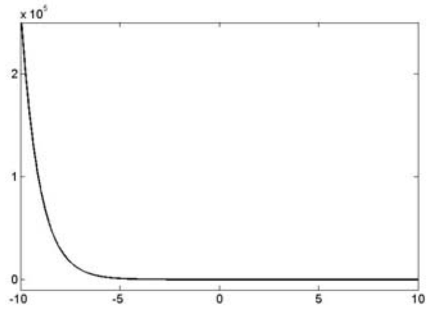
즉, y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해의 기저이다.

(b) 일반해는 $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 = 2$,

$y'(0) = -c_1 + c_2 = -1$ 이므로 $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ 이고

특수해는 $y = 2e^{-x} - xe^{-x}$ 이다.



17. $y_1 = x^{3/2}$, $y_2 = x^{-1/2}$ 라 하자.

(a) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x^{3/2}}{x^{-1/2}} = x^2 \neq const$ 이므로 일차독립이다.

$y_1{}' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, $y_2{}' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$ 이고

$y_1{}'' = \frac{3}{4}x^{-1/2}$, $y_2{}'' = \frac{3}{4}x^{-5/2}$ 이므로

y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해이다.

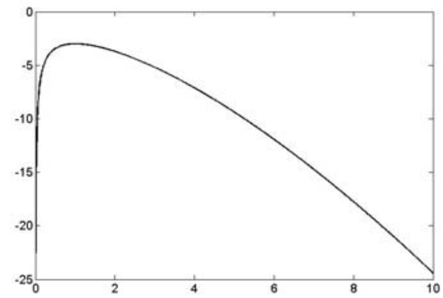
즉, y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해의 기저이다.

(b) 일반해는 $y = c_1x^{3/2} + c_2x^{-1/2}$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(1) = c_1 + c_2 = -3$,

$y'(1) = \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 0$ 이므로 $c_1 = -\frac{3}{4}$, $c_2 = -\frac{9}{4}$

이고 특수해는 $y = -\frac{3}{4}x^{3/2} - \frac{9}{4}x^{-1/2}$ 이다.



18. $y_1 = x$, $y_2 = x\ln x$ 라 하자.

(a) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x}{x\ln x} = \frac{1}{\ln x} \neq const$ 이므로 일차독립이다.

$y_1{}' = 1$, $y_2{}' = \ln x + 1$ 이고 $y_1{}'' = 0$, $y_2{}'' = \frac{1}{x}$ 이므로

y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해이다.

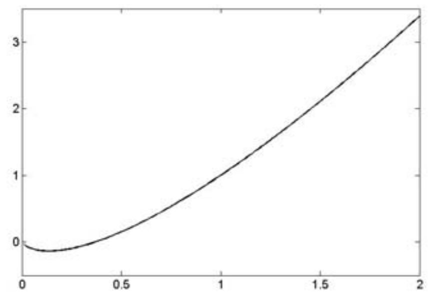
즉, y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해의 기저이다.

(b) 일반해는 $y = c_1x + c_2x\ln x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(1) = c_1 = 1$,

$y'(1) = c_1 + c_2 = 2$ 이므로 $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ 이고

특수해는 $y = x + x\ln x$ 이다.



19. $y_1 = e^{-x}\cos x$, $y_2 = e^{-x}\sin x$ 라 하자.

(a) $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{-x}\cos x}{e^{-x}\sin x} = \cot x \neq const$ 이므로

일차독립이다.

$y_1{}' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$,

$y_2{}' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$, $y_1{}'' = 2e^{-x}\sin x$,

$y_2{}'' = -2e^{-x}\cos x$ 이므로 주어진 방정식의 해이다.

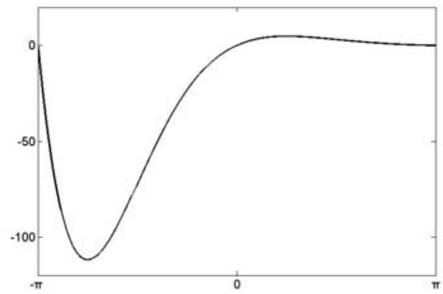
즉, y_1, y_2 는 주어진 방정식의 해의 기저이다.

(b) 일반해는 $y = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 = 0$,

$y'(0) = -c_1 + c_2 = 15$ 이므로 $c_1 = 0$, $c_2 = 15$ 이고

특수해는 $y = 15e^{-x}\sin x$ 이다.



2.2 Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients

1. 특성방정식 $\lambda^2 - 0.25 = 0$ 을 풀면, $\lambda = \pm 0.5$ 이므로 일반해는 $y = c_1 e^{0.5x} + c_2 e^{-0.5x}$ 이다.
2. 특성방정식 $\lambda^2 + 36 = 0$ 을 풀면, $\lambda = \pm 6i$ 이므로 $y = c_1\cos 6x + c_2\sin 6x$ 이다.
3. 특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 2.5 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -2 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 이므로 $y = c_1 e^{\left(-2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)x} + c_2 e^{\left(-2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)x}$ 이다.
4. 특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + \pi^2 + 4 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -2 \pm \pi i$ 이므로 일반해는 $y = e^{-2x}(c_1\cos\pi x + c_2\sin\pi x)$ 이다.
5. 특성방정식 $\lambda^2 + 2\pi\lambda + \pi^2 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -\pi$ (중근) 이므로 일반해는 $y = c_1 e^{-\pi x} + c_2 x e^{-\pi x}$ 이다.
6. 특성방정식 $10\lambda^2 - 32\lambda + 25.6 = 0$ 을 풀면, $\lambda = 1.6$ (중근)이므로 일반해는 $y = c_1 e^{1.6x} + c_2 x e^{1.6x}$ 이다.
7. 특성방정식 $\lambda^2 + 1.25\lambda = 0$ 을 풀면, $\lambda = 0, -1.25$ 이므로 일반해는 $y = c_1 + c_2 e^{-1.25x}$ 이다.
8. $\lambda^2 + \lambda + 3.25 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{3}\,i$ 이므로 일반해는 $y = e^{-\frac{1}{2}x}(c_1\cos\sqrt{3}\,x + c_2\sin\sqrt{3}\,x)$ 이다.
9. $\lambda^2 + 1.75\lambda - 0.5 = 0$ 을 풀면, $\lambda = 0.25$, -2 이므로 일반해는 $y = c_1 e^{0.25x} + c_2 e^{-2x}$ 이다.
10. 특성방정식 $100\lambda^2 + 240\lambda + 196\pi^2 + 144 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -1.2 \pm 1.4\pi i$ 이므로 일반해는 $y = e^{-1.2x}(c_1\cos 1.4\pi x + c_2\sin 1.4\pi x)$ 이다.
11. $4\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$ 을 풀면, $\lambda = 1.5, -0.5$ 이므로 일반해는 $y = c_1 e^{1.5x} + c_2 e^{-0.5x}$ 이다.
12. 특성방정식 $\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -3, -5$ 이므로 일반해는 $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-5x}$ 이다.
13. $9\lambda^2 - 30\lambda + 25 = 0$ 을 풀면, $\lambda = \dfrac{5}{3}$ (중근)이므로 일반해는 $y = c_1 e^{5x/3} + c_2 x e^{5x/3}$ 이다.
14. $\lambda^2 + 2k^2\lambda + k^4 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -k^2$ (중근)이므로 일반해는 $y = c_1 e^{-k^2 x} + c_2 x e^{-k^2 x}$ 이다.
15. 특성방정식 $\lambda^2 + 0.54\lambda + 0.0729 + \pi = 0$ 을 풀면, $\lambda = -0.27 \pm \sqrt{\pi}\,i$ 이므로 일반해는 $y = e^{-0.27x}(c_1\cos\sqrt{\pi}\,x + c_2\sin\sqrt{\pi}\,x)$ 이다.
16. 주어진 기저에 대응하는 특성방정식은 $(\lambda - 2.6)(\lambda + 4.3) = \lambda^2 + 1.7\lambda - 11.18 = 0$ 이므로 대응하는 미분방정식은 $y'' + 1.7y' - 11.18 = 0$ 이다.
17. 주어진 기저에 대응하는 특성방정식은 $(\lambda + \sqrt{2})^2 = \lambda^2 + 2\sqrt{2}\lambda + 2 = 0$ 이므로 대응하는 미분방정식은 $y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$ 이다.
18. 주어진 기저에 대응하는 특성방정식은 $(\lambda + 2\pi i)(\lambda - 2\pi i) = \lambda^2 + 4\pi^2 = 0$ 이므로 대응하는 미분방정식은 $y'' + 4\pi^2 y = 0$ 이다.
19. 주어진 기저에 대응하는 특성방정식은 $(\lambda + 1 - \sqrt{2}\,i)(\lambda + 1 + \sqrt{2}\,i) = \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ 이므로 대응하는 미분방정식은 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 이다.
20. 주어진 기저에 대응하는 특성방정식은 $(\lambda + 3.1 - 2.1i)(\lambda + 3.1 + 2.1i) = \lambda^2 + 6.2\lambda + 14.02 = 0$ 이므로 대응하는 미분방정식은 $y'' + 6.2y' + 14.02y = 0$ 이다.
21. 특성방정식이 $\lambda^2 + 9 = 0$ 이므로 $\lambda = \pm 3i$ 이고 일반해는 $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$ 이다. 초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 = 0.2$, $y'(0) = 3c_2 = 1.5$ 이므로 $c_1 = 0.2$, $c_2 = -0.5$ 이고 특수해는 $y = 0.2\cos 3x - 0.5\sin 3x$ 이다.
22. 일반해 $y = e^{-2x}(c_1\cos\pi x + c_2\sin\pi x)$ 에 조건을

적용하면 $y\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-1}c_2=1$,

$y'\left(\frac{1}{2}\right)=-e^{-1}\pi c_1-2e^{-1}c_2=-2$ 이므로

$c_1=0$, $c_2=e$이고 특수해는 $y=e^{1-2x}\sin\pi x$ 이다.

23. $\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)=0$ 이므로 대응하는 일반해는 $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=2$,
$y'(0)=4c_1-c_2=1$ 이므로 $c_1=\frac{3}{5}$, $c_2=\frac{7}{5}$이고
특수해는 $y=\frac{3}{5}e^{4x}+\frac{7}{5}e^{-x}$ 이다.

24. $\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$ 이므로
일반해는 $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(-1)=c_1e^{-3}+c_2e=e$,
$y'(-1)=3c_1e^{-3}-c_2e=-\frac{e}{4}$ 이므로
$c_1=\frac{3}{16}e^4$, $c_2=\frac{13}{16}$이고
특수해는 $y=\frac{3}{16}e^{4+3x}+\frac{13}{16}e^{-x}$ 이다.

25. $\lambda^2-1=0$ 이므로 일반해는 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=2$,
$y'(0)=c_1-c_2=-2$ 이므로 $c_1=0$, $c_2=2$이고
특수해는 $y=2e^{-x}$ 이다.

26. 특성방정식이 $\lambda^2-k^2=0$ 이므로 일반해는
$y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=1$,
$y'(0)=kc_1-kc_2=1$ 이므로 $c_1=\frac{k+1}{2k}$, $c_2=\frac{k-1}{2k}$
이고 특수해는 $y=\frac{k+1}{2k}e^{kx}+\frac{k-1}{2k}e^{-kx}$ 이다.

27. 일반해 $y=c_1e^{-\pi x}+c_2xe^{-\pi x}$ 에 조건을 적용하면
$y(0)=c_1=4.5$, $y'(0)=-\pi c_1+c_2=-4.5\pi-1$
이므로 $c_1=4.5$, $c_2=-1$이고
특수해는 $y=4.5e^{-\pi x}-xe^{-\pi x}$ 이다.

28. $6\lambda^2-\lambda-1=(3\lambda+1)(2\lambda-1)=0$ 이므로 일반해는
$y=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{-\frac{1}{3}x}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=-0.5$,
$y'(0)=\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{3}c_2=1.25$ 이므로 $c_1=1.3$, $c_2=-1.8$
이고 특수해는 $y=1.3e^{\frac{1}{2}x}-1.8e^{-\frac{1}{3}x}$ 이다.

29. 일반해 $y=e^{-0.27x}\left(c_1\cos\sqrt{\pi}x+c_2\sin\sqrt{\pi}x\right)$ 에
초기조건을 적용하면 $y(0)=c_1=0$,
$y'(0)=-0.27c_1-\sqrt{\pi}c_2=1$ 이므로 $c_1=0$, $c_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
이고 특수해는 $y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-0.27x}\sin\sqrt{\pi}x$ 이다.

30. 특성방정식이 $9\lambda^2-30\lambda+25=(3\lambda-5)^2=0$ 이므로
대응하는 일반해는 $y=c_1e^{\frac{5}{3}x}+c_2xe^{\frac{5}{3}x}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1=3.3$,
$y'(0)=\frac{5}{3}c_1+c_2=10$이므로 $c_1=3.3$, $c_2=4.5$이고
특수해는 $y=3.3e^{\frac{5}{3}x}+4.5xe^{\frac{5}{3}x}$ 이다.

31. $\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{-kx}}{xe^{-kx}}=\frac{1}{x}\neq const$ 이므로 일차독립이다.

32. $\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{ax}}{e^{-ax}}=e^{2ax}\neq const$ 이므로 일차독립이다.

33. $\frac{x^2\ln x}{x^2}=\ln x\neq const$ 이므로 일차독립이다.

34. $\frac{\ln x}{\ln x^3}=\frac{1}{3}$ 이므로 일차종속이다.

35. $\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$ 이므로 일차종속이다.

36. $\frac{0}{e^{-x}\cos\frac{1}{4}x}=0$ 이므로 일차종속이다.

37. 특성방정식이 $\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ 이므로
일반해는 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 이다.
첫 번째 초기조건에 의하여
$y(0)=c_1+c_2=1$, $y'(0)=c_1-c_2=-1$ 이므로
$c_1=0$, $c_2=1$이고 특수해는 $y=e^{-x}$ 이다.
두 번째 초기조건에 의하여
$y(0)=c_1+c_2=1.001$, $y'(0)=c_1-c_2=-0.999$ 이므로
$c_1=0.001$, $c_2=1$이고 특수해는 $y=0.001e^x+e^{-x}$
이다.

38. (a) $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2$
$=\lambda^2+a\lambda+b$
이므로 $a=-(\lambda_1+\lambda_2)$, $b=\lambda_1\lambda_2$ 이다.
(b) 문제 $y''+4y'=0$ 에서
(i) 특성방정식이 $\lambda^2+4\lambda=\lambda(\lambda+4)=0$ 이므로
일반해는 $y=c_1+c_2e^{-4x}$ 이다.
(ii) $y'=z$ 로 치환하면 $z'+4z=0$, $\frac{1}{z}dz=-4dx$
이므로 $z=c_1e^{-4x}$ 이다. 즉, $y'=c_1e^{-4x}$ 이므로
$y=-\frac{1}{4}c_1e^{-4x}+c_2$ 이다.
문제 $y''+ay'=0$ 에서
(i) 특성방정식이 $\lambda^2+a\lambda=\lambda(\lambda+a)=0$ 이므로
일반해는 $y=c_1+c_2e^{-ax}$ 이다.
(ii) $y'=z$ 로 치환하면 $z'+az=0$, $\frac{1}{z}dz=-adx$
이므로 $z=c_1e^{-ax}$ 이다. 즉, $y'=c_1e^{-ax}$ 이므로
$y=-\frac{1}{a}c_1e^{-ax}+c_2$ 이다.

(c) 중근 λ을 가지므로 $a^2-4b=0$, $b=\frac{1}{4}a^2$ 이고 $a=-2\lambda$ 이다. $y=xe^{\lambda x}$ 라 하면, $y'=e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x}$, $y''=2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x}$ 이고

$$\begin{aligned} y''+ay'+by &= (2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x})+a(e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x})+bxe^{\lambda x} \\ &= \{(\lambda^2+a\lambda+b)x+(2\lambda+a)\}e^{\lambda x}=0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $y=xe^{\lambda x}$ 는 방정식의 해이다.
방정식 $y''-y'-6y=0$ 의 특성방정식은 $\lambda^2-\lambda-6=(\lambda-3)(\lambda+2)=0$ 이므로 $y=e^{-2x}$ 은 주어진 방정식의 해이다. 그러나 -2가 중근이 아니므로 xe^{-2x} 은 해가 아니다.

(d) 방정식 $y''-(2k+m)y'+k(k+m)y=0$ 의 기저는 $e^{(k+m)x}$ 과 e^{kx} 이므로 $\frac{e^{(k+m)x}-e^{kx}}{m}$ 도 해이다.
$m\to 0$ 이면 방정식은 $y''-2ky'+k^2y=0$ 이 되고 특성방정식이 $\lambda^2-2k\lambda+k^2=(\lambda-k)^2=0$ 이므로 이중근 k를 갖는다. 또한

$$\lim_{m\to 0}\frac{e^{(k+m)x}-e^{kx}}{m}=\lim_{m\to 0}\frac{xe^{(k+m)x}}{1}=xe^{kx}$$ 이다.

2.3 Differential Operators. Optional

1. $(D^2+2D)(\sinh 2x)=4\sinh 2x+4\cosh 2x$

$$\begin{aligned}(D^2+2D)(e^x+e^{-2x}) &= (e^x+4e^{-2x})+2(e^x-2e^{-2x}) \\ &= 3e^x\end{aligned}$$

$(D^2+2D)(\sin x)=-\sin x+2\cos x$

2. $$\begin{aligned}(D-3I)(3x^2+3x) &= (6x+3)-3(3x^2+3x) \\ &= -9x^2-3x+3\end{aligned}$$

$(D-3I)(3e^{3x})=9e^{3x}-9e^{3x}=0$

$$\begin{aligned}&(D-3I)(\cos 4x-\sin 4x) \\ &= (-4\sin 4x-4\cos 4x)-3(\cos 4x-\sin 4x) \\ &= -16\cos 4x\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(D-3I)^2(e^x) &= (D^2-6D+9I)(e^x) \\ &= e^x-6e^x+9e^x=4e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D-3I)^2(xe^x) &= (D^2-6D+9I)(xe^x) \\ &= (2e^x+xe^x)-6(e^x+xe^x)+9xe^x \\ &= 4xe^x-4e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D-3I)^2(e^{-x}) &= (D^2-6D+9I)(e^{-x}) \\ &= e^{-x}+6e^{-x}+9e^{-x}=16e^{-x}\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}&(D+6I)^2(6x+\sin 6x) \\ &= (D^2+12D+36I)(6x+\sin 6x) \\ &= (-36\sin 6x)+12(6+6\cos 6x)+36(6x+\sin 6x) \\ &= 72\cos 6x+216x+72\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(D+6I)^2(xe^{-6x}) \\ &= (D^2+12D+36I)(xe^{-6x}) \\ &= (-12e^{-6x}+36xe^{-6x}) \\ &\quad +12(e^{-6x}-6xe^{-6x})+36(xe^{-6x}) \\ &= -10e^{-6x}+25xe^{-6x}\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}(D+I)(D-2I)(e^{4x}) &= (D+I)(4e^{4x}-2e^{4x}) \\ &= (D+I)(2e^{4x})=8e^{4x}+2e^{4x} \\ &= 10e^{4x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D+I)(D-2I)(xe^{4x}) &= (D+I)(e^{4x}+4xe^{4x}-2xe^{4x}) \\ &= (D+I)(e^{4x}+2xe^{4x}) \\ &= 4e^{4x}+2xe^{4x}+8xe^{4x} \\ &= 7e^{4x}+10xe^{4x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D+I)(D-2I)(e^{-2x}) &= (D+I)(-2e^{-2x}-2e^{-2x}) \\ &= (D+I)(-4e^{-2x}) \\ &= 8e^{-2x}-4e^{-2x}=4e^{-2x}\end{aligned}$$

6. $D^2+4.00D+3.36I=(D+1.2I)(D+2.8I)$ 이므로 $\lambda=-1.2,\ -2.8$ 이고 일반해는 $y=c_1e^{-1.2x}+c_2e^{-2.8x}$ 이다.

7. $9D^2-I=(3D-I)(3D+I)$ 이므로 $\lambda=\pm\frac{1}{3}$ 이고 일반해는 $y=c_1e^{x/3}+c_2e^{-x/3}$ 이다.

8. $D^2+3I=(D-\sqrt{3}\,iI)(D+\sqrt{3}\,iI)$ 이므로 $\lambda=\pm\sqrt{3}\,i$ 이고 일반해는 $y=c_1\cos\sqrt{3}\,x+c_2\sin\sqrt{3}\,x$ 이다.

9. $D^2-4.20D+4.41I=(D-2.1I)^2$ 이므로 $\lambda=2.1$ (중근) 이고 일반해는 $y=c_1e^{2.1x}+c_2xe^{2.1x}$ 이다.

10. $D^2+4.80D+5.76I=(D+2.4I)^2$ 이므로 $\lambda=-2.4$ (중근)이고 일반해는 $y=c_1e^{-2.4x}+c_2xe^{-2.4x}$ 이다.

11. $D^2-6D+6.75I=(D-4.5I)(D-1.5I)$ 이므로 $\lambda=4.5,\ 1.5$ 이고 일반해는 $y=c_1e^{4.5x}+c_2e^{1.5x}$ 이다.

12. $D^2+3.0D+2.5I$ 이므로 $\lambda=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}i$ 이고

일반해는 $y=e^{-\frac{3}{2}x}\left(c_1\cos\frac{1}{2}x+c_2\sin\frac{1}{2}x\right)$ 이다.

13. $$\begin{aligned}L(cy+kw) &= (D^2+aD+bI)(cy+kw) \\ &= (cy+kw)''+a(cy+kw)'+b(cy+kw) \\ &= cy''+kw''+acy'+akw'+bcy+bkw \\ &= c(y''+ay'+b)+k(w''+aw'+b) \\ &= cL(y)+kL(w)\end{aligned}$$

따라서 연산자 L은 선형연산자이다.

14. 주어진 방정식 $y''+ay'+by=0$ 의 특성방정식의 해가 μ와 λ 이므로 $\mu^2+a\mu+b=0$ 이고 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 이다.

$y=\frac{e^{\mu x}-e^{\lambda x}}{\mu-\lambda}$ 라 하면 $y'=\frac{\mu e^{\mu x}-\lambda e^{\lambda x}}{\mu-\lambda}$ 이고

$y''=\frac{\mu^2e^{\mu x}-\lambda^2e^{\lambda x}}{\mu-\lambda}$ 이다. 즉,

$$y''+ay'+by\equiv\frac{(\mu^2+a\mu+b)e^{\mu x}-(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda x}}{\mu-\lambda}=0$$

이므로 주어진 방정식의 해이다.
$a=-(\mu+\lambda)$, $b=\mu\lambda$ 이므로 주어진 방정식은 $y''-(\mu+\lambda)y'+\mu\lambda y=0$ 으로 변형된다.
$\mu\to\lambda$ 이면 방정식은 $y''-2\lambda y+\lambda^2y=0$ 이 되고 특성방정식은 이중근 λ를 갖는다. 또한

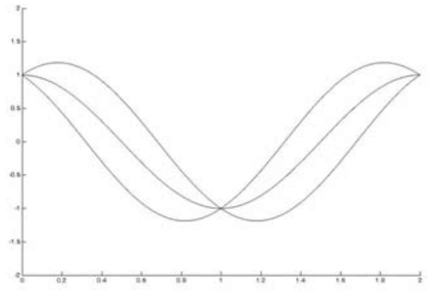
$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{e^{\mu x}-e^{\lambda x}}{\mu-\lambda}=\lim_{\mu\to\lambda}\frac{xe^{\mu x}}{1}=xe^{\lambda x}$$ 이다.

15. $L(cy+kw)=cL(y)+kL(w)$ 이면 $L(y+w)=L(y)+L(w)$ 와 $L(cy)=cL(y)$, $L(kw)=kL(w)$ 은 당연히 성립한다.

역으로 $L(y+w)=L(y)+L(w)$ 이고
$L(cy)=cL(y)$, $L(kw)=kL(w)$ 이면,
$L(cy+kw)=L(cy)+L(kw)=cL(y)+kL(w)$ 이다.
따라서 두 가지의 조건은 동치이다.

2.4 Modeling of Free Oscillations of a Mass-Spring System

1. 식 (4) $y=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$ 에서 초기조건
$y(0)=y_0$, $y'(0)=v_0$ 에 의하여 $A=y_0$, $B=\dfrac{v_0}{\omega_0}$ 이고
$y=y_0\cos\omega_0 t+\dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ 이다. $\omega_0=\pi, y_0=1$이라
하면 $y=\cos\pi t+\dfrac{v_0}{\pi}\sin\pi t$ 이다.



$t=n$ (n은 정수)일 때 $y(n)=\pm 1$ 을 v_0 값에
상관없이 지나게 된다.

2. Hook의 법칙에 의하여 $W=0.02k$이므로 용수철
상수는 $k=\dfrac{W}{0.02}=\dfrac{20}{0.02}=1000$이다.
질량은 $m=\dfrac{W}{g}=\dfrac{20}{9.8}=\dfrac{100}{49}$ 이고 $w_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=7\sqrt{10}$
이므로 $f=\dfrac{w_0}{2\pi}=\dfrac{7\sqrt{10}}{2\pi}$ 이다.

3. $f_0=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 라 하자.
(i) $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{2m}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f_0$
(ii) $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2k}{m}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sqrt{2}=\sqrt{2}f_0$
질량이 커지면 진동수는 감소한다.

4. 단진자 운동에서 운동체의 진동수(또는 1/주기)는
$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 또는 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ 로 구할 수 있다.

5. $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 이므로
(i) $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{20}{5}}=\dfrac{1}{\pi}$
(ii) $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{45}{5}}=\dfrac{3}{2\pi}$
(iii) $k=k_1+k_2=20+45=65$ 이므로
$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{65}{5}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2\pi}$

6. $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{24}$ 이므로 $k=\dfrac{24}{7}$ 이다.

7. 단진자의 접선력을 고려하면
$mL\theta''=-mg\sin\theta\approx-mg\theta$ 이므로 $mL\theta''+mg\theta=0$,
$L\theta''+g\theta=0$, $\theta''+\omega_0^2\theta=0$ $\left(\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{L}}\right)$ 이다.
따라서 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}}$ 이다.

8. y를 평형상태에서 추가로 더 내려간 깊이라고
하면 힘 평형 관계식에 의해 $my''=-\pi(0.25)^2\gamma y$ 이
성립한다. 여기서 $\gamma=9800N/m^3$, $\pi(0.25)^2 y$ 는 추가로
더 잠긴 부분의 부피를 나타낸다.
$y''+\dfrac{\pi(0.25)^2\gamma}{m}y=0$, $y''+\omega_0^2 y=0$ 이므로
$\omega_0=2\pi f=\sqrt{\dfrac{\pi(0.25)^2\gamma}{m}}$ 이다.
따라서 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\pi(0.25)^2\gamma}{m}}$ 이고 주기 $T=\dfrac{1}{f}=2$
이므로 $m=\dfrac{(0.25)^2\gamma}{\pi}=195\ kg$ 이다.
따라서 무게는 $W=mg=195\bullet 9.8=1911N$이다.

9. 문제의 조건을 모델링하면
$my''=-M$, $y''+\dfrac{M}{m}=0$ 이다.
$m=1$이고 $M=\pi(0.015)^2\bullet(2y)\bullet 9800=4.41\pi y$
이므로 $y''+4.41\pi y=0$ 이다. 따라서 $\omega_0^2=4.41\pi$,
$\omega_0=2.1\sqrt{\pi}$ 이므로 $f=\dfrac{2.1\sqrt{\pi}}{2\pi}=\dfrac{1.05}{\sqrt{\pi}}$ 이다.

10. (a) $m=1$이므로 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{9.8}=0.498$이다.
따라서 1분 동안 29.89번이다.
(b) $W=ks_0=8N$, $s_0=1cm$ 라 하자. $m=\dfrac{W}{g}$
이므로 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{W/s_0}{W/g}}=\sqrt{\dfrac{8}{8/980}}=31.30$
이다. 따라서 $y(t)=A\cos 31.30t+B\sin 31.30t$ 이다.
초기조건으로부터 $y(0)=A=0$, $y'(0)=31.30B=10$
이므로 $A=0$, $B=0.3195$ 이고
$y(t)=0.3195\sin 31.30t$ 이다.
(c) $\omega_0^2=K/I_0=13.69$, $\theta(0)=\dfrac{\pi}{6}$, $\theta'(0)=\dfrac{\pi}{9}$ 라 하자.
$\theta(t)=A\cos 3.7t+B\sin 3.7t$ 이므로
초기조건으로부터 $\theta(0)=A=\dfrac{\pi}{6}$, $\theta'(0)=3.7B=\dfrac{\pi}{9}$
이므로 $A=\dfrac{\pi}{6}$, $B=\dfrac{10\pi}{333}$ 이고
$\theta(t)=\dfrac{\pi}{6}\cos 3.7t+\dfrac{10\pi}{333}\sin 3.7t$ 이다.

11. $y(t)=c_1 e^{-(\alpha-\beta)t}+c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$ 에 초기조건을

적용하면 $y(0)=c_1+c_2=y_0$,
$y'(0)=-(\alpha-\beta)c_1-(\alpha+\beta)c_2=v_0$이다. 따라서
$c_1=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)y_0+\frac{v_0}{\beta}\right]$, $c_2=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)y_0-\frac{v_0}{\beta}\right]$
이다.

12. 과감쇄 운동방정식의 일반해는
$y=c_1e^{-(\alpha-\beta)t}+c_2e^{-(\alpha+\beta)t}$ 이므로 $y=0$이면
$e^{-2\beta t}=-\frac{c_1}{c_2}$ 이어서 $y=0$이 되는 시각은 $c_1c_2<0$ 일 때 유일하게 한번 존재하고 $c_1c_2\geq 0$일 때는 존재하지 않는다.

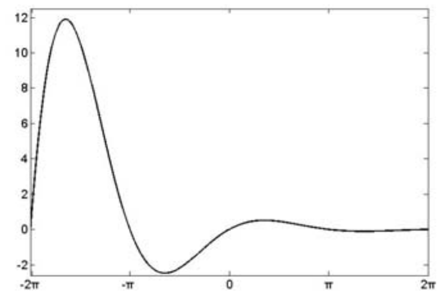
13. 식 (8)에서 $y(0)=c_1=y_0$이고, 식 (8)을 미분하면
$v_0=y_0{}'=(c_2-\alpha c_1-\alpha c_2t)e^{-\alpha t}$이므로
$v(0)=c_2-\alpha c_1=v_0$이다. 따라서 $c_2=\alpha y_0+v_0$이다.
즉, $y(t)=[y_0+(\alpha y_0+v_0)t]e^{-\alpha t}$ 이다.
(i) $\alpha=1$ 이고 $y_0=1$이므로
$y(t)=[1+(1+v_0)t]e^{-t}$ 이다.

14. 사륜차를 고려하면 각 바퀴당 하중은 $2000/4=500\,kg$이다. 임계감쇄의 경우 $k=4500\,kg/sec^2$일 때, $c^2=4mk$이므로
$c=\sqrt{4\cdot 500\cdot 4500}=3000\ kg/sec$이다.

15. $\omega^*=\frac{1}{2m}\sqrt{4mk-c^2}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}$
$=\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{c^2}{4mk}}=\omega_0\sqrt{1-\frac{c^2}{4mk}}$
$\approx\omega_0\left(1-\frac{c^2}{8mk}\right)$
예제 2번에서 $c=10\,kg/sec,\ m=10kg,\ k=90Nt/m$
이므로 $\omega^*=\sqrt{\frac{90}{10}}\left(1-\frac{10^2}{8\cdot 10\cdot 90}\right)=2.9583$ 이다.
이항정리에 의한 근사식 계산값이 실제 계산값 2.96에 거의 근접한다.

16. $y(t)=e^{-\alpha t}(A\cos\omega^*t+B\sin\omega^*t)=c^*e^{-\alpha t}\sin(\omega^*t+\beta)$,
$\alpha=\frac{c}{2m}$, $c^*=\sqrt{A^2+B^2}$, $\beta=\arctan\frac{A}{B}$ 이므로
$y'(t)=c^*e^{-\alpha t}\,[w^*\cos(\omega^*t+\beta)-\alpha\sin(\omega^*t+\beta)]$ 이다.
$y'=0$일 때 $\tan(\omega^*t+\beta)=\frac{\omega^*}{\alpha}$,
$\omega^*t+\beta=n\pi+\arctan\frac{\omega^*}{\alpha}$,
$t=\frac{\pi}{\omega^*}n+\frac{1}{\omega^*}\left(\arctan\frac{\omega^*}{\alpha}-\beta\right)$.
따라서 극값이 $\frac{\pi}{\omega^*}$마다 존재하므로 극대값은 $\frac{2\pi}{\omega^*}$마다 존재한다.

17. $y=e^{-t/2}\sin t$ 이므로 $y'=e^{-t/2}\left(\cos t-\frac{1}{2}\sin t\right)$ 이다.
$y'=0$일 때 $\tan t=2$이므로
$t=1.1071+n\pi\,(n=0,1,2,\cdots)$ 이다.
$t=1.1071+(2n+1)\pi\,(n=0,1,2,\cdots)$일 때 극소이며
$t=1.1071+2n\pi\,(n=0,1,2,\cdots)$일 때 극대이다.



18. 문제 17번에서 극값은 매 $\frac{\pi}{\omega^*}$마다 존재하므로
$t_{n+1}=t_n+\frac{\pi}{\omega^*}$ 이고 문제 11번에서 sine과 cosine의 주기는 $\frac{2\pi}{\omega^*}$이므로 진폭비의 표현을 위해서는
$t_{n+2}=t_n+\frac{2\pi}{\omega^*}$ 이다. 진폭비를 표시하면
$\frac{e^{-\alpha t_n}}{e^{-\alpha t_{n+2}}}=e^{\frac{2\pi\alpha}{\omega^*}}$ 이다. 따라서 진폭비의 자연대수값
$\triangle=\frac{2\pi\alpha}{\omega^*}$ 이다.
$y''+4y'+13y=0$에서
특성방정식이 $\lambda^2+4\lambda+13=0$을 풀면 $\lambda=-2\pm 3i$ 이다. 즉, $\alpha=2$, $w^*=3$이므로 $\triangle=\frac{4\pi}{3}$ 이다.

19. 극대치 주기가 $3sec$이므로 $15cycle$은 $45sec$에 해당한다. 따라서 $\frac{e^{-\alpha(t_0+45)}}{e^{-\alpha t_0}}=e^{-45\alpha}=\frac{1}{2}$ 이므로
$\alpha=\frac{\ln 2}{45}$ 이고 $c=2m\alpha=2\times 1.5\times\frac{\ln 2}{45}=0.0462$ 이다.

2.5 Euler-Cauchy Equations

1. 식 (2)이 중근을 갖는다면 $(a-1)^2-4b=0$이다.
$y=x^{(1-a)/2}\ln x$라 하면
$y'=\left(\frac{1-a}{2}\ln x+1\right)x^{(-1-a)/2}$이고
$y'=\left(\frac{-1+a^2}{4}\ln x+\frac{1-a}{2}+\frac{-1-a}{2}\right)x^{(-3-a)/2}$이므로
이를 주어진 방정식에 대입하면 만족하므로
$y=x^{(1-a)/2}\ln x$는 주어진 방정식의 해이다.
m_1과 m_2가 식 (2)의 서로 다른 실근이라고 하자.
$y=x^{m_1}\ln x$라 하면 $y'=m_1x^{m_1-1}\ln x+x^{m_1-1}$이고
$y'=m_1(m_1-1)x^{m_1-2}\ln x+m_1x^{m_1-2}+(m_1-1)x^{m_1-2}$
이므로 이를 주어진 방정식에 대입하면
$x^2y''+axy'+by=(2m_1-1+a)x^{m_1}\neq 0$이다.
따라서 $y=x^{m_1}\ln x$은 주어진 방정식의 해가 아니다.

2. $m^2-m-2=(m-2)(m+1)=0$ 을 풀면 $m=2,-1$ 이므로 일반해는 $y=c_1x^2+c_2x^{-1}$ 이다.

3. 주어진 방정식을 정리하면 $x^2y''+4.6xy'+3.24y=0$ 이다. $m^2+3.6m+3.24=0$ 을 풀면 $m=-1.8$(중근) 이므로 일반해는 $y=c_1x^{-1.8}+c_2x^{-1.8}\ln x$ 이다.

4. $m^2+3m=0$ 을 풀면 $m=0,-3$ 이므로 일반해는 $y=c_1+c_2x^{-3}$ 이다.

5. 주어진 방정식을 정리하면 $x^2y''+\dfrac{5}{4}y=0$ 이다.
$m^2-m+\dfrac{5}{4}=0$ 을 풀면 $m=\dfrac{1}{2}\pm i$ 이므로
일반해는 $y=x^{1/2}(c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x))$ 이다.

6. $m^2-0.3m-0.1=0$ 을 풀면 $m=0.5,-0.2$ 이므로 일반해는 $y=c_1x^{0.5}+c_2x^{-0.2}$ 이다.

7. $m^2-5m-6=0$ 을 풀면 $m=6,\ -1$ 이므로 일반해는 $y=c_1x^6+c_2x^{-1}$ 이다.

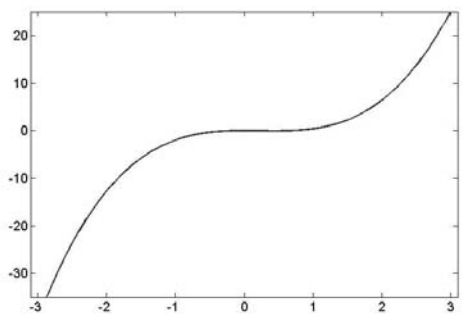
8. $m^2-4m+4=0$ 을 풀면 $m=2$(중근)이므로 일반해는 $y=c_1x^2+c_2x^2\ln x$ 이다.

9. $m^2-1.2m+0.36=0$ 을 풀면 $m=0.6$(중근)이므로 일반해는 $y=c_1x^{0.6}+c_2x^{0.6}\ln x$ 이다.

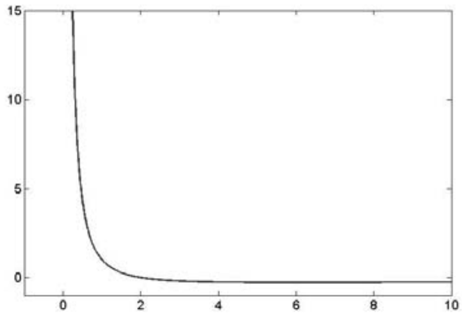
10. $m^2-2m+5=0$ 을 풀면 $m=1\pm 2i$ 이므로 일반해는 $y=x\left[c_1\cos(2\ln x)+c_2\sin(2\ln x)\right]$ 이다.

11. $m^2-4m+10=0$ 을 풀면 $m=2\pm\sqrt{6}\,i$ 이므로 일반해는 $y=x^2\left[c_1\cos(\sqrt{6}\ln x)+c_2\sin(\sqrt{6}\ln x)\right]$ 이다.

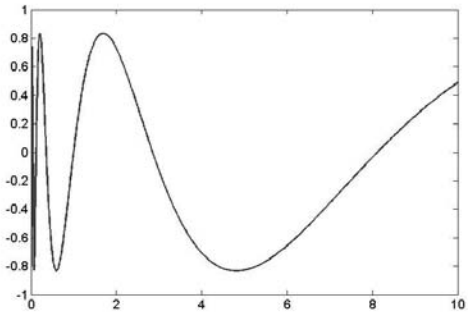
12. $m^2-5m+6=0$ 을 풀면 $m=2,\ 3$ 이므로
일반해는 $y=c_1x^2+c_2x^3$ 이다. 초기조건에 의하여
$y(1)=c_1+c_2=0.4,\ y'(1)=2c_1+3c_2=0$ 이므로
$c_1=-0.8,\ c_2=1.2$ 이다.
따라서 특수해는 $y=-0.8x^2+1.2x^3$ 이다.



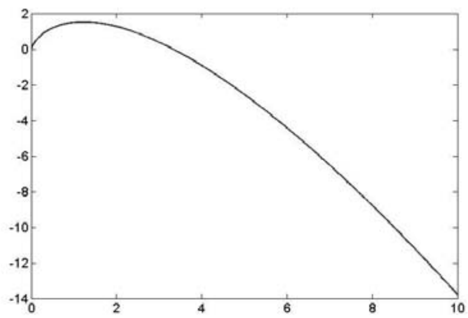
13. $m^2+2m+0.75=0$ 을 풀면 $m=-0.5,-1.5$ 이므로
일반해는 $y=c_1x^{-0.5}+c_2x^{-1.5}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(1)=c_1+c_2=1$,
$y'(1)=-0.5c_1-1.5c_2=-2.5$ 이므로 $c_1=-1,\ c_2=2$
이다. 따라서 특수해는 $y=-x^{-0.5}+2x^{-1.5}$ 이다.



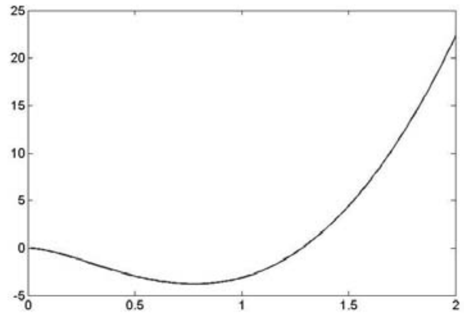
14. $m^2+9=0$ 을 풀면 $m=\pm 3i$ 이므로
일반해는 $y=c_1\cos(3\ln x)+c_2\sin(3\ln x)$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(1)=c_1=0,\ y'(1)=3c_2=2.5$
이므로 $c_1=0,\ c_2=\dfrac{2.5}{3}$ 이다.
따라서 특수해는 $y=\dfrac{2.5}{3}\sin(3\ln x)$ 이다.



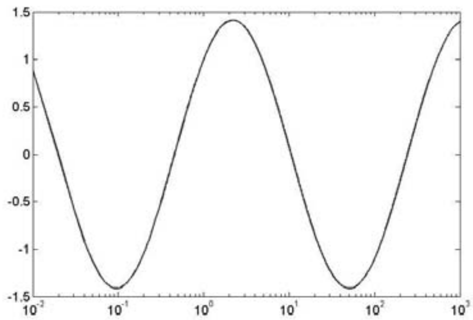
15. $m^2-2m+1=0$ 을 풀면 $m=1$(중근)이므로
일반해는 $y=c_1x+c_2x\ln x$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(1)=c_1=1.5$,
$y'(1)=c_1+c_2=0.25$ 이므로 $c_1=1.5,\ c_2=-1.25$ 이다.
따라서 특수해는 $y=1.5x-1.25x\ln x$ 이다.



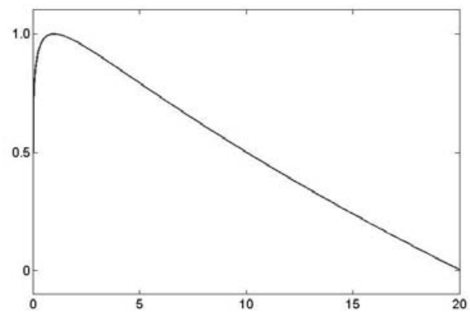
16. $m^2-4m+4=0$ 을 풀면 $m=2$(중근)이므로
일반해는 $y=c_1x^2+c_2x^2\ln x$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(1)=c_1=-\pi$,
$y'(1)=2c_1+c_2=2\pi$ 이므로 $c_1=-\pi,\ c_2=4\pi$ 이다.
따라서 특수해는 $y=-\pi x^2+4\pi x^2\ln x$ 이다.



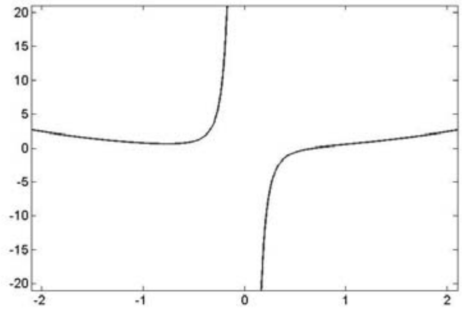
17. $m^2+1=0$을 풀면 $m=\pm i$이므로
일반해는 $y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$이다.
초기조건에 의하여 $y(1)=c_1=1,\ y'(1)=c_2=1$
이므로 특수해는 $y=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)$이다.



18. $m^2-\dfrac{2}{3}m+\dfrac{1}{9}=0$을 풀면 $m=\dfrac{1}{3}$(중근)이므로
일반해는 $y=c_1x^{1/3}+c_2x^{1/3}\ln x$이다.
초기조건에 의하여 $y(1)=c_1=1$,
$y'(1)=\dfrac{1}{3}c_1+c_2=0$이므로 $c_1=1,\ c_2=-\dfrac{1}{3}$이다.
따라서 특수해는 $y=x^{1/3}-\dfrac{1}{3}x^{1/3}\ln x$이다.



19. $m^2+m-6=0$을 풀면 $m=-3,\ 2$이므로
일반해는 $y=c_1x^{-3}+c_2x^2$이다. 초기조건에 의하여
$y(1)=c_1+c_2=0.5,\ y'(1)=-3c_1+2c_2=1.5$이므로
$c_1=-0.1,\ c_2=0.6$이다.
따라서 특수해는 $y=-0.1x^{-3}+0.6x^2$이다.



20. (a) y_1이 Euler-Cauchy 방정식 $x^2y''+axy'+by=0$의 해라 하자. $y_2=uy_1$이라 하면
$y_2'=u'y_1+uy_1',\ y_2''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$이다. 즉,

$$\begin{aligned}&x^2y''+axy'+by\\&=(x^2y_1''+axy_1'+by_1)u+(2x^2y_{1'}+axy_1)u'+x^2y_1u''\\&=(2x^2y_{1'}+axy_1)u'+x^2y_1u''=0\end{aligned}$$

이다. $\dfrac{u''}{u'}=-\dfrac{2x^2y_1'+axy_1}{x^2y_1}=-2\dfrac{y_1'}{y_1}-a\dfrac{1}{x}$이므로

$u'=\dfrac{1}{y_1^2}x^{-a},\ u=\displaystyle\int\dfrac{1}{y_1^2}x^{-a}dx$이다.

따라서 $y_2=y_1\displaystyle\int\dfrac{1}{y_1^2}x^{-a}dx$이다.

(b) x^{m+s}과 x^m이 해인 Euler-Cauchy 방정식은
$x^2y''+(1-2m-s)xy'+m(m+s)y=0$이다.
따라서 $\dfrac{x^{m+s}-x^m}{x}$도 위의 방정식의 해이다.
$s\to 0$이면 방정식은 $x^2y''+(1-2m)xy'+m^2y=0$으로 변형되고 보조방정식은 이중근 m을 갖는다.

$\displaystyle\lim_{s\to 0}\dfrac{x^{m+s}-x^m}{x}=\lim_{s\to 0}\dfrac{x^{m+s}\ln|x|}{1}=x^m\ln|x|$이다.

(c) $y=x^m\ln x,\ m=\dfrac{1-a}{2}$라 하자.
$y'=mx^{m-1}\ln x+x^{m-1}$,
$y''=m(m-1)x^{m-2}\ln x+mx^{m-2}+(m-1)x^{m-2}$
이므로

$$\begin{aligned}&x^2y''+axy'+by\\&=(2m-1+a)x^m+\{m(m-1)+am+b\}x^m\ln x=0\end{aligned}$$

이다. 따라서 $y=x^m\ln x$는 Euler-Cauchy 방정식의 해이다.

(d) $x=e^t$으로 치환하면, $dx=e^tdt$이고

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{e^t}\dfrac{dy}{dt}$,

$$\begin{aligned}y''&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}\right)\\&=\frac{1}{e^t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{e^t}\left(-\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{e^t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\end{aligned}$$

이므로

$$x^2y''+axy'+by=-\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by$$
$$=\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=0.$$

(e) 특성방정식이 중근 λ를 가질 때 두 번째 기저는 $y=te^{\lambda t}$이다. $t=\ln|x|$이므로 $y=e^{\lambda\ln|x|}\ln|x|=x^{\lambda}\ln|x|$이다.

2.6 Existence and Uniqueness of Solutions. Wronskian

1. $W=y_1y_2'-y_2y_1'$에서

(a) $y_1\neq0$이면

$$W=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{{y_1}^2}{y_1}^2=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'{y_1}^2\text{이다.}$$

(b) $y_2\neq0$이면

$$W=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{{y_2}^2}{y_2}^2$$
$$=-\frac{y_2y_1'-y_1y_2'}{{y_2}^2}{y_2}^2=-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'{y_2}^2$$

이다.

2. $W=e^{4.0x}\left(-1.5e^{-1.5x}\right)-e^{-1.5x}\left(4.0e^{4.0x}\right)=-5.5e^{2.5x}$

$\dfrac{e^{4.0x}}{e^{-1.5x}}=e^{5.5x}\neq const$ 이므로 일차독립이다.

Theorem 2에 의하여 $W\neq0$이므로 일차독립이다.

3. $W=e^{-0.5x}\left(-2.5e^{-2.5x}\right)-e^{-2.5x}\left(-0.5e^{-0.5x}\right)=-2e^{-3x}$

$\dfrac{e^{-0.5x}}{e^{-2.5x}}=e^{2x}\neq const$ 이므로 일차독립이다.

Theorem 2에 의하여 $W\neq0$이므로 일차독립이다.

4. $W=2x\left(-\dfrac{1}{4x^2}\right)-\dfrac{1}{4x}(2)=-\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{2x}{1/4x}=8x^2\neq const$ 이므로 일차독립이다.

Theorem 2에 의하여 $W\neq0$이므로 일차독립이다.

5. $W=x^3(2x)-x^2(3x^2)=-x^4$

$\dfrac{x^3}{x^2}=x\neq const$ 이므로 일차독립이다.

Theorem 2에 의하여 $W\neq0$이므로 일차독립이다.

6. $W=e^{-x}\cos wx(-e^{-x}\sin wx+we^{-x}\cos wx)$
$\quad -e^{-x}\sin wx(-e^{-x}\cos wx-we^{-x}\sin wx)$
$\quad =we^{-2x}$

$\dfrac{e^{-x}\cos wx}{e^{-x}\sin wx}=\cot wx\neq const$ 이므로 일차독립이다.

Theorem 2에 의하여 $W\neq0$이므로 일차독립이다.

7. $W=\cosh\dfrac{a}{2}x\left(\dfrac{a}{2}\cosh\dfrac{a}{2}x\right)-\sinh\dfrac{a}{2}x\left(\dfrac{a}{2}\sinh\dfrac{a}{2}x\right)=\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{\cosh\frac{a}{2}}{\sinh\frac{a}{2}}=\coth\dfrac{a}{2}\neq const$ 이므로 일차독립이다.

Theorem 2에 의하여 $W\neq0$이므로 일차독립이다.

8. $W=x^k\cos(\ln x)\left[kx^{k-1}\sin(\ln x)+x^{k-1}\cos(\ln x)\right]$
$\quad -x^k\sin(\ln x)\left[kx^{k-1}\cos(\ln x)-x^{k-1}\sin(\ln x)\right]$
$\quad =x^{2k-1}$

$\dfrac{x^k\cos(\ln x)}{x^k\sin(\ln x)}=\cot(\ln x)\neq const$ 이므로 일차독립이다.

Theorem 2에 의하여 $W\neq0$이므로 일차독립이다.

9. (a) $\lambda=\pm5i$이므로 $\lambda^2+25=0$이다.
따라서 미분방정식은 $y''+25y=0$이다.

(b) $W=\cos5x(5\cos5x)-\sin5x(-5\sin5x)=5\neq0$
이므로 일차독립이다.

(c) 초기조건에 의하여 $y(0)=c_1=3$,
$y'(0)=5c_2=-5$ 이므로 $c_1=3$, $c_2=-1$이다.
따라서 특수해는 $y=3\cos5x-\sin5x$이다.

10. (a) $m=m_1$, m_2이므로
$m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2=0$이다.
따라서 미분방정식은
$x^2y''-(m_1+m_2-1)xy'+m_1m_2y=0$이다.

(b) $m_1\neq m_2$이면
$W=x^{m_1}\left(m_2x^{m_2-1}\right)-x^{m_2}\left(m_1x^{m_1-1}\right)$
$\quad=(m_2-m_1)x^{m_1+m_2-1}\neq0$
이므로 일차독립이다.

(c) 초기조건에 의하여 $y(1)=c_1+c_2=-2$,
$y'(1)=m_1c_1+m_2c_2=2m_1-4m_2$ 이므로
$c_1=2$, $c_2=-4$이다.
따라서 특수해는 $y=2x^{m_1}-4x^{m_2}$이다.

11. (a) $\lambda=-2.5\pm0.5i$이므로 $\lambda^2+5\lambda+6.5=0$이다.
따라서 미분방정식은 $y''+5y'+6.5y=0$이다.

(b) $W=e^{-2.5x}\cos0.5x(-2.5e^{-2.5x}\sin0.5x$
$\quad +0.5e^{-2.5x}\cos0.5x)$
$\quad -e^{-2.5x}\sin0.5x(-2.5e^{-2.5x}\cos0.5x$
$\quad -0.5e^{-2.5x}\sin0.5x)$
$\quad =0.5e^{-5x}$
이므로 일차독립이다.

(c) 초기조건에 의하여 $y(0)=c_1=1.5$,
$y'(0)=-2.5c_1+0.5c_2=-2.0$ 이므로
$c_1=1.5$, $c_2=3.5$이다. 따라서 특수해는
$y=1.5e^{-2.5x}\cos0.5x+3.5e^{-2.5x}\sin0.5x$이다.

12. (a) $m=2$이므로 $m^2-4m+4=0$이다.
따라서 미분방정식은 $x^2y''-3xy'+4y=0$이다.

(b) $W=x^2(2x\ln x+x)-x^2\ln x(2x)=x^3\neq0$
이므로 일차독립이다.

(c) 초기조건에 의하여 $y(1)=c_1=4$,
$y'(1)=2c_1+c_2=6$ 이므로 $c_1=4$, $c_2=-2$이다.
따라서 특수해는 $y=4x^2-2x^2\ln x$이다.

13. (a) $\lambda=0$, 3이므로 $\lambda^2-3\lambda=0$이다.
따라서 미분방정식은 $y''-3y'=0$이다.

(b) $W=1\left(3e^{3x}\right)-e^{3x}(0)=3e^{3x}\neq0$

이므로 일차독립이다.

(c) 초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=2$,

$y'(0)=3c_2=-1$ 이므로 $c_1=\frac{7}{3}$, $c_2=-\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 특수해는 $y=\frac{7}{3}-\frac{1}{3}e^{3x}$ 이다.

14. (a) $\lambda=-k\pm\pi i$이므로 $\lambda^2+2k\lambda+k^2+\pi^2=0$이다.

즉, 미분방정식은 $y''+2ky'+(k^2+\pi^2)y=0$이다.

(b) $W=e^{-kx}\cos\pi x(-ke^{-kx}\sin\pi x+\pi e^{-kx}\cos\pi x)$
$-e^{-kx}\sin\pi x(-ke^{-kx}\cos wx-\pi e^{-kx}\sin\pi x)$
$=\pi e^{-2kx}\neq 0$

이므로 일차독립이다.

(c) 초기조건에 의하여 $y(0)=c_1=1$,

$y'(0)=-kc_1+\pi c_2=-k-\pi$ 이므로 $c_1=1$, $c_2=-1$ 이다. 따라서 특수해는

$y=e^{-kx}\cos\pi x-e^{-kx}\sin\pi x$이다.

15. $\cosh 1.8x=\frac{e^{1.8x}+e^{-1.8x}}{2}$, $\sinh 1.8x=\frac{e^{1.8x}-e^{-1.8x}}{2}$

(a) $\lambda=1.8$, -1.8이므로 $\lambda^2-3.24=0$이다.

따라서 미분방정식은 $y''-3.24y=0$이다.

(b) $W=\cosh 1.8x(1.8\cosh 1.8x)-\sinh 1.8x(1.8\sinh 1.8x)$
$=1.8\neq 0$

이므로 일차독립이다.

(c) 초기조건에 의하여 $y(0)=c_1=14.20$,

$y'(0)=1.8c_2=16.38$ 이므로 $c_1=14.2$, $c_2=9.1$이다.

즉, 특수해는 $y=14.2\cosh 1.8x+9.1\sinh 1.8x$이다.

16. (a) (a) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$, (b) $y=A\cosh x+B\sinh x$

$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로

$c_1=\frac{A+B}{2}$, $c_2=\frac{A-B}{2}$ 이다.

(b) y_1 과 y_2 가 방정식의 해라고 가정하자.

만약 $y_1(x_0)=0$ 이고 $y_2(x_0)=0$ 이면 $x=x_0$ 인 점에서 $W=0$ 이다. 따라서 구간의 모든 점에서 $W\equiv 0$ 이고, y_1 과 y_2 는 일차종속이다. 이는 y_1 과 y_2 가 기저를 구성한다는 사실에 모순이 된다.

따라서 기저인 두개의 해는 같은 점에서 0이 될 수 없다.

(c) 만약 y_1 과 y_2 가 같은 점 $x=x_0$ 에서 최대값 또는 최소값을 갖는다면 $y_1'(x_0)=0$ 이고 $y_2'(x_0)=0$ 이다. 즉, $x=x_0$ 인 점에서 $W=0$ 이고 y_1 과 y_2 는 일차종속이다. 이는 y_1 과 y_2 가 기저를 구성한다는 사실에 모순이 된다.

따라서 기저인 두개의 해는 같은 점에서 최대값 또는 최소값을 가질 수 없다.

(d) $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{y_2'y_1-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{W}{y_1^2}$ 이다.

(e) $-1<x<1$ 인 x 에 대하여

$0=c_1y_1+c_2y_2=\begin{cases}c_1x^3,\ x\geq 0\\ c_2x^3,\ x<0\end{cases}$ 이면,

$c_1=0$ 이고 $c_2=0$ 이다.

따라서 y_1 과 y_2 는 일차독립이다.

$x\geq 0$ 이면, $W=x^3\cdot 0-0\cdot 3x^2=0$ 이고,

$x<0$ 이면, $W=0\cdot 3x^2-x^3\cdot 0=0$ 이다.

따라서 $W=0$ 이다.

y_1 과 y_2 가 만족하는 Euler-Cauchy 방정식은 보조방정식 $m(m-3)=m(m-1)-2m=0$ 을 갖는다. 따라서 Euler-Cauchy 방정식은 $x^2y''-2xy'=0$ 이다.

표준형으로 고치면 $y''-\frac{2}{x}y'=0$ 이고 $p(x)=-\frac{2}{x}$, $q(x)=0$ 이다. $p(x)$ 가 $x=0$ 에서 불연속이므로 정리 2의 조건을 만족하지 않는다.

따라서 정리 2에 모순된 고 볼 수 없다.

(f) $y_1''+py_1'+qy_1=0$ 이고 $y_2''+py_2'+qy_2=0$ 이므로 q를 소거하면,

$-y_1''y_2+y_1y_2''+p(-y_1'y_2+y_1y_2')=0$ 이다.

$W=y_1y_2'-y_2y_1'$ 이므로

$W'=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_2'y_1'-y_2y_1''=y_1y_2''-y_2y_1''$

이다.

$W'+pW=0$, $\frac{W'}{W}=p$, $\ln|W|=-\int_{x_0}^{x}p(t)dt+c^*$

이므로 $W=c\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt\right)$ 이다.

문제 6번에서 $e^{-x}\cos wx$, $e^{-x}\sin wx$ 을 해로 갖는 방정식이 $y''+2y'+(1+w^2)y=0$ 이므로 $p(x)=2$ 이다. $W=c\exp\left(-\int_0^x 2dt\right)=ce^{-2x}$ 이다.

$W(0)=y_1(0)y_2'(0)-y_2(0)y_1'(0)$
$=1\cdot w-0\cdot(-1)=w$

이므로 $W(0)=c=w$ 이다. 따라서 $W=we^{-2x}$ 이다.

2.7 Nonhomogeneous ODEs

1. 특성방정식 $\lambda^2+5\lambda+6=0$ 을 풀면, $\lambda=-2,-3$ 이므로 $y_h=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$ 이다.

미정계수법에 의하여 $y_p=Ae^{-x}$ 라 하자.

$y_p'=-Ae^{-x}$, $y_p''=Ae^{-x}$ 이므로 $A=1$이다.

따라서 $y_p=e^{-x}$ 이므로 일반해는

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}+e^{-x}$ 이다.

2. 특성방정식 $10\lambda^2+50\lambda+576=0$ 을 풀면,

$\lambda=-1.8,-3.2$ 이므로 $y_h=c_1e^{-1.8x}+c_2e^{-3.2x}$ 이다.

미정계수법에 의하여 $y_p=A\cos x+B\sin x$ 라 하자.

$y_p'=-A\sin x+B\cos x$, $y_p''=-A\cos x-B\sin x$ 이므로 $A=0.0100$, $B=0.0105$ 이다. 따라서

$y_p=0.0100\cos x+0.0105\sin x$ 이므로 일반해는
$y=c_1e^{-1.8x}+c_2e^{-3.2x}+0.0100\cos x+0.0105\sin x$ 이다.

3. 특성방정식 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ 을 풀면, $\lambda=-1,-2$ 이므로 $y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p=Ax^2+Bx+C$라 하자. $y_p{}'=2Ax+B$, $y_p{}''=2A$ 이므로 $A=6$, $B=-18$, $C=21$이다. 따라서 $y_p=6x^2-18x+21$ 이므로 일반해는
$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+6x^2-18x+21$ 이다.

4. 특성방정식 $\lambda^2-4=0$ 을 풀면, $\lambda=2,-2$ 이므로 $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=A\cos\pi x+B\sin\pi x$ 라 하자. $y_p{}'=-a\pi\sin\pi x+b\pi\cos\pi x$,
$y_p{}''=-a\pi^2\cos\pi x-b\pi^2\sin\pi x$ 이므로
$A=\dfrac{-8}{\pi^2+4}$, $B=0$이다.
따라서 $y_p=-\dfrac{8}{\pi^2+4}\cos\pi x$ 이므로 일반해는
$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\dfrac{8}{\pi^2+4}\cos\pi x$ 이다.

5. 특성방정식 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 을 풀면, $\lambda=-2$ (중근) 이므로 $y_h=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p=Ae^{-x}\cos x+Be^{-x}\sin x$ 라 하자.
$y_p{}'=-Ae^{-x}(\cos x+\sin x)-Be^{-x}(\sin x-\cos x)$,
$y_p{}''=2Ae^{-x}\sin x-2Be^{-x}\cos x$ 이므로 $A=0$, $B=\dfrac{1}{2}$ 이다. 따라서 $y_p=\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin x$ 이므로
일반해는 $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin x$ 이다.

6. $\lambda^2+\lambda+\pi^2+\dfrac{1}{4}=0$ 을 풀면, $\lambda=-\dfrac{1}{2}\pm\pi i$ 이므로 $y_h=e^{-x/2}(c_1\cos\pi x+c_2\sin\pi x)$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p=Axe^{-x/2}\cos\pi x+Bxe^{-x/2}\sin\pi x$ 라 하자.

$$y_p{}'=\left(A-\frac{A}{2}x+B\pi x\right)e^{-x/2}\cos\pi x+\left(-A\pi x+B-\frac{B}{2}x\right)e^{-x/2}\sin\pi x,$$

$$y_p{}''=\left(-A+2B\pi+\frac{A}{4}x-B\pi x-A\pi^2x\right)e^{-x/2}\cos\pi x+\left(-B-2A\pi+\frac{B}{4}x+A\pi x-B\pi^2x\right)e^{-x/2}\sin\pi x$$

이므로 $A=-\dfrac{1}{2\pi}$, $B=0$ 이다.
따라서 $y_p=-\dfrac{1}{2\pi}xe^{-x/2}\cos\pi x$ 이므로 일반해는
$y=e^{-x/2}(c_1\cos\pi x+c_2\sin\pi x)-\dfrac{1}{2\pi}xe^{-x/2}\cos\pi x$ 이다.

7. 특성방정식 $\lambda^2-4\lambda+3=0$ 을 풀면, $\lambda=1,\ 3$ 이므로 $y_h=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p=Axe^{x}+Bx+C$라 하자. $y_p{}'=Ae^{x}+Axe^{x}+B$,
$y_p{}''=2Ae^{x}+Axe^{x}$ 이므로 $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{3}{2}$, $C=-2$ 이다. 따라서 $y_p=-\dfrac{1}{2}xe^{x}-\dfrac{3}{2}x-2$이므로
일반해는 $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}-\dfrac{1}{2}xe^{x}-\dfrac{3}{2}x-2$이다.

8. 특성방정식 $\lambda^2+9=0$ 을 풀면, $\lambda=\pm3i$ 이므로 $y_h=c_1\cos3x+c_2\sin3x$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p=A\cos x+B\sin x+Cx\cos3x+Dx\sin3x$ 라 하자.

$$y_p{}'=-A\sin x+B\cos x+C(\cos3x-3x\sin3x)+D(\sin3x+3x\cos3x),$$

$$y_p{}''=-A\cos x-B\sin x+C(-6\sin3x-9x\cos3x)+D(6\cos3x-9x\sin3x)$$

이므로 $A=\dfrac{1}{8}$, $B=0$, $C=0$, $D=\dfrac{1}{18}$ 이다.
따라서 $y_p=\dfrac{1}{8}\cos x+\dfrac{1}{18}x\sin3x$ 이므로 일반해는
$y=c_1\cos3x+c_2\sin3x+\dfrac{1}{8}\cos x+\dfrac{1}{18}x\sin3x$ 이다.

9. 특성방정식 $\lambda^2-16=0$ 을 풀면, $\lambda=4,-4$ 이므로 $y_h=c_1e^{4x}+c_2e^{-4x}$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=Axe^{4x}+Be^{x}$ 라 하자.
$y_p{}'=Ae^{4x}+4Axe^{4x}+Be^{x}$,
$y_p{}''=8Ae^{4x}+16Axe^{4x}+Be^{x}$ 이므로 $A=1.2$, $B=-2$ 이다. 따라서 $y_p=2.4xe^{4x}-4e^{x}$ 이므로 일반해는
$y=c_1e^{4x}+c_2e^{-4x}+1.2xe^{4x}-2e^{x}$ 이다.

10. 특성방정식 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ 을 풀면, $\lambda=-1$(중근) 이므로 $y_h=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ 이다.
미정계수법에 의하여
$y_p=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$ 라 하자.
$y_p{}'=(A+Cx+D)\cos x+(-Ax-B+C)\sin x$,
$y_p{}''=(-Ax-B+2c)\cos x+(-2A-cx-D)\sin x$
이므로 $A=-1$, $B=1$, $C=0$, $D=1$이다. 따라서 $y_p=(-x+1)\cos x+\sin x$ 이므로 일반해는
$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+(-x+1)\cos x+\sin x$ 이다.

11. 특성방정식 $\lambda^2+4=0$ 을 풀면, $\lambda=\pm2i$ 이므로 $y_h=c_1\cos2x+c_2\sin2x$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p=Ax^2+Bx+C$라 하자. $y_p{}'=2Ax+B$,
$y_p{}''=2A$ 이므로 $A=2$, $B=0$, $C=-1$이다.
따라서 $y_p=2x^2-1$ 이므로 일반해는
$y=c_1\cos2x+c_2\sin2x+2x^2-1$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1-1=-3$, $y'(0)=2c_2=0$ 이므로 $c_1=-2$, $c_2=0$이다.
따라서 특수해는 $y=-2\cos2x+2x^2-1$ 이다.

12. 특성방정식 $\lambda^2+4=0$ 을 풀면, $\lambda=\pm2i$ 이므로 $y_h=c_1\cos2x+c_2\sin2x$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p=Ax\cos2x+Bx\sin2x$ 라 하자.

$y_p' = (A+2Bx)\cos 2x + (-2Ax+B)\sin 2x$,

$y_p'' = (-4Ax+4B)\cos 2x + (-4A-4Bx)\sin 2x$ 이므로 $A=3$, $B=0$ 이다. 따라서 $y_p = 3x\cos 2x$ 이므로 일반해는 $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 3x\cos 2x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 = 1.8$, $y'(0) = 2c_2 + 3 = 5$ 이므로 $c_1 = 1.8$, $c_2 = 1$ 이고 특수해는 $y = 1.8\cos 2x + \sin 2x + 3x\cos 2x$ 이다.

13. 특성방정식 $8\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$ 을 풀면, $\lambda = \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$ 이므로 $y_h = c_1 e^{x/4} + c_2 e^{x/2}$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p = A\cosh x + B\sinh x$ 라 하자.

$y_p' = A\sinh x + B\cosh x$, $y_p'' = A\cosh x + B\sinh x$ 이므로 $A = 1.2$, $B = 0.8$ 이다.

따라서 $y_p = 1.2\cosh x + 0.8\sinh x$ 이므로 일반해는 $y = c_1 e^{x/4} + c_2 e^{x/2} + 1.2\cosh x + 0.8\sinh x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + c_2 + 1.2 = 0.2$,

$y'(0) = \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + 0.8 = 0.05$ 이므로 $c_1 = 1$, $c_2 = -2$ 이고 특수해는 $y = e^{x/4} - 2e^{x/2} + 1.2\cosh x + 0.8\sinh x$ 이다.

14. 특성방정식 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -3$ (중근) 이므로 $y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p = Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x$ 라 하자.

$y_p' = -Ae^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x) - Be^{-x}(\sin 2x - 2\cos 2x)$,

$y_p'' = (4A-3B)e^{-x}\sin 2x - (3A+4B)e^{-x}\cos 2x$ 이므로 $A=0$, $B = \frac{1}{8}$ 이다. 따라서 $y_p = \frac{1}{8}e^{-x}\sin 2x$ 이므로 일반해는 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + \frac{1}{8}e^{-x}\sin 2x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 = 1$,

$y'(0) = -3c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = -1$ 이므로 $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{7}{4}$ 이고 특수해는 $y = \left(1 + \frac{7}{4}x\right)e^{-3x} + \frac{1}{8}e^{-x}\sin 2x$ 이다.

15. $m^2 - 4m + 3 = 0$ 을 풀면 $m = 1, 3$ 이므로 일반해는 $y_h = c_1 x + c_2 x^3$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p = A\ln x + B$ 라 하자. $y_p' = \frac{A}{x}$, $y_p'' = -\frac{A}{x^2}$ 이므로 $A = 1$, $B = 0$ 이다. 따라서 $y_p = \ln x$ 이므로 일반해는 $y = c_1 x + c_2 x^3 + \ln x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(1) = c_1 + c_2 = 0$,

$y'(1) = c_1 + 3c_2 + 1 = 1$ 이므로 $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ 이고 특수해는 $y = \ln x$ 이다.

16. $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ 을 풀면, $\lambda = 0,\ 2$ 이므로 $y_h = c_1 + c_2 e^{2x}$ 이다. 미정계수법에 의하여 $y_p = Axe^{2x} + Be^{-2x}$ 라 하자.

$y_p' = Ae^{2x}(1+2x) - 2Be^{-2x}$,

$y_p'' = Ae^{2x}(4+4x) + 4Be^{-2x}$ 이므로 $A = 3$, $B = -0.5$ 이다. 따라서 $y_p = 3xe^{2x} - 0.5e^{-2x}$ 이므로 일반해는 $y = c_1 + c_2 e^{2x} + 3xe^{2x} - 0.5e^{-2x}$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + c_2 - 0.5 = -1$,

$y'(0) = 2c_2 + 3 + 1 = 6$ 이므로 $c_1 = -1.5$, $c_2 = 1$ 이고 특수해는 $y = -1.5 + e^{2x} + 3xe^{2x} - 0.5e^{-2x}$ 이다.

17. $\lambda^2 + 0.4\lambda + 0.4 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -0.2 \pm 0.6i$ 이므로 $y_h = e^{-0.2x}(c_1\cos 0.6x + c_2\sin 0.6x)$ 이다.

미정계수법에 의하여 $y_p = Ae^{0.25x}$ 라 하자.

$y_p' = 0.25Ae^{0.25x}$, $y_p'' = 0.0625Ae^{0.25x}$ 이므로 $A = 4$ 이다. 따라서 $y_p = 4e^{0.25x}$ 이므로 일반해는 $y = e^{-0.2x}(c_1\cos 0.6x + c_2\sin 0.6x) + 4e^{0.25x}$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + 4 = 0.5$,

$y'(0) = -0.2c_1 + 0.6c_2 + 1 = -0.5$ 이므로

$c_1 = -3.5$, $c_2 = -\frac{22}{6}$ 이고 특수해는

$y = e^{-0.2x}\left(-3.5\cos 0.6x - \frac{11}{3}\sin 0.6x\right) + 4e^{0.25x}$ 이다.

18. 특성방정식 $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -1 \pm 3i$ 이므로 $y_h = e^{-x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$ 이다.

미정계수법에 의하여

$y_p = A\cos x + B\sin x + C\cos 3x + D\sin 3x$ 라 하자.

$y_p' = -A\sin x + B\cos x - 3C\sin 3x + 3D\cos 3x$,

$y_p'' = -A\cos x - B\sin x - 9C\cos 3x - 9D\sin 3x$ 이므로 $A = -0.4$, $B = 1.8$, $C = 6$, $D = -1$ 이다. 따라서 $y_p = -0.4\cos x + 1.8\sin x + 6\cos 3x - \sin 3x$ 이므로 일반해는

$$y = e^{-x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) \\ -0.4\cos x + 1.8\sin x + 6\cos 3x - \sin 3x.$$

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 - 0.4 + 6 = 6.6$,

$y'(0) = -c_1 + 3c_2 + 1.8 - 3 = -2.2$ 이므로 $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ 이고 특수해는

$y = e^{-x}\cos 3x - 0.4\cos x + 1.8\sin x + 6\cos 3x - \sin 3x$ 이다.

2.8 Modeling: Forced Oscillations. Resonance

3. 방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -1, -3$ 이다.

$y_p = A\cos 2t + B\sin 2t$ 라 하자.

$y_p' = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$, $y_p'' = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$ 이므로 $A = -\frac{72}{130}$, $B = -\frac{9}{130}$ 이다.

즉, 정상상태 해는 $y_p = -\frac{72}{130}\cos 2t - \frac{9}{130}\sin 2t$ 이다.

4. $\lambda^2 + 2.5\lambda + 10 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -1.25 \pm 7.5\sqrt{15}\,i$ 이다.

$y_p = A\cos 4t + B\sin 4t$ 라 하자.

$y_p' = -4A\sin 4t + 4B\cos 4t$,

$y_p'' = -16A\cos 4t - 16B\sin 4t$ 이므로 $A=1$, $B=0.6$ 이다. 즉, 정상상태 해는 $y_p = \cos 4t + 0.6\sin 4t$ 이다.

5. $\lambda^2 + \lambda + 1.25 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$ 이다.

$y_p = A\cos 1.5t + B\sin 1.5t$ 라 하자.

$y_p' = -1.5A\sin 1.5t + 1.5B\cos 1.5t$,

$y_p'' = -2.25A\cos 1.5t - 2.25B\sin 1.5t$ 이므로

$A = -\frac{10}{13}$, $B = \frac{15}{13}$ 이다. 따라서 정상상태 해는

$y_p = -\frac{10}{13}\cos 1.5t + \frac{15}{13}\sin 1.5t$ 이다.

6. 방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -1, -3$ 이다.

$y_p = A\cos t + B\sin t + C\cos 3t + D\sin 3t$ 라 하자.

$y_p' = -A\sin t + B\cos t - 3C\sin 3t + 3D\cos 3t$,

$y_p'' = -A\cos t - B\sin t - 9C\cos 3t - 9D\sin 3t$ 이므로

$A = \frac{1}{10}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{1}{90}$, $D = \frac{1}{45}$ 이다.

따라서 정상상태 해는

$y_p = \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t - \frac{1}{90}\cos 3t + \frac{1}{45}\sin 3t$ 이다.

7. $4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -\frac{3}{2}$ (중근)이다.

$y_p = A + B\cos 3t + C\sin 3t$ 라 하자.

$y_p' = -3B\sin 3t + 3C\cos 3t$, $y_p'' = -9B\cos 3t - 9C\sin 3t$

이므로 $A = 25$, $B = \frac{4}{3}$, $C = 1$ 이다.

따라서 정상상태 해는 $y_p = 25 + \frac{4}{3}\cos 3t + \sin 3t$ 이다.

8. $2\lambda^2 + 4\lambda + 6.5 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -1 \pm \frac{3}{2}i$ 이므로

$y_h = e^{-t}\left(c_1\cos\frac{3}{2}t + c_2\sin\frac{3}{2}t\right)$ 이다.

$y_p = A\cos 1.5t + B\sin 1.5t$ 라 하자.

$y_p' = -1.5A\sin 1.5t + 1.5B\cos 1.5t$,

$y_p'' = -2.25A\cos 1.5t - 2.25B\sin 1.5t$ 이므로 $A = \frac{1}{20}$,

$B = \frac{3}{20}$ 이고 $y_p = \frac{1}{20}\cos 1.5t + \frac{3}{20}\sin 1.5t$ 이다. 즉,

$y = e^{-t}\left(c_1\cos\frac{3}{2}t + c_2\sin\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{20}\cos 1.5t + \frac{3}{20}\sin 1.5t$

이다.

9. 특성방정식이 $\lambda^2 + 3\lambda + 3.25 = 0$ 이므로 $\lambda = -1.5 \pm i$ 이고 $y_h = e^{-1.5t}(c_1\cos t + c_2\sin t)$ 이다.

$y_p = A\cos t + B\sin t$ 라 하자. $y_p' = -A\sin t + B\cos t$,

$y_p'' = -A\cos t - B\sin t$ 이므로 $A = 0.8$, $B = 0.4$ 이고

$y_p = 0.8\cos t + 0.4\sin t$ 이다. 따라서

$y = e^{-1.5t}(c_1\cos t + c_2\sin t) + 0.8\cos t + 0.4\sin t$ 이다.

10. 특성방정식이 $\lambda^2 + 16 = 0$ 이므로 $\lambda = \pm 4i$ 이고

$y_h = c_1\cos 4t + c_2\sin 4t$ 이다.

$y_p = At\cos 4t + Bt\sin 4t$ 라 하자.

$y_p' = A\cos 4t - 4At\sin 4t + B\sin 4t + 4Bt\cos 4t$,

$y_p'' = -8A\sin 4t - 16At\cos 4t + 8B\cos 4t - 16Bt\sin 4t$

이므로 $A = 0$, $B = 7$ 이고 $y_p = 7t\sin 4t$ 이다.

따라서 $y = c_1\cos 4t + c_2\sin 4t + 7t\sin 4t$ 이다.

11. 특성방정식이 $\lambda^2 + 9 = 0$ 이므로 $\lambda = \pm 3i$ 이고

$y_h = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$ 이다.

$y_p = At\cos 3t + Bt\sin 3t$ 라 하자.

$y_p' = A\cos 3t - 3At\sin 3t + B\sin 3t + 3Bt\cos 3t$,

$y_p'' = -6A\sin 3t - 9At\cos 3t + 6B\cos 3t - 9Bt\sin 3t$

이므로 $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{6}$ 이고

$y_p = -\frac{1}{6}t\cos 3t + \frac{1}{6}t\sin 3t$ 이다. 따라서

$y = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t - \frac{1}{6}t\cos 3t + \frac{1}{6}t\sin 3t$ 이다.

12. 특성방정식이 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ 이므로 $\lambda = -1 \pm 2i$ 이고

$y_h = e^{-t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t)$ 이다.

$y_p = A\cos t + B\sin t$ 라 하자.

$y_p' = -A\sin t + B\cos t$, $y_p'' = -A\cos t - B\sin t$ 이므로

$A = 0$, $B = 2$ 이고 $y_p = 2\sin t$ 이다.

따라서 $y = e^{-t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) + 2\sin t$ 이다.

13. 특성방정식이 $\lambda^2 + 4 = 0$ 이므로 $\lambda = \pm 2i$ 이고

$y_h = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$ 이다.

$y_p = A\cos wt + B\sin wt$ 라 하자.

$y_p' = -wA\sin wt + wB\cos wt$,

$y_p'' = -w^2A\cos wt - w^2B\sin wt$ 이므로

$A = 0$, $B = \frac{1}{4-w^2}$ 이고 $y_p = \frac{1}{4-w^2}\sin wt$ 이다.

따라서 $y = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + \frac{1}{4-w^2}\sin wt$ 이다.

14. 특성방정식이 $\lambda^2 + 1 = 0$ 이므로 $\lambda = \pm i$ 이고

$y_h = c_1\cos t + c_2\sin t$ 이다.

$y_p = Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\sin t$ 라 하자.

$y_p' = (-A+B)e^{-t}\cos t + (-A-B)e^{-t}\sin t$,

$y_p' = -2Be^{-t}\cos t + 2Ae^{-t}\sin t$ 이므로 $A = 1$, $B = -2$

이고 $y_p = e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t$ 이다. 따라서

$y = c_1\cos t + c_2\sin t + e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t$ 이다.

15. 특성방정식이 $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ 이므로 $\lambda = -2 \pm 2i$

이고 $y_h = e^{-2t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t)$ 이다.

$y_p = A\cos 2t + B\sin 2t$ 라 하자.

$y_p' = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$, $y_p'' = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$

이므로 $A = 0$, $B = 0.25$ 이고 $y_p = 0.25\sin 2t$ 이다.

따라서 $y = e^{-2t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) + 0.25\sin 2t$ 이다.

16. 특성방정식이 $\lambda^2 + 16 = 0$ 이므로 $\lambda = \pm 4i$ 이고

$y_h = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ 이다.

$y_p = A\cos t + B\sin t$라 하자.

$y_p' = -A\sin t + B\cos t$, $y_p'' = -A\cos t - B\sin t$ 이므로

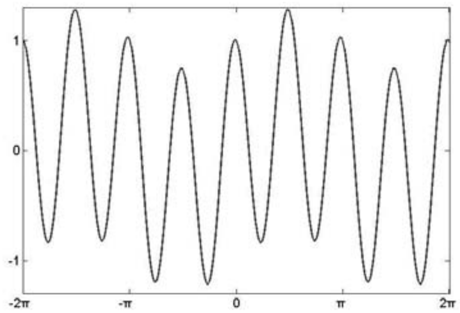
$A=0$, $B=\dfrac{4}{15}$ 이고 $y_p = \dfrac{4}{15}\sin t$이다.

따라서 $y = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t + \dfrac{4}{15}\sin t$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 = 1$, $y'(0) = 4c_2 + \dfrac{4}{15} = 1$

이므로 $c_1 = 1$, $c_2 = -\dfrac{11}{60}$ 이고 특수해는

$y = \cos 4t - \dfrac{11}{60}\sin 4t + \dfrac{4}{15}\sin t$ 이다.



17. 특성방정식이 $\lambda^2 + 4 = 0$ 이므로 $\lambda = \pm 2i$ 이고

$y_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ 이다.

$$y_p = A\cos t + B\sin t + C\cos 3t + D\sin 3t + E\cos 5t + F\sin 5t$$

라 하자.

$$y_p' = -A\sin t + B\cos t - 3C\sin 3t + 3D\cos 3t - 5E\sin 5t + 5F\cos 5t,$$

$$y_p'' = -A\cos t - B\sin t - 9C\cos 3t - 9D\sin 3t - 25E\cos 5t - 25F\sin 5t$$

이므로 $A=0$, $B=\dfrac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\dfrac{1}{15}$, $E=0$

$F=-\dfrac{1}{105}$ 이고 $y_p = \dfrac{1}{3}\sin t - \dfrac{1}{15}\sin 3t - \dfrac{1}{105}\sin 5t$

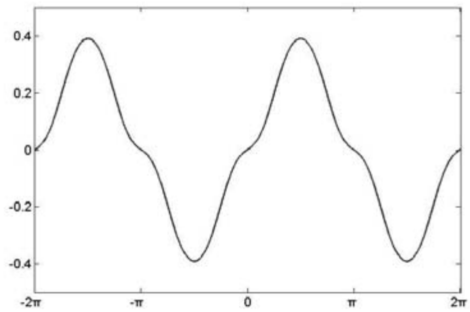
이다. 따라서

$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \dfrac{1}{3}\sin t - \dfrac{1}{15}\sin 3t - \dfrac{1}{105}\sin 5t$

이다. 초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 = 0$,

$y'(0) = 2c_2 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{21} = 0$ 이므로 $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ 이고

특수해는 $y = \dfrac{1}{3}\sin t - \dfrac{1}{15}\sin 3t - \dfrac{1}{105}\sin 5t$이다.



18. 특성방정식이 $\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0$ 이므로 $\lambda = -4 \pm i$ 이고

$y_h = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ 이다.

$y_p = A\cos 0.5t + B\sin 0.5t$ 라 하자.

$y_p' = -0.5A\sin 0.5t + 0.5B\cos 0.5t$,

$y_p'' = -0.25A\cos 0.5t - 0.25B\sin 0.5t$ 이므로 $A = -6.4$

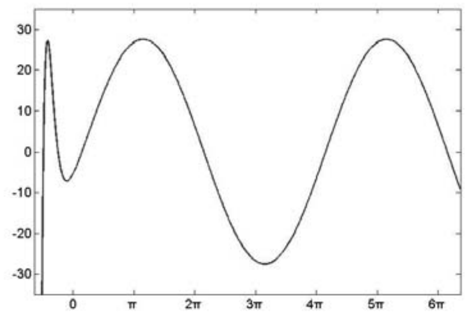
$B = 26.8$이고 $y_p = -6.4\cos 0.5t + 26.8\sin 0.5t$ 이다. 즉,

$y = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 6.4\cos 0.5t + 26.8\sin 0.5t$

이다. 초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 - 6.4 = -5.4$,

$y'(0) = -4c_1 + c_2 + 13.4 = 9.4$ 이므로 $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ 이고

특수해는 $y = e^{-4t}\cos t - 6.4\cos 0.5t + 26.8\sin 0.5t$ 이다.



19. 특성방정식이 $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ 이므로 $\lambda = -2 \pm i$ 이고

$y_h = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ 이다.

$y_p = Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\sin t$라 하자.

$y_p' = (-A+B)e^{-t}\cos t + (-A-B)e^{-t}\sin t$,

$y_p' = -2Be^{-t}\cos t + 2Ae^{-t}\sin t$이므로 $A = \dfrac{1}{5}$, $B = \dfrac{2}{5}$

이고 $y_p = \dfrac{1}{5}e^{-t}\cos t + \dfrac{2}{5}e^{-t}\sin t$이다. 따라서

$y = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \dfrac{1}{5}e^{-t}\cos t + \dfrac{2}{5}e^{-t}\sin t$이다.

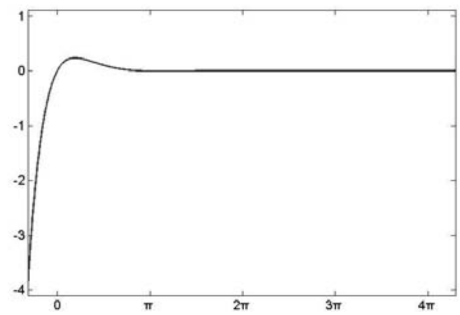
초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + \dfrac{1}{5} = 0$,

$y'(0) = -2c_1 + c_2 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} = 1$ 이므로 $c_1 = -\dfrac{1}{5}$, $c_2 = \dfrac{2}{5}$

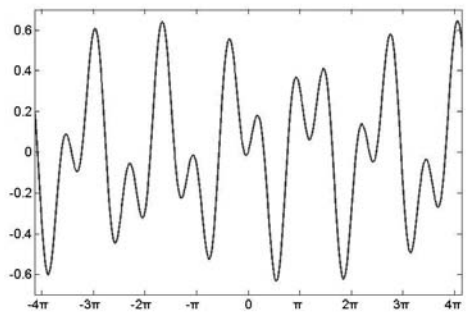
이고 특수해는

$y = e^{-2t}\left(-\dfrac{1}{5}\cos t + \dfrac{2}{5}\sin t\right) + \dfrac{1}{5}e^{-t}\cos t + \dfrac{2}{5}e^{-t}\sin t$

이다.



20. 특성방정식이 $\lambda^2+5=0$ 이므로 $\lambda=\pm\sqrt{5}\,i$ 이고
$y_h=c_1\cos\sqrt{5}\,t+c_2\sin\sqrt{5}\,t$ 이다.
$y_p=A\cos\pi t+B\sin\pi t$ 라 하자.
$y_p{}'=-\pi A\sin\pi t+\pi B\cos\pi t$,
$y_p{}''=-\pi^2 A\cos\pi t-\pi^2 B\sin\pi t$ 이므로 $A=\dfrac{1}{5-\pi^2}$
$B=\dfrac{-1}{5-\pi^2}$ 이고 $y_p=\dfrac{1}{5-\pi^2}\cos\pi t-\dfrac{1}{5-\pi^2}\sin\pi t$
이다. 따라서 일반해는
$$y=c_1\cos\sqrt{5}\,t+c_2\sin\sqrt{5}\,t+\frac{1}{5-\pi^2}(\cos\pi t-\sin\pi t)$$
이다. 초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+\dfrac{1}{5-\pi^2}=0$,
$y'(0)=\sqrt{5}\,c_2-\dfrac{\pi}{5-\pi^2}=0$이므로 $c_1=-\dfrac{1}{5-\pi^2}$,
$c_2=\dfrac{\pi}{(5-\pi^2)\sqrt{5}}$ 이고 특수해는
$$y=\frac{1}{5-\pi^2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\,t-\cos\sqrt{5}\,t+\cos\pi t-\sin\pi t\right)$$
이다.



21. 공식 $\cos v-\cos u=2\sin\dfrac{u+v}{2}\sin\dfrac{u-v}{2}$ 에 의하여
$$\cos\omega t-\cos\omega_0 t=2\sin\frac{\omega_0 t+\omega t}{2}\sin\frac{\omega_0 t-\omega t}{2}$$ 이다.

22. 특성방정식이 $\lambda^2+25=0$ 이므로 $\lambda=\pm 5i$ 이고
$y_h=c_1\cos 5t+c_2\sin 5t$ 이다.
$y_p=A\cos 4.9t+B\sin 4.9t$ 라 하자.
$y_p{}'=-4.9A\sin 4.9t+4.9B4.9\cos t$,
$y_p{}''=-24.01A\cos 4.9t-24.01B\sin 4.9t$ 이므로
$A=100,\ B=0$ 이고 $y_p=100\cos 4.9t$ 이다. 따라서
$y=c_1\cos 5t+c_2\sin 5t+100\cos 4.9t$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+100=1.5$,
$y'(0)=5c_2=0$ 이므로 $c_1=-98.5$ $c_2=0$ 이고
$y=-98.5\cos 5t+100\cos 4.9t$ 이다.

23. (a) $\dfrac{dC^*}{dc}=\dfrac{4mF_0\left(c^2-2m^2\omega_0^2\right)}{c^2\left(4m^2\omega_0^2-c^2\right)^{3/2}}$

(b) $\dfrac{dC^*}{dc}$ 의 값에서 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 이므로 대입하면
$\dfrac{dC^*}{dc}=\dfrac{4mF_0\left(c^2-2m^2k\right)}{c^2\left(4mk-c^2\right)^{3/2}}$ 이다. 따라서 $c\le\sqrt{2mk}$
이면 $\dfrac{dC^*}{dc}\ge 0$ 이므로 $C^*(\omega_{\max})$ 는 증가한다.

24. 만일 $0\le t\le\pi$ 이면 특수해를 $y_p=K_0+K_1t+K_2t^2$
라 하자. 이를 식에 대입하면 $K_0=1+\dfrac{2}{\pi^2}$,
$K_1=0,\ K_2=-\dfrac{1}{\pi^2}$ 이다. 또한 $y_h=c_1\cos t+c_2\sin t$ 이
므로 일반해는 $y=c_1\cos t+c_2\sin t+1+\dfrac{2}{\pi^2}-\dfrac{1}{\pi^2}t^2$ 이
다. $y(0)=c_1+1+\dfrac{2}{\pi^2}=0,\ y'(0)=c_2=0$이므로
$y=\left(1+\dfrac{2}{\pi^2}\right)(1-\cos t)-\dfrac{1}{\pi^2}t^2$ 이다.
$t>\pi$ 이면 방정식이 $y''+y=0$ 이므로
$y=c_3\cos t+c_4\sin t$ 이다. $y(\pi)=-c_3=2\left(1+\dfrac{2}{\pi^2}\right)-1$,
$y'(\pi)=-c_4=-\dfrac{2}{\pi}$ 이므로 $c_3=-\left(1+\dfrac{4}{\pi^2}\right)$, $c_4=\dfrac{2}{\pi}$ 이
고 $y=-\left(1+\dfrac{4}{\pi^2}\right)\cos t+\dfrac{2}{\pi}\sin t$ 이다. 따라서
$$y=\begin{cases}\left(1+\dfrac{2}{\pi^2}\right)(1-\cos t)-\dfrac{1}{\pi^2}t^2, & 0\le t\le\pi\\ -\left(1+\dfrac{4}{\pi^2}\right)\cos t+\dfrac{2}{\pi}\sin t, & \pi<t\end{cases}$$

25. (a) 특성방정식이 $\lambda^2+1=0$ 이므로 $\lambda=\pm i$ 이고
$y_h=c_1\cos t+c_2\sin t$ 이다. $y_p=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ 라
하자. $y_p{}'=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t$ 이고
$y_p{}''=-\omega^2 A\cos\omega t-\omega^2 B\sin\omega t$ 이므로 $A=\dfrac{1}{1-\omega^2}$,
$B=0$ 이고 $y_p=\dfrac{1}{1-\omega^2}\cos\omega t$ 이다. 따라서
일반해 는 $y=c_1\cos t+c_2\sin t+\dfrac{1}{1-\omega^2}\cos\omega t$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+\dfrac{1}{1-\omega^2}=0$ 이므로
$c_1=\dfrac{1}{\omega^2-1}$ 이다.
$y'=-c_1\sin t+c_2\cos t-\dfrac{\omega}{1-\omega^2}\sin\omega t$ 이므로
$y'(0)=c_2=0$ 이고 일반해는

$$y=\frac{1}{\omega^2-1}\cos t+\frac{1}{1-\omega^2}\cos\omega t=\frac{\cos\omega t-\cos t}{1-\omega^2}$$
$$=\frac{2}{1-\omega^2}\sin\left(\frac{1+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{1-\omega}{2}t\right)$$

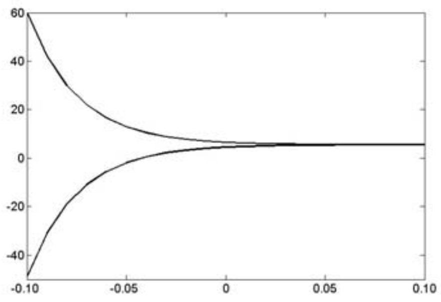
이다.

2.9 Modeling: Electric Circuits

1. RC-회로를 모델링하면 $RI+\frac{1}{C}\int Idt=E$이고 미분하면 $RI'+\frac{1}{C}I=0$이고 $I=ce^{-\frac{t}{RC}}$이다.

2. RC-회로에서 $E=E_0\sin\omega t$일 때 모델링하면 $RI+\frac{1}{C}\int Idt=E_0\sin\omega t$이고 미분하면 $RI'+\frac{1}{C}I=\omega E_0\cos\omega t$이다. 따라서
$$I(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{\omega E_0}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\cos\omega t\,dt+c\right]$$
$$=ce^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\omega E_0 C}{1+(\omega RC)^2}(\cos\omega t+\omega RC\cos\omega t)$$
$$=ce^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\omega E_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t-\delta).$$
여기서 $\delta=\arctan\frac{1}{\omega RC}$이다.

3. RL-회로를 모델링하면 $LI'+RI=E$이므로
$$I=e^{-\frac{Rt}{L}}\left[\int\frac{E}{L}e^{\frac{Rt}{L}}dt+c\right]=\frac{E}{R}+ce^{-\frac{Rt}{L}}$$ 이다.
여기서 $L=0.5H$, $R=20\Omega$, $E=110V$로 놓으면
$I=5.5+ce^{-40t}$이다.
$c=-1$, $c=1$일 때를 도시하면



위의 그림과 같이 급격하게 전류 I 값이 $5.5A$로 수렴하여 직류회로에서는 L에 의한 변화는 거의 없다.

4. $LI'+RI=E_0\sin\omega t$와 1.5절의 식 (4)로부터 다음의 해를 얻는다.
$$I=e^{-\frac{Rt}{L}}\left[\int\frac{E_0}{L}e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t\,dt+c\right]$$
$$=ce^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$
$$=ce^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\delta),\ \delta=\arctan\frac{\omega L}{R}$$

5. LC-회로를 모델링하면 $LI'+\frac{1}{C}\int Idt=E=\sin t$이고 미분하면 $LI''+\frac{1}{C}I=\cos t$이다. 특성방정식은 $L\lambda^2+\frac{1}{C}=0$이므로 $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{LC}}i$이고
$I_h=c_1\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}+c_2\sin\frac{t}{\sqrt{Lc}}$ 이다.
$I_p=A\cos t+B\sin t$를 방정식에 대입하면,
$A=\frac{C}{1-LC}$, $B=0$이고 $I_p=\frac{C}{1-LC}\cos t$이다.
따라서 $I=c_1\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}+c_2\sin\frac{t}{\sqrt{Lc}}+\frac{C}{1-LC}\cos t$
이다. $I(0)=c_1+\frac{C}{1-LC}=0$, $I'(0)=\frac{c_2}{\sqrt{LC}}=0$
이므로 $c_1=-\frac{C}{1-LC}$, $c_2=0$이고
$I=\frac{C}{1-LC}\left(\cos t-\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$이다. $L=0.5H$이고
$C=0.005F$일 때, $I=\frac{2}{399}(\cos t-\cos 20t)$이다.

6. 문제 5번에서 $E=2t^3$이라 하자.
$I_p=at^2+bt+c$이면 $I_p'=2at+b$이고 $I_p''=2a$이다.
$a=6C$, $b=0$, $c=-12C^2L$이므로 $I_p=6Ct^2-12C^2L$
이다. 따라서
$I=c_1\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}+c_2\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}+6Ct^2-12C^2L$이다.
$I(0)=c_1-12C^2L=0$, $I'(0)=\frac{c_2}{\sqrt{LC}}=0$이므로
$c_1=12C^2L$, $c_2=0$이고
$I=12C^2L\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}+6Ct^2-12C^2L$이다.
$L=0.25H$, $C=0.025F$일 때의 해는
$I=\frac{3}{1600}\cos 4\sqrt{10}\,t+\frac{3}{20}t^2-\frac{3}{1600}$이다.

7. 음향기기 조율시 L과 C의 값이 변하므로 식 (5)에서 $I_0=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+s^2}}$이다. 여기서 $S=\omega L-\frac{1}{\omega C}$
이다. $\frac{dI_0}{dS}=\frac{-E_0S}{(R^2+S^2)^{3/2}}=0$, $S=0$일 때 I_0의 값이 최대이므로 $C=\frac{1}{\omega^2L}$이다.

8. $E=1500\sin 2t$이면 $E'=1000\cos 2t$이므로 모델링을 하면 $0.5I''+4I'+I=1000\cos 2t$이다. 특성방정식은 $0.5\lambda^2+4\lambda+1=0$이므로 $\lambda=-4\pm\sqrt{14}$이다.
$I_p=A\cos 2t+B\sin 2t$라 하자.
$I_p'=-2A\sin 2t+2B\cos 2t$, $I_p''=-4A\cos 2t-4B\sin 2t$

이므로 $A=-\dfrac{200}{13}$, $B=\dfrac{1600}{13}$ 이다.

따라서 $I_p=-\dfrac{200}{13}\cos 2t+\dfrac{1600}{13}\sin 2t$ 이다.

9. $E=110$ 이면 $E'=0$ 이므로 모델링을 하면
$0.1I''+4I'+20I=0$ 이다. 따라서 $I_p=0$ 이다.

10. $E=157\sin 3t$ 이면 $E'=471\cos 3t$ 이므로 모델링을 하면 $I''+2I'+20I=471\cos 3t$ 이다. 특성방정식은
$\lambda^2+2\lambda+20=0$이므로 $\lambda=-1\pm\sqrt{19}\,i$이다.
$I_p=A\cos 3t+B\sin 3t$ 라 하자.
$I_p'=-3A\sin 3t+3B\cos 3t$, $I_p''=-9A\cos 3t-9B\sin 3t$
이므로 $A=33$, $B=18$ 이다.
따라서 $I_p=33\cos 3t+18\sin 3t$ 이다.

11. $E=220\sin 5t$ 이면 $E'=1100\cos 5t$ 이므로 모델링을 하면 $1.2I''+24I'+90I=1100\cos 5t$ 이다.
$1.2\lambda^2+24\lambda+90=0$이므로 $\lambda=-5,\ -15$이다.
$I_p=A\cos 5t+B\sin 5t$ 라 하자.
$I_p'=-5A\sin 5t+5B\cos 5t$,
$I_p''=-25A\cos 5t-25B\sin 5t$ 이므로 $A=\dfrac{11}{3}$,
$B=\dfrac{22}{3}$ 이다. 즉, $I_p=\dfrac{11}{3}\cos 5t+\dfrac{22}{3}\sin 5t$ 이다.

12. $E=220\sin 314t$ 이면 $E'=69080\cos 314t$ 이므로 모델링을 하면 $0.1I''+0.2I'+0.5I=69080\cos 314t$ 이다. $0.1\lambda^2+0.2\lambda+0.5=0$이므로 $\lambda=-1\pm 2i$이다.
$I_p=A\cos 314t+B\sin 314t$ 라 하자.
$I_p'=-314A\sin 314t+314B\cos 314t$,
$I_p''=-98596A\cos 314t-98596B\sin 314t$ 이므로
$A=-\dfrac{138160}{19719}$, $B=\dfrac{880}{19719}$ 이다.
따라서 $I_p=-\dfrac{138160}{19719}\cos 314t+\dfrac{880}{19719}\sin 314t$ 이다.

13. $E=120\sin 50t$ 이면 $E'=6000\cos 50t$ 이므로 모델링을 하면 $2I''+16I'+200I=6000\cos 50t$ 이다.
$2\lambda^2+16\lambda+200=0$이므로 $\lambda=-4\pm 2\sqrt{21}\,i$이다.
$I_p=A\cos 50t+B\sin 50t$ 라 하자.
$I_p'=-50A\sin 50t+50B\cos 50t$,
$I_p''=-2500A\cos 50t-2500B\sin 50t$ 이므로 $A=-\dfrac{45}{37}$,
$B=\dfrac{15}{74}$ 이다. 즉, $I_p=-\dfrac{45}{37}\cos 50t+\dfrac{15}{74}\sin 50t$ 이다.

14. RLC-회로를 모델링하면 $RI+LI'+\dfrac{1}{C}\int Idt=E$
이고 미분하면 $LI''+RI'+\dfrac{1}{C}I=E'$ 이다.
특성방정식이 $L\lambda^2+R\lambda+\dfrac{1}{C}=0$ 이다.
$D=R^2-\dfrac{4L}{C}$ 이라 할 때

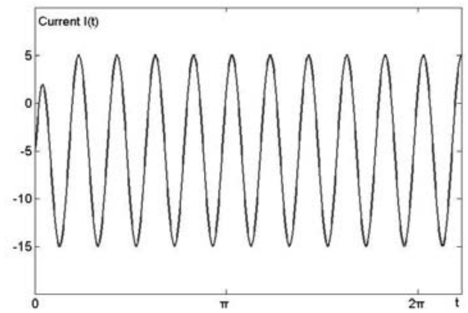
$$I_h=\begin{cases} c_1e^{\frac{-R+\sqrt{D}}{2L}t}+c_2e^{\frac{-R-\sqrt{D}}{2L}t} & ,\ D>0\\ c_1e^{-\frac{R}{2L}t}+c_2te^{-\frac{R}{2L}t}, & D=0\\ e^{-\frac{R}{2L}t}\left(A\cos\dfrac{\sqrt{-D}}{2L}t+B\sin\dfrac{\sqrt{-D}}{2L}t\right), & D<0\end{cases}$$

이다. I_h 의 값들에서 $R>\sqrt{D}>0$ 이므로 $t\to\infty$ 이면 $I_h\to 0$ 이다. 일반해는 $I=I_h+I_p$ 이므로 $t\to\infty$ 이면 $I\to I_p$ 가 된다.

15. RLC-회로에서 $LI''+RI'+\dfrac{1}{C}I=E'=f(t)$ 로 놓으면 단진자 운동계에서 $my''+cy'+ky=f(t)$ 와 비교로,
$c>2\sqrt{mk}$ 과감쇄
$c=2\sqrt{mk}$ 임계감쇄
$c<2\sqrt{mk}$ 저감쇄
이므로 동일한 방식으로(판별식을 통해)
(Ⅰ) 과감쇄 조건 : $R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
(Ⅱ) 임계감쇄 조건 : $R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
(Ⅲ) 저감쇄 조건 : $R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

※ $I(0)=0$, $Q(0)=0$ 이면 $LI'+RI+\dfrac{1}{C}Q=E(t)$ 이므로
$LI'(0)=E(0)$, $I'(0)=\dfrac{1}{L}E(0)$ 이다. 미분방정식은
$LI''+RI'+\dfrac{1}{C}I=E'(t)$ 이다.

16. $E=100\sin 10t$ 이면 $E(0)=0$ 이고 $E'=1000\cos 10t$ 이므로 모델링을 하면
$0.2I''+8I'+80I=1000\cos 10t$ 이고 $I'(0)=0$ 이다.
$0.2\lambda^2+8\lambda+80=0$이므로 $\lambda=-20$(중근)이다.
즉, $I_h=(c_1+c_2t)e^{-20t}$ 이다.
$I_p=A\cos 10t+B\sin 10t$ 라 하자.
$I_p'=-10A\sin 10t+10B\cos 10t$,
$I_p''=-100A\cos 10t-100B\sin 10t$ 이므로 $A=6$, $B=8$ 이다. 즉, $I_p=6\cos 10t+8\sin 10t$ 이다.
따라서 $I=(c_1+c_2t)e^{-20t}+6\cos 10t+8\sin 10t$ 이다.
초기조건에 의하여
$I(0)=c_1+6=0$, $I'(0)=-20c_1+c_2+80=0$ 이므로
$c_1=-6$, $c_2=-200$ 이고 해는
$I=(-6-200t)e^{-20t}+6\cos 10t+8\sin 10t$ 이다.



17. $E=250(\cos t+\sin t)$ 이면 $E(0)=250$ 이고 $E'=250(-\sin t+\cos t)$ 이므로 모델링을 하면 $I''+18I'+250I=250(-\sin t+\cos t)$ 이고 $I'(0)=250$ 이다. 특성방정식이 $\lambda^2+18\lambda+250=0$ 이므로 $\lambda=-9\pm 13i$ 이고 $I_h=e^{-9t}(c_1\cos 13t+c_2\sin 13t)$ 이다.

$I_p=A\cos t+B\sin t$ 라 하자.

$I_p'=-A\sin t+B\cos t$, $I_p''=-A\cos t-B\sin t$ 이므로

$A=\frac{890}{831}$, $B=-\frac{770}{831}$ 이고 $I_p=\frac{890}{831}\cos t-\frac{770}{831}\sin t$ 이다. 따라서

$$I=e^{-9t}(c_1\cos 13t+c_2\sin 13t)+\frac{890}{831}\cos t-\frac{770}{831}\sin t$$

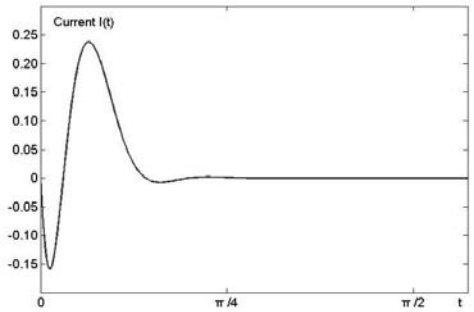
이다. 초기조건에 의하여 $I(0)=c_1+\frac{890}{831}=0$,

$I'(0)=-9c_1+13c_2-\frac{770}{831}=0$ 이므로 $c_1=-\frac{890}{831}$,

$c_2=-\frac{7240}{10803}$ 이고 해는

$$I=e^{-9t}\left(-\frac{890}{831}\cos 13t-\frac{7240}{10803}\sin 13t\right)+\frac{890}{831}\cos t-\frac{770}{831}\sin t$$

이다.



18. $E=220\cos 4t$ 이면 $E(0)=220$ 이고 $E'=-880\sin 4t$ 이므로 모델링을 하면 $I''+14I'+40I=-880\sin 4t$ 이고 $I'(0)=220$ 이다.

특성방정식이 $\lambda^2+14\lambda+40=0$ 이므로 $\lambda=-4,-10$ 이고 $I_h=c_1e^{-4t}+c_2e^{-10t}$ 이다.

$I_p=A\cos 4t+B\sin 4t$ 라 하자.

$I_p'=-4A\sin 4t+4B\cos 4t$,

$I_p''=-16A\cos 4t-16B\sin 4t$ 이므로 $A=\frac{385}{29}$,

$B=-\frac{165}{29}$ 이고 $I_p=\frac{385}{29}\cos 4t-\frac{165}{29}\sin 4t$ 이다.

즉, $I=c_1e^{-4t}+c_2e^{-10t}+\frac{385}{29}\cos 4t-\frac{165}{29}\sin 4t$ 이다.

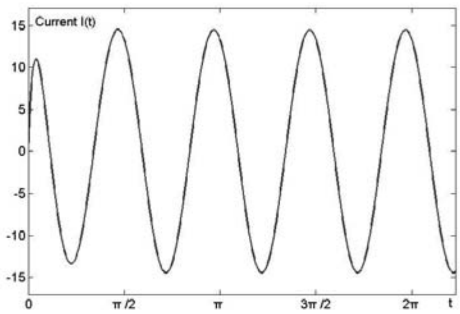
초기조건에 의하여 $I(0)=c_1+c_2+\frac{385}{29}=0$,

$I'(0)=-4c_1-10c_2-\frac{660}{29}=220$ 이므로 $c_1=\frac{1595}{87}$,

$c_2=-\frac{2750}{87}$ 이고 해는

$$I=\frac{1595}{87}e^{-4t}-\frac{2750}{87}e^{-10t}+\frac{385}{29}\cos 4t-\frac{165}{29}\sin 4t$$

이다.



20. $L\tilde{I}''+R\tilde{I}'+\frac{1}{C}\tilde{I}=E_0we^{i\omega t}$

$\tilde{I}_p=Ke^{i\omega t}$ 이라 하면 $\tilde{I}_p'=i\omega Ke^{i\omega t}$, $\tilde{I}_p''=-\omega^2Ke^{i\omega t}$ 이고 주어진 방정식은

$\left(-L\omega^2+iR\omega+\frac{1}{C}\right)Ke^{i\omega t}=E_0\omega e^{i\omega t}$ 으로 변형된다.

$$K=\frac{E_0\omega}{-L\omega^2+iR\omega+\frac{1}{c}}=\frac{E_0}{-L\omega+\frac{1}{C\omega}+iR}=\frac{E_0}{-S+iR}=\frac{-E_0(S+iR)}{S^2+R^2}$$

여기서 $S=L\omega-\frac{1}{C\omega}$ 이다. 따라서

$$\tilde{I}_p=\frac{-E_0(S+iR)}{S^2+R^2}e^{i\omega t}=\frac{-E_0(S+iR)}{S^2+R^2}(\cos\omega t+\sin\omega t)=\frac{-E_0}{S^2+R^2}\{(S\cos\omega t-R\sin\omega t)+i(R\cos\omega t+S\sin\omega t)\}$$

이므로 $I_p=\frac{E_0(R\sin\omega t-S\cos\omega t)}{S^2+R^2}$ 이다.

2.10 Solution by Variation of Parameters

1. 특성방정식 $\lambda^2+4=0$ 을 풀면, $\lambda=\pm 2i$ 이므로 $y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ 이다.

$W=\cos 2x(2\cos 2x)-\sin 2x(-2\sin 2x)=2$ 이므로

$$y_p=-\cos 2x\int \frac{\sin 2x\cos 2x}{2}dx+\sin 2x\int \frac{\cos^2 2x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x$$

따라서 일반해는

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x \text{ 이다.}$$

2. 특성방정식 $\lambda^2+9=0$을 풀면, $\lambda=\pm 3i$이므로 $y_h=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$ 이다.

$W=\cos 3x(3\cos 3x)-\sin 3x(-3\sin 3x)=3$이므로

$$y_p=-\cos 3x\int \frac{\sin 3x\csc 3x}{3}dx+\sin 3x\int \frac{\cos 3x\csc 3x}{3}dx$$
$$=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x\ln|\sin 3x|$$

따라서 일반해는

$$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x\ln|\sin 3x|$$

이다.

3. $m^2-2m-3=0$을 풀면, $m=-1,\ 3$이므로 $y_h=c_1x^{-1}+c_2x^3$ 이다.

$W=x^{-1}(3x^2)-x^3(-x^{-2})=4x$ 이므로

$$y_p=-x^{-1}\int \frac{x^3}{4x}dx+x^3\int \frac{x^{-1}}{4x}dx=-\frac{1}{3}x^2$$

따라서 일반해는 $y=c_1x^{-1}+c_2x^3-\frac{1}{3}x^2$ 이다.

4. 특성방정식 $\lambda^2-4\lambda+5=0$을 풀면, $\lambda=2\pm i$이므로 $y_h=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$ 이다.

$$W=e^{2x}\cos x(2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x)-e^{2x}\sin x(2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x)=e^{4x}$$

이므로

$$y_p=-e^{2x}\cos x\int \frac{e^{2x}\sin x\,e^{2x}\csc x}{e^{4x}}dx+e^{2x}\sin x\int \frac{e^{2x}\cos x\,e^{2x}\csc x}{e^{4x}}dx$$
$$=-xe^{2x}\cos x+e^{2x}\sin x\ln|\sin x|$$

따라서 일반해는

$$y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)-xe^{2x}\cos x+e^{2x}\sin x\ln|\sin x|$$

이다.

5. 특성방정식 $\lambda^2+1=0$을 풀면, $\lambda=\pm i$이므로 $y_h=c_1\cos x+c_2\sin x$ 이다.

$W=\cos x(\cos x)-\sin x(-\sin x)=1$ 이므로

$$y_p=-\cos x\int \sin x(\cos x-\sin x)dx+\sin x\int \cos x(\cos x-\sin x)dx$$
$$=\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\sin x$$

따라서 일반해는

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\sin x$$

이다.

6. 특성방정식 $\lambda^2+6\lambda+9=0$을 풀면, $\lambda=-3$(중근)이므로 $y_h=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$ 이다.

$W=e^{-3x}(e^{-3x}-3xe^{-3x})-xe^{-3x}(-3e^{-3x})=e^{-6x}$

이므로

$$y_p=-e^{-3x}\int \frac{xe^{-3x}}{e^{-6x}}\cdot\frac{16e^{-3x}}{x^2+1}dx+xe^{-3x}\int \frac{e^{-3x}}{e^{-6x}}\cdot\frac{16e^{-3x}}{x^2+1}dx$$
$$=-8e^{-3x}\ln(x^2+1)+16xe^{-3x}\arctan x$$

따라서 일반해는

$$y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}-8e^{-3x}\ln(x^2+1)+16xe^{-3x}\arctan x$$

이다.

7. 특성방정식 $\lambda^2-2\lambda+1=0$을 풀면, $\lambda=1$(중근)이므로 $y_h=c_1e^x+c_2xe^x$ 이다.

$W=e^x(e^x+xe^x)-xe^x(e^x)=e^{2x}$ 이므로

$$y_p=-e^x\int \frac{xe^x\cdot 6x^2e^{-x}}{e^{2x}}dx+xe^x\int \frac{xe^x\cdot 6x^2e^{-x}}{e^{2x}}dx$$
$$=\left(\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{9}{4}\right)e^{-x}$$

따라서 일반해는

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+\left(\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{9}{4}\right)e^{-x} \text{ 이다.}$$

8. 특성방정식 $\lambda^2+4=0$을 풀면, $\lambda=\pm 2i$이므로 $y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ 이다.

$W=\cos 2x(2\cos 2x)-\sin 2x(-2\sin 2x)=2$이므로

$$y_p=-\cos 2x\int \frac{\sin 2x\cosh 2x}{2}dx+\sin 2x\int \frac{\cos 2x\cosh 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\cosh 2x$$

따라서 일반해는

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{8}\cosh 2x \text{ 이다.}$$

9. 특성방정식 $\lambda^2-2\lambda+1=0$을 풀면, $\lambda=1$(중근)이므로 $y_h=c_1e^x+c_2xe^x$ 이다.

$W=e^x(e^x+xe^x)-xe^x(e^x)=e^{2x}$ 이므로

$$y_p=-e^x\int \frac{xe^x\cdot 35x^{3/2}e^x}{e^{2x}}dx+xe^x\int \frac{xe^x\cdot 35x^{3/2}e^x}{e^{2x}}dx=4x^{7/2}e^x$$

따라서 일반해는 $y=c_1e^x+c_2xe^x+4x^{7/2}e^x$ 이다.

10. 특성방정식 $\lambda^2+2\lambda+2=0$을 풀면, $\lambda=-1\pm i$이므로 $y_h=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$ 이다.

$$W=e^{-x}\cos x(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)-e^{-x}\sin x(-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x)=e^{-2x}$$

이므로

$$y_p = -e^{-x}\cos x \int \frac{e^{-x}\sin x \cdot 4e^{-x}\sec^3 x}{e^{-2x}}dx + e^{-x}\sin x \int \frac{e^{-x}\cos x \cdot 4e^{-x}\sec^3 x}{e^{-2x}}dx$$
$$= 2e^{-x}\sin x \tan x$$

따라서 일반해는

$y = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + 2e^{-x}\sin x\tan x$ 이다.

11. $m^2 - 5m + 6 = 0$ 을 풀면, $m = 2,\ 3$ 이므로

$y_h = c_1x^2 + c_2x^3$ 이다.

$W = x^2(3x^2) - x^3(2x) = x^4$ 이므로

$$y_p = -x^2\int \frac{x^3 \cdot 21x^{-6}}{x^3}dx + x^3\int \frac{x^2 \cdot 21x^{-6}}{x^3}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^{-4}$$

따라서 일반해는 $y = c_1x^2 + c_2x^3 + \frac{1}{2}x^{-4}$ 이다.

13. $m^2 - 9 = 0$ 을 풀면, $m = \pm 3$ 이므로

$y_h = c_1x^3 + c_2x^{-3}$ 이다.

$W = x^3(-3x^{-4}) - x^{-3}(3x^2) = -6x^{-1}$ 이므로

$$y_p = -x^3\int \frac{x^{-3} \cdot 48x^3}{-6x^{-1}}dx + x^{-3}\int \frac{x^3 \cdot 48x^3}{-6x^{-1}}dx$$
$$= 3x^5$$

따라서 일반해는 $y = c_1x^3 + c_2x^{-3} + 3x^5$ 이다.

14. (a) 특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ 이므로 $\lambda = -1, -3$

이고 $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$ 이다.

미정계수법에 의하여 $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$ 라

하자. $y_p{}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$,

$y_p{}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ 이므로 $A = -1,\ B = 8$

이고 $y_p = -\cos 2x + 8\sin 2x$ 이다.

매개변수변환법에 의하여

$W = e^{-x}(-3e^{-3x}) - e^{-3x}(-e^{-x}) = -2e^{-4x}$ 이므로

$$y_p = -e^{-x}\int \frac{e^{-3x} \cdot 65\cos 2x}{-2e^{-4x}}dx + e^{-3x}\int \frac{e^{-x} \cdot 65\cos 2x}{-2e^{-4x}}dx$$
$$= -\cos 2x + 8\sin 2x$$

이다.

(b) 특성방정식 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ 이므로 $\lambda = 1$ (중근)

이고 $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$ 이다.

$r_1 = 35x^{3/2}e^x$ 에 대하여 매개변수변환법을

적용하면 $W = e^x(e^x + xe^x) - xe^x(e^x) = e^{2x}$ 이므로

$$y_{p_1} = -e^x\int \frac{xe^x \cdot 35x^{3/2}e^x}{e^{2x}}dx + xe^x\int \frac{xe^x \cdot 35x^{3/2}e^x}{e^{2x}}dx = 4x^{7/2}e^x$$

이다.

$r_2 = x^2$ 에 대하여 미정계수법을 적용하면

$y_{p_2} = Ax^2 + Bx + C$ 라 하자. $y_{p_2}{}' = 2Ax + B$,

$y_p{}'' = 2A$ 이므로 $A = 1,\ B = 4,\ C = 6$ 이고

$y_{p_2} = x^2 + 4x + 6$ 이다.

Chapter 2 Review Questions and Problems

1. 대부분의 mechanics 모델링 문제에서는 뉴턴 제 2 법칙인 $F = ma = my''$을 적용한 2차 미분방정식의 형태로 유도되기 때문이다.
2. 초기값 문제는 방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 와 주어진 $x_0,\ K_0,\ K_1$ 을 가진 2개의 초기조건 $y(x_0) = K_0$ 와 $y'(x_0) = K_1$ 로 구성된다.
3. 대응하는 제차방정식의 일반해를 y_h 라 하고 주어진 비제차방정식의 특수해를 y_p 라 하면 비제차방정식의 일반해는 y_h 와 y_p 의 합으로 표현된다. y_p 를 결정하는 실제적인 문제는 매개변수변환법과 미정계수법에 의해 풀 수 있다.
4. mass-spring damper system에서의 변위는 RLC 회로에서의 전류치에 대응되고, $k = 1/C,\ m = L,\ c = R$에 각각 대응되는 값으로 2계 운동방정식과 전기회로 방정식이 유사하게 표현된다.
5. 입력주파수와 기본주파수가 같을 때 발생하는 큰 진동을 공명현상이라 한다.
6. 2계상미분방정식 $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$ 에서 함수 $p(x),\ q(x)$가 구간 I에서 연속이면 일반해가 존재한다.
7. 방정식 $16\lambda^2 + 56\lambda + 45 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -\frac{5}{4}, -\frac{9}{4}$ 이므로 $y = c_1e^{-5x/4} + c_2e^{-9x/4}$ 이다.
8. 방정식 $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ 을 풀면, $\lambda = 3, -4$ 이므로 $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}$ 이다.
9. 특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -2 \pm 3i$ 이므로 $y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$ 이다.
10. $\lambda^2 + 0.20\lambda + 0.17 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -0.1 \pm 0.4i$ 이므로 $y = e^{-0.1x}(c_1\cos 0.4x + c_2\sin 0.4x)$ 이다.
11. 특성방정식 $9\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$ 을 풀면, $\lambda = \frac{2}{3}$ (중근) 이므로 $y = c_1e^{2x/3} + c_2xe^{2x/3}$ 이다.
12. 특성방정식 $\lambda^2 + 4\pi\lambda + 4\pi^2 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -2\pi$ (중근)이므로 $y = c_1e^{-2\pi x} + c_2xe^{-2\pi x}$ 이다.
13. $m^2 + m - 12 = 0$ 을 풀면, $m = 3,\ -4$ 이므로 $y_h = c_1x^3 + c_2x^{-4}$ 이다.
14. $m^2 - 16 = 0$ 을 풀면, $m = \pm 4$ 이므로 $y_h = c_1x^4 + c_2x^{-4}$ 이다.
15. 특성방정식 $2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$ 을 풀면, $\lambda = -\frac{1}{2},\ 2$

이므로 $y_h = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{2x}$ 이다.

미정계수법에 의하여 $y_p = Ax^2 + Bx + C$라 하자.

$y_p{}' = 2Ax + B$, $y_p{}'' = 2A$ 이므로 $A = 1$, $B = -3$,

$C = 0$이므로 $y_p = x^2 - 3x$이고 일반해는

$y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{2x} + x^2 - 3x$이다.

16. 특성방정식 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$을 풀면, $\lambda = -1 \pm i$

이므로 $y_h = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ 이다.

$y_p = Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x$ 라 하자.

$y_p{}' = -Ae^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x) - Be^{-x}(\sin 2x - 2\cos 2x)$,

$y_p{}'' = (4A - 3B)e^{-x}\sin 2x - (3A + 4B)e^{-x}\cos 2x$ 이므로

$A = -1$, $B = 0$이다. 따라서 $y_p = -e^{-x}\cos 2x$ 이므로

일반해는 $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) - e^{-x}\cos 2x$ 이다.

17. 특성방정식 $4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$을 풀면, $\lambda = \frac{3}{2}$ (중근)

이므로 $y_h = (c_1 + c_2 x)e^{1.5x}$ 이다.

$y_p = Ax^2 e^{1.5x}$ 라 하자. $y_p{}' = 1.5Ax^2 e^{1.5x} + 2Axe^{1.5x}$,

$y_p{}'' = 2.25Ax^2 e^{1.5x} + 6Axe^{1.5x} + 2Ae^{1.5x}$ 이므로

$A = \frac{1}{4}$이다. 따라서 $y_p = \frac{1}{4}x^2 e^{1.5x}$ 이므로

일반해는 $y = (c_1 + c_2 x)e^{1.5x} + \frac{1}{4}x^2 e^{1.5x}$ 이다.

18. 주어진 방정식을 정리하면 $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$이다. 이 식을

적분하면 $\ln|y'| = \ln|y| + c^*$이다. 즉, $y' = c_1 y$이다.

다시 정리하면 $\frac{y'}{y} = c_1$이고 적분하면 $\ln|y| = c_1 x + \tilde{c}$

이다. 따라서 $y = c_2 e^{c_1 x}$이다.

19. 특성방정식 $\lambda^2 + 9 = 0$을 풀면, $\lambda = \pm 3i$이므로

$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$이다.

$y_p = Ae^x$라 하자. $y_p{}' = Ae^x$, $y_p{}'' = Ae^x$이므로

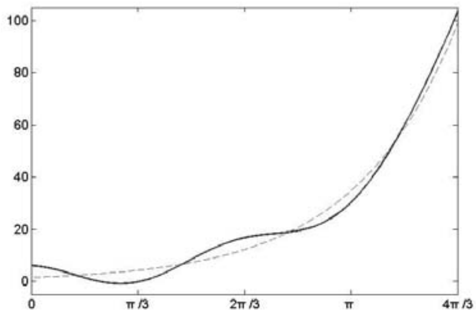
$A = \frac{3}{2}$ 이다. 따라서 $y_p = \frac{3}{2}e^x$ 이므로

일반해는 $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{3}{2}e^x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + \frac{3}{2} = 6$,

$y'(0) = 3c_2 + \frac{3}{2} = -2$ 이므로 $c_1 = \frac{9}{2}$, $c_2 = -\frac{7}{6}$

이고 특수해는 $y = \frac{9}{2}\cos 3x - \frac{7}{6}\sin 3x + \frac{3}{2}e^x$ 이다.



20. 특성방정식 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$을 풀면, $\lambda = 1, 3$

이므로 $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ 이다.

$y_p = A\cos x + B\sin x$ 라 하자.

$y_p{}' = -A\sin x + B\cos x$, $y_p{}'' = -A\cos x - B\sin x$ 이므로

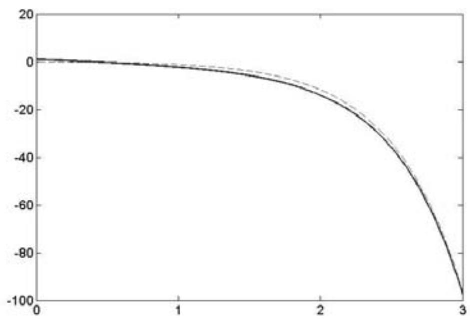
$A = 1$, $B = -2$이다. 따라서 $y_p = \cos x - 2\sin x$ 이므로

일반해는 $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \cos x - 2\sin x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + c_2 + 1 = 1$,

$y'(0) = c_1 + 3c_2 - 2 = -1$ 이므로 $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = -\frac{1}{4}$

이고 특수해는 $y = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{3x} + \cos x - 2\sin x$ 이다.



21. $m^2 - 1 = 0$을 풀면 $m = \pm 1$이므로 $y_h = c_1 x + c_2 x^{-1}$

이다. 매개변수변환법에 의하여,

$W = x(-x^{-2}) - x^{-1}(1) = -2x^{-1}$ 이므로

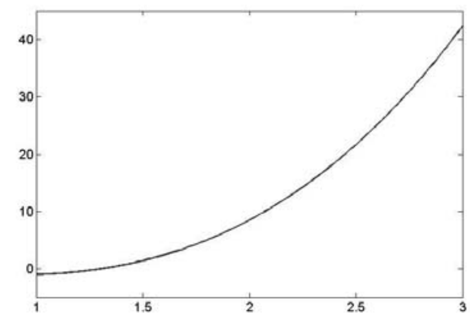
$$y_p = -x\int \frac{x^{-1} \cdot 16x}{-2x^{-1}}dx + x^{-1}\int \frac{x \cdot 16x}{-2x^{-1}}dx = 2x^3$$

따라서 일반해는 $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + 2x^3$이다.

초기조건에 의하여 $y(1) = c_1 + c_2 + 2 = -1$,

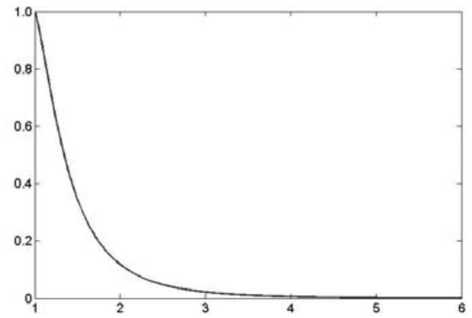
$y'(1) = c_1 - c_2 + 6 = 1$ 이므로 $c_1 = -4$, $c_2 = 1$

이고 특수해는 $y = -4x + x^{-1} + 2x^3$이다.



22. $m^2 + 10m + 25 = 0$을 풀면 $m = -5$(중근)이므로

$y=(c_1+c_2\ln x)x^{-5}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(1)=c_1=1$,
$y'(1)=-5c_1+c_2=-1$ 이므로 $c_1=1$, $c_2=4$ 이고
특수해는 $y=(1+4\ln x)x^{-5}$ 이다.



23. $E=110\sin 415t$ 이면 $E'=45650\cos 415t$ 이므로
모델링을 하면 $I''+2000I'+250I=45650\cos 415t$
이다. 특성방정식 $\lambda^2+2000\lambda+250=0$을 풀면
$\lambda=-1000\pm 5\sqrt{39990}$ 이다.
$I_p=A\cos 415t+B\sin 415t$ 라 하자.
$I_p{}'=-415A\sin 415t+415B\cos 415t$,
$I_p{}''=-172225A\cos 415t-172225B\sin 415t$ 이므로
$A=-\dfrac{12561054}{1149560641}$, $B=\dfrac{60623200}{1149560641}$
이다. 따라서
$I_p=-\dfrac{12561054}{1149560641}\cos 415t+\dfrac{60623200}{1149560641}\sin 415t$ 이다.

24. $\lambda=-1000\pm 5\sqrt{39990}$ 이므로
$y_h=e^{-1000t}\left(c_1\cos 5\sqrt{39990}\,t+c_2\sin 5\sqrt{39990}\,t\right)$ 이다.

25. $E=200\sin 4t$ 이면 $E'=800\cos 4t$ 이므로 모델링을
하면 $30I''+50I'+40I=800\cos 4t$ 이다. 특성방정식
$30\lambda^2+50\lambda+40=0$을 풀면 $\lambda=\dfrac{-5\pm\sqrt{23}\,i}{6}$ 이다.
$I_p=A\cos 4t+B\sin 4t$ 라 하자.
$I_p{}'=-4A\sin 4t+4B\cos 4t$,
$I_p{}''=-16A\cos 4t-16B\sin 4t$ 이므로 $A=-\dfrac{110}{73}$,
$B=\dfrac{50}{73}$ 이다. 따라서
$I_p=-\dfrac{110}{73}\cos 4t+\dfrac{50}{73}\sin 4t$ 이다.

26. 주어진 조건을 모델링하면
$0.4I''+40I'+10000I=39080\cos 314t$ 이고,
특성방정식이 $0.4\lambda^2+40\lambda+10000=0$, $\lambda=-50\pm 150i$
이므로 $I_h=e^{-50t}(c_1\cos 150t+c_2\sin 150t)$ 이다.
미정계수법에 의하여 $I_p=A\cos 314t+B\sin 314t$
라 하면, $A=-1.985219$, $B=0.847001$ 이므로
$I_p=-1.985219.\cos 314t+0.847001\sin 314t$ 이다.
따라서 일반해는
$$I=e^{-50t}(c_1\cos 150t+c_2\sin 150t)$$
$$-1.985219.\cos 314t+0.847001\sin 314t$$
이다.

27. $m=4$, $k=10$, $c=20$이므로 모델링하면
$4y''+20y'+10y=100\sin 4t$ 이다.
따라서 $L=4$, $R=20$, $C=\dfrac{1}{10}$ 이고 $E'=100\sin 4t$,
즉, $E=-25\cos 4t$ 인 RLC-회로이다.

28. 주어진 조건을 모델링하면
$\dfrac{1}{4}y''+\dfrac{9}{4}y=\cos t-2\sin t$ 이고, 특성방정식이
$\dfrac{1}{4}\lambda^2+\dfrac{9}{4}=0$, $\lambda=\pm 3i$ 이므로 $y_h=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t$
이다. $y_p=A\cos t+B\sin t$ 라 하면, $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-1$
이므로 $y_p=\dfrac{1}{2}\cos t-\sin t$ 이다. 따라서 일반해는
$y=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t+\dfrac{1}{2}\cos t-\sin t$ 이다.
$y(0)=c_1+\dfrac{1}{2}=0$, $y'(0)=3c_2-1=0$ 이므로
$c_1=-\dfrac{1}{2}$, $c_2=\dfrac{1}{3}$ 이고
$y=-\dfrac{1}{2}\cos 3t+\dfrac{1}{3}\sin 3t+\dfrac{1}{2}\cos t-\sin t$ 이다.
공진주파수는 $\omega=3$ 이므로 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{3}{2\pi}$ 이다.

29. 주어진 조건을 모델링하면,
$4y''+36y=61\cos 3.1t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 이다.
특성방정식이 $4\lambda^2+36=0$ 이므로 $\lambda=\pm 3i$ 이고
$y_h=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t$ 이다. $y_p=A\cos 3.1t+B\sin 3.1t$
라 하면 $A=-25$, $B=0$ 이므로 $y_p=-25\cos 3.1t$ 이다.
따라서 $y=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t-25\cos 3.1t$ 이다.
$y(0)=c_1-25=0$, $y'(0)=3c_2=0$ 이므로
$c_1=25$, $c_2=0$ 이고 $y=25(\cos 3t-\cos 3.1t)$ 이므로
$\omega=3.1\,rad/sec$, $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{36}{4}}=3\,rad/sec$ 이므로
두 주파수 역시 미소한 차이를 보이므로 맥놀이
현상이 발생한다.

30. 주어진 조건을 모델링하면 $2y''+6y'+18y=15\sin\omega t$
이다. 이를 최대진폭조건 $c^2=2m^2(\omega_0^2-\omega^2)$ 에 적용
하면 $\omega_{\max}{}^2=\dfrac{9}{2}$ 이다. 이때의 최대진폭을 구하면
$C^*(\omega_{\max})=\dfrac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2-c^2}}=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$ 이다.
한편 미정계수법을 이용한 정상상태의 최대진폭을
구하면 $\omega_{\max}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ 이므로
$y_p=A\cos\dfrac{3}{\sqrt{2}}t+B\sin\dfrac{3}{\sqrt{2}}t$ 이고 이를 초기 모델링
식에 대입하면 $A=\dfrac{-5\sqrt{2}}{9}$, $B=\dfrac{5}{9}$ 이고
$y_p=-\dfrac{5}{9}\sqrt{2}\cos\dfrac{3}{\sqrt{2}}t+\dfrac{5}{9}\sin\dfrac{3}{\sqrt{2}}t$ 이다. 이때

$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ 이므로 위 결과와 동일하다.