CHAPTER 6

Laplace 변환

6.1 Laplace Transform. Linearity. First Shifting Theorem (s-Shifting)

1. $\mathcal{L}(2t+8)=\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{8}{s}$

2. $\mathcal{L}((a-bt)^2)=\mathcal{L}(a^2-2abt+b^2t^2)=\dfrac{a^2}{s}-\dfrac{2ab}{s^2}+\dfrac{2b^2}{s^3}$

3. $\mathcal{L}(\cos 2\pi t)=\dfrac{s}{s^2+4\pi^2}$

4. $\mathcal{L}(\cos^2\omega t)=\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\omega t\right)=\dfrac{1}{2s}+\dfrac{s}{2(s^2+4\omega^2)}$

5. $\mathcal{L}(e^{3t}\sinh t)=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{4t}-e^{2t})$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s-2}\right)=\frac{1}{(s-4)(s-2)}$$

6. $\mathcal{L}(e^{-t}\sinh 4t)=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{3t}-e^{-5t})$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+5}\right)=\frac{4}{(s+1)^2-16}$$

7. $\mathcal{L}(\cos(wt+\theta))=\mathcal{L}(\cos wt\cos\theta-\sin wt\sin\theta)$
$$=\frac{s\cos\theta-w\sin\theta}{s^2+w^2}$$

8. $\mathcal{L}\left(1.5\sin\left(3t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\mathcal{L}(-1.5\cos 3t)=-\dfrac{1.5s}{s^2+9}$

9. $\displaystyle\int_0^{1.5}\frac{2}{3}te^{-st}\,dt=-\frac{2}{3s}te^{-st}\Big|_0^{1.5}-\int_0^{1.5}-\frac{2}{3s}e^{-st}\,dt$
$$=-\frac{1}{s}e^{-1.5s}-\frac{2}{3s^2}e^{-st}\Big|_0^{1.5}$$
$$=-\frac{1}{s}e^{-1.5s}-\frac{2}{3s^2}e^{-1.5s}+\frac{2}{3s^2}$$

10. $\displaystyle\int_0^c ke^{-st}\,dt=-\frac{k}{s}e^{-st}\Big|_0^c=\frac{k}{s}(1-e^{-cs})$

11. $\displaystyle\int_0^b te^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^b-\int_0^b-\frac{1}{s}e^{-st}\,dt$
$$=-\frac{b}{s}e^{-bs}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^b$$
$$=-\frac{b}{s}e^{-bs}-\frac{1}{s^2}e^{-bs}+\frac{1}{s^2}$$

12. $\displaystyle\int_0^1 te^{-st}\,dt+\int_1^2 e^{-st}\,dt$
$$=-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^1-\int_0^1-\frac{1}{s}e^{-st}\,dt-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^2$$
$$=-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}$$

13. $\displaystyle\int_0^1 e^{-st}\,dt+\int_1^2-e^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^2$
$$=\frac{1}{s}(e^{-2s}-2e^{-s}+1)$$

14. $\displaystyle\int_a^b ke^{-st}\,dt=-\frac{k}{s}e^{-st}\Big|_a^b=\frac{k}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$

15. $\displaystyle\int_0^1\left(-\frac{1}{2}t+1\right)e^{-st}\,dt$
$$=-\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{2}t+1\right)e^{-st}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2s}e^{-st}\,dt$$
$$=-\frac{e^{-s}}{2s}+\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{2s^2}-\frac{1}{2s^2}$$

16. $\displaystyle\int_0^1 te^{-st}\,dt+\int_1^2(2-t)e^{-st}\,dt$
$$=-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^1+\frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt$$
$$-\frac{1}{s}(2-t)e^{-st}\Big|_1^2-\frac{1}{s}\int_1^2 e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{s^2}(e^{-2s}-2e^{-s}+1)$$

17.

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{s}$	1	$\dfrac{s}{s^2+w^2}$	$\cos wt$
$\dfrac{1}{s^2}$	t	$\dfrac{1}{s^2+w^2}$	$\dfrac{1}{w}\sin wt$
$\dfrac{1}{s^3}$	$\dfrac{t^2}{2!}$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\dfrac{1}{s^n}$ $(n=0,1,\cdots)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sinh at$
$\dfrac{1}{s^{a+1}}$ (a: 양수)	$\dfrac{t^a}{\Gamma(a+1)}$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos wt$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\dfrac{1}{w}e^{at}\sin wt$

18. 문제 10번에서 $k=1$, $c=2$로 정의하면

$\mathcal{L}(f)=\dfrac{1}{s}(1-e^{-2s})$ 이다. $f_1(t)=1-f(t)$ 이므로

$\mathcal{L}(f_1)=\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(f)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s}(1-e^{-2s})=\dfrac{e^{-2s}}{s}$ 이다.

19. $e^{at}=\cosh at+\sinh at$ 이므로

$\mathcal{L}(e^{at})=\mathcal{L}(\cosh at+\sinh at)$
$$=\frac{s}{s^2-a^2}+\frac{a}{s^2-a^2}=\frac{1}{s-a}$$
이다.

20. M, k는 임의의 고정된 양수라 하고

$f(t)=t^2-kt-\ln M$이라 정의하자. $t>\dfrac{k}{2}$ 일 때,

$f'(t)=2t-k>0$ 이므로 $f(t)$ 는 증가함수이다.

$t_0=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4\ln M}}{2}$ 라 하자. $f(t_0)=0$, $t_0>\dfrac{k}{2}$

이므로, $t>t_0$ 이면 $f(t)>0$ 이다. 즉, $t>t_0$ 이면

$t^2>kt+\ln M$이고 $e^{t^2}>Me^{kt}$ 이다. 따라서 e^{t^2} 은

조건 (2)를 만족하지 않는다.

21. $f(t)=e^{t^2}$ 이면 Laplace 변환이 존재하지 않는다.

22. $st=\tau$로 치환하면 $sdt=d\tau$이다.

$\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int_0^\infty e^{-\tau}\sqrt{\frac{s}{\tau}}\,\frac{1}{s}d\tau$
$$=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau=\frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

23. $ct=\tau$로 치환하면 $cdt=d\tau$이다.

$$\mathcal{L}(f(ct)) = \int_0^\infty e^{-st} f(ct)dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}\tau} f(\tau)\frac{1}{c}d\tau = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$$

$c = w$로 정의하면, $\mathcal{L}(\cos t) = \dfrac{s}{s^2+1}$ 이므로

$\mathcal{L}(\cos wt) = \dfrac{1}{w}\dfrac{\frac{s}{w}}{\left(\frac{s}{w}\right)^2+1} = \dfrac{s}{s^2+w^2}$ 이다.

24. $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, $\mathcal{L}(g(t)) = G(s)$ 라 하자.
즉, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$, $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$ 이다.
Laplace 변환은 선형성이 성립하므로
$\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t)) = aF(s)+bG(s)$
이고
$$\mathcal{L}^{-1}(aF(s)+bG(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(af(t)+bg(t)))$$
$$= af(t)+bg(t) = a\mathcal{L}^{-1}(F(s)) + b\mathcal{L}^{-1}(G(s))$$
이다. 따라서 역변환도 선형성이 성립하다.

25. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{0.2s+1.4}{s^2+1.96}\right) = 0.2\cos 1.4t + \sin 1.4t$

26. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{5s+1}{s^2-25}\right) = 5\cosh 5t + \dfrac{1}{5}\sinh 5t$

27. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{L^2s^2+\pi^2/4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s/L^2}{s^2+(\pi/2L)^2}\right) = \dfrac{1}{L^2}\cos\dfrac{\pi t}{2L}$

28. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{3})}\right)$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s-\sqrt{3}} - \frac{1}{s+\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right)$$

29. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{s^4} - \dfrac{48}{s^6}\right) = \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{2t^5}{5}$

30. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{4s+32}{s^2-16}\right) = 4\cosh 4t + 8\sinh 4t$

31. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{-s+11}{s^2-2s-3}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{s-3} - \dfrac{3}{s+1}\right) = 2e^{3t} - 3e^{-t}$

32. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}\right)$
$$= \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{s+a} - \dfrac{1}{s+b}\right)\right) & a \neq b \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+b)^2}\right) & a = b \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) & a \neq b \\ te^{-bt} & a = b \end{cases}$$

33. $\mathcal{L}(t^3e^{-2t}) = \dfrac{6}{(s+2)^4}$

34. $\mathcal{L}(ke^{-at}\cos\omega t) = \dfrac{k(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$

35. $\mathcal{L}(2e^{-t/2}\sin 4\pi t) = \dfrac{8\pi}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 16\pi^2}$

36. $\mathcal{L}(\sinh t\cos t) = \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}e^t\cos t - \dfrac{1}{2}e^{-t}\cos t\right) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} - \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}$

37. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2\pi}{(s+\pi)^3}\right) = \pi t^2 e^{-\pi t}$

38. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{6}{(s+1)^3}\right) = 3t^2e^{-t}$

39. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{90}{(s+\sqrt{3})^6}\right) = \dfrac{3}{4}t^5e^{-\sqrt{3}t}$

40. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{4}{s^2-2s-3}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{4}{(s-1)^2-4}\right) = 2e^t\sinh 2t$

41. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{\pi}{s^2+4\pi s+3\pi^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{\pi}{(s+2\pi)^2-\pi^2}\right) = e^{-2\pi t}\sinh \pi t$

42. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{a_0}{s+1} + \dfrac{a_1}{(s+1)^2} + \dfrac{a_2}{(s+1)^3}\right) = e^{-t}\left(a_0 + a_1t + \dfrac{1}{2}a_2t^2\right)$

43. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{6s+7}{2s^2+4s+10}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s+7/2}{s^2+2s+5}\right)$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s+1)+1/2}{(s+1)^2+4}\right)$$
$$= e^{-t}\left(3\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

44. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{a(s+k)+b\pi}{(s+k)^2+\pi^2}\right) = e^{-kt}(a\cos\pi t + b\sin\pi t)$

45. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{k_0}{s} + \dfrac{k_1}{(s-a)^2}\right) = k_0 + k_1e^{at}t$

6.2 Transforms of Derivatives and Integrals. ODE

1. $sY + \dfrac{2}{3}Y = \dfrac{-4s}{s^2+4}$,

$$Y = \frac{-4s}{(s^2+4)\left(s+\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{3}{5}}{s+\frac{2}{3}} + \frac{-\frac{3}{5}s - \frac{18}{5}}{s^2+4},$$

$$y = \frac{3}{5}e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{9}{5}\sin 2t$$

2. $sY - 1.5 + 2Y = 0$, $Y = \dfrac{1.5}{s+2}$, $y = 1.5e^{-2t}$

3. $s^2Y - s - 1 + sY - 1 - 6Y = 0$,

$$Y = \frac{s+2}{(s+3)(s-2)} = \frac{1/5}{s+3} + \frac{4/5}{s-2},$$

$$y = \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t}$$

4. $s^2Y + 9Y = \dfrac{10}{s+1}$,

$Y = \dfrac{10}{(s^2+9)(s+1)} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{s-1}{s^2+9}$,

$y = e^{-t} - \cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t$

5. $s^2 Y - 12s - \dfrac{1}{4}Y = 0$, $Y = \dfrac{12s}{s^2 - \dfrac{1}{4}}$, $y = 12\cosh\dfrac{1}{2}t$

6. $s^2 Y - 3.2s - 6.2 - 6sY + 19.2 + 5Y = \dfrac{29s}{s^2+4}$,

$$Y = \frac{3.2s-13}{s^2-6s+5} + \frac{29s}{(s^2+4)(s^2-6s+5)} = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-5} + \frac{0.2s}{s^2+4} - \frac{4.8}{s^2+4},$$

$y = e^t + 2e^{5t} + 0.2\cos 2t - 2.4\sin 2t$

7. $s^2 Y - 3.5s + 10 + 7sY - 24.5 + 12Y = \dfrac{21}{s-3}$,

$$Y = \frac{3.5s+14.5}{s^2+7s+12} + \frac{21}{(s^2+7s+12)(s-3)} = \frac{0.5}{s+3} + \frac{2.5}{s+4} + \frac{0.5}{s-3},$$

$y = 0.5e^{-3t} + 2.5e^{-4t} + 0.5e^{3t}$

8. $s^2 Y - 8.1s - 3.9 - 4sY + 32.4 + 4Y = 0$,

$Y = \dfrac{8.1s-28.5}{(s-2)^2} = \dfrac{8.1(s-2)-12.3}{(s-2)^2} = \dfrac{8.1}{s-2} - \dfrac{12.3}{(s-2)^2}$,

$y = 8.1e^{2t} - 12.3te^{2t}$

9. $s^2 Y - 2s - 7 - 3sY + 6 + 2Y = \dfrac{4}{s^2} - \dfrac{8}{s}$,

$Y = \dfrac{2s^3+s^2-8s+4}{s^2(s-1)(s-2)} = -\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{s-2}$,

$y = -1 + 2t + e^t + 2e^{2t}$

10. $s^2 Y + 25s + 0.04Y = \dfrac{0.04}{s^3}$,

$Y = \dfrac{0.04-25s^4}{s^3(s^2+0.04)} = \dfrac{1-25s^2}{s^3} = \dfrac{1}{s^3} - \dfrac{25}{s}$,

$y = \dfrac{1}{2}t^2 - 25$

11. $s^2 Y - s - 31.5 + 3sY - 3 + 2.25Y = \dfrac{54}{s^4} + \dfrac{64}{s}$,

$$Y = \frac{s^5+34.5s^4+64s^3+54}{s^4(s+1.5)^2} = \frac{32s^2-32s+24}{s^4} + \frac{s+2.5}{(s+1.5)^2},$$

$y = 32t - 16t^2 + 4t^3 + e^{-1.5t} + te^{-1.5t}$

12. $t-2=\tau$라 치환하면, $dt = d\tau$이다.

$y(t) = y(\tau+2) = \tilde{y}(\tau)$, $\mathcal{L}(\tilde{y}) = \tilde{Y}$라 하자.

주어진 방정식을 정리하면,

$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - 3\tilde{y} = 0, \tilde{y}(0) = -3, \tilde{y}'(0) = -5$ 이다. 이 식을 Laplace 변환하면 $s^2\tilde{Y} + 3s + 5 + 2s\tilde{Y} + 6 - 3\tilde{Y} = 0$,

$\tilde{Y} = \dfrac{-3s-11}{s^2+2s-3} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+3} - \dfrac{7}{2}\dfrac{1}{s-1}$ 이므로

$\tilde{y} = \dfrac{1}{2}e^{-3\tau} - \dfrac{7}{2}e^{\tau}$ 이다.

따라서 해는 $y = \dfrac{1}{2}e^{-3(t-2)} - \dfrac{7}{2}e^{t-2}$ 이다.

13. $t+1=\tau$라 치환하면, $dt = d\tau$이다.

$y(t) = y(\tau-1) = \tilde{y}(\tau)$, $\mathcal{L}(\tilde{y}) = \tilde{Y}$라 하자.

주어진 방정식을 정리하면, $\tilde{y}' - 6\tilde{y} = 0, \tilde{y}(0) = 4$ 이다.

이 식을 Laplace 변환하면 $s\tilde{Y} - 4 - 6\tilde{Y} = 0$,

$\tilde{Y} = \dfrac{4}{s-6}$ 이므로 $\tilde{y} = 4e^{6\tau}$ 이다.

따라서 해는 $y = 4e^{6(t+1)}$ 이다.

14. $t-2=\tau$라 치환하면, $dt = d\tau$이다.

$y(t) = y(\tau+2) = \tilde{y}(\tau)$, $\mathcal{L}(\tilde{y}) = \tilde{Y}$라 하자.

주어진 방정식을 정리하면,

$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' + 5\tilde{y} = 50\tau, \tilde{y}(0) = -4, \tilde{y}'(0) = 14$ 이다. 이 식을 Laplace 변환하면 $s^2\tilde{Y} + 4s - 14 + 2s\tilde{Y} + 8 + 5\tilde{Y} = \dfrac{50}{s^2}$,

$$\tilde{Y} = \frac{-4s+6}{s^2+2s+5} + \frac{50}{s^2(s^2+2s+5)} = \frac{4}{(s+1)^2+4} - \frac{4}{s} + \frac{10}{s^2}$$

이므로 $\tilde{y} = 2e^{-\tau}\sin 2\tau - 4 + 10\tau$이다. 따라서 해는 $y = 2e^{-(t-2)}\sin 2(t-2) - 4 + 10(t-2)$ 이다.

15. $t-1.5=\tau$라 치환하면, $dt = d\tau$이다.

$y(t) = y(\tau+1.5) = \tilde{y}(\tau)$, $\mathcal{L}(\tilde{y}) = \tilde{Y}$라 하자.

주어진 방정식을 정리하면,

$$\tilde{y}'' + 3\tilde{y}' - 4\tilde{y} = 6e^{2\tau}, \tilde{y}(0) = 4, \tilde{y}'(0) = 5$$

이다. 이 식을 Laplace 변환하면

$$s^2\tilde{Y} - 4s - 5 + 3s\tilde{Y} - 12 - 4\tilde{Y} = \frac{6}{s-2},$$

$$\tilde{Y} = \frac{4s+17}{s^2+3s-4} + \frac{6}{(s-2)(s^2+3s-4)} = \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s-1}$$

이므로 $\tilde{y} = e^{2\tau} + 3e^{\tau}$ 이다.

따라서 해는 $y = e^{2(t-1.5)} + 3e^{t-1.5}$ 이다.

16. $f(t) = t\cos 4t$, $f(0) = 0$,

$f'(t) = \cos 4t - 4t\sin 4t$, $f'(0) = 1$,

$f''(t) = -8\sin 4t - 16t\cos 4t$,

$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - 1 = \dfrac{-32}{s^2+16} - 16\mathcal{L}(f)$,

$\mathcal{L}(f) = \dfrac{s^2-16}{(s^2+16)^2}$

17. $f(t) = te^{at}$, $f(0) = 0$,

$f'(t) = e^{at} + ate^{at}$,

$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) = \dfrac{1}{s-a} + a\mathcal{L}(f)$,

$\mathcal{L}(f) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

18. $f(t) = \cos^2 2t$, $f(0) = 1$,

$f'(t) = -4\cos 2t\sin 2t = -2\sin 4t$,

$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - 1 = \dfrac{-8}{s^2+16}$,

$$\mathcal{L}(f)=\frac{s^2+8}{s(s^2+16)}$$

19. $f(t)=\cos^2\omega t\,,\ f(0)=1\,,$

$f'(t)=-2w\cos\omega t\sin\omega t=-\omega\sin 2\omega t\,,$

$$\mathcal{L}(f')=s\,\mathcal{L}(f)-1=\frac{-2\omega^2}{s^2+4\omega^2}\ ,$$

$$\mathcal{L}(f)=\frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$$

20. $f(t)=\sin^4 t\,,\ f(0)=0\,,$

$f'(t)=4\sin^3 t\cos t\,,\ f'(0)=0\,,$

$f''(t)=12\sin^2 t\cos^2 t-4\sin^4 t$

$\quad=3\sin^2 2t-4\sin^4 t=3-3\cos^2 2t-4\sin^4 t\,,$

$$\mathcal{L}(f'')=s^2\mathcal{L}(f)=\frac{3}{s}-\frac{3s^2+24}{s(s^2+16)}-4\mathcal{L}(f)$$

$$=\frac{24}{s(s^2+16)}-4\mathcal{L}(f)\,,$$

$$\mathcal{L}(f)=\frac{24}{s(s^2+4)(s^2+16)}$$

21. $f(t)=\sinh^2 t\,,\ f(0)=0\,,$

$f'(t)=2\sinh t\cosh t=\sinh 2t\,,$

$$\mathcal{L}(f')=s\,\mathcal{L}(f)=\frac{2}{s^2-4}\,,$$

$$\mathcal{L}(f)=\frac{2}{s(s^2-4)}$$

22. (a) $f(t)=t\cos wt\,,\ f(0)=0\,,$

$f'(t)=\cos wt-wt\sin wt\,,\ f'(0)=1\,,$

$f''(t)=-2w\sin wt-w^2t\cos wt=-2w\sin wt-w^2f(t)\,,$

$$\mathcal{L}(f'')=s^2\,\mathcal{L}(f)-1=\frac{-2w^2}{s^2+w^2}-w^2\mathcal{L}(f)\,,$$

$$\mathcal{L}(f)=\frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$$

(b) $\dfrac{1}{(s^2+w^2)^2}=\dfrac{1}{2w^2}\left(\dfrac{1}{s^2+w^2}-\dfrac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}\right)$이므로

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+w^2)^2}\right)=\frac{1}{2w^2}\left(\frac{1}{w}\sin wt-t\cos wt\right)$$

$$=\frac{1}{2w^3}(\sin wt-wt\cos wt)$$

이다.

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+w^2)^2}\right)=\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2w}\dfrac{2ws}{(s^2+w^2)^2}\right)=\dfrac{1}{2w}t\sin wt$

(d) $\dfrac{s^2}{(s^2+w^2)^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s^2+w^2}+\dfrac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}\right)$이므로

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+w^2)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}\sin wt+t\cos wt\right)$$

$$=\frac{1}{2w}(\sin wt+wt\cos wt)$$

이다.

(e) $f(t)=t\cosh at\,,\ f(0)=0\,,$

$f'(t)=\cosh at+at\sinh at\,,\ f'(0)=1\,,$

$f''(t)=2a\sinh at+a^2t\cosh at=2a\sinh at+a^2f(t)\,,$

$$\mathcal{L}(f'')=s^2\,\mathcal{L}(f)-1=\frac{2a^2}{s^2-a^2}+a^2\,\mathcal{L}(f)\,,$$

$$\mathcal{L}(f)=\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$$

(f) $f(t)=t\sinh at\,,\ f(0)=0\,,$

$f'(t)=\sinh at+at\cosh at\,,\ f'(0)=0\,,$

$f''(t)=2a\cosh at+a^2t\sinh at=2a\cosh at+a^2f(t)\,,$

$$\mathcal{L}(f'')=s^2\,\mathcal{L}(f)=\frac{2as}{s^2-a^2}+a^2\,\mathcal{L}(f)\,,$$

$$\mathcal{L}(f)=\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$$

23. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{s^2+s/3}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{s}\cdot\dfrac{1}{s+1/3}\right)$

$$=\int_0^t 2e^{-\frac{1}{3}\tau}d\tau=6-6e^{-\frac{1}{3}t}$$

24. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{20}{s^3-2\pi s^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{20}{s^2-2\pi s}\right)$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\left(-\frac{10}{\pi s}+\frac{10}{\pi(s-2\pi)}\right)\right)$$

$$=\int_0^t-\frac{10}{\pi}+\frac{10}{\pi}e^{2\pi\tau}d\tau=-\frac{10}{\pi}t+\frac{5e^{2\pi t}}{\pi^2}-\frac{5}{\pi^2}$$

25. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2/4)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s^2+\omega^2/4}\right)$

$$=\int_0^t\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}d\tau=-\frac{4}{\omega^2}\cos\frac{\omega\tau}{2}\Big|_0^t$$

$$=-\frac{4}{\omega^2}\cos\frac{\omega t}{2}+\frac{4}{\omega^2}$$

26. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^4-s^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s^3-s}\right)$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2-1}\right)\right)=\int_0^t(-1+\cosh\tau)d\tau$$

$$=-\tau+\sinh\tau\Big|_0^t=-t-\sinh t$$

27. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+8}{s^4+4s^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{s+8}{s^3+4s}\right)$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\left(\frac{2}{s}+\frac{-2s+1}{s^2+4}\right)\right)$$

$$=\int_0^t\left(2-2\cos 2\tau+\frac{1}{2}\sin 2\tau\right)d\tau$$

$$=2\tau-\sin 2\tau-\frac{1}{4}\cos 2\tau\Big|_0^t=2t-\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}$$

28. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s+4}{s^4+k^2s^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{3s+4}{s^3+k^2s}\right)$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\left(\frac{4}{k^2}\frac{1}{s}-\frac{4}{k^2}\frac{s}{s^2+k^2}+\frac{3}{s^2+k^2}\right)\right)$$

$$=\int_0^t\left(\frac{4}{k^2}-\frac{4}{k^2}\cos k\tau+\frac{3}{k}\sin k\tau\right)d\tau$$

$$=\frac{4}{k^2}\tau-\frac{4}{k^3}\sin k\tau-\frac{3}{k^2}\cos k\tau\Big|_0^t$$

$$=\frac{4}{k^2}t-\frac{4}{k^3}\sin kt-\frac{3}{k^2}\cos kt+\frac{3}{k^2}$$

29. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^3+as^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s^2+as}\right)$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{1}{as}-\frac{1}{a(s+a)}\right)\right)$$

$$=\int_0^t\frac{1}{a}-\frac{1}{a}e^{-a\tau}d\tau=\frac{t}{a}+\frac{e^{-at}}{a^2}-\frac{1}{a^2}$$

30. (a) 정리 1과 정리 2는 미분방정식을 대수식으로 바꾸는 역할을 하고 정리 3은 단순히 Laplace 변환이나 역변환을 할 때 도움을 준다. 정리 1과 정리 2는 반드시 적용되는 반면, 정리 3은 다른 방법을 적용하여 문제를 해결할 수 있으므로 정리 1과 정리 2가 정리 3보다 중요하다.

(b) $$\begin{aligned}\mathcal{L}(f') &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt \\ &= \int_0^a e^{-st}f'(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}f'(t)dt \\ &= e^{-st}f(t)\Big|_0^{a-0} + s\int_0^a e^{-st}f(t)dt \\ &\quad + e^{-st}f(t)\Big|_{a+0}^{\infty} + s\int_a^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &\quad - f(0) + e^{-as}f(a-0) - e^{-as}f(a+0) \\ &= s\mathcal{L}(f) - f(0) - e^{-as}[f(a+0) - f(a-0)]\}\end{aligned}$$

(c) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$, $f'(t) = \begin{cases} -e^{-t} & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f') &= \int_0^1 -e^{-t}e^{-st}dt \\ &= \frac{1}{s+1}e^{-(s+1)t}\Big|_0^1 = \frac{e^{-(s+1)}-1}{s+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \int_0^1 e^{-t}e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)t}\Big|_0^1 = \frac{1-e^{-(s+1)}}{s+1}\end{aligned}$$

이고 $f(0)=1$, $f(1+0)=0$, $f(1-0)=e^{-1}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}&s\mathcal{L}(f) - f(0) - [f(1+0) - f(1-0)]e^{-s} \\ &\quad = s\frac{1-e^{-(s+1)}}{s+1} - 1 + e^{-(s+1)} \\ &\quad = \frac{e^{-(s+1)}-1}{s+1} = \mathcal{L}(f')\end{aligned}$$

(d) Laplace 변환은 미분방정식을 대수적인 방정식으로 바꾼다.

6.3 Unit Step Function(Heaviside Function). Second Shifting Theorem(t-Shifting)

2. 주어진 함수를 정리하면
$t\{1-u(t-2)\} = t - \{(t-2)+2\}u(t-2)$ 이므로
Laplace 변환은 $\dfrac{1}{s^2} - e^{-2s}\left(\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}\right)$ 이다.

3. 주어진 함수를 정리하면 $(t-3)u(t-3)$ 이므로
Laplace 변환은 $\dfrac{e^{-3s}}{s^2}$ 이다.

4. 주어진 함수를 정리하면
$$\begin{aligned}&(\cos 2t)\{1-u(t-\pi)\} \\ &\quad = \cos 2t + [\cos 2(t-\pi)]u(t-\pi)\end{aligned}$$
이므로 Laplace 변환은 $\dfrac{s}{s^2+4} + \dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+4}$ 이다.

5. 주어진 함수를 정리하면
$e^{-t}\{1-u(t-\pi)\} = e^{-t} + e^{-\pi}e^{-(t-\pi)}u(t-\pi)$ 이므로
Laplace 변환은 $\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{e^{-\pi}e^{-\pi s}}{s+1}$ 이다.

6. 주어진 함수를 정리하면
$$\begin{aligned}&(\sin \pi t)\{u(t-2) - u(t-4)\} \\ &\quad = \sin\pi(t-2)u(t-2) - \sin\pi(t-4)u(t-4)\end{aligned}$$
이므로 Laplace 변환은 $\dfrac{\pi e^{-2s}}{s^2+\pi^2} - \dfrac{\pi e^{-4s}}{s^2+\pi^2}$ 이다.

7. 주어진 함수를 정리하면
$$\begin{aligned}&\left(e^{-\frac{\pi t}{2}}\right)\{u(t-1) - u(t-3)\} \\ &\quad = e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\pi(t-1)}{2}}u(t-1) - e^{-\frac{3\pi}{2}}e^{-\frac{\pi(t-3)}{2}}u(t-3)\end{aligned}$$
이므로 Laplace 변환은 $\dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}-s}}{s+\frac{\pi}{2}} - \dfrac{e^{-\frac{3\pi}{2}-3s}}{s+\frac{\pi}{2}}$ 이다.

8. 주어진 함수를 정리하면
$$\begin{aligned}&t^2(u(t-1) - u(t-2)) \\ &\quad = \{(t-1)^2 + 2(t-1)+1\}u(t-1) \\ &\qquad - \{(t-2)^2 + 4(t-2)+4\}u(t-2)\end{aligned}$$
이므로 Laplace 변환은
$$\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-s} - \left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s}\right)e^{-2s}$$
이다.

9. 주어진 함수를 정리하면
$$2t^2u\left(t-\frac{5}{2}\right) = \left\{2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2 + 10\left(t-\frac{5}{2}\right) + \frac{25}{2}\right\}u\left(t-\frac{5}{2}\right)$$
이므로 Laplace 변환은 $\left(\dfrac{4}{s^3}+\dfrac{10}{s^2}+\dfrac{25}{2s}\right)e^{-\frac{5}{2}s}$ 이다.

10. 주어진 함수를 정리하면
$$\begin{aligned}&\sinh t\,(1-u(t-2)) \\ &\quad = \sinh t - \frac{1}{2}\left(e^{(t-2)+2} - e^{-(t-2)-2}\right)u(t-2)\end{aligned}$$
이므로 Laplace 변환은
$$\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{s-1} - \frac{e^{-2}}{s+1}\right)e^{-2s}$$
이다.

11. 주어진 함수를 정리하면
$$\begin{aligned}&(\sin t)\left\{u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - u(t-\pi)\right\} \\ &\quad = \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \sin(t-\pi)u(t-\pi)\end{aligned}$$
이므로 Laplace 변환은 $\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+1} + \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$ 이다.

12. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^3}\right) = \dfrac{1}{2}t^2$ 이므로 s-shifting 정리에 의하여
$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-1)^3}\right) = \dfrac{1}{2}t^2e^t$ 이다.
또한 t-shifting 정리를 적용하면

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{(s-1)^3}\right) = \frac{1}{2}(t-2)^2e^{t-2}u(t-2) = \begin{cases}\dfrac{1}{2}(t-2)^2e^{t-2} & (t>2)\\ 0 & (t<2)\end{cases}$$

이다.

13. $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4(1-e^{-\pi s})}{s^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+4}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4e^{-\pi s}}{s^2+4}\right)$$
$$= 2\sin 2t + 2\sin 2(t-\pi)u(t-\pi) = 2\sin 2t + 2\sin 2t\, u(t-\pi) = \begin{cases}4\sin 2t & (\pi<t)\\ 2\sin 2t & (\pi>t)\end{cases}$$

14. $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4(e^{-2s}-2e^{-5s})}{s}\right) = 4\{u(t-2)-2u(t-5)\} = \begin{cases}0 & (t<2)\\ 4 & (2<t<5)\\ -4 & (5<t)\end{cases}$$

15. $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^6}\right) = \frac{1}{5!}(t-2)^5u(t-2) = \begin{cases}\dfrac{1}{5!}(t-2)^5 & (t>2)\\ 0 & (t<2)\end{cases}$$

16. $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2(e^{-s}-e^{-3s})}{s^2-4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2e^{-s}}{s^2-4}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\right)$$
$$= \sinh 2(t-1)u(t-1)-\sinh 2(t-3)u(t-3) = \begin{cases}0 & (t<1)\\ \sinh(2t-2) & (1<t<3)\\ \sinh(2t-2)-\sinh(2t-6) & (t>3)\end{cases}$$

17. $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s(1+e^{-2\pi s})}{s^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{se^{-2\pi s}}{s^2+1}\right)$$
$$= \cos t+\cos(t-2\pi)u(t-2\pi) = \cos t+\cos t\, u(t-2\pi) = \begin{cases}2\cos t & (2\pi<t)\\ \cos t & (2\pi>t)\end{cases}$$

이므로 s-shifting 정리에 의하여

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+1)(1+e^{-2\pi(s+1)})}{(s+1)^2+1}\right) = \begin{cases}2e^{-t}\cos t & (2\pi<t)\\ e^{-t}\cos t & (2\pi>t)\end{cases}$$

이다.

18. $4s^2Y-\frac{8}{3}s-4-12sY+8+9Y=0$,

$$Y=\frac{8s-12}{12s^2-36s+27}=\frac{4(2s-3)}{3(2s-3)^2}=\frac{2}{3}\frac{1}{s-3/2},$$

$$y=\frac{2}{3}e^{3t/2}$$

19. $s^2Y-s-4-6sY+6+8Y=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+4}$,

$$Y=\frac{s-2}{s^2-6s+8}+\frac{3}{(s^2-6s+8)(s+1)(s+4)} = \frac{83}{80}\frac{1}{s-4}-\frac{1}{12}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{15}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{48}\frac{1}{s+4},$$

$$y=\frac{83}{80}e^{4t}-\frac{1}{12}e^{2t}+\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{48}e^{-4t}$$

20. $s^2Y-\frac{19}{12}s+5+10sY-\frac{190}{12}+24Y=\frac{288}{s^3}$,

$$Y=\frac{1}{s^2+10s+24}\left(\frac{288}{s^3}-\frac{19}{12}s-5+\frac{190}{12}\right) = \frac{12}{s^3}-\frac{5}{s^2}+\frac{19}{12s},$$

$$y=6t^2-5t+\frac{19}{12}$$

21. $y(0)=a,\ y'(0)=b$라 하자.
$4\cos t\,(1-u(t-\pi))=4\cos t+4\cos(t-\pi)\,u(t-\pi)$ 이므로

$s^2Y-as-b+4Y=\dfrac{4s+4se^{-\pi s}}{s^2+1}$ 이다.

$$Y=\frac{as+b}{s^2+4}+\frac{4s+4se^{-\pi s}}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{as+b}{s^2+4}+\frac{4s/3}{s^2+1}-\frac{4s/3}{s^2+4}+\left(\frac{4s/3}{s^2+1}-\frac{4s/3}{s^2+4}\right)e^{-\pi s},$$

$$y=a\cos 2t+b\sin 2t+\frac{4}{3}\cos t-\frac{4}{3}\cos 2t+\left(\frac{4}{3}\cos(t-\pi)-\frac{4}{3}\cos 2(t-\pi)\right)u(t-\pi)$$
$$=\begin{cases}a\cos 2t+b\sin 2t+\dfrac{4}{3}\cos t-\dfrac{4}{3}\cos 2t & (0<t<\pi)\\ a\cos 2t+b\sin 2t-\dfrac{8}{3}\cos 2t & (t>\pi)\end{cases}$$

22. $4t+(8-4t)\,u(t-1)=4t+\{4-4(t-1)\}\,u(t-1)$ 이므로

$(s^2+3s+2)\,Y=\dfrac{4}{s^2}+\left(\dfrac{4}{s}-\dfrac{4}{s^2}\right)e^{-s}$ 이다.

$$Y=\frac{4}{s^2(s^2+3s+2)}+\frac{4(s-1)e^{-s}}{s^2(s^2+3s+2)} = -\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\left(\frac{5}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{8}{s+1}+\frac{3}{s+2}\right)e^{-s},$$

$$y=-3+2t+4e^{-t}-e^{-2t}-\{5-2(t-1)-8e^{-(t-1)}+3e^{-2(t-1)}\}u(t-1)$$
$$=\begin{cases}-3+2t+4e^{-t}-e^{-2t} & (0<t<1)\\ -10+4t+(4-8e)e^{-t}+(3e^2-1)e^{-2t} & (t>1)\end{cases}$$

23. $$(3\sin t-\cos t)\,[1-u(t-2\pi)]+(3\sin 2t-\cos 2t)u(t-2\pi)$$
$$=(3\sin t-\cos t)-[3\sin(t-2\pi)-\cos(t-2\pi)]\,u(t-2\pi)+[3\sin 2(t-2\pi)-\cos 2(t-2\pi)]\,u(t-2\pi)$$

이므로

$$s^2Y+1+sY-2Y = \left(\frac{3-s}{s^2+1}\right)(1-e^{-2\pi s})+\left(\frac{6-s}{s^2+4}\right)e^{-2\pi s}$$

이다.

$$Y=\frac{-1}{s^2+s-2}+\frac{3-s}{(s^2+1)(s^2+s-2)}(1-e^{-2\pi s})+\frac{6-s}{(s^2+4)(s^2+s-2)}e^{-2\pi s}$$
$$=-\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}-\frac{1}{s^2+4}e^{-2\pi s},$$

$$y=-\sin t+\sin(t-2\pi)\,u(t-2\pi)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2\pi)\,u(t-2\pi) = \begin{cases}-\sin t, & 0<t<2\pi\\ -\dfrac{1}{2}\sin 2t, & t>2\pi\end{cases}$$

24. $(s^2+3s+2)\,Y=\dfrac{1}{s}-\dfrac{e^{-s}}{s}$,

$$Y=\frac{1-e^{-s}}{s(s^2+3s+2)} = \left(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s+2)}-\frac{1}{s+1}\right)(1-e^{-s}),$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t}$$
$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}-e^{-(t-1)}\right)u(t-1)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t} & (0<t<1)\\ \frac{1}{2}e^{-2t}(1-e^{2})-e^{-t}(1-e) & (t>1)\end{cases}$$

25. $y(0)=a,\ y'(0)=b$라 하자.

$2t(1-u(t-1))+2u(t-1)=2t-2(t-1)u(t-1)$

이므로 $s^2Y-as-b+Y=\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s^2}e^{-s}$ 이다.

$$Y=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{2}{s^2(s^2+1)}-\frac{2e^{-s}}{s^2(s^2+1)}$$
$$=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s^2+1}-\left(\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s^2+1}\right)e^{-s},$$
$$y=a\cos t+b\sin t+2t-2\sin t$$
$$-\{2(t-1)-2\sin(t-1)\}u(t-1)$$
$$=\begin{cases}a\cos t+b\sin t+2t-2\sin t & (0<t<1)\\ a\cos t+b\sin t+2-2\sin t+2\sin(t-1) & (t>1)\end{cases}$$

26. $t-\pi=\tau$라 치환하면, $dt=d\tau$이다.

$y(t)=y(\tau+\pi)=\tilde{y}(\tau)$, $\mathcal{L}(\tilde{y})=\tilde{Y}$라 하면, 방정식은

$\tilde{y}''+2\tilde{y}'+5\tilde{y}=10\sin(\tau+\pi)(1-u(\tau-\pi))$, $\tilde{y}(0)=1$,

$\tilde{y}'(0)=2e^{-\pi}-2$ 이다.

$$10\sin(\tau+\pi)(1-u(\tau-\pi))$$
$$=-10\sin\tau-10\sin(\tau-\pi)u(\tau-\pi)$$

이므로

$$s^2\tilde{Y}-s-(2e^{-\pi}-2)++2s\tilde{Y}-2+5\tilde{Y}=\frac{-10(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}$$

이다. 따라서

$$\tilde{Y}=\frac{s+2e^{-\pi}}{s^2+2s+5}-\frac{10(1+^{-\pi s})}{(s^2+1)(s^2+2s+5)}$$
$$=\frac{2e^{-\pi}}{(s+1)^2+4}+\frac{s-2}{s^2+1}+\left(\frac{s-2}{s^2+1}-\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+4}\right)e^{-\pi s},$$
$$\tilde{y}=e^{-\tau-\pi}\sin 2\tau+\cos\tau-2\sin\tau$$
$$+u(\tau-\pi)\{\cos(\tau-\pi)-2\sin(\tau-\pi)\}$$
$$+u(\tau-\pi)\left\{-e^{-(\tau-\pi)}\cos 2\tau+\frac{1}{2}e^{-(\tau-\pi)}\sin 2\tau\right\}$$

이다. 즉, 일반해는

$$y=e^{-t}\sin 2t-\cos t-2\sin t$$
$$+u(\tau-2\pi)\left\{\cos t-2\sin t-e^{-t+2\pi}\left(\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right\}$$

이다.

27. $t-1=\tau$라 치환하면, $dt=d\tau$이다.

$y(t)=y(\tau+1)=\tilde{y}(\tau)$, $\mathcal{L}(\tilde{y})=\tilde{Y}$라 하면, 방정식은

$\tilde{y}''+4\tilde{y}=8(\tau+1)^2(1-u(\tau-4))$, $\tilde{y}(0)=1+\cos 2$,

$\tilde{y}'(0)=4-2\sin 2$ 이다.

$$8(\tau+1)^2(1-u(\tau-4))$$
$$=8(\tau+1)^2-8\{(\tau-4)^2+10(\tau-4)+25\}u(\tau-4)$$

이므로

$$s^2\tilde{Y}-(1+\cos 2)s-(4-2\sin 2)+4\tilde{Y}$$
$$=\frac{16}{s^3}+\frac{16}{s^2}+\frac{8}{s}-8e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{10}{s^2}+\frac{25}{s}\right)$$

이다. 따라서

$$\tilde{Y}=\frac{(1+\cos 2)s+(4-2\sin 2)}{s^2+4}+\frac{16+16s+8s^2}{s^3(s^2+4)}$$
$$-\frac{8(2+10s+25s^2)e^{-4s}}{s^3(s^2+4)}$$
$$=\frac{s\cos 2-2\sin 2}{s^2+4}+\frac{1}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s^3}$$
$$+\left(\frac{49s+20}{s^2+4}-\frac{49}{s}-\frac{20}{s^2}-\frac{4}{s^3}\right)e^{-4s},$$
$$\tilde{y}=\cos 2\cos 2\tau-\sin 2\sin 2\tau+1+4\tau+2\tau^2$$
$$+u(\tau-4)\{49\cos 2(\tau-4)+10\sin 2(\tau-4)\}$$
$$+u(\tau-4)\{-49-20(\tau-4)-2(\tau-4)^2\}$$
$$=\cos 2(\tau+1)+1+4\tau+2\tau^2$$
$$+u(\tau-4)\{49\cos 2(\tau-4)+10\sin 2(\tau-4)\}$$
$$+u(\tau-4)\{-49-20(\tau-4)-2(\tau-4)^2\}$$

이다. 즉, 일반해는

$$y=\cos 2t+1+4(t-1)+2(t-1)^2$$
$$+u(t-5)\{49\cos 2(t-5)+10\sin 2(t-5)\}$$
$$+u(t-5)\{-49-20(t-5)-2(t-5)^2\}$$
$$=\cos 2t+2t^2-1$$
$$+u(\tau-5)\{49\cos 2(t-5)+10\sin 2(t-5)-2t^2+1\}$$

이다.

※ 28번~30번

$Li'+Ri=v(t)$, $i(0)=0$ 이므로 $LsI+RI=\mathcal{L}(v)$,

$I=\frac{\mathcal{L}(v)}{Ls+R}$ 이다.

28. $v(t)=40u(t-\pi)\sin t=-40u(t-\pi)\sin(t-\pi)$ 이므로

$\mathcal{L}(v)=\frac{-40e^{-\pi s}}{s^2+1}$ 이다. $R=1000, L=1$ 이므로

$$I=\frac{-40e^{-\pi s}}{(s+1000)(s^2+1)}$$
$$=\frac{-40e^{-\pi s}}{1000001}\left(\frac{1}{s+1000}-\frac{-s+1000}{s^2+1}\right)$$

이다. 즉,

$$i=\frac{-40}{1000001}\left(e^{-1000(t-\pi)}-\cos(t-\pi)\right)u(t-\pi)$$
$$-\frac{4000}{1000001}\sin(t-\pi)u(t-\pi)$$
$$=\frac{-40}{1000001}\left(e^{-1000(t-\pi)}+\cos t-1000\sin t\right)u(t-\pi)$$

이다.

29. $v(t)=490e^{-5t}(1-u(t-1))$
$=490e^{-5t}-490e^{-5}e^{-5(t-1)}u(t-1)$

이므로 $\mathcal{L}(v)=\frac{490}{s+5}-\frac{490e^{-s-5}}{s+5}$ 이다.

$R=25, L=0.1$ 이므로

$$I=\frac{490(1-e^{-s-5})}{(0.1s+25)(s+5)}=\left(\frac{20}{s+5}-\frac{20}{s+250}\right)(1-e^{-s-5})$$

이다. 즉,

$$i=20(e^{-5t}-e^{-250t})-20(e^{-5t}-e^{-250t+245})u(t-1)$$

이다.

30. $v(t)=200t(1-u(t-2))=200t-200\{(t-2)+2\}u(t-2)$

이므로 $\mathcal{L}(v)=\frac{200}{s^2}-200\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)e^{-2s}$ 이다.

$R=10, L=0.5$ 이므로

$$I=\frac{200-200(1+2s)e^{-2s}}{(0.5s+10)s^2}=400\frac{1-(1+2s)e^{-2s}}{s^2(s+20)}$$
$$=\frac{1}{s+20}+\frac{-s+20}{s^2}+\left(\frac{39}{s+20}+\frac{-39s-20}{s^2}\right)e^{-2s}$$

이다. 즉,

$$i=e^{-20t}-1+20t+\left(39e^{-20(t-2)}-39-20(t-2)\right)u(t-2)$$
$$=e^{-20t}-1+20t+\left(39e^{-20(t-2)}-20t+1\right)u(t-2)$$

이다.

31. $i=\frac{dq}{dt}$ 이고 $q(0)=CV_0$ 이므로

$I=sQ-q(0)=sQ-CV_0$ 이다.

KVL에 의하여 $\frac{q}{C}+Ri=0$ 이고 $\frac{Q}{C}+RI=0$ 이므로

$\frac{Q}{C}+RsQ-RCV_0=0$, $Q=\frac{RCV_0}{Rs+1/C}=\frac{CV_0}{s+1/RC}$

이다. 따라서 $q=CV_0e^{-t/RC}$ 이다.

※ 32번~34번

$10i+100q=v(t)$, $i(0)=0$, $10i'+100i=v'(t)$ 이므로

$10sI+100I=s\mathcal{L}(v)-v(0)$, $I=\frac{s\mathcal{L}(v)-v(0)}{10s+100}$ 이다.

32. $v(t)=14\cdot10^6e^{-3t}u(t-4)$
$=14\cdot10^6e^{-12}e^{-3(t-4)}u(t-4)$

이므로 $\mathcal{L}(v)=\frac{14\cdot10^6e^{-4s-12}}{s+3}$ 이고 $v(0)=0$ 이다.

따라서

$$I=\frac{14\cdot10^6se^{-4s-12}}{(10s+100)(s+3)}=\frac{14\cdot10^5se^{-4s-12}}{(s+10)(s+3)}$$
$$=14\cdot10^5e^{-4s-12}\left(\frac{10}{7}\frac{1}{s+10}-\frac{3}{7}\frac{1}{s+3}\right)$$

이다. 즉,

$$i=14\cdot10^5e^{-12}\left(\frac{10}{7}e^{-10(t-4)}-\frac{3}{7}e^{-3(t-4)}\right)u(t-4)$$
$$=10^5\left(20e^{-10t+28}-6e^{-3t}\right)u(t-4)$$

이다.

33. $v(t)=100(t-2)u(t-2)$ 이므로

$\mathcal{L}(v)=\frac{100e^{-2s}}{s^2}$ 이고 $v(0)=0$ 이다.

따라서

$I=\frac{100e^{-2s}}{s(10s+100)}=\frac{10e^{-2s}}{s(s+10)}=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+10}\right)e^{-2s}$ 이다.

즉, $i=\left(1-e^{-10(t-2)}\right)u(t-2)$ 이다.

34. $v(t)=100(u(t-0.5)-u(t-0.6))$ 이므로

$\mathcal{L}(v)=100\left(\frac{e^{-0.5s}}{s}-\frac{e^{-0.6s}}{s}\right)$ 이고 $v(0)=0$ 이다.

따라서 $I=\frac{100\left(e^{-0.5s}-e^{-0.6s}\right)}{10s+100}=\frac{10\left(e^{-0.5s}-e^{-0.6s}\right)}{s+10}$

이다. 즉,

$$i=10e^{-10(t-0.5)}u(t-0.5)-10e^{-10(t-0.6)}u(t-0.6)$$
$$=\begin{cases}0 & t<0.5\\ 10e^{-10(t-0.5)} & 0.5<t<0.6\\ 10e^{-10t}\left(e^5-e^6\right) & t>0.6\end{cases}$$

이다.

※ 35번~37번

$Li'+\frac{q}{C}=v(t)$, $i(0)=0$, $q(0)=0$ 이므로

$LsI+\frac{I}{Cs}=\mathcal{L}(v)$, $I=\frac{\mathcal{L}(v)}{Ls+1/Cs}=\frac{Cs\mathcal{L}(v)}{LCs^2+1}$ 이다.

35. $v(t)=-9900\cos t(u(t-\pi)-u(t-3\pi))$
$=-9900\{-\cos(t-\pi)u(t-\pi)+\cos(t-3\pi)u(t-3\pi)\}$

이므로 $\mathcal{L}(v)=\frac{-9900s}{s^2+1}\left(-e^{-\pi s}+e^{-3\pi s}\right)$ 이다.

$L=1$, $C=\frac{1}{100}$ 이므로

$$I=\frac{99s^2\left(e^{-\pi s}-e^{-3\pi s}\right)}{\left(0.01s^2+1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{9900s^2\left(e^{-\pi s}-e^{-3\pi s}\right)}{\left(s^2+100\right)\left(s^2+1\right)}$$
$$=100\left(\frac{100}{s^2+100}-\frac{1}{s^2+1}\right)\left(e^{-\pi s}-e^{-3\pi s}\right)$$

이다. 즉,

$$i=100(10\sin10t+\sin t)u(t-\pi)-100(10\sin10t+\sin t)u(t-3\pi)$$
$$=100(10\sin10t+\sin t)(u(t-\pi)-u(t-3\pi))$$

이다.

36. $v(t)=200\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)(1-u(t-1))$
$=200t-\frac{200}{3}t^3+200u(t-1)\left\{\frac{1}{3}(t-1)^3+(t-1)^2-\frac{2}{3}\right\}$

이므로 $\mathcal{L}(v)=200\left(\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^4}\right)+200\left(\frac{2}{s^4}+\frac{2}{s^3}-\frac{2}{3s}\right)e^{-s}$

이다. $L=0.1$, $C=0.25$ 이므로

$$I=\frac{50\left(s^2-2\right)+50\left(2+2s-\frac{2}{3}s^3\right)e^{-s}}{s^4\left(0.25s^2+1\right)}$$
$$=\frac{-75s}{s^2+4}+\frac{75s^2-100}{s^3}+\left(\frac{25s-700/3}{s^2+4}+\frac{-25s^2+100s+100}{s^3}\right)e^{-s}$$

이다. 즉,

$$i=-75\cos2t+75-50t^2+\left\{25\cos2(t-1)-\frac{350}{3}\sin2(t-1)-75+50t^2\right\}u(t-1)$$

이다.

37. $v(t)=78\sin t(1-u(t-\pi))$
$=78\sin t+78\sin(t-\pi)u(t-\pi)$

이므로 $\mathcal{L}(v)=\frac{78\left(1+e^{-\pi s}\right)}{s^2+1}$ 이다.

$L=0.5$, $C=0.05$ 이므로

$$I=\frac{3.9s\left(1+e^{-\pi s}\right)}{\left(0.025s^2+1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{156s\left(1+e^{-\pi s}\right)}{\left(s^2+40\right)\left(s^2+1\right)}$$
$$=\left(\frac{4s}{s^2+1}-\frac{4s}{s^2+40}\right)\left(1+e^{-\pi s}\right)$$

이다. 즉,

$$i=-4\cos\sqrt{40}\,t+4\cos t-4\left(\cos\sqrt{40}\,(t-\pi)+\cos t\right)u(t-\pi)$$

이다.

※ 38번~40번

$Li' + Ri + \dfrac{q}{C} = v(t)$, $i(0) = 0, q(0) = 0$ 이므로

$LsI + RI + \dfrac{I}{Cs} = \mathcal{L}(v)$,

$I = \dfrac{\mathcal{L}(v)}{Ls + R + 1/Cs} = \dfrac{Cs\mathcal{L}(v)}{LCs^2 + CRs + 1}$ 이다.

38. $v(t) = 34e^{-t}(1 - u(t-4))$
$\quad = 34e^{-t} - 34e^{-4}e^{-(t-4)}u(t-4)$

이므로 $\mathcal{L}(v) = \dfrac{34(1 - e^{-4s-4})}{s+1}$ 이다.

$R = 4, L = 1, C = 0.05$ 이므로

$$I = \frac{1.7s(1 - e^{-4s-4})}{(0.05s^2 + 0.2s + 1)(s+1)} = \frac{34(1 - e^{-4s-4})}{(s^2 + 4s + 20)(s+1)}$$
$$= \left(\frac{2s+40}{s^2 + 4s + 20} - \frac{2}{s+1}\right)(1 - e^{-4s-4})$$
$$= \left(\frac{2(s+2) + 36}{(s+2)^2 + 16} - \frac{2}{s+1}\right)(1 - e^{-4s-4})$$

이다. 즉,

$$i = e^{-2t}(2\cos 4t + 9\sin 4t) - 2e^{-t}$$
$$- u(t-4)\{e^{-2t+4}(\cos 4(t-4) + 9\sin 4(t-4)) - 2e^{-t}\}$$

이다.

39. $v(t) = 1000[1 - u(t-2)]$ 이므로

$\mathcal{L}(v) = \dfrac{1000(1 - e^{-2s})}{s}$ 이다.

$R = 2, L = 1, C = 0.5$ 이므로

$$I = \frac{500(1 - e^{-2s})}{0.5s^2 + s + 1} = \frac{1000(1 - e^{-2s})}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1000(1 - e^{-2s})}{(s+1)^2 + 1}$$

이다. 즉,

$$i = 1000e^{-t}\sin t - 1000e^{-(t-2)}\sin(t-2)u(t-2)$$

이다.

40. $v(t) = 255\sin t(1 - u(t - 2\pi))$
$\quad = 255\sin t - 255\sin(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$

이므로 $\mathcal{L}(v) = \dfrac{255(1 - e^{-2\pi s})}{s^2 + 1}$ 이다.

$R = 2, L = 1, C = 0.1$ 이므로

$$I = \frac{25.5s(1 - e^{-2\pi s})}{(0.1s^2 + 0.2s + 1)(s^2 + 1)} = \frac{255(1 - e^{-2\pi s})}{(s^2 + 2s + 10)(s+1)}$$
$$= \left(\frac{-27s - 60}{s^2 + 2s + 10} + \frac{27s + 6}{s^2 + 1}\right)(1 - e^{-2\pi s})$$
$$= \left(\frac{-27(s+1) - 33}{(s+1)^2 + 16} + \frac{27s + 6}{s^2 + 1}\right)(1 - e^{-2\pi s})$$

이다. 즉,

$$i = -e^{-t}(27\cos 3t + 11\sin 3t) + 27\cos t + 6\sin t$$
$$+ u(t - 2\pi)\{e^{-(t-2\pi)}(27\cos 3t + 11\sin 3t)\}$$
$$+ u(t - 2\pi)\{-27\cos t - 6\sin t\}$$

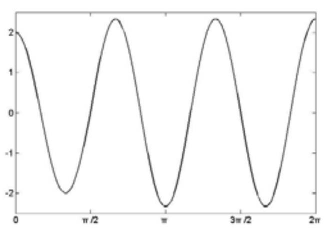
이다.

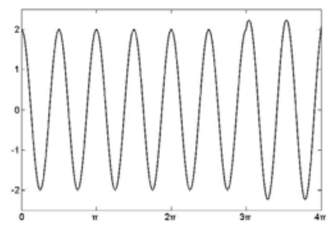
6.4 Short Impulses. Dirac's Delta Function. Partial Fractions

3. $s^2Y - 2s + 9Y = e^{-\pi s/2}$,

$$Y = \frac{2s}{s^2 + 9} + \frac{e^{-\pi s/2}}{s^2 + 9},$$

$$y = 2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3\left(t - \frac{\pi}{2}\right)u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2\cos 3t + \frac{1}{3}(\cos 3t)\,u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \begin{cases} 2\cos 3t & \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 2\cos 3t + \dfrac{1}{3}\cos 3t & \left(\dfrac{\pi}{2} < t\right) \end{cases}$$





4. $s^2Y - 2s + 16Y = 4e^{-3\pi s}$,

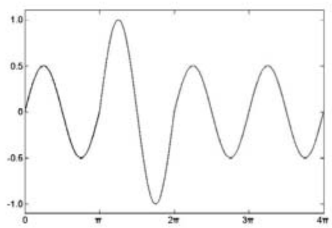
$$Y = \frac{2s}{s^2 + 16} + \frac{4e^{-3\pi s}}{s^2 + 16},$$

$$y = 2\cos 4t + \sin 4(t - 3\pi)\,u(t - 3\pi)$$
$$= 2\cos 4t + (\sin 4t)\,u(t - 3\pi)$$
$$= \begin{cases} 2\cos 4t & (0 < t < 3\pi) \\ 2\cos 4t + \sin 4t & (3\pi < t) \end{cases}$$

5. $s^2Y - 1 + 4Y = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$,

$$Y = \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 4},$$

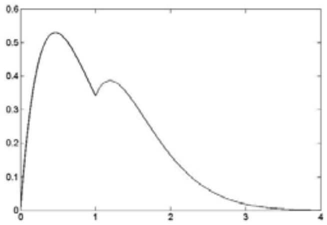
$$y = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin 2(t - \pi)\,u(t - \pi)$$
$$- \frac{1}{2}\sin 2(t - 2\pi)\,u(t - 2\pi)$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}(\sin 2t)\,u(t - \pi) - \frac{1}{2}(\sin 2t)\,u(t - 2\pi)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin 2t & (0 < t < \pi) \\ \sin 2t & (\pi < t < 2\pi) \\ \dfrac{1}{2}\sin 2t & (2\pi < t) \end{cases}$$



6. $s^2Y-3+4sY+5Y=e^{-s}$,

$$Y=\frac{3}{s^2+4s+5}+\frac{e^{-s}}{s^2+4s+5}=\frac{3}{(s+2)^2+1}+\frac{e^{-s}}{(s+2)^2+1},$$

$$y=3e^{-2t}\sin t+e^{-2(t-1)}\sin(t-1)\,u(t-1)=\begin{cases}3e^{-2t}\sin t & (0<t<1)\\ 3e^{-2t}\sin t+e^{-2(t-1)}\sin(t-1) & (1<t)\end{cases}$$

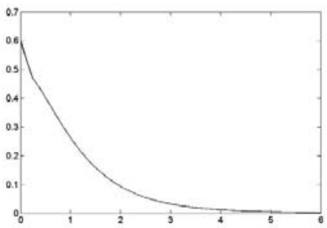


7. $4\left(s^2Y-\frac{3}{5}s+\frac{3}{5}\right)+16\left(sY-\frac{3}{5}\right)+17Y=\frac{3}{s+1}+e^{-s/4}$,

$$(4s^2+16s+17)\,Y=\frac{12s+36}{5}+\frac{3}{s+1}+e^{-s/4}=\frac{3(4s^2+16s+17)}{5(s+1)}+e^{-s/4},$$

$$Y=\frac{3}{5(s+1)}+\frac{e^{-s/4}}{4s^2+16s+17}=\frac{3}{5(s+1)}+\frac{e^{-s/4}}{4(s+2)^2+1},$$

$$y=\frac{3}{5}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2\left(t-\frac{1}{4}\right)}\sin\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{4}\right)u\left(t-\frac{1}{4}\right)=\begin{cases}\frac{3}{5}e^{-t} & \left(0<t<\frac{1}{4}\right)\\ \frac{3}{5}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2\left(t-\frac{1}{4}\right)}\sin\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}<t\right)\end{cases}$$

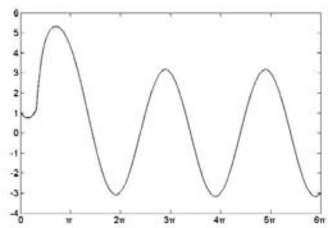


8. $s^2Y-s+1+3(sY-1)+2Y=\frac{10}{s^2+1}+10e^{-s}$,

$$(s^2+3s+2)\,Y=s-1+3+\frac{10}{s^2+1}+10e^{-s},$$

$$Y=\frac{-2}{s+2}+\frac{6}{s+1}-\frac{3s-1}{s^2+1}+10\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)e^{-s},$$

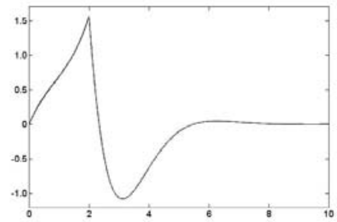
$$y=-2e^{-2t}+6e^{-t}-3\cos t+\sin t+10u(t-1)\left[e^{-t+1}-e^{-2(t-1)}\right]$$



9. $s^2Y-1+2sY+2Y=\frac{1}{s-1}-\frac{e^{2-2s}}{s-1}-e^{2-2s}$,

$$Y=\frac{s}{(s^2+2s+2)(s-1)}-\frac{se^{2-2s}}{(s^2+2s+2)(s-1)}=\left(\frac{-0.2s+0.4}{s^2+2s+2}+\frac{0.2}{s-1}\right)(1-e^{2-2s})=\left[\frac{-0.2(s+1)+0.6}{(s+1)^2+1}+\frac{0.2}{s-1}\right](1-e^{2-2s}),$$

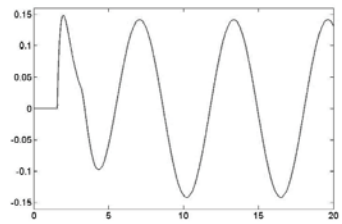
$$y=e^{-t}(-0.2\cos t+0.6\sin t)+0.2e^t-0.2e^tu(t-2)+\left[e^{4-t}\{0.2\cos(t-2)-0.6\sin(t-2)\}\right]u(t-2)$$



10. $s^2Y+5sY+6Y=e^{-\frac{\pi}{2}s}-\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}$,

$$Y=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+5s+6}-\frac{se^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+5s+6)}=\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s}-\frac{1}{10}\left(\frac{s+1}{s^2+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{3}{s+3}\right)e^{-\pi s},$$

$$y=\left(e^{-2t+\pi}-e^{-3t+3\pi/2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{10}u(t-\pi)\left(\cos t+\sin t+4e^{-2t+2\pi}-3e^{-3t+3\pi}\right)$$

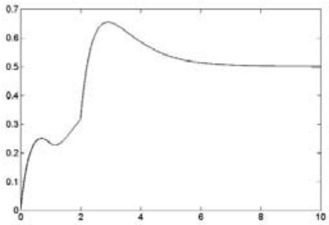


11. $s^2Y-1+3sY+2Y=\frac{e^{-s}}{s}+e^{-2s}$,

$$(s^2+3s+2)\,Y=1+\frac{e^{-s}}{s}+e^{-2s},$$

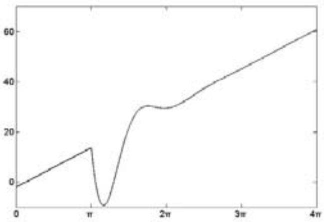
$$Y=\frac{1+e^{-2s}}{s^2+3s+2}+\frac{e^{-s}}{s(s^2+3s+2)}=\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)(1+e^{-2s})+\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2(s+2)}\right)e^{-s},$$

$$y=e^{-t}-e^{-2t}+\left(\frac{1}{2}-e^{-t+1}+\frac{1}{2}e^{-2t+2}\right)u(t-1)+\left(e^{-t+2}-e^{-2t+4}\right)u(t-2)$$



12. $s^2Y+2s-5+2sY+4+5Y=\dfrac{25}{s^2}-100e^{-\pi s}$,

$$Y=\frac{-2s+1}{s^2+2s+5}+\frac{25}{s^2(s^2+2s+5)}-\frac{100e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}$$
$$=\frac{5}{s^2}-\frac{2}{s}-\frac{100e^{-\pi s}}{(s+1)^2+4},$$
$$y=5t-2-50e^{-(t-\pi)}u(t-\pi)\sin 2t$$



13. (a) $\dfrac{F(s)}{G(s)}=\dfrac{A}{s-a}+\dfrac{H(s)}{K(s)}$ 에서 a가 단순근(simple root)이므로 $K(a)\neq 0$ 이다.

$\dfrac{(s-a)F(s)}{G(s)}=A+\dfrac{(s-a)H(s)}{K(s)}$ 이므로

$$A=\lim_{s\to a}\left\{\frac{(s-a)F(s)}{G(s)}-\frac{(s-a)H(s)}{K(s)}\right\}$$
$$=\lim_{s\to a}\frac{(s-a)F(s)}{G(s)}$$

이다.

(b) $\dfrac{F(s)}{G(s)}$

$$=\frac{A_m}{(s-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_1}{s-a}+\frac{H(s)}{K(s)}$$

에서 a가 m중근이므로 $K(a)\neq 0$ 이다.

$$\frac{(s-a)^mF(s)}{G(s)}=A_m+A_{m-1}(s-a)$$
$$+\cdots+A_1(s-a)^{m-1}+\frac{(s-a)^mH(s)}{K(s)}$$

이므로 $A_m=\lim\limits_{s\to a}\dfrac{(s-a)^mF(s)}{G(s)}$ 이다.

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{(s-a)^mF(s)}{G(s)}\right\}=A_{m-1}$$
$$+\cdots+(m-1)A_1(s-a)^{m-2}+\frac{d}{ds}\left\{\frac{(s-a)^mH(s)}{K(s)}\right\}$$

이므로 $A_{m-1}=\lim\limits_{s\to a}\dfrac{d}{ds}\left\{\dfrac{(s-a)^mF(s)}{G(s)}\right\}$ 이다.

일반적으로

$$A_k=\frac{1}{(m-k)!}\lim_{s\to a}\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\left\{\frac{(s-a)^mF(s)}{G(s)}\right\}$$
$$k=1,2,\cdots$$

이다.

14. (a) $\mathcal{L}(f)=\displaystyle\int_0^p e^{-st}f(t)dt+\int_p^{2p}e^{-st}f(t)dt+\cdots$

$$=\int_0^p e^{-st}f(t)dt+\int_0^p e^{-s(t+p)}f(t+p)dt+\cdots$$
$$=\int_0^p e^{-st}f(t)dt+\int_0^p e^{-st}e^{-sp}f(t)dt+\cdots$$
$$=(1+e^{-sp}+e^{-2sp}+\cdots)\int_0^p e^{-st}f(t)dt$$
$$=\frac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$$

(b) $\mathcal{L}(f)=\dfrac{1}{1-e^{-2\pi s/w}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{w}}e^{-st}\sin wt\,dt$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s/w}}\frac{e^{-st}}{s^2+w^2}(-s\sin wt-w\cos wt)\Big|_0^{\frac{\pi}{w}}$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s/w}}\cdot\frac{e^{-s\pi/w}(-s\sin\pi-w\cos\pi)+w}{s^2+w^2}$$
$$=\frac{w(1+e^{-\pi s/w})}{(1-e^{-2\pi s/w})(s^2+w^2)}=\frac{w}{(1-e^{-\pi s/w})(s^2+w^2)}$$

(c) $\mathcal{L}(f)=\dfrac{1}{1-e^{-\pi s/w}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{w}}e^{-st}\sin wt\,dt$

$$=\frac{w(1+e^{-\pi s/w})}{(1-e^{-\pi s/w})(s^2+w^2)}$$
$$=\frac{w}{s^2+w^2}\frac{e^{\pi s/2w}+e^{-\pi s/2w}}{e^{\pi s/2w}-e^{-\pi s/2w}}$$
$$=\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$$

(d) $f(t)=\dfrac{k}{p}t\ (0<t<p)$, $f(t+p)=f(t)$

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}\frac{k}{p}t\,dt$$
$$=\frac{k}{p(1-e^{-ps})}\left\{-\frac{1}{s}e^{-st}t\Big|_0^p+\frac{1}{s}\int_0^p e^{-st}dt\right\}$$
$$=\frac{k}{p(1-e^{-ps})}\left\{-\frac{p}{s}e^{-ps}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^p\right\}$$
$$=\frac{k}{p(1-e^{-ps})}\left(-\frac{p}{s}e^{-ps}-\frac{1}{s^2}e^{-ps}+\frac{1}{s^2}\right)$$
$$=\frac{k}{ps^2}-\frac{ke^{-ps}}{s(1-e^{-ps})}$$

15. $g(t)=\dfrac{k}{p}t\ (0<t<p)$, $g(t+p)=g(t)$ 하면,

$f(t)=\dfrac{kt}{p}-g(t)$ 이다.

$$\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}\left(\frac{kt}{p}-g(t)\right)$$
$$=\frac{k}{ps^2}-\left\{\frac{k}{ps^2}-\frac{ke^{-ps}}{s(1-e^{-ps})}\right\}=\frac{ke^{-ps}}{s(1-e^{-ps})}$$

6.5 Convolution. Integral Equations

1. $1*(-1)=\displaystyle\int_0^t -1\,d\tau=-t$

2. $1 * \sin wt = \int_0^t \sin w(t-\tau)\,d\tau$
$$= \frac{1}{w}\cos w(t-\tau)\Big|_0^t = \frac{1}{w} - \frac{1}{w}\cos wt$$

3. $e^{-t} * e^t = \int_0^t e^{-\tau}e^{t-\tau}d\tau = \int_0^t e^{t-2\tau}d\tau$
$$= -\frac{1}{2}e^{t-2\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$$

4. $(\cos\omega t) * (\cos\omega t) = \int_0^t \cos\omega\tau\cos\omega(t-\tau)\,d\tau$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\omega t + \cos\omega(2\tau - t)\,d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\left[\tau\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}\sin\omega(2\tau - t)\right]_0^t$$
$$= \frac{1}{2}t\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}\sin\omega t$$

5. $(\cos\omega t) * 1 = \int_0^t \cos\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau\Big|_0^t = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$

6. $e^{at} * e^{bt} = \int_0^t e^{a\tau}e^{b(t-\tau)}\,d\tau$
$$= \frac{1}{a-b}e^{bt+(a-b)\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$$

7. $t * e^{-t} = \int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}\,d\tau = \left[\tau e^{-t+\tau}\right]_0^t - \int_0^t e^{-t+\tau}d\tau$
$$= t - \left[e^{-t+\tau}\right]_0^t = t - 1 + e^{-t}$$

8. $Y + \frac{4}{s^2}Y = \frac{2}{s^2}$, $Y = \frac{2}{s^2+4}$, $y = \sin 2t$

9. $Y + \frac{1}{s}Y = \frac{2}{s}$, $Y = \frac{2}{s+1}$, $y = 2e^{-t}$

10. $Y - \frac{2}{s^2+4}Y = \frac{2}{s^2+4}$, $Y = \frac{2}{s^2+2}$, $y = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$

11. $Y - \frac{1}{s^2}Y = \frac{1}{s}$, $Y = \frac{s}{s^2-1}$, $y = \cosh t$

12. $Y + \frac{s}{s^2-1}Y = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}$,
$$Y = \frac{s^2-1}{s^2+s-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s},$$
$y = t + 1$

13. $Y + \frac{2}{s-1}Y = \frac{1}{(s-1)^2}$, $Y = \frac{1}{s^2-1}$, $y = \sinh t$

14. $Y - \frac{1}{s^2}Y = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}$, $Y = \frac{2s^2-1}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2-1}$,
$y = 1 + \cosh t$

15. (a) $Y + \frac{k}{s-1}Y = \frac{1}{(s-1)^2}$,
$$Y = \frac{1}{(s-1)(s-1+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1+k}\right),$$
$$y = \frac{1}{k}\left(e^t - e^{(1-k)t}\right)$$

16. (a) $t - \tau = p$로 치환하면, $-d\tau = dp$이다.
$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = -\int_t^0 f(t-p)g(p)dp$$
$$= \int_0^t g(p)f(t-p)dp = (g*f)(t)$$

(b) $\{(f*g)*v\}(t) = \{v*(f*g)\}(t)$
$$= \int_0^t v(\tau)(f*g)(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_0^t\int_0^{t-\tau} v(\tau)f(p)g(t-\tau-p)dpd\tau$$
$$= \int_0^t\int_0^{t-p} v(\tau)f(p)g(t-\tau-p)d\tau dp$$
$$= \int_0^t f(p)(v*g)(t-p)dp$$
$$= \{f*(v*g)\}(t) = \{f*(g*v)\}(t)$$

(c) 적분에 대한 선형성의 결과이다.

(d) $t > k$일 때, 적분에 대한 평균값의 정리에 의하여
$$(f_k*g)(t) = \int_0^t f_k(t)g(t-\tau)d\tau = \int_0^k \frac{1}{k}g(t-\tau)d\tau$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^k g(t-\tau)d\tau = g(t-t_0),\quad 0 < t_0 < k$$
$k \to 0$일 때, $t_0 \to 0$, $g(t-t_0) \to g(t)$이다.
따라서 $\delta*g = g$이다.

(e) $s^2Y - k_1 s - k_2 + w^2 Y = \mathcal{L}(r)$,
$$Y = \frac{k_1 s + k_2}{s^2 + w^2} + \frac{\mathcal{L}(r)}{s^2 + w^2},$$
$$y = k_1\cos wt + \frac{k_2}{w}\sin wt + \frac{1}{w}\sin wt * r(t)$$

17. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5.5}{(s+1.5)(s-4)}\right) = 5.5e^{-1.5t} * e^{4t}$
$$= 5.5\int_0^t e^{-1.5\tau}e^{4(t-\tau)}\,d\tau$$
$$= -e^{4t-5.5\tau}\Big|_0^t = e^{4t} - e^{-1.5t}$$

18. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^2}\right) = e^{at} * e^{at}$
$$= \int_0^t e^{a\tau}e^{a(t-\tau)}\,d\tau = \tau e^{at}\Big|_0^t = te^{at}$$

19. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2}\right) = 2\cos\pi t * \sin\pi t$
$$= 2\int_0^t \cos\pi\tau\sin\pi(t-\tau)\,d\tau$$
$$= \int_0^t (\sin\pi t + \sin\pi(t-2\tau))\,d\tau$$
$$= \left[\tau\sin\pi t + \frac{1}{2\pi}\cos\pi(t-2\tau)\right]_0^t$$
$$= t\sin\pi t + \frac{1}{2\pi}(\cos\pi t - \cos\pi t)$$
$$= t\sin\pi t$$

20. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9}{s(s+3)}\right) = 9 * e^{-3t} = 9\int_0^t e^{-3\tau}\,d\tau$
$$= 9\left[-\frac{1}{3}e^{-3\tau}\right]_0^t = -3\left(e^{-3t} - 1\right)$$

21. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{\omega}{s^2(s^2-\omega^2)}\right) = t * \sinh\omega t = \displaystyle\int_0^t \tau\sinh\omega(t-\tau)\,d\tau$

$$= -\frac{\tau}{\omega}\cosh\omega(t-\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{\omega}\int_0^t \cosh\omega(t-\tau)\,d\tau$$
$$= -\frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega}\left[\frac{1}{\omega}\sinh\omega(t-\tau)\right]_0^t$$
$$= -\frac{t}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\sinh\omega t$$

22. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s-2)}\right) = 1 * e^{2t} = \displaystyle\int_0^t e^{2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$

이므로

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s(s-2)}\right) = \left(\frac{1}{2}e^{2(t-a)} - \frac{1}{2}\right)u(t-a)$$

이다.

23. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{40.5}{s(s^2-9)}\right) = 13.5 * \sinh 3t$

$$= \int_0^t 13.5\sinh 3(t-\tau)\,d\tau$$
$$= -4.5\cosh 3(t-\tau)\big|_0^t$$
$$= 4.5(\cosh 3t - 1)$$

24. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{240}{(s^2+1)(s^2+25)}\right) = 48\sin t * \sin 5t$

$$= \int_0^t 48\sin\tau\sin 5(t-\tau)\,d\tau$$
$$= 24\int_0^t -\cos(5t-4\tau) + \cos(6\tau-5t)\,d\tau$$
$$= 24\left[\frac{1}{4}\sin(5t-4\tau) + \frac{1}{6}\sin(6\tau-5t)\right]_0^t$$
$$= 6(\sin t - \sin 5t) + 4(\sin t + \sin 5t)$$
$$= 10\sin t - 2\sin 5t$$

25. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{18s}{(s^2+36)^2}\right) = 3\cos 6t * \sin 6t$

$$= 3\int_0^t \cos 6\tau\sin 6(t-\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^t \sin 6t + \sin(6t-12\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{3}{2}\left[\tau\sin 6t + \frac{1}{12}\cos(6t-12\tau)\right]_0^t$$
$$= \frac{3}{2}t\sin 6t + \frac{1}{8}(\cos 6t - \cos 6t)$$
$$= \frac{3}{2}t\sin 6t$$

26. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{5.5}{(s+1.5)(s-4)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s-4} - \dfrac{1}{s+1.55}\right)$

$$= e^{4t} - e^{-1.5t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2(s^2-\omega^2)}\right) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-\omega^2} - \frac{1}{s^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sinh\omega t - t\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{40.5}{s(s^2-9)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4.5s}{s^2-9} - \frac{4.5}{s}\right) = 4.5\cosh 3t - 4.5$$

6.6 Differentiation and Integration of Transforms. ODEs with Variable Coefficients

2. $\mathcal{L}(3t\sinh 4t) = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{12}{s^2-16}\right) = \dfrac{-24s}{(s^2-16)^2}$

3. $\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{4}e^{-2t}\right) = \dfrac{1}{4(s+2)}$

4. $\mathcal{L}(te^{-t}\cos t) = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) = \dfrac{s^2+2s}{((s+1)^2+1)^2}$

5. $\mathcal{L}(t\sin\omega t) = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

6. $\mathcal{L}(t^2\sin 3t) = \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{3}{s^2+9}\right)$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-6s}{(s^2+9)^2}\right) = \frac{18s^2-54}{(s^2+9)^3}$$

7. $\mathcal{L}(t^2\sinh 2t) = \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{2}{s^2-4}\right)$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-4s}{(s^2-4)^2}\right) = \frac{12s^2+16}{(s^2-4)^3}$$

8. $\mathcal{L}(te^{-kt}\sin t) = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{(s+k)^2+1}\right) = \dfrac{2s+2k}{((s+k)^2+1)^2}$

9. $\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}t^2\cos\dfrac{\pi}{2}t\right) = \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{2s}{4s^2+\pi^2}\right)$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-8s^2+2\pi^2}{(4s^2+\pi^2)^2}\right) = \frac{64s^3-48s\pi^2}{(4s^2+\pi^2)^3}$$

10. $\mathcal{L}(t^n e^{kt}) = (-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}\left(\dfrac{1}{s-k}\right)$

$$= (-1)^n\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{-1}{(s-k)^2}\right)$$
$$= \cdots = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$$

11. $\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2\pi t\right) = \dfrac{\pi}{s^2+4\pi^2}$

14. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+16)^2} = \dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s^2+16}\right)$,

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+16}\right)\right) = \frac{t}{8}\sin 4t$$

15. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2-4)^2} = \dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s^2-4}\right)$,

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)\right) = \frac{t}{4}\sinh 2t$$

16. $F(s)=\dfrac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2}=\dfrac{2(s+3)}{[(s+3)^2+1]^2}$ 이므로

$F(s-3)=\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}=\dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{1}{s^2+1}\right)$ 이고

$\mathcal{L}^{-1}(F(s-3))=\mathcal{L}^{-1}\left[-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)\right]=t\sin t$ 이다.

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=te^{-3t}\sin t$

17. $F(s)=\ln\dfrac{s}{s-1}=\ln s-\ln(s-1)$ 이므로

$F'(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}$ 이고 $\mathcal{L}^{-1}(F'(s))=1-e^t$ 이다.

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left[-\int_s^\infty F'(\tilde{s})\,d\tilde{s}\right]=-\dfrac{1-e^t}{t}$

18. $F(s)=\operatorname{arccot}\dfrac{s}{\pi}$ 이고 $F'(s)=\dfrac{-\dfrac{1}{\pi}}{1+\left(\dfrac{s}{\pi}\right)^2}=\dfrac{-\pi}{s^2+\pi^2}$

이므로 $\mathcal{L}^{-1}(F'(s))=-\sin\pi t$ 이다.

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left[-\int_s^\infty F'(\tilde{s})\,d\tilde{s}\right]=\dfrac{\sin\pi t}{t}$

19. $F(s)=\ln\dfrac{s^2+1}{(s-1)^2}=\ln(s^2+1)-2\ln(s-1)$ 이므로

$F'(s)=\dfrac{2s}{s^2+1}-\dfrac{2}{s-1}$ 이고

$\mathcal{L}^{-1}(F'(s))=2\cos t-2e^t$ 이다.

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left[-\int_s^\infty F'(\tilde{s})\,d\tilde{s}\right]=-\dfrac{2\cos t-2e^t}{t}$

20. $F(s)=\ln\dfrac{s+a}{s+b}=\ln(s+a)-\ln(s+b)$ 이므로

$F'(s)=\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{1}{s+b}$, $\mathcal{L}^{-1}(F'(s))=e^{-at}-e^{-bt}$

이다.

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left[-\int_s^\infty F'(\tilde{s})\,d\tilde{s}\right]=\dfrac{-(e^{-at}-e^{-bt})}{t}$

6.7 Systems of ODEs

1. (a) 예제1)의 식을 Laplace 변환하면

$$\begin{cases} sY_1=-0.02Y_1+0.02Y_2 \\ sY_2-150=0.02Y_1-0.02Y_2 \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$\begin{cases} (s+0.02)Y_1-0.02Y_2=0 \\ -0.02Y_1+(s+0.02)Y_2=150 \end{cases}$$

이므로

$$Y_1=\frac{3}{s^2+0.04s}=\frac{75}{s}-\frac{75}{s+0.04},$$

$$Y_2=\frac{150(s+0.02)}{s^2+0.04s}=\frac{75}{s}+\frac{75}{s+0.04}$$

이다. 따라서 일반해는

$y_1=75-75e^{-0.04t}$, $y_2=75+75e^{-0.04t}$ 이다.

예제2)의 식을 Laplace 변환하면

$$\begin{cases} sY_1=-4Y_1+4Y_2+\dfrac{12}{s} \\ sY_2=-1.6Y_1+1.2Y_2+\dfrac{4.8}{s} \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$\begin{cases} (s+4)Y_1-4Y_2=\dfrac{12}{s} \\ 1.6Y_1+(s-1.2)Y_2=\dfrac{4.8}{s} \end{cases}$$

이므로

$$Y_1=\frac{12s+4.8}{s(s^2+2.8s+1.6)}=\frac{3}{s}-\frac{8}{s+2}+\frac{5}{s+0.8},$$

$$Y_2=\frac{4.8s}{s(s^2+2.8s+1.6)}=-\frac{4}{s+2}+\frac{4}{s+0.8}$$

이다. 따라서 일반해는

$I_1=3-8e^{-2t}+5e^{-0.8t}$, $I_2=-4e^{-2t}+4e^{-0.8t}$

이다.

(b) 식(8)을 Laplace 변환하면

$$\begin{cases} sY_1-a=-3Y_1+Y_2 \\ sY_2-b=Y_1-3Y_2 \end{cases},\quad \begin{cases} (s+3)Y_1-Y_2=a \\ -Y_1+(s+3)Y_2=b \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1=\frac{a(s+3)+b}{(s+2)(s+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{s+2}+\frac{a-b}{s+4}\right),$$

$$Y_2=\frac{a+b(s+3)}{(s+2)(s+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{s+2}-\frac{a-b}{s+4}\right)$$

이다. 따라서 일반해는

$$y_1=\frac{a+b}{2}e^{-2t}+\frac{a-b}{2}e^{-4t},$$

$$y_2=\frac{a+b}{2}e^{-2t}-\frac{a-b}{2}e^{-4t}$$

이다.

식(11)을 Laplace 변환하면

$$\begin{cases} sY_1-a=Y_1 \\ sY_2-b=-Y_2 \end{cases},\quad \begin{cases} (s-1)Y_1=a \\ (s+1)Y_2=b \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$Y_1=\dfrac{a}{s-1}$, $Y_2=\dfrac{b}{s+1}$ 이다.

따라서 일반해는 $y_1=ae^t$, $y_2=be^{-t}$ 이다.

식(12)을 Laplace 변환하면

$$\begin{cases} sY_1-a=Y_2 \\ sY_2-b=-4Y_1 \end{cases},\quad \begin{cases} sY_1-Y_2=a \\ 4Y_1+sY_2=b \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$Y_1=\dfrac{as+b}{s^2+4}$, $Y_2=\dfrac{-4a+bs}{s^2+4}$ 이다.

따라서 일반해는

$$y_1=a\cos 2t+\frac{b}{2}\sin 2t,\ y_2=-2a\sin 2t+b\cos 2t$$

이다.

식(13)을 Laplace 변환하면

$$\begin{cases} sY_1 - a = -Y_1 + Y_2 \\ sY_2 - b = -Y_1 - Y_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} (s+1)Y_1 - Y_2 = a \\ Y_1 + (s+1)Y_2 = b \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{a(s+1)+b}{(s+1)^2+1}, \quad Y_2 = \frac{b(s+1)-a}{(s+1)^2+1}$$ 이다.

따라서 일반해는

$$y_1 = e^{-t}(a\cos t + b\sin t),\ y_2 = e^{-t}(b\cos t - a\sin t)$$

이다.

(c) 식(3)을 Laplace 변환하면

$$\begin{cases} sY_1 - a = -3Y_1 + Y_2 - \dfrac{6}{s+2} \\ sY_2 - b = Y_1 - 3Y_2 + \dfrac{2}{s+2} \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$\begin{cases} (s+3)Y_1 - Y_2 = a - \dfrac{6}{s+2} \\ -Y_1 + (s+3)Y_2 = b + \dfrac{2}{s+2} \end{cases}$$

이므로

$$Y_1 = \frac{a(s+3)+b}{(s+2)(s+4)} + \frac{-6s-16}{(s+2)^2(s+4)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{s+2} + \frac{a-b}{s+4}\right) + \frac{2}{s+4} - \frac{2}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$Y_2 = \frac{a+b(s+3)}{(s+2)(s+4)} + \frac{2s}{(s+2)^2(s+4)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{s+2} - \frac{a-b}{s+4}\right) - \frac{2}{s+4} + \frac{2}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

이다. 따라서 일반해는

$$y_1 = \frac{a+b}{2}e^{-2t} + \frac{a-b}{2}e^{-4t} + 2e^{-4t} - 2e^{-2t} - 2te^{-2t},$$
$$y_2 = \frac{a+b}{2}e^{-2t} - \frac{a-b}{2}e^{-4t} - 2e^{-4t} + 2e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

이다.

2. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} sY_1 - Y_2 = 1 \\ Y_1 + sY_2 = \dfrac{2s}{s^2+1} \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{s^3+3s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2},$$
$$Y_2 = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

이므로 일반해는

$$y_1 = \cos t + 2\cos t * \sin t = \cos t + t\sin t,$$
$$y_2 = \sin t - 2\sin t * \sin t = t\cos t$$

이다.

3. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} (s-2)Y_1 + 3Y_2 = 1 \\ -Y_1 + (s+2)Y_2 = 0 \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면 $Y_1 = \dfrac{s+2}{s^2-1}$, $Y_2 = \dfrac{1}{s^2-1}$

이므로 일반해는 $y_1 = \cosh t + 2\sinh t$, $y_2 = \sinh t$ 이다.

4. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} sY_1 - 4Y_2 = -\dfrac{8s}{s^2+16} \\ 3Y_1 + sY_2 = 3 - \dfrac{36}{s^2+16} \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면 $Y_1 = \dfrac{4}{s^2+16}$, $Y_2 = \dfrac{3s}{s^2+16}$

이므로 일반해는 $y_1 = \sin 4t$, $y_2 = 3\cos 4t$ 이다.

5. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} sY_1 - Y_2 = 1 + \dfrac{2-e^{-s}}{s} \\ Y_1 + sY_2 = \dfrac{1-e^{-s}}{s} \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{s+2}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)} - \left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)}\right)e^{-s}$$
$$= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2+1} - \left(\frac{1-s}{s^2+1} + \frac{1}{s}\right)e^{-s},$$
$$Y_2 = \frac{-2}{s(s^2+1)} + \left(\frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{1}{s^2+1}\right)e^{-s}$$
$$= -\frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2+1} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1+s}{s^2+1}\right)e^{-s}$$

이므로 일반해는

$$y_1 = 2\sin t + 1 - [\sin(t-1) - \cos(t-1) + 1]u(t-1)$$
$$= \begin{cases} 2\sin t + 1 & t < 1 \\ 2\sin t - \sin(t-1) + \cos(t-1) & t > 1 \end{cases},$$
$$y_2 = 2\cos t - 2 + [1 - \sin(t-1) - \cos(t-1)]u(t-1)$$
$$= \begin{cases} 2\cos t - 2 & t < 1 \\ 2\cos t - 1 - \sin(t-1) - \cos(t-1) & t > 1 \end{cases},$$

이다.

6. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} (s-5)Y_1 - Y_2 = 1 \\ -Y_1 + (s-5)Y_2 = -3 \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{(s-5)-3}{(s-5)^2-1}, \quad Y_2 = \frac{-3(s-5)+1}{(s-5)^2-1}$$

이므로 일반해는

$$y_1 = e^{5t}\cosh t - 3e^{5t}\sinh t,$$
$$y_2 = -3e^{5t}\cosh t + e^{5t}\sinh t$$

이다.

7. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} (s-2)Y_1 + 4Y_2 = 3 + \dfrac{e^{1-s}}{s-1} \\ -Y_1 + (s+3)Y_2 = \dfrac{e^{1-s}}{s-1} \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{3s+9}{(s+2)(s-1)} - \frac{e^{1-s}}{(s+2)(s-1)}$$
$$= \frac{-1}{s+2} + \frac{4}{s-1} + \frac{-\frac{1}{3}e^{1-s}}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}e^{1-s}}{s-1}$$
$$Y_2 = \frac{3+e^{1-s}}{(s+2)(s-1)}$$
$$= \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s-1} + \frac{-\frac{1}{3}e^{1-s}}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}e^{1-s}}{s-1},$$

이므로 일반해는

$$y_1 = -e^{-2t} + 4e^t + \frac{1}{3}\left(-e^{-2t+3} + e^t\right)u(t-1),$$
$$y_2 = -e^{-2t} + e^t + \frac{1}{3}\left(-e^{-2t+3} + e^t\right)u(t-1)$$

이다.

8. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases}(s+2)Y_1 - 3Y_2 = 4\\ -4Y_1 + (s+1)Y_2 = 3\end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{4s+13}{s^2+3s-10} = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s+5},$$
$$Y_2 = \frac{3s+22}{s^2+3s-10} = \frac{4}{s-2} - \frac{1}{s+5}$$

이므로 $y_1 = 3e^{2t} + e^{-5t}$, $y_2 = 4e^{2t} - e^{-5t}$ 이다.

9. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases}(s-1)Y_1 - Y_2 = 1\\ Y_1 + (s-3)Y_2 = 0\end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2},\quad Y_2 = \frac{-1}{(s-2)^2}$$

이므로 일반해는 $y_1 = e^{2t} - te^{2t}$, $y_2 = -te^{2t}$ 이다.

10. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases}sY_1 + Y_2 = 1\\ Y_1 + sY_2 = \dfrac{2s}{s^2+1} - \dfrac{2e^{-2\pi s}s}{s^2+1}\end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{s\left(s^2-1+2e^{-2\pi s}\right)}{s^4-1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2se^{-2\pi s}}{s^4-1}$$
$$= \frac{s}{s^2+1} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+0} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-2\pi s},$$
$$Y_2 = \frac{s^2-1-2s^2e^{-2\pi s}}{s^4-1}$$
$$= \frac{1}{s^2+1} + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{s^2+1}\right)e^{-2\pi s}$$

이므로 일반해는

$$y_1 = \cos t + u(t-2\pi)\left[-\cos t + \frac{1}{2}\left(e^{-t+2\pi} + e^{t-2\pi}\right)\right],$$
$$y_2 = \sin t + u(t-2\pi)\left[-\sin t + \frac{1}{2}\left(e^{-t+2\pi} - e^{t-2\pi}\right)\right]$$

이다.

11. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases}\left(s^2-1\right)Y_1 - 3Y_2 = 2s+3\\ -4Y_1 + s^2Y_2 = s+2-\dfrac{4}{s-1}\end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{2s^3+3s^2+3s+6}{\left(s^2-4\right)\left(s^2+3\right)} - \frac{12}{\left(s^2-4\right)\left(s^2+3\right)(s-1)}$$
$$= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1}$$
$$Y_2 = \frac{s^3+2s^2+3s+6}{\left(s^2-4\right)\left(s^2+3\right)} = \frac{s+2}{s^2-4} = \frac{1}{s-2}$$

이므로 일반해는 $y_1 = e^{2t} + e^t$, $y_2 = e^{2t}$ 이다.

12. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases}\left(s^2+4\right)Y_1 - 5Y_2 = s\\ Y_1 + \left(s^2-2\right)Y_2 = 2s\end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{s\left(s^2+8\right)}{s^4+2s^2-3} = \frac{9}{4}\frac{s}{s^2-1} - \frac{5}{4}\frac{s}{s^2+3},$$
$$Y_2 = \frac{s\left(2s^2+7\right)}{s^4+2s^2-3} = \frac{9}{4}\frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+3}$$

이므로 일반해는

$$y_1 = \frac{9}{4}\cosh t - \frac{5}{4}\cos t\sqrt{3},\ y_2 = \frac{9}{4}\cosh t - \frac{1}{4}\cos t\sqrt{3}$$

이다.

13. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases}s^2Y_1 + Y_2 = 6 - \dfrac{1010}{s^2+100}\\ Y_1 + s^2Y_2 = 8s - 6 + \dfrac{1010}{s^2+100}\end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{-4}{s-1} + \frac{10}{s^2+100} + \frac{4s}{s^2+1},$$
$$Y_2 = \frac{4}{s-1} - \frac{10}{s^2+100} + \frac{4s}{s^2+1}$$

이므로 일반해는

$$y_1 = -4e^t + \sin 10t + 4\cos t,$$
$$y_2 = 4e^t - \sin 10t + 4\cos t$$

이다.

14. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases}4sY_1 + sY_2 - 2sY_3 = 8\\ -2sY_1 + sY_3 = \dfrac{1}{s} - 4\\ 2sY_2 - 4sY_3 = -\dfrac{16}{s^2}\end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = 2\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\right),\ Y_2 = \frac{2}{s^2},\ Y_3 = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s^3}$$

이므로 일반해는 $y_1 = 2 + t^2$, $y_2 = 2t$, $y_3 = t + 2t^2$ 이다.

15. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases}-sY_1 + sY_2 = \dfrac{2s}{s^2-1}\\ sY_2 - sY_3 = \dfrac{-s}{s+1}\\ sY_1 + sY_3 = \dfrac{s+3}{s+1}\end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{3}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1},$$
$$Y_2 = \frac{3}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{2}{s+1},$$
$$Y_3 = \frac{3}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}$$

이므로 일반해는

$$y_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^t - e^{-t},$$
$$y_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^t - 2e^{-t},$$
$$y_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^t - e^{-t}$$

이다.

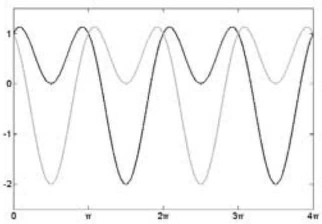
16. 주어진 조건을 모델링하면

$$y_1'' = -4y_1 + 4(y_2 - y_1) + 11\sin t,$$
$$y_2'' = -4(y_2 - y_1) - 4y_2 - 11\sin t$$

이다. Laplace 변형 후 정리하면

$Y_1 = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+1}$, $Y_2 = \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+1}$ 이다.

따라서 해는 $y_1 = \cos 2t + \sin t$, $y_2 = \cos 2t - \sin t$ 이다. 두 개의 계는 반파장의 간격으로 공진운동을 반복한다.



18. 계 내의 모든 유동이 2배가 되면 y_1과 y_2의 수렴 속도 역시 2배가 될 것이다.

이를 예제 1과 비교하여 해를 구하면

$y_1 = 100 - 62.5e^{-0.24t} - 37.5e^{-0.08t}$,
$y_2 = 100 + 125e^{-0.24t} - 75e^{-0.08t}$

이다.

19. 주어진 조건을 모델링하면 Kirhhoff의 전압법칙에 의하여

$4i_1 + 8(i_1 - i_2) + 2i_1' = 390\cos t$, $8i_2 + 4i_2' + 8(i_2 - i_1) = 0$

$i_1(0) = i_2(0) = 0$ 이다.

Laplace 변환 후 정리하면

$$I_1 = \frac{195s(s+4)}{(s+2)(s+8)(s^2+1)} = -\frac{26}{s+2} - \frac{16}{s+8} + \frac{42s+15}{s^2+1}$$

$$I_2 = \frac{390s}{(s+2)(s+8)(s^2+1)} = -\frac{26}{s+2} + \frac{8}{s+8} + \frac{18s+12}{s^2+1}$$

이다. 따라서 해는

$i_1 = -16e^{-8t} - 26e^{-2t} + 42\cos t + 15\sin t$,
$i_2 = 8e^{-8t} - 26e^{-2t} + 18\cos t + 12\sin t$

이다.

20. i_1의 경우 $0 \le t \le 2\pi$에서는 문제 25와 해가 같고, $t > 2\pi$이면 다음과 같은 해가 더해진 형태의 값을 갖는다.

$u(t-2\pi)\{26e^{-2t+4\pi} + 16e^{-8t+16\pi} - 42\cos t - 15\sin t\}$

따라서

$$i_1 = \begin{cases} -16e^{-8t} - 26e^{-2t} + 42\cos t + 15\sin t & 0 \le t \le 2\pi \\ 16(1-e^{16\pi})e^{-8t} - 26(1-e^{4\pi})e^{-2t} & t > 2\pi \end{cases}$$

이고, 같은 방법으로

$$i_2 = \begin{cases} 8e^{-8t} - 26e^{-2t} + 18\cos t + 12\sin t & 0 \le t \le 2\pi \\ 8(1-e^{16\pi})e^{-8t} - 26(1-e^{4\pi})e^{-2t} & t > 2\pi \end{cases}$$

이다.

Chapter 6 Review Questions and Problems

1.

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos wt$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\sin wt$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s^{n+1}}$ $(n=0, 1, \cdots)$	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh at$
$\frac{1}{s^{a+1}}$ (a: 양수)	$\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos wt$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\sin wt$

2. 1단계 : 주어진 미분방정식을 변환하여 보조방정식을 얻는다.
2단계 : 보조방정식을 대수적으로 풀어 해를 구한다.
3단계 : 역변환을 결정하여 주어진 문제의 해를 구한다.

3. Laplace transform을 이용하면 미분방정식을 대수식으로 바꿀 수 있다. 특히 불연속 함수가 나타났을 때 유용하다.

4. Laplace transform이 선형연산이라는 사실이 매우 유용한다.

5. $$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\} = \int_0^\infty [f(t)+g(t)]e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

이다.

$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)g(t)dt$ 이고

$\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$

이므로 $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} \ne \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$ 이다.

6. 단위계단함수 $u(t-a)$는 $t < a$에서 0이고 $t = a$에서 크기 1의 도약을 하고 $t > a$일 때 1이다.

$f_k(t-a) = \begin{cases} 1/k & a \le t \le a+k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 일 때, Dirac delta 함수 $\delta(t-a)$는 $\delta(t-a) = \lim_{k \to 0} f_k(t-a)$ 이다.

이 함수들은 불연속 함수를 나타낼 때 유용하다.

7. 적분에 관한 변환공식 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$을 적용하면 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(\tau)d\tau=g(t)$이고 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}F(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left[\frac{1}{s}F(s)\right]\right\}=\int_0^t g(\tau)d\tau$이다.

8. Laplace 변환된 함수 $F(s)$가 평행이동 되었을 때 제 1 이동정리를 적용하고, 변환하기 전 함수인 $f(t)$가 평행이동 되었을 때 제 2 이동정리를 적용한다.

9. Laplace 변환은 적분으로 표현되기 때문에 불연속 함수라도 적분 구간을 나눔으로서 잘 정의된다. Laplace 변환이 성립하기 위한 유한조건 $|f(t)|<Me^{ct}$ 을 만족하지 않는 연속함수의 Laplace 변환은 정의되지 않는다.

10. 만약 $f(t)\neq g(t)$ 이면

$$\mathcal{L}\{f(t)\}-\mathcal{L}\{g(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt-\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-st}\{f(t)-g(t)\}dt\neq 0$$

이다. 따라서 $\mathcal{L}\{f(t)\}\neq\mathcal{L}\{g(t)\}$ 이다.
이러한 성질은 역변환의 존재성을 증명하는데 중요한 역할을 한다.

11. $\mathcal{L}(3\cosh t-5\sinh 2t)=\frac{3s}{s^2-1}-\frac{10}{s^2-4}$
$$=\frac{3s^3-10s^2-12s+10}{(s^2-4)(s^2-1)}$$

12. $\mathcal{L}\left(e^{-2t}(\cos 2t-4\sin 2t)\right)=\frac{(s+2)-8}{(s+2)^2+4}$

13. $\mathcal{L}\left(\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi t\right)\right)=\mathcal{L}\left(\frac{1+\cos\pi t}{2}\right)$
$$=\frac{1}{2s}+\frac{s}{2(s^2+\pi^2)}=\frac{2s^2+\pi^2}{2s(s^2+\pi^2)}$$

14. $\mathcal{L}\left[16t^2u\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$
$$=\mathcal{L}\left[\left(16\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+8\left(t-\frac{1}{4}\right)+1\right)u\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$$
$$=\left(\frac{32}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-s/4}$$

15. $\mathcal{L}\left[e^{-t/2}u(t-2)\right]=\mathcal{L}\left[e^{-(t-2)/2}e^{-1}u(t-2)\right]$
$$=\frac{e^{-1}}{s+1/2}e^{-2s}=\frac{2e^{-1-2s}}{2s+1}$$

16. $\mathcal{L}(u(t-2\pi)\cos 2t)=\mathcal{L}(u(t-2\pi)\cos 2(t-2\pi))$
$$=\frac{se^{-2\pi s}}{s^2+4}$$

17. $\mathcal{L}(t\sin t)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$ 이므로

$$\mathcal{L}(\cos t-t\sin t)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{2s}{(s^2+1)^2}=\frac{s^3-s}{(s^2+1)^2}$$

이다.

18. $\mathcal{L}(\sin wt*\cos wt)=\mathcal{L}(\sin wt)\mathcal{L}(\cos wt)=\frac{ws}{(s^2+w^2)^2}$

19. $\mathcal{L}(4t*e^{-2t})=\mathcal{L}(4t)\mathcal{L}(e^{-2t})=\frac{4}{s^2(s+2)}$

20. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7.5}{s^2-2s-8}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1.25}{s-4}-\frac{1.25}{s+2}\right)$
$$=1.25(e^{4t}-e^{-2t})$$

21. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2}e^{-s}\right)=(1-(t-1))u(t-1)=(2-t)u(t-1)$

22. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/16}{s^2+s+1/2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/16}{(s+1/2)^2+1/4}\right)$
$$=\frac{1}{8}e^{-t/2}\sin\frac{t}{2}$$

23. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}\right)=\cos\omega t\sin\theta+\sin\omega t\cos\theta$
$$=\sin(\omega t+\theta)$$

24. $F(s)=\frac{s^2-6.25}{(s^2+6.25)^2}=\frac{d}{ds}\left(-\frac{s}{s^2+6.25}\right)$ 이므로

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+6.25}\right)\right)=t\cos 2.5t$$

이다.

25. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2-2s}{s^3}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}\right)=t^2-2t$

26. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s-10}{s^3}e^{-5s}\right)=u(t-5)\left[2(t-5)-5(t-5)^2\right]$
$$=(-5t^2+52t-135)u(t-5)$$

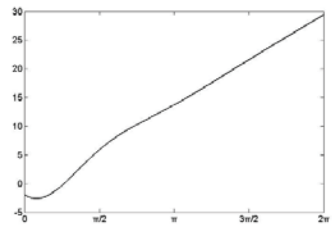
27. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+1}{s^2+2s+5}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2(s+1)-1}{(s+1)^2+4}\right)$
$$=e^{-t}\left(2\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

28. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{s^2-2s+2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s-1)+3}{(s-1)^2+1}\right)$
$$=3e^t(\cos t+\sin t)$$

29. $(s^2Y+2s+5)+2(sY+2)+5Y=\frac{25}{s^2}$,

$$Y=\frac{-2s-9}{s^2+2s+5}+\frac{25}{s^2(s^2+2s+5)}$$
$$=-\frac{2}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{10}{s^2+2s+5}=-\frac{2}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{10}{(s+1)^2+4},$$

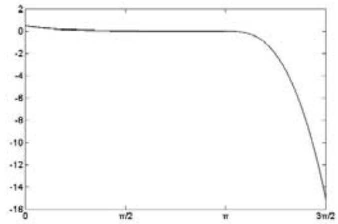
$y=-2+5t-5e^{-t}\sin 2t$



30. $\left(s^2Y-\frac{1}{2}s+1\right)+\left(sY-\frac{1}{2}\right)-2Y=\frac{-30s}{s^2+1}e^{-\pi s}$,

$$Y=\frac{1}{2(s+2)}-\frac{30e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+s-2)}$$
$$=\frac{1}{2(s+2)}+\left[\frac{2}{s+2}-\frac{5}{s-1}+\frac{3s+9}{s^2+1}\right]e^{-\pi s},$$

$$y = \frac{1}{2}e^{-2t} + u(t-\pi)\left[2e^{-2(t-\pi)} - 5e^{t-\pi}\right] + u(t-\pi)\left[3\cos(t-\pi) + 9\sin(t-\pi)\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2t} + u(t-\pi)\left[2e^{-2(t-\pi)} - 5e^{t-\pi}\right] + u(t-\pi)\left[-3\cos t - 9\sin t\right]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-2t} & (t<\pi) \\ \frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-2(t-\pi)} - 5e^{t-\pi} - 3\cos t - 9\sin t & (t>\pi) \end{cases}$$



31. $s^2 Y - \frac{s}{2} + 1 + sY - \frac{1}{2} - 2Y = \mathcal{L}(30u(t-\pi)\cos t)$

$\cos t = -\cos(t-\pi)$ 이므로

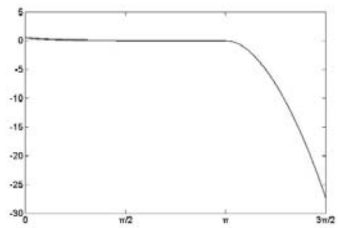
$$\mathcal{L}(30u(t-\pi)\cos t) = \mathcal{L}(-30u(t-\pi)\cos(t-\pi)) = \frac{-30se^{-\pi s}}{s^2+1}$$

이다.

$$(s^2+s-2)Y = \frac{s-1}{2} - \frac{30se^{-\pi s}}{s^2+1}$$

$$Y = \frac{1}{2(s+2)} - \frac{30se^{-\pi s}}{(s+2)(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2(s+2)} - \left(\frac{4}{s+2} + \frac{5}{s-1} + \frac{-9s+3}{s^2+1}\right)e^{-\pi s}$$

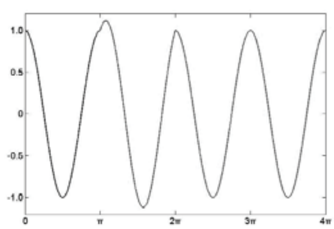
$$y = \frac{1}{2}e^{-2t} - \left(4e^{-2t+2\pi} + 5e^{t-\pi} + 9\cos t - 3\sin t\right)u(t-\pi)$$



32. $s^2 Y - s + 4Y = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$,

$$Y = \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s^2+4},$$

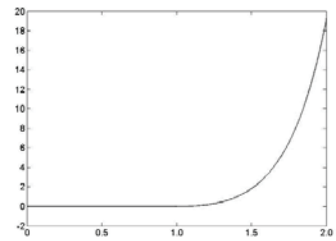
$$y = \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\,(u(t-\pi) - u(t-2\pi))$$



33. $s^2 Y - 5sY + 6Y = \frac{6e^{-s}}{s}$,

$$Y = \frac{6e^{-s}}{s(s^2-5s+6)} = \left(\frac{1}{s} - \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s-3}\right)e^{-s},$$

$$y = \left(1 - 3e^{2(t-1)} + 2e^{3(t-1)}\right)u(t-1)$$



34. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} sY_1 - Y_2 = 0 \\ 4Y_1 + sY_2 = e^{-\pi s} \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면 $Y_1 = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}$, $Y_2 = \frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}$

이므로 일반해는

$$y_1 = \frac{1}{2}u(t-\pi)\sin 2t,\ y_2 = u(t-\pi)\cos 2t$$

이다.

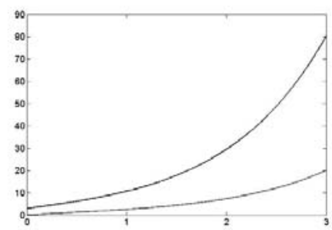
35. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} (s-2)Y_1 + 4Y_2 = 3 \\ Y_1 - (s+3)Y_2 = 0 \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{3s+9}{s^2+s-2} = \frac{4}{s-1} - \frac{1}{s+2},$$
$$Y_2 = \frac{3}{s^2+s-2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

이므로 일반해는 $y_1 = 4e^t - e^{-2t}$, $y_2 = e^t - e^{-2t}$ 이다.



36. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} (s-2)Y_1 - 4Y_2 = -4 \\ Y_1 - (s-2)Y_2 = 4 \end{cases}$$

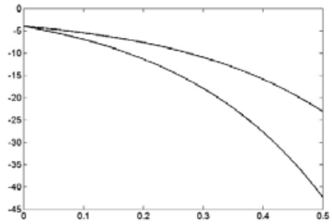
이다. 이 식을 정리하면

$$Y_1 = \frac{-4(s-2)-16}{(s-2)^2-4},\ Y_2 = \frac{-4(s-2)-4}{(s-2)^2-4}$$

이므로 일반해는

$$y_1 = e^{2t}(-4\cosh 2t - 8\sinh 2t),$$
$$y_2 = e^{2t}(-4\cosh 2t - 2\sinh 2t)$$

이다



.

37. 주어진 방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} sY_1 - sY_2 = 1+\dfrac{e^{-\pi s}}{s} \\ -Y_1 + sY_2 = \dfrac{e^{\pi s}}{s} \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{s-1} + \frac{e^{-\pi s}+e^{\pi s}}{s(s-1)} \\ &= \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)\left(e^{-\pi s}+e^{\pi s}\right), \\ Y_2 &= \frac{1}{s(s-1)} + \frac{e^{\pi s}}{s(s-1)} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2(s-1)} \\ &= \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)\left(1+e^{\pi s}\right) + \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-\pi s} \end{aligned}$$

이므로 일반해는

$$\begin{aligned} y_1 &= e^t + \left(e^{t-\pi}-1\right)u(t-\pi) + \left(e^{t+\pi}-1\right)u(t+\pi), \\ y_2 &= e^t - 1 + \left(e^{t+\pi}-1\right)u(t+\pi) \\ &\quad + \left[e^{t-\pi} - 1 - (t-\pi)\right]u(t-\pi) \end{aligned}$$

이다.

38. 오른쪽으로 향하는 것을 양의 방향이라 하자. m_1, m_2가 각각 평형위치에서 y_1, y_2의 위치에 있을 때, k_1, k_2, k_3 스프링이 늘어난 길이는 각각 y_1, y_2-y_1, $-y_2$이다.

Hook의 법칙에 의하여, m_1에 k_1 스프링에 의한 힘 k_1y_1이 음의 방향으로, k_2 스프링에 의한 힘 $k_2(y_2-y_1)$이 양의 방향으로 작용한다.

즉, m_1에 작용하는 힘은 $-k_1y_1+k_2(y_2-y_1)$이다.

뉴턴의 제 2법칙에 의하여

$$m_1y_1'' = -k_1y_1 + k_2(y_2-y_1)$$

이 성립한다.

마찬가지로 m_2에 k_2 스프링에 의한 힘 $k_2(y_2-y_1)$이 음의 방향으로, k_3 스프링에 의한 힘 $-k_3y_2$이 양의 방향으로 작용한다.

즉, m_2에 작용하는 힘은 $-k_2(y_2-y_1)-k_3y_2$이다.

뉴턴의 제 2법칙에 의하여

$$m_2y_2'' = -k_2(y_2-y_1) - k_3y_2$$

이 성립한다.

39. 주어진 조건을 문제 38번에 적용하면

$$\begin{aligned} 10y_1'' &= -20y_1 + 40(y_2-y_1) \\ 10y_2'' &= -40(y_2-y_1) - 20y_2 \end{aligned}$$

이다. 이 연립방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$\begin{cases} (s^2+6)\,Y_1 - 4\,Y_2 = 1 \\ 4\,Y_1 - (s^2+6)\,Y_2 = 1 \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면 $Y_1 = \dfrac{1}{s^2+10}$, $Y_2 = \dfrac{-1}{s^2+10}$

이므로 일반해는

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\sin t\sqrt{10}, \quad y_2 = \frac{-1}{\sqrt{10}}\sin t\sqrt{10}$$

이다.

40. 문제 38번과 같은 방법으로 방정식

$$\begin{aligned} m_1y_1'' &= -k_1y_1 + k_2(y_2-y_1) \\ m_2y_2'' &= -k_2(y_2-y_1) + k_3(y_3-y_2) \\ m_3y_3'' &= -k_3(y_3-y_2) - k_4y_3 \end{aligned}$$

을 얻는다.

41. $10i + \dfrac{q}{0.1} = v(t)$, $q(0)=0$

$v(t) = 10t(1-u(t-4)) + 40u(t-4)$이므로

$$10I + \frac{10I}{s} = \frac{10\left(1-e^{-4s}\right)}{s^2}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$I = \frac{1-e^{-4s}}{s(s+1)} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\left(1-e^{-4s}\right)$$

이다. 따라서

$$i = 1 - e^{-t} - \left(1-e^{-(t-4)}\right)u(t-4)$$

이다.

42. $i' + q = v(t)$, $i(0)=0$, $q(0)=0$

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(1-e^{-t}\right)\left(1-u(t-\pi)\right) \\ &= 1 - e^{-t} + \left(1 - e^{-(t-\pi)}e^{-\pi}\right)u(t-\pi) \end{aligned}$$

이므로 $sI + \dfrac{I}{s} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} + \left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-\pi}}{s+1}\right)e^{-\pi s}$이다.

이 식을 정리하면

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s+1)(s^2+1)} \\ &\qquad + \left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{se^{-\pi}}{(s+1)(s^2+1)}\right]e^{-\pi s} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} \\ &\qquad + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1}\right)e^{-\pi-\pi s} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) + \sin(t-\pi)u(t-\pi) \\ &\quad + e^{-\pi}\left[\frac{1}{2}e^{-(t-\pi)} - \frac{1}{2}\left(\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi)\right)\right]u(t-\pi) \\ &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) - (\sin t)u(t-\pi) \\ &\qquad + e^{-\pi}\left[\frac{1}{2}e^{-(t-\pi)} - \frac{1}{2}(-\cos t + \sin t)\right]u(t-\pi) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-t} - \cos t + \sin t\right) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left[-2\sin t + e^{-t} + e^{-\pi}(\cos t - \sin t)\right]u(t-\pi) \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}\left(-e^{-t} + \sin t + \cos t\right) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\left[2\cos t + e^{-t} + e^{-\pi}(\sin t + \cos t)\right]u(t-\pi) \end{aligned}$$

이다.

43. $20i' + 160i + \dfrac{q}{0.002} = 37\sin 10t$, $i(0) = 0$, $q(0) = 0$

$$20sI + 160I + \frac{I}{0.002s} = \frac{370}{s^2+100}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{37s}{2(s^2+100)(2s^2+16s+50)} \\ &= -\frac{1}{26}\frac{3s-32}{s^2+100} + \frac{1}{26}\frac{3s-8}{s^2+8s+25} \\ &= -\frac{1}{26}\frac{3s-32}{s^2+100} + \frac{1}{26}\frac{3(s+4)-20}{(s+4)^2+9} \end{aligned}$$

$$i = e^{-4t}\left(\frac{3}{26}\cos 3t - \frac{10}{39}\sin 3t\right) - \frac{3}{26}\cos 10t + \frac{8}{65}\sin 10t$$

44. 주어진 조건을 모델링하면

$2i_1' + i_1 - i_2 = 2$, $2i_2 + i_2' - i_1' = 0$ 이다.

이 연립방정식을 Laplace 변환하면

$2sI_1 + I_1 - I_2 = \dfrac{2}{s}$, $2I_2 + sI_2 - 2 - sI_1 = 0$ 이다.

이를 정리하면

$$I_1 = \frac{2s+1}{s(s^2+2s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2},$$

$$I_2 = \frac{s+3}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

이다.

따라서 해는 $i_1 = 1 - e^{-t} + te^{-t}$, $i_2 = e^{-t} + 2te^{-t}$ 이다.

45. 주어진 조건을 모델링하면

$5i_1' + 20(i_1 - i_2) = 60$, $20i_2 + 30i_2' + 20(i_2' - i_1') = 0$

이다. 이 연립방정식을 Laplace 변환하여 정리하면

$$(s+4)I_1 - 4I_2 = \frac{12}{s}, \quad -2sI_1 + (5s+2)I_2 = 0$$

이다. 이를 정리하면

$$I_1 = \frac{12(5s+2)}{s(5s^2+14s+8)} = \frac{3}{s} + \frac{25}{5s+4} - \frac{8}{s+2},$$

$$I_2 = \frac{24}{5s^2+14s+8} = \frac{20}{5s+4} - \frac{4}{s+2}$$

이다. 따라서 해는

$i_1 = 3 + 5e^{-4t/5} - 8e^{-2t}$, $i_2 = 4e^{-4t/5} - 4e^{-2t}$ 이다.