Ruang Vektor

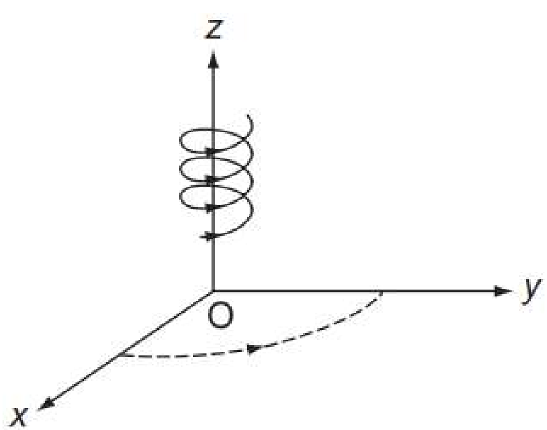
Contoh Ruang Vektor:

Contoh :

- Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).
  Notasi : R^n(Ruang Euclides orde n)
- Himpunan matriks berukuran $m \times n$
  dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar),
  Notasi : $M_{m \times n}$(Ruang Matriks $m \times n$)
- Himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.
  Notasi : P_n(Ruang Polinom orde n)

Ruang vektor membutuhkan sumbu arah ketiga yang tegak lurus dengan sumbu x dan y dimana sumbu tersebut diberi nama sumbu z. Sumbu x. y dan z memiliki aturan yang disebut aturan “tangan kanan”.

$0x, 0y, 0z$ dari kumpulan tangan kanan, jika melakukan rotasi dari $0x$ ke $0y$ akan menghasilkan gerakan pembuka botol menggunakan tangan kanan sepanjang positif arah $0z$.



Bagaimana hasilnya jika merotasi dari $0y$ ke $0z$?

Membangun Suatu Ruang Vektor

- Himpunan vektor

$$S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$$

  dikatakan membangun suatu ruang vektor V jika setiap vektor pada V selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S.

  Contoh:

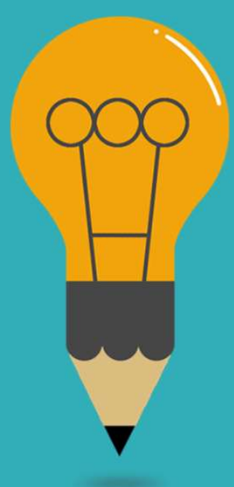
  Tentukan apakah

  $\overrightarrow{v_1} = (1,1,2)$,

  $\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$, dan

  $\overrightarrow{v_3} = (2,1,3)$

  Membangun R^3



- Ambil sembarang vektor di R^3, misalkan

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Tulis:

$$\vec{u} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + k_3\overrightarrow{v_3}$$

Dalam bentuk perkalian matriks, persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE) dalam menyelesaikan Sistem Persamaan Linear (SPL)

- Syarat agar $\vec{u}$ dapat dikatakan kombinasi linear $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ adalah SPL tersebut harus mempunyai solusi.

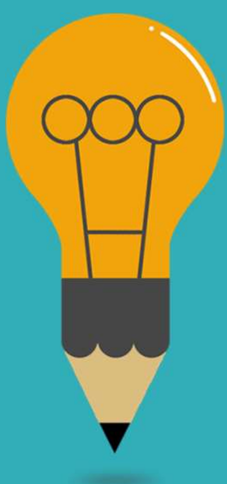
- Dengan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & -1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 - u_1 - u_2 \end{array}\right]$$

Agar SPL itu konsisten haruslah $u_3 - u_2 - u_1 = 0$

Ini kontradiksi dengan pengambilan vektor sembarang(unsur-unsurnya bebas, tak bersyarat)

Dengan demikian vektor-vektor tersebut tidak membangun R^3

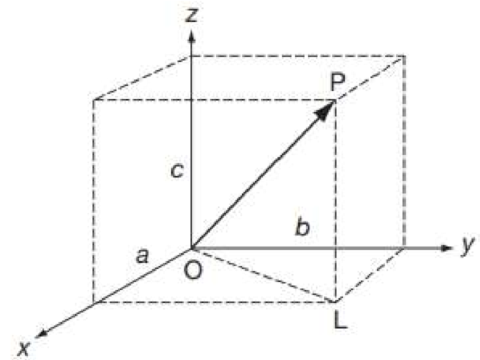


Vektor $\overline{\mathrm{OP}}$ didefinisikan dengan komponen

a sepanjang $\mathrm{O}x$

b sepanjang $\mathrm{O}y$

c sepanjang $\mathrm{O}z$



Misal

$\mathbf{i}$ = vektor satuan pada $\mathrm{O}x$

j = vektor satuan pada $\mathrm{O}y$

$\mathbf{k}$ = vektor satuan pada $\mathrm{O}z$

Maka

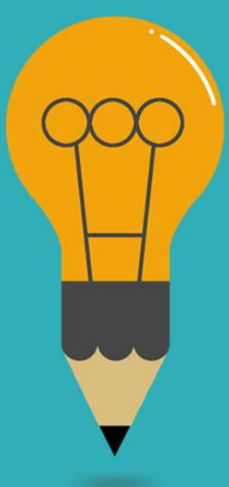
$$\overline{\mathbf{OP}} = \boldsymbol{ai} + \boldsymbol{bj} + \boldsymbol{ck}$$

$$|\overline{\mathrm{OP}}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

atau

$$\mathbf{r} = \mathbf{ai} + \mathbf{bj} + \mathbf{ck}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

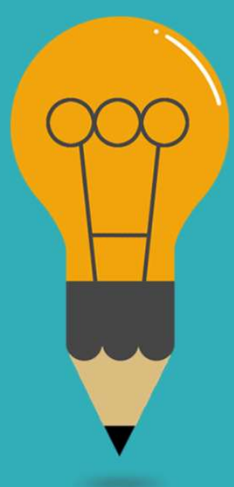


Rumus tersebut memudahkan kita untuk menentukan ukuran dari bentuk vektor dalam suku vektor satuan.

Contoh :

Tentukan ukuran vektor berikut : $\overline{\mathrm{PQ}} = \mathbf{4i} + \mathbf{3j} + \mathbf{2k}$

$$|\overline{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5{,}385$$

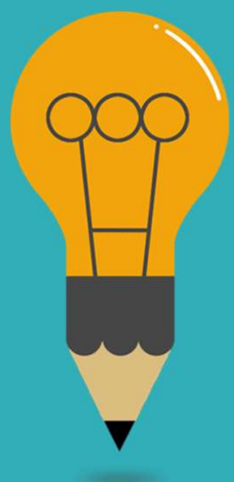


Ruang Euclides orde n

- Operasi-operasi pada ruang vektor Euclides:
  - Penjumlahan
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$
  - Perkalian dengan scalar Riil sebarang (k)
$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$
  - Perkalian titik (Euclidean inner product)
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Panjang vektor didefiniskan oleh:
$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh:
$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$



- Diketahui $\vec{u} = (1, 1, 2, 3)$ dan $\vec{v} = (2,2,1,1)$
  Tentukan panjang masing-masing vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut

Jawab:

- Panjang vektor:

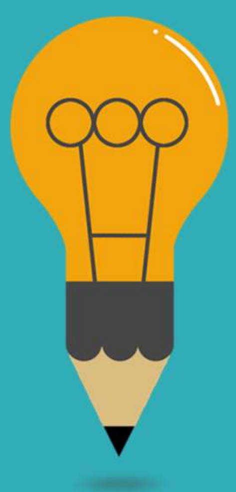
$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\vec{v}\| = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

- Jarak antar kedua vektor:

$$d(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{7}$$



Subruang

- Tunjukan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2×2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2×2

Jawab:

elemen dari

- $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ maka $W \neq \{\}$
- Jelas bahwa $W \subseteq V$

Subruang

- Ambil sembarang matriks $A, B \in W$ maka

  Perhatikan bahwa:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

  Ini menunjukan bahwa $A + B \in W$

- Ambil sembarang matriks $A \in W$ dan $k \in Riil$ maka

$$kA = k \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

  Ini menunjukan bahwa $kA \in W$

  Jadi, W merupakan subruang dari $M_{2\times2}$