

**ARAH  
COSINUS**



**HASIL  
KALI DUA  
VEKTOR**



A decorative vertical bar on the left side of the slide, composed of many overlapping circles in shades of blue, yellow, and pink.

**01**

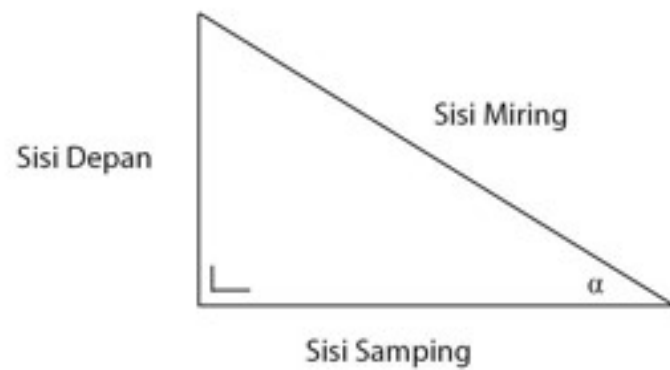
**Arah Cosinus**

**02**

**Hasil Kali Skalar dari Dua Vektor**

**03**

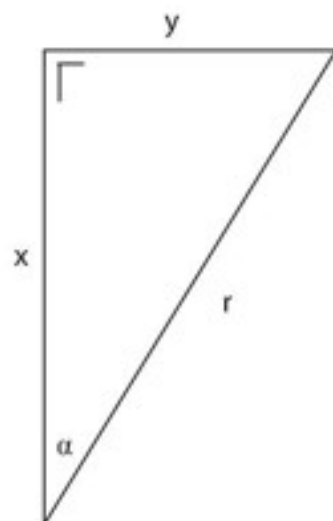
**Hasil Kali Vektor dari Dua Vektor**



$$\sin \alpha = \frac{\text{Sisi Depan}}{\text{Sisi Miring}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Sisi Samping}}{\text{Sisi Miring}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Sisi Depan}}{\text{Sisi Samping}}$$



$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

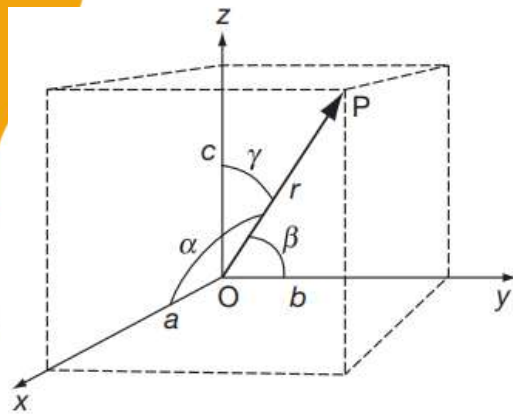
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{co tan} \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\operatorname{cotan} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

# Arah Cosinus

Arah vektor dalam tiga dimensi ditentukan dengan sudut dimana vektor dibuat dengan tiga sumbu referensi.



Misal  $\overline{OP} = \mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

Maka

sehingga :

$$\frac{a}{r} = \cos \alpha$$

$$a = r \cos \alpha$$

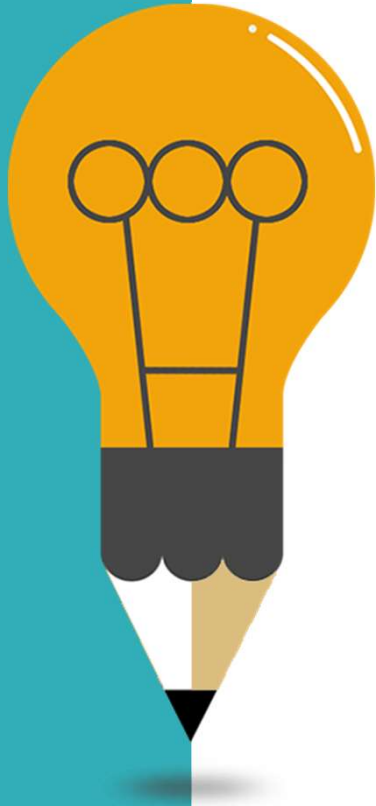
$$\frac{b}{r} = \cos \beta$$

$$b = r \cos \beta$$

$$\frac{c}{r} = \cos \gamma$$

$$c = r \cos \gamma$$

# Arah Cosinus



Selain itu

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Jika  $l = \cos \alpha$

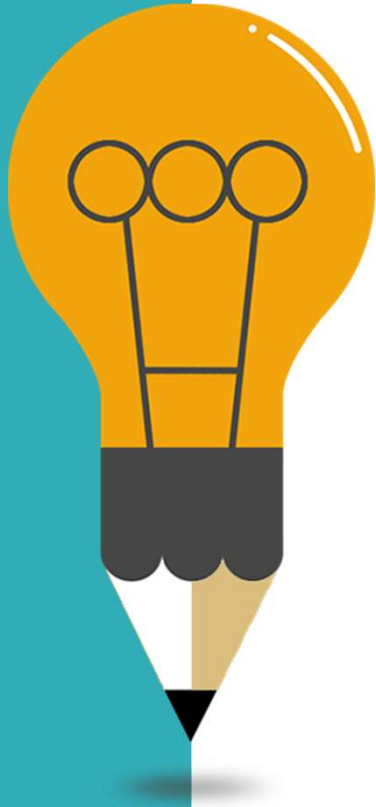
$$m = \cos \beta$$

$$n = \cos \gamma \quad \text{maka : } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

**Catatan :**

$[l, m, n]$  ditulis dalam kurung persegi yang disebut *arah cosinus* dari vektor  $\overline{OP}$  dan nilai cosinus dari sudut yang dibuat vektor dengan sumbu referensi..

# Arah Cosinus



Jadi untuk vektor  $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

$$l = \frac{a}{r}, \quad m = \frac{b}{r}, \quad n = \frac{c}{r}$$

dan

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

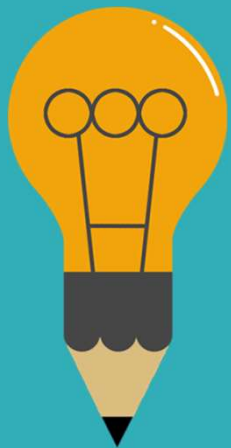
**Contoh :**

Tentukan arah cosinus  $[l, m, n]$  dari vektor

$$\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$a = 3, \quad b = -2, \quad c = 6, \quad r = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$l = \frac{3}{7}, \quad m = -\frac{2}{7}, \quad n = \frac{6}{7}$$



	sin	cos	tan	cot
0°	0	1	0	NOT DEFINED
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	NOT DEFINED	0

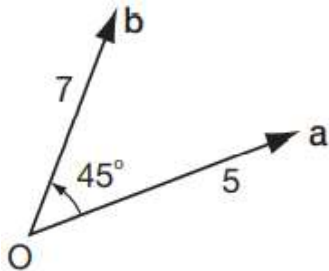


# Hasil Kali Skalar dari Dua Vektor

Jika **a** dan **b** adalah dua vektor, hasil kali skalar dari **a** dan **b** didefinisikan sebagai skalar (bilangan)  $ab \cos \theta$  dimana  $a$  dan  $b$  adalah ukuran vektor **a** dan **b**, sedangkan  $\theta$  adalah sudut diantara dua vektor. Hasil kali skalar dinotasikan dengan **a . b**.

**Contoh :**

**Berapa hasil kali skalar dari dua vektor berikut?**



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cos \theta = 5 \cdot 7 \cdot \cos 45^\circ = 35 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{35\sqrt{2}}{2}$$





# Hasil Kali Skalar dari Dua Vektor 3D

Anggap dua vektor dibentuk dalam suku vektor satuan  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{k}$ .

Misal  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  dan  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ , maka :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

**Contoh :**

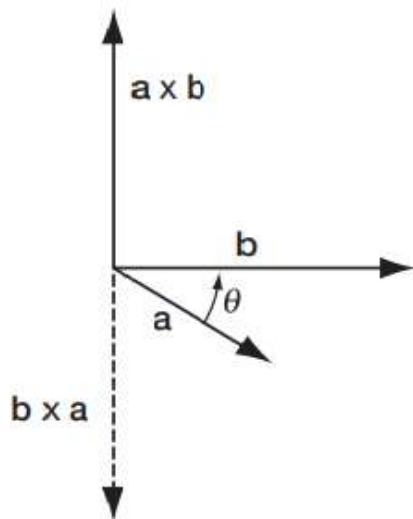
**Jika  $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  dan  $\mathbf{q} = 4\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ , berapa hasil kali skalar dari dua vektor tersebut?**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 4 + 3 \times 1 + 5 \times 6 = 8 + 3 + 30 = 41$$



# Hasil Kali Vektor dari Dua Vektor

Hasil kali vektor **a** dan **b** dituliskan sebagai  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  dan didefinisikan sebagai vektor yang memiliki  $ab \cos \theta$  dimana  $\theta$  adalah sudut diantara dua vektor yang diberikan. Hasil kali skalar dinotasikan dengan  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .



$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta$$

$\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  merupakan pembalikan arah rotasi dan hasil kalinya diperoleh :  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Jika  $\theta = 0$ , maka  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$

Jika  $\theta = 90^\circ$ , maka  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab$



# Hasil Kali Vektor dari Dua Vektor

Anggap dua vektor dibentuk dalam suku vektor satuan **i**, **j** dan **k**.

Misal  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  dan  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ , maka :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

**Catatan :**

- a) Baris paling atas merupakan vektor satuan berurutan **i**, **j**, **k**
- b) Baris kedua merupakan koefisien **a**
- c) Baris ketiga merupakan koefisien **b**



# Hasil Kali Vektor dari Dua Vektor

Contoh :

Jika  $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  dan  $\mathbf{q} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ , berapa hasil kali vektor dari dua vektor tersebut?

Pertama tentukan representasi hasil kali vektor  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = (-8 - 15)\mathbf{i} - (-4 - 3)\mathbf{j} + (10 - 4)\mathbf{k} = -23\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$



# Hasil Kali Vektor dari Dua Vektor

$$\begin{aligned}\text{Diketahui } \vec{p} &= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ \vec{q} &= \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

Hitung  $\vec{p} \times \vec{q}$

Jawab :

$$\begin{aligned}\vec{p} \times \vec{q} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-8 - 15) - \mathbf{j}(-4 - 3) + \mathbf{k}(10 - 4) \\ &= -23\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\end{aligned}$$



# TUGAS

1. Jika  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$  dan  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ . Tentukan

a)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

b)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

2. jika diketahui dua vektor  $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$  dan  $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$  maka nilai  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  adalah: