Untuk apa Graf?

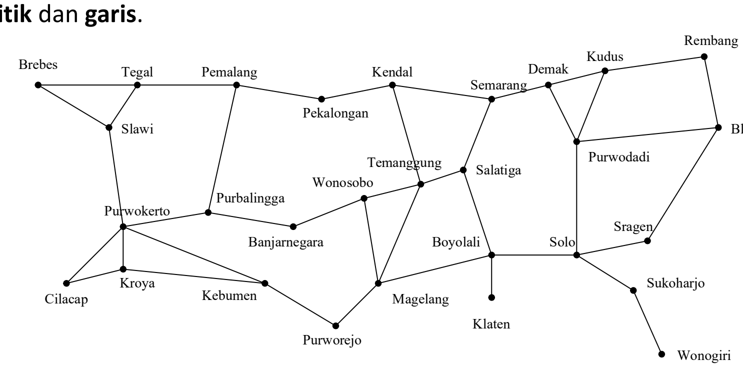
"Matematika menjadi hal utama untuk menjawab tantangan di masa depan. Dengan mempelajarinya, manusia akan terus berkembang dan menciptakan teknologi mutakhir"(Prof. Edy Tri Baskoro/ITB).

Dalam era digital, teori Graf bermanfaat untuk **menciptakan link** yang ada di internet, algoritma, transportasi, kecerdasan buatan, GPS,Gmaps.

Introduction

Graf/Grafik dimodelkan untuk menghubungkan relasi antara benda
Teori Graf dapat dimodelkan menjadi berbagai tipe dari relasi dan proses dalam sistem informasi.

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut dengan simbol **titik** dan **garis**.

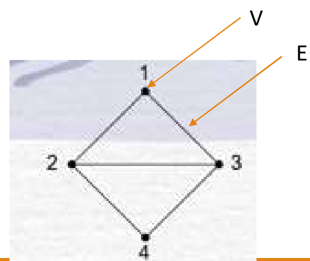


Definisi:

– Definisi graf adalah himpunan $G = (V, E)$, dimana:

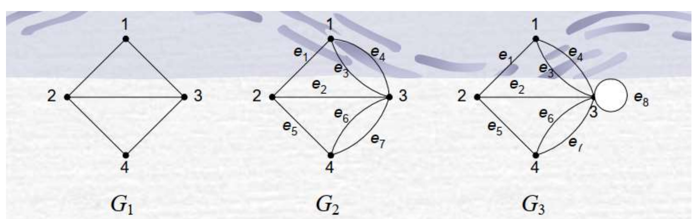
V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices)
= { *v*1 , *v*2 , ... , *vn* }

E = himpunan sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul
= {*e*1 , *e*2 , ... , *en* }



Pada *G*2,
sisi *e*3 = **(1, 3)** dan sisi *e*4 = **(1, 3)** dinamakan **sisiganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3

Pada *G*3, sisi *e*8 = **(3, 3)** dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*)
karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

G1 adalah graf dengan
V = { 1, 2, 3, 4 }
E = { (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) }

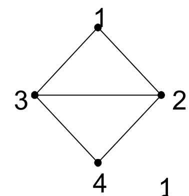
G2 adalah graf dengan
V = { 1, 2, 3, 4 }
E = { **(1, 2),** (2, 3), (**1, 3**), (**1, 3**), (2, 4), (3, 4), (3, 4) }
= { ***e*1**, *e*2, *e*3, *e*4, *e*5, *e*6, *e*7}

G3 adalah graf dengan
V = { 1, 2, 3, 4 }
E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (**3, 3**) }
= { *e*1, *e*2, *e*3, *e*4, *e*5, *e*6, *e*7, *e*8}

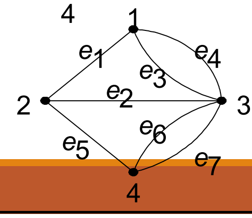
Jenis Graf

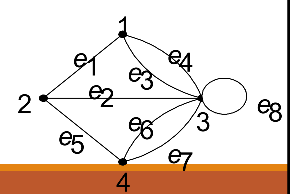
Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graph, maka graph digolongkan menjadi dua jenis:

1. **Graph sederhana** (*simple graph*).



2. **Graph tak-sederhana** (*unsimple-graph*).



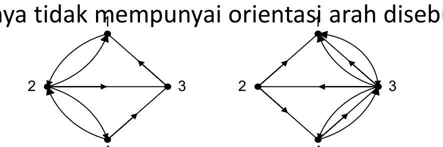


Jenis Graf

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

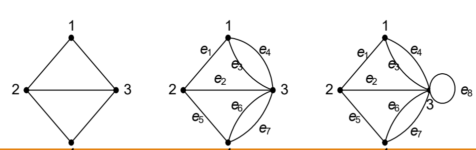
Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.



(a) graph berarah, (b) graph-ganda berarah

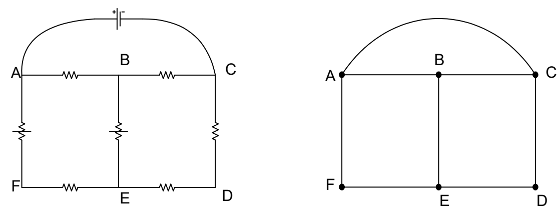
2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.



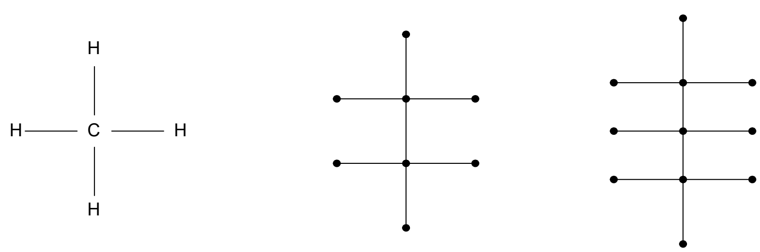
Contoh penerapan Graf

Rangkaian listrik



Contoh penerapan Graf

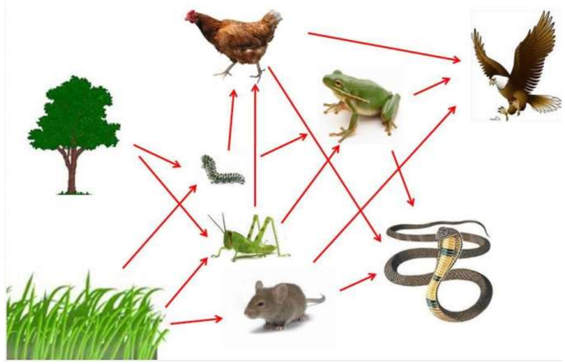
Isomer senyawa kimia karbon



metana ($CH4$) etana ($C2H6$) propana ($C3H8$)

Contoh penerapan Graf

-Jejaring makanan (Biologi)



1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

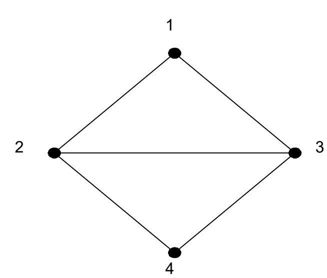
Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

Tinjau graph :

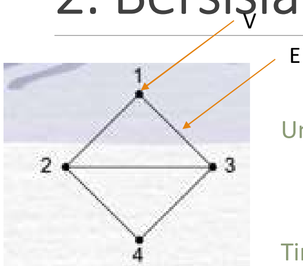
simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,

simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.

Graph



2. Bersisian (*Incidency*)



Untuk sembarang sisi *e* = (*vj*, *vk*) dikatakan

e bersisian dengan simpul *vj* , atau

e bersisian dengan simpul *vk*

Tinjau graph :

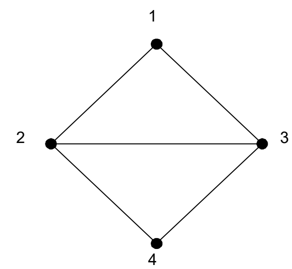
sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2

dan simpul 3,

sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2

dan simpul 4,

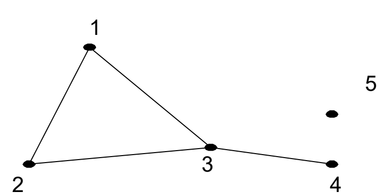
tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.



3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

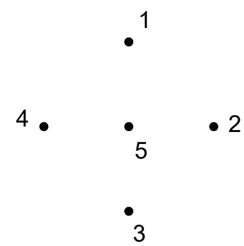
Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau graph : simpul 5 adalah simpul terpencil



4. Graph Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graph yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).



5. Derajat (*Degree*)

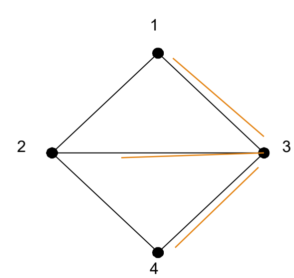
Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi: $d(v)$

Tinjau graph $G1$:

$d(1) = d(4) = 2$

$d(2) = d(3) = 3$



Derajat (*Degree*)

Tinjau graph *G*3:

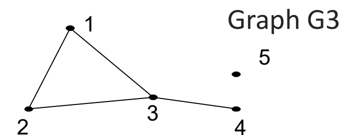
d(5) = 0 → simpul terpencil

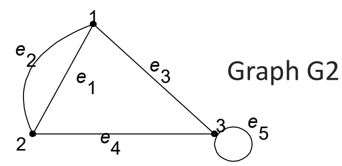
d(4) = 1 → simpul anting-anting (*pendant vertex*)

Tinjau graph *G*2:

d(1) = 3 → bersisian dengan sisi ganda

d(3) = 4 → bersisian dengan sisi gelang (*loop*)





Derajat (*Degree*)

Pada graph berarah,

$d_{in}(v)$ = derajat-masuk (*in-degree*)
= jumlah busur yang masuk ke simpul *v*

$d_{out}(v)$ = derajat-keluar (*out-degree*)
= jumlah busur yang keluar dari simpul *v*

$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$

Derajat (*Degree*)

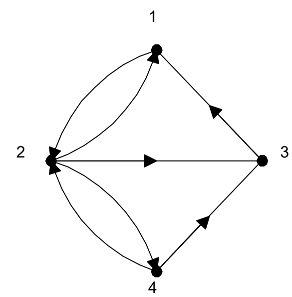
Tinjau graph :

$d_{in}(1) = 2; d_{out}(1) = 1$

$d_{in}(2) = 2; d_{out}(2) = 3$

$d_{in}(3) = 2; d_{out}(3) = 1$

$d_{in}(4) = 1; d_{out}(4) = 2$



$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$

Lemma Jabat Tangan ***/Handshaking Lemma***

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graph adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graph tersebut.

Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

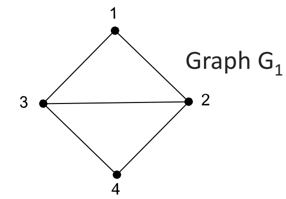
Lemma Jabat Tangan

Tinjau graph *G*1:

$d(1) + d(2) + d(3) + d(4) =$

$2 + 3 + 3 + 2 = 10 =$

$2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

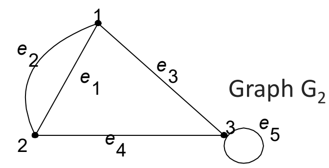


Tinjau graph *G*2:

$d(1) + d(2) + d(3)$

$= 3 + 3 + 4 = 10$

$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$



Lemma Jabat Tangan

Tinjau graph G_3:

$d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$

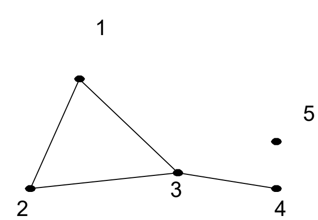
$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0$

$= 8$

$= 2 \times$ jumlah sisi

$= 2 \times 4$

Graph G_3



Lemma Jabat Tangan

Contoh.

Diketahui graph dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graph tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 2, 3, 1, 1, 2

(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

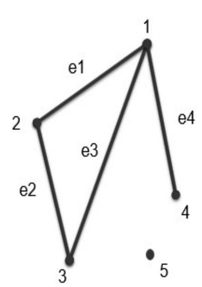
(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil

(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9).

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap

(2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16).

6. Lintasan (*Path*)



Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graph G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,... , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graph G.

Lintasan tertutup adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama, sedangkan **lintasan terbuka** berawal dan berakhir dari simpul yang berbeda.

Contoh:

1-e1-2-e2-3 adalah sebuah lintasan

1-e1-2-e2-3-e3-1 adalah sebuah lintasan tertutup

4-e4-1-e3-3 adalah sebuah lintasan terbuka.

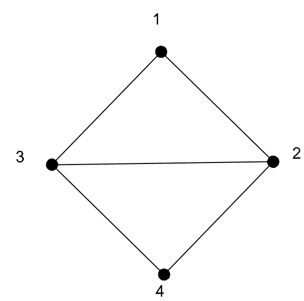
7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**. istilah lain dari lintasan tertutup.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada *G*1 memiliki panjang 3.

Tinjau graph *G*1:

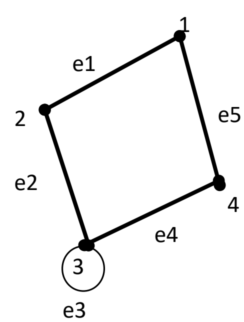
1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.



SIRKUIT EULER

- **Sirkuit Euler** adalah sirkuit yang melewati setiap sisi dari sebuah graf tepat satu kali dan setiap simpul dilewati paling tidak 1 kali.
- Contoh Sirkuit Euler pada gambar di atas adalah:

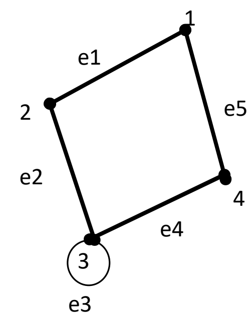
  1-e1-2-e2-3-e3-3-e4-4-e5-1



SIRKUIT HAMILTON

- **Sirkuit Hamilton** adalah sebuah sirkuit yang melewati setiap simpul dari sebuah graf tepat satu kali, (kecuali titik yang merupakan titik awalnya).
- Contoh Sirkuit Hamilton pada gambar di samping:

  1-e1-2-e2-3-e4-4-e5-1



Representasi Graph

1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)

1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

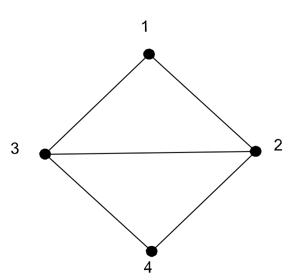
$A = [a_{ij}]$,

1, jika simpul i dan j bertetangga a_{ij} = {

0, jika simpul i dan j tidak bertetangga

Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

Graph

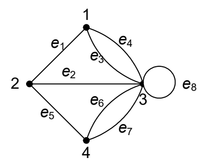


Matriks Ketetanggaan

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

Graph



Matriks Ketetanggaan

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Derajat tiap simpul *i*:

(a) Untuk graph tak-berarah,

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

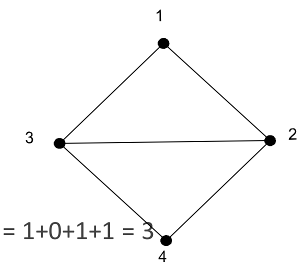
(b) Untuk graph berarah,

$d_{in}(v_j)$ = jumlah nilai pada kolom j = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

$d_{out}(v_i)$ = jumlah nilai pada baris i = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Derajat tiap simpul

Graph



Derajat simpul 2 = 1+0+1+1 = 3

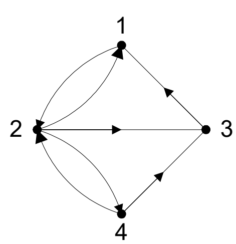
Derajat simpul 4 = 0+1+1+0 = 2

Matriks Ketetanggaan

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Derajat tiap simpul

Graph



Derajat masuk simpul 2 = 1+0+0+1 = 2

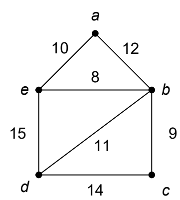
Derajat keluar simpul 2 = 1+0+1+1 = 3

Matriks Ketetanggaan

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Ketetanggaan Graph Berbobot

Tanda ∞ bila tdk ada sisi dari simpul I ke j



Matriks Ketetanggaan

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\ \infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & \infty & 15 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

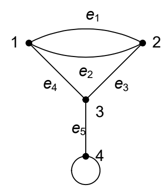
$A = [a_{ij}]$,

1, jika simpul *i* bersisian dengan sisi *j*

a_{ij} = { 0, jika simpul *i* tidak bersisian dengan sisi *j*}

Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

Graph

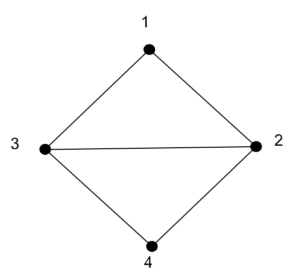


Matriks Bersisian

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)

Graph

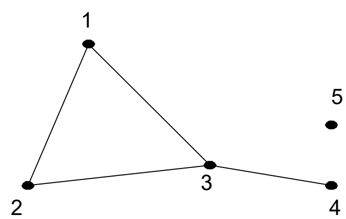


Senarai Ketetanggaan

Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

Graph

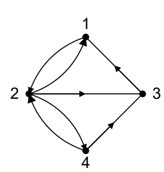


Senarai Ketetanggaan

Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)

Graph



Senarai Ketetanggaan

Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3