Croissance de la fleur du tournesol et nombre d'or*

par Albert tomasi, Paul Vie

1 Introduction du problème

1.1 Observations

La fleur du tournesol laisse à voir une géométrie particulière et intéressante.

Comme de nombreuses fleurs, elle repose sur un disque sur lequel sont disposées les graines de la plante; et ces graines se répartissent les unes par rapport aux autres d'une manière - apparemment - mathématique.

En effet, l'angle polaire séparant deux graines consécutives semble être constant et est environ égal à $2\pi\varphi$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

De plus, visuellement, ces graines semblent se regrouper en spirales de directions transverses, qui sont toujours au nombre d'un élément de la suite de Fibonacci, notée F_n et définie par:

$$\{F_0 = 0; F_1 = 1; F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \forall n \geqslant 1\}$$

On cherche ici à comprendre l'origine de ces caractéristiques mathématiques présentes dans la disposition des graines au sein de la fleur de tournesol, et particulièrement l'origine de l'angle polaire observé entre deux graines consécutives.

Il est utile en premier lieu de comprendre la manière dont la fleur de tournesol se forme.

1.2 Croissance de la plante

Le disque portant la fleur du tournesol se développe progressivement autour de son centre, appelé apex.Les graines du tournesol naissent au niveau de l'apex, et sont progressivement déplacées radialement vers la périphérie du disque au fur et à mesure que celui-ci grandit.

Lorsque la croissance de la fleur est terminée, les graines nées en premier se situent donc en périphéries du disque et celles qui sont nées en dernier sont au plus proche de l'apex.

On peut émettre les hypothèses selon lesquelles le rayon du disque grandit d'une longueur r constante entre la naissance de deux graines, la taille d'une graine est constante, et l'angle polaire α séparant deux graines consécutives est également constant.

Afin de maximiser l'apport en nutriments de chacune des graines sur le disque, il est optimal pour la plante que les graines soient disposées de la manière la plus homogène possible, en se répartissant au mieux sur toute l'aire du disque.

1.3 Modélisation du problème

On se place sur le plan complexe, et on suppose que les graines se répartissent autour du centre de ce plan, qui correspond à l'apex de la fleur. Les hypothèses faites précédemment nous permettent de définir la suite des graines de la fleur définie par : $g_n = r \cdot n \cdot e^{2i\pi n\alpha}$ avec r et α les constantes définies plus haut, et où les graines de plus grand indice sont les plus âgées, et les graines de plus petit indice sont les dernières nées et les plus proches de l'apex.

*. Ce document a été rédigé avec GNU $\text{T}_\text{E}\text{X}_{\text{MACS}}$ [2].

Le problème initial se résume donc à déterminer la valeur de α pour laquelle l'utilisation de l'espace disponible par les graines est optimale, c'est-à-dire la valeur de α pour laquelle la distance minimale qui sépare deux graines soit la plus grande possible.

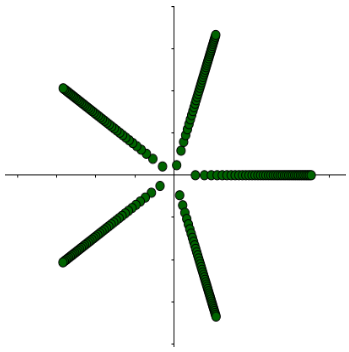
2 Différentes valeurs d'angles α

2.1 α rationnel

On donner à l'angle α différentes valeurs pour observer la répartition des graines qui en résulte.

Assez logiquement, pour $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, les graines forment q « rayons »,, toutes les graines d'indice n congru modulo q ayant le même argument.

Exemple. Pour $\alpha = \frac{1}{5}$,



On définit les termes de spirale et de rayon, et on admettra que ce qu'on qualifie visuellement par ces termes correspond aux définitions suivantes (simplification des hypothèses considérées dans le document de la bibliographie) :

Définition 1. *on définit une spirale comme une sous-suite* v_n de g_n *t.q:*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, |v_n - v_{n+1}| \leqslant |v_n - g_m|$$

Une spirale est donc une sous-suite de g_n t.q chaque élément de cette sous-suite est plus proche de l'émément suivant que de tout autre graine

Définition 2. *on définit un rayon comme une spirale dont tous les éléments ont le même argument.*

Dans le cas d'un nombre rationnel α de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, |g_n - g_m| \geqslant |g_n - g_{n+q}| = qr$$

(g_n et g_{n+q} sont deux éléments consécutifs d'un un rayon formé par l'angle $\frac{p}{q}$)

On peut tenter de faire grandir cette valeur minimale en prenant comme angle un nombre irrationnel.

2.2 α irrationnel

Que se passe-t-il lorsque la valeur de l'angle qui sépare deux graines consécutives est irrationnel ?

Quelques notions sur les nombres irrationnels

La théorie des frations continues permet de déomposer un irrationnel x sous la forme :

$$x = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_i + \frac{1}{\ddots}}}}}}$$

pour des entiers $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $n_i > 1$ pour $i > 1$. Nous avons supposé x irrationnel pour que l'ériture de la fration soit infinie ; si ce n'est pas le cas, la suite des (n_i) prend fin au bout d'un certain rang.

De plus, La fration obtenue en interrompant le développement à n_i , c'est-à-dire :

$$\frac{p_i}{q_i} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_i}}}}}$$

(où p_i et q_i sont premiers entre eux et $q_i > 0$) est appelée la $i - i$ème $r$éduite (ou parfois le $i - i$ème convergent) de x. Le premier résultat de la théorie est la onvergene de la suite de terme général $\frac{p_i}{q_i}$ vers x.

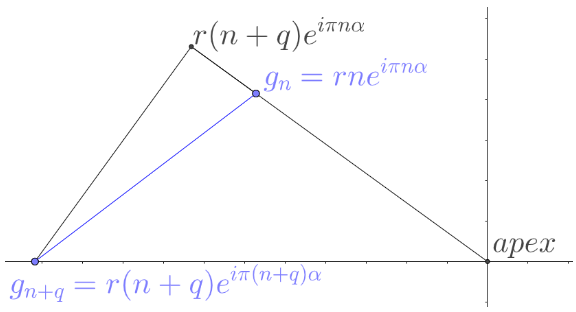
Lorsque alpha est irrationnel, on observe que différentes familles de spirales se forment. Ces spirales apparaissent visuellement du fait que α peut être approché par différentes réduites.

Chacune de ces réduites, de la forme $\frac{p_i}{q_i}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, engendre q spirales, dans lesquelles le décalage angulaire entre deux éléments successifs est de $\alpha - \frac{p_i}{q_i}$

Ainsi, plus une réduite approche alpha, plus les spirales qu'elle engendre sont proches d'être des rayons. Comme on le sait, les réduites d'un nombre irrationnel oscillent autour de lui, alternant entre une valeur plus grande et une valeur plus petite.

Ainsi, les familles de spirales visibles « tournent » alternativement dans le sens horaire et dans le sens anti-horaire. Cela explique leur tranversalité.

Calculons la distance minimale entre deux graines lorsque a est irrationnel.



Soit $\frac{p}{q}$ une réduite de α avec $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$|g_n - g_m| \geqslant |g_n - g_{n+q}|$$

(g_n et g_{n+q} sont deux éléments consécutifs d'une spirale)

$$= \sqrt{|g_n - r(n+q)e^{i\pi n\alpha}|^2 + |r(n+q)e^{i\pi n\alpha} - g_{n+q}|^2} \qquad \text{(Théorème de Pythagore)}$$

$$= \sqrt{(\mathrm{qr})^2 + \left|r(n+q)e^{i\pi n\alpha} - r(n+q)e^{i\pi n\alpha + \left(\alpha - \frac{p}{q}\right)}\right|^2} \geqslant qr$$

Cette quantité est supérieur ou égale à qr , donc une valeur d'angle irrationnelle permet donc bien une meilleure répartition de l'espace.

De plus, cette quantité est maximisée pour une « mauvaise » approximation $\frac{p}{q}$ de α.

Cela nous conduit à chercher le nombre irrationnel le moins bien approché par des nombres rationnels.

2.3 Cas du nombre d'or

On a le théorème suivant:

Théorème. *Avec les notations des fractions continues, pour tout i :*

$$\left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2}$$

On montre facilement que $q_i > F_i$ où la suite (F_i) est la suite de Fibonai définie dans l'introdution de cette note

D'après ce théorème, on déduit que plus le dénominateur d'une réduite est grand, meilleure est cette dernière en termes d'approximation. Le nombre irrationnel dont le dénominateur des réduites grandit le moins vite sera donnera donc la meilleure valeur d'angle possible.

2.3.1 Fraction continue du nombre d'or.

La fraction continue du nombre d'or n'est constituée que de 1, en effet le nombre d'or est solution de l'équation :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\text{Soit, } \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

ce qui fait que le dénominateur de ses réduites grandit le moins vite. En effet, ses premières réduites sont :

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$$

on remarque qu'elles ne dépasse donc pas le nombre 8 au dénominateur au bout de la sixième réduite, alors que le nombre π par exemple admet pour troisième moins bonne réduite la fraction $\frac{106}{333}$.

Les réduites du nombre d'or sont également données par la suite de Fibonacci, ce qui explique pourquoi cette dernière se retrouve dans les spirales formées par les graines du tournesol.

Le rapport entre deux éléments cette suite correspondant toujours à une réduite du nombre d'or, et le dénominateur d'une réduite engendrant un nombre de spirales visibles, on retrouve ces éléments l'agencement des graines.

3 Conclusion

Plusieurs hypothèses sur la croissance de la fleur de tournesol nous ont conduit à penser que la valeur de l'angle polaire qui sépare deux graines successives déterminait la bonne occupation de l'espace du disque soutenant la fleur.

Nous avons montré qu'une valeur irrationnelle de cet angle engendrait une répartition des graines sous forme de spirales. En admettant que la distance minimale entre deux graines était toujours trouvée entre deux graines d'une même spirale, nous avons vu qu'une telle répartition est toujours meilleure qu'une répartition sous forme de rayons, qui serait la conséquence d'une valeur rationnelle de l'angle de naissance.

Enfin, nous avons montré que la valeur optimale de l'angle de naissance correspond à celle du nombre d'or, et cela est dû au fait que ce nombre est celui qui est le moins bien approché par des fractions rationnelles. Nous avons expliqué la transversalité des spirales formées, ainsi que l'origine de leur nombre en lien avec la suite de Fibonacci.

Bibliographie

[1] Xavier Caruso. *Nombre d'or et tournesol*. Otobre 2005.

[2] Markus Hohenwarter. *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Paris Lodron University, Salzburg, Austria. feb 2002.
NOTE fichier créé pour ce projet : `https://cdn.discordapp.com/attachments/931262029942124554/966428843781001256/geogebratournesol.ggb`

[3] J. van der Hoeven. *The Jolly Writer. Your Guide to GNU TeXmacs*. Scypress, 2020.