

ALGEBRA I

ANDREA GALLESE

OCTOBER 22, 2017

G Teoria dei Gruppi

G.1 Automorfismi e Azioni

Teorema G.1. Se G è un gruppo, $(\text{Aut}(G), \circ)$ è un gruppo.

Esempi.

1. $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \{\pm id\} \cong \mathbb{Z}_2$
2. $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^\times$
3. $\text{Aut}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^\times$
4. $\text{Aut}(\mathbb{R}) \cong ?$

Definizione G.2 (Gruppo degli automorfismi interni). Sia $\text{Int}(G) = \{\varphi_g \mid g \in G\}$ l'insieme di tutti gli automorfismi interni, i.e. degli automorfismi di coniugio:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall x \in G$$

Osservazione. è immediato osservare che $\text{Int}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$.

Teorema G.3.

$$\text{Int}(G) \cong G/Z(G)$$

Proof. La funzione

$$\begin{aligned} \Phi: G &\rightarrow \text{Int}(G) \\ g &\mapsto \varphi_g \end{aligned}$$

è un omomorfismo con kernel $Z(G)$. La tesi segue dal Primo Teorema di Omomorfismo. ♣

Osservazione.

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow \varphi_g(H) = H \quad \forall \varphi_g \in \text{Int}(G)$$

Definizione G.4 (Sottogruppo caratteristico). Un sottogruppo $H < G$ si dice caratteristico se è invariante per tutto $\text{Aut}(G)$, i.e.

$$\varphi(H) = H \quad \forall \varphi \in \text{Aut}(G)$$

Osservazione. Un sottogruppo caratteristico è anche normale, ma non è vero il viceversa: basta considerare $\langle(0, 1)\rangle \triangleleft \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Definizione G.5 (Azione). Si dice azione di un gruppo G su un insieme X un omomorfismo φ tale che

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow \mathcal{S}(X) \\ g &\mapsto \phi_g(x) = g \cdot x. \end{aligned}$$

Esempio. Siano $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ e $X = \mathbb{R}^2$. E sia ϕ l'azione:

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ z &\mapsto \mathcal{R}(O, \arg z) \end{aligned}$$

Osservazione. Un'azione induce naturalmente una relazione di equivalenza su X : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$ t.c. $g \cdot x = y$. Viene quindi spontaneo prendere in considerazione gli elementi della partizione così ottenuta.

Definizione G.6 (Orbita). Si dice orbita di un elemento $x \in X$ l'insieme di tutti gli elementi che posso essere raggiunti da x tramite l'azione:

$$\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid \forall g \in G\}$$

Osservazione. Detto R un insieme di rappresentanti delle varie orbite, per il partizionamento prima considerato:

$$X = \bigcup_{x \in R} \text{Orb}(x) \Rightarrow |X| = \sum_{x \in R} |\text{Orb}(x)|$$

Definizione G.7 (Stabilizzatore). Si dice stabilizzatore di un elemento $x \in X$ l'insieme di tutti gli elementi di G che agiscono in modo banale su x :

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

Osservazione. è immediato osservare che $\text{Stab}(x) < G$, ma non necessariamente normale.

Teorema G.8.

$$|G| = |\text{Orb}(x)| |\text{Stab}(x)|$$

Proof. La funzione f così definita

$$\begin{aligned} f: \{g\text{Stab}(x) \mid g \in G\} &\rightarrow \{\text{Orb}(x) \mid x \in X\} \\ g\text{Stab}(x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

è biunivoca, infatti:

$$\begin{aligned} g \cdot x = h \cdot x &\Leftrightarrow \varphi_g(x) = \varphi_h(x) \\ &\Leftrightarrow \varphi_h^{-1} \varphi_g(x) = x \\ &\Leftrightarrow \varphi_{h^{-1}g}(x) = x \\ &\Leftrightarrow h^{-1}g \cdot x = x \\ &\Leftrightarrow h^{-1}g \in \text{Stab}(x) \\ &\Leftrightarrow g \in h\text{Stab}(x) \\ &\Leftrightarrow g\text{Stab}(x) = h\text{Stab}(x) \end{aligned}$$

♣

Osservazione. Dall'osservazione precedente

$$|X| = \sum_{x \in R} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

Esempi.

1. $[G = C, X = \mathbb{R}^2]$ e l'azione dell'ultimo esempio. Questa sposta ruota ogni punto attorno all'origine, pertanto le orbite sono circonferenze centrate nell'origine e gli stabilizzatori sono tutti banali, tranne quello dell'origine che coincide con G .

2. $[G = \mathbb{R}, X = \mathbb{R}^2]$ e l'azione che trasforma $r \in \mathbb{R}$ nella traslazione orizzontale di lunghezza r . Le orbite sono le rette parallele alla traslazione e gli stabilizzatori sono tutti banali.
3. $[G, X = G]$ e l'azione sia la mappa che manda un elemento g nel coniugio per questo $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$. L'orbita di un elemento contiene tutti i coniugati di questo ed è detta *classe di coniugio* di x (\mathcal{C}_x). Lo stabilizzatore di x contiene tutti e soli gli elementi tali che

$xg = gx$, ovvero il sottogruppo di tutti gli elementi che commutano con x , è detto *centralizzatore* di x ($Z_G(x)$).

4. $[G, X = \{H \mid H < G\}]$ e l'azione di coniugio. Le orbite non sono particolarmente interessanti, mentre lo stabilizzatore di un sottogruppo è detto *Normalizzatore* di H , $N(H)$ ed è il più grande sottogruppo di G in cui H è normale.

Osservazione. $H \triangleleft G \Leftrightarrow N(H) = G$

G.2 Formula delle Classi e Cauchy

Teorema G.9 (Formula delle Classi). *Per ogni gruppo finito vale*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in R'} \frac{|G|}{|Z_G(x)|}$$

Proof. Riprendiamo la partizione di X in orbite, ma separando quelle banali da quelle non

$$|X| = \sum_{\substack{x \in R \\ \text{Orb}(x) = \{x\}}} 1 + \sum_{\substack{x \in R \\ \text{Orb}(x) \neq \{x\}}} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

Osserviamo cosa succede nel caso dell'azione di coniugio da un gruppo in se (l'esempio 3 della lezione precedente). L'orbita di x è banale se e solo se $g x g^{-1} = x$, $\forall g \in G$, ovvero nel caso in cui x commuti con tutti gli elementi di G (stia nel centro). Dunque la formula di sopra si riscrive come desiderato. ♣

Definizione G.10 (p -gruppo). Si dice p -gruppo un gruppo finito G di ordine potenza di un primo p : $|G| = p^n$.

Esempi.

1. **Un p -gruppo G ha centro non banale.** Tutti i centralizzatori degli elementi di R' hanno dimensione p^k per un intero $0 \leq k < n$, dunque

$$p \mid \frac{|G|}{|Z_G(x)|} \forall x \in R'$$

pertanto, per la formula delle classi,

$$p \mid |G| - \sum_{x \in R'} \frac{|G|}{|Z_G(x)|} = |Z(G)|$$

che quindi, contenendo e , deve avere almeno p elementi.

2. **I gruppi di ordine p^2 sono abeliani.** Il centro di G avrà, per quanto appena dimostrato, ordine p o p^2 . Nel secondo caso abbiamo finito. Nel primo

$$|G/Z(G)| = p$$

dunque il quoziente è ciclico. Presi due elementi qualunque $x, y \in G$ possiamo esprimerli come $x = g^h a$ e $y = g^k b$, dove g è il generatore del quoziente e $a, b \in Z(G)$. Allora, sfruttando la commutatività degli elementi del centro

$$xy = (a)(g^k b) = g^{h+k} ab = g^{k+h} ba = (g^k b)(g^h a) = yx$$

ricaviamo la commutativa per tutti gli elementi del gruppo.

3. Una possibile dimostrazione del Teorema di Cauchy:

Teorema G.11 (di Cauchy). *Per ogni fattore primo p di $|G|$ esiste un elemento g di G di ordine p .*

Dimostrazione Classica. Sia $|G| = pn$, procediamo per induzione su n .

Se $n = 1$, G è ciclico, quindi ha un generatore di ordine p . Supponiamo ora che tutti i gruppi di ordine kp $\forall k < m$ abbiano un elemento di ordine p . Se $|G| = pm$ ci sono due casi:

1. Esiste un sottogruppo proprio H di ordine multiplo di p , da cui ricadiamo nell'ipotesi induttiva.
2. Se nessun sottogruppo di G ha ordine divisibile per p , allora

$$p \mid \frac{|G|}{|Z_G(x)|} \forall x \in R'$$

perché i $Z_G(x) < G$. Per la formula delle classi

$$p \mid |G| - \sum_{x \in R'} \frac{|G|}{|Z_G(x)|} = |Z(G)|$$

ma abbiamo supposto che i sottogruppi propri non abbiano ordine multiplo di p , dunque il centro deve coincidere con l'intero gruppo, che risulta pertanto commutativo. ♣

Dimostrazione Magica. Sia

$$X = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 \cdots x_n = 1\}$$

questo insieme ha esattamente $|G|^{p-1}$ elementi, infatti scelti i primi $(p-1)$ l'ultimo è univocamente determinato come il suo unico inverso. Se una p -upla non è composta da un solo elemento ripetuto, allora possiamo ciclare i suoi termini per ottenere altre $(p-1)$ p -uple in X . Dunque, detto n il numero di g tali che $g^p = 1$

$$p \mid |G|^{p-1} - n \Rightarrow p \mid n$$

e poiché $e^p = e$ ci sono almeno p elementi di ordine p . ♣

Osservazione. Cosa riusciamo a dire su un possibile teorema inverso a quello di Lagrange?

1. per Gruppi Abelian?
 - (a) elementi di ordine divisore? no, basti guardare $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
 - (b) sottogruppi di ordine divisore? sì! esercizio.
2. per Gruppi non Abelian?
 - (a) a maggior ragione no
 - (b) no

Esercizio. Classificare i gruppi G di ordine 6.

Per Cauchy esistono $x, y \in G$ di ordine, rispettivamente, 2 e 3.

- Se G è abeliano, $\text{ord}(xy) = 6$, quindi G è ciclico e pertanto isomorfo a \mathbb{Z}_6 .
- Se non lo è, costruiamo un isomorfismo esplicito...

Teorema G.12 (Caylay). *Possiamo immergere ogni gruppo G in $S(G)$.*

Proof. Esibiamo un'azione fedele (ovvero, iniettiva):

$$\begin{aligned} \Phi: G &\rightarrow S(G) \\ g &\mapsto \varphi_g(x) = gx \end{aligned}$$

è ora sufficiente verificare che Φ è ben definito (φ_g è una bigezione) e iniettivo. ♣

Definizione G.13 (Sottogruppo generato). Sia $S \subset G$ un sottoinsieme su G , chiamiamo il più sottogruppo contenente S sottogruppo generato da S ($\langle S \rangle$).

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ S \subseteq H}} H$$

Teorema G.14 (Caratterizzazione dei sottogruppi generati).

$$\langle S \rangle = \{s_1 \cdots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S \cup S^{-1}\}$$

Proof. Chiamiamo X il magico insieme nel RHS. Chiaramente $S \subseteq X$ e pertanto X , che è facile verificare essere un gruppo, è parte della famiglia sotto intersezione: $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$. Inoltre se $S \subseteq H < G$ sicuramente in H compaiono tutte le k -uple di X e quindi $X < H$ per ogni sottogruppo di \mathcal{F} . Dunque $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$. ♣

Esempi.

1. $\langle S \rangle$ è abeliano se e solo se tutti gli elementi di S commutano fra loro.
2. $\langle S \rangle$ è normale se e solo se ogni elemento di S rimane in $\langle S \rangle$ per coniugio.
3. $\langle S \rangle$ è caratteristico se e solo se ogni elemento di S viene mandato in $\langle S \rangle$ da ogni automorfismo di G .
4. $G' = \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G \rangle$ è detto *Gruppo dei Commutatori o Gruppo Derivato di G* . Questo gruppo gode di alcune proprietà fondamentali
 - (a) $G' = \{e\} \Leftrightarrow G$ abeliano.
 - (b) G' è caratteristico e pertanto normale in G .

- (c) **Dato $H \triangleleft G$, il quoziente G/H è abeliano se e solo se $G' \leq H$.**

Proof. La verifica delle proprietà (a) e (b) è banale. Rimane l'ultima (c):

$$\begin{aligned}
 G/H \text{ abeliano} &\Leftrightarrow xHyH = yHxH && \forall x, y \in G \\
 &\Leftrightarrow xyH = yxH && \forall x, y \in G \\
 &\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy \in H && \forall x, y \in G \\
 &\Leftrightarrow g' \in H && \forall g' \in G'
 \end{aligned}$$



Definizione G.15. G/G' è detto l'abelianizzato di G , perché è sempre abeliano!

G.3 Gruppi Diedrali D_n

Definizione G.16 (Gruppo Diedrale). Sia D_n il gruppo delle isometrie dell' n -agono regolare.

Teorema G.17 (Caratterizzazione di D_n). Si ha

$$D_n = \langle \rho, \sigma \mid \rho^n = e, \sigma^2 = e, \sigma\rho\sigma = \rho^{-1} \rangle$$

Proof. Tutti gli elementi sopra definiti possiamo ridurli a un elemento della forma ρ^k o $\sigma\rho^k$ per un qualche $0 \leq k < n$. Questo perché così sono fatti i generatori e ogni operazione permessa (composizione e inversione) si riducono a questa forma attraverso le leggi a disposizione. Inoltre possiamo immergere D_n in un sottogruppo di $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ di ordine $2n$ attraverso un omomorfismo suriettivo:

$$\begin{aligned} \Phi: D_n &\rightarrow \mathbf{O}_2(\mathbb{R}) \\ \sigma &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ -\sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto ognuno dei rappresentati sopra individua un'effettiva trasformazione distinta. ♣

Osservazione. Conosciamo già un gruppo diedrale: $D_3 \cong S_3$.

Osservazione. Il sottogruppo C_n delle rotazioni, generato da ρ , è ovviamente ciclico e, avendo indice 2, è anche normale in D_n .

$$\langle \rho \rangle = C_n \triangleleft D_n$$

Teorema G.18 (Ordine degli elementi di D_n). Sappiamo che

- tutte le simmetrie hanno ordine 2.
- ci sono $\varphi(m)$ rotazioni di ordine m , per ogni $m \mid n$.

Proof. La seconda parte è immediata conseguenza della ciclicità del sottogruppo delle rotazioni. L'ordine delle riflessioni possiamo calcolarlo esplicitamente notando che $(\sigma\rho^k)(\sigma\rho^k) = (\sigma\rho^k\sigma)\rho^k = \rho^{-k}\rho^k = e$ grazie alla terza proprietà imposta nella caratterizzazione. ♣

Teorema G.19 (Sottogruppi di D_n). I sottogruppi $H < D_n$ rientrano in una di queste due categorie:

- $H < C_n$: di cui ne abbiamo esattamente uno per ogni ordine divisore di n .

- $H = (H \cap C_n) \sqcup \tau(H \cap C_n)$: di cui ce ne sono d di ordine $\frac{2n}{d}$ per ogni $d \mid n$.

Proof. Se $H < C_n$ il risultato viene da Aritmetica. Se $H \not< C_n$, H contiene almeno una rotazione $\tau = \sigma\rho^i$. Consideriamo l'omomorfismo f che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} D_n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{O}_2(\mathbb{R}) \\ & \searrow f & \downarrow \det \\ & & \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Notiamo che $\ker f = C_n \triangleleft D_n$ e osserviamo cosa succede quando restringiamo l'omomorfismo trovato ad H

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f|_H} & f(H) \\ id \downarrow & & \downarrow id \\ D_n & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Abbiamo così scomposto il nostro sottogruppo come desiderato, poiché conosciamo il \ker della trasformazione

$$H = f^{-1}(0) \sqcup f^{-1}(1) = (H \cap C_n) \sqcup \tau(H \cap C_n)$$

Poiché $(H \cap C_n) < C_n$ possiamo vederlo come il sottogruppo generato da una potenza della rotazione elementare

$$H \cap C_n = \langle \rho^d : d \mid n \rangle$$

Il suo unico laterale sarà allora composto dagli d elementi della forma

$$\begin{aligned} \tau(H \cap C_n) &= \{\tau\rho^d, \tau\rho^{2d}, \dots, \tau\rho^{n-d}\} \\ &= \{\sigma\rho^{d+i}, \sigma\rho^{2d+i}, \dots, \sigma\rho^{n-d+i}\} \end{aligned}$$

che è facile convincersi dipendere solamente dalla classe di i mod d . ♣

Esercizi.

1. Quali sottogruppi di D_n sono normali?
2. Quali sottogruppi di D_n sono caratteristici?
3. Quali sono i quozienti di D_n ?
4. (*) Chi è $\text{Aut}(D_n)$?

G.4 Gruppi di Permutazioni \mathcal{S}_n

Definizione G.20 (Gruppi di Permutazioni). Dato un insieme X , chiamiamo

$$\mathcal{S}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ è bigettiva}\}$$

con l'operazione di composizione, il gruppo delle permutazioni di X . Se l'insieme è finito $|X| = n$, allora

$$\mathcal{S}(X) \cong \mathcal{S}(\{1, 2, \dots, n\})$$

lo chiamiamo \mathcal{S}_n .

Teorema G.21. Ogni permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si scrive in modo unico come prodotto di cicli disgiunti.

Osservazione. Cicli disgiunti commutano.

Teorema G.22. \mathcal{S}_n è generato dai suoi cicli.

Esercizi.

1. Quanti k -cicli ci sono in \mathcal{S}_n ?
2. Come conto gli elementi con una composizione fissata in un \mathcal{S}_n dato? Per esempio, come calcolo le permutazioni del tipo $3 + 3 + 2 + 2 + 2$ in \mathcal{S}_{10} ?
3. L'ordine di σ è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi k -cicli.

Teorema G.23. \mathcal{S}_n è generato dalle sue trasposizioni.

Osservazione. La decomposizione in trasposizioni non è unica. Ma la parità dei numeri di trasposizioni lo è:

Teorema G.24. La parità del numero di trasposizioni della scomposizione di una qualunque permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_n$ non dipende dalla scomposizione.

Proof. Consideriamo

$$\begin{aligned} \text{sgn} : \mathcal{S}_n &\rightarrow \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\} \\ \sigma &\mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{aligned}$$

questo è un omomorfismo di gruppi. Infatti:

1. è ben definito, ovvero $|\text{sgn}(\sigma)| = 1$: tutte le differenze che compaiono a denominatore compaiono anche a numeratore, poiché σ è una permutazione, magari con ordine o segno, differente.

2. Si comporta bene con la composizione

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \\ &= \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) \end{aligned}$$

Per concludere, osserviamo che tutte le trasposizioni hanno segno negativo. ♣

Definizione G.25 (Gruppo Alterno). Chiamiamo \mathcal{A}_n o gruppo alterno il sottogruppo delle permutazioni pari

$$\ker(\text{sgn}) = \mathcal{A}_n \triangleleft \mathcal{S}_n$$

Teorema G.26. Due permutazioni $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ sono coniugate se e solo se hanno lo stesso tipo di decomposizione in cicli.

Proof. \Rightarrow . Ci basta dimostrare che dato un ciclo $\sigma = (a_1 \cdots a_k)$ e una permutazione tale che $\tau(a_i) = b_i$. Allora le immagini del ciclo vengono mandati nel loro "successore"

$$\tau \sigma \tau^{-1}(b_i) = \tau \sigma(a_i) = \tau(a_{i+1}) = b_{i+1}$$

mentre le non immagini di alcun a_i , con controimmagini invarianti per σ , rimangono fisse

$$\tau \sigma \tau^{-1}(x) = \tau \tau^{-1}(x) = x$$

pertanto

$$\tau \sigma \tau^{-1} = (b_1 \cdots b_k)$$

\Leftarrow . Se vogliamo mandare il ciclo $(a_1 \cdots a_k)$ in $(b_1 \cdots b_k)$ ci basta coniugare per la stessa permutazione di prima: $\tau(a_i) = b_i$. Possiamo poi costruire il coniugio moltiplicando tra loro tutte le τ relative ai vari cicli. ♣

Osservazione. Notiamo che il centralizzatore di σ coincide con lo stabilizzatore dell'azione di coniugio di \mathcal{S}_n in se. Dunque

$$|Z(\sigma)| = \frac{n!}{|\mathcal{C}(\sigma)|}$$

Esercizio. Data una permutazione σ trovare $N(\langle \sigma \rangle)$

G.5 Prodotti diretti

A un certo punto vorremo arrivare a dimostrare il seguente risultato, che ora enunciamo un po' a caso.

Teorema G.27 (di Struttura dei gruppi abeliani finitamente generati). *Possiamo scrivere ogni gruppo abeliano finitamente generato G , in modo unico, come prodotto diretto di gruppi ciclici nel modo seguente*

$$G \cong \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$$

dove n_1, \dots, n_k sono interi tali che $n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_k$.

Teorema G.28. *Sia G un gruppo e $H, K \triangleleft G$ due sottogruppi normali. Se*

1. $HK = G$
2. $H \cap K = \{e\}$

allora $G \cong H \times K$.

Proof. Mostriamo innanzitutto che $hkh^{-1}k^{-1}$ appartiene ad entrambi i sottogruppi, infatti:

$$H \ni h(kh^{-1}k^{-1}) = h(kh^{-1}k^{-1}) = (hkh^{-1})k^{-1} \in K$$

dunque, per la seconda ipotesi,

$$hkh^{-1}k^{-1} = e$$

quindi gli elementi di un sottogruppo commutano con quelli dell'altro $hk = kh$.

Consideriamo ora l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi: H \times K &\rightarrow G \\ (h, g) &\mapsto hg \end{aligned}$$

e verifichiamo che

1. è ben definito.
2. è un omomorfismo: infatti

$$\Phi(hh', kk') = hh'kk' = hkh'k' = \Phi(h, k)\Phi(h', k')$$

3. è suriettivo per la prima ipotesi.
4. è iniettivo per la seconda, infatti

$$\ker \Phi = \{(h, k) \mid hk = e\} = \{(e, e)\}$$



Osservazione. Nel prodotto diretto i fattori commutano.

Proprietà di $G = H \times K$.

1. $Z(G) = Z(H) \times Z(K)$.
2. $\text{Int}(G) \cong \text{Int}(H) \times \text{Int}(K)$.
3. $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) < \text{Aut}(G)$.

Teorema G.29. *Si ha $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) < \text{Aut}(H \times K)$ e sono isomorfi se e solo se H e K sono caratteristici.*

Proof. Consideriamo l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) &\rightarrow \text{Aut}(H \times K) \\ (f, g) &\mapsto \varphi_{fg}: (h, k) \mapsto (f(h), g(k)) \end{aligned}$$

e verifichiamo che

- è bene definito, ovvero φ è un automorfismo. Immediata conseguenza del fatto che f e g sono a loro volta automorfismi.

- è un omomorfismo.

$$\begin{aligned} \Phi(ff', gg') &= (f(f'(h)), g(g'(k))) \\ &= \varphi_{fg}(\varphi_{f'g'}(h, k)) \\ &= \Phi(f, g)\Phi(f', g') \end{aligned}$$

- è iniettivo.

$$\ker \Phi = \{(id, id)\}$$

altrimenti c'è almeno un elemento di uno dei due gruppi che non va in se stesso.

- è suriettivo se e solo se $H \times \{e_K\}$ e $\{e_H\} \times K$ sono caratteristici in $H \times K$.

\Rightarrow . Se Φ è suriettivo, allora tutti gli automorfismi di $H \times K$ sono della forma di cui sopra e pertanto φ_{fg} agisce sugli elementi di H come $\varphi_{fg|H} = f \in \text{Aut}(H)$.

\Leftarrow . Viceversa, supponiamo H e K caratteristici, preso un automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(H \times K)$ consideriamo le sue restrizioni ai due sottogruppi caratteristici.

$$f = \Pi_H(\varphi|_{H \times \{e_K\}}) \quad g = \Pi_K(\varphi|_{\{e_H\} \times K})$$

Notiamo che $f \in \text{Aut}(H)$.

- f è iniettiva. Se $f(h) = f(h')$ allora

$$\Pi_H(\varphi(h, e_K)) = \Pi_H(\varphi(h', e_K))$$

poiché $H \times \{e_K\}$ è caratteristico

$$\varphi(h, e_K) = (a, e_K) \quad \varphi(h', e_K) = (b, e_K)$$

ma necessariamente $a = f(h)$ e $b = f(h')$, pertanto

$$\varphi(a, e_K) = (f(h), e_K) = (f(h'), e_K) = \varphi(b, e_K)$$

e, visto che φ è iniettivo, $h = h'$.

- f è suriettiva. Fissiamo un qualunque $h \in H$. Essendo $H \times \{e_K\}$ caratteristico, necessariamente la controimmagine di (h, e_K) è un suo elemento

$$\varphi^{-1}(h, e_K) = (h', e_K)$$

dunque

$$f(h') = \Pi_H(\varphi(h', e_K)) = \Pi_H(h, e_K) = h$$

Infine osserviamo che $\Phi(f, g) = \varphi$. Infatti

$$\begin{aligned} \varphi_{fg}(h, k) &= (f(h), g(k)) \\ &= (\Pi_H(\varphi(h, e_K)), \Pi_K(\varphi(e_H, k))) \\ &= (\Pi_H(\varphi(h, k)), \Pi_K(\varphi(h, k))) \\ &= \varphi(h, k) \end{aligned}$$

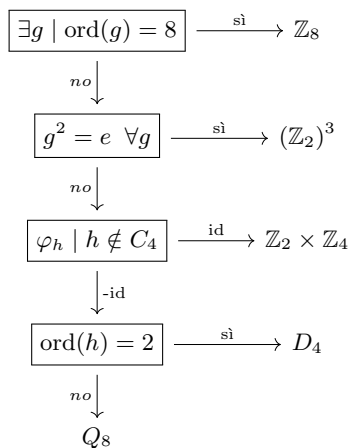
dove la terza uguaglianza segue da

$$\begin{aligned} \Pi_H(\varphi(h, e_K)) &= \Pi_H(\varphi(h, e_K)) \Pi_H(\varphi(e_H, k)) \\ &= \Pi_H(\varphi(h, e_K)\varphi(e_H, k)) \\ &= \Pi_H(\varphi(h, k)) \end{aligned}$$



Esercizio. Trovare $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_2)$.

G.6 Classificazione dei Gruppi di ordine 8



Prendiamo un gruppo G di ordine 8.

- Se esiste un elemento di ordine 8 il gruppo è ciclico e pertanto isomorfo a \mathbb{Z}_8 .
- Se G ha solo elementi di ordine 2, allora è isomorfo a $(\mathbb{Z}_2)^3$. Mostriamo un risultato appena più generale.

Teorema G.30. *Se $|G|$ ha solo elementi di ordine due ed è finito, allora $G \cong (\mathbb{Z}_2)^n$.*

Proof. Osserviamo che $a^2b^2 = e = (ab)^2 = abab$ e, moltiplicando per a a sinistra e per b a destra, otteniamo $ab = ba$ per ogni $a, b \in G$. Pertanto G è abeliano. Possiamo ora procedere per induzione sulla dimensione di G . Se $|G| = 2$ il risultato è chiaro. Supponiamo ora che sia vero per tutti i gruppi di ordine $< 2^n$ e supponiamo $2^n \leq |G| < 2^{n+1}$. Quando prendiamo un insieme minimale di $h < n$ generatori $\langle g_1, \dots, g_h \rangle$ di un sottogruppo di $H < G$, questo sarà isomorfo a $(\mathbb{Z}_2)^h$ per ipotesi induttiva. Prendiamo un elemento $g \notin H$, abbiamo che H e $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ sono sottoinsiemi normali e con intersezione banale, pertanto il sottoinsieme

$$\langle g, g_1, \dots, g_h \rangle \cong H \times \langle g \rangle \cong (\mathbb{Z}_2)^h \times \mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}_2)^{h+1}$$

per il teorema di struttura G.28. Così facendo possiamo continuare ad aggiungere elementi fino a saturare il gruppo e raggiungere la tesi. ♣

Sia ora $g \in G$ l'elemento di ordine 4 richiesto e $C_4 = \langle g \rangle$. Sia $h \notin C_4$ e consideriamo l'azione di coniugio di h su C_4

$$\begin{aligned}
 \varphi_g: C_4 &\rightarrow C_4 \\
 x &\mapsto h x h^{-1}
 \end{aligned}$$

ben definita perché C_4 , avendo indice 2, è normale in G . Poiché $\text{Aut}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2$, abbiamo solo due possibilità:

$$\varphi_g = id^{\pm 1}$$

- $[\varphi_g = id, \text{ord}(h) = 2]$. Dunque gli elementi di C_4 commutano con h , l'intersezione tra C_4 e $\langle h \rangle$ è banale e il loro prodotto genera G per ragioni di cardinalità, pertanto

$$G \cong \langle h \rangle \times C_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

- $[\varphi_g = id, \text{ord}(h) = 4]$. Possiamo considerare h^2 e ricondurci al caso precedente.
- $[\varphi_g = id^{-1}, \text{ord}(h) = 2]$. Abbiamo che $hgh = g^{-1}$, quindi per la nostra caratterizzazione dei gruppi diedrali

$$G \cong D_4$$

- $[\varphi_g = id^{-1}, \text{ord}(h) = 4]$. Anche $\text{ord}(gh) = 4$. Infatti

$$e = ghgh = ghgh^{-1}hh = hh \neq e$$

Dunque abbiamo trovato l'ordine di tutti gli elementi, possiamo costruire un'isomorfismo esplicito con Q_8 .

Definizione G.31 (Quaternioni). Sia Q_8 l'insieme $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ con l'operazione che soddisfa

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

G.7 Lemmi vari

Teorema G.32. *Siano G un gruppo finito e H un sottogruppo che ha come ordine il più piccolo primo p che divide G , allora $H \triangleleft G$.*

Proof. Consideriamo l'azione di G sull'insieme X dei laterali di H per moltiplicazione a sinistra

$$\begin{aligned}\Phi: G &\rightarrow \mathcal{S}_p \\ g &\mapsto \Pi_g : xH \mapsto gxH\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}g \in \text{Stab}(xH) &\Leftrightarrow gxH = xH \\ &\Leftrightarrow x^{-1}gx \in H \\ &\Leftrightarrow g \in xHx^{-1}\end{aligned}$$

dunque $\text{Stab}(xH) = xHx^{-1}$ è il sottogruppo coniugato di H rispetto ad x . Possiamo ora riscrivere il nucleo come

$$\ker \Phi = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1} < H$$

e osservare che, per il Primo Teorema di Omomorfismo

$$\Phi' : G/\ker \Phi \rightarrow \mathcal{S}_p$$

è iniettivo e pertanto

$$\left| G/\ker \Phi \right| \mid |\mathcal{S}_p| = p!$$

ma p era il più piccolo primo a dividere $|G|$, quindi non potendo $\ker \Phi$ coincidere con tutto il gruppo, dovrà essere proprio H . Il che conclude la dimostrazione. ♣

Osservazione. Sia G un gruppo abeliano. Sia

$$\begin{aligned}\psi_n: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^n\end{aligned}$$

preso un qualunque automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(G)$ il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi_n} & G \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ G & \xrightarrow{\psi_n} & G \end{array}$$

quindi $\ker \psi_n$ e $\psi_n(G)$ sono caratteristici in G .

Esercizi.

1. Trova $\text{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n)$.
2. Trova $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$.
3. Trova $\text{Aut}(Q_8 \times D_4)$.
4. Sia G un gruppo abeliano finito. Se $H \triangleleft G$ è ciclico e lo è anche il loro quoziente, allora anche G è ciclico.

G.8 Prodotto Semidiretto

Definizione G.33 (Prodotto semidiretto). Siano H, K due gruppi e $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ un'omomorfismo. Si dice prodotto semidiretto

$$H \rtimes_{\varphi} K$$

l'insieme dato dal prodotto cartesiano, dotato dell'operazione

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h\varphi_k(h'), kk')$$

Osservazione. Il prodotto semidiretto è un gruppo.

Osservazione. Il prodotto diretto è un prodotto semidiretto in cui φ manda tutti gli elementi di K nell'identità su H .

Osservazione. Sia $\bar{H} = H \times e_k$. Si ha

$$\ker \Pi_K = \bar{H} \triangleleft H \rtimes_{\varphi} K$$

qualunque sia l'omomorfismo φ . Infatti \bar{H} è il nucleo dell'omomorfismo di proiezione su K .

Osservazione. Inoltre \bar{K} se e solo se il prodotto è diretto.

$$\bar{K} \triangleleft H \rtimes_{\varphi} K \Leftrightarrow \varphi = \text{id}$$

Teorema G.34 (Teorema di decomposizione in prodotto semidiretto). Siano G un gruppo e $H, K < G$ sottogruppi, con $H \triangleleft G$ normale. Se

$$1. HK = G$$

$$2. H \cap K = \{e\}$$

allora $G \cong H \rtimes_{\varphi} K$ dove φ manda k nella corrispondente azione di coniugio

$$\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$$

$$k \mapsto \varphi_k : h \mapsto hkh^{-1}$$

Proof. Consideriamo

$$\Phi : H \rtimes_{\varphi} K \rightarrow G$$

$$(h, k) \mapsto hk$$

questo

► è un omomorfismo, perché

$$\begin{aligned} \Phi((h, k)(h', k')) &= \Phi(h\varphi_k(h'), kk') \\ &= \Phi(hkh'h'^{-1}, kk') \\ &= hkh'h'^{-1}kk' \\ &= hkh'h'k' \\ &= \Phi(h, k)\Phi(h', k') \end{aligned}$$

► è iniettivo e suriettivo per le ipotesi, come nella decomposizione in prodotto diretto.

dunque Φ è un isomorfismo come desiderato. ♣

Esempi.

1. $S_n \cong A_n \rtimes_{\varphi} \langle (1\ 2) \rangle$, con φ di coniugio.

2. $D_n \cong \langle \rho \rangle \rtimes_{\varphi} \langle \sigma \rangle$, con φ di coniugio.

Classificazione dei gruppi di ordine pq.

Se $p = q$, allora $|G| = p^2$, quindi G è abeliano. Allora necessariamente

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \quad \text{oppure} \quad G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

Se $p < q$, allora ho due elementi x, y di ordine, rispettivamente, p e q , che generano relativi gruppi ciclici. Il più grande dei quali sarà normale

$$K = \langle x \rangle < G \quad \text{e} \quad H = \langle y \rangle \triangleleft G$$

per il teorema G.32. Inoltre osserviamo che $HK = G$ e i due sottogruppi hanno intersezione banale. Quindi

$$G \cong H \rtimes_{\varphi} K$$

dove

$$\varphi_1 : K \rightarrow \text{Aut}(H) \cong \mathbb{Z}_q^{\times}$$

$$y \mapsto \varphi_y : x \mapsto yxy^{-1} = x^a$$

e necessariamente dobbiamo avere che

$$yxy^{-1} = x^a \quad \text{con} \quad (a, q) = 1$$

ma, poiché φ è un omomorfismo, abbiamo che

$$\text{ord}(\varphi_y) \mid \text{ord}(y) = p$$

quindi abbiamo solo due casi: $\text{ord}(\varphi_y) = 1$ e $\text{ord}(\varphi_y) = p$. Nel primo caso φ manda ogni elemento nell'identità, dunque il prodotto semidiretto è in realtà diretto e dunque

$$G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$$

Questa parte dev'essere sistemata

G.9 Teorema di Sylow

Definizione G.35. Chiamiamo p -syllow ogni p -sottogruppo di ordine massimo. Ovvero $H < G$, dove $|G| = p^m n$ con $(m, n) = 1$ e $|H| = p^m$.

Teorema G.36. Sia G un gruppo finito di ordine $|G| = p^n m$, dove p è primo e m è un intero a lui coprimo: $(p, m) = 1$. Allora sappiamo che:

- ∃. Per ogni $0 \leq \alpha \leq n$, esiste un sottogruppo $H < G$ di ordine $|H| = p^\alpha$.
- ⊆. Ogni p -sottogruppo è incluso in un p -syllow.
- φ_g . Due qualsiasi p -syllow sono coniugati.
- n_p . Il numero n_p di p -syllow è congruo a 1 mod p .

Proof. bla

- ∃. Fissiamo $0 \leq \alpha \leq n$. Sia \mathcal{M}_α l'insieme di tutti i sottoinsiemi di G di cardinalità p^α

$$\mathcal{M}_\alpha = \{M < G \mid |M| = p^\alpha\}$$

possiamo allora calcolarci

$$|\mathcal{M}_\alpha| = \binom{p^n m}{p^\alpha} = p^{n-\alpha} m \prod_{i=1}^{p^\alpha-1} \frac{p^n m - i}{p^\alpha - 1}$$

e poiché $v_p(p^n m - i) = v_p(i) = v_p(p^\alpha - i)$, allora

$$v_p \left(\prod_{i=1}^{p^\alpha-1} \frac{p^n m - i}{p^\alpha - 1} \right) = 0$$

e possiamo concludere che

$$p^{n-\alpha} \parallel |\mathcal{M}_\alpha|$$

Consideriamo ora l'azione di G su \mathcal{M}_α data dalla moltiplicazione a sinistra

$$\begin{aligned} \Phi: G &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{M}_\alpha) \\ g &\mapsto \psi_g: M \mapsto gM \end{aligned}$$

Vogliamo ora mostrare che esiste uno stabilizzatore della cardinalità giusta. Per la solita decomposizione in orbite abbiamo

$$|\mathcal{M}_\alpha| = \sum \frac{|G|}{|\text{Stab}(M_i)|}$$

Per le osservazione sulla cardinalità, deve esistere un'orbita di cardinalità non divisibile per $p^{n-\alpha+1}$

$$\exists M_i \text{ tale che } p^{n-\alpha+1} \nmid |\text{Orb}(M_i)|$$

Il corrispondente stabilizzatore avrà pertanto cardinalità divisibile almeno per p^α . Ma se fissiamo un elemento $x \in M_i$ e consideriamo la funzione iniettiva

$$\begin{aligned} f: \text{Stab}(M_i) &\rightarrow M_i \\ y &\mapsto xy \end{aligned}$$

ci rendiamo conto che lo stabilizzatore non avrà una cardinalità maggiore dell'insieme che stabilizza

$$p \mid |\text{Stab}(M_i)| \leq |M_i| = p^\alpha$$

ed è dunque il sottogruppo che cercavamo.

- ⊆. Sia $H < G$ un p -sottogruppo $|H| = p^\alpha$ e S un p -syllow. Consideriamo l'azione di H sull'insieme X delle classi laterali di S per moltiplicazione a sinistra

$$\begin{aligned} F: H &\rightarrow \mathcal{S}(X) \\ h &\mapsto \psi_h: gS \mapsto hgS \end{aligned}$$

Per la decomposizione in orbite

$$m = [G : S] = |X| = \sum \frac{|H|}{|\text{Stab}(gS)|} = \sum \frac{p^\alpha}{p^{e_i}}$$

ma, non potendo p dividere m , esiste un laterale $\bar{g}S$ stabilizzato da tutto H . Ovvero

$$h\bar{g}S = \bar{g}S \Leftrightarrow h \in \bar{g}S\bar{g}^{-1} \forall h \in H$$

Dunque $H \in \bar{g}S\bar{g}^{-1}$, che è il p -syllow cercato.

- φ_g . Siano A, B p -syllow. Per il punto precedente

$$\exists g \in G \text{ tale che } A < gBg^{-1}$$

che hanno la stessa cardinalità e pertanto coincidono.

- n_p . Consideriamo l'azione di coniugio di un p -syllow S sull'insieme Y dei suoi coniugati

$$\begin{aligned} \Psi: S &\rightarrow \mathcal{S}(Y) \\ g &\mapsto \varphi_g: H \mapsto gHg^{-1} \end{aligned}$$

Mostriamo che l'orbita di S è l'unica banale. Infatti se $H \in Y$ ha orbita banale significa che è stabilizzato da S , dunque che i due commutano e pertanto il loro prodotto è un sottogruppo di G .

$$|HS| = \frac{|H||S|}{|H \cap S|} = \frac{p^{2n}}{|H \cap S|} \mid p^n m$$

Necessariamente $|H \cap S| = p^n$ e dunque $H = S$. Per una formula ancora mai usata

$$n_p = |Y| = \text{Orb}(S) + \sum_{H \neq S} \frac{|S|}{|\text{Stab}(H)|} \equiv 1 \pmod{p}$$

Per concludere è sufficiente osservare che se $\text{Stab}(H) \leq S$ allora l'orbita corrispondente ha cardinalità divisibile per p .



Teorema G.37. Ogni gruppo G abeliano finito è prodotto diretto dei suoi p -syllow.

Proof. Visto che i gruppi sono abeliani usiamo la nozione additiva. Per ogni divisore $d \mid |G|$ dell'ordine del gruppo sia

$$G_d = \ker \psi_d = \{g \in G \mid dg = 0\}$$

Ci è sufficiente mostrare che se $G = p^n m$, come al solito, allora

$$G \cong G_{p^n} \times G_m$$

Osserviamo innanzitutto che G_{p^n} è un p -syllow. Dev'essere un p -gruppo perché se $|G_{p^n}|$ fosse divisibile per un primo q , allora per il Teorema di Cauchy G.11 conterrebbe almeno un elemento di ordine q , contro la sua definizione. A questo punto, dovendo contenere l'unico p -syllow di G (il coniugio è banale negli abeliani, più sylow coinciderebbero), non può che esserlo (non può avere cardinalità maggiore). E' inoltre immediato verificare che

1. I due sottogruppi sono normali in G perché è abeliano.
2. La loro intersezione è banale, perché tutti gli elementi del p -syllow hanno ordine divisibile per un primo che non divide l'ordine m dell'altro sottogruppo.

3. La loro somma è G . Infatti per Bezout esistono interi a, b tali che

$$ap^n + bm = 1$$

che moltiplicato per un qualunque elemento di $g \in G$ diventa

$$a(gp^n) + b(gm) = g$$

Osserviamo che $gp^n \in G_m$, poiché

$$m(gp^n) = (mp^n)g = |G|g = 0$$

Analogamente $gm \in G_{p^n}$ e pertanto la somma dei due sottogruppi contiene G



Esercizi.

1. Chi è il 2-sylow di S_4 ?
2. Chi sono i gruppi di ordine 12?

Classificazione dei gruppi di ordine 12.

Quanti possono essere i p -sylow? I 3-sylow sono necessariamente di ordine 3, pertanto ciclici, e possono essere $n_3 = 1, 4$. I 2-sylow sono di ordine 4, quindi isomorfi a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ o \mathbb{Z}_4 , e sono $n_2 = 1, 3$. Se P_3 non è normale, allora ne ho 4 copie con intersezione banale e rimane spazio solo per un P_2 , che sarà normale.

Quindi uno tra un 2-sylow e un 3-sylow dev'essere normale, inoltre sono ciclici e avranno intersezione banale e il loro prodotto ha necessariamente cardinalità 12. Quindi abbiamo scoperto che G è isomorfo al prodotto semidiretto tra un sylow e l'altro. Analizziamo le varie possibilità

- $\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$. Abbiamo

$$\varphi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2$$

che è dunque necessariamente banale e otteniamo

$$G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$$

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$. Abbiamo

$$\varphi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$$

che avrà immagine nel sottogruppo di ordine 3, abbiamo quindi l'automorfismo banale, da cui

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

e quelli associati a σ e σ^2 , che vogliamo mostrare indurre lo stesso prodotto. Infatti, scelto un ϕ non banale, possiamo far agire G sull'insieme dei suoi 3-sylow per coniugio: sia

$$\Phi : G \rightarrow S(\text{3-sylow di } G) \cong S_4$$

$$g \mapsto \varphi_g : H \mapsto gHg^{-1}$$

Osserviamo che $N(P_3) = P_3$, per la formula delle classi. Allora

$$\ker \Phi = \bigcap \text{Stab}(H) = \bigcap N(H) = \bigcap H = \{e\}$$

dunque Φ è iniettivo e mappa G in un sottogruppo di ordine 12 di S_4 . Ma l'unico sottogruppo di questa dimensione è A_4 , quindi entrambi i gruppi generati dal prodotto non diretto sono isomorfi a questo sottogruppo.

$$G \cong A_4$$

- $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$. Abbiamo

$$\varphi : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$$

che dunque può essere solo $\pm id$. Il caso banale ci restituisce un prodotto diretto, già considerato, l'altro è un gruppo buffo

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{-id} \mathbb{Z}_4$$

- $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Abbiamo

$$\varphi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$$

e abbiamo, oltre all'omomorfismo banale, 3 modi di proiettare $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ su un suo fattore. A meno di isomorfismi di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, \mathbb{Z}_3 commuta con uno dei fattori e agisce con $-id$ sull'altro quindi

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \rtimes_{-id} \mathbb{Z}_2 \cong D_6$$

G.10 Automorfismi di un gruppo buffo

Vogliamo scoprire chi è $\text{Aut}(Q_8 \times D_4)$. Per far questo, possiamo scomporre un qualunque automorfismo φ nelle sue restrizioni ai due termini del prodotto e proiettarli sulle due componenti. Il seguente diagramma magico è molto esplicativo

$$\begin{array}{ccccc} Q_8 & & & & Q_8 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ D_4 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\pi_Q} & D_4 \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & D_4 & & \end{array}$$

Dunque possiamo scomporre l'automorfismo nei quattro omomorfismi

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{array}{ll} \alpha : Q_8 \rightarrow Q_8 & \beta : D_4 \rightarrow Q_8 \\ \gamma : Q_8 \rightarrow D_4 & \delta : D_4 \rightarrow D_4 \end{array}$$

Iniziamo ad analizzare i possibili omomorfismi.

β . Consideriamo le possibili immagini per dimensione, tra i sottogruppi dei quaternioni:

$\{e\}$. [✓] Ovviamente abbiamo un omomorfismo banale.

\mathbb{Z}_2 . [✓] Il nucleo dev'essere un sottogruppo di indice 2 e il diedrale ne ha tre: $\langle \rho \rangle, \langle \rho^2, \sigma \rangle, \langle \rho^2, \sigma \rho \rangle$.

\mathbb{Z}_4 . L'unico sottogruppo di indice 4 del diedrale è $\langle \rho \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ ed è il nucleo di un omomorfismo che uccide i termini di ordine 4.

Q_8 . Non è possibile, sarebbe un isomorfismo!

Tutti questi omomorfismi preservano necessariamente i centralizzatori, perché l'unico sottogruppo dei quaternioni di ordine 2 è il centro. Dunque sembrano accettabili tutti gli omomorfismi

$$\beta : D_4 \rightarrow Z(Q_8)$$

γ . Consideriamo le possibili immagini, per dimensione:

$\{e\}$. [✓] Ovviamente abbiamo un omomorfismo banale.

\mathbb{Z}_2 . [✓] Il nucleo dev'essere un sottogruppo di indice 2 e i quaternioni ne hanno tre: $\langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle$.

\mathbb{Z}_4 . L'unico sottogruppo di indice 4 dei quaternioni è $\{\pm 1\}$ ed è il nucleo di un omomorfismo che uccide i termini di ordine 4.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Possiamo mandare i quaternioni in $(\mathbb{Z}_2)^3$ usando i tre omomorfismi con immagine \mathbb{Z}_2 , questo omomorfismo non sarà suriettivo, altrimenti sarebbe un isomorfismo, e ha almeno 4 elementi nell'immagine, visto che gli omomorfismi di sopra sono distinti. Quindi, permutando le componenti opportunamente, otteniamo 6 omomorfismi.

D_4 . Non è possibile, sarebbe un isomorfismo!

possiamo però escludere alcuni omomorfismi osservando che l'automorfismo φ deve preservare i centralizzatori. Infatti osservando il magico diagramma

$$\begin{array}{ccc} Q_8 \hookrightarrow Q_8 \times D_4 & & \rightarrow Q_8 \times D_4 \\ i \mapsto (i, e) & & \mapsto (\alpha(i), \gamma(i)) \end{array}$$

scopriamo che $Z(i, e) \cong \mathbb{Z}_4 \times D_4$. Possiamo ora cercare di capire cosa dovrebbe essere $Z(\alpha(i)) \times Z(\gamma(i))$, per esempio elencando i possibili prodotti di sottogruppi di ordine 32

$Q_8 \times (\mathbb{Z}_2)^2$. Che però ha solo 25 elementi di ordine 2.

$Q_8 \times \mathbb{Z}_4$. Che ha sol 11 elementi di ordine 2.

$\mathbb{Z}_4 \times (\mathbb{Z}_2)^2$. Che però è abeliano.

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Che è abeliano.

$\mathbb{Z}_4 \times D_4$. [✓] Che sicuramente è il gruppo che cerchiamo.

quindi necessariamente il centralizzatore di $Z(\gamma(i)) \cong D_4$ e pertanto $\gamma(i)$ è un elemento del centro di D_4 , che ha solo due elementi. Quindi gli omomorfismi γ accettabili sono solo quello banale e i tre che hanno immagine in \mathbb{Z}_2 . Dunque sembrano accettabili tutti gli omomorfismi

$$\beta : Q_8 \rightarrow Z(D_4)$$

α . Dev'essere un isomorfismo. Se non fosse un isomorfismo l'immagine non potrebbe avere dimensione 4, perché come già visto i sottogruppi di indice adatto eliminano gli elementi di ordine 4, e non potrebbe avere dimensione più piccola, perché altrimenti il primo termine dell'immagine di φ apparterebbe sempre al centro di G .

δ . Analogamente dev'essere un isomorfismo.

Mostriamo ora che le condizioni trovate sono sufficienti. Ci basta mostrare che φ , costruito con le componenti sopra trovate, è iniettivo. Supponiamo di aver trovato $(x, y) \in G$ tale che

$$\varphi(x, y) = (\alpha(x)\beta(y), \gamma(x)\delta(y)) = (e, e)$$

Visto che $\beta(y)$ e $\gamma(x)$ stanno nei centri dei rispettivi insiemi, anche $\alpha(x)$ e $\delta(y)$, che sono i loro inversi, vi staranno. Ma α e δ sono isomorfismi, pertanto anche x, y staranno nei centri dei loro rispettivi gruppi! Ma β e γ contengono i centri nei loro nuclei, quindi si annullano, così come i rispettivi isomorfismi. Così x, y sono necessariamente l'elemento neutro del proprio gruppo e $\ker \varphi = \{(e, e)\}$.

Conosciamo già $\text{Aut}(D_4)$, cerchiamo, per concludere, di capire chi sia $\text{Aut}(Q_8)$.

Qui succederanno cose.

Teorema G.38. Il gruppo alterno A_n è semplice per $n \geq 5$.

G.11 Teorema Fondamentale dei Gruppi Abeliani Finiti

Teorema G.39. *Se G è un gruppo abeliano finito allora si decompone in modo unico come prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine n_1, \dots, n_s*

$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_s}$$

con $n_1 \mid \cdots \mid n_s$.

Proof. Avendo già dimostrato che ogni gruppo abeliano finito si decompone nel prodotto dei suoi p -syllow ci è sufficiente dimostrare la tesi per i p -gruppi. Dato gruppo abeliano G di ordine p^n , ci basta mostrare che possiamo scriverlo come prodotto diretto del generato da un suo elemento di ordine massimo g e un altro sottogruppo K

$$G \cong \langle g \rangle \times K$$

così da poter procedere per induzione.

Mostriamo questo risultato intermedio per induzione sull'ordine del p -gruppo G . Se $|G| = p$ allora il gruppo è ciclico ed è generato da g . Supponiamo ora la tesi vera per ogni k con $1 \leq k < n$ e prendiamo g un elemento di ordine massimo, diciamo p^m . Prendiamo ora un elemento $h \in G$ che non stia nel sottogruppo $\langle g \rangle$ e in modo che abbia ordine minimo possibile, se non esiste abbiamo $G = \langle g \rangle$ e abbiamo finito.

Vogliamo ora mostrare che

$$\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$$

L'ordine di h^p è ovviamente minore di quello di h , dunque $h^p \in \langle g \rangle$, ovvero esiste un intero $r \in \mathbb{Z}$ tale che

$$h^p = g^r$$

L'ordine di g^r è al più p^{m-1} , per tanto non è un generatore di $\langle g \rangle$, dunque per un qualche intero s abbiamo

$$h^p = g^r = g^{ps}$$

e succede che

$$(g^{-s}h)^p = g^{-sp}h^p = e$$

esiste un elemento di ordine p che non appartiene a $\langle g \rangle$! Quindi anche l'ordine di h è p e i due sottogruppi devono essere disgiunti.

Osserviamo ora che, detto $H = \langle h \rangle$, l'ordine di gH in G/H è lo stesso di g in G , in particolare è ancora massimo. Se fosse più piccolo, sarebbe al più p^{m-1} e

$$H = (gH)^{p^{m-1}} = g^{p^{m-1}}H$$

e pertanto $g^{p^{m-1}} \in H$, assurdo. Per l'ipotesi induttiva e il teorema di corrispondenza

$$G/H \cong \langle gH \rangle \times K/H$$

per un certo sottogruppo $H < K < G$. Mostriamo che K è il sottogruppo che cercavamo

► $\langle g \rangle \cap K = \{e\}$. Infatti se b stesse nell'intersezione, bH apparterebbe all'intersezione $\langle gH \rangle \cap K/H$ che è H , dunque $b \in H$.

► $G = \langle g \rangle K$. Per ragioni di cardinalità.

L'unicità è lasciata al lettore.



Classificazione dei Gruppi di Ordine 30.

Tiriamo a caso qualche gruppo di quest'ordine

$$\boxed{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5}$$

$$\boxed{D_{15}}$$

$$\boxed{D_5 \times \mathbb{Z}_3}$$

$$\boxed{D_3 \times \mathbb{Z}_5}$$

questi sono distinti perché il primo è l'unico abeliano e i centri di dei seguenti sono rispettivamente $\{e\}$, \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 . Sappiamo che

$$n_5 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{e} \quad n_5 \mid 6$$

per il Teorema di Sylow G.36 e perché $n_5 \mid |G|$ in quanto cardinalità dell'orbita dell'azione di coniugio, rispettivamente. E, analogamente

$$n_3 \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{e} \quad n_3 \mid 10$$

Allora, se P_5 non è normale, ci sono sei 5-sylow, quindi 24 elementi di ordine 5. Tra i pochi elementi che rimangono non ci stanno sicuramente dieci 3-sylow e pertanto P_3 è normale. Allora P_3 e P_5 commutano (perché uno dei due è contenuto nel normalizzatore dell'altro), dunque

$$P_3 P_5 < G$$

e avendo indice 2 è normale, nonché ciclico.

Abbiamo allora che

$$G \cong \mathbb{Z}_{15} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2$$

per una qualche azione di coniugio

$$\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_{15}) \cong \mathbb{Z}_5^{\times} \times \mathbb{Z}_3^{\times}$$

$$y \mapsto \varphi_y: x \mapsto xyx^{-1} = x^a$$

sapendo che $\varphi_y^2(x) = x^{a^2} = x$, dobbiamo avere che

$$a^2 \equiv 1 \pmod{15}$$

e risolvendo il sistema di diofantee troviamo

$$a \equiv \pm 1, \pm 4 \pmod{15}$$

e ognuna di questa azioni induce un prodotto semidiretto isomorfo a uno dei gruppi trovati all'inizio. In particolare $a = 1$ è l'automorfismo identico, che induce il prodotto diretto, che restituisce il gruppo abeliano, mentre $a = -1$ sappiamo già essere l'omomorfismo che genera il gruppo diedrale. Per $a = 4$ troviamo l'automorfismo che fissa \mathbb{Z}_3 , per $a = -4$ quello che fissa \mathbb{Z}_5 , in entrambi i casi uno dei fattori a sinistra del prodotto semidiretto commuta anche col fattore di destra, siamo così autorizzati a raccoglierlo all'esterno per ottenere, rispettivamente, $D_5 \times \mathbb{Z}_3$ e $D_3 \times \mathbb{Z}_5$.

Se invece P_5 fosse normale?