

# ALGEBRA I

ANDREA GALLESE

2 DICEMBRE 2017

Gli appunti sono in fase di costruzione, potrebbero essere pieni di errori e quant'altro.  
Se volete aiutarmi a sistemare qualcosa, fatelo, stanno su GitHub apposta.

## Indice

<b>G Teoria dei Gruppi</b>	<b>2</b>
G.1 Automorfismi e Azioni . . . . .	2
G.2 Formula delle Classi e Cauchy . . . . .	3
G.3 Gruppi Diedrali $D_n$ . . . . .	5
G.4 Gruppi di Permutazioni $S_n$ . . . . .	6
G.5 Prodotti diretti . . . . .	8
G.6 Classificazione dei Gruppi di ordine 8 . . . . .	9
G.7 Lemmi vari . . . . .	10
G.8 Prodotto Semidiretto . . . . .	11
G.9 Teorema di Sylow . . . . .	12
G.10 Automorfismi di un gruppo buffo . . . . .	14
G.11 Teorema Fondamentale dei Gruppi Abeliani Finiti . . . . .	15
G.12 Lemmini ed esercizietti . . . . .	16
<b>A Anelli</b>	<b>17</b>
A.1 Prime definizioni . . . . .	17
A.1.1 Anelli di polinomi . . . . .	17
A.2 Fatti su Ideali . . . . .	18
A.2.1 Fatti sul radicale . . . . .	19
A.2.2 Prodotto diretto tra anelli . . . . .	19
A.2.3 Estensione e Contrazione di Ideali . . . . .	19
A.3 Domini . . . . .	20
A.3.1 Campo dei quozienti. $\mathbb{Q}(A)$ . . . . .	20
A.3.2 Divisibilità. . . . .	20
A.4 Esercizi Notevoli . . . . .	21
A.5 Domini Speciali . . . . .	22
A.5.1 Dominio Euclideo . . . . .	22
A.5.2 Dominio a Ideali Principali . . . . .	22
A.5.3 Dominio a Fattorizzazione Unica . . . . .	22
<b>K Campi</b>	<b>24</b>
K.1 Richiami . . . . .	24
K.2 Separabilità e Normalità . . . . .	25
K.3 Teoria di Galois . . . . .	26

Per tutto quello che riguarda gli interi di Gauss, rifarsi a ■.

## G Teoria dei Gruppi

### G.1 Automorfismi e Azioni

**Teorema G.1.** Se  $G$  è un gruppo,  $(\text{Aut}(G), \circ)$  è un gruppo.

**Esempi.**

1.  $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \{\pm id\} \cong \mathbb{Z}_2$
2.  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^\times$
3.  $\text{Aut}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^\times$
4.  $\text{Aut}(\mathbb{R}) \cong ?$

**Definizione G.2** (Gruppo degli automorfismi interni). Sia  $\text{Int}(G) = \{\varphi_g \mid g \in G\}$  l'insieme di tutti gli automorfismi interni, i.e. degli automorfismi di coniugio:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall x \in G$$

*Osservazione.* è immediato osservare che  $\text{Int}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ .

**Teorema G.3** (degli Automorfismi Interni).

$$\text{Int}(G) \cong G/Z(G)$$

*Dimostrazione.* La funzione

$$\begin{aligned} \Phi: G &\rightarrow \text{Int}(G) \\ g &\mapsto \varphi_g \end{aligned}$$

è un omomorfismo con kernel  $Z(G)$ . La tesi segue dal Primo Teorema di Omomorfismo. ♣

*Osservazione.*

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow \varphi_g(H) = H \quad \forall \varphi_g \in \text{Int}(G)$$

**Definizione G.4** (Sottogruppo caratteristico). Un sottogruppo  $H < G$  si dice caratteristico se è invariante per tutto  $\text{Aut}(G)$ , i.e.

$$\varphi(H) = H \quad \forall \varphi \in \text{Aut}(G)$$

*Osservazione.* Un sottogruppo caratteristico è anche normale, ma non è vero il viceversa: basta considerare  $\langle (0, 1) \rangle \triangleleft \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

**Definizione G.5** (Azione). Si dice azione di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$  un omomorfismo  $\varphi$  tale che

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow \mathcal{S}(X) \\ g &\mapsto \varphi_g(x) = g \cdot x. \end{aligned}$$

**Esempio.** Siano  $G = C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ,  $X = \mathbb{R}^2$  e sia  $\varphi$  l'azione:

$$\begin{aligned} \varphi: C &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ z &\mapsto \mathcal{R}(O, \arg z) \end{aligned}$$

*Osservazione.* Un'azione induce naturalmente una relazione di equivalenza su  $X$ :  $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$  t.c.  $g \cdot x = y$ . Viene quindi spontaneo prendere in considerazione gli elementi della partizione così ottenuta.

**Definizione G.6** (Orbita). Si dice orbita di un elemento  $x \in X$  l'insieme di tutti gli elementi che posso essere raggiunti da  $x$  tramite l'azione:

$$\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid \forall g \in G\}$$

*Osservazione.* Detto  $R$  un insieme di rappresentanti delle varie orbite, per il partizionamento prima considerato:

$$X = \bigcup_{x \in R} \text{Orb}(x) \Rightarrow |X| = \sum_{x \in R} |\text{Orb}(x)|$$

**Definizione G.7** (Stabilizzatore). Si dice stabilizzatore di un elemento  $x \in X$  l'insieme di tutti gli elementi di  $G$  che agiscono in modo banale su  $x$ :

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

*Osservazione.* Lo stabilizzatore è un sottogruppo

$$\text{Stab}(x) < G$$

ma non è necessariamente normale.

$$Z_{\mathcal{A}_{14}}(3 \ 1 \ 4) < \mathcal{A}_{14}$$

**Teorema G.8** (Relazione Orbite-Stabilizzatori).

$$|G| = |\text{Orb}(x)| |\text{Stab}(x)|$$

*Dimostrazione.* La funzione  $f$  così definita

$$\begin{aligned} f: \{g \text{Stab}(x) \mid g \in G\} &\rightarrow \{\text{Orb}(x) \mid x \in X\} \\ g \text{Stab}(x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

è biunivoca, infatti:

$$\begin{aligned} g \cdot x = h \cdot x &\Leftrightarrow \varphi_g(x) = \varphi_h(x) \\ &\Leftrightarrow \varphi_h^{-1} \varphi_g(x) = x \\ &\Leftrightarrow \varphi_{h^{-1}g}(x) = x \\ &\Leftrightarrow h^{-1}g \cdot x = x \\ &\Leftrightarrow h^{-1}g \in \text{Stab}(x) \\ &\Leftrightarrow g \in h \text{Stab}(x) \\ &\Leftrightarrow g \text{Stab}(x) = h \text{Stab}(x) \end{aligned}$$

♣

*Osservazione.* Dall'osservazione precedente

$$|X| = \sum_{x \in R} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

**Esempi.**

1.  $[G = C, X = \mathbb{R}^2]$  e l'azione dell'ultimo esempio. Questa ruota ogni punto attorno all'origine, pertanto le orbite sono circonferenze centrate nell'origine e gli stabilizzatori sono tutti banali, tranne quello dell'origine che coincide con  $G$ .
2.  $[G = \mathbb{R}, X = \mathbb{R}^2]$  e l'azione che trasforma  $r \in \mathbb{R}$  nella traslazione orizzontale di lunghezza  $r$ . Le orbite sono le rette parallele alla traslazione e gli stabilizzatori sono tutti banali.
3.  $[G, X = G]$  e l'azione sia la mappa che manda un elemento  $g$  nel coniugio per questo  $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ . L'orbita di un elemento contiene tutti i coniugati di questo ed è detta *classe di coniugio* di  $x$  ( $\mathcal{C}_x$ ). Lo stabilizzatore di  $x$  contiene tutti e soli gli elementi tali che  $xg = gx$ , ovvero il sottogruppo di tutti gli elementi che commutano con  $x$ , è detto *centralizzatore* di  $x$  ( $Z_G(x)$ ).
4.  $[G, X = \{H \mid H < G\}]$  e l'azione di coniugio. Le orbite non sono particolarmente interessanti, mentre lo stabilizzatore di un sottogruppo è detto *Normalizzatore* di  $H$ ,  $N(H)$  ed è il più grande sottogruppo di  $G$  in cui  $H$  è normale.

*Osservazione.*  $H \triangleleft G \Leftrightarrow N(H) = G$

*Osservazione* (euristica). Le azioni più comuni sono quelle naturali: il coniugio, la moltiplicazione a sinistra e, talvolta, la moltiplicazione a destra per l'inverso.

## G.2 Formula delle Classi e Cauchy

**Teorema G.9** (Formula delle Classi). *Per ogni gruppo finito vale*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in R'} \frac{|G|}{|Z_G(x)|}$$

*Dimostrazione.* Riprendiamo la partizione di  $X$  in orbite, ma separando quelle banali da quelle non

$$|X| = \sum_{\substack{x \in R \\ \text{Orb}(x) = \{x\}}} 1 + \sum_{\substack{x \in R \\ \text{Orb}(x) \neq \{x\}}} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

Osserviamo cosa succede nel caso dell'azione di coniugio da un gruppo in se (l'esempio 3 di sopra). L'orbita di  $x$  è banale se e solo se  $g x g^{-1} = x, \forall g \in G$ , ovvero nel caso in cui  $x$  commuti con tutti gli elementi di  $G$  (stia nel centro). Dunque  $R = Z(G)$  mentre gli elementi rimanenti rappresentano centralizzatori distinti. ♣

**Definizione G.10** ( $p$ -gruppo). Si dice  $p$ -gruppo un gruppo finito  $G$  di ordine potenza di un primo  $p$ :  $|G| = p^n$ .

**Esempi.**

1. **Un  $p$ -gruppo  $G$  ha centro non banale.** Tutti i centralizzatori degli elementi di  $R'$  hanno dimensione  $p^k$  per un intero  $0 \leq k < n$ , dunque

$$p \mid \frac{|G|}{|Z_G(x)|} \forall x \in R'$$

pertanto, per la formula delle classi,

$$p \mid |G| - \sum_{x \in R'} \frac{|G|}{|Z_G(x)|} = |Z(G)|$$

che quindi, contenendo  $e$ , deve avere almeno  $p$  elementi.

2. **I gruppi di ordine  $p^2$  sono abeliani.** Il centro di  $G$  avrà, per quanto appena dimostrato, ordine  $p$  o  $p^2$ . Nel secondo caso abbiamo finito. Nel primo

$$\left| G/Z(G) \right| = p$$

dunque il quoziente è ciclico. Presi due elementi qualunque  $x, y \in G$  possiamo esprimerli come  $x = g^h a$  e  $y = g^k b$ , dove  $g$  è il generatore del quoziente e  $a, b \in Z(G)$ . Allora, sfruttando la commutatività degli elementi del centro

$$xy = (a)(g^k b) = g^{h+k} ab = g^{k+h} ba = (g^k b)(g^h a) = yx$$

ricaviamo la commutativa per tutti gli elementi del gruppo.

3. Una possibile dimostrazione del Teorema di Cauchy:

**Teorema G.11** (di Cauchy). *Per ogni fattore primo  $p$  di  $|G|$  esiste un elemento  $g$  di  $G$  di ordine  $p$ .*

*Dimostrazione Classica.* Sia  $|G| = pm$ , procediamo per induzione su  $n$ .

Se  $n = 1$ ,  $G$  è ciclico, quindi ha un generatore di ordine  $p$ . Supponiamo ora che tutti i gruppi di ordine  $kp \quad \forall k < m$  abbiano un elemento di ordine  $p$ . Se  $|G| = pm$  ci sono due casi:

1. Esiste un sottogruppo proprio  $H$  di ordine multiplo di  $p$ , da cui ricadiamo nell'ipotesi induttiva.

2. Se nessun sottogruppo di  $G$  ha ordine divisibile per  $p$ , allora

$$p \mid \frac{|G|}{|Z_G(x)|} \forall x \in R'$$

perché i  $Z_G(x) < G$ . Per la formula delle classi

$$p \mid |G| - \sum_{x \in R'} \frac{|G|}{|Z_G(x)|} = |Z(G)|$$

ma abbiamo supposto che i sottogruppi propri non abbiano ordine multiplo di  $p$ , dunque il centro deve coincidere con l'intero gruppo, che risulta pertanto commutativo. ♣

*Dimostrazione Magica.* Sia

$$X = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 \cdots x_n = 1\}$$

questo insieme ha esattamente  $|G|^{p-1}$  elementi, infatti scelti i primi  $(p-1)$  l'ultimo è univocamente determinato come il suo unico inverso. Se una  $p$ -upla non è composta da un solo elemento ripetuto, allora possiamo ciclare i suoi termini per ottenere altre  $(p-1)$   $p$ -uple in  $X$ . Dunque, detto  $n$  il numero di  $g$  tali che  $g^p = 1$

$$p \mid |G|^{p-1} - n \Rightarrow p \mid n$$

e poiché  $e^p = e$  ci sono almeno  $p$  elementi di ordine  $p$ . ♣

**Esercizio.** Classificare i gruppi  $G$  di ordine 6.

Per Cauchy esistono  $x, y \in G$  di ordine, rispettivamente, 2 e 3.

- Se  $G$  è abeliano,  $\text{ord}(xy) = 6$ , quindi  $G$  è ciclico e pertanto isomorfo a  $\mathbb{Z}_6$ .
- Se non lo è, costruiamo un isomorfismo esplicito...

**Teorema G.12** (Cayley). *Possiamo immergere ogni gruppo  $G$  in  $\mathcal{S}(G)$ .*

*Dimostrazione.* L'azione di moltiplicazione a sinistra è fedele

$$\Phi: G \rightarrow \mathcal{S}(G)$$

$$g \mapsto \varphi_g(x) = gx$$

ovvero, iniettiva. ♣

**Definizione G.13** (Sottogruppo generato). Sia  $S \subset G$  un *sottoinsieme* di  $G$ . Chiamiamo  $\langle S \rangle$  il più sottogruppo contenente  $S$ , sottogruppo generato da  $S$ .

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ S \subseteq H}} H$$

**Teorema G.14** (Caratterizzazione dei sottogruppi generati).

$$\langle S \rangle = \{s_1 \cdots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S \cup S^{-1}\}$$

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $X$  il magico insieme nel RHS. Chiaramente  $S \subseteq X$  e pertanto  $X$ , che è facile verificare essere un gruppo, è parte della famiglia sotto intersezione:  $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$ . Inoltre se  $S \subseteq H < G$  sicuramente in  $H$  compaiono tutte le  $k$ -uple di  $X$  e quindi  $X < H$  per ogni sottogruppo di  $\mathcal{F}$ . Dunque  $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$ . ♣

**Esempi.**

1.  $\langle S \rangle$  è abeliano se e solo se tutti gli elementi di  $S$  commutano fra loro.
2.  $\langle S \rangle$  è normale se e solo se ogni elemento di  $S$  rimane in  $\langle S \rangle$  per coniugio.
3.  $\langle S \rangle$  è caratteristico se e solo se ogni elemento di  $S$  viene mandato in  $\langle S \rangle$  da ogni automorfismo di  $G$ .

4.  $G' = \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G \rangle$  è detto *Gruppo dei Commutatori o Gruppo Derivato di  $G$* . Questo gruppo gode di alcune proprietà fondamentali

- (a)  $G' = \{e\} \Leftrightarrow G$  abeliano.
- (b)  $G'$  è caratteristico e pertanto normale in  $G$ .
- (c) **Dato  $H \triangleleft G$ , il quoziente  $G/H$  è abeliano se e solo se  $G' < H$ .**

*Dimostrazione.* La verifica delle proprietà (a) e (b) è

banale. Rimane l'ultima (c):

$$\begin{aligned}
 G/H \text{ abeliano} &\Leftrightarrow xHyH = yHxH && \forall x, y \in G \\
 &\Leftrightarrow xyH = yxH && \forall x, y \in G \\
 &\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy \in H && \forall x, y \in G \\
 &\Leftrightarrow g' \in H && \forall g' \in G'
 \end{aligned}$$

♣

**Definizione G.15.**  $G/G'$  è detto l'abelianizzato di  $G$ , perché è sempre abeliano!

### G.3 Gruppi Diedrali $D_n$

**Definizione G.16** (Gruppo Diedrale). Sia  $D_n$  il gruppo delle isometrie dell' $n$ -agono regolare.

**Teorema G.17** (Caratterizzazione di  $D_n$ ). Si ha

$$D_n = \langle \rho, \sigma \mid \rho^n = e, \sigma^2 = e, \sigma\rho\sigma = \rho^{-1} \rangle$$

*Dimostrazione.* Tutti gli elementi sopra definiti possiamo ridurli a un elemento della forma  $\rho^k$  o  $\sigma\rho^k$  per un qualche  $0 \leq k < n$ . Questo perché così sono fatti i generatori e ogni operazione permessa (composizione e inversione) tra due generatori può immediatamente essere ridotta a questa forma attraverso le cancellazioni imposte. Inoltre possiamo immergere  $D_n$  in un sottogruppo di  $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$  di ordine  $2n$  attraverso un omomorfismo suriettivo:

$$\begin{aligned} \Phi: D_n &\rightarrow \mathbf{O}_2(\mathbb{R}) \\ \sigma &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ -\sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto ognuno dei rappresentati sopra individua un'effettiva trasformazione distinta. ♣

*Osservazione.* Conosciamo già un gruppo diedrale:  $D_3 \cong S_3$ .

*Osservazione.* Il sottogruppo  $C_n$  delle rotazioni, generato da  $\rho$ , è ovviamente ciclico e, avendo indice 2, è anche normale in  $D_n$ .

$$\langle \rho \rangle = C_n \triangleleft D_n$$

**Teorema G.18** (Ordine degli elementi di  $D_n$ ). Sappiamo che

- tutte le simmetrie hanno ordine 2.
- ci sono  $\varphi(m)$  rotazioni di ordine  $m$ , per ogni  $m \mid n$ .

*Dimostrazione.* La seconda parte è immediata conseguenza della ciclicità del sottogruppo delle rotazioni. L'ordine delle riflessioni possiamo calcolarlo esplicitamente notando che  $(\sigma\rho^k)(\sigma\rho^k) = (\sigma\rho^k\sigma)\rho^k = \rho^{-k}\rho^k = e$  grazie alla terza proprietà imposta nella caratterizzazione. ♣

**Teorema G.19** (Sottogruppi di  $D_n$ ). I sottogruppi  $H < D_n$  rientrano in una di queste due categorie:

- $H < C_n$ : di cui ne abbiamo esattamente uno per ogni ordine divisore di  $n$ .

- $H = (H \cap C_n) \sqcup \tau(H \cap C_n)$ : di cui ce ne sono  $d$  di ordine  $\frac{2n}{d}$  per ogni  $d \mid n$ .

*Dimostrazione.* Se  $H < C_n$  il risultato viene da Aritmetica. Se  $H \not< C_n$ ,  $H$  contiene almeno una rotazione  $\tau = \sigma\rho^i$ . Consideriamo l'omomorfismo  $f$  che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} D_n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{O}_2(\mathbb{R}) \\ & \searrow f & \downarrow \det \\ & & \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Restringiamo l'omomorfismo trovato ad  $H$

$$\begin{array}{ccc} D_n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{O}_2(\mathbb{R}) \\ \uparrow & \searrow f & \downarrow \det \\ H & \dashrightarrow & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Visto che  $\ker f = C_n \triangleleft D_n$ , il sottogruppo  $H$  viene scomposto in nucleo e laterale

$$H = f^{-1}(0) \sqcup f^{-1}(1) = (H \cap C_n) \sqcup \tau(H \cap C_n)$$

Infine, dato che il nucleo è contenuto nel sottogruppo ciclico  $(H \cap C_n) < C_n$ , possiamo pensarlo come il sottogruppo generato da una potenza della rotazione elementare

$$H \cap C_n = \langle \rho^d : d \mid n \rangle$$

Il suo unico laterale sarà allora composto dagli  $d$  elementi della forma

$$\begin{aligned} \tau(H \cap C_n) &= \{\tau\rho^d, \tau\rho^{2d}, \dots, \tau\rho^{n-d}\} \\ &= \{\sigma\rho^{d+i}, \sigma\rho^{2d+i}, \dots, \sigma\rho^{n-d+i}\} \end{aligned}$$

che è facile convincersi dipendere solamente dalla classe di  $i$  mod  $d$ . ♣

**Esercizi.**

1. Quali sottogruppi di  $D_n$  sono normali?
2. Quali sottogruppi di  $D_n$  sono caratteristici?
3. Quali sono i quozienti di  $D_n$ ?
4. (\*) Chi è  $\text{Aut}(D_n)$ ?

## G.4 Gruppi di Permutazioni $\mathcal{S}_n$

**Definizione G.20** (Gruppi di Permutazioni). Dato un insieme  $X$ , chiamiamo

$$\mathcal{S}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ è bigettiva}\}$$

con l'operazione di composizione, il gruppo delle permutazioni di  $X$ . Se l'insieme è finito  $|X| = n$ , allora

$$\mathcal{S}(X) \cong \mathcal{S}(\{1, 2, \dots, n\})$$

lo chiamiamo  $\mathcal{S}_n$ .

**Teorema G.21.** Ogni permutazione  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  si scrive in modo unico come prodotto di cicli disgiunti.

*Osservazione.* Cicli disgiunti commutano.

*Osservazione.*  $\mathcal{S}_n$  è generato dai suoi cicli.

**Esercizi.**

1. Quanti  $k$ -cicli ci sono in  $\mathcal{S}_n$ ?
2. Come conto gli elementi con una composizione fissata in un  $\mathcal{S}_n$  dato? Per esempio, come calcolo le permutazioni del tipo  $3 + 3 + 2 + 2 + 2$  in  $\mathcal{S}_{10}$ ?
3. L'ordine di  $\sigma$  è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi  $k$ -cicli.

*Osservazione.*  $\mathcal{S}_n$  è generato dalle sue trasposizioni.

*Osservazione.* La decomposizione in trasposizioni non è unica. Ma la parità dei numeri di trasposizioni lo è:

**Teorema G.22** (delle trasposizioni). La parità del numero di trasposizioni della scomposizione di una qualunque permutazione  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  non dipende dalla scomposizione.

*Dimostrazione.* Consideriamo

$$\begin{aligned} \text{sgn} : \mathcal{S}_n &\rightarrow \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\} \\ \sigma &\mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{aligned}$$

questo è un omomorfismo di gruppi. Infatti:

1. è ben definito, ovvero  $|\text{sgn}(\sigma)| = 1$ : tutte le differenze che compaiono a denominatore compaiono anche a numeratore, poiché  $\sigma$  è una permutazione, magari con ordine o segno, differente.
2. Si comporta bene con la composizione

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \\ &= \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) \end{aligned}$$

Per concludere, osserviamo che tutte le trasposizioni hanno segno negativo. ♣

**Definizione G.23** (Gruppo Alternato). Chiamiamo  $\mathcal{A}_n$  o gruppo alternato il sottogruppo delle permutazioni pari

$$\ker(\text{sgn}) = \mathcal{A}_n \triangleleft \mathcal{S}_n$$

*Osservazione.* Ogni sottogruppo  $H < \mathcal{S}_n$  è contenuto interamente in  $\mathcal{A}_n$  o viene spezzato a metà dal gruppo alternato. Questo perché possiamo restringere il determinante al solo  $H$ , che dunque può spezzarsi in nucleo e laterale, o immergersi interamente nel nucleo.

**Teorema G.24** (delle permutazioni coniugate). Due permutazioni  $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$  sono coniugate se e solo se hanno lo stesso tipo di decomposizione in cicli.

*Dimostrazione.* E' più che sufficiente osservare che dato un ciclo

$$\sigma = (a_1 \cdots a_k)$$

e una permutazione tale che  $\tau : a_i \mapsto b_i$  si ha

$$\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(a_1) \cdots \tau(a_k)) = (b_1 \cdots b_k)$$

♣

*Osservazione.* Notiamo che il centralizzatore di  $\sigma$  coincide con lo stabilizzatore dell'azione di coniugio di  $\mathcal{S}_n$  in se. Dunque

$$|Z(\sigma)| = \frac{n!}{|\mathcal{C}(\sigma)|}$$

**Esercizio.** Data una permutazione  $\sigma$  trovare  $|N(\langle \sigma \rangle)|$ . Osserviamo che

$$N(\langle \sigma \rangle) = \{\tau \mid \tau \sigma \tau^{-1} = \sigma^k\}$$

dunque il normalizzatore contiene il centralizzatore di  $\sigma$  e, visto che il coniugio preserva la scomposizione in cicli, che possiamo prendere solo i  $k$  coprimi coll'ordine di  $\sigma$ . Inoltre prese due permutazioni  $\tau_1, \tau_2 \in N(\langle \sigma \rangle)$  che generano lo stesso  $\sigma^k$ , abbiamo che

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = \tau_2 \sigma \tau_2^{-1} \Leftrightarrow (\tau_2^{-1} \tau_1) \sigma (\tau_2^{-1} \tau_1)^{-1} = \sigma$$

Dunque  $\tau_2^{-1} \tau_1 \in Z(\sigma)$ , ovvero  $\tau_1 \in \tau_2 Z(\sigma)$ . Pertanto il normalizzatore dev'essere composto da tutti i laterali del centralizzatore indotti da permutazioni che mi danno  $\sigma^k$  dello stesso tipo di  $\sigma$ . Ovvero

$$N(\langle \sigma \rangle) = \bigcup_{(i, \text{ord}(\sigma))=1} \tau_i Z(\sigma)$$

e pertanto

$$|N(\langle \sigma \rangle)| = |Z(\sigma)| \cdot \phi(\text{ord}(\sigma))$$

**Teorema G.25.** Il gruppo alternato  $\mathcal{A}_n$  è semplice per  $n \geq 5$ .

*Dimostrazione.* Iniziamo a dimostrare che  $\mathcal{A}_5$  è semplice, prima o poi concluderemo per induzione. Le classi di coniugio di questo gruppo hanno dimensione 1, 12, 12, 15, 20. Un gruppo normale dovrebbe essere unione di un certo numero di queste orbite, ma sommando le loro cardinalità non ottengo mai divisori di 60. ♣

**Teorema G.26** (del ribelle). Per ogni  $n \geq 3$  i gruppi di permutazioni sono i propri automorfismi

$$\text{Aut}(\mathcal{S}_n) \cong \mathcal{S}_n$$

ma non per  $\mathcal{S}_6$ , che è un ribelle.

*Dimostrazione.* Per cominciare, osserviamo che

$$\text{Int}(\mathcal{S}_n) \cong \mathcal{S}_n / Z(\mathcal{S}_n) \cong \mathcal{S}_n$$

dunque  $\mathcal{S}_n \triangleleft \text{Aut}(\mathcal{S}_n)$ , pertanto ci basta dimostrare che tutti gli automorfismi sono interni. Sfruttiamo il fatto che gli automorfismi mandano classi di coniugio in classi di coniugio e che preservano l'ordine degli elementi per mostrare che

- Ogni automorfismo rispetta la classe delle trasposizioni. Guardiamo come sono fatte le classi di coniugio degli elementi di ordine 2. Sia  $C_k$  la classe delle permutazioni composte da  $k$  trasposizioni disgiunte, abbiamo che

$$|C_k| = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{n!}{(n-2k)!}$$

Imporre  $|C_1| = |C_k|$ , equivale a risolvere

$$2^{k-1} = \frac{(n-2)!}{(n-k)!} \binom{n-k}{k}$$

- Per  $k=2$  abbiamo

$$4 = (n-2)(n-3)$$

che non ha soluzione, perché i due fattori a destra sono interi consecutivi, quindi uno di loro sarà dispari.

- Per  $k=3$  abbiamo

$$4 = (n-2) \binom{n-3}{3}$$

che ammette  $n=6$  come unica soluzione (il caso famigerato!), visto che  $n-2 \mid 4$  limita la ricerca delle soluzioni ai soli  $n=3, 4, 6$ .

- Infine, per  $k>3$  notiamo che il fattore

$$\frac{(n-2)!}{(n-k)!}$$

contiene almeno un primo dispari.

Pertanto ogni automorfismo rispetta  $C_1$ , perché le altre classi sono troppo grandi.

- Osserviamo che, preso  $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{S}_n)$ , si ha

$$\varphi(1, i) = (a_1, a_i)$$

con tutti gli  $a_i$  distinti.

- Dunque  $\varphi$  coincide, in realtà, con il coniugio per la permutazione

$$\sigma : i \mapsto a_i$$



## G.5 Prodotti diretti

**Teorema G.27** (di Struttura). *Sia  $G$  un gruppo e  $H, K < G$  due sottogruppi. Se*

1.  $H \triangleleft G$  e  $K \triangleleft G$
2.  $HK = G$
3.  $H \cap K = \{e\}$

*allora*

$$G \cong H \times K$$

*Dimostrazione.* Mostriamo innanzitutto che  $hkh^{-1}k^{-1}$  appartiene ad entrambi i sottogruppi, infatti:

$$H \ni h(kh^{-1}k^{-1}) = h(kh^{-1}k^{-1}) = (hkh^{-1})k^{-1} \in K$$

dunque, per la seconda ipotesi,

$$hkh^{-1}k^{-1} = e$$

quindi gli elementi di un sottogruppo commutano con quelli dell'altro  $hk = kh$ .

Consideriamo ora l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi: H \times K &\rightarrow G \\ (h, g) &\mapsto hg \end{aligned}$$

e verifichiamo che

1. è ben definito.
2. è un omomorfismo: infatti

$$\Phi(hh', kk') = hh'kk' = hkh'k' = \Phi(h, k)\Phi(h', k')$$

3. è suriettivo per la prima ipotesi.
4. è iniettivo per la seconda, infatti

$$\ker \Phi = \{(h, k) \mid hk = e\} = \{(e, e)\}$$



*Osservazione.* Nel prodotto diretto i fattori commutano.

**Proprietà di  $G = H \times K$ .**

1.  $Z(G) = Z(H) \times Z(K)$ .
2.  $\text{Int}(G) \cong \text{Int}(H) \times \text{Int}(K)$ .
3.  $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) < \text{Aut}(G)$ .

**Teorema G.28** (degli automorfismi prodotto). *Si ha*

$$\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) < \text{Aut}(H \times K)$$

*e sono isomorfi se e solo se  $H$  e  $K$  sono caratteristici.*

*Dimostrazione.* Consideriamo l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) &\rightarrow \text{Aut}(H \times K) \\ (f, g) &\mapsto \varphi_{fg}: (h, k) \mapsto (f(h), g(k)) \end{aligned}$$

e verifichiamo che

- è bene definito, ovvero  $\varphi$  è un automorfismo. Immediata conseguenza del fatto che  $f$  e  $g$  sono a loro volta automorfismi.
- è un omomorfismo.

$$\begin{aligned} \Phi(ff', gg') &= (f(f'(h)), g(g'(k))) \\ &= \varphi_{fg}(\varphi_{f'g'}(h, k)) \\ &= \Phi(f, g)\Phi(f', g') \end{aligned}$$

- è iniettivo.

$$\ker \Phi = \{(id, id)\}$$

altrimenti c'è almeno un elemento di uno dei due gruppi che non va in se stesso.

- è suriettivo se e solo se  $H \times \{e_K\}$  e  $\{e_H\} \times K$  sono caratteristici in  $H \times K$ .

⇒. Se  $\Phi$  è suriettivo, allora tutti gli automorfismi di  $H \times K$  sono della forma di cui sopra e pertanto  $\varphi_{fg}$  agisce sugli elementi di  $H$  come  $\varphi_{fg|H} = f \in \text{Aut}(H)$ .

⇐. Viceversa, supponiamo  $H$  e  $K$  caratteristici, preso un automorfismo  $\varphi \in \text{Aut}(H \times K)$  consideriamo le sue restrizioni ai due sottogruppi caratteristici.

$$f = \Pi_H(\varphi|_{H \times \{e_K\}}) \quad g = \Pi_K(\varphi|_{\{e_H\} \times K})$$

Notiamo che  $f \in \text{Aut}(H)$ .

- $f$  è iniettiva. Se  $f(h) = f(h')$  allora

$$\Pi_H(\varphi(h, e_K)) = \Pi_H(\varphi(h', e_K))$$

poiché  $H \times \{e_K\}$  è caratteristico

$$\varphi(h, e_K) = (a, e_K) \quad \varphi(h', e_K) = (b, e_K)$$

ma necessariamente  $a = f(h)$  e  $b = f(h')$ , pertanto

$$\varphi(a, e_K) = (f(h), e_K) = (f(h'), e_K) = \varphi(b, e_K)$$

e, visto che  $\varphi$  è iniettivo,  $h = h'$ .

- $f$  è suriettiva. Fissiamo un qualunque  $h \in H$ . Essendo  $H \times \{e_K\}$  caratteristico, necessariamente la controimmagine di  $(h, e_K)$  è un suo elemento

$$\varphi^{-1}(h, e_K) = (h', e_K)$$

dunque

$$f(h') = \Pi_H(\varphi(h', e_K)) = \Pi_H(h, e_K) = h$$

Infine osserviamo che  $\Phi(f, g) = \varphi$ . Infatti

$$\begin{aligned} \varphi_{fg}(h, k) &= (f(h), g(k)) \\ &= (\Pi_H(\varphi(h, e_K)), \Pi_K(\varphi(e_H, k))) \\ &= (\Pi_H(\varphi(h, k)), \Pi_K(\varphi(h, k))) \\ &= \varphi(h, k) \end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza segue da

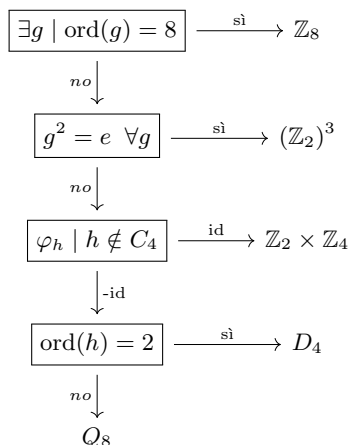
$$\begin{aligned} \Pi_H(\varphi(h, e_K)) &= \Pi_H(\varphi(h, e_K)) \Pi_H(\varphi(e_H, k)) \\ &= \Pi_H(\varphi(h, e_K)\varphi(e_H, k)) \\ &= \Pi_H(\varphi(h, k)) \end{aligned}$$



**Esercizio.** Trovare  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_2)$ .



## G.6 Classificazione dei Gruppi di ordine 8



Prendiamo un gruppo  $G$  di ordine 8.

- Se esiste un elemento di ordine 8 il gruppo è ciclico e pertanto isomorfo a  $\mathbb{Z}_8$ .
- Se  $G$  ha solo elementi di ordine 2, allora è isomorfo a  $(\mathbb{Z}_2)^3$ . Mostriamo un risultato appena più generale.

**Teorema G.29** (dei gruppi solipsisti). *Se  $|G|$  ha solo elementi di ordine due ed è finito, allora  $G \cong (\mathbb{Z}_2)^n$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $a^2b^2 = e = (ab)^2 = abab$  e, moltiplicando per  $a$  a sinistra e per  $b$  a destra, otteniamo  $ab = ba$  per ogni  $a, b \in G$ . Pertanto  $G$  è abeliano. Possiamo ora procedere per induzione sulla dimensione di  $G$ . Se  $|G| = 2$  il risultato è chiaro. Supponiamo ora che sia vero per tutti i gruppi di ordine  $< 2^n$  e supponiamo  $2^n \leq |G| < 2^{n+1}$ . Quando prendiamo un insieme minimale di  $h < n$  generatori  $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$  di un sottogruppo di  $H < G$ , questo sarà isomorfo a  $(\mathbb{Z}_2)^h$  per ipotesi induttiva. Prendiamo un elemento  $g \notin H$ , abbiamo che  $H$  e  $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_2$  sono sottoinsiemi normali e con intersezione banale, pertanto il sottoinsieme

$$\langle g, g_1, \dots, g_n \rangle \cong H \times \langle g \rangle \cong (\mathbb{Z}_2)^h \times \mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}_2)^{h+1}$$

per il teorema di struttura G.27. Così facendo possiamo continuare ad aggiungere elementi fino a prenderli tutti. ♣

Se  $G$  non ha elementi di ordine 8 e non hanno tutti ordine 2, allora esiste un  $g \in G$  di ordine 4 e sia  $C_4 = \langle g \rangle$ . Sia  $h \notin C_4$  e consideriamo l'azione di coniugio di  $h$  su  $C_4$

$$\begin{aligned}
 \varphi_g: C_4 &\rightarrow C_4 \\
 x &\mapsto h x h^{-1}
 \end{aligned}$$

ben definita perché  $C_4$ , avendo indice 2, è normale in  $G$ . Poiché  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2$ , abbiamo solo due possibilità:

$$\varphi_g = id^{\pm 1}$$

- $[\varphi_g = id, \text{ord}(h) = 2]$ . Dunque gli elementi di  $C_4$  commutano con  $h$ , l'intersezione tra  $C_4$  e  $\langle h \rangle$  è banale e il loro prodotto genera  $G$  per ragioni di cardinalità, pertanto

$$G \cong \langle h \rangle \times C_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

- $[\varphi_g = id, \text{ord}(h) = 4]$ . Possiamo considerare  $h^2$  e ricondurci al caso precedente.
- $[\varphi_g = id^{-1}, \text{ord}(h) = 2]$ . Abbiamo che  $hgh = g^{-1}$ , quindi per la nostra caratterizzazione dei gruppi diedrali

$$G \cong D_4$$

- $[\varphi_g = id^{-1}, \text{ord}(h) = 4]$ . Anche  $\text{ord}(gh) = 4$ . Infatti

$$e = ghgh = ghgh^{-1}hh = hh \neq e$$

Dunque abbiamo trovato l'ordine di tutti gli elementi, possiamo costruire un'isomorfismo esplicito con  $Q_8$ .

**Definizione G.30** (Quaternioni). Sia  $Q_8$  l'insieme  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  con l'operazione che soddisfa

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

## G.7 Lemmi vari

**Teorema G.31** (del piccolo indice primo). *Siano  $G$  un gruppo finito e  $H$  un sottogruppo che ha come indice il più piccolo primo  $p$  che divide  $G$ , allora  $H \triangleleft G$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo l'azione di  $G$  sull'insieme  $X$  dei laterali di  $H$  per moltiplicazione a sinistra

$$\begin{aligned}\Phi: G &\rightarrow \mathcal{S}_p \\ g &\mapsto \Pi_g : xH \mapsto gxH\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}g \in \text{Stab}(xH) &\Leftrightarrow gxH = xH \\ &\Leftrightarrow x^{-1}gx \in H \\ &\Leftrightarrow g \in xHx^{-1}\end{aligned}$$

dunque  $\text{Stab}(xH) = xHx^{-1}$  è il sottogruppo coniugato di  $H$  rispetto ad  $x$ . Possiamo ora riscrivere il nucleo come

$$\ker \Phi = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1} < H$$

e osservare che, per il Primo Teorema di Omomorfismo

$$\Phi' : G/\ker \Phi \rightarrow \mathcal{S}_p$$

è iniettivo e pertanto

$$\left| G/\ker \Phi \right| \mid |\mathcal{S}_p| = p!$$

ma  $p$  era il più piccolo primo a dividere  $|G|$ , quindi non potendo  $\ker \Phi$  coincidere con tutto il gruppo, dovrà essere proprio  $H$ . Il che conclude la dimostrazione. ♣

*Osservazione.* Sia  $G$  un gruppo abeliano. Sia

$$\begin{aligned}\psi_n: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^n\end{aligned}$$

preso un qualunque automorfismo  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi_n} & G \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ G & \xrightarrow{\psi_n} & G \end{array}$$

quindi  $\ker \psi_n$  e  $\psi_n(G)$  sono caratteristici in  $G$ .

**Esercizi.**

1. Trova  $\text{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n)$ .
2. Trova  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ .
3. Trova  $\text{Aut}(Q_8 \times D_4)$ .
4. Sia  $G$  un gruppo abeliano finito. Se  $H \triangleleft G$  è ciclico e lo è anche il loro quoziente, allora anche  $G$  è ciclico.

## G.8 Prodotto Semidiretto

**Definizione G.32** (Prodotto semidiretto). Siano  $H, K$  due gruppi e  $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  un'omomorfismo. Si dice prodotto semidiretto

$$H \rtimes_{\varphi} K$$

l'insieme dato dal prodotto cartesiano, dotato dell'operazione

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h\varphi_k(h'), kk')$$

*Osservazione.* Il prodotto semidiretto è un gruppo.

*Osservazione.* Il prodotto diretto è un prodotto semidiretto in cui  $\varphi$  manda tutti gli elementi di  $K$  nell'identità su  $H$ .

*Osservazione.* Sia  $\bar{H} = H \times e_K$ . Si ha

$$\ker \Pi_K = \bar{H} \triangleleft H \rtimes_{\varphi} K$$

qualunque sia l'omomorfismo  $\varphi$ . Infatti  $\bar{H}$  è il nucleo dell'omomorfismo di proiezione su  $K$ .

*Osservazione.* Inoltre  $\bar{K}$  se e solo se il prodotto è diretto.

$$\bar{K} \triangleleft H \rtimes_{\varphi} K \Leftrightarrow \rtimes = \times$$

**Teorema G.33** (di decomposizione). Siano  $G$  un gruppo e  $H, K < G$  sottogruppi. Se

1.  $H \triangleleft G$
2.  $HK = G$
3.  $H \cap K = \{e\}$

allora

$$G \cong H \rtimes_{\varphi} K$$

dove  $\varphi$  manda  $k$  nella corrispondente azione di coniugio

$$\begin{aligned} \varphi : K &\rightarrow \text{Aut}(H) \\ k &\mapsto \varphi_k : h \mapsto hkh^{-1} \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Consideriamo

$$\begin{aligned} \Phi : H \rtimes_{\varphi} K &\rightarrow G \\ (h, k) &\mapsto hk \end{aligned}$$

questo

- è un omomorfismo, perché

$$\begin{aligned} \Phi((h, k)(h', k')) &= \Phi(h\varphi_k(h'), kk') \\ &= \Phi(hkh'h'^{-1}, kk') \\ &= hkh'h'^{-1}kk' \\ &= hkh'h' \\ &= \Phi(h, k)\Phi(h', k') \end{aligned}$$

- è iniettivo e suriettivo per le ipotesi, come nella decomposizione in prodotto diretto.

dunque  $\Phi$  è un isomorfismo come desiderato. ♣

**Esempi.**

1.  $\mathcal{S}_n \cong A_n \rtimes_{\varphi} \langle (1\ 2) \rangle$ , con  $\varphi$  di coniugio.
2.  $D_n \cong \langle \rho \rangle \rtimes_{\varphi} \langle \sigma \rangle$ , con  $\varphi$  di coniugio.

### Classificazione dei gruppi di ordine $pq$ .

Se  $p = q$ , allora  $|G| = p^2$ , quindi  $G$  è abeliano. Allora necessariamente

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \quad \text{oppure} \quad G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

Se  $p < q$ , allora ho due elementi  $x, y$  di ordine, rispettivamente,  $p$  e  $q$ , che generano relativi gruppi ciclici. Il più grande dei quali sarà normale perché ha indice  $p$  (vedi G.31):

$$\mathbb{Z}_p < G \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_q \triangleleft G$$

Osserviamo inoltre che i due sottogruppi hanno intersezione banale e pertanto  $\mathbb{Z}_p \mathbb{Z}_q = G$  per ragioni di cardinalità. Quindi

$$G \cong \mathbb{Z}_q \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_p$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_p &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_q) \cong \mathbb{Z}_q^{\times} \cong \mathbf{GL}_1(\mathbb{F}_q) \\ 1 &\mapsto \varphi_1 : x \mapsto kx \end{aligned}$$

**Achtung!** Capire com'è fatta questa azione non è semplice. Prima di tutto, siamo passati in notazione additiva, perché i gruppi in questione sono abeliani e ciclici. A questo punto è molto comodo pensare a  $\mathbb{Z}_q$  come spazio vettoriale unidimensionale e al suo gruppo di automorfismi come l'insieme delle "matrici" invertibili che vi agisce sopra, ovvero l'insieme degli elementi invertibili di  $\mathbb{F}_p$ . Infine abbiamo definito l'omomorfismo solo per il generatore di  $\mathbb{Z}_p$ , perché possiamo ottenere gli altri da

$$y \mapsto \varphi_y : x \mapsto k^y x$$

ed è molto semplice convincersene: stiamo componendo applicazioni lineari, dunque moltiplicando fra loro le corrispondenti matrici. Non tutte le scelte di  $k \in \mathbb{Z}_q^{\times}$  sono accettabili però, per esempio se

$$p \nmid q-1 = |\mathbb{Z}_q^{\times}|$$

l'unico omomorfismo  $\varphi$  possibile è quello banale che ci induce

$$\boxed{G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q}$$

Se invece  $p \mid q-1$  possiamo scegliere  $k$  come un qualunque generatore del solo sottogruppo di ordine  $p$  di  $\mathbb{Z}_q^{\times} \cong \mathbb{Z}_{q-1}$ . Fissiamo un generatore  $g$ , allora tutte le possibili azioni saranno della forma

$$\begin{aligned} \psi^m : \mathbb{Z}_p &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_q) \\ 1 &\mapsto \psi_1^m : x \mapsto g^m x \end{aligned}$$

al variare di  $m$  in  $\{1, \dots, p-1\}$ . Osserviamo dunque che

$$\psi_1^m(x) = g^m(x) = \psi_1^1(x)$$

e possiamo dunque costruire la funzione

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}_q \rtimes_{\psi^m} \mathbb{Z}_p &\rightarrow \mathbb{Z}_q \rtimes_{\psi^1} \mathbb{Z}_p \\ (x, y) &\mapsto (x, my) \end{aligned}$$

e verificare che è un isomorfismo:

- è un omomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi(x, y)\Phi(x', y') &= (x, my)(x', my') \\ &= (x + \psi_{my}^1(x'), my + my') \\ &= (x + \psi_y^m(x'), my + my') \\ &= \Phi(x + \psi_y^m(x'), y + y') \end{aligned}$$

- è iniettivo: se  $\Phi(h, k) = (e, e)$ , allora  $h = e$  e, poiché  $k^m$  è un automorfismo di  $\mathbb{Z}_p$ ,  $k = e$ .

pertanto, in questo caso, esiste un unico gruppo di ordine  $pq$  non abeliano.

$$\boxed{G \cong \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_p}$$

## G.9 Teorema di Sylow

**Definizione G.34.** Chiamiamo  $p$ -syLOW ogni  $p$ -sottogruppo di ordine massimo. Ovvero  $H < G$ , dove  $|G| = p^m n$  con  $(m, n) = 1$  e  $|H| = p^m$ .

**Teorema G.35** (di Sylow). Sia  $G$  un gruppo finito di ordine  $|G| = p^n m$ , dove  $p$  è primo e  $m$  è un intero a lui coprimo:  $(p, m) = 1$ . Allora sappiamo che:

3. Per ogni  $0 \leq \alpha \leq n$ , esiste un sottogruppo  $H < G$  di ordine  $|H| = p^\alpha$ .

4. Ogni  $p$ -sottogruppo è incluso in un  $p$ -syLOW.

$\varphi_g$ . Due qualsiasi  $p$ -syLOW sono coniugati.

$n_p$ . Il numero  $n_p$  di  $p$ -syLOW è congruo a 1 mod  $p$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo pure i punti in ordine

3. Fissiamo  $0 \leq \alpha \leq n$ . Sia  $\mathcal{M}_\alpha$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $G$  di cardinalità  $p^\alpha$

$$\mathcal{M}_\alpha = \{M < G \mid |M| = p^\alpha\}$$

possiamo allora calcolarci

$$|\mathcal{M}_\alpha| = \binom{p^n m}{p^\alpha} = p^{n-\alpha} m \prod_{i=1}^{p^\alpha-1} \frac{p^n m - i}{p^\alpha - 1}$$

e poiché  $v_p(p^n m - i) = v_p(i) = v_p(p^\alpha - i)$ , allora

$$v_p \left( \prod_{i=1}^{p^\alpha-1} \frac{p^n m - i}{p^\alpha - 1} \right) = 0$$

concludiamo che

$$p^{n-\alpha} \parallel |\mathcal{M}_\alpha|$$

Consideriamo l'azione di  $G$  su  $\mathcal{M}_\alpha$  data dalla moltiplicazione a sinistra

$$\begin{aligned} \Phi: G &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{M}_\alpha) \\ g &\mapsto \psi_g: M \mapsto gM \end{aligned}$$

Vogliamo ora mostrare che esiste uno stabilizzatore della cardinalità giusta. Per la solita decomposizione in orbite abbiamo

$$|\mathcal{M}_\alpha| = \sum \frac{|G|}{|\text{Stab}(M_i)|}$$

Per le osservazione sulla cardinalità, deve esistere un'orbita di cardinalità non divisibile per  $p^{n-\alpha+1}$

$$\exists i \text{ tale che } p^{n-\alpha+1} \nmid |\text{Orb}(M_i)|$$

Il corrispondente stabilizzatore avrà pertanto cardinalità divisibile almeno per  $p^\alpha$ . Ma se fissiamo un elemento  $x \in M_i$  e consideriamo la funzione iniettiva

$$\begin{aligned} f: \text{Stab}(M_i) &\rightarrow M_i \\ y &\mapsto xy \end{aligned}$$

scopriamo che lo stabilizzatore non può avere una cardinalità maggiore dell'insieme che stabilizza

$$p^\alpha \mid |\text{Stab}(M_i)| \leq |M_i| = p^\alpha$$

ed è dunque il sottogruppo che cercavamo.

4. Sia  $H < G$  un  $p$ -sottogruppo  $|H| = p^\alpha$  e  $S$  un  $p$ -syLOW. Consideriamo l'azione di  $H$  sull'insieme  $X$  delle classi laterali di  $S$  per moltiplicazione a sinistra

$$\begin{aligned} F: H &\rightarrow \mathcal{S}(X) \\ h &\mapsto \psi_h: gS \mapsto hgS \end{aligned}$$

Per la decomposizione in orbite

$$m = [G : S] = |X| = \sum \frac{|H|}{|\text{Stab}(gS)|} = \sum \frac{p^\alpha}{p^{e_i}}$$

ma, non potendo  $p$  dividere  $m$ , esiste un laterale  $\bar{g}S$  stabilizzato da tutto  $H$ . Ovvero

$$h\bar{g}S = \bar{g}S \Leftrightarrow h \in \bar{g}S\bar{g}^{-1} \quad \forall h \in H$$

Dunque  $H \in \bar{g}S\bar{g}^{-1}$ , che è il  $p$ -syLOW cercato.

$\varphi_g$ . Siano  $A, B$   $p$ -syLOW. Per il punto precedente

$$\exists g \in G \text{ tale che } A < gBg^{-1}$$

che hanno la stessa cardinalità e pertanto coincidono.

$n_p$ . Consideriamo l'azione di coniugio di un  $p$ -syLOW  $S$  sull'insieme  $Y$  dei suoi coniugati

$$\begin{aligned} \Psi: S &\rightarrow \mathcal{S}(Y) \\ g &\mapsto \varphi_g: H \mapsto gHg^{-1} \end{aligned}$$

Mostriamo che l'orbita di  $S$  è l'unica banale. Infatti se  $H \in Y$  ha orbita banale significa che è stabilizzato da  $S$ , dunque che i due commutano e pertanto il loro prodotto è un sottogruppo di  $G$ .

$$|HS| = \frac{|H||S|}{|H \cap S|} = \frac{p^{2n}}{|H \cap S|} \mid p^n m$$

Necessariamente  $|H \cap S| = p^n$  e dunque  $H = S$ . Per una formula ancora mai usata

$$n_p = |Y| = \text{Orb}(S) + \sum_{H \neq S} \frac{|S|}{|\text{Stab}(H)|} \equiv 1 \pmod{p}$$

Per concludere è sufficiente osservare che se  $\text{Stab}(H) \leq S$  allora l'orbita corrispondente ha cardinalità divisibile per  $p$ .



*Osservazione.*  $n_p$  è l'indice del normalizzatore di un  $p$ -syLOW in  $G$ . Infatti, estendendo l'azione di coniugio a tutto il gruppo

$$n_p = |\text{Orb}(P)| = \frac{|G|}{|\text{Stab}(P)|} = \frac{|G|}{|N(P)|} = [G : N(P)]$$

**Teorema G.36.** Ogni gruppo  $G$  abeliano finito è prodotto diretto dei suoi  $p$ -syLOW.

*Dimostrazione.* Usiamo la nozione additiva e sia  $G = p^n m$  come al solito. Per ogni divisore  $d$  dell'ordine del gruppo sia

$$G_d = \ker \psi_d = \{g \in G \mid dg = 0\}$$

Ci è sufficiente mostrare che

$$G \cong G_{p^n} \times G_m$$

Osserviamo innanzitutto che  $G_{p^n}$  è un  $p$ -syLOW. Dev'essere un  $p$ -gruppo perché se  $|G_{p^n}|$  fosse divisibile per un primo  $q$ , allora per il Teorema di Cauchy G.11 conterrebbe almeno un elemento di ordine  $q$ , contro la sua definizione. A questo punto, dovendo contenere l'unico  $p$ -syLOW di  $G$  (il coniugio è banale negli abeliani) non può che esserlo. Verifichiamo che

1. I due sottogruppi sono normali in  $G$ , perché è abeliano.
2. La loro intersezione è banale, perché tutti gli elementi del  $p$ -syLOW hanno ordine divisibile per un primo che non divide l'ordine  $m$  dell'altro sottogruppo.

3. La loro somma è  $G$ . Infatti per Bezout esistono interi  $a, b$  tali che

$$ap^n + bm = 1$$

che moltiplicato per un qualunque elemento di  $g \in G$  diventa

$$a(gp^n) + b(gm) = g$$

Osserviamo che  $gp^n \in G_m$ , poiché

$$m(gp^n) = (mp^n)g = |G|g = 0$$

Analogamente  $gm \in G_{p^n}$  e pertanto la somma dei due sottogruppi contiene  $G$ .



### Esercizi.

1. Chi è il 2-sylow di  $S_4$ ?
2. Chi sono i gruppi di ordine 12?

### Classificazione dei gruppi di ordine 12.

Quanti possono essere i  $p$ -sylow? I 3-sylow sono necessariamente di ordine 3, pertanto ciclici, e possono essere  $n_3 = 1, 4$ . I 2-sylow sono di ordine 4, quindi isomorfi a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  o  $\mathbb{Z}_4$ , e sono  $n_2 = 1, 3$ . Se  $P_3$  non è normale, allora ne ho 4 copie con intersezione banale e rimane spazio solo per un  $P_2$ , che sarà normale.

Quindi uno tra un 2-sylow e un 3-sylow dev'essere normale, inoltre sono ciclici e avranno intersezione banale e il loro prodotto ha necessariamente cardinalità 12. Quindi abbiamo scoperto che  $G$  è isomorfo al prodotto semidiretto tra un sylow e l'altro. Analizziamo le varie possibilità

- $\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$ . Abbiamo

$$\varphi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2$$

che è dunque necessariamente banale e otteniamo

$$G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$$

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$ . Abbiamo

$$\varphi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$$

che avrà immagine nel sottogruppo di ordine 3, abbiamo quindi l'automorfismo banale, da cui

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

e quelli associati a  $\sigma$  e  $\sigma^2$ , che vogliamo mostrare indurre lo stesso prodotto. Infatti, scelto un  $\phi$  non banale, possiamo far agire  $G$  sull'insieme dei suoi 3-sylow per coniugio: sia

$$\Phi : G \rightarrow \mathcal{S}(\text{3-sylow di } G) \cong S_4$$

$$g \mapsto \varphi_g : H \mapsto gHg^{-1}$$

Osserviamo che  $N(P_3) = P_3$ , per la formula delle classi. Allora

$$\ker \Phi = \bigcap \text{Stab}(H) = \bigcap N(H) = \bigcap H = \{e\}$$

dunque  $\Phi$  è iniettivo e mappa  $G$  in un sottogruppo di ordine 12 di  $S_4$ . Ma l'unico sottogruppo di questa dimensione è  $\mathcal{A}_4$ , quindi entrambi i gruppi generati dal prodotto non diretto sono isomorfi a questo sottogruppo.

$$G \cong \mathcal{A}_4$$

- $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$ . Abbiamo

$$\varphi : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$$

che dunque può essere solo  $\pm id$ . Il caso banale ci restituisce un prodotto diretto, già considerato, l'altro è un gruppo buffo

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{-id} \mathbb{Z}_4$$

- $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Abbiamo

$$\varphi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$$

e abbiamo, oltre all'omomorfismo banale, 3 modi di proiettare  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  su un suo fattore. A meno di isomorfismi di  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$  commuta con uno dei fattori e agisce con  $-id$  sull'altro quindi

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \rtimes_{-id} \mathbb{Z}_2 \cong D_6$$

## G.10 Automorfismi di un gruppo buffo

Vogliamo scoprire chi è  $\text{Aut}(Q_8 \times D_4)$ . Per far questo, possiamo scomporre un qualunque automorfismo  $\varphi$  nelle sue restrizioni ai due termini del prodotto e proiettarli sulle due componenti. Il seguente diagramma magico è molto esplicativo

$$\begin{array}{ccccc} Q_8 & & & & Q_8 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ D_4 & \hookrightarrow & G & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\pi_D} & D_4 \\ & & & \nwarrow & \nearrow & & \\ & & & & & & D_4 \end{array}$$

Dunque possiamo scomporre l'automorfismo nei quattro omomorfismi

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{array}{ll} \alpha : Q_8 \rightarrow Q_8 & \beta : D_4 \rightarrow Q_8 \\ \gamma : Q_8 \rightarrow D_4 & \delta : D_4 \rightarrow D_4 \end{array}$$

Iniziamo ad analizzare i possibili omomorfismi.

$\beta$ . Consideriamo le possibili immagini per dimensione, tra i sottogruppi dei quaternioni:

$\{e\}$ . [✓] Ovviamente abbiamo un omomorfismo banale.

$\mathbb{Z}_2$ . [✓] Il nucleo dev'essere un sottogruppo di indice 2 e il diedrale ne ha tre:  $\langle \rho \rangle, \langle \rho^2, \sigma \rangle, \langle \rho^2, \sigma \rho \rangle$ .

$\mathbb{Z}_4$ . L'unico sottogruppo di indice 4 del diedrale è  $\langle \rho \rangle \cong \mathbb{Z}_4$  ed è il nucleo di un omomorfismo che uccide i termini di ordine 4.

$Q_8$ . Non è possibile, sarebbe un isomorfismo!

Tutti questi omomorfismi preservano necessariamente i centralizzatori, perché l'unico sottogruppo dei quaternioni di ordine 2 è il centro. Dunque sembrano accettabili tutti gli omomorfismi

$$\beta : D_4 \rightarrow Z(Q_8)$$

$\gamma$ . Consideriamo le possibili immagini, per dimensione:

$\{e\}$ . [✓] Ovviamente abbiamo un omomorfismo banale.

$\mathbb{Z}_2$ . [✓] Il nucleo dev'essere un sottogruppo di indice 2 e i quaternioni ne hanno tre:  $\langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle$ .

$\mathbb{Z}_4$ . L'unico sottogruppo di indice 4 dei quaternioni è  $\{\pm 1\}$  ed è il nucleo di un omomorfismo che uccide i termini di ordine 4.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Possiamo mandare i quaternioni in  $(\mathbb{Z}_2)^3$  usando i tre omomorfismi con immagine  $\mathbb{Z}_2$ , questo omomorfismo non sarà suriettivo, altrimenti sarebbe un isomorfismo, e ha almeno 4 elementi nell'immagine, visto che gli omomorfismi di sopra sono distinti. Quindi, permutando le componenti opportunamente, otteniamo 6 omomorfismi.

$D_4$ . Non è possibile, sarebbe un isomorfismo!

possiamo però escludere alcuni omomorfismi osservando che l'automorfismo  $\varphi$  deve preservare i centralizzatori. Infatti osservando il magico diagramma

$$\begin{array}{ccc} Q_8 \hookrightarrow Q_8 \times D_4 & \rightarrow & Q_8 \times D_4 \\ i \mapsto (i, e) & \mapsto & (\alpha(i), \gamma(i)) \end{array}$$

scopriamo che  $Z(i, e) \cong \mathbb{Z}_4 \times D_4$ . Possiamo ora cercare di capire cosa dovrebbe essere  $Z(\alpha(i)) \times Z(\gamma(i))$ , per esempio elencando i possibili prodotti di sottogruppi di ordine 32

$Q_8 \times (\mathbb{Z}_2)^2$ . Che però ha solo 25 elementi di ordine 2.

$Q_8 \times \mathbb{Z}_4$ . Che ha sol 11 elementi di ordine 2.

$\mathbb{Z}_4 \times (\mathbb{Z}_2)^2$ . Che però è abeliano.

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ . Che è abeliano.

$\mathbb{Z}_4 \times D_4$ . [✓] Che sicuramente è il gruppo che cerchiamo.

quindi necessariamente il centralizzatore di  $Z(\gamma(i)) \cong D_4$  e pertanto  $\gamma(i)$  è un elemento del centro di  $D_4$ , che ha solo due elementi. Quindi gli omomorfismi  $\gamma$  accettabili sono solo quello banale e i tre che hanno immagine in  $\mathbb{Z}_2$ . Dunque sembrano accettabili tutti gli omomorfismi

$$\beta : Q_8 \rightarrow Z(D_4)$$

$\alpha$ . Dev'essere un isomorfismo. Se non fosse un isomorfismo l'immagine non potrebbe avere dimensione 4, perché come già visto i sottogruppi di indice adatto eliminano gli elementi di ordine 4, e non potrebbe avere dimensione più piccola, perché altrimenti il primo termine dell'immagine di  $\varphi$  apparterrebbe sempre al centro di  $G$ .

$\delta$ . Analogamente dev'essere un isomorfismo.

Mostriamo ora che le condizioni trovate sono sufficienti. Ci basta mostrare che  $\varphi$ , costruito con le componenti sopra trovate, è iniettivo. Supponiamo di aver trovato  $(x, y) \in G$  tale che

$$\varphi(x, y) = (\alpha(x)\beta(y), \gamma(x)\delta(y)) = (e, e)$$

Visto che  $\beta(y)$  e  $\gamma(x)$  stanno nei centri dei rispettivi insiemi, anche  $\alpha(x)$  e  $\delta(y)$ , che sono i loro inversi, vi staranno. Ma  $\alpha$  e  $\delta$  sono isomorfismi, pertanto anche  $x, y$  staranno nei centri dei loro rispettivi gruppi! Ma  $\beta$  e  $\gamma$  contengono i centri nei loro nuclei, quindi si annullano, così come i rispettivi isomorfismi. Così  $x, y$  sono necessariamente l'elemento neutro del proprio gruppo e  $\ker \varphi = \{(e, e)\}$ .

Conosciamo già  $\text{Aut}(D_4)$ , cerchiamo, per concludere, di capire chi sia  $\text{Aut}(Q_8)$ .

Ogni automorfismo  $\alpha$  di  $Q_8$  deve mandare  $\alpha(-x) = -\alpha(x)$ , quindi le coppie

$$(i, -i) \quad (j, -j) \quad (k, -k)$$

non vengono scisse, ma solo permutate fra loro. Possiamo quindi far agire  $\text{Aut}(Q_8)$  sull'insieme di queste tre coppie, costruendo così un omomorfismo

$$\xi : \text{Aut}(Q_8) \rightarrow \mathcal{S}_3$$

Il nucleo di  $\xi$  è costituito dagli automorfismi che non scambiano nessuna coppia, dunque quello identico e i tre che cambiano segni a due delle coppie, ed è dunque isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Se consideriamo ora gli isomorfismi

$$S : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k \end{cases} \quad T : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto k \\ k \mapsto i \end{cases}$$

questi generano un sottogruppo "disgiunto" da  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  isomorfo a  $\mathcal{S}_3$ , quindi

$$\text{Aut}(Q_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rtimes_{\phi} \mathcal{S}_3$$

Per una certa azione  $\phi$  che rende il gruppo  $\mathcal{S}_4$  (per ragioni magiche non dimostrate).

## G.11 Teorema Fondamentale dei Gruppi Abeliani Finiti

**Teorema G.37** (di Struttura dei Gruppi Abeliani Finiti). *Se  $G$  è un gruppo abeliano finito allora si decompone in modo unico come prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine  $n_1, \dots, n_s$*

$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_s}$$

con  $n_1 \mid \dots \mid n_s$ .

*Dimostrazione.* Avendo già dimostrato che ogni gruppo abeliano finito si decompone nel prodotto dei suoi  $p$ -syloew ci è sufficiente dimostrare la tesi per i  $p$ -gruppi. Dato gruppo abeliano  $G$  di ordine  $p^n$ , ci basta mostrare che possiamo scriverlo come prodotto diretto del generato da un suo elemento di ordine massimo  $g$  e un altro sottogruppo  $K$

$$G \cong \langle g \rangle \times K$$

così da poter procedere per induzione.

Mostriamo questo risultato intermedio per induzione sull'ordine del  $p$ -gruppo  $G$ . Se  $|G| = p$  allora il gruppo è ciclico ed è generato da  $g$ . Supponiamo ora la tesi vera per ogni  $k$  con  $1 \leq k < n$  e prendiamo  $g$  un elemento di ordine massimo, diciamo  $p^m$ . Prendiamo ora un elemento  $h \in G$  che non stia nel sottogruppo  $\langle g \rangle$  e in modo che abbia ordine minimo possibile, se non esiste abbiamo  $G = \langle g \rangle$  e abbiamo finito.

Vogliamo ora mostrare che

$$\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$$

L'ordine di  $h^p$  è ovviamente minore di quello di  $h$ , dunque  $h^p \in \langle g \rangle$ , ovvero esiste un intero  $r \in \mathbb{Z}$  tale che

$$h^p = g^r$$

L'ordine di  $g^r$  è al più  $p^{m-1}$ , per tanto non è un generatore di  $\langle g \rangle$ , dunque per un qualche intero  $s$  abbiamo

$$h^p = g^r = g^{ps}$$

e succede che

$$(g^{-s}h)^p = g^{-sp}h^p = e$$

esiste un elemento di ordine  $p$  che non appartiene a  $\langle g \rangle$ ! Quindi anche l'ordine di  $h$  è  $p$  e i due sottogruppi devono essere disgiunti.

Osserviamo ora che, detto  $H = \langle h \rangle$ , l'ordine di  $gH$  in  $G/H$  è lo stesso di  $g$  in  $G$ , in particolare è ancora massimo. Se fosse più piccolo, sarebbe al più  $p^{m-1}$  e

$$H = (gH)^{p^{m-1}} = g^{p^{m-1}}H$$

e pertanto  $g^{p^{m-1}} \in H$ , assurdo. Per l'ipotesi induttive e il teorema di corrispondenza

$$G/H \cong \langle gH \rangle \times K/H$$

per un certo sottogruppo  $H < K < G$ . Mostriamo che  $K$  è il sottogruppo che cercavamo

►  $\langle g \rangle \cap K = \{e\}$ . Infatti se  $b$  stesse nell'intersezione,  $bH$  apparterebbe all'intersezione  $\langle gH \rangle \cap K/H$  che è  $H$ , dunque  $b \in H$ .

►  $G = \langle g \rangle K$ . Per ragioni di cardinalità.

L'unicità è lasciata al lettore.



### Classificazione dei Gruppi di Ordine 30.

Tiriamo a caso qualche gruppo di quest'ordine

$$\boxed{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5}$$

$$\boxed{D_{15}}$$

$$\boxed{D_5 \times \mathbb{Z}_3}$$

$$\boxed{D_3 \times \mathbb{Z}_5}$$

questi sono distinti perché il primo è l'unico abeliano e i centri di dei seguenti sono rispettivamente  $\{e\}$ ,  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z}_5$ . Sappiamo che

$$n_5 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{e} \quad n_5 \mid 6$$

per il Teorema di Sylow G.35 e perché  $n_5 \mid |G|$  in quanto cardinalità dell'orbita dell'azione di coniugio, rispettivamente. E, analogamente

$$n_3 \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{e} \quad n_3 \mid 10$$

Allora, se  $P_5$  non è normale, ci sono sei 5-syloew, quindi 24 elementi di ordine 5. Tra i pochi elementi che rimangono non ci stanno sicuramente dieci 3-syloew e pertanto  $P_3$  è normale. Allora  $P_3$  e  $P_5$  commutano (perché uno dei due è contenuto nel normalizzatore dell'altro), dunque

$$P_3 P_5 < G$$

e avendo indice 2 è normale, nonché ciclico.

Abbiamo allora che

$$G \cong \mathbb{Z}_{15} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2$$

per una qualche azione di coniugio

$$\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_{15}) \cong \mathbb{Z}_5^{\times} \times \mathbb{Z}_3^{\times}$$

$$y \mapsto \varphi_y: x \mapsto xyx^{-1} = x^a$$

sapendo che  $\varphi_y^2(x) = x^{a^2} = x$ , dobbiamo avere che

$$a^2 \equiv 1 \pmod{15}$$

e risolvendo il sistema di diofantee troviamo

$$a = \pm 1, \pm 4 \pmod{15}$$

e ognuna di questa azioni induce un prodotto semidiretto isomorfo a uno dei gruppi trovati all'inizio. In particolare  $a = 1$  è l'automorfismo identico, che induce il prodotto diretto, che restituisce il gruppo abeliano, mentre  $a = -1$  sappiamo già essere l'omomorfismo che genera il gruppo diedrale. Per  $a = 4$  troviamo l'automorfismo che fissa  $\mathbb{Z}_3$ , per  $a = -4$  quello che fissa  $\mathbb{Z}_5$ , in entrambi i casi uno dei fattori a sinistra del prodotto semidiretto commuta anche col fattore di destra, siamo così autorizzati a raccoglierlo all'esterno per ottenere, rispettivamente,  $D_5 \times \mathbb{Z}_3$  e  $D_3 \times \mathbb{Z}_5$ .

Se invece  $P_5$  fosse normale?

## G.12 Lemmini ed esercizietti

1. Dati

$$H \triangleleft K \triangleleft G$$

quali inclusioni devono essere caratteristiche per far sì che  $H$  sia normale o caratteristico in  $G$ ?

2. Sia  $G$  un gruppo di ordine  $2d$ , dove  $d$  è dispari. Allora esiste un sottogruppo di indice 2.

Il Teorema di Cayley ci fornisce l'immersione seguente, per prodotto sinistro

$$\Phi: G \hookrightarrow S_{2d}$$

$$g \mapsto \varphi_g: x \mapsto gx$$

Dato un elemento  $g$ , conosciamo la decomposizione in cicli  $\varphi_g$ , questa dev'essere prodotto di cicli del tipo

$$(x \ gx \ \dots \ g^{m-1}x)$$

al variare di  $x$  in un opportuno sistema di rappresentanti e dove  $m$  è l'ordine di  $g$ . Per il Teorema di Cauchy esiste un elemento di ordine 2, che avrà come immagine il prodotto di  $d$  2-cicli. Pertanto  $G \not\leq A_{2d}$  e quindi

$$[G : G \cap A_{2d}] = 2$$

3. Sia  $G$  un gruppo finito. Se esiste un sottogruppo  $H < G$  di indice  $n$ , allora esiste un sottogruppo normale  $N \triangleleft G$  di indice divisore di  $n!$ .

4. Sia  $G$  un gruppo semplice e finito. Se esiste un sottogruppo  $H < G$  di indice  $n$ , allora esiste un'immersione di  $G$  in  $A_n$ .

Facendo agire  $G$  per moltiplicazione sinistra sull'insieme degli  $n$  laterali di  $H$  otteniamo un omomorfismo

$$\Phi: G \rightarrow A_n$$

il cui nucleo dev'essere però banale, per non contraddire la normalità di  $G$ . Ovviamente l'omomorfismo non è banale, dunque  $\Phi$  è un'immersione.

5. Un gruppo di ordine 112 non è semplice.

6. Un gruppo di ordine 144 non è semplice.

7. Quanti sono i  $p$ -sylo di  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ?

8. Dato un gruppo di ordine  $|G| = p^3$

(a) dimostrare che  $|Z(G)| = p$ .

(b) dimostrare che  $G' = Z(G)$ .

(c) contare il numero di classi di coniugio.

9. In un  $p$ -gruppo, il centro di uno stabilizzatore di un elemento non nel centro è più grande del centro di tutto il gruppo.

10.  $\mathbb{Z}_n^\times$  è ciclico se e solo se  $n = 2, 4, p^n, 2p^n$ .



## A Anelli

### A.1 Prime definizioni

Per "Anello" si intende un anello commutativo con identità.

**Definizione A.1** (Divisori di 0). Un elemento di un anello  $x \in A$  si dice *divisore di zero* quando

$$\exists y \in A \quad \text{tale che} \quad yx = 0$$

Un anello  $A$  si dice *dominio d'integrità* quando l'unico divisore di zero è lo 0 stesso

$$\mathcal{D} := \{\text{divisori di zero}\} = \{0\}$$

**Definizione A.2** (Nilpotenza). Un elemento di un anello  $x \in A$  si dice *nilpotente* quando

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad x^n = 0$$

Un anello  $A$  si dice *ridotto* quando l'unico elemento nilpotente è 0

$$\mathcal{N} := \{\text{nilpotenti}\} = \{0\}$$

**Teorema A.3** (Prime proprietà). *Valgono queste proprietà*

1.  $A^\times$  è un gruppo moltiplicativo.
2.  $A^\times \cap \mathcal{D} = \emptyset$ .
3. Se  $A$  è finito  $A = A^\times \sqcup \mathcal{D}$ .

*Osservazione.* Un dominio d'integrità finito è un campo.

#### A.1.1 Anelli di polinomi

Dato un anello  $A$ , consideriamo il corrispondente anello dei polinomi a coefficienti in  $A$ :

$$A[x] = \{a_0 + \dots + nx^n \mid a_k \in A\}$$

**Quali sono gli elementi nilpotenti di  $A[x]$  ?**

Prendiamo un polinomio nilpotente

$$f = a_0 + \dots + a_n x^n$$

e osserviamo che il termine di grado maggiore in  $f^k$  è  $a_n^k x^{nk}$ . Quindi, affinché  $f$  sia nilpotente,  $a_n$  dev'essere nilpotente in  $A$  e pertanto  $a_n x^n$  sarà nilpotente in  $A[x]$ . Osserviamo che *la somma di elementi nilpotenti è nilpotente*:

$$a^n = 0, b^m = 0 \quad \Rightarrow \quad (a + b)^{n+m} = 0$$

per concludere che anche  $f - a_n x^n$  sarà nilpotente, e quindi, iterando

$$f \in \mathcal{N}(A[x]) \quad \Leftrightarrow \quad a_0, \dots, a_n \in \mathcal{N}(A)$$

La freccia inversa è banale: elevando il polinomio a una potenza sufficientemente alta, otteniamo prodotti di potenze dei coefficienti tali che in ogni prodotto compare almeno un coefficiente con potenza maggiore del suo indice di nilpotenza.

**Quali sono gli elementi invertibili di  $A[x]$  ?**

Procediamo come prima, prendendo un polinomio invertibile

$$f = a_0 + \dots + a_n x^n$$

e il suo inverso

$$g = b_0 + \dots + b_m x^m \quad \text{tale che} \quad fg = 1$$

e osserviamo le relazioni tra i coefficienti di  $fg$  e quelli dei fattori:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 b_0 \\ 0 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ &\vdots \\ 0 &= a_n b_{m-2} + a_{n-1} b_{m-1} + a_{n-2} b_m \\ 0 &= a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m \\ 0 &= a_n b_m \end{aligned}$$

Innanzitutto,  $a_0$  e  $b_0$  sono invertibili. Moltiplicando la penultima relazione per  $a_n$  otteniamo

$$0 = a_n^2 b_{m-1} + a_n a_{n-1} b_m = a_n^2 b_{m-1}$$

moltiplicando la terzultima per  $a_n^2$

$$0 = a_n^3 b_{m-2}$$

e iterando

$$0 = a_n^{m+1} b_0$$

ma  $b_0$  è invertibile, quindi non può essere un divisore di zero, pertanto  $a_n^{m+1} = 0$ . Procedendo come prima

$$f \in A[x]^\times \quad \Leftrightarrow \quad a_0 \in A^\times \text{ e } f - a_0 \in \mathcal{N}(A[x])$$

Per la freccia inversa scriviamo

$$f = a_0 + g \quad \text{con } a_0 \in A^\times \text{ e } g \in \mathcal{N}(A[x])$$

e consideriamo i polinomi

$$h_m(x) = a_0^{2m} - a_0^{2m-1} g + a_0^{2m-2} g^2 + \dots + g^{2m}$$

che moltiplicati per  $f$  restituiscono

$$f h_m = a_0^{2m+1} + g^{2m+1}$$

scelto  $m$  maggiore dell'indice di nilpotenza di  $g$ , abbiamo che

$$a_0^{-(2m+1)} f h_m = 1$$

**Quali sono i divisori di zero in  $A[x]$  ?**

Prendiamo un polinomio divisore di zero

$$f = a_0 + \dots + a_n x^n$$

e un polinomio

$$g = b_0 + \dots + b_m x^m \quad \text{tale che} \quad fg = 0$$

di grado minimo possibile. Consideriamo, al variare di  $0 \leq k \leq n$ , i prodotti  $a_k q$ . Se questi non sono tutti nulli, consideriamo il più grande  $k$  tale che

$$a_k q \neq 0$$

Allora

$$0 = fg = (a_0 + \dots + a_k x^k)(b_0 + \dots + b_m x^m)$$

osserviamo che i coefficienti del termine di grado massimo è

$$a_k b_m = 0$$

e quindi

$$p \cdot (a_k q) = 0$$

ma  $\deg a_k q < \deg q$ , quindi dobbiamo avere necessariamente che  $a_k q = 0 \forall k$ , quindi che  $a_k b_0 = 0 \forall k$ , ossia

$$f \in \mathcal{D}(A[x]) \quad \Leftrightarrow \quad \exists b \neq 0 \in A \mid ba_k = 0 \quad \forall k$$

## A.2 Fatti su Ideali

**Definizione A.4** (ideale). Chiamiamo *ideale* un sottogruppo additivamente chiuso  $I \subseteq A$  che assorbe per moltiplicazione.

*Osservazione.* Abbiamo una bella caratterizzazione degli ideali propri

$$I \subsetneq A \Leftrightarrow I \cap A^\times = \emptyset \Leftrightarrow 1 \notin I$$

(è quasi completamente ovvia guardando la contronominale)

*Osservazione.* Un campo  $\mathbb{K}$  ha solo ideali banali.

**Definizione A.5** (Omomorfismo). Una funzione tra due anelli  $A$  e  $B$  è detta omomorfismo di anelli se

1. è omomorfismo dei rispettivi gruppi additivi.
2.  $f(ab) = f(a)f(b)$
3.  $f(1_A) = f(1_B)$

**Teorema A.6** (di omomorfismo). *Dato un omomorfismo di anelli  $f$  e un ideale  $I \subseteq \ker f$ , esiste ed è unico l'omomorfismo  $\bar{f}$  che fa commutare il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ A/I & & \end{array}$$

*Dimostrazione.* Come per l'analogo teorema sui gruppi, consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} \bar{f}: A/I &\rightarrow B \\ a+I &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

e verifichiamo che è ben definita e un omomorfismo. ♣

*Osservazione.* Gli ideali sono tutti e soli i nuclei di omomorfismi.

**Teorema A.7** (di corrispondenza). *Ogni proiezione*

$$\Pi: A \rightarrow A/I$$

*induce una relazione biunivoca tra gli ideali del quoziente e gli ideali di  $A$  che contengono  $I$*

$$\{\text{ideali di } A/I\} \leftrightarrow \{\text{ideali di } A \text{ che contengono } I\}$$

*che preserva:*

- l'ordinamento indotto dall'inclusione.
- l'indice.
- primalità e massimalità.

*Dimostrazione.* Osserviamo che la controimmagine di un ideale è sempre un ideale. Infatti, preso  $J \subseteq A/I$ , osserviamo che e la sua controimmagine  $f^{-1}(J)$  assorbe per prodotto

$$f(af^{-1}(J)) = f(a)J = J \Rightarrow af^{-1}(J) = f^{-1}(J)$$

ed è additivamente chiusa

$$f(i+j) = f(i) + f(j) \in J \quad \forall i, j \in f^{-1}(J)$$

Inoltre ogni ideale contiene lo 0, quindi la controimmagine contiene  $\ker f = I$ . Ci basta mostrare che l'immagine di ogni ideale, attraverso un omomorfismo suriettivo, è ancora un ideale. ♣

*Osservazione.* Vale sempre che

$$IJ \subseteq I \cap J$$

c'è uguaglianza in caso di *comassimalità*

$$I + J = A \Rightarrow IJ = I \cap J$$

*Dimostrazione.* Dato l'assorbimento per moltiplicazione

$$IJ \subseteq J, \quad JI \subseteq I \Rightarrow IJ \subseteq I \cap J$$

Se  $I, J$  sono comassimali, allora

$$I + J = A \Rightarrow \exists i \in I, j \in J \text{ tali che } i + j = 1$$

e per ogni elemento  $x \in I \cap J$  si ha che

$$x = xi + xj \in IJ$$

perché entrambi gli addendi appartengono a  $IJ$ . ♣

**Teorema A.8** (cinese degli anelli). *Dati due ideali  $I, J \subseteq A$  comassimali, si ha che*

$$A/IJ \cong A/I \times A/J$$

*Dimostrazione.* La mappa

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow A/I \times A/J \\ a &\mapsto (a+I, a+J) \end{aligned}$$

è un omomorfismo di nucleo

$$\ker f = I \cap J$$

Inoltre  $f$  è suriettivo se e solo se  $I + J = A$ : se  $f$  è suriettivo, prendiamo un elemento  $a$  nella controimmagine di  $(1+I, 1+J)$ , ossia un elemento tale che  $a-1 \in I$  e  $a \in J$ . Pertanto

$$a-1=i \Rightarrow 1=a+i \in I+J$$

Se invece  $1 \in I+J$ , allora possiamo trovare due elementi tale che

$$1 = i + j$$

e scelta una qualunque coppia  $(x+I, y+J)$ , abbiamo che

$$y + j(x-y) = xj + yi = x + i(y-x)$$

Dunque, se  $I + J = A$ , abbiamo  $\ker f = I \cap J = IJ$  per l'osservazione di sopra. ♣

**Definizione A.9** (ideale primo). Un ideale  $I \subseteq A$  si dice *primo* quando

$$\forall x, y \in A \quad xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ o } y \in I$$

**Definizione A.10** (ideale massimale). Un ideale  $I \subseteq A$  si dice *massimale*, se è massimale rispetto all'inclusione tra gli ideali propri di  $A$ .

**Teorema A.11.** *Dato un ideale  $I \subseteq A$ , valgono le seguenti relazioni con il rispettivo anello quoziente:*

$$I \text{ è primo} \Leftrightarrow A/I \text{ è un dominio}$$

$$I \text{ è massimale} \Leftrightarrow A/I \text{ è un campo}$$

*Dimostrazione.* Per la prima proposizione, osserviamo che

$$xy \in I \Leftrightarrow \pi(xy) = 0 \Leftrightarrow \pi(x)\pi(y) = 0$$

e osserviamo che allora

$$\pi(x)\pi(y) = 0 \Leftrightarrow \pi(x) = 0 \text{ o } \pi(y) = 0$$

è equivalente a

$$xy \in I \Leftrightarrow x \in I \text{ o } y \in I$$

Per la seconda, ci basta invocare il teorema di corrispondenza e ricordare che un anello è anche un campo se e solo se ha solo ideali banali. ♣

*Osservazione.*  $A$  è un dominio se e solo se l'ideale  $\{0\}$  è primo.

*Osservazione.*  $A$  è un campo se e solo se l'ideale  $\{0\}$  è massimale.

*Osservazione.* Un ideale massimale è anche primo, perché ogni campo è anche un dominio.

### A.2.1 Fatti sul radicale

#### Definizione A.12.

$$\sqrt{I} := \{x \in A \mid x^n \in I\}$$

1.  $\sqrt{I}$  è un ideale.  
(Infatti è un sottoinsieme additivamente chiuso

$$a^n \in I, b^m \in I \Rightarrow (a+b)^{n+m} \in I$$

e assorbente per moltiplicazione

$$a^n \in I \Rightarrow (sa)^n = s^n a^n \in sI = I$$

2.  $I \subseteq \sqrt{I}$ .
3.  $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ .  
(Osserviamo che

$$I \subseteq J \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$$

dunque

$$\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$$

dove le prime due inclusioni sono conseguenza dell'osservazione di sopra, mentre l'ultima si ottiene da

$$a^n \in I, b^m \in J \Rightarrow (ab)^{m+n} \in I \cap J$$

4.  $\sqrt{I} = A$  se e solo se  $I = A$ .
5. Se  $P$  è un ideale primo, allora  $\sqrt{P} = P$ .  
(Se  $x^n \in P$ , ho  $x = x \cdot x \cdots x$  per  $n$  volte e almeno uno dei fattori sta in  $P$ )
6.  $\mathcal{N} = \bigcap_{P \subseteq A} P$ .  
(Chiaramente se  $x$  è nilpotente  $x^n \in P$  per ogni ideale primo  $P$ .

Mostriamo che, viceversa, se  $x$  appartiene a tutti gli ideali primi allora è nilpotente. Ragioniamo per assurdo: fissato  $x$  nell'intersezione, assumiamo

$$x^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideriamo la famiglia di ideali

$$\mathcal{F} = \{I \subseteq A \mid x^n \notin I \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Osserviamo che per ipotesi  $0 \in \mathcal{F}$ , quindi la famiglia non è vuota. Inoltre è induttiva! (L'unione di una catena di ideali è un ideale e la proprietà di famiglia si conserva). Dunque, per il Lemma di Zorn, abbiamo un ideale  $P$  massimale in  $\mathcal{F}$ .

Mostriamo che  $P$  deve essere primo, giungendo all'assurdo. Preso  $ab \in P$  se uno degli ideali

$$P + (a) \quad P + (b)$$

appartenesse alla famiglia  $\mathcal{F}$ , allora sarebbe sottoinsieme di  $P$  (e dunque  $a \in P$ ). Se nessuno dei due appartenesse alla famiglia, allora

$$x^n \in P + (a) \quad x^m \in P + (b)$$

ma

$$x^{n+m} \in (P + (a))(P + (b)) = P$$

che dunque dev'essere primo.)

7.  $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$ .  
(Il radicale sono i nilpotenti del quoziente, il fatto segue dal teorema di corrispondenza.)

### A.2.2 Prodotto diretto tra anelli

Il prodotto cartesiano tra due anelli  $A \times B$ , con le operazioni ovvie, è ancora un anello. Inoltre, se ne nessuno dei due è banale

$$(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$$

non è un dominio.

I nilpotenti nel prodotto

$$\mathcal{N}_{A \times B} = \mathcal{N}_A \times \mathcal{N}_B$$

Gli invertibili

$$(A \times B)^\times = A^\times \times B^\times$$

Fatto piacevole: gli ideali sono tutti e soli i prodotti di ideali. Prendiamo  $I \subseteq A \times B$  e consideriamo le proiezioni  $\pi_A$  e  $\pi_B$ . Queste sono omomorfismi suriettivi, quindi  $\pi_A(I)$  è un ideale di  $A$ . Basta ora far vedere che  $\pi_A(I) \times \pi_B(I) \subseteq I$ , perché l'inclusione opposta è un fatto insiemistico. Se  $(a, y), (x, b) \in I$ , deve starci anche  $(a, b)$ : ma  $(1, 0)(a, y) = (a, 0) \in I$ , analogamente  $(0, b) \in I$ , dunque

$$(a, 0) + (0, b) \in I$$

### A.2.3 Estensione e Contrazione di Ideali

Dati due anelli, ognuno col proprio ideale  $I \subseteq A$  e  $J \subseteq B$ , e un omomorfismo  $f$  tra i due

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ I & & J \end{array}$$

Dalla dimostrazione del teorema di Corrispondenza (A.7), aappiamo che

1.  $f^{-1}(J)$  è sempre un ideale.
2.  $f(I)$  è un ideale se e solo se l'omomorfismo è suriettivo.

**Definizione A.13.** Chiamiamo ideale contratto  $J^c$  la sua controimmagine

$$J^c = f^{-1}(J)$$

**Definizione A.14.** Chiamiamo ideale esteso  $I^e$  il generato dalla sua immagine

$$I^e = (f(I))$$

Poiché possiamo spezzare la mappa  $f$  passando per il quoziente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \varphi & \\ A/\ker f & & \end{array}$$

e il comportamento degli ideali attraverso la proiezione  $\pi$  è completamente determinato dal Teorema di Corrispondenza (A.7), possiamo limitarci a studiare cosa succede attraverso l'omomorfismo  $\varphi$ , che essendo iniettivo possiamo scambiare con l'omomorfismo di inclusione.

Prendiamo quindi  $A \subseteq B$ , abbiamo

1.  $J^c = J \cap A$
2.  $I^e = (I)$

**Teorema A.15.** La contrazione di un ideale primo è ancora un ideale primo.

*Dimostrazione.*  $J$  è primo se e solo se  $B/J$  è un dominio. Consideriamo la mappa composizione

$$\varphi : A \hookrightarrow B \rightarrow B/J$$

questa è un omomorfismo di nucleo

$$\ker \varphi = J \cap A = J^c$$

Dunque per il primo teorema di omomorfismo esiste un omomorfismo iniettivo

$$A/J^c \hookrightarrow B/J$$

e i sottoanelli di domini sono a loro volta domini. ♣

Teoremi analoghi con ideali massimali, o estensioni, non funzionano. Controesempio?

## A.3 Domini

### A.3.1 Campo dei quozienti. $\mathbb{Q}(A)$

**Definizione A.16.** Un insieme  $S$  di elementi di un dominio  $A$  è detto *parte moltiplicativa* se

1. è moltiplicativamente chiuso
2.  $1 \in S$
3.  $0 \notin S$

*Osservazione.*  $A$  è dominio se e solo se  $A - \{0\}$  è parte moltiplicativa.

Costruiamo il campo dei quozienti del dominio  $A$  come il quoziente di  $A \times (A \setminus \{0\})$  per la relazione di equivalenza

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Denotiamo questo insieme con  $\mathbb{Q}(A)$ . Indichiamo i suoi elementi come  $\frac{a}{b}$  e definiamo la somma e il prodotto in modo che

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

*Osservazione.*  $(\mathbb{Q}(A), +, \cdot)$  sopra definito è un campo e

$$\begin{aligned} q: A &\hookrightarrow \mathbb{Q}(A) \\ a &\mapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

è omomorfismo iniettivo.

**Teorema A.17.**  $(\mathbb{Q}(A), +, \cdot)$  è il più piccolo campo in cui possiamo immergere  $A$ . Nel senso che l'immersione di  $A$  in un campo  $\mathbb{K}$  si estende all'immersione di  $\mathbb{Q}(A)$  in  $\mathbb{K}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \\ q \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ \mathbb{Q}(A) & & \end{array}$$

*Dimostrazione.* L'estensione è naturale

$$\bar{\varphi}: \frac{a}{b} \mapsto \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$$

Una volta verificato che è un omomorfismo, questo dev'essere necessariamente iniettivo perché  $\mathbb{Q}(A)$  è un campo, pertanto ha solo ideali banali. ♣

### A.3.2 Divisibilità.

In modo naturale, diciamo che  $a \mid b$  se esiste  $c$  tale che  $b = ac$ . E' immediato tradurre la relazione di divisibilità in termini di ideali generati, infatti

$$a \mid b \Leftrightarrow (b) \subseteq (a)$$

**Definizione A.18.** Diciamo che due elementi  $a, a' \in A$  sono *associati* quando si dividono vincendevolmente

$$(a) = (a') \Leftrightarrow a' = au \text{ per } u \in A^\times$$

lo indicheremo con  $a \sim a'$ .

Possiamo definire il MCD tra due elementi  $a, b$  come quegli elementi  $d$  tali che

1.  $d \mid a$  e  $d \mid b$ .
2. Se  $c \mid a$  e  $c \mid b$ , allora  $c \mid d$ .

è immediato osservare che gli MCD di una coppia sono associati.

**Definizione A.19 (Primo).** Diciamo che un elemento non invertibile e non nullo  $x \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$  è *primo* se

$$x \mid ab \Rightarrow x \mid a \text{ o } x \mid b$$

**Definizione A.20 (Irriducibile).** Diciamo che un elemento non invertibile e non nullo  $x \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$  è *irriducibile* se

$$x = ab \Rightarrow a \in A^\times \text{ o } b \in A^\times$$

I seguenti risultati sono la semplice traduzione delle ultime definizioni nel linguaggio degli ideali:

**Teorema A.21.** Un elemento  $x$  è primo se e solo se l'ideale da lui generato  $(x)$  è primo e non banale.

$$x \text{ è primo} \Leftrightarrow (x) \text{ è primo} \neq \{0\}$$

**Teorema A.22.** Un elemento  $x$  è massimale se e solo se l'ideale da lui generato  $(x)$  è massimale tra i principali.

$$x \text{ è irriducibile} \Leftrightarrow (x) \text{ è massimale tra i principali}$$

**Teorema A.23.** Ogni elemento primo è anche irriducibile.

$$x \text{ è primo} \Rightarrow x \text{ è irriducibile}$$

## A.4 Esercizi Notevoli

**Un solo esercizio in algebra non commutativa.**

- Chi sono gli ideali di  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ?

**Serie Formali.**

- $f \in K[[x]]$  è invertibile se e solo se  $a_0 \neq 0$ .

- $(x)$  è l'unico ideale massimale

- $\deg(f) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$  è una funzione grado.

**Parti Moltiplicative.**

-

## A.5 Domini Speciali

Diamo un po' di definizioni insieme

**Definizione A.24.** Ci piacciono i seguenti domini speciali:  
 (UFD) Ogni elemento non nullo e non invertibile si scrive in modo unico come prodotto di irriducibili.  
 (PID) Tutti gli ideali sono principali.  
 (ED) Esiste una funzione grado

$$d: A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

tale che

1.  $d(a) \leq d(ab)$  su tutti i valori in cui è definita.
2. Presi comunque due elementi  $a, b$  con  $b \neq 0$  esistono  $q, r$  tali che

$$a = qb + r$$

e tali che  $d(r) < d(b)$  oppure  $r = 0$ .

**Esempi.**

1.  $\mathbb{Z}$  con la funzione  $|\cdot|$  è un dominio euclideo.
2.  $\mathbb{K}[x]$  con la funzione  $\deg(\cdot)$  è un dominio euclideo.
3.  $\mathbb{Z}[i]$  con la norma  $N(x) = x\bar{x}$  è un dominio euclideo.

**Teorema A.25.** Vale la seguente catena di implicazioni

$$(\text{ED}) \Rightarrow (\text{PID}) \Rightarrow (\text{UFD})$$

**Controesempi.**

- $\mathbb{Z}[x]$  è PID ma non è ED.

### A.5.1 Dominio Euclideo

**Teorema A.26.** Gli elementi invertibili sono tutti e soli quelli di grado minimo.

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che ha senso parlare di grado minimo, poiché l'immagine del grado è un sottoinsieme non vuoto dei naturali.

Se  $x$  è invertibile, per ogni  $a \in A$  non nullo

$$d(x) \leq d(x)d(ax^{-1}) \leq d(x \cdot ax^{-1}) = d(a)$$

e se per sbaglio  $d(ax^{-1}) = 0$ , allora lo stesso vale per il grado di  $x^{-1}$  e quindi di  $x$ .

Viceversa, sia  $x$  un elemento di grado minimo e  $a$  un elemento qualunque. Abbiamo che

$$a = qx + r$$

e, escludendo  $d(r) < d(x)$ , dobbiamo avere che  $r = 0$ . Quindi  $x$  divide ogni elemento ed è pertanto invertibile. ♣

**Teorema A.27.** Esiste il MCD e lo possiamo calcolare con l'algoritmo di Euclide.

**Teorema A.28.**  $(\text{ED}) \Rightarrow (\text{PID})$

*Dimostrazione.* Prendiamo un ideale  $I$  di un ED e sia  $x$  il suo elemento di grado minimo. Vogliamo dimostrare che

$$I = (x)$$

per assurdo. Supponiamo che esista  $y \in I$  tale che

$$x = qy + r$$

con  $r \neq 0$ , abbiamo allora necessariamente che  $d(r) < d(x)$ . Purtroppo però

$$r = x - qy \in I$$

contraddice la minimalità di  $x$ . ♣

**Controesempio?**

### A.5.2 Dominio a Ideali Principali

*Osservazione.* Il MCD( $a, b$ ) esiste: è il generatore dell'ideale

$$(a, b) = (d)$$

**Teorema A.29.** Gli ideali primi sono anche massimali.

*Dimostrazione.*

$$(x) \text{ primo} \Rightarrow x \text{ è un elemento primo} \quad (\text{A.21})$$

$$\Rightarrow x \text{ è irriducibile} \quad (\text{A.23})$$

$$\Rightarrow (x) \text{ è massimale tra gli ideali primi} \quad (\text{A.22})$$

$$\Rightarrow (x) \text{ è massimale} \quad (\text{PID})$$



*Osservazione.* Ripercorrendo la catena di implicazioni sopra, ci si accorge che abbiamo mostrato anche l'equivalenza tra le definizioni di irriducibile e primo nei PID.

### A.5.3 Dominio a Fattorizzazione Unica

**MCD.** Negli anelli UFD l'MCD( $a, b$ ) esiste, perché possiamo caratterizzarlo attraverso la fattorizzazione, come sugli interi. Però non è detto che appartenga all'ideale  $(a, b)$ . Per esempio: in  $\mathbb{Z}[x]$  abbiamo che  $(2, x) = 1$  ma non esistono polinomi  $f, g$  tali che

$$1 = 2f + xg$$

infatti valutando l'espressione in 0 otteniamo  $1 = 2f(0)$ .

**Teorema A.30** (Caratterizzazione degli UFD). Un dominio  $A$  è UFD se e solo se valgono le seguenti condizioni

1. irriducibile  $\Rightarrow$  primo
2. Ogni catena discendente di divisibilità è stazionaria.

*Dimostrazione.* Cominciamo con la freccia più interessante. La proprietà 2 ci garantisce l'esistenza della fattorizzazione. Ragioniamo per assurdo: prendiamo  $x \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$  e supponiamo che non ammetta fattorizzazione. Non può essere irriducibile, altrimenti avremmo trovato una fattorizzazione, pertanto si può scrivere come

$$x = y_0 z_0 \quad \text{con } y_0, z_0 \notin A^\times$$

Però questa non può essere una fattorizzazione, pertanto uno dei due non è né irriducibile né fattorizzabile, diciamo  $y_0$ . Allora lo possiamo scrivere come

$$y_0 = y_1 z_1$$

e trovandoci nelle stesse ipotesi di prima, possiamo iterare il procedimento indefinitamente, ottenendo

$$\cdots \mid y_2 \mid y_1 \mid y_0$$

una catena discendente infinita e non stazionaria, assurdo.

La proprietà 1 ci garantisce l'unicità della fattorizzazione. Procediamo per induzione forte sulla lunghezza minima  $l_x$  della fattorizzazione di un certo elemento  $x$ . Se  $l_x = 1$  e

$$p = x = q_1 \cdots q_s$$

poiché  $p$  è irriducibile, tutti i  $q_i$  tranne uno sono invertibili e quello che si salva non può che essere associato a  $p$ . Supponiamo ora che tutti gli elementi per cui  $l_x < n$  abbiamo fattorizzazione unica e prendiamo un elemento  $x$  tale che  $l_x = n$ . Allora prese

$$p_1 \cdots p_n = x = q_1 \cdots q_s$$

sappiamo che  $p_n$  è irriducibile e quindi primo, dunque

$$p_n \mid q_1 \cdots q_s \Rightarrow \text{WLOG } p_n \mid q_s$$

poiché anche  $q_n$  è irriducibile e quindi primo, devono essere associati. Pertanto dobbiamo avere che

$$p_1 \cdots p_{n-1} = \tilde{x} = q_1 \cdots q_{s-1}$$

ma le due fattorizzazioni sono uguali per ipotesi induttiva, poiché  $l_{\tilde{x}} \leq n-1 < n$ .

Viceversa, se  $A$  è UFD, presa una catena discendente di divisibilità

$$\cdots \mid a_2 \mid a_1 \mid a_0$$

possiamo considerare gli insiemi  $A_n$  di tutti i fattori di  $a_n$  presi con molteplicità e osservare che la catena discendente

$$\cdots \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$$

si stabilizza, perché le cardinalità corrispondenti formano una catena discendente di interi.

Inoltre, preso un elemento irriducibile  $x$ , se

$$x \mid ab$$

un associato di  $x$  deve comparire nella fattorizzazione di almeno uno tra  $a$  e  $b$ , quindi  $x$  divide almeno uno dei due e pertanto soddisfa la definizione di elemento primo. ♣

*Osservazione.* Segue che PID  $\Rightarrow$  UFD

*Dimostrazione.* La prima condizione l'abbiamo già mostrata. Presa una catena discendente di divisibilità, possiamo tradurla in una catena ascendente di ideali

$$(a_0) \subseteq (a_1) \subseteq (a_2) \subseteq \cdots$$

Però l'ideale  $I = \bigcup (a_i)$  è generato da un elemento  $a$ , perché tutti gli ideali sono principali. Ma per come è definito  $I$ , l'elemento  $a$  già apparteneva a un certo  $(a_n)$ , generando lui come tutti i suoi successori. ♣

**Esempi.**

1.  $\mathbb{K}[x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \dots]$  non è UFD. Infatti

$$\cdots \mid \sqrt[8]{x} \mid \sqrt[4]{x} \mid \sqrt[2]{x} \mid x$$

è una catena discendente infinita di divisibilità.

2.  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  non è UFD. Infatti 2 è irriducibile ma non primo. Se

$$2 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})$$

in norma abbiamo una contraddizione, mentre

$$(1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}) = 2 \cdot 3$$

dunque

$$2 \mid (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$$

ma

$$4 = N(2) \nmid N(1 \pm \sqrt{-5}) = 6$$

**Definizione A.31.** Chiamiamo *contenuto* del polinomio  $f \in A[x]$  l'MCD dei suoi coefficienti

$$c(f) = \text{MCD}(a_0, \dots, a_n)$$

**Definizione A.32.** Chiamiamo *primitivo* un polinomio  $f$  con contenuto unitario

$$c(f) = 1$$

**Teorema A.33** (Lemma di Gauss). *Valgono i seguenti enunciati*

1. Il prodotto di polinomi primitivi è primitivo.

2. La funzione contenuto è completamente moltiplicativa.

3. Se  $c(f) = 1$  e  $f \mid g$  in  $\mathbb{Q}(A)[x]$ , allora  $f \mid g$  in  $A[x]$ .

4. Se  $f = hg$  in  $\mathbb{Q}(A)[x]$ , esistono  $h_1, g_1 \in A[x]$  tali che  $f = h_1 g_1$ .

*Dimostrazione.* 1. ♣

**Teorema A.34.**  $A$  è UFD  $\Rightarrow A[x]$  è UFD

*Dimostrazione.* Vogliamo utilizzare la caratterizzazione dei domini a fattorizzazione unica (A.30).

Iniziamo verificando che dato un polinomio  $f \in A[x]$  irriducibile, questo è anche primo. Ovviamente

$$c(f) \mid f \Rightarrow c(f) = f \text{ o } c(f) = 1$$

Se  $c(f) = f$ , allora  $f \in A$  e necessariamente  $f$  dev'essere irriducibile in  $A$ . Se  $c(f) = 1$ , allora  $f$  è primitivo e deve necessariamente essere irriducibile anche in  $\mathbb{Q}(A)[x]$ , altrimenti potremmo riportare la decomposizione in  $A[x]$  mediante il Lemma di Gauss. Ma  $\mathbb{Q}(A)[x]$  è un ED, pertanto  $f$  è anche primo. Quindi se  $f \mid gh$  in  $A[x]$ , naturalmente lo divide anche in  $\mathbb{Q}(A)[x]$ , dove essendo primo divide uno dei due, che quindi divide anche in  $A[x]$  (ancora una volta per Lemma di Gauss).

Mostriamo ora che ogni catena discendente di divisibilità è stazionaria. Prendiamo una sequenza di polinomi  $\{f_n\}$  tale che

$$\cdots \mid f_3 \mid f_2 \mid f_1 \mid f_0$$

Possiamo decomporre ogni polinomio nel prodotto della parte primitiva per il contenuto

$$f = c(f)f'$$

e osservare che la relazione di divisibilità è soddisfatta se e solo se lo è per componenti

$$f \mid g \Leftrightarrow c(f) \mid c(g) \text{ e } f' \mid g'$$

ci riduciamo dunque a contemplare due diverse catene discendenti di divisibilità

$$\cdots \mid c(f_3) \mid c(f_2) \mid c(f_1) \mid c(f_0)$$

stazionaria perché  $A[x]$  è UFD

$$\cdots \mid f'_3 \mid f'_2 \mid f'_1 \mid f'_0$$

stazionaria perché  $\mathbb{Q}(A)[x]$  è UFD. ♣

**Teorema A.35** (Criterio di Eisenstein). *Dato  $f \in A[x]$  primitivo e  $p \in A$  primo, se*

1.  $p \nmid a_n$ .
2.  $p \mid a_i$  per  $0 \leq i \leq n-1$ .
3.  $p^2 \nmid a_0$

*allora  $f$  è irriducibile.*

*Dimostrazione.* contenuto... ♣

**Esempi.**

1. In  $\mathbb{K}[x][t]$ , l'elemento  $f = t^n - x$  è irriducibile per il criterio di Eisenstein con  $p = x$ .
2.  $\mathbb{K}[\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}]$  non è Noetheriano

$$(x_0) \subsetneq (x_0, x_1) \subsetneq (x_0, x_1, x_2) \subsetneq \dots$$

ma è UFD. Infatti preso un polinomio  $f$ , questo è composto da un numero finito di addendi di grado finito, quindi è contenuto in  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$  per un qualche intero  $m$ , che è un ED. Qui dentro ammette fattorizzazione unica. Inoltre, nella fattorizzazione non compaiono termini del tipo  $x_k$  con  $k > m$ : se così fosse, guardandoli come polinomi in  $x_k$ , non sarebbero rispettate le condizioni sulla funzione grado.

## K Campi

### K.1 Richiami

**Definizione K.1.** Data un'estensione di campi  $K \subseteq L$  (o anche  $L/K$ ), un elemento  $\alpha \in L$  si dice *algebrico* su  $K$  quando

$$\exists f \in K[x] \quad \text{tale che} \quad f(\alpha) = 0$$

Un elemento si dice *trascendente* se non è algebrico.

**Definizione K.2.** Un'estensione di campi  $K \subseteq L$  si dice *algebrica* quando ogni elemento di  $L$  è algebrico su  $K$

**Definizione K.3.** L'indice di un'estensione  $[L : K]$  è la dimensione di  $L$  visto come  $K$  spazio vettoriale.

**Definizione K.4.** Diciamo che un'estensione  $K \subseteq L$  è *semplice* se esiste un elemento  $\alpha \in L$  tale che

$$L = K(\alpha) = \left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \mid f, g \in K[x] \quad g(\alpha) \neq 0 \right\}$$

Possiamo costruire l'estensione semplice a partire dall'anello dei polinomi su  $K$ , applicandovi l'omomorfismo di valutazione in  $\alpha$

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : K[x] &\rightarrow K[\alpha] \subseteq L \\ f(x) &\mapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

l'immagine  $K[\alpha]$  è un sottoanello di un campo ed è quindi un dominio, di cui possiamo costruire il campo dei quozienti

$$\mathbb{Q}(K[\alpha]) = K(\alpha)$$

Possiamo però mostrare che, se  $\alpha$  è algebrico, questa operazione non è necessaria. Infatti, il nucleo dell'omomorfismo di valutazione è costituito da tutti quei polinomi che si annullano in  $\alpha$ , i quali costituiscono un ideale principale (perché  $K[x]$  è ED, dunque PID):

$$\ker \varphi_\alpha = (\mu(x))$$

Abbiamo già osservato che l'immagine è un dominio, dunque  $(\mu(x))$  è un'ideale primo (A.11).

$$K[\alpha] \cong \frac{K[x]}{(\mu(x))}$$

Ma, poiché ci troviamo in un PID,  $(\mu(x))$  è anche un ideale massimale (A.29) e dunque  $K[\alpha]$  è un campo, che coincide con il proprio campo dei quozienti:

$$K[\alpha] = \mathbb{Q}(K[\alpha]) = K(\alpha)$$

In questo caso, dobbiamo avere anche che  $\mu(x)$  è un polinomio irriducibile, possiamo quindi scegliere un rappresentante privilegiato tra i generatori del nucleo:

**Definizione K.5.** Chiamiamo *polinomio minimo* di  $\alpha$  l'unico generatore monico di  $\ker \varphi_\alpha$ , che indicheremo con  $\mu_\alpha$ :

$$\ker \varphi_\alpha = (\mu_\alpha(x))$$

*Osservazione.* Nel caso di estensioni algebriche semplici

$$[K(\alpha) : K] = \deg \mu_\alpha$$

questo perché  $K[\alpha]$  è un  $K$ -spazio vettoriale di base

$$1, \alpha, \dots, \alpha^{\deg \mu_\alpha - 1}$$

**Definizione K.6.** Dato un insieme  $S \subseteq L$  definiamo

$$K(S) = \bigcap_{K \subseteq F \subseteq L} F$$

**Definizione K.7.** Chiamiamo *Torre di Estensioni* una catena di inclusioni tra campi

$$K \subseteq F \subseteq L \quad \text{o anche} \quad \begin{array}{c} L \\ | \\ F \\ | \\ K \end{array}$$

Elenchiamo ora una serie di proprietà delle torri di estensioni:

►  $L/K$  è finita  $\Leftrightarrow L/F$  e  $F/K$  sono finite

$$[L : K] = [L : F][F : K]$$

►  $L/K$  è finita  $\Rightarrow L/K$  è algebrica.

► Il viceversa è falso, si pensi a  $[\mathbb{Q} : \mathbb{Q}]$ .

►  $L/K$  algebrica e finitamente generata  $\Rightarrow$  finita.

►  $L/K$  algebrica  $\Leftrightarrow L/F$  e  $F/K$  algebriche.

**Definizione K.8.** Un campo  $\Omega$  è detto *algebricamente chiuso* quando ogni polinomio  $f \in \Omega[x]$  ammette almeno una radice in  $\Omega$ .

**Definizione K.9.**  $\bar{\Omega}$  è detta *chiusura algebrica* di  $\Omega$  se:

1.  $\bar{\Omega}$  è algebricamente chiuso.

2.  $\bar{\Omega}/\Omega$  è algebrica.

**Teorema K.10.** Ogni campo  $K$  ammette una chiusura algebrica  $\bar{K}$  e ogni due sue chiusure  $\bar{K}, \bar{\bar{K}}$  sono  $K$  isomorfe, ovvero esiste un isomorfismo

$$\varphi : \bar{K} \rightarrow \bar{\bar{K}}$$

tale che  $\varphi|_K = id$ .

**Esercizi.**

► Se  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sono le radici di  $f \in K[x]$ , allora

$$K(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \leq (\deg f)!$$

► Quante sono le  $K$ -immersioni di  $K(\alpha)$  in  $\bar{K}$ ?

► Quante sono le radici distinte di un polinomio irriducibile?



## K.2 Separabilità e Normalità

**Teorema K.11.** Sia  $K(\alpha)/K$  un'estensione algebrica. Ogni immersione

$$\varphi: K \hookrightarrow \bar{K}$$

ammette esattamente tante estensioni quante le radici di  $\mu_\alpha$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo l'estensione algebrica come quoziente

$$K(\alpha) \cong \frac{K[x]}{(\mu_\alpha)}$$

e definiamo l'estensione a partire da  $K[x]$  in modo che

$$\begin{aligned}\Phi: K[x] &\rightarrow \bar{K} \\ 1 &\mapsto 1 \\ x &\mapsto \beta\end{aligned}$$

imponendo che il nucleo corrisponda con l'ideale generato dal polinomio minimo di  $\alpha$

$$(\mu_\alpha) = \ker \Phi = \{p \in K[x] \mid \varphi(p)(\beta) = 0\}$$

otteniamo una mappa iniettiva, come cercato. Dobbiamo pertanto scegliere  $\beta$  tra le radici di  $\varphi(\mu_\alpha)$ ; facendolo siamo sicuri che

$$(\mu_\alpha) \subseteq \ker \Phi$$

ed essendo  $(\mu_\alpha)$  massimale e l'immagine non banale (perché stiamo quantomeno immergendo il campo), otteniamo

$$(\mu_\alpha) = \ker \Phi$$



*Osservazione.* Il teorema si generalizza facilmente per induzione ad estensioni finite. Vale inoltre un risultato analogo per estensioni infinite, che garantisce quantomeno l'esistenza dell'estensione.

**Definizione K.12** (Separabile). Un polinomio  $f \in K[x]$  si dice *separabile* se ha tutte le radici distinte in  $\bar{K}$ . Un'estensione algebrica  $L/K$  si dice *separabile* se, comunque scegliamo  $\alpha \in L$ , il corrispondente polinomio minimo  $\mu_\alpha$  è separabile.

**Teorema K.13** (Criterio della derivata). Se siamo in caratteristica 0 o su un campo finito, allora tutti i polinomi irriducibili sono separabili.

*Dimostrazione.* Consideriamo  $f$  assieme alla sua derivata formale  $f'$ . E' chiaro, per come è definita la derivata, che  $f$  ha radici multiple se e solo se ha radici in comune con  $f'$ . Consideriamo

$$\text{MCD}(f, f')$$

che, poiché  $f$  è irriducibile, può essere solo 1 o  $f$ .

Osserviamo che l'MCD di due polinomi appartiene all'anello di definizione di questi, dunque se sono coprimi

$$\exists g, h \quad fg + f'h = 1$$

pertanto lo sono a maggior ragione nell'anello costruito sulla chiusura algebrica. Così, se  $\text{MCD}(f, f') = 1$ , abbiamo finito. Altrimenti dobbiamo avere che  $f' = 0$ , ma è chiaro che questo non può succedere in caratteristica zero.

Se ci mettiamo su  $\mathbb{F}_p[X]$ , possiamo mostrare che

$$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad f = g^p$$

semplicemente scrivendo esplicitamente il polinomio e osservando che tutti i coefficienti che possono non essere nulli sono quelli dei termini  $x^{pk}$ . ♣

**Teorema K.14.** Sia  $K(\alpha)/K$  un'estensione algebrica, di grado  $n$ . Se è separabile, ogni immersione

$$\varphi: K \hookrightarrow \bar{K}$$

ammette esattamente  $n$  estensioni.

*Dimostrazione.* Il grado di  $\mu_\alpha$  è  $n$ , dunque ammette  $n$  radici distinte. ♣

*Osservazione.* Il teorema precedente si generalizza per induzione al caso di estensioni finite.

**Definizione K.15.** In un'estensione algebrica  $L/K$  si dicono *coniugati* di un elemento  $\alpha \in L$ , tutte le soluzioni del polinomio minimo  $\mu_\alpha$ .

*Osservazione.* Le estensioni  $\varphi_i$  del teorema di sopra sono proprio gli omomorfismi di coniugio, che mandano  $\alpha_1 \mapsto \alpha_i$ .

Introduciamo ora un'altra utile proprietà di alcune estensioni

**Definizione K.16** (Normalità). Un'estensione algebrica  $F/K$  si dice *normale* se, preso comunque un  $K$ -omomorfismo

$$\varphi: F \rightarrow \bar{K} \quad \text{tale che } \varphi|_K = id$$

si ha che  $\varphi(F) = F$ .

**Esempi.**

1. Tutte le estensioni di grado 2 sono normali.
2.  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$  non è normale.

**Teorema K.17.** In un'estensione  $F/K$  algebrica e normale, ogni polinomio  $f \in K[x]$  irriducibile con almeno una radice in  $F$ , ha tutte le radici in  $F$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo tutte le radici che  $f$  ammette in  $\bar{K}$ :  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Possiamo assumere WLOG che  $\alpha_1 \in F$ . Definiamo i  $K$ -omomorfismi  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  in modo che

$$\begin{aligned}\varphi_i: K(\alpha_1) &\rightarrow \bar{K} \\ \alpha_1 &\mapsto \alpha_i\end{aligned}$$

Possiamo estenderli grazie al teorema K.11 a  $K$ -omomorfismi

$$\tilde{\varphi}_i: F \rightarrow K$$

ma  $F/K$  è normale, pertanto

$$\tilde{\varphi}_i(F) = F \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

dunque  $\alpha_i \in F$  per ogni  $i$ , come volevamo. ♣

**Teorema K.18.** Sia  $F/K$  un'estensione (algebrica) finita. Questa è normale se e solo corrisponde al campo di spezzamento di una famiglia di polinomi in  $K[x]$ .

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$ . La finitezza ci dice che l'estensione è anche finitamente generata

$$F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

ci basta dunque prendere la famiglia di polinomi  $\{\mu_{\alpha_i}\}_i$  e, per il teorema precedente, questi polinomi si spezzano in  $F$ .

$\Leftarrow$ . Supponiamo che  $F$  sia il campo di spezzamento della famiglia di polinomi  $\{f_i\}_{i \in I}$ , con radici  $\{\alpha_i, j\}_{i,j}$ . Abbiamo che

$$F = K(\{\alpha_{i,j}\})$$

Preso un  $K$ -automorfismo

$$\varphi: F \rightarrow \bar{K}$$

abbiamo già osservato nella dimostrazione del teorema K.11 che questo deve necessariamente permutare i coniugati, dunque sicuramente

$$\varphi(F) \subseteq F$$

ma, visto che  $\varphi$  è iniettivo,  $\varphi(F)$  e  $F$  hanno lo stesso grado e pertanto sono la stessa estensione di  $K$ . ♣

### K.3 Teoria di Galois

**Definizione K.19.** Un'estensione  $E/K$  algebrica si dice *di Galois* se è sia normale che separabile.

(Da qui in avanti svilupperemo la Teoria di Galois per estensioni *finite*, pertanto quando diremo che un'estensione ha questa proprietà, sottointenderemo la finitezza. )

In questo caso il gruppo degli automorfismi

$$\text{Aut}_K(E) = \{\varphi : E \rightarrow E \mid \varphi_K = \text{id}\}$$

per normalità sono proprio le estensioni delle immersioni di  $K$  nella sua chiusura algebrica

$$\text{Aut}_K(E) = \{\varphi : E \rightarrow \bar{K} \mid \varphi_K = \text{id}\}$$

che, per separabilità, sono tante quante il grado dell'estensione

$$|\text{Aut}_K(E)| = [E : K]$$

e viene chiamato gruppo di Galois dell'estensione

$$\text{Gal}(E/K) := \text{Aut}_K(E)$$

Possiamo anche parlare del gruppo di Galois di un polinomio, riferendoci indirettamente al gruppo di Galois dell'estensione del suo campo di spezzamento, le due definizioni sono equivalenti per la proposizione K.18.

Pensarla in quest'ottica ci permette di procedere con una piacevole osservazione:

*Osservazione.* Il gruppo di Galois è composto da tutti e soli quegli omomorfismi che coniugano le radici di  $f$ , pertanto

$$\text{Gal}(f) \hookrightarrow S_n$$

Inoltre l'azione del gruppo su queste radici è *transitiva*, nel senso che appartengono tutte alla stessa orbita.

**Esempi.**

1. Se  $E/K$  è di grado 2 e separabile, allora è di Galois e

$$\text{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2$$

2.  $\text{Gal}(x^3 - 2) \cong S_3$

3.  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_6$ .

4.  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_3$