

## PARTE 1 – STRUMENTI

### 1.1 $G$ -moduli.

**Definizione 1.** Modulo Indotto

$$\text{Ind}_H^G(A) = \text{Hom}_H(G, A) = \{f: G \rightarrow A \mid f(hg) = hf(g) \forall h \in H\}$$

su cui agiamo a sinistra:  $g \cdot f(x) = f(xg)$ . In realtà questa era la definizione di modulo coindotto, secondo Maffei! Il grande trucco è che useremo solo gruppi finiti, per i quali le definizioni coincidono

$$\text{Ind}_H^G(A) = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} A$$

### 1.2 La Coomologia

**Teorema 1.**  $\text{Mod}_G$  ha abbastanza iniettivi.

Questo ci serve per poter definire i funtori derivati: prendiamo il funtore  $F: A \mapsto A^G$  esatto a sinistra e definiamo  $H^i(G, A) = R^i F(A)$ , il suo derivato destro.

**Teorema 2** (Proprietà fondamentali della coomologia). *Abbiamo*

1.  $H^0(G, A) = A^G$ .
2. Gli iniettivi sono aciclici.
3. Per ogni successione esatta corta, ne abbiamo una esatta lunga in coomologia.

**Teorema 3.**

$$\text{Hom}_H(B, A) = \text{Hom}_G(B, \text{Ind}_H^G(A))$$

**Teorema 4.** Gli indotti sono aciclici.

**Teorema 5.**

$$H^i(G, \varinjlim A_j) = \varinjlim H^i(G, A_j)$$

**Teorema 6.**

$$H^i(G, A) = \text{Ext}^i(\mathbb{Z}, A)$$

### 1.3 Calcolo tramite cocatene

**Teorema 7.** Otteniamo gli  $H^i$  come coomologia del complesso

$$K^0 \rightarrow K^1 \rightarrow K^2 \rightarrow \dots$$

dove  $K^i = \{f: G^i \rightarrow A\}$  e i differenziali sono i soliti.

**Teorema 8.** Se  $G$  ed  $A$  sono finiti, pure i  $K^i$  sono finiti, dunque anche gli  $H^i$ .

## 1.4 Successione spettrale di Hochschild-Serre

Se ho una mappa  $f: G' \rightarrow G$  e uno  $G$ -modulo  $A$ , ho automaticamente un funtore  $f^\times$  che "lo vede" come  $G'$ -modulo con

$$g' \cdot a = f(g') \cdot a.$$

Quando applico il funtore  $F: A \mapsto A^G$  ottengo un'inclusione

$$A^G \hookrightarrow (f^\times A)^{G'},$$

che sarà in realtà un morfismo di complessi tra risoluzioni iniettive, che ci dona una mappa funtoriale

$$f_i^*: H^i(G, ) \rightarrow H^i(G', f^\times).$$

**Definizione 2** (Restrizione). Chiamiamo

$$\text{res}: H^i(G, A) \rightarrow H^i(H, A)$$

la mappa indotta dall'inclusione naturale  $H \rightarrow G$ .

In generale, se abbiamo un  $G'$ -morfismo  $u: f^\times A \rightarrow A'$  otteniamo una mappa  $u^*$  in coomologia, che possiamo comporre con  $f^*$  tranquillamente per ottenere un morfismo funtoriale  $H^i(G, A) \rightarrow H^i(G', A')$ .

**Definizione 3** (Inflazione). Considerando ora la proiezione canonica  $f: G \rightarrow G/H$  e l'inclusione tra  $G/H$ -moduli  $u: A^H \rightarrow A$ , otteniamo la mappa funtoriale

$$\text{inf}: H^i(G/H, A^H) \rightarrow H^i(G, A).$$

**Teorema 9** (Lemma di Shapiro). Prendendo l'inclusione  $f: H \rightarrow G$  e la mappa  $u: \text{Ind}_H^G(A) \rightarrow A$  che manda ogni morfismo nel suo valore in 1, otteniamo degli **isomorfismi**

$$H^i(G, \text{Ind}_H^G(A)) \rightarrow H^i(H, A)$$

**Teorema 10** (Invarianza per automorfismi interni). Prendendo  $f = \sigma_t: G \rightarrow G$  un automorfismo interno e  $u: A \rightarrow A$  la moltiplicazione per  $t$  a sinistra, otteniamo degli isomorfismi in coomologia.

**Teorema 11.** Dalla successione spettrale

$$E_2^{p,q} = H^p(G/H, H^q(H, A)) \Rightarrow H^{p+q}(G, A)$$

otteniamo due successioni esatte che useremo tantissimo

$$0 \rightarrow H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(H, A)^{G/H} \rightarrow H^2(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^2(G, A)$$

**Teorema 12.** Se  $H^i(G, A) = 0$  per ogni  $0 < i < q$ , abbiamo

$$0 \longrightarrow H^q(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^q(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^q(H, A)^{G/H}.$$

## 1.5 Corestrizione

Definiamo una buffa norma

$$N_{G/H} : A^H \rightarrow A^G$$

$$a \rightarrow \sum_{g \in G/H} g \cdot a,$$

dopodiché prendo una risoluzione iniettiva di  $A \rightarrow I^\bullet$ , che tramite  $f^\times$  diventa una risoluzione iniettiva di  $f^\times A$ , ho così:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & f^\times A^H & \longrightarrow & (f^\times I^\bullet)^H \\ & & \downarrow N & & \downarrow N \\ 0 & \longrightarrow & A^G & \longrightarrow & (I^\bullet)^G \end{array}$$

che ci dona un meraviglioso morfismo in coomologia che chiamiamo

$$coRes : H^i(H, A) \rightarrow H^i(G, A)$$

**Teorema 13.** *Quando componiamo  $CoR \circ Res$  otteniamo la moltiplicazione per l'indice del sottogruppo*

$$\begin{array}{ccccc} H^i(G, A) & \xrightarrow{res} & H^i(H, A) & \xrightarrow{CoRes} & H^i(G, A) \\ & & \searrow \cdot [G : H] & \nearrow & \end{array}$$

Questo è piuttosto piacevole! Quando considero il sottogruppo banale  $H = \{e\}$ , scopro che

**Teorema 14.** *I gruppi  $H^i(G, A)$  sono di  $|G|$ -torsione per  $i > 0$ .*

Da cui, passando nuovamente per la descrizione in catene, scopriamo che

**Teorema 15.** *Se  $G$  è finito e  $A$  è finitamente generato, allora  $H^i$  è finito (perché finitamente generato e di torsione).*

## 1.6 Gruppi Modificati di Tate

Il funtore  $A \mapsto A/I_G A$  è esatto a destra, posso quindi prenderne il funtore derivato a sinistra, che mi definisce l'omologia  $H_i$ . A questo punto riallaccio il tutto:

$$0 \longrightarrow \hat{H}^{-1} \longrightarrow H_0 \xrightarrow{N} H^0 \longrightarrow \hat{H}^0 \longrightarrow 0$$

Mi ricavo facile che

**Teorema 16.**

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G^{ab}$$

## 1.7 Coomologia dei Gruppi Ciclici

Il risultato fondamentale è che la coomologia è semplice:  $\hat{H}^i \cong \hat{H}^{i+2}$ .

**Definizione 4** (Quoziente d'Hebrand). Vuole essere il magico numero associato alla coomologia

$$h(A) = \frac{h^0(A)}{h^1(A)}.$$

**Teorema 17** (Proprietà del Quoziente d'Hebrand). *Abbiamo che*

1. *Se ho  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  esatta e due quozienti definiti, è definito anche il terzo*
2. *Se  $A$  è finito, allora  $h(A) = 1$ .*
3. *Se ho  $f: A \rightarrow B$  con sia  $\ker$  che  $\operatorname{coker}$  finiti e uno dei due  $h$  definito, è definito anche l'altro e sono uguali.*

## 1.8 Tazza Prodotto

## PARTE 2 – COSE

## 2.1 Numeri Primi

**Lemma 17.1.**  *$G$  un  $p$ -gruppo,  $A$  di torsione  $p$ -primario.  $A^G = 0 \Rightarrow A = 0$ . [Formula delle Classi]*

**Lemma 17.2.** *Prendo  $H < G$  con  $p \nmid [G : H]$ , la nostra amica  $\text{Res}$  è iniettiva sulla componenti  $p$ -primarie.*

**Lemma 17.3.**  *$B$  indotto, allora  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$  è indotto.*

**Definizione 5.** Diciamo che un modulo  $A$  è coomologicamente banale se  $H^n(H, A) = 0$  per ogni  $H < G$  e  $n > 0$ .

Qui c'è da fare attenzione: se cambio Sylow non cambia nulla, perché nel capitolo della successione spettrale c'è scritto che gli automorfismi interni di  $G$  mi danno gruppi di coomologia isomorfi.

**Lemma 17.4.**  *$A$  è  $G$ -c.b. se e solo se è  $G_p$ -c.b. per ogni  $p$ .*

**Teorema 18.**  *$G$  un  $p$ -gruppo,  $A$  di  $p$ -torsione, esiste  $q$  per cui  $\hat{H}^q(G, A) = 0$ , allora  $A$  è **indotto!** ( $\mathbb{F}_p[G]$ -libero, in effetti)*

**Teorema 19.** *Se per ogni primo trovo  $q$  per cui*

$$\hat{H}^q(G_p, A) = \hat{H}^{q+1}(G_p, A) = 0$$

*allora  $A$  è indotto*

## 2.2 Dualità di Tate-Nakayama