Parte 1 – Strumenti

1.1 G-moduli.

Definizione 1. Modulo Indotto

$$\mathrm{Ind}_H^G(A) = \mathrm{Hom}_H(G,\, A) = \{f\colon G \to A \mid f(hg) = hf(g) \forall h \in H\}$$

su cui agiamo a sinistra: $g \cdot f(x) = f(xg)$. In realtà questa era la definizione di modulo coindotto, secondo Maffei! Il grande trucco è che useremo solo gruppi finiti, per i quali le definizioni coincidono

$$\mathrm{Ind}_H^G(A) = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} A$$

1.2 La Coomologia

Teorema 1. *Mod_G ha abbastanza iniettivi.*

Questo ci serve per poter definire i funtori derivati: prendiamo il funtore $F\colon A \mapsto A^G$ esatto a sinistra e definiamo $H^i(G, A) = R^iF(A)$, il suo derivato destro.

Teorema 2 (Proprietà fondamentali della coomologia)**.** *Abbiamo*

1. *$H^0(G,\, A) = A^G$.*
2. *Gli iniettivi sono aciclici.*
3. *Per ogni successione esatta corta, ne abbiamo una esatta lunga in coomologia.*

Teorema 3.

$$\mathrm{Hom}_H(B,\, A) = \mathrm{Hom}_G(B,\, \mathrm{Ind}_H^G(A))$$

Teorema 4.

$$H^i(G,\, \lim_{\rightarrow} A_j) = \lim_{\rightarrow} H^i(G,\, A_j)$$

Teorema 5.

$$H^i(G,\, A) = Ext^i(\mathbb{Z},\, A)$$

1.3 Calcolo tramite cocatene

Teorema 6. *Otteniamo gli H^i come coomologia del complesso*

$$K^0 \to K^1 \to K^2 \to \dots$$

dove $K^i = \{f\colon G^i \to A\}$ e i differenziali sono i soliti.

Teorema 7. *Se G ed A sono finiti, pure i K^i sono finiti, dunque anche gli H^i.*

1.4 Successione spettrale di Hochschild-Serre

Se ho una mappa $f\colon G' \to G$ e uno G-modulo A, ho automaticamente un funtore $f^\times$ che "lo vede" come G'-modulo con

$$g' \cdot a = f(g') \cdot a.$$

Quando applico il funtore $F\colon A \mapsto A^G$ ottengo un'inclusione

$$A^G \hookrightarrow (f^\times A)^{G'},$$

che sarà in realta un morfismo di complessi tra risoluzione iniettive, che ci dona una mappa funtoriale

$$f_i^\star\colon H^i(G,\ ) \to H^i(G',\, f^\times).$$

Definizione 2 (Restrizione)**.** Chiamiamo

$$Res\colon H^i(G,\, A) \to H^i(H,\, A)$$

la mappa indotta dall'inclusione naturale $H \to G$.

In generale, se abbiamo un G'-morfismo $u\colon f^\times A \to A'$ otteniamo una mappa $u^\star$ in coomologia, che possiamo comporre con $f^\star$ tranquillamente per ottenere un morfismo funtoriale $H^i(G,\, A) \to H^i(G',\, A')$.

Definizione 3 (Inflazione)**.** Considerando ora la proiezione canonica $f\colon G \to {}^G/_H$ e l'inclusione tra ${}^G/_H$-moduli $u\colon A^H \to A$, otteniamo la mappa funtoriale

$$Inf\colon H^i({}^G/_H,\, A^H) \to H^i(G,\, A).$$

Teorema 8 (Lemma di Shapiro)**.** *Prendendo l'inclusione $f\colon H \to G$ e la mappa $u\colon Ind_H^G(A) \to A$ che manda ogni morfirmo nel suo valore in 1, otteniamo degli **isomorfismi***

$$H^i(G,\, Ind_H^G(A)) \to H^i(H,\, A)$$

Teorema 9 (Invarianza per automorfismi interni)**.** *Prendendo $f = \sigma_t\colon G \to G$ un automorfismo interno e $u\colon A \to A$ la moltiplicazione per t a sinistra, otteniamo degli isomorfismi in coomologia.*

Teorema 10. *Dalla successione spettrale*

$$E_2^{p,q} = H^p({}^G/_H,\, H^q(H,\, A)) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(G,\, A)$$

otteniamo due successioni esatte che useremo tantissimo

$$0 \longrightarrow H^1({}^G/_H, A^H) \xrightarrow{Inf} H^1(G,\, A) \xrightarrow{Res} H^1(H,\, A)^{G/H} \longrightarrow H^2({}^G/_H,\, A^H) \xrightarrow{Inf} H^2(G,\, A)$$

Teorema 11. *Se $H^i(G,\, A) = 0$ per ogni $0 < i < q$, abbiamo*

$$0 \longrightarrow H^q({}^G/_H, A^H) \xrightarrow{Inf} H^q(G,\, A) \xrightarrow{Res} H^q(H,\, A)^{G/H}.$$

1.5 Corestrizione

Definiamo una buffa norma

$$\begin{aligned} N_{G/H} :& A^H \to A^G \\ a \to & \sum_{g \in G/H} g \cdot a, \end{aligned}$$

dopodiché prendo una risoluzione iniettiva di $A \to I^\bullet$, che tramite $f^\times$ diventa una risoluzione iniettiva di $f^\times A$, ho così:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & f \times A^H \arrow[r] \arrow[d, "N"] & (f^\times I^\bullet)^H \arrow[d, "N"] \\ 0 \arrow[r] & A^G \arrow[r] & (I^\bullet)^G \end{tikzcd}$$

che ci dona un meraviglioso morfismo in coomologia che chiamiamo

$$coRes \colon H^i(H,\, A) \to H^i(G,\, A)$$

Teorema 12. *Quando componiamo $CoR \circ Res$ otteniamo la moltiplicazione per l'indice del sottogruppo*

$$\begin{tikzcd} H^i(G,\, A) \arrow[r, "Res"] \arrow[rr, bend right, "\cdot[G\colon H]"'] & H^i(H,\, A) \arrow[r, "CoRes"] & H^i(G,\, A) \end{tikzcd}$$

Questo è piuttosto piacevole! Quando considero il sottogruppo banale $H = \{e\}$, scopro che

Teorema 13. *I gruppi $H^i(G,\, A)$ sono di $\mid G \mid$-torsione per $i > 0$.*

Da cui, passando nuovamente per la descrizione in catene, scopriamo che

Teorema 14. *Se G è finito e A è finitamente generato, allora H^i è finito (perché finitamente generato e di torsione).*

1.6 Gruppi Modificati di Tate

Il funtore $A \mapsto {}^{A}/_{I_G A}$ è esatto a destra, posso quindi prenderne il funtore derivato a sinistra, che mi definisce l'omologia H_i. A questo punto riallaccio il tutto:

$$0 \longrightarrow \widehat{H}^{-1} \longrightarrow H_0 \xrightarrow{N} H^0 \longrightarrow \widehat{H}^0 \longrightarrow 0$$

Mi ricavo facile che

Teorema 15.

$$H_1(G,\, \mathbb{Z}) \cong G^{ab}$$

1.7 Coomologia dei Gruppi Ciclici

Il risultato fondamentale è che la coomologia è semplice: $\widehat{H}^i \cong \widehat{H}^{i+2}$.

Definizione 4 (Queziente d'Hebrand)**.** Vuole essere il magico numero associato alla coomologia

$$h(A) = \frac{h^0(A)}{h^1(A)}.$$

Teorema 16 (Proprietà del Quoziente d'Hebrand)**.** *Abbiamo che*

1. *Se ho* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *esatta e due quozienti definiti, è definito anche il terzo*
2. *Se* A *è finito, allora* $h(A) = 1$.
3. *Se ho* $f \colon A \to B$ *con sia* $\ker$ *che coker finiti e uno dei due* h *deifnito, è definito anche l'altro e sono uguali.*

1.8 Tazza Prodotto