Dispense del corso
Teoria Analitica dei Numeri B

Riccardo Zanotto

26 settembre 2018

Indice

Indice **ii**

1 Introduzione **1**
1.1 Il problema di Erdos 1
1.2 Il problema di Waring 2
1.3 Il problema di Goldbach 3
1.4 Il metodo di Hardy-Littlewood 4

Capitolo 1

Introduzione

In questo corso tratteremo prevalentemente la teoria analitica additiva; in particolare useremo il metodo del cerchio di Hardy-Littlewood per approcciarci ai seguenti problemi:

- problema di Waring
- problema di Goldbach
- problema di Erdos, Roth, Szemeredi

1.1 Il problema di Erdos

L'ultimo problema è stato proposto da Erdos nella seguente forma:

Congettura 1.1.1 (Erdos). *Sia $E \subset \mathbb{N}$ un insieme tale che $\overline{d}(E) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\#E\cap[1,N]}{N} > 0$. Allora esistono tre elementi di E in progressione aritmetica.*

Il problema in questa forma venne risolto da Roth nel 1953; in seguito venne mostrato il seguente

Teorema 1.1.2 (Szemeredi, 1975). *Sia $E \subset \mathbb{N}$ un insieme tale che $\overline{d}(E) > 0$. Allora esistono segmenti di progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghi.*

Negli ultimi anni si è arrivati anche al seguente risultato

Teorema 1.1.3 (Green e Tao, 2004). *L'insieme dei numeri primi contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe*

1.2 Il problema di Waring

Un risultato molto importante nella teoria elementare dei numeri è il famoso "teorema dei quattro quadrati", ovvero

Teorema 1.2.1 (Lagrange, 1770)**.** *Ogni intero positivo si può scrivere come somma di al più quattro quadrati.*

Nello stesso anno, Waring propose la seguente generalizzazione:

Congettura 1.2.2 (Waring, 1770)**.** *Ogni intero positivo si scrive come somma di al più 9 cubi, 19 potenze quarte, e così via...*

Questa frase ci porta a definire il nostro oggetto di studio:

Definizione 1.2.3. Fissato k, sia $g(k)$ il minimo intero (eventualmente infinito) tale che ogni $n \in \mathbb{N}$ si può scrivere come somma di $g(k)$ potenze k-esime.

Uno dei primi risultati su $g(k)$ è un bound dal basso:

Proposizione 1.2.4 (Eulero)**.** $g(k) \geq 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2$

Dimostrazione. Sia $n_k = 2^k \cdot \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 1$; si vede facilmente che $n_k < 3^k$. Quindi per scriverlo come somma di potenze k-esime possiamo usare solamente $1^k, 2^k$.
Tuttavia $2^k \cdot \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor > n_k$, perciò possiamo usare al più $\left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 1$ volte il 2^k.
Rimane poi $n_k - 2^k \cdot \left(\left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 1 \right) = 2^k - 1$, per cui possiamo usare solo gli 1^k, e ce ne servono $2^k - 1$.
Sommando le due quantità otteniamo ul bound cercato. □

Osservazione. Sebbene questo sembri un bound banale, in realtà è molto forte: se calcoliamo il valore del bound per $2, 3, 4$ otteniamo $4, 9, 19$ che sono esattamente i valori congetturati da Waring.

Nell'ultimo secolo si è infatti dimostrato che

Teorema 1.2.5 (Mahler, 1957)**.** $g(k) = 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2$*, tranne al più un numero finito di* k*.*

Un importante risultato di inizio secolo è il seguente

Teorema 1.2.6 (Hilbert, 1909)**.** *Il numero* $g(k)$ *esiste finito per ogni intero* k*.*

Dato che lo studio di $g(k)$ è quasi completamente risolto, si è iniziata a studiare un'altra quantità

Definizione 1.2.7. Si indica con $G(k)$ il minimo intero s tale che ogni intero sufficientemente grande è scrivibile come somma di s potenze k-esime.

Osservazione. Vale ovviamente $G(k) \leq g(k)$ e quindi anche $G(k)$ è finito $\forall k$.

Lo studio di questa funzione è molto più difficile di quello di $g(k)$. Alcuni dei risultati che si hanno sono

Teorema 1.2.8 (Davenport, 1939)**.** $G(4) = 16$

Teorema 1.2.9 (Vaughan e Wooley)**.** $G(k) \leq k \log k + k \log\log k + Ck$

1.3 Il problema di Goldbach

Questo è uno dei problemi più famosi della matematica, data la semplicità dell'enunciato:

Congettura 1.3.1 (Goldbach, 1742)**.**

- *Forma forte: Ogni intero pari è esprimibile come somma di due primi.*
- *Forma debole: Ogni intero è scrivibile come somma di al più tre primi.*

Un risultato parziale è il seguente

Teorema 1.3.2 (Helfgott, 2013)**.** *Ogni intero dispari $n \geq 7$ si scrive come somma di tre primi dispari.*

Ci sono metodi "probabilistici" per vedere che asintoticamente molti numeri soddisfano la congettura.
Ad esempio, Hardy e Littlewood dimostrarono che il numero di rappresentazioni come somma di k primi è asintotico a $c_k \frac{n^2}{\log^3 n}$; tuttavia $c_2 = 0$, quindi la parte principale è un'altra. Abbiamo poi il seguente

Teorema 1.3.3. *Ogni intero positivo, tranne al più un insieme E, è somma di 2 primi; con $E \cap [1, N] = O\left(\frac{N}{\log^\alpha N}\right)$ per ogni α.*

Un'altra strada è attraverso metodi di crivello, giungendo a risultati del tipo

Teorema 1.3.4 (Chen, 1973)**.** *Ogni intero positivo sufficientemente grande è somma di un primo e di un semiprimo (ovvero di un prodotto di al più due primi).*

1.4 Il metodo di Hardy-Littlewood

Sia a_m una successione crescente di interi; siamo interessati a studiare il comportamento della quantità $R_s(n)$ che è il numero di rappresentazioni di n come somma di s termini della successione.
Introduciamo allora la serie di potenze $F(z) = \sum_{m \geq 0} z^{a_m}$. Vale allora

$$F^s(z) = \sum_{n \geq 0} z^n \cdot R_s(n)$$

Dato che F è olomorfa in $|z| < 1$, possiamo usare il teorema di Cauchy per ottenere

$$R_s(n) = \oint_{|z|=\rho} \frac{F^s(z)}{z^{n+1}} dz$$

Notazione. Definiamo $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$. Diciamo che $f \ll g$ se $f = O(g)$.