Appunti del corso
Istituzioni di algebra

Riccardo Zanotto

5 luglio 2019

Indice

Capitolo 1

Algebra commutativa

1.1 Estensioni intere

Definizione 1.1.1. Dati $A \subset B$ anelli, $b \in B$ si dice *intero su A* se esiste un polinomio monico $f \in A[t]$ tale che $f(b) = 0$.
Se $I \subset A$ è un ideale, diciamo che b è intero su I se esiste $f \in I[t]$ monico che annulla b.
Se $f : A \to B$ è morfismo di anelli con 1, $I \subset A$, diciamo che b è intero su I se lo è su I^e.

Proposizione 1.1.2. *Siano $A \subset B$, $b \in B$. Sono equivalenti:*

1. *b è intero su A.*
2. *$A[b]$ è finitamente generato come A-modulo.*
3. *$\exists C$ anello tale che $A[b] \subset C \subset B$ e C è fin. gen. come A-modulo.*
4. *$\exists M$ un $A[b]$-modulo fedele, fin. gen. come A-modulo.*

Definizione 1.1.3. Siano $A \subset B$.

- Definiamo $\overline{A}^B = \{b \in B \mid b \text{ è intero su } A\}$ la *chiusura integrale* di A in B.
- Diciamo che $A \subset B$ è *intera* se vale $\overline{A}^B = B$.
- Diciamo che $A \subset B$ è *finita* se B è un A-modulo finitamente generato.

Proposizione 1.1.4.

- *Se $b_1, \ldots, b_n \in B$ sono interi su A, allora $A[b_1, \ldots, b_n]$ è fin. gen. come A-modulo.*
- *$\overline{A}^B$ è un sottoanello di B.*

- *Un'este nsione finita è anche intera.*
- *Se $A \subset B \subset C$ con $A \subset B, B \subset C$ finite, allora anche $A \subset C$ è finita.*
- *Se $A \subset B \subset C$ con $A \subset B, B \subset C$ intere, allora anche $A \subset C$ è intera.*

Lemma 1.1.5. *Sia $A \subset B$ intera, $I \subset A$ ideale. Detto $\overline{I}^B = \{b \in B \mid b$ è intero su $I\}$, vale $\overline{I}^B = \sqrt{I^e}$.*

Proposizione 1.1.6.

- *Sia $A \subset B$ intera e $J \subset B$; allora ${}^{A}\!/\!_{J^c} \subset {}^{B}\!/\!_{J}$ è intera.*
- *Vale $\overline{S^{-1}A}^{S^{-1}B} = S^{-1}(\overline{A}^B)$*

Definizione 1.1.7. Se A è un dominio, sia K il campo dei quozienti. Si dice che A è *normale* se $\overline{A}^K = A$.

Proposizione 1.1.8. *Ogni UFD è normale.*

Teorema 1.1.9. *Sia A dominio normale, K il campo dei quozienti; sia $K \subset L$ un'estensione algebrica. Dato un $x \in L$ vale $x \in \overline{A}^L \iff \mu_x(t) \in A[t]$.*

Esempio 1.1.10. Se $A = \mathbb{Z}, K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, allora $\overline{A}^L = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & d \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] & d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$

Lemma 1.1.11. *Sia $A \subset B$ intera, con A, B domini. Allora A è un campo se e solo se B è un campo.*

Corollario 1.1.12. *Sia $A \subset B$ intera, $\mathfrak{p} \subset B$ primo. Allora $\mathfrak{p}$ è massimale se e solo se $\mathfrak{p}^c$ è massimale.*

Lemma 1.1.13. *Sia $A \subset B$ intera, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \subset B$ ideali primi. Se $\mathfrak{p}^c = \mathfrak{q}^c$ allora $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.*

Teorema 1.1.14 (lying over). *Sia $A \subset B$ intera. Allora $\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è surgettiva, ovvero per ogni $\mathfrak{p} \subset A$ esiste $\mathfrak{q} \subset B$ tale che $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Definizione 1.1.15. Sia $A \subset B$, e $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset A$ ideali primi.

- Si dice che vale il *going up* se dato $\mathfrak{q}_1 \subset B$ con $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{p}_1$, allora esiste $\mathfrak{q}_2 \supset \mathfrak{q}_1$ con $\mathfrak{q}_2^c = \mathfrak{p}_2$.
- Si dice che vale il *going down* se dato $\mathfrak{q}_2 \subset B$ con $\mathfrak{q}_2^c = \mathfrak{p}_2$, allora esiste $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ con $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{p}_1$.

Teorema 1.1.16. *Sia $A \subset B$.*

- *Se l'estensione è intera, allora $\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è chiusa.*
- *Se $\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è chiusa, allora vale il going up.*

Proposizione 1.1.17. *Sia $A \subset B$; se vale il going up e B è noetheriano, allora $\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è chiusa.*

Lemma 1.1.18. *Sia $f : A \to B$, e $\varphi : Y = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = X$; dato $\mathfrak{q} \in Y$, definiamo $Y_{\mathfrak{q}} = \{r \in Y \mid r \subset \mathfrak{q}\}$. Allora*

1. $Y_{\mathfrak{q}} = \bigcap_{\alpha \notin \mathfrak{q}} Y_\alpha$
2. $\varphi(Y_{\mathfrak{q}}) = \bigcap_{\alpha \notin \mathfrak{q}} \varphi(Y_\alpha)$

Teorema 1.1.19. *Sia $f : A \to B$ e $\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. Se φ è aperta, allora vale il going down per f.*

Teorema 1.1.20. *Sia $A \subset B$ intera con A, B domini, e A normale. Allora $\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è aperta.*

Proposizione 1.1.21. *Sia $f : A \to B$, e supponiamo che valga il going down; se A è noetheriano, allora φ è aperta.*

1.2 Dimensione

Definizione 1.2.1. La *dimensione* di un anello A è la massima lunghezza di una catena di ideali primi: se $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$, allora diciamo che $\dim A \geq n$.

Proposizione 1.2.2. *Se $A \subset B$ è intera, allora $\dim A = \dim B$.*

Teorema 1.2.3. *Sia A una k-algebra fin. gen, $A = k[y_1, \ldots, y_n]$ (le y_i sono generatori come algebra); allora esistono $x_1, \ldots, x_m \in A$ algebricamente indipendenti tali che $k[x_1, \ldots, x_m] \subset A$ è intera.*
Inoltre se $y_1, \ldots, y_n$ sono algebricamente dipendenti, allora $m < n$ e per k infinito le x_i possono essere scelte come combinazioni lineari delle y_j.

Proposizione 1.2.4. *Vale $\dim k[x_1, \ldots, x_n] = \dim k[x_1, \ldots, x_n]_f = n$ per ogni $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$.*

Definizione 1.2.5. Se A è un dominio e $k \subset A$, una *base di trascendenza* di A su k è un insieme massimale di elementi algebricamente indipendenti

Lemma 1.2.6. *Se x_α è base di trascendenza di A su k, allora l'estensione $k(x_\alpha) \subset \mathbb{Q}(A)$ è algebrica.*

Teorema 1.2.7. *Tutte le basi di trascendeza hanno la stessa cardinalità.*

Corollario 1.2.8. *Se A è una k-algebra fin. gen. e un dominio, allora* $\dim A = \operatorname{Tr}\deg_k A$.

Definizione 1.2.9. Sia $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo; definiamo

- l'*altezza* $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{p}} = \max\{n \mid \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}\}$
- la *coaltezza* $\operatorname{coht}(\mathfrak{p}) = \dim A/\mathfrak{p} = \max\{n \mid \mathfrak{p} = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n\}$

Lemma 1.2.10. *Sia A un dominio e una k-algebra fin. gen; sia $\mathfrak{p}$ un primo di altezza* 1*. Allora* $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$.

Teorema 1.2.11. *Sia A una k-algebra fin. gen. Allora*

1. *Se* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$*, allora* $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}), \operatorname{coht}(\mathfrak{p}) < \infty$.
2. *Dati* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ *due primi, ogni catena massimale* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}$ *ha lunghezza* $\operatorname{coht}(\mathfrak{p}) - \operatorname{coht}(\mathfrak{q})$.
3. *Se A è un dominio,* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$*, allora vale* $\dim A = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \operatorname{coht}(\mathfrak{p})$.

Cosa succede in dimensione bassa?

Teorema 1.2.12. *Sia A un anello. Allora A è artiniano se e solo se è noetheriano e* $\dim A = 0$.

1.3 Azione di Galois

Sia A un dominio normale, $K = \mathbb{Q}(A)$ e $L \supset K$ un'estensione di Galois con gruppo G; sia $B = \overline{A}^L$.
Definiamo $Y = \operatorname{Spec} B, X = \operatorname{Spec} A, \varphi : Y \to X$; sia poi $Y_{\mathfrak{p}} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, cioè i primi di B che stanno sopra A.

Osservazione. Se $b \in B$, allora $\sigma(b) \in B$ per ogni $\sigma \in G$.
Inoltre se $\mathfrak{q} \in Y_{\mathfrak{p}}$, allora $\sigma(\mathfrak{q}) \in Y_{\mathfrak{p}}$.

Teorema 1.3.1. *Il gruppo G agisce transitivamente sull'insieme $Y_{\mathfrak{p}}$.*

Definizione 1.3.2. Fissato un primo $\mathfrak{q} \in Y$, definiamo il *gruppo di decomposizione* $G_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}$.
Se $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$, detto $S = A \setminus \mathfrak{p}$, otteniamo un'estensione di campi $k(\mathfrak{p}) = {S^{-1}A}/{S^{-1}\mathfrak{p}} \subset {S^{-1}B}/{S^{-1}\mathfrak{q}} = k(\mathfrak{q})$

Proposizione 1.3.3. *$G_{\mathfrak{q}}$ agisce dunque su $k(\mathfrak{q})$ tenendo fisso $k(\mathfrak{p})$, e la mappa* $G_{\mathfrak{q}} \to \{\varphi : k(\mathfrak{q}) \to k(\mathfrak{q}) \mid \varphi|_{k(\mathfrak{p})} = \mathrm{id}\}$ *è surgettiva*

Lezione 18/10

1.4 Valutazioni e completamenti

Definizione 1.4.1. Sia k un campo; una mappa $v : k^* \to \mathbb{Q}$ si dice *valutazione* se rispetta

- $v(xy) = v(x) + v(y)$
- $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$

Data una valutazione si definisce $A = \{x \in k \mid v(x) \geq 0\}$ e $\mathfrak{m} = \{x \in k \mid v(x) > 0\}$ un ideale di A.
v si dice *discreta* se $\operatorname{Im} v = \mathbb{Z} \cdot q$ per qualche $q \neq 0$; in questo caso A è un DVR.

Proposizione 1.4.2. *Sia A l'anello appena definito. Allora*

- *A è anello locale con unico massimale $\mathfrak{m}$.*
- *Se v è discreta, allora A è noetheriano,* $\dim A = 1$ *e tutti gli ideali sono della forma (π^m) dove $v(\pi) = q$.*

Teorema 1.4.3. *Sia A un anello locale noetheriano, con* $\dim A = 1$. *Allora sono equivalenti:*

1. *A è un DVR*
2. *A è un dominio normale*
3. *l'ideale massimale è principale*

Osservazione. Nel caso valgano le condizioni sopra, allora $\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

Proposizione 1.4.4. *Sia $f \in \mathbb{C}[x, y]$ irriducibile, e $A = {}^{\mathbb{C}[x,y]}\!/_{(f)}$. Allora A è normale se e solo se $f = 0$ è una curva liscia, ovvero $\nabla f \neq 0$ nei punti in cui $f = 0$.*

Capitolo 2

Algebra omologica

2.1 E-strutture e H^1 di gruppi

Lemma 2.1.1. *Sia $E \subset F$ finita di Galois con gruppo Γ; V un E-spazio vettoriale.*

1. *Detto $V_F = F \otimes_E V$, Γ agisce su V_F tramite $\gamma(\lambda \otimes v) = \gamma(\lambda) \otimes v$ per $v \in V$. Valgono allora*
   - $V_F^\Gamma = V$
   - $\gamma(\lambda v) = \gamma(\lambda)\gamma(v)$ *per* $v \in V_F$
2. *Se W è un F spazio vettoriale, e Γ agisce su W in modo che $\gamma(\lambda v) = \gamma(\lambda)\gamma(v)$, allora detto $W_0 = W^\Gamma$ valgono*
   - *W_0 è un E-spazio vettoriale*
   - *la mappa $F \otimes_E W_0 \to W$ che manda $\lambda \otimes v \mapsto \lambda v$ è un isomorfismo*

Teorema 2.1.2. *Sia $E \subset F$ un'estensione di Galois infinita. Allora*

$$\mathrm{Gal}\left({}^{F}\!/_{E}\right) \cong \varprojlim_{[L:E]<\infty} \mathrm{Gal}\left({}^{L}\!/_{E}\right)$$

Definizione 2.1.3. Data $E \subset F$ di Galois, un'azione di $\mathrm{Gal}\left({}^{F}\!/_{E}\right)$ su uno spazio X è detta *continua* se $\forall x \in X\ \exists L \supset E$ finita di Galois, con $\mathrm{Gal}\left({}^{F}\!/_{L}\right) \subset \operatorname{stab} x$

Lemma 2.1.4. *Sia $E \subset F$ di Galois infinita, V un F-spazio vettoriale; supponiamo che $\Gamma = \mathrm{Gal}\left({}^{F}\!/_{E}\right)$ agisca in modo continuo su V e valga $\gamma(\lambda v) = \gamma(\lambda)\gamma(v)$; allora valgono le conclusioni del punto 2 del lemma precedente, in particolare $V \cong F \otimes_E V^\Gamma$.*

Definizione 2.1.5. Sia $E \subset F$ estensione di Galois con gruppo Γ; siano A_0, B due E-algebre, e $R = F \otimes A_0 \cong F \otimes B$. Sia $\gamma_0 = \gamma \otimes_E \mathrm{id}_{A_0}$ l'azione di Γ estesa su R, e similmente γ_B.
Sia $c : \Gamma \to \mathrm{Aut}(R)$ dato da $c_\gamma = \gamma_B \cdot \gamma_A^{-1}$.

Proposizione 2.1.6.

- *Per ogni γ, c_γ è F-lineare, quindi ho definito $c : \Gamma \to \mathrm{Aut}_F(R)$*
- *Vale $c_{\gamma\delta} = c_\gamma \circ^\gamma c_\delta$, dove ${}^\gamma\varphi = \gamma_0 \circ \varphi \circ \gamma_0^{-1}$*

Definizione 2.1.7. Definiamo $Z^1(\Gamma, \mathrm{Aut}_F(R)) = \{c : \Gamma \to \mathrm{Aut}_F(R) \mid c_{\gamma\delta} = c_\gamma \circ^\gamma c_\delta\}$.
Se $c, c' \in Z^1$, diciamo che $c \sim c'$ se $\exists f \in \mathrm{Aut}_F R$ tale che $c'_\gamma = f \circ c_\gamma \circ^\gamma f^{-1}$.
Definiamo poi $H^1(\Gamma, \mathrm{Aut}_F(R)) = Z^1(\Gamma, \mathrm{Aut}_F(R))/\sim$

Teorema 2.1.8.

$$\{E\text{-strutture di } A\}/_{\textit{isomorfismo}} \cong H^1(\Gamma, \mathrm{Aut}_F(R))$$

Sia ora G un gruppo che agisce sullo spazio X; sia Γ un gruppo che agisce su G conservando il prodotto e su X compatibilmente con G.

Definizione 2.1.9. Sia $Z^1(\Gamma, G) = \{c : \Gamma \to G \mid c_{\gamma\delta} = c_\gamma \cdot^\gamma c_\delta\}$.
Diciamo inoltre che $c \sim d$ se esiste $g \in G$ tale che $d_\gamma = g \cdot c_\gamma \cdot^\gamma (g^{-1})$.
Sia infine $H^1(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, G)/\sim$.

Proposizione 2.1.10. *Sia $1 \to H \to G \to K \to 1$ una successione esatta di gruppi su cui agisce Γ in modo compatibile con le mappe.*
Allora $1 \to H^\Gamma \to G^\Gamma \to K^\Gamma \to H^1(\Gamma, H) \to H^1(\Gamma, G) \to H^1(\Gamma, K)$ è una successione esatta di insiemi puntati.

Teorema 2.1.11 (Hilbert 90)**.** *Sia $E \subset F$ di Galois finita con gruppo Γ; sia $G = \mathrm{GL}_n(F)$ e Γ agisce su G coefficiente per coefficiente. Allora $H^1(\Gamma, \mathrm{GL}_n(F)) = \{1\}$.*

Corollario 2.1.12. *Anche $H^1(\Gamma, \mathrm{SL}_n(F)) = \{1\}$.*

Proposizione 2.1.13. *Sia $x_0 \in X^\Gamma$ e $H = \mathrm{stab}_G\, x_0$; supponiamo che G agisca transitivamente su X. Se $H^1(\Gamma, G) = \{1\}$, allora le orbite di G^Γ in X^Γ sono in bigezione con $H^1(\Gamma, H)$.*

2.2 Categorie abeliane e complessi

Definizione 2.2.1. Una categoria $\mathcal{C}$ si dice *additiva* se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, l'insieme $\mathrm{Hom}(X,Y)$ è un gruppo abeliano
- La composizione di morfismi $\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X,Z)$ è bilineare
- Esiste un oggetto zero, cioè $0 \in \mathcal{C}$ tale che $\mathrm{Hom}(X,0) = \mathrm{Hom}(0,X)$ sono il gruppo banale
- Dati $X, Y \in \mathcal{C}$ esiste il coprodotto $X \coprod Y$, definito dalla seguente proprietà universale:
$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_X"'] & X \coprod Y \arrow[u, dashed] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_Y"] \end{tikzcd}$$

Proposizione 2.2.2. *In una categoria additiva, il coprodotto è isomorfo al prodotto, e si indica con $X \oplus Y$.*

Definizione 2.2.3. Fissata una mappa $\varphi : X \to Y$, diciamo che:

- $\ell : Z \to X$ è il *nucleo* di φ se $\varphi \circ \ell = 0$ e per ogni $\alpha : U \to X$ tale che $\varphi \circ \alpha = 0$, esiste un'unica $\tilde{\alpha} : U \to Z$ che faccia commutare
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\ell"] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ & U \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ul, dashed, "\tilde{\alpha}"] & \end{tikzcd}$$
- $m : Y \to Q$ è il *conucleo* di φ se $m \circ \varphi = 0$ e per ogni $\beta : Y \to U$ tale che $\beta \circ \varphi = 0$, esiste un'unica $\tilde{\beta} : Q \to U$ che faccia commutare
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\beta"] & Q \arrow[dl, dashed, "\tilde{\beta}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Definizione 2.2.4. Una categoria additiva $\mathcal{C}$ è detta *abeliana* se per ogni mappa $\varphi : X \to Y$ esistono $\alpha = \ker\varphi$ e $\beta = \operatorname{coker}\varphi$, e inoltre $\operatorname{coker}\alpha \cong \ker\beta$ e questo oggetto si dice $\operatorname{Im}\varphi$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[r, "\beta"] & Q \\ & \operatorname{coker}\alpha \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, dashed, "\sim", "\Phi"'] & \ker\beta \arrow[u, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Proposizione 2.2.5. *In una categoria abeliana φ è un isomorfismo se e solo se* $\ker\varphi = 0$ *e* $\operatorname{coker}\varphi = 0$.

Definizione 2.2.6. La successione $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ si dice *esatta* in Y se $\psi\varphi = 0$ e vale $\operatorname{Im}\varphi \cong \ker\psi$ (o equivalentemente $\operatorname{Im}\psi \cong \operatorname{coker}\varphi$).

Proposizione 2.2.7. *In una categoria abeliana valgono lo snake lemma e il lemma dei 5.*

Teorema 2.2.8. *In realtà le categorie abeliane sono gli A-moduli...*

Complessi

Mettiamoci in una categoria abeliana $\mathcal{C}$.

Definizione 2.2.9. Una *complesso* $X^\bullet$ è una successione di oggetti e frecce

$$\dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} X^n \xrightarrow{\partial^n} X^{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}} \dots$$

tali che $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
Un *morfismo di complessi* $\varphi^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ è una successione di mappe $\varphi^n : X^n \to Y^n$ tali che tutti i quadrati commutino:

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[r, "\partial_X^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "\partial_X^n"] \arrow[d, "\varphi^n"] & X^{n+1} \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] \\
Y^{n-1} \arrow[r, "\partial_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "\partial_Y^n"] & Y^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Possiamo allora considerare le categorie $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Com}^+(\mathcal{C})$ e $\mathrm{Com}^-(\mathcal{C})$ dei complessi (eventualmente limitati in una delle due direzioni).

Proposizione 2.2.10. *Le categorie* $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Com}^+(\mathcal{C})$ *e* $\mathrm{Com}^-(\mathcal{C})$ *sono abeliane.*

Definizione 2.2.11. Sia $X^\bullet$ un complesso; definiamo $Z^n(X) = \ker(\partial^n)$ e $B^n(X) = \operatorname{Im}(\partial^{n-1})$. Definiamo poi $H^n(X) = Z^n(X)/B^n(X)$ l'n-esimo gruppo di coomologia.

Proposizione 2.2.12. *Se $\varphi^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ è morfismo di complessi, otteniamo una successione di mappe $H^n(\varphi) : H^n(X) \to H^n(Y)$.*

Teorema 2.2.13. *Sia $0 \to X^\bullet \xrightarrow{\varphi^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{\psi^\bullet} Z^\bullet \to 0$ una successione esatta di complessi. Allora la successione*

$$H^n(X) \to H^n(Y) \to H^n(Z) \xrightarrow{\omega_n} H^{n+1}(X) \to H^{n+1}(Y) \to H^{n+1}(Z)$$

è esatta.

Definizione 2.2.14. Sia $\varphi : X^\bullet \to Y^\bullet$; diciamo che $\varphi \sim 0$ è *omotopa* a 0 se esistono delle mappe $h^n : X^n \to Y^{n-1}$ tali che $\varphi^n = \partial_Y^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \partial_X^n$.

Proposizione 2.2.15. *Se* $\varphi \sim 0$*, allora vale* $H^n(\varphi) = 0$*; in particolare se vale* $\mathrm{id} \sim 0$*, allora il complesso è esatto.*

Definizione 2.2.16. Se $X^\bullet$ è un complesso, diciamo che il complesso $Y^\bullet$ è una *risoluzione iniettiva* di $X^\bullet$ se gli Y^n sono oggetti iniettivi ed esiste un morfismo di complessi $\varphi^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ che sia un isomorfismo in coomologia.

Definizione 2.2.17. Sia $A \in \mathcal{C}$ e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtore additivo, esatto a sinistra.
Sia $I^\bullet$ una risoluzione iniettiva del complesso $\ldots \to 0 \to A \to 0 \to \ldots$.
Definiamo l'i-esimo funtore derivato come $R^iF(A) = H^i(FI^\bullet)$ l'i-esimo gruppo di coomologia del complesso $0 \to FI^0 \to FI^1 \to \ldots$.

Osservazione. Verificheremo che la risoluzione iniettiva esiste, e che il funtore derivato non dipende dalla scelta della risoluzione iniettiva.

Definizione 2.2.18. Se $X^\bullet$ è un complesso, diciamo che il complesso $P^\bullet$ è una *risoluzione proiettiva* di $X^\bullet$ se i P^n sono oggetti iniettivi ed esiste un morfismo di complessi $\varphi^\bullet : P^\bullet \to X^\bullet$ che sia un isomorfismo in coomologia.

Definizione 2.2.19. Sia $A \in \mathcal{C}$ e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtore controvariante, additivo, esatto a sinistra.
Sia $P^\bullet$ una risoluzione iniettiva del complesso $\ldots \to 0 \to A \to 0 \to \ldots$.
Definiamo l'i-esimo funtore derivato come $L^iF(A) = H^i(FP^\bullet)$ l'i-esimo gruppo di coomologia del complesso $0 \to FP^0 \to FP^1 \to \ldots$.

Definizione 2.2.20. Siano X, Y oggetti; siano F, G i funtori $F = \mathrm{Hom}(X, -)$ e $G = \mathrm{Hom}(-, Y)$.
Definiamo allora $\mathrm{Ext}^i(X,Y) = R^iF(Y)$ e $\underline{\mathrm{Ext}}^i(X,Y) = L^iG(X)$.

Esempio 2.2.21. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ e scriviamo $m = dm', n = dn'$ con $d = \gcd(m,n)$.
Allora $\underline{\mathrm{Ext}}^0(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(m)) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(m)) \cong \mathbb{Z}/(d)$.

Proposizione 2.2.22. *Se* X, Y *sono oggetti, allora* $\mathrm{Ext}^i(X,Y) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^i(X,Y)$.

2.3 Coomologia di gruppi

Sia G un gruppo e R un anello commutativo con unità. Lavoreremo nella categoria degli $R[G]$ moduli, dove $R[G] = \bigoplus_{g \in G} Re_g$.

Definizione 2.3.1. Sia M un $R[G]$-modulo; definiamo $F_1(M) = M^G = \mathrm{Hom}_{R[G]}(R, M)$ e $F_2(M) = {M}/{\langle m - gm \rangle} = R \otimes_{R[G]} M$.
Definiamo $H^n(G, M) = \mathrm{Ext}^n(R, M) = R^n F_1(M)$; sappiamo però che è isomorfo a $\underline{\mathrm{Ext}}^n(R, M)$, che è il funtore derivato di $\mathrm{Hom}_{R[G]}(-, M)$.
Inoltre $H_n(G, M) = \mathrm{Tor}_n(R, M)$ il funtore derivato di F_2.

Proposizione 2.3.2 (risoluzione libera di R)**.** *Siano $P^0 = R[G], P^{-1} = R[G \times G], P^{-2} = R[G \times G \times G], \ldots$; sia $\varepsilon : P^0 \to R$ data da $\varepsilon(g) = 1$.*
Sia poi $\partial^{-n} : P^{-n} \to P^{-n+1}$ data da

$$\partial^{-n}(e_{g_0,\ldots,g_n}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_{g_0,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_n}$$

Allora la successione $0 \leftarrow R \xleftarrow{\varepsilon} P^0 \xleftarrow{\partial^{-1}} P^{-1} \xleftarrow{\partial^{-2}} \ldots$ è una risoluzione proiettiva di R.

Proposizione 2.3.3. *La mappa $\Phi_n : \mathrm{Hom}_{R[G]}(P^{-n}, M) \to \{f : G^n \to M\} =: C^n(G, M)$ data da $\Phi_n(\psi)(g_1, \ldots, g_n) = \psi(1, g_1, g_1 g_2, \ldots, g_1 \cdots g_n)$ è un isomorfismo.*
Inoltre la mappa $\delta^n_C : C^n(G, M) \to C^{n+1}(G, M)$ data da $\delta^n_C f = \Phi_{n+1}((\Phi_n^{-1} f) \circ \partial^{-n})$ ha la formula esplicita

$$\begin{aligned}(\delta^n_C f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = {} & g_1 \cdot f(g_2, \ldots, g_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i \cdot g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ & + (-1)^n f(g_1, \ldots, g_n)\end{aligned}$$

Esempio 2.3.4. Osserviamo che $(\delta^0 f)(g) = gf(1) - f(1)$ e $(\delta^2 f)(g, h) = gf(h) - f(gh) + f(g)$, ovvero $Z^1(G, M) = \{f : G \to M \mid f(gh) = f(g) + gf(h)\}$ e perciò $H^1(G, M) = {Z^1}/{\{g \mapsto gm - m\}}$, che è esattamente la definizione data nel capitolo precedente con i cocicli c_γ.

Definizione 2.3.5. Sia $f : H \to G$ un omomorfismo di gruppi e M un G-modulo. Allora $f^* M$ è un H-modulo tramite l'azione $h \cdot m = f(h)m$.
Inoltre f induce un morfismo di complessi $C^q(G, M) \to C^q(H, M)$, da cui si ottiene una mappa $Res^q : H^q(G, M) \to H^q(H, f^* M)$ in coomologia.

Definizione 2.3.6. Sia $f : H \to G$ un omomorfismo di gruppi e N un H-modulo.
Definiamo $\mathrm{Ind}_H^G N = R[G] \otimes_{R[H]} N$ che è un G-modulo tramite $g \cdot (x \otimes n) = xg \otimes n$.
Definiamo poi $\mathrm{coInd}_H^G N = \mathrm{Hom}_H(R[G], N)$, dove $R[G]$ è un H-modulo tramite l'azione $h \cdot g = gf(h^{-1})$. Questo ha una struttura di G-modulo con l'azione $(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(g^{-1} x)$.

Proposizione 2.3.7. *Sia M un G-modulo e N un H-modulo, e $f : H \to G$. Allora valgono*

- $\mathrm{Hom}_H(N, f^* M) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G, M)$
- $\mathrm{Hom}_H(f^* M, N) \cong \mathrm{Hom}_G(M, \mathrm{coInd}_H^G N)$

Proposizione 2.3.8. *Siano F, G due funtori aggiunti tra due categorie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, ovvero tali che $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Gb) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fa, b)$. Allora valgono:*

- *F conserva i limiti diretti, è esatto a destra e manda proiettivi in proiettivi*
- *G conserva i limiti inversi, è esatto a sinistra e manda iniettivi in iniettivi*
- *Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono abeliane, F e G sono additivi*

Teorema 2.3.9. *Sia $H < G$ e N un H-modulo. Allora*

- $H^i(G, \mathrm{coInd}_H^G N) = H^i(H, N)$
- $H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G N) = H_i(H, N)$

2.4 Gruppo di Brauer

2.5 Costruzione dei funtori derivati