Algoritmi e Strutture Dati

Leonardo Baldo

Contents

1 Introduzione

Algoritmo: procedura che descrive tramite passi elementari come risolvere un problema (tramite un modello di computazione).

Uno stesso problema può essere risolto da diversi algoritmi. Di ogni algoritmo siamo interessati a conoscere:

- correttezza
- stabilità
- complessità

1.1 Induzione

L'induzione si struttura con:

- Un caso base $P(0)$.
- Un'ipotesi induttiva (se vale per $P(n)$ allora vale anche per $P(n+1)$).

Matematicamente parlando significa che:

- Normalmente ho una formula, per esempio $n = 1$.
- Se vale per $n = 1$, provo con $n = 2$.
- Se funziona anche con $n = 2$, vuol dire che per $P(n)$ varrà anche $P(n+1)$ e tutti i successivi.

Si ha anche un'ulteriore variante, l'induzione forte:

- U contiene 1 oppure 0.
- Se U contiene tutti i numeri minori di nallora contiene anche n.

La parola "forte" è legata al fatto che questa formulazione richiede delle ipotesi apparentemente più forti e stringenti per inferire che l'insieme U coincida con N per ammettere un numero nell'insieme è richiesto infatti che tutti i precedenti ne faccianogià parte (e non solo il numero precedente).

1.2 Ricorrenza

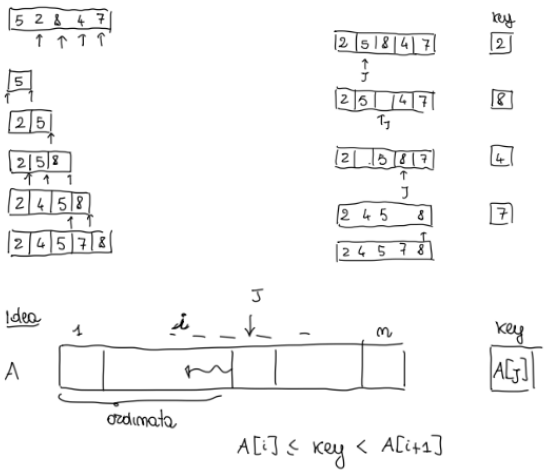
Relazione di ricorrenza è una formula ricorsiva che esprime il termine n-esimo di una successione in relazione ai precedenti. La relazione si dice di ordine r se il termine n-esimo è espresso in funzione al più dei termini $(n-1), \ldots, (n-r)$.

2 Insertion Sort

L'array viene virtualmente diviso in una parte ordinata e una non ordinata. I valori della parte non ordinata vengono prelevati e collocati nella posizione corretta della parte ordinata.
Caratteristiche dell'ordinamento per inserzione:

- Questo algoritmo è uno dei più semplici e di semplice implementazione.
- Fondamentalmente, l'ordinamento per inserzione è efficiente per piccoli valori di dati
- L'ordinamento per inserzione è di natura adattativa, cioè è adatto a insiemi di dati già parzialmente ordinati.

Quello che sostanzialmente fa è esaminare gli elementi a coppie e ordinarli gradualmente per come si presentano.



2.1 Pseudocodice

```
INSERTION–SORT(A)
1   n = A.length
2   for j = 2 to n
3       key = A[j]
4       i = j − 1
5       while i > 0 and A[i] > key
6           A[i + 1] = A[i]
7           i = i − 1
8       A[i + 1] = key
```

2.2 Correttezza

Definiamo i seguenti passi per A da indice 1 ad indice $j-1$

Inizializzazione: $j = 2, A[1,1]$ ordinato

Mantenimento: inserisce $A[j]$ in $A[1 \ldots j-1]$ ordinato

Cancellazione: $j = n+1$

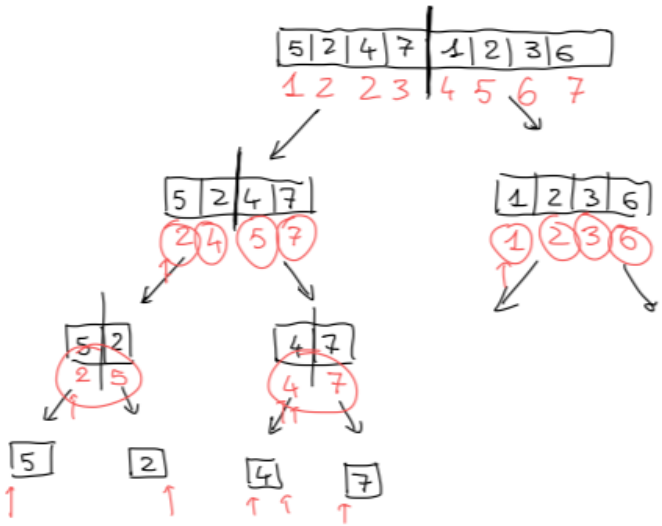
3 Merge Sort

Adotta l'approccio divide et impera, quindi:

- divide: prende il problema originale e lo divide in problemi più piccoli.
- impera: ricorsivamente, risolve i sottoproblemi; se abbastanza piccolo, si risolve subito.
- combina: le soluzioni di P_1,...,P_k si combinano in una soluzionedi P.

Quindi, mergesort adotta i seguenti passi:

- dividere l'array in due parti
- ordina i sottoarray
- fonde i sottoarray ordinati



3.1 Pseudocodice

```
MERGE–SORT(A,p,r)
1    if p < r
2        q = (p+r)/2
3        MERGE–SORT(A,p,q)
4        MERGE–SORT(A,q+1,r)
5        MERGE(A,p,q,r)
```

```
MERGE(A,p,q,r)
1    n1 = q - p + 1
2    n2 = r - q
3    for i = 1 to n1
4        L[i] = A[p+i-1]
5    for j = 1 to n2
6        R[j] = A[q+j]
7    L[n1+1] = R[n2+1] = infinity
8    i = j = 1
9    for k = p to r
10       if L[i] <= R[j]
11           A[k] = L[i]
12           i = i + 1
13       else // L[i] > R[j]
14           A[k] = R[j]
15           j = j + 1
```

3.2 Complessità

$A[p,...,k-1]$ contiene $L[1,...,i-1]$ e $R[i,...,j-1]$ $A[p,...,k-1] \leq L[1,...,n_1-1]$ e $R[i,...,n_2-1]$ è ordinato

Inizializzazione: $k = p$ e $A[p,...,k-1] = A[p,p-1]$

Mantenimento: Divisione in due metà progressive dell'array

Conclusione: $K = r+1$ e $A[p,...,r]$ è ordinato e contiene i più piccoli elementi $L[1,...,n_1+1]$ e $R[1,...,n_2+1]$
La dimostrazione del perchésia corretto viene fatta per induzione: se vale per il primo elemento, vale per tutti i casi successivi.

4 Master Theorem

Normalmente, dato un problema con size n lo dividiamo in asottoproblemi con dimensione n/b ed $f(n)$ costo della "combina" di entrambe le cose. Otteniamo come ricorrenza (con $a \geq 1, b > 1$):

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Esso stabilisce che, avendo a che fare con le ricorrenze di questo tipo, avremmo tre casi:

- Se il costo della risoluzione dei sotto-problemi ad ogni livello aumenta di un certo fattore, il valore di $f(n)$ diventerà polinomialmente più piccolo di $n^{\log_b a}$. Pertanto, la complessità temporale è oppressa dal costo dell'ultimo livello, vale a dire $n^{\log_b a}$.

$$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \quad (\epsilon > 0)$$

- Se il costo per risolvere il sotto-problema ad ogni livello è quasi uguale, allora il valore di $f(n)$ sarà $n^{\log_b a}$. Pertanto, la complessità temporale sarà $f(n)$ volte il numero totale di livelli $n^{\log_b a} * log(n)$.

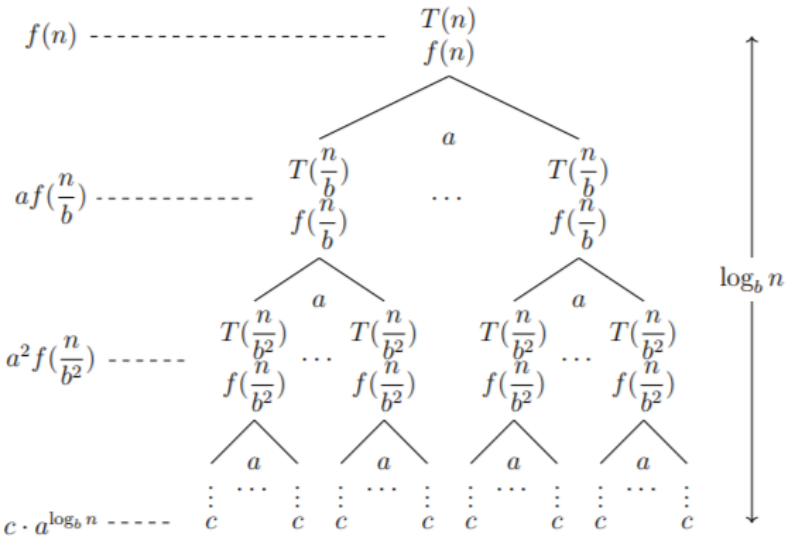
$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$$

- Se il costo della risoluzione dei sottoproblemi ad ogni livello diminuisce di un certo fattore, il valore di $f(n)$ diventerà polinomialmente più grande di $n^{\log_b a}$. Pertanto, la complessità temporale è oppressa dal costo di $f(n)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \quad (\epsilon > 0) \\ \exists\, 0 < k < 1 : a \cdot f(n/b) \leq k \cdot f(n) \end{array}\right\} \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$$

L'idea è che la funzione si ripeta come rapporto ricorsivamente, questo corrisponde alla divisione in due parti e ancora in due parti, ecc.

$$T(n) = f(n) + a \cdot T(\frac{n}{b}) = f(n) + af(\frac{n}{b}) + a^2 f(\frac{n}{b^2}) + \ldots + a^{\log_b n} f(\frac{n}{b^{\log_b n}}) = n^{\log_b a}$$



Confronta tra di loro $f(n)$ e $n^{\log_b a}$:

- se vince $f(n) \Rightarrow \Theta(f(n))$
- se pareggiano $\Rightarrow \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$
- se vince $n^{\log_b a} \Rightarrow \Theta(n^{\log_b a})$