Matrices

Le champ d'application des matrices et de l'algèbre linéaire (le domaine des mathématiques qui leur est associé) est très vaste. Dans ce chapitre, on ne verra que des applications à la géométrie du plan mais les matrices servent à manipuler des données bien plus diverses que des figures géométriques.

1 Définition

Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau à m lignes et n colonnes rempli de nombres (réels le plus souvent, mais on peut utiliser des complexes). Le coefficient de la matrice M situé à ligne i et à la colonne j est noté m_{ij}. On note alors parfois la matrice M dans sa totalité par l'expression (m_{ij}).
Si $m = 1$, on parle de matrice ligne. Si $n = 1$, on parle de matrice colonne. Si $m = n$, on dit que la matrice est carrée de taille n.

Matrices particulières Une matrice ne contenant que des zéros est appelée matrice nulle et notée $O(m, n)$. Une matrice carrée de taille n ne contenant des nombres non nuls que sur sa diagonale principale est appelée matrice diagonale. Si de plus ces nombres sont tous égaux à 1, la matrice est appelée matrice identité et notée I_n. Par exemple :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Opérations

2.1 Addition

Si deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ ont la même taille $m \times n$, alors on peut les additionner et leur somme est une matrice C de même taille dont les coefficients sont calculés en sommant deux à deux les coefficients de A et B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2 Multiplication par un nombre

On peut multiplier une matrice A par un nombre k. Le résultat est une matrice de même taille dont les coefficients sont ceux de A multipliés par k. Exemple :

$$2 \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Produit

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de taille $m \times n$ et $B = (b_{ij})$ est une matrice de taille $n \times p$ (autrement dit si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B), on peut multiplier ces deux matrices entre elles. Le résultat est une matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times p$ dont les coefficients valent :

$$c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} bkj$$

Autrement dit, on calcule le coefficient i, j de C en parcourant simultanément la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B, et en additionnant au fur et à mesure les produits des coefficients de A et B.
Exemple :

$$\begin{array}{cc} & B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} & C = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Produit par l'identité Une matrice identité ne modifie pas la matrice avec laquelle elle est multipliée. Par exemple :

$$\begin{array}{cc} & B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Non commutativité Attention ! Le produit de matrices n'est pas commutatif, ce qui veut dire que $AB \neq BA$ en général. Bien sûr, si A est de taille $m \times n$ et B de taille $n \times p$ avec $m \neq p$, il est clair qu'on peut faire le produit AB mais pas BA. Mais même lorsque les matrices sont carrées, le résultat du produit dépendra de l'ordre des matrices. Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 13 & -14 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 14 & -7 \end{pmatrix}$$

3 Lien avec la géométrie

Les matrices colonnes de taille 2 (qu'on appelle aussi des vecteurs) représentent des points dans le plan, les coefficients de la matrice étant les coordonnées (x, y) du point. Les matrices carrées de taille 2 représentent certaines transformations que l'on peut faire subir aux points (et donc aux figures) du plan. Appliquer une transformation à un point du plan est alors équivalent à faire le produit de la matrice représentant la transformation par le vecteur représentant le point, le résultat du produit étant une matrice colonne de taille 2 contenant les coordonnées de l'image du point par la transformation.

Agrandissement Un agrandissement d'un facteur f multiplie les coordonées des points par f (c'est donc un agrandissement si $f > 1$ mais en fait une réduction si $0 < f < 1$). Un point P de coordonnées (x, y) aura donc pour image P' de coordonnées (x', y') telles que :

$$x' = fx$$
$$y' = fy$$

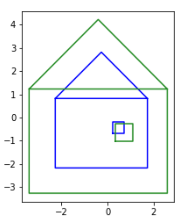
La matrice correspondante est la matrice diagonale :

$$A_f = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$A_f = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} fx \\ fy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Sur l'exemple suivant, la figure verte est l'image de la figure bleue par un agrandissement d'un facteur 1,5.



Rotation Une rotation d'un angle θ (en radians) autour de l'origine est représentée par la matrice :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En effet, si le point P a pour coordonnées (x, y) et qu'on note r sa distance à l'origine et α l'angle entre l'axe des abscisses et (OP), alors :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\alpha &= \frac{x}{r} \\ \sin\alpha &= \frac{y}{r} \end{aligned}$$

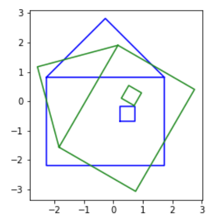
Son image P' est à la même distance r de l'origine et forme un angle $\alpha + \theta$ entre l'axe des abscisses et (OP'), autrement dit :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \theta) &= \frac{x'}{r} \\ \sin(\alpha + \theta) &= \frac{y'}{r} \end{aligned}$$

Or $\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$ et $\sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{x'}{r} &= \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta & \qquad \frac{y'}{r} &= \sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha \\ &= \frac{x}{r}\cos\theta - \frac{y}{r}\sin\theta & &= \frac{y}{r}\cos\theta + \frac{x}{r}\cos\alpha \\ x' &= x\cos\theta - y\sin\theta & y' &= y\cos\theta + x\cos\alpha \end{aligned}$$

Sur l'exemple suivant, la figure verte est l'image de la figure bleue par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Autres exemples La matrice identité I_2 ne change pas le vecteur auquel est est appliquée : elle correspond à la transformation identité qui laisse la figure inchangée.
Les matrices suivantes représentent les symétries par rapport à l'axe des abscisses et à celui des ordonnées :

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Déterminant et inverse

4.1 Déterminant

Soit A une matrice carrée de taille 2. Une figure F de surface $S \neq 0$ est transformée en une figure F' de surface S' par la transformation correspondant à A. Le determinant de$A$, noté $\det(A)$ représente alors le rapport $\frac{S'}{S}$. Le déterminant peut également être négatif ; cela signifie que le sens de parcours de l'image F' est inversé par rapport à F (Si les points $ABCD$ d'un quadrilatère sont parcours dans le sens direct, un déterminant négatif signifie que les points $A'B'C'D'$ de l'image seront parcourus en sens indirect, et vice versa).
Ainsi :

— Si $|\det(A)| > 1$, l'image est plus grande que la figure.

— Si $|\det(A)| = 1$, l'image est de même taille que la figure (mais elle peut être déformée).

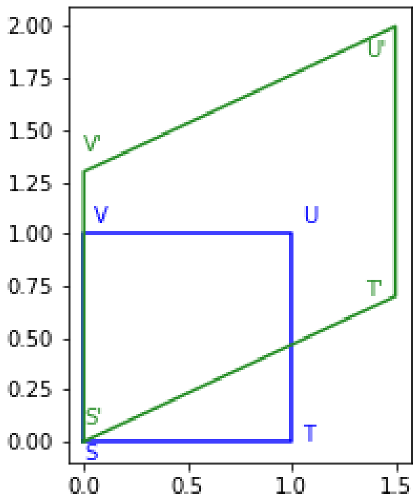
— Si $0 < |\det(A)| < 1$, l'image est plus petite que la figure.

— Si $|\det(A)| = 0$, l'image est totalement aplatie le long d'une droite et son aire est nulle.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors le déterminant vaut : $\det(A) = ad - bc$.

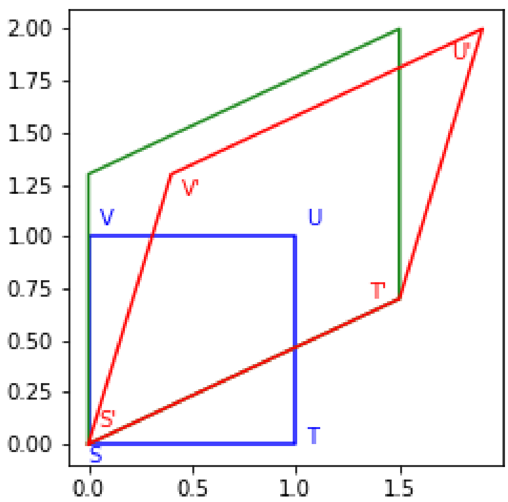
Démonstration Pour calculer le déterminant, on va partir d'un carré $STUV$ de surface 1 et calculer l'aire de son image par la transformation associée à A. Les coordonnées des sommets du carré sont : $S = (0, 0)$, $T = (1, 0)$, $U = (1, 1)$ et $V = (0, 1)$.

Dans un premier temps, considérons une transformation telle que $b = 0$. Les produits de A par les différentes coordonnées des points donnent les coordonnées des images : $S' = (0, 0)$, $T' = (a, c)$, $U' = (a, c + d)$ et $V' = (0, d)$.

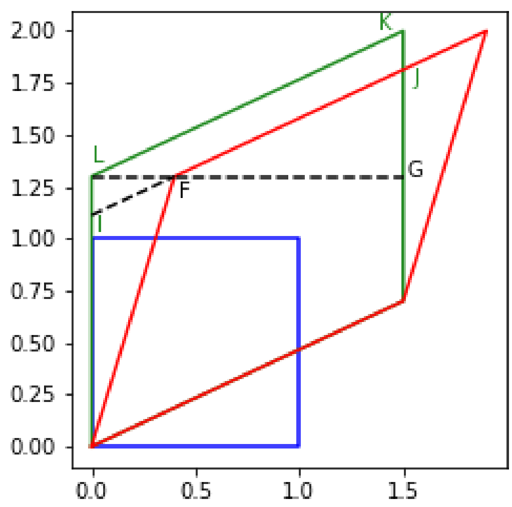


Si on prend pour base $S'V' = d$ et pour hauteur a, la surface du parallélogramme vert vaut $\mathcal{A}(S'T'U'V') = ad$.

Dans le cas général (b peut avoir n'importe quelle valeur), l'image ressemblera à la figure rouge ci-dessous :



L'aire du parallélogramme rouge est égale à celle du parallélogramme vert (c'est -à-dire ad), moins l'aire du parallélogramme $IJKL$ indiqué sur la figure suivante :



Pour calculer l'aire de ce parallélogramme, on va utiliser comme base IL et comee hauteur a. Le théorème de Thalès nous permet d'écrire :

$$\frac{FG}{FL} = \frac{GJ}{IL}$$

Avec $FG = a - b$, $FL = b$ et $GJ = GK - KJ = c - IL$. On en déduit :

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c - IL}{IL}$$
$$\Leftrightarrow IL(a-b) = b(c - IL)$$
$$\Leftrightarrow IL = \frac{bc}{a}$$

On trouve finalement $\mathcal{A}(IJKL) = IL \times a = bc$ et l'aire du parallélogramme rouge vaut donc $ad - bc$.

Agrandissement et rotation Le déterminant de la matrice d'agrandissement vaut : $\det(A_f) = f \times f - 0 \times 0 = f^2$, ce qui illustre le fait que lorsque les dimensions d'une figures sont multipliées par f, sa surface est multipliée par f^2.
Le déterminant de la matrice de rotation vaut $\det(R_\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, ce qui illustre le fait qu'une rotation ne modifie pas la taille de la figure.

4.2 Inverse

On appelle inverse d'une matrice carrée A de taille n la matrice B, si elle existe, telle que $AB = BA = I_n$. On note cette matrice A^{-1}.

Propriété A est inversible (possède un inverse) si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans le cas d'une matrice 2×2, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\det(A) = 2 \times 5 - 5 \times 1 = 5 \neq 0$$

A est donc inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Démonstration du calcul de l'inverse Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) \neq 0$ et $B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Calculons BA :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} BA = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & ad - bc \end{pmatrix}$$
$$BA = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Matrice inverse et transformation inverse Si A représente une transformation du plan qui transforme une figure F en F', alors A^{-1} représente la transformation inverse qui, appliquée à F', redonne F.
En particulier, l'inverse de la matrice d'agrandissement vaut : $A_f^{-1} = \frac{1}{f^2} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix} = A_{\frac{1}{f}}$. Il s'agit de la matrice correspondant à un agrandissement de $\frac{1}{f}$.
L'inverse de la matrice de rotation vaut : $R_\theta^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Or $\cos\theta = \cos(-\theta)$

et $\sin\theta = -\sin(-\theta)$, donc on peut réécrire cette matrice comme : $R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R_{-\theta}$. Il s'agit de la matrice de rotation d'un angle $-\theta$, c'est à dire une rotation en sens opposé.