Résolution numérique d'équations

Que ce soit pour des simulations, pour du rendu 3D, de l'intelligence artificielle, de la cryptographie, de l'optimisation ou plein d'autres applications, on exrime très souvent les problèmes sous formes d'équations à résoudre. Il peut s'agir d'équations algébriques ou différentielles, et souvent même de systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Dans ce court chapitre, on s'intéresse aux équations du type $f(x) = 0$, c'est-à-dire qu'on veut trouver les zéros d'une fonction (les points où la fonction s'annule).

Théorème des valeurs intermédiaires Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I (c'est à dire strcitement croissante ou bien strictement décroissante), et si de plus $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes différents, alors f s'annule exactement une fois entre a et b. Ce théorème s'applique également si $a = -\infty$ et que $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(b)$ ont des signes différents, ou si $b = +\infty$ et que $f(a)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ont des signes différents.

Ce théorème permet, si on peut établir le tableau de variation de f, de savoir combien de solutions possède l'équation $f(x) = 0$ et dans quel(s) intervalle(s) chercher ces solutions.

Par exemple, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 6x^2 + 8$ a pour dérivée $g'(x) = 3x(x - 4)$ et pour tableau de variations :

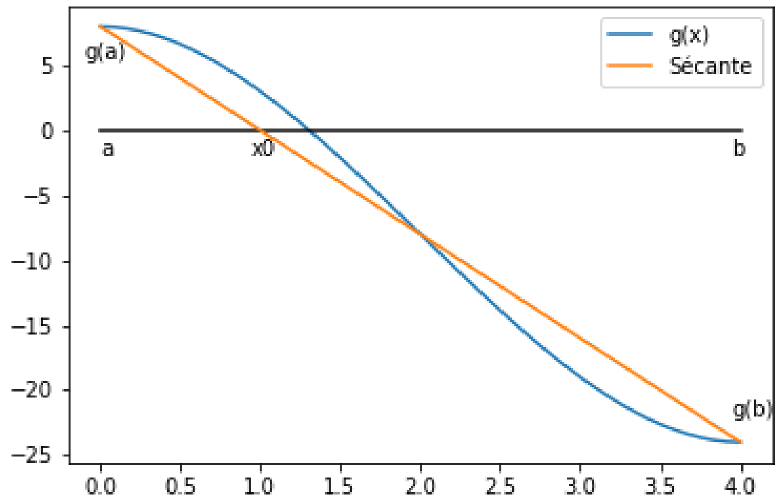
x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau de variations, la fonction g est strictement croissante et change de signe sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, donc d'aprèse le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule exactement une fois sur cet intervalle. Par le même raisonnement, on montre que g s'annule une fois entre 0 et 4, et une fois dans $[4; +\infty[$.

Méthode de la dichotomie Pour résoudre numériquement l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[0; 4]$, on prend $m = 2$ le milieu de l'intervalle et on calcule $g(2) = -8$. On voit que g s'annule entre 0 et 2, donc on continue notre recherche dans $[0; 2]$. m vaut maintenant 1 et $g(1) = 3$ donc le zéro se trouve entre 1 et 2. On prend $m = 1.5$ et on continue à couper l'intervalle en deux et à garder la moitié gauche ou droite suivant le signe de g, jusqu'à atteindre une précision ϵ jugée acceptable (c'est-à-dire lorsque $|g(m)| < \epsilon$).

Méthode des sécantes La méthode des sécantes ressemble beaucoup à la dichotomie, la seule différence étant que l'on ne coupe pas nécéssairement l'intervalle en son milieu. La droite qui passe par les points $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$ coupe l'axe des abscisses en :

$$x_0 = a - g(a)\frac{b-a}{g(b)-g(a)}$$



En effet, le coefficient directeur de la sécante vaut $m = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$ et son ordonnée à l'origine vaut $p = g(a) - ma$, et l'intersection de la droite d'équation $y = mx + p$ avec l'axe des abscisses vaut $x_0 = -\frac{p}{m}$.

Cette méthode permet généralement d'atteindre la précision voulue plus rapidement (en moins d'étapes) que la dichotomie, pourvu que la fonction n'ait pas de changements de variations trop brutaux.

Méthode des tangentes Dans la méthode des tangentes, on doit connaître la dérivée g' de la fonction. On part d'un point a_0 quelqonque (idéalement, loin des extremums de la fonction) et on calcule le point d'intersection de la tangente à la courbe de g en a_0 avec l'axe des abscisses. Ce point nous donne le nouveau a_1 à partir duquel tracer la tangente suivante. Là encore, on répète l'opération jusqu'à obtenir une valeur de l'image suffisamment proche de zéro : $|g(a_n)| < \epsilon$. Le coefficient directeur de la tangente en a_n vaut $g'(a_n)$ et son ordonnée à l'origine vaut $g(a_n) - a_n g'(a_n)$, donc le point suivant se calcule par :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{g(a_n)}{g'(a_n)}$$