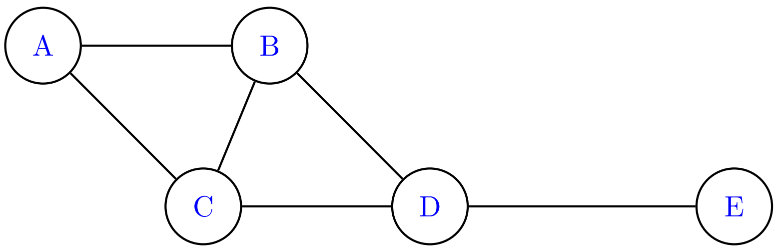
Graphes

1 Définitions

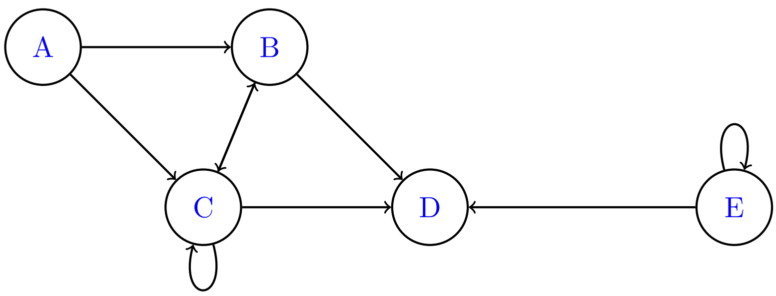
Un graphe est un ensemble d'objets appelés nœuds (ou sommets) reliés entre eux par des arêtes. Il sert à représenter toutes sortes de réseaux : routier, ferroviaire, aérien, informatique, social, causal, etc. Les graphes sont par exemple utilisés pour rechercher des itinéraires, suggérer des vidéos, optimiser le trafic sur le réseau, faire de l'apprentissage machine ou vérifier des preuves mathématiques.

Le nombre de nœuds d'un graphe est appelé son ordre, et le nombre d'arêtes est appelé sa taille. Le nombre d'arêtes liées à un nœud est appelé le degré du nœud. Par exemple, le graphe suivant a un ordre de 5 et une taille de 6 :



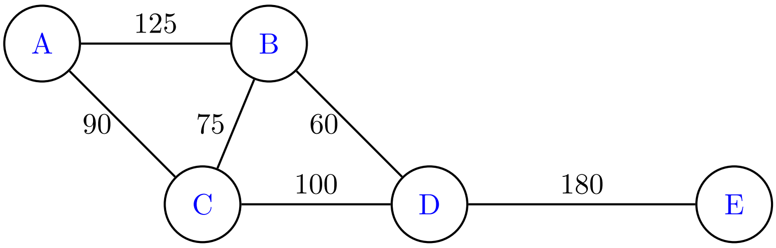
1.1 Graphes orientés

Le graphe précédent est non orienté : les arêtes n'ont pas de direction et on peut aller de A vers B comme de B vers A. On peut définir des graphes orientés en représentant la diraction des arêtes par une flêche. Dans un graphe orienté, on peut avoir une arête qui joint un nœud à lui-même. Par exemple :



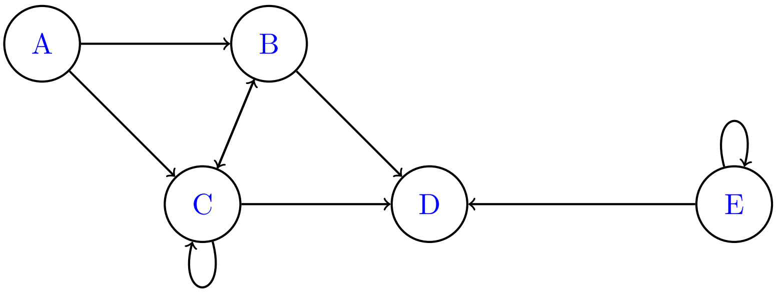
1.2 Graphes pondérés

Un graphe (orienté ou non) est pondéré si on associe une longueur à chaque arête. Par exemple :



1.3 Chemins

Un chemin de longueur n est une série de $n+1$ nœuds dans laquelle toutes les paires de nœuds consécutifs sont reliés par une arête. Par exemple, avec le graphe suivant, (A,C,C,D) est un chemin de longueur 3, mais C,D,B n'est pas un chemin car il n'y a pas d'arête de D vers B.



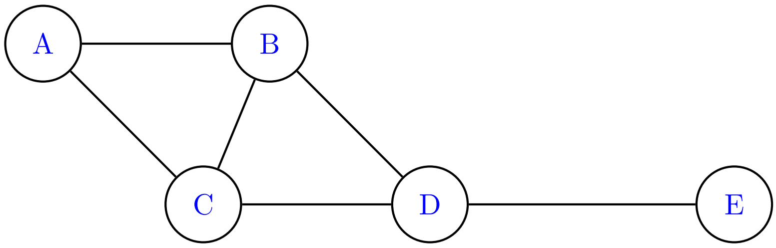
2 Matrice d'adjacence

Pour un graphe d'ordre n, on appelle matrice d'adjacence la matrice carréeA de taille n dont le coefficient a_{ij} vaut 1 s'il y a une arête entre le nœud i et le nœud j, et 0 s'il n'y a pas d'arête. La matrice d'adjacence du graphe ci-dessus (si on range les nœuds dans l'ordre A,B,C,D,E) est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le nombre de 1 dans cette matrice correspond au nombre d'arêtes du graphe, c'est à dire à sa taille.

La matrice d'adjacence du graphe non orienté suivant est :



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est toujours symétrique et ne contient que des zéros sur sa diagonale.

2.1 Chemins de longueur n

Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe, alors le nombre de chemins de longueur n entre le nœud i et le nœud j est donné par le coefficient (i, j) de la matrice A^n. Par exemple, avec le graphe précédent :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 & 12 & 2 \\ 9 & 16 & 15 & 10 & 6 \\ 9 & 15 & 16 & 10 & 6 \\ 12 & 10 & 10 & 15 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit qu'il y a 3 chemins de longueur 2 entre D et D, 15 chemins de longueur 4 entre B et C, et 2 chemins de longueur 4 entre A et E (en l'occurrence, ces deux chemins sont ABCDE et ACBDE).