Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Escuela de Física
Departamento de Materia Condensada

Guía de Laboratorio: Repaso de *Wolfram Mathematica*

Instrucciones: Resuelva de forma clara y ordenada, usando el paquete de Software, **Wolfram Mathematica** o su equivalente **Wolfram Cloud** los siguientes problemas. **Recuerden, el plagio se penalizará con un cero en su calificación total, procuren evitar plagiar código de internet.** Para que se les evalúe de forma correcta, se requiere de un archivo `.nb` y un archivo `.pdf` subido a su campus virtual para validar su trabajo.

1. Ajustes y gráficos

1.1. Problema I

Considere que la función parametrizada de la *Cinta de Möbius* es la siguiente:

$$\begin{cases} x(u,v) = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u) & \text{(1a)} \\ y(u,v) = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u) & \text{(1b)} \\ z(u,v) = \frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right) & \text{(1c)} \end{cases}$$

Donde las variables u y v están definidas en los intervalos:

$$0 \leq u \leq 2\pi \tag{2}$$
$$-1 \leq v \leq 1 \tag{3}$$

1. Primero defina la función anterior en términos de las variables u y v usando un vector.
2. Se le pide que usted haga un gráfico de la función anterior haciendo uso del comando `ParametricPlot3D`, considerando los intervalos tanto para u y v. El gráfico debe llevar un título con el texto *Cinta de Möbius*. Para facilitarle el trabajo, se coloca aquí el resultado que le debería quedar a usted si todo lo que ha hecho ha sido realizado correctamente.

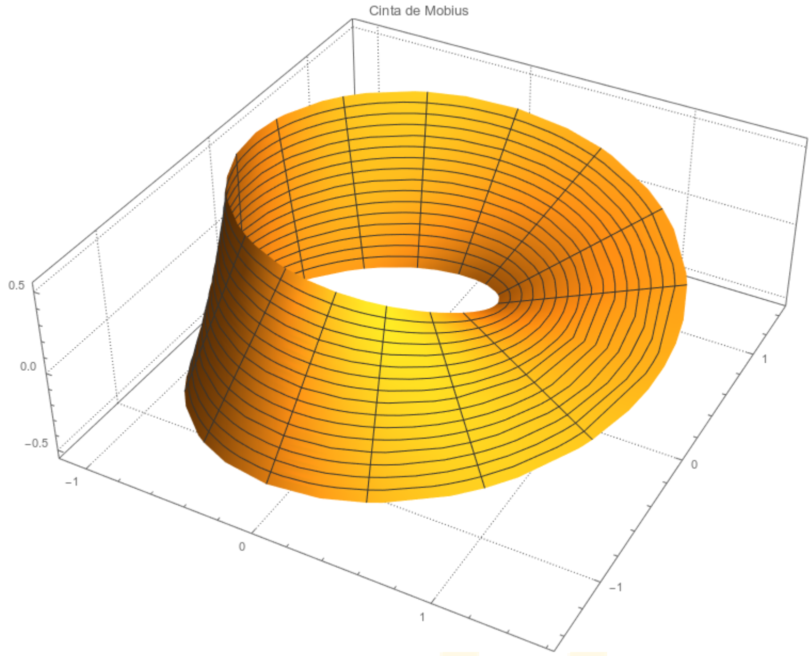

Figura 1: Cinta de Möbius

1.2. Problema II

La resistencia a la rodadura F de un vehículo ha sido medida por un investigador, este ha resumido sus mediciones en la siguiente tabla de datos: Se le pide

v (m/s)	1	2	3	4	5
F (N)	15	20	30	40	60

Tabla 1: Datos experimentales para el problema II

lo siguiente:

1. Haga un gráfico con estos datos experimentales, considere usar el comando `ListPlot`. Recuerde, el gráfico debe llevar leyendas, descripciones de los ejes, unidades y título.

2. Realice un ajuste con los datos anteriores, el modelo a ajustar es el siguiente:

$$F = A + Bv^2 \tag{4}$$

   Requiero que coloque, usando el comando `["ParameterTable"]`, la tabla de resultados con los valores de las constantes A y B del modelo, así como sus incertidumbres.

3. **Reporte correctamente** los valores de las constantes A y B como lo ha hecho en todos sus laboratorios anteriores, hágalo en una celda de texto en *Mathematica*.

4. Haga un gráfico de su función de ajuste en un intervalo coherente con los valores de v.

5. Usando el comando `Show`, muestreme el gráfico del inciso 1. y el gráfico del inciso anterior en un solo gráfico.

2. Gráficos de campos vectoriales y superficies.

2.1. Problema III

Las antenas son estructuras útiles en el campo de la ingeniería eléctrica, sobre todo en el campo de las comunicaciones. El modelo más simple de una antena es el que se le conoce como *Dipolo Hertziano*, que es simplemente un pequeño alambre conductor por el cual se hace correr una corriente que varía sinusoidalmente con el tiempo. En este caso, luego de un tratamiento cuidadoso de los campos eléctrico y magnético, podemos encontrar una ecuación cerrada para los campos eléctrico y magnético. Suponiendo una *Aproximación de campo lejano*, tenemos las siguientes expresiones para los campos eléctrico y magnético:

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \dfrac{ILk}{4\pi r}\sin(kr)\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}} & \text{(5a)} \\ \mathbf{E} = \zeta_0\dfrac{ILk}{4\pi r}\sin(kr)\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} & \text{(5b)} \end{cases}$$

Donde las variables anteriores son:

- I es la corriente que circula por el conductor en A.
- L es la longitud del conductor en m.
- k es el numero de onda del patrón de onda. También se le suele definir como:

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{6}$$

  donde ω es la frecuencia de la corriente aplicada sobre el conductor y c es la velocidad de la luz en m/s.

- ζ_0 es el valor de *la impedancia del espacio libre* (investigar cuánto es este valor), y curiosamente, tiene unidades de Ω.

Se le pide lo siguiente:

1. Los campos magnético y eléctrico están en *coordenadas esféricas*, investigue el uso de la función `TransformedField` para cambiar estos campos a *coordenadas cartesianas*. Defina estos últimos campos como funciones de las variables x, z e y.

2. Usando la función `VectorPlot3D`, grafique los campos eléctrico y magnético. Recuerde colocar un titulo, descripciones de los ejes y las unidades al gráfico. Dejo a criterio del creador del script definir valores apropiados para las constantes involucradas, procure que se pueda ver el comportamiento del campo eléctrico.

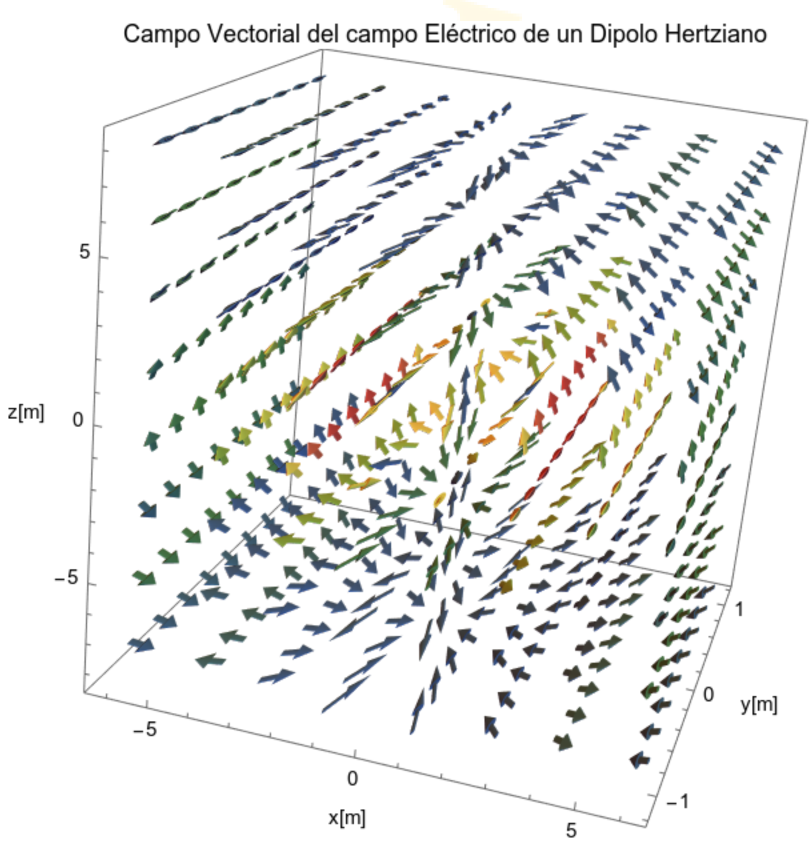

Figura 2: Gráfico de un campo vectorial para un *Dipolo Hertziano*

3. Verificación de ecuaciones con funciones vectoriales y uso de los comandos de cálculo vectorial

3.1. Problema IV

Ecuaciones de Maxwell: Las Ecuaciones de Maxwell son uno de los logros más grandes que se conocen en el campo de la física. Estas ecuaciones permiten mostrar de forma (muy sucinta) que existe un nexo entre las áreas de la electricidad, magnetismo y la óptica (si, curiosamente la luz es un fenómeno electromagnético). Las Ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial son las siguientes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (7a) \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 & (7b) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (7c) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) & (7d) \end{cases}$$

Donde las variables involucradas son las siguientes:

- $\mathbf{E}$ es el campo electrico, en V/m.
- $\mathbf{B}$ es el campo de inducción magnética en A/m
- μ_0 es la permeabilidad del espacio vacío y ϵ_0 es la permitividad del espacio vacío (investigar los valores de estas dos cantidades).
- ρ es la densidad de carga en C.
- $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente en A/m^3.

Considere una situación en espacio libre (ausencia de cargas y corrientes), entonces, tanto ρ como $\mathbf{J}$ son nulas (es decir, son iguales a 0). Entonces las ecuaciones vistas anteriormente pueden admitir soluciones *de ondas electromagnéticas*. Entonces las ecuaciones anteriores quedan en la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 & (8a) \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 & (8b) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (8c) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (8d) \end{cases}$$

- Dadas las siguientes soluciones para **E** y **B**:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}} & \text{(9a)} \\ \mathbf{B} = \dfrac{kE_0}{\omega} \cos(kx - \omega t)\hat{\boldsymbol{z}} & \text{(9b)} \end{cases}$$

  Utilice los comandos `Curl` (para el rotacional) y `Div` (para la divergencia) de modo que puedan comprobar ecuaciones (8a), (8b) y (8c). Para facilitarse esta tarea, puede definir tanto **E** y **B** como campos vectoriales que dependen de x y t y luego puede insertar las ecuaciones como considere más fácil.

3.2. Problema V

Comentario: Queda a su disposición hacer este problema. En caso de que lo resuelva exitosamente, se puede ponderar el esfuerzo hecho para subsanar parte del puntaje de su guía en caso de que usted haya cometido errores en los problemas anteriores.

- Compruebe la ecuación (8d). Usando los campos **E** y **B** que se le han proporcionado en el problema anterior.
  Pista: Para comprobar la ecuación (8d) le tocará considerar que la constante de la velocidad de la luz puede escribirse como:

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \tag{10}$$

  Entonces debe usar la ecuación (6), que relaciona k y ω con c para verificar la identidad (8d).

3.3. Problema VI

Se tienen los siguientes campos vectoriales en sistemas de coordenadas diferentes:

$$\mathbf{F}(r, \theta) = \frac{\sin(r)\cos(\theta)}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{11}$$

$$\mathbf{G}(r, \theta) = \frac{\sin(r)\cos(\theta)}{r}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{12}$$

Calcule lo siguiente:

- $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})$
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})$

- $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G})$
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G})$
- $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{F}))$

Consideraciones: Recuerde, Mathematica usa coordenadas cartesianas para aplicar el rotacional, la divergencia y el producto cruz (que se hace con el comando `Cross`). Es conveniente dejar las expresiones de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ en términos de variables en el sistema cartesiano. Además de esto, tenga cuidado con la expresión de $\mathbf{G}$, recuerde que esta expresión tiene tanto expresiones en coordenadas esféricas como en coordenadas cartesianas, por lo que solo debe convertir la expresión que acompaña a $\hat{\boldsymbol{x}}$ con el comando `TransformedField`.