

FUNCIONES LINEALES Y AFINES

1. LA FUNCIÓN LINEAL $y = mx$

El tren AVE lleva una velocidad media de 240 km/h. La siguiente tabla nos da el espacio que recorre en función del tiempo.

$t \equiv$ tiempo (h)	1	2	3	4	5	...
$e \equiv$ espacio (km)	240	480	720	960	1.200	...

Fácilmente podemos observar que ambas magnitudes son directamente proporcionales. La expresión algebraica de esta función es $e = 240t$, siendo 240 la constante de proporcionalidad de dichas magnitudes. La representación gráfica de la misma es la siguiente.

La gráfica de esta función es una línea recta continua, en este caso creciente (el espacio aumenta a medida que aumenta el tiempo) y que pasa por el origen de coordenadas.

Las **funciones de proporcionalidad directa** o **funciones lineales** son aquellas cuya gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas; su expresión algebraica es $y = mx$, siendo m la constante de proporcionalidad.

1.2. Pendiente de una recta

En la función lineal $y = mx$, al coeficiente m (constante de proporcionalidad) se le llama **pendiente** de la recta y se halla dividiendo el valor de la variable dependiente por el correspondiente valor de la variable independiente.

$$m = \frac{y}{x}$$

Su valor es la medida del crecimiento o decrecimiento de la recta de ecuación $y = mx$, y nos indica la variación de la variable y por cada incremento de una unidad de la variable x .

$m > 0 \Rightarrow$ la recta es **creciente**

$m < 0 \Rightarrow$ la recta es **decreciente**

La pendiente de una recta nos proporciona la inclinación de la misma respecto del eje X (ángulo que forma la recta con dicho eje). En el siguiente ejemplo puedes observar que cuanto mayor es la pendiente, mayor es la inclinación de la recta.

Ejemplo.- Hallemos la expresión algebraica de las rectas representadas a continuación.



Las tres gráficas son funciones lineales, cuya expresión es $y = mx$, pues son rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Las pendientes la obtenemos fijando un punto cualquiera de la misma y hallando su cociente:

$$[1]: m = \frac{3}{3} = 1 ; [2]: m = \frac{2}{1} = 2 ; [3]: m = \frac{4}{-2} = -2$$

Las rectas tienen por ecuación:

$$[1]: y = x ; [2]: y = 2x ; [3]: y = -2x$$

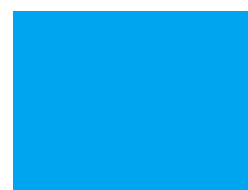
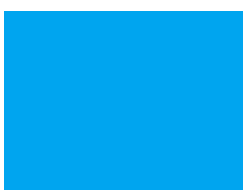
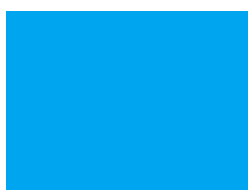
EJERCICIOS

- En cierta ferretería venden rollos de 20 metros de alambre a 3 euros.
 - ¿Cuánto cuesta cada metro de alambre?
 - Haz una tabla que nos indique el precio de 1, 2, 3, 4, 5, ... metros.
 - Representa la correspondiente gráfica y comprueba que corresponde a una función lineal.
 - Escribe la expresión algebraica de esta función. ¿Cuál es la pendiente o constante de proporcionalidad?
- La siguiente tabla muestra el coste y el número de fotocopias realizadas por algunos alumnos.

	Luis	María	Lucía	...	Carlos
Coste € (y)	0'12	0'60	6	...	0'06
Copias (x)	2	10	100	...	1

Halla la expresión que relaciona el número de copias y su coste. Representala gráficamente.

- Las gráficas siguientes representan la relación que existe entre el volumen y la masa de diversas materias en función de la densidad de las mismas.
 - Calcula la pendiente de cada una de estas rectas e indica el significado que ésta tiene. ¿Cuál tiene mayor densidad? ¿Y menor? Halla la expresión algebraica de cada una de ellas.
 - ¿Qué peso en kg tendrán 3 dm³ de plata?
 - ¿Cuántos litros ocuparán 1 kg de aceite?
- Determina la expresión de las funciones cuya representación gráfica es la siguiente.



5. Halla la ecuación de las siguientes rectas y represéntalas sobre unos mismos ejes de coordenadas.
- Recta que pasa por el origen de coordenadas y su pendiente es $1/2$.
 - Recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $(-1, 3)$.
 - Recta simétrica de $y = 2x$ respecto al eje de ordenadas.
 - Recta simétrica de $y = 2x$ respecto al eje de abscisas.

2. LA FUNCIÓN AFÍN $y = mx + n$

Hemos medido la temperatura de un líquido a medida que se calentaba. Los resultados aparecen en la siguiente tabla de valores.

$x \equiv$ tiempo (min)	0	1	2	3	4	...
$y \equiv$ temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	15	20	25	30	35	...

La expresión algebraica de dicha función es $y = 5x + 15$, cuya representación gráfica se muestra a continuación.

Esta no es una función lineal. Su gráfica es también una recta pero no pasa por el origen de coordenadas y su expresión algebraica no es como la de las funciones lineales. A este tipo de funciones se les llama *funciones afines*.

Las **funciones afines** son aquellas cuya gráfica es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas; su expresión algebraica es $y = mx + n$.

En la expresión anterior:

- m es la **pendiente** de la recta.
- n es la **ordenada en el origen**: la recta corta al eje de ordenadas en el punto $(0, n)$.

2.1. Funciones afines y lineales con la misma pendiente

Representamos las rectas correspondientes a las siguientes funciones afines y lineales:

[1] $y = 2x + 4$

[2] $y = 2x$

[3] $y = 2x - 6$

Construimos una tabla de valores para cada una de ellas:

x	$y = 2x + 4$	x	$y = 2x$	x	$y = 2x - 6$
-3	-2	-2	-4	2	-2
-2	0	0	0	3	0
0	4	1	2	4	2
...



Puede observarse que todas las funciones tienen la misma pendiente, $m = 2$, y las rectas correspondientes son rectas paralelas.

Las gráficas de las funciones afines y lineales que tienen **igual pendiente m** son **rectas paralelas**. Si tienen **distinta pendiente**, serán entonces **rectas secantes**.

2.2. Funciones afines con la misma ordenada en el origen

Representemos ahora las siguientes funciones afines:

[1] $y = x + 4$

[2] $y = 2x + 4$

[3] $y = -x + 4$

Observamos ahora que todas las funciones tienen por ordenada en el origen 4, $n = 4$. Esto se traduce en que las rectas del gráfico pasan todas por el punto $(0, 4)$.



Las gráficas de las funciones afines que tienen **igual ordenada en el origen n** son **rectas secantes** que se cortan en el punto de coordenadas **$(0, n)$** .

Ejemplo.- Las rectas de ecuaciones $y = 2x + 5$ e $y = 5x + 2$, ¿son paralelas o secantes? Representálas en unos mismos ejes de coordenadas.

Como las pendientes son distintas, las rectas son secantes.

x	$y = 2x + 5$	x	$y = 5x + 2$
-1	3	-1	-3
0	5	0	2
1	7	1	7
...

Ambas rectas se cortan en el punto de coordenadas $P(1, 7)$.



EJERCICIOS

6. Un fabricante de ventanas cuadradas cobra a razón de 3 euros por cada metro de marco y 12 euros por el cristal, sean cuales sean las dimensiones.
 - a) ¿Cuánto costará una ventana de 2 metros de lado?
 - b) Por una ventana hemos pagado 60 euros, ¿cuánto mide su lado?
 - c) Encuentra la expresión que nos dé el precio de la ventana en función de las dimensiones y realiza una representación gráfica de esta función.
7. El coste de la energía eléctrica en una casa viene dado por el precio de la potencia contratada, que es 12 €, y el precio del kilovatio hora, que vale 0'15 €.
 - a) ¿Cuál es la función que da la tarifa conociendo el consumo? Representála gráficamente.
 - b) ¿Cuánto ha gastado una familia si su consumo ha sido de 200 kilovatios hora?

8. Una empresa de ferrocarriles lanza una oferta dirigida a estudiantes que desean viajar en verano por Europa. La oferta consiste en pagar una cuota fija de 30 euros más 0'02 euros por cada kilómetro recorrido.
- Escribe la ecuación que relaciona el coste con los kilómetros recorridos, indicando cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente.
 - Representa gráficamente la función.
 - Calcula el dinero que debe pagar un estudiante si quiere hacer un viaje por Francia y en el que tiene previsto recorrer 5.400 kilómetros.
 - ¿Cuántos kilómetros se han recorrido por un viaje que ha costado 94 euros?
9. La siguiente tabla corresponde a una función afín $y = mx + n$.

x	0	10	20	30	40	50
y	-3		37			97

Completa la tabla, representa la gráfica y obtén su expresión algebraica hallando la pendiente y la ordenada en el origen.

10. De las siguientes rectas indica las que son paralelas y las que son secantes.
- a) $y = 3x + 2$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = 3x - 3$ d) $y = 2x - 1$ e) $y = 3x - 1$
- Representa sobre los mismos ejes de coordenadas aquellas que sean paralelas.

3. ECUACIONES DE LA RECTA

3.1. Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

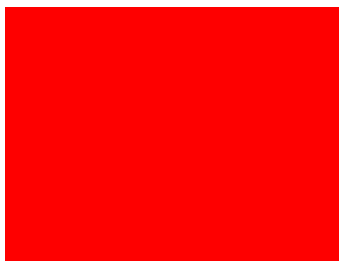
Dados dos puntos de coordenadas $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, podemos hallar la pendiente de la recta r que determinan: ésta se puede hallar calculando la variación de la variable y (aumento o disminución) cuando la variable x aumenta al pasar del punto A al punto B .

- Caso en que la recta es creciente**

En este caso la variación de la variable y es un aumento en vertical y la pendiente de la recta es positiva:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$$

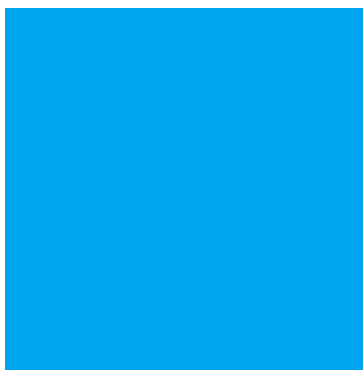
- Caso en que la recta es decreciente**



En este caso la variación de la variable y es una disminución en vertical y la pendiente de la recta es negativa:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$$

Ejemplo.- Hallemos la pendiente de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(-1, 1)$ y $B(1, 5)$.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

3.2. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

- Sabemos que la ecuación de una recta es $y = mx + n$. Fijándonos de nuevo en el ejemplo anterior, conocemos que la pendiente es $m = 2$, faltaría hallar n en la ecuación $y = 2x + n$ para tener completa la ecuación de la recta.

Podemos calcular n con cualquiera de los puntos $A(-1, 1)$ ó $B(1, 5)$:

$$A(-1, 1): y = 2x + n \Rightarrow 1 = 2 \cdot (-1) + n \Rightarrow 1 = -2 + n \Rightarrow n = 1 + 2 = 3$$

$$B(1, 5): y = 2x + n \Rightarrow 5 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow 5 = 2 + n \Rightarrow n = 5 - 2 = 3$$

La recta que pasa por los puntos A y B tiene por ecuación $y = 2x + 3$.

- Otra forma de hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos es mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Sea $y = mx + n$ la recta que pasa por los puntos $A(-1, 1)$ y $B(1, 5) \Rightarrow$ se verifica que:
$$\begin{cases} 1 = m \cdot (-1) + n \\ 5 = m \cdot 1 + n \end{cases}$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} -m + n = 1 \\ m + n = 5 \end{cases}$ obtenemos: $m = 2, n = 3$; por lo que dicha ecuación es $y = 2x + 3$.

3.3. Ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente o la ordenada

De lo anterior se deduce que si se conoce la pendiente o la ordenada en el origen de una recta y un punto de ella, se puede encontrar su ecuación.

Ejemplo.- Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 4x - 2$ que pasa por el punto de coordenadas $(1, 9)$.

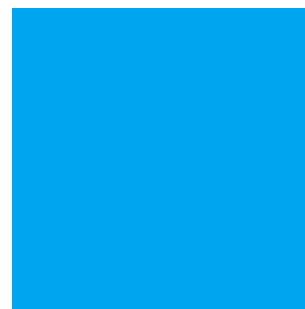
Por ser paralela, la pendiente debe ser $m = 4$, luego la ecuación sería $y = 4x + n$.

Por pasar por el punto $(1, 9)$, ha de verificar que $9 = 4 \cdot 1 + n$, de donde deducimos que $n = 9 - 4 = 5$.

La recta buscada tiene, por tanto, de ecuación $y = 4x + 5$.

EJERCICIOS

11. Determina la expresión de las funciones cuya representación gráfica es la siguiente.



12. Halla la ecuación de las siguientes rectas y represéntalas sobre unos mismos ejes de coordenadas.
- De la recta cuya pendiente es 3 y cuya ordenada en el origen es 2.
 - De la recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto (2, 7).
 - La paralela a la recta de ecuación $y = 3x - 5$ y pasa por el punto $(-2, 3)$.
 - De la recta que pasa por el punto (3, 0) y su ordenada en el origen es 3.
 - De la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(-3, 5)$ y $B(1, 5)$.
13. Dada la recta $y = 2x + 4$, halla las ecuaciones de las siguientes rectas (ayúdate de la representación gráfica).
- Recta simétrica a la dada respecto al eje Y .
 - Recta simétrica a la dada respecto al eje X .
 - Recta simétrica a la dada respecto del origen de coordenadas.

4. RECTAS PARALELAS A LOS EJES DE COORDENADAS

4.1. Rectas paralelas al eje X

Si $m = 0$, la función afín $y = mx + n$ se convierte en $y = n$, que es la expresión algebraica de una *función constante*. Su gráfica es una paralela al eje X trazada por el punto de ordenada $y = n$.

Ejemplo.- La gráfica de la función $y = 2$ es una recta paralela al eje X trazada por el punto (0, 2). Observa que todos los puntos de la recta tienen ordenada 2, son de la forma $(x, 2)$.

x	$y = 2$
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2
...	...

Una **función constante** es aquella en la cual el valor de la variable dependiente siempre es el mismo sea cual sea el valor de la variable independiente.

Su gráfica es una **recta paralela al eje de abscisas X** y su expresión algebraica es **$y = n$** .

4.2. Rectas paralelas al eje Y

En la siguiente recta, paralela al eje de ordenadas Y , podemos observar que los puntos situados en la misma presentan ordenadas distintas para el mismo valor de la abscisa, $x = 2$. Por tanto, la gráfica **no es la de una función** ya que para un único valor de x , en este caso 2, le corresponden infinitos valores de y .

Algunos puntos de la recta son $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, ... Como lo que tienen en común estos puntos es que su abscisa vale 2, la ecuación de la recta es $x = 2$.

Las **rectas paralelas al eje de ordenadas Y** que pasan por el punto $(a, 0)$ tienen por ecuación $x = a$.

Estas rectas **no son gráficas de ninguna función**.

EJERCICIOS

14. Representa las rectas de ecuaciones $y = 2$, $y = 3$, $x = -2$, $x = 2$.
15. Halla la ecuación de las siguientes rectas y represéntalas sobre unos mismos ejes de coordenadas.
 - a) De la recta paralela al eje de abscisas y pasa por el punto $(4, 3)$.
 - b) De la recta paralela al eje de ordenadas y pasa por el punto $(-1, 7)$.
16. Halla la ecuación de las siguientes rectas.
 - a) Tiene pendiente 3 y ordenada en el origen -7 .
 - b) Es paralela a la recta de ecuación $x = 5$ y pasa por el punto $(-2, 8)$.
 - c) Tiene pendiente 5 y pasa por el punto $(-1, -2)$.
 - d) Pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(-1, 6)$.
 - e) Corta al eje Y en el punto -3 y pasa por el punto $(-2, 1)$.
 - f) Pasa por el punto $(2, -1)$ y es paralela a la recta de ecuación $y = 6x + 9$.
 - g) Es paralela al eje X y pasa por el punto $(-3, 2)$.
17. Determina los puntos de corte con los ejes de las rectas siguientes. Una vez hallados, señálalos sobre unos ejes cartesianos y representa gráficamente dichas rectas.
 - a) $y = 3x - 6$
 - b) $y = 2x + 5$
 - c) $y = 3x$
 - d) $y = -3$
 - e) $x = 4$

5. RESOLUCIÓN GRÁFICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Recordemos que los métodos algebraicos de resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado eran los métodos de sustitución, igualación y reducción. Vamos a introducir ahora el *método gráfico*.

Resolvemos el sistema
$$\begin{cases} x+2y=7 & (1) \\ 3x-2y=5 & (2) \end{cases}$$

- Despejamos la incógnita y en cada ecuación, obteniendo de esta forma sendas funciones:

$$(1) \quad y = \frac{-x+7}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \qquad (2) \quad y = \frac{3x-5}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

- Hacemos una tabla de valores y representamos gráficamente ambas rectas:

x	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$	x	$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$
1	3	1	-1
5	1	5	5
...



- Las coordenadas del punto de corte de ambas rectas son (3, 2), luego la solución del sistema es $x=3$, $y=2$, como puede comprobarse:

$$(1) \quad x+2y=3+2 \cdot 2=7$$

$$(2) \quad 3x-2y=3 \cdot 3-2 \cdot 2=5$$

Gráficamente, la solución del sistema viene dada por las coordenadas del punto de corte, ya que es el punto común a ambas rectas.

Método gráfico

Para resolver un sistema por el método gráfico seguimos estos pasos:

- Despejamos la incógnita y en cada ecuación, con lo que obtenemos sendas funciones.
- Realizamos la representación gráfica de cada una de ellas.
- Las coordenadas del punto de corte de ambas rectas es la solución del sistema.

Gráficamente, podemos clasificar un sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} ax+by=c & (r) \\ dx+ey=f & (s) \end{cases}$$

Rectas secantes
Sistema compatible determinado

Rectas coincidentes
Sistema compatible indeterminado

Rectas paralelas
Sistema incompatible

EJERCICIOS

18. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado.

a)
$$\begin{cases} x-y=2 \\ 5x-4y=7 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} 3x-y=5 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$
 c)
$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$
 d)
$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 6x+3y=21 \end{cases}$$