

## **SISTEM BILANGAN BULAT**

Untuk keperluan menghitung, kita dapat melakukan penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan.

Kegiatan tersebut sebagai suatu operasi. Operasi adalah mengambil sepasang bilangan untuk mendapatkan bilangan lain yang tunggal.

### **Definisi 1**

Suatu sistem matematika adalah sebuah himpunan dengan satu atau lebih operasi biner yang terdefinisi pada himpunan itu.

### **Definisi 2**

Operasi biner adalah suatu aturan yang menetapkan dua elemen dari suatu himpunan bilangan menjadi elemen lain yang tunggal dan berada di himpunan tersebut.

### **Definisi 3**

Notasi Suatu sistem matematika yang terdiri dari himpunan  $S$  dan operasi  $*$  pada  $S$  adalah ditunjukkan dengan  $(S, *)$ . Jika  $\#$  adalah operasi kedua pada  $S$ , maka  $(S, *, \#)$  adalah sistem matematika yang terdiri dari

himpunan  $S$ , operasi pertama  $*$ , dan operasi kedua  $\#$ .

## **Sifat-Sifat Operasi**

### **Definisi 4**

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan. Ditentukan bahwa  $*$  adalah suatu operasi pada  $S$ .

Operasi  $*$  disebut bersifat Tertutup, jika  $p \in S$ ,  $q \in S$  untuk setiap berlaku  $p * q \in S$ .

#### Definisi 5

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan. Ditentukan bahwa  $*$  adalah suatu operasi pada  $S$ .

Operasi  $*$  disebut bersifat Komutatif, jika  $p \in S$ ,  $q \in S$  untuk setiap

berlaku  $p * q \in q * p$ .

#### Definisi 6

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan. Ditentukan bahwa  $*$  adalah suatu operasi pada  $S$ .

Operasi  $*$  disebut bersifat Asosiatif, jika  $p, q, r \in S$  untuk setiap berlaku  $p * (q * r) = (p * q) * r$

#### Definisi 7

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan. Ditentukan bahwa  $*$  adalah suatu operasi pada  $S$ .

Operasi  $*$  disebut bersifat Memiliki unsur identitas, jika untuk setiap  $p \in S$  ada  $i \in S$  sehingga  $p * i = i * p$ .

$i$  disebut unsur identitas dari operasi  $*$

#### Definisi 8

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan. Ditentukan bahwa  $*$  adalah suatu operasi pada  $S$ .

Operasi  $*$  disebut bersifat Memenuhi sifat inversi (invertibel), jika untuk setiap  $p \in S$ , ada  $x \in S$  sehingga  $p * x = x * p = i$ .

$x$  disebut invers dari  $p$ , dan  $p$  disebut invers dari  $x$

#### Definisi 9

Misalkan  $S$  adalah suatu himpunan. Ditentukan bahwa  $*$  adalah suatu operasi pertama dan  $\#$  adalah suatu operasi kedua pada himpunan  $S$ .

operasi  $*$  bersifat distributive terhadap  $\#$  jika

$p * (q \# r) = (p * q) \# (p * r)$  untuk setiap  $p, q, r \in S$

### Definisi 10

Ditentukan  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

$p$  disebut kurang dari  $q$  (atau  $q$  disebut lebih dari  $p$ ), ditulis  $p < q$  atau  $q > p$ , jika ada suatu bilangan bulat positif  $r$  sehingga  $q - p = r$

### Contoh 1

- a)  $5 > 4$  sebab ada bilangan bulat positif 1 sehingga  $5 - 4 = 1$
- b)  $2 < 7$  sebab ada bilangan bulat positif 5 sehingga  $7 - 2 = 5$

Dua sifat dasar tentang urutan bilangan bulat yang perlu dipahami adalah:

- 1) ketertutupan bilangan bulat positif:  $p + q$  dan  $pq$  adalah bilangan-bilangan bulat positif untuk semua bilangan-bilangan bulat positif  $p$  dan  $q$ .
- 2) hukum trikotomi

Untuk setiap  $p \in \mathbb{Z}$  berlaku salah satu dari  $p > 0$ ,  $p = 0$  atau  $p < 0$

### Definisi 11

Bilangan riil terbesar  $[x]$  adalah bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan  $x$ , yaitu  $[x]$  adalah bilangan bulat yang memenuhi  $[x] \leq x \leq [x] + 1$ .

Ingat kembali:

- $f(x) = |x|$  disebut dengan fungsi bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan  $x$
- $g(x) = |x|$  disebut dengan fungsi bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan  $x$

### Prinsip Urutan yang Rapi (*Well Ordering Principle*)

- Suatu himpunan  $H$  disebut terurut rapi (*well ordered*) jika setiap himpunan bagian dari  $H$  yang tidak kosong mempunyai unsur terkecil.
- $k$  disebut unsur terkecil suatu himpunan  $S$  jika  $k$  kurang dari atau sama dengan  $x$  untuk semua  $x \in S$  atau  $k \leq x, \forall x \in S$