

Lecture

1D Nonlinear Convection - Difussion

Resolver el siguiente problema No Lineal de transmisión de calor 1D,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad 0 \leq y \leq 1; \tau > 0$$

Punto 1:

Obtenga las expresiones, mediante el método de Picard y Newton Raphson, que resuelven la no Linealidad del problema planteado.

Utilizando el método de Bubnov Galerkin y eligiendo la función de peso, $\underline{\mathbf{H}}^T$

$$\int_V \underline{\mathbf{H}}^T \frac{\partial \theta}{\partial t} dV = \int_V \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \left[\underline{\nabla} \cdot (\underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta) + q_v \right] dV + \int_{S_q} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \left[-\underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta \cdot \underline{n} - q^* \right] dS$$

Reordenando,

$$\int_V \underline{\mathbf{H}}^T \frac{\partial \theta}{\partial t} dV = \underbrace{\int_V \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\nabla} \cdot (\underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta) dV}_{\text{Integrando por partes}} + \int_V \underline{\mathbf{H}}^T \cdot q_v dV - \int_{S_q} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta \cdot \underline{n} dS - \int_{S_q} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot q^* dS$$

$$\int_V \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\nabla} \cdot (\underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta) dV = \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta d\Gamma - \int_V \underline{\nabla} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta dV$$

Y reemplazando,

$$\int_V \underline{\mathbf{H}}^T \frac{\partial \theta}{\partial t} dV = \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta d\Gamma - \int_V \underline{\nabla} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta dV + \int_V \underline{\mathbf{H}}^T \cdot q_v dV - \int_{S_q} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta \cdot \underline{n} dS - \int_{S_q} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot q^* dS$$

Simplificando y eliminando el término de fuerza volumétrico se obtiene

$$\int_V \underline{\mathbf{H}}^T \frac{\partial \theta}{\partial t} dV = - \int_V \underline{\nabla} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\alpha}(\theta) \cdot \underline{\nabla} \theta dV - \int_{S_q} \underline{\mathbf{H}}^T \cdot q^* dS$$

La incógnita se puede aproximar mediante $\theta \approx \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\hat{\theta}}}$, $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \approx \underline{\underline{H}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\theta}}}}{\partial \tau}$, $\theta = \underline{\underline{\nabla H}} \cdot \underline{\underline{\hat{\theta}}} = \theta = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\hat{\theta}}}$

$$\int_V \underline{\underline{H}}^T \cdot \underline{\underline{H}} \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\theta}}}}{\partial t} dV = - \int_V \underline{\underline{\nabla H}}^T \cdot \underline{\underline{\nabla H}} \cdot \underline{\underline{\hat{\theta}}} dV \cdot \underline{\underline{\alpha}}(\theta) - \int_{S_q} \underline{\underline{H}}^T \cdot q^* dS$$

Reordenando y despejando las incógnitas se obtiene,

$$\int_V \underline{\underline{H}}^T \cdot \underline{\underline{H}} dV \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\theta}}}}{\partial t} = - \int_V \underline{\underline{\nabla H}}^T \cdot \underline{\underline{\alpha}}(\theta) \cdot \underline{\underline{\nabla H}} dV \cdot \underline{\underline{\hat{\theta}}} - \int_{S_q} \underline{\underline{H}}^T \cdot q^* dS$$

Lo que podemos escribir en **forma matricial**,

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\dot{\hat{\theta}}}} + \underline{\underline{K}}(\theta) \cdot \underline{\underline{\hat{\theta}}} = \underline{\underline{F}}$$

Mediante el método para la aproximación temporal,

Discretización temporal, $\underline{\underline{\dot{\hat{\theta}}}}_{t+\beta \cdot \Delta t} = \frac{t+\Delta t \underline{\underline{\hat{\theta}}} - t \underline{\underline{\hat{\theta}}}}{\Delta t}$

Aproximando mediante Polinomios de Taylor, para la Incógnita en el instante siguiente,

$$t+\beta \cdot \Delta t \underline{\underline{\hat{\theta}}} = t \underline{\underline{\hat{\theta}}} + \left(\frac{t+\Delta t \underline{\underline{\hat{\theta}}} - t \underline{\underline{\hat{\theta}}}}{\Delta t} \right) \cdot \beta \cdot \Delta t \Rightarrow t+\beta \cdot \Delta t \underline{\underline{\hat{\theta}}} = \beta \cdot t+\Delta t \underline{\underline{\hat{\theta}}} + (1-\beta) \cdot t \underline{\underline{\hat{\theta}}}$$

Aproximando mediante Polinomios de Taylor, para el término de fuerza en el instante siguiente,

$$t+\beta \cdot \Delta t \underline{\underline{F}} = t \underline{\underline{F}} + \left(\frac{t+\Delta t \underline{\underline{F}}} - t \underline{\underline{F}} \right) \cdot \beta \cdot \Delta t \Rightarrow t+\beta \cdot \Delta t \underline{\underline{F}} = \beta \cdot t+\Delta t \underline{\underline{F}} + (1-\beta) \cdot t \underline{\underline{F}}$$

Reemplazando en la ecuación del problema obtenida,

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\dot{\hat{\theta}}}} + \underline{\underline{K}}(\theta) \cdot \underline{\underline{\hat{\theta}}} = \underline{\underline{F}}$$

$$\underline{\underline{M}} \cdot \left(\frac{{}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} - {}^t \hat{\underline{\theta}}}{\Delta t} \right) + \underline{\underline{K}}(\theta) \cdot (\beta \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} + (1-\beta) \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}}) = \beta \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}} + (1-\beta) \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$$

$$\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} - \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}} + \underline{\underline{K}}(\theta) \cdot \beta \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} + \underline{\underline{K}}(\theta) \cdot (1-\beta) \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}} = \beta \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}} + (1-\beta) \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$$

Si adoptamos un método implícito $\beta = 1$

$$\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} + \underline{\underline{K}}(\theta) \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}}$$

Reordenando, nos queda la **aproximación Transitoria de nuestra ecuación**

$$\left(\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} + \underline{\underline{K}}(\theta) \right) {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}}$$

Método de Picard

La iteración de Picard para la solución de problemas No Lineales puede escribirse como

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{K}} \left({}^{t+\Delta t} \underline{\underline{U}}^{(k-1)}, {}^t \underline{\underline{U}} \right) \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{U}}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{R}}({}^t \underline{\underline{U}})$$

Por lo tanto para nuestro problema en particular obtenemos, de la aproximación transitoria

$$\left(\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} + \underline{\underline{K}}(\theta) \right) {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}}$$

$$\left(\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \left({}^{t+\Delta t} \theta^{(k-1)} \right) \right) {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}}$$

**Aproximación
Transitoria,
Método Picard**

Método de Newton Raphson

La iteración de Newton Raphson para la solución de problemas No Lineales puede escribirse como

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{K}}\left({}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k-1)}, {}^t\underline{U}\right) \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underline{R}({}^t\underline{U}) \Rightarrow {}^{t+\Delta t}\underline{R}_{NR} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR} = \underline{0}$$

Linealizando,

$${}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR} = {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}^{(k-1)} + \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{U}} \right|^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}\Delta \underline{U}^{(k)}$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta \underline{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k-1)}$$

Reemplazando en la ecuación superior obtenemos,

$${}^{t+\Delta t}\underline{R}_{NR} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR} = \underline{0}$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{R}_{NR} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}^{(k-1)} - \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{U}} \right|^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}\Delta \underline{U}^{(k)} = \underline{0}$$

$$\left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{U}} \right|^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}\Delta \underline{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underline{R}_{NR} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{K}}_T^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}\Delta \underline{U}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\underline{R}_{NR} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}^{(k-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\Delta \underline{U}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k-1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto para nuestro problema en particular obtenemos, de la aproximación transitoria

$$\left(\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} + \underline{\underline{K}}(\theta) \right) {}^{t+\Delta t}\hat{\underline{\theta}} = {}^{t+\Delta t}\underline{F} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^t\hat{\underline{\theta}}$$

Siendo,

$$\underline{\underline{F}}_{NR} = \left[\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \left({}^{t+\Delta t} \underline{\theta} \right) \right] \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\hat{\theta}}$$

$$\underline{\underline{R}}_{NR} = \underline{\underline{M}} \cdot {}^t \underline{\hat{\theta}} + {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}}$$

Se calculan las derivadas del término No Lineal con respecto a cada variable,

$$K_{T_{ij}} = \frac{\partial F_{NRi}}{\partial \hat{\theta}_j} \Big|^{t+\Delta t, (k-1)} = \left[\frac{M_{in}}{\Delta t} + K_{in} \left({}^{t+\Delta t} \underline{\theta}^{(k-1)} \right) \right] \cdot \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \underline{\theta}^{(k)}}{\partial \hat{\theta}_j} + \frac{\partial K_{in} \left({}^{t+\Delta t} \underline{\theta}^{(k-1)} \right)}{\partial \hat{\theta}_j} \cdot \left({}^{t+\Delta t} \underline{\theta}^{(k-1)} \right)$$

Por lo tanto obtenemos, donde la matriz KT se realiza para cada elemento y luego se ensambla,

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{K}}_T^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \Delta \underline{\underline{U}}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{R}}_{NR} - {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}}_{NR}^{(k-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \Delta \underline{\underline{U}}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{U}}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{U}}^{(k-1)} \end{aligned}$$

**Aproximación
Transitoria,
Método Newton
Raphson**

Punto 2:

Resuelva para las siguientes condiciones, utilizando el método de Picard y Newton Raphson. Presente los resultados para los primeros 20 pasos de tiempo en una tabla y en un gráfico.

$$\theta(1, \tau) = 0 ; \alpha(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 ; \tau \geq 0$$

$$\theta(y, 0) = 1 ; 0 \leq y \leq 1$$

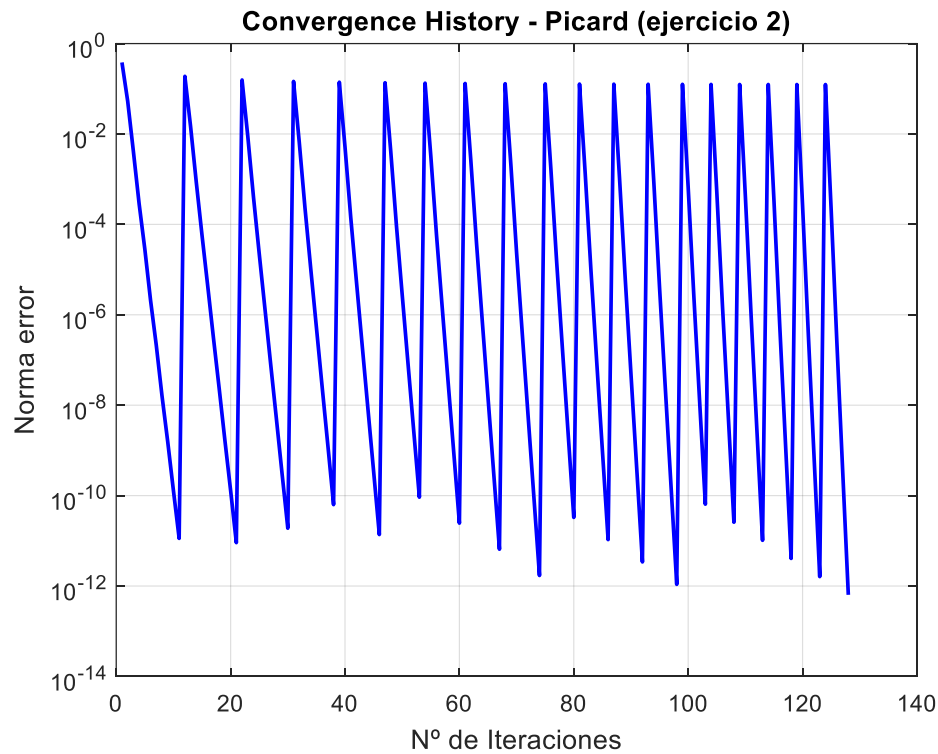
$$\alpha(\theta) = 0.5(\theta^2 + 1)$$

$$\Delta \tau = 0.1 ; \Delta y = 0.1$$

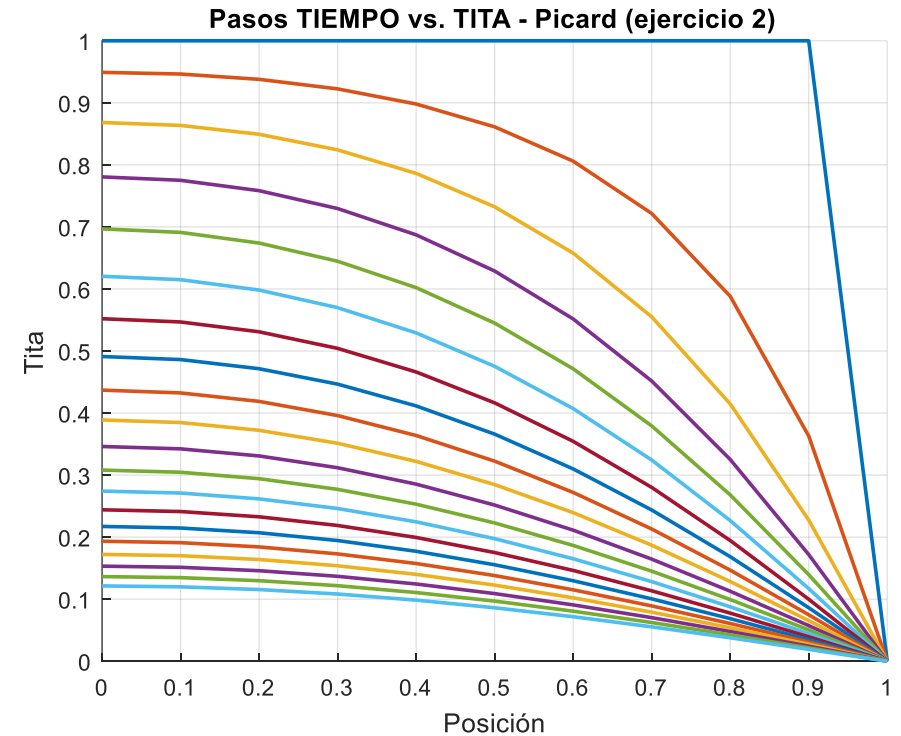
Donde la incógnita se aproxima como, $\theta = \theta_e = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

Picard

Resultados para la iteración de Picard, se pueden ver los resultados de los primeros 20 pasos de tiempo y cómo en pocos intervalos se llega al estacionario.



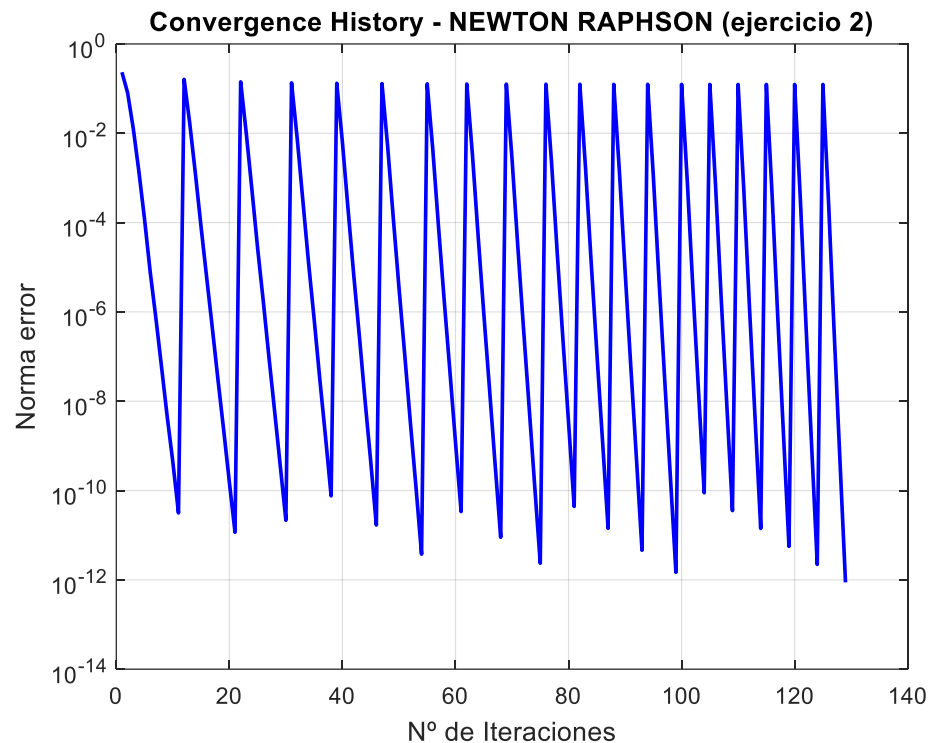
Se pueden observar las iteraciones “k” necesarias para garantizar la convergencia a la tolerancia especificada



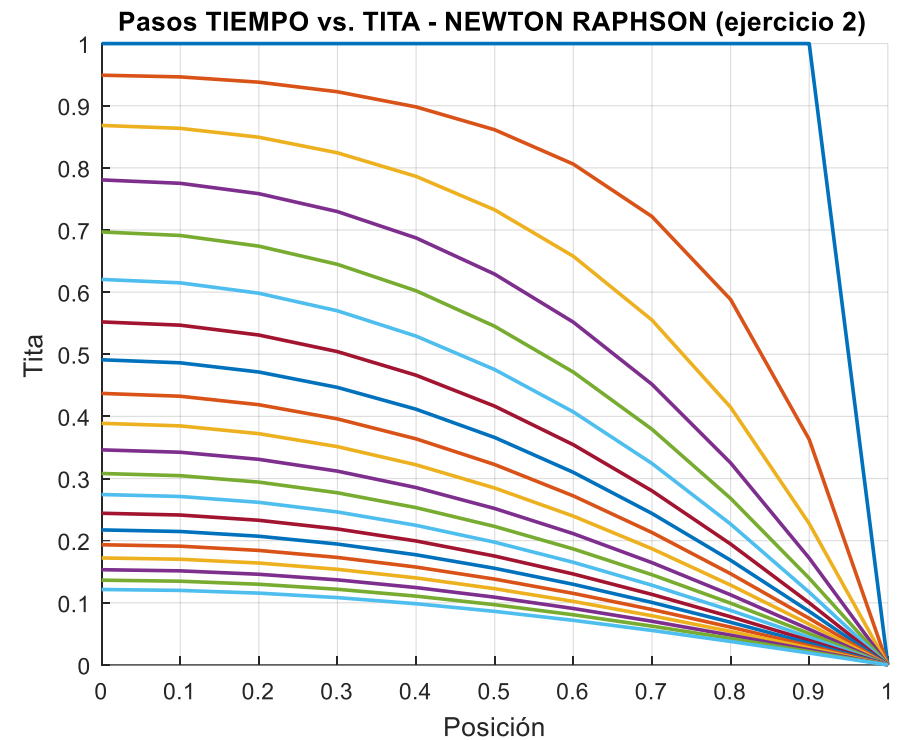
Se pueden observar las soluciones para las primeras 20 iteraciones temporales. Se observa cómo en pocos pasos de tiempo se alcanza el estado estacionario.

Newton Raphson

Resultados para la iteración de Newton Raphson, se pueden ver los resultados de los primeros 20 pasos de tiempo y cómo en pocos intervalos se llega al estacionario.



Se pueden observar las iteraciones “k” necesarias para garantizar la convergencia a la tolerancia especificada



Se pueden observar las soluciones para las primeras 20 iteraciones temporales. Se observa cómo en pocos pasos de tiempo se alcanza el estado estacionario

PICARD																				
Nodo	Pasos de tiempo																			
	1	0.949	0.868	0.781	0.697	0.620	0.552	0.491	0.437	0.389	0.346	0.308	0.274	0.244	0.217	0.193	0.172	0.153	0.136	0.121
1	1	0.949	0.868	0.781	0.697	0.620	0.552	0.491	0.437	0.389	0.346	0.308	0.274	0.244	0.217	0.193	0.172	0.153	0.136	0.121
2	1	0.946	0.864	0.775	0.691	0.615	0.547	0.486	0.432	0.385	0.342	0.305	0.271	0.241	0.215	0.191	0.170	0.151	0.135	0.120
3	1	0.938	0.849	0.758	0.674	0.598	0.531	0.471	0.419	0.372	0.331	0.294	0.262	0.233	0.207	0.184	0.164	0.146	0.130	0.116
4	1	0.922	0.824	0.730	0.645	0.570	0.504	0.447	0.396	0.351	0.312	0.277	0.246	0.219	0.195	0.173	0.154	0.137	0.122	0.108
5	1	0.898	0.786	0.687	0.602	0.529	0.466	0.412	0.364	0.322	0.285	0.253	0.225	0.199	0.177	0.157	0.140	0.124	0.111	0.098
6	1	0.861	0.732	0.629	0.545	0.475	0.416	0.366	0.322	0.285	0.252	0.223	0.197	0.175	0.155	0.138	0.123	0.109	0.097	0.086
7	1	0.806	0.658	0.552	0.471	0.407	0.354	0.310	0.272	0.239	0.211	0.187	0.165	0.146	0.130	0.115	0.102	0.091	0.081	0.072
8	1	0.722	0.555	0.452	0.379	0.324	0.280	0.244	0.213	0.187	0.165	0.145	0.128	0.113	0.101	0.089	0.079	0.070	0.062	0.055
9	1	0.588	0.415	0.325	0.268	0.227	0.195	0.168	0.147	0.128	0.113	0.099	0.088	0.078	0.069	0.061	0.054	0.048	0.043	0.038
10	1	0.363	0.227	0.172	0.139	0.117	0.100	0.086	0.075	0.065	0.057	0.050	0.045	0.039	0.035	0.031	0.027	0.024	0.022	0.019
11	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Newton Raphson																					
Nodo	Pasos de tiempo																				
	1	1	0.949	0.868	0.781	0.697	0.620	0.552	0.491	0.437	0.389	0.346	0.308	0.274	0.244	0.217	0.193	0.172	0.153	0.136	0.121
	2	1	0.946	0.864	0.775	0.691	0.615	0.547	0.486	0.432	0.385	0.342	0.305	0.271	0.241	0.215	0.191	0.170	0.151	0.135	0.120
	3	1	0.938	0.849	0.758	0.674	0.598	0.531	0.471	0.419	0.372	0.331	0.294	0.262	0.233	0.207	0.184	0.164	0.146	0.130	0.116
	4	1	0.922	0.824	0.730	0.645	0.570	0.504	0.447	0.396	0.351	0.312	0.277	0.246	0.219	0.195	0.173	0.154	0.137	0.122	0.108
	5	1	0.898	0.786	0.687	0.602	0.529	0.466	0.412	0.364	0.322	0.285	0.253	0.225	0.199	0.177	0.157	0.140	0.124	0.111	0.098
	6	1	0.861	0.732	0.629	0.545	0.475	0.416	0.366	0.322	0.285	0.252	0.223	0.197	0.175	0.155	0.138	0.123	0.109	0.097	0.086
	7	1	0.806	0.658	0.552	0.471	0.407	0.354	0.310	0.272	0.239	0.211	0.187	0.165	0.146	0.130	0.115	0.102	0.091	0.081	0.072
	8	1	0.722	0.555	0.452	0.379	0.324	0.280	0.244	0.213	0.187	0.165	0.145	0.128	0.113	0.101	0.089	0.079	0.070	0.062	0.055
	9	1	0.588	0.415	0.325	0.268	0.227	0.195	0.168	0.147	0.128	0.113	0.099	0.088	0.078	0.069	0.061	0.054	0.048	0.043	0.038
	10	1	0.363	0.227	0.172	0.139	0.117	0.100	0.086	0.075	0.065	0.057	0.050	0.045	0.039	0.035	0.031	0.027	0.024	0.022	0.019
	11	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Conclusiones Punto 2:

- Se puede observar cómo la barra parte desde una condición inicial de $T=1$ (en toda la barra) y comienza a disminuir su temperatura a medida que transcurre el tiempo ya que en el extremo derecho de la barra se aplica una Condición de contorno de Dirichlet.
- Se puede observar que tanto el método de **Picard** como el método de **Newton Raphson**, presentan la misma solución a igual intervalo de tiempo, y aproximadamente la misma cantidad de iteraciones.

Punto 3:

Resuelva el caso anterior para $\alpha(\theta)=1$ y compare los resultados. Use los Códigos anteriores y realice las modificaciones pertinentes.

Teniendo en cuenta que ahora el término difusivo NO presenta la No linealidad (al ser alfa constante), la iteración transitoria mediante el **método de Picard** se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left(\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \right)^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}}$$

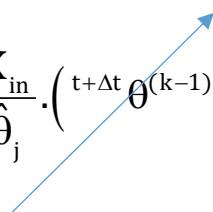
Donde Podemos ver que estamos resolviendo el sistema transitorio directamente, ya que no tenemos términos que dependen de los valores calculados en cada iteración.

Mientras que la iteración transitoria mediante el **método de Newton Raphson** se puede expresar de la siguiente forma:

$$\underline{\underline{F}}_{NR} = \left[\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \right] \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{\theta}}$$

$$\underline{\underline{R}}_{NR} = \underline{\underline{M}} \cdot {}^t \hat{\underline{\theta}} + {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{F}}$$

Se calculan las derivadas del término No Lineal con respecto a cada variable,

$$K_{T_{ij}} = \left. \frac{\partial F_{NRi}}{\partial \hat{\theta}_j} \right|^{t+\Delta t, (k-1)} = \left[\frac{M_{in}}{\Delta t} + K_{in} \right] \cdot \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \theta^{(k)}}{\partial \hat{\theta}_j} + \frac{\partial K_{in}}{\partial \hat{\theta}_j} \cdot \left({}^{t+\Delta t} \theta^{(k-1)} \right)$$


Donde la derivada de la matriz se anula, ya que es una constante.

Por lo tanto obtenemos, donde la matriz KT se realiza para cada elemento y luego se ensambla, Recordando que tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{K}}_T^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{\Delta U}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\underline{R}_{NR} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}^{(k-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\underline{\Delta U}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k-1)} \end{aligned}$$

Donde reemplazando obtenemos,

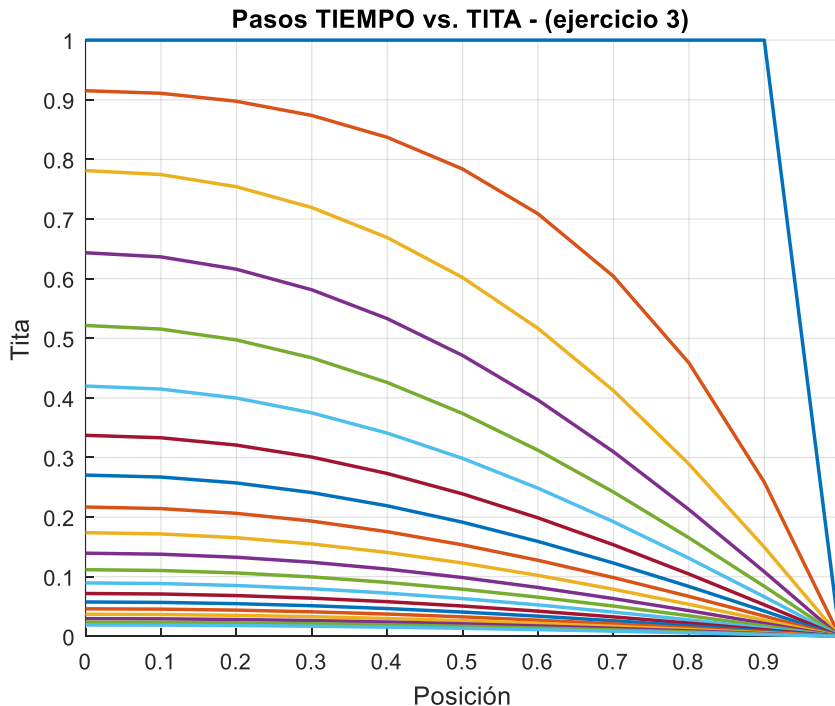
$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{K}}_T^{(k-1)} \cdot \left({}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k-1)} \right) = {}^{t+\Delta t}\underline{R}_{NR} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}^{(k-1)}$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{K}}_T^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{K}}_T^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\underline{R}_{NR} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{NR}^{(k-1)}$$

Donde los términos simplificados representan lo mismo, por lo tanto los podemos anular, quedándonos el mismo sistema dependiente del tiempo que teníamos en un principio

$$\left(\underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \right) {}^{t+\Delta t}\underline{\hat{\theta}} = {}^{t+\Delta t}\underline{F} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot {}^t\underline{\hat{\theta}}$$

Por lo tanto para este problema, sólo tendremos que resolver un sistema Lineal transitorio, independientemente de la aproximación solicitada,



Se pueden ver en la gráfica las distintas soluciones para los intervalos de tiempo planteados.

Solución																				
Nodo	Pasos de tiempo																			
1	1.000	0.915	0.781	0.643	0.521	0.420	0.337	0.271	0.217	0.174	0.139	0.112	0.090	0.072	0.058	0.046	0.037	0.030	0.024	0.019
2	1.000	0.911	0.775	0.637	0.515	0.415	0.333	0.267	0.214	0.172	0.138	0.110	0.089	0.071	0.057	0.046	0.037	0.029	0.024	0.019
3	1.000	0.898	0.754	0.616	0.497	0.400	0.321	0.257	0.206	0.165	0.133	0.106	0.085	0.068	0.055	0.044	0.035	0.028	0.023	0.018
4	1.000	0.874	0.719	0.581	0.467	0.375	0.301	0.241	0.193	0.155	0.124	0.100	0.080	0.064	0.051	0.041	0.033	0.026	0.021	0.017
5	1.000	0.837	0.669	0.533	0.426	0.341	0.273	0.219	0.176	0.141	0.113	0.090	0.073	0.058	0.047	0.037	0.030	0.024	0.019	0.015
6	1.000	0.784	0.602	0.471	0.374	0.298	0.239	0.191	0.153	0.123	0.099	0.079	0.063	0.051	0.041	0.033	0.026	0.021	0.017	0.014
7	1.000	0.709	0.517	0.396	0.312	0.249	0.199	0.159	0.128	0.102	0.082	0.066	0.053	0.042	0.034	0.027	0.022	0.017	0.014	0.011
8	1.000	0.604	0.412	0.310	0.242	0.192	0.154	0.123	0.099	0.079	0.063	0.051	0.041	0.033	0.026	0.021	0.017	0.013	0.011	0.009
9	1.000	0.459	0.289	0.213	0.165	0.131	0.105	0.084	0.067	0.054	0.043	0.035	0.028	0.022	0.018	0.014	0.011	0.009	0.007	0.006
10	1.000	0.259	0.150	0.108	0.084	0.066	0.053	0.042	0.034	0.027	0.022	0.017	0.014	0.011	0.009	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003
11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Conclusiones Punto 3:

- Se puede observar cómo la barra parte desde una condición inicial de $t=1$ (en toda la barra) y comienza a disminuir su temperatura a medida que transcurre el tiempo ya que en el extremo derecho de la barra se aplica una Condición de contorno de dirichlet.
- Para este problema, al no presentar componentes NO LINEALES, se pudo resolver el sistema directamente sin necesidad de realizar las iteraciones entre pasos de tiempo, como sucedía en el problema N° 2.

