

# Tp. N<sup>o</sup> 3

## *Flujo Laminar incompresible*

**Docentes:** Dr. Ing. Marcela Goldschmit

Ing. José Jimenez

**Alumno:** Ing. Gustavo Andrés Bustamante

# Ejercicio Nº 1

## Problema a resolver

Considere el flujo en un canal bidimensional ( flujo de Poiseuille ). Desarrolle un código que resuelva las ecuaciones de Navier Stockes para una malla de 20 elementos iguales de acuerdo a lo señalado en la *figura 1*. Resolver por el método de Penalización. Aplicar condiciones de contorno de acuerdo a lo indicado en la *figura 2*.

- Condición de simetría en el eje.
- Condición de no deslizamiento y no penetración en la pared.
- Flujo paralelo desarrollado con diferencia de presión  $\Delta p$  en los otros contornos.

Comparar con la solución analítica:

$$\underline{u} = \frac{\Delta P}{2\Delta x \mu} y(2\Delta y - y) \underline{e}_x$$



Figura 1: Dominio discretizado

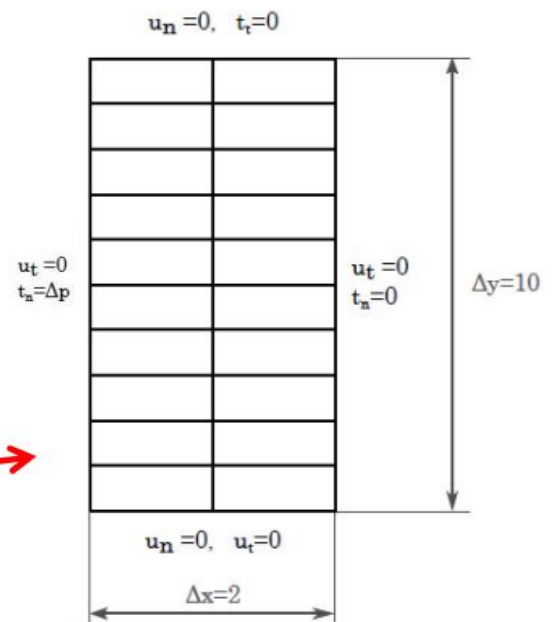


Figura 2: Condiciones de contorno

## 1. Ecuación de Navier Stokes

Para un flujo incompresible laminar, se escribe de la siguiente forma,

$$\rho \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} = -\underline{\nabla} P + \underline{\nabla} \cdot \left( \mu \left( \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^T \right) \right) + \underline{\mathbf{b}}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\mathbf{b}}}$$

Se detalla:

- El campo de presiones no tiene una ecuación de evolución. Su valor se ajusta de manera que en cada instante de tiempo el campo de velocidades satisfaga la condición de incompresibilidad.
- El N° de Reynolds, relaciona las fuerzas inerciales respecto de las fuerzas viscosas.
- La diferencia entre la ecuación de Navier – Stokes y la ecuación de convección difusión (y las razones de la complejidad en su resolución) son la existencia del término de presión y la No Linealidad del término convectivo.

### 1.1. Linealización del término convectivo

Ya que el término convectivo  $\left( v_i \frac{\partial v_j^{(k)}}{\partial x_i} \right)$  es una de las no linealidades de las ecuaciones de Navier

Stokes, se debe utilizar un método de Linealización. En el presente informe se opta por utilizar el método de Newton – Raphson para la Linealización del término convectivo. Se obtienen las siguientes expresiones,

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{v}} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k)} + \rho \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\mathbf{b}} + \rho \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}$$

## 1.2. Penalización de la Presión

Con la expresión Linealizada obtenida, aplicamos el método de Penalización de la presión con la finalidad de reducir el sistema de ecuaciones a tratar, teniendo en cuenta:

- Penalización de la presión  $P = \lambda \underline{\underline{m}} \underline{\underline{B}}_v \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}$
- Streamline Upwind Petrov Galerkin
- Discretización

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{H}}_v \cdot \hat{\underline{\underline{V}}} \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{B}}_v \cdot \hat{\underline{\underline{V}}} \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d = \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}^T \right] \underline{\underline{B}}_v \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}$$

La ecuación se pesará con  $\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{w}}$

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{H}}_v \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}$$

(Galerkin)

$$\underline{\underline{w}} = \tau \left( \underline{\underline{v}}^{(k-1)} \nabla \underline{\underline{H}}_v \right) \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}$$

(Petrov)

Se detallan las siguientes relaciones, donde la incógnita está en  $\underline{\underline{v}}$

$$\nabla \underline{\underline{v}} = \nabla \underline{\underline{H}}_v \cdot \hat{\underline{\underline{V}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\underline{H}}_v}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{\underline{H}}_v}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{\underline{H}}_v}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}$$

$$\underline{\mathbf{v}}^T \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial H_v}{\partial x} \\ \frac{\partial H_v}{\partial y} \\ \frac{\partial H_v}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \hat{\underline{\mathbf{v}}} \Rightarrow \underline{\mathbf{v}}^T \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} = \left[ v_x \frac{\partial H_v}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_v}{\partial y} + v_z \frac{\partial H_v}{\partial z} \right] \cdot \hat{\underline{\mathbf{v}}}$$

Siendo la Matriz C

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \left[ v_x \frac{\partial H_v}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_v}{\partial y} + v_z \frac{\partial H_v}{\partial z} \right]$$

Además se define la siguiente relación, donde la incógnita está en  $\underline{\mathbf{v}}^T$

$$\underline{\mathbf{v}}^T \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}}{\partial z} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{v}}^T \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_x^{(k-1)}}{\partial x} & \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_y^{(k-1)}}{\partial x} & \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_z^{(k-1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_x^{(k-1)}}{\partial y} & \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_y^{(k-1)}}{\partial y} & \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_z^{(k-1)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_x^{(k-1)}}{\partial z} & \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_y^{(k-1)}}{\partial z} & \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}_z^{(k-1)}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Operando obtenemos,

$$\underline{\mathbf{v}}^T \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_x^{(k-1)}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}_x^{(k-1)}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}_x^{(k-1)}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_y^{(k-1)}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}_y^{(k-1)}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}_y^{(k-1)}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_z^{(k-1)}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}_z^{(k-1)}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}_z^{(k-1)}}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{v}_z \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(k-1)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}}_v \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{V}}}}$$

### 1.3. FEM , armado de matrices

Las matrices, Linealizada la ecuación de Navier Stockes, para el fluido laminar incompresible, con penalización de la presión y aplicando el método SUPG quedan expresadas de la siguiente forma:

**Matriz de Masa : Término transitorio**  $\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^G + \underline{\underline{\mathbf{M}}}^P$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\underline{\mathbf{H}}}_v^T + \tau \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(k-1)T} \right) \cdot \rho \underline{\underline{\mathbf{H}}}_v dV \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{V}}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^G = \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \underline{\underline{\mathbf{H}}}_v^T \cdot \rho \underline{\underline{\mathbf{H}}}_v dV \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{V}}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^P = \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \tau \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(k-1)T} \right) \cdot \rho \underline{\underline{\mathbf{H}}}_v dV \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{V}}}}$$

**Matriz Convectiva :**  $\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{N}}^G + \underline{\underline{N}}^P$

$$\underline{\underline{N}} = \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\underline{H}}_v^T + \tau \underline{\underline{C}}^{(k-1)T} \right) \cdot \rho \underline{\underline{C}}^{(k-1)} dV \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}^{(k)} + \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\underline{H}}_v^T + \tau \underline{\underline{C}}^{(k-1)T} \right) \cdot \rho \underline{\underline{G}}^{(k-1)} \underline{\underline{H}}_v dV \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{N}}^G = \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\underline{H}}_v^T \right) \cdot \left[ \rho \underline{\underline{C}}^{(k-1)} + \rho \underline{\underline{G}}^{(k-1)} \underline{\underline{H}}_v \right] dV$$

$$\underline{\underline{N}}^P = \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \tau \underline{\underline{C}}^{(k-1)T} \right) \cdot \left[ \rho \underline{\underline{C}}^{(k-1)} + \rho \underline{\underline{G}}^{(k-1)} \underline{\underline{H}}_v \right] dV$$

**Matriz Difusiva :**  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_{\lambda}^G + \underline{\underline{K}}_{\lambda}^P + \underline{\underline{K}}_{vv}^G + \underline{\underline{K}}_{vv}^P$

$$\underline{\underline{K}}_{\lambda}^G = - \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \underline{\underline{B}}_v^T \cdot \underline{\underline{m}} \lambda \underline{\underline{m}}^T \cdot \underline{\underline{B}}_v dV \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{K}}_{\lambda}^P = + \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \tau \underline{\underline{C}}^{(k-1)T} \right) \cdot \underline{\underline{\nabla}} \left[ \lambda \underline{\underline{m}}^T \cdot \underline{\underline{B}}_v \right] dV \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{K}}_{vv}^G = + \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \underline{\underline{B}}_v^T \cdot \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}^T \right]^T \cdot 2\mu \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}^T \right] \cdot \underline{\underline{B}}_v dV \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{K}}_{vv}^P = - \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \tau \underline{\underline{C}}^{(k-1)T} \right) \cdot \underline{\underline{E}} dV \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}^{(k)}$$

Donde,



$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \hat{\mathbf{V}} = -2\mu \begin{bmatrix} \left( \frac{2}{3} \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2} \right) \hat{v}_{xi} + \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y \partial x} \right) \hat{v}_{yi} + \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z \partial x} \right) \hat{v}_{zi} \\ \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y \partial x} \right) \hat{v}_{xi} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2} \right) \hat{v}_{yi} + \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z \partial y} \right) \hat{v}_{zi} \\ \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z \partial x} \right) \hat{v}_{xi} + \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z \partial y} \right) \hat{v}_{yi} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2} \right) \hat{v}_{zi} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = -2\mu \begin{bmatrix} \left( \frac{2}{3} \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2} \right) & \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y \partial x} \right) & \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z \partial x} \right) \\ \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y \partial x} \right) & \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2} \right) & \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z \partial y} \right) \\ \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z \partial x} \right) & \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z \partial y} \right) & \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2} \right) \end{bmatrix}$$

Vector de Fuerza:  $\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^G + \underline{\underline{\mathbf{F}}}^P$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\underline{\mathbf{H}}}_v^T + \tau \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(k-1)T} \right) \cdot \left[ \underline{\underline{\mathbf{b}}} + \rho \underline{\underline{\mathbf{v}}}^{(k-1)} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}^{(k-1)} \right] dV + \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{\Gamma_q} \underline{\underline{\mathbf{H}}}_v^T \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} d\Gamma$$

#### 1.4. FEM , Consideraciones

Teniendo en cuenta de que el problema es estacionario, y que por las características del mismo podemos resolverlo sólo utilizando la parte de la discretización por Galerkin, las matrices necesarias para la resolución quedan de la siguiente forma,

$$\left( \left[ \underline{\underline{K}}_{\lambda}^{G^{(k-1)}} + \underline{\underline{K}}_{vv}^{G^{(k-1)}} \right] + \underline{\underline{N}}^{G^{(k-1)}} \right) \cdot \underline{\underline{\hat{V}}}^{(k)} = \underline{\underline{F}}^{(k-1)}$$

**Matriz convectiva**, Tomando en consideración la parte de Galerkin, la matriz convectiva queda expresada de la siguiente forma,

$$\underline{\underline{N}}^G = \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\underline{H}}_v^T \right) \cdot \left[ \rho \underline{\underline{C}}^{(k-1)} + \rho \underline{\underline{G}}^{(k-1)} \cdot \underline{\underline{H}}_v \right] dV$$

**Matriz Difusiva**, Tomando en consideración la parte de Galerkin, la matriz Difusiva queda expresada de la siguiente forma,

$$\underline{\underline{K}}_{\lambda}^G = - \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \underline{\underline{B}}_v^T \cdot \underline{\underline{m}} \lambda \underline{\underline{m}}^T \cdot \underline{\underline{B}}_v dV \cdot \underline{\underline{\hat{V}}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{K}}_{vv}^G = + \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \underline{\underline{B}}_v^T \cdot \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}^T \right]^T \cdot 2\mu \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}^T \right] \cdot \underline{\underline{B}}_v dV \cdot \underline{\underline{\hat{V}}}^{(k)}$$

**Vector de Fuerzas**,

Teniendo en cuenta que sólo tenemos una diferencia de presión, y no contaremos con fuerzas volumétricas, siendo las velocidades impuestas iguales a cero, el vector nos queda expresado de la siguiente forma

$$\underline{\mathbf{F}} = \sum_{e=1}^{N_{elem}} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\mathbf{H}}_v^T \right) \cdot \left[ \rho \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \right] dV + \sum_{e=1}^{N_{elem}} \int_{\Gamma_Q} \underline{\mathbf{H}}_v^T \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} d\Gamma$$

### Funciones de Forma,

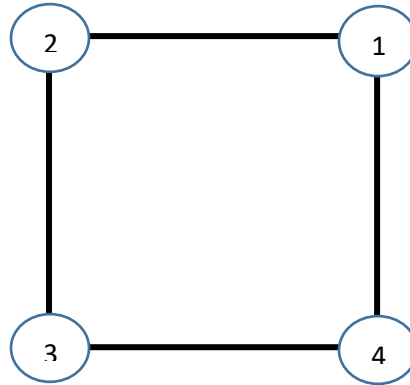
Para la interpolación se utilizarán Elementos cuadrangulares Lineales de cuatro nodos, cuyas funciones de forma se expresan:

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$



### **1.5. Forma matricial**

Forma matricial - Matriz convectiva

$$\underline{\underline{N}}^G = \sum_{e=1}^{N_{elem}} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\underline{H}}_v^T \right) \cdot \left[ \rho \underline{\underline{C}}^{(k-1)} + \rho \underline{\underline{G}}^{(k-1)} \cdot \underline{\underline{H}}_v \right] dV$$

La Obtención de la **Velocidad en la iteración** anterior se realizó de la siguiente forma:

$$\underline{V}_X^{(k-1)} = \hat{V}_{X_1}^{(k-1)} \cdot h_1 + \hat{V}_{X_2}^{(k-1)} \cdot h_2 + \hat{V}_{X_3}^{(k-1)} \cdot h_3 + \hat{V}_{X_4}^{(k-1)} \cdot h_4$$

$$\underline{V}_Y^{(k-1)} = \hat{V}_{Y_1}^{(k-1)} \cdot h_1 + \hat{V}_{Y_2}^{(k-1)} \cdot h_2 + \hat{V}_{Y_3}^{(k-1)} \cdot h_3 + \hat{V}_{Y_4}^{(k-1)} \cdot h_4$$

Recordando que las funciones de forma eran las siguientes:

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) , h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) , h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) , h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

Y reemplazando en los puntos de Gauss  $r = 0$  ,  $s = 0$

$$\underline{V}^{T(k-1)} = \begin{bmatrix} \underline{V}_X^{(k-1)} & \underline{V}_Y^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Recordando que la matriz de funciones de forma es,

$$\underline{\underline{H}}_v = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \quad J_e^{(-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial r}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Derivadas de las funciones de forma, respecto de “ r ” y “ s ”

$$\frac{dh_1}{dr} = \frac{1}{4}(1+s) \quad , \quad \frac{dh_2}{dr} = -\frac{1}{4}(1+s) \quad , \quad \frac{dh_3}{dr} = -\frac{1}{4}(1-s) \quad , \quad \frac{dh_4}{dr} = \frac{1}{4}(1-s)$$

$$\frac{dh_1}{ds} = \frac{1}{4}(1+r) \quad , \quad \frac{dh_2}{ds} = \frac{1}{4}(1-r) \quad , \quad \frac{dh_3}{ds} = -\frac{1}{4}(1-r) \quad , \quad \frac{dh_4}{ds} = -\frac{1}{4}(1+r)$$

Derivadas de las funciones de forma, respecto de “ x ” e “ y ”

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{dh_1}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dh_1}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{4}(1+s).J_e^{(-1)}(1,1)$$

$$\frac{dh_1}{dy} = \frac{dh_1}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dh_1}{ds} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{4}(1+r).J_e^{(-1)}(2,2)$$

$$\frac{dh_2}{dx} = \frac{dh_2}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dh_2}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{4}(1+s).J_e^{(-1)}(1,1)$$

$$\frac{dh_2}{dy} = \frac{dh_2}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dh_2}{ds} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{4}(1-r).J_e^{(-1)}(2,2)$$

$$\frac{dh_3}{dx} = \frac{dh_3}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dh_3}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{4}(1-s).J_e^{(-1)}(1,1)$$

$$\frac{dh_3}{dy} = \frac{dh_3}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dh_3}{ds} \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{1}{4}(1-r).J_e^{(-1)}(2,2)$$

$$\frac{dh_4}{dx} = \frac{dh_4}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dh_4}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{4}(1-s).J_e^{(-1)}(1,1)$$

$$\frac{dh_4}{dy} = \frac{dh_4}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dh_4}{ds} \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{1}{4}(1+r).J_e^{(-1)}(2,2)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \underline{H}_{\equiv v}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx} & 0 & \frac{dh_2}{dx} & 0 & \frac{dh_3}{dx} & 0 & \frac{dh_4}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dh_1}{dx} & 0 & \frac{dh_2}{dx} & 0 & \frac{dh_3}{dx} & 0 & \frac{dh_4}{dx} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{H}_{\equiv v}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dy} & 0 & \frac{dh_2}{dy} & 0 & \frac{dh_3}{dy} & 0 & \frac{dh_4}{dy} & 0 \\ 0 & \frac{dh_1}{dy} & 0 & \frac{dh_2}{dy} & 0 & \frac{dh_3}{dy} & 0 & \frac{dh_4}{dy} \end{bmatrix}$$

Y la matriz “ C ” puede expresarse de la siguiente forma,

$$\underline{C}^{(k-1)} = \underline{v}_x \cdot \frac{\partial \underline{H}_{\equiv v}}{\partial x} + \underline{v}_y \cdot \frac{\partial \underline{H}_{\equiv v}}{\partial y}$$

$$\underline{C}^{(k-1)} = \underline{v}_x \cdot \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx} & 0 & \frac{dh_2}{dx} & 0 & \frac{dh_3}{dx} & 0 & \frac{dh_4}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dh_1}{dx} & 0 & \frac{dh_2}{dx} & 0 & \frac{dh_3}{dx} & 0 & \frac{dh_4}{dx} \end{bmatrix} + \underline{v}_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dy} & 0 & \frac{dh_2}{dy} & 0 & \frac{dh_3}{dy} & 0 & \frac{dh_4}{dy} & 0 \\ 0 & \frac{dh_1}{dy} & 0 & \frac{dh_2}{dy} & 0 & \frac{dh_3}{dy} & 0 & \frac{dh_4}{dy} \end{bmatrix}$$

La Obtención del **Gradiente de Velocidad** en la iteración anterior se realizó de la siguiente forma:

La inversa del Jacobiano, tiene la diagonal distinta de cero

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{Vx}^{(k-1)}}{dx} &= \hat{V}_{x_1}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(1,1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial r} + \hat{V}_{x_2}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(1,1) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial r} + \hat{V}_{x_3}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(1,1) \cdot \frac{\partial h_3}{\partial r} + \hat{V}_{x_4}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(1,1) \cdot \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ \frac{d\underline{Vy}^{(k-1)}}{dy} &= \hat{V}_{y_1}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(2,2) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial s} + \hat{V}_{y_2}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(2,2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial s} + \hat{V}_{y_3}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(2,2) \cdot \frac{\partial h_3}{\partial s} + \hat{V}_{y_4}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(2,2) \cdot \frac{\partial h_4}{\partial s} \\ \frac{d\underline{Vx}^{(k-1)}}{dy} &= \hat{V}_{x_1}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(2,2) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial s} + \hat{V}_{x_2}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(2,2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial s} + \hat{V}_{x_3}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(2,2) \cdot \frac{\partial h_3}{\partial s} + \hat{V}_{x_4}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(2,2) \cdot \frac{\partial h_4}{\partial s} \\ \frac{d\underline{Vy}^{(k-1)}}{dx} &= \hat{V}_{y_1}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(1,1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial r} + \hat{V}_{y_2}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(1,1) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial r} + \hat{V}_{y_3}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(1,1) \cdot \frac{\partial h_3}{\partial r} + \hat{V}_{y_4}^{(k-1)} \cdot J_e^{(-1)}(1,1) \cdot \frac{\partial h_4}{\partial r}\end{aligned}$$

Y reemplazando en los puntos de Gauss  $r = 0$  ,  $s = 0$

$$\underline{\underline{G}}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} \frac{d\underline{Vx}^{(k-1)}}{dx} & \frac{d\underline{Vx}^{(k-1)}}{dY} \\ \frac{d\underline{Vy}^{(k-1)}}{dX} & \frac{d\underline{Vy}^{(k-1)}}{dy} \end{bmatrix}$$

Forma matricial - Matriz Difusiva

$$\underline{\underline{K}}_{\lambda}^G = - \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \underline{\underline{B}}_v^T \cdot \underline{\underline{m}} \lambda \underline{\underline{m}}^T \cdot \underline{\underline{B}}_v dV \cdot \hat{V}^{(k)}$$

$$= - \sum_{e=1}^{Nelem} \int_{V^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix}^T \cdot \underline{\underline{m}} \lambda \underline{\underline{m}}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix} dV$$

Siendo,  $\underline{\underline{m}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Forma matricial - Matriz Difusiva



$$\underline{\underline{K}}_{vv}^G = + \sum_{e=1}^{N_{elem}} \int_{V(e)} \underline{\underline{B}}_v^T \cdot \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}^T \right]^T \cdot 2\mu \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}^T \right] \cdot \underline{\underline{B}}_v dV \cdot \hat{\underline{\underline{V}}}^{(k)}$$

Como ya se ha demostrado,

$$\underline{\underline{B}}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la Matriz Difusiva Total queda,

$$\underline{\underline{K}}^{(k-1)} = \underline{\underline{K}}_{\lambda}^{G^{(k-1)}} + \underline{\underline{K}}_{vv}^{G^{(k-1)}}$$

Vector de resultados,

$$\underline{\mathbf{F}} = \sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} \int_{V^{(e)}} \left( \underline{\mathbf{H}}_v^T \right) \cdot \left[ \rho \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \right] dV + \sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} \int_{\Gamma_q} \underline{\mathbf{H}}_v^T \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} d\Gamma$$

Recordando que,

$$\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{(k-1)} \cdot \left[ \begin{matrix} v_x & v_y \end{matrix} \right]^T$$

1x2
2x2
2 x 1

Recordando que:

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = t_n$$

Que la presión se aplica  
en una sola cara del elemento

### Constantes y valores Numéricos:

Las constantes del problema son las siguientes,

$\mu$	$1e^{-3}$
$\rho$	$1e^3$
$\Delta y$	10
$\Delta x$	2
$\Delta p$	$1e^{-9}$
$\lambda$	Variable: $1e^{-2}, 1e^{-0}, 1e^2, 1e^4, 1e^6, 1e^8$

Teniendo en cuenta que se deben verificar la cantidad de puntos de Gauss para evitar el problema de Bloqueo, se adopta el siguiente punto de gauss para cada elemento,

$$r = 0.0$$

$$s = 0.0$$

$$\alpha = 2.0$$

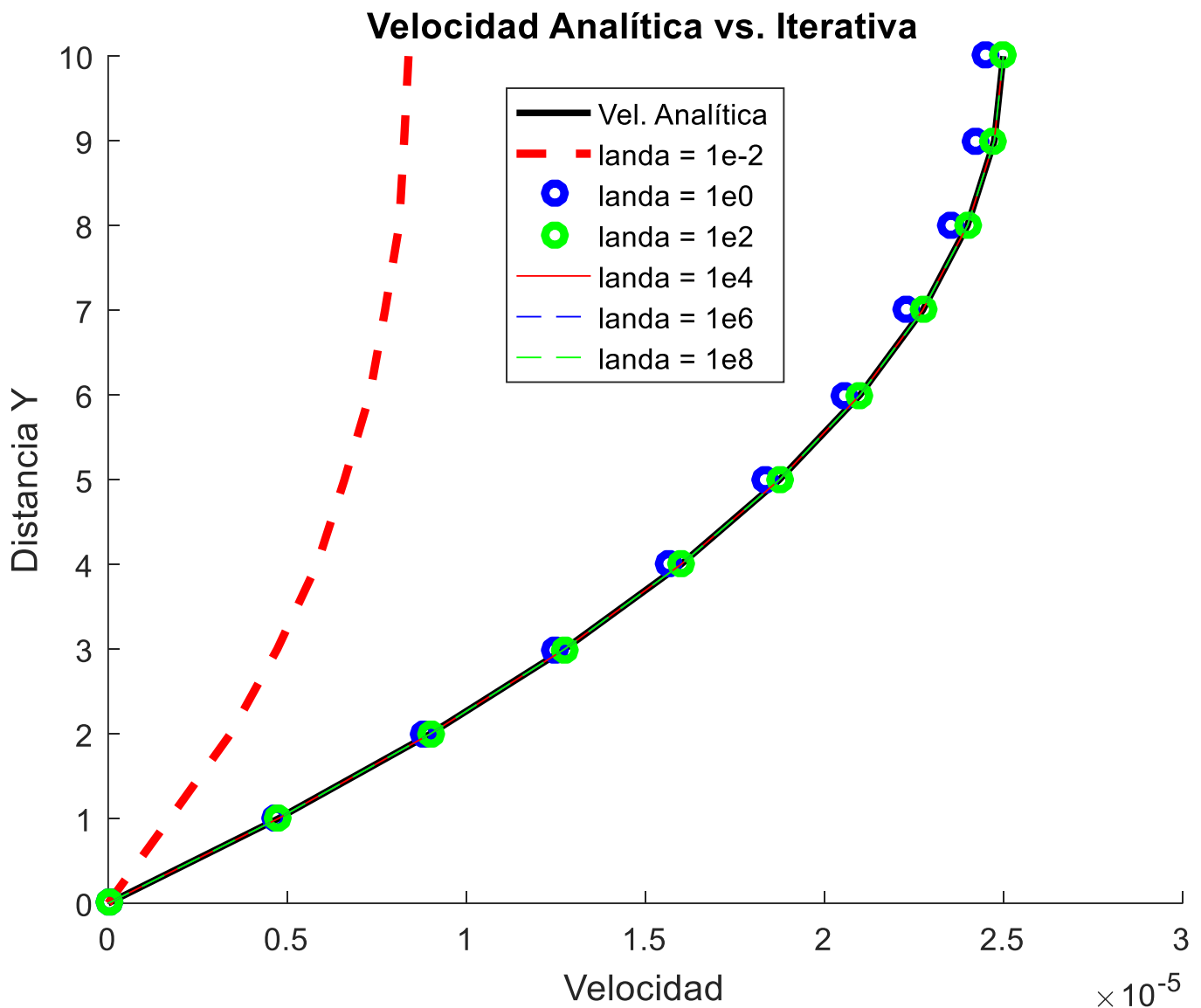
De esta forma garantizamos que

$$\text{Nº de pto. Gauss} < \text{Nº incógnitas}$$

*Las velocidades de la iteración anterior se obtuvieron como un promedio de los valores de las velocidades en los nodos de cada elemento.*

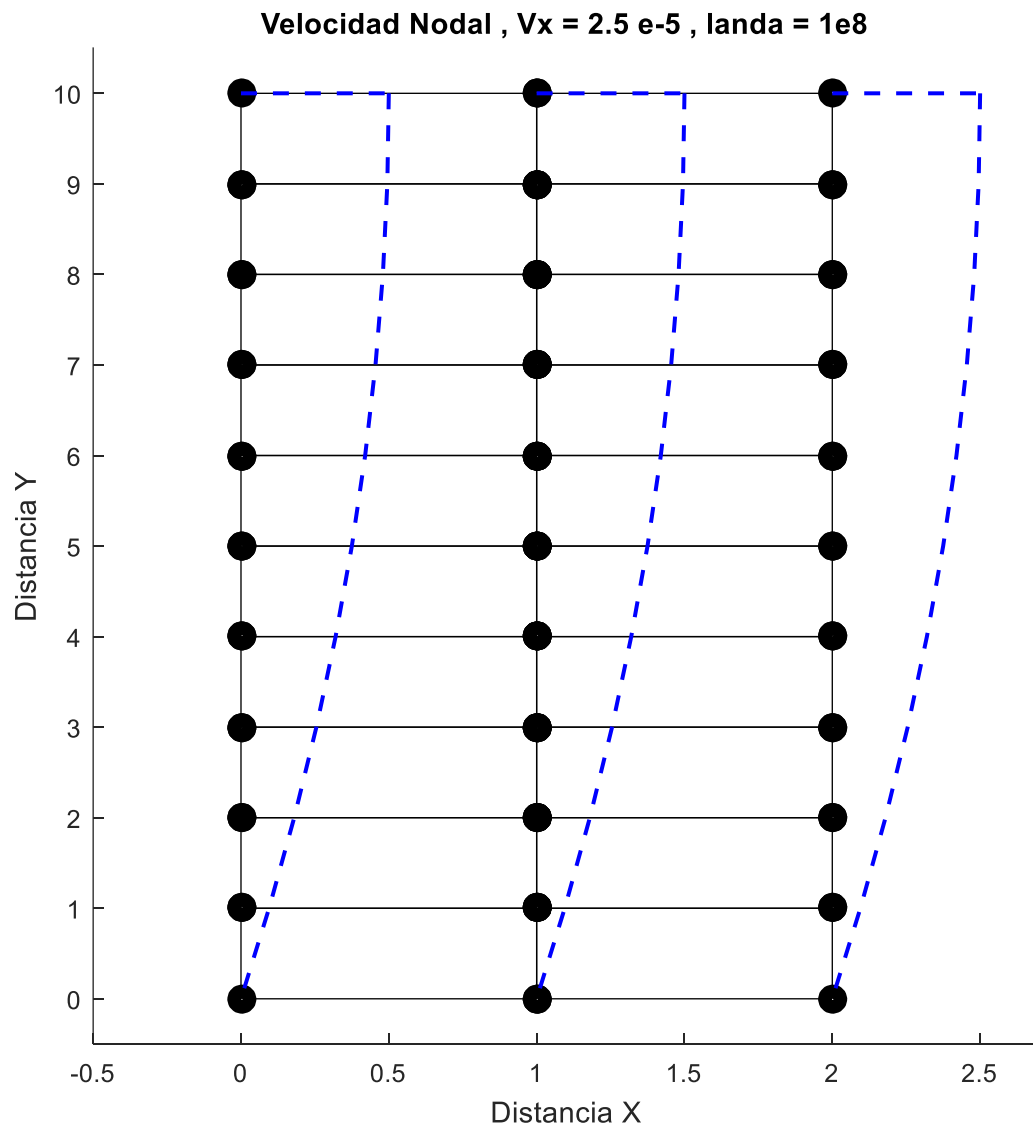
## RESULTADOS OBTENIDOS:

Se pueden observar la comparación entre la velocidad analítica (proporcionada en el enunciado) y las distintas velocidades calculadas por el método de Elementos Finitos para distintos valores de constante de penalización.



Se observa que a medida que la constante de penalización es más chica los resultados difieren del calculado analíticamente, hasta el caso extremo de un valor muy chico que termina por lograr resultados totalmente erróneos.

En la siguiente Figura se puede observar el perfil de velocidades, tomando como base los nodos de la malla que tiene la misma componente en dirección “x”.



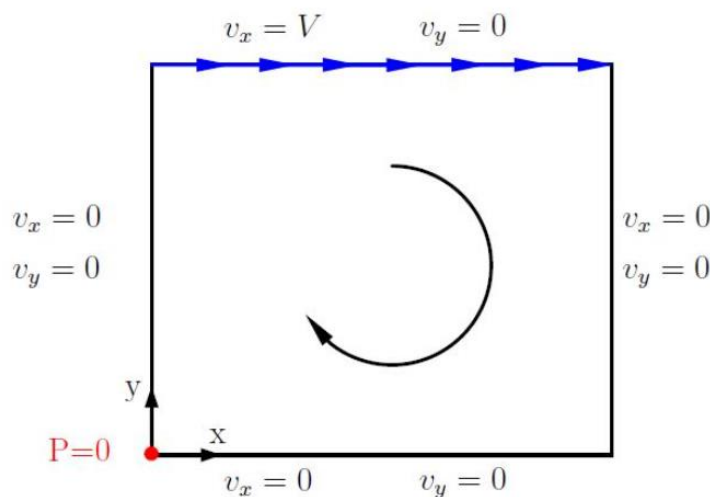
# Ejercicio Nº 2

## Problema a resolver

El flujo conducido en una cavidad (Lid Driven Cavity) consiste en un recinto cuadrado que posee condiciones de velocidad nula en tres de sus lados y en el restante, borde superior, tiene solo una condición de velocidad tangencial. La condición de presión nula se coloca en el vértice inferior izquierdo. Las condiciones de contorno se muestran en la Figura 3.

Modelar una cavidad cuadrada con un Número de Reynolds de 100.

Utilizar una malla regular de 20 elementos por lado y compare los resultados obtenidos con los calculados por Ghia, mostrados en la tabla 1.



Línea Horizontal	
Posición x [m]	Velocidad y [m]
0.0625	0.0923
0.0703	0.1009
0.0780	0.1089
0.0938	0.1232
0.1563	0.1608
0.2266	0.1751
0.2344	0.1753
0.5000	0.0545
0.8047	-0.2453
0.8594	-0.2245
0.9330	-0.1614
0.9453	-0.1031
0.9531	-0.0886
0.9609	-0.0739
0.9688	-0.0591
1.0000	-0.0021

Línea Vertical	
Velocidad x [m]	Posición y [m]
0.0625	0.0923
0.0703	0.1009
0.0780	0.1089
0.0938	0.1232
0.1563	0.1608
0.2266	0.1751
0.2344	0.1753
0.5000	0.0545
0.8047	-0.2453
0.8594	-0.2245
0.9330	-0.1614
0.9453	-0.1031
0.9531	-0.0886
0.9609	-0.0739
0.9688	-0.0591
1.0000	-0.0021

Tabla 1: Resultados obtenidos por Ghia para Re=100

### **Constantes y valores Numéricos:**

Las constantes del problema son las siguientes (obtenidas del paper de Ghia),

$$\rho = 1.0 \quad v_x = 1.0 \quad R_e = 100.0 \quad \mu = \frac{\rho \cdot v_x}{R_e} \quad L_{\max} = 1.0 \quad \lambda = 1e8$$

Teniendo en cuenta que se deben verificar la cantidad de puntos de Gauss para evitar el problema de Bloqueo, se adopta el siguiente punto de gauss para cada elemento,

$$r = 0.0$$

$$s = 0.0$$

$$\alpha = 2.0$$

De esta forma garantizamos que

$$\mathbf{N^{\circ} \text{ de pto. Gauss} < N^{\circ} \text{ incógnitas}}$$

El planteo por elementos finitos y linealización del término convectivo de las ecuaciones de Navier Stokes son los mismos del ejercicio Nº1 ya presentado en el informe,

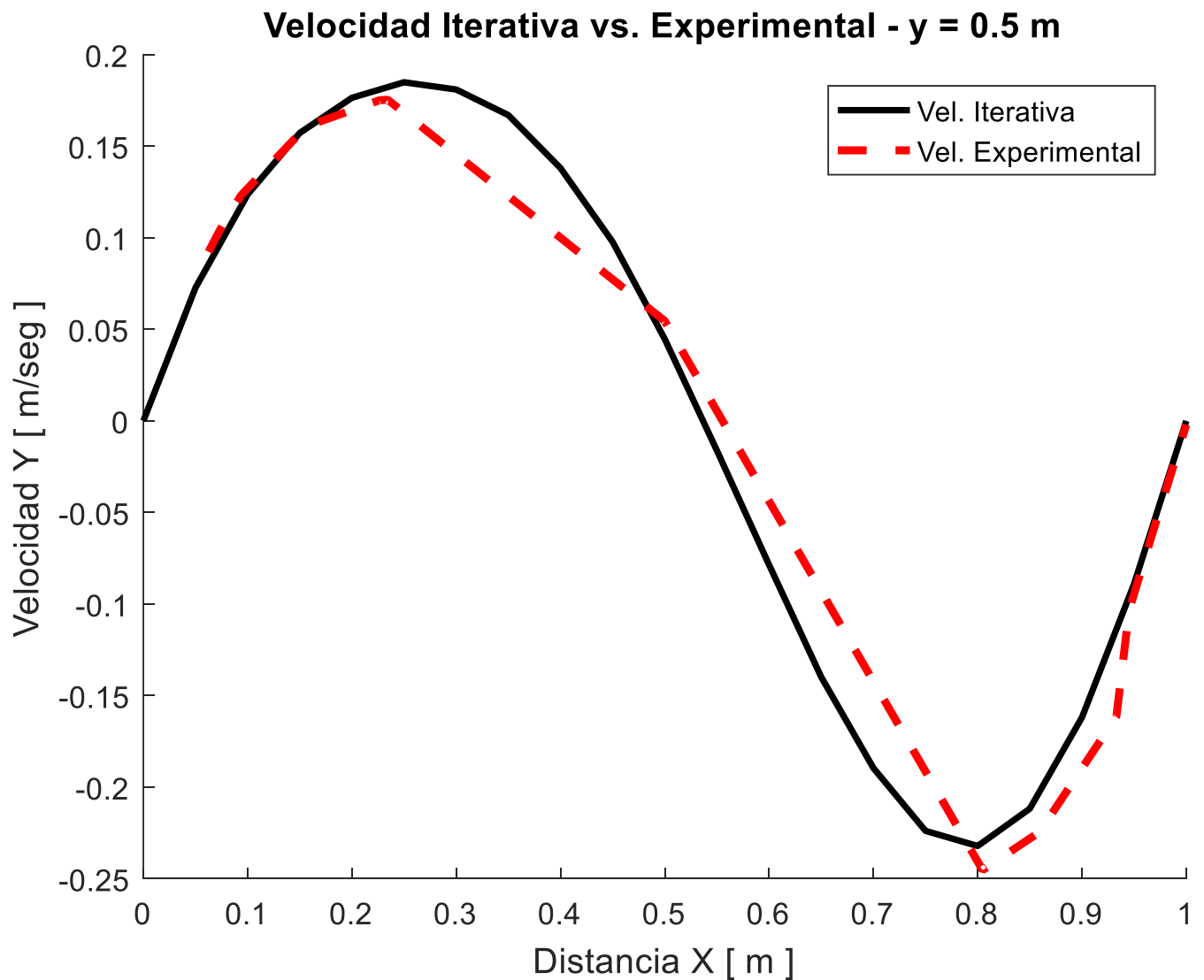
Las velocidades de la iteración anterior se obtuvieron como un promedio de los valores de las velocidades en los nodos de cada elemento.



## RESULTADOS OBTENIDOS:

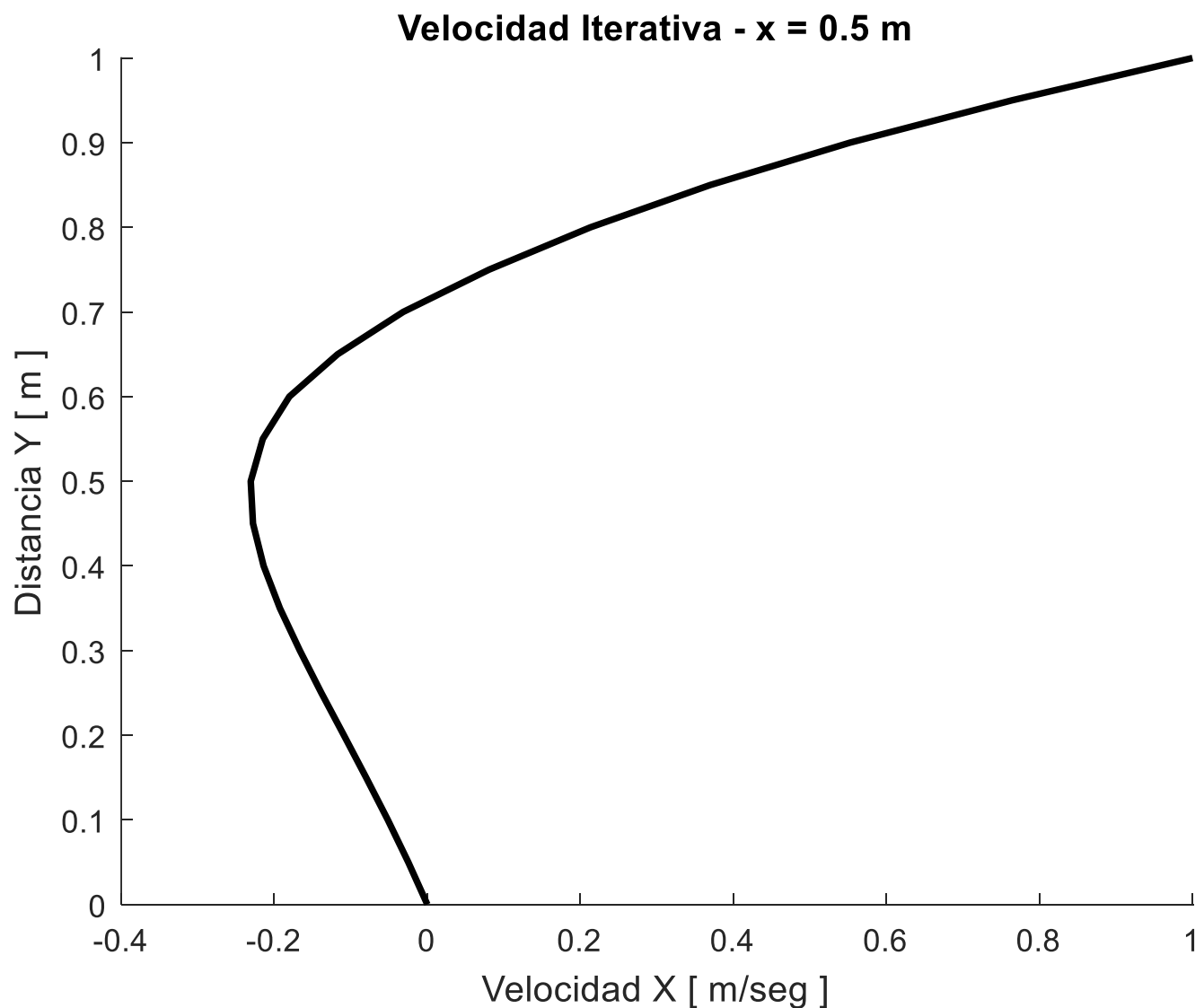
Se pueden observar la comparación entre la velocidad experimental (proporcionada en el enunciado, tabla de Ghia) y las distintas velocidades calculadas por el método de Elementos Finitos (velocidad iterativa). Línea Horizontal a la altura  $y = 0.5$  metros.

Se puede notar en la Figura que en los extremos las velocidades en dirección “y”, son iguales a cero. Lo cual corresponde con lo planteado al imponer la condición de contorno de Dirichlet nula en dichos bordes.

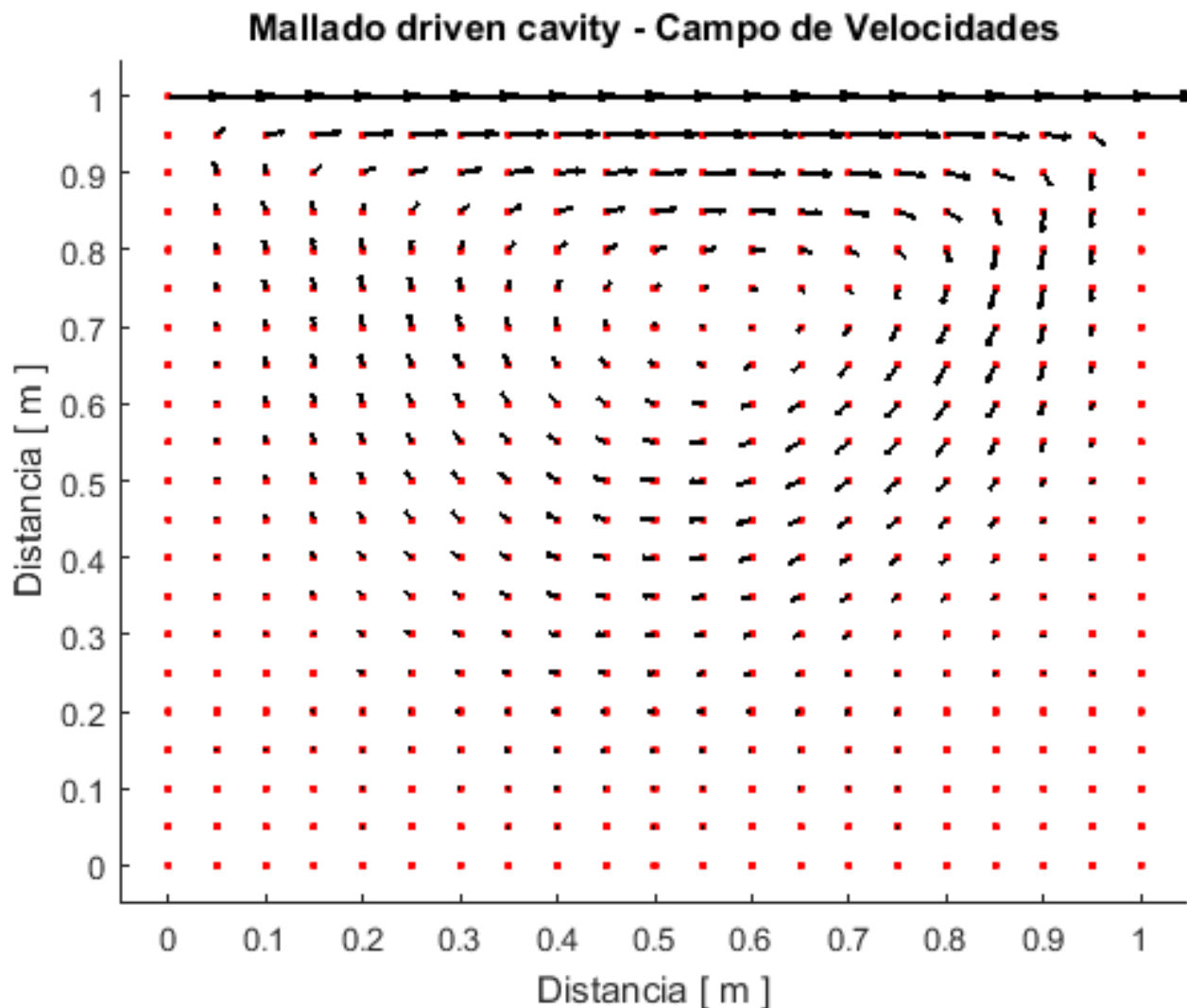


Se pueden observar la comparación entre la velocidad experimental (proporcionada en el enunciado, tabla de Ghia) y las distintas velocidades calculadas por el método de Elementos Finitos (velocidad iterativa). Línea vertical a la distancia  $x = 0.5$  metros.

Se puede notar en la figura que en el extremo inferior la velocidad en dirección “ $x$ ” es igual a cero. Lo cual coincide con la condición de contorno de Dirichlet Nula impuesta en dicho borde. Mientras en la cara superior la velocidad en dirección “ $x$ ” es unitaria, lo cual coincide también con la velocidad impuesta en dicha zona.



Se pueden observar el campo de velocidades en la cavidad, calculadas por el método de Elementos Finitos (velocidad iterativa). Notándose que el campo de velocidad tiene un sentido de rotación, generando un vórtice bien marcado.



Se pueden observar el campo de velocidades en la cavidad, calculadas por el método de Elementos Finitos (velocidad iterativa). En la siguiente figura se puede apreciar con más detalle el vórtice generado por la distribución de velocidades.

