姓　名

学　号

班　号

南 京 林 业 大 学 试 卷(B)

课程 <u>线 性 代 数（B）</u> 2011~2012 学年第<u> 一 </u>学期

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1．在四阶行列式中，项 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 的符号为<u> － </u>；

2．设 A 为三阶方阵且 $|A|=1$，则 $|-2A^*|=$ <u>-8</u>；

3．设 $\vec{\beta}_1=(1,1,1)^T$、$\vec{\beta}_2=(1,2,k)^T$、$\vec{\beta}_3=(1,4,k^2)^T$，则当 $k=$ <u>1 或 2</u> 时，该向量组线性相关；

4．已知 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=\underline{\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}}$；

5．设 $A=(1,2,3),\ B=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，则 $(BA)^8=\underline{\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}}$；

6．线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是 $\underline{R(A)=R(A,b)}$；

7．设三阶方阵 A 的特征值为 $-1,\ 1,\ 2$，则 $|A|=$ <u>-2</u>；

8．设向量组 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$ 是<u> 线性无关 </u>；

9．若矩阵 A、B 使得 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 成立，则 A、B 满足 $\underline{AB=BA}$ 时；

10．设 $Ax=b$ 为四元非齐次线性方程组，$R(A)=3$，$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 是它的两个解向量，且

$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$、$\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，则该方程组的通解为 $x=\underline{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

二、（14 分）计算下列行列式：

1．$D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}$；　2. $D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

1．解 $D_4=\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7&-5&13\\2&-1&2\\7&-7&12\end{vmatrix}$　　4 分,

$$=-\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27.$$ 7 分

2. 解 $D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$ 3 分

$$= (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$ 7 分

三、(10 分)已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$AX = 2X + A$，求 X.

解 $X = (A-2E)A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4 分 10 分

四、(12 分)设向量组

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

求该向量组的秩及一个最大线性无关组，并将其余向量由所求出的最大无关组线性表示。

解 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -21 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 6 分

所以最大线性无关组是 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$，且 $\vec{\alpha}_4 = -\frac{4}{3}\vec{\alpha}_1 + \frac{1}{3}\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3$，$\vec{\alpha}_5 = -\frac{1}{3}\vec{\alpha}_1 + \frac{1}{3}\vec{\alpha}_2$ 12 分

五、(12 分) λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

(1)有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解时，求方程组的所有解.

解 $(A,b)=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(1-\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{bmatrix}$ 4 分

(1) 所以，当 $\lambda \neq 1, \lambda = -2$ 时，$R(A)=R(A,b)=3$ 方程组有唯一解；

(2) 当 $\lambda=-2$ 时，$R(A)=2<R(A,b)=3$ 方程组无解； 8 分

(3) 当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多组解，

所以， $x=c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c_1, c_2 为任意常数). 12 分

六、(12 分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求 A 的特征值和对应的所有特征向量.

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+2)(1-\lambda)^2=0$

则 $\lambda_1=-2, \lambda_2=\lambda_3=1$ 4 分

1) 当 $\lambda_1=-2$ 时，$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，特征向量为 $k_1\xi_1$；

(其中 $k_1 \neq 0$) 8 分

2) 当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得 $\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，特征向量为

$k_2\xi_2+k_3\xi_3$；(其中 $k_2k_3 \neq 0$) 12 分

七、(8 分) 设方阵 A 满足 $A^2-A+E=0$，试求 $(A-E)^{-1}$.

证明：$A^2-A+E=0 \Rightarrow A(A-E)+E=0 \Rightarrow (A-E)^{-1}=-A$ 8 分

八、(8 分) 已知向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r$ 是线性无关，$\vec{\beta}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r$ 是线性相关的，则 $\vec{\beta}$ 可由

$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 线性表示且表达式惟一.

证明：因为向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 是线性无关 $\Rightarrow R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r)=r$，

又因为 $\vec{\beta},\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 是线性相关的 $\Rightarrow R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r,\vec{\beta})<r+1$，　　4 分

则 $R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r)=R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r,\vec{\beta})=r$，$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r)X=\vec{\beta}$ 有且仅有唯一解，

则 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 线性表示且表达式惟一.　　8 分

九、（6 分）设方阵 A、B，试求 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}$.

解 设 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，因为 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$.　　3 分

解得　$A_{11}=A^{-1}, A_{12}=0, A_{21}=-A^{-1}CB^{-1}, A_{22}=B^{-1}$.　　6 分