《线性代数》模拟试题 04

专业：______________ 班级：______________ 姓名：______________ 学号：______________

<table>
<tr><th colspan="2">题号</th><th>得分</th><th>合计</th><th>总分</th></tr>
<tr><td rowspan="10">一</td><td>1</td><td>2</td><td rowspan="10">20</td><td rowspan="22">100</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="5">二</td><td>11</td><td>3</td><td rowspan="5">15</td></tr>
<tr><td>12</td><td>3</td></tr>
<tr><td>13</td><td>3</td></tr>
<tr><td>14</td><td>3</td></tr>
<tr><td>15</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="6">三</td><td>16</td><td>9</td><td rowspan="6">54</td></tr>
<tr><td>17</td><td>9</td></tr>
<tr><td>18</td><td>9</td></tr>
<tr><td>19</td><td>9</td></tr>
<tr><td>20</td><td>9</td></tr>
<tr><td>21</td><td>9</td></tr>
<tr><td>四</td><td>22</td><td>11</td><td>11</td></tr>
</table>

一、填空题：1～10 小题，每小题 2 分，共 20 分.

1. 如果行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=$________.

2. 设$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，则$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=$________.

3. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$线性________（填写相关或无关）.

4. 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$均为 3 阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则$|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=$________（这里$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$均为三维列向量）.

5. n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则矩阵$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$的逆矩阵是________.

6. 已知$\boldsymbol{A}$为 4 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$|\boldsymbol{A}^*|=$________.

7. $\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$\boldsymbol{b}$为n维向量，非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解的充分必要条件是________.

8. 若 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值分别为 1、2、3，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$________.

9. 已知$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$为可逆矩阵，若矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$，经化简可得$\boldsymbol{X}=$________.

10. 若$f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$为正定二次型，则$t$的取值范围是________.

二、单项选择题：11～15 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶矩阵，满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有（　　）.

(A) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$　　(B) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(C) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$　　(D) $|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{B}|=0$

12. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶矩阵，则正确的是（　　）.

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$　　(D) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$

13. 下列命题正确的是 (　　).

(A) 若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关

(B) 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示

(C) 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 一定线性无关

(D) 若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_r$ 秩相等，则这个两个向量组一定等价

14. n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 系数矩阵的秩为 r，则其有非零解的充分必要条件是 (　　).

(A) $r>n$　　(B) $r<n$　　(C) $r\ge n$　　(D) $r=n$

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (　　).

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 既不合同也不相似

三、计算题：16～21 小题，每小题 9 分，共 54 分.

16. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

17. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

18. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩以及它的一个极大线性无关组；

(2) 将其余向量用所求的极大线性无关组线性表示.

19. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的所有特征值，判断 $\boldsymbol{A}$ 能否与对角矩阵相似，说明理由.

20. λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$ 有解？并求其解（有无穷多解时用通解表示其解）

21. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_2x_3$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值等于 1．求

(1) 求 a 的值；(2) 将该二次型化为标准形，并写出所对应的可逆线性变换．

四、证明题：本题满分 11 分．

22. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解，(1) 求 λ 的值；(2) 证明 $\left|\boldsymbol{B}\right|=0$.