

## 向量代数与空间解析几何

## 习题 8-1

## 向量及其线性运算

1. 设  $u = a - b + 2c, v = -a + 3b - c$ . 试用  $a, b, c$  表示  $2u - 3v$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } 2u - 3v &= 2(a - b + 2c) - 3(-a + 3b - c) \\ &= 5a - 11b + 7c.\end{aligned}$$

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.

证 如图 8-1, 设四边形  $ABCD$  中  $AC$  与  $BD$  交于点  $M$ , 已知  $\vec{AM} = \vec{MC}, \vec{DM} = \vec{MB}$ .

故

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB} = \vec{MC} + \vec{DM} = \vec{DC}.$$

即  $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$  且  $|\vec{AB}| = |\vec{DC}|$ , 因此四边形  $ABCD$  是平行四边形.

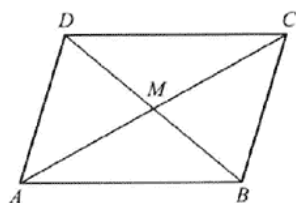


图 8-1

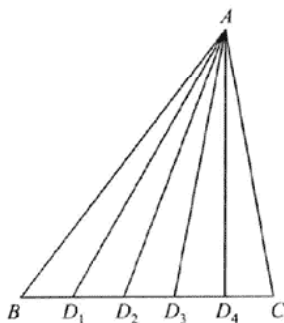


图 8-2

3. 把  $\triangle ABC$  的  $BC$  边五等分, 设分点依次为  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , 再把各分点与点  $A$  连接.

试以  $\vec{AB} = c, \vec{BC} = a$  表示向量  $\vec{D_1A}, \vec{D_2A}, \vec{D_3A}$  和  $\vec{D_4A}$ .

证 如图 8-2, 根据题意知

$$\vec{BD_1} = \frac{1}{5}a, \vec{D_1D_2} = \frac{1}{5}a, \vec{D_2D_3} = \frac{1}{5}a, \vec{D_3D_4} = \frac{1}{5}a,$$

故

$$\vec{D_1A} = -(\vec{AB} + \vec{BD_1}) = -\frac{1}{5}a - c.$$

$$\vec{D_2A} = -(\vec{AB} + \vec{BD_2}) = -\frac{2}{5}a - c.$$

$$\vec{D_3A} = -(\vec{AB} + \vec{BD_3}) = -\frac{3}{5}a - c.$$

$$\overrightarrow{D_4A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_4}) = -\frac{4}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

4. 已知两点  $M_1(0, 1, 2)$  和  $M_2(1, -1, 0)$ . 试用坐标表示式表示向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  及  $-2\overrightarrow{M_1M_2}$ .

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = (1-0, -1-1, 0-2) = (1, -2, -2).$$

$$-2\overrightarrow{M_1M_2} = -2(1, -2, -2) = (-2, 4, 4).$$

5. 求平行于向量  $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$  的单位向量.

解 向量  $\mathbf{a}$  的单位向量为  $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ , 故平行于向量  $\mathbf{a}$  的单位向量为

$$\pm \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \pm \frac{1}{11}(6, 7, -6) = \pm \left( \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{-6}{11} \right),$$

$$\text{其中 } |\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11.$$

6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1, -2, 3), B(2, 3, -4), C(2, -3, -4), D(-2, -3, 1).$$

解  $A$  点在第四卦限,  $B$  点在第五卦限,  $C$  点在第八卦限,  $D$  点在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$$A(3, 4, 0), B(0, 4, 3), C(3, 0, 0), D(0, -1, 0).$$

解 在坐标面上的点的坐标, 其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 比如  $xOy$  面上的点的坐标为  $(x_0, y_0, 0)$ ,  $xOz$  面上的点的坐标为  $(x_0, 0, z_0)$ ,  $yOz$  面上的点的坐标为  $(0, y_0, z_0)$ .

在坐标轴上的点的坐标, 其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零. 比如  $x$  轴上的点的坐标为  $(x_0, 0, 0)$ ,  $y$  轴上的点的坐标为  $(0, y_0, 0)$ ,  $z$  轴上点的坐标为  $(0, 0, z_0)$ .

$A$  点在  $xOy$  面上,  $B$  点在  $yOz$  面上,  $C$  点在  $x$  轴上,  $D$  点在  $y$  轴上.

8. 求点  $(a, b, c)$  关于 (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 点  $(a, b, c)$  关于  $xOy$  面的对称点为  $(a, b, -c)$ , 关于  $yOz$  面的对称点是  $(-a, b, c)$ , 关于  $zOx$  面的对称点为  $(a, -b, c)$ .

(2) 点  $(a, b, c)$  关于  $x$  轴的对称点是  $(a, -b, -c)$ , 关于  $y$  轴的对称点是  $(-a, b, -c)$ , 关于  $z$  轴的对称点是  $(-a, -b, c)$ .

(3) 点  $(a, b, c)$  关于坐标原点的对称点是  $(-a, -b, -c)$ .

9. 自点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 设空间直角坐标系如图 8-3, 根据题意,  $P_0F$  为点  $P_0$  关于  $xOz$  面的垂线, 垂足  $F$  坐标为  $(x_0, 0, z_0)$ ;  $P_0D$  为点  $P_0$  关于  $xOy$  面的垂线, 垂足  $D$  坐标为  $(x_0, y_0, 0)$ ;  $P_0E$  为点  $P_0$  关于  $yOz$  面的垂线, 垂足  $E$  坐标为  $(0, y_0, z_0)$ .

$P_0A$  为点  $P_0$  关于  $x$  轴的垂线, 垂足  $A$  的坐标为  $(x_0, 0, 0)$ ;  $P_0B$  为点  $P_0$  关于  $y$  轴

的垂线,垂足  $B$  的坐标为  $(0, y_0, 0)$ ;  $P_0C$  为点  $P_0$  关于  $z$  轴的垂线,垂足  $C$  的坐标为  $(0, 0, z_0)$ .

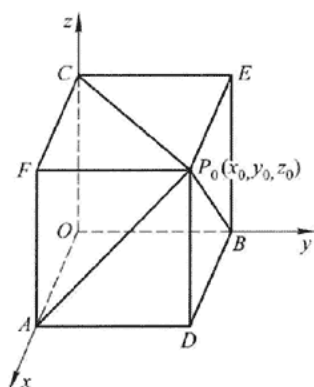


图 8-3

**例 10.** 过点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  分别作平行于  $z$  轴的直线和平行于  $xOy$  面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

**解** 如图 8-4,过  $P_0$  且平行于  $z$  轴的直线  $l$  上的点的坐标,其特点是,它们的横坐标均相同,纵坐标也均相同.

而过点  $P_0$  且平行于  $xOy$  面的平面  $\pi$  上的点的坐标,其特点是,它们的竖坐标均相同.

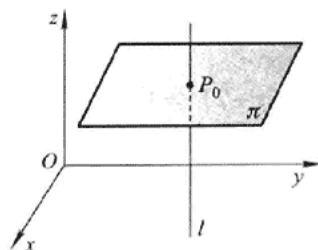


图 8-4

**例 11.** 一边长为  $a$  的正方体放置在  $xOy$  面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在  $x$  轴和  $y$  轴上,求它各顶点的坐标.

**解** 如图 8-5,已知  $AB = a$ ,故  $OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ,于是各顶点的坐标分别为

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), F\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), \\ G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), H\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right).$$

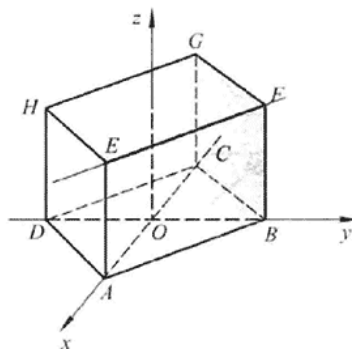


图 8-5

12. 求点  $M(4, -3, 5)$  到各坐标轴的距离.

解 点  $M$  到  $x$  轴的距离  $d_1 = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ , 点  $M$  到  $y$  轴的距离  $d_2 = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ , 点  $M$  到  $z$  轴的距离  $d_3 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ .

13. 在  $yOz$  面上, 求与三点  $A(3, 1, 2)$ ,  $B(4, -2, -2)$  和  $C(0, 5, 1)$  等距离的点.

解 所求点在  $yOz$  面上, 不妨设为  $P(0, y, z)$ , 点  $P$  与三点  $A, B, C$  等距离.

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}, \quad |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2},$$

$$|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2}.$$

由  $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|$  知

$$\sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases} 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16 + (y+2)^2 + (z+2)^2, \\ 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2. \end{cases}$$

解上述方程组, 得  $y=1, z=-2$ . 故所求点坐标为  $(0, 1, -2)$ .

14. 试证明以三点  $A(4, 1, 9)$ ,  $B(10, -1, 6)$ ,  $C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形是等腰直角三角形.

$$\text{证 由 } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

知  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$  及  $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$ , 故  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形.

15. 设已知两点  $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$  和  $M_2(3, 0, 2)$ , 计算向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  的模、方向余弦和方向角.

解 向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1),$$

其模  $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ . 其方向余弦分别为

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

方向角分别为  $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

16. 设向量的方向余弦分别满足 (1)  $\cos \alpha = 0$ ; (2)  $\cos \beta = 1$ ; (3)  $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ , 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 由  $\cos \alpha = 0$  知  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , 故向量与  $x$  轴垂直, 平行于  $yOz$  面.

(2) 由  $\cos \beta = 1$  知  $\beta = 0$ , 故向量与  $y$  轴同向, 垂直于  $xOz$  面.

(3) 由  $\cos \alpha = \cos \beta = 0$  知  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ , 故向量垂直于  $x$  轴和  $y$  轴, 即与  $z$  轴平行, 垂直于  $xOy$  面.

17. 设向量  $r$  的模是 4, 它与  $u$  轴的夹角是  $\frac{\pi}{3}$ , 求  $r$  在  $u$  轴上的投影.

解 已知  $|r| = 4$ , 则  $\text{Prj}_u r = |r| \cos \theta = 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ .

18. 一向量的终点在点  $B(2, -1, 7)$ , 它在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求这向量的起点  $A$  的坐标.

解 设  $A$  点坐标为  $(x, y, z)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (2-x, -1-y, 7-z),$$

由题意知

$$2-x=4, \quad -1-y=-4, \quad 7-z=7,$$

故  $x=-2, y=3, z=0$ , 因此  $A$  点坐标为  $(-2, 3, 0)$ .

19. 设  $m=3i+5j+8k, n=2i-4j-7k$  和  $p=5i+j-4k$ . 求向量  $a=4m+3n-p$  在  $x$  轴上的投影及在  $y$  轴上的分向量.

解  $a=4m+3n-p=4(3i+5j+8k)+3(2i-4j-7k)-(5i+j-4k)$   
 $=13i+7j+15k,$

$a$  在  $x$  轴上的投影为 13, 在  $y$  轴上的分向量为  $7j$ .

## 习题 8-2

## 数量积 向量积 \* 混合积

1. 设  $a=3i-j-2k, b=i+2j-k$ , 求

(1)  $a \cdot b$  及  $a \times b$ ; (2)  $(-2a) \cdot 3b$  及  $a \times 2b$ ; (3)  $a, b$  的夹角的余弦.

解 (1)  $a \cdot b = (3, -1, -2) \cdot (1, 2, -1)$

$$= 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (5, 1, 7).$$

$$(2) (-2\mathbf{a}) \cdot 3\mathbf{b} = -6(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = -6 \times 3 = -18,$$

$$\mathbf{a} \times 2\mathbf{b} = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 2(5, 1, 7) = (10, 2, 14).$$

$$(3) \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \\ = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为单位向量, 且满足  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ .

解 已知  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 故  $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$ .  
即  $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$ . 因此

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = -\frac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2) = -\frac{3}{2}.$$

3. 已知  $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1)$  和  $M_3(3, 1, 3)$ . 求与  $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$  同时垂直的单位向量.

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = (3-1, 3-(-1), 1-2) = (2, 4, -1),$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = (3-3, 1-3, 3-1) = (0, -2, 2),$$

由于  $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}$  与  $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$  同时垂直, 故所求向量可取为

$$\mathbf{a} = \frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}|},$$

$$\text{由 } \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\text{知 } \mathbf{a} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{17}}(6, -4, -4) = \pm \left( \frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点  $M_1(3, 1, 8)$  沿直线移动到点  $M_2(1, 4, 2)$ , 计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m, 重力方向为  $z$  轴负方向).

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = (1-3, 4-1, 2-8) = (-2, 3, -6),$$

$$\mathbf{F} = (0, 0, -100 \times 9.8) = (0, 0, -980),$$

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (0, 0, -980) \cdot (-2, 3, -6) = 5880(\text{J}).$$

5. 在杠杆上支点  $O$  的一侧与点  $O$  的距离为  $x_1$  的点  $P_1$  处, 有一与  $\overrightarrow{OP_1}$  成角  $\theta_1$  的力  $\mathbf{F}_1$  作用着; 在  $O$  的另一侧与点  $O$  的距离为  $x_2$  的点  $P_2$  处, 有一与  $\overrightarrow{OP_2}$  成角  $\theta_2$  的力  $\mathbf{F}_2$  作用着(图 8-6). 问  $\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, |\mathbf{F}_1|, |\mathbf{F}_2|$  符合怎样的条件才能使杠杆保持

平衡?

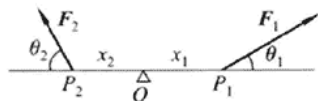


图 8-6

解 如图 8-6, 已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零, 又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|F_1| x_1 \sin \theta_1 - |F_2| x_2 \sin \theta_2 = 0,$$

即

$$|F_1| x_1 \sin \theta_1 = |F_2| x_2 \sin \theta_2.$$

例 6. 求向量  $a = (4, -3, 4)$  在向量  $b = (2, 2, 1)$  上的投影.

$$\text{解 } \text{Prj}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{(4, -3, 4) \cdot (2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

例 7. 设  $a = (3, 5, -2)$ ,  $b = (2, 1, 4)$ , 问  $\lambda$  与  $\mu$  有怎样的关系, 能使得  $\lambda a + \mu b$  与  $z$  轴垂直?

$$\text{解 } \lambda a + \mu b = \lambda(3, 5, -2) + \mu(2, 1, 4) = (3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu).$$

要  $\lambda a + \mu b$  与  $z$  轴垂直, 即要  $(\lambda a + \mu b) \perp (0, 0, 1)$ , 即

$$(\lambda a + \mu b) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

亦即

$$(3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

故  $-2\lambda + 4\mu = 0$ , 因此当  $\lambda = 2\mu$  时能使  $\lambda a + \mu b$  与  $z$  轴垂直.

例 8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证 如图 8-7, 设  $AB$  是圆  $O$  的直径,  $C$  点在圆周上, 要证  $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ . 只要证

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  即可. 由

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= -|\overrightarrow{AO}|^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 = 0, \end{aligned}$$

故  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ ,  $\angle ACB$  为直角.

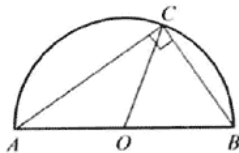


图 8-7

例 9. 已知向量  $a = 2i - 3j + k$ ,  $b = i - j + 3k$  和  $c = i - 2j$ , 计算:

$$(1) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}; \quad (2) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}); \quad (3) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

解 (1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2, -3, 1) \cdot (1, -1, 3) = 8, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (2, -3, 1) \cdot (1, -2, 0) = 8,$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = 8(1, -2, 0) - 8(1, -1, 3) = (0, -8, -24) \\ = -8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}.$$

$$(2) \mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, -3, 1) + (1, -1, 3) = (3, -4, 4),$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = (1, -1, 3) + (1, -2, 0) = (2, -3, 3),$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0, -1, -1) = -\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$(3) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

10. 已知  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ , 求  $\triangle OAB$  的面积.

解 由向量积的几何意义知

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|,$$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3, -3, 1),$$

$$|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1} = \sqrt{19}.$$

故

$$S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

\* 11. 已知  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , 试利用行列式的性质证明:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

$$\text{证 因为 } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$\text{而由行列式的性质知 } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \text{ 故}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$



12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  为任意实数, 并指出等号成立的条件.

证 设向量  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ . 由  $a \cdot b = |a| |b| \cos(\widehat{a, b})$  知,

$$|a \cdot b| = |a| |b| |\cos(\widehat{a, b})| \leq |a| |b|, \text{ 从而}$$

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

当  $a_1, a_2, a_3$  与  $b_1, b_2, b_3$  成比例, 即  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$  时, 上述等式成立.

### 习题 8-3

### 平面及其方程

1. 求过点  $(3, 0, -1)$  且与平面  $3x - 7y + 5z - 12 = 0$  平行的平面方程.

解 所求平面与已知平面  $3x - 7y + 5z - 12 = 0$  平行. 因此所求平面的法向量可取为  $n = (3, -7, 5)$ , 设所求平面为

$$3x - 7y + 5z + D = 0.$$

将点  $(3, 0, -1)$  代入上式得  $D = -4$ . 故所求平面方程为

$$3x - 7y + 5z - 4 = 0.$$

2. 求过点  $M_0(2, 9, -6)$  且与连接坐标原点及点  $M_0$  的线段  $OM_0$  垂直的平面方程.

解  $\overrightarrow{OM_0} = (2, 9, -6)$ . 所求平面与  $\overrightarrow{OM_0}$  垂直, 可取  $n = \overrightarrow{OM_0}$ , 设所求平面方程为

$$2x + 9y - 6z + D = 0.$$

将点  $M_0(2, 9, -6)$  代入上式, 得  $D = -121$ . 故所求平面方程为

$$2x + 9y - 6z - 121 = 0.$$

3. 求过  $(1, 1, -1), (-2, -2, 2)$  和  $(1, -1, 2)$  三点的平面方程.

$$\text{解 由 } \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } x-3y-2z=0, \text{ 即为所求平面方程.}$$

注 设  $M(x, y, z)$  为平面上任一点,  $M_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, 3)$  为平面上已知点.

由  $\overrightarrow{M_1 M} \cdot (\overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_3}) = 0$ , 即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

它就表示过已知三点  $M_i (i=1, 2, 3)$  的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:

(1)  $x=0$ ;

(2)  $3y-1=0$ ;

(3)  $2x - 3y - 6 = 0$ ;

(4)  $x - \sqrt{3}y = 0$ ;

(5)  $y + z = 1$ ;

(6)  $x - 2z = 0$ ;

(7)  $6x + 5y - z = 0$ .

解 (1)~(7)的平面分别如图 8-8(a)~(g).

(1)  $x = 0$  表示  $yOz$  坐标面.

(2)  $3y - 1 = 0$  表示过点  $(0, \frac{1}{3}, 0)$  且与  $y$  轴垂直的平面.

(3)  $2x - 3y - 6 = 0$  表示与  $z$  轴平行的平面.

(4)  $x - \sqrt{3}y = 0$  表示过  $z$  轴的平面.

(5)  $y + z = 1$  表示平行于  $x$  轴的平面.

(6)  $x - 2z = 0$  表示过  $y$  轴的平面.

(7)  $6x + 5y - z = 0$  表示过原点的平面.

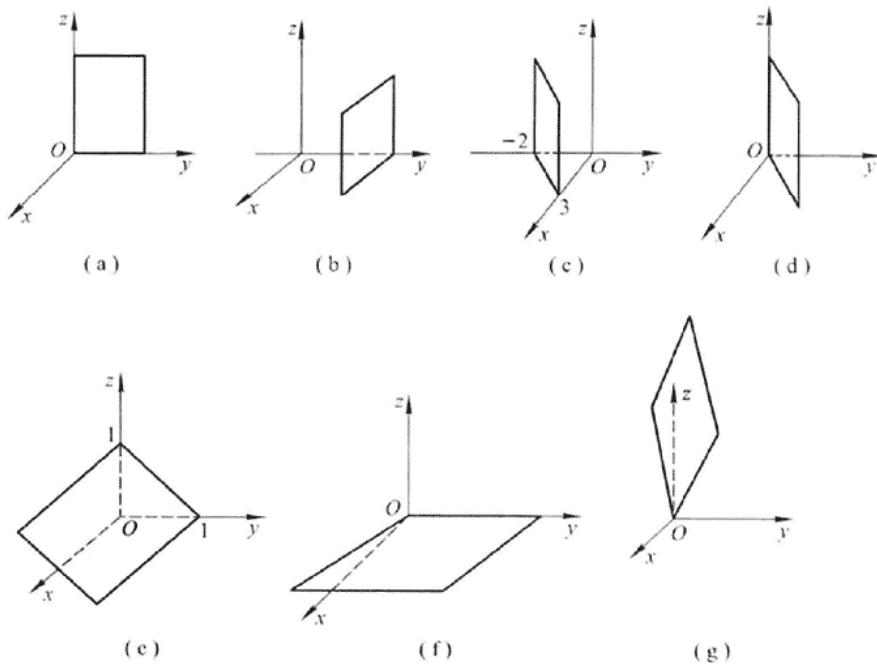


图 8-8

5. 求平面  $2x - 2y + z + 5 = 0$  与各坐标面的夹角的余弦.

解 平面的法向量为  $\boldsymbol{n} = (2, -2, 1)$ . 设平面与三个坐标面  $xOy, yOz, zOx$  的夹角分别为  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . 则根据平面的方向余弦知

$$\cos \theta_1 = \cos \gamma = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}| |\boldsymbol{k}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{1}{3},$$

$$\cos \theta_2 = \cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{i}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3},$$

$$\cos \theta_3 = \cos \beta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{j}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 1, 0)}{3 \cdot 1} = -\frac{2}{3}.$$

例 6. 一平面过点  $(1, 0, -1)$  且平行于向量  $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$  和  $\mathbf{b} = (1, -1, 0)$ , 试求这平面方程.

解 所求平面平行于向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ , 可取平面的法向量

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3),$$

故所求平面为  $1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) - 3 \cdot (z+1) = 0$ , 即

$$x + y - 3z - 4 = 0.$$

例 7. 求三平面  $x + 3y + z = 1$ ,  $2x - y - z = 0$ ,  $-x + 2y + 2z = 3$  的交点.

解 联立三平面方程

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1, \\ 2x - y - z = 0, \\ -x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

解此方程组得  $x = 1, y = -1, z = 3$ . 故所求交点为  $(1, -1, 3)$ .

例 8. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于  $xOz$  面且经过点  $(2, -5, 3)$ ;

(2) 通过  $z$  轴和点  $(-3, 1, -2)$ ;

(3) 平行于  $x$  轴且经过两点  $(4, 0, -2)$  和  $(5, 1, 7)$ .

解 (1) 所求平面平行于  $xOz$  面, 故设所求平面方程为  $By + D = 0$ . 将点  $(2, -5, 3)$  代入, 得

$$-5B + D = 0, \quad \text{即} \quad D = 5B.$$

因此, 所求平面方程为

$$By + 5B = 0, \quad \text{即} \quad y + 5 = 0.$$

(2) 所求平面过  $z$  轴, 故设所求平面方程为  $Ax + By = 0$ . 将点  $(-3, 1, -2)$  代入, 得

$$-3A + B = 0, \quad \text{即} \quad B = 3A.$$

因此, 所求平面方程为

$$Ax + 3Ay = 0, \quad \text{即} \quad x + 3y = 0.$$

(3) 所求平面平行于  $x$  轴, 故设所求平面方程为  $By + Cz + D = 0$ . 将点  $(4, 0, -2)$  及  $(5, 1, 7)$  分别代入方程得

$$-2C + D = 0 \quad \text{及} \quad B + 7C + D = 0.$$

从而解得

$$C = \frac{D}{2}, \quad B = -\frac{9}{2}D.$$

因此,所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy + \frac{D}{2}z + D = 0,$$

即

$$9y - z - 2 = 0.$$

9. 求点  $(1, 2, 1)$  到平面  $x + 2y + 2z - 10 = 0$  的距离.

解 利用点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离公式

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1. \end{aligned}$$

### 习题 8-4

### 空间直线及其方程

1. 求过点  $(4, -1, 3)$  且平行于直线  $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$  的直线方程.

解 所求直线与已知直线平行,故所求直线的方向向量  $s = (2, 1, 5)$ , 直线方程即为

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点  $M_1(3, -2, 1)$  和  $M_2(-1, 0, 2)$  的直线方程.

解 取所求直线的方向向量

$$s = \overrightarrow{M_1M_2} = (-1-3, 0-(-2), 2-1) = (-4, 2, 1),$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

解 根据题意可知已知直线的方向向量

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 3).$$

取  $x=0$ , 代入直线方程得  $\begin{cases} -y+z=1, \\ y+z=4. \end{cases}$  解得  $y = \frac{3}{2}, z = \frac{5}{2}$ . 这样就得到直线经过

的一点  $(0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ . 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1} = \frac{z-\frac{5}{2}}{3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = -2t, \\ y = \frac{3}{2} + t, \\ z = \frac{5}{2} + 3t. \end{cases}$$

注 由于所取的直线上的点可以不同,因此所得到的直线对称式方程或参数方程的表达式也可以是不同的.

例 4. 求过点  $(2, 0, -3)$  且与直线

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0, \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

解 根据题意,所求平面的法向量可取已知直线的方向向量,即

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 14, 11),$$

故所求平面方程为  $-16(x-2) + 14(y-0) + 11(z+3) = 0$ . 即

$$16x - 14y - 11z - 65 = 0.$$

例 5. 求直线  $\begin{cases} 5x - 3y + 3z - 9 = 0, \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} 2x + 2y - z + 23 = 0, \\ 3x + 8y + z - 18 = 0 \end{cases}$  的夹角的余弦.

解 两已知直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 4, -1), \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (10, -5, 10),$$

因此,两直线的夹角的余弦

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2}) = \frac{\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1| |\boldsymbol{s}_2|} \\ &= \frac{3 \times 10 - 4 \times 5 - 1 \times 10}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2}} = 0. \end{aligned}$$

例 6. 证明直线  $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ -2x + y + z = 7 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 8, \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$  平行.

证 已知直线的方向向量分别是

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 1, 5), \quad s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-9, -3, -15),$$

由  $s_2 = -3s_1$  知两直线互相平行.

7. 求过点  $(0, 2, 4)$  且与两平面  $x + 2z = 1$  和  $y - 3z = 2$  平行的直线方程.

解 所求直线与已知的两个平面平行, 因此所求直线的方向向量可取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 3, 1),$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}.$$

注 本题也可以这样解: 由于所求直线与已知的两个平面平行, 则可视所求直线是分别与已知平面平行的两平面的交线. 不妨设所求直线为

$$\begin{cases} x + 2z = a, \\ y - 3z = b. \end{cases}$$

将点  $(0, 2, 4)$  代入上式, 得  $a = 8, b = -10$ . 故所求直线为

$$\begin{cases} x + 2z = 8, \\ y - 3z = -10. \end{cases}$$

8. 求过点  $(3, 1, -2)$  且通过直线  $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$  的平面方程.

解 利用平面束方程, 过直线  $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$  的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5} - \frac{y+3}{2} + \lambda \left( \frac{y+3}{2} - z \right) = 0,$$

将点  $(3, 1, -2)$  代入上式得  $\lambda = \frac{11}{20}$ . 因此所求平面方程为

$$\frac{x-4}{5} - \frac{y+3}{2} + \frac{11}{20} \left( \frac{y+3}{2} - z \right) = 0,$$

即

$$8x - 9y - 22z - 59 = 0.$$

9. 求直线  $\begin{cases} x + y + 3z = 0, \\ x - y - z = 0 \end{cases}$  与平面  $x - y - z + 1 = 0$  的夹角.

解 已知直线的方向向量  $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 4, -2)$ , 平面的法向量  $n =$

$(1, -1, -1)$ .

设直线与平面的夹角为  $\varphi$ , 则

$$\sin \varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}})| = \frac{|\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}| |\boldsymbol{n}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = 0,$$

即  $\varphi = 0$ .

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

$$(1) \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3} \text{ 和 } 4x - 2y - 2z = 3;$$

$$(2) \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7} \text{ 和 } 3x - 2y + 7z = 8;$$

$$(3) \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4} \text{ 和 } x + y + z = 3.$$

解 设直线的方向向量为  $\boldsymbol{s}$ , 平面的法向量为  $\boldsymbol{n}$ , 直线与平面的夹角为  $\varphi$ , 且

$$\sin \varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}})| = \frac{|\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}| |\boldsymbol{n}|}.$$

$$(1) \boldsymbol{s} = (-2, -7, 3), \boldsymbol{n} = (4, -2, -2),$$

$$\sin \varphi = \frac{|(-2) \cdot 4 + (-7) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 0,$$

即  $\varphi = 0$ . 故直线平行于平面或在平面上, 现将直线上的点  $A(-3, -4, 0)$  代入平面方程, 方程不成立. 故点  $A$  不在平面上, 因此直线不在平面上, 直线与平面平行.

$$(2) \boldsymbol{s} = (3, -2, 7), \boldsymbol{n} = (3, -2, 7), \text{ 由于 } \boldsymbol{s} = \boldsymbol{n} \text{ 或}$$

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 7 \cdot 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2}} = 1,$$

知  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , 故直线与平面垂直.

$$(3) \boldsymbol{s} = (3, 1, -4), \boldsymbol{n} = (1, 1, 1), \text{ 由于 } \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ 或}$$

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 0,$$

知  $\varphi = 0$ , 将直线上的点  $A(2, -2, 3)$  代入平面方程, 方程成立, 即点  $A$  在平面上. 故直线在平面上.

11. 求过点  $(1, 2, 1)$  而与两直线

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3), \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1),$$

取 
$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1),$$

则过点  $(1, 2, 1)$ , 以  $\boldsymbol{n}$  为法向量的平面方程为

$$-1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) - 1 \cdot (z-1) = 0,$$

即 
$$x - y + z = 0.$$

12. 求点  $(-1, 2, 0)$  在平面  $x + 2y - z + 1 = 0$  上的投影.

解 作过已知点且与已知平面垂直的直线. 该直线与平面的交点即为所求. 根据题意, 过点  $(-1, 2, 0)$  与平面  $x + 2y - z + 1 = 0$  垂直的直线为

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{-1},$$

将它化为参数方程  $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = -t$ , 代入平面方程得

$$-1 + t + 2(2 + 2t) - (-t) + 1 = 0,$$

整理得  $t = -\frac{2}{3}$ . 从而所求点  $(-1, 2, 0)$  在平面  $x + 2y - z + 1 = 0$  上的投影

为  $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

13. 求点  $P(3, -1, 2)$  到直线  $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$  的距离.

解 直线的方向向量  $\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3).$

在直线上取点  $(1, -2, 0)$ , 这样, 直线的方程可表示成参数方程形式

$$x = 1, \quad y = -2 - 3t, \quad z = -3t. \quad (1)$$

又, 过点  $P(3, -1, 2)$ , 以  $\boldsymbol{s} = (0, -3, -3)$  为法向量的平面方程为

$$-3(y+1) - 3(z-2) = 0,$$

即 
$$y + z - 1 = 0. \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得  $t = -\frac{1}{2}$ , 于是直线与平面的交点为  $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , 故所求距离为

$$d = \sqrt{(3-1)^2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

14. 设  $M_0$  是直线  $L$  外一点,  $M$  是直线  $L$  上任意一点, 且直线的方向向量为  $\boldsymbol{s}$ , 试证: 点  $M_0$  到直线  $L$  的距离



$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

证 如图 8-9, 点  $M_0$  到直线  $L$  的距离为  $d$ . 由向量积的几何意义知  $|\overrightarrow{M_0M} \times \boldsymbol{s}|$  表示以  $\overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{s}$  为邻边的平行四边形的面积, 而  $\frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$  表示以  $|\boldsymbol{s}|$  为边长的该平行四边形的高, 即为点  $M_0$  到直线  $L$  的距离. 于是

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

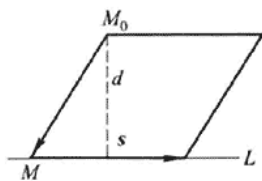


图 8-9

15. 求直线  $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$  在平面  $4x - y + z = 1$  上的投影直线的方程.

解 作过已知直线的平面束, 在该平面束中找出与已知平面垂直的平面, 该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线  $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$  的平面束方程为

$$2x - 4y + z + \lambda(3x - y - 2z - 9) = 0,$$

经整理得  $(2 + 3\lambda)x + (-4 - \lambda)y + (1 - 2\lambda)z - 9\lambda = 0$ .

由  $(2 + 3\lambda) \cdot 4 + (-4 - \lambda) \cdot (-1) + (1 - 2\lambda) \cdot 1 = 0$ ,

得  $\lambda = -\frac{13}{11}$ . 代入平面束方程, 得

$$17x + 31y - 37z - 117 = 0.$$

因此所求投影直线的方程为

$$\begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0, \\ 4x - y + z = 1. \end{cases}$$

16. 画出下列各平面所围成的立体的图形:

(1)  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1, 3x + 4y + 2z - 12 = 0$ ;

(2)  $x = 0, z = 0, x = 1, y = 2, z = \frac{y}{4}$ .

解 (1) 如图 8-10(a); (2) 如图 8-10(b).

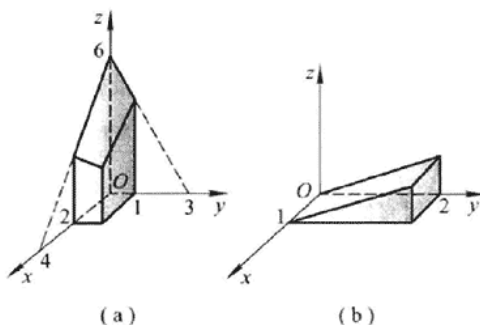


图 8-10

## 习题 8-5

## 曲面及其方程

1. 一球面过原点及  $A(4,0,0)$ ,  $B(1,3,0)$  和  $C(0,0,-4)$  三点, 求球面的方程及球心的坐标和半径.

解 设所求球面的方程为  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ , 将已知点的坐标代入上式, 得

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2, \quad (1)$$

$$(a-4)^2 + b^2 + c^2 = R^2, \quad (2)$$

$$(a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 = R^2, \quad (3)$$

$$a^2 + b^2 + (4+c)^2 = R^2. \quad (4)$$

联立(1)(2)得  $a=2$ , 联立(1)(4)得  $c=-2$ , 将  $a=2$  代入(2)(3)并联立得  $b=1$ , 故  $R=3$ . 因此所求球面方程为  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ , 其中球心坐标为  $(2, 1, -2)$ , 半径为 3.

2. 建立以点  $(1, 3, -2)$  为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解 设以点  $(1, 3, -2)$  为球心,  $R$  为半径的球面方程为

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = R^2.$$

球面过原点, 故

$$R^2 = (0-1)^2 + (0-3)^2 + (0+2)^2 = 14.$$

从而所求球面方程为  $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 14$ .

3. 方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$  表示什么曲面?

解 将已知方程整理成

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{6})^2.$$

所以此方程表示以  $(1, -2, -1)$  为球心, 以  $\sqrt{6}$  为半径的球面.

4. 求与坐标原点  $O$  及点  $(2, 3, 4)$  的距离之比为  $1:2$  的点的全体所组成的曲面的方

程,它表示怎样的曲面?

解 设动点坐标为  $(x, y, z)$ , 根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2}} = \frac{1}{2},$$

化简整理得

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2.$$

它表示以  $\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right)$  为球心, 以  $\frac{2}{3}\sqrt{29}$  为半径的球面.

例 5. 将  $xOz$  坐标面上的抛物线  $z^2 = 5x$  绕  $x$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以  $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$  代替抛物线方程  $z^2 = 5x$  中的  $z$ , 得

$$(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 5x,$$

即

$$y^2 + z^2 = 5x.$$

注  $xOz$  面上的曲线  $F(x, z) = 0$  绕  $x$  轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

例 6. 将  $xOz$  坐标面上的圆  $x^2 + z^2 = 9$  绕  $z$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$  代替圆方程  $x^2 + z^2 = 9$  中的  $x$ , 得

$$(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 9,$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

例 7. 将  $xOy$  坐标面上的双曲线  $4x^2 - 9y^2 = 36$  分别绕  $x$  轴及  $y$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以  $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$  代替双曲线方程  $4x^2 - 9y^2 = 36$  中的  $y$ , 得该双曲线绕  $x$  轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4x^2 - 9(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 36,$$

即

$$4x^2 - 9(y^2 + z^2) = 36.$$

以  $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$  代替双曲线方程  $4x^2 - 9y^2 = 36$  中的  $x$ , 得该双曲线绕  $y$  轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 - 9y^2 = 36,$$

即

$$4(x^2 + z^2) - 9y^2 = 36.$$

例 8. 画出下列各方程所表示的曲面:

$$(1) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2; \quad (2) -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$(3) \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1; \quad (4) y^2 - z = 0; \quad (5) z = 2 - x^2.$$

解 (1) 如图 8-11(a); (2) 如图 8-11(b); (3) 如图 8-11(c);  
(4) 如图 8-11(d); (5) 如图 8-11(e).

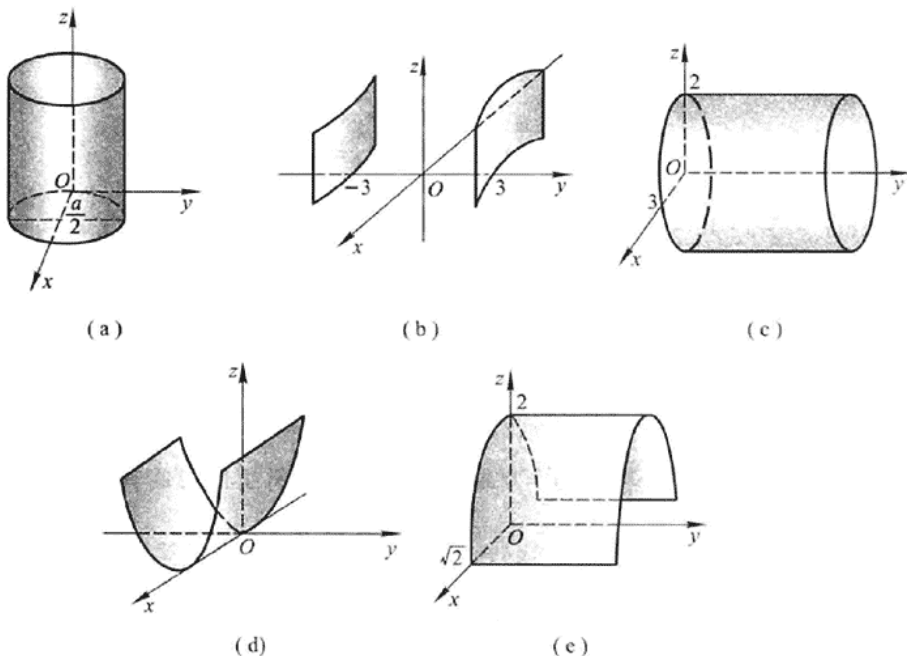


图 8-11

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

- (1)  $x=2$ ; (2)  $y=x+1$ ;  
(3)  $x^2+y^2=4$ ; (4)  $x^2-y^2=1$ .

解 (1)  $x=2$  在平面解析几何中表示平行于  $y$  轴的一条直线, 在空间解析几何中表示与  $yOz$  面平行的平面.

(2)  $y=x+1$  在平面解析几何中表示斜率为 1,  $y$  轴截距也为 1 的一条直线, 在空间解析几何中表示平行于  $z$  轴的平面.

(3)  $x^2+y^2=4$  在平面解析几何中表示圆心在原点, 半径为 2 的圆, 在空间解析几何中表示母线平行于  $z$  轴, 准线为  $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases}$  的圆柱面.

(4)  $x^2-y^2=1$  在平面解析几何中表示以  $x$  轴为实轴,  $y$  轴为虚轴的双曲线, 在空间解析几何中表示母线平行于  $z$  轴, 准线为  $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$  的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

- (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ ; (2)  $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ ;

$$(3) x^2 - y^2 - z^2 = 1; \quad (4) (z - a)^2 = x^2 + y^2.$$

解 (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$  表示  $xOy$  面上的椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面, 或表示  $xOz$  面上的椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面.

(2)  $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  表示  $xOy$  面上双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  绕  $y$  轴旋转一周而形成的旋转曲面, 或表示  $yOz$  面上双曲线  $-\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  绕  $y$  轴旋转一周而形成的旋转曲面.

(3)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  表示  $xOy$  面上双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面, 或表示  $xOz$  面上双曲线  $x^2 - z^2 = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面.

(4)  $(z - a)^2 = x^2 + y^2$  表示  $xOz$  面上直线  $z = x + a$  或  $z = -x + a$  绕  $z$  轴旋转一周而形成的旋转曲面, 或表示  $yOz$  面上的直线  $z = y + a$  或  $z = -y + a$  绕  $z$  轴旋转一周而形成的旋转曲面.

11. 画出下列方程所表示的曲面:

$$(1) 4x^2 + y^2 - z^2 = 4; \quad (2) x^2 - y^2 - 4z^2 = 4; \quad (3) \frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

解 (1) 如图 8-12(a); (2) 如图 8-12(b); (3) 如图 8-12(c).

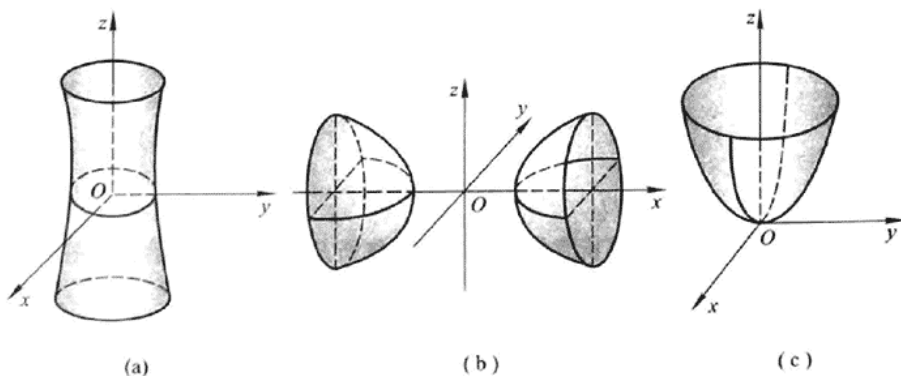


图 8-12

12. 画出下列各曲面所围立体的图形:

$$(1) z = 0, z = 3, x - y = 0, x - \sqrt{3}y = 0, x^2 + y^2 = 1 \text{ (在第一卦限内)};$$

$$(2) x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2 \text{ (在第一卦限内)}.$$

解 (1) 如图 8-13 所示; (2) 如图 8-14 所示.

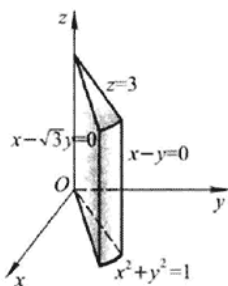


图 8-13

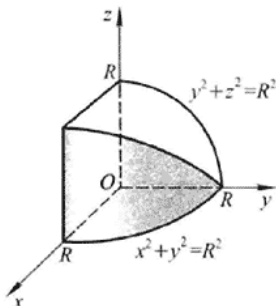


图 8-14

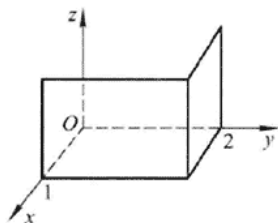
## 习题 8-6

## 空间曲线及其方程

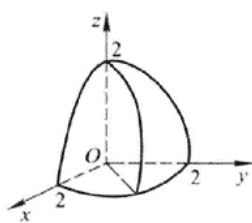
1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

$$(1) \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

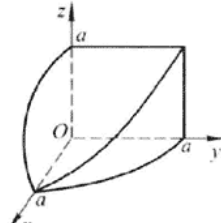
解 (1) 如图 8-15(a); (2) 如图 8-15(b); (3) 如图 8-15(c).



(a)



(b)



(c)

图 8-15


2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

$$(1) \begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3. \end{cases}$$

解 (1)  $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3 \end{cases}$  在平面解析几何中表示两直线的交点, 在空间解析几何中表示两平面的交线, 即空间直线.

(2)  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3 \end{cases}$  在平面解析几何中表示椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  与其切线  $y=3$  的交

点,即切点.在空间解析几何中表示椭圆柱面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与其切平面 $y = 3$ 的交线,即空间直线.

 3. 分别求母线平行于 $x$ 轴及 $y$ 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解 在 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 中消去 $x$ ,得


$$3y^2 - z^2 = 16,$$

即为母线平行于 $x$ 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 中消去 $y$ ,得

$$3x^2 + 2z^2 = 16,$$

即为母线平行于 $y$ 轴且通过已知曲线的柱面方程.

 4. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线在 $xOy$ 面上的投影的方程.

解 在 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + z = 1 \end{cases}$ 中消去 $z$ ,得

$$x^2 + y^2 + (1 - x)^2 = 9, \quad \text{即} \quad 2x^2 - 2x + y^2 = 8,$$

它表示母线平行于 $z$ 轴的柱面,故 $\begin{cases} 2x^2 - 2x + y^2 = 8, \\ z = 0 \end{cases}$ 表示已知交线在 $xOy$ 面上的投影的方程.

 5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

解 (1) 将 $y = x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,得

$$2x^2 + z^2 = 9,$$

取 $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t$ , 则 $z = 3 \sin t$ , 从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ z = 3 \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

(2) 将 $z = 0$ 代入 $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ ,得

$$(x-1)^2 + y^2 = 3,$$

取 $x-1 = \sqrt{3} \cos t$ , 则 $y = \sqrt{3} \sin t$ , 从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sqrt{3} \sin t, \\ z = 0 \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

6. 求螺旋线  $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$  在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 由  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$  得  $x^2 + y^2 = a^2$ , 故该螺旋线在  $xOy$  面上的投影曲线的直角坐标方程为  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$

由  $y = a \sin \theta, z = b\theta$  得  $y = a \sin \frac{z}{b}$ , 故该螺旋线在  $yOz$  面上的投影曲线的直角坐标方程为  $\begin{cases} y = a \sin \frac{z}{b}, \\ x = 0. \end{cases}$

由  $x = a \cos \theta, z = b\theta$  得  $x = a \cos \frac{z}{b}$ , 故该螺旋线在  $xOz$  面上的投影曲线的直角坐标方程为  $\begin{cases} x = a \cos \frac{z}{b}, \\ y = 0. \end{cases}$

7. 求上半球  $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  与圆柱体  $x^2 + y^2 \leq ax$  ( $a > 0$ ) 的公共部分在  $xOy$  面和  $xOz$  面上的投影.

解 如图 8-16, 所求立体在  $xOy$  面上的投影即为  $x^2 + y^2 \leq ax$ , 而由

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

得  $z = \sqrt{a^2 - ax}$ , 故所求立体在  $xOz$  面上的投影为由  $x$  轴,  $z$  轴及曲线  $z = \sqrt{a^2 - ax}$  所围成的区域.

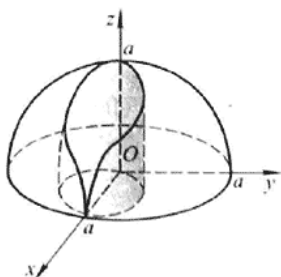


图 8-16



8. 求旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 4$ ) 在三坐标面上的投影.

解 联立  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$ , 得  $x^2 + y^2 = 4$ . 故旋转抛物面在  $xOy$  面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

如图 8-17.

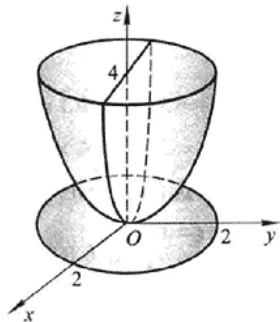


图 8-17

联立  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ , 得  $z = y^2$ , 故旋转抛物面在  $yOz$  面上的投影为由  $z = y^2$  及  $z = 4$

所围成的区域.

同理, 联立  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = 0 \end{cases}$ , 得  $z = x^2$ . 故旋转抛物面在  $xOz$  面上的投影为由  $z = x^2$  及

$z = 4$  所围成的区域.

### 总习题八

1. 填空:

(1) 设在坐标系  $[O; i, j, k]$  中点  $A$  和点  $M$  的坐标依次为  $(x_0, y_0, z_0)$  和  $(x, y, z)$ , 则在  $[A; i, j, k]$  坐标系中, 点  $M$  的坐标为 \_\_\_\_\_, 向量  $\overrightarrow{OM}$  的坐标为 \_\_\_\_\_;

(2) 设数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  不全为 0, 使  $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ , 则  $a, b, c$  三个向量是 \_\_\_\_\_ 的;

(3) 设  $a = (2, 1, 2)$ ,  $b = (4, -1, 10)$ ,  $c = b - \lambda a$ , 且  $a \perp c$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_;

(4) 设  $|a| = 3$ ,  $|b| = 4$ ,  $|c| = 5$ , 且满足  $a + b + c = 0$ , 则  $|a \times b + b \times c + c \times a| =$  \_\_\_\_\_.

解 (1) 点  $M$  的坐标为  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , 向量  $\overrightarrow{OM}$  的坐标为  $(x - x_0 +$

$$x_0, y - y_0 + y_0, z - z_0 + z_0) = (x, y, z).$$

(2) 由  $[(\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}) \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = 0$  得  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ , 即  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面.

(3)  $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a} = (4, -1, 10) - \lambda(2, 1, 2) = (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda)$ .

$\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ , 故  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (2, 1, 2) \cdot (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda) = 27 - 9\lambda = 0$ , 从而  $\lambda = 3$ .

(4) 由  $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  知  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , 即  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ;

由  $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  知  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ , 即  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .

又, 由  $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2$  知以向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为边的三角形为直角三角形, 且  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ . 故

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| &= 3 |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 3 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \\ &= 3 \times 3 \times 4 \times 1 = 36. \end{aligned}$$

2. 下列两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设直线  $L$  的方程为  $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4, \end{cases}$  则  $L$  的参数方程为( );

$$(A) \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (B) \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (C) \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (D) \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

(2) 下列结论中, 错误的是( ).

(A)  $z + 2x^2 + y^2 = 0$  表示椭圆抛物面

(B)  $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$  表示双叶双曲面

(C)  $x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$  表示圆锥面

(D)  $y^2 = 5x$  表示抛物柱面

解 (1) 应选(A). 直线  $L$  的方向向量为  $\mathbf{s} = (-2, 1, 3)$ , 过点  $(1, 1, 1)$ .

(2) 应选(B).  $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$  表示单叶双曲面.

3. 在  $y$  轴上求与点  $A(1, -3, 7)$  和点  $B(5, 7, -5)$  等距离的点.

解 根据题意, 设所求点为  $M(0, y, 0)$ , 由

$$1^2 + (y + 3)^2 + 7^2 = 5^2 + (y - 7)^2 + (-5)^2,$$

得  $y = 2$ . 故所求点为  $M(0, 2, 0)$ .

4. 已知  $\triangle ABC$  的顶点为  $A(3, 2, -1)$ ,  $B(5, -4, 7)$  和  $C(-1, 1, 2)$ , 求从顶点  $C$  所引中线的长度.

解 设  $AB$  中点的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 由

$$x_0 = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y_0 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad z_0 = \frac{-1+7}{2} = 3,$$

从而顶点  $C$  所引中线的长度

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{30}.$$

5. 设  $\triangle ABC$  的三边  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ , 三边中点依次为  $D, E, F$ , 试用向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

表示  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ , 并证明

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}.$$

证 如图 8-18,  $D, E, F$  分别为  $BC, CA, AB$  的中点, 因此

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\mathbf{a}}{2}, \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{\mathbf{b}}{2}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{c}}{2},$$

从而

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2},$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2} + \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2} = \frac{3}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}.$$

6. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边, 且其长度等于第三边长度的一半.

证 如图 8-19,  $D, E$  分别是  $CA$  与  $BC$  的中点.

由  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) = 2\overrightarrow{DE}$  知

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DE} \quad \text{且} \quad |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|.$$

即三角形两边中点的连线平行于第三边, 且长度等于第三边长度的一半.

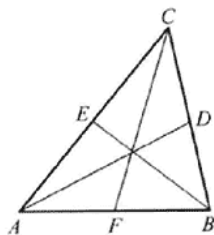


图 8-18

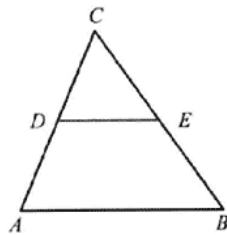


图 8-19

7. 设  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ ,  $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1, z)$ , 求  $z$ .

解  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3 - 1, -5 + 1, 8 + z) = (2, -4, 8 + z)$ ,

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (3 - (-1), -5 - 1, 8 - z) = (4, -6, 8 - z)$ ,

由  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$  知

$$\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (8 + z)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + (8 - z)^2},$$

经整理得  $z = 1$ .

8. 设  $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{b}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$ , 求向量  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  与  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  的夹角.

$$\text{解} \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$$

$$= (\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 4 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7,$$

$$|a-b|^2 = (a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\widehat{a,b})$$

$$= (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = |a|^2 - |b|^2 = 3 - 1 = 2,$$

故

$$\cos(\widehat{a+b, a-b}) = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b||a-b|} = \frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\text{所以 } (\widehat{a+b, a-b}) = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

9. 设  $a+3b \perp 7a-5b$ ,  $a-4b \perp 7a-2b$ , 求  $(\widehat{a,b})$ .

解 由  $a+3b \perp 7a-5b$  知  $(a+3b) \cdot (7a-5b) = 0$ , 由  $a-4b \perp 7a-2b$  知  $(a-4b) \cdot (7a-2b) = 0$ , 故

$$7|a|^2 + 16a \cdot b - 15|b|^2 = 0, \quad (1)$$

$$7|a|^2 - 30a \cdot b + 8|b|^2 = 0. \quad (2)$$

两式相减得  $46a \cdot b = 23|b|^2$ , 即  $a \cdot b = \frac{1}{2}|b|^2$ , 代入(1)式得

$$|a| = |b|,$$

从而

$$\cos(\widehat{a,b}) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$(\widehat{a,b}) = \frac{\pi}{3}.$$

10. 设  $a = (2, -1, -2)$ ,  $b = (1, 1, z)$ , 问  $z$  为何值时  $(\widehat{a,b})$  最小? 并求出此最小值.

$$\begin{aligned} \text{解 } \cos(\widehat{a,b}) &= \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{(2, -1, -2) \cdot (1, 1, z)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + z^2}} \\ &= \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{设 } f(z) = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-2\sqrt{2+z^2} - (1-2z) \frac{z}{\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

令  $f'(z) = 0$  得  $z = -4$ .

由于  $0 \leq (\widehat{a, b}) \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $\cos(\widehat{a, b})$  为单调减少函数,  $f(z)$  取得最大值时,

$\theta = (\widehat{a, b})$  达到最小值.

经验证  $z = -4$  时,  $f(z)$  达到最大值, 此时  $\theta = (\widehat{a, b})$  达到最小值且由

$$\cos(\widehat{a, b})_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 知 } \theta_{\min} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

11. 设  $|a| = 4$ ,  $|b| = 3$ ,  $(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{6}$ , 求以  $a + 2b$  和  $a - 3b$  为边的平行四边形的面积.

解 根据向量积的几何意义知以  $a + 2b$  和  $a - 3b$  为边的平行四边形的面积

$$\begin{aligned}
 S &= |(a + 2b) \times (a - 3b)| \\
 &= 5 |a \times b| = 5 |a| |b| \sin(\widehat{a, b}) \\
 &= 5 \times 4 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{6} = 5 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 30.
 \end{aligned}$$

12. 设  $a = (2, -3, 1)$ ,  $b = (1, -2, 3)$ ,  $c = (2, 1, 2)$ , 向量  $r$  满足  $r \perp a$ ,  $r \perp b$ ,  $\text{Prj}_c r = 14$ , 求  $r$ .

解 设向量  $r = (x, y, z)$ .

由  $r \perp a$  知  $r \cdot a = 0$ , 即

$$2x - 3y + z = 0.$$

由  $r \perp b$  知  $r \cdot b = 0$ , 即

$$x - 2y + 3z = 0.$$

由  $\text{Prj}_c r = \frac{r \cdot c}{|c|} = 14$  知

$$2x + y + 2z = 14 |c| = 14 \times 3 = 42.$$

联立上述三个方程得  $x = 14, y = 10, z = 2$ . 故  $r = (14, 10, 2)$ .

13. 设  $a = (-1, 3, 2)$ ,  $b = (2, -3, -4)$ ,  $c = (-3, 12, 6)$ , 证明三向量  $a, b, c$  共面, 并用  $a$  和  $b$  表示  $c$ .

$$\text{证 由 } (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ 知 } [a \ b \ c] = 0, \text{ 故三个向量 } a, b, c$$

共面.

设  $c = \lambda a + \mu b$ , 则


$$\begin{aligned} (-3, 12, 6) &= \lambda(-1, 3, 2) + \mu(2, -3, -4) \\ &= (-\lambda + 2\mu, 3\lambda - 3\mu, 2\lambda - 4\mu), \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = -3, \\ 3\lambda - 3\mu = 12, \\ 2\lambda - 4\mu = 6, \end{cases}$$

解得  $\lambda = 5, \mu = 1$ . 故


$$c = 5a + b.$$

 14. 已知动点  $M(x, y, z)$  到  $xOy$  平面的距离与点  $M$  到点  $(1, -1, 2)$  的距离相等, 求点  $M$  的轨迹的方程.

解 根据题意知

$$|z| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2},$$

即  $(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4(z-1) = 0$  为点  $M$  的轨迹的方程.

 15. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:


$$\begin{aligned} (1) \quad z &= 2(x^2 + y^2); & (2) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} &= 1; \\ (3) \quad z^2 &= 3(x^2 + y^2); & (4) \quad x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

解 (1) 母线为  $\begin{cases} x=0, \\ z=2y^2, \end{cases}$  旋转轴为  $z$  轴.

(2) 母线为  $\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \end{cases}$  旋转轴为  $y$  轴.

(3) 母线为  $\begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases}$  旋转轴为  $z$  轴.

(4) 母线为  $\begin{cases} z=0, \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$  旋转轴为  $x$  轴.

 16. 求通过点  $A(3, 0, 0)$  和  $B(0, 0, 1)$  且与  $xOy$  面成  $\frac{\pi}{3}$  角的平面的方程.

解 设所求平面方程为  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

平面过点  $A(3, 0, 0), B(0, 0, 1)$ , 故  $a=3, c=1$ . 这样平面方程为

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + z = 1.$$

它与  $xOy$  面成  $\frac{\pi}{3}$  角, 故

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{b}, 1\right) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1^2 \cdot 1}},$$

即 
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1 = 4, \quad \frac{1}{b} = \pm \frac{\sqrt{26}}{3},$$

故所求平面为

$$x + \sqrt{26}y + 3z = 3 \quad \text{或} \quad x - \sqrt{26}y + 3z = 3.$$

例 17. 设一平面垂直于平面  $z=0$ , 并通过从点  $(1, -1, 1)$  到直线  $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$  的垂线,

求此平面的方程.

解 直线  $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$  的方向向量

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, -1).$$

作过点  $(1, -1, 1)$  且以  $s = (0, -1, -1)$  为法向量的平面:

$$-1 \cdot (y+1) - (z-1) = 0, \quad \text{即} \quad y+z=0,$$

联立  $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \\ y+z=0 \end{cases}$  得垂足  $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

所求平面垂直于平面  $z=0$ , 设平面方程为  $Ax + By + D = 0$ . 平面过点  $(1, -1, 1)$  及垂足  $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 故有

$$\begin{cases} A - B + D = 0, \\ -\frac{1}{2}B + D = 0, \end{cases}$$

由此解得  $B = 2D, A = D$ . 因此所求平面方程为  $Dx + 2Dy + D = 0$ , 即

$$x + 2y + 1 = 0.$$

例 18. 求过点  $(-1, 0, 4)$ , 且平行于平面  $3x - 4y + z - 10 = 0$ , 又与直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$

相交的直线的方程.

解 设所求直线方程为

$$\frac{x+1}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-4}{p}.$$

所求直线平行于平面  $3x - 4y + z - 10 = 0$ , 故有

$$3m - 4n + p = 0, \quad (1)$$

又所求直线与直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$  相交, 故有

$$\begin{vmatrix} -1 - (-1) & 3 - 0 & 0 - 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$10m - 4n - 3p = 0. \quad (2)$$

联立(1)(2)式可得

$$\frac{16}{m} = \frac{19}{n} = \frac{28}{p}.$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$


注 若两直线  $l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ ,  $l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$  相交, 则  $l_1$  与  $l_2$

必共面, 故

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (s_1 \times s_2) = 0,$$

即有

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

 19. 已知点  $A(1, 0, 0)$  及点  $B(0, 2, 1)$ , 试在  $z$  轴上求一点  $C$ , 使  $\triangle ABC$  的面积最小.

解 所求点位于  $z$  轴, 设其坐标为  $C(0, 0, z)$ , 由向量的几何意义知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

而

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0-1 & 2-0 & 1-0 \\ 0-1 & 0-0 & z-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} \\ &= 2zi + (z-1)j + 2k, \end{aligned}$$

故

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(2z)^2 + (z-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}.$$

设  $f(z) = 5z^2 - 2z + 5$ , 则由  $f'(z) = 10z - 2 = 0$  得  $z = \frac{1}{5}$ . 因  $f''\left(\frac{1}{5}\right) = 10 > 0$ , 故当

$z = \frac{1}{5}$  时,  $\triangle ABC$  的面积取得极小值, 由于驻点唯一, 故当  $z = \frac{1}{5}$ , 即  $C$  的坐标为



$\left(0, 0, \frac{1}{5}\right)$  时,  $S_{\triangle ABC}$  最小.

20. 求曲线  $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$  在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 在  $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$  中消去  $z$ , 得  $2 - x^2 - y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$ , 即  $x^2 + y^2 - x - y = 0$ . 故  $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$  为曲线在  $xOy$  面上的投影曲线方程.

在  $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$  中消去  $y$ , 得  $z = (x-1)^2 + (\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2$ , 即  $2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0$ , 故  $\begin{cases} 2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$  为曲线在  $xOz$  面上的投影曲线方程.

同理, 可得  $\begin{cases} 2y^2 + 2yz + z^2 - 4y - 3z + 2 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$  它就是曲线在  $yOz$  面上的投影曲线方程.

21. 求锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与柱面  $z^2 = 2x$  所围立体在三个坐标面上的投影.

解 在  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x \end{cases}$  中消去  $z$ , 得  $2x = x^2 + y^2$ , 即  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , 故立体在  $xOy$  面上的投影为  $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \\ z = 0 \end{cases}$  (如图 8-20).

而该立体在  $zOx$  面上的投影为  $\begin{cases} x \leq z \leq \sqrt{2x}, \\ y = 0 \end{cases}$  (如图 8-20), 在  $yOz$  面上的投影

为  $\begin{cases} \left(\frac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, \\ x = 0. \end{cases}$

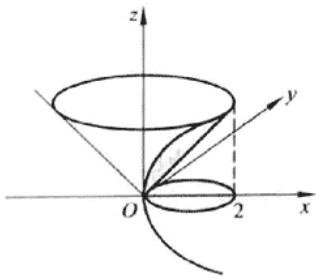


图 8-20

22. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 抛物柱面  $2y^2 = x$ , 平面  $z = 0$  及  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ ;

(2) 抛物柱面  $x^2 = 1 - z$ , 平面  $y = 0, z = 0$  及  $x + y = 1$ ;

(3) 圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  及旋转抛物面  $z = 2 - x^2 - y^2$ ;

(4) 旋转抛物面  $x^2 + y^2 = z$ , 柱面  $y^2 = x$ , 平面  $z = 0$  及  $x = 1$ .

解 (1) 如图 8-21(a); (2) 如图 8-21(b);

(3) 如图 8-21(c); (4) 如图 8-21(d).

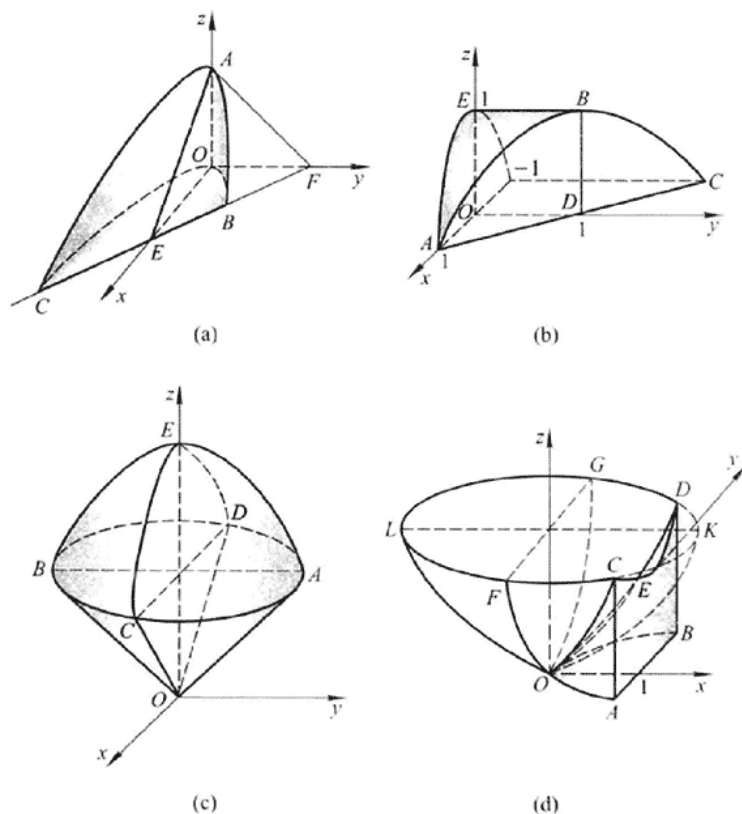


图 8-21

注 在建立了空间直角坐标系后,可按下列方法作图:

1° 先作出立体的各表面(曲面),及它们与各坐标面的交线;

2° 再作各曲面的交线.