10

一. 填空题

1. 0.4　2. 8　3. [illegible]　4. 3　5. 64

二. 选择题

1. B　2. C　3. C　4. C　5. ~~B~~C.

三. 解(1) 设 A={产品为合格品} B={产品检测为合格}

全概率公式 ~~$P(B)=P(B|A)+P(B|\bar{A})=0$~~

$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=0.96\times0.98+0.04\times0.05=0.9428$

(2) 贝叶斯公式

~~$P(A)=$~~ $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\frac{0.96\times0.98}{0.9428}=0.9979$

四. 解(1) $F(+\infty)=A=1$　　解得 $\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$

$F(0)=A+B=0$

(2) $P\{X\le2\}=F(2)=1-e^{-2\lambda}$

(3) 当 $x>0$, $f(x)=F'(x)=\lambda e^{-\lambda x}$

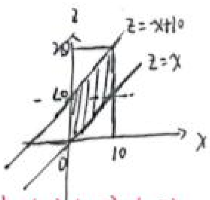
当 $x\le0$, $f(x)=0$

则 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\0, & 其他.\end{cases}$

五. 解: 由于 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(10-x)(10-y)}{2500}, & 0<x<10,\ 0<y<10\\0, & 其他.\end{cases}$

由 $\begin{cases}0<x<10\\0<y<10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<10\\0<z-x<10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<10\\x<z<10+x\end{cases}$



则 $f(x,z-x)=\begin{cases}\frac{(10-x)(10+x-z)}{2500}, & 0<x<10,\ x<z<10+x\\0, & 其他.\end{cases}$

当 $0<z<10$时, $f_Z(z)=\int_0^z\frac{(10-x)(10+x-z)}{2500}dx=\frac{1}{2500}(\frac{z^3}{6}-10z^2+10z)=\frac{1}{15000}(z^3-60z^2+60z)$

当 $10<z<20$时, $f_Z(z)=\int_{z-10}^{10}\frac{(10-x)(10+x-z)}{2500}dx=\frac{1}{15000}(20-z)^3$　　-2.

当 $z\le0$ 或 $z\ge20$时, $f_Z(z)=0$

于是 $Z=X+Y$的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2500}(\frac{z^3}{6}-10z^2+10z), & 0<z<10\\\frac{1}{15000}(20-z)^3, & 10<z<20\\0, & 其他\end{cases}$

~~某~~解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2\frac{x+y}{8}dy=\frac{x+1}{4}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^2\frac{x+y}{8}dx=\frac{y+1}{4}, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故X，Y不相互独立

(2) $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{x+y}{2(x+1)}, & 0<x<2,\ 0<y<2\\ 0, & 其他.\end{cases}$

对于任意给定 $x\ (0<x<2)$，在 $X=x$ 条件下，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

当 $0<y<2$，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{(x+y)/8}{(x+1)/4}=\frac{x+y}{2(x+1)}$

(3) ~~$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X$~~

~~$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dx=$~~

~~$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=$~~

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^2x\cdot\frac{x+1}{4}dx=\frac{7}{6}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^2y\cdot\frac{y+1}{4}dy=\frac{7}{6}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2\int_0^2xy\frac{x+y}{8}dxdy=\int_0^2\frac{y}{3}+\frac{y^2}{4}dy=\frac{4}{3}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}\neq0$，X与Y相关。

(4) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^2x^2\cdot\frac{x+1}{4}dx=\frac{5}{3}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=\frac{11}{36}$

二.解：要求在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验正态总体 σ 的假设　　支持的作为备择假设.

$H_0:\sigma\leq\sigma_0$　$H_1:\sigma>\sigma_0$　　$H_0:\sigma\geq\sigma_0=10$　$H_1:\sigma<\sigma_0=10$

采用 χ^2 检验法，取检验统计量为 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

今 $n=6$，$\sigma_0=10$，$S^2=11^2$，$\alpha=0.05$，~~$\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.05}(5)=11.07$~~　$\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(5)=1.15$

拒绝域为 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{0.05}(5)=11.07$　　$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(5)=1.15$

因观察值 $\chi^2=\frac{5\times11^2}{10^2}=6.05<11.07$ 不落在拒绝域内　　$\chi^2=\frac{5\times11}{10^2}=0.55<1.15$

故接受 H_0，即生产的食盐的标准差符合要求.　　拒绝 H_0 即符合要求

八. 解:(1) $\mu_1 = E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{2}{\theta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}} dx = -\frac{\theta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}}$

解得 $\theta = \sqrt{\pi}\mu_1 = \sqrt{\pi}E(X)$

令 $E(X) = \bar{X}$，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = \sqrt{\pi}\bar{X}$

(2) 似然函数为 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad x>0$

取对数: $\ln L(\theta) = n\ln 2 - n\ln\theta - n\ln\sqrt{\pi} \cancel{+} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

解得: $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ 为 θ 的最大似然估计量.

九. 计算机网络的建立需要满足一定的数据传输规律, 而概率论帮助我们更好地理解这些规律, 更加有效地改善网络, 并确保系统的可靠性.