高数下公式

向量代数与空间解析几何

两点间距离公式：

$$|M_1-M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

$$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};$$

$$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z);$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

单位向量： $\vec{e}_a=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

数量积：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\Rightarrow\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

夹角余弦： $\cos(\overrightarrow{a,b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\vec{b}\,|}=\dfrac{a_x b_x+a_y b_y+a_y b_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

向量积：

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=S_{平行四边形}$，

空间位置关系：

$$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow(\exists\alpha,\beta)\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0\Leftrightarrow\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}\,|$$

平面的方程：

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

参数式：$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$

两平面的夹角： $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

点到平面的距离： $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

两平行平面的距离： $d=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

直线与平面的夹角：

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}=\frac{Am+Bn_2+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

空间曲线C，曲线的投影C_{xoy}，空间立体Ω，曲面Σ，曲面的投影D_{xy}

球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

抛物柱面：$x^2=2py$

旋转曲面：圆柱面：$x^2+y^2=a^2$；

圆锥面：$z^2=b^2(x^2+y^2)$；

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$；

单叶双曲面：$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

旋转椭球面：$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

旋转抛物面：$x^2+y^2=2pz$

二次曲面：

椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0)$

抛物面：

椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；

双曲抛物面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

单叶双曲面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

椭圆锥面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

多元函数微分法及其应用

一、定义：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)=f_x(x,y)|_{x_0,y_0}$$

二、微分：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\rho}=0\Leftrightarrow$$ 可微，

偏导连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续＋偏导存在，

全微分： $dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$

三、隐函数求导：

$F(x,y)=0\Rightarrow y=f(x)$ 且 $\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

$F(x,y,z)=0\Rightarrow z=f(x,y)$ 且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_0},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_0}$

四、曲线的切线和法平面

1. **曲线方程：** $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$，

切线： $\dfrac{(x-x_0)}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{(y-y_0)}{\psi'(t_0)}=\dfrac{(z-z_0)}{\omega'(t_0)}$，

法平面： $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

2. **曲线方程：** $L:\begin{cases}y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases}$，

切线： $\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{y'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}$，

法平面： $(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$

3. 曲线方程：$L:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

切向量：$\vec{T}=\pm\{F_x,F_y,F_z\}_{M_0}\times\{G_x,G_y,G_z\}_{M_0}$

切线：$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}}$$

五、曲面的切平面和法线

1. 曲面方程：$F(x,y,z)=0$

法向量：$\vec{n}=\pm\{F_x,F_y,F_z\}_{M_0}$

切平面：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线：$$\frac{(x-x_0)}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F(x_0,y_0,z_0)}$$

2. 曲面方程:$z=f(x,y)$

切平面：

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$，

法线:$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

六、方向导数：$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0}=f_x|_{M_0}\cos\alpha+f_y|_{M_0}\cos\beta+f_z|_{M_0}\cos\gamma$

梯度：$\mathrm{grad}u|_{M_0}=\{f_x,f_y,f_z\}_{M_0}$

重积分

一、二重积分：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

二、三重积分：

1、直角坐标系：

$$\iiint_Q f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_{D_x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_z(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

2、柱面坐标系：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, dv = rdrd\theta dz \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)dv = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\mathrm{d}r\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,\mathrm{d}z$$

3、球面坐标系：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, dv = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{q_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{\Gamma_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

二、重积分的应用：

1、体积：$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_x}[z_2(x,y) - z_1(x,y)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2、 曲面：$\Sigma: z = f(x,y)$

面积：$S = \iint_{D_x}\sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

3、 质量： $M=\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 或 $M=\iiint_\Omega \mu(x,y,z)dv$

4、 质心$(\bar{x},\bar{y})$： $\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{M},\bar{y}=\dfrac{\iint y\rho(x,y)d\sigma}{M}$ 或

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\mu(x,y,z)dv}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)dv},\bar{y}=\frac{\iint_\Omega y\mu(x,y,z)dv}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)dv},\bar{z}=\frac{\iint_\Omega z\mu(x,y,z)dv}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)dv}$$

5、 转动惯量：

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma,I_o=\iint_D(x^2+y^2)\rho(x,y)d\sigma$$

或

$$I_x=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\mu(x,y,z)dv,I_y=\iiint_\Omega(z^2+x^2)\mu(x,y,z)dv$$

$$I_z=\iiint_\Omega^\Omega(x^2+y^2)\mu(x,y,z)dv,I_o=\iiint_\Omega^\Omega(x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dv$$

曲线积分和曲面积分

一、第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=\int_a^b f(x,y(t))\sqrt{1+y^2(t)}\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt$$

二、第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

1、计算公式：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_a^b[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt$$

2、格林公式：

$$\iint_0\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy=\oint_{\partial D^+}P\,dx+Qdy=\oint_{\tilde{\sigma}}(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

3、Stokes 公式：

$$\oint_{\Gamma=\partial\Gamma^+}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=\pm\iint_{D_{xy}}f(x,y,z)dxdy$$

4、封闭曲线围城的面积： $A=\dfrac{1}{2}\oint_{\partial D^+}x\,dy-ydx$

三、第一类曲面积分：

$$\Sigma:z=z(x,y):\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+Z_x^2+Z_y^2}\,dxdy$$

四、第二类曲面积分：

1、计算公式：

$$\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)d\vec{S}=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{e}_n dS=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$\iint_{\Sigma上侧}R(x,y,z)dxdy=\iint_{Dxy}R[x,y,z(x,y)]dxdy;$$

$$\iint_{\Sigma下侧}R(x,y,z)dxdy=-\iint_{Dxy}R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{Dyz}p(x(y,z),y,z)dydz;$$

$$\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{Dzx}p(x,y(z,x),z)dzdx$$

2、投影转化法：

$$\Sigma:z=z(x,y),dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=-z_x dxdy,dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=-z_y dxdy$$

$$\Sigma:F(x,y,z)=0,dydz=\frac{F_x}{F_z}dxdy,dzdx=\frac{F_y}{F_z}dxdy$$

3、高斯公式：

$$\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\pm\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

(Σ 为$\partial\Omega^+$ 外侧时取 $+$；Σ 为$\partial\Omega^-$ 内侧时取 $-$.)

4、

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},u=u(x,y,z)\Rightarrow$$

散度： $\mathrm{div}\vec{A}=P_x+Q_y+R_z;$

梯度： $\mathrm{grad}u=(u_x,u_y,u_z)$

$$\mathrm{div}(grad u)=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$$

旋度： $\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

无穷级数

一、常数项级数： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

1、常用级数：

等比级数/几何级数： $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} 收 \quad =\dfrac{1}{1-q} & |q|<1 \\ 发 \quad |q|\geq 1 \end{cases}$

P 级数： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^P} \begin{cases} 收 \quad P>1 \\ 发 \quad 0<P\leqslant 1 \end{cases}$

交错 P 级数： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^P}$ 收敛 $\begin{cases} 绝对收敛 \quad P>1 \\ 条件收敛 \quad 0<P\leq 1 \end{cases}$

2、正项级数: $u_n\geq 0$

基本定理： 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和有上界 $S_n<\sigma$

比较审敛法： 大收小收，小发大发

比较审敛法的极限形式： 同阶：同收同发；低阶：同收；高阶：同发

比值/根值审敛法： $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\left(\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{u_n}\right)\Rightarrow\begin{cases} <1，收敛 \\ >1，发散 \\ =1，失效 \end{cases}$

3、交错级数： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n\geq 0)$

莱布尼茨审敛法： $\begin{cases} u_{n+1} \le u_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 级数收敛，$S \le u_1, |r_n| \le u_{n+1}$

绝对收敛： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

条件收敛： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_n|$ 发散

4、任意项级数：

利用定义：部分和有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} S, & \text{收敛} \\ \infty, & \text{发散} \end{cases}$

利用收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0 \Rightarrow$ 发散；

利用正项级数（比值/根植）审敛法：

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \quad (\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}) \Rightarrow \begin{cases} <1, & \text{绝对收敛} \Rightarrow \text{收敛} \\ >1, & \text{绝对值发散} \Rightarrow \text{发散} \\ =1, & \text{失效} \end{cases}$$

二、幂级数：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

1、收敛半径：

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad (\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}) \Rightarrow R = \begin{cases} 1/\rho, & 0<\rho<\infty \\ 0, & \rho=\infty \\ \infty, & \rho=0 \end{cases}$$

2、常用等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}(|x|<1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}(|x|<1), \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}(|x|<1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1\le x<1), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad (-1<x\le 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}(|x|<1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|(|x|<1)$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(|x|<1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots;x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots;x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots;x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots;x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots;x\in(-1,1)$$

3、泰勒展开：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(\xi\in(x_0,x)$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

三、傅里叶级数： $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

1、 $T=2\pi:f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=S(x)$,

$(x\in(-\infty,+\infty)$，且$x\neq$间断点） 其中

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,(n=0,1,2\cdots);b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx(n=1,2\cdots)$

(间断点处，$S(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$)

若 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow$ 正弦级数$\left(a_n=0,b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$

若 $f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow$ 余弦级数$\left(b_n=0,a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)$

2、$T=2l:f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$,

$(x\in(-\infty,+\infty)$, 且 $x\neq$ 间断点）

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,(n=0,1,2\cdots)$;

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx(n=1,2\cdots)$。

3、非周期函数 $f(x)$，

（1）$x\in[-l,l]:f(x)\xrightarrow{\text{周期延拓}}F(x)$ 展开 $\to$ 限制

$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$，$(x\in(-l,l))$

$\left(x=\pm l\text{时}, S(x)=\frac{f(-l^+)+f(l^-)}{2}\right)$

（2）$x\in[0,l]:f(x)\xrightarrow{\text{奇延拓/偶延拓}}\xrightarrow{\text{周期延拓}}F(x)$ 展开 $\to$ 限制

奇延拓：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},(x\in(0,l))$;

$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,\cdots);(x=0\text{或}l\text{时},S(x)=0)$;

偶延拓：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}(x\in[0,l])$

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx(n=0,1,2,\cdots)$，端点处不间断。