大一高数期末考试试卷

学院：　　专业班级：　　姓名：　　学号：

装订线内不要答题

课程名称：高等数学　课程类别：必修　考试方式：闭卷

注意事项：1、本试卷满分 100 分。

2、考试时间 120 分钟。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	得分
得分									
评阅人									

得分	

一、单项选择题（在每小题的四个备选答案中,选出一个正确答案，并将正确答案的选项填在题后的括号内。每小题 3 分，共 21 分)

1．下列各式正确的是：（　　）

A。 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　B。 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$

C。 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=-e$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

2。 当 $x\to 0^{+}$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是：（　　）

A。 $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　B。 $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\right)$　　C。 $1-e^{\sqrt{x}}$　　D。 $1-\cos\sqrt{x}$

3。 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域有定义，则它在该点处可导的一个充分条件是：（　　）

A. $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C。 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　D。 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

4. 函数 $y=3x^3-x$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值是: ( )

A。 0 B。 没有 C。 2 D。 $-2/9$

5. 函数 $y=1-x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上应用罗尔定理时，所得到的中值 $\xi=$ ( )

A. 0 B。 1 C。 -1 D. 2

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ b(1-x^2) & x>0 \end{cases}$ 处处可导，那么: ( )

A. $a=b=1$ B. $a=-2,b=-1$ C. $a=0,b=1$ D. $a=1,b=0$

7。设 $x=a$ 为函数 $y=f(x)$ 的极值点，则下列论述正确的是 ( )

A. $f'(a)=0$ B. $f(a)=0$ C. $f''(a)=0$ D. 以上都不对

二、填空题(每小题 3 分，共 21 分)

得分	

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\cos^3 x-1}{(x+\sin x)^2}=$____________.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$____________。

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x-10}{x-2} & x\ne 2 \\ a & x=2 \end{cases}$ 在点 $x=2$ 处连续，则 $a=$________.

4。 函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{\sin x}$ 的间断点为________________。

5。 函数 $y=2x^2-\ln x$ 的单调减区间为 ________________.

6。 设函数 $y=\ln\tan\sqrt{x}$，则 $dy=$________________。

7. 椭圆曲线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 相应的点处的切线方程为 ________________。

三、求下列极限(每小题 6 分， 共 18 分)

得分	

1。 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

2。 求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

3。 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})$

四、计算下列导数或微分（每小题分 6, 共 18 分）

得分	

1。 设函数 $y=(2-x)^2+\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 dy .

2. 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

3。计算函数 $y=(\dfrac{x}{1+x})^x$ 的一阶导数.

五、（本题 6 分）求函数 $y=(x-\frac{5}{2})\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间与拐点。

得分	

得分	

六、（本题 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，函数 $g(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x>0 \\ f(x) & x\le 0 \end{cases}$,试确定常数 a,b,c 的值，使得函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导.

七、(本题 5 分）证明：当 $x>0$时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

得分	

八、(本题5分) 设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$， $f(3)=1$. 试证:必存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$ 。

得分	

一、单项选择题

DBDDACD

二、填空题（每小题 3 分，共 21 分）

1。 1　2．2；　3。7；　4。$k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ；

5。$(0,\frac{1}{2})$；　6。$\frac{\csc\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ ；　7。$ay+bx-\sqrt{2}ab=0$

三、求下列极限（每小题 6 分，共 18 分）

1。　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x\sin x}{2}}{x^2}$ ………3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$ ………4 分

$=\frac{1}{2}$ ………6 分

2.　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

解：原式= $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x+1}{2}}$ ………2 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x+1}{2}}$ ………5 分

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x+1}{2}}=e^{\frac{-3}{2}}$ ………6 分

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ ………2 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2}\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin x}{6x}=\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

四、计算下列导数或微分（每小题分 6， 共 18 分)

1。 设函数 $y=(2-x)^2+\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$， 求 $\frac{dy}{dx}$ 与 dy .

解：$$y'=-2(2-x)\ +\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$dy=[-2(2-x)\ +\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}]dx\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

2。 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：方程两边同时对变量 x 求导并化简可得：

$y-xy'=x+yy'$ 从而得到: $y'=\frac{y-x}{y+x}$ ，$\cdots\cdots\cdots$ 2 分

上式继续对变量 x 求导可得： $y'-y'-xy''=1+y'y'+yy''\cdots\cdots\cdots$ 4 分

化简上式并带入 y' 可得: $y''=\frac{-2(x^2+y^2)}{(y+x)^3}$ $\cdots\cdots\cdots$ 6 分

3。计算函数 $y=(\frac{x}{1+x})^x$ 的一阶导数。

解：两边同时取对数得： $\ln y=x\ln(\frac{x}{1+x})=x[\ln x-\ln(1+x)]\cdots\cdots\cdots$ (2 分）

两边同时对 x 求导得： $\frac{y'}{y}=[\ln x-\ln(1+x)]+x[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}]=\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdots\cdots\cdots$ (5 分）

从而得 $y'=y[\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}]=x\ln(\frac{x}{1+x})[\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}]$ $\cdots\cdots\cdots$ （6 分）

五、（本题 6 分）求函数 $y=(x-\frac{5}{2})\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间与拐点。

解:函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$， $y'=\frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$， $y''=\frac{5(2x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$

$x=-\frac{1}{2}, y''=0$， $x=0, y''$ 不存在. ……… 2 分

x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$		$+$
y	$\cap$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$	$\cup$		$\cup$

……… 4 分

可知 $y=(x-\frac{5}{2})\sqrt[3]{x^2}$ 函数 $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上是凹的，在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 内是凸的，拐点为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$。 ……… 6 分

六、（本题 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，函数 $g(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x>0 \\ f(x) & x\le 0 \end{cases}$，试确定常数 a,b,c 的值,使得函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导.

解：因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导,所以， $g(x)$ 在 $x=0$ 点一阶可导、连续。

由 $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续可得 : $\lim\limits_{x\to 0^-} g(0)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(0)=c$，从而 $c=f(0)$ ……2 分

由 $g(x)$ 在 $x=0$ 点可导可得： $g'_-(0)=f'(0)=g'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax^2+bx+c-f(0)}{x-0}=b$，从而 $b=f'(0)$ ……… 4 分

从而可知： $g'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x>0 \\ f'(x) & x\le 0 \end{cases}$

又由 $g(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导可得： $g''_-(0)=f''(0)=g''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2ax+b-f'(0)}{x-0}=2a$，

从而 $2a=f''(0)$ ……… 6 分

七、(本题 5 分) 证明：当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

证明：令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ ，则 $f(0)=0$ ……1 分

因为 $f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$，从而 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，……… 3 分

从而 $f(x)>f(0)=0$，从而 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ ……… 5 分

八、（本题5分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$， $f(3)=1$. 试证：

必存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明：因为函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，从而函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，

故在 $[0,2]$ 上有最大值和最小值，分别设为 m, M，

于是 $m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$， ……… 2 分

从而由介值定理可得，至少存在一点 $c\in[0,2]$，

使得 $f(c)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$，……… 3 分

可验证 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上满足罗尔定理的条件，

故存在 $\xi\in[c,3]\subset[0,3]$，使得 $f'(\xi)=0$.……… 5 分