《线性代数》模拟试题 01

专业：______________ 班级：______________ 姓名：______________ 学号：______________

题号		得分	合计	总分
一	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			
	8			
	9			
	10			
二	11			
	12			
	13			
	14			
	15			
三	16			
	17			
	18			
	19			
	20			
	21			
	22			
四	23			

一、填空题：1～10 小题，每小题 2 分，共 20 分.

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$____________.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{2015}=$____________.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}$ 的余子式 $M_{21}+M_{22}+M_{23}=4$，则 $x=$____________.

4. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，且有 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

5. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 5 阶矩阵，且 $\left|\boldsymbol{A}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\left|\boldsymbol{B}\right|=2$，则 $\left|-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=$____________.

6. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

7. 已知 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，而 $\boldsymbol{\eta}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 2 个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解可以表示为____________.

8. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 2,\ 2,\ 3)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(3,\ 1,\ 5,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 的夹角为____________.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值可以表示为____________.

10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2^2-3x_2x_3$ 的矩阵是____________.

二、单项选择题：11～15 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & a \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ 中，元素 a 的代数余子式是（　　）.

(A) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$　　(B) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$　　(C) $-\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$　　(D) $-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

12. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则下列结论一定成立的是（　　）.

(A) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$　　(B) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

(C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(D) $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$

13. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 均为三维列向量，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$（　　）.

(A) 4　　(B) 2　　(C) 1　　(D) −4

14. 设 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解向量，则下列向量中仍为该方程组解的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$　　(B) $\frac{1}{5}(3\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2)$

(C) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2)$　　(D) $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$

15. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&x&4\\0&4&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&y\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则（　　）.

(A) $x=3$，$y=-5$　　(B) $x=-3$，$y=-5$

(C) $x=-5$，$y=3$　　(D) 条件不足以确定 x 和 y 的值

三、计算题：16～22 小题，每小题 8 分，共 56 分.

16. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}$.

17. 用矩阵分块的方法求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,5,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,4,7)^{\mathrm{T}}$，求向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用它们线性表示.

19. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 具有相同的秩，求 a、b 的值.

20. 当 a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=3 \\ x_1+ax_2+3x_3=2 \end{cases}$ 无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解时，求其通解（用基础解系表示）.

21. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，其中 a、b 为实数且 $a>0$，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，求：(1) a、b 的值，(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

22. 求可逆的线性变换将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4+2x_1x_4$ 化为标准型，及其正惯性指数及秩.

四、证明题：本题满分 9 分.

23. 已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$是向量空间R^3的一个基，而向量$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$满足

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3，\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3，\quad \boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$$

证明$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$也是R^3的一个基.