模拟试卷三答案

一、选择题

1. B 2. C 3. A 4. D

二、填空题

5. 2 6. $\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$ 7. $\dfrac{3}{4}$ 8. $|q|<1$, $\dfrac{a}{1-q}$

三、解答题

9. 解：令 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=z=t$，则 $x=3t-3$, $y=-2t-2$, $z=t$

代入平面方程 $x+2y+2z+6=0$ 得 $t=1$，交点为 $(0,-4,1)$

10. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$

11. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+(xf_{11}''+f_{12}'')y$

12. 解：原式 $=\iint\limits_D \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}d\sigma+\iint\limits_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}d\sigma$

D 关于 x 或 y 轴均对称, 则 $\iint\limits_D \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}d\sigma=0$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}d\sigma&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho^2}d\rho=\frac{1}{2}\times2\pi\int_0^1\frac{1}{1+\rho^2}d(1+\rho^2)\\&=\pi\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1\\&=\pi\ln 2\end{aligned}$$

13. 解：补充从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的有向线段 OA

$$I=\int_{L+OA}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy-\int_{OA}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$

$$=0$$

14. 解：补充Σ_1: $z=0, x^2+y^2\leq 9$方向朝下，Σ_2: $z=3, x^2+y^2\leq 9$方向朝上，

则与已知的Σ面构成封闭的空间Ω，

则利用高斯公式：$\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}3dV=81\pi$

$\displaystyle\iint_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=0$，

$\displaystyle\iint_{\Sigma_2} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma_2}3dxdy=3\iint_{D_{xy}}dxdy=27\pi$

所以$\displaystyle\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=81\pi-27\pi=54\pi$

15. 解：收敛域：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right|=|x|<1$，则收敛区间为$(-1,1)$

当$x=-1$时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$，为发散级数

当$x=1$时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}n$，为发散级数

则收敛域为$(-1,1)$

令$\displaystyle S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\right)=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'\right)=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'$，

则$\displaystyle S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$

16. 解：幂级数：

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-3+x+1}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+1}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{3}\right)^n \quad x\in(-2,4)$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{-1+x+1}=-\frac{1}{1-(x+1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n \quad x\in(-2,0)$$

所以，上式$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n\right]$，$x\in(-2,0)$

17. 解：$f_x=4-2x=0$，$f_y=-4-2y=0$，得驻点$(2,-2)$

$f_{xx}=-2$，$f_{xy}=0$，$f_{yy}=-2$

$AC-B^2=4>0$，$A<0$

$\therefore$ 所以 $f(2,-2)$ 为极大值，$f(2,-2)=8$

18. 解：目标函数：$C(x,y)=8x^2-xy+12y^2$，条件函数：$x+y=42$

拉格朗日函数：$L(x,y,\lambda)=8x^2-xy+12y^2+\lambda(x+y-42)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=16x-y+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-x+24y+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-42=0\end{cases}\Rightarrow x=25,y=17$$

所以，当 $x=25,y=17$ 时成本最小