一、 填空题（本题 15 分，每小题 3 分）

1. 二次型 $f(x)=x^T\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}x$ 的秩= ____________ 。

2. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=2A$，则 $5(A+5E)^{-1}=$____________ 。

3. 设 A、B 为 3 阶矩阵，$|A|=2,|B|=-3$，则 $\left|3A^*B^{-2}\right|=$ ____________。

4. 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 0 & 5 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 3\end{vmatrix}$，则 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$ __________ 。

5. 若 λ 是 n 阶非奇异矩阵 A 的特征值，则矩阵 $(2A)^{-2}+E$ 有一特征值为_____________。

f(Lambda)=(2Lambda)^(-2) + E

二、 选择题（本题 15 分，每小题 3 分）

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33}\\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$

及 $P_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ k & 0 & 1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则 $A=$（ ）

(A) $P_1^{-1}BP_2^{-1}$；　(B) $P_2^{-1}BP_1^{-1}$；　(C) $P_1^{-1}P_2^{-1}B$；　(D) $BP_1^{-1}P_2^{-1}$。

2. 已知 n 阶奇异矩阵 A 满足 $A^*\neq 0$，设 α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的两个不同的解向量，k 为任意常数，则 $Ax=0$ 的通解为（ ）

(A) $k\alpha_1$　　(B) $k\alpha_2$　　(C) $k(\alpha_1-\alpha_2)$　　(D) A、B、C 均可

3. 设 A 是 5×3 矩阵，且矩阵 A 的秩为 2，$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，$C$ 是 5 阶正定矩阵，则 CAB 的秩为（　　　　　）。

(A) 2 ；　　(B) 3 ；　　(C) 5 ；　　(D) 不确定.

4. 设 A,B 均是 n 阶方阵，则下述正确的是（　　　　）

(A)　A 或 B 可逆，则必有 AB 可逆；

(B)　A 或 B 不可逆，则必有 AB 不可逆；

(C)　A 或 B 可逆，则必有 $A+B$ 可逆；

(D)　A 或 B 不可逆，则必有 $A+B$ 不可逆。

5. 下列矩阵是正交矩阵的是（　　　　）

（A）A 满足 $A^TA=E$ ；　（B）A 满足 A 的行向量组是两两正交的单位向量组；

（C）A 满足 $|A|=1$；　（D）A 满足 A 的列向量组构成 R^n 的规范正交基。

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，且 $AX=A+2X$，求矩阵 X。

1 2 2
0 1 2
2 -2 -1

四、（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & a \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & a & a & 0 \end{vmatrix}$

五、(10 分) 设向量组 $a_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a_4=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$,

（1）求向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 的秩及一个最大无关组；

（2）把不属于最大无关组的向量由最大无关组表示出来。

六、（15 分）λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

有唯一解、无解、或无穷多解？在有无穷多解时，求其通解。

七、（15 分）用正交变换 $x = Py$ 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

化为标准形，并写出正交矩阵 P 。

八、（10 分）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，构造向量组

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_n=\alpha_n+\alpha_1 \qquad (n>1)$$

证明：当n是偶数时，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$线性相关, 当$n$是奇数时，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$线性无关。