

第三章测试题

一，选择题

1. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

| $\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--------------------------------------|-------|-------|-----|-------|
| 1 | 0 | $3/8$ | a | 0 |
| 3 | $1/8$ | 0 | 0 | $1/8$ |

则常数 $a =$ ()

- (A) $1/8$ (B) $3/8$ (C) $2/8$ (D) $6/8$

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(3x+2y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则系数 $A =$ ()

- (A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) 6

3. 设 $X \sim N(0,1), Y \sim N(1,1)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 ()。

- (A) $P(X+Y \leq 0) = \frac{1}{2}$ (B) $P(X+Y \leq 1) = \frac{1}{2}$
(C) $P(X-Y \leq 0) = \frac{1}{2}$ (B) $P(X-Y \leq 1) = \frac{1}{2}$

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都在 $(0,1)$ 区间上服从均匀分布, 则服从区间或区域上的均匀分布的随机变量是 ()

- (A) (X,Y) (B) $X+Y$ (C) X^2 (D) $X-Y \leq 1$

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 具有同一分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则

$Z = \max\{X,Y\}$ 的分布函数为 ()

- (A) $F^2(z)$ (B) $F(x)F(y)$ (C) $1-[1-F(z)]^2$ (D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

二、填空题

1. 设随机变量 X 和 Y 概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

且满足 $P\{XY=0\}=1$, 则 $P\{X=Y\} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 已知二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 $P\{0 < X \leq 1, 1 < Y \leq 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 设 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $Y = X^2$, 则 X, Y 的联合分布律为 $\underline{\hspace{2cm}}$

4. 设 (X, Y) 的分布律为 $\underline{\hspace{2cm}}$

| $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$ | -1 | 0 | 1 |
|--------------------------------------|-----|------|-----|
| -1 | 1/6 | 1/12 | 1/6 |
| 1 | 1/8 | 1/3 | 1/8 |

则 $P\{Y=-1|X=1\} \underline{\hspace{2cm}}$, $P\{X=0|Y=-1\} \underline{\hspace{2cm}}$

5. 已知二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 $P\{X+Y \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题

1. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量, X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

求: (1) X 和 Y 的联合概率密度;

(2) 未知数 a 的方程 $a^2 + 2Xa + Y = 0$ 有实根的概率。(结果用标准正态分布表示)

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且均服从 $N(0, 1)$, 求 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\}$ 。

3. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = ke^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

求出常数 k , 并指出 (X, Y) 所服从的分布。

4. 已知二维随机变量 (X, Y) 和 (U, V) 的分布律分别为

| $\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$ | 0 | 1 |
|--------------------------------------|------|------|
| 0 | 3/10 | 3/10 |
| 1 | 3/10 | 1/10 |

| $\begin{matrix} V \\ U \end{matrix}$ | 0 | 1 |
|--------------------------------------|------|------|
| 0 | 9/25 | 6/25 |
| 1 | 6/25 | 4/25 |

分别求它们的边缘分布律, 并判断其独立性。

5. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求: (1) 常数 c ; (2) $P\{X+Y=1\}$

6. 设 X 关于 Y 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 3x^2/y^3, & 0 < x < y & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} & \text{其他}, \end{cases}$$

而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1 & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} & \text{其他}, \end{cases}$$

求联合概率密度 $f(x, y)$, X 的概率密度 $f_X(x)$ 和概率 $P\{X > 0.5\}$.

7. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且服从 $N(0, 1)$.

求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim U(0, 1), Y \sim U(0, 1)$.

求 $Z = \min\{X, Y\}$ 的概率密度 $f_Z(z)$.