《线性代数》模拟试题 02

专业：______________ 班级：______________ 姓名：______________ 学号：______________

<table>
<tr><th colspan="2">题号</th><th>得分</th><th>合计</th><th>总分</th></tr>
<tr><td rowspan="10">一</td><td>1</td><td></td><td rowspan="10"></td><td rowspan="22"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">二</td><td>11</td><td></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">三</td><td>16</td><td></td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td></td></tr>
<tr><td>四</td><td>22</td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、填空题：1～10 小题，每小题 2 分，共 20 分.

1. 若五元排列 $12i4j$ 的逆序数等于 3，则排列 $j4i21$ 的逆序数等于____________.

2. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的第 3、4 行元素代数余子式的和为____________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=-2$，则 $|-\boldsymbol{A}^*|=$____________.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^5=$____________.

5. 求满足等式 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2+ka_3 & a_3 \\ b_1 & b_2+kb_3 & b_3 \\ c_1 & c_2+kc_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=$____________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$____________.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解可表示为____________.

8. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 $\theta=$____________.

9. 若 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有 1、2、0，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为____________，$\boldsymbol{A}$ 是否可逆____________（填写可逆或不可逆）.

10. 若 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的值为____________.

二、单项选择题：11～15 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第三列的元素依次为 1、3、-2、2，它们的余子式的值分别为 3、-2、1、1，则 $|\boldsymbol{A}|=$(　　).

(A) 5　　(B) -5　　(C) -3　　(D) 3

12. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则下列结论正确的是（ ）.

(A) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(B) $|\boldsymbol{B}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$

(D) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$

13. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是（ ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 都不是零向量

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意 $s-1$ 个向量都线性无关

14. 若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（ ）.

(A) 必有无穷多解

(B) 必有唯一解

(C) 必定无解

(D) 上述选项均不对

15. 对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，以下结论正确的是（ ）.

(A) 一定有 n 个不同的特征根

(B) 它的特征根一定是整数

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 成对角形

(D) 属于不同特征根的特征向量必线性无关，但不一定正交

三、计算题：16～21 小题，每小题 9 分，共 54 分.

16. 设 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

17. 给定矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\left|\boldsymbol{A}^2\right|$ 以及 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}$.

18. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}$ 是 3 阶未知方阵，解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$.

19. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$，求：(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，并给出 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式；(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组表示.

20. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+9x_4=a \end{cases}$. (1) a 为何值时方程组有解；(2) 当方程组有解时求出它的全部解（用解的结构表示）.

21. 已知实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，求正交变换将该二次型化为标准形，并给出标准形（要求：写出计算步骤）.

四、证明题：本题满分 11 分.

22. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 为 3 阶可逆阵，且 $A_{ij}=a_{ij}$（这里 A_{ij} 表示 $\left|\boldsymbol{A}\right|$ 中 a_{ij} 的代数余子式）. 证明 $\left|\boldsymbol{A}\right|=1$.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 为可逆阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 必为行满秩矩阵，$\boldsymbol{B}$ 必为列满秩矩阵.