《线性代数》模拟试题 03

专业：______________ 班级：______________ 姓名：______________ 学号：______________

<table>
<tr><th colspan="2">题号</th><th>得分</th><th>合计</th><th>总分</th></tr>
<tr><td rowspan="10">一</td><td>1</td><td></td><td rowspan="10"></td><td rowspan="23"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">二</td><td>11</td><td></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">三</td><td>16</td><td></td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td></td></tr>
<tr><td>22</td><td></td></tr>
<tr><td>四</td><td>23</td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、填空题：1～10 小题，每小题 2 分，共 20 分.

1. 已知$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & x & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-8$，则$x=$_____________.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$为三维列向量，若$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=1$，则$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2|=$_______.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2018}=$_____________.

4. 设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为n阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则$|-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}|=$_____________.

5. 设$\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{A}^6=$_____________.

6. 向量空间$V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1-2x_2-x_3=0, x_1,x_2,x_3\in R\}$的维数是___________，写出$V$的一个基_______________.

7. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{b}$为m阶列向量，线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解的充分必要条件是_____________.

8. 若 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值分别为-2、-3、-4，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$_____________.

9. 已知向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)^{\mathrm{T}}$，则$\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|=$_____________，若$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交，则$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的分量应满足的关系式是_____________.

10. 设$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$及$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$为R^3空间的两组基，且满足关系式$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则由$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$到$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵为_____________.

二、单项选择题：11～15 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 下列表述不正确的是（　　）.

(A) 若矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$可逆，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{C}$可逆且$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

(B) 对任意的两个同阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，均有$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

(C) 对任意的两个n阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，均有$||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{B}|$

(D) 对任意的两个矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，若$\boldsymbol{A}$可逆，则有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

12. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda =$ (　　).

(A) -1 或 2　　(B) 1 或 2　　(C) -1 或 -2　　(D) 1 或 -2

13. s 个 r 维的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充分必要条件是 (　　).

(A) 向量的个数 s 大于向量的维数 r

(B) 向量组的任意一个向量都可表示成其余向量的线性组合

(C) 线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0$ 有非零解

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 的任意一个 s 阶子式值为零

14. 已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则一定有 (　　).

(A) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$　　(B) $\boldsymbol{A}$ 可逆

(C) $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \le n$　　(D) $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) = n$

15. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 合同于矩阵 (　　).

(A) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

三、计算题：16～22 小题，每小题 8 分，共 56 分.

16. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 - a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix}$ 的值，其中 $a \neq 0$.

17. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，试求：(1) 行列式 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{*}\right|$ 的值；(2) 矩阵 $\boldsymbol{B}$.

18. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，且向量 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 具有相同的秩，试求常数 a、b 的值.

19. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}4\\-11\\6\\8\end{pmatrix}$.

(1) 试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$、$\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩及它的一个最大线性无关组；

(2) 将其余向量用所求的最大线性无关组线性表示.

20. 讨论 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=1 \end{cases}$ 有解，当有无穷多解时求其通解（用基础解系表示）.

21. 已知对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$，试求：(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及对应的全部特征向量；(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵，并写出该对角矩阵.

22. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3$. (1) 将 f 化为标准形，并写出相应的可逆线性变换；(2) 求二次型 f 的秩、正惯性指数和负惯性指数.

四、证明题：本题满分 9 分.

23. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ 的解，且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，试证明 $|\boldsymbol{B}|=0$.