中国石油大学（北京）2020-2021 学年春季学期

《高等数学 A（II）》本科期末考试试卷

（A 卷）

考试方式（闭卷考试）

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、填空题（在下列各题的横线处填写正确答案,共5小题,每小题3分，共15分）

1、设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____。

2、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}=$______。

3、设 $I=\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$，交换积分次序后，$I=$________。

4、设 $f(u)$ 为可微函数，且 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{\pi\ t^3}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma=$______。

5、设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=4$，则曲线积分

$\oint_L y(ye^x+1)dx+(2ye^x-x)dy=$_______。

一、1、1；　2、-1/6；　3、$\int_0^2 dy\int_{y/2}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$ ；　4、$\dfrac{2}{3}f'(0)$；

5、-8π；

二、选择题（请将下列各题的正确答案填在题后的括号内，共5题，每小题3分，共15分）

1、二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的充分条件是（　　）

（A）$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续；

（B）$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在；

（C）$\Delta z-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ 当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，是无穷小；

（D）$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$。

2、设 $u=yf(\dfrac{x}{y})+xf(\dfrac{y}{x})$,其中 f 具有二阶连续导数，则 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 等于（　　）

（A）$x+y$；　（B）x；　(C) y；　(D)0 。

3、设Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0$,则三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} zdV$等于（　　）

（A）$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$；（B）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi dr$；

（C）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$；（D）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$。

4、球面$x^2+y^2+z^2=4a^2$与柱面$x^2+y^2=2ax$所围成的立体体积 V=（　　）

（A）$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}dr$；　（B）$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\sqrt{4a^2-r^2}dr$；

（C）$8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\sqrt{4a^2-r^2}dr$；　（D）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\sqrt{4a^2-r^2}dr$。

5、设有界闭区域 D 由分段光滑曲线L所围成，L取正向，函数$P(x,y),Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数，

则$\oint_L Pdx+Qdy=($　　$)$

（A）$\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dxdy$；　（B）$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x})dxdy$；

（C）$\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy$；　（D）$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$。

二、1、D；　2、D；　3、C；　4、B；　5、D；

三、(本题满分 10 分)

计算$\iint\limits_D\cos(x+y)dxdy$，其中$D$是由$x=0$，$y=x$，$y=\pi$所围成的区域.

解：$\iint\limits_D\cos(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}dy\int_0^{y}\cos(x+y)dx$

$=\int_0^{\pi}\sin(x+y)\Big|_0^y dy=\int_0^{\pi}(\sin 2y-\sin y)dy=-2$.

四、(本题满分 10 分)

设方程 $z^3-3xyz=1$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解：设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-1$，则

$F_x=-3yz$，$F_z=3z^2-3yz$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$.

五、(本题满分 12 分)

计算 $\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 部分的上侧.

解：Σ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\leq 1$，

补充平面 $\Sigma_1:z=0\ (x^2+y^2\leq 1)$ 取下侧，由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(6x^2+6y^2+6z)dv+3\iint\limits_{D_{xy}}(0-1)dxdy$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\rho dz-3\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=2\pi-3\pi=-\pi.$$

六、(本题满分 12 分)

求圆柱面 $x^2+y^2=2y$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=0$ 割下部分的面积 A。

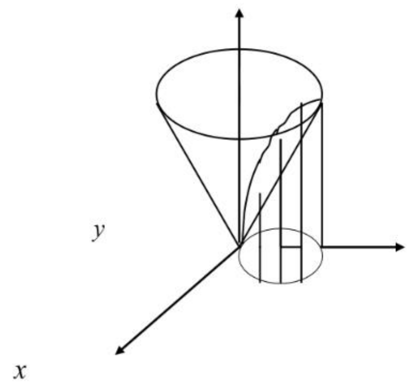
曲线$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=2y \end{cases}$在 yoz 面上的

投影为$\begin{cases} z^2=2y \qquad (0\le y\le z) \\ x=0 \end{cases}$

于是所割下部分在 yoz 面上的投影域为：

$D_{yz}:\begin{cases} 0\le y\le 2 \\ 0\le z\le \sqrt{2y} \end{cases}$,

由图形的对称性，所求面积为第一卦限部分的两倍。



$$A=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\,d\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{dydz}{\sqrt{2y-y^2}}=2\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y}}\frac{dz}{\sqrt{2y-y^2}}=8$$

七、(本题满分 11 分)

计算$\int_L e^x(1-2\cos y)dx+2e^x\sin ydy$，其中 L 为曲线 $y=\sin x$ 上由点 $A(\pi,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的一段弧.

解：添加直线段：$\overline{OA}$: $y=0,(0\le x\le\pi)$，

由格林公式：

$$\int_L \ =\oint_{L+\overline{AB}}\ -\int_{\overline{AB}}\ =\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\int_0^\pi e^x dx=0+e^x\Big|_0^\pi=e^\pi-1.$$

八、(本题满分 10 分)

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$的收敛域，并求出其在收敛域内的和函数.

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2$，当 $x=-2$ 时，级数收敛；当 $x=2$ 时级数发散，

故级数收敛域为$[-2,2)$. 设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$，两边求导，得

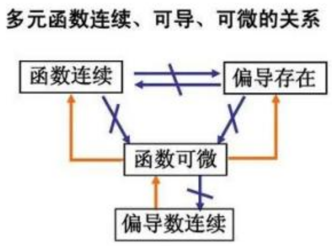
$$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2-x}$$，而$S(0)=0$，

于是两边积分，得 $S(x)=\int_0^x\frac{1}{2-x}dx=-\ln(2-x)\Big|_0^x=-\ln(2-x)+\ln 2=-\ln(1-\frac{x}{2})$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}=-\ln(1-\frac{x}{2})$.

九、(本题满分 5 分)

简要说明多元函数可导、可微、连续的关系。
提示：



言之有理即可