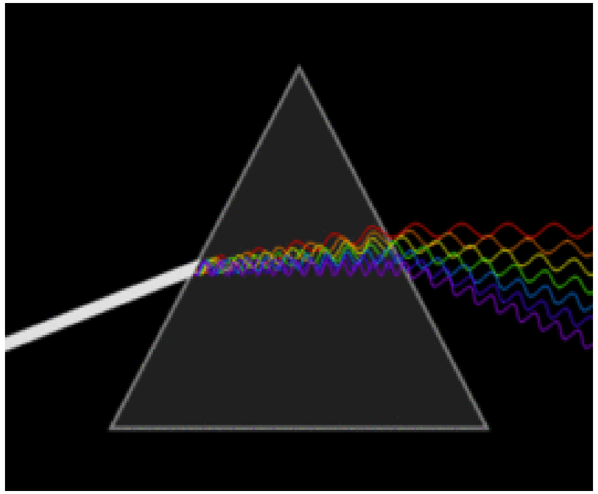
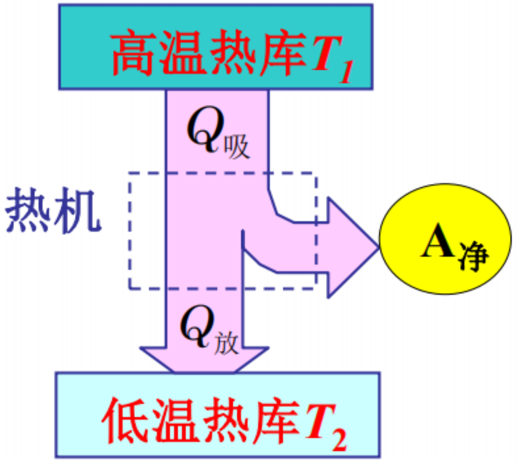
欢迎大家来到大学物理II的课堂

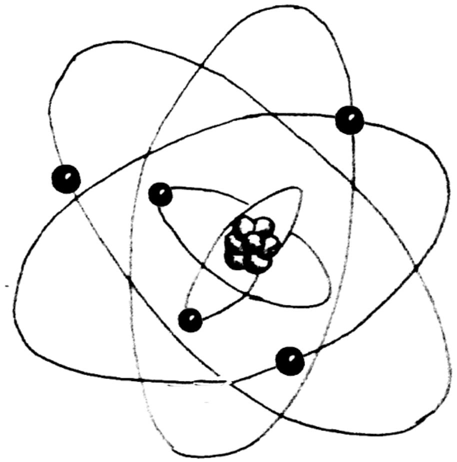
振动和波动



光学



热学



量子力学

考核总评成绩由过程成绩40%和结课考核60%成绩两部分构成。

过程成绩：考勤+小测验+课后作业

考勤：随机在10次课堂上进行考勤，若无故缺课学时超过课程总学时的1/4（即缺勤3次），取消考试资格。 10分

小测验：安排3次课堂小测验，在讲完振动波动后、讲完光学部分后、讲完热学后，分别测试。 10分

课后作业：每周布置1次课后作业，共10次课后作业。累计未交作业次数超过总次数的1/3（即4次），取消考试资格。 20分

结课考试成绩低于40分（百分制）的，其课程总评成绩评定为不合格

补考：考核总评成绩不合格的，原则上在下一个学期初安排1次补考。

但下列学生除外：被取消课程考核资格的；旷考、作弊的。

重修和复修不合格学生有补考资格。

缓考：学生因病、考核时间冲突、实习或外出参加比赛等原因不能参加正常考核的，可以申请缓考。

以虚假事实或理由申请课程缓考的、未参加课程考核且未办理缓考手续的，按旷考处理。

学生重修或补修的课程与正常修读课程之间存在上课时间冲突的，可以申请自修重修或补修的课程，每学期自修的课程不超过3门。

1、课后作业及自测题要求

1) 独立完成，勿抄袭。

2) 用A4纸，写清姓名、学号和专业班级。

3) 每周周二交课代表

4) 迟交扣分。

该二维码在7天内(9月8日前)有效

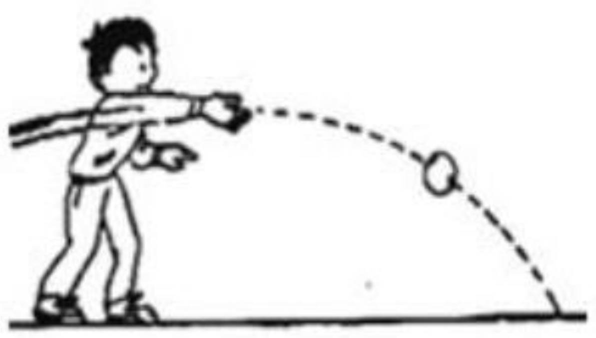
2、答疑 线上答疑：企业微信

线下答疑：C5 -II-525室，欢迎大家随时来讨论！

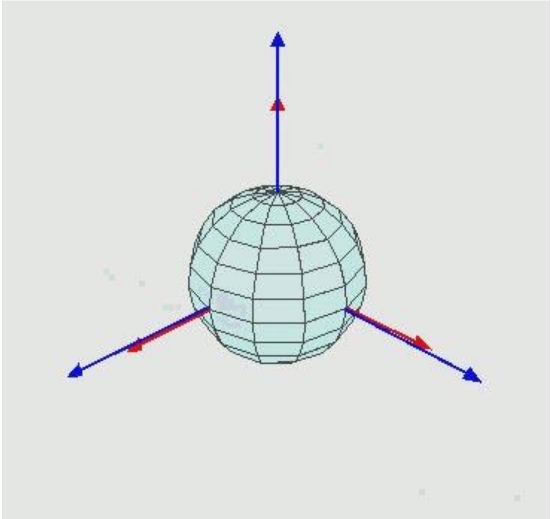
第20章 振动

- 引言

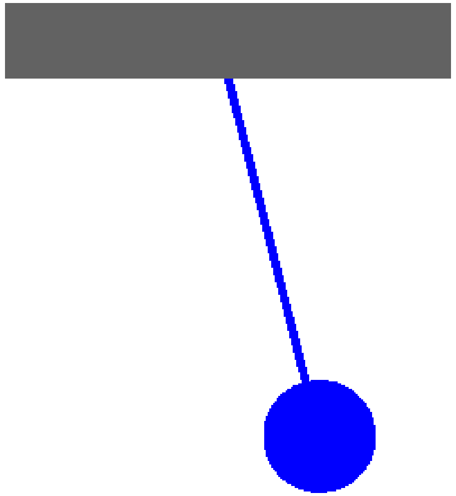
力学：机械运动



平动



转动



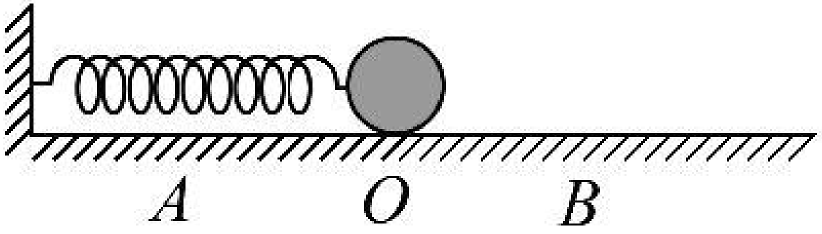
振动

振动是自然界中最普遍的一种运动形式。

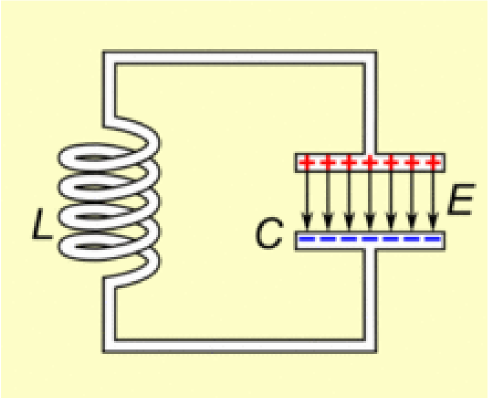
机械振动：物体在平衡位置附近做往复的周期性运动

发声体、机器运转、海浪起伏、地震、晶格中的原子

电磁振动：电流、电压、电场强度和磁场强度围绕某一平衡值做周期性变化，或称为电磁振荡



弹簧振子 ——机械振动



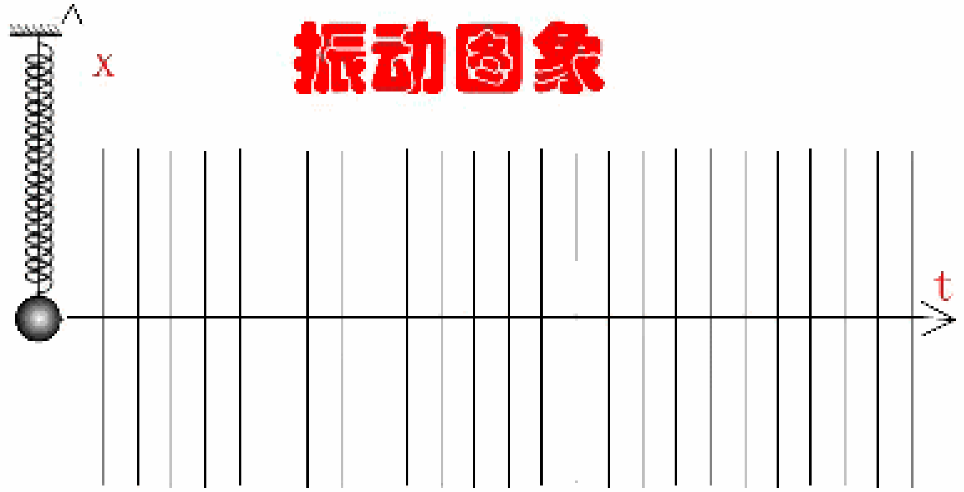
LC电路——电磁振荡

目录

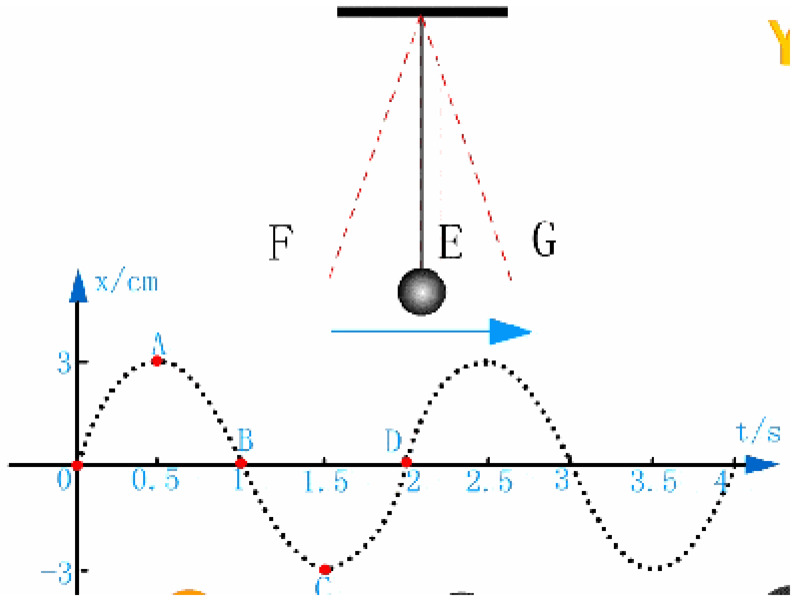
§ 1 简谐振动的运动学描述

一、 什么是简谐振动

质点运动时，如果离开平衡位置的位移按余弦(或正弦)规律随时间变化，这种运动就叫简谐运动。



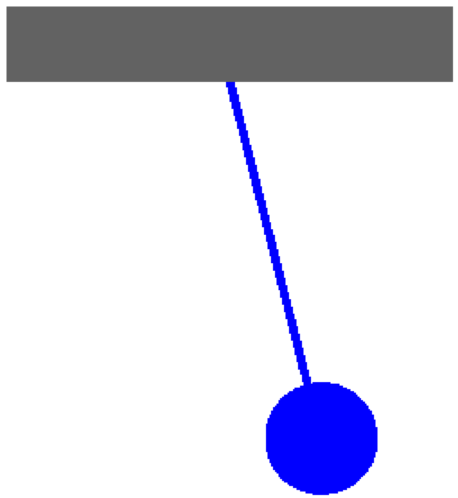
位移 x



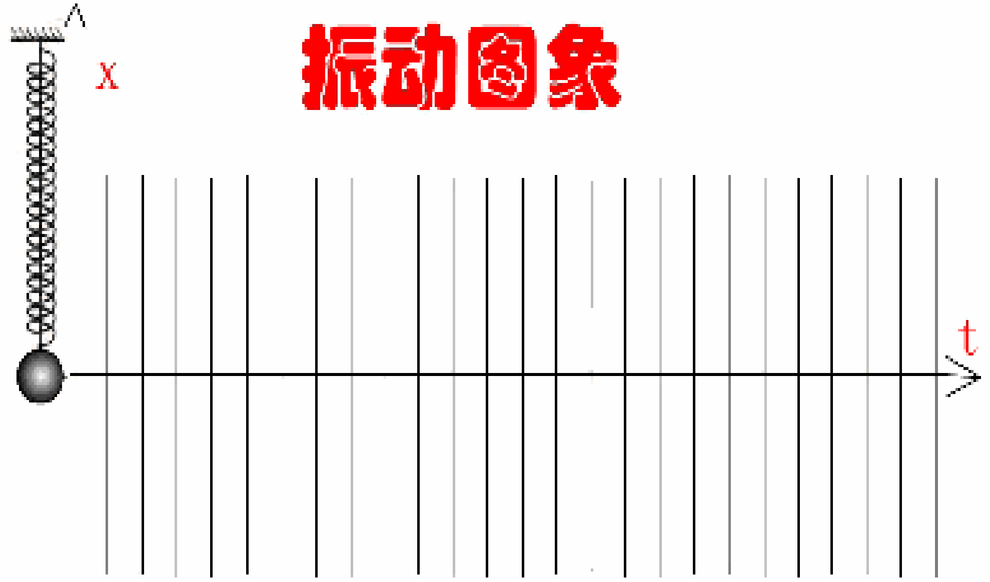
角位移 θ

振动的分类：

- 自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 无阻尼自由简谐振动
    - 无阻尼自由非谐振动
  - 阻尼自由振动
- 受迫振动
  - 受迫简谐振动
  - 受迫非谐振动



二、简谐振动的物理特征



①离开平衡位置的位移按余弦(或正弦)规律随时间变化

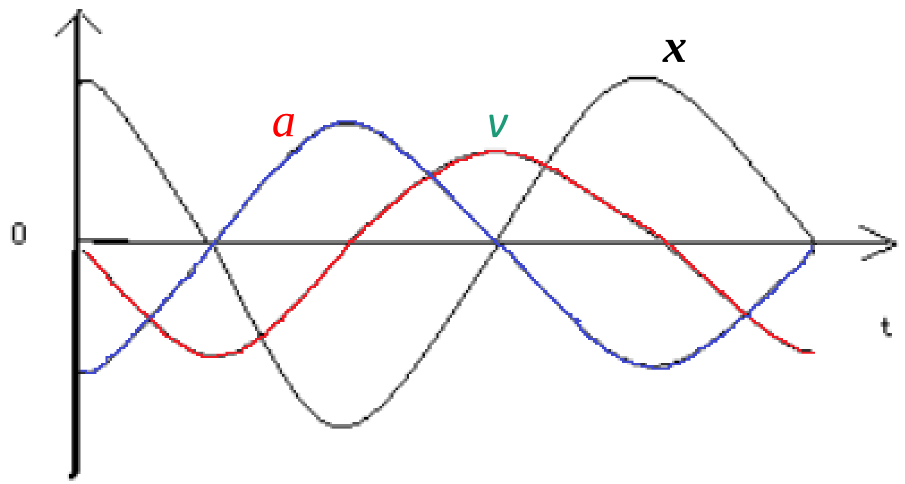
②离开平衡位置的**最大距离**不变(等幅)；

③位移有周期性变化$x(t)=x(t+T)$

简谐振动的数学表达式

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

三、简谐振动的速度与加速度



简谐振动位移表示： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

简谐振动速度表示： $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$

简谐振动加速度表示： $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$

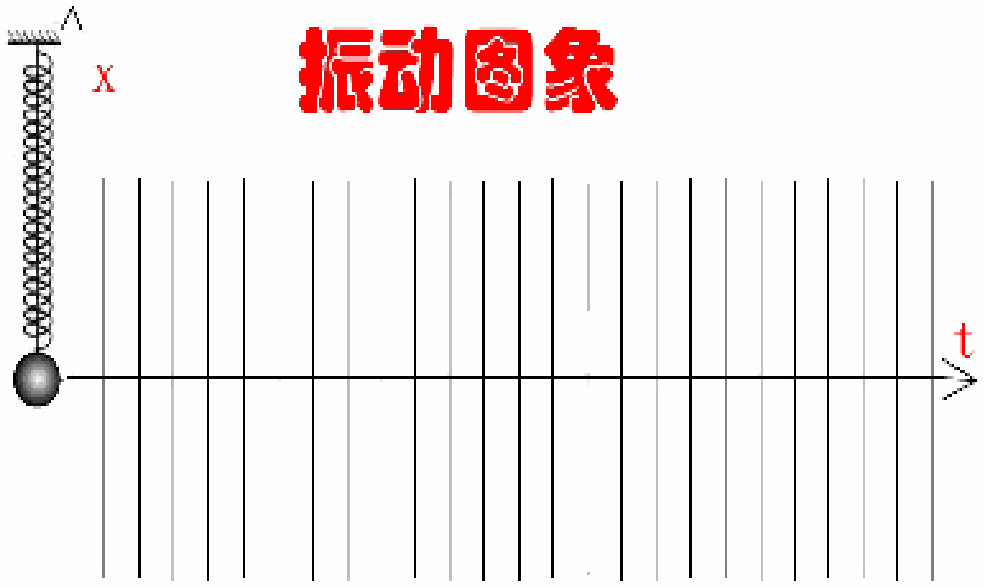
简谐运动的加速度和位移成正比而反向

四、 简谐振动的特征量

简谐振动的数学表达式 $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$

①、振幅 A

$$A = |x_{max}|$$



振动物体离开平衡位置最大距离的**绝对值**

表示振动的强弱程度

简谐振动的数学表达式 $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$

②、角频率 频率 周期

$\boxed{T}$ 称为周期，完成一次全振动所需要时间 单位: s

$\boxed{\nu}$ 称为频率，单位时间内完成周期变化的次数 单位:Hz

$\boxed{\omega}$ 称为角频率或圆频率，2π秒内振动的次数或单位时间内相位变化的弧度 单位:rad/s

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

简谐振动的数学表达式 $\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$

③、相位

相位 $\omega t + \varphi_0$ 物理意义: 表征物体任意时刻 t 的振动状态。

初相 φ_0 ⟶ 表征物体在 t=0 时刻的振动状态。

初相 φ_0 一般取值范围: $0 \sim 2\pi$ 或 $-\pi \sim \pi$

■ 振幅与初相位由初始条件决定。 （重点！）

五、简谐振动的初始条件

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

已知 $t=0$时　　位移 $x=x_0$ ，　$x_0 = A\cos\varphi_0$

速度 $v=v_0$ ，　$\upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi_0$

求A,φ

振幅　$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$

初相　$\varphi_0 = \tan^{-1}(-\frac{\upsilon_0}{\omega x_0})$

例1 已知$t = 0$时，$x_0 = A/2$，$v = v_0 > 0$，求初相位?

解： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ $\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$

由：$x_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)\big|_{t=0} = A/2$

得：$\cos\varphi_0 = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \pm\dfrac{\pi}{3}$

又由：$\upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi_0 > 0$ 得：$\varphi_0 = -\pi/3$

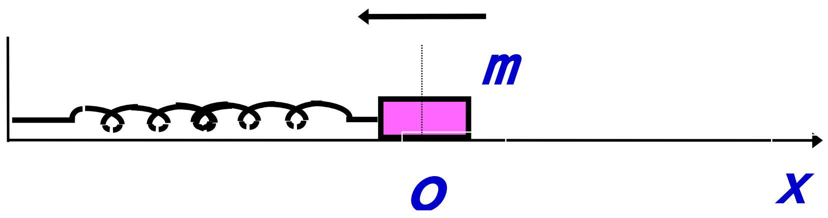
六、简谐振动的相(Phase)

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$\omega t + \varphi_0$ 称为t 时刻的相位　　φ_0　t =0时刻的相位——初相

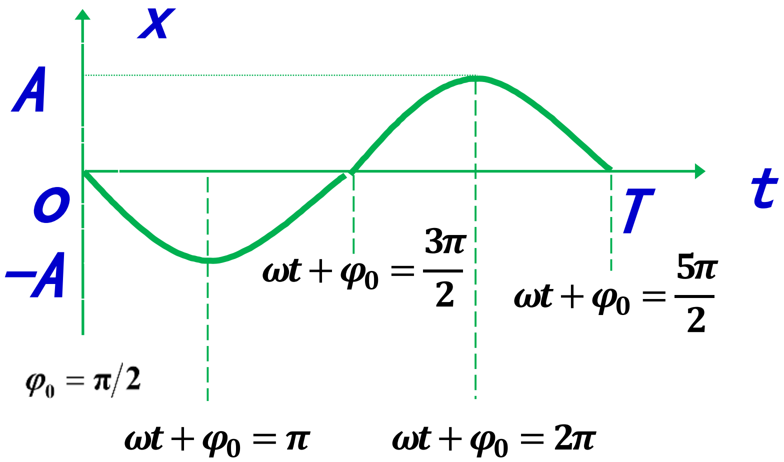
相位的意义在于：　确定振动系统的运动状态。

以弹簧振子为例：



$x_0 = 0$

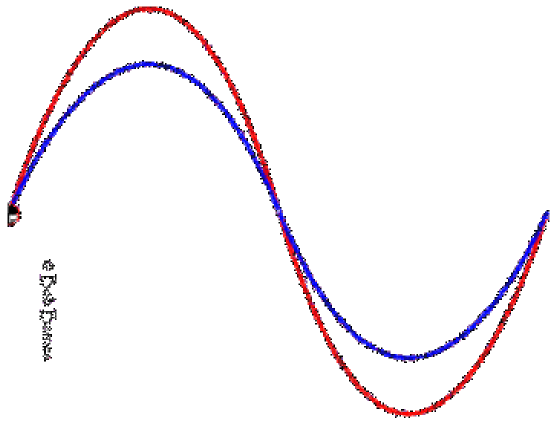
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



➢ 两个同频率简谐振动的步调

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$$

$$\varphi_1 = \omega t + \varphi_{01} \qquad \varphi_2 = \omega t + \varphi_{02}$$



相差为： $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$

①**若：** $\Delta\varphi = 0$ **或** $2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

——则称x_2与x_1**同相**

②**若：** $\Delta\varphi = \pi$ **或** $(2n+1)\pi \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2$

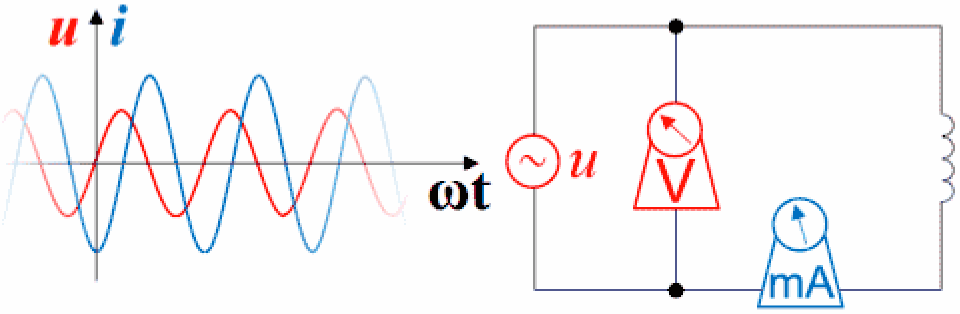
——则称x_2与x_1**反相**

➢ 两个同频率简谐振动的步调

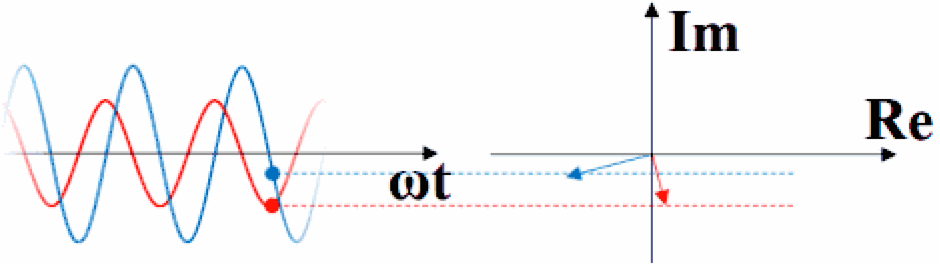
相差为： $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(\omega t+\varphi_{02})-(\omega t+\varphi_{01})=\varphi_{02}-\varphi_{01}$

③若 $\Delta\varphi>0$ 则 x_2 比 x_1 超前了 $\Delta\varphi$ 的位相

④若 $\Delta\varphi<0$ 则 x_2 比 x_1 落后了 $|\Delta\varphi|$ 的位相



在此种说法中 $\Delta\varphi$ 一般取值范围：$-\pi\sim\pi$

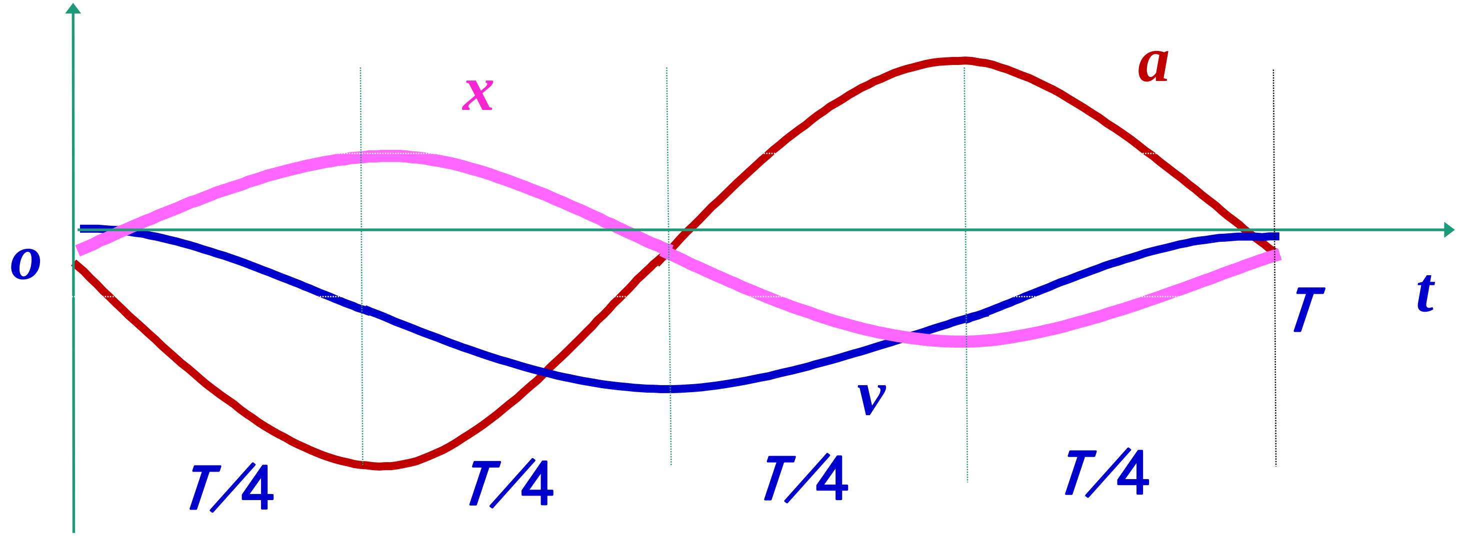


弹簧振子的位移、速度和加速度的相位关系

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

用运动曲线表示： $\varphi_0 = -\pi/2$



v比x超前了$\pi/2$ 的位相

a比v超前了$\pi/2$ 的位相

例2 已知简谐振动位移$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$，讨论$\omega t + \varphi_0 = 0, {}^{\pi}/_{2}$时谐振子的振动速度、加速度和运动状态。

解： $\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$ $a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\omega t + \varphi_0 = 0 \begin{cases} x = A \\ \upsilon = 0 \\ a = -\omega^2 A \end{cases}$$

物体在正位移极大处，速度为零。

下个时刻要向 x 轴的负方向运动。

$$\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \begin{cases} x = 0 \\ \upsilon = -\omega A \\ a = 0 \end{cases}$$

物体正在原点， 以最大速率运动。

下个时刻要向 x 轴的负方向运动。

七、描述简谐振动运动状态的方法

①、解析法—函数表示

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

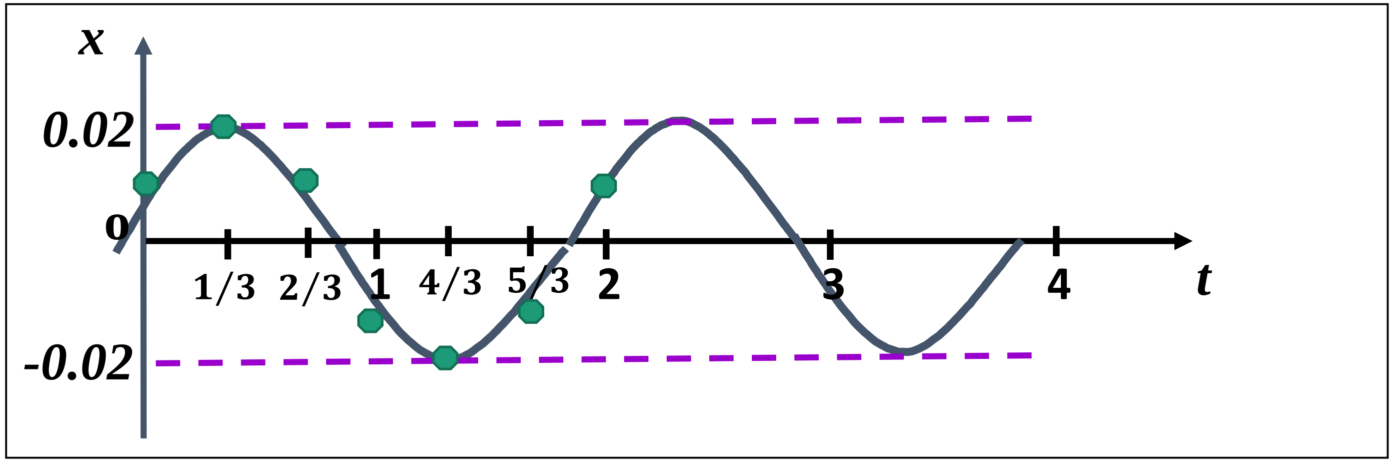
$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

并要求会根据简谐振动的函数关系画出其振动曲线

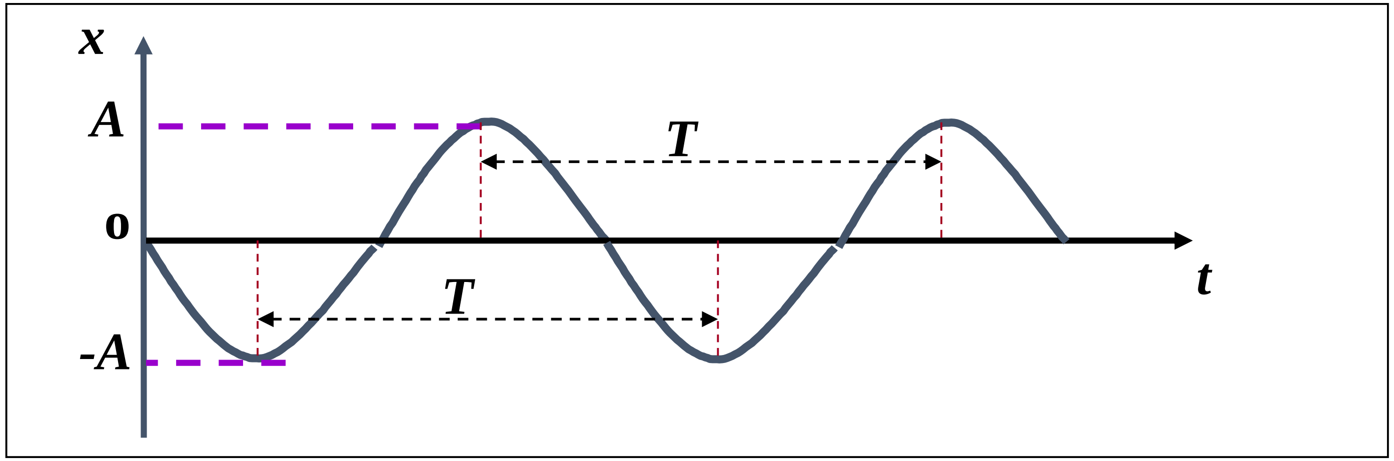
➢ 根据简谐振动的函数关系画出其振动曲线

简谐振动方程： $x=0.02\cos(\pi t-\frac{1}{3}\pi)$ （SI）

振幅 A=0.02m　　周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\,(s)$



②、图线法—振动曲线



A：等于曲线最高点或最低点纵坐标的绝对值。

T：两个相邻最高点或最低点之间的时间间隔。

φ_0：t=0时，相位（初始相位） $\varphi_0 = \pm\arccos\frac{x_0}{A}$ $-\pi \le \phi_0 \le \pi$

➢ 根据简谐振动的振动曲线求出其振动方程

例3 如图所示，简谐振动的位移时间曲线，试写出其运动方程。

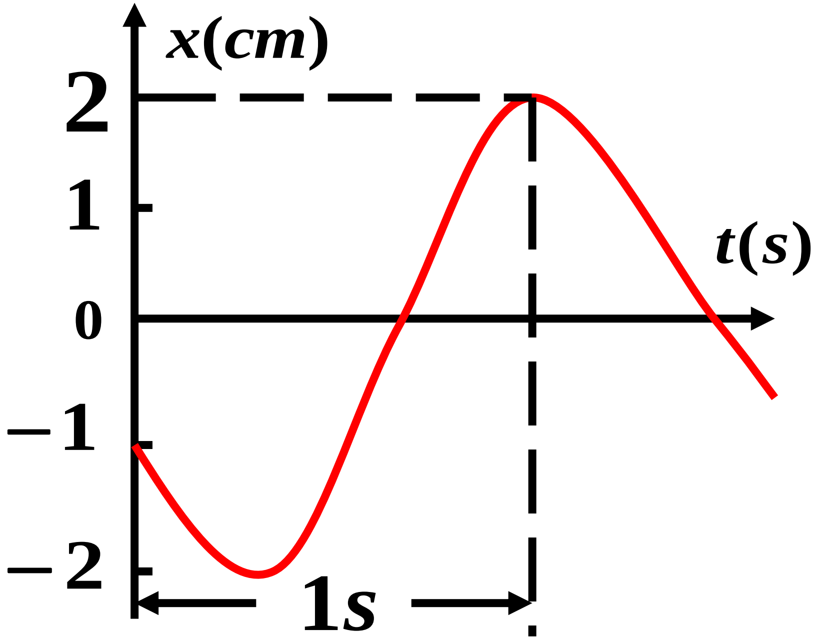
解： 设该简谐振动的运动方程为：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

由图可知，A=2cm，当t=0时

$$x_0 = 2\cos\varphi_0 = -1$$

$$\cos\varphi_0 = -\frac{1}{2}, \text{所以}\varphi_0 = \pm\frac{2}{3}\pi$$



因为：$v_0<0$， $v_0 = -\sin\varphi_0, \text{故}\sin\varphi_0 > 0$ ， 所以$\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$

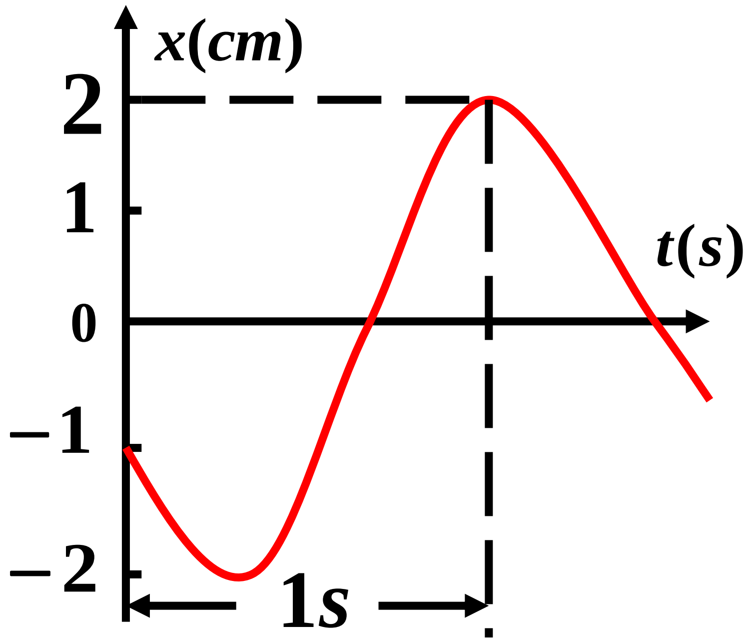
由于$\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$

由于 t=1s 时，位移达到正的最大值，即：

$$A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = A$$

故： $\varphi = \omega t + \varphi_0 = 2\pi$

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} = \frac{2\pi - \frac{2\pi}{3}}{1} = \frac{4}{3}\pi$$



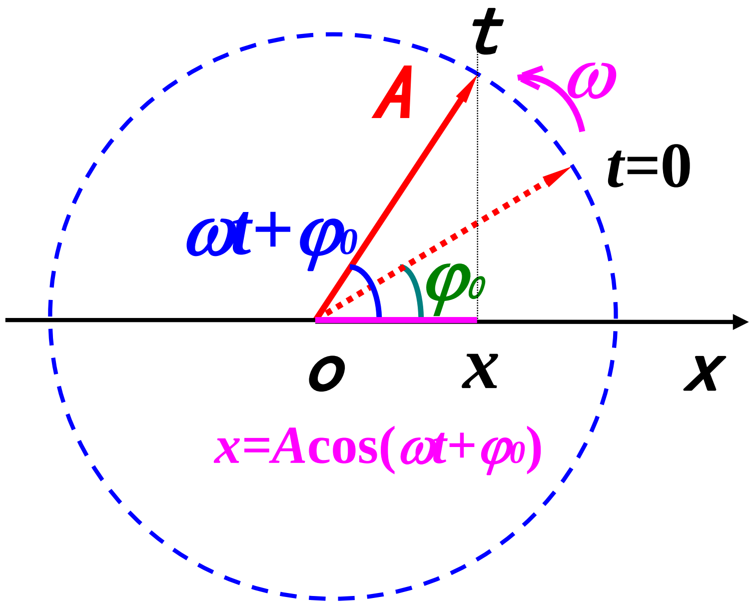
因而有： $x = 2\cos(\frac{4}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi)(cm)$

③、几何法—旋转矢量法（相量图法）

$\vec{A}$ 以ω为角速度绕O点逆时针旋转

$t=0$ 时矢量 $\vec{A}$ 与x轴的夹角为φ_0

t 时刻矢量 $\vec{A}$ 与x轴的夹角为$\omega t+\varphi_0$



$\vec{A}$ 的**端点**在t时刻在 x 方向的**投影**点的坐标为：

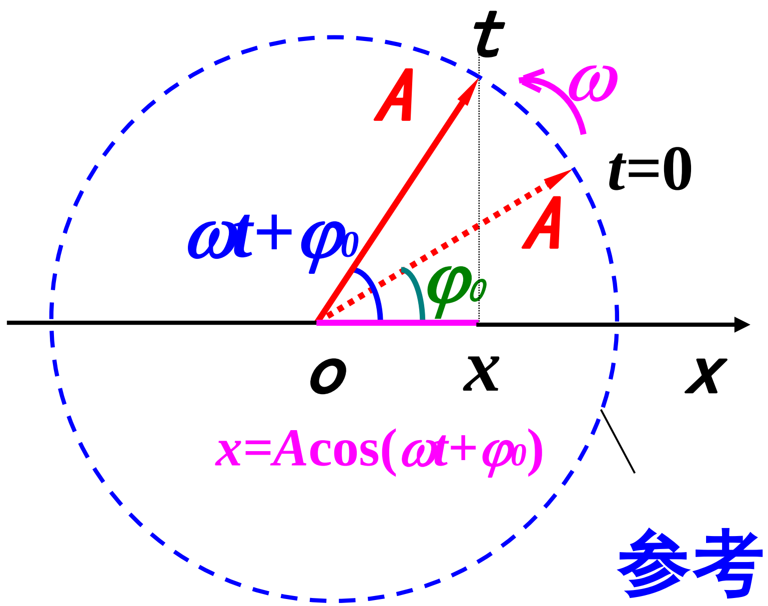
$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

质点简谐振动与匀速圆周运动的简单对应关系

任意时刻的旋转矢量 $\vec{A}$ 与简谐振动的状态之间有一一对应的关系。

三要素

- 矢量$\vec{A}$长度 $|\vec{A}| = A$ → 振幅
- $\vec{A}$的旋转角速度ω → 振动的角频率
- $\vec{A}$与 x 轴的夹角 → 振动的相位



参考圆

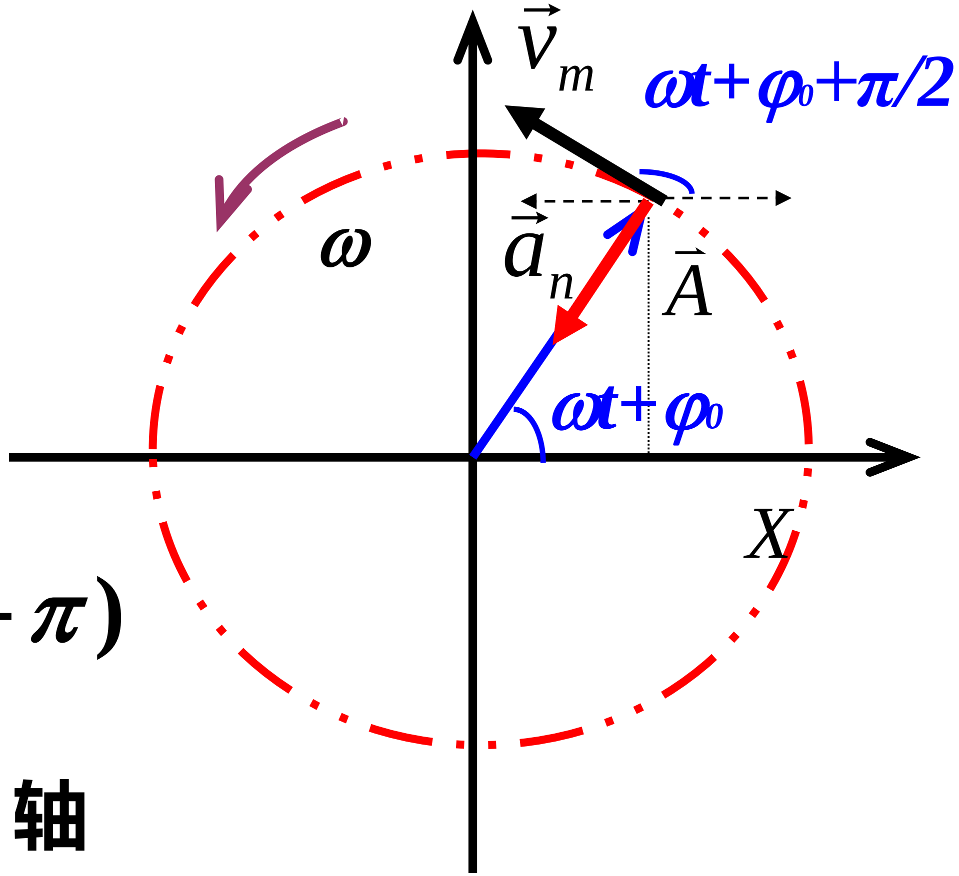
速度 $v_m = R\omega = A\omega$ **方向如图**

t 时刻在x轴上的投影： $v = \omega A\cos(\omega t + \phi + \dfrac{\pi}{2})$

加速度 $a_n = R\cdot\omega^2 = A\cdot\omega^2$ **方向如图**

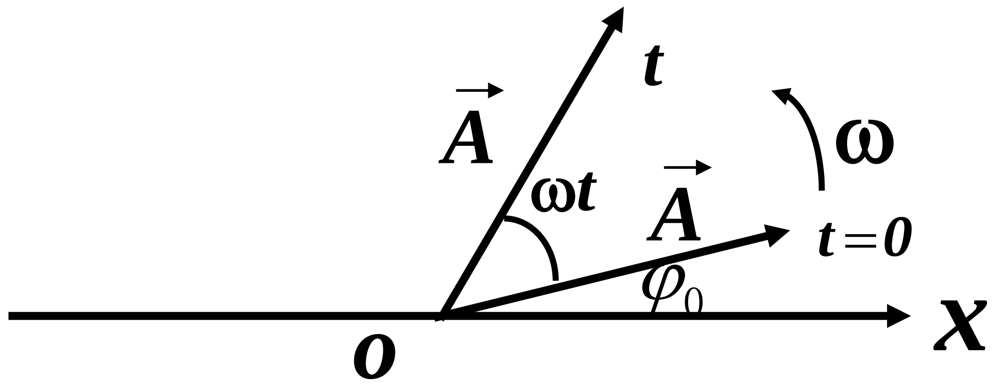
t 时刻在x轴上的投影： $a_x = -a_n\cos(\omega t + \phi)$

$$= -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \phi + \pi)$$



旋转矢量投影点的位移、速度和加速度沿x 轴的投影对应于简谐振动的位移、速度和加速度。

■旋转矢量法的优点：



相量图

1、很**直观描绘**出简谐振动的三个特征量

2、方便地用矢量合成方法研究**振动的合成**

3、利用旋转矢量很容易求出简谐振动的**位相和初位相**

➢ 位移、速度和加速度的相位关系

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

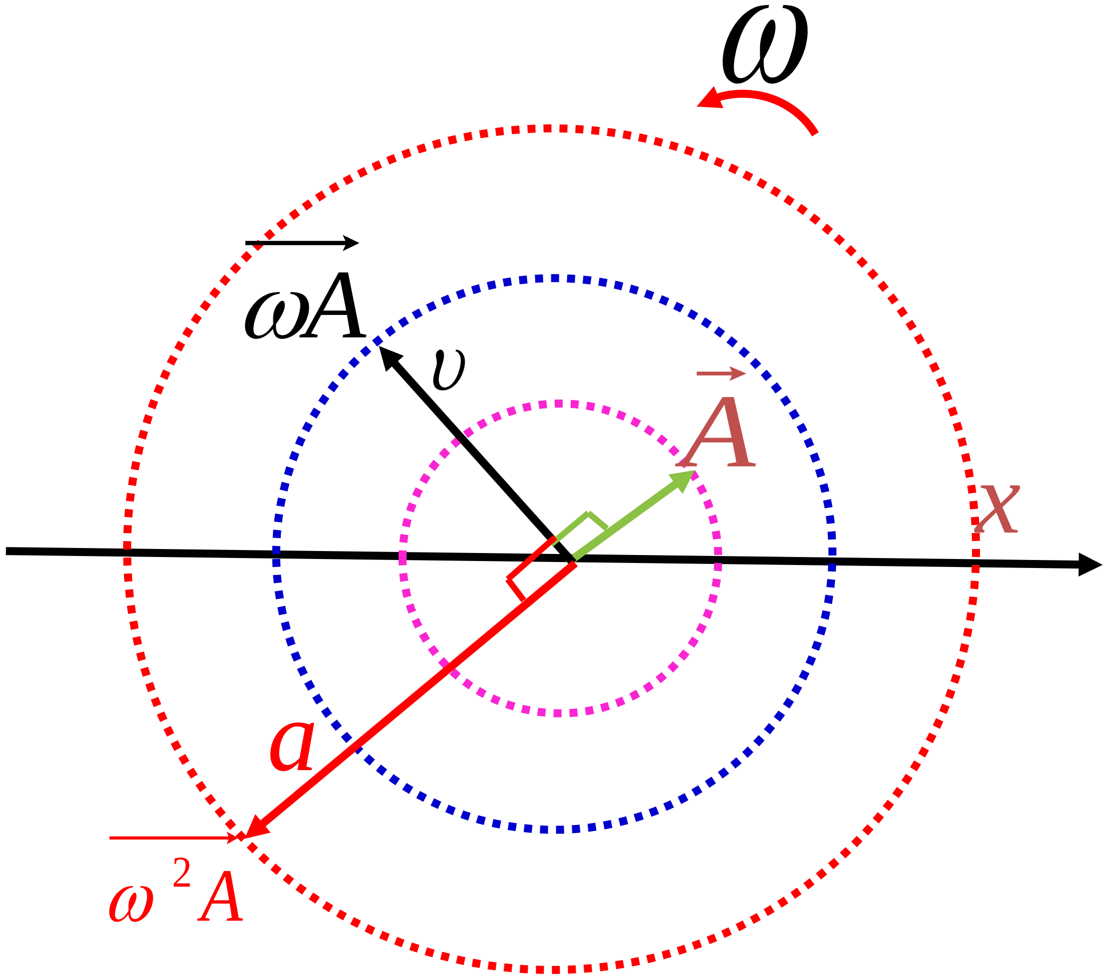
$$\upsilon = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

v比x超前π/2， a比v超前π/2

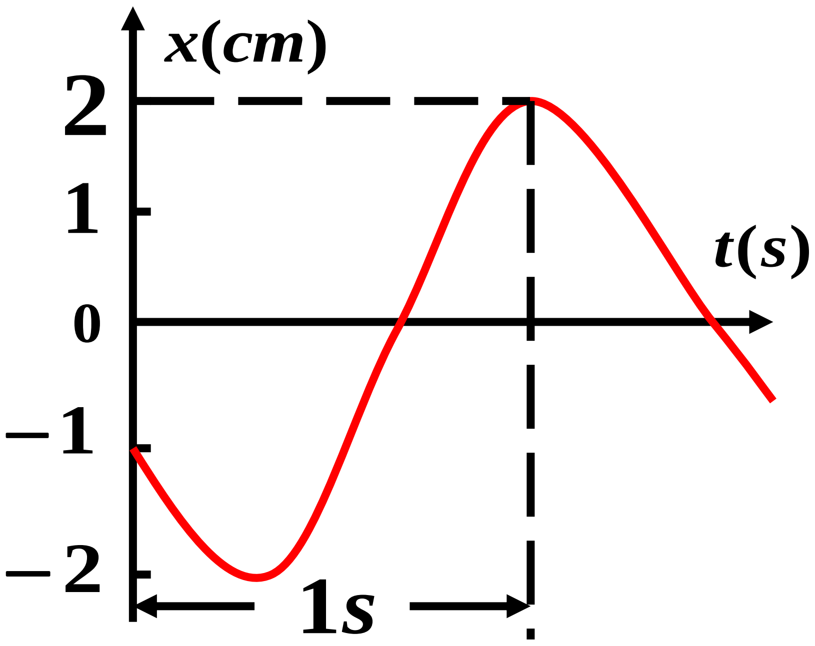
x与a相位差为π，二者**反相**

☞ 旋转矢量法更直观的表示！



➢ 利用旋转矢量求解初相位

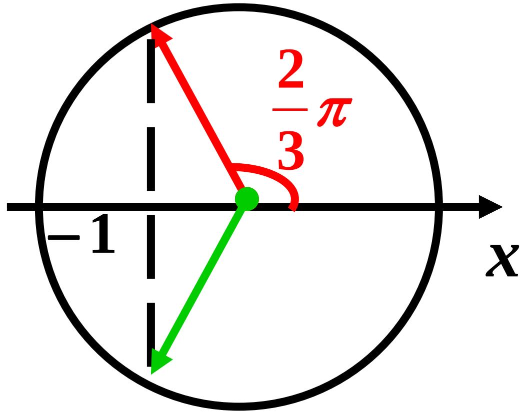
例4 如图所示，简谐振动的位移时间曲线，试求初相位。



解： 设该简谐振动的运动方程为：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

由图可知，A=2cm



当t=0时，x=-1

之后向X轴负方向运动

所以$\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$

例5 一质点沿x轴作简谐振动，振幅A=0.12m，周期T=2s，当 t=0 时，质点对平衡位置的位移x_0=0.06m，此时向x轴正向运动。

求:(1)简谐振动的表达式;

解： 1)取平衡位置为坐标原点，设$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 其中，$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi \quad \text{rad}/s$

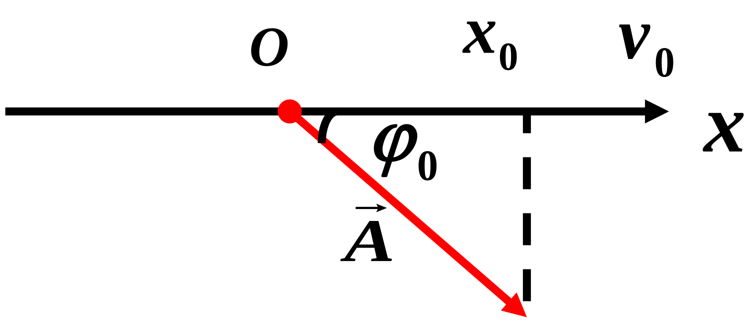
由t=0时，x_0=0.06m，可得：$x_0 = A\cos\varphi_0$

$\cos\varphi_0 = x_0 / A = 0.06/0.12 = 1/2$ 在-π到π之间取值：$\varphi_0 = \pm\dfrac{\pi}{3}$

质点向x正方向运动 $v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega A\sin\varphi_0 > 0 \quad \varphi_0 = -\dfrac{\pi}{3}$

于是，此简谐振动的表达式：$\boxed{x = 0.12\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{3}) \quad (SI)}$

利用旋转矢量法求解是很直观的，根据初始条件就可画出如图所示的振幅矢量的初始位置。



$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) \quad (SI)$$

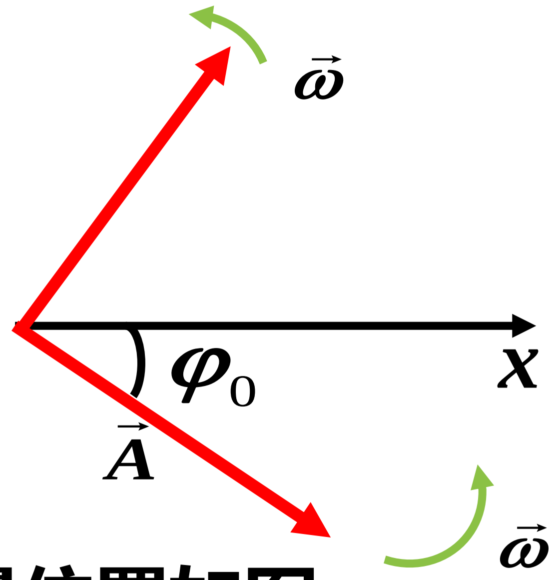
求 (2) $t=T/4$时，质点的位置、速度、加速度；

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$t = 0.5s$时 $\quad x = 0.104m$

$v = -0.189m/s \quad a = -1.03m/s$ **此时旋转矢量位置如图**



求：(3)从初始时刻开始第一次通过平衡位置的时间。 $x = 0.12\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$

3) 通过平衡位置时，x=0，即： $x = 0.12\cos(\omega t - \dfrac{\pi}{3}) = 0$

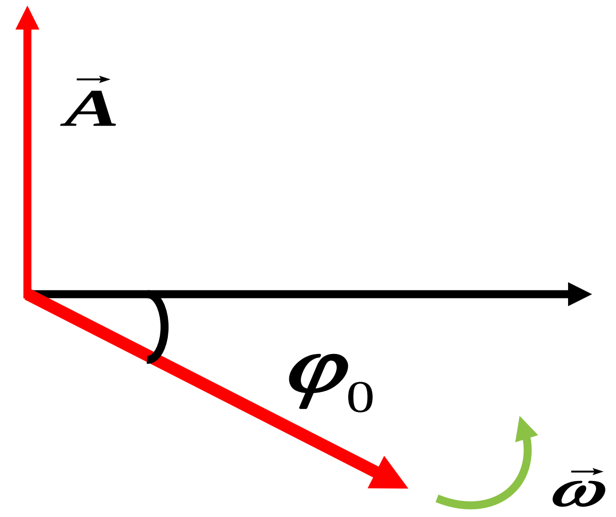
由此可得： $\omega t - \dfrac{\pi}{3} = (2k-1)\dfrac{\pi}{2}, k = 1,2,\cdots$ $t = (k\pi - \pi/6)/\omega$

第一次通过，取k=1，又由于ω=π rad/s，所以： $t = \dfrac{5}{6} = 0.83s$

由振幅矢量图可知，从起始时刻到第一次质点通过原点，振幅矢量转过的角度为：

$$\varphi + \pi/2 = \pi/3 + \pi/2 = 5\pi/6$$

故： $t = \dfrac{5\pi}{6}/\omega = 0.83s$



§ 2 简谐振动的动力学描述

一、简谐振动的动力学方程

简谐振动的运动学方程： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

加速度 $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

由牛顿定律得: $F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$ 令：$k = m\omega^2$

$= -kx$

说明简谐运动的质点受到的合外力与它对于平衡位置的位移成正比而反向 ——回复力

若质点受**合外力**： $F = -kx$ 质点将做何种形式的运动呢？

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad 令 \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

即： $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,}$$

二阶常系数齐次微分方程

➢ 二阶常系数齐次微分方程的解

第一步 写出微分方程的特征方程

$$r^2+pr+q=0.$$

第二步 求出特征方程的两个根 r_1,r_2.

第三步 根据特征方程的两个根的不同情形，按照下列表格写出微分方程的通解：

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1,r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

特征方程：$r^2+\omega^2=0$

其根 $r=\pm i\omega$是一对共轭复根

所以方程的通解为

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\cos\omega t$$

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

质点将做**简谐振动**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$ ——称为简谐振动的动力学方程

其解： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ —— x 可代表任意物理量

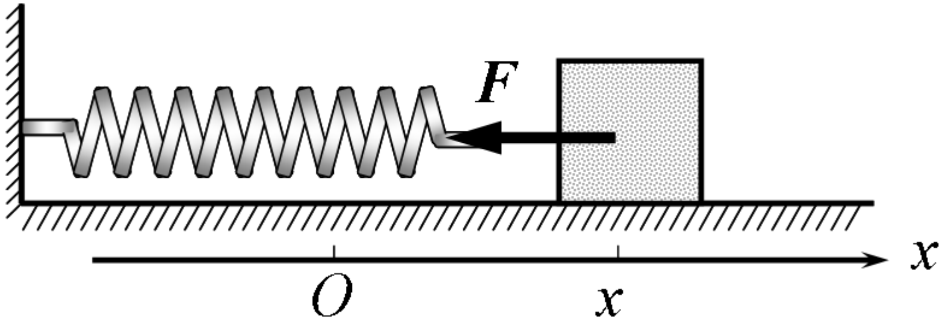
$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ——固有角频率

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ ——固有周期

说明：(1) 位移是相对平衡位置的

(2) 平衡位置是物体静止时受合外力为零的点

1、弹簧振子



弹簧弹力满足胡克定律：

$$F=-kx$$

根据牛顿第二定律： $$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$ ——**振子的固有角频率**

微分方程通解为： $$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

2、单摆（自然坐标系）

切向运动：$-mg\sin\theta = m\dfrac{d^2s}{dt^2}$　　$s = l\theta$

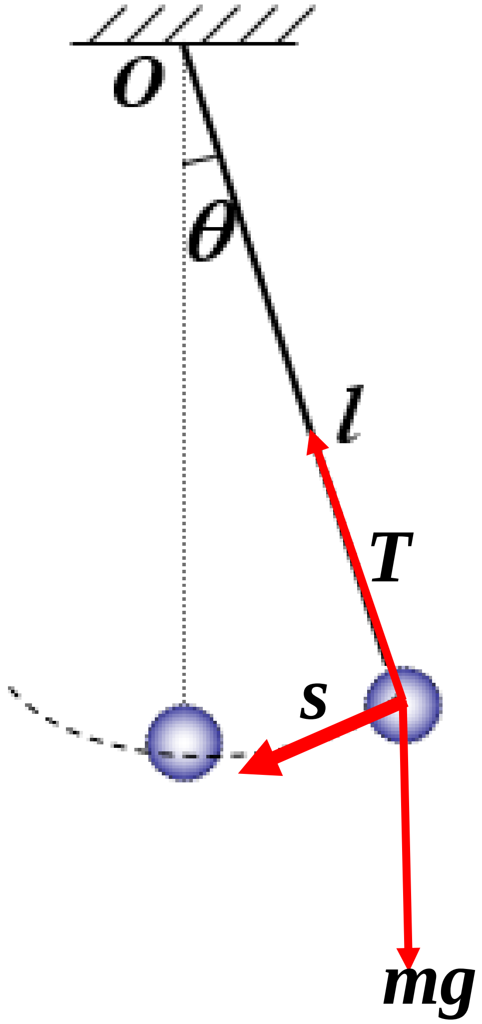
小幅振动：$\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

$\boxed{\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}}$ —固有角频率

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi_0)$$



二、简谐振动的能量 弹簧振子为例

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

动能： $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_{k\max} = \frac{1}{2}kA^2 \qquad E_{k\min} = 0$$

一周期内的平均动能 $$\overline{E}_k = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_k \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

势能：
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

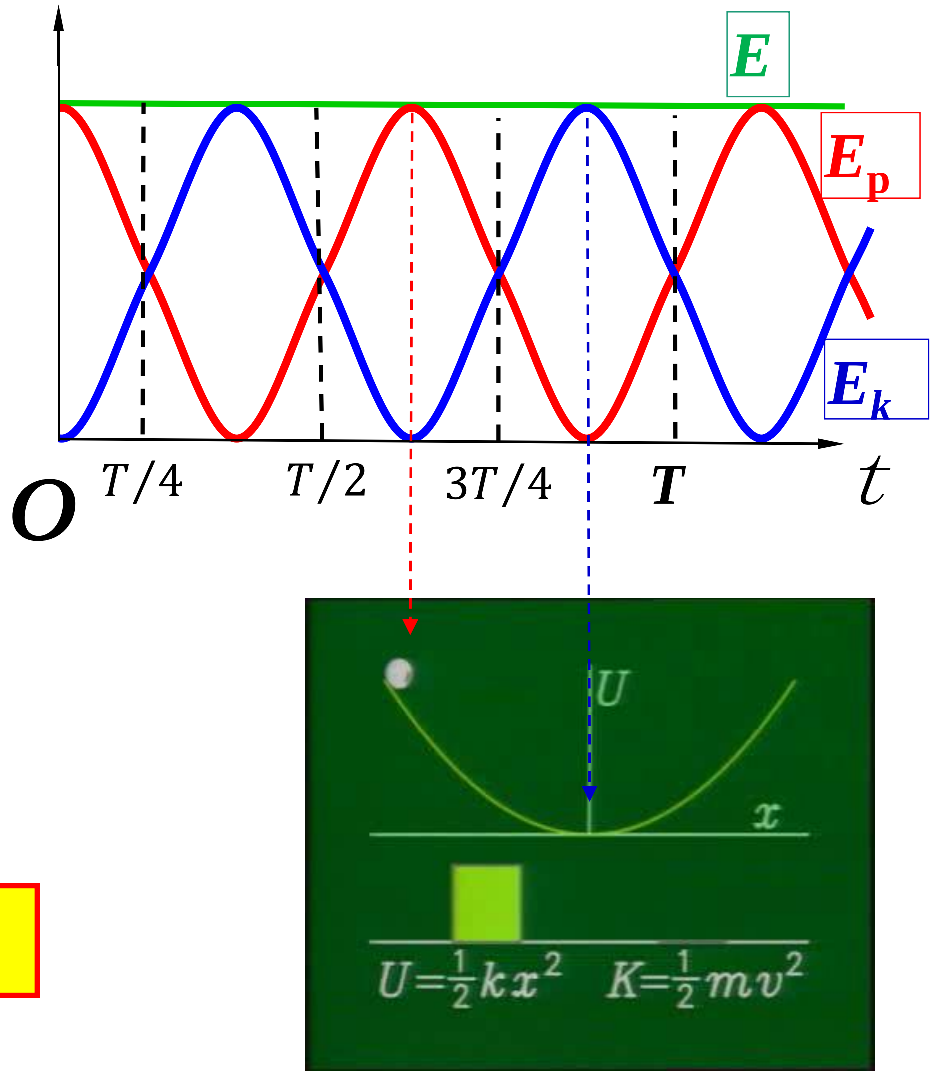
$$E_{p\,max} = \frac{1}{2}kA^2, \qquad E_{p\,min} = 0,$$

$$\overline{E_p} = \frac{1}{T}\int_0^T E_p dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

动能 $$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

势能 $$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

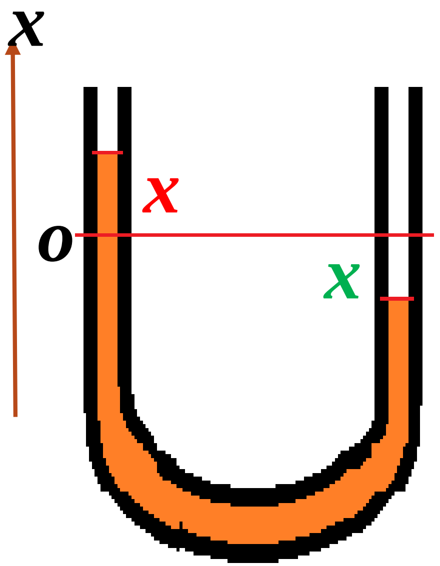
机械能： $$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$



振幅决定能量

作简谐运动的系统机械能守恒(保守系)

例6 横截面均匀的U型管内装有一段长为l 的液体，由于某一扰动使液体发生振动(忽略阻力)　　求：振动周期



解： 设某一时刻，液面离开平衡位置的距离为x

上下液面的高度差为 $2x$　若液体密度为ρ，U型管横截面积为s

上下液面的压力差为 $P=\rho gh=-2\rho gx$

这整个液体受到的力为 $F=P\cdot s=-2\rho gsx$

这整个液体的质量为

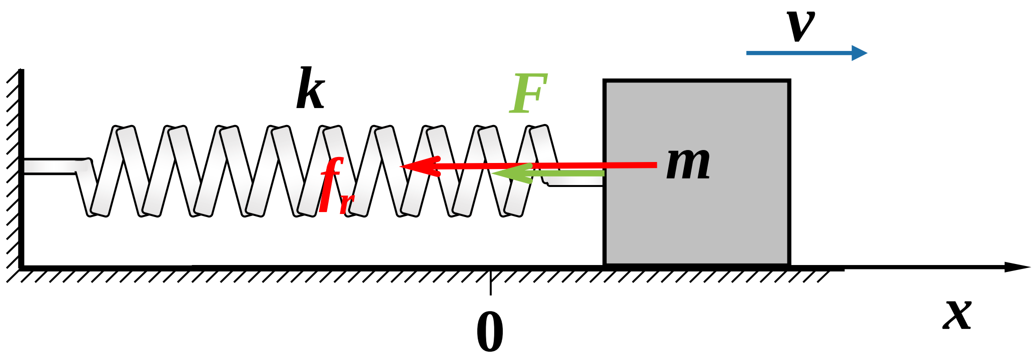
$$m=\rho\cdot V=\rho sl$$

根据牛顿第二定律得

$$F=m\frac{d^2x}{d^2t}=-2pgsx \qquad \frac{d^2x}{d^2t}+\frac{2g}{l}x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{2g}{l}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

§3 阻尼振动与受迫振动

一、阻尼振动



$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx}$$

实际上：振动物体总要受到**阻力**作用

阻尼振动：在**回复力**和**阻力**共同作用下的振动

I、摩擦阻尼： 介质对振子的**摩擦阻力**使振动的能量变为**热量**

如：粘滞阻力

II、辐射阻尼： 振子引起**临近质点的运动**，使系统能量向**四周辐射**

如：辐射声波

仅考虑简单的粘滞阻力情况

运动速度不太大，阻力与速度大小成正比，方向总是和速度相反

$$f_r = -\gamma v = -\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

γ：阻力系数

由物体的形状、大小、表面状及介质的性质决定

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

阻尼振动的动力学方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}x=0$$

令： $\omega_0=\sqrt{k/m}$ （固有角频率）

$\beta=\gamma/2m$ （阻尼因子）

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

二阶常系数齐次微分方程

二阶常系数齐次微分方程的解

第一步　写出微分方程的特征方程

$$r^2+pr+q=0.$$

第二步　求出特征方程的两个根 r_1,r_2.

第三步　根据特征方程的两个根的不同情形，按照下列表格写出微分方程的通解：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

$$r^2+2\beta r+\omega_0^2=0$$

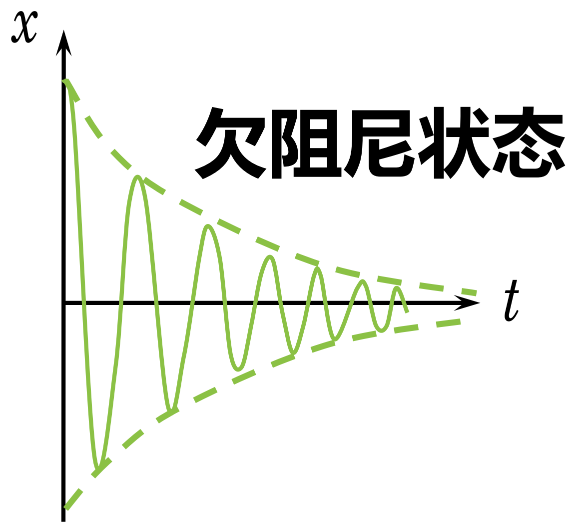
特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1,r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

二阶常系数齐次微分方程

① 当$\beta<\omega_0$时，微分方程通解为：

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$



欠阻尼状态

■周期特点

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$ —阻尼角频率

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$ —阻尼周期

$$T(=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}})>T_0(=\frac{2\pi}{\omega_0})$$

阻尼振动周期T大于无阻尼振动周期T_0

■振幅特点

$$A=A_0e^{-\beta t}$$

阻尼振动的振幅按指数规律衰减

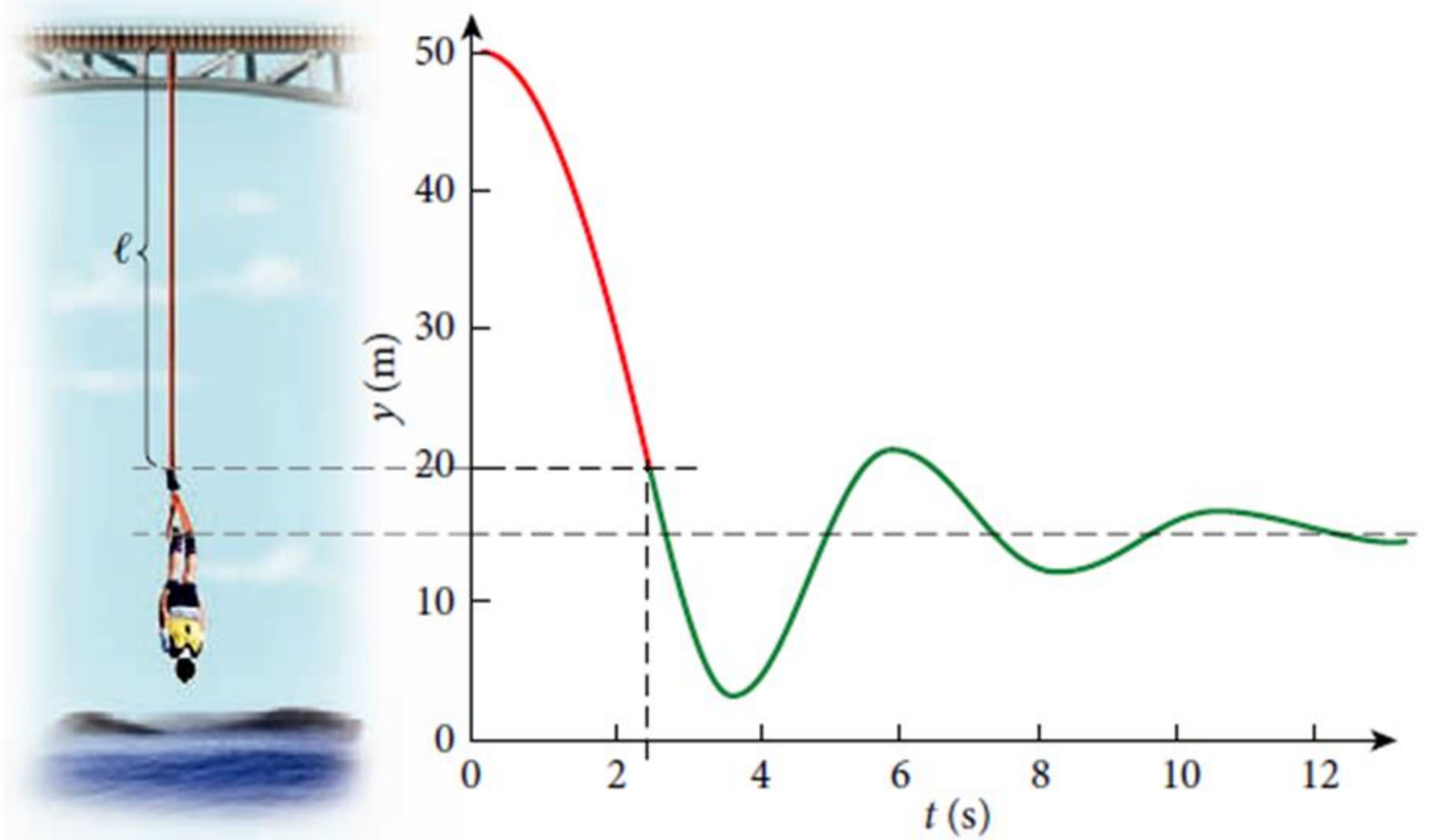


FIGURE 14.20 Idealized vertical motion as a function of time of a bungee jump.

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

二阶常系数齐次微分方程

$$r^2+2\beta r+\omega_0^2=0$$

②当$\beta=\omega_0$时，解为：

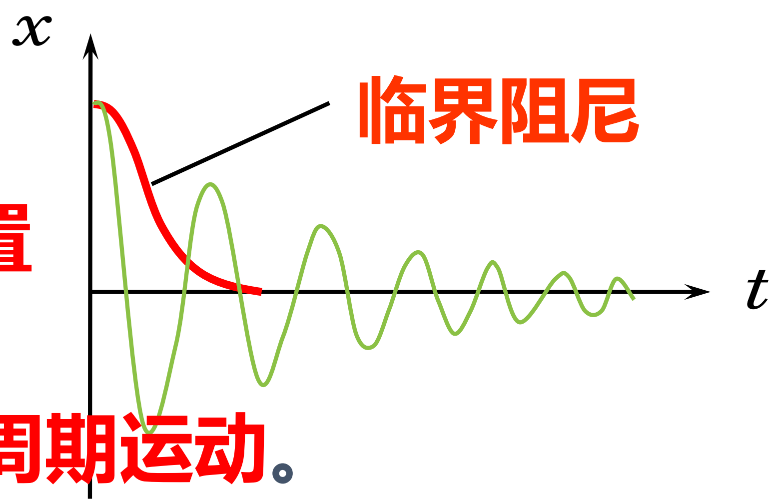
$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}$$

即物体随时间增大而趋于平衡位置

使$x(t)=0$的t值最多只有一个，因此振子不再有振动现象　**称为临界阻尼**

初始条件： $t=0 \quad x(0)=A \quad v(0)=0$

$$x(t)=A(1+\beta t)e^{-\beta t}$$ ——**很快地回到平衡位置**



处于振动过渡的临界状态，此时物体刚好做非周期运动。

临界阻尼的应用

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

二阶常系数齐次微分方程

$$r^2+2\beta r+\omega_0^2=0$$

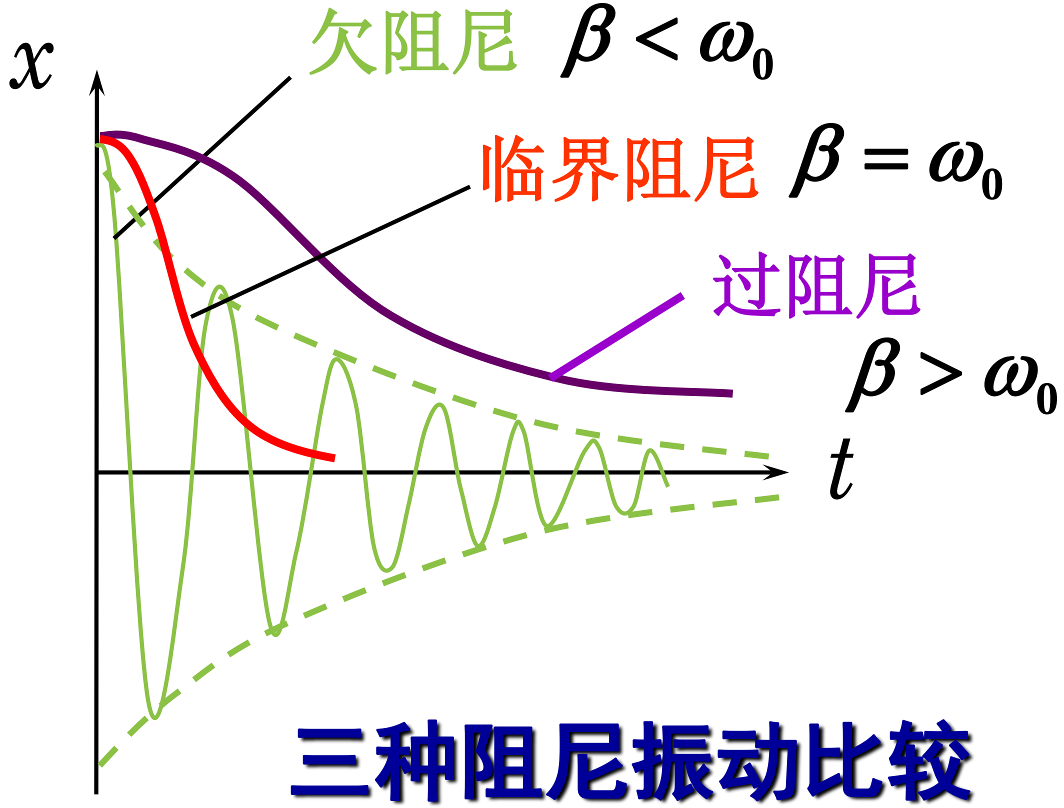
③当$\beta>\omega_0$时，解为：

$$x(t)=B_1e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+B_2e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$$

——缓慢地回到平衡位置

把单摆放入不同粘度的液体中，

可使单摆由欠阻尼过渡为过阻尼



三种阻尼振动比较

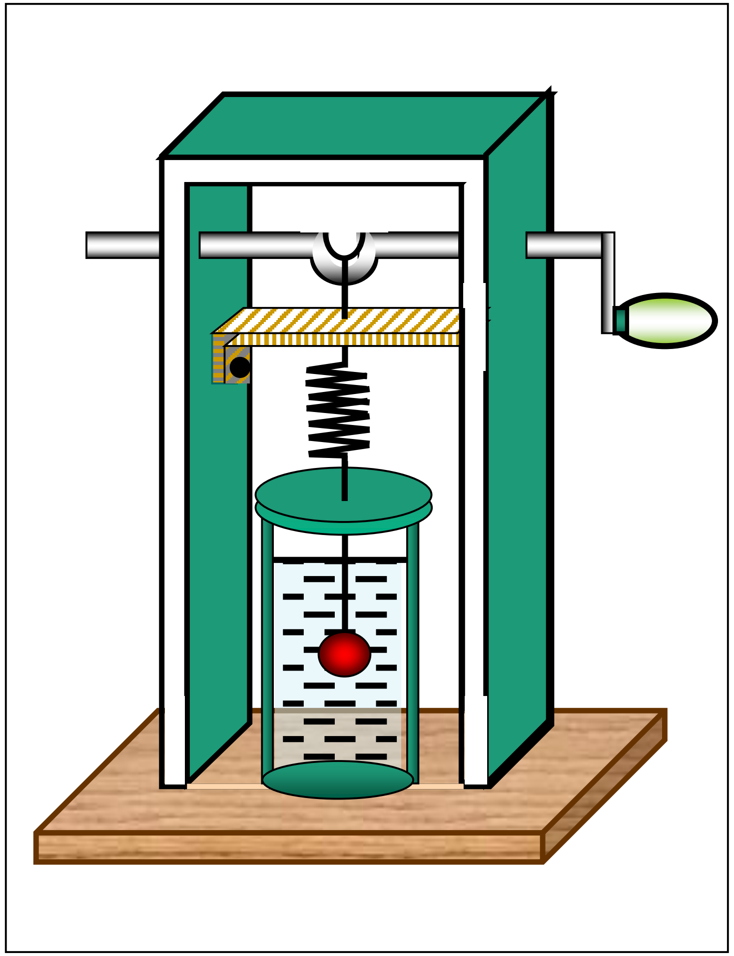
二、受迫振动

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$ 阻尼振动的动力学方程

受迫振动：系统在周期性外力作用下所进行的振动。

周期性外力：$F=F_0\cos\omega t$

受迫振动的动力学方程：$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\gamma\frac{dx}{dt}+F_0\cos\omega t$$



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t$$

受迫振动动力学方程:

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}, 2\beta = \frac{\gamma}{m}, \quad h = \frac{F_0}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dt}{dt} + \omega_0^2 x = h\cos(\omega t)$$

二阶常系数非齐次微分方程

非齐次微分方程通解=非齐次方程特解+齐次方程通解

齐次方程的特征方程: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$

齐次方程的特征方程：$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$

◆ 只考虑欠阻尼情况：

齐次方程通解 $\boxed{x_1 = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi_0')}$ $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 阻尼角频率

非齐次方程特解 $\boxed{x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$

非齐次方程通解 $x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi_0') + A\cos(\omega t + \varphi_0)$

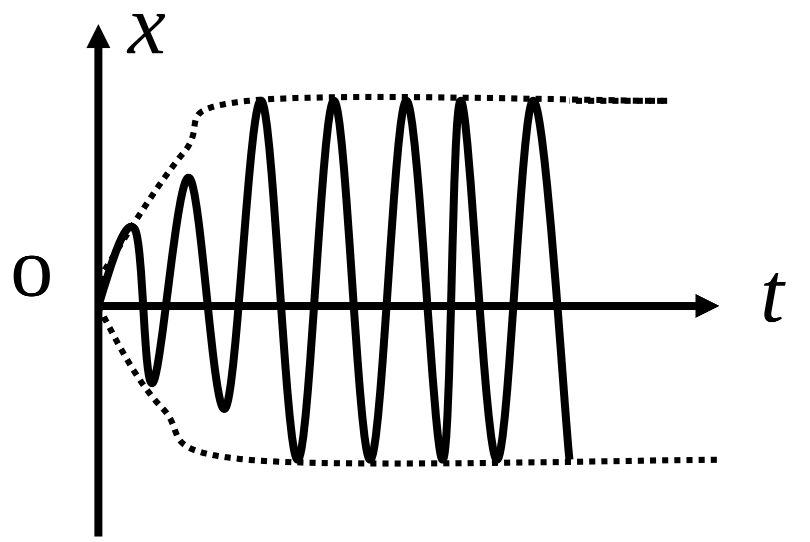
$$x(t) = \underline{A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi_0')} + \underline{A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

第一项分运动 —减幅的振动经过一段时间减弱到可以忽略不计。

第二项分运动 —振幅不变的振动（稳定振动）

经过一段时间后，振动方程的稳态解：

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$



受迫振动方程的稳态解： $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

稳态时的受迫振动表达式，虽然和无阻尼自由振动的表达式相同，x 按余弦规律振动，但与简谐振动有本质区别

① **角频率等于驱动力的角频率ω** 即 $\omega \neq \omega_0$

② **振幅：** $A = \dfrac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ $A = A(\omega)$

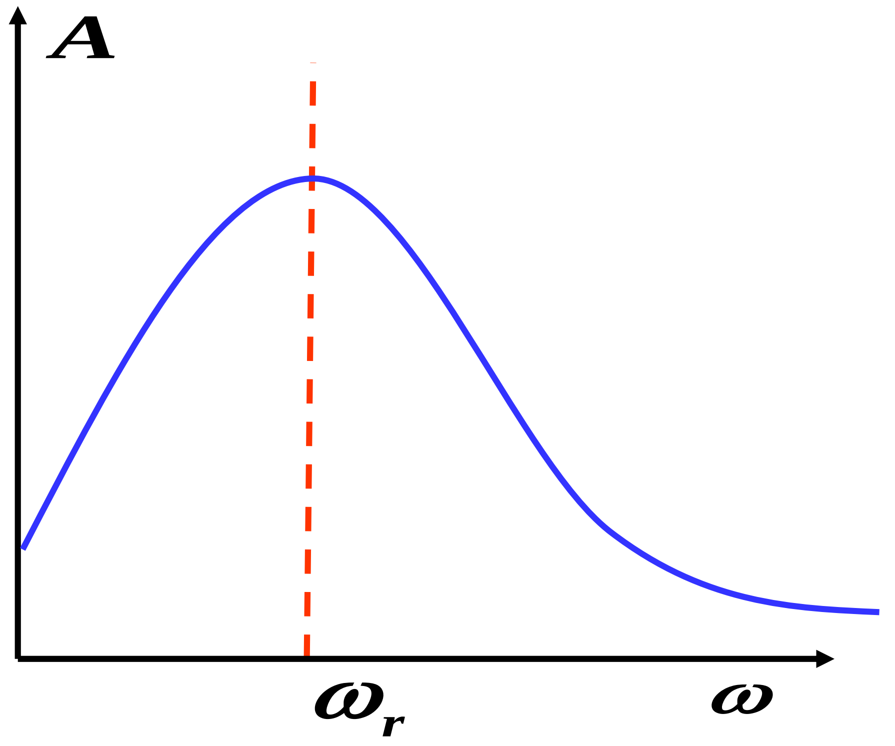
③ **初相：** $tg\varphi_0 = -\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ $\varphi_0 = \varphi_0(\omega)$

➢ **振幅和初位相不是决定于系统的初始状态，而是依赖系统的性质、阻尼的大小和驱动力的特征。**

三、共振现象

根据**振幅表达式**

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$



在阻尼不变β，驱动力振幅不变h的情况下，只改变驱动力的频率ω

可得A-ω曲线，如图所示

共振：在周期性驱动力的作用下系统的振幅达到最大

振幅共振

$$A(\omega)=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

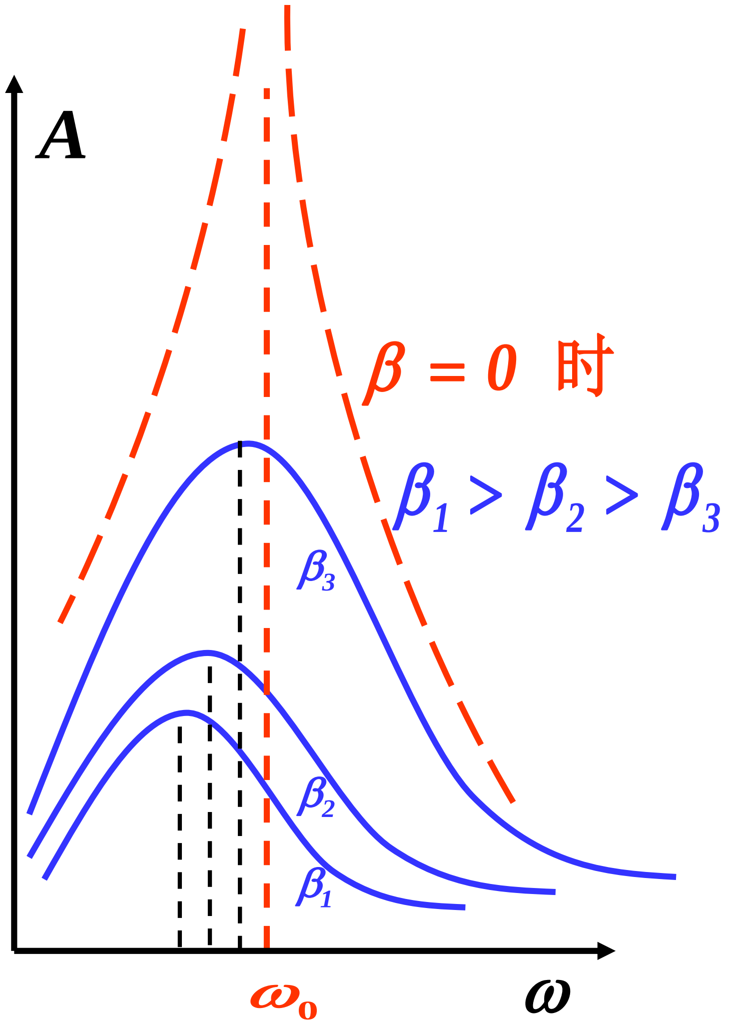
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega}=0$$

当$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$时

$$A\Rightarrow max$$

$$A_{\max}=\frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

$$\boxed{\omega_r<\omega_0}$$



阻尼β愈小，ω愈接近ω_0，共振位移振幅愈大

共振的应用

有利的一面：

1、电视、收音机利用电磁共振进行选台、核磁共振。

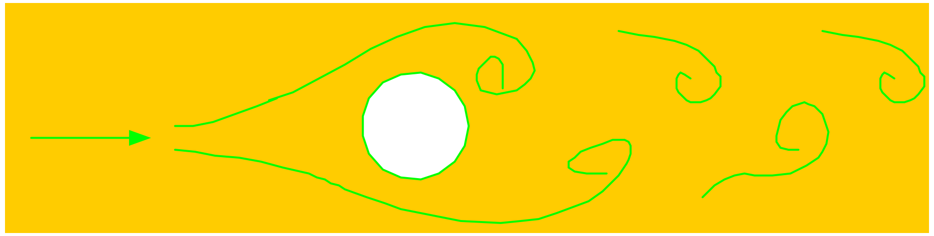
2、乐器利用共振来提高音响效果。

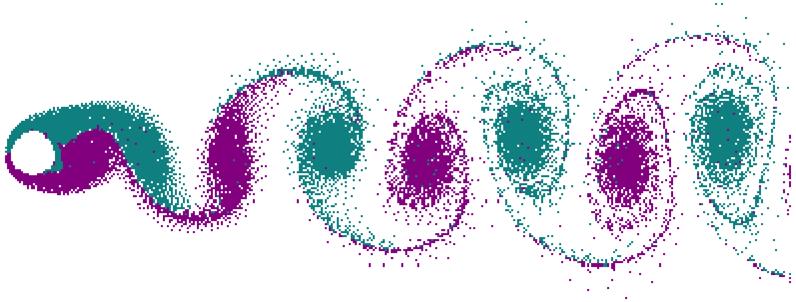
3、用薄板共振控制噪声等等。

不利的一面：

共振时振幅过大，造成的损害：如塔科马海峡大桥的断塌。

➢ 塔科马桥的共振断裂



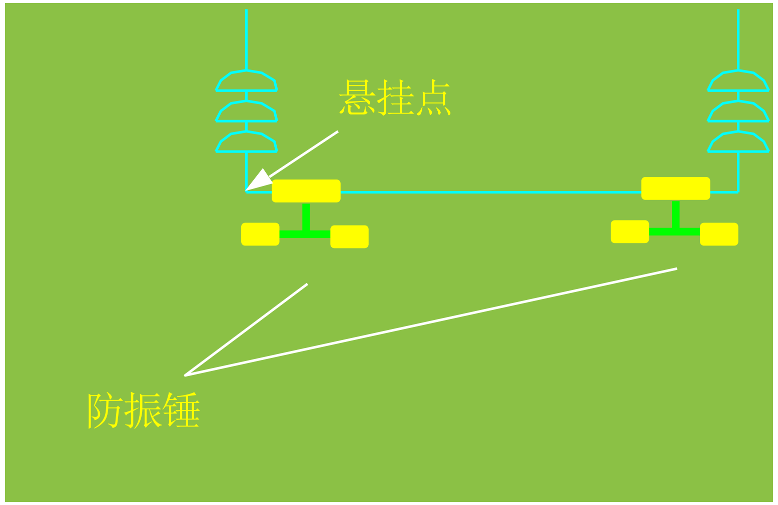


当风从垂直圆柱体轴线的方向以速度V吹过圆柱体时，在圆柱体的背风面处将产生涡旋，叫卡门涡街。

所以风对圆柱体的作用，除有一个沿风速方向的压力外，还受到空气涡旋产生的与风速垂直的上下交替的作用力，使圆柱体上、下作受迫振动，作用力的频率与风速成正比。当风速逐渐增大而使作用力的频率达到圆柱体的固有频率ν_0时，圆柱体产生共振。

再例：空中飞架的高压输电线在风力作用下发生共振断裂，

为防止导线折断而造成事故，通常在悬挂点附近的导线上装置防振锤来消除这种振动。



选用固有频率接近ν_0的防振锤安装在输电线线夹附近。在风力不大时，导线的振动带动防振锤作受迫振动，防振锤吸收导线的一部分能量。当风速增大到使导线以ν_0振动时，防振锤发生共振，吸收导线大部分的振动能量，并把这部分能量转化为热能和声能耗散掉，从而减小了导线振动的振幅。防止了导线的断裂。


欢迎来到趣说科技

§4 同方向简谐振动的合成

一、同方向同频率简谐振动合成

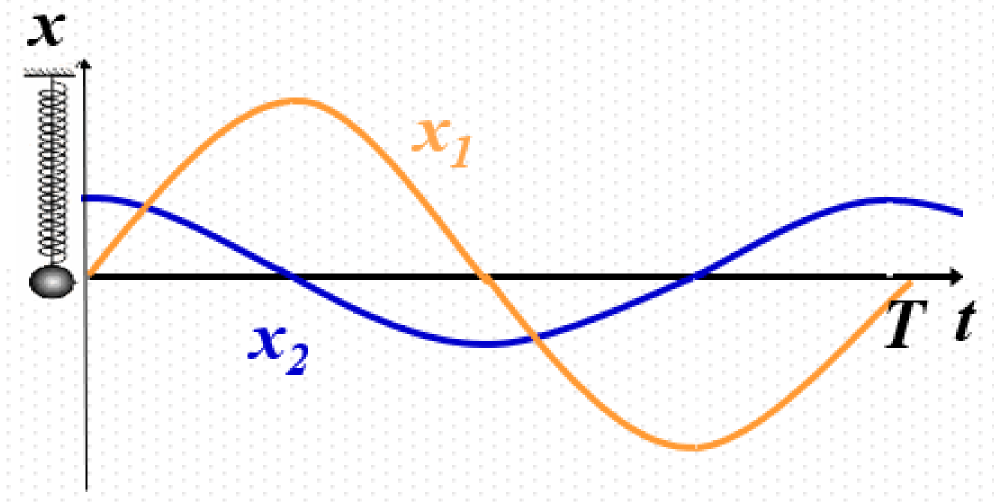
设某一质点同时参与两独立的同方向(x)同频率(ω)的简谐振动：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

质点任意时刻的位移为：

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$



质点还做简谐振动吗？

1、分析

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

① 代数法

$$x = x_1 + x_2 = \overbrace{(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)}^{a} \cos\omega t - \overbrace{(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)}^{b} \sin\omega t$$

$$= a \cdot \cos\omega t - b \cdot \sin\omega t = \boxed{A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

式中:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{b}{a} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

质点仍做同频率的简谐振动

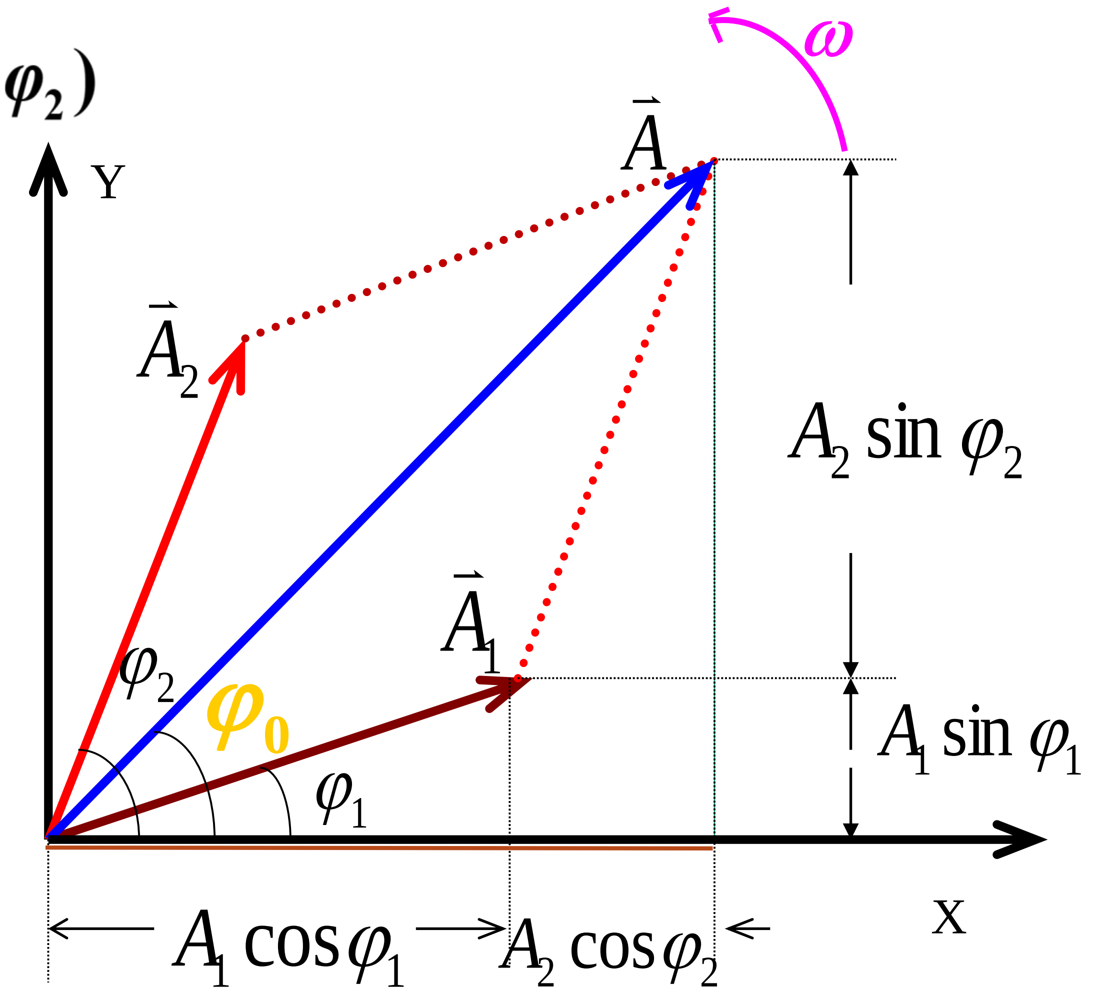
$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

② 几何法（旋转矢量法）

$$\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



质点仍做同频率的简谐振动

2、结论

某一质点同时参与两独立的同方向同频率的简谐振动：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

二者合成后，质点仍作同频率的简谐振动： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

合成的简谐振动振幅不仅和分运动的振幅有关，还和相位差有关

讨论：合振动的振幅与分振动相位差的关系

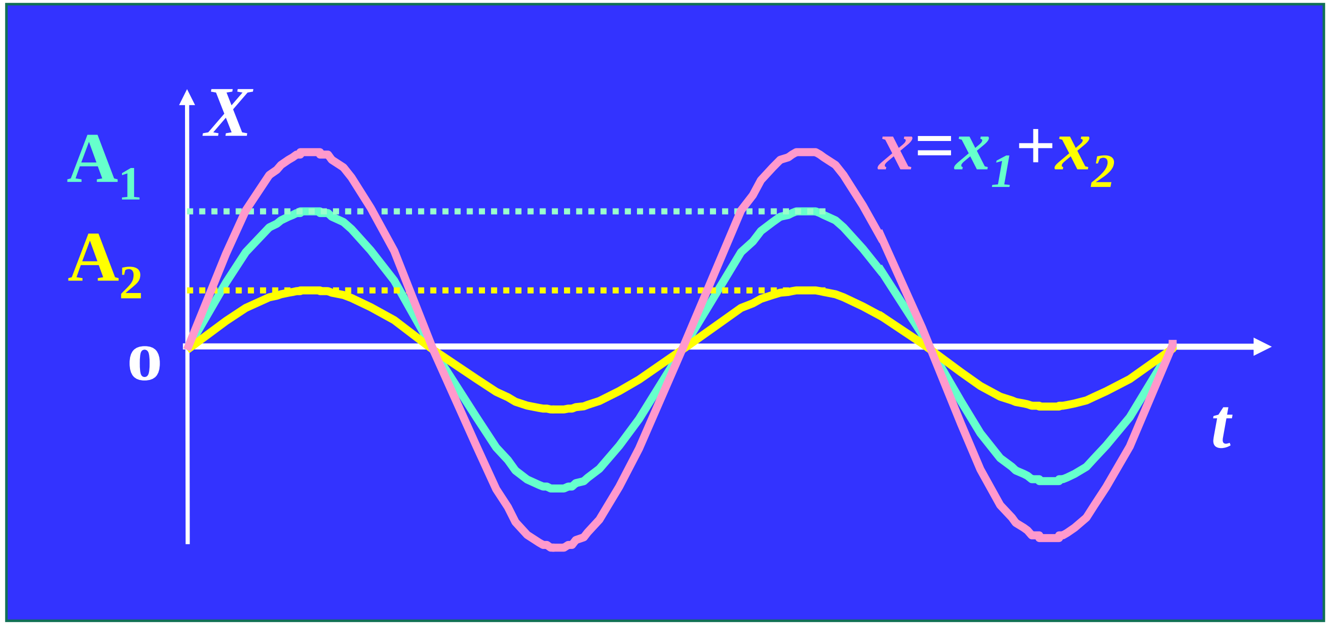
$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}}$$

① **相位差** $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \quad (k=0\,,\ \pm1,\ \cdots)$

同相叠加： $A=A_1+A_2$

合振动的振幅最大

振动加强



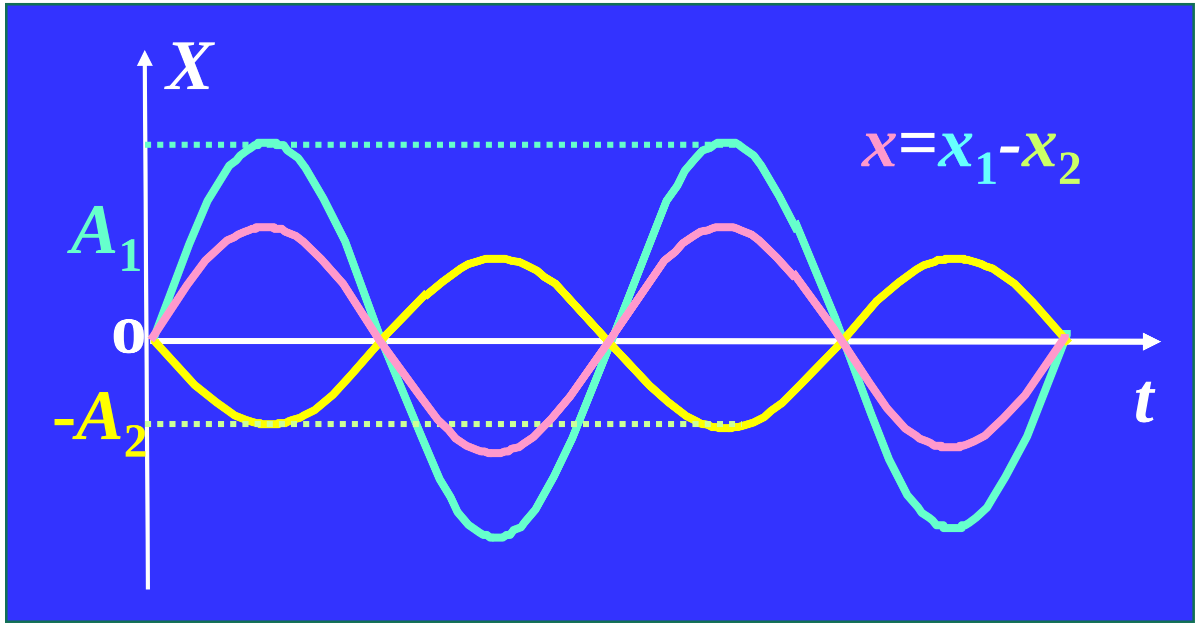
$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

② **相位差** $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0\ ,\ \pm1,\ \cdots)$

反相叠加： $A=|A_1-A_2|$

合振动的振幅最小

振动减弱



③ **一般情况** $|A_1-A_2|<A<|A_1+A_2|$

例7 两个同方向的简谐振动，周期相同，振幅分别为A_1 = 0.06 m和A_2 = 0.08 m，它们合成为一个振幅为A = 0.10 m的简谐振动。则这两个分振动的相位差____$\pm\pi/2$____rad。

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}}$$

$$0.10=\sqrt{0.06^2+0.08^2+2*0.06*0.008\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=0$$

例8 **两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为：**

$$x_1 = 6\times10^{-2}\cos(5t+\frac{\pi}{2}) \qquad x_2 = 2\times10^{-2}\cos(5t-\pi) \qquad (\mathrm{SI})$$

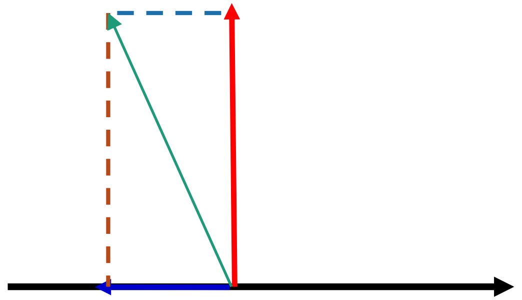
合成运动方程为 $x = 2\sqrt{10}\times10^{-2}\cos(5t+1.89)$

解：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} = \sqrt{0.06^2+0.02^2+2*0.06*0.02*cos(-\frac{3\pi}{2})}$$

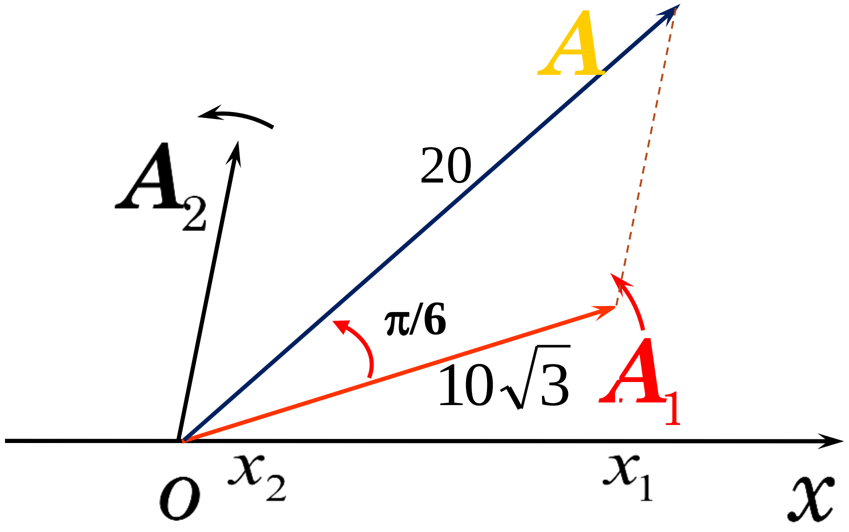
$$= 0.02\sqrt{10}$$

$$\tan\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} = \frac{0.06sin\frac{\pi}{2}+0.02\sin(-\pi)}{0.06cos\frac{\pi}{2}+0.02\cos(-\pi)} = -3$$



$$\varphi_0 = \pi - arctan(3) = 1.89$$

例9 两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为20cm，与第一个简谐振动的相位差为$\varphi_0-\varphi_1=\pi/6$。若第一个简谐振动的振幅为$10\sqrt{3}$cm，则第二个简谐振动的振幅为___10___cm，第一、二两个简谐振动的相位差$\varphi_2-\varphi_1$为___$\pi/2$___。



解：利用余弦定理

$$A_2^2=A^2+A_1^2-2A*A_1*\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=20^2+(10\sqrt{3})^2-2*20*10\sqrt{3}*\frac{\sqrt{3}}{2}=100$$

二、同方向不同频率简谐振动合成*

➤ **振幅和初相位相同不同频率简谐振动合成**

假定 A_0、φ 相同，两简谐振动分别为

$$x_1 = A_0\cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad x_2 = A_0\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

合振动： $x = x_1 + x_2 = A_0[\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cos(\omega_2 t + \varphi)]$ **和差化积**

$$= 2A_0\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t \cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi)$$

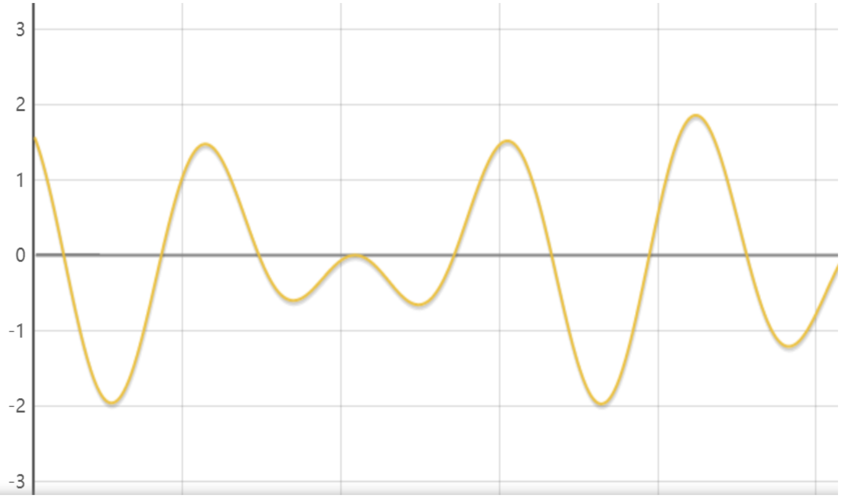
$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = 2A_0\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

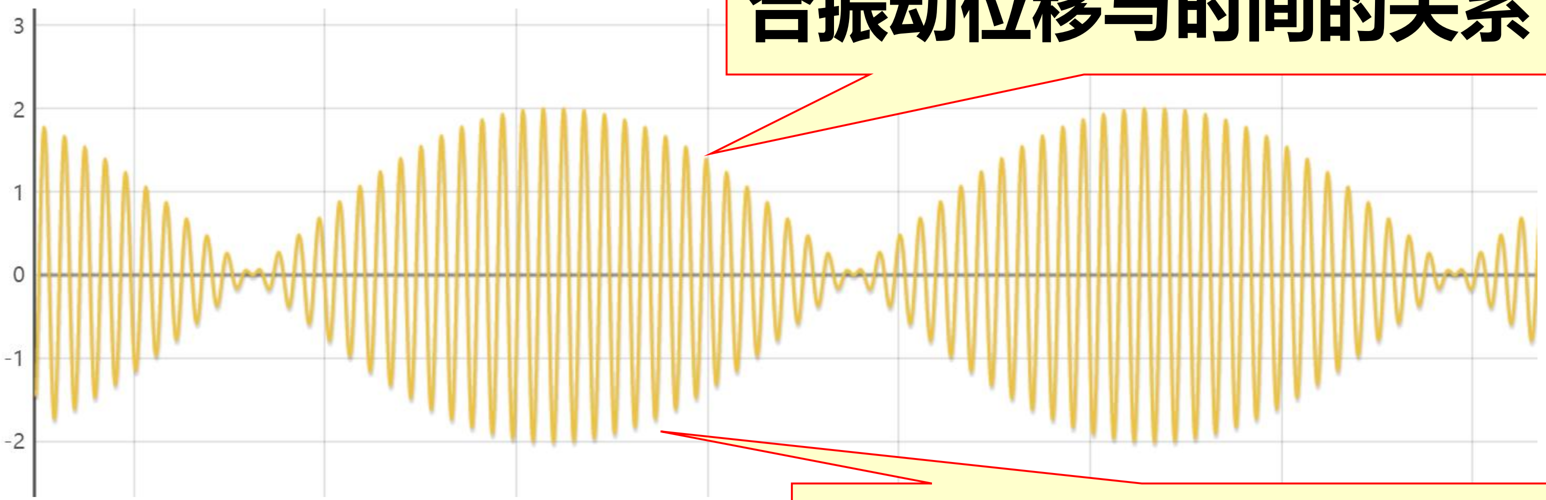
说明：

① 一般情形下，合振动没有明显的周期性；

② 两简谐振动角频率较大但差值较小时，合振动出现明显的周期性



cos(3*x+0.1)+cos(2.1*x+0.1)

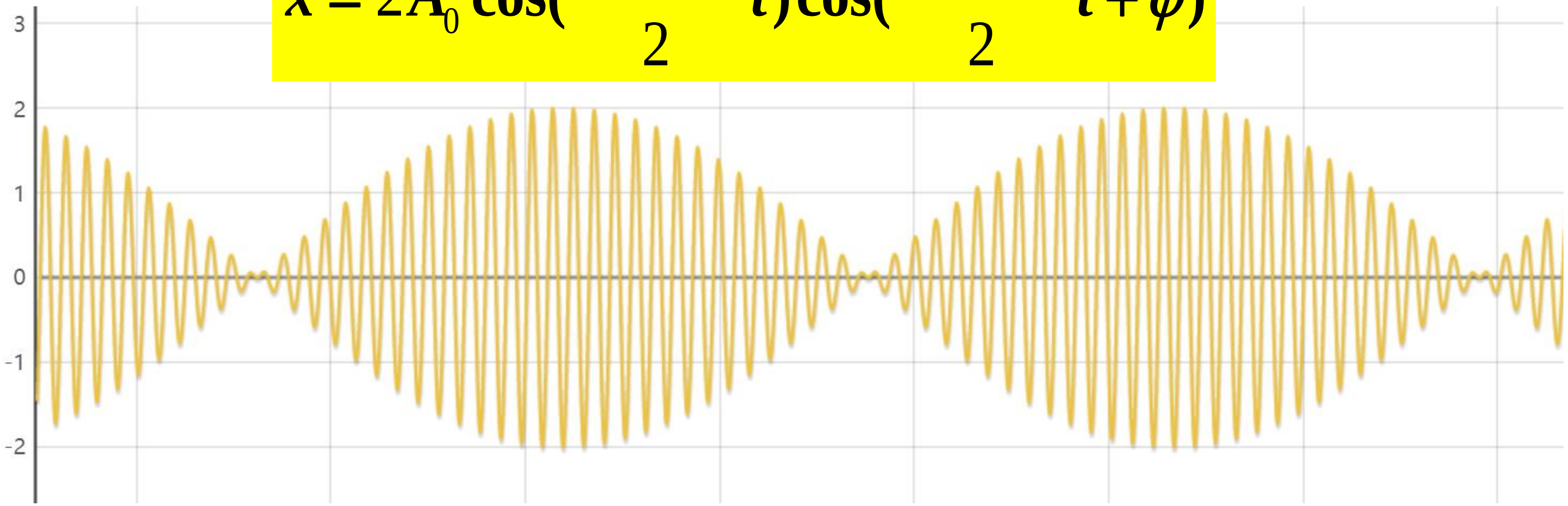


合振动位移与时间的关系

cos(30*x+0.1)+cos(29*x+0.1)

合振动振幅的周期性变化

$$x = 2A_0\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$



a.合振动可看成振幅缓慢变化的简谐振动

b.合振幅时强时弱——拍。

c.合振幅在单位时间内加强（或减弱）的次数——拍频

$$\nu = 2\cdot\frac{1}{2\pi}(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}) = |\nu_2-\nu_1|$$

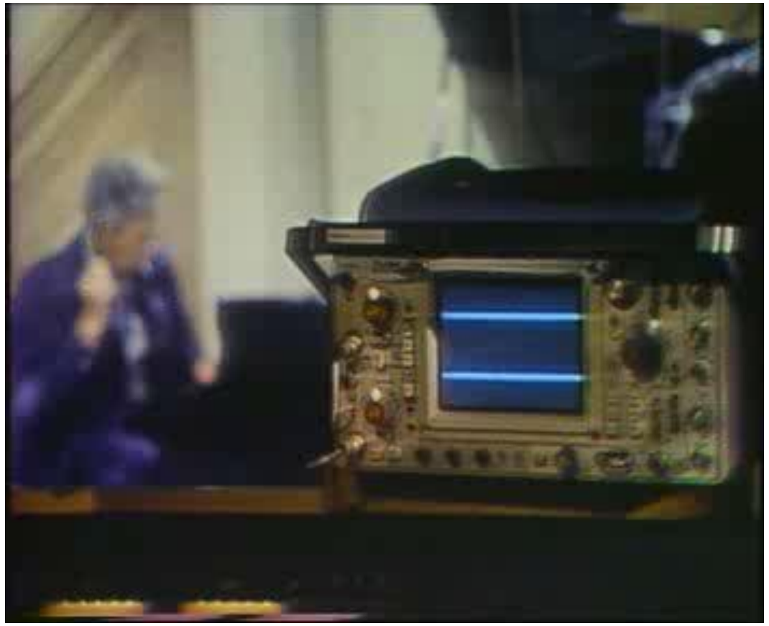
拍现象的应用

（1）乐音调准

（2）电机故障诊断

-轴承精度或润滑原因会导致电机拍频

（3）测速



§5 互相垂直简谐振动的合成*

一、两互相垂直同频率简谐振动合成

两者的运动方程可以表示为：

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

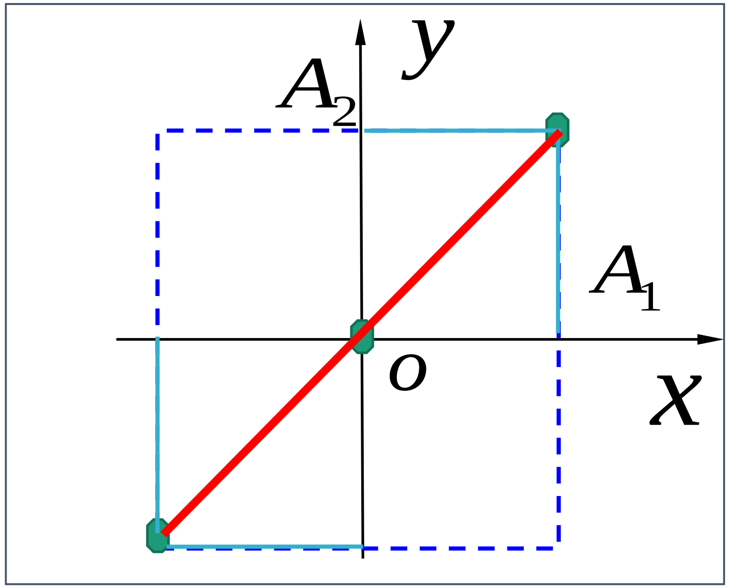
质点既沿Ox轴又沿Oy轴运动，实际上是在O-xy平面上运动。

并且一定是个封闭曲线 轨迹方程是什么?

从上面方程式消去t，可得合振动的轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

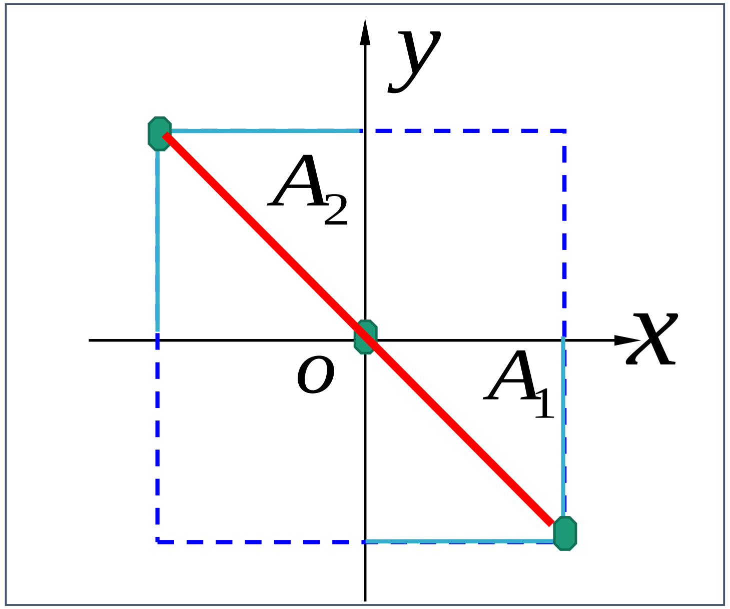
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$



讨论

1、$\varphi_2-\varphi_1=0$或 2π

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

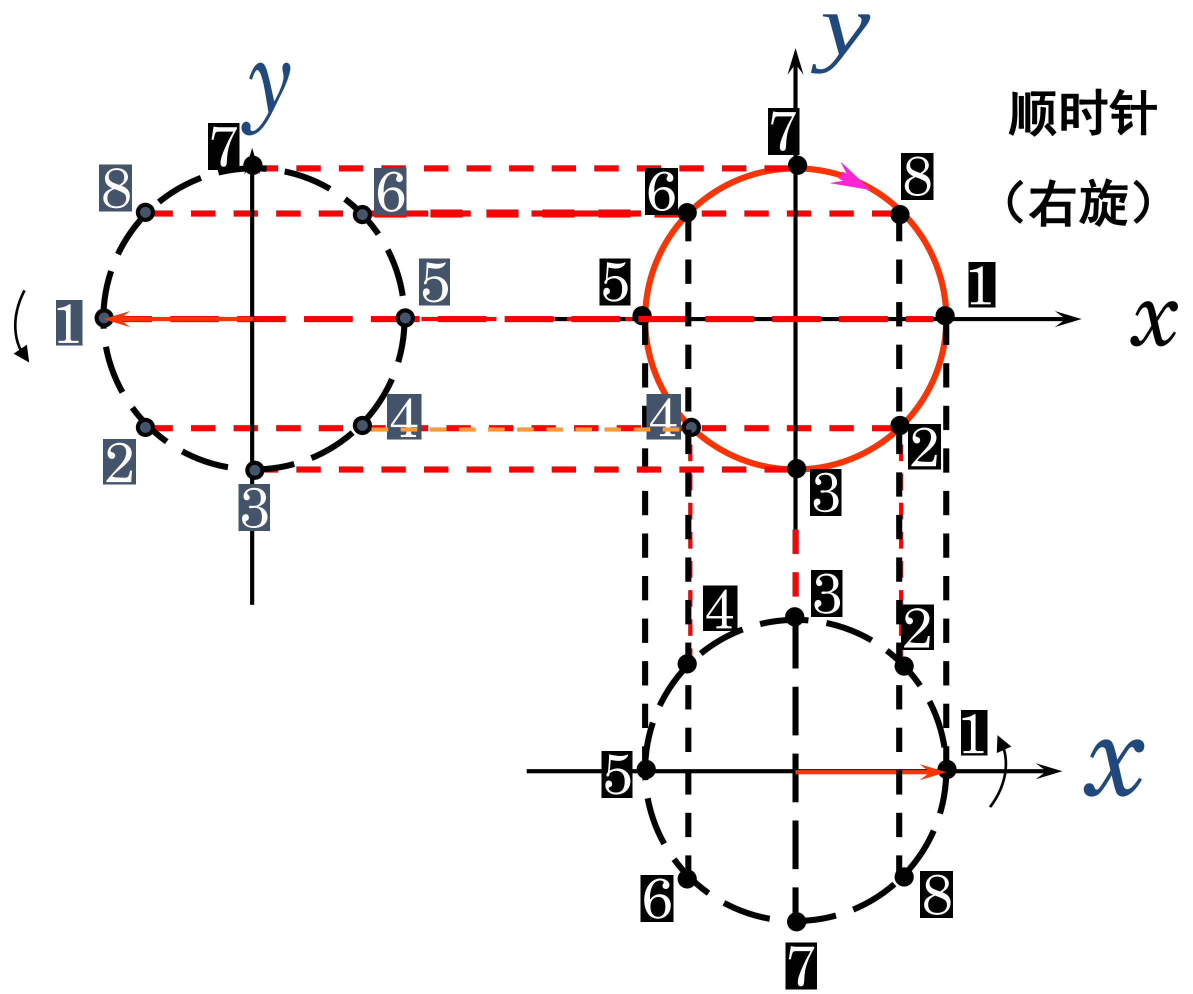


2、$\varphi_2-\varphi_1=\pi$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$

3、 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$

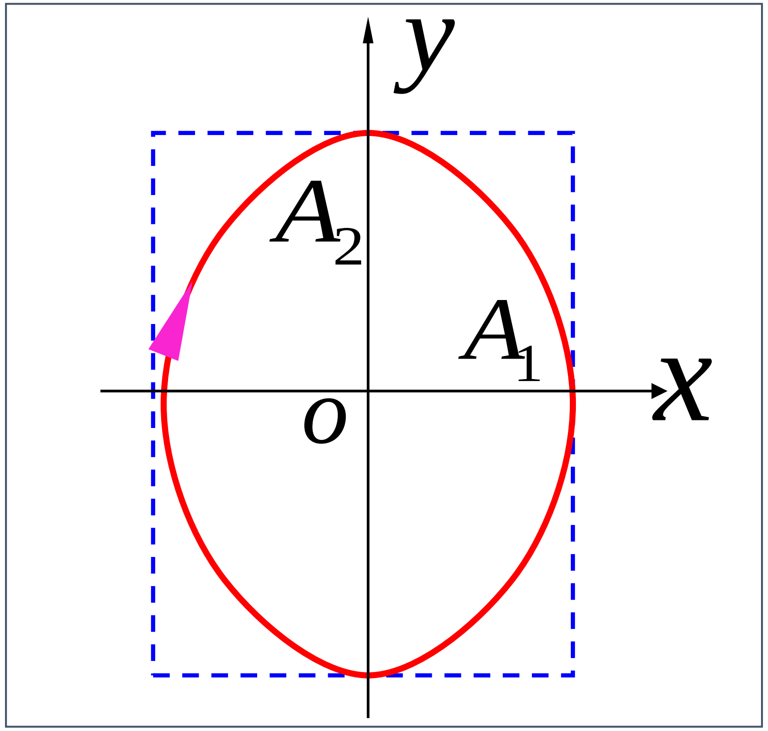
$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$



3、 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

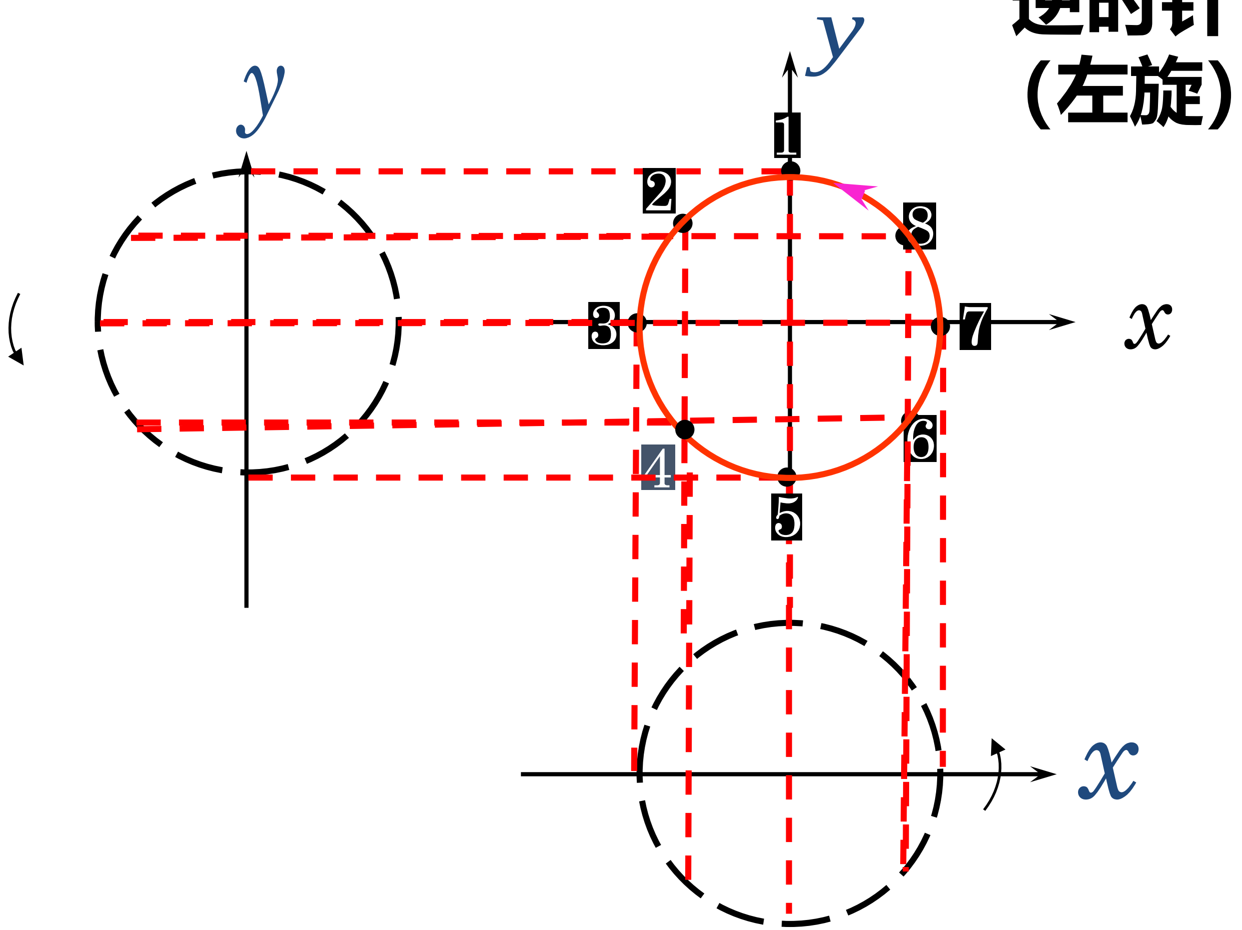


轨迹为一正椭圆，长短轴分别为$2A_1$、$2A_2$ 振动为顺时针方向，

若A_1=A_2, 就是一个圆。

4、$\varphi_2-\varphi_1=-\pi/2$

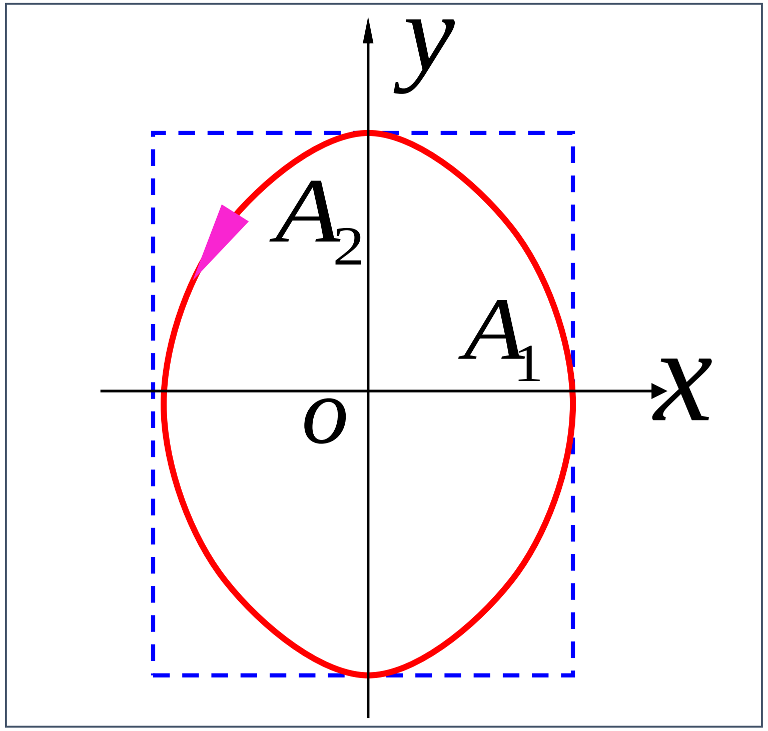
$$\begin{cases} y=A_1\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{2}) \\ y=A_2\cos\omega t \end{cases}$$



4、$\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$



轨迹为一正椭圆，长短轴分别为$2A_1$、$2A_2$ 振动为逆时针方向，

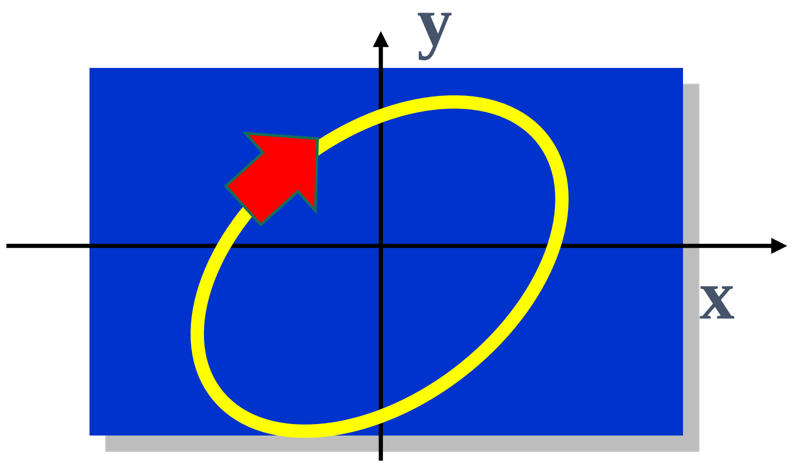
若 A_1=A_2，就是一个圆。

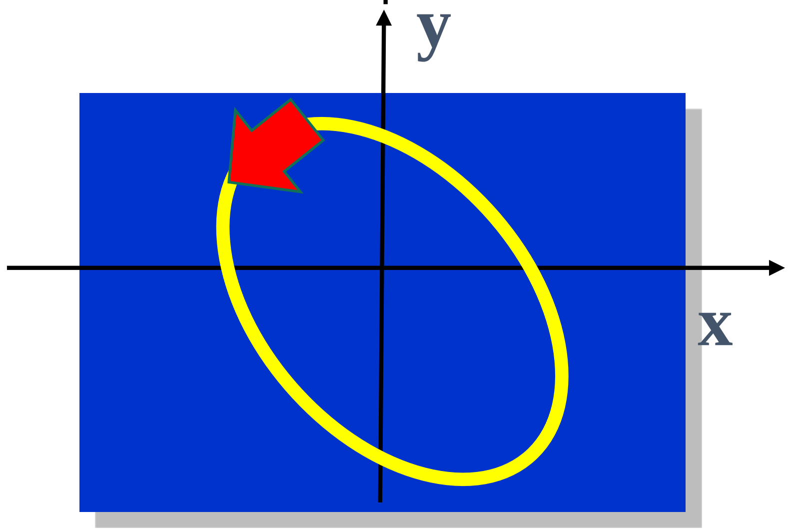
5、 $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ φ为其它任意值

轨迹是任意一个斜椭圆

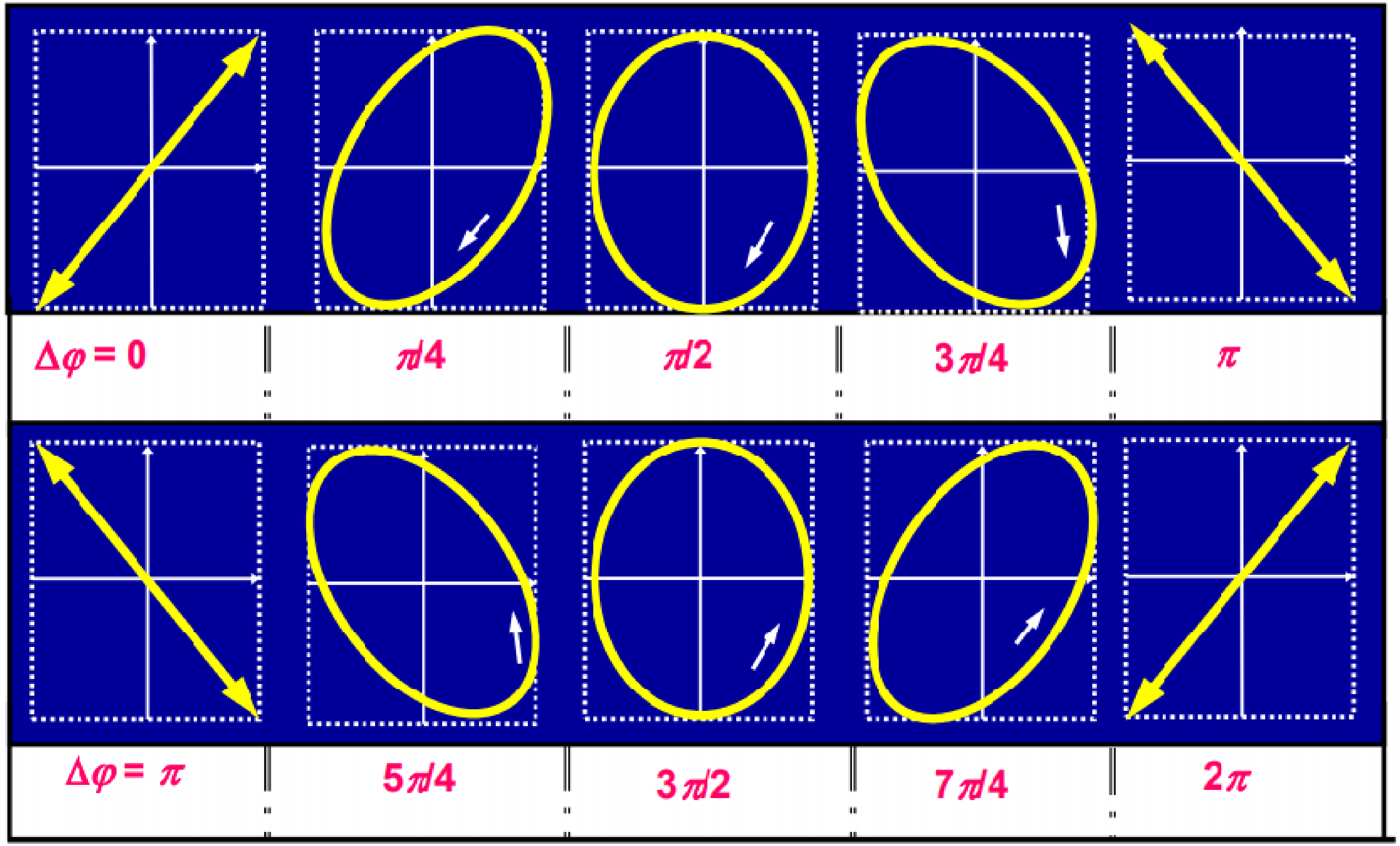
当 $0 < \varphi < \pi$ 振动为顺时针方向!

当 $-\pi < \varphi < 0$ 振动为逆时针方向!



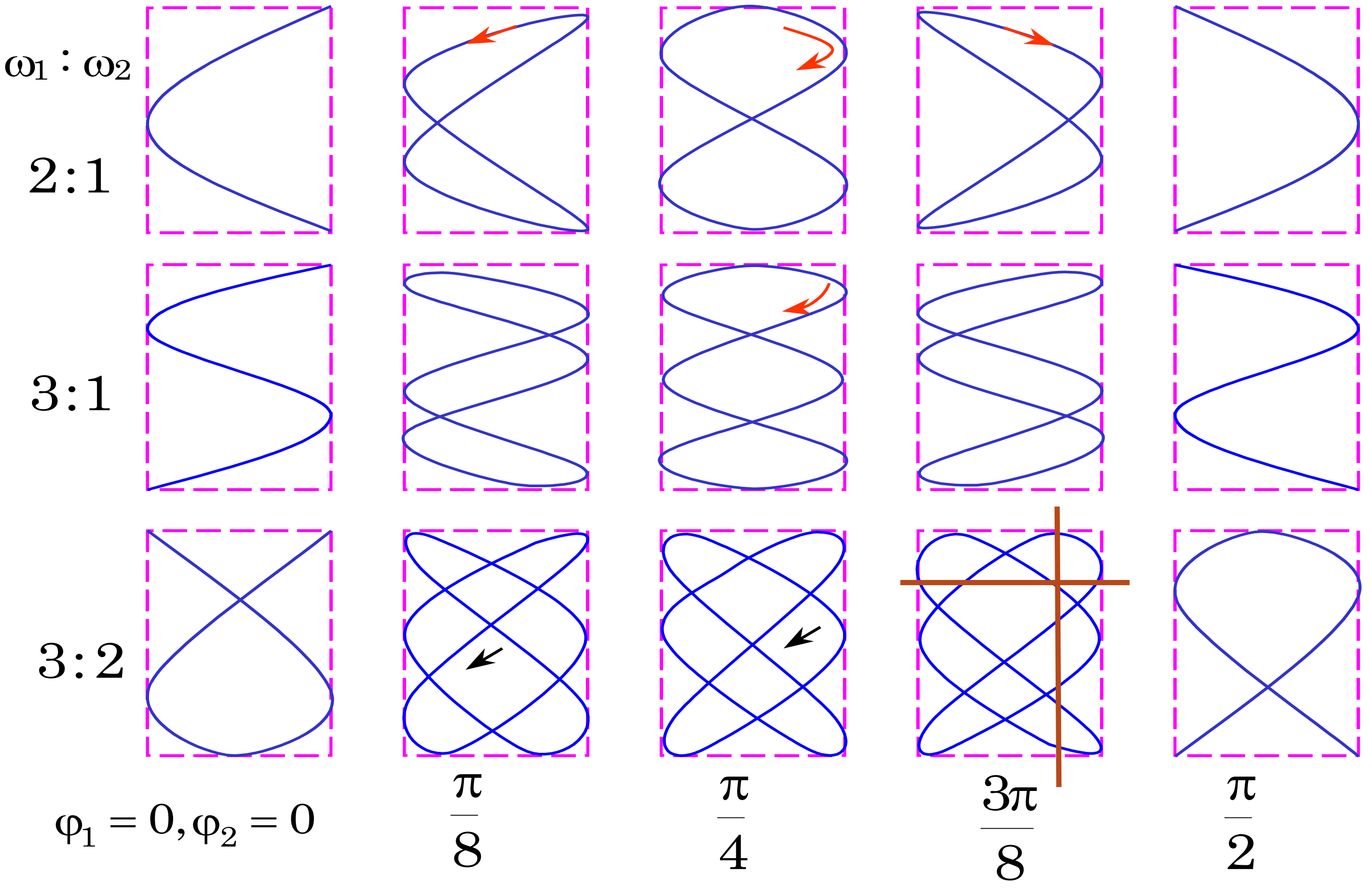


合振动的轨迹与$\Delta\varphi$的关系



二、两互相垂直不同频率简谐振动合成

1、两互相垂直、频率比为有理数的简谐振动合成



稳定封闭的轨迹曲线称为李萨如图形

$$\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{\text{平行于}y\text{轴直线与图形的最多交点数}}{\text{平行于}x\text{轴直线与图形的最多交点数}}$$

例如 $\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{6}{4}$

2、两互相垂直、频率比为无理数的简谐振动合成