中国石油大学（北京）2022-2023学年春季学期

《高等数学 A（II）》本科期末考试试卷

（A 卷）

考试方式（闭卷考试）

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、填空题（在下列各题的横线处填写正确答案,共 5 小题,每小题 3 分，共 15 分）

1、 $z=\sqrt{\log_a(x^2+y^2)}(a>0)$的定义域为 D=__________。

2、二重积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$ 的符号为___________。

3、由曲线 $y=\ln x$ 及直线 $x+y=e+1$， $y=1$ 所围图形的面积用二重积分表示为___________，其值为___________。

4、设曲线 L 的参数方程表示为$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le x\le\beta)$,则弧长元素 $ds=$________。

5、设曲面Σ为$x^2+y^2=9$介于$z=0$及$z=3$间的部分的外侧，则$\iint(x^2+y^2+1)ds=$__________ 。

一、1、当$0<a<1$时，$0<x^2+y^2\le 1$；当$a>1$时，$x^2+y^2\ge 1$；

2、负号；　3、$\iint\limits_D d\sigma=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e+1-y}dx$;　$3/2$；　4、$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$；

5、180π；

二、选择题（请将下列各题的正确答案填在题后的括号内，共 5 题，每小题 3 分，共 15 分）

1、设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,则在点（0，0）处（　　）

（A）连续且偏导数存在；　（B）连续但偏导数不存在；

（C）不连续但偏导数存在；　（D）不连续且偏导数不存在。

2、设$u(x,y)$在平面有界区域 D 上具有二阶连续偏导数，且满足

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\ne 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，

则（　　）

（A）最大值点和最小值点必定都在 D 的内部；

（B）最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上；

（C）最大值点在 D 的内部，最小值点在 D 的边界上；

（D）最小值点在 D 的内部，最大值点在 D 的边界上。

3、设平面区域 D：$(x-2)^2+(y-1)^2\le 1$，若 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

则有（　　）

（A）$I_1<I_2$；　（B）$I_1=I_2$；　（C）$I_1>I_2$；　（D）不能比较。

4、设 Ω 是由曲面 $z=xy, y=x, x=1$ 及 $z=0$ 所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3dxdydz=$（　　）

（A）$\frac{1}{361}$；　（B）$\frac{1}{362}$；　（C）$\frac{1}{363}$；　（D）$\frac{1}{364}$。

5、设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds=$（　　）

(A) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))dt$；　(B) $\int_\beta^\alpha f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$；

(C) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$；　(D) $\int_\beta^\alpha f(\varphi(t),\psi(t))dt$。

二、1、C;　2、B;　3、A;　4、D;　5、C;

三、(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6, y=0, x=0$ 所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值。

由 $\begin{cases}f'_x=2xy(4-x-y)+xy(-1)=0\\ f_y=x^2(4-x-2y)=0\end{cases}$ 得 D 内的驻点为 $M_0(2,1)$，且 $f(2,1)=4$，

又 $f(0,y)=0, f(x,0)=0$

而当 $x+y=6, x\ge 0, y\ge 0$ 时，$f(x,y)=2x^3-12x^2\quad(0\le x\le 6)$

令 $(2x^3-12x^2)'=0$ 得 $x_1=0, x_2=4$

于是相应 $y_1=6, y_2=2$ 且 $f(0,6)=0, f(4,2)=-64.$

$\therefore f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64.$

四、(本题满分 10 分)

计算 $I=\iiint\limits_\Omega \frac{dv}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 是由 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的立体域。

Ω的联立不等式组为$\Omega:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x-1\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$

所以$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1++x+y+z)^3}$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}]dy$

$=\frac{1}{2}\int_0^1(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4})dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$

五、(本题满分 12 分)

计算$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dS$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

解：$dS=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$，$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dS=\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\pi R^3$.

六、(本题满分 12 分)

计算$\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=1-x^2-y^2$ $(z\ge 0)$部分的上侧.

解：Σ在xoy面上的投影为$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$，

补充平面$\Sigma_1:z=0$ $(x^2+y^2\le 1)$取下侧，由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(6x^2+6y^2+6z)dv+3\iint\limits_{D_{xy}}(0-1)dxdy$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\rho dz-3\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=2\pi-3\pi=-\pi.$$

七、(本题满分 11 分)

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的 $x\geq 0, y\geq 0$ 部分的外侧。

将 Σ 分为上半部分 $\Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 和下半部分 $\Sigma_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，

Σ_1,Σ_2 在面 xoy 上的投影域都为：$D_{xy}: x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0,$

于是：$\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^1 \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\frac{1}{15};$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})(-dxdy)=\frac{1}{15},$$

$$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}=\frac{2}{15}$$

八、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$ 的收敛域及和函数.

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$

又当 $x=3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散；当 $x=-3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛.

故该幂级数的收敛域为 $[-3,3)$.

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$（$-3\le x<3$），则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{3})^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3}=\frac{1}{3-x},(|x|<3)$$

九、(本题满分 5 分)

论述你所学过的积分之间的关系

提示：可以从高斯公式可以将面积分和体积分相互转化，重积分和定积分之间的关系等方面作答，言之有理即可。