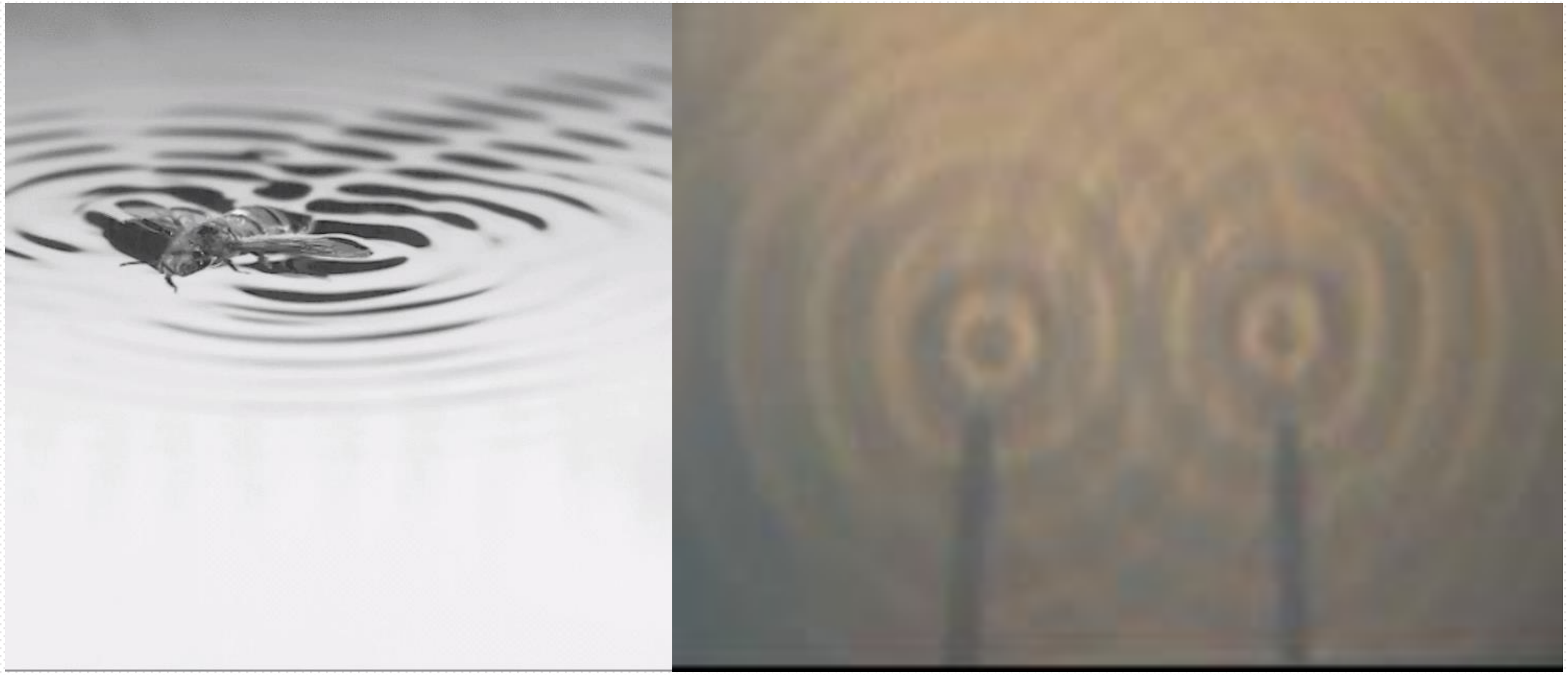
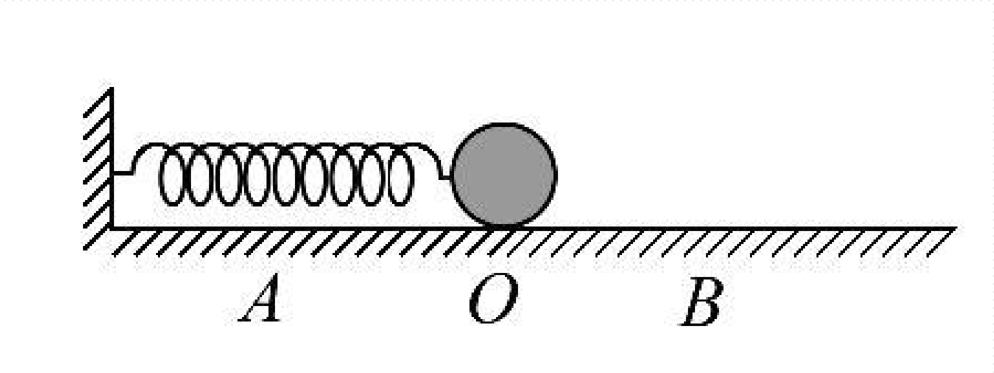
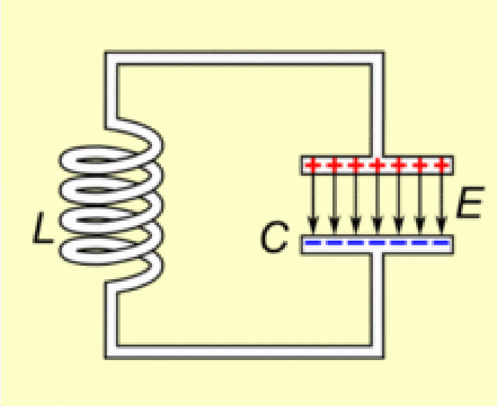
第21章 波 动



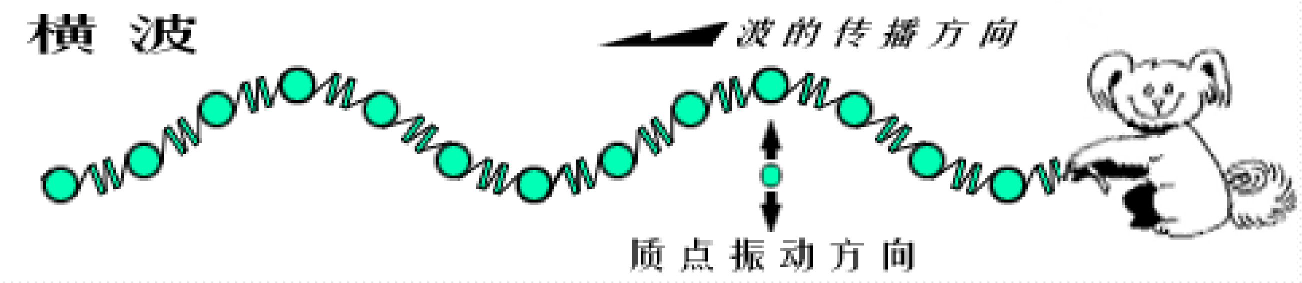
机械振动—— 弹簧振子

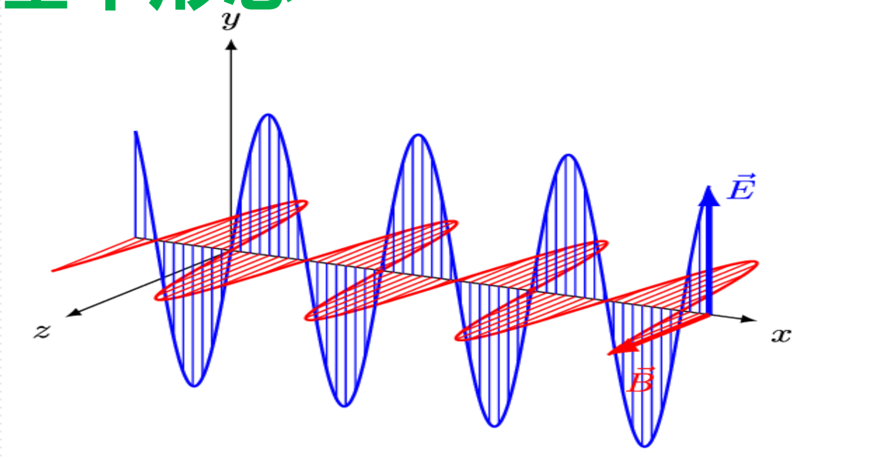


电磁振荡—— LC电路



振动状态的传播是波动，是物质运动的一种基本形态





波动

机械波 机械振动在**弹性介质**中的传播　　如：声波、水波、地震波等

电磁波 交变电磁场在空间的传播　　如：X射线、无线电波、光波等

不同点：①机械波的传播需有传播振动的介质
②电磁波的传播不需介质

共同点：①振动状态（相位）的传播
②传播速度和能量传播
③发生反射、折射、干涉、衍射现象

本章主要介绍机械波

提纲

§1、波的运动学描述

§2、波的动力学特征

§3、惠更斯原理—衍射、折射和反射

§4、波的叠加—干涉和驻波

§1 波的产生与基本概念

一、波的产生

1、机械波波的产生条件

- 波源—振动　简谐、非简谐、周期、非周期
- 媒介—介质　由大量分子原子组成的固体、液体、气体　大量质元的集合

①弹性介质　当介质受外力后立即发生形变，而外力消失后立即完全恢复为原来状态

②粘弹性介质　受外力后不是立即发生形变，而是在一定时间内发生形变，外力消失后也不是立即恢复原状，而是通过一段时间才能恢复原状

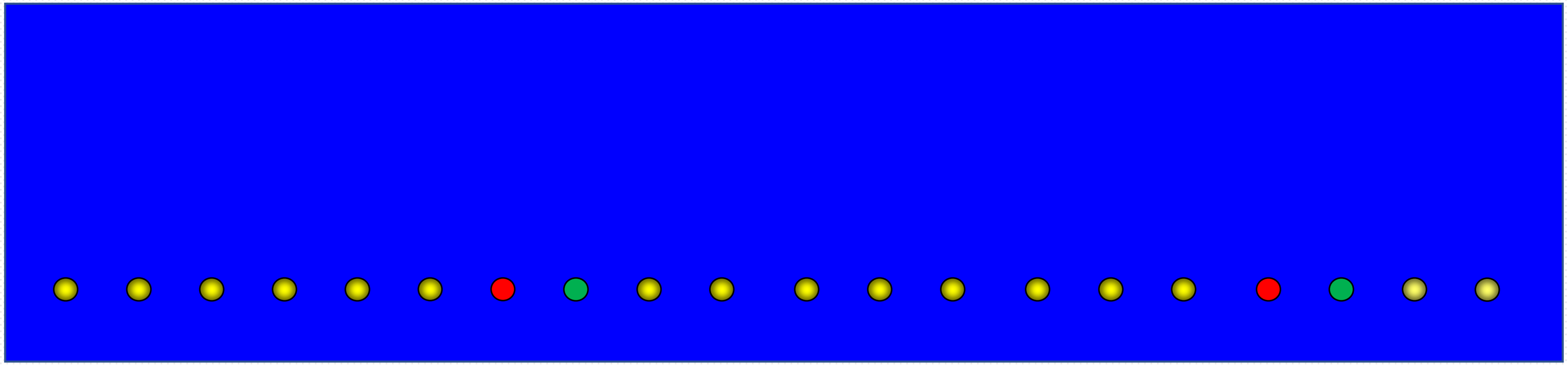
③塑性介质　当介质受外力后发生形变，而外力消失后不能完全恢复原状

2、波的运动特征

①每个质元只在平衡位置附近振动，不“随波逐流”

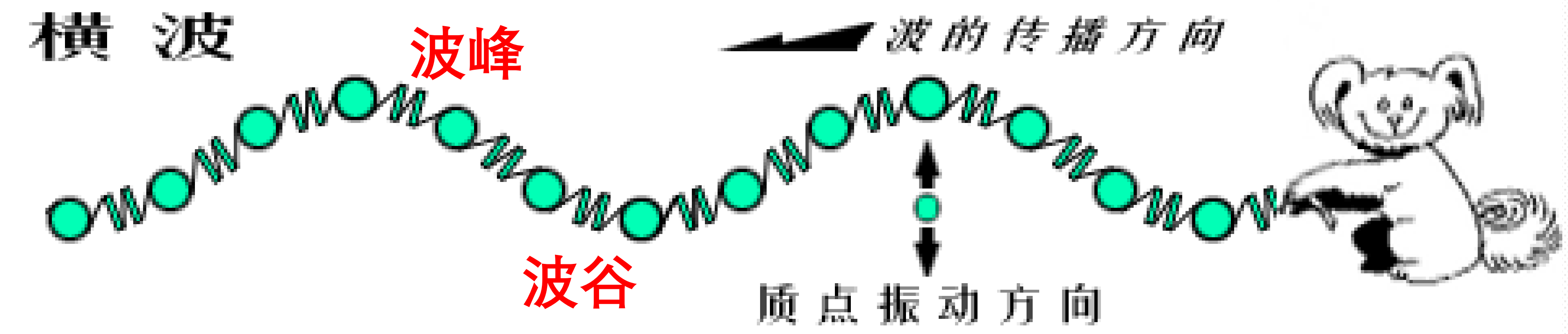
②后面质元重复前面质元的**振动状态**，有相位落后

③**振动状态**、波形、能量向前传播 ——**行波**



3、波的分类—横波和纵波

横波：振动方向垂直于传播方向



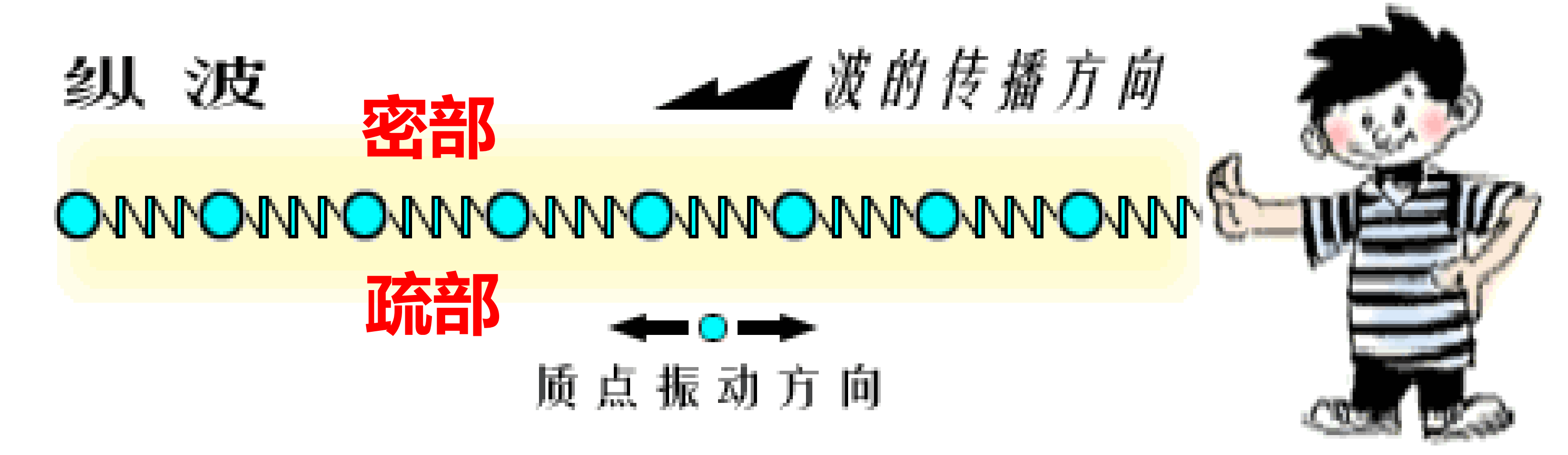
说明：

① 波动中各质元并不随波前进

② 波动是振动状态(相位)的传播

③ 仅产生于固体或介质表面

纵波：振动方向平行于传播方向



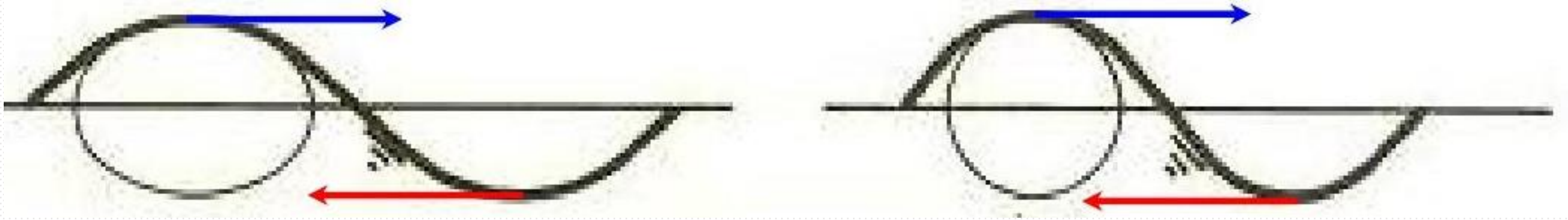
说明： ① 波动中各质元并不随波前进；

② 波动是振动状态(相位)的传播。

③ 产生于固体和流体（液体和气体）

横波： 水面波、线波、电磁波　　**纵波：** 声波、长弹簧波

非横非纵波：不能严格判断振动方向与传播方向的关系



共同点： *a*.振动状态的传播—行波

b.介质本身没有沿波的传播方向迁移

简谐波

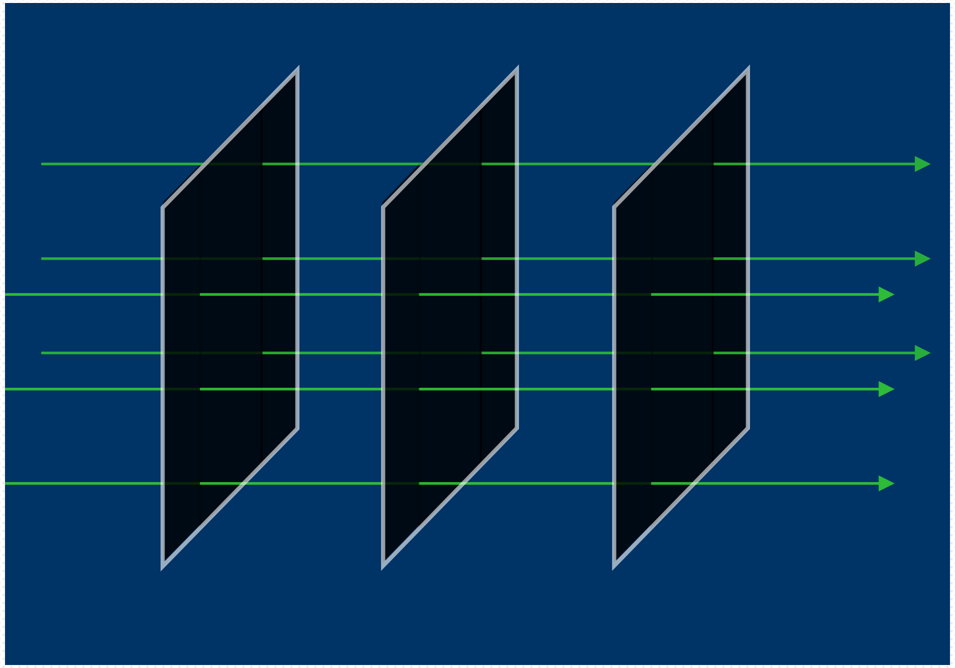
媒质中各质元都作简谐振动的波。

最基本、最简单、最重要的是简谐波！

任何形式的波都是由简谐波组成的

平面简谐波：波面是平面的简谐波

球面简谐波：波面是球面的简谐波



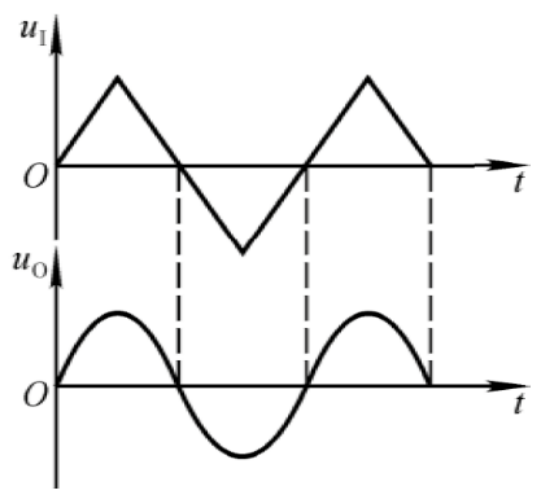
不同分类类型的波

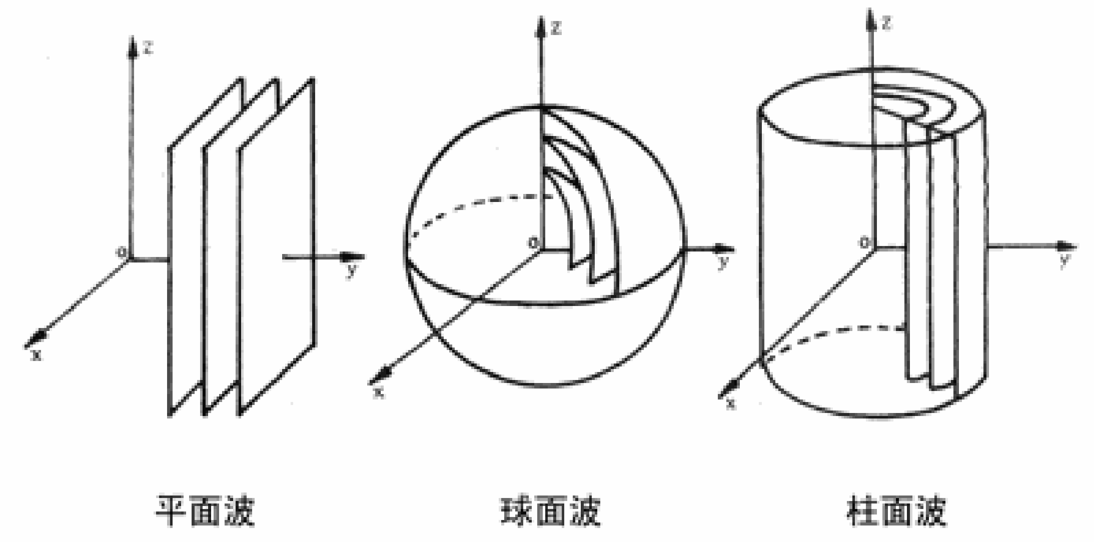
①一维波、二维波、三维波

②正弦波、脉冲波、三角波、矩形波

③连续波、非连续波

④平面波、球面波、柱面波



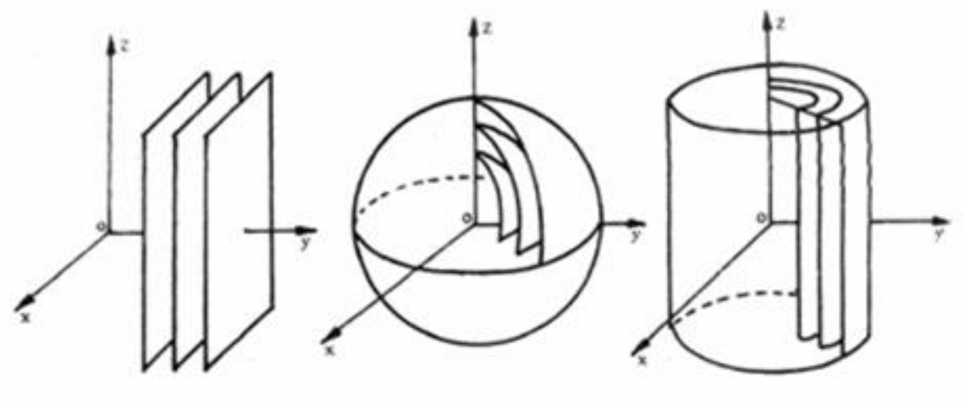


二、波的基本概念

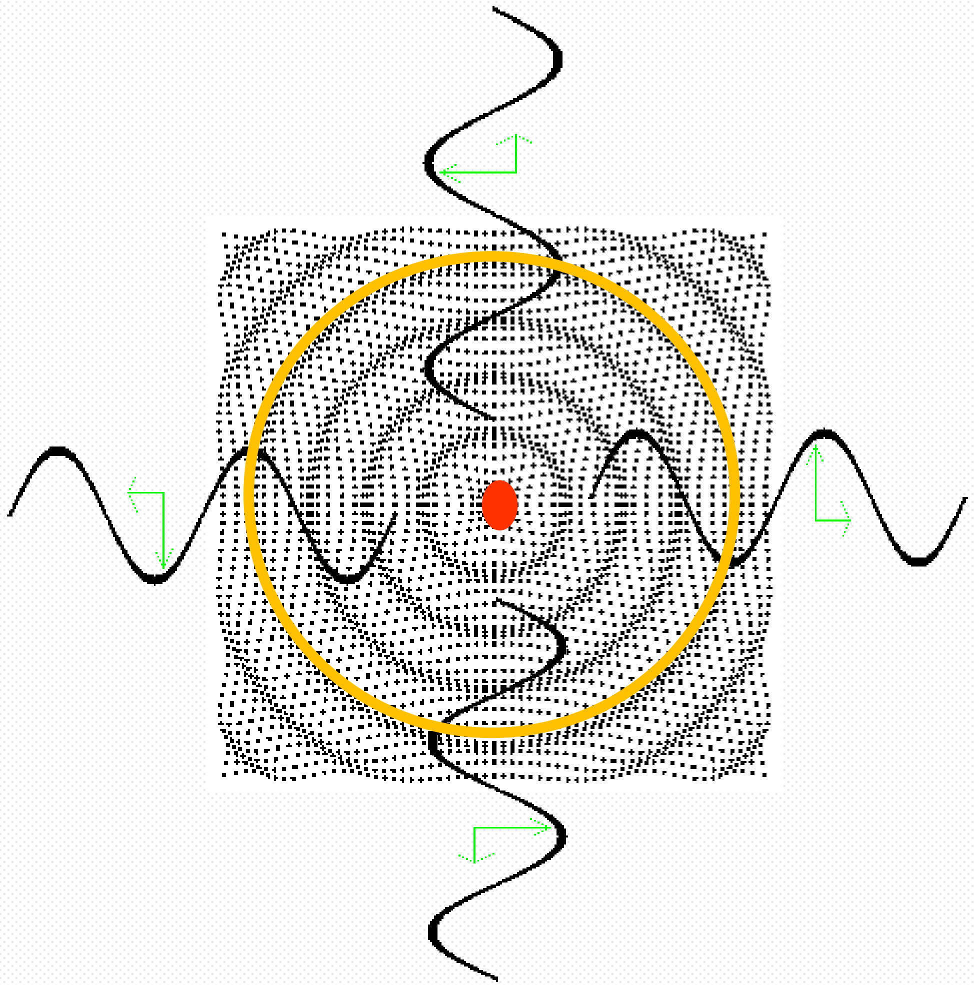
1、波的几何描述

波阵面（波面）：

波的传播过程中，振动位相相同的点组成的面—等相面



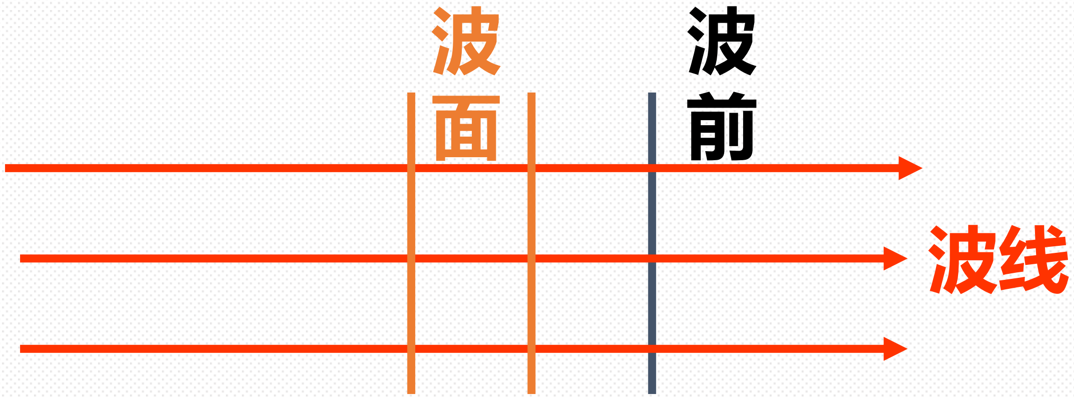
平面波、球面波、柱面波

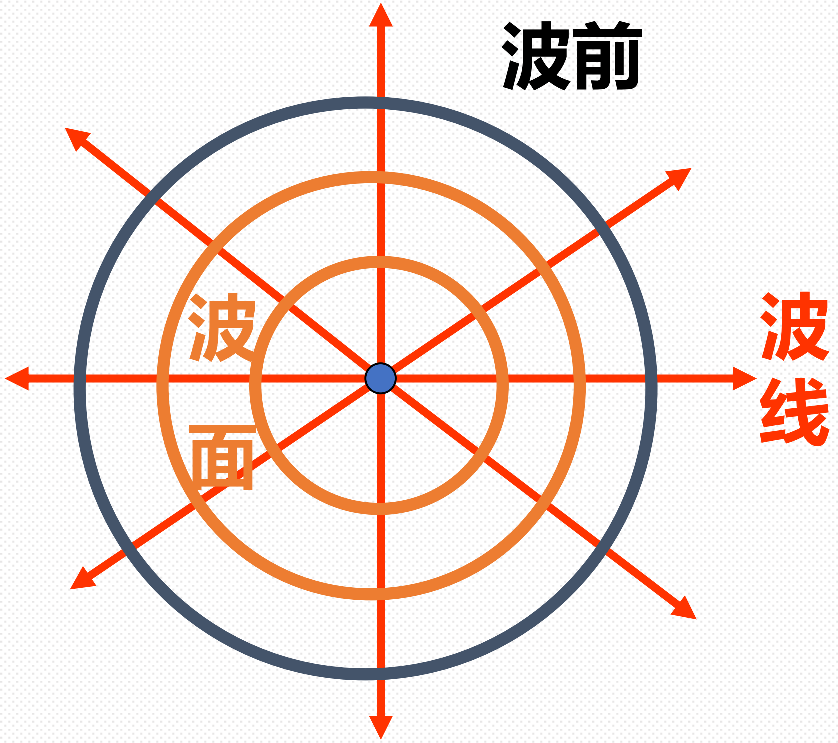


点波源在均匀的三维空间中产生球面波

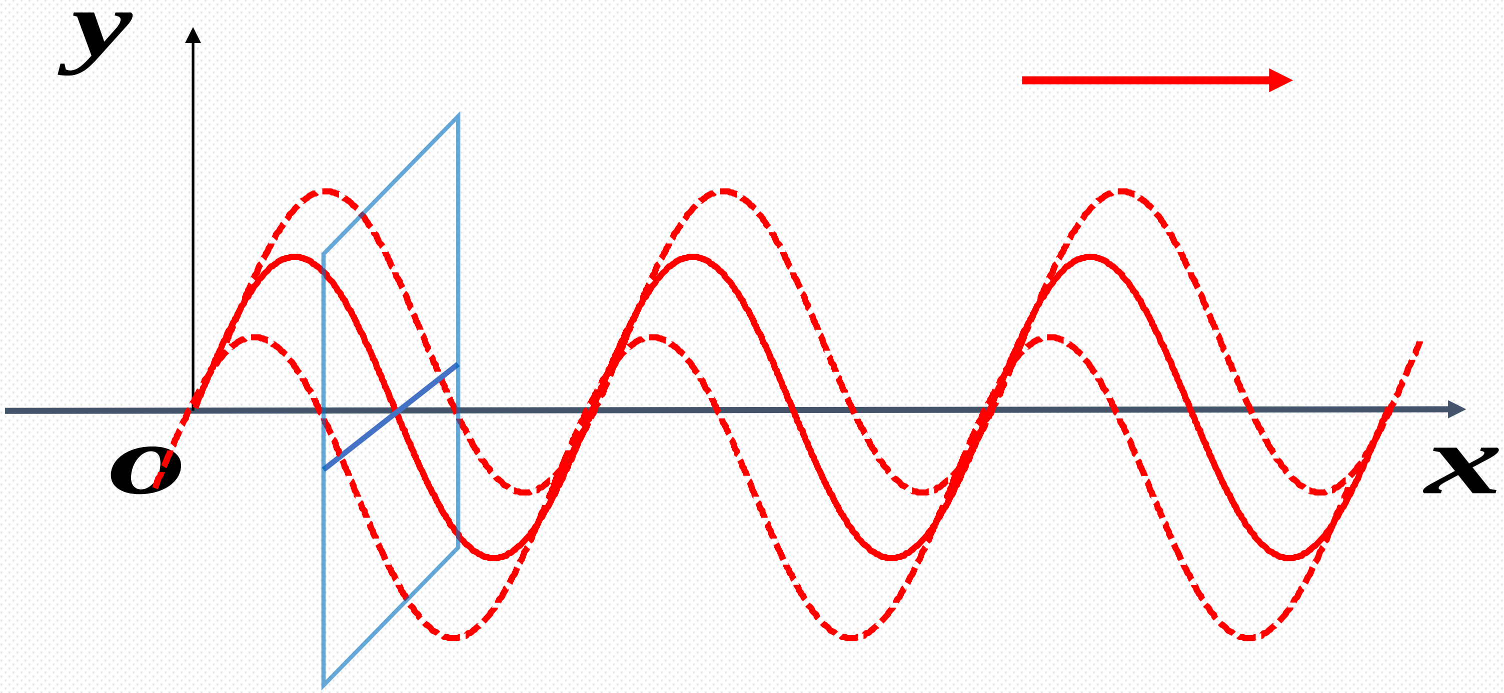
波线:发自波源，与波面垂直，指向波的传播方向的射线。

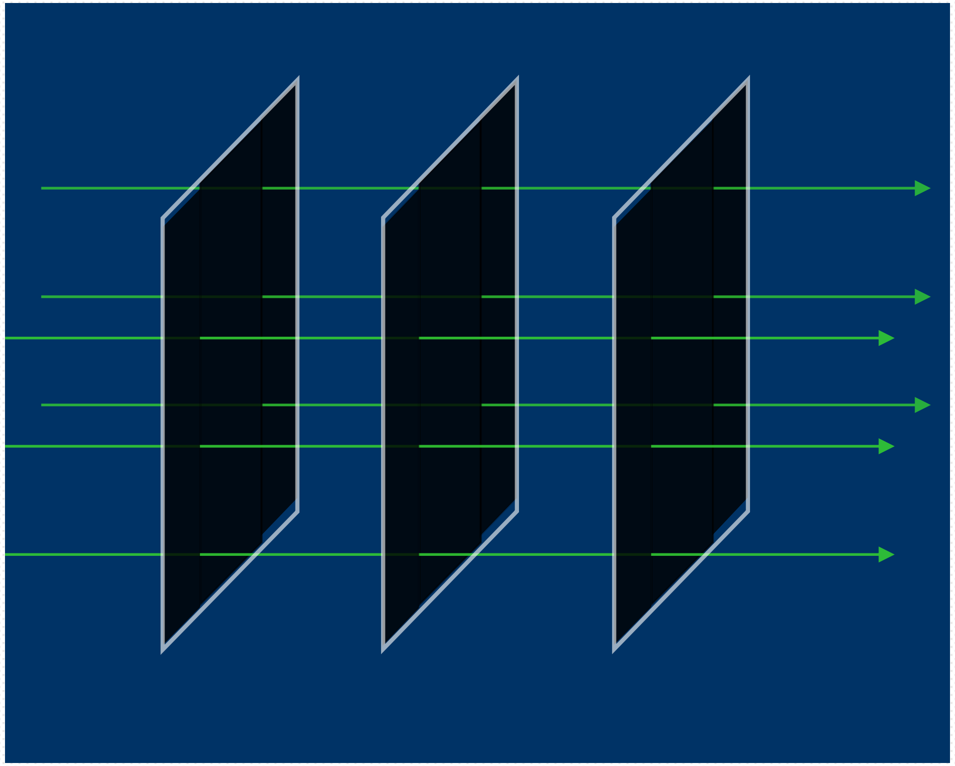
波前:在某一时刻，波传播到的最前面的波面。





平面简谐波的简化描述



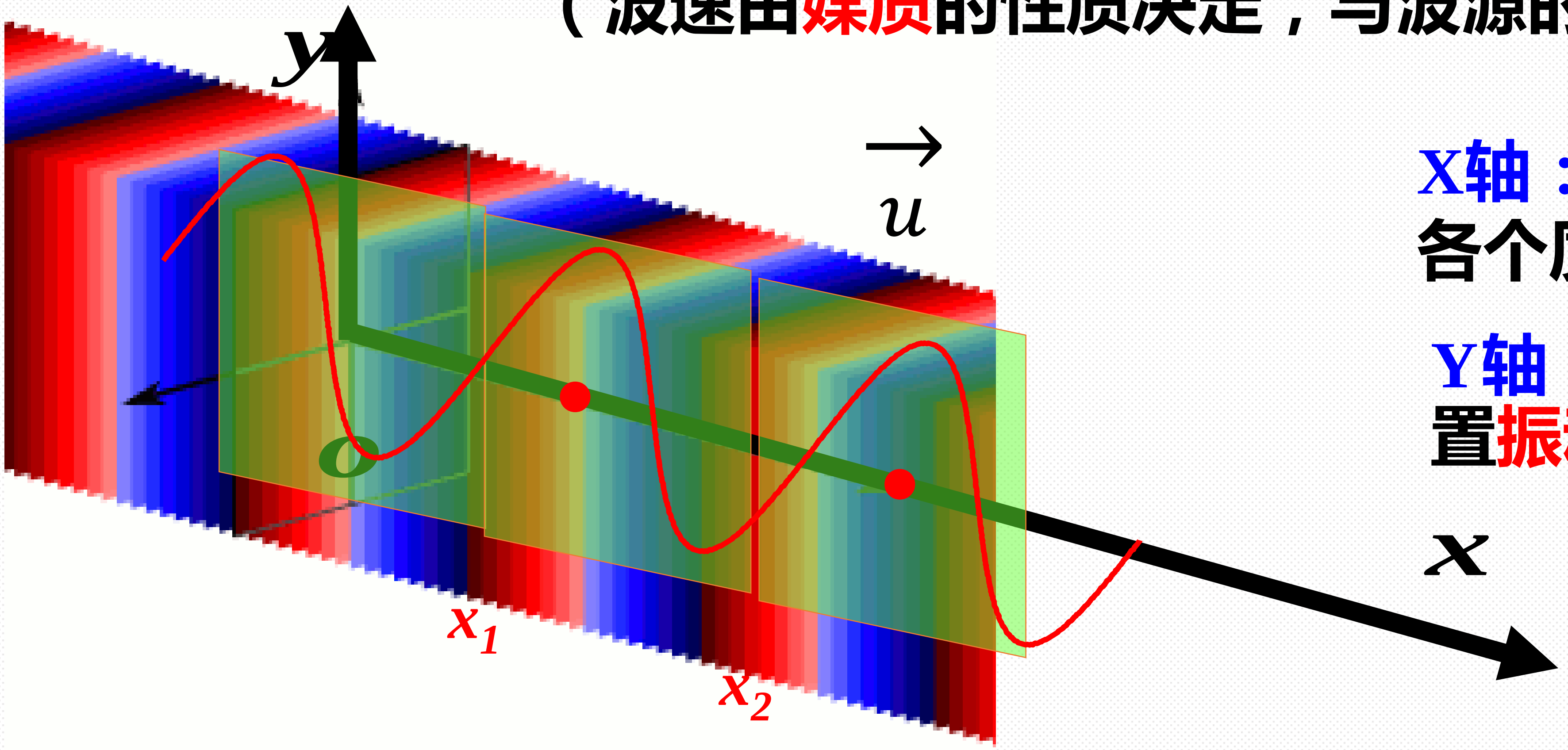


平面波

2、描述波的特征量

① 波速u— 振动状态（相位）在介质中传播速度，也称为相速度

（波速由媒质的性质决定，与波源的振动速度无关）

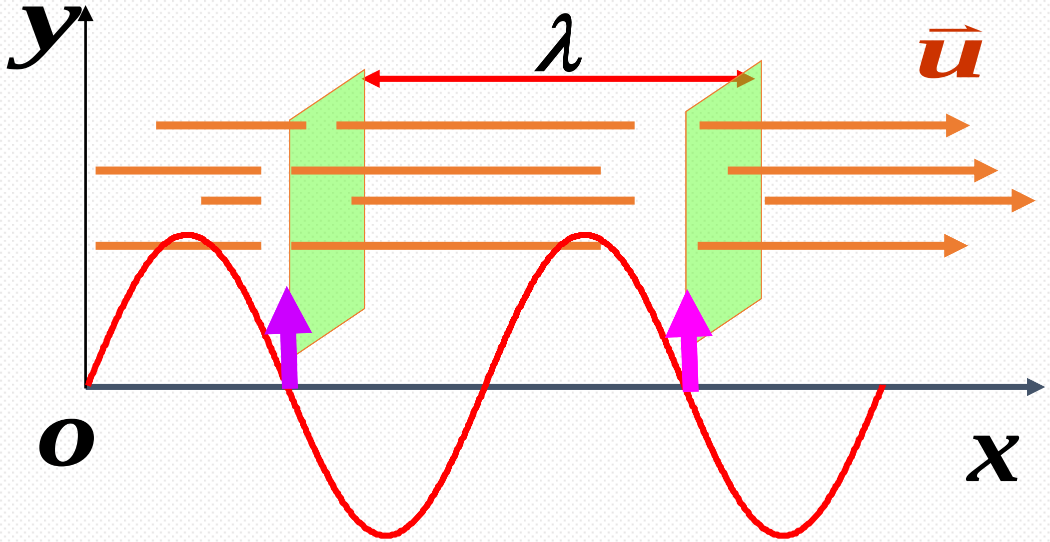


X轴：某一波线方向上各个质元的平衡位置

Y轴：质元离开平衡位置振动位移

② 波长λ— 同一波线上，两相邻的相位差为2π的质元间距离

（一个完整的波的长度）



反映波在空间上的周期性

横波：两相邻波峰(或波谷)间的距离

纵波：两相邻密部(或疏部)间的距离

波数 k— 2π长度内含有完整个波的数目 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

或者，单位长度两个振动平面的相位差

任意长度 l 两个振动平面的相位差 $\boxed{\Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{\lambda}l}$

③ 周期T— 波传播一个波长用的时间。

$$\boxed{T=\lambda/u}$$

反映波在时间上的周期性

$$\boxed{\lambda = uT}$$

媒质定

波源定

频率ν：单位时间内，波传播距离中包含的完整的波长的数目。

$$\nu=\frac{1}{T} \qquad \nu=\frac{u}{\lambda}$$

一切波动都是由波源产生的 ⇒波的周期由波源振动决定

$$\boxed{T_{波}=T_{波源}} \qquad \boxed{\nu_{波}=\nu_{波源}}$$

时间周期性 | 空间周期性

周期T | 波长λ

频率 ν 或 圆频率 ω | 波数k

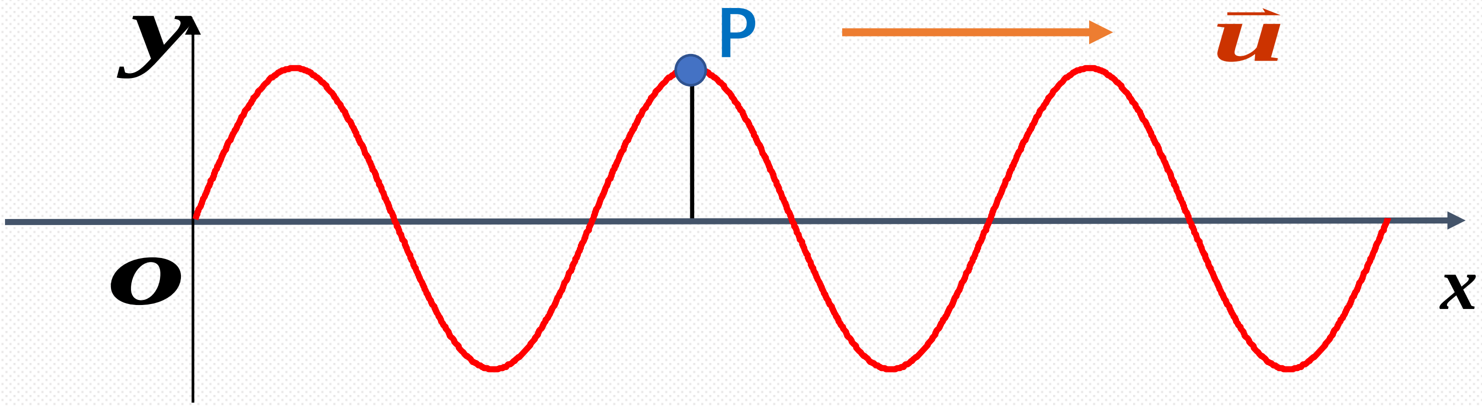
$$\boxed{u=\frac{\lambda}{T}=\upsilon\lambda}$$

波速与时间周期性和空间周期性的关系

物理意义：单位时间内质元完成了ν次振动，波向前传播了ν个波长，即向前传播的距离等于$\nu\lambda$，即为*波速*

三、一维简谐波的波函数

为定量描述波在空间中的传播，需引入**数学函数**来表示介质中**各质元的振动状态**随时间的变化关系。



媒质中**任意位置**x处P点的质元在**任意时刻**t 的**振动位移** ——**称为波函数**

数学上为：$\boxed{y(\vec{r},t)}$ 一维情况 $\boxed{y(x,t)}$

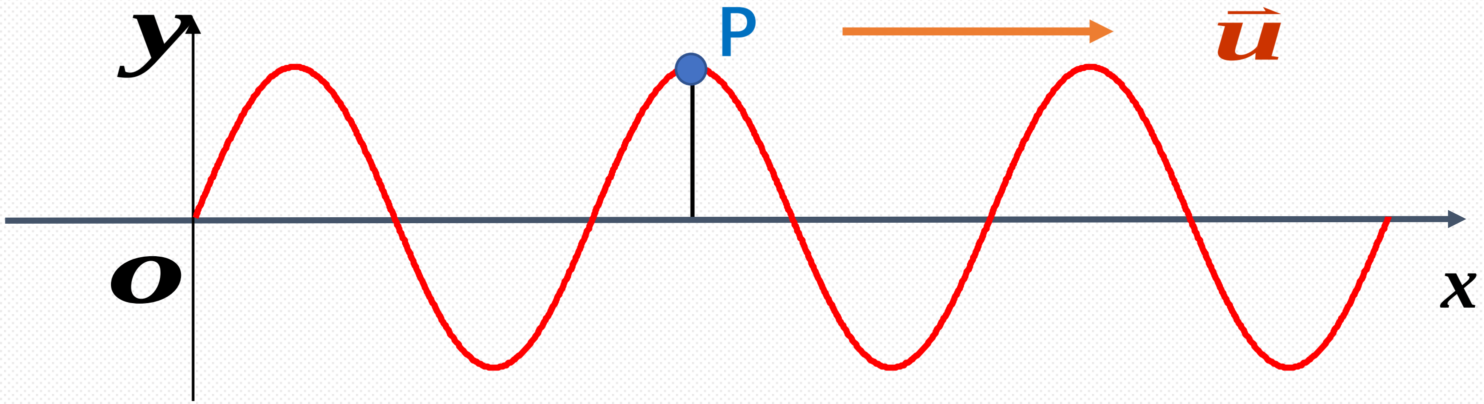
y 可以是各种物理量，如位移、形变、压强等

波函数的性质

1、时间周期性 $y(x,t)=y(x,t+T)$

2、空间周期性 $y(x,t)=y(x+\lambda,t)$

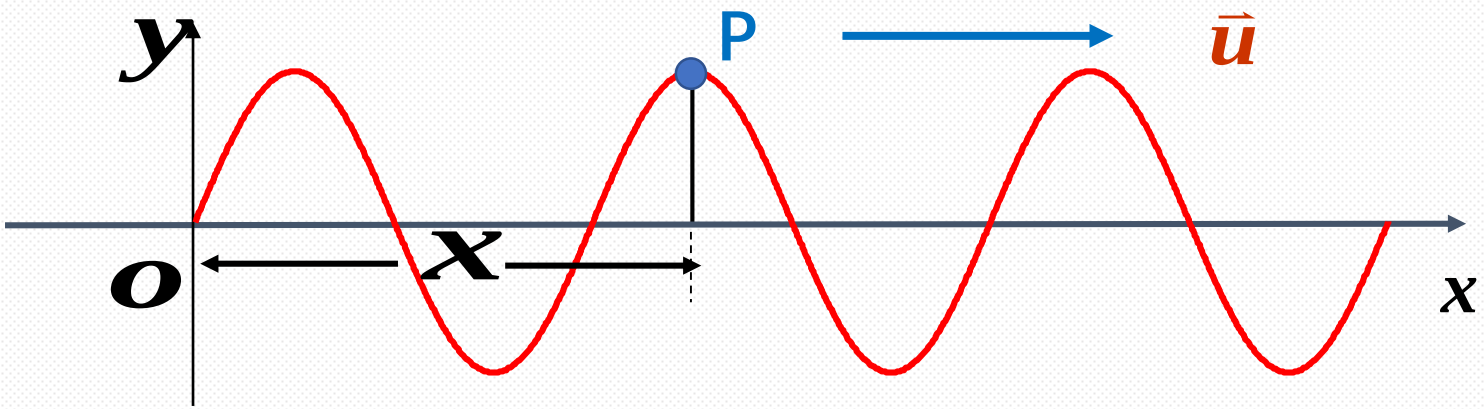
$$y(x,t)=y(x+\lambda,t+T)$$



一维简谐波的波函数

简谐波在无吸收的均匀介质中沿ox正方向轴传播

波速为u



任意时刻O点质元振动方程为：$y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$

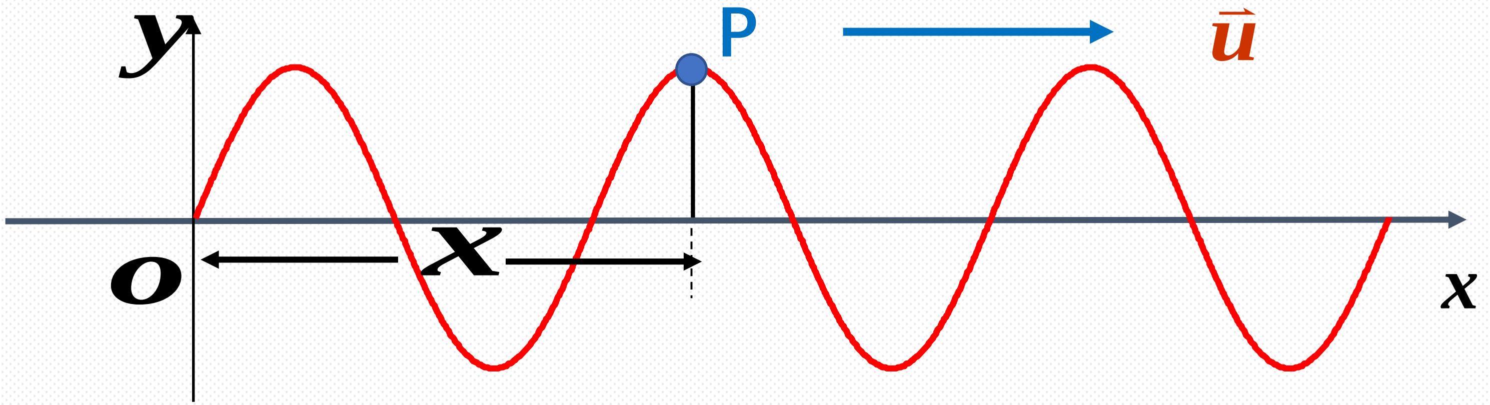
考察距离O点位移为x的P点：O点的振动要经过$\Delta t = \dfrac{x}{u}$，才能传播到P点

P点质元振动的相位比O点落后： $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_o = -\omega \cdot \Delta t = -\omega \cdot \dfrac{x}{u}$

一维简谐波的波函数

任意时刻O点质元振动方程

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$$

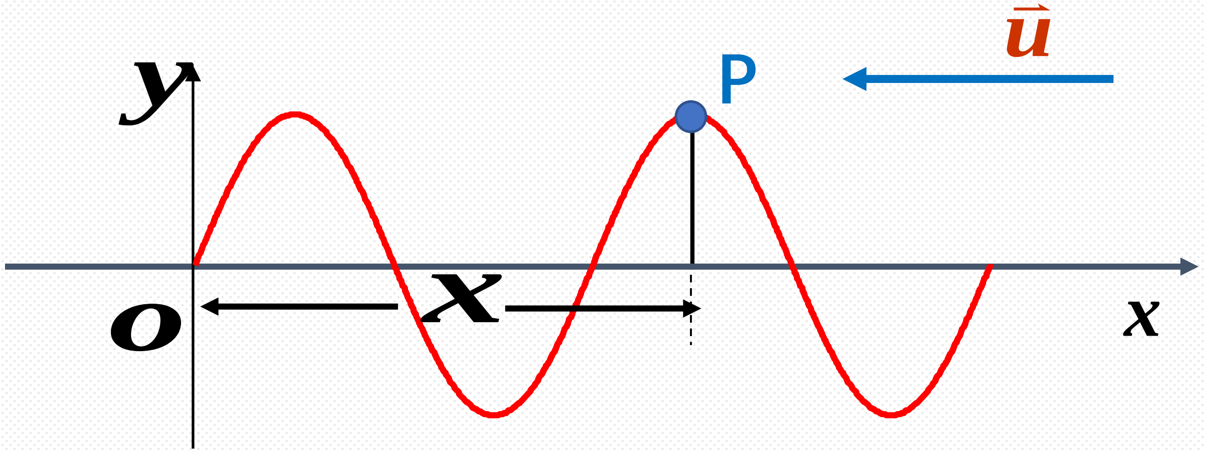


P点质元振动的相位比O点落后： $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_o = -\omega \cdot \Delta t = -\omega \cdot \dfrac{x}{u}$

任意时刻P点质元的相位： $\varphi_p = \varphi_0 + \Delta\varphi = \omega \cdot t + \varphi - \omega \dfrac{x}{u}$

任意时刻P点质元振动方程为： $\boxed{y_p = A\cos[\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi]}$

若沿波动X轴负向传播



任意时刻O点质元振动方程

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$$

P点质元振动的相位比O点超前： $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_o = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot \frac{x}{u}$

任意时刻P点质元的相位： $\varphi_p = \varphi_0 + \Delta\varphi = \omega \cdot t + \varphi + \omega \frac{x}{u}$

任意时刻P点质元振动方程为： $\boxed{y_p = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi]}$

波函数

沿X轴正向传播，波函数

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

沿X轴负向传播，波函数

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

可见，波函数与波的传播方向有关

$$y = A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

"-"沿x正向
"+"沿x负向

轴上正方向的P点比参考点O晚振动，减去传播时间；
轴上正方向的P点比参考点O早振动，加上传播时间。

波函数 $\boxed{y(t,x)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]}$

A：振幅　ω：圆频率 $\omega=\frac{2\pi}{T}$　u：波速　φ_0：原点质元振动的初相位

平面波波函数的其他形式　$\lambda=uT$　$k=\frac{2\pi}{\lambda}$

$$y(t,x)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y(t,x)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y(t,x)=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut-x)+\varphi_0]$$

$$y(t,x)=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

具体问题具体分析，熟记于心

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

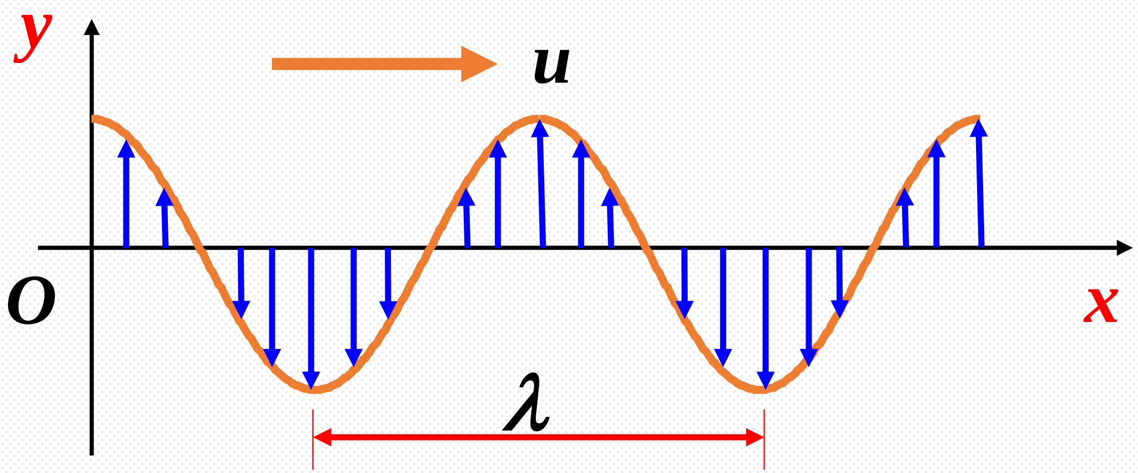
——平面波波函数

1、波函数的物理意义

① 对于给定的t：波函数给出某一时刻t各不同位置质元的位移

——波形曲线

位移y是空间周期为λ的周期函数

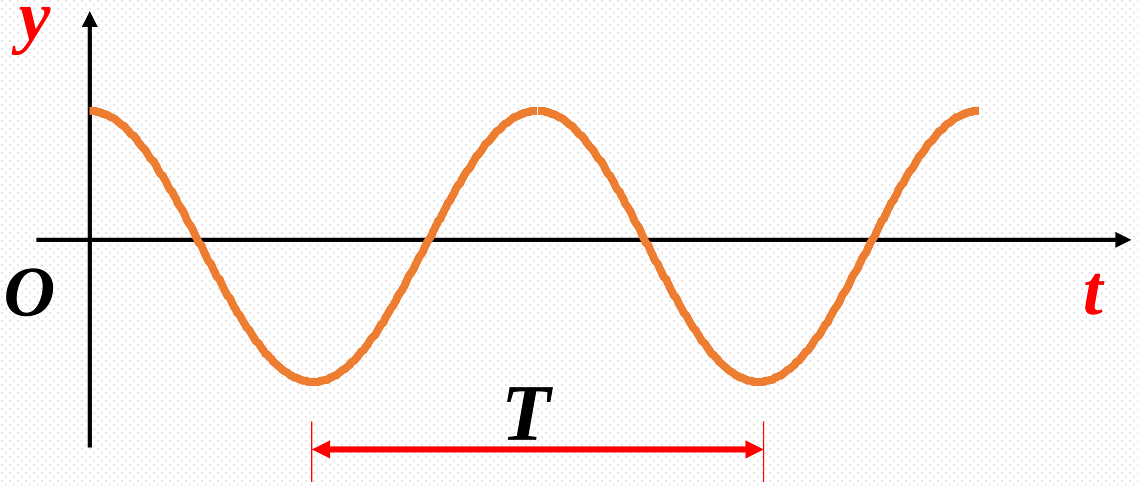


t 时刻的波形曲线（y—x 图线）

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

② **对于给定的x：** **表示某一位置x处该质元随时间t的振动情况**

位移y是时间周期为T 的周期函数



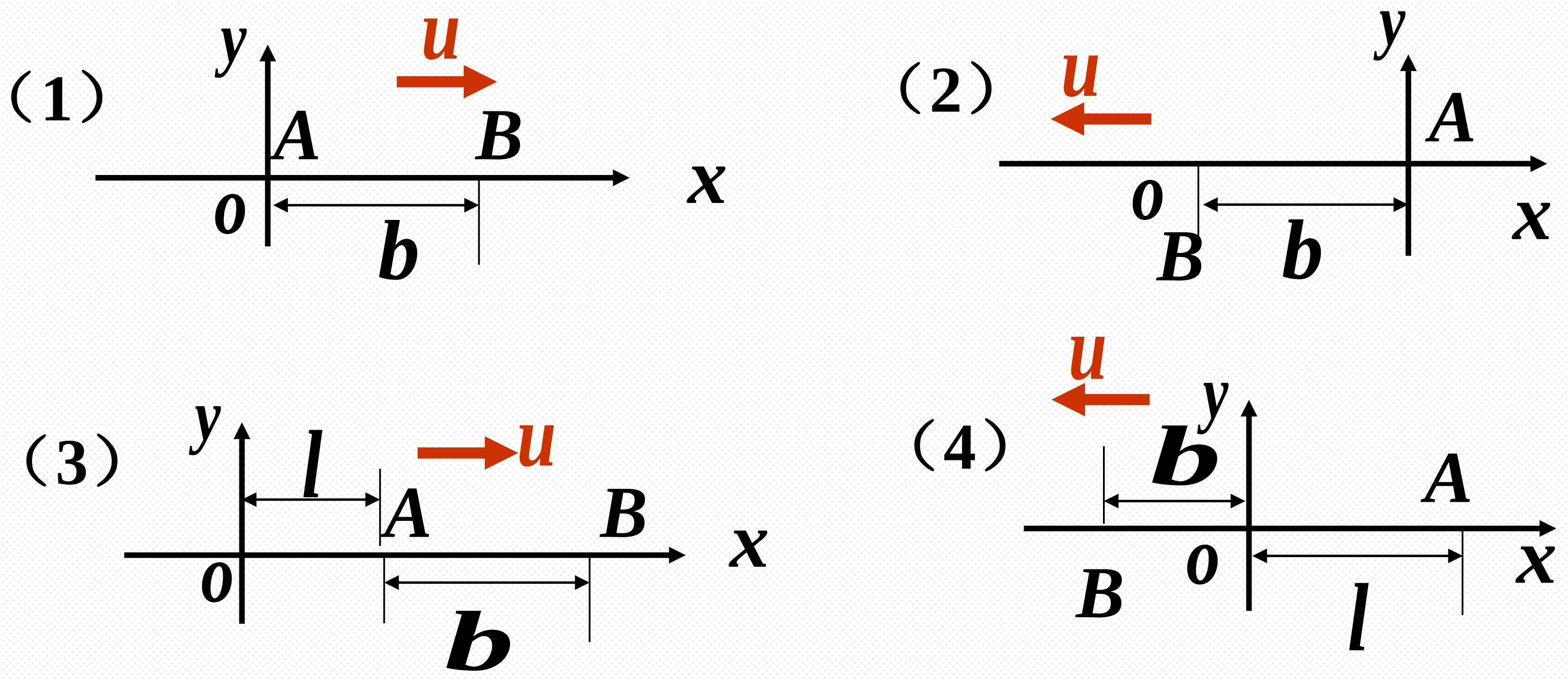
x处的质元振动曲线（y—t曲线）

③ **x和 t 都是变量：表示任意位置质元在任意时刻的振动位移—波函数**

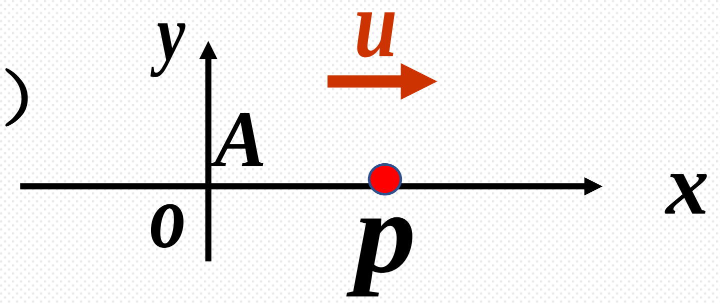
课堂练习：

已知波沿x轴传播，波速为u，A点的振动规律为：$y_A = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

求以下4种情况的波函数以及B点的振动方程？



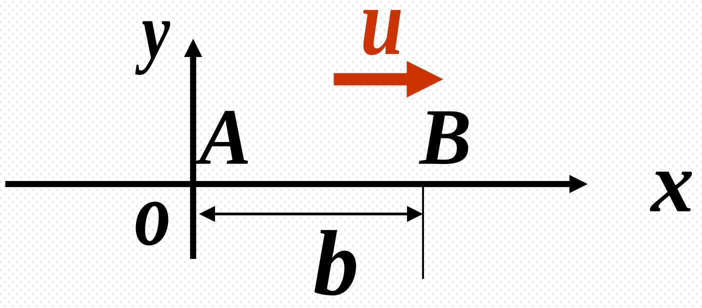
（1）



$$y_A = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_P - \varphi_A = -\omega\frac{x}{u}$$

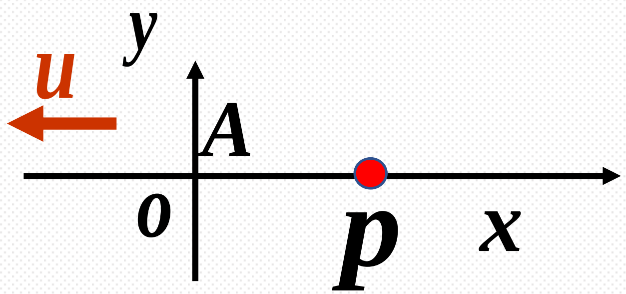
$$\varphi_P = \omega t + \varphi_0 - \omega\frac{x}{u}$$



波函数： $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

B点质元振动方程： $y(t) = A\cos[\omega(t - \frac{b}{u}) + \varphi_0]$

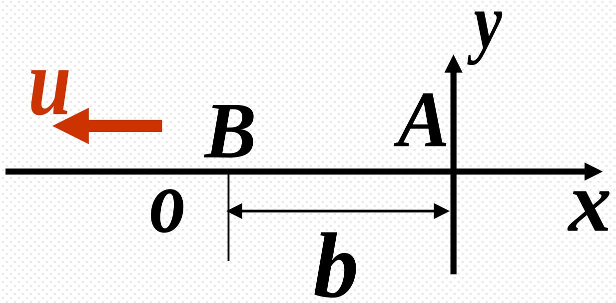
（2）



$$y_A = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_P - \varphi_A = \omega\frac{x}{u}$$

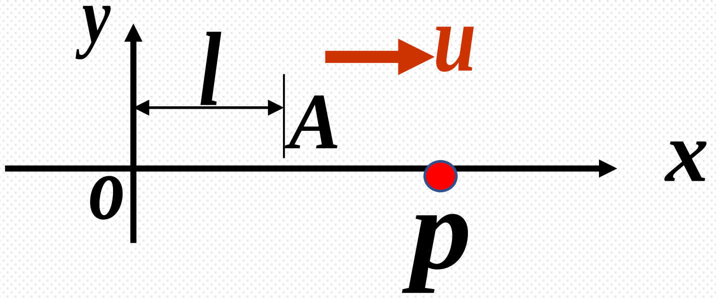
$$\varphi_P = \omega t + \varphi_0 + \omega\frac{x}{u}$$



波函数： $y = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

B点质元振动方程：$y(t) = A\cos[\omega(t - \frac{b}{u}) + \varphi_0]$

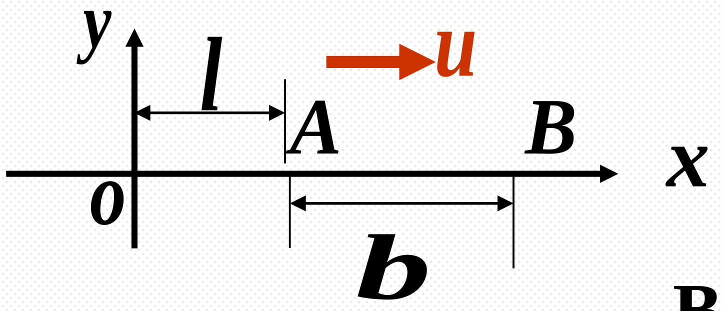
（3）



$$y_A = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_P - \varphi_A = -\omega\frac{x-l}{u}$$

$$\varphi_P = \omega t + \varphi_0 - \omega\frac{x-l}{u}$$

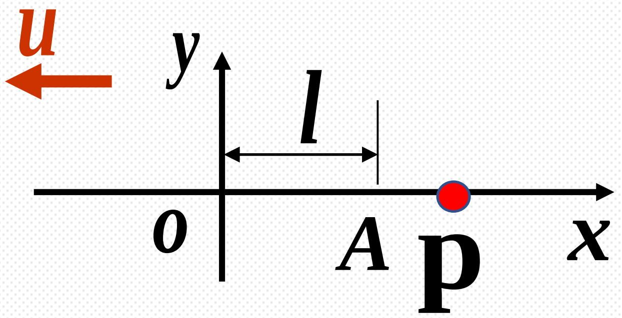


波函数： $y = A\cos[\omega(t-\frac{x-l}{u}) + \varphi_0]$

B点质元振动方程： $y(t) = A\cos[\omega(t-\frac{b+l-l}{u}) + \varphi_0]$

$$= A\cos[\omega(t-\frac{b}{u}) + \varphi_0]$$

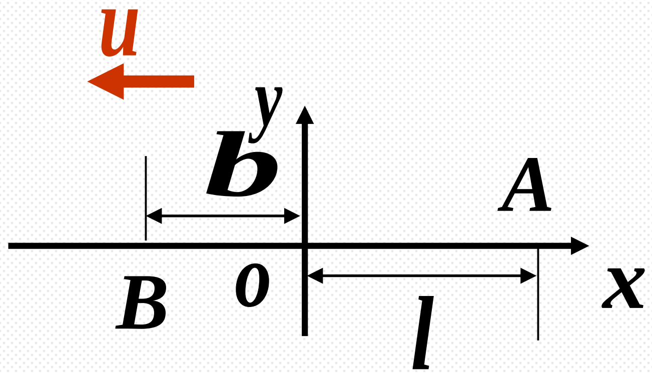
(4)



$$y_A = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_P - \varphi_A = \omega \frac{x-l}{u}$$

$$\varphi_P = \omega t + \varphi_0 + \omega \frac{x-l}{u}$$

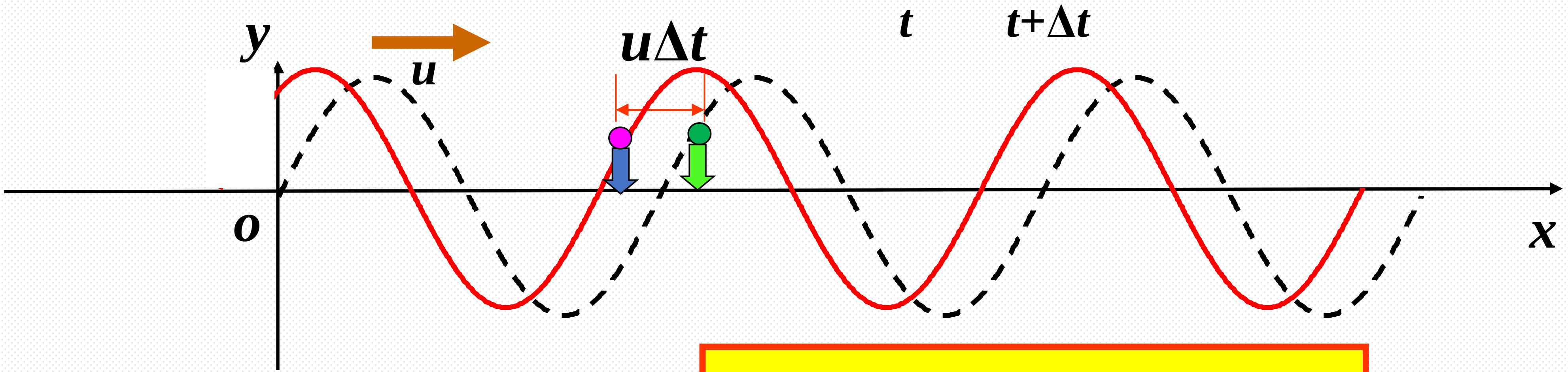


波函数： $y = A\cos[\omega(t + \frac{x\text{-}l}{u}) + \varphi_0]$

B点质元振动方程： $y(t) = A\cos[\omega(t + \frac{-b\text{-}l}{u}) + \varphi_0]$

$$= A\cos[\omega(t - \frac{b+l}{u}) + \varphi_0]$$

2、波是振动状态的传播 ——行波



t 时刻x处的质元振动状态：$\boxed{y(t,x) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]}$

$t+\Delta t$时刻$x+\Delta x$处的质元振动状态：$y(t+\Delta t, x+u\Delta t) = A\cos\{\omega[(t+\Delta t)-\frac{x+u\Delta t}{u}]+\varphi_0\}$

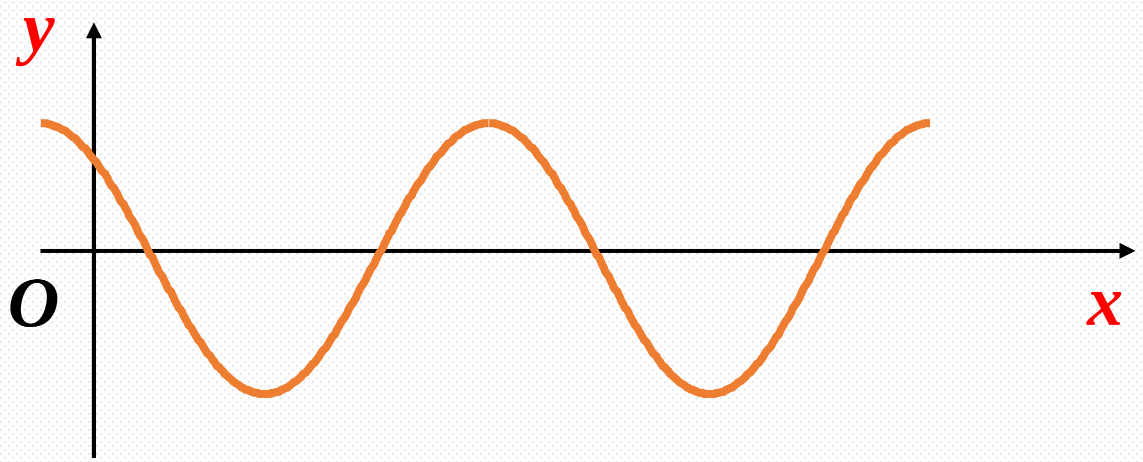
$$= A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

表明：t 时刻x处的质元振动状态经过$t+\Delta t$ 时间后传播到$x+\Delta x$处

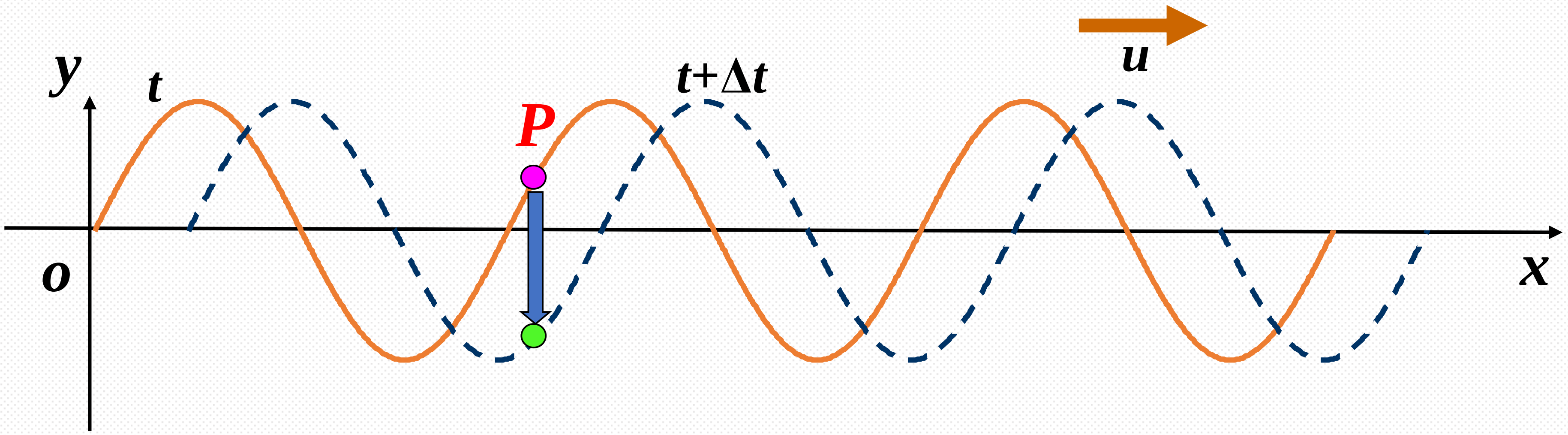
3、波函数的图像表示 ——波形图

反映同一时刻各质点的位移曲线，叫做波形图

$$\boxed{y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]}$$ ——平面波波函数



如何判断质元*P*的运动方向：



画出下一时刻的波形图，比较该质元振动位移

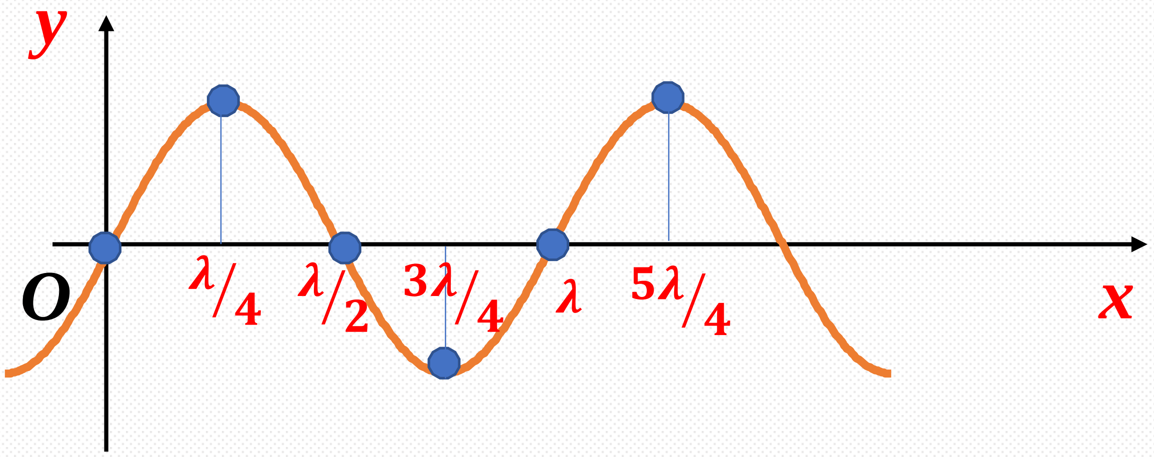
画出 $y(x,t)=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\pi}{2})$ 在$t=T$时刻的波形图

由波函数可知 $t=T$ 时，

$$y(x,T)=A\cos(\omega T-\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\pi}{2})$$

$$=A\cos(2\pi-\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\pi}{2})$$

$$=A\cos(-\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\pi}{2})$$



四、机械波的两类基本问题

（1）已知

- 某质元（参考点）的振动方程和u的方向
- 某质元（参考点）的振动曲线和u的方向
- 某时刻的波形曲线和u的方向

求 波函数

（2）已知波函数

求 相关物理量

- A、T、ω（或 ν）、λ、u
- 某时、某质元的振动位移y、速度v、加速度a
- 波线上两点振动相位关系

例 1 **已知** $y = 0.05\cos(100\pi t - 5x)$ (SI) 求: A、T、u、λ ?

解: **比较法求解** $\boxed{y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]}$

$$y = 0.05\cos[100\pi(t - \frac{x}{20\pi})]$$

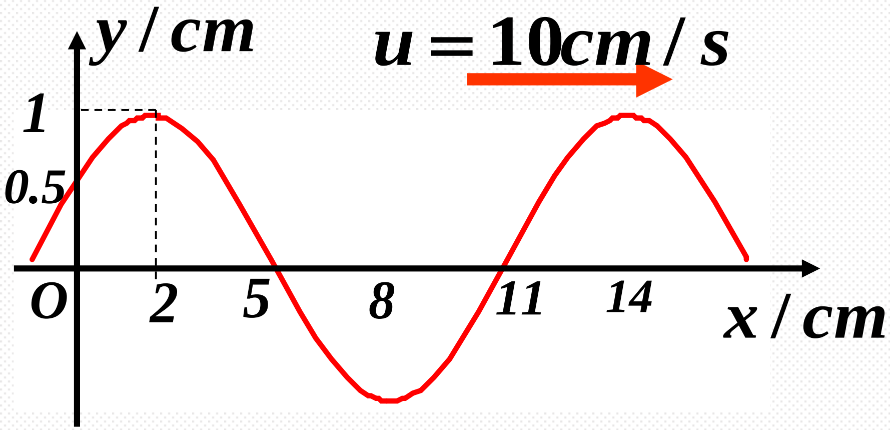
$A = 0.05m$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\pi(rad.s^{-1})$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{50} = 0.02s$

$u = 20\pi = 63m/s$ $\lambda = uT = 1.26m$

例2 已知如图为$t=0$时的波形图，求：(1)写出波动方程；(2)$x_1=5$cm，$x_2=11$cm处两质元的振动方程和相位差；(3)$x=2$cm处质元振动位移、速度、加速度；(4)若为$t=0.2s$时的波形图，波动方程？

解： 由波形图可知： $A=1cm$ $\lambda=12cm$

$u=10cm/s$



$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{12}{10}=1.2s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{5\pi}{3}rad/s$$

(1)先确定O点振动方程：

$$y_0=A\cos(\omega t+\varphi_0)=0.5>0$$

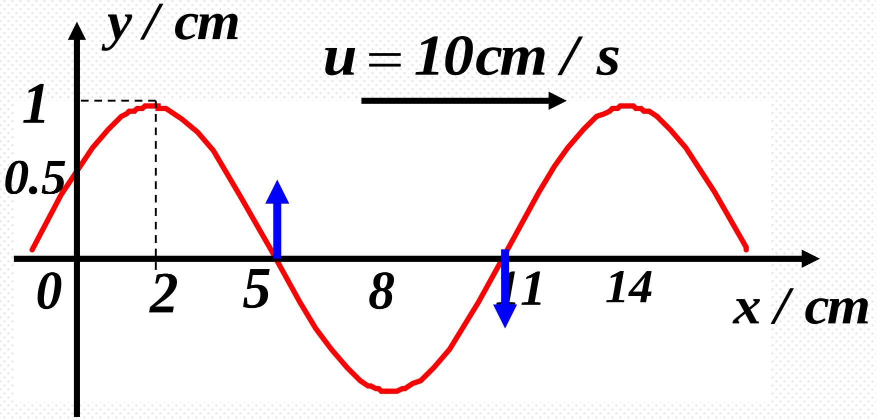
$$\boxed{\varphi_0=\frac{\pi}{3}}$$

$$y_0=A\cos(\omega t+\varphi_0)=\cos(\frac{5\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})$$

$$y=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{x}{u})+\frac{\pi}{3}]=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]\ \ (cm)$$

(2)计算振动方程和相位差

$$y=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]$$



将x_1=5cm带入波动方程得到该点的振动方程为：

$$y_1=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{5}{10})+\frac{\pi}{3}]=\cos[\frac{5\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}]$$

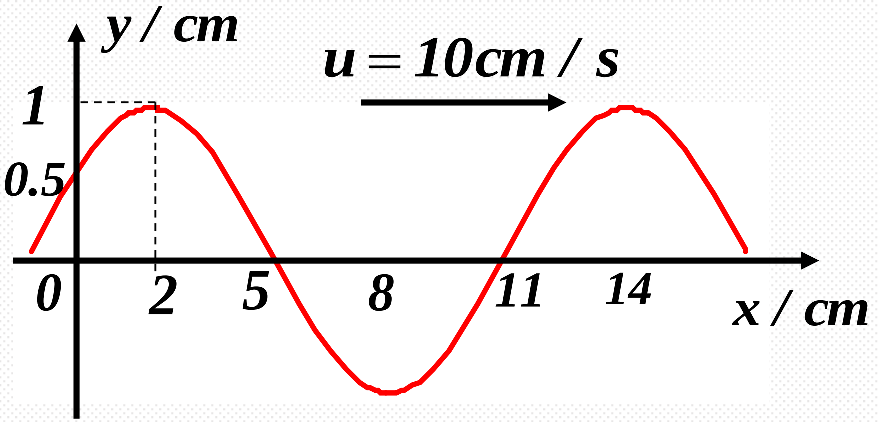
将x_2=11cm带入波动方程得到该点的振动方程为：

$$y_2=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{11}{10})+\frac{\pi}{3}]=\cos[\frac{5\pi}{3}t-\frac{3\pi}{2}]$$

$$\boxed{\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x}=\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{12}(11-5)=\pi$$

两处质点振动反相

(3)求x=2cm处质点振动位移、速度、加速度？



$$y=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]$$

$$y\big|_{x=2cm}=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]\Big|_{x=2cm}=\cos[\frac{5\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}]=\cos\frac{5\pi t}{3}$$

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{x=2cm}=-\frac{5\pi}{3}\sin(\frac{5\pi}{3}t)$$

$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Big|_{x=2cm}=-(\frac{5\pi}{3})^2\cos(\frac{5\pi}{3}t)$$

该质元在t=$\frac{3}{4}$T时刻振动位移、速度、加速度？

$$y=\cos\frac{5\pi}{3}\times\frac{3}{4}T=\cos\frac{5\pi}{3}\times\frac{3}{4}\times 1.2=0$$

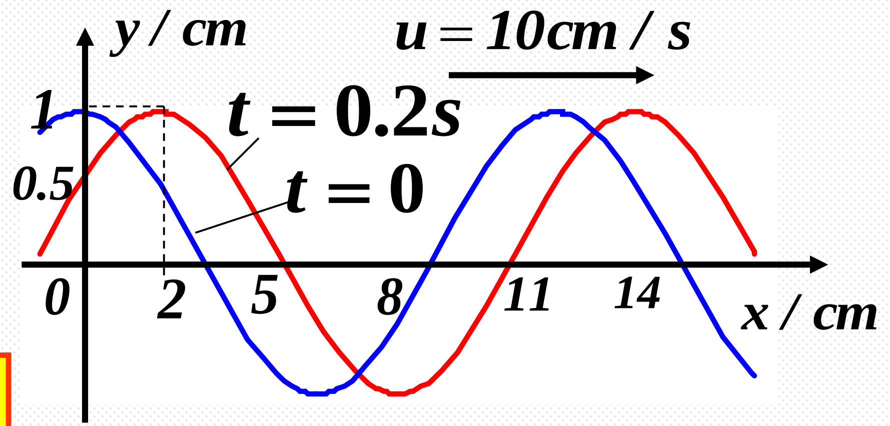
$$v=-\frac{5\pi}{3}\sin(\frac{5\pi}{3}\cdot\frac{3}{4}\times 1.2)=\frac{5\pi}{3}$$

$$a=-(\frac{5\pi}{3})^2\cos(\frac{5\pi}{3}\cdot\frac{3}{4}\times 1.2)=0$$

(4)若红色曲线为$t=0.2s$时的波形图，波动方程:

$$A=1cm \quad \lambda=12\ cm \quad u=10\ cm/s$$

$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{12}{10}=1.2s \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{5\pi}{3}rad/s$$



$$y_0=A\cos(\omega t+\varphi_0)=1>0 \qquad \boxed{\varphi_0=0}$$

$$y=\cos[\frac{5\pi}{3}(t-\frac{x}{10})]$$

例3 **一波长为λ的简谐波沿Ox轴正方向传播，在$x=\lambda/2$的P点的振动方程为$y_p=(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t-\frac{1}{2}\cos\omega t)\times10^{-2}(\mathrm{SI})$,求该简谐波的表达式？**

解：

$$y_p=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sin\omega t-\frac{1}{2}cos\omega t\right)\times10^{-2}(SI)$$

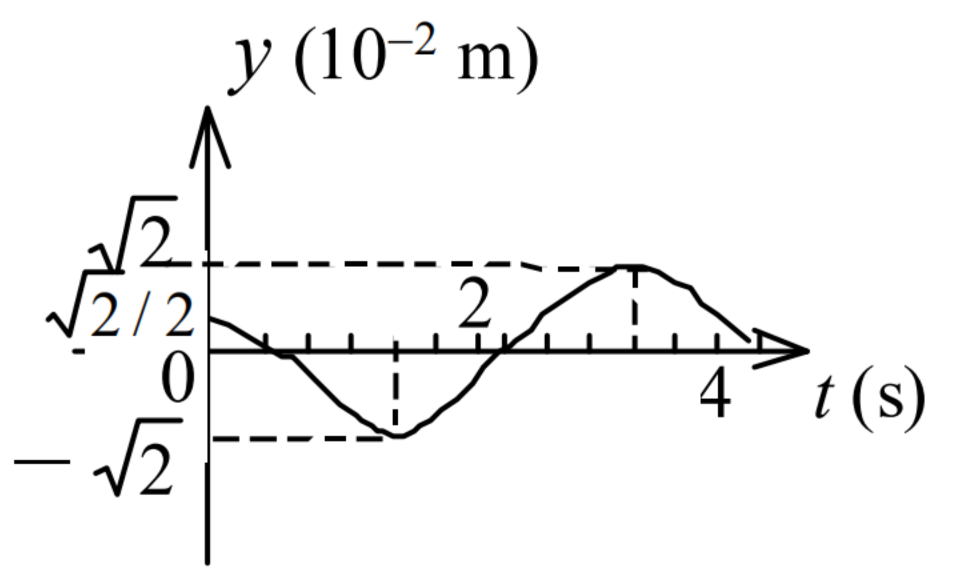
$$=cos(\omega t-\frac{2}{3}\pi)\times10^{-2}(SI)$$

$$\Delta\varphi=\varphi_{p'}-\varphi_p=-\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$y=cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{1}{3}\pi)\times10^{-2}(SI)$$

例4 一波长为λ=4m的简谐波沿Ox轴正方向传播，周期T=4s，已知x=0处的质元振动曲线如图所示，

试求:(1) x=0处的质元的振动方程；(2)波的表达式？



解: (1)

$$A=\sqrt{2}\times 10^{-3} \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$$

$$y=\sqrt{2}\times 10^{-3}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2)

$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{4}{4}=1m/s$$

$$y=\sqrt{2}\times 10^{-3}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t-\frac{x}{1}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$$

五、振动与波动的比较

区别
- 振动研究一个质点的运动
- 波动研究大量有联系的质点振动的集体表现

联系
- 振动是波动的根源
- 波动是振动的传播

振动是波动的基础，同时，波动是振动的传播

把振动个体的运动扩展、传播出去，成为集体运动

波速与振动速度的区别

波速是表征振动状态传播的物理量，与介质有关。

在各向同性的均匀媒质中， u = 恒量（不随时间变化）

振动速度是媒质中的质元在各自平衡位置附近往返振动的速度，它随时间变化。

§2 机械波的动力学特征

一、平面简谐波的波动方程

平面简谐波波函数 $y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

分别对时间 t 和位置 x 求二阶偏导

$$\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t} = -A\omega^2 cos[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi_0] \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} = -A\frac{\omega^2}{u^2} cos[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi_0]$$

比较上面两式得 $$\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t} = u^2\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}$$ ——平面波波动方程

任何物质运动规律只要符合上述等式，肯定是以速度u传播的波动过程

二、常见的弹性形变

机械波一般都在弹性介质内传播

形变：物体（包括固体、液体和气体）在受到外力作用时，形状或体积发生的或大或小的变化。

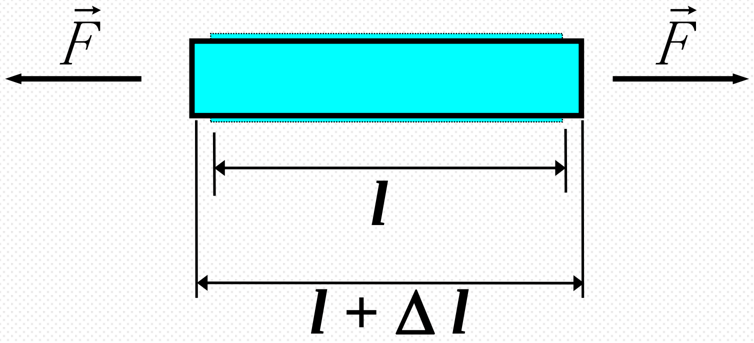
弹性形变：在**弹性限度**内的形变。

弹性限度：外力的限度，即当外力在该限度内时，物体的发生形变不太大，当去掉外力后，物体的形状或体积能复原。

在弹性限度内，弹性形变与外力具有简单的关系。

①线性形变

有一段固体棒



应力：F/S　　应变：$\Delta l/l$

棒的横截面积

实验证明：$\dfrac{F}{S} \propto \dfrac{\Delta l}{l}$

设：$\dfrac{F}{S} = E\dfrac{\Delta l}{l}$ ——胡克定律

$$E = \frac{F/S}{\Delta l/l}\ \mathrm{Nm^{-2}}$$

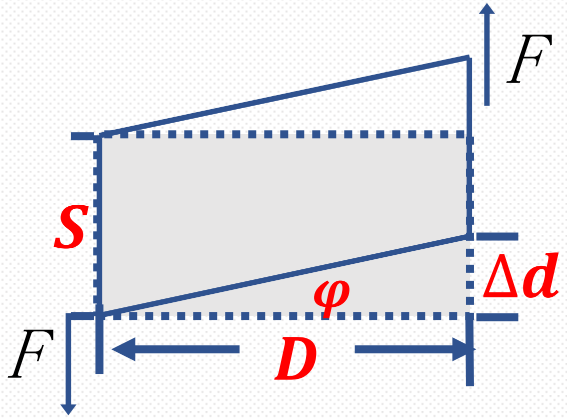
E为“杨氏模量” 取决于材料的性质（与形状、尺寸无关）

反映材料对拉伸或压缩的抵抗力，是描述材料本身弹性的物理量

②剪切形变

有一长方体固体介质

切应力：F/S **切应力变：$\varphi = \Delta d/D$**



实验证明： $$\frac{F}{S} = G\varphi$$

G:切变模量

取决于材料的性质

G、E谁大？

横波形成时，固体介质中各质元都发生剪切形变

对液体和气体，不发生切变，不能传播横波。

名称	弹性模量E GPa	切变模量G GPa	泊松比μ	备注
灰、白口铸铁	115～160	45	0. 23～0. 27	网上下载
球墨铸铁	151～160	61	0. 25～0. 29	
碳钢	200～220	81	0. 24-0. 28	
合金钢	210	81	0. 25～0. 3	
铸钢	175	70-84	0. 25～0. 29	
轧制磷青铜	115	42	0. 32～0. 35	
轧制锰黄铜	110	40	0. 35	
铸铝青铜	105	42	0. 25	
硬铝合金	71	27		
冷拔黄铜	91～99	35-37	0. 32～0. 42	
轧制纯铜	110	40	0. 31～0. 34	
轧制锌	84	32	0. 27	
轧制铝	69	26-27	0. 32～0. 36	
铅	17	7	0. 42	

三、波动方程的建立*

均匀细棒中的弹性横波为例

设有一截面积为S，密度为ρ的固体细棒

其剪切模量为G

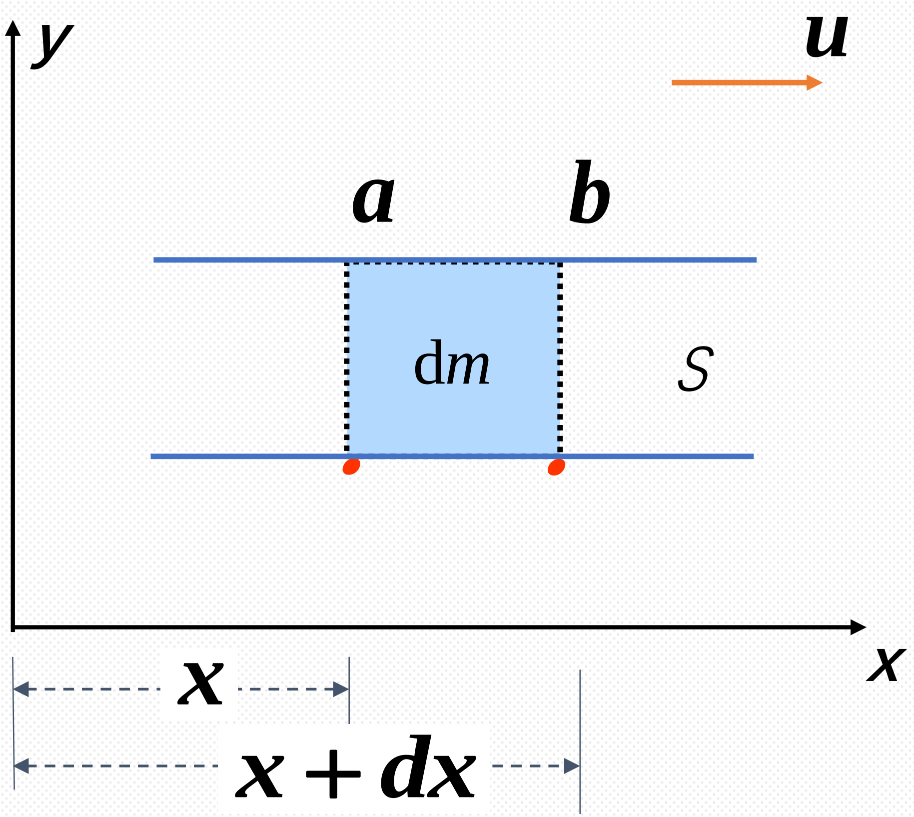
横波沿棒长方向传播。

选棒长的方向为x轴 质元振动方向为y轴

在棒上距o点x处附近取一体积元ab，

ab的长度为dx

这一体积元的质量为 $dm=\rho s dx$



当有横波传播时，该体积元发生切变

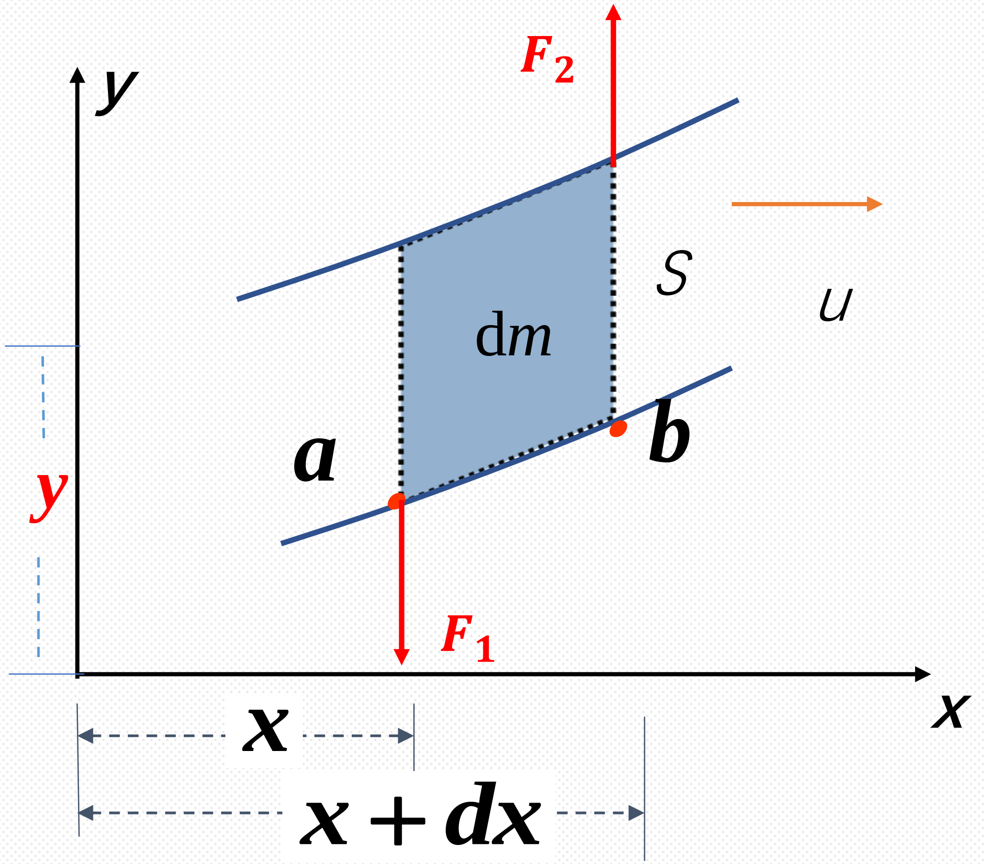
用$y(x,t)$代表质元的振动量

设t时刻体积元正被拉斜：

a点 $y(x,t)$ b点 $y(x+dx,t)$

切变：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x+dx,t) - y(x,t)}{dx} = \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$

切应力：$F(x,t) = GS\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$



左端受到力为 $F_1 = GS\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_x$ 右端受到力为 $F_2 = GS\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x+dx}$

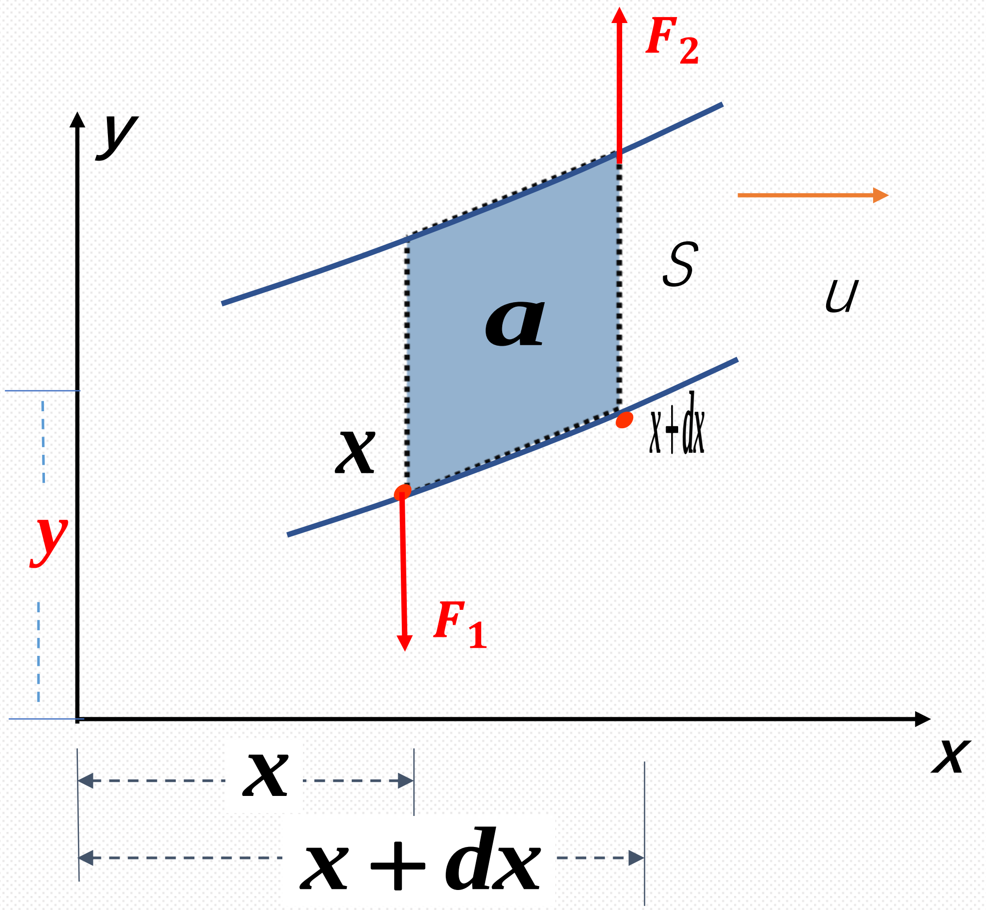
质元的合外力

$$dF = F_2 - F_1 = GS\left(\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x}\right) = GS\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

因为体积元的质量 $dm = \rho s dx$

加速度：$a = \dfrac{dF}{dm} = \dfrac{GS\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx}{\rho S dx} = \dfrac{G}{\rho}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

质元整体运动的位移为$y(x,t)$ $a = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$



最后得：$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{G}{\rho}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 或：$\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$ 其中：$u = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

可以证明：任何弹性介质内的线性机械波的波动方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

其中： y为振动量，x为传播方向，u为波速

不同类型的介质体现在波速u不同

电磁波也具有相同形式的波动方程，只是把u替换成光速c

波动方程的解

波动方程 $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$

可以验证： 波动方程的一般解为

$$\begin{cases} y = y(x - ut) \\ y = y(x + ut) \\ y = y_1(x - ut) + y_2(x + ut) \end{cases}$$

其中： y_1 、y_2是分别以$x - ut$、 $x + ut$为变量的任意函数

因为 y_1 、 y_2 可以是任意函数所以介质能传播无限多种形式的机械波

三角波 方波 脉冲波 简谐波 等等…

四、弹性介质中的波速

E为杨氏模量（线变），G为剪切模量（剪切形变），K为体弹模量（体变）。

细长的棒状媒质中**纵波波速**为： $u_l = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

各向同性均匀固体媒质**横波波速**为： $u_t = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

同种材料中G小于E，横波波速比纵波波速小得多

在液体和气体只能传播**纵波**，其波速为： $u_t = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$

细绳中**横波波速**为： $u_l = \sqrt{\dfrac{F}{\rho_l}}$

弹性越强的介质，波的传播速度就会越大

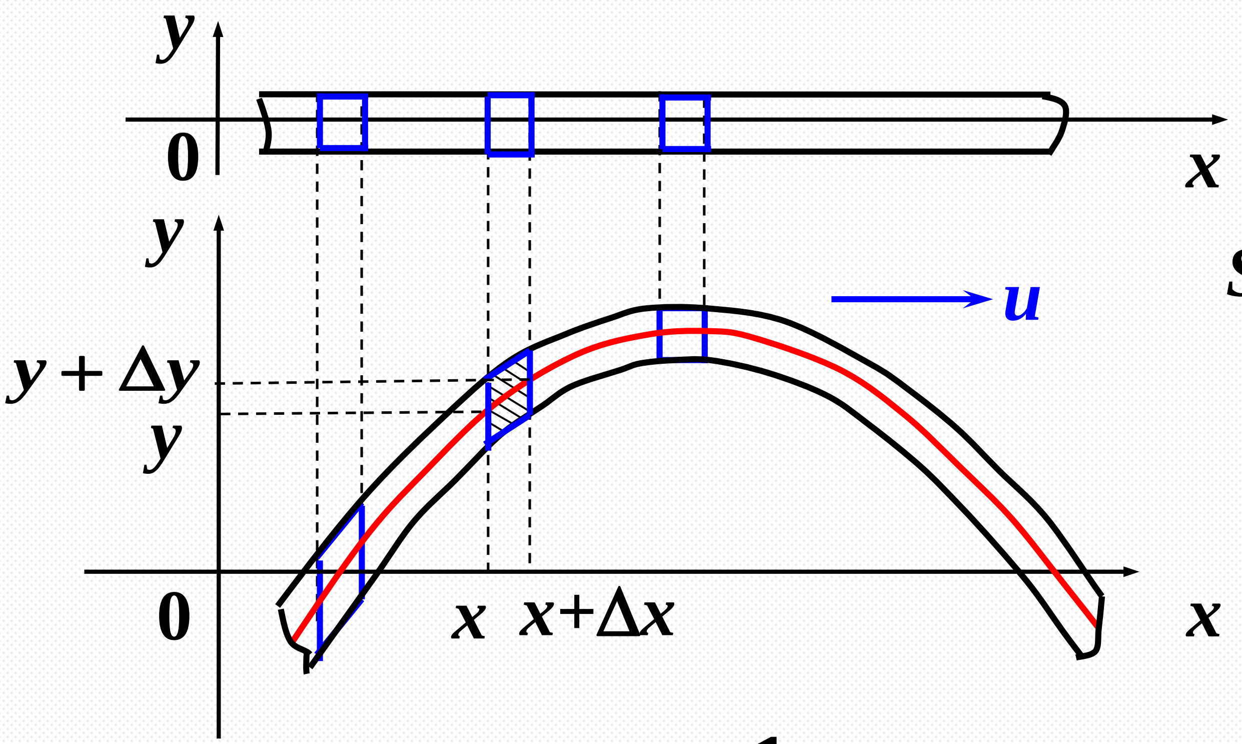
密度越大的介质，波的传播速度就会越小

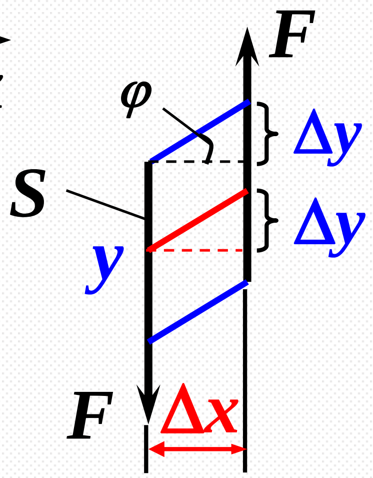
五、波的能量

1、波的机械能

横波为例

$y = A\cos\omega(t - x/u)$





$\varphi = \Delta y / \Delta x$

“质元”形变势能:

$$E_p = \frac{1}{2} G\varphi^2 \Delta V$$

$$\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

$$= -\omega A \sin\omega(t - \frac{x}{u}) \cdot \frac{1}{u}$$

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \rightarrow G = u^2 \rho$$

$$E_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

横波为例

$y = A\cos\omega(t - x/u)$

振动动能： $E_k = \frac{1}{2}(\rho\Delta V)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$

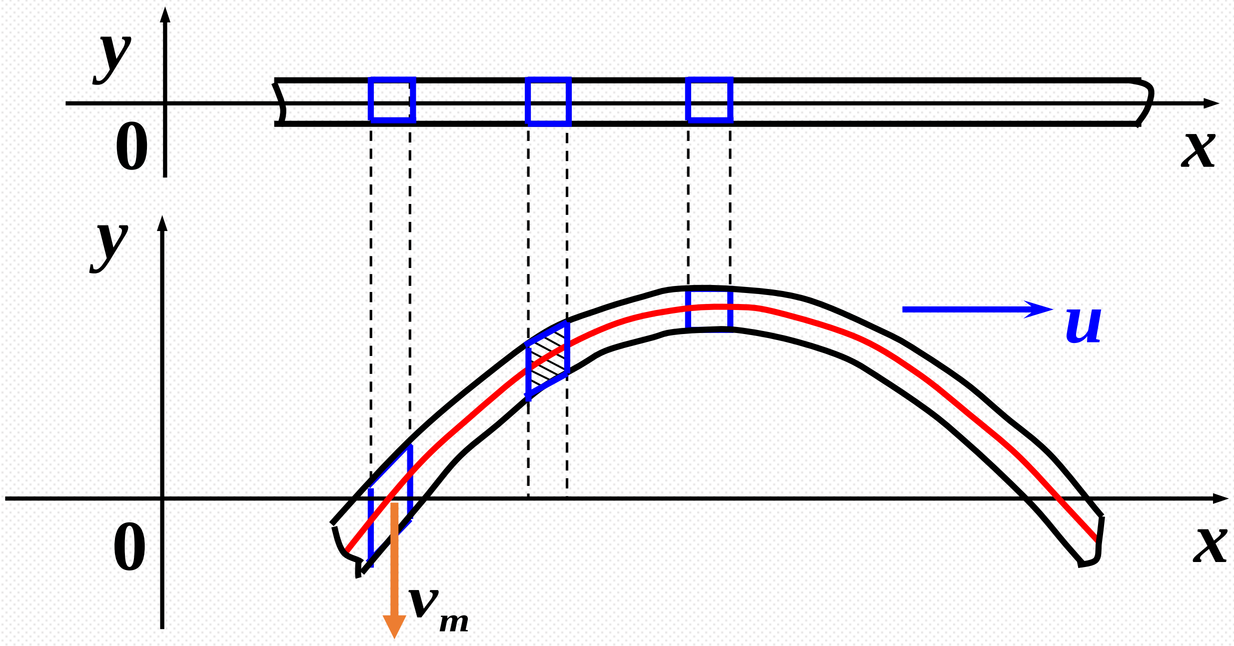
$$\boxed{E_k = E_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{u})}$$

说明：

① 波动动能与势能数值相同，位相相同。同时变大，同时变小。

E_k最大，E_p 也最大，如平衡位置

E_k最小，E_p 也最小，如最大位移



② 总能量随着x、t变，不守恒，能量传输过程。

$$E = E_k + E_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{u})$$

最大位移 ⟶ 平衡位置，能量增大，从前面输入；
平衡位置 ⟶ 最大位移，能量减小，向后面输出。

每个质元都与周围媒质交换能量

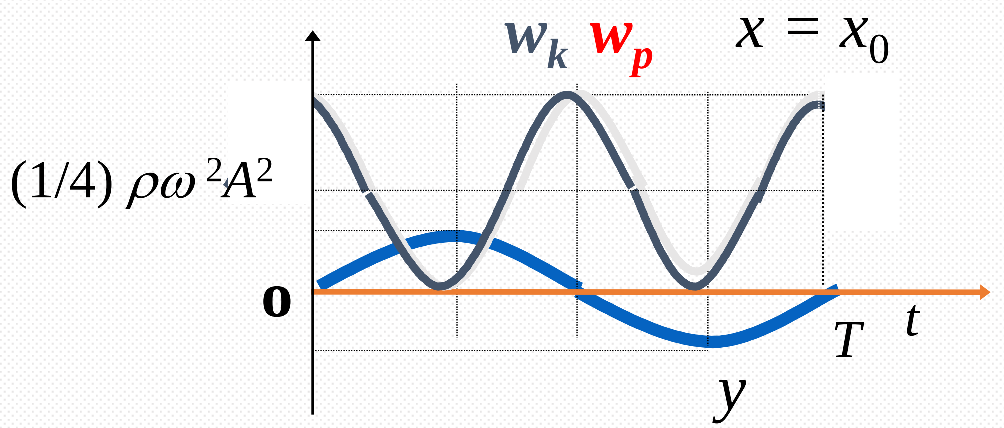
讨 论

$$\Delta W_k = \Delta W_p = \frac{1}{2}\rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{u})$$

(1) 固定 x

w_k、w_p **均随 t 周期性变化**

$w_k = w_p$ **同相**

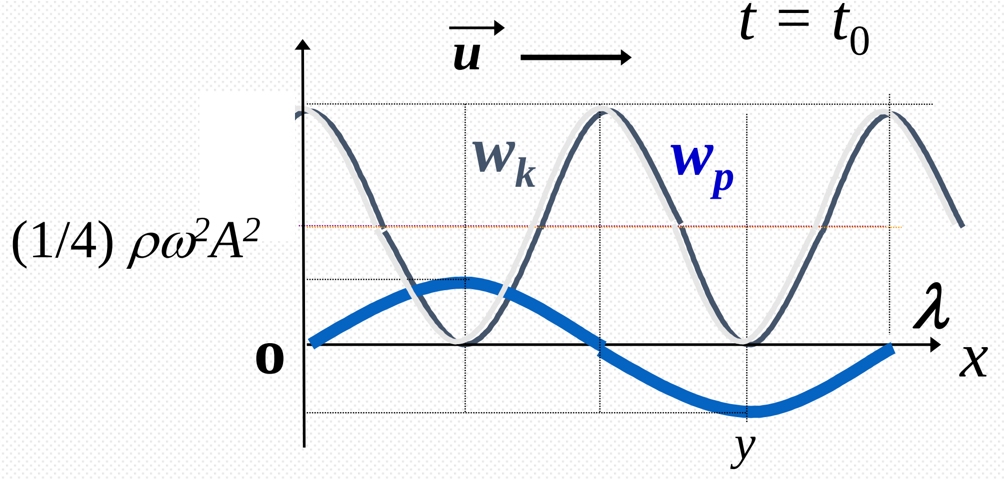


(2) 固定 t

w_k、w_p **随 x 周期分布**

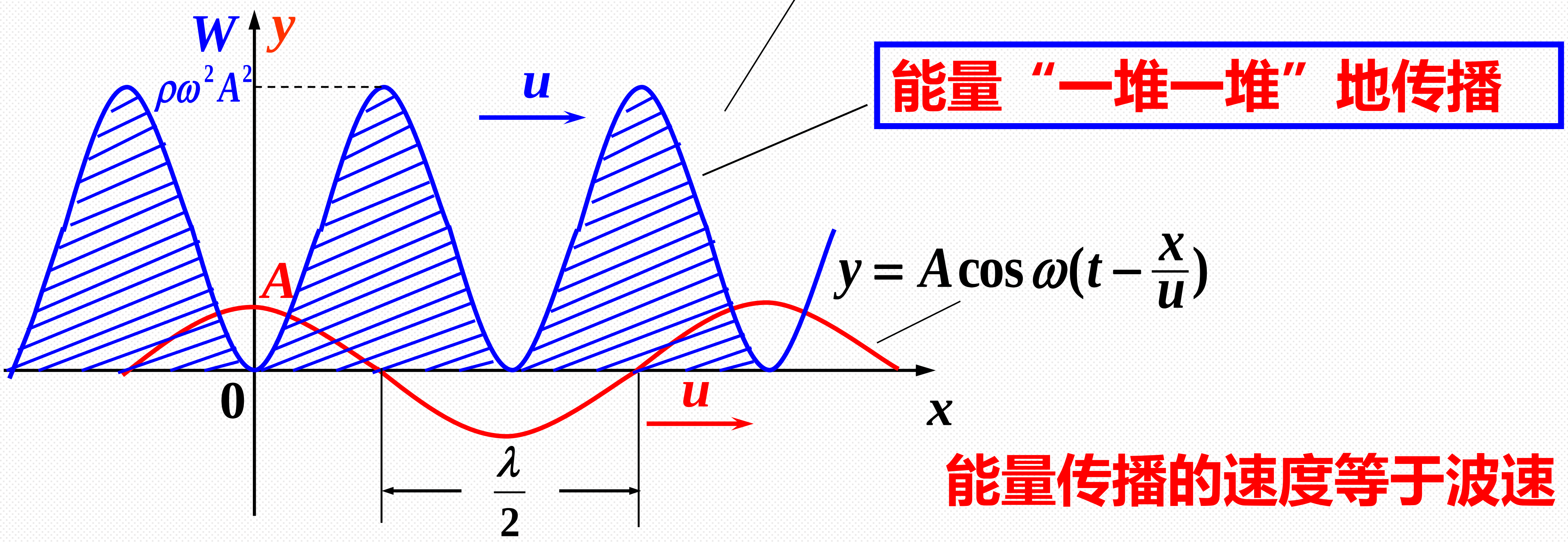
$y = 0 \rightarrow w_k\ \ w_p$最大

y 最大$\rightarrow w_k\ \ w_p$为 0



能量的传播： $W = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{u})$

传播



能量传播的速度等于波速

$y = 0 \Rightarrow W = W_{max}$

$y = A \Rightarrow W = 0$

讨论题：从能量的观点分析弹簧振子与传波介质中的质元的不同？

弹簧振子通常指孤立的系统，因此其机械能守恒，因此势能最大时动能为零，势能为零时动能最大，随着振动势能与动能相互转化。

传波介质中的质元，势能最大时动能亦最大，势能为零时动能亦为零，总机械能不守恒，它在零到最大值之间周期性的变化，不断的将来自波源的能量沿波的传播方向传出去。

2、波的强度*

能量密度：波传播时，介质单位体积内的能量。

$$\varepsilon=\frac{W}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

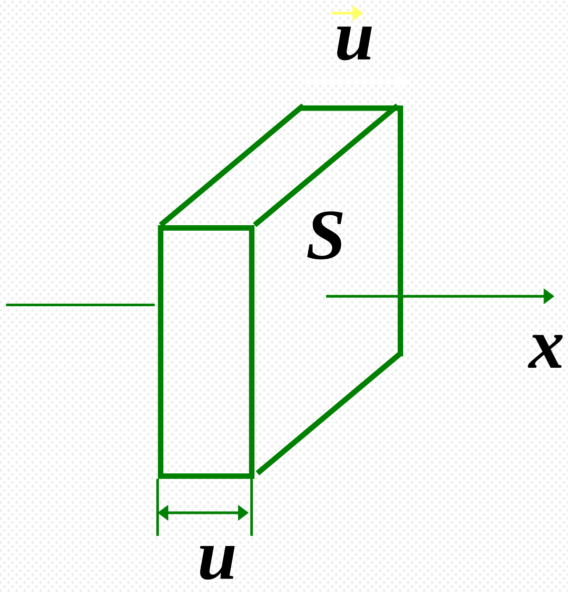
平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值。

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{T}\int_0^T\varepsilon \mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

机械波的平均能量密度与介质的密度、振幅的平方及频率的平方都成正比，该结果适用于各种波。

能流：单位时间内通过横截面积S的能量

$$P=\frac{\varepsilon u dt S}{dt}=\rho u A^2\omega^2 S\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$



能流密度：单位时间内通过单位横截面积的能量

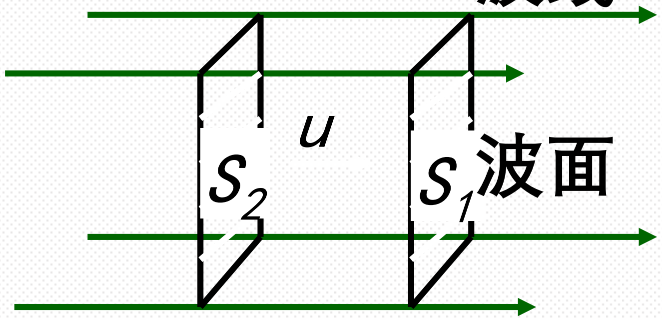
$$p=\frac{\varepsilon u dt S}{S dt}=\rho u A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

平均能流密度：通过单位横截面积，一周期内能流的平均值

$$I=\bar{p}=\bar{\varepsilon}u=\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A^2$$ ——**波的强度**

3、波的能量守恒

① 平面简谐波



一个周期T内通过S_1和S_2面的能量相等

设I_1和I_2分别表示S_1和S_2处的波的强度

$$I_1 S_1 T = I_2 S_2 T \qquad I = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A^2$$

$$\frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_1^2 S_1 T = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_2^2 S_2 T$$

$$\because S_1 = S_2 \qquad \therefore A_1 = A_2$$

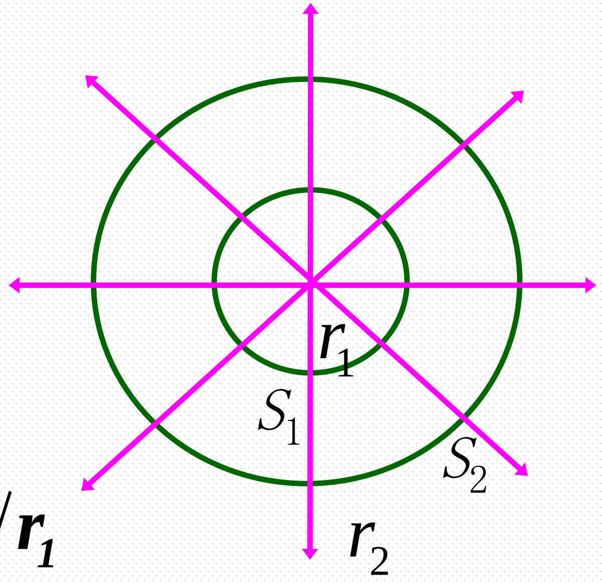
在均匀的不吸收能量的介质中传播的平面简谐波的振幅不变。

② 球面波　　一个周期T内通过S_1和S_2面的能量相等

$$I_1S_1T = I_2S_2T \qquad I = \frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2$$

$$I_1 \bullet 4\pi r_1^2 = I_2 \bullet 4\pi r_2^2$$

$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^{\ 2} 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^{\ 2} 4\pi r_2^2 \quad \Rightarrow A_1/A_2 = r_2/r_1$$



——球面波的振幅与距离成反比

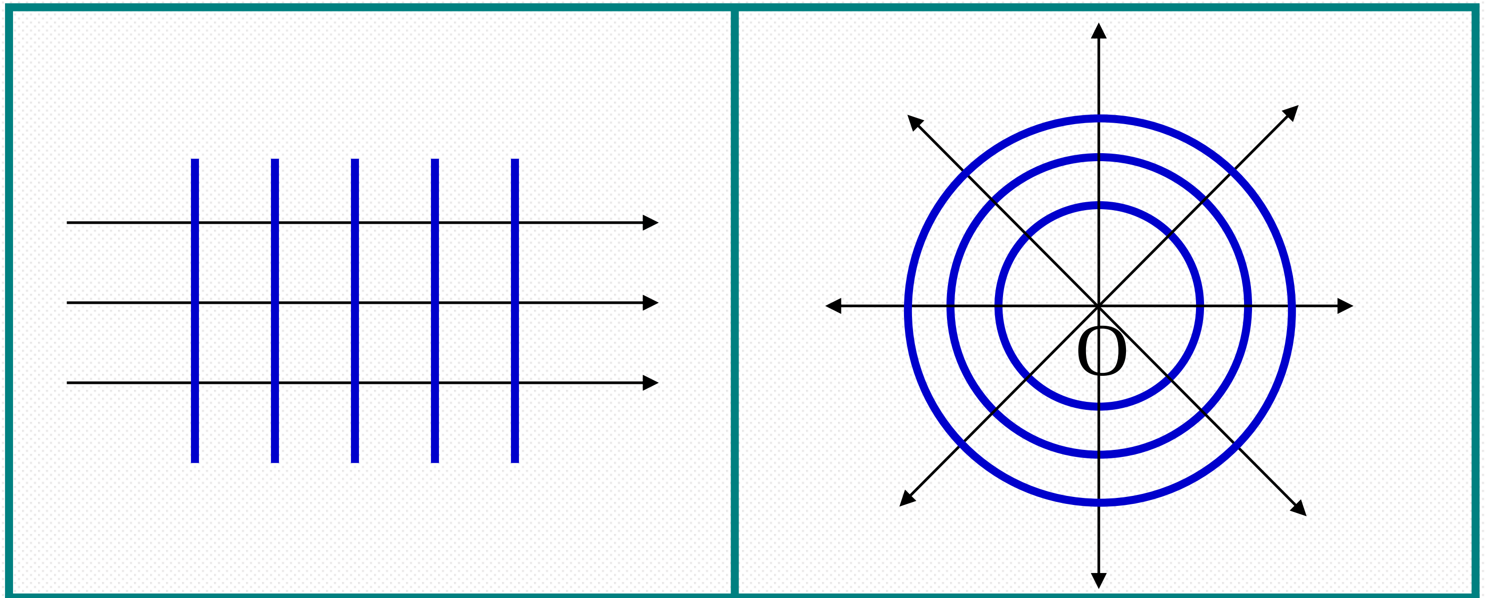
球面波的波函数可以写成： $y = \dfrac{A_1}{r}\cos(\omega t - kr)$

实际中，波在介质中传播，介质总要吸收一部分能量，因此波的强度减小，波的振幅减小，吸收的能量转为介质的内能或热—波的吸收。

§3 惠更斯原理—衍射、折射和反射

介绍有关波的传播方向的规律

波在均匀各向同性介质中传播时，波面及波前的形状不变，波线也保持为直线，即沿途不会改变波的传播方向。



平面波	球面波

波的衍射现象

一语未完，只听后院中有笑语声，说：“我来迟了，不曾迎接远客！”

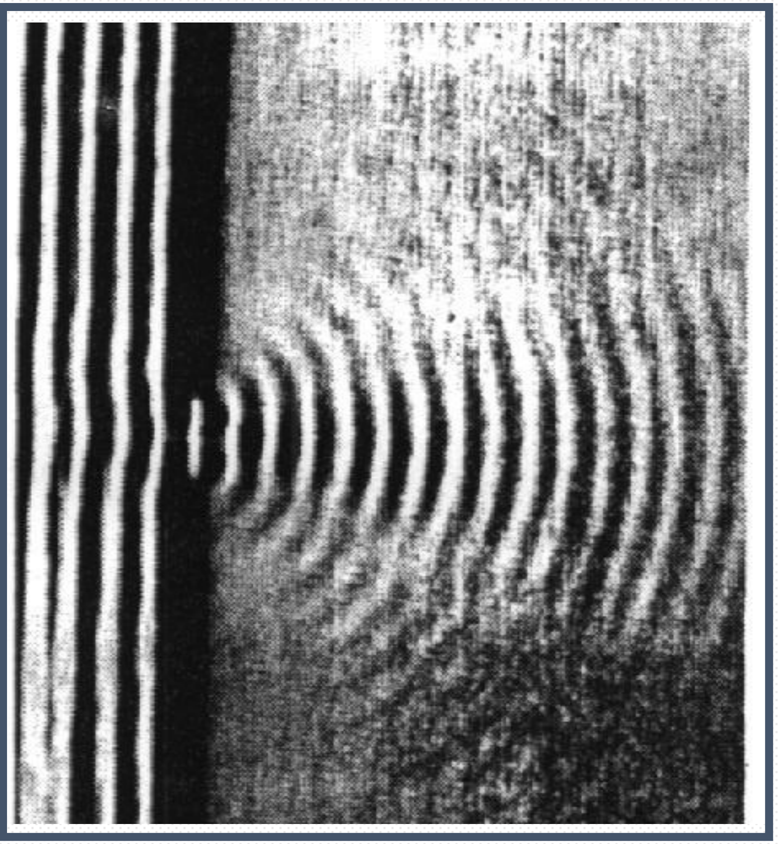
当波在传播过程中遇到障碍物时，波面的形状和波的传播方向将发生改变。

如何解释这一现象呢？

1690年惠更斯提出关于波传播的几何法则

——惠更斯原理

水波通过狭缝后的图像



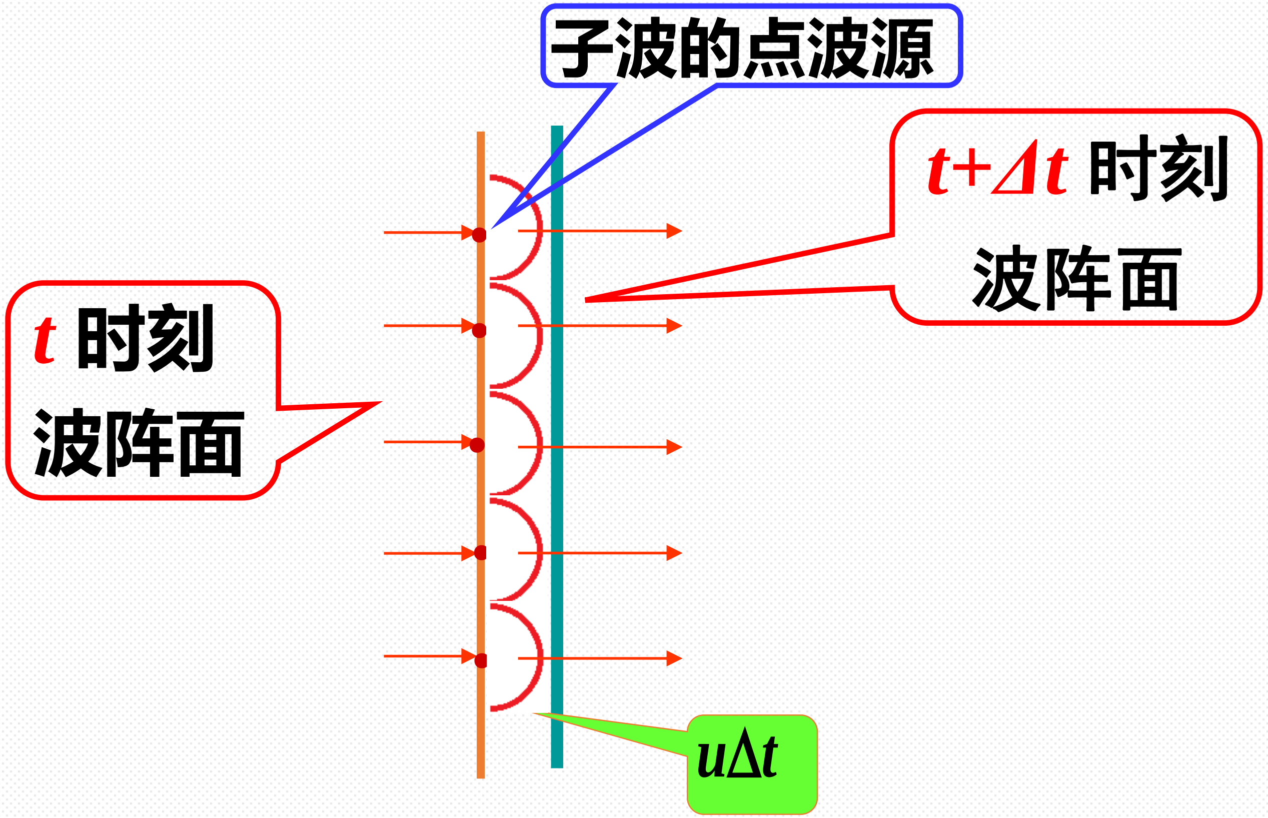
一、惠更斯原理

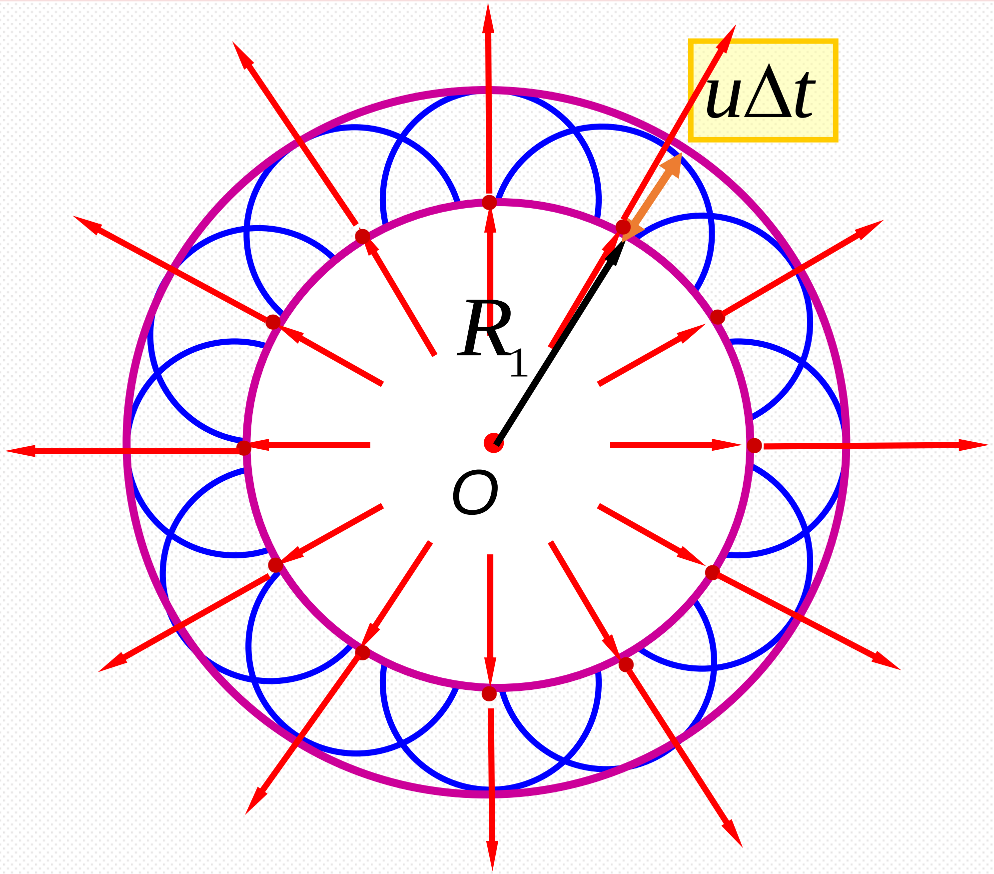
(1) 介质中波传到的各点，都可看作开始发射子波的子波源(点波源)

(2) 在以后的任一时刻，这些子波面的包络面就是实际的波在该时刻的波前。

说明： ① 对任何波动过程都是适用的；

② 只要知道某一时刻的波阵面，用作图方法就可以确定任一时刻的波阵面，从而较直观地解决了波的的传播问题。





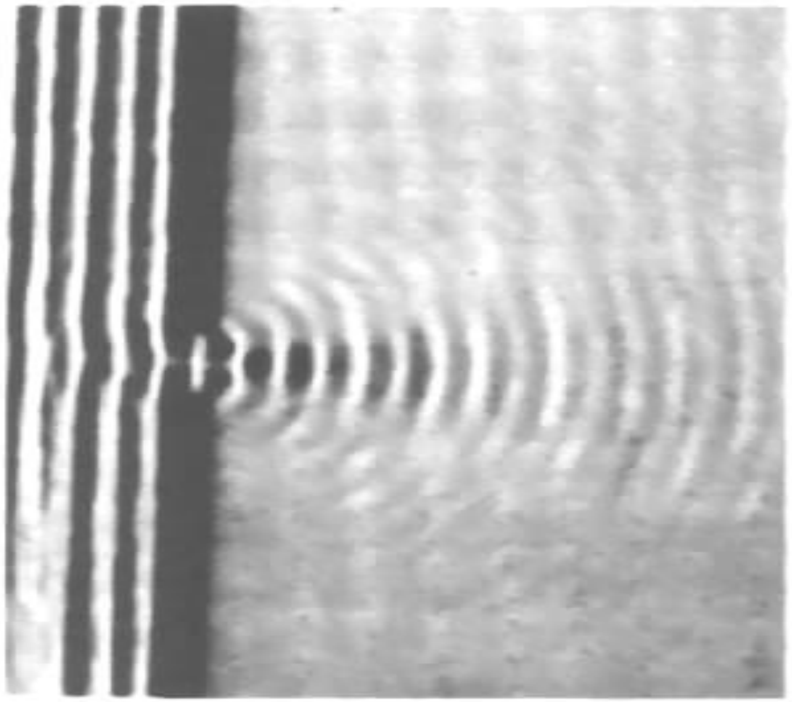
以t时刻波阵面上各点为中心、以 $u\Delta t$ 为半径，画出许多球形子波，这些子波在波线方向的包迹就是 $t+\Delta t$ 时刻的新的波阵面。

根据：波的传播方向⊥波阵面

波的传播方向

二、惠更斯原理的应用

1、惠更斯原理解释衍射



水波衍射图样

波的衍射现象

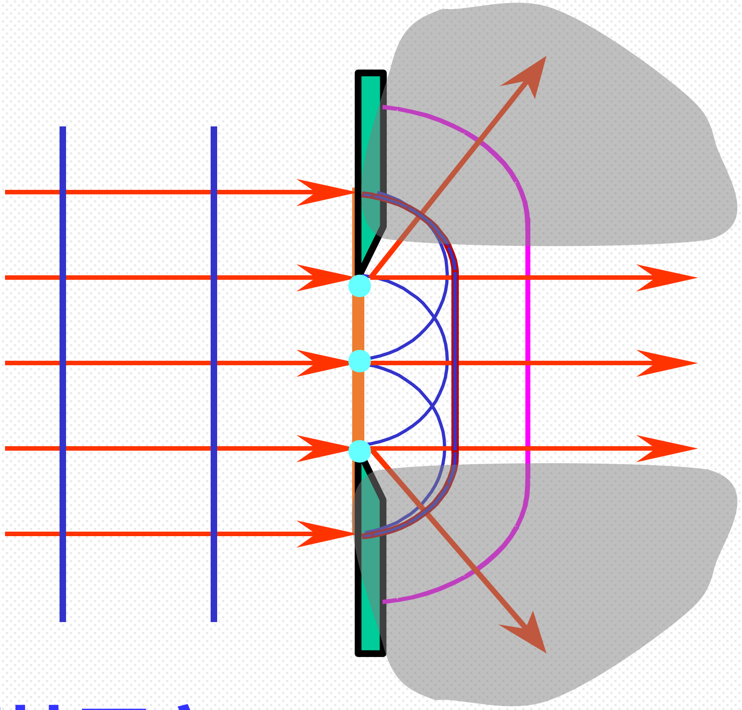
波传播过程中当遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘而传播的现象。

机械波和电磁波都会产生衍射现象，衍射现象是波动的重要特征之一。

例如，两人隔着墙壁谈话，也能各自听到对方的声音，这就是由声波的衍射所引起的。

设有一平面波，波面与狭缝平行

当波阵面到达狭缝时：

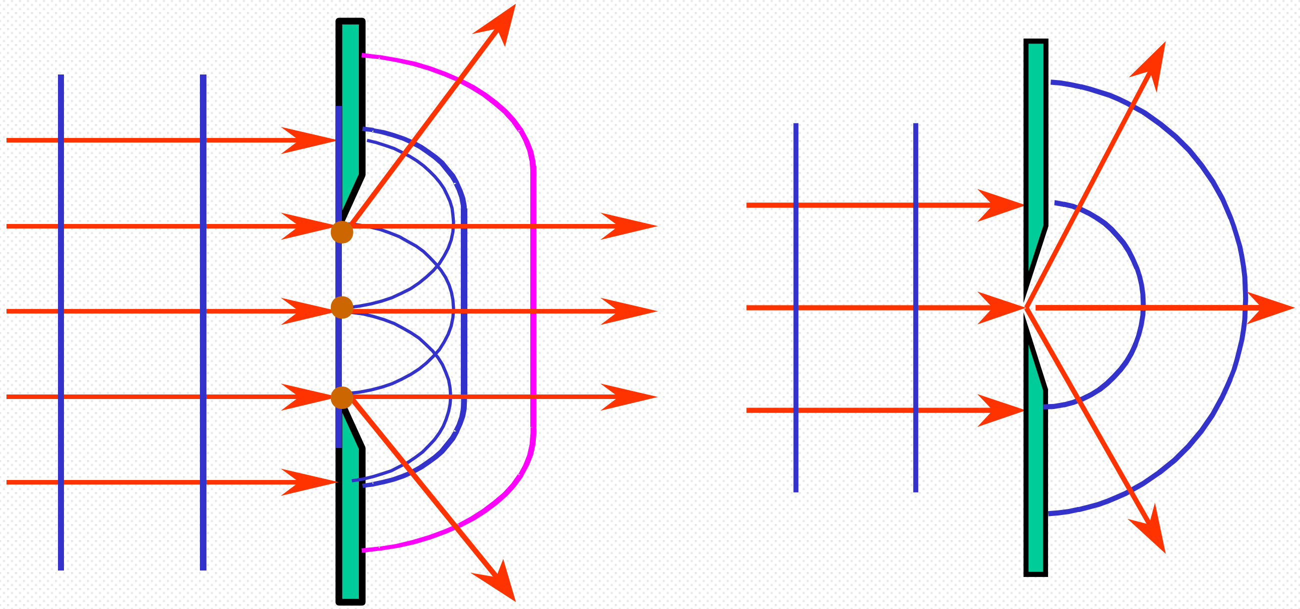


缝处各点成为子波源作为新的（点）波源而发射球面波

① 子波面的包络面不再是平面；

② 缝中间部分，波的传播方向仍保持不变；

③ 缝两端，波的传播方向偏离原方向，波绕过障碍向前传播，进入缝两侧的阴影区域。



实验证明，衍射现象是否显著，决定于障碍物的**几何线度** d 和**波长**λ 的比值d/λ 。d 愈小或波长λ愈大，则**衍射现象愈显著**。

一般地说，任何一种波（声波、光波等）都会产生衍射现象。因此，衍射现象是波在传播过程中所独具的特征之一。

例如：声波，无线电波等的波长较大，因此衍射较显著；而波长较短的波（如超声波、光波等），衍射现象就不显著，呈现出明显的方向性，即按直线作定向传播。

应用： 在技术上需要定向传播信号，就必须利用波长较短的波。

例如，用雷达探测物体和测定物体 利用超声波探测鱼群或材料内部的缺陷

有些情况需要在传播途中即使遇到较大的障碍物也能绕过它而达到任何角落。 如：广播电台播送节目时，无线电收音机

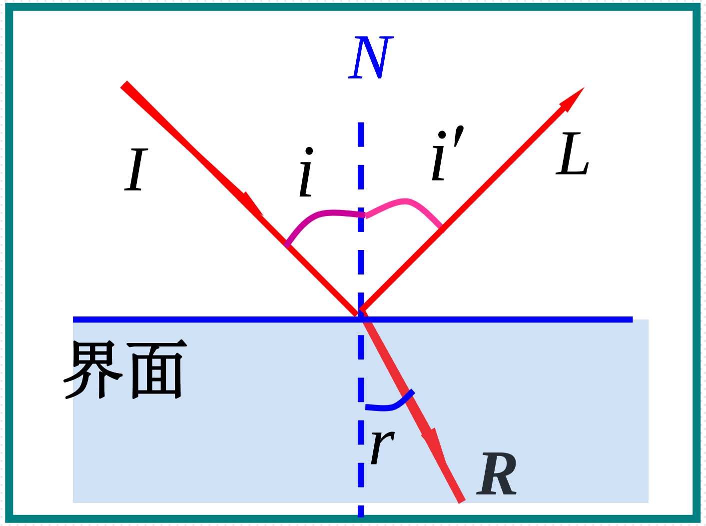
2、惠更斯原理解释两介质表面的折射与反射

折反射现象：

当波从一种介质传到另一种介质时，

入射波的一部分被反射，形成反射波

另一部分穿过分界面透射入第二种介质后，改变了传播方向，形成折射波



反射定律 $i = i'$

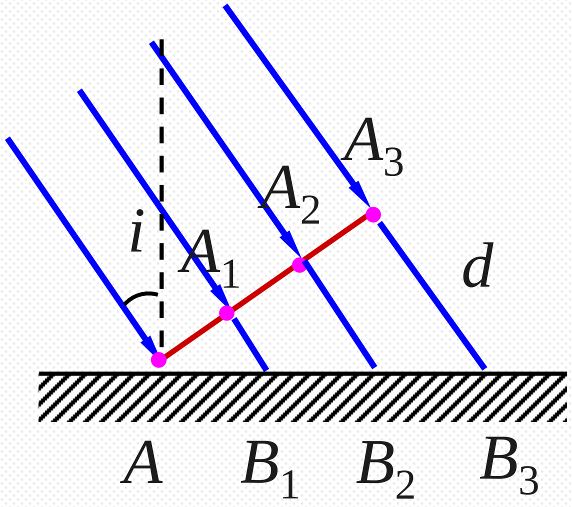
折射定律 $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{u_1}{u_2}$

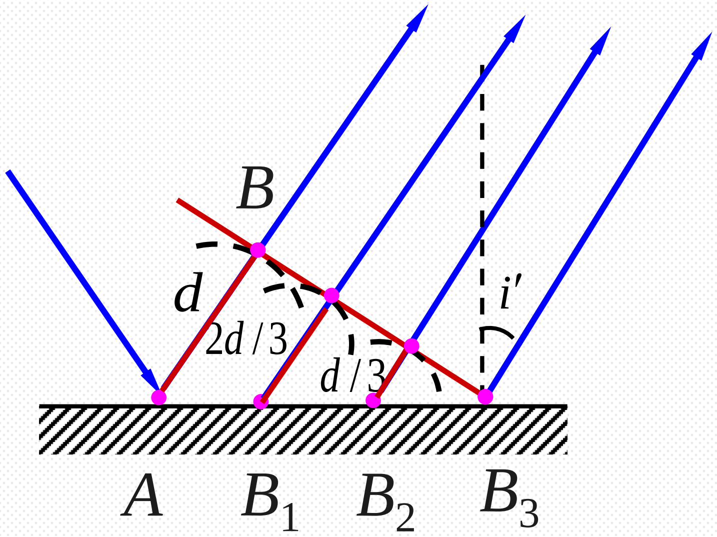
反射定律

入射角 i

$AA_1 = A_1A_2$

$A_1A_2 = A_2A_3$





$t \longrightarrow A$

$t+\frac{\Delta t}{3} \longrightarrow A_1 \rightarrow B_1$

$t+\frac{2\Delta t}{3} \longrightarrow A_2 \rightarrow B_2$

$t+\Delta t \longrightarrow A_3 \rightarrow B_3$

$t+\Delta t$时刻的波阵面

$$d = \overline{A_3B_3} = u\Delta t \Rightarrow \Delta AB_3A_3 = \Delta AB_3B$$

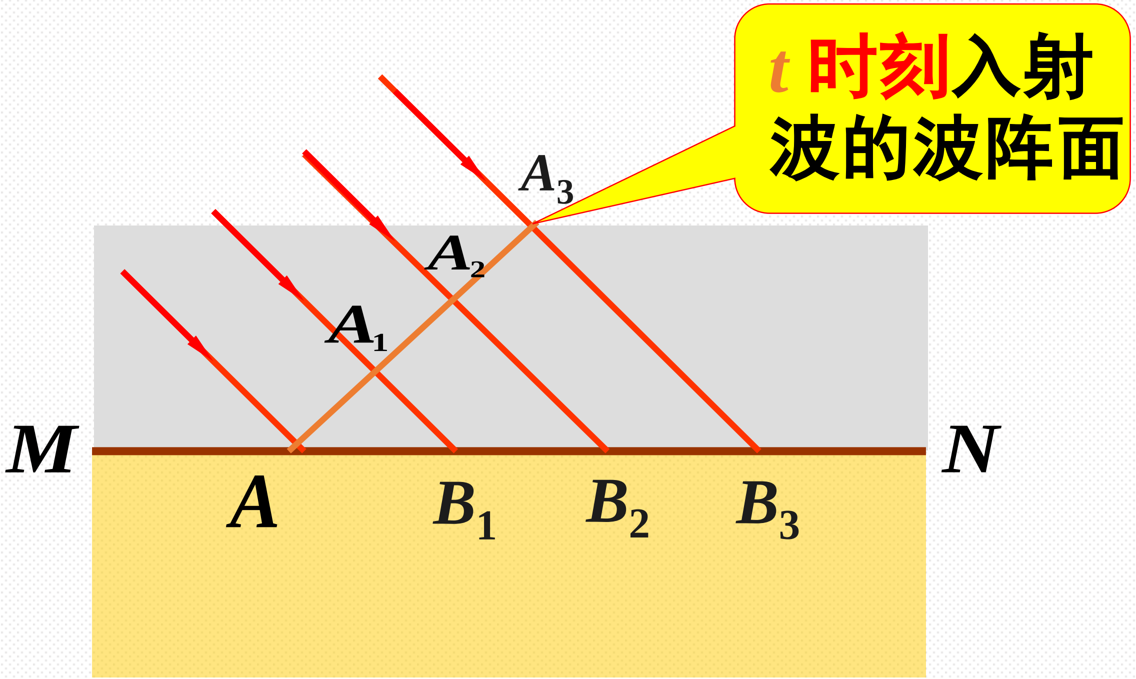
$$\overline{AB} = u\Delta t = d \Rightarrow i = i'$$

折射定律

设 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$

u_1——介质1中的波速

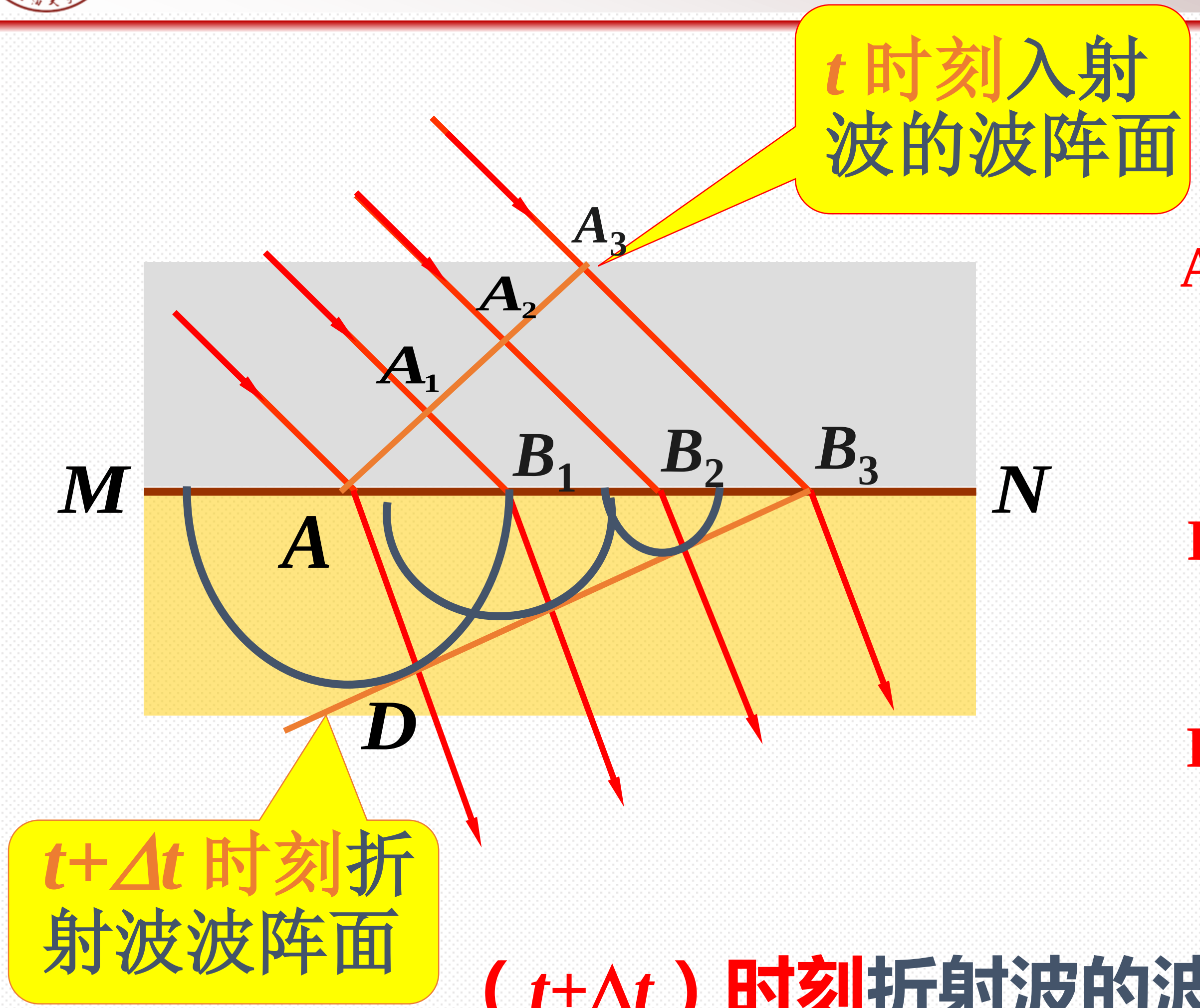
u_2——介质2中的波速



波在媒质1中从A_3点传播到B_3点所经历的时间为Δt，则

$$\overline{A_3B_3} = u_1\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\overline{A_3B_3}}{u_1}$$



$t+\Delta t$ 时刻　A_3光线刚好到达界面处

A点发出的子波在媒质2中传播，传播的距离为：

$$r = u_2 \Delta t = \frac{u_2}{u_1}\overline{A_3B_3}$$

B_1点发出的子波在媒质2中传播，传播的距离为：

$$2r/3$$

B_2点发出的子波在媒质2中传播，传播的距离为：

$$r/3$$

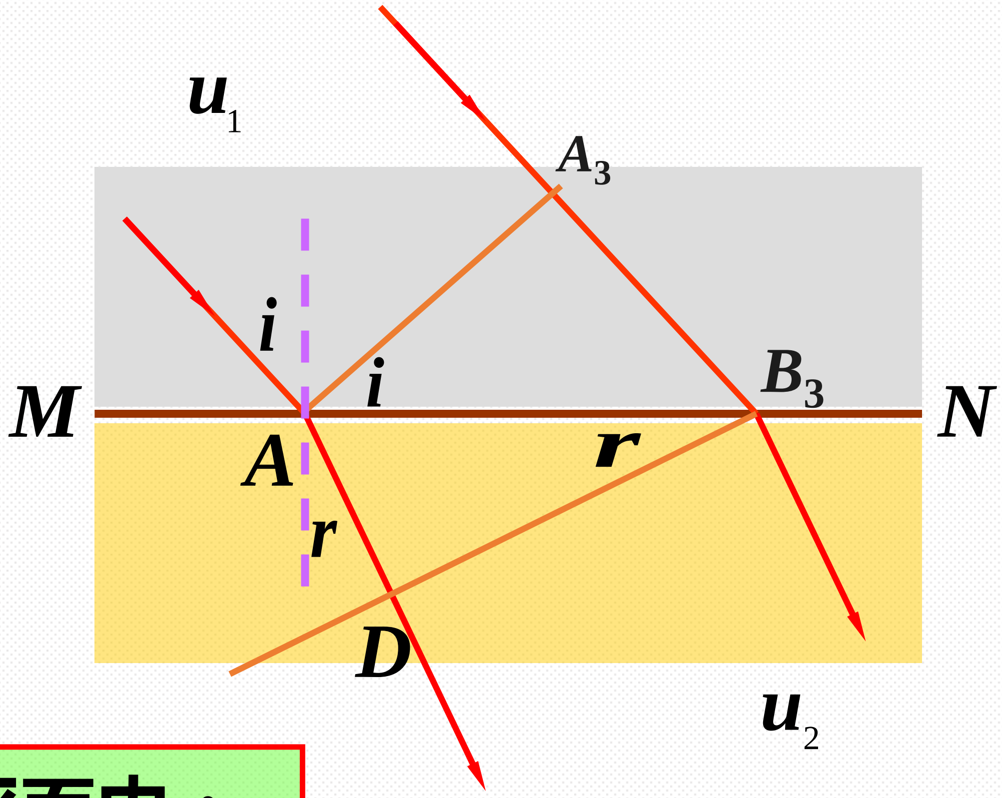
（$t+\Delta t$）时刻折射波的波阵面为通过B_3 D面与图面垂直的平面

→ **在媒质2中的折射波传播的方向**

$$i = \angle A_3AB_3 \qquad r = \angle AB_3D$$

$$\sin i = \frac{A_3B_3}{AB_3} \qquad \sin r = \frac{AD}{AB_3}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{A_3B_3}{AD} = \frac{u_1\Delta t}{u_2\Delta t} = \frac{u_1}{u_2}$$



1、入射线、折射线和分界面的法线在同一平面内；

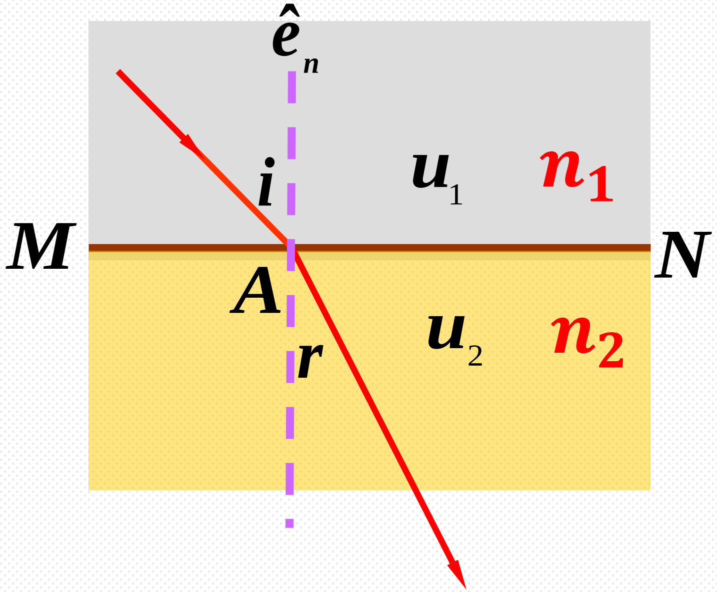
2、入射角的正弦与折射角的正弦之比等于波动在第一种介质中的波速与第二种介质中的波速之比；

——波的折射定律

折射率：$n=\dfrac{c}{u}$

$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u_1}{u_2}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}}$$

n_{21} 相对折射率



讨论：

$u_1>u_2,\ \ r<i$ 折射线偏向法线

$u_1<u_2,\ \ r>i$ 折射线偏离法线

当入射角i大于某一值时，入射波将全部反射回原来的介质——全反射

产生全反射的最小入射角 ——临界角A

（对应的折射角等于90°）

$$\sin A=\frac{u_1}{u_2}=n_{21}$$

$$\boxed{\sin A = \frac{u_1}{u_2} = n_{21}}$$

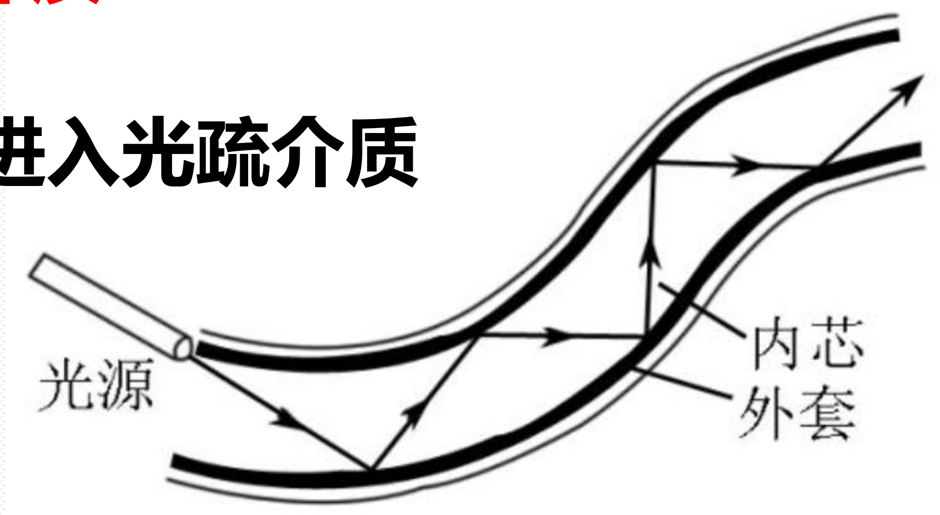
入射波发生**全反射**

波（光）速较大的介质成为**光疏介质**

波（光）速较小的介质成为**光密介质**

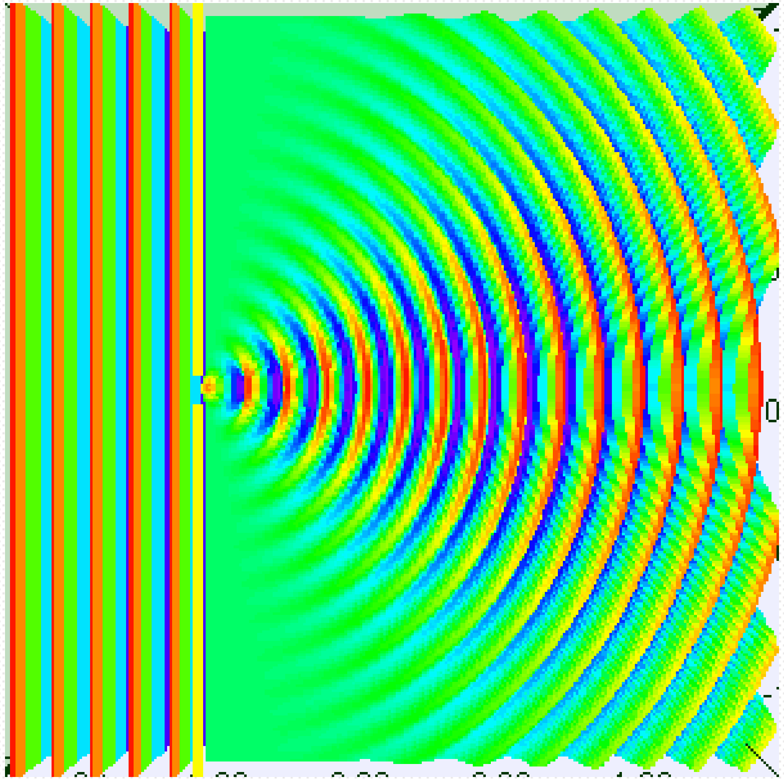
入射波发生**全反射条件是**：从光密介质进入光疏介质

制造光纤



三、惠更斯原理的不足

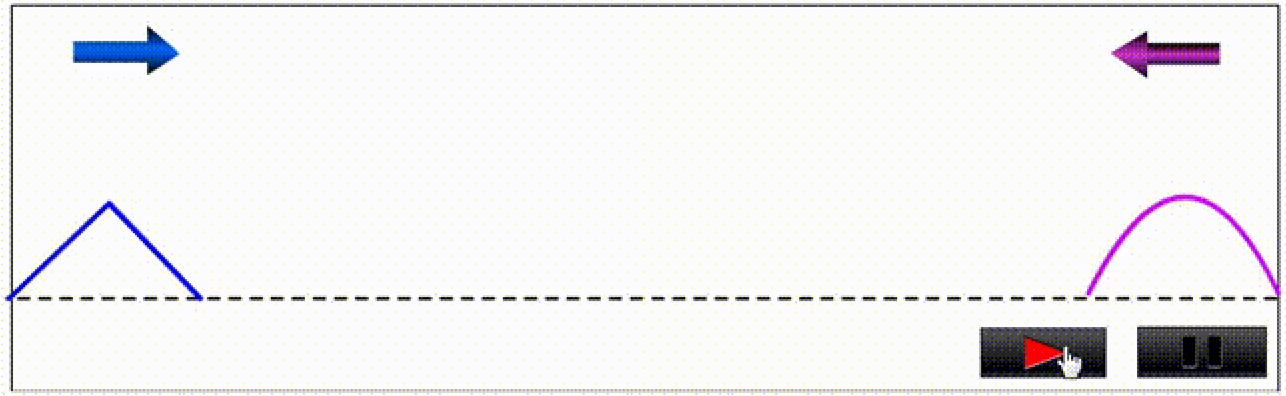
不能说明波的强度分布规律——是一个定性的原理



惠更斯原理很好地解释了波的传播方向问题，但却**没有给出子波强度的分布**，后来**菲涅耳**对惠更斯原理做了重要补充，解决了波的强度分布问题，这就是在光学中有重要应用的**惠更斯-菲涅耳原理**。

§4 波的叠加原理— 干涉、驻波

一、波的独立性原理



1. 介质中同时有几列波时，每列波都将**保持自己原有的特性**(传播方向、振动方向、频率等)，不受其它波的影响 。

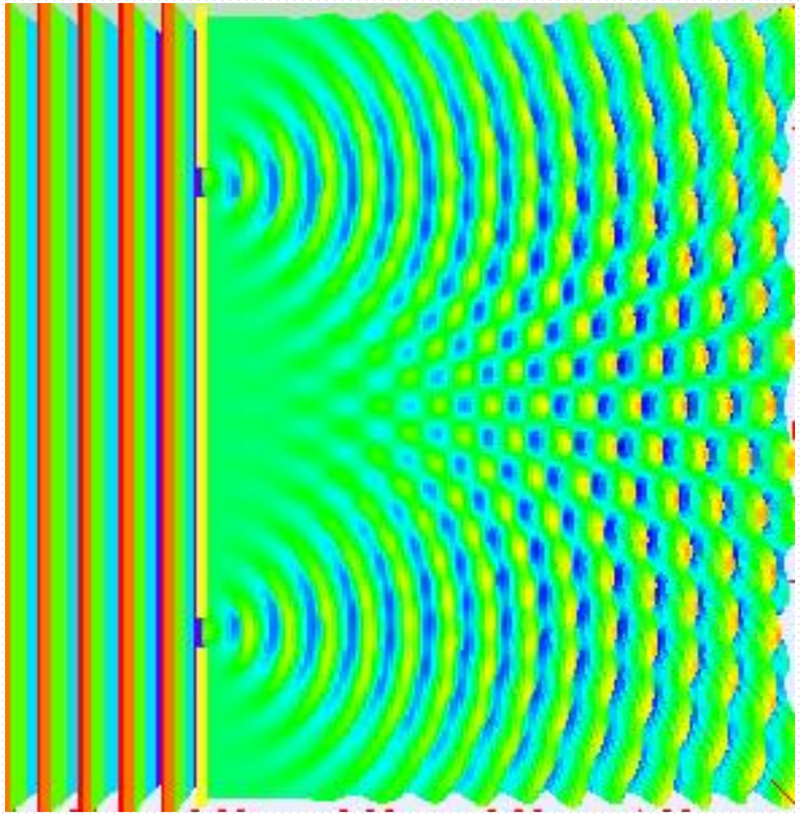
例如：多人同时说话，空气中的各种电磁波

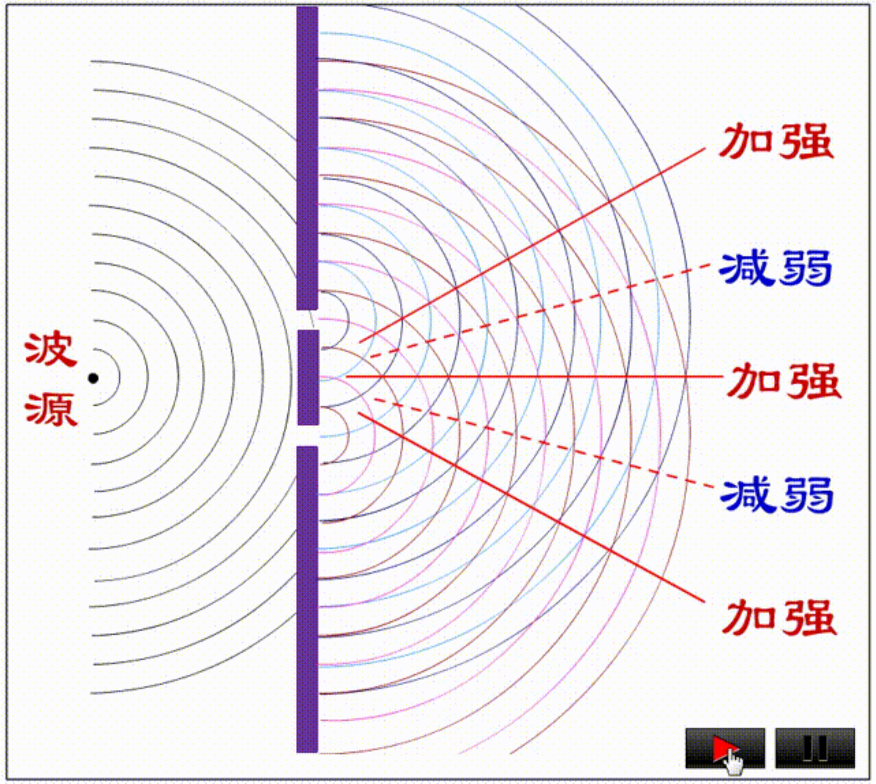
2. 在几列波相遇而互相交叠的区域中，某点的振动是各列波**单独**传播时在该点引起的**振动合成**。

说明 :波的强度过大 叠加原理不成立。

二、波的干涉

干涉现象





1、定义

两列（或几列）波在空间相遇时，由于叠加，在某些地方的合振动始终加强，在另一些地方的合振动始终减弱，且也不随时间改变，因而波的强度在空间呈现稳定的分布。

—波的这种叠加现象称作波的干涉

能产生干涉现象的波叫做相干波。

能产生干涉现象的波源叫做相干波源。

2、相干波条件

相干条件：

① 波的振动频率相同，

② 振动方向相同，

③ 振动相位有恒定的相位差。

干涉现象是波动的又一重要特征

干涉现象对于光学、声学等都非常重要，对近代物理的发展也有重大作用。

3、干涉规律

设有两相干波源S_1、S_2，原点振动方程为：

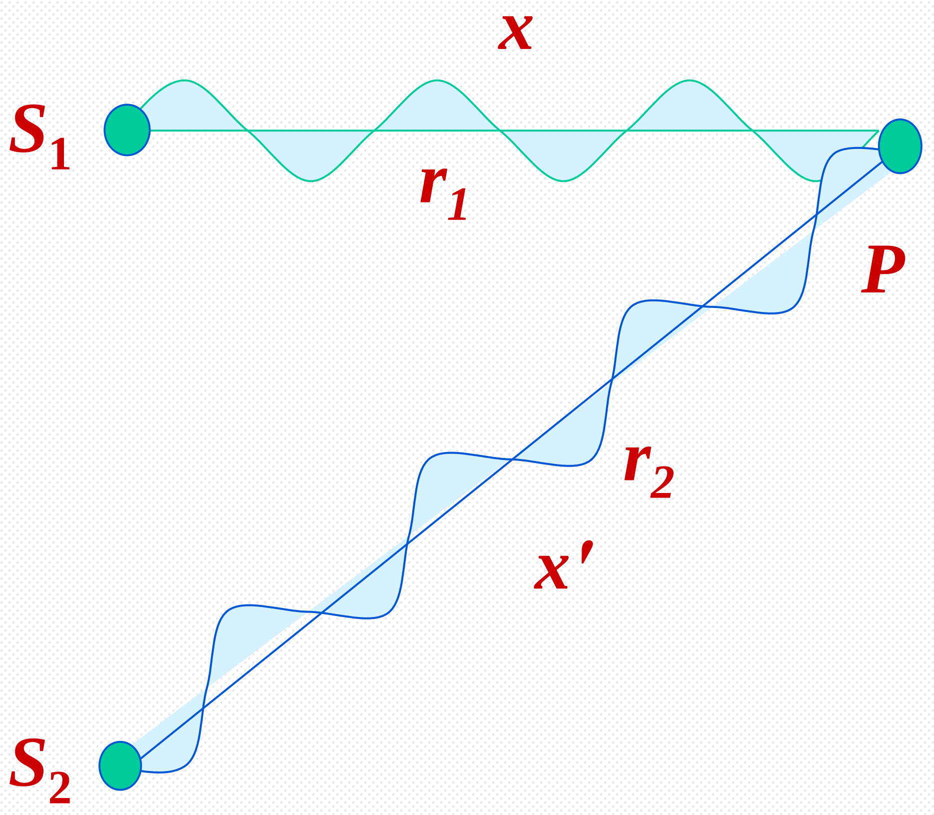
$$y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

在同种介质中，两相干波源的波动方程为：

$$y_1 = A_1\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_1] \qquad y_2 = A_2\cos[\omega(t - \frac{x'}{u}) + \varphi_2]$$

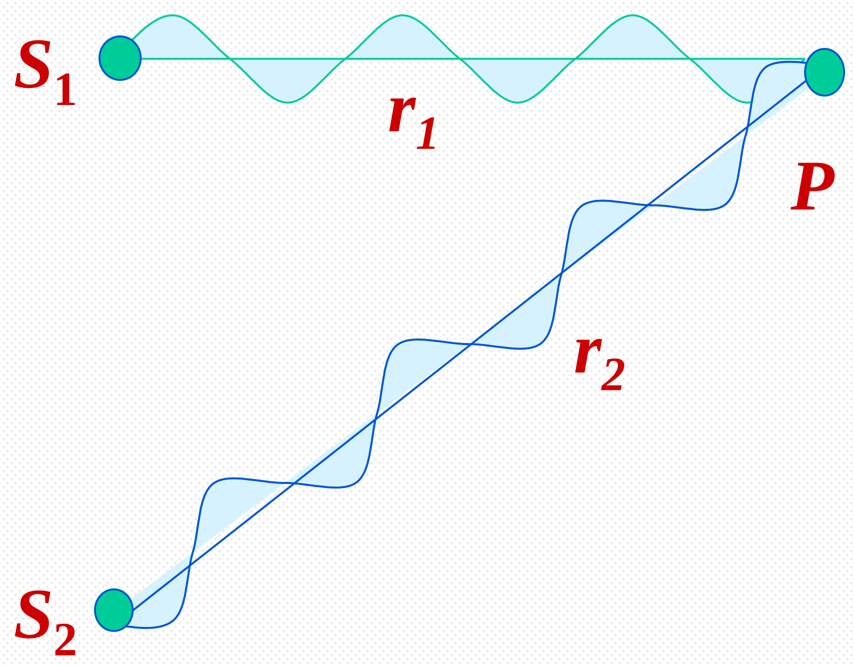
两相干波源到达P点质元的振动方程为：

$$y_{1P} = A_1\cos[\omega(t - \frac{r_1}{u}) + \varphi_1] \qquad y_{2P} = A_2\cos[\omega(t - \frac{r_2}{u}) + \varphi_2]$$



两相干波源到达P点质元的振动方程为：

$$y_{1P}=A_1\cos[\omega(t-\frac{r_1}{u})+\varphi_1] \qquad y_{2P}=A_2\cos[\omega(t-\frac{r_2}{u})+\varphi_2]$$



P点合振动为两同方向同频率简谐振动合成:

$$y_P=y_{1P}+y_{2P}=A\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动为简谐振动

其中：

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}$$

$$\boxed{\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)}$$

合振幅

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

两列波叠加后的P点合振幅由相位差Δφ决定

$$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

两个波源的初位相差

由于波的传播路程不同而产生的相位差

$$\delta=r_2-r_1$$

—**波程差**

（表示由S_1和S_2发出的波到达P时所经历的路程之差）

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$I_1 \propto A_1^2$　$I_2 \propto A_2^2$　$I \propto A^2$

合成强度：$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$

两列波叠加后的强度由相位差Δφ决定

讨论：

① 干涉相长 $\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\pm 2k\pi \quad k=0,1,2,\cdots$

$A=A_{\max}=A_1+A_2$　若 $A_1=A_2$，$I_{\max}=4I_1$

合振幅最大，干涉加强！

② 干涉相消 $\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\pm(2k-1)\pi \quad k=0,1,2,\cdots$

$A=A_{\min}=|A_1-A_2|$　若 $A_1=A_2$，$I_{\min}=0$

合振幅最小，干涉减弱！

特殊情况：

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

对于初相相同的相干波源 $\varphi_2 = \varphi_1$，上述条件可简化为：

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm k\lambda \qquad k = 0,1,2,\cdots$$ **干涉加强**

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm(2k-1)\frac{\lambda}{2} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$ **干涉减弱**

例5 两相干波源S_1和S_2相距$200m$，位相差为0，波速 $u=400\ ms^{-1}$，频率 $\nu=100Hz$，求：S_1和S_2连线之间振幅最大点的位置（距S_1）？

解：已知：$S_2=200m$，$u=400\ ms^{-1}$，$\nu=100Hz$，$\varphi_2-\varphi_1=0$ $\lambda=\dfrac{u}{\nu}=4m$

设P点为S_1和S_2连线上任一点，坐标为 x

P点到波源 S_1和S_2 的距离分别： $|x|$ 和 $|200-x|$

$$\delta=\pm k\lambda \quad \text{干涉加强}$$

$$|x|-|200-x|=\pm k\lambda \qquad k=0,1,2,3,\cdots$$

干涉加强 $\left|x\right| - \left|200 - x\right| = \pm k\lambda$

$\because S_1$和S_2连线之间 $0 \le x \le 200$

$x - (200 - x) = \pm k\lambda$ $x = 100 \pm 2k$ $-50 \le k \le 50$

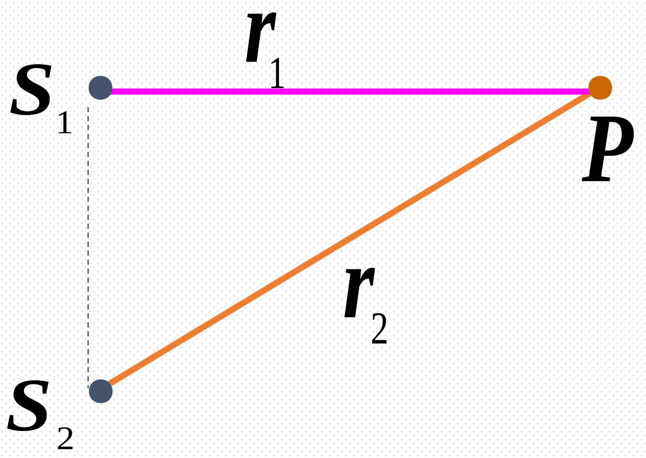
例6 两波源 S_1 和 S_2 相距 3m，其振动表达式分别是

$$y_{10}=5\cos\omega t \qquad y_{20}=5\cos(\omega t+\pi)$$

波长 $\lambda=2m$ ，P点距两波源 S_1 和 S_2 的距离分别为 $4m$ 和 $5m$

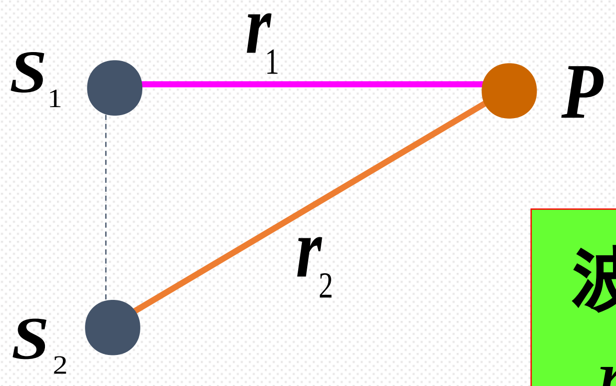
求:P点的振幅?

解：设P点到波源 S_1 和 S_2 的距离分别为 r_1 和 r_2



$$S_1 \rightarrow P \quad y_1 = 5\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1)$$

$$S_2 \rightarrow P \quad y_2 = 5\cos(\omega t + \pi - \frac{2\pi}{\lambda} r_2)$$



波长 $\lambda = 2m$

$r_1 = 4m$

$r_2 = 5m$

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$\varphi_{10} = 0$ $\quad$ $\varphi_{20} = \pi$

$$= \pi - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad = 0$$

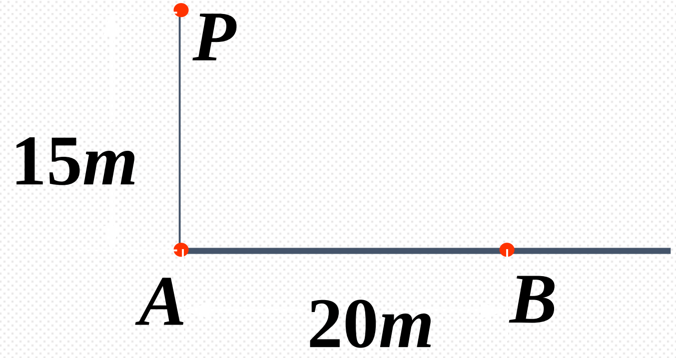
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$A_1 = A_2 = 5m$

$$A = A_1 + A_2 = 10m$$

例7 A, B两点为同一介质两相干波源，其频率皆为100Hz，当点A为波峰时点B为波谷，设波速为10m.s^{-1}。

试写出A, B发出的两列波传到点P时干涉情况



解：由图可知：AP=15m，AB=20m，故

$$BP=\sqrt{AP^2+AB^2}=\sqrt{(15)^2+(20)^2}=25\text{m}$$

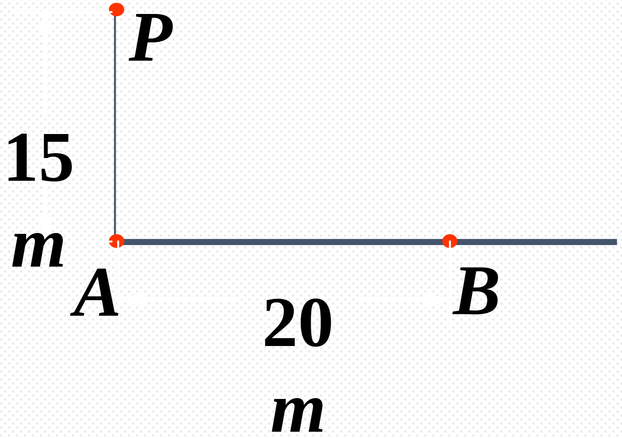
又已知ν=100Hz，u=10m.s^{-1}得：$\lambda=\dfrac{u}{\nu}=\dfrac{10}{100}=0.10\text{m}$

设A的相位较B超前，则 $\varphi_A-\varphi_B=\pi$

根据相位差和波程差的关系有：

$$\boxed{\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-\frac{2\pi}{\lambda}(r_B-r_A)}=-\pi-\frac{2\pi}{0.10}(25-15)=-201\pi$$

设A的相位较B超前, 则$\varphi_A - \varphi_B = \pi$



根据相位差和波程差的关系有: $\Delta\varphi = -201\pi$

$$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi \quad \text{干涉相消}$$

所以，两列波干涉相消，振幅的最小

如若介质不吸收波的能量, 两波振幅相同, 则合振幅： $A=|A_1-A_2|=0$

故在点 P 处, 因两波干涉减弱而不发生振动。

或因两波干涉减弱而静止。

惠更斯原理 (1) 子波源 (2) 包络面

解释两介质表面的折射与反射

波的叠加原理

波的独立性原理

波的干涉：波的强度在空间呈现稳定的分布

相干条件：

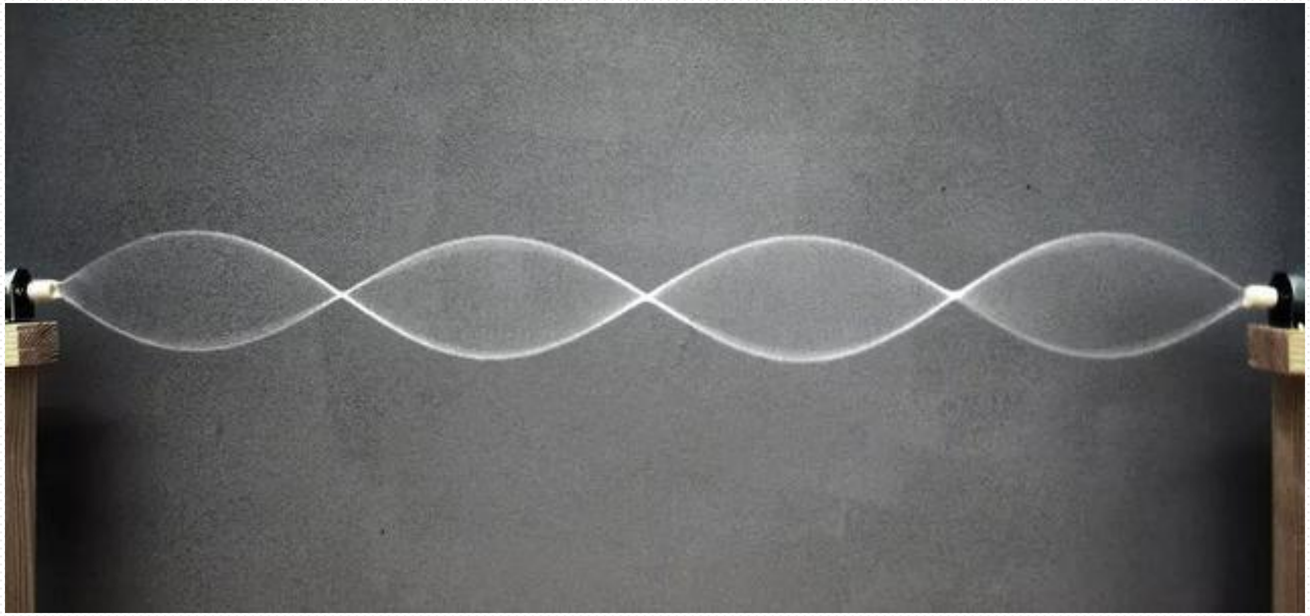
①波的振动频率相同②振动方向相同③振动相位有恒定的相位差。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

三、驻波（干涉特例）

驻波现象



有的点始终不动；

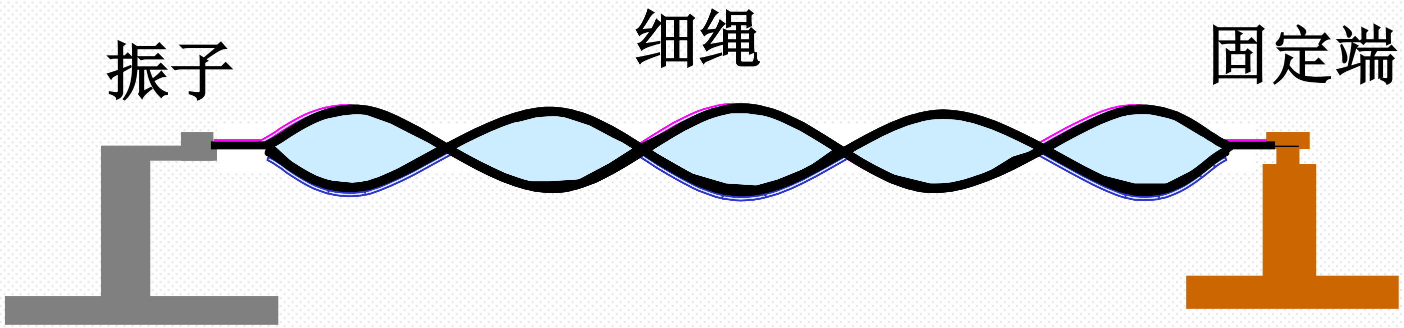
有的点振幅最大

其余的点振幅在0与最大值之间。

波形只变化不向前传 —— 故称驻波

1、驻波形成

两列振幅相同的相干波，沿相反方向传播叠加就形成驻波。



1）当振子振动时，绳上产生波动，向右传播，

2）到达固定端时，在固定端发生反射，产生反射波，反射波向左传播；

3）入射波和反射波叠加——形成驻波

设有同振幅、同位相、同频率的两列平面简谐波

特例：$\varphi_{10}=\varphi_{20}=0$

正向波 $y_1=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$

反向波 $y_2=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x)$

合成波： $y=y_1+y_2=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)+A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x)$

利用和差化积

$$\boxed{y=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t}$$

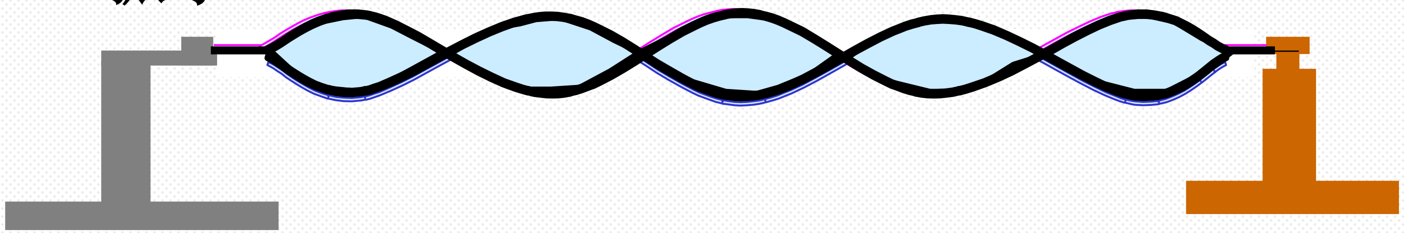
——驻波波函数

各点作频率相同、振幅不同的谐振动。

2、驻波特征

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$$

①振幅特征（波腹、波节）



振幅为 $\left|2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\right|$ （与位置有关，与时间无关）

波腹 当 $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 1$ 时，$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm k\pi$ $x = \pm k\frac{\lambda}{2}$

$$k = 0,1,2,\cdots \quad x = 0,\pm\frac{\lambda}{2},\pm\lambda\cdots$$

波腹位置

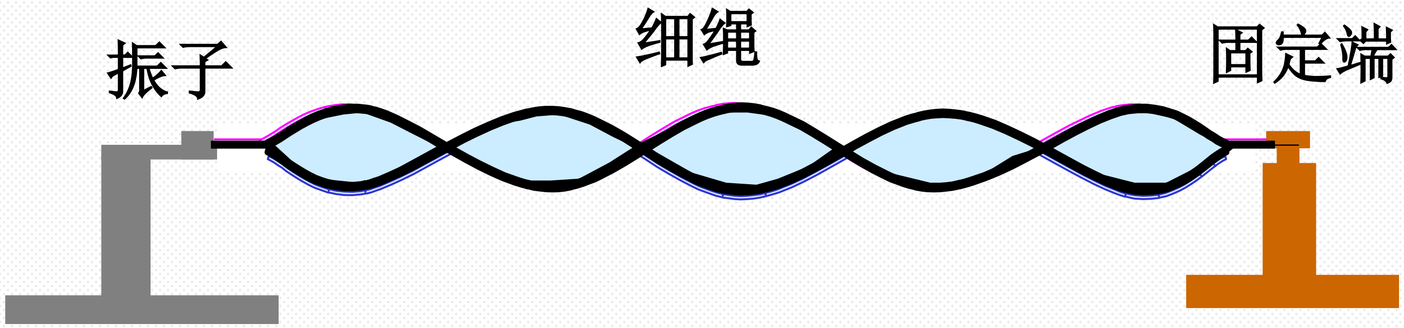
振幅为 $\left|2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\right|$ （与位置有关，与时间无关）

波节 当 $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0$ 时， $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$

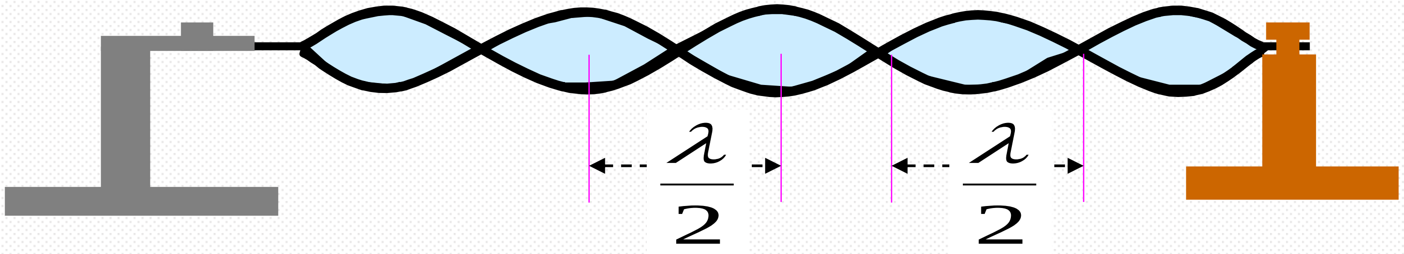
$$x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$k = 0,1,2,\cdots \quad x = \pm\frac{\lambda}{4}, \pm\frac{3\lambda}{4}, \cdots$$

波节位置



振幅 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$



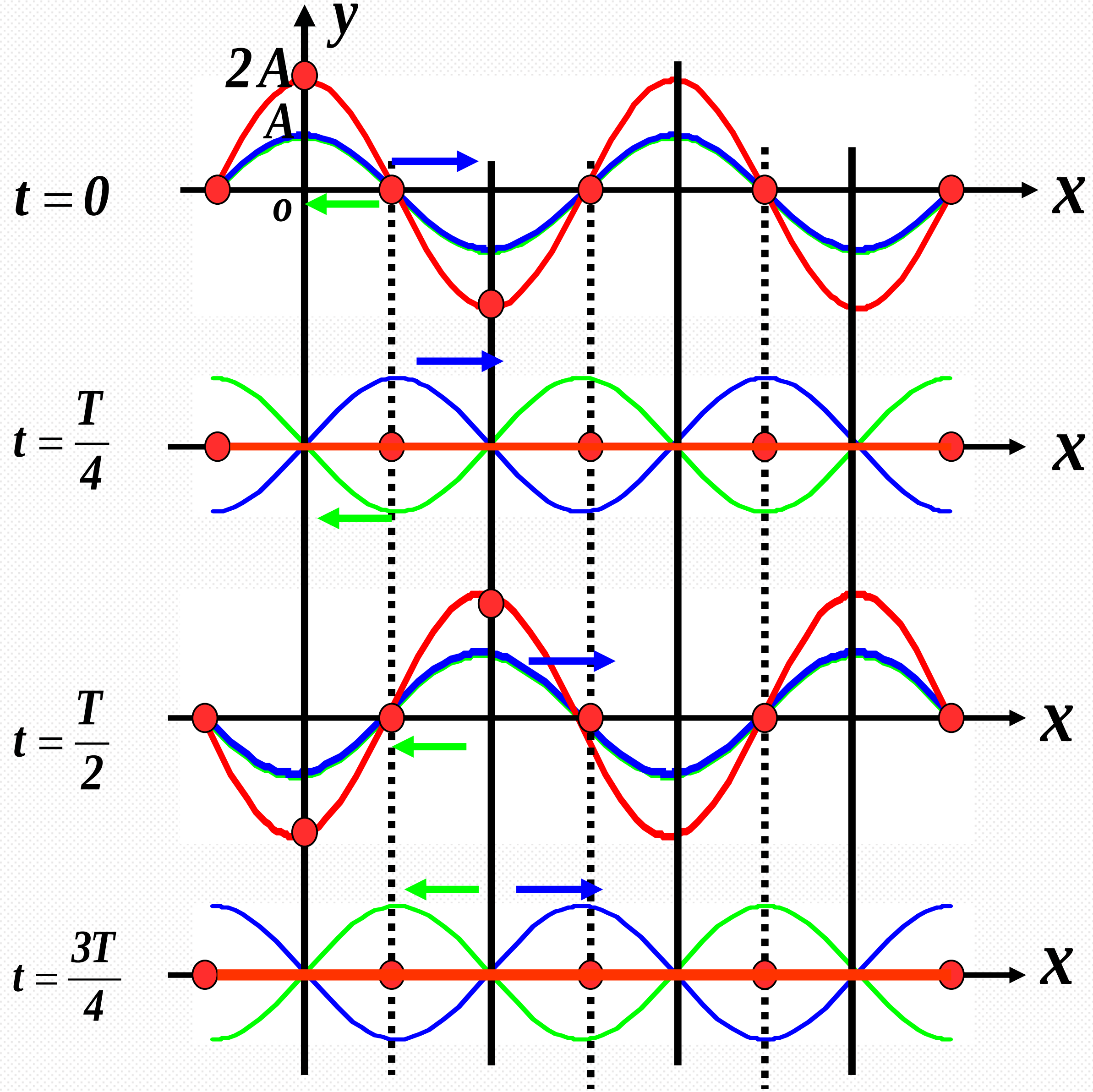
波腹的位置 $\boxed{x = k\frac{\lambda}{2}}$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

波节的位置 $\boxed{x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}}$

◆相邻波腹(或波节)的距离： $\boxed{x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}}$

◆相邻波腹与波节的距离： $\frac{\lambda}{4}$



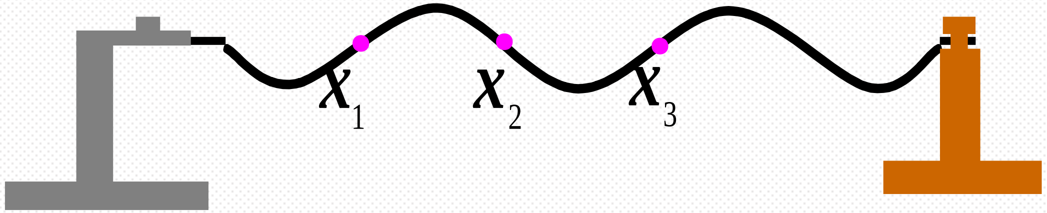
最大振幅为 $2A$

相邻波节距离为 $\frac{\lambda}{2}$

相邻波腹距离为 $\frac{\lambda}{2}$

②相位特征

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$$



振动因子 $\boxed{\cos\omega t}$ 表明各质元以角频率ω按余弦规律振动(简谐振动)

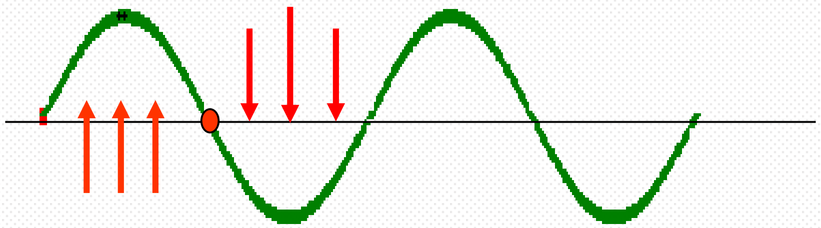
相位中没有x坐标，没有相位的传播

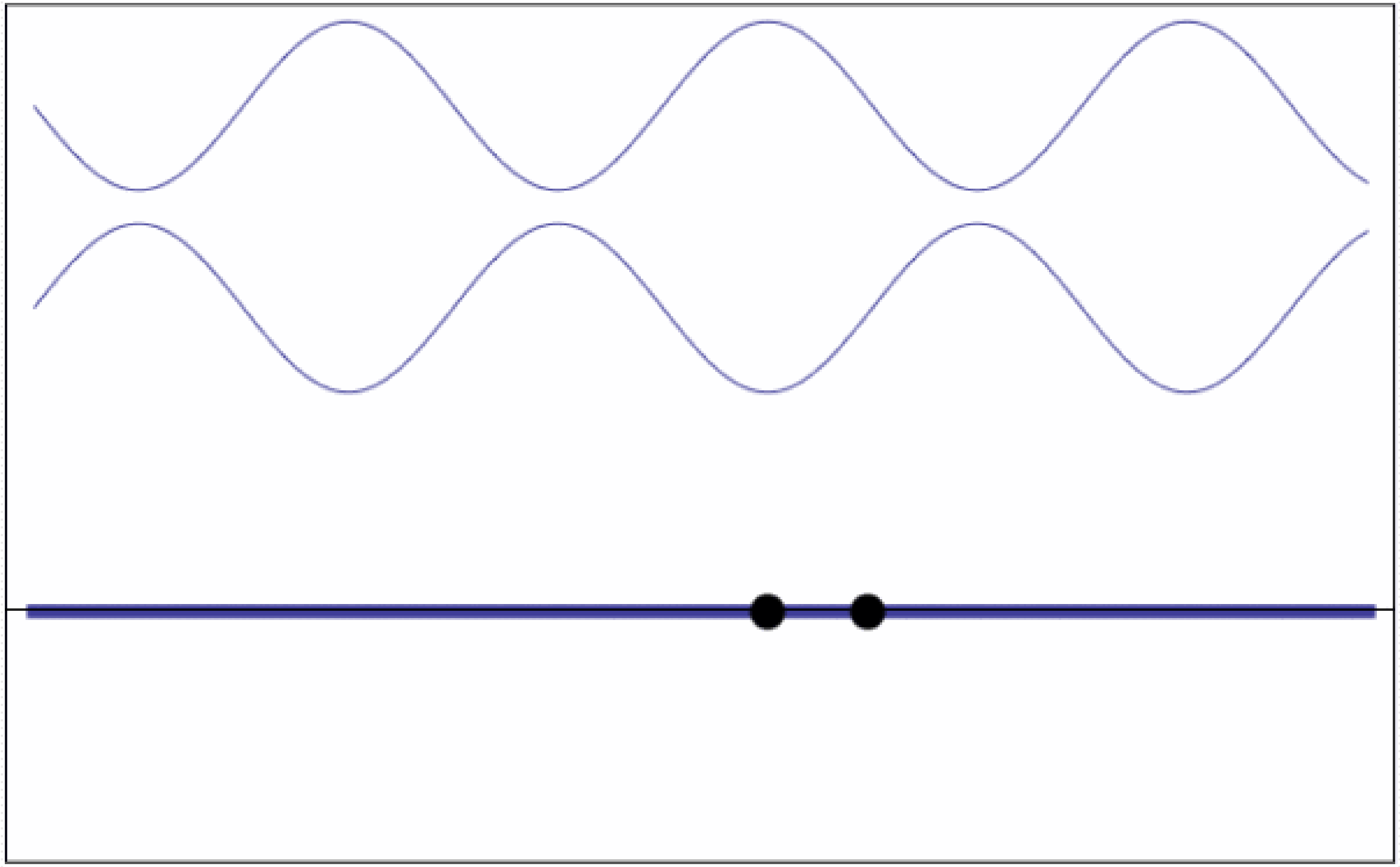
驻波各点相位由$2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}$的正负决定

$\cos\frac{2\pi}{\lambda}x > 0$ 相位为：ωt

$\cos\frac{2\pi}{\lambda}x < 0$ 相位为：ωt + π

波节之间相位相同,波节两边相位相反





③能量特征*

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

动能密度 $$\varepsilon_k = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = 2\rho A^2\omega^2\cos^2 kx\sin^2\omega t$$

势能密度 $$\varepsilon_P = \frac{1}{2}G\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2\rho A^2\omega^2\sin^2 kx\cos^2\omega t$$

机械能密度 $$\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_P = 2\rho A^2\omega^2(\cos^2 kx\sin^2\omega t + \sin^2 kx\cos^2\omega t)$$

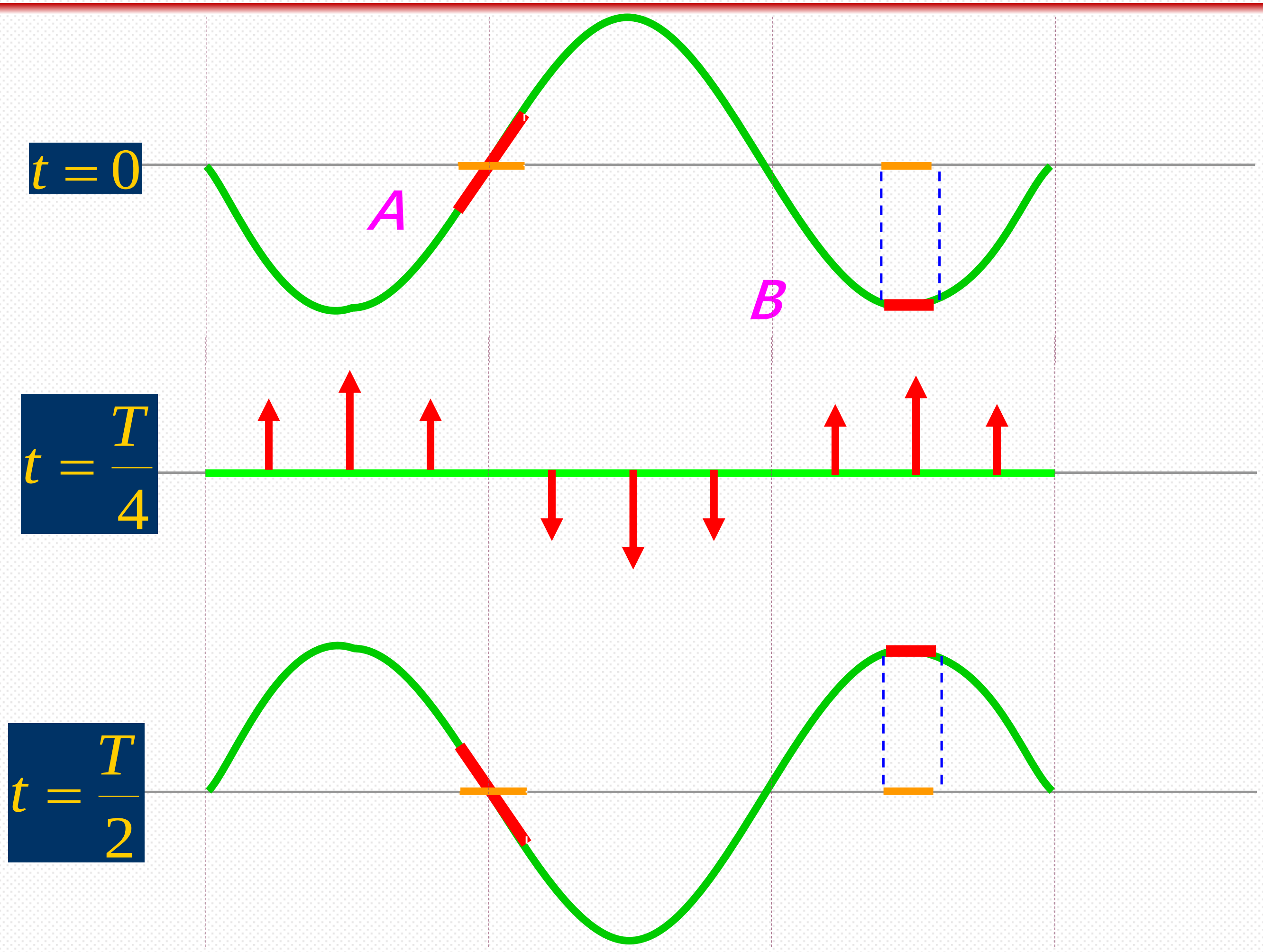
相邻两波节之间能量积分 $$E = \int_{(2n-1)\frac{\lambda}{4}}^{(2n+1)\frac{\lambda}{4}} \varepsilon\, dx = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\lambda$$

机械能密度 $\varepsilon = 2\rho A^2\omega^2(\cos^2 kx \sin^2 \omega t + \sin^2 kx \cos^2 \omega t)$

相邻两波节之间能量积分 $E = \dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2\lambda$

说明：

- 质元能量密度随时间变化，机械能不守恒
- 相邻两波节之间的能量总和不随时间变化，是守恒量



质元在最大位移处、静止；能量以势能形式存在，并集中分布在**波节**附近

质元伸长量为0，能量以动能形式存在，并集中分布在**波腹**附近

各质元静止，能量以势能形式存在，并集中分布在**波节**附近

驻波中能量不定向传播，而是在波腹与波节之间转化

驻波特征：

（1）波形驻定　　振幅：各处不等大，出现了波腹和波节

波腹处　$|\cos\frac{x}{\lambda}2\pi|=1 \to x=\pm k\frac{\lambda}{2}, \quad k=0,1,2\cdots$

波节处　$|\cos\frac{x}{\lambda}2\pi|=0 \to x=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$

（2）相位驻定：相位中没有 x 坐标，相位的不传播

同段同向，邻段反向。　——波形的不传播

（3）能量驻定：波腹波节间转化　$E=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\lambda$　——能量不传播

例8 已知一平面简谐波沿ox轴正方向传播，波的表达式为$y = A\cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi x}{\lambda})$，而另一平面简谐波沿$ox$轴负方向传播，波的表达式为$y = A\cos(2\pi\nu t + \frac{2\pi x}{\lambda})$，求：(1) 两波叠加形成的驻波方程；(2) $x=\lambda/6$ 处介质质元的振动方程；

(3) 叠加后振幅始终为零的那些点的位置。

提示：$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

解：

(1) $$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(2\pi x/\lambda)\cos(2\pi\nu t)$$

(2) $$y = 2A\cos\left(\frac{2\pi\cdot\frac{\lambda}{6}}{\lambda}\right)\cos(2\pi\nu t) = A\cos(2\pi\nu t)$$

(3)波节 $2\pi x/\lambda = \frac{2n+1}{2}\pi$ $x = \frac{2n+1}{4}\lambda$ $n = 0，\pm 1，\pm 2，\pm 3, \ldots$

四、波在界面的反射和透射

入射波在介质边界会有反射和透射 ，反射波和透射波的频率不改变

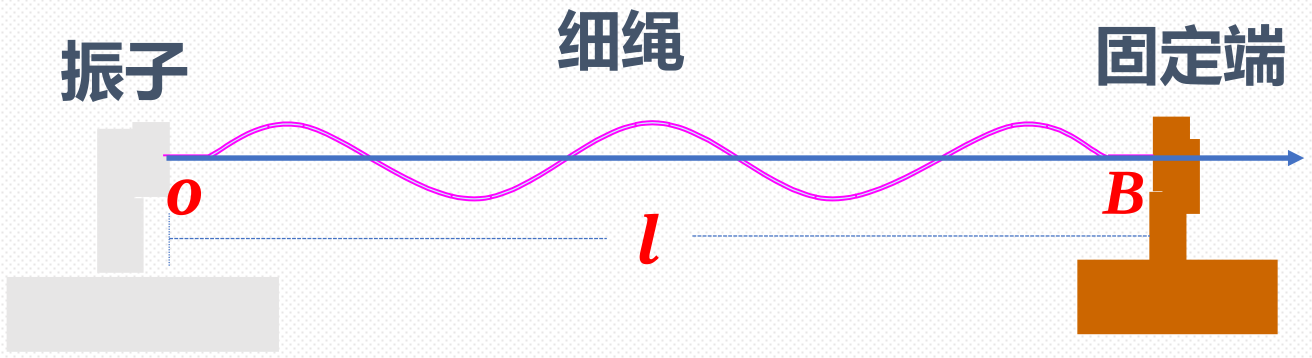
但反射波和透射波的振幅会改变

这里只考虑全反射的情况 ，反射波和入射波的振幅相等

1、波在固定端反射

O点振动方程

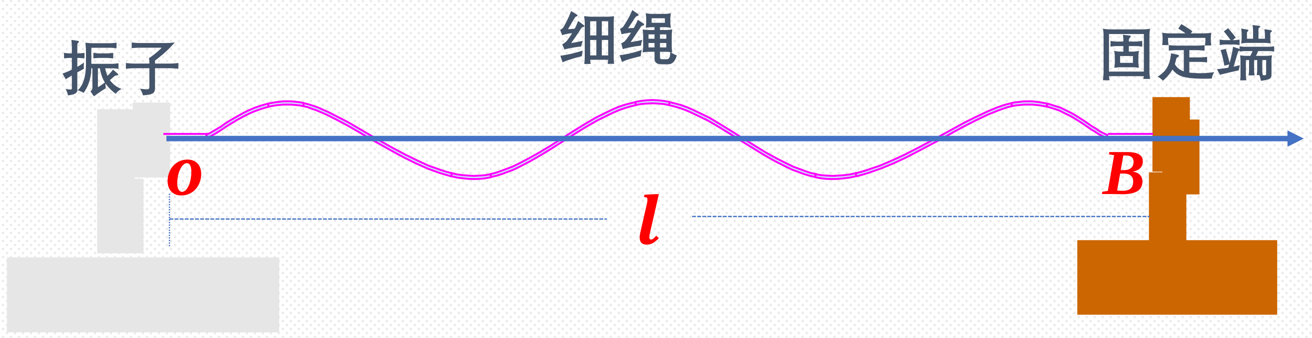
$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$



入射波波函数 $$y_i = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

B点振动方程

$$y_{iB} = A\cos[\omega(t - \frac{l}{u}) + \varphi]$$



设，反射波在B点的振动方程为 y_{rB}

因为B点为固定端，所以,合振动为0 即、 $0 = y_{iB} + y_{rB}$

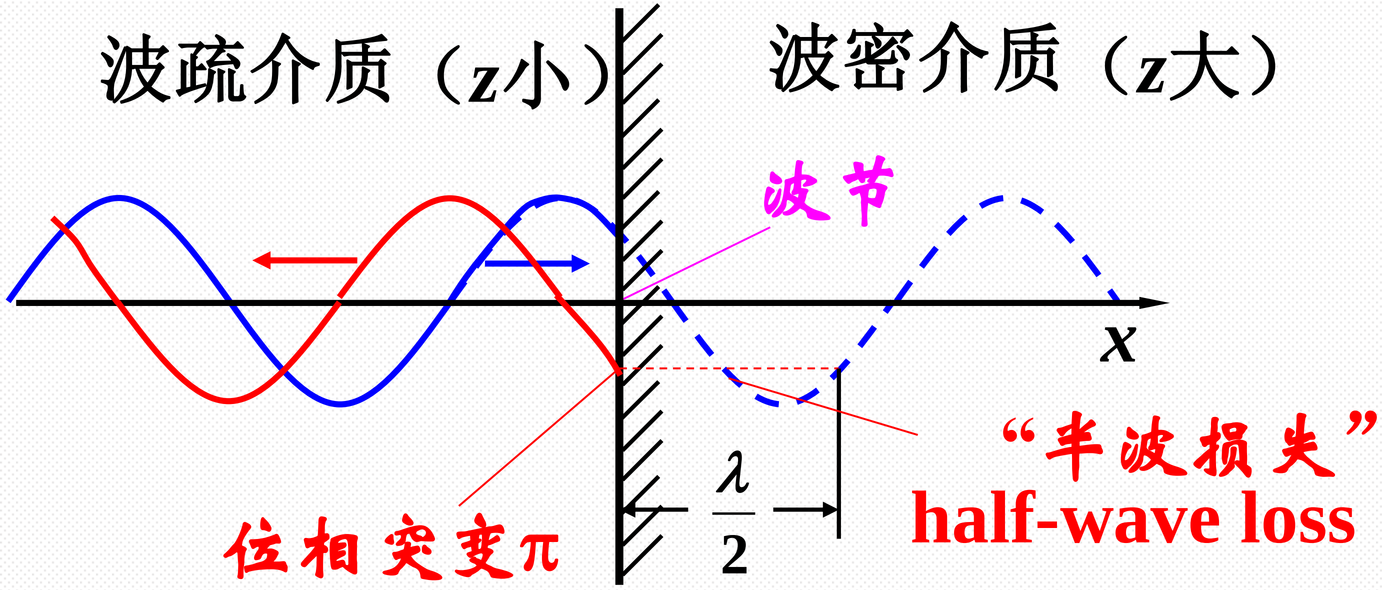
$$y_{rB} = -y_{iB} = -A\cos[\omega(t - \frac{l}{u}) + \varphi] = A\cos[\omega(t - \frac{l}{u}) + \varphi - \pi]$$

即、B点处的反射波与入射波相差为π，相当于半个波长的距离

所以，反射波相当于丢掉半个波长后再反射回来， 称为半波损失

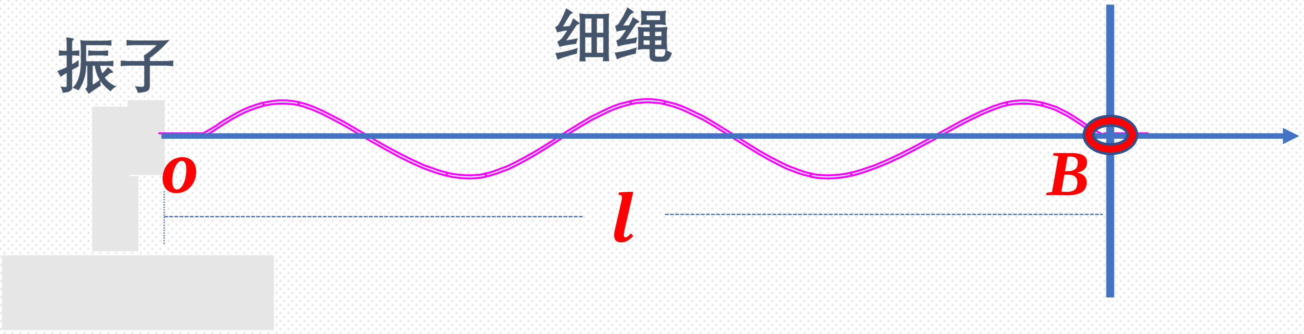
半波损失

波阻 $z = \rho u$ **若** $z_1 < z_2$ **介质1称为波疏介质，介质2称为波密介质**



垂直入射时，波疏介质到波密介质的反射，反射波有半波损失

2、波在自由端反射



入射波波函数

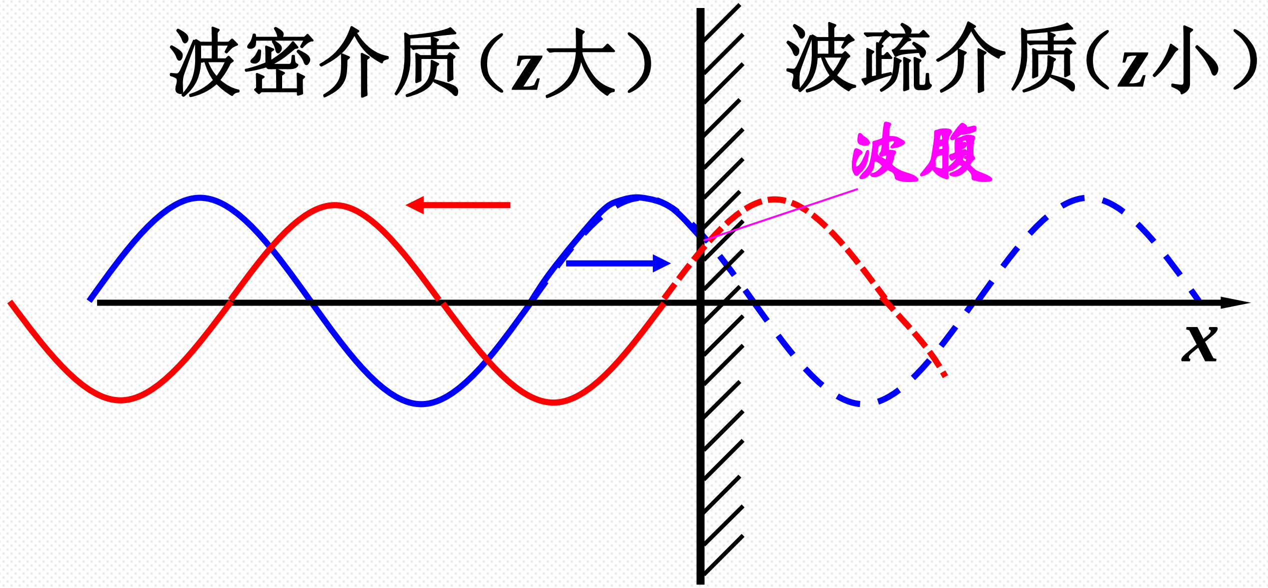
$$y_i = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

B点振动方程 $$y_{iB} = A\cos[\omega(t - \frac{l}{u}) + \varphi]$$

实验发现：自由端B点的振幅为2A 说明，B点有反射波存在

反射波在B的振动相位与入射波相同 $$y_{rB} = A\cos[\omega(t - \frac{l}{u}) + \varphi]$$

即没有半波损失



垂直入射时，波密介质到波疏介质的反射，反射波没有半波损失

半波损失

①波疏介质到波密介质的反射，反射波有半波损失

界面上总是波节

②波密介质到波疏介质的反射，反射波没有半波损失

界面上总是波腹

③透射波都没有半波损失

例9 设入射波的表达式为 $y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$

在 $x = 0$ 处发生反射，反射点为一固定端，且反射波能量不衰减。

求：

(1) 反射波的表达式；

(2) 合成波的表达式；

(3) 波腹、波节的位置。

分析：

$$\boxed{y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})}$$

(1) 入射波在 $x = 0$ 处引起的振动：

$$y_{10} = A\cos\frac{2\pi}{T}t$$

由于反射有半波损失，故反射波在 $x = 0$ 处引起的振动为

$$y_{20} = A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\pi)$$

反射波沿 x 轴正向传播，故其波函数为：

$$y_2 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\pi)$$

(2) 合成的驻波为：

$$y = y_1 + y_2 = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \pi\right)$$

$$= 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

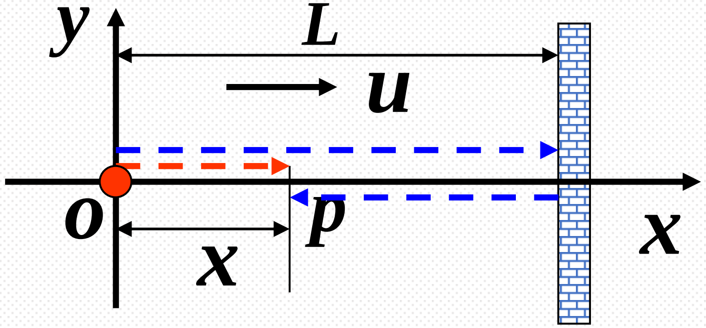
(3) 波腹：

$$\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}k + \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

波节：

$$\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}k, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

例10 **已知：波源$y_0 = A\cos\omega t$，在$L = {}^{5\lambda}/_{2}$ 处有一波密媒质反射壁，求：（1）$x>0$入射波、反射波以及合成波方程并讨论干涉情况;（2）$x<0$入射波、反射波以及合成波方程并讨论干涉情况。**



解：(1) $y_{入} = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$

$$y_{反} = A\cos[\omega(t - \frac{2L - x}{u}) - \pi]$$

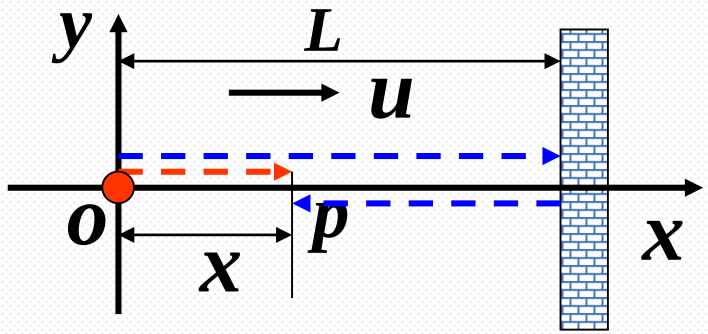
有半波损失$\pm\pi$

$$= A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \frac{2\pi}{\lambda}2\frac{5\lambda}{2} - \pi] = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) - \pi]$$

$$y_{合} = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

驻波方程

$$y_{合} = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



波腹： $\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2} = \pm k\pi \qquad x = (\pm k + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$

x在 $0 - \frac{5\lambda}{2}$ 之间 $\quad k = 0,1,2,3,4$

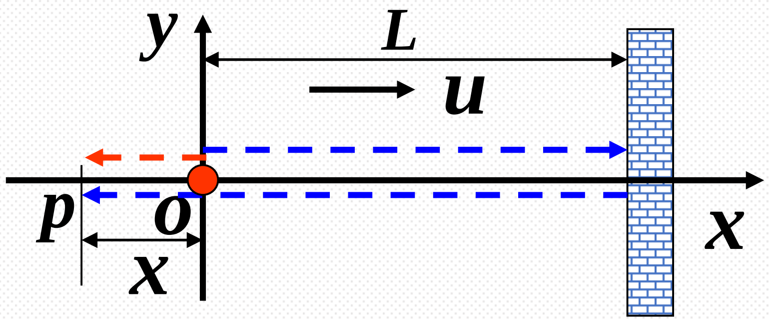
$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \frac{9\lambda}{4}$$

波节： $\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \pm k\frac{\lambda}{2}$

$$k = 0,1,2,3,4,5 \qquad x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \frac{5\lambda}{2}$$

（2）$X<0$入射波、反射波、及合成波方程？

并讨论干涉情况



$$y_{入}=A\cos\omega(t+\frac{x}{u})$$

$$y_{反}=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})-\pi]$$

干涉静止

$$y_{合}=y_{入}+y_{反}=2A\cos(-\frac{\pi}{2})\underline{\cos[\omega(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]}=0$$

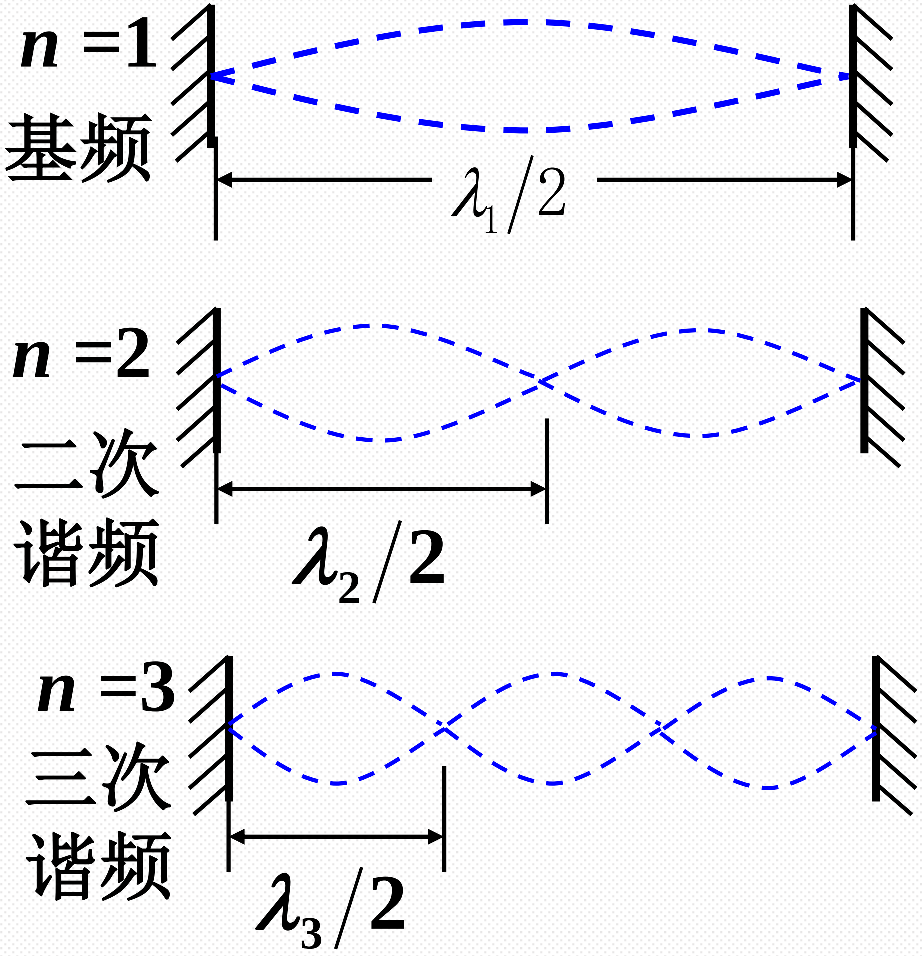
行波方程

若L为其它值，则 $y_{合}$ 可不为0，$x<0$合成为行波方程.

五、简正模式

波在一定边界内传播时就会形成各种驻波。

如两端固定的弦：

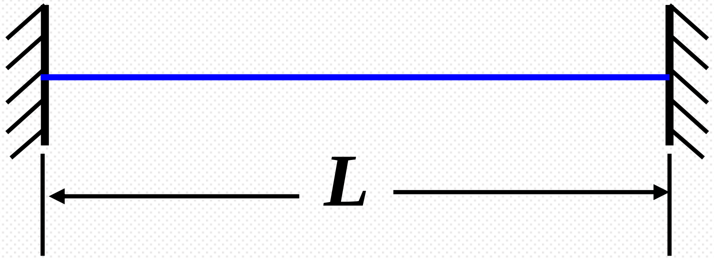


$$n\frac{\lambda_n}{2}=L$$

$$n=1,2,3\cdots$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

两端固定的弦， **形成驻波必须满足以下条件：**

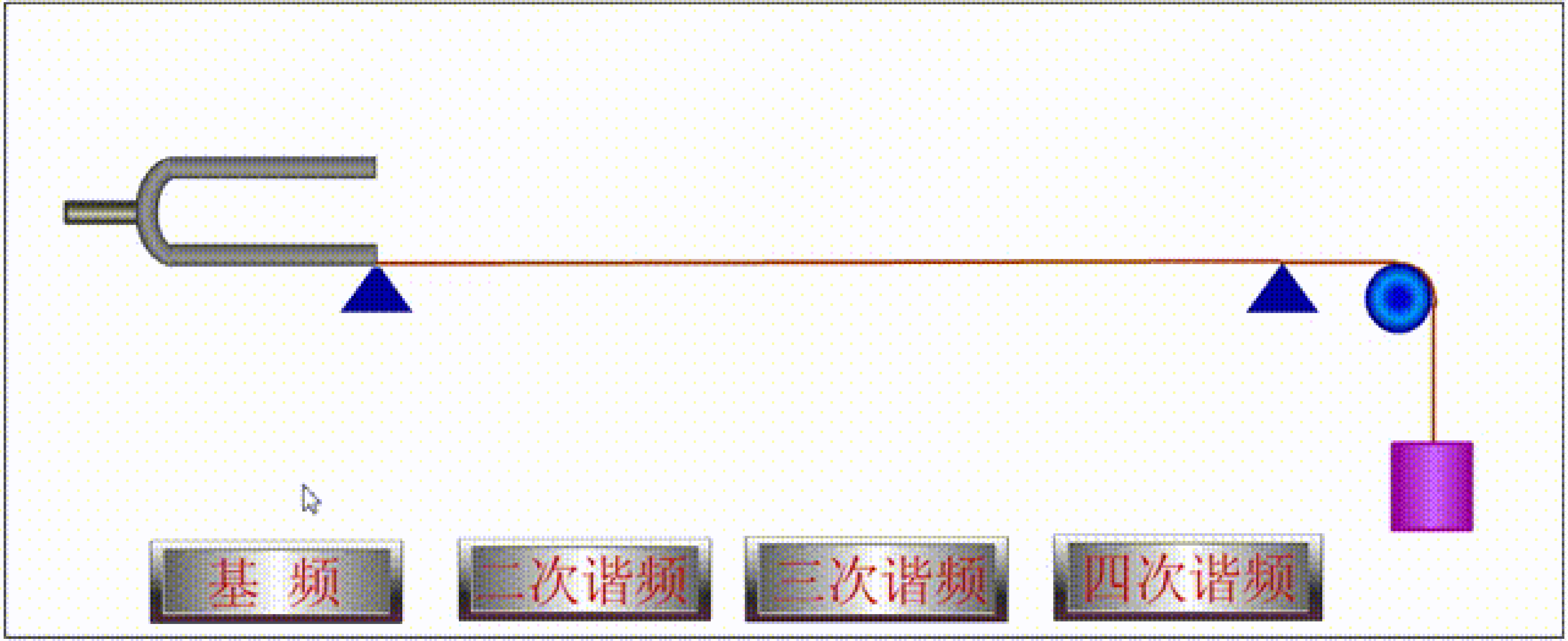


$$n\frac{\lambda_n}{2} = L，\quad n = 1,2,3\cdots$$

或 $$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L}$$ —系统的**固有频率**

每种可能产生驻波的频率称为简正频率。


基 频
二次谐频
三次谐频
四次谐频

边界情况不同，简正模式也不同：

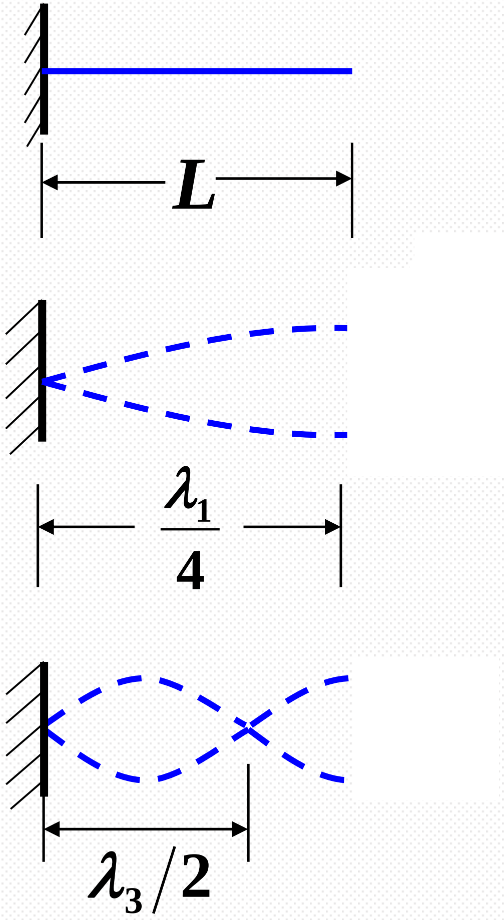
$L = n\dfrac{\lambda_n}{4}$ $n=1,3\ldots$

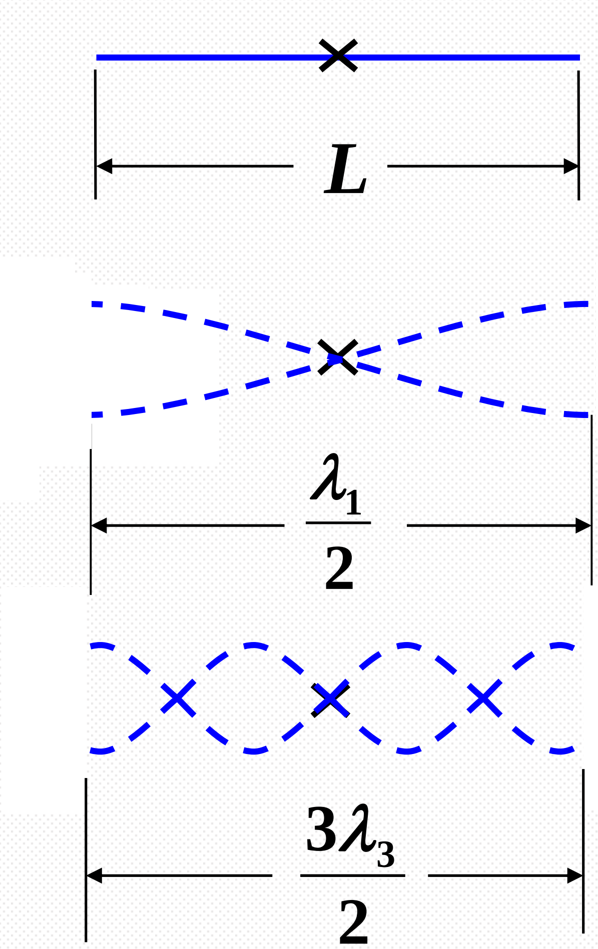
基频 $n=1$

ν_1

三次谐频 $n=3$

ν_3





$L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$

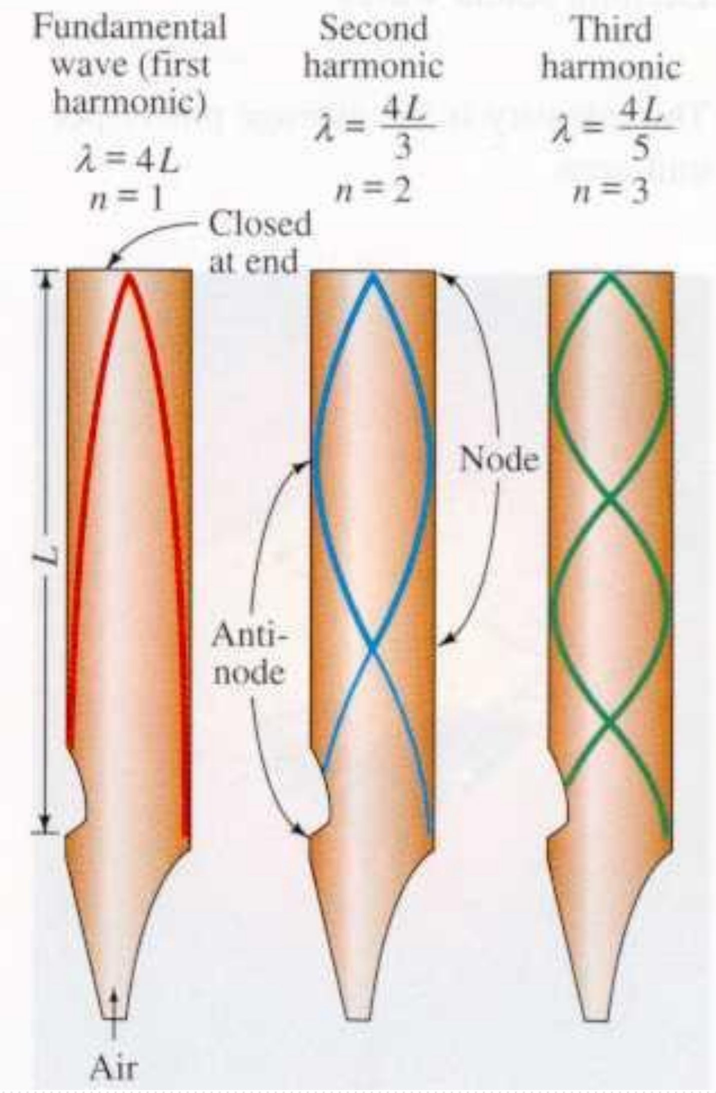
$n=1,3\ldots$

基频 $n=1$

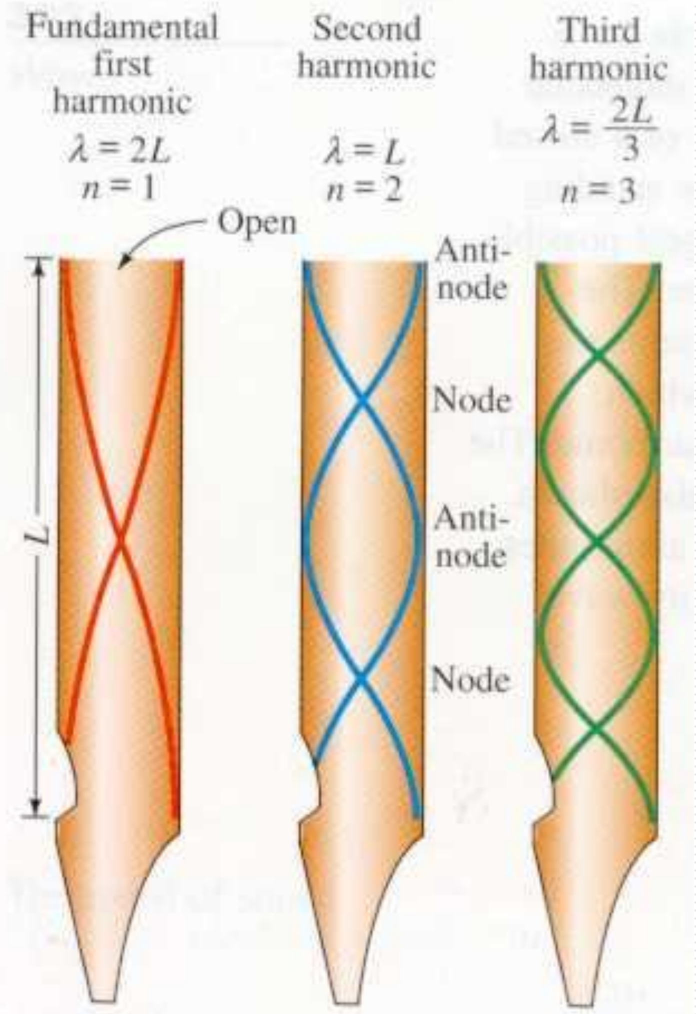
ν_1

三次谐频 $n=3$

ν_3

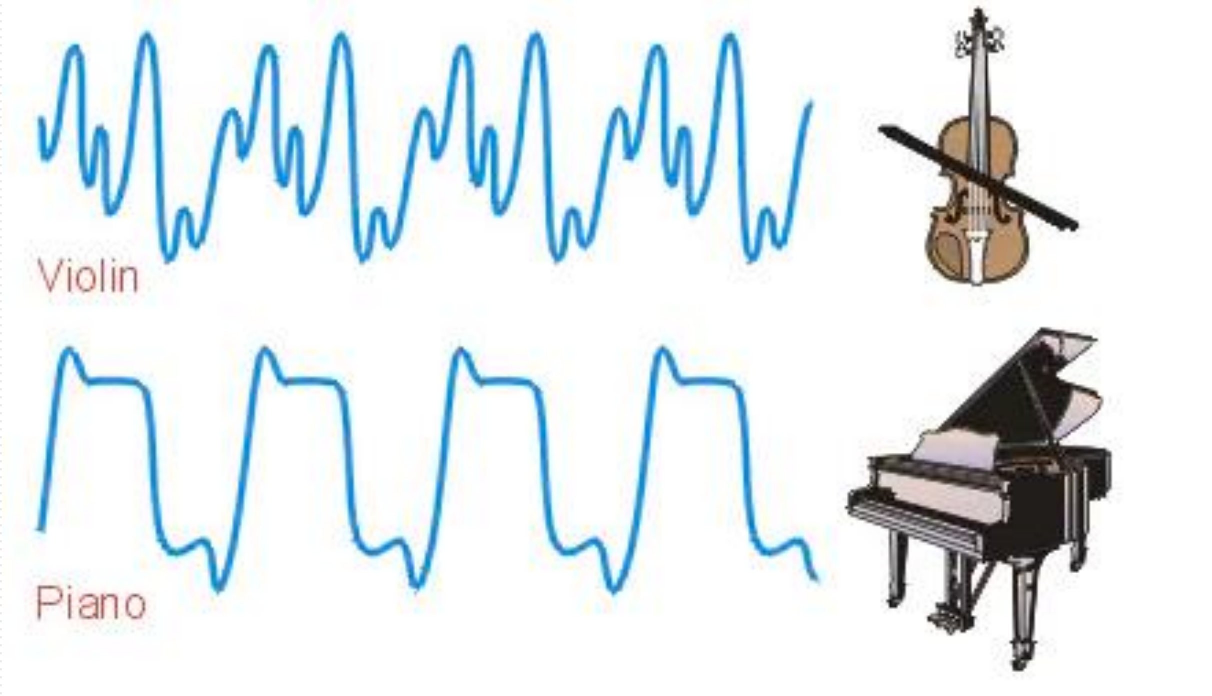


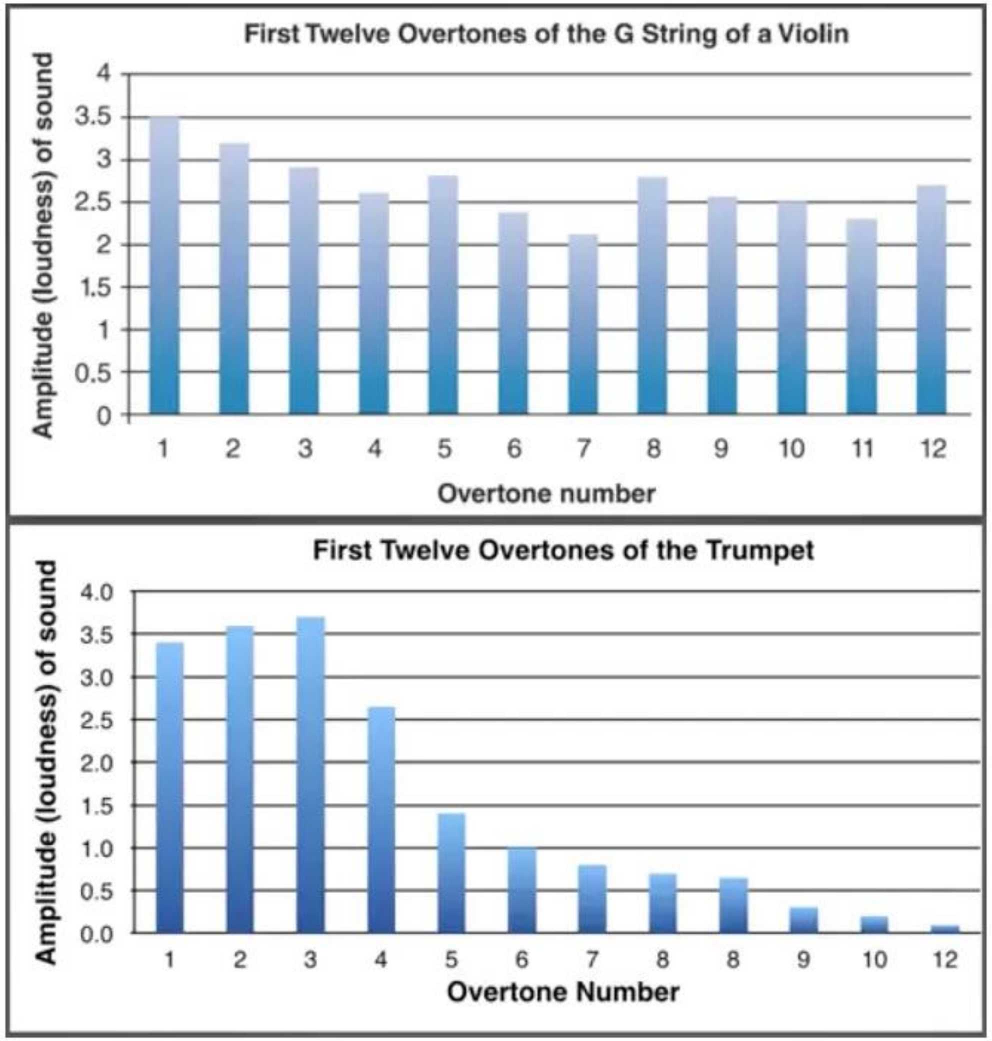
末端封闭的笛中的驻波



末端开放的笛中的驻波

乐器的音色


Violin
Piano

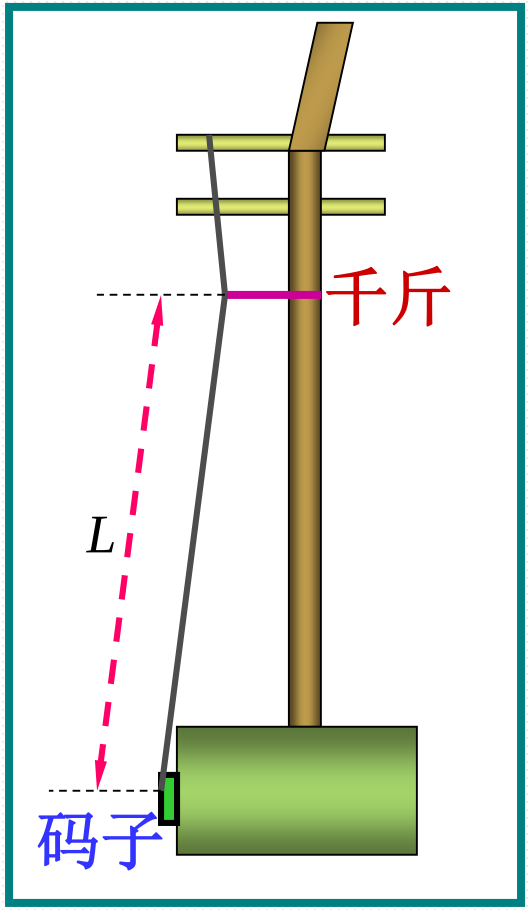

First Twelve Overtones of the G String of a Violin
Amplitude (loudness) of sound
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Overtone number
First Twelve Overtones of the Trumpet
Amplitude (loudness) of sound
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
1 2 3 4 5 6 7 8 8 9 10 12
Overtone Number

一般地说，对于一个驻波体系存在无限多个本征频率和简正模式。在这一体系中形成的任何实际的振动，都可以看成是各种简正模式的线性叠加，其中每一种简正模式的位相和所占比例的大小，则由初始扰动的性质决定。

当周期性驱动力的频率与驻波体系的某一简正频率相同时，就会使该频率驻波的振幅变得最大，这种现象也称为共振。

利用共鸣方法可以测量空气中的声速?

例11 如图二胡弦长 $L=0.3\,\text{m}$，张力 $F=9.4\text{N}$。密度 $\rho_l=3.8\times10^{-4}\ \text{kg/m}$ 。求弦所发的声音的**基频**和**谐频**



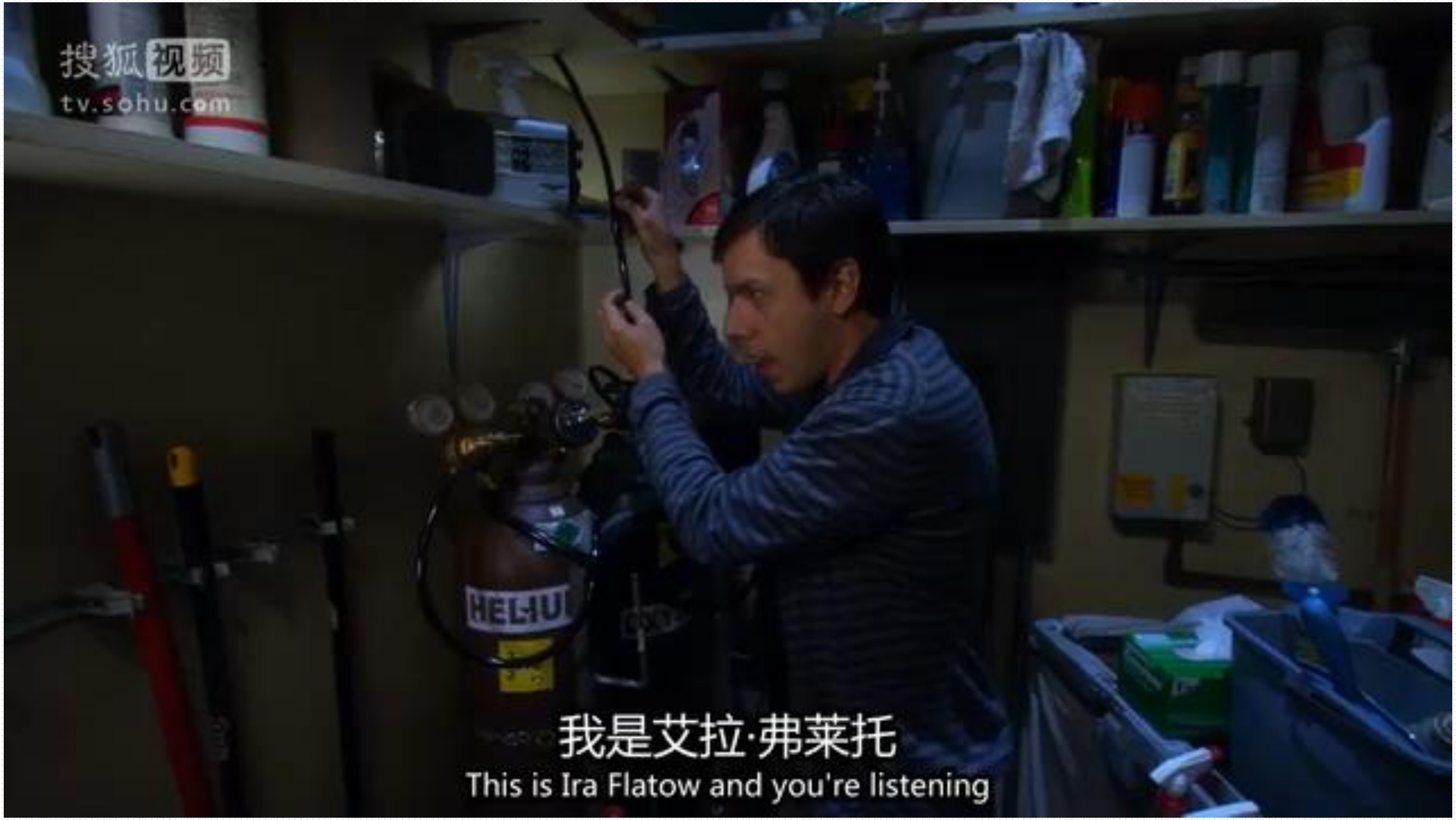
解：弦两端为固定点，是波节

$$L=n\frac{\lambda}{2}\quad n=1,2,\cdots$$

频率 $\nu=\dfrac{u}{\lambda}=\dfrac{nu}{2L}$ 波速 $u=\sqrt{\dfrac{F}{\rho_l}}$

基频 $n=1\quad \nu_1=\dfrac{1}{2L}u=262\ \text{Hz}$

谐频 $n>1\quad \nu_n=\dfrac{n}{2L}u$


搜狐视频
tv.sohu.com
HELIU
我是艾拉·弗莱托
This is Ira Flatow and you're listening

声波

声波频率范围：

在 20Hz ～20000*Hz* 之间，就能引起人的听觉。称为声波。

频率高于 20000*Hz* 的机械波叫做超声波;

频率低于 20*Hz* 的机械波叫做次声波;

当然 20*Hz* 和 20000*Hz* 并不是严格的界限，频率较高的可闻声波已具有超声波的某些特性


PPS tv
Argonne
NATIONAL LABORA
觉醒字幕组
AWAKENING
www.awaker.net