模拟试卷五

一、选择题

1. 下列函数在点(0, 0)处不连续的是(　)。

$A.\ f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$B.\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$C.\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$D.\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

2. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微是 $f(x,y)$ 在该点两偏导数存在的(　)条件。

$A.$ 充分必要　　$B.$ 充分不必要

$C.$ 必要不充分　　$D.$ 不充分不必要

3. 函数 $f(x,y)=1-2x^2-4y^2+4y$ 在点(2, 1)处函数值下降最快的方向为(　)。

$A.\ (-2,-1)$　　$B.\ (2,1)$　　$C.\ (1,2)$　　$D.\ (-1,-2)$

4. 设空间区域 Ω_1：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$z\geqslant 0$ 及 Ω_2：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$，则(　)。

$A.\ \iiint\limits_{\Omega_1} xdV=4\iiint\limits_{\Omega_2} xdV$　　$B.\ \iiint\limits_{\Omega_1} ydV=4\iiint\limits_{\Omega_2} ydV$

$C.\ \iiint\limits_{\Omega_1} zdV=4\iiint\limits_{\Omega_2} zdV$　　$D.\ \iiint\limits_{\Omega_1} xyzdV=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdV$

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$（　）。

A. 敛散性不能确定　　　B. 绝对收敛

A. 发散　　　D. 条件收敛

二、填空题

1. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $2e^{-xy}+2z-e^z=1$ 所确定的隐函数，则 $dz|_{(1,0,0)}=$ ________。

2. 曲面 $x^2+2y^2+6z=21$ 上与平面 $x+2y+3z=0$ 平行的切平面方程为________。

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域为________。

4. 设球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\iint_{\Sigma}x^2dS=$ ________。

5. 设 $f(x)=\frac{x+3\pi}{4}, x\epsilon[0,2\pi)$，将 $f(x)$ 以 2π 为周期进行周期延拓，其 $Fourier$ 级数记为 $S(x)$，则 $S(2020\pi)=$ ________。

三、计算题

1. 设 $z=f(\cos x,y^2,u)$，其中 f 具有偏导数，$u(x,y)$ 由方程 $u^5-5xy+5u=1$ 确定，求 z_x,z_y。

2. 求函数 $u=xy+yz+zx$ 在 $P_0(2,1,3)$ 处沿与各坐标轴成等角方向的方向导数。

3. 计算二重积分 $I=\int_0^2dx\int_0^{4-x^2}\ln(1+x^2+y^2)dy$

4. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 是否收敛，请给出理由。

5. 将函数 $f(x)=\frac{x-1}{4-x}$ 在点 $x_0=1$ 处展开成幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$，$n=0,1,2,\ldots$

四、（8分）建一容积为V_0得无盖长方体水池，问其长、宽、高为何值时有最小得表面积。

五、（8分）计算第二型曲线积分

$\int_L (2xy^3 - y^2\sin x)dx + (1 + xy + 2y\cos x + 3x^2y^2)dy$，其中曲线$L$是沿抛物线

$x = \frac{\pi}{2}y^2$从点$(0,0)$到点$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$的一段弧。

六、（8分）试计算第二型曲面积分

$I = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 - y^2)dydz + (y^2 - z^2)dzdx + (z^2 - 1)dxdy$，其中$\Sigma$是

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1(z \geqslant 0)$的上侧。

七、（8分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n+1}$的收敛域及和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$的和。

八、（8分）设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，试证明：

（1）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$均绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$绝对收敛；

（2）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$条件收敛。