
《高等数学》

专业_____________年级_____________学号__________姓名____________

一、判断题. 将√或×填入相应的括号内.（每题 2 分，共 20 分）

（　　）1. 收敛的数列必有界.

（　　）2. 无穷大量与有界量之积是无穷大量.

（　　）3. 闭区间上的间断函数必无界.

（　　）4. 单调函数的导函数也是单调函数.

（　　）5. 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $|f(x)|$ 也在 x_0 点可导.

（　　）6. 若连续函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点没有切线.

（　　）7. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

（　　）8. 若 $z=f(x,y)$ 在（x_0, y_0）处的两个一阶偏导数存在，则函数 $z=f(x,y)$ 在（x_0, y_0）处可微.

（　　）9. 微分方程的含有任意常数的解是该微分方程的通解.

（　　）10. 设偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内具有二阶导数，且 $f''(0)=f'(0)+1$，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

二、填空题.（每题 2 分，共 20 分）

1. 设 $f(x-1)=x^2$，则 $f(x+1)=$__________.

2. 若 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}=$_________.

3. 设单调可微函数 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$，$f(1)=3, f'(1)=2, f''(3)=6$ 则

$g'(3) =$ ______.

4. 设 $u = xy + \dfrac{x}{y}$，则 $du =$ ____________.

5. 曲线 $x^2 = 6y - y^3$ 在 $(-2\ ，\ 2)$ 点切线的斜率为____________.

6. 设 $f(x)$ 为可导函数, $f'(1) = 1, F(x) = f(\dfrac{1}{x}) + f(x^2)$,则 $F'(1) =$ ____________.

7. 若 $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$, 则 $f(2) =$ __________.

8. $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ 在[0,4]上的最大值为____________.

9. 广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx =$ _____________.

10. 设 D 为圆形区域 $x^2 + y^2 \le 1, \iint\limits_D y\sqrt{1+x^5}\,dxdy =$ ____________.

三、计算题（每题 5 分，共 40 分）

1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \Lambda + \dfrac{1}{(2n)^2})$.

2. 求 $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3 \Lambda\ \Lambda\ (x+10)^{10}$ 在（0，$+\infty$ ）内的导数.

3. 求不定积分 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

4. 计算定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\, dx$.

5. 求函数 $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ 的极值.

6. 设平面区域 D 是由 $y = \sqrt{x}, y = x$ 围成，计算 $\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y} dxdy$.

7. 计算由曲线 $xy = 1, xy = 2, y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面图形在第一象限的面积.

----

8. 求微分方程 $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ 的通解.

四、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1. 证明：$arc\tan x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$.

2. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$$

证明：方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个实根.

《高等数学》参考答案

一、判断题. 将√或×填入相应的括号内（每题 2 分，共 20 分）

1. √ ；2.× ；3.×； 4.× ；5.×； 6.× ；7.× ；8.× ；9. √ ；10. √.

二、 填空题.（每题 2 分，共 20 分）

1. x^2+4x+4； 2. 1； 3. 1/2； 4. $(y+1/y)dx+(x-x/y^2)dy$；

5. 2/3 ； 6. 1 ； 7. $\sqrt[3]{36}$ ； 8. 8 ； 9. 1/2 ； 10. 0.

三、计算题（每题 5 分，共 40 分）

1.解：因为 $\dfrac{n+1}{(2n)^2} < \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2} < \dfrac{n+1}{n^2}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(2n)^2} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2}=0$

由迫敛性定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right)=0$

2.解：先求对数 $\ln y = \ln(x+1) + 2\ln(x+2)\cdots + 10\ln(x+10)$

$$\therefore \frac{1}{y}y' = \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\Lambda+\frac{10}{x+10}$$

$$\therefore y' = (x+1)\Lambda\ (x+10)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\Lambda+\frac{10}{x+10}\right)$$

3.解： 原式= $2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$

$=2\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}d\sqrt{x}$

$=2\arcsin\sqrt{x}+c$

4.解： 原式= $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^{\frac{3}{2}}xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin^{\frac{3}{2}}xdx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}xd\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}xd\sin x$

$=\frac{2}{5}[\sin^{\frac{5}{2}}x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}[\sin^{\frac{5}{2}}x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

=4/5

5.解： $f'_x = 3x^2-8x-2y=0 \qquad f'_y = 2x-2y=0$

故 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

当 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 时 $f''_{xx}(0,0)=-8$， $f''_{yy}(0,0)=-2$， $f''_{xy}(0,0)=2$

$\Theta\ \Delta = (-8)\times(-2) - 2^2 > 0$ 且 A= $-8 < 0$

$\therefore$ （0，0）为极大值点 且 $f(0,0) = 0$

当 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ 时 $f''_{xx}(2,2) = 4$， $f''_{yy}(2,2) = -2$， $f''_{xy}(2,2) = 2$

$\Theta\ \Delta = 4\times(-2) - 2^2 < 0$ $\therefore$ 无法判断

6.解：D= $\left\{(x,y)\middle|0 \le y \le 1, y^2 \le x \le y\right\}$

$$\therefore \iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}[x]_{y^2}^{y} dy$$

$$= \int_0^1 (\sin y - y\sin y) dy$$

$$= [-\cos y]_0^1 + \int_0^1 y d\cos y$$

$$= 1 - \cos 1 + [y\cos y]_0^1 - \int_0^1 \cos y dy$$

$$= 1 - \sin 1$$

7.解：令 $u = xy$， $v = \frac{y}{x}$；则 $1 \le u \le 2$， $1 \le v \le \sqrt{3}$

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

$$\therefore\ A = \iint_D d\sigma = \int_1^2 du \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2v} dv = \ln\sqrt{3}$$

8.解：令 $y^2 = u$， 知 $(u)' = 2u - 4x$

由微分公式知： $u = y^2 = e^{\int 2dx}(\int -4xe^{\int -2dx} dx + c)$

$$=e^{2x}(\int -4xe^{-2x}dx+c)$$

$$=e^{2x}(2xe^{-2x}+e^{-2x}+c)$$

四. 证明题（每题 10 分，共 20 分）

1.解：设 $f(x)=\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Theta\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=0$$

$$\therefore f(x)=c \qquad -\infty<x<+\infty$$

令 $x=0$ $\Theta\ f(0)=0-0=0$ $\therefore c=0$ 即：原式成立。

2.解： $\Theta\ F(x)$在$[a,b]$ 上连续

且 $F(a)=\int_b^a\dfrac{1}{f(t)}dt<0, F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

故方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 上至少有一个实根.

又 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ $\Theta\ f(x)>0$

$$\therefore F'(x)\ge 2$$

即 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增

$\therefore$ $F(x)$ 在区间 (a,b) 上有且仅有一个实根.

《高等数学》

专业________________学号______________姓名___________

一、判断题（对的打√，错的打×；每题 2 分，共 10 分）

----

1. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的必要条件.

2. 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处一定没有切线.

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积，则 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上必不可积.

4. 方程 $xyz=0$ 和 $x^2+y^2+z^2=0$ 在空间直角坐标系中分别表示三个坐标轴和一个点.

5. 设 y^* 是一阶线性非齐次微分方程的一个特解，$\overline{y}$ 是其所对应的齐次方程的通解，则

$y=\overline{y}+y^*$ 为一阶线性微分方程的通解.

二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. 设 $f(3x)=\sqrt{2x+1}$， $f(a)=5$，则 $a=$__________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$，当 $f(0)=$_______时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

3. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty} x(1+\dfrac{1}{t})^{2xt}$，则 $f''(x)$__________.

4. 已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f'(a)=A$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}=$__________.

5. 若 $2f(x)\cos x=\dfrac{d}{dx}[f(x)]^2$，并且 $f(0)=1$，则 $f(x)$ ______________.

6. 若 $f(x)$， $g(x)$ 在点 b 左连续，且 $f(b)=g(b)$， $f'(x)>g'(x) \quad (a<x<b)$，
则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 大小比较为 $f(x)$ ________ $g(x)$.

7. 若 $y=\sin x^2$，则 $\dfrac{dy}{d(x^2)}=$________；$\dfrac{dy}{dx}=$____________.

8. 设 $f(x)=\int_{x^2}^{x}\ln t\,dt$，则 $f'(\dfrac{1}{2})=$____________.

----

9. 设 $z=e^{x^2y}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$__________________.

10. 累次积分 $\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2-y^2)dy$ 化为极坐标下的累次积分为_____________.

三、计算题（前6题每题5分，后两题每题6分，共42分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^{x}\dfrac{t}{\sin t}dt}$；　　2. 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}$，求 y'；　　3. $\int\dfrac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}dx$；

4. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$；　　5. 设 $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy .

7. 设平面区域 D 是由 $y=\sqrt{x}$， $y=x$ 围成，计算 $\iint\limits_D\dfrac{\sin y}{y}dxdy$.

8. 求方程 $y\ln ydx+(x-\ln y)dy=0$ 在初始条件 $y\big|_{x=1}=e$ 下的特解.

四、（7分）

已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2，试确定系数 a、b，并求出所有的极大值与极小值.

五、应用题（每题7分，共14分）

1. 一艘轮船在航行中的燃料费和它的速度的立方成正比. 已知当速度为 $10(km/h)$ 时，燃料费为每小时 6 元，而其它与速度无关的费用为每小时 96 元. 问轮船的速度为多少时，每航行 $1\,km$ 所消耗的费用最小？

2. 过点 $(1,0)$ 向曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 作切线，求：（1）切线与曲线所围成图形的面积；（2）图形绕 y

轴旋转所得旋转体的体积.

六、证明题（7分）

设函数 $f(x)$ 在 $0 \le x < a$ 上的二阶导数存在，且 $f(0)=0$，$f''(x)>0$．证明 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $0<x<a$ 上单调增加.

高等数学参考答案

一、判断题

1. √； 2. ×； 3. √； 4. ×； 5. √.

二、填空题

1. 36； 2. $\dfrac{2}{3}$； 3. $4(1+x)e^{2x}$； 4. $5A$； 5. $1+\sin x$； 6. <；

7. $\cos x^2$，$2x\cos x^2$； 8. $\ln 2$； 9. $2dx+dy$；

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R f(r\cos 2\theta) r dr$.

三、计算题

1. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cos x}{\dfrac{x}{\sin x}}$

$$= \frac{e}{1} = e$$

2. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}} \cdot \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}-1)-e^{2x}\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$$=\frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}}\cdot\frac{-2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$=\frac{1}{1-e^{2x}}$$

3．原式$=\int\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$

$$=-\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}d(\sin x+\cos x)$$

$$=\frac{1}{\sin x+\cos x}+C$$

4．设 $x=2\sin t$ 　　则 $dx=2\cos tdt$

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 tdt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt$$

$$=2(t-\frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

5．$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-xy\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{(2x^2y-y^3)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^3}$$

6．两边同时微分得：

$$2dy - dx = (dx - dy)\ln(x - y) + (x - y)\frac{1}{x - y}(dx - dy)$$

即 $$2dy - dx = \ln(x - y)dx - \ln(x - y)dy + (dx - dy)$$

故 $$dy = \frac{2 + \ln(x - y)}{3 + \ln(x - y)}dx$$

（本题求出导数后，用 $dy = y'dx$ 解出结果也可）

7. $$\iint_D \frac{\sin y}{y}dxdy = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}dx$$

$$= \int_0^1 (\sin y - y\sin y)dy$$

$$= -\cos y\Big|_0^1 + y\cos y\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy$$

$$= 1 - \cos 1 + \cos 1 - \sin y\Big|_0^1$$

$$= 1 - \sin 1$$

8．原方程可化为 $$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$$

通解为 $$x = e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}[\int e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy} \cdot \frac{1}{y}dy + C]$$

$$= e^{-\ln\ln y}[\int e^{\ln\ln y} \cdot \frac{1}{y}dy + C]$$

$$= \frac{1}{\ln y}[\int \frac{1}{y}\ln y dy + C] = \frac{1}{\ln y}[\frac{1}{2}(\ln y)^2 + C]$$

$$= \frac{1}{2}\ln y + \frac{C}{\ln y}$$

$y\Big|_{x=1} = e$ 代入通解得 $C = 1$

故所求特解为： $(\ln y)^2 - 2x\ln y + 1 = 0$

四、解： $f'(x)=3x^2+2ax+b$

因为$f(x)$在$x=1$处有极值-2，所以$x=1$必为驻点

故 $f'(1)=3+2a+b=0$

又 $f(1)=1+a+b=-2$

解得： $a=0$， $b=-3$

于是 $f(x)=x^3-3x$ $f'(x)=3(x^2-1)$

$f''(x)=-6x$

由$f'(x)=0$ 得 $x=\pm1$，从而

$f''(1)=6>0$ ， 在$x=1$处有极小值$f(1)=-2$

$f''(-1)=-6<0$ ，在$x=-1$处有极大值$f(-1)=2$

五、1. 解：设船速为$x(km/h)$，依题意每航行$1km$的耗费为

$$y=\frac{1}{x}(kx^3+96)$$

又$x=10$ 时，$k\cdot10^3=6$ 故得$k=0.006$， 所以有

$$y=\frac{1}{x}(0.006x^3+96)\text{，}\quad x\in(0,+\infty)$$

令 $y'=\dfrac{0.012}{x^2}(x^3-8000)=0$， 得驻点$x=20$

由极值第一充分条件检验得$x=20$是极小值点. 由于在$(0,+\infty)$上该函数处处可导，且只有唯一的极值点，当它为极小值点时必为最小值点，所以求得船速为$20(km/h)$时，每航行$1km$的耗费最少，其值为$y_{\min}=0.006\times20^2+\dfrac{96}{20}=7.2$（元）

2. 解：（1）设切线与抛物线交点为(x_0,y_0)，则切线的斜率为$\dfrac{y_0}{x_0-1}$，

又因为$y^2=x-2$上的切线斜率满足$2y\cdot y'=1$，在(x_0,y_0)上即有$2y_0y'=1$

所以$2y_0\cdot\dfrac{y_0}{x_0-1}=1$，即$2y_0'=x_0-1$

又因为(x_0, y_0)满足$y_0^2 = x_0 - 2$，解方程组

$$\begin{cases} 2y_0^2 = x_0 - 1 \\ y_0^2 = x_0 - 2 \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

所以切线方程为 $y = \frac{1}{2}(x-1)$

则所围成图形的面积为：

$$S = \int_0^1 [2 + y^2 - (2y+1)]dy = \frac{1}{6}$$

（2）图形绕x轴旋转所得旋转体的体积为：

$$V = \pi \int_0^1 \frac{1}{4}(x-1)^2 dx - \pi \int_2^3 (x-2)dx = \frac{\pi}{6}$$

六、证： $[\frac{f(x)}{x}]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - [f(x) - f(0)]}{x^2}$

在$[0, x]$上，对$f(x)$应用拉格朗日中值定理，则存在一点$\xi \in (0, x)$，使得

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi)$$

代入上式得 $[\frac{f(x)}{x}]' = \frac{xf'(x) - f(\xi)}{x^2}$

由假设$f''(x) > 0$知$f'(x)$为增函数，又$x > \xi$，则$f'(x) > f'(\xi)$，

于是$f'(x) - f'(\xi) > 0$，从而$[\frac{f(x)}{x}]' > 0$，故$\frac{f(x)}{x}$在$(0, a)$内单调增加.

《高等数学》试卷

专业________________学号______________姓名________________

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．函数 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为______________。

2．函数 $y=x+e^x$ 上点（ 0， 1 ）处的切线方程是______________。

3．设 $f(x)$ 在 x_0 可导且 $f'(x_0)=A$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-3h)}{h}=$ _______。

4．设曲线过 $(0,1)$，且其上任意点 (x,y) 的切线斜率为 $2x$，则该曲线的方程是_________。

5．$\int\frac{x}{1-x^4}dx=$_____________。

6．$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=$___________。

7．设 $f(x,y)=\sin xy$，则 $f_x(x,y)=$____________。

8．累次积分 $\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x^2+y^2)dy$ 化为极坐标下的累次积分为________。

9．微分方程 $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{3}{x}(\frac{d^2y}{dx^2})^2=0$ 的阶数为____________。

10．设级数 $\sum\limits_{n=1}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1000}a_n$ _______________。

二、单项选择题（在每小题的四个备选答案中，选出一个正确的答案，将其码写在题干的（ ）内，（1～10 每小题 1 分，11～17 每小题 2 分，共 24 分）

1．设函数 $f(x)=\frac{1}{x},g(x)=1-x$，则 $f(g(x))=$ （ ）

①$1-\frac{1}{x}$ ②$1+\frac{1}{x}$ ③$\frac{1}{1-x}$ ④ x

2． $x\to 0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}+1$ 是 （ ）

①无穷大量 ②无穷小量 ③有界变量 ④无界变量

3．下列说法正确的是 （ ）

----

①若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续， 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导

②若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续

③若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可微，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 极限不存在

④若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导

4．若在 (a,b) 内恒有 $f'(x)<0$，$f''(x)>0$，则在 (a,b) 内曲线弧 $y=f(x)$ 为 （　）．

①上升的凸弧　　②下降的凸弧　　③上升的凹弧　　④下降的凹弧

5．设 $F'(x)=G'(x)$，则　　　　　　　　　　　　　　　　（　）

① $F(x)+G(x)$ 为常数　　　　② $F(x)-G(x)$ 为常数

③ $F(x)-G(x)=0$　　　　④ $\frac{d}{dx}\int F(x)dx=\frac{d}{dx}\int G(x)dx$ x

6．$\int_{-1}^{1}|x|dx=$　　　　　　　　　　　　　　　　（　）

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3

7．方程 $2x=3y=1$ 在空间表示的图形是　　　　　　　　　　（　）

①平行于 xOy 面的平面　　　　②平行于 Oz 轴的平面

③过 Oz 轴的平面　　　　④直线

8．设 $f(x,y)=x^3+y^3+x^2y$，则 $f(tx,ty)=$　　　　　　　　（　）

① $tf(x,y)$　　② $t^2f(x,y)$　　③ $t^3f(x,y)$　　④ $\frac{1}{t^2}f(x,y)$

9．设 $a_n\geq 0$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=$ p，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　　　　　　（　）

①在 $p>1$ 时收敛，$p<1$ 时发散　　　　②在 $P\geq 1$ 时收敛，$p<1$ 时发散

----

③在 $p \le 1$ 时收敛，$p > 1$ 时发散　　④在 $p < 1$ 时收敛，$p > 1$ 时发散

10．方程 $y' + 3xy = 6x^2 y$ 是　　（　）

①一阶线性非齐次微分方程　　②齐次微分方程

③可分离变量的微分方程　　④二阶微分方程

11．下列函数中为偶函数的是　　（　）

① $y = e^x$　　② $y = x^3 + 1$　　③ $y = x^3 \cos x$　　④ $y = \ln|x|$

12．设 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，$a < x_1 < x_2 < b$，则至少有一点 $\xi \in (a,b)$ 使　　（　）

① $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$　　② $f(b) - f(a) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

③ $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(b-a)$　　④ $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

13．设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左右导数存在且相等是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导的　　（　）

①充分必要的条件　　②必要非充分的条件

③必要且充分的条件　　④既非必要又非充分的条件

14．设 $2f(x)\cos x = \dfrac{d}{dx}[f(x)]^2$，则 $f(0) = 1$，则 $f(x) =$　　（　）

① $\cos x$　　② $2 - \cos x$　　③ $1 + \sin x$　　④ $1 - \sin x$

15．过点（1，2）且切线斜率为 $4x^3$ 的曲线方程为 y＝　　（　）

① x^4　　② $x^4 + c$　　③ $x^4 + 1$　　④ $4x^3$

16．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0（$x_0 \ne 0$）收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < |x_0|$　　（　）

①绝对收敛　　②条件收敛　　③发散　　④收敛性与 a_n 有关

17．设D域由 $y=x$, $y=x^2$ 所围成，则 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}d\sigma=$ （　）

①$\int_0^1 dx\int_x^1 \frac{\sin x}{x}dy$ ；　　②$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}dx$ ；

③$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin x}{x}dy$ ；　　④$\int_0^1 dy\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin x}{x}dx$.

三、计算题（1～3 每小题 5 分，4～9 每小题 6 分，共 51 分）

1．设 $y=\sqrt{\frac{x-1}{x(x+3)}}$ 　求 y' .

2．求 $\lim\limits_{x\to 4/3}\frac{\sin(9x^2-16)}{3x-4}$.

3．计算 $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

4．设 $x=\int_0^t(\cos u)\arctan u\,du$, $y=\int_t^1(\sin u)\arctan u\,du$ ，求 $\frac{dy}{dx}$.

5．求过点 A（2，1，－1），B（1，1，2）的直线方程.

6．设 $u=e^{x+\sqrt{y}+\sin z}$，求　du　.

7．计算$\int_0^x\int_0^{a\sin\theta} r\sin\theta\,dr\,d\theta$.

8．求微分方程 $dy = (\frac{y+1}{x+1})^2 dx$ 的 通解 .

9．将 $f(x) = \frac{3}{(1-x)(2+x)}$ 展成的幂级数.

四、应用和证明题（共 15 分）

1．（８分）设一质量为ｍ的物体从高空自由落下，空气阻力正比于速度（ 比例常数为 $k > 0$ ）求速度与时间的关系。

2．（７分）借助于函数的单调性证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ 。

高等数学参考答案

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．（－１，１）　2．２ｘ－ｙ＋１＝０　3．５Ａ　4．ｙ＝ｘ^2＋１

5．$\frac{1}{2}\arctan x^2 + c$　6．１　7．ｙｃｏｓ（ｘｙ）

8．$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\pi} f(r^2) r dr$　9．三阶　10．发散

二、单项选择题（在每小题的四个备选答案中，选出一个正确的答案，将其码写在题干的（ ）内，1～10 每小题 1 分，11～17 每小题 2 分，共 24 分）

1. ③　2. ③　3. ④　4. ④　5. ②　6. ②　7. ②　8. ⑤　9. ④　10. ③

11. ④　12. ④　13. ⑤　14. ③　15. ③　16. ①　17. ②

三、计算题（1～3 每小题 5 分，4～9 每小题 6 分，共 51 分）

1．**解：** $\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)-\ln x-\ln(x+3)]$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3})$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x(x+3)}}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3})$$

2．解： 原式＝ $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}}\frac{18x\cos(9x^2-16)}{3}$

$$=\frac{18(\frac{4}{3})\cos(9(\frac{4}{3})^2-16)}{3}=8$$

3．解： 原式＝$\int\frac{(1+e^x-e^x)dx}{(1+e^x)^2}$

$$=\int\frac{dx}{(1+e^x)}-\int\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$=\int\frac{(1+e^x-e^x)dx}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^x}$$

$$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+c$$

4．解： 因为 $dx=(\cos t)arctgtdt,dy=-(\sin t)arctgtdt$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(\sin t)arctgtdt}{(\cos t)arctgtdt}=-tgt$$

5．解： 所求直线的方向数为｛１，０，－３｝

所求直线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-3}$

6．解： $du=e^{x+\sqrt{y}+\sin z}d(x+\sqrt{y}+\sin z)$

$$= e^{x+\sqrt{y}+\sin z}(dx + \frac{1}{2\sqrt{y}}dy + \cos zdz)$$

7．**解：**原积分$=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a\sin\theta} rdr = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3}a^2$$

8．**解：**两边同除以 $(y+1)^2$ 得 $\frac{dy}{(1+y)^2} = \frac{dx}{(1+x)^2}$

两边积分得 $\int\frac{dy}{(1+y)^2} = \int\frac{dx}{(1+x)^2}$

亦即所求通解为 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} = c$

9．**解：**分解，得 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2+x}$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$= \sum_{n=0} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}(-1)^n\frac{x^n}{2^n} \quad (|x|<1 且 \left|\frac{x}{2}\right|<1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}]x^n \quad (|x|<1)$$

四、应用和证明题（共１５分）

1．**解：**设速度为 u，则 u 满足$m = \frac{du}{dt} = mg - ku$

解方程得$u = \frac{1}{k}(mg - ce^{-kt})$

由 $u|_{t=0} = 0$ 定出 c，得$u = \frac{mg}{k}(1-e^{-kt})$

2．**证：**令 $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$ 则 $f(x)$ 在区间［１，＋∞］连续

而且当$x>1$时，$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x2}>0 \quad (x>1)$

因此$f(x)$在［1，＋∞］单调增加

从而当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$

即当$x>1$时， $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$

《高等数学》

专业__________________学号________________姓名___________________

一、判断正误（每题 2 分，共 20 分）

1. 两个无穷大量之和必定是无穷大量.
2. 初等函数在其定义域内必定为连续函数.
3. $y=f(x)$在点x_0连续，则$y=f(x)$在点x_0必定可导.
4. 若x_0点为$y=f(x)$的极值点，则必有$f'(x_0)=0$.
5. 初等函数在其定义域区间内必定存在原函数.
6. 方程$x^2+y^2=1$表示一个圆.
7. 若$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$可微，则$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$连续.
8. $(y')^2=-2x-e^x$是二阶微分方程.
9. $\frac{d}{dx}\int_1^x \sin t dt=\sin x-\sin 1$.
10. 若$y=f(x)$为连续函数，则$\int_a^x f(t)dt$必定可导.

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. $\int \dfrac{dx}{1+\sin x} =$ ____________.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x} =$ ________.

3. 设 $f'(x)=1$，且 $f(0)=1$，则 $\int f(x)dx =$ ____________.

4. $z = xy^2$，则 $dz =$ ____________.

5. $\dfrac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 =$ ______________.

三、计算题与证明题（共计 60 分）

1. (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n$，（5 分）；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$，（5 分）。

2. 求函数 $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$ 的导数。（10 分）

3. 若在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f''(x)>0, f(0)<0$. 证明：$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调增加.（10 分）

4. 对物体长度进行了 n 次测量，得到 n 个数 x_1, x_2, Λ, x_n。现在要确定一个量 x，使之与测得的数值之差的平方和最小. x 应该是多少？（10 分）

5. 计算 $\int x\sin x^2 dx$.（5 分）

6. 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=e+1-x$，$y=0$ 所围成的平面图形的面积是多少.（5 分）

7. 求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}=x-y$ 满足条件 $y\big|_{x=\sqrt{2}}=0$ 的特解。（5 分）

8．计算二重积分$\iint\limits_D x^2dxdy$, D 是由圆$x^2+y^2=1$及　$x^2+y^2=4$围成的区域.（5 分）

高等数学参考答案

一、判断正误（每题 2 分，共 20 分）

1-5. ╳， ╳， ╳， ╳， √.　　6-10. ╳， √， ╳， ╳， √ .

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1.$\tan x-\dfrac{1}{\cos x}+c$ ；　2.0；　3.$\dfrac{1}{2}x^2+c$ ；　4.$y^2dx+2xydy$ ；　5.0。

三、计算题与证明题。（共计 60 分）

1． (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\dfrac{3}{n+1}\right]^{-\frac{n+1}{3}\cdot\frac{-3n}{n+1}}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n}{n+1}}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{2x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

2.　令 $y_1=(\sin x)^{\cos x}$　　$y_2=(\cos x)^{\sin x}$　　则 $y_1=e^{\cos x\ln\sin x}$

$y_1'=\left(e^{\cos x\ln\sin x}\right)'=e^{\cos x\ln\sin x}(\cos x\ln\sin x)'=\sin x^{\cos x+1}\left(\cot^2 x-\ln\sin x\right)$

同理　　$y_2'=\cos x^{\sin x+1}\left(\ln\cos x-\tan^2 x\right)$

$$y'=\sin x^{\cos x+1}\left(\cot^2 x-\ln\sin x\right)+\cos x^{\sin x+1}\left(\ln\cos x-\tan^2 x\right)$$

----

3. $\Theta\ F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

$\therefore F'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$ 则 $g'(x)=xf''(x)>0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$g(x)$ 为单调递增；$x<0$ 时，$g(x)$ 为单调递减。

则 当 $x>0$ 时 $g(x)>g(0)>0$ $\therefore F'(x)>0$ 当 $x>0$ 时，$F(x)$ 为单调递增

当 $x<0$ 时 $g(x)>g(0)>0$ $\therefore F'(x)>0$ 当 $x<0$ 时，$F(x)$ 为单调递增

故命题成立。

4.令 $f(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\Lambda+(x-x_n)^2$

$$f'(x)=2[nx-(x_1+x_2+\Lambda\ x_n)]$$

则 令 $f'(x)=0\Rightarrow x_0=\dfrac{x_1+\Lambda+x_n}{n}$ 为驻点

$f''(x_0)=2n>0$ $\therefore x_0$ 点为 $f(x)$ 的极小值点

$\therefore x$ 应为 $\dfrac{x_1+\Lambda+x_n}{n}$

5. $\int x\sin^2 x\,dx=\int x\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\dfrac{1}{2}\int(x-x\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+c$$

6. $S=\int_0^1(e+1-y-e^y)dy=(e+1)y\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}y^2\Big|_0^1-e^y\Big|_0^1=\dfrac{3}{2}$

7. 方程变形为 $y'+\dfrac{1}{x}y=1$

而 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int 1\bullet e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right]=\frac{c}{x}+\frac{1}{2}x$

初始条件： $y\big|_{x=\sqrt{2}}=0\Rightarrow c=-1$

$$\therefore y^*=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x$$

8、$D^*=\{(r,\theta)|1\le r\le 2,0\le\theta\le 2\pi\}$

$$\therefore\iint_D x^2dxdy=\iint_{D^*}r^2\cos^2\theta rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\bullet\int_1^2 r^3dr=\frac{15}{4}\pi$$

《高等数学》

专业_________________学号_______________姓名___________________

一、判断（每小题 2 分，共 20 分）

1. f(x)在点 x_0 处有定义是 f(x)在点 x_0 处连续的必要条件.（ ）

2. 无穷小量与有界变量之积为无穷小量.（ ）

3. y=f(x)在 x_0 处可导,则 y=|f(x)|在 x_0 处也可导.（ ）

4. 初等函数在其定义域内必连续.（ ）
5. 可导函数 f(x)的极值点一定是 f(x) 的驻点.（ ）

6. 对任意常数 k,有 $\int kf(x)dx$=k$\int f(x)dx$.（ ）

7. 若 f(x)在[a,b]上可积,则 f(x)在[a,b]上有界.（ ）
8. 若 f(x,y)在区域 D 上连续且区域 D 关于 y 轴对称,则当 f(x,y) 为关于 x 的奇函数

时,$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$=0.（　）

9. $(y')^2$=−2x−e^x 的通解中含有两个独立任意常数.（　）

10. 若 z=f(x,y)在 P_o 的两个偏导数都存在,则 z=f(x,y)在 P_0 连续.（　）

二、填空（每空 2 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}$ [xsin$\frac{1}{x}$+$\frac{1}{x}$sinx+$(\frac{2+x}{x})^x$]=________.

2. 函数 f(x)=x$\sqrt{3-x}$ 在[0,3]上满足罗尔定理的条件,定理中的数值ξ =_______.

3. 设 f(x)=$\begin{cases} e^x & x<0 \\ a+x & x\geq 0 \end{cases}$ 当 a=________ 时, f(x)在 x=0 处连续.

4. 设 z=e^{x^2+2y} ,则 dz$|_{(0,0)}$=_______.

5. 函数 f(x)=e^x−x−1 在___________内单调增加;在 __________ 内单调减少.

6. 函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件_______________时, 这函数没有极值.

7. $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2$ dx =____________其中 a,b 为常数.

8. f'(x)=1 且 $f(0)=0$,则$\int f(x)dx$=_________.

9.若 I=$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)$ dxdy 交换积分次序后得_______________.

三、计算（每小题 5 分,共 40 分）

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xtgx})$ ；　　　　2. $\int_1^{e^x}\frac{\ln t}{t}dt+\int_1^y(\cos t+3)dt$ =2,求 dy;

----

3. 求$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；　　4. 求$\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}-1}dx$ ；　　5. 求$\int_{0}^{+\infty} xe^{-2x}dx$；

6. 设 z=ln(x^2+y^2) 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

7. 计算 I=$\iint\limits_D xdxdy$.其中D是由圆x^2+y^2=4围成的区域；

8. 求微分方程−ydx+(x+y^3)dy=0的通解.

四、应用题(每题7分,共14分)

1. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋,现有存砖只够砌20米长的墙壁,问应围成的长方形的长,宽各为多少才能使这间小屋面积最大.

2. 求由y=$\frac{1}{x}$,x=1,x=2与x轴所围成的图形的面积及该图绕x轴旋转一周的旋转体的体积.

五、证明(本题6分)

证明:当x＞0时,不等式1+$\frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$成立.

高等数学参考答案

一、判断正误（每题2分，共20分）

----

1 √ ； 2 √ ； 3 × ； 4 × ； 5 √ ； 6× ； 7 √ ； 8 √ ； 9 × ； 10 ×.

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. $1+e^2$； 2. 2 ； 3. 1 ； 4. $2dx$； 5. $[0,+\infty)$，$(-\infty,0]$ ； 6. $b^2-3ac<0$；

7. 0； 8. $\frac{1}{2}x^2+c$ ； 9. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

三、计算题与证明题（共计 60 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-x}{x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec x-1}{3x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}\right)=\frac{1}{3}$$

2. 方程两边同时对 x 求导得：

则 $$\frac{\ln e^x}{e^x}e^x+(\cos y+3)y'=0$$

$$x+(\cos y+3)=0$$

$$y'=-\frac{x}{\cos y+3}$$

$$dy=-\frac{x}{\cos y+3}dx$$

3. $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int\frac{2}{1+x}d\sqrt{x}$

$$=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}\quad=2\arctan\sqrt{x}+c$$

4、 令 $\sqrt{1-x}=t\quad x=1-t^2\quad dx=-2tdt$

当 $x=\frac{3}{4}$ 时 $t=\frac{1}{2}$；当 $x=1$ 时 $t=0$

$$原式=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{-2t}{t-1}dt=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{t}{t-1}dt=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}1+\frac{1}{t-1}dt$$

$$=2[t+\ln|t-1|\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=1-2\ln 2$$

5. $$\int_{0}^{+\infty}xe^{-2x}dx=\int_{0}^{+\infty}x(-\frac{1}{2}e^{-2x})'dx=x(-\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}(-\frac{1}{2}e^{-2x})dx$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{4}$$

6. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}2y=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

7. 令 $$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},$$

$$I=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{2}r\cos\theta\cdot rdr$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_{0}^{2}r^2dr=[\sin\theta]_{0}^{2\pi}\cdot[\frac{1}{3}r^3]_{0}^{2}=0$$

8. 解： $$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y^2$$

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}(\int y^2e^{\int-\frac{1}{y}dy}dy+c)$$

$$=y(\frac{1}{2}y^2+c)$$

∴ 原方程的通解为：$x=y(\frac{1}{2}y^2+c)$

四、（每题 7 分，共 14 分）

----

1. 解：设长方形的长和宽分别为x和y，面积为s，则$x+2y=20$即　$x=20-2y$

$s=xy=20y-2y^2 \qquad (y>0)$

$s'=20-4y=0$，得$y=5$

$s''=-4<0$

$\therefore$ 当长$x=10$M；宽$y=5$M时，面积最大。

五、（本题6分）

令$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x} \qquad f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}>0$

$\therefore \qquad f(x)>f(0)=0$

即$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$
