一、求极限

方法（1）：等价无穷小代换

若当 $x \to x_0$ 时，$\Delta \to 0$，那么

$$\sin\Delta \sim \Delta,\quad 1-\cos\Delta \sim \frac{1}{2}\Delta^2,\quad \tan\Delta \sim \Delta$$

$$\arcsin\Delta \sim \Delta,\quad \arctan\Delta \sim \Delta$$

$$\ln(1+\Delta) \sim \Delta,\quad e^{\Delta}-1 \sim \Delta,\ (1+\Delta)^{\alpha}-1 \sim \alpha\Delta\ (\alpha \in R)$$

例 **求极限** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$

注意：对于代数和中各无穷小不能分别代换.

一、求极限

方法：（2）洛必达法则

（1）$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

（2）$f(x)$，$g(x)$ 在 a 点邻域可导

且 $g'(x)\neq 0$

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可以为 ∞）

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

一、求极限

(1) $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 a 的邻域可导

且 $g'(x)\neq 0$

（3） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可以为 ∞)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

$0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 型化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 处理

一、求极限

例　　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\dfrac{1}{x}}$

例　　求极限$\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\int_0^{x^2}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t}{\int_0^{x}t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$

例　　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{x}$

注意：此题也可利用第二个重要极限

一、求极限

方法（3）：夹逼准则

如果数列$\{x_n\},\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足

1) $\exists N$, 当 $n > N$, $y_n \le x_n \le z_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

例　　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$

一、求极限

方法（4）：　带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

一、求极限

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+o(x^3)$$

一、求极限

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

例　　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2)}{x - \sin x}$

一、求极限

方法（5）：导数的定义

设$y=f(x)$，极限值

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数

例　　**设$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的连续正值函数，且$f(0)=1$，$f'(0)=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}$**

一、求极限

方法（6）：定积分的定义

$f(x)$在$[a,b]$有界，经过 **分割、近似代替、求和、取极限**

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I(I\text{是常数})$，则

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

例 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots\frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

一、求极限

方法（7）：直接代入

函数在连续点处的极限值等于函数值

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\ln\left[\sin\dfrac{\pi}{x}+\mathrm{e}^{\cos(x-2)}\right]$

方法（8）：无穷小运算性质

无穷小与有界量之积仍为无穷小

例 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

一、求极限

方法（9）：极限的四则运算法则

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B,$ 则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B},$ 其中 $B \neq 0.$

例 **求极限** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 5}$

一、求极限

方法（10）：$f(x)$当x趋于x_0时极限存在 $\Leftrightarrow$ 左极限、右极限各自存在且相等

此方法用于计算分段函数在分段点处的极限

例　　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

一、求极限

方法（11）：定积分的性质

积分中值定理、保号性、保序性

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$（$a \le \xi \le b$）

$$f(x) \ge 0, x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

$$f(x) \le g(x), x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

一、求极限

例　　设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)d$

例　　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x}dx$

二、求导数（求微分）

微分

若$y=f(x)$在x_0处的增量可表示为

$$\Delta y = A\Delta x+o(\Delta x)$$（常数A与Δx无关）

则称$f(x)$在x_0处可微，$A\Delta x$称为$f(x)$在x_0处的微分，记为

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

二、求导数（求微分）

函数$f(x)$在点x_0处连续必须满足三个条件:

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$;

(3) $A = f(x_0)$.

二、求导数（求微分）

可导与可微的关系

定理　$y=f(x)$在x_0处可微 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$在x_0处可导. 且

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\mathrm{d}x$$

可导与连续的关系

可导必连续；不连续必不可导；连续未必可导

二、求导数（求微分）

用定义求导数

$f(x)$在x_0处可导 $\Leftrightarrow$ $f_-'(x_0) = f_+'(x_0)$

此结论常用于讨论分段函数在分段点处的可导性

例　　试确定常数a，b，使函数

$$f(x)=\begin{cases} \sin 2x+1, x\le 0 \\ a\mathrm{e}^{x}+b,\ \ x>0 \end{cases}$$

在点$x=0$可导

二、求导数（求微分）

复合函数的导数

$$[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

例 设$y = 2^{\tan\sqrt[3]{x}}$，求y'

反函数的导数

反函数的导数等于直接函数的倒数

二、求导数（求微分）

隐函数的导数（本质：复合函数求导）

方程$F(x, y) = 0$两端对x求导，视y为隐函数$y(x)$，再解出$y'(x)$

例　　求笛卡尔叶形线$x^3 + y^3 = 3axy$在点$(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$处的切线和法线方程

二、求导数（求微分）

参数方程确定的函数的导数

设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

例　**笛卡尔叶形线的参数方程为**$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

求其所确定的函数$y=y(x)$**的导数**

二、求导数（求微分）

幂指函数的导数

- $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow y = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$

- 对数求导法

$$y = f(x)^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \ln y = g(x)\ln f(x)$$

例 设$y = (1 + x^2)^{\tan x}$，求y'

二、求导数（求微分）

积分上限的函数的导数

(1) 若$f(x)$连续，$b(x)$可导，$F(x)=\int_a^{b(x)} f(t)dt$, 则

$$\boxed{F'(x)=f[b(x)]\cdot b'(x)}$$

(2) 若 $f(x)$连续，$a(x),b(x)$可导，$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$, 则

$$\boxed{F'(x)=f[b(x)]\cdot b'(x)-f[a(x)]\cdot a'(x)}$$

二、求导数（求微分）

（3）若 $f(x)$、$g(x)$连续，$b(x)$可导，$F(x)=\int_a^{b(x)} g(x)f(t)dt$,

则

$$\boxed{F'(x)=g(x)f[b(x)]b'(x)+\int_a^{b(x)} g'(x)f(t)dt}$$

二、求导数（求微分）

高阶导数求法

（1）逐步求$y', y'', \cdots$找规律

（2）莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \mathrm{C}_n^0 u^{(n)} v + \mathrm{C}_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + \mathrm{C}_n^n u v^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

例　　求下列函数的200阶导数

（1）$y = \ln(1+2x)$　　（2）$y = x^2 \cos x$

二、求导数（求微分）

隐函数的二阶导数

- 由隐函数求导法求出y'，再用求导法则对y'关于x求导，仍视y为隐函数$y(x)$.

- 视y为隐函数$y(x)$, 方程两端对x求导两次, 分别解出y'和y''.

二、求导数（求微分）

参数方程确定的函数的二阶导数

设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

例　　**求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 对应的点处的曲率**

三、求不定积分

微分运算与求不定积分的运算的关系

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C \quad 或 \quad \int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$$

三、求不定积分

方法（1）：直接积分法

由定义直接利用基本积分表与积分的性质求不定积分的方法

$$\int k\mathrm{d}x = kx + C \qquad \int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \qquad \int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C$$

$$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C \qquad \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

三、求不定积分

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

三、求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad a > 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \qquad a \neq 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \qquad a \neq 0$$

$$\int \sec x dx = \ln \left| \sec x + \tan x \right| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \csc x - \cot x \right| + C$$

三、求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C \qquad a > 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C \qquad a > 0$$

三、求不定积分

方法（2）：凑微分法

例　　求不定积分$\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt[4]{1-2x^3}}\mathrm{d}x$

方法（3）：第二换元法

常用的有三角代换、根式代换、倒代换

例　　求不定积分$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$

三、求不定积分

方法（4）：分部积分法

例　　求不定积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$

方法（5）：对于有理函数的积分

例　　求不定积分 $\int \frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x$

四、求定积分

牛顿—莱布尼茨公式

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)\in C[a,b] \\ F'(x)=f(x) \end{array}} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

求定积分问题转化为求原函数的问题；

除此之外，还可利用定积分的性质、几何意义、简化定积分计算的技巧等

例　　求定积分$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

四、求定积分

简化定积分计算的公式

（1） $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$

（2） 若$f(x)$是周期为T的连续函数，则

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{a+nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx \qquad (n \in N)$$

四、求定积分

简化定积分计算的公式

（3）　若 $f(x)$在$[0,1]$上连续，则

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$(2)\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$(3)\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

四、求定积分

简化定积分计算的公式

（4）　华莱士(*Wallis*)公式、点火公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

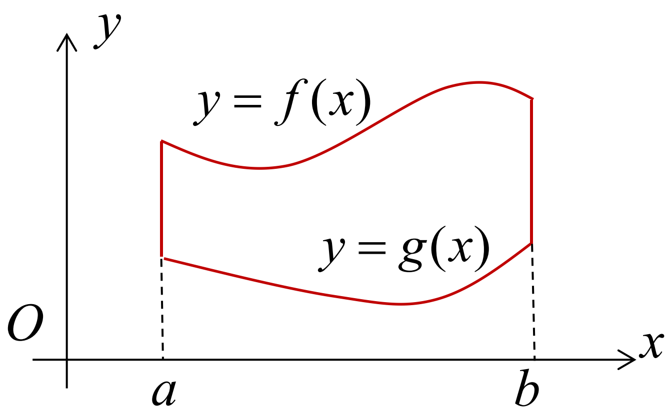
$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{为正偶数} \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{为大于 } 1 \text{的奇数} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{为正偶数} \\[2ex] \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3}, & n \text{为大于 } 1 \text{的奇数} \end{cases}$$

四、求定积分

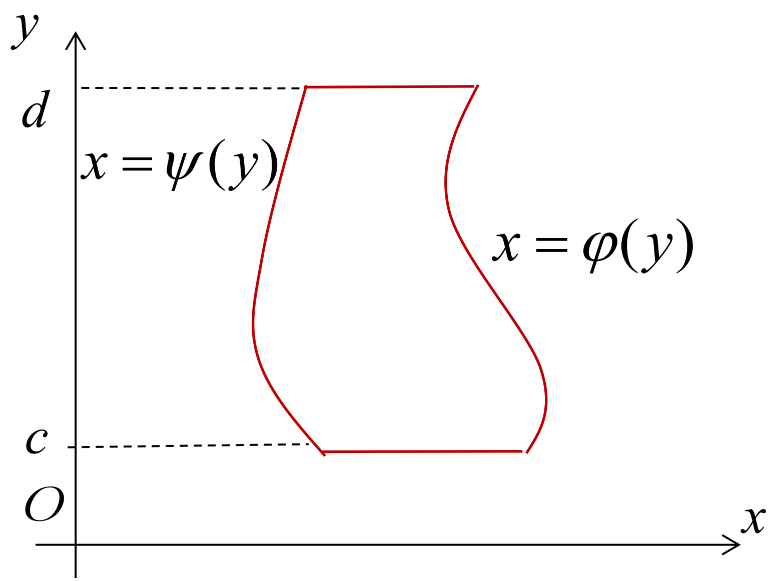
定积分的几何应用

（1）平面图形的面积

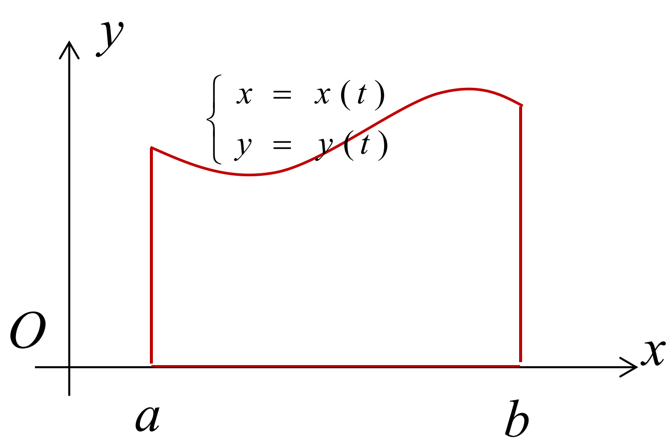


$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

四、求定积分



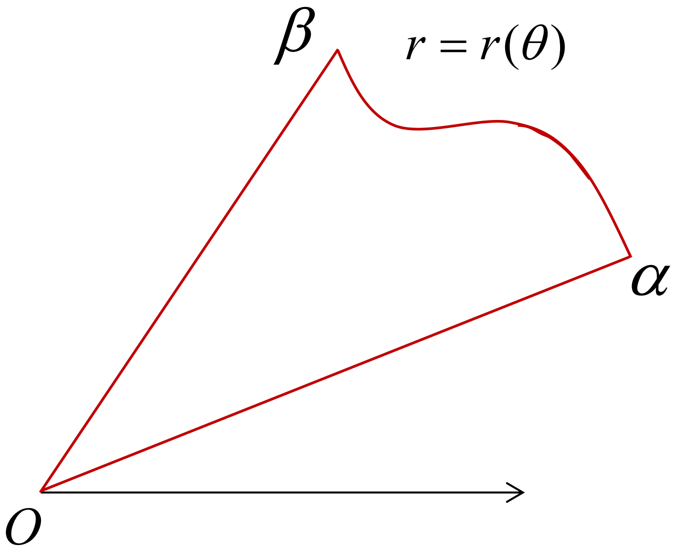
$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]dy$$



$$t\in[\alpha,\beta],\quad a=x(\alpha),\ b=x(\beta)$$

$$A=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

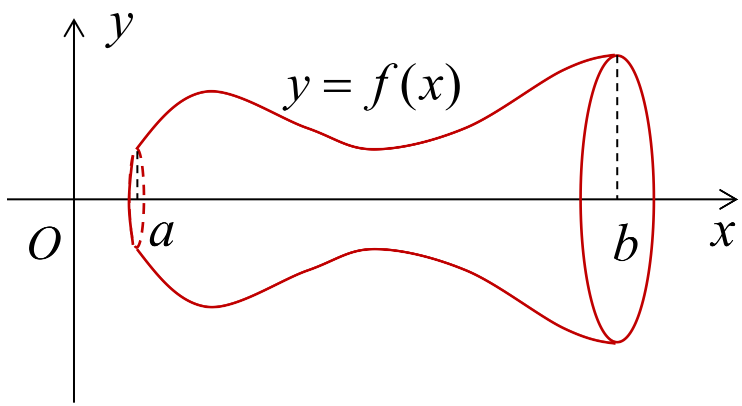
四、求定积分



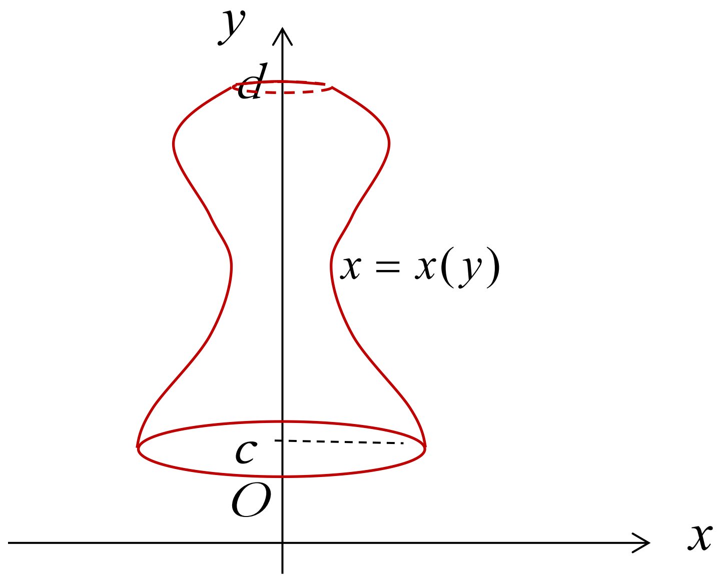
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta$$

四、求定积分

（2）旋转体的体积



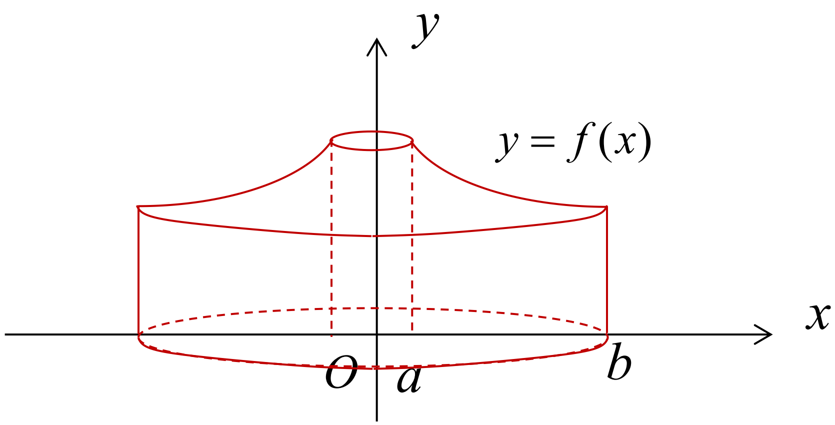
$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$



切片法公式

$$V = \int_c^d \pi \cdot x^2(y)dy$$

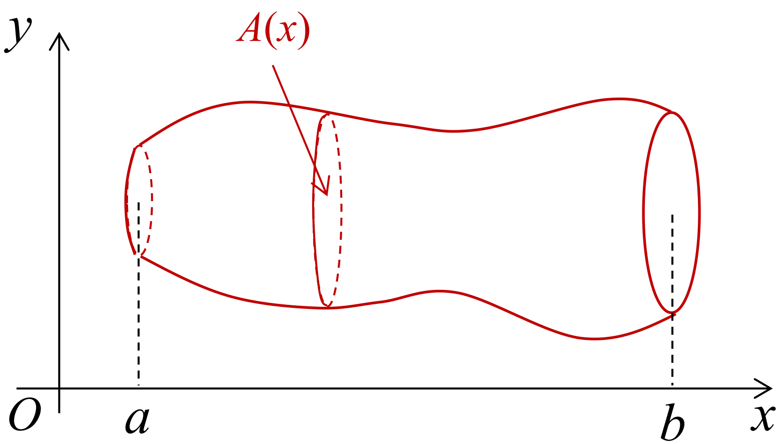
四、求定积分



柱壳法公式

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

（3）已知平行截面面积的立体体积



$$V = \int_a^b A(x) dx$$

四、求定积分

（4）平面曲线的弧长

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$$

四、求定积分

例　　求曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(0\le x\le 1)$的弧长，并求该曲线与$x=1$及$x$轴围成的平面图形的面 积，再分别求该平面图形绕$x$轴、$y$轴旋转而成的旋转体的体积

四、求定积分

反常积分

（1）无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

（右端两项都收敛，左端才收敛）

四、求定积分

（2）瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$ （a为$f(x)$的瑕点）

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ （c为$f(x)$的瑕点）

两项都收敛，左端才收敛

例　　判断反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$的敛散性

五、解微分方程

（1）可分离变量的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$$

化为 $\dfrac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx$ 后两边积分

五、解微分方程

（2）齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

设 $u = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu'$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

（可分离变量的微分方程）

五、解微分方程

（3）一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = 0$$

（一阶线性齐次微分方程）

（可分离变量的微分方程）

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

（一阶线性非齐次微分方程）

通解 $y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$

五、解微分方程

（4）$y^{(n)}=f(x)$型方程

逐次积分（积分一次，就降阶一次）

（5）$y''=f(x,y')$型方程(不显含未知函数y)

设 $y'=p \Rightarrow \dfrac{dp}{dx}=f(x,p)$

关于p,x的一阶微分方程

五、解微分方程

（6）$y''=f(y,y')$型方程(不显含自变量x)

设 $y' = p$ $\Rightarrow$ $y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$

$$\Rightarrow \quad \underline{p\frac{dp}{dy} = f(y, p)}$$

关于p, y的一阶微分方程

五、解微分方程

（7）常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0$$ 其中p,q—常数

解法： 特征方程法 $r^2 + pr + q = 0$

通解：

特征根情况	通解形式
相异实根r_1, r_2	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
相同实根 r	$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$
共轭复根$\alpha \pm i\beta$	$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

五、解微分方程

（8）常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$ 其中p, q—常数

（1）：$\boldsymbol{f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)}$**型**　　其中 $P_m(x)$是m次多项式

方程的特解形式为 $\boxed{y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)}$

其中：（1）$Q_m(x)$是m次待定多项式

（2）$k = \begin{cases} 0, & \lambda\text{不是特征根} \\ 1, & \lambda\text{是特征单根} \\ 2, & \lambda\text{是特征重根} \end{cases}$

五、解微分方程

（8）常系数非齐次线性微分方程

（2）：$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$型

特解形式

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[A_m(x)\cos\omega x+B_m(x)\sin\omega x]\qquad m=\max\{l,n\}$$

其中：（1）$A_m(x)$、$B_m(x)$是m次待定多项式

（2）$k=\begin{cases}0, & \lambda\pm i\omega\text{不是特征根}\\ 1, & \lambda\pm i\omega\text{是特征单根}\end{cases}$

注意：即使$f(x)$中$P_l(x)=0$（或$Q_n(x)=0$），所设特解中仍应同时含$\cos\omega x$和$\sin\omega x$

五、解微分方程

（9）线性微分方程的解的结构

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理1(齐次方程解的叠加原理)：

若$y_1(x)$、$y_2(x)$是方程(1)的两个解，那么$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$也是(1)的解，其中c_1，c_2是常数.

定理2(齐次方程通解的结构定理)：

若$y_1(x)$、$y_2(x)$是方程(1)的两个线性无关的解，

那么$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$是(1)的通解，其中c_1，c_2是常数.

五、解微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

定理3 （非齐次方程通解的结构定理）:

设 $y^*(x)$ 是非齐次方程 (2) 的一个特解，而 $\mathrm{Y}(x)$ 是齐次方程 (1) 的通解，则 $y(x)=y^*(x)+\mathrm{Y}(x)$ 是非齐次方程 (2) 的通解.

定理4 （非齐次方程解的叠加原理）

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1^*(x)\text{是}y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)\text{的特解} \\ y_2^*(x)\text{是}y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)\text{的特解} \end{array}} \Rightarrow$$

$$y_1^*(x) + y_2^*(x)\text{是}y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)\text{的特解}$$

六、存在性问题

与存在性有关的结论

（1）零点存在定理

若 $f(x)\in C[a,b]$，$f(a)f(b)<0$, 则$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(\xi)=0$$

（2）介值定理

设$f(x)\in C[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$, 且$A\neq B$, 则对于A与B之间的任意一个数μ, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=\mu$.

六、存在性问题

（3）罗尔中值定理

（1）$f(x) \in C[a,b]$

（2）$f(x) \in D(a,b)$

（3）$f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$f'(\xi) = 0$$

（4）拉格朗日中值定理

（1）$f(x) \in C[a,b]$

（2）$f(x) \in D(a,b)$

$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

六、存在性问题

（5）柯西中值定理

（1）$f(x), g(x) \in C[a,b]$

（2）$f(x), g(x) \in D(a,b)$

且 $g'(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

六、存在性问题

（6）泰勒中值定理

$f(x)$在(a,b)有$n+1$阶导数，$x_0\in(a,b)$，则当$x\in(a,b)$时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中ξ在x与x_0之间

六、存在性问题

（7）积分中值定理

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\quad(a \le \xi \le b)$$

例 设$f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，求证：（1）$\exists \xi \in (\frac{1}{2},1)$，使得$f(\xi)=\xi$

（2）$\exists \eta \in (0,\xi)$，使得$f'(\eta)-f(\eta)+\eta=1$

七、证明不等式

（1）利用函数单调性

（2）利用曲线凹凸性

$f(x)$在区间I连续，且$\forall x_1, x_2 \in I$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凹的（或凹弧）.

（3）利用拉格朗日中值定理

七、证明不等式

（4）利用带拉格朗日余项的泰勒公式

（5）积分不等式

例　　设$b > a > e$，证明$a^b > b^a$

八、导数的应用

掌握了函数图形的描绘就掌握了导数的应用

利用函数特性描绘函数图形

（1）讨论函数$f(x)$的定义域、奇偶性、周期性

（2）求出导数f'，f''，确定f的**间断点**和f'，f''为零或不存在的点

（3）以上述点将定义域分成若干区间，通过列表讨论单调性、极值、凹凸性和**拐点**

（4）求出**渐近线**（**水平**、**铅直**、**斜**渐近线）

（5） 描绘图形，有时可取图形上几个特殊点

八、导数的应用

间断点

函数$f(x)$在点x_0处连续必须满足三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义； (2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$； (3) $A = f(x_0)$.

如果上述三个条件中至少有一个不满足，则称函数$f(x)$在点x_0处不连续(或间断)，并称点x_0为$f(x)$的不连续点(或间断点).

八、导数的应用

（1）第一类间断点

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$与$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$均存在.

可去间断点

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \text{或} f(x_0) \text{无定义}$$

跳跃间断点

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

八、导数的应用

（2）第二类间断点

除第一类间断点以外的间断点

拐点

连续曲线上凹凸的分界点$(x_0, f(x_0))$称为曲线的拐点

八、导数的应用

渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, 则直线$y=b$是曲线$y=f(x)$ 的**水平渐近线**.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的**铅直渐近线**.

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (a,b 为常数), 那么 $y=ax+b$ 就是$y=f(x)$的一条**斜渐近线**.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$$

九、近似计算

（1）应用微分求近似值

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (|\Delta x|\text{很小时})$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

（2）应用带有拉格朗日余项的泰勒公式求近似值

例　　**近似计算** $\boldsymbol{e^{0.01}}$