习题课

张婧妍

中国石油大学（克拉玛依校区）文理学院数学系

2025 年 6 月 4 日

Question 1

一盒零件有 5 个正品，2 个次品，不放回任取 3 个，其中至少有 2 个正品的概率为_____.

Q1

Answer:

$$p=\frac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}+\frac{C_5^2}{C_7^3}=\frac{10\times 2}{35}+\frac{10}{35}=\frac{6}{7} \tag{1}$$

知识点：古典概型（1.4）

Question 2

设 A, B 为两随机事件，已知 $P(A) = 0.7 = 0.3 + P(B), P(A \cup B) = 0.8$，则 $P(A|\overline{A} \cup B) =$

（A） 0.4;　（B） 0.5;　（C） 0.6;　（D） 0.7.

Q2

Answer: B.

$$
\begin{aligned}
P(A|\overline{A}\cup B) &= \frac{P(A\cap(\overline{A}\cup B))}{P(\overline{A}\cup B)} \\
&= \frac{P(AB)}{P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)}
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\rightarrow P(AB)=0.3$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.1$$

$$P(A|\overline{A}\cup B)=\frac{0.3}{0.3+0.4-0.1}=0.5$$

知识点：事件间的关系；条件概率

补充：A 与 B 独立吗？验证 $P(AB)=P(A)P(B)$

Question 3

设随机变量 X 的分布律为：
$P(X=a)=0.6, P(X=b)=p, (a<b)$. $E(X)=1.4, D(X)=0.24$，则 a, b 的值为：

(A) $a=1, b=2$;　　(B) $a=-1, b=2$;

(C) $a=1, b=-2$;　　(D) $a=0, b=1$.

Q3

Answer: A.

$$\begin{cases} 0.6a + 0.4b = 1.4 \\ 0.6a^2 + 0.4b^2 = 0.24 + 1.4^2 \end{cases} \tag{3}$$

知识点：离散型随机变量分布律；期望、方差

Question 4

设随机变量 $X \sim P(\lambda)$（泊松分布）：$Var(X) = 2$，则 λ 的值与 $P(X = 1|X \geq 1)$ 分别为：

(A) $1/2, \frac{2}{e^2-1}$;

(B) $1/2, \frac{2}{1-e^2}$;

(C) $2, \frac{2}{e^2-1}$;

(D) $2, \frac{2}{1-e^2}$.

Q4

Answer: C.

$$
\begin{aligned}
P(X=1|X\geq 1) &= \frac{P(X=1, X\geq 1)}{P(X\geq 1)} \\
&= \frac{P(X=1)}{1-P(X<1)} = \frac{P(X=1)}{1-P(X=0)} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{2}{e^2-1}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

知识点：条件概率；泊松分布的分布律、期望、方差

Question 5

设随机变量 X, Y 满足：$D(X) = 4, D(Y) = 1, D(3X - 2Y) = 28$，则 ρ_{XY} 的值为：

(A) 0.4; (B) 0.5; (C) 0.6; (D) 0.7.

Q5

Answer: B.

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \tag{5}$$

$$D(aX - bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) - 2abCov(X, Y) \tag{6}$$

$$\rho_{XY} = \frac{1}{2}$$

知识点：方差，协方差，相关系数

补充：两随机变量相互独立，则协方差等于零；反之未必成立。

独立一定不相关，相关不一定独立。

判断相关：$\rho_{XY} = 0$ 或者 $Cov(X, Y) = 0$ 或者 $E(XY) = E(X)E(Y)$;

判断独立：$f(x, y) = f(x)f(y)$.

Question 6

设随机变量 X, Y 独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $E(X^2Y^2)$ 等于：

（A）0; （B）$1/2$; （C）$1/3$; （D）$2/3$.

Q6

Answer: D.

知识点：期望，方差

$E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2)$

$E(X^2) = D(X) + E^2(X) = 2$

$E(Y^2) = D(Y) + E^2(Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$

Question 7

设总体 $X \sim N(2,4), X_1, X_2, ..., X_n$ 为总体的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则：

(A) $\overline{X} \sim N(2, 4/n)$;

(B) $\overline{X} \sim N(2, 1/n)$;

(C) $\overline{X} \sim N(0, 1)$；

(D) $\overline{X} \sim N(0, 2/n)$.

Q7

Answer: A.

$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

知识点：样本均值分布，中心极限定理

Question 8

设总体 $X \sim U(0,\theta), X_1, X_2, ..., X_n$ 为总体的一个样本，求未知参数 θ 的矩估计量，该估计量满足无偏性吗：

（A）$2\overline{X}$; 满足;　　（B）$\overline{X}$; 满足;

（C）$2\overline{X}$; 不满足；　　（D）$\overline{X}$; 不满足.

Q8

Answer: A.
矩估计法：总体均值 $=$ 样本均值；总体二阶矩 $=$ 样本二阶矩；$\cdots$
总体均值：$E(X)=\frac{\theta}{2}$; 样本均值：$\overline{X}$
总体均值 $=$ 样本均值：$\hat{\theta}=2\overline{X}$
无偏性：$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum X_i)=\frac{1}{n}\sum E(X_i)=\theta$
有效性：$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum X_i)=\frac{1}{n^2}\sum D(X_i)$
知识点：矩估计; 无偏性

Question 9

在 H_0 为原假设，H_1 为备择假设的假设检验中，若显著性水平为 α ，则：

（A） $P($ 接受 $H_0|H_0$ 成立 $)=\alpha;$ （B） $P($ 接受 $H_1|H_1$ 成立 $)=\alpha;$

（C） $P($ 接受 $H_1|H_0$ 成立 $)=\alpha$； （D） $P($ 接受 $H_0|H_1$ 成立 $)=\alpha.$

Q9

Answer: C.

知识点：假设检验的概念：原假设备择假设、显著性水平、两类错误、拒绝域接受域。

第一类错误：$P($ 拒绝 $H_0|H_0$ 成立 $) = \alpha$ 或者 $P($ 接受 $H_1|H_0$ 成立 $) = \alpha$;

第二类错误：$P($ 接受 $H_0|H_0$ 不成立 $) = \beta$ 或者 $P($ 拒绝 $H_1|H_0$ 不成立 $) = \beta$.

Question 10

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, ..., X_{16}$ 为总体的一个样本，$\overline{X}$ 是样本均值，计算得 $\bar{x} = 5.18$，样本标准差 $s = 6$，若 μ, σ 均未知，则 μ 的置信度为 95% 的双侧置信区间为：

(A) $(5.18 - \frac{6.26}{\sqrt{15}} t_{0.05}(15), 5.18 + \frac{6.26}{\sqrt{15}} t_{0.05}(15))$;

(B) $(5.18 - \frac{6.26}{\sqrt{15}} t_{0.025}(15), 5.18 + \frac{6.26}{\sqrt{15}} t_{0.025}(15))$;

(C) $(5.18 - \frac{6.26}{\sqrt{16}} t_{0.05}(16), 5.18 + \frac{6.26}{\sqrt{16}} t_{0.05}(16))$;

(D) $(5.18 - \frac{6.26}{\sqrt{16}} t_{0.025}(16), 5.18 + \frac{6.26}{\sqrt{16}} t_{0.025}(16))$.

Q10

Answer: B.
知识点：区间估计

设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{7}$$

(1) 求常数 c;
(2) 求边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$;
(3) 求 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;
(4) 求 $F(0.5, 0.5)$;
(5) 计算 $Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$，求 $P(X + Y < 1)$.
(6) X 与 Y 是否独立？为什么？是否相关？为什么？

Q11

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1 \to c = 6$

(2)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^1 f(x,y)dy = 6x - 6x^2, 0 \le x \le 1 \\ 0, \qquad otherwise. \end{cases} \tag{8}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y f(x,y)dx = 3y^2, 0 \le y \le 1 \\ 0, \qquad otherwise. \end{cases} \tag{9}$$

Q11

(3)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, 0 \le y \le 1 \\ 0, \qquad otherwise. \end{cases} \tag{10}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{6x}{6x-6x^2} = \frac{x}{x-x^2}, 0 \le y \le 1 \\ 0, \qquad otherwise. \end{cases} \tag{11}$$

(4) $F(0.5, 0.5) = P(X \le 0.5, Y \le 0.5) = \int_0^{0.5} \int_0^y 6x dx dy = 0.125$

Q11

(5)

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx \tag{12}$$

$0 \leq x \leq y \leq 1 \rightarrow z = x + y \in [0, 2]$
分段：$z \in [0, 1]$ 和 $z \in [1, 2]$

$$f_Z(z) = \int_0^{z/2} 6xdx = \frac{3z^2}{4}$$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} 6xdx = 6z - 3z^2$$

$$f_Z(z) \begin{cases} \frac{3z^2}{4}, 0 \leq z \leq 1 \\ 6z - 3z^2, 1 \leq z \leq 2 \\ 0, \qquad otherwise. \end{cases} \tag{13}$$

Q11

（6）X, Y 不独立；
判断相关：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x 6x(1-x) dx = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(y) dx = \int_0^1 y 3y^2 dy = \frac{3}{4}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y) dxdy = \int_0^1\int_0^y 6x^2 y dxdy = \frac{2}{5}$$

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{40} \to X, Y$