模拟试卷一答案

一、选择题

1. A　2. C　3. B　4. D

二、填空题

5. $z=2(x^2+y^2)$　6. -1　7. 2π　8. $\dfrac{-1}{1+x}$

三、计算题

9. 解：设动点为 $P(x,y,z)$

$\because |PP_1|-|PP_2|$

$\therefore \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2+(z+1)^2}$

化简后得，所求轨迹方程为：$2x+y-3z-6=0$

10. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{y^2}e^{-\frac{x}{y^2}}$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}=\frac{2}{y^3}e^{-\frac{x}{y^2}}-\frac{1}{y^2}e^{-\frac{x}{y^2}}\cdot\left(\frac{2x}{y^3}\right)=\frac{2}{y^3}\left(1-\frac{x}{y^2}\right)e^{-\frac{x}{y^2}}$$

11. 解：设 $u=x,v=xy$

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u+yf_v$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_v$

12. 解：方向 $\vec{l}=(1,\sqrt{3})$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=y$　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x$

从而 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta=y\cdot\dfrac{1}{2}+x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

这样 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(2,3)}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$

13. 解：设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2-3z$

$F_x=2x \quad F_y=4y \quad F_z=-3$

$F_x(2,1,2)=4 \quad F_y(2,1,2)=4 \quad F_z(2,1,2)=-3$

所求法线方程为 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{-3}$

14. 解：$I=\int_0^1 dy\int_y^{2-y} ydx=\int_0^1 y(2-2y)dy=\dfrac{1}{3}$

15. 解：$I=\int_0^2 dx\int_0^2 dy\int_0^2 (x+y+z)dz=\int_0^2 dx\int_0^2 [2(x+y)+2]dy$

$=\int_0^2 [4(x+1)+4]dx=24$

16. 解：原式 $=\int_0^1 [2x-(x-1)+1]\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}\int_0^1 (x+2)dx=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

17. 解：设 $D:x^2+y^2\leqslant a^2$，由格林公式得

$\oint_D ydx-xdy=\iint_D (-1-1)dxdy=-2\iint_D dxdy=-2\pi a^2$

18. 解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0<1$

由柯西判别法得，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{[\ln(n+1)]^n}$ 绝对收敛

四、综合题

19. 解：$\because \begin{cases} f_x=3x^2-3y=0 \\ f_y=3y^2-3x=0 \end{cases}$ $\therefore$ 得驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$

而 $f_{xx}=6x \quad f_{xy}=-3 \quad f_{yy}=6y$

对于$(0,0)$点，$B^2-AC=9>0$，所以$(0,0)$不是极值点

对于$(1,1)$点，$B^2-AC=-27<0$，$A=6>0$，

所以$f(x,y)$在$(1,1)$点处取得极小值为$f(1,1)=-1$

20. 解：空间体在Oxy面上投影域为$D:x^2+y^2\leqslant 2$

所求体积V为

$$V=\iint_D[(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)]dxdy=\iint_D(6-3x^2-3y^2)dxdy=6\pi$$

21. 解：$\because \dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{x+2}{2}}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}(x+2)^n,\left|\dfrac{x+2}{2}\right|<1$

两边对x求导得

$$-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(x+2)^{n-1}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x+2)^{n-1},(-4<x<0)$$