第一章 自测题

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\ln\left(1+2x^3\right)}=$__________.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$___________.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+ax+b}{x+1}=3$，其中为 a,b 常数，则 $a=$_________，$b=$________.

4. 若 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续，则 $a=$_________.

5. 曲线 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$ 的水平渐近线是___________，铅直渐近线是___________.

6. 曲线 $y=\left(2x-1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为______________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. “对任意给定的 $\varepsilon\in\left(0,1\right)$，总存在整数 N，当 $n\geq N$ 时，恒有 $\left|x_n-a\right|\leq 2\varepsilon$ ”是数列 $\left\{x_n\right\}$ 收敛于 a 的______.

A. 充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

2. 设 $g\left(x\right)=\begin{cases}2-x, & x\leq 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geq 0\end{cases}$ 则 $g\left[f\left(x\right)\right]=$______.

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geq 0\end{cases}$　B. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geq 0\end{cases}$　C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geq 0\end{cases}$　D. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geq 0\end{cases}$

3. 下列各式中正确的是______.

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}^{-1}$

4. 设 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{\tan x}-1$ 与 x^n 是等价无穷小，则正整数 $n=$______.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ______.

A. 没有渐近线　　B. 仅有水平渐近线

C. 仅有铅直渐近线　　D. 既有水平渐近线又有铅直渐近线

6. 下列函数在给定区间上无界的是______.

A. $\dfrac{1}{x}\sin x,\quad x\in(0,1]$　　B. $\dfrac{1}{x}\sin x,\quad x\in(0,+\infty)$

C. $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,1]$　　D. $x\sin\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,+\infty)$

三、求下列极限（每小题 5 分，共 35 分）

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}$

5. 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln\left[f(1)f(2)\cdots f(n)\right]$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

四、确定下列极限中含有的参数（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2-2x+b}{x^2+x-2}=-2$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+\sqrt{ax^2+bx-2}\right)=1$

五、讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^x-b^x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1)$ 在 $x=0$ 处的连续性，

若不连续，指出该间断点的类型.（本题 6 分）

六、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判定类型. （本题 7 分）

七、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$. 证明：一定存在一点 $\xi\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，使得

$f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)$. （本题 6 分）

第二章　自测题

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $f(x_0)=0, f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{h\to\infty} hf\left(x_0-\dfrac{1}{h}\right)=$________.

2. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\cos x^2$，则 $f'(x)=$________.　　3. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$________.

4. 设 $y=f(\mathrm{e}^{\sin x})$，其中 $f(x)$ 可导，则 $\mathrm{d}y=$________.

5. 设 $y=\arccos\sqrt{x}$，则 $y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$________.

6. 曲线 $xy=1+x\sin y$ 在点 $\left(\dfrac{1}{\pi},\pi\right)$ 的切线方程为____________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列函数中，在 $x=0$ 处可导的是______.

A. $y=|x|$　　B. $y=|\sin x|$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=|\cos x|$

2. 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=$______.

A. 6　　B. -6　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $-\dfrac{1}{6}$

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时恒有 $|f(x)|\le x^2$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的______.

A. 间断点　　B. 连续而不可导的点

C. 可导的点，且 $f'(0)=0$　　D. 可导的点，且 $f'(0)\neq 0$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases}$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$ 的导数______.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

5. 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$______.

A. -1　　B. 0.1　　C. 1　　D. 0.5

三、解答题（共 67 分）

1. 求下列函数的导数（每小题 4 分，共 16 分）

(1) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$

(2) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

(3) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$

(4) $y = (\sin x)^{\cos x}$

2. 求下列函数的微分（每小题 4 分，共 12 分）

(1) $y = x\ln x + \sin x^2$

(2) $y = \mathrm{e}^{\cot^2 \frac{1}{x}}$

(3) $y = x^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

3. 求下列函数的二阶导数（每小题 5 分，共 10 分）

（1） $y = \cos^2 x\ln x$

（2） $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x} & ,x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 可导，试求 a 与 b.（**本题 6 分**）

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x & ,x<0\\ \ln(1+x), & x\ge 0\end{cases}$，求 $f'(x)$.（**本题 6 分**）

6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\dfrac{x^{2}}{y}-xy^{2}=1$ 所确定，求 $\mathrm{d}y$.（**本题 6 分**）

7. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=a\left(\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t\right)\\ y=a\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}$.（**本题 6 分**）

8. 求曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{1+t}{t^{3}}\\ y=\dfrac{3}{2t^{2}}+\dfrac{1}{2t}\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程和法线方程.（**本题 5 分**）

第三章　自测题

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $a>0,b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$__________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$__________.

4. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$的凹区间____________，凸区间为______________.

5. 若 $f(x)=x\mathrm{e}^x$，则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$__________处取得极小值.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 设 a,b 为方程 $f(x)=0$ 的两根， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，则 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内______.

A. 只有一个实根　　　　B. 至少有一个实根

C. 没有实根　　　　D. 至少有两个实根

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $x\neq x_0$ 时，$(x-x_0)f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是______.

A. 极小值　　　　B. 极大值

C. x_0 为 $f(x)$ 的驻点　　　　D. x_0 不是 $f(x)$ 的极值点

3. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则______.

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　　　B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0,f(0))$ 是曲线的拐点　　D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 不是曲线的拐点

4. 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则 $\exists\delta>0$，使______.

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.　　　　B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

C. $\forall x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$　　　　D. $\forall x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)>f(0)$.

三、解答题(共 73 分)

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，

证明在$(0,1)$ 内至少存在一点ξ 使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\tan\xi}$. **（本题 6 分）**

2. 证明下列不等式（每小题 9 分，共 18 分）

（1）当$0<a<b$时，$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

（2）当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

3. 求下列函数的极限（每小题 8 分，共 24 分）

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$

4. 求下列函数的极值（每小题 6 分，共 12 分）

（1） $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

（2） $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ x+1, & x<0 \end{cases}$

5. 求 $y=\dfrac{2x}{\ln x}$ 的极值点、单调区间、凹凸区间和拐点. **（本题 6 分）**

6. 证明方程 $x\ln x+\frac{1}{\mathrm{e}}=0$ 只有一个实根.（**本题 7 分**）

第一章 自测题

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $-\frac{1}{4}$　　2. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$　　3. $a=7$，$b=5$　　4. $a=-2$

5. 水平渐近线是 $y=0$，铅直渐近线是 $x=3$　　6. $y=2x+1$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. C　　2. D　　3. D　　4. A　　5. D　　6. C

三、求下列极限（每小题 5 分，共 35 分）

解：1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{4x+1}-3)}{4(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}-3)}{4}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\mathrm{e}^{2x}\right)^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\mathrm{e}^{2x}\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\right]^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)\right]^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}\right)^{-\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}\left(-\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}\right)}\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}\right)^{\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}\right)}\cdot\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\mathrm{e}^{-2}\cdot\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-3}$.

3. $Q\,3^n<1+2^n+3^n<3\cdot 3^n$，$\therefore 3<\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}<3\cdot\sqrt[n]{3}$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=3$.

4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x}{\sqrt{2x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$.

5. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left[f(1)f(2)\cdots f(n)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln f(1)+\ln f(2)+\cdots+\ln f(n)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\cdots+n)\ln a}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n\right)\ln a}{2n^2}=\frac{\ln a}{2}$$.

6. $$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1$$,

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(2e^{-\frac{1}{x}}+1\right)}{e^{\frac{4}{x}}\left(e^{-\frac{4}{x}}+1\right)}+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=1+\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{3}{x}}=1$$,

所以，原式$=1$.

7. $$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\frac{(\sqrt{x})^2}{2}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x}{2}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=0$$.

四、确定下列极限中含有的参数（每小题 5 分，共 10 分）

解：1. 据题意设 $\frac{ax^2-2x+b}{x^2+x-2}=\varphi(x)$，则 $ax^2-2x+b=(x-1)(x-2)\varphi(x)$，令 $x=1$ 得 $a-2+b=0$，令 $x=2$ 得 $4a+4+b=0$，故 $a=-2,b=4$.

2. 左边 $$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a)x^2-bx+2}{x-\sqrt{ax^2+bx-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left[(1-a)x-b+\frac{2}{x}\right]}{x\left[1+\sqrt{a+\frac{b}{x}-\frac{2}{x^2}}\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a)x-b}{1+\sqrt{a}}$$，右边$=1$

故 $\lim_{x\to-\infty}\left[(1-a)x-b\right]=1+\sqrt{a}$，则 $a=1,b=-2$.

五、解：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\ln\frac{a}{b}\neq f(0)=0$，故$f(x)$在$x=0$处不连续，所以$x=0$为$f(x)$得第一类（可去）间断点.

六、解：$f(x)=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}$，而$\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}=\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin x}\frac{\ln\frac{\sin t}{\sin x}}{\frac{\sin t}{\sin x}-1}$

$=\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin x}\frac{\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1+1\right)}{\frac{\sin t}{\sin x}-1}=\frac{x}{\sin x}$，故$f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$，$x=0,x=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$都是

$f(x)$的间断点，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$，故$x=0$为$f(x)$的第一类（可去）间断点，

$x=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$均为$f(x)$的第二类间断点.

七、证明：设$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$，显然$F(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上连续，

而$F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)$，$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)$，

$$F(0)F\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)f(1)-f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)=2f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)-f^2(0)-f^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\left[f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\le 0,$$

故由零点定理知：一定存在一点$\xi\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，使$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$.

第二章　自测题

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. -1　　2. $\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$　　3. $(-\sqrt{1-x^2}+C)$　　4. $y=e^{\sin x}\cos x f'(e^{\sin x})dx$

5. -1　　6. $y-\pi=-\frac{\pi^2}{2}\left(x-\frac{1}{\pi}\right)$或$y=-\frac{\pi^2}{2}x+\frac{3}{2}\pi$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D　　　2. A　　　3. C　　　4. D　　　5. D

三、解答题（共 67 分）

解：1.(1) $y'=\left[\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)\right]'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

(3) $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

$$=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a+a^{a^x}a^x(\ln a)^2$$.

(4) 两边取对数得 $\ln y=\cos x\ln\sin x$，两边求导数得

$\dfrac{1}{y}y'=-\sin x\ln\sin x+\cot x\cos x$，$y'=(\sin x)^{\cos x}(-\sin x\ln\sin x+\cot x\cos x)$.

2. 求下列函数的微分（每小题 4 分，共 12 分）

(1) $dy=d(x\ln x+\sin x^2)=(\ln x+1+\cos x^2\cdot 2x)dx$.

(2) $dy=d\left(e^{\cot^2\frac{1}{x}}\right)=e^{\cot^2\frac{1}{x}}\cdot 2\cot\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\csc^2\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\dfrac{2}{x^2}\cdot\cot\dfrac{1}{x}\cdot\csc^2\dfrac{1}{x}\cdot e^{\cot^2\frac{1}{x}}dx$.

(3) $dy=d\left(x^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)=\left(2x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}-\dfrac{x^2}{\sqrt{(x+1)^3(1-x)}}\right)dx$.

3. 求下列函数的二阶导数（每小题 5 分，共 10 分）

（1） $y'=2\cos x(-\sin x)\ln x+\dfrac{\cos^2 x}{x}=-\sin 2x\ln x+\dfrac{\cos^2 x}{x}$，

$$y''=-\cos 2x\cdot 2\ln x\cdot\left(-\frac{\sin 2x}{x}\right)+\frac{x\cdot 2\cos x(-\sin x)-\cos^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{\sin 4x\cdot\ln x}{x}-\frac{x\sin 2x+\cos^2 x}{x^2}$$.

（2） $y'=\dfrac{-(1-x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\dfrac{2}{(1+x)^2}$，$y''=-\dfrac{-4(1+x)}{(1+x)^4}=\dfrac{4}{(1+x)^3}$.

4. 首先 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=e=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=a+b$，故 $a+b=e$，

其次，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{e^{1+\Delta x}-e}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}e\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{a(1+\Delta x)+b-(a+b)}{\Delta x}=a$，

由于$f(x)$在 $x=1$处可导，故$a=e$，故$a=e$，$b=0$.

5. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$，

故$f'(0)=1$，由于$f(x)$在$x>0$，$x<0$时均可导，故$f'(x)=\begin{cases}\cos x, x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, x\ge 0\end{cases}$.

6. 方程可变形为$2\ln x-\ln y-xy^2=1$，两边求微分得

$\dfrac{2}{x}dx-\dfrac{1}{y}dy-y^2dx-2xydy=0$，故$dy=\dfrac{2y-xy^3}{x+2x^2y^2}dx$.

7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{a\cos t}{a\left(\dfrac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\tan\frac{t}{2}}-\sin t\right)}=\dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\sin t}-\sin t}=\dfrac{\cos t\sin t}{1-\sin^2 t}=\tan t$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'}{x'(t)}=\dfrac{(\tan t)'}{x'(t)}=\dfrac{\sec^2 t}{a\left(\dfrac{1}{\sin t}-\sin t\right)}=\dfrac{\sec^4 t\sin t}{a}$.

8. $y'=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{-3\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{1}{2t^2}}{-\dfrac{3+2t}{t^4}}=\dfrac{3t+\dfrac{1}{2}t^2}{3+2t}$，故$y'|_{t=1}=\dfrac{7}{10}$.当$t=1$时，$x=2, y=2$.

故曲线在$t=1$处的切线方程为$y-2=\dfrac{7}{10}(x-2)$，即$7x-10y+6=0$，

法线方程为$y-2=-\dfrac{10}{7}(x-2)$，即$10x+7y-34=0$.

第三章　自测题

一、　填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $(ab)^{\frac{3}{2}}$　2. $\frac{1}{3}$　3. $-\frac{1}{6}$　4. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　5. $-(n+1)$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1．B　2．A

3．B，提示：由题意得，$\exists\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(0,\delta)$ 时，$f''(x)>0$；即当 $x<0$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 取得极小值

4. C，提示：由定义 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$，由极限的保号性得 $\exists\delta>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$，即 $f(x)>f(0)$

三、解答题(共 73 分)

证明：1.令 $F(x)=f(x)\sin x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$；

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

故 $f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$，即 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\tan\xi}$.

2.（1）令 $f(x)=\ln x,x\in[a,b]$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件．由拉格朗日中值定理得，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\ln b-\ln a=f'(\xi)(b-a)$ 即 $\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}=\frac{1}{\xi}$，又

$\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$，得到 $\frac{1}{b}<\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}<\frac{1}{a}$，从而 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

（2）令 $f_1(x)=x-\sin x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f_1'(x)=1-\cos x>0$，从而 $f_1(x)$ 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时单调递增，即 $f_1(x)>f_1(0)=0$，故 $\sin x<x$；令 $f_2(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f_2'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$，即 $f_2(x)$ 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时单调递减，即 $f_2(x)<f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故 $\frac{\sin x}{x}<\frac{2}{\pi}$；从而当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

解：3.（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)^2}=-\frac{e}{2}$.

4.⑴ 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；$f'(x)=\frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\frac{1}{3}$，不可导点 $x=0, x=1$；当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；故 $x=\frac{1}{3}$ 为极大值点，极大值为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$；$x=1$ 为极小值点，极小值为 $f(1)=0$.

⑵ $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(1+\ln x), & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\frac{1}{e}$，$x=0$ 为不可导点.

当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$；故 $x=0$ 为极大值点，极大值为 $f(0)=1$；$x=\frac{1}{e}$ 为极小值点，极小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

5. 定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$；$y'=\frac{2(\ln x-1)}{\ln^2 x}$，$y''=\frac{2(2-\ln x)}{x\ln^3 x}$，令 $y'=0$ 得驻点 $x=e$，令 $y''=0$ 得 $x=e^2$；列表得：

x	$(0,1)$	$(1,e)$	e	(e,e^2)	e^2	$(e^2,+\infty)$
y'	−	−	0	+	+	+
y''	−	+	+	+	0	−
y	单减 凸	单减 凹	极小值点	单增 凹	拐点 (e^2,e^2)	单增 凸

6．证明：令 $f(x)=x\ln x+\frac{1}{e}$，显然 $f\left(\frac{1}{e}\right)=0$，$f'(x)=1+\ln x$；令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=\frac{1}{e}$，且 $f''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0$；故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上当 $x=\frac{1}{e}$ 时取得极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right)=0$；当 $x\neq\frac{1}{e}$ 时，$f(x)>f\left(\frac{1}{e}\right)=0$，所以方程 $x\ln x+\frac{1}{e}=0$ 只有一个实根.