单双总体区间估计与单总体假设检验题目

一、单总体区间估计

1. 均值区间估计（方差已知）

某工厂生产的零件长度服从正态分布 $X \sim N(\mu, 0.25)$，现抽取 $n = 36$ 个零件，测得样本均值 $\overline{x} = 10.2$。求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间（$z_{0.025} = 1.96$）。

2. 均值区间估计（方差未知）

从一批灯泡中随机抽取 $n = 16$ 个，测得其使用寿命（单位：小时）的样本均值 $\overline{x} = 1500$，样本标准差 $s = 120$。已知灯泡寿命服从正态分布，求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间（$t_{0.025}(15) = 2.131$）。

3. 方差区间估计

已知某车间生产的产品重量服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，随机抽取 $n = 20$ 件产品，测得样本方差 $s^2 = 0.8$。求总体方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间（$\chi_{0.025}^2(19) = 32.852$，$\chi_{0.975}^2(19) = 8.907$）。

二、双总体区间估计

1. 两总体均值差区间估计（方差已知）

两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, 4)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, 9)$，分别从两个总体中抽取样本，$n_1 = 25$，$\overline{x} = 18$；$n_2 = 36$，$\overline{y} = 16$。求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间（$z_{0.025} = 1.96$）。

2. 两总体均值差区间估计（方差未知但相等）

设两个正态总体 X 和 Y，方差未知但相等，即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$。从两个总体中分别抽取样本：$n_1 = 10$，$\overline{x} = 22$，$s_1^2 = 5$；$n_2 = 15$，$\overline{y} = 20$，$s_2^2 = 6$。求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间（$t_{0.025}(23) = 2.069$）。

3. 两总体方差比区间估计

从两个正态总体中分别抽取样本，$n_1 = 12$，样本方差 $s_1^2 = 8$；$n_2 = 10$，样本方差 $s_2^2 = 5$。求两总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.95 的置信区间（$F_{0.025}(11, 9) = 3.92$，$F_{0.975}(11, 9) = \frac{1}{F_{0.025}(9, 11)} = \frac{1}{3.59} \approx 0.279$）。

三、单总体假设检验

1. 均值假设检验（方差已知）

某厂生产的一种元件，其寿命服从正态分布 $X \sim N(\mu, 100)$，从过去的生产情况看，元件的平均寿命为 $\mu_0 = 950$ 小时。现换了一批材料，从这批材料生产的元件中随机抽取 $n = 25$ 个，测得样本均值 $\overline{x} = 970$ 小时。问用这批材料生产的元件寿命是否有显著提高（$\alpha = 0.05$，$z_{0.05} = 1.645$）？

2. 均值假设检验（方差未知）

某品牌手机电池的平均待机时间为 120 小时，现推出新型号电池，随机抽取 $n = 16$ 块新型号电池进行测试，测得样本均值 $\overline{x} = 125$ 小时，样本标准差 $s = 8$ 小时。假设新型号电池待机时间服从正态分布，问新型号电池的平均待机时间是否显著高于原型号（$\alpha = 0.05$，$t_{0.05}(15) = 1.753$）？

3. 方差假设检验

某工厂生产的零件尺寸方差原定为 $\sigma_0^2 = 0.04$，现对生产工艺进行改进，抽取 $n = 20$ 个零件，测得样本方差 $s^2 = 0.06$。假设零件尺寸服从正态分布，问改进工艺后零件尺寸的方差是否显著变大（$\alpha = 0.05$，$\chi_{0.05}^2(19) = 30.144$）？

参考答案

一、单总体区间估计

1. 均值区间估计（方差已知）

置信区间公式为 $\overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，代入数据：$10.2 \pm 1.96 \times \frac{\sqrt{0.25}}{\sqrt{36}} = 10.2 \pm 1.96 \times \frac{0.5}{6} = 10.2 \pm 0.163$

所以总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (10.037, 10.363)。

2. 均值区间估计（方差未知）

置信区间公式为 $\overline{x} \pm t_{\alpha/2}(n - 1) \frac{s}{\sqrt{n}}$，代入数据：$1500 \pm 2.131 \times \frac{120}{\sqrt{16}} = 1500 \pm 2.131 \times 30 = 1500 \pm 63.93$

所以总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (1436.07, 1563.93)。

3. 方差区间估计

置信区间公式为 $\left[\frac{(n - 1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n - 1)}, \frac{(n - 1)s^2}{\chi_{1 - \alpha/2}^2(n - 1)}\right]$，代入数据：$\left[\frac{(20 - 1) \times 0.8}{32.852}, \frac{(20 - 1) \times 0.8}{8.907}\right] = \left[0.463, 1.707\right]$

所以总体方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (0.463, 1.707)。

二、双总体区间估计

1. 两总体均值差区间估计（方差已知）

置信区间公式为 $(\overline{x} - \overline{y}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$，代入数据：$(18 - 16) \pm 1.96 \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{9}{36}} = 2 \pm 1.96 \sqrt{0.16 + 0.25} = 2 \pm 1.96 \times 0.64= 2 \pm 1.254$

所以两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (0.746, 3.254)。

2. 两总体均值差区间估计（方差未知但相等）

先计算合并方差 $s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(10 - 1) \times 5 + (15 - 1) \times 6}{10 + 15 - 2} = \frac{45 + 84}{23} = 5.609$

置信区间公式为 $(\overline{x} - \overline{y}) \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$，代入数据：$(22 - 20) \pm 2.069 \times \sqrt{5.609} \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = 2 \pm 2.069 \times 2.368 \times 0.408= 2 \pm 2.013$

所以两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $(- 0.013, 4.013)$。

3. 两总体方差比区间估计

置信区间公式为 $\left[\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1 - \alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right]$，代入数据：$\left[\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{3.92}, \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{0.279}\right] = \left[0.408, 5.735\right]$

所以两总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $(0.408, 5.735)$。

三、单总体假设检验

1. 均值假设检验（方差已知）

- 原假设 $H_0: \mu \leq 950$，备择假设 $H_1: \mu > 950$。
- 检验统计量 $z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{970 - 950}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = \frac{20}{2} = 10$。
- 拒绝域为 $z > z_{0.05} = 1.645$，由于 $10 > 1.645$，拒绝 H_0，即认为用这批材料生产的元件寿命有显著提高。

2. 均值假设检验（方差未知）

- 原假设 $H_0: \mu \leq 120$，备择假设 $H_1: \mu > 120$。
- 检验统计量 $t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{125 - 120}{\frac{8}{\sqrt{16}}} = \frac{5}{2} = 2.5$。
- 拒绝域为 $t > t_{0.05}(15) = 1.753$，由于 $2.5 > 1.753$，拒绝 H_0，即认为新型号电池的平均待机时间显著高于原型号。

3. 方差假设检验

- 原假设 $H_0: \sigma^2 \leq 0.04$，备择假设 $H_1: \sigma^2 > 0.04$。
- 检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20 - 1) \times 0.06}{0.04} = 28.5$。
- 拒绝域为 $\chi^2 > \chi_{0.05}^2(19) = 30.144$，由于 $28.5 < 30.144$，不拒绝 H_0，即认为改进工艺后零件尺寸的方差没有显著变大。

> （注：文档部分内容可能由 AI 生成）