模拟试卷二

一、选择题

1.在空间直角坐标系中,点$(6,2,-1)$关于oyz坐标面的对称点的坐标是(　　)

$A.(-6,-2,-1)$　$B.(6,-2,-1)$　$C.(-6,2,-1)$　$D.(-6,-2,1)$

2.极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$(　　)

$A.$等于0　$B.$等于1　$C.$等于2　$D.$不存在

3.设积分区域D: $(x-1)^2+y^2\leq 1$,二重积分$\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$化为极坐标下的二次积分为(　　)

$A.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r^2)r\,\mathrm{d}r$　　$B.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r^2)r\,\mathrm{d}r$

$C.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{1}f(r^2)rdr$　　$D.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{1}f(r^2)r\,\mathrm{d}r$

4. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}(x+1)^n$的收敛域是(　　)

$A.[-5,5]$　$B.(-5,5)$　$C.(-6,4]$　$D.[-6,4)$

二、填空题

5.已知向量$\alpha=\{3,1,5\}$,$\beta=\{2,0,-2\}$,则$\alpha+3\beta=$ ________

6.已知函数$z=x^2e^y$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________

7.二次积分$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^2(x+3)\mathrm{d}y$的值是________

8.无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$的和$S=$ ________

三、计算题

9.求直线$\begin{cases} x-y+z-7=0 \\ 2x+y-3z+6=0 \end{cases}$的方向向量$v$.

10.已知函数$z=f(x^2+y^3)$,其中f为可导函数,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

11.求曲线$x=\dfrac{1}{t},y=\dfrac{1}{t^2},z=\dfrac{1}{t^3}$在对应于$t=1$的点处的法平面方程.

12.问在空间的哪些点上,函数$u=x^2+y^2+z^2-2xyz$的梯度平行于z轴.

13.计算二重积分$\iint\limits_D y^2dxdy$,其中积分区域$D:x^2+y^2\leqslant 2$.

14.计算三重积分$\iiint\limits_\Omega (|x|+y+|z|)\mathrm{d}v$,其中积分区域$\Omega:x^2+z^2\leqslant 1,|y|\leqslant 2$.

15.计算对弧长的曲线积分$\int_c \dfrac{1}{x+y}\mathrm{d}s$,共中$C$是从点$A(1,1)$到点$B(3,3)$的直线段.

16.计算对面积的曲面积分$\iint\limits_\Sigma \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,ds$,其中$\Sigma$是以$O(0,0,0)$为球心,$a$为半径的上半球面.

17.判断无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$是否收敛，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

四、综合题

18.造一个容积为$64m^3$的长方体有盖容器，应如何选择容器尺寸可使得用料最省？

19.验证$(x+3y)dx+(3x+y)dy$在整个oxy平面内是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，并求这样一个$u(x,y)$。

20.将函数$f(x)=\dfrac{1}{2+x}$展开为$(x-4)$的幂级数。

试题答案

一、单项选择题:

1.C 2.D 3.B 4.C

二、填空题:

5.$\{9,1,-1\}$

6.$2xe^{y}$

7.12

8.$\frac{2}{3}$

三、计算题:

9.解: $\because n_1=\{1,-1,1\}, n_2=\{2,1,-3\}$

$$\therefore \text{可取} v=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=2i+5j+3k$$

10.解: $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+y^3)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2f'(x^2+y^3)$$

11.解:因为$x'=-\frac{1}{t^2}, y'=-\frac{2}{t^3}, z'=-\frac{3}{t^4}$

所以在$t=1$对应点处法平面的法向量为$\{-1,-2,-3\}$

又$t=1$对应点的坐标为$(1,1,1)$,所以所求法平面方程为

$-(x-1)-2(y-1)-3(z-1)=0$

即$x+2y+3z-6=0$

12.解：z轴单位向量是(0, 0, 1)

函数u在(x,y,z)点的梯度为

$$\mathrm{grad}u=(2x-2yz,2y-2xz,2z-2xy)$$

由题意grad$u$与(0, 0, 1)平行，满足$\begin{cases}2x-2yz=0\\2y-2xz=0\end{cases}$

即曲线$\begin{cases}x=yz\\y=xz\end{cases}$上的点均是所求点

13.解：$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sin^2\theta\cdot r\,\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi$$

14. 解：$\because\Omega$ 关于三个坐标面分别对称

$\therefore\iiint\limits_\Omega(|x|+y+|z|)\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega(|x|+|z|)\mathrm{d}v$

记 $\Omega_1:x^2+z^2\leqslant1,x\geqslant0,z\geqslant0,0\leqslant y\leqslant2$，则

$\iiint\limits_\Omega(|x|+y+|z|)\mathrm{d}v=8\iiint\limits_{\Omega1}(x+z)\mathrm{d}v$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1r\,\mathrm{d}r\int_0^2(r\cos\theta+r\sin\theta)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{32}{3}$$

15. 解：$C:y=x,1\leqslant x\leqslant3$

$$\int_C\frac{1}{x+y}\mathrm{d}s=\int_1^3\frac{1}{2x}\cdot\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^3\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}\ln3}{2}$$

16. 解：Σ在oxy平面的投影区域为D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant a^2$

$$\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint\limits_{D_{xy}} a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi a^3$$

17. 解：一般项为 $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 是 p 级数，$p > 1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

四、综合题:

18.解:设长方体的长、宽、高分别为x,y,z(单位:m),

则容积$V = xyz = 64m^3$,用料即为面积$S = 2xy + 2yz + 2xz$.

设$F(x,y,z,\lambda) = xy + yz + xz + \lambda(xyz - 64)$

令$\begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 64 \end{cases}$

解得$x = y = z = 4$,由于$(4,4,4)$是唯一驻点,所以当长、宽、高均为$4m$时,容器用料最省.

19.解:$P(x,y) = x + 3y, Q(x,y) = 3x + y$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3$

$\because$ 在整个oxy平面内, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$\therefore$ $(x+3y)\mathrm{d}x + (3x+y)\mathrm{d}y$ 在整个oxy平面内是某个二元函数$u(x,y)$的全微分

$$\text{可取 } u(x,y) = \int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x + \int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^x x\,\mathrm{d}x + \int_0^y (3x+y)\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 3xy$$

20. 解: $\because \dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{6+(x-4)}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-4}{6}}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-4}{6}\right)^n \quad \left(-1<\frac{x-4}{6}<1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(x-4)^n \quad (-2<x<10)$$