

高等数学上册知识点

一、函数与极限

(一) 函数

- 1、函数定义及性质（有界性、单调性、奇偶性、周期性）；
- 2、反函数、复合函数、函数的运算；
- 3、初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、双曲函数、反双曲函数；
- 4、函数的连续性与间断点；（重点）

$$\text{函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 连续} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{间断点} \begin{cases} \text{第一类：左右极限均存在.} \\ \quad \text{可去间断点、跳跃间断点} \\ \text{第二类：左右极限、至少有一个不存在.} \\ \quad \text{无穷间断点、振荡间断点} \end{cases}$$

- 5、闭区间上连续函数的性质：有界性与最大值最小值定理、零点定理（重点）、介值定理及其推论.

(二) 极限

1、定义

1) 数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon$$

2) 函数极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon$$

左极限: $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

右极限: $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+)$

2、 极限存在准则

1) 夹逼准则:

$$\left. \begin{array}{l} 1) y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n \geq n_0) \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

2) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

3、 无穷小(大)量

1) 定义: 若 $\lim \alpha = 0$ 则称为无穷小量; 若 $\lim \alpha = \infty$ 则称为无穷大量.

2) 无穷小的阶: 高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小、 k 阶无穷小

Th1 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha);$

Th2 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ (无穷小代换)

4、 求极限的方法

1) 单调有界准则;

2) 夹逼准则;

3) 极限运算准则及函数连续性;

4) 两个重要极限: (重点)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

5) 无穷小代换: ($x \rightarrow 0$) (重点)

a) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$

$$\text{b)} \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{c)} \quad e^x - 1 \sim x \quad (a^x - 1 \sim x \ln a)$$

$$\text{d)} \quad \ln(1+x) \sim x \quad (\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a})$$

$$\text{e)} \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

二、导数与微分

(一) 导数

$$1、\quad \text{定义：} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{左导数：} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{右导数：} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点可导} \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

2、几何意义： $f'(x_0)$ 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

3、可导与连续的关系：

4、求导的方法

1) 导数定义；(重点)

2) 基本公式；

3) 四则运算；

4) 复合函数求导 (链式法则)；(重点)

5) 隐函数求导数；(重点)

6) 参数方程求导；(重点)

7) 对数求导法. (重点)

5、 高阶导数

1) 定义: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$

2) Leibniz 公式: $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

(二) 微分

1) 定义: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中 A 与 Δx 无关.

2) 可微与可导的关系: 可微 \Leftrightarrow 可导, 且 $dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$

三、 微分中值定理与导数的应用

(一) 中值定理

1、 Rolle 定理: (重点) 若函数 $f(x)$ 满足:

1) $f(x) \in C[a, b]$; 2) $f(x) \in D(a, b)$; 3) $f(a) = f(b)$;

则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

2、 Lagrange 中值定理: 若函数 $f(x)$ 满足:

1) $f(x) \in C[a, b]$; 2) $f(x) \in D(a, b)$;

则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

3、 Cauchy 中值定理: 若函数 $f(x), F(x)$ 满足:

1) $f(x), F(x) \in C[a, b]$; 2) $f(x), F(x) \in D(a, b)$; 3) $F'(x) \neq 0, x \in (a, b)$

则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

(二) 洛必达法则 (重点)

(三) Taylor 公式 (不考)

(四) 单调性及极值

1、 单调性判别法: (重点) $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \in D(a, b)$, 则若 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调增加; 则若 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调减少.

2、 极值及其判定定理:

a) 必要条件: $f(x)$ 在 x_0 可导, 若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.

b) 第一充分条件: (重点) $f(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 且 $f'(x_0) = 0$,

c) 则①若当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 x_0 为极大值点; ②若当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 x_0 为极小值点; ③若在 x_0 的两侧 $f'(x)$ 不变号, 则 x_0 不是极值点.

d) 第二充分条件: (重点) $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$,

e) 则①若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大值点; ②若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小值点.

3、 凹凸性及其判断, 拐点

1) $f(x)$ 在区间 I 上连续, 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凹的; 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凸的.

2) 判定定理 (重点): $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上有一阶、二阶导数, 则

a) 若 $\forall x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;

b) 若 $\forall x \in (a, b), f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.

3) 拐点: 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 $f(x)$ 的内点, 如果曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 曲线的凹凸性改变了, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

(五) 不等式证明

- 1、 利用微分中值定理;
- 2、 利用函数单调性; (重点)
- 3、 利用极值 (最值) .

(六) 方程根的讨论

- 1、 连续函数的介值定理;
- 2、 Rolle 定理;
- 3、 函数的单调性;
- 4、 极值、最值;
- 5、 凹凸性.

(七) 渐近线

- 1、 铅直渐近线: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则 $x = a$ 为一条铅直渐近线;
- 2、 水平渐近线: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, 则 $y = b$ 为一条水平渐近线;
- 3、 斜渐近线: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$ 存在, 则 $y = kx + b$ 为一条斜渐近线.

(八) 图形描绘

四、 不定积分

(一) 概念和性质

- 1、 原函数：在区间 I 上，若函数 $F(x)$ 可导，且 $F'(x) = f(x)$ ，则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个原函数。 **(重点)**
- 2、 不定积分：在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分。
- 3、 基本积分表 (P188, 13 个公式); **(重点)**
- 4、 性质 (线性性)。

(二) 换元积分法 **(重点)**

1、 第一类换元法 (凑微分): $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$

2、 第二类换元法 (变量代换): $\int f(x)dx = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$

(三) 分部积分法: $\int u dv = uv - \int v du$ **(重点)**

(四) 有理函数积分

- 1、“拆”;
- 2、变量代换 (三角代换、倒代换、根式代换等)。

五、 定积分

(一) 概念与性质:

1、 定义: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

2、 性质: (7 条)

性质 7 (积分中值定理) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (\text{平均值: } f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a})$$

(二) 微积分基本公式 (N—L 公式) (重点)

1、 变上限积分: 设 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $\Phi'(x) = f(x)$

$$\text{推广: } \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = f[\beta(x)]\beta'(x) - f[\alpha(x)]\alpha'(x)$$

2、 N—L 公式: 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

(三) 换元法和分部积分 (重点)

1、 换元法: $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

2、 分部积分法: $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

(四) 反常积分

1、 无穷积分:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

2、 瑕积分:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx \quad (a \text{ 为瑕点})$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx \quad (b \text{ 为瑕点})$$

两个重要的反常积分：

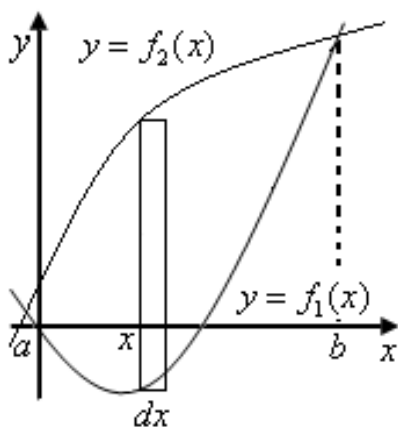
$$1) \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p \leq 1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

$$2) \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q < 1 \\ +\infty, & q \geq 1 \end{cases}$$

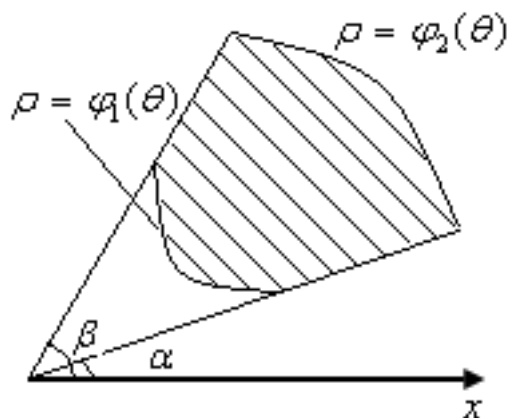
六、定积分的应用

(一) 平面图形的面积

1、 直角坐标： $A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$ (重点)



2、 极坐标： $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)] d\theta$



(二) 体积

1、 旋转体体积：(重点)

a) 曲边梯形 $y = f(x), x = a, x = b, x$ 轴, 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积:

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

b) 曲边梯形 $y = f(x), x = a, x = b, x$ 轴, 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积:

$$V_y = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad (\text{柱壳法})$$

2、 平行截面面积已知的立体: $V = \int_a^b A(x) dx$

(三) 弧长

1、 直角坐标: $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

2、 参数方程: $s = \int_a^b \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$

3、 极坐标: $s = \int_a^b \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta$

七、 微分方程

(一) 概念

1、微分方程：表示未知函数、未知函数的导数及自变量之间关系的方程。

阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数。

2、解：使微分方程成为恒等式的函数。

通解：方程的解中含有任意的常数，且常数的个数与微分方程的阶数相同。

特解：确定了通解中的任意常数后得到的解。

(二) 变量可分离的方程 (重点)

$$g(y)dy = f(x)dx, \text{ 两边积分 } \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

(三) 齐次型方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ 设 } u = \frac{y}{x}, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx};$$
$$\text{或 } \frac{dx}{dy} = \phi\left(\frac{x}{y}\right), \text{ 设 } v = \frac{x}{y}, \text{ 则 } \frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

(四) 一阶线性微分方程 (重点)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

用常数变易法或用公式：
$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

(五) 可降阶的高阶微分方程

1、 $y^{(n)} = f(x)$ ，两边积分 n 次；

2、 $y'' = f(x, y')$ (不显含有 y)，令 $y' = p$ ，则 $y'' = p'$ ；

3、 $y'' = f(y, y')$ (不显含有 x)，令 $y' = p$ ，则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$

(六) 线性微分方程解的结构

- 1、 y_1, y_2 是齐次线性方程的解，则 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 也是；
- 2、 y_1, y_2 是齐次线性方程的线性无关的特解，则 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是方程的通解；
- 3、 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$ 为非齐次方程的通解，其中 y_1, y_2 为对应齐次方程的线性无关的解， y^* 非齐次方程的特解。

(七) 常系数齐次线性微分方程 (重点)

二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

特征方程： $r^2 + pr + q = 0$ ，特征根： r_1, r_2

特征根	通 解
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

(八) 常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

1、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ (重点)

设特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$ ，其中 $k = \begin{cases} 0, & \lambda \text{不是特征根} \\ 1, & \lambda \text{是一个单根} \\ 2, & \lambda \text{是重根} \end{cases}$

2、 $f(x) = e^{\lambda x} (P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x)$

设特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x]$,

其中 $m = \max\{l, n\}$ ， $k = \begin{cases} 0, & \lambda + \omega i \text{不是特征根} \\ 1, & \lambda + \omega i \text{是特征根} \end{cases}$