高等数学（下）试卷一

一、 填空题（每空 3 分，共 15 分）

（1）函数 $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$ 的定义域为________

（2）已知函数 $z=\arctan\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________

（3）交换积分次序，$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y}f(x,y)dx$ =________

（4）已知 L 是连接 $(0,1)$，$(1,0)$ 两点的直线段，则 $\int_L (x+y)ds=$ ________

（5）已知微分方程 $y''+2y'-3y=0$，则其通解为________

二、选择题（每空 3 分，共 15 分）

（1）设直线 L 为 $\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面 π 为 $4x-2y+z-2=0$，则（　　）

A. L 平行于 π　　B. L 在 π 上　　C. L 垂直于 π　　D. L 与 π 斜交

（2）设　　　是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定，则在点 $(1,0,-1)$ 处的 $dz=$（　　）

A. $dx+dy$　　B. $dx+\sqrt{2}dy$　　C. $\sqrt{2}dx+\sqrt{2}dy$　　D. $dx-\sqrt{2}dy$

（3）已知 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域，将 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dv$ 在柱面坐标系下化成三次积分为（　　）

A. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_0^5 dz$　　B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 r^3dr\int_0^5 dz$

C. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_{\frac{5}{2}r}^5 dz$　　D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr\int_0^5 dz$

（4）已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$，则其收敛半径（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

（5）微分方程 $y''-3y'+2y=3x-2e^x$ 的特解 y^* 的形式为 $y^*=$（　　）

A.　　B. $(ax+b)xe^x$　　C. $(ax+b)+ce^x$

D. $(ax+b)+cxe^x$

得分	
阅卷人	

三、计算题（每题 8 分，共 48 分）

1、 求过直线 L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$ 且平行于直线 L_2：$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 的平面方程

2、 已知 $z=f(xy^2,x^2y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

3、 设 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}$，利用极坐标求 $\iint\limits_D x^2dxdy$

4、求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值

5、计算曲线积分 $\int_L (2xy+3\sin x)dx+(x^2-e^y)dy$，其中 L 为摆线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 从点 $O(0,0)$ 到 $A(\pi,2)$ 的一段弧

6、求微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解

四.**解答题**（共 22 分）

1、利用高斯公式计算 $\iint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 Σ 由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的立体表面的外侧　（10）

2、（1）判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 的敛散性，若收敛，判别是绝对收敛还是条件收敛；（6′）

（2）在 $x\in(-1,1)$ 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数（6′）

高等数学（下）试卷二

一．填空题（每空 3 分，共 15 分）

（1）函数 $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

（2）已知函数 $z=e^{xy}$，则在 $(2,1)$ 处的全微分 $dz=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

（3）交换积分次序，$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ $=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

（4）已知 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $B(1,1)$ 之间的一段弧，则 $\int_L \sqrt{y}ds=$＿＿＿＿＿＿＿＿；

（5）已知微分方程 $y''-2y'+y=0$，则其通解为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

二．选择题（每空 3 分，共 15 分）

（1）设直线 L 为 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$，平面 π 为 $x-y-z+1=0$，则 L 与 π 的夹角为（　　　）；

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

（2）设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　　）；

A. $\dfrac{yz}{xy-z^2}$　　B. $\dfrac{yz}{z^2-xy}$　　C. $\dfrac{xz}{xy-z^2}$　　D. $\dfrac{xy}{z^2-xy}$

（3）微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的特解 y^* 的形式为 $y^*=$（　　　）；

A. $(ax+b)e^{2x}$　　B. $(ax+b)xe^{2x}$　　C. $(ax+b)+ce^{2x}$　　D. $(ax+b)+cxe^{2x}$

（4）已知Ω是由球面$x^2+y^2+z^2=a^2$所围成的闭区域，将$\iiint\limits_{\Omega} dv$在球面坐标系下化成三次积分为（　　　）；

A $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr$　　B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r dr$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r dr$　　D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr$

（5）已知幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^n$，则其收敛半径　（　　　）.

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

得分	
阅卷人	

三. 计算题（每题8分，共48分）

5、求过$A(0,2,4)$且与两平面$\pi_1: x+2z=1$和$\pi_2: y-3z=2$平行的直线方程 .

6、已知$z=f(\sin x\cos y, e^{x+y})$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

7、设$D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$，利用极坐标计算$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x} dxdy$.

得分	

8、求函数$f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$的极值.

9、利用格林公式计算$\int_L (e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$，其中$L$为沿上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2, y\ge 0$、从$A(2a,0)$到$O(0,0)$的弧段.

6、求微分方程$y'-\frac{y}{x+1}=(x+1)^{\frac{3}{2}}$的通解.

四. 解答题（共22分）

1、(1)（$6'$）判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性，若收敛，判别是绝对收敛还是条件收敛；

(2)（$4'$）在区间$(-1,1)$内求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数 .

2、（$12'$）利用高斯公式计算$\iint\limits_{\Sigma} 2xdydz+ydzdx+zdxdy$，$\Sigma$为抛物面$z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$的下侧

高等数学（下）模拟试卷三

一. 填空题（每空3分，共15分）

1、 函数$y=\arcsin(x-3)$的定义域为________________.

2、$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{3n^2+3n-2}=$________________.

3、已知 $y=\ln(1+x^2)$，在 $x=1$ 处的微分 $dy=$ ________________.

4、定积分 $\int_{-1}^{1}(x^{2006}\sin x+x^2)dx=$ ________________________________.

5、求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}=$ ____________.

二．选择题（每空 3 分，共 15 分）

1、$x=2$ 是函数 $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的________间断点

（A）可去　　　　　（B）跳跃

（C）无穷　　　　　（D）振荡

2、积分 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ _________.

(A) ∞　　　(B) $-\infty$

(C) 0　　　(D) 1

3、函数 $y=e^x-x+1$ 在 $(-\infty,0]$ 内的单调性是______________。

（A）单调增加；　（B）单调减少；

（C）单调增加且单调减少；　(D)可能增加;可能减少。

4、$\int_x^1\sin tdt$ 的一阶导数为______.

（A）$\sin x$　　　（B）$-\sin x$

（C）$\cos x$　　　（D）$-\cos x$

5、向量 $\vec{a}=\{1,-1,k\}$ 与 $\vec{b}=\{2,-2,-1\}$ 相互垂直则 $k=$______.

（A）3　（B）-1　（C）4　（D）2

三．计算题（3 小题，每题 6 分，共 18 分）

1、求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$

2、求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

3、已知 $y=\ln\cos e^x$，求 $\frac{dy}{dx}$

四．计算题（4 小题，每题 6 分，共 24 分）

1、已知 $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\ y=1-t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

2、计算积分 $\int x^2\cos xdx$

3、计算积分 $\int_0^1\arctan xdx$

4、计算积分 $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}\, dx$

五．解答题（3 小题，共 28 分）

1、$(8')$ 求函数 $y = 3x^4 - 4x^2 + 1$ 的凹凸区间及拐点。

2、$(8')$ 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+e^{x+1}} & x < 0 \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$

3、（1）求由 $y = x^2$ 及 $y^2 = x$ 所围图形的面积；$(6')$

（2）求所围图形绕 x 轴旋转一周所得的体积。$(6')$

高等数学（下）模拟试卷四

一． **填空题**（每空 3 分，共 15 分）

1、 函数 $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域为____________________.

2、 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx, a > 0$ =_______________.

3、已知 $y=\sin(2x+1)$，在 $x=-0.5$ 处的微分 $dy=$ ________________.

4、定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$ = ________________________________.

5、函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凸区间是____________.

二．选择题（每空 3 分，共 15 分）

1、$x=1$ 是函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的________间断点

（A）可去　　　　　　　（B）跳跃

（C）无穷　　　　　　　（D）振荡

2、若 $a\neq 0,\ f(0)=0,\ f'(0)=-1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(ax)}{x}=$ = ________

(A)1　　　(B) a

(C)-1　　　(D) $-a$

3、在 $[0,\ 2\pi]$ 内函数 $y=x-\sin x$ 是______________。

（A）单调增加；　（B）单调减少；

（C）单调增加且单调减少；　(D)可能增加;可能减少。

4、已知向量 $\vec{a}=\{4,-3,4\}$ 与向量 $\vec{b}=\{2,2,1\}$ 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 为______.

（A）6　　　　（B）-6

（C）1　　　　（D）-3

5、已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x_0)$ 为极值，$y=e^{f(x)}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=$ ______.

（A）$e^{f(x_0)}$　（B）$f'(x_0)$　（C）0　（D）$f(x_0)$

三．计算题（3 小题，每题 6 分，共 18 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-kx)^{\frac{1}{x}+k}$

2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}\sin t^2dt}{x^2\sin x}$

3、已知 $y=e^{\ln\sin\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$

四．计算题（每题 6 分，共 24 分）

1、设 $e^y-xy-1=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

2、计算积分 $\int\arcsin x dx$

3、计算积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}dx$

4、计算积分 $\int_0^{\sqrt{3a}}\frac{x}{\sqrt{3a^2-x^2}}dx,\ a>0$

五．解答题（3 小题，共 28 分）

1、$(8')$ 已知 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$，求在 $t=2$ 处的切线方程和法线方程。

2、$(8')$ 求证当 $a>b>0$ 时，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}<\dfrac{1}{b}$

3、（1）求由 $y=x^3$ 及 $y=0,\ x=2$ 所围图形的面积；$(6')$

（2）求所围图形绕 y 轴旋转一周所得的体积。$(6')$

高等数学（下）模拟试卷五

一. 填空题（每空 3 分，共 21 分）

1．函数 $z=\dfrac{\ln(x-y)}{y}$ 的定义域为____________________。

2．已知函数 $z=e^{x^2+y^2}$，则 $dz=$ ___________。

3．已知 $z=e^{xy}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ __________________。

4．设 L 为 $x^2+y^2=1$ 上点 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$ 的上半弧段，则 $\int_L 2ds=$ ________________。

5．交换积分顺序 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=$ ___________________。

6．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛？_______________。

7．微分方程 $y'=\sin x$ 的通解为_____________。

二. 选择题（每空 3 分，共 15 分）

1．函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）条件。

A．充分非必要　　B．必要非充分　　C．充分必要　　D．既非充分，也非必要

2．平面 $\pi_1: x+2y+z+1=0$ 与 $\pi_2: 2x+y-z+2=0$ 的夹角为（　　）。

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　D．$\dfrac{\pi}{3}$

3．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n}$ 的收敛域为（　　）。

A. $[4,6)$　　B. $(4,6)$　　C. $(4,6]$　　D. $[4,6]$

4．设 $y_1(x), y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两特解且 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，则下列（　　）是其通解（c_1, c_2 为任意常数）。

A. $y = c_1 y_1(x) + y_2(x)$　　B. $y = y_1(x) + c_2 y_2(x)$

C. $y = y_1(x) + y_2(x)$　　D. $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

5．$\iiint_{\Omega} zdv$ 在直角坐标系下化为三次积分为（　　），其中 Ω 为 $x = 3, x = 0, y = 3, y = 0$，$z = 0, z = 3$ 所围的闭区域。

A. $\int_3^0 dx \int_0^3 dy \int_0^3 zdz$　　B. $\int_0^3 dx \int_0^3 dy \int_0^3 zdz$　　C. $\int_0^3 dx \int_3^0 dy \int_0^3 zdz$

D. $\int_0^3 dx \int_0^3 dy \int_3^0 zdz$

三．计算下列各题（共 21 分，每题 7 分）

1、已知 $\ln z + e^z - xy = 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

2、求过点 $(1,0,2)$ 且平行直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$ 的直线方程。

3、利用极坐标计算 $\iint_D (x^2 + y^2) d\delta$，其中 D 为由 $x^2 + y^2 = 4$、$y = 0$ 及 $y = x$ 所围的在第一象限的区域。

四．求解下列各题（共 20 分，第 1 题 8 分，第 2 题 12 分）

1、利用格林公式计算曲线积分 $\oint_L (y^2 + e^x)dx + (2xy + 5x + \sin^2 y)dy$，其中 L 为圆域 D：$x^2 + y^2 \leq 4$ 的边界曲线，取逆时针方向。

2、判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

五、求解下列各题（共 23 分，第 1、2 题各 8 分，第 3 题 7 分）

1、求函数 $f(x, y) = x^3 - \frac{1}{2} y^2 - 3x + 3y + 1$ 的极值。

2、求方程 $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ 满足 $y\big|_{x=0} = 2$ 的特解。

3、求方程 $y'' + 2y' - 8y = 2e^x$ 的通解。

高等数学（下）模拟试卷六

一、填空题：（每题 3 分, 共 21 分.）

1．函数 $z=\arccos(y-x)$ 的定义域为______________________。

2．已知函数 $z=\ln(xy)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=$ ____________。

3．已知 $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$，则 $dz=$ ___________________。

4．设 L 为 $y=x+1$ 上点 $(-1,0)$ 到 $(0,1)$ 的直线段，则 $\int_L 2ds=$ _________________。

5．将 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)dy$ 化为极坐标系下的二重积分___________________。

6．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 是绝对收敛还是条件收敛？_______________。

7．微分方程 $y'=2x$ 的通解为______________。

二、**选择题**：（每题 3 分, 共 15 分.）

1．函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x_0,y_0) 连续是其全微分存在的（　　）条件。
A．必要非充分，　B．充分，　C．充分必要，　D．既非充分，也非必要，

2．直线 $l:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{0}$ 与平面 $\pi: x+2y+z=3$ 的夹角为（　　）。

A．$\dfrac{\pi}{6}$　B．$\dfrac{\pi}{3}$　C．$\dfrac{\pi}{2}$　D．$\dfrac{\pi}{4}$

3．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n n^2}$ 的收敛域为（　　）。
A．$(-3,3)$　B．$[-3,3]$　C．$(-3,3]$　D．$[-3,3)$

4．设 $y^*(x)$ 是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解，$y(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解，则下列（　　）是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解。

A．$y(x)$　B．$y(x)-y^*(x)$　C．$y^*(x)$　D．$y^*(x)+y(x)$

5．$\iiint_\Omega z^2dv$ 在柱面坐标系下化为三次积分为（　　），其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的上半球体。

A．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rdr\int_0^R z^2dz$　B．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rdr\int_0^r z^2dz$

C．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R dr\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z^2dz$　D．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rdr\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z^2dz$

三、计算下列各题（共18分，每题6分）

1、已知 $z^3 - 3xyz = 5$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

2、求过点 $(1,0,2)$ 且平行于平面 $2x + y + 3z = 5$ 的平面方程。

3、计算 $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$，其中 D 为 $y = x$ 、 $y = 0$ 及 $x = 1$ 所围的闭区域。

四、求解下列各题（共 25 分，第 1 题 7 分, 第 2 题 8 分，第 3 题 10 分）

1、计算曲线积分 $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin y)dy$，其中 L 为圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧。

2、利用高斯公式计算曲面积分：$\iint_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 Σ 是由 $z = 0, z = 3, x^2 + y^2 = 1$ 所围区域的整个表面的外侧。

3、判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

五、求解下列各题（共 21 分, 每题 7 分）

1、求函数 $f(x, y) = 3x^2 + 6x - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2 + 1$ 的极值。

2、求方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x$ 满足 $y\big|_{x=0} = 1$ 的特解。

3、求方程 $y'' - 5y' + 6y = (x + 1)e^x$ 的通解。

高等数学（下）模拟试卷七

一． **填空题**（每空 3 分，共 24 分）

1．二元函数 $z = \frac{1}{(x^2 + y^2)\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ 的定义域为______________

2．一阶差分方程 $y_{t+1} - \frac{2}{3}y_t = \frac{1}{5}$ 的通解为_________________

3． $z = xy$ 的全微分 $dz =$ ______________________

4． $ydx - xdy = 0$ 的通解为______________________

5．设 $z = \arctan\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ____________________

6．微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解为______________________

7．若区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$，则 $\iint_D 2\,dxdy =$ ____________

8．级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的和 s=______________________

二．选**择题：**（每题 3 分，共 15 分）

1. $f(x,y)$在点(a,b)处两个偏导数存在是$f(x,y)$在点(a,b)处连续的________条件

（A）充分而非必要　　（B）必要而非充分

（C）充分必要　　（D）既非充分也非必要

2. 累次积分$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$改变积分次序为________

(A) $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$　　（B）$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dx$

（C）$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx$　　（D）$\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 f(x,y)dx$

3. 下列函数中，_____是微分方程$y''-5y'+6y=xe^{3x}$的特解形式(a、b 为常数)

（A）$y=(ax+b)e^{3x}$　　（B）$y=x(ax+b)e^{3x}$

（C）$y=x^2(ax+b)e^{3x}$　　（D）$y=ae^{3x}$

4. 下列级数中，收敛的级数是__________

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2^n}$　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

5. 设$x^2+y^2+z^2=4z$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$__________

(A) $\frac{x}{z}$　(B) $\frac{x}{2-z}$　(C) $\frac{x}{z-2}$　(D) $-\frac{x}{z}$

得分	
阅卷人	

三、求解下列各题（每题 7 分，共 21 分）

1. 设$z=u^2\ln v$,而$u=\frac{x}{y}$,$v=3x-4y$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

2. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n2^n}$的收敛性　　3. 计算$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为$x^2+y^2\le 1$所围区域

四、计算下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1. 求微分方程$y'-\frac{1}{x}y=\ln x$的通解.

2. 计算二重积分$I=\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中$D$是由直线$y=x$,$x=1$及$x$轴围成的平面区域.

3. 求函数$f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5$的极值.

4. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 4^n}$的收敛域.

高等数学（下）模拟试卷一参考答案

一、填空题：（每空 3 分，共 15 分）

1、 $\{(x,y)\mid x+y>0, x-y>0\}$ 2、 $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 3、 $\int_0^4 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

4、$\sqrt{2}$ 5、 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$

二、选择题：（每空 3 分，共 15 分） $1.C$ $2.D$ $3.C$ $4\,A$ $5.D$

三、计算题（每题 8 分，共 48 分）

1、解： $A(1,2,3)$ $\vec{s}_1=\{1,0,-1\}$ $\vec{s}_2=\{2,1,1\}$ $2'$

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$ $6'$

$\therefore$ 平面方程为 $x-3y+z+2=0$ $8'$

2、解： 令$u=xy^2$ $v=x^2y$ $2'$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot y^2+f_2'\cdot 2xy$$ $6'$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot x^2$$ $8'$

3、解：D： $0\le\theta\le 2\pi$ $0\le r\le 2$， $3'$

$$\therefore\ \iint_D x^2dxdy=\iint_D r^3\cos^2\theta\, drd\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\int_0^2 r^3dr=4\pi$$ $8'$

4．解： $\begin{cases} f_x(x,y)=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0\\ f_y(x,y)=e^{2x}(2y+2)=0\end{cases}$ 得驻点$(\frac{1}{2},-1)$ $4'$

$A=f_{xx}(x,y)=e^{2x}(4x+4y^2+8y+4)$, $B=f_{xy}(x,y)=e^{2x}(4y+4)$, $C=f_{yy}(x,y)=2e^{2x}$ $6'$

$A=2e>0$, $AC-B^2=4e^2>0$ $\therefore$ 极小值为 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{1}{2}e$ $8'$

5．解： $P=2xy+3\sin x$, $Q=x^2-e^y$，有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$\therefore$

曲线积分与路径无关 $2'$

积分路线选择：L_1： $y=0$, x 从$0\to\pi$，L_2： $x=\pi$，y 从$0\to 2$ $4'$

$$\int_L(2xy+3\sin x)dx+(x^2-e^y)dy=\int_{L_1}Pdx+Qdy+\int_{L_2}Pdx+Qdy$$

$$=\int_0^{\pi}3\sin xdx+\int_0^2(\pi^2-e^y)dy=2\pi^2-e^2+7$$ $8'$

6．解： $y'+\dfrac{1}{x}y=e^x\Rightarrow P=\dfrac{1}{x}$, $Q=e^x$ $2'$

$\therefore$ 通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int e^xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]$ $4'$

$$=\frac{1}{x}[\int e^x\cdot xdx+C]=\frac{1}{x}[(x-1)e^x+C]$$ $6'$

代入 $y\big|_{x=1}=1$，得 $C=1$，$\therefore$ 特解为 $y=\dfrac{1}{x}[(x-1)e^{x}+1]$ $8'$

四、解答题

1、解：$\iint\limits_{\Sigma} 2xzdydz + yzdzdx - z^{2}dxdy = \iiint\limits_{\Omega}(2z+z-2z)dv = \iiint\limits_{\Omega} zdv$ $4'$

$$= \iiint\limits_{\Omega} r^{3}\cos\varphi\sin\varphi drd\theta d\varphi$$ $6'$

方法一： 原式＝$\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_{0}^{\sqrt{2}}r^{3}dr=\dfrac{\pi}{2}$ $10'$

方法二： 原式＝$\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{1}rdr\int_{r}^{\sqrt{2-r^{2}}}zdz=2\pi\int_{0}^{1}r(1-r^{2})dr=\dfrac{\pi}{2}$ $10'$

2、解：（1）令 $u_{n}=(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_{n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{3^{n}}\cdot\dfrac{3^{n-1}}{n}\right|=\dfrac{1}{3}<1$ $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 收敛， $4'$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛。 $6'$

（2）令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=xs_{1}(x)$ $2'$

$\int_{0}^{x}s_{1}(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{x}nx^{n-1}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n}=\dfrac{x}{1-x}\Rightarrow s_{1}(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^{2}}$ $5'$

$\therefore\quad s(x)=\dfrac{x}{(1-x)^{2}}\qquad x\in(-1,1)$ $6'$

高等数学（下）模拟试卷二参考答案

一、填空题：（每空 3 分，共 15 分）

1、 $\{(x,y)\mid y^{2}\le 4x, 0<x^{2}+y^{2}<1\}$ 2、$e^{2}dx+2e^{2}dy$ 3、$\int_{0}^{1}dy\int_{e^{y}}^{e}f(x,y)dx$

4、$\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$ 5、$y=(C_{1}+C_{2}x)e^{x}$

二、选择题：（每空 3 分，共 15 分） 1. A 2. B 3. B 4. D 5. A

三、计算题（每题 8 分，共 48 分）

1、解： $A(0,2,4)$ $\vec{n}_{1}=\{1,0,2\}$ $\vec{n}_{2}=\{0,1,-3\}$ $2'$

$$\vec{s}=\vec{n}_{1}\times\vec{n}_{2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$$ $6'$

$\therefore$ 直线方程为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$ 　　8′

2、解： 令 $u=\sin x\cos y \quad v=e^{x+y}$ 　　2′

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot\cos x\cos y+f_2'\cdot e^{x+y} \qquad 6'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot(-\sin x\sin y)+f_2'\cdot e^{x+y} \qquad 8'$$

3、解：$D:\quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4} \qquad 0\le r\le 1$， 　　3′

$$\therefore \iint_D \arctan\frac{y}{x}dxdy=\iint_D r\theta\, drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\, d\theta\int_0^1 rdr=\frac{\pi^2}{64} \qquad 8'$$

4．解：$\begin{cases} f_x(x,y)=2x-6=0\\ f_y(x,y)=10y+10=0\end{cases}$ 得驻点 $(3,-1)$ 　　4′

$A=f_{xx}(x,y)=2,\quad B=f_{xy}(x,y)=0,\quad C=f_{yy}(x,y)=10$ 　　6′

$A=2>0,\quad AC-B^2=20>0$ 　$\therefore$ 极小值为 $f(3,-1)=-8$ 　　8′

5．解：$P=e^x\sin y-2y,\qquad Q=e^x\cos y-2$，

有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2,\qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$， 　　2′

取 $A(2a,0),\quad \overline{OA}:\quad y=0,\ x$ 从 $0\to 2a$ 　　4′

$$\int_L Pdx+Qdy+\int_{\overline{OA}}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 2dxdy=\pi a^2 \qquad 6'$$

$\therefore$ 原式 $=\pi a^2-\int_{OA}Pdx+Qdy=\pi a^2-0=\pi a^2$ 　　8′

6．解：$P=-\dfrac{1}{x+1},\quad Q=(x+1)^{\frac{3}{2}}$ 　　2′

$$\therefore \text{通解为 } y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]=e^{\int\frac{1}{x+1}dx}\left[\int (x+1)^{\frac{3}{2}}e^{-\int\frac{1}{x+1}dx}dx+C\right] \qquad 4'$$

$$=(x+1)\left[\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C\right]=(x+1)\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right] \qquad 8'$$

四、解答题

1、解：（1）令 $u_n=(-1)^{n-1}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$ 　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\dfrac{2}{3}<1$ 　　4′

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$ 收敛， 　$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$ 绝对收敛 　　6′

（2）令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\qquad 2'$$

$$\Rightarrow s(x)=\int_0^x s'(x)dx+s(0)=-\ln(1-x)\qquad 4'$$

2、解：构造曲面 $\Sigma_1: z=1$, 上侧

$$\iint_{\Sigma}2xdydz+ydzdx+zdxdy+\iint_{\Sigma_1}2xdydz+ydzdx+zdxdy\qquad 2'$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+1+1)dv=4\iiint_{\Omega}dv=4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=8\pi\int_0^1(1-r^2)rdr=2\pi$$

$4'$ $\qquad 6'$ $\qquad 8'$

$$\therefore I=2\pi-\iint_{\Sigma_1}2xdydz+ydzdx+zdxdy\qquad 10'$$

$$=2\pi-\iint_{D_{xy}}dxdy=\pi\qquad 12'$$

高等数学（下）模拟试卷三参考答案

一．填空题：（每空 3 分，共 15 分）

1. $|X|\le 1$且$x\ne 0$； 2. $\frac{1}{a}$； 3. $2dx$； 4. 0； 5. $\left[0,\frac{2}{3}\right]$或$\left(0,\frac{2}{3}\right)$

二．选择题：（每空 3 分，共 15 分） $1.A;2.D;3.A;4.A;5.C.$

三．计算题：

1. $=\lim\limits_{x\to0}(1-kx)^{\frac{1}{-kx}\cdot(-k)}\cdot(1-kx)^k\ 4'=e^{-k}\ 2'$

2. $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}\sin t^2dt}{x^3}\ 2'=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-(-\sin\cos^2x)(-\sin x)}{3x^2}\ 2'=\infty\ 2'$

3. $\dfrac{dy}{dx}=e^{\ln\sin\frac{1}{x}}\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\ 4'=-\dfrac{1}{x^2}e^{\ln\sin\frac{1}{x}}\cot\dfrac{1}{x}\ 2'$

四．**计算题：**

1. $e^y y'-y-xy'=0\ 2';x=0,y=0\ 1';\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{y}{e^y-x}\right|_{x=0}=0\ 3'$；

2. 原式$=x\arcsin x-\int x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ 2'=x\arcsin x+\int\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)\ 2'$

$$= xarc\sin x + \sqrt{1-x^2} + c \quad 2'$$

3. 原式 $= \int_0^{\pi} (\sin x)^{\frac{3}{2}} |\cos x| dx \ 2' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{3}{2}} d\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x)^{\frac{3}{2}} d\sin x \ 3' = \frac{4}{5} \ 1'$

4. 原式 $= \int_0^{\sqrt{3a}} \frac{d(3a^2 - x^2)}{-2\sqrt{3a^2 - x^2}} \ 3' = \left[-\sqrt{3a^2 - x^2}\right]_0^{\sqrt{3a}} \ 2' = \sqrt{3}a - \sqrt{3a^2 - 3a} \ 1'$ 。

五．解答题：

1 .

$y' = \frac{2t}{1-t^2} \ 2', t = 2, k = -\frac{4}{3} \ 1', x = \frac{6a}{5}, y = \frac{12a}{5} \ 1'$，切线：$4x + 3y - 12a = 0 \ 1'$，法线： 3x−4y+6a=0　1′

2.

设$f(x) = \ln x, x \in [b, a], a > b > 0 \ 2', \ln a - \ln b = \frac{1}{\zeta}(a-b), b < \zeta < a \ 2', \frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{b} \ 2'$

3.（1） $S = \int_0^2 x^3 dx \ 2' = \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^2 \ 2' = 4 \ 2'$

（2）、 $V_y = \int_0^8 \pi \left(4 - y^{\frac{2}{3}}\right) dy \ 2' = \pi \left(4y - \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right)_0^8 \ 2' = \frac{64}{5}\pi \ 2'$

高等数学（下）模拟试卷四参考答案

一．填空题：（每空 3 分，共 15 分）

1. $2 \le x \le 4$；2. $\frac{1}{3}$；3. dx；4. $\frac{2}{3}$；5. $\frac{1+21x^6}{2+5y^4}$ 。

二．选择题：（每空 3 分，共 15 分）

1. C；2. D；3. B；4. B；5. C 。

三．1. $= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1-\frac{1}{2x}}\right)^x \left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1-\frac{1}{2x}}\right)^{3'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x\cdot(-2)}} = e^{\frac{5}{2}} \ 3'$

2. $= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \ 2' = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{3x^2} \ 2' = \frac{1}{6} \ 2'$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos e^x}\cdot(-\sin e^x)\cdot e^x \quad 3'=-e^x\cot e^x \quad 3'$

四.

1. $y'=-\frac{1}{t}\ 2',\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{t^2}}{t}\ 2'=t^{-3}\ 2'$;

2. $=\int x^2 d\sin x=x^2\sin x-\int\sin x\cdot 2xdx\quad 2'=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c\ 4'$

3. $=x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\quad 2'=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln(1+x^2)}{2}\Big|_0^1\ 2'=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\ 2'$

4. $x=\sqrt{2}\sin t\ 1',=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos tdt\quad 2'=\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\ 2'=\frac{\pi}{2}\ 1'$。

五．解答题

1. $y'=12x^3-12x^2,\ y''=36x^2-24x,\ 2'$

$x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3}$ 为拐点，$2'$

$(-\infty,0)$、$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 为凹区间，$\left(0,\frac{2}{3}\right)$ $4'$ 为凸区间

2.

$$f(x-1)=\begin{cases}\frac{1}{x},x\geq 1\\ \frac{1}{1+e^x},x<1\end{cases},(2')=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx+\int_1^2\frac{1}{x}dx\,(2')=\ln e^x\Big|_0^1-\ln(1+e^x)\Big|_0^1+\ln x\Big|_1^2(2')$$

$$=1-\ln(1+e)+2\ln 2\,(2')$$

3.（1）、$=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx\ 4'=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1\ 2'=\frac{1}{3}\ 2'$

（2）、$V_x=\int_0^1\pi\left(x-x^4\right)dx\quad 4'=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1\quad 2'=\frac{3}{10}\pi\quad 2'$

高等数学（下）模拟试卷五参考答案

一、填空题：（每空 3 分，共 21 分）

1、$\{(x,y)|x>y,y\neq 0\}$， 2、$2xe^{x^2+y^2}dx+2ye^{x^2+y^2}dy$， 3、0，4、$2\pi$，

5、$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$， 6、条件收敛， 7、$y=-\cos x+c$ （c 为∀ 常数），

二、选择题：（每空 3 分，共 15 分）1、A， 2、D， 3、A， 4、D， 5、B

三、解：1、令 $F(x,y,z)=\ln z+e^z-xy$ ………1′

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{1+ze^z} \quad ………4'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{1+ze^z} \quad ………7'$$

2、所求直线方程的方向向量可取为 $\{1,-2,3\}$ ………2′

则直线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$ ………7′

3、原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^2 r^3dr$ ………4′

$=\pi$ ………7′

四、解：1、令

$P(x,y)=y^2+e^x, Q(x,y)=2xy+5x+\sin^2 y, \dfrac{\partial P}{\partial y}=2y, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y+5$ ………3′

原式 $=\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$ ………6′

$=20\pi$ ………8′

2、(1) 此级数为交错级数 ………1′

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，$\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\ (n=1,2,\cdots)$ ………4′

故原级数收敛 ………6′

(2) 此级数为正项级数………1′

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\dfrac{1}{3}<1$ ………4′ 故原级数收敛 ………6′

五、解：1、由 $f_x(x,y)=3x^2-3=0$，$f_y(x,y)=3-y=0$ 得驻点 $(1,3),(-1,3)$ ………2′

在 $(1,3)$ 处 $A=f_{xx}(1,3)=6, B=f_{xy}(1,3)=0, C=f_{yy}(1,3)=-1$

因 $AC-B^2<0$,，所以在此处无极值 ………5′

在 $(-1,3)$ 处 $A=f_{xx}(-1,3)=-6, B=f_{xy}(-1,3)=0, C=f_{yy}(-1,3)=-1$

因 $AC - B^2 > 0, A < 0$，所以有极大值 $f(-1,3) = \frac{15}{2}$ ……… $8'$

2、通解 $y = [\int e^{-x} e^{\int dx} dx + c] e^{\int -1 dx}$ ……… $3'$

$= xe^{-x} + ce^{-x}$ ……… $6'$

$y\big|_{x=0} = c = 2$

特解为 $y = (x+2)e^{-x}$ ……… $8'$

3、1) 其对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 2r - 8 = 0$

有两不相等的实根 $r_1 = 2, r_2 = -4$

所以对应的齐次方程的通解为 $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$ （c_1, c_2 为∀ 常数） ……… $3'$

2) 设其特解 $y^*(x) = ae^x$

将其代入原方程得 $-5ae^x = 2e^x, a = -\frac{2}{5}$

故特解 $y^*(x) = -\frac{2}{5}e^x$ ……… $6'$

3) 原方程的通解为 $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} - \frac{2}{5}e^x$ ……… $7'$

高等数学（下）模拟试卷六参考答案

一、 填空题：（每空 3 分，共 21 分）

1、$\{(x,y)\big| x-1 \le y \le x+1\}$， 2、$\frac{1}{2}$， 3、$2x\cos(x^2+y^2)dx + 2y\cos(x^2+y^2)dy$，

4、$2\sqrt{2}$， 5、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 f(r^2) r dr$， 6、绝对收敛， 7、$y = x^2 + c$ （c 为∀ 常数），

二、选择题：（每空 3 分，共 15 分）1、B， 2、B， 3、B， 4、D， 5、D

三、解：

1、令 $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - 5$ ……… $2'$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}$ ……… $4'$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}$ ……… $6'$

2、所求平面方程的法向量可取为 $\{2,1,3\}$ ……… $2'$

则平面方程为：$2(x-1) + y + 3(z-2) = 0$ ……… $6'$

3、原式 $= \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2) dy$ ……… $4'$

$=\frac{1}{3}$ $\cdots\cdots\cdots 6'$

四、解：1、令 $P(x,y)=x^2-y, Q(x,y)=-(x+\sin y), \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$ $\cdots\cdots\cdots 3'$

原式 $=\int_0^1 (x^2-0)\,dx-\int_0^1 (1+\sin y)\,dy$ $\cdots\cdots\cdots 6'$

$=\cos 1-\frac{5}{3}$ $\cdots\cdots\cdots 7'$

2、令 $P=x, Q=y, R=z$ $\cdots\cdots\cdots 2'$

原式 $=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$ $\cdots\cdots\cdots 5'$

$=\iiint\limits_{\Omega} 3\,dv$ $\cdots\cdots\cdots 7'$

$=9\pi$ $\cdots\cdots\cdots 8'$

3、(1) 此级数为交错级数 $\cdots\cdots\cdots 1'$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$，$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\ln(n+1)}$ $(n=2,3\cdots\cdots)$ $\cdots\cdots\cdots 4'$

故原级数收敛 $\cdots\cdots\cdots 5'$

(2) 此级数为正项级数 $\cdots\cdots\cdots 1'$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{4^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\frac{4}{3}>1$ $\cdots\cdots\cdots 4'$ 故原级数发散 $\cdots\cdots\cdots 5'$

五、解：1、由 $f_x(x,y)=6x+6=0$，$f_y(x,y)=4y-y^2=0$ 得驻点 $(-1,0),(-1,4)$ $\cdots\cdots\cdots 3'$

在 $(-1,0)$ 处 $A=f_{xx}(-1,0)=6, B=f_{xy}(-1,0)=0, C=f_{yy}(-1,0)=4$

因 $AC-B^2>0, A>0$，所以有极小值 $f(-1,0)=-2$ $\cdots\cdots\cdots 5'$

在 $(-1,4)$ 处 $A=f_{xx}(-1,4)=6, B=f_{xy}(-1,4)=0, C=f_{yy}(-1,4)=-4$

因 $AC-B^2<0$,，所以在此处无极值 $\cdots\cdots\cdots 7'$

2、通解 $y=[\int e^x e^{\int -1dx}dx+c]e^{\int dx}$ $\cdots\cdots\cdots 3'$

$=(x+c)e^x$ $\cdots\cdots\cdots 5'$

$y\big|_{x=0}=c=1,$

特解为 $y=(x+1)e^x$ $\cdots\cdots\cdots 7'$

3、1) 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-5r+6=0$，有两不相等的实根 $r_1=2, r_2=3$

所以对应的齐次方程的通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ （c_1,c_2 为$\forall$ 常数） $\cdots\cdots\cdots 3'$

2) 设其特解 $y^*(x)=(ax+b)e^x$

将其代入原方程得 $2ax-3a+2b=x+1, a=\frac{1}{2}, b=\frac{5}{4}$

故特解 $y^*(x)=(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4})e^x$ ……… $6'$

3) 原方程的通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4})e^x$ ……… $7'$

高等数学（下）模拟试卷七参考答案

一．填空题：（每空 3 分，共 24 分）

1. $\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<25\}$　2. $y_t=C\cdot(\frac{2}{3})^t+\frac{3}{5}$　3. $yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$

4. $y=Cx$　5. $\frac{y}{1+x^2y^2}$　6. $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$　7. 8π　8. 2

二．选择题：（每题 3 分，共 15 分）

1．D　2．D　3．B　4．C　5．B

三．求解下列微分方程（每题 7 分，共 21 分）

1.解：$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-4y)+\frac{3x^2}{(3x-4y)y^2}\quad\cdots\cdots\cdots(4\text{ 分})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-2x^2}{y^3}\ln(3x-4y)-\frac{4x^2}{(3x-4y)y^2}\quad\cdots\cdots\cdots(7\text{ 分})$$

2.解：$$\lim_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{3^n}{n\cdot 2^n}}\cdots(5\text{ 分})$$

$$=\frac{3}{2}>1\cdots\cdots\cdots(6\text{ 分})$$

所 以 此 级 数 发 散 …………(7 分)

3. 解：$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{r^2}rdr\ \cdots\cdots(5\text{ 分})$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1 d\theta$$

$$=\pi(e-1)\cdots\cdots(7\text{ 分})$$

四．计算下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1.解： 原方程的通解为

$y=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}[\int \ln x e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+c]$ ………(6分)

$=x[\int \ln x \frac{1}{x}dx+C]=x[\int \ln x d\ln x+C]$

$=x[\frac{1}{2}(\ln x)^2+C]$…………………………(10分)

2. 解：$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x (x+y)dy$……(6分)

$=\int_0^1\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^x dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^2dx=\frac{1}{2}$……(10分)

3.解：$\begin{cases} f_x(x,y)=-2x+6=0 \\ f_y(x,y)=3y^2-12=0 \end{cases}$ 得驻点(3,2)和(3,-2)…………(4分)

$f_{xx}(x,y)=-2, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=6y$

在点(3,2)处，A=-2，B=0，C=12，

$AC-B^2$=-24< 0，故点(3,2)不是极值点……………………(7分)

在点(3,-2)处，A=-2，B=0，C=-12，$AC-B^2$=24> 0，且A<0，

故点(3,2)是极大值点，极大值$f(3,-2)=30$………………(10分)

4.解：此幂级数的收敛半径：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2 4^n}}{\frac{1}{(n+1)^2 4^{n+1}}}\right|=4$……(6分)

$x=4$时幂级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的p-级数

$x=-4$时幂级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$绝对收敛……………………………………(8分)

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 4^n}$收敛域为[-4,4]………………………………………………(10分)