中国石油大学（北京）克拉玛依校区《线性代数》期末测试卷

学年学期：2017—2018 学年第一学期　　试卷类型：A 卷

考试范围：《线性代数》；满分：100 分；考试时间：120 分钟

班级__________　　学号____________　　姓名____________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满　分	24	24	12	10	10	10	10				100
得　分											

一、单项选择题(每题 3 分，共 24 分)

1．设 A 为 3 阶方阵，数 $\lambda=-2$, $|A|=3$, 则 $|\lambda A|=$（　　　）

A．24;　　B．–24;　　C．6;　　D．–6.

2．设 A 为 n 阶方阵, $n_1+n_2+n_3=n$, 且 $|A|\neq 0$, 即 $A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_3 & & \end{pmatrix}$,

则 A^{-1}=(　　)

A．$A=\begin{pmatrix} & & A_1^{-1} \\ & A_2^{-1} & \\ A_3^{-1} & & \end{pmatrix}$;　　B．$A=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{pmatrix}$;

C．$A=\begin{pmatrix} & & A_3^{-1} \\ & A_2^{-1} & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$;　　D．$A=\begin{pmatrix} A_3^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_1^{-1} \end{pmatrix}$.

3．设 A 为 n 阶方阵, A 的秩 R(A)=r<n, 那么在 A 的 n 个列向量中（　　　）

A．必有 r 个列向量线性无关;

B．任意 r 个列向量线性无关;

C．任意 r 个列向量都构成最大线性无关组;

D．任何一个列向量都可以由其它 r 个列向量线性表出.

4．若方程组 $AX=0$ 有非零解, 则 $AX=\beta(\neq 0)$（　　　）

A．必有无穷多组解;

B．必有唯一解;

C．必定没有解;

D．A、B、C 都不对.

5.　设 A、B 均为 3 阶方阵, 且 A 与 B 相似, A 的特征值为 1, 2, 3, 则 $(2B)^{-1}$ 特征值为(　　)

A．2, 1, $\frac{3}{2}$； B. $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$； C．1, 2, 3; D．2, 1, $\frac{2}{3}$.

6. 设 A，B 为 n 阶矩阵，且 R（A）=R（B），则（　　）

A．$AB=BA$;

B．存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$;

C．存在可逆矩阵 C, 使 $C^{T}AC=B$;

D．存在可逆矩阵 P、Q，使 $PAQ=B$.

7．实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$ 是（　　）

A．正定二次型;

B．半正定二次型;

C．半负定二次型;

D．不定二次型.

8．设 A, B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵,则必有（　　）

A．A 的列向量线性相关,B 的行向量线性相关；

B．A 的列向量线性相关,B 的列向量线性相关；

C．A 的行向量线性相关,B 的行向量线性相关；

D．A 的行向量线性相关,B 的列向量线性相关.

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

1.若行列式的每一行（或每一列）元素之和全为零，则行列式的值等于______________；

2.设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A+3E=O$，则 A^{-1}=______________;

3.设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0, & 3, & 1, & 2\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1, & -1, & 2, & 4\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3, & 0, & 7, & 13\end{pmatrix}^T$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个最大线性无关组为__________________________;

4. 设 γ_0 是非齐次方程组 $AX=b$ 的一个解向量，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是对应的齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则 $\gamma_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性__________;

5. 设 λ_1, λ_2 为 n 阶方阵 A 的两个互不相等的特征值，与之对应的特征向量分别为 X_1，X_2，则 X_1+X_2________________矩阵 A 的特征向量。

6. 设 A 为 n 阶方阵， 若 A 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$，则 $|A^2+E|$=__________________________________;

7. n 维向量空间的子空间 $W=\left\{(x_1, ,x_2, \ldots, x_n): \begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ x_2+\cdots+x_n=0 \end{cases}\right\}$ 的维数是__________;

8. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$ 如果$|A|$=1, 那么 $|B|$ = _______.

三、（12 分）解矩阵方程 $2X = AX + B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

四、（10 分）设方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = \lambda. \end{cases}$

问当λ 取何值时，

（1）方程组有唯一解；

（2）方程组无解；

（3）方程组有无穷多解，求其通解（用解向量形式表示）.

五、（10 分）已知二次型，$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$，

(1) 写出此二次型对应的矩阵 A;

(2) 求一个正交变换 $x=Q\,y$, 把二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$化为标准型.

六、（10 分）设$\alpha_1 = (1,1,1)$，$\alpha_2 = (0,1,2)$，$\alpha_3 = (2,0,3)$ 是 R^3 中的向量组，用施密特正交化方法把它们化为标准正交组.

七、（10 分）设 A 为 n 阶方阵, 求证: $A^2 = A$ 的充分必要条件是: $R(A)+R(A-E) = n$.