《线性代数》模拟试题 01 参考答案

专业：______________　班级：______________　姓名：______________　学号：______________

<table>
<tr><td colspan="2">题号</td><td>得分</td><td>合计</td><td>总分</td></tr>
<tr><td rowspan="10">一</td><td>1</td><td></td><td rowspan="10"></td><td rowspan="23"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">二</td><td>11</td><td></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">三</td><td>16</td><td></td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td></td></tr>
<tr><td>22</td><td></td></tr>
<tr><td>四</td><td>23</td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、填空题：1～10 小题，每小题 2 分，共 20 分.

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$ $\underline{\ 4^4\ }$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{2015}=$ $\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$.

提示：$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{2015}=\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2\right]^{1007}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}$ 的余子式 $M_{21}+M_{22}+M_{23}=4$，则 $x=$ $\underline{\ 3\ }$.

提示：$M_{21}+M_{22}+M_{23}=4$，所以 $-A_{21}+A_{22}-A_{23}=4$，即 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}=4$

4. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，且有 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$.

提示：由于 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{BC}$

5. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 5 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}|=$ $\underline{\ -4\ }$.

提示：$|-\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{-1}|=(-1)^5|\boldsymbol{B}^T||\boldsymbol{A}^{-1}|=-\frac{|\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}|}$

6. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ $\underline{3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$.

7. 已知 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，而 $\boldsymbol{\eta}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 2 个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解可以表示为 $\underline{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+k(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)，其中 k\in R}$.

8. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 2,\ 2,\ 3)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(3,\ 1,\ 5,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 的夹角为 $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值可以表示为 $\underline{\dfrac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|}$.

10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2^2-3x_2x_3$ 的矩阵是 $\underline{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}}$.

二、单项选择题：11～15 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & a \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ 中，元素 a 的代数余子式是（ D ）.

(A) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$　(C) $-\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$　(D) $-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

12. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则下列结论一定成立的是（ D ）.

(A) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$　(B) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

(C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　(D) $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$

13. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 均为三维列向量，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$（ A ）.

(A) 4　(B) 2　(C) 1　(D) -4

提示：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}|=4|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=4|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|+4|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=4|\boldsymbol{A}|+4|\boldsymbol{B}|$

14. 设 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解向量，则下列向量中仍为该方程组解的是（ B ）.

(A) $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$　(B) $\dfrac{1}{5}(3\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2)$

(C) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2)$　(D) $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$

15. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&x&4\\0&4&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&y\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则(B).

(A) $x=3$，$y=-5$　　(B) $x=-3$，$y=-5$

(C) $x=-5$，$y=3$　　(D) 条件不足以确定 x 和 y 的值

提示：由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，因此 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，即有 $3x-16=5y$，$4+x=6+y$，解得 $x=-3$，$y=-5$.

三、计算题：16～22 小题，每小题 8 分，共 56 分.

16. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}$.

$$D=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix}b+\sum_{i=1}^n a_i&a_2&\cdots&a_n\\b+\sum_{i=1}^n a_i&a_2+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b+\sum_{i=1}^n a_i&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}$$

$$=\left(b+\sum_{i=1}^n a_i\right)\begin{vmatrix}1&a_2&\cdots&a_n\\1&a_2+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}\xlongequal[\cdots,\ c_n-a_nc_1]{c_2-a_2c_1,\ c_3-a_3c_1}\left(b+\sum_{i=1}^n a_i\right)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&b\end{vmatrix}$$

$$=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^n a_i\right)$$

17. 用矩阵分块的方法求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&3&1&2\\3&2&0&1\\0&0&2&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&3\\3&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$，设 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为

$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{K}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}$，则由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{K}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$

可知 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}=\boldsymbol{O}$，因此 $\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}$．又因为 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3\\3&-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}$

因此 $\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}=-\begin{pmatrix}-2&3\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&1&0\\3&-4&-2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$

18. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,5,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,4,7)^{\mathrm{T}}$，求向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用它们线性表示．

由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\-1&1&-1&3\\5&-1&-2&4\\-1&3&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{r_2+r_1,\ r_3-5r_1}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&2&4\\0&-6&-17&-1\\0&4&4&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&2&4\\0&0&-11&11\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div(-11)]{\frac{r_2}{2}}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3,\ r_1-r_2]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故极大线性无关组可取 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$．

19. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，

$\beta_3=\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，若$\beta_3$可以由$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$线性表示，且$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$与$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$具有相同的秩，求$a$、$b$的值．

利用初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5-b}{3} \end{pmatrix}$$

因此，$b=5$，且$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，故$R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$．由于

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a-15 & 0 \end{pmatrix}$$，故$a=15$．

20. 当a取何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=3 \\ x_1+ax_2+3x_3=2 \end{cases}$无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解时，求其通解（用基础解系表示）．

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & 2-a \end{pmatrix}$$

当$a\neq-3,2$时，方程组有唯一解；当$a=-3$时$R(A)\neq R(\bar{A})$，方程组无解．

当$a=2$时$R(A)=R(\bar{A})=2<3$，方程组有无穷多解．由于

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此与导出组通解的方程组为$\begin{cases} x_1=5x_3 \\ x_2=-4x_3 \end{cases}$，基础解系$\xi=(5,-4,1)^{\mathrm{T}}$，非齐次方程组

为$\begin{cases} x_1 = 5x_3 \\ x_2 = -4x_3 + 1 \end{cases}$，特解为$\boldsymbol{\eta} = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$，故方程组的通解为$\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$，$c \in \mathbb{R}$.

21. 已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，其中$a$、$b$为实数且$a > 0$，若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，求：(1) a、b的值，(2) 正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角阵.

由$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，有$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$，于是有$7 = 5 + b$，$10 - 2a^2 = 4b$，解得$a = 1$，$b = 2$. 因此$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 4$.

当$\lambda_1 = 1$时，由方程组$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，解得基础解系$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当$\lambda_2 = 2$时，由方程组$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，解得基础解系$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当$\lambda_3 = 4$时，由方程组$(4\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，解得基础解系$\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

由于实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量相互正交，故只需对$\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_2$、$\boldsymbol{\eta}_3$单位化即可，$\boldsymbol{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，

因此所求的正交矩阵$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，满足$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

22. 求可逆的线性变换将二次型$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_1x_4$化为标准型，及其正惯性指数及秩.

因为 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4+2x_1x_4$，令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_3 \\ y_2=x_2+x_4 \\ y_3=x_3 \\ y_4=x_4 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_3 \\ x_2=y_2-y_4 \\ x_3=y_3 \\ x_4=y_4 \end{cases}$

变换的行列式 $\boldsymbol{C}_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，代入上式有 $f(y_1,y_2,y_3,y_4)=2y_1y_2$

令 $\begin{cases} y_1=z_1-z_2 \\ y_2=z_1+z_2 \\ y_3=z_3 \\ y_4=z_4 \end{cases}$，变换的行列式 $\boldsymbol{C}_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，代入上式有

$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=2z_1^2-2z_2^2$

令矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$，其可逆且原二次型经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 化为标准形 $2z_1^2-2z_2^2$，原二次型的正惯性指数为 1，秩为 2.

四、证明题：本题满分 9 分.

23. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量空间 R^3 的一个基，而向量 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 满足

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$$

证明 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 R^3 的一个基.

由题意，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

由于 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-10\neq 0$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故有 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，

因此 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

由题意，$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 又因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{A}^{-1}$，

即$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$可以由$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$线性表示，故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$等价，因此$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$也是$\mathbb{R}^3$的一个基.