中国石油大学（北京）

2023 — 2024 学年 春季学期

《高等数学 A&B(II)》期中考试试卷

（A/B 卷）

考试方式： 闭卷

班级：________________

姓名：________________

学号：________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

注：1.试卷共　页（含封面），请勿漏答。

2.试卷不得拆开，所有答案均写在题后空白处。

一、填空题（在每题空格处填上正确答案，共 5 题，每题 3 分，共计 15 分）

1、已知向量 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ 与过点 $P(1,1,1)$ 的直线平行，则该直线方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$

2、已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5$，则 $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=-141$

3、当 D 是由 x 轴，y 轴及 $2x+y-2=0$ 围成的区域时，则 $\iint_D dxdy=1$

4、设函数 f 在任一点处的偏导数存在，则 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f\left(0,\frac{\pi}{4}+y\right)-f(0,\frac{\pi}{4})}{y}=f_y'\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

5、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)}(1+xy)^{\frac{y}{x}}=e^4$

二、选择题（在每题中选出一个正确选项，共 5 题，每题 3 分，共计 15 分）

1、函数 $z=\sin(xy)$ 的全微分是（ C ）

(A) $\Delta z=y\cos(xy)+x\cos(xy)$　　(B) $\Delta z=y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy$

(C) $dz=y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy$　　(D) $dz=y\cos(xy)+x\cos(xy)$

2、设 D 是由 $x+y=1,x=0,y=0$ 所围成的区域，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（ B ）

（A）$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$

（C）$\int_0^1 dx\int_0^{1-y} f(x,y)dy$　　（D）$\int_0^{1-x} dx\int_0^1 f(x,y)dy$

3、函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则必有（ C ）

(A) 偏导数 f_x,f_y 在点 (x_0,y_0) 必连续　　(B) 在点 (x_0,y_0) 有 $f_{xy}=f_{yx}$

(C) 在点 (x_0,y_0) 沿任意方向的方向导数都存在　　(D) 全增量 Δz 与全微分 dz 相等

4、设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4$，且 $y>0\}$，则 $I=\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=$（ C ）

（A）$\pi\int_0^2 f(r)dr$　　（B）$2\pi\int_0^2 f(r)dr$

（C）$\pi\int_0^2 rf(r)dr$　　（D）$2\pi\int_0^2 rf(r)dr$

5、设函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内可微，则在点 (x,y) 处 $\boldsymbol{grad}(uv)=$（ A ）

(A) $u\boldsymbol{grad}v+v\boldsymbol{grad}u$　　(B) $\boldsymbol{grad}u\cdot\boldsymbol{grad}v$

(C) $u\boldsymbol{grad}v$　　(D) $v\boldsymbol{grad}u$

三、计算题（共 6 题，每题 5 分，共计 30 分）

1、在由点$M(1,1,1),A(2,2,1)$和$B(2,1,2)$构成的三角形中，试用**向量代数方法**求点 A 到 MB 的距离.

解　作向量$\overrightarrow{MA}=(1,1,0),\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$，$cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$　　**（3 分）**

得 $\angle AMB=\frac{\pi}{3}$，　**（1 分）**　　于是点 A 到 MB 的距离

$$d=\sqrt{2}\cdot sin\angle AMB=\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$　**（1 分）**

2、求$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值点.

解　求驻点，$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+2x-3=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=y^2-2y=0\end{cases}$，得驻点$(1,0),(1.2),(-3,0),(-3,2)$

$$A=f_{xx}=6x+6,\ B=f_{xy}=0,\ C=f_{yy}=-6y+6$$　**（3 分）**

对于驻点$(1,0)$，$A=12,\ C=6$，$(1,0)$是极小值点

对于驻点$(1,2)$，$A=12,\ C=-6$，$(1,2)$不是极值点

对于驻点$(-3,0)$，$A=-12,\ C=6$，$(-3,0)$不是极值点

对于驻点$(-3,2)$，$A=-12,\ C=-6$，$(-3\ ,2)$是极大值点

故极值点为 $(1,0),(-3,2)$　　**（2 分）**

3、求$I=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中$D$是由$y=x,y=-x,$及$x^2+y^2=1$在上半平面所围区域.

解　$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+r^2}d(1+r^2)dr=\frac{\pi}{4}ln2$

（2 分）　　**（2 分）**　　**（1 分）**

4、设f具有二阶连续偏导数，且$z=f\left(xy,x+y\right)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1y+f_2$　**（2 分）**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(f_1y+f_2)=f_1+y(f_{11}x+f_{12})+f_{21}x+f_{22}$$　**（2 分）**

$$=f_1+xyf_{11}+yf_{12}+xf_{21}+f_{22}$$　**（1 分）**

5、设$f\left(x,y,z\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$，求函数在点$P\left(1,2,2\right)$处增加最快的方向以及$f\left(x,y,z\right)$沿这个方向的方向导数.

解　梯度方向是函数增加最快的方向，函数在点P的梯度为

$$\boldsymbol{grad}f|_P=(x,y,z)|_P=(1,2,2)$$　**（2 分）**

与方向$\overrightarrow{OP}$同向的单位向量为 $\vec{e}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ **（1 分）**

故所求方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\boldsymbol{grad}f\cdot\vec{e}=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=3$ **（2 分）**

6、设空间曲线的参数方程为$\begin{cases}x=t\\y=t^2\\z=t^3\end{cases}$，当$t=1$时，求对应空间曲线的切向量以及对应切线的**参数式**方程.

解 当$t=1$时，曲线上对应的点 P 为$(1,1,1)$**（1 分）**，该点处的切向量$\vec{T}=(1,2,3)$**（1 分）**，于是过 P 点切线的参数式方程为

$$\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=1+3t\end{cases}$$ **（3 分）**

四、（9 分）求通过直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ 且垂直于平面$3x+2y-z-5=0$的平面**一般式**方程.

设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

解法 1 因为直线在所求平面上，故有 $\vec{n}\perp\vec{s}=(2,-3,2)$**（2 分）**，依题意有 $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}=(3,2,-1)$**（2 分）**，因此

$$\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{n_1}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&2\\3&2&-1\end{vmatrix}=1\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-13\boldsymbol{k}$$ **（3 分）**

又平面通过点 $(1,-2,2)$，所求平面的一般式方程为 $x-8y-13z+9=0$ **（2 分）**

解法 2 因为 $\vec{n}\perp\vec{s}=(2,-3,2)$和$\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}=(3,2,-1)$，所以有 **（4 分）**

$$\begin{cases}2A-3B+2C=0\\3A+2B-C=0\end{cases}$$

解之，$B=-8A,\ \ C=-13A$， **（3 分）** 代入所设平面方程，得

$A(x-1)-8A(y+2)-13A(z-2)=0$ 即所求平面一般式方程 $x-8y-13z+9=0$

（2 分）

五、（9 分）设$u=f(x,y,z)$具有连续偏导数，且有方程$e^{xy}-y=0$和$e^{z}-xz=0$，求$\frac{du}{dx}$.

解法 1 将 3 个方程联立，得到方程组

$$\begin{cases}u=f(x,y,z)\\e^{xy}-y=0\\e^{z}-xz=0\end{cases}$$

在每个方程两边对 x 求导

$$\begin{cases}\frac{du}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}+f_z\frac{dz}{dx} & (1)\\ e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-\frac{dy}{dx}=0 & (2)\\ e^z\frac{dz}{dx}-z-x\frac{dz}{dx}=0 & (3)\end{cases}$$ **（6 分）**

在（2）式中解出$\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$，在（3）中解出$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{e^z-x}$， **（2 分）** 将其代入（1）式，得

$$\frac{du}{dx}=f_x+f_y\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}+f_z\frac{z}{e^z-x}$$ **（1 分）**

解法 2 在函数 u 中求对 x 的导数，得$\frac{du}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}+f_z\frac{dz}{dx}$ **（3 分）**

利用隐函数求导公式，得$\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$，$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{e^z-x}$， **（4 分）** 将它们代入上式，得

$$\frac{du}{dx}=f_x+f_y\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}+f_z\frac{z}{e^z-x}$$ **（2 分）**

六、(9 分）设某种产品的产量是劳动使用量 x 和原料使用量 y 的函数$f(x,y)=60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$，假定每单位劳动力费用为 100 元，每单位原料费用为 200 元，现有 3 万元资金用于生产，问应如何安排劳动力和原料用量才能使产量达到最大。

解 目标函数为 $f(x,y)=60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$，约束条件为 $100x+200y=30000$. 建立拉格朗日函数

$$L(x,y)=60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}+\lambda(100x+200y-30000)$$ **（3 分）**

求拉格朗日函数的偏导，得下面方程组

$$\begin{cases}L_x=60\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+100\lambda=0 & (1)\\ L_y=60\frac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+200\lambda=0 & (2)\\ L_\lambda=100x+200y-30000=0 & (3)\end{cases}$$ **（3 分）**

由（1）*2 -（2）得 $6x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$，两边同乘$x^{\frac{1}{4}}y^{3\frac{1}{4}}$可得 $x=6y$，将其代入（3），得唯一驻点 $(225,37.5)$ 因为该问题一定存在最大值，所以当$x=225, y=37.5$时，产量达到最大. **（3 分）**

七、(7 分）设 $f(x,y)$ 在R^2上连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)dudv$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2$，$x=1$所围区域，求函数 $f(x,y)$.

解 等式两边在 D 上求积分，得

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D xydxdy+\iint_D f(u,v)dudv\iint_D dxdy$$ **（2 分）**

其中，$\iint_D xydxdy=\int_0^1 xdx\int_0^{x^2} ydy=\frac{1}{12}$，$\iint_D dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dy=\frac{1}{3}$，于是

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\iint_D f(u,v)dudv$$ **（3 分）**

解之，有 $\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{8}$，故$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$ **（2 分）**

八、（6 分）试阐述一元函数的极限与多元函数的极限之间的相互关系.