以下是概率论与数理统计期末考试中常考的**核心性质、公式及定理**整理，涵盖基础概念、概率计算、随机变量、数字特征、大数定律及数理统计等模块，适合考前复习巩固：

一、基础概率公式

1. 事件关系与运算

- **德摩根定律**：
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- **加法公式**：
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  推广到三个事件：
  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

2. 条件概率与独立性

- **条件概率**：
  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0)$
- **乘法公式**：
  $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$
- **全概率公式**：
  若$B_1, B_2, \ldots, B_n$为样本空间的划分，则
  $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$
- **贝叶斯公式**：
  $P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$
- **独立性**：
  - 事件独立：$P(AB) = P(A)P(B)$
  - 独立事件的并：
    $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$

二、随机变量及其分布

1. 离散型随机变量

- **常见分布**：

分布类型	概率质量函数（PMF）	期望（E(X)）	方差（D(X)）
0-1分布	$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ

2. 连续型随机变量

- **概率密度函数（PDF）性质**：
  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \quad P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- **常见分布**：

分布类型	概率密度函数（PDF）	期望（E(X)）	方差（D(X)）
均匀分布	$f(x)=\frac{1}{b-a},a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},x\geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

- **正态分布标准化**：
  若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，
  $P(X\leq x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

三、多维随机变量

1. 联合分布与边缘分布

- **二维离散型**：
  联合概率质量函数$P(X=x_i,Y=y_j)$，边缘分布：
  $P(X=x_i)=\sum_j P(X=x_i,Y=y_j),\quad P(Y=y_j)=\sum_i P(X=x_i,Y=y_j)$
- **二维连续型**：
  联合密度函数$f(x,y)$，边缘密度：
  $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

2. 独立性

- 离散型：$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$对所有$i,j$成立。
- 连续型：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$几乎处处成立。

四、数字特征

1. 期望与方差

- **期望性质**：
  - $E(c)=c$，$E(aX+b)=aE(X)+b$
  - 若X,Y独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$
- **方差性质**：
  - $D(c)=0$，$D(aX+b)=a^2D(X)$
  - $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$
  - 若X,Y独立，则$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

2. 协方差与相关系数

- **协方差**：
  $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)$
  - 性质：$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$，$\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\cdot\mathrm{Cov}(X,Y)$
- **相关系数**：
  $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}},\quad|\rho_{XY}|\leq 1$
  - $\rho_{XY}=0$时，称X,Y不相关（独立⇒不相关，但反之不成立）。

五、大数定律与中心极限定理

- **切比雪夫不等式**：
  $P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$
- **大数定律**（以切比雪夫大数定律为例）：
  若$X_1,X_2,\ldots,X_n$独立同分布，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2<\infty$，则
  $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\xrightarrow{P}\mu\quad(n\to\infty)$
- **中心极限定理（CLT）**：
  若$X_1,X_2,\ldots,X_n$独立同分布，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2>0$，则当n充分大时，
  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$
  即$\sum_{i=1}^n X_i\approx N(n\mu,n\sigma^2)$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i\approx N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$。

六、数理统计基础

1. 常用统计量

- **样本均值**：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，$E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$
- **样本方差**：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$，$E(S^2)=\sigma^2$

2. 三大抽样分布

- **卡方分布（χ^2分布）**：
  若$X_i\sim N(0,1)$独立，则$\sum_{i=1}^n X_i^2\sim\chi^2(n)$，
  $E(\chi^2(n))=n$，$D(\chi^2(n))=2n$。
- **t分布**：
  若$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$独立，则$\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$。
- **F分布**：
  若$U\sim\chi^2(m)$，$V\sim\chi^2(n)$独立，则$\frac{U/m}{V/n}\sim F(m,n)$，且$\frac{1}{F(m,n)}\sim F(n,m)$。

3. 参数估计（点估计）

- **矩估计法**：用样本矩估计总体矩，如$\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^2$。
- **极大似然估计（MLE）**：构造似然函数$L(\theta)=\prod f(X_i;\theta)$，求$\theta$使$L(\theta)$最大。

七、假设检验

- **步骤**：
  1. 提出原假设H_0和备择假设H_1；
  2. 选择检验统计量，确定拒绝域形式；
  3. 根据显著性水平α，计算临界值或p值；
  4. 决策：若统计量落入拒绝域，则拒绝H_0。
- **常见检验**：
  - **正态总体均值检验**：
    - Z检验（σ^2已知，大样本）；
    - t检验（σ^2未知，小样本）。
  - **卡方检验（拟合优度检验、方差检验）**。

八、重要定理与公式速记

- **泊松近似二项分布**：当n大、p小，$\lambda = np$适中时，$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- **二维正态分布**：若$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且$\rho$为相关系数。

复习建议：

1. 结合教材例题和真题，重点练习全概率公式、正态分布计算、数字特征推导、参数估计和假设检验；
2. 熟记常见分布的期望、方差及概率密度形式；
3. 注意区分独立与不相关、样本方差与总体方差的自由度差异。

需要具体题型讲解或公式应用示例可随时提问！