《线性代数》模拟试题 03 参考答案

专业：______________ 班级：______________ 姓名：______________ 学号：______________

题号		得分	合计	总分
一	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			
	8			
	9			
	10			
二	11			
	12			
	13			
	14			
	15			
三	16			
	17			
	18			
	19			
	20			
	21			
	22			
四	23			

一、填空题：1～10 小题，每小题 2 分，共 20 分.

1. 已知 $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & x & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8$，则 $x =$ $\underline{\frac{1}{3}}$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维列向量，若 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = 1$，则 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2| =$ $\underline{6}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2018} =$ $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2015 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{2}$，$|\boldsymbol{B}| = 2$，则 $|-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}| =$ $\underline{4(-1)^n}$.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$，设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^6 =$ $\underline{6^5 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

提示：由于 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 6\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 6\boldsymbol{A}$，因此

$$\boldsymbol{A}^6 = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 6^5\boldsymbol{A} = 6^5 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 向量空间 $V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$ 的维数是 $\underline{2}$，写出 V 的一个基 $\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 m 阶列向量，线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $\underline{R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})}$.

8. 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 -2、-3、-4，则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| =$ $\underline{-6}$.

9. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, y_1, z_1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta} = (x_2, y_2, z_2)^{\mathrm{T}}$，则 $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\| =$ $\underline{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 (z_1 - z_2)^2}}$，

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量应满足的关系式是 $\underline{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0}$.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 为 R^3 空间的两组基，且满足关系式 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则由$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$到$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$的过渡矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

二、单项选择题：11～15 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 下列表述不正确的是（ D ）.

(A) 若矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$可逆，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{C}$可逆且$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

(B) 对任意的两个同阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，均有$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

(C) 对任意的两个n阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，均有$\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\big|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{B}|$

(D) 对任意的两个矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，若$\boldsymbol{A}$可逆，则有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

12. 若齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$有非零解，则$\lambda=$（ D ）.

(A) -1或2　　(B) 1或2　　(C) -1或-2　　(D) 1或-2

13. s个r维的向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关的充分必要条件是（ C ）.

(A) 向量的个数s大于向量的维数r

(B) 向量组的任意一个向量都可表示成其余向量的线性组合

(C) 线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$有非零解

(D) 矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s)$的任意一个$s$阶子式值为零

14. 已知$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$均为n阶方阵，且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则一定有（ C ）.

(A) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(B) $\boldsymbol{A}$可逆

(C) $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$　　(D) $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})=n$

15. 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$合同于矩阵（ A ）.

(A) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

三、计算题：16～22 小题，每小题 8 分，共 56 分.

16. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$ 的值，其中 $a\neq 0$.

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1,r_3-r_1,\dots,r_n-r_1} \begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a & -a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2,c_1+c_3,\dots,c_1+c_n} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix} =(-a)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i-a\right)$$

或者

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2,c_1+c_3,\dots,c_1+c_n} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^n x_i-a & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^n x_i-a & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n x_i-a\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1,r_3-r_1,\dots,r_n-r_1} \left(\sum_{i=1}^n x_i-a\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix}$$

$$=(-a)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)$$

17. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足关系式 $AB=B+E$，试求：(1) 行列式 $\left|A^{-1}+A^*\right|$ 的值；(2) 矩阵 B.

(1) 由题意知 $|A|=3$，因此

$$\left|A^{-1}+A^*\right|=\left|A^{-1}+|A|A^{-1}\right|=\left|4A^{-1}\right|=4^3\left|A^{-1}\right|=\frac{64}{3}$$

(2) 由 $AB=B+E$ 可知 $(A-E)B=E$，因此 $B=(A-E)^{-1}$. 而 $A-E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$，利用初等行变换，

$$\left(A-E\ \vdots\ E\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&1&0&0\\0&0&2&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_1,\ \frac{1}{2}\times r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&2&0&0&1\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$$

因此

$$B=(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&1\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

18. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$，且向量 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 具有相同的秩，试求常数 a、b 的值.

利用初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&5-b\end{pmatrix}$$

因为向量 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，因此 $b=5$. 而

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&a&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&a-15&0\end{pmatrix}$$

又因为 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，因此 $a=15$.

19. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}4\\-11\\6\\8\end{pmatrix}$.

(1) 试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$、$\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩及它的一个最大线性无关组；

(2) 将其余向量用所求的最大线性无关组线性表示.

(1) 利用行初等变换，将 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 化为行阶梯矩阵

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\-1&3&-5&-2&-11\\2&1&3&2&6\\4&2&6&0&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\0&1&-1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3，最大线性无关组可以取为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(2) 利用行初等变换，将 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 化为行最简形矩阵

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\right)\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\0&1&-1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_5=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$.

20. 讨论a为何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+3x_2+6x_3+x_4=3\\x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=1\end{cases}$有解，当有无穷多解时求其通解（用基础解系表示）.

利用行初等变换将增广矩阵$\boldsymbol{B}$化为行阶梯矩阵

$$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&6&1&3\\1&1&2&3&1\\3&-1&-a&15&3\\1&-5&-10&12&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&2-a&2&4\\0&0&0&1&2\end{array}\right)$$

当$a\neq2$时，$R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{B}\right)=4$，方程组有唯一解.

当$a=2$时，利用行初等变换将增广矩阵$\boldsymbol{B}$化为行最简形矩阵

$$\boldsymbol{B}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&2&4\\0&0&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

由于$R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{B}\right)=3$，因此方程组有无穷多解，且有$\begin{cases}x_1=-8\\x_2+2x_3=3\\x_4=2\end{cases}$. 取$x_3=0$时，

可得方程组的一个特解为$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-8\\3\\0\\2\end{pmatrix}$. 对应的齐次线性方程组$\begin{cases}x_1=0\\x_2=-2x_3\\x_4=0\end{cases}$的基础解系为$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$. 于是所求的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$，其中 $k \in \mathbb{R}$.

21. 已知对称矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$，试求：(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及对应的全部特征向量；(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵，并写出该对角矩阵.

(1) 由于

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+7)(\lambda-2)^2$$

所以的特征值为 $\lambda_1 = -7$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_1 = -7$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A} + 7\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A} + 7\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1 = -7$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1$ $(k_1 \neq 0)$.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3$，其中 k_2, k_3 不全为零.

(2) 将 $\boldsymbol{\eta}_2$、$\boldsymbol{\eta}_3$ 正交化．取 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\eta}_3-\dfrac{[\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}$，将向量组 $\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}$，因此所求正交矩阵为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{45}}\\ -\dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3}\\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$$

此时对角矩阵为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-7&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

22. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3$. (1) 将 f 化为标准形，并写出相应的可逆线性变换；(2) 求二次型 f 的秩、正惯性指数和负惯性指数.

(1) 由于 f 含有平方项，可以先合并、配方含有 x_1 的项，

$$f=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3=(x_1-2x_3)^2-2x_2^2-x_3^2+4x_2x_3$$

右端除第一项外不再含 x_1，下面对含 x_2 的项进行配方，

$$f=(x_1-2x_3)^2-2(x_2-x_3)^2+x_3^2$$

取线性变换，

$$\begin{cases}y_1=x_1-2x_3\\y_2=x_2-x_3\\y_3=x_3\end{cases}，即\begin{cases}x_1=y_1+2y_3\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$$

二次型 f 化为标准形 $f=y_1^2-2y_2^2+y_3^2$，所取可逆变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，其中

$$C=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\left(|C|=1\neq 0\right)$$

(2) 二次型 f 的秩为 $r=3$，正惯性指数为 $p=2$，负惯性指数为 $q=1$.

四、证明题：本题满分 9 分.

23. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0\\ \quad 2x_1-x_2=0\\ 3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的解，且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，试证明 $|\boldsymbol{B}|=0$.

利用初等行变换，将系数矩阵化为行阶梯矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&0\\3&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-5&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $R(\boldsymbol{A})=2$，于是齐次线性方程组的基础解系所含向量个数为 $3-2=1$，故 $R(\boldsymbol{B})\leq 1$，因此 $|\boldsymbol{B}|=0$.