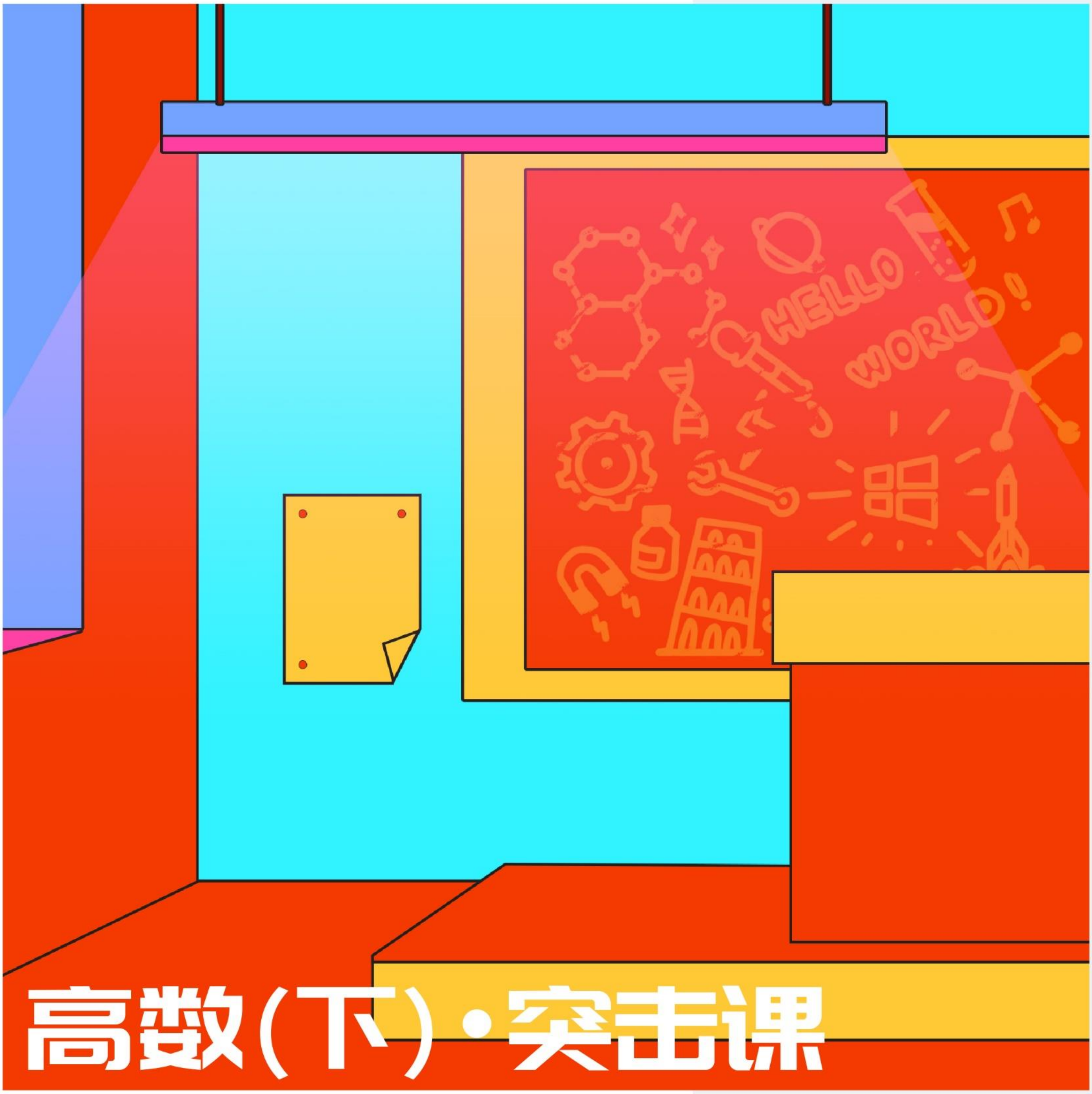


高数(下)·突击课

4小时突击

课程讲义

江苏博事达
JIANGSU BOOMSTAR

江 苏 博 事 达 律 师 事 务 所

JIANGSU BOOMSTAR LAW OFFICE

中国 南京 奥体大街68号国际研发总部园4A栋17楼　　邮编：210019
17F 4ABuilding NO.68 Aoti Street, Nanjing, China　　P.C: 210000
电话(Tel)：(86)-25-82226685　　传真(Fax)：(86)-25-82226696

律 师 声 明

江苏博事达律师事务所接受蜂考品牌公司的委托，发表以下律师声明：

“蜂考系列课程”（含视频、讲义、音频等）内容均为蜂考原创，蜂考品牌公司对此依法享有著作权，任何单位或个人不得侵犯。

蜂考品牌公司为维护创作作品的合法权益，已与江苏博事达律师事务所开展长期法律顾问合作，凡侵犯课程版权等知识产权的，蜂考品牌公司将授权江苏博事达律师事务所依据国家法律法规提起民事诉讼。对严重的侵权盗版分子将报送公安部门采取刑事手段予以严厉打击。

感谢大家对蜂考品牌的长期支持，愿与各位携手共同维护知识产权保护。遵守国家法律法规，从自身做起，抵制盗版！

特此声明！

江苏博事达律师事务所
二〇二一年七月十四日

课时一　多元函数与重极限

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 定义域	★★★	0～3	选择、填空
2. 重极限			

1. 多元函数定义域

题 1. 函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(5-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域为________。

解：$\begin{cases}-1\le 5-x^2-y^2\le 1\\ x-y^2>0\end{cases}\quad \Rightarrow\left\{(x,y)\,|\,4\le x^2+y^2\le 6,x>y^2\right\}$

2. 多元函数重极限

题 1. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}$

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{xy}x=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}x=2$

重要极限公式：$\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$

$\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e$

题 2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sqrt{1+x^2y}-1}{e^{xy}-1}$。

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sqrt{1+x^2y}-1}{e^{xy}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\frac{1}{2}x^2y}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{1}{2}x=1$

等价无穷小公式：

$x\to 0$ 时

1） $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$

2） $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ ，$1-\cos^a x\sim\dfrac{a}{2}x^2$

3） $(1+x)^a-1\sim ax$ ，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$

题 3. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}$$

有理化：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

题 4. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$ ________ 。

解：$(x,y)\to(0,0)$，$x^2+y^2\to 0$，$\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 有界，故原式$=0$

题 5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{5x-2y}$ 不存在。

证明：取路径：$y=\dfrac{5}{2}x$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{5x-2y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{5}{2}x}}\dfrac{3x-\frac{5}{2}x}{5x-5x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{5}{2}x}}\dfrac{\frac{1}{2}x}{0}$ 不存在

沿一条路径趋近，极限不存在，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{5x-2y}$ 不存在

判断极限不存在的方法通常有两个：

①找一条路径，极限不存在。

②找两条路径，极限不相等

题 6. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$，问 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在？

解：取路径：$y=x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

取路径：$y=-x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{x\cdot(-x)}{x^2+(-x)^2}=-\frac{1}{2}$$

沿不同路径趋近，极限值不相等，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在

课时一　练习题

1. 函数 $z=\ln(y^2-2x+1)$ 的定义域为________。

2. 二元函数 $z=\sqrt{\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域为________。

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}=$________。

4. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$________。

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\tan(xy)}{y}=$________

6. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{x}=$________

$A.0$　　　　$B.1$　　　　$C.2$　　　　$D.4$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[\dfrac{\sin(xy)}{y}+\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}]=$________

8. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+xy}{1+xy}$________

$A.$存在但不等于 0　　$B.$存在且等于 0　　$C.$不存在　　$D.$以上结论都不正确

9. 下列选项中极限存在的是（　　）

$A.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　$B.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$　　$C.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$　　$D.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

课时二　偏导数与全微分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 偏导数	必考	6～10	选择、填空、大题
2. 高阶导数			
3. 全微分			
4. 偏导、连续、可微之间的关系	★★★	0～3	选择、填空

1. 偏导数【$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$，$f_x(x,y)$，$f_x'(x,y)$】

求导公式：

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$　　$(\sin x)'=\cos x$　　$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(e^x)'=e^x$　　$(\cos x)'=-\sin x$　　$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$　　$(\tan x)'=\sec^2 x$　　$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(a^x)'=a^x\ln a$　　$(\cot x)'=-\csc^2 x$

题 1.　$z=3x^2y^3+4x^2-2y+6$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^3+8x$

$\frac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2-2$

题 2. 设 $f(x,y)=x^2e^y+\arctan\frac{y}{x}$，则偏导数 $f_x(1,0)=$ ________

法一：先算后代　　$f_x=2xe^y+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=2xe^y-\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}=2$

法二：先代后算　　$f(x,0)=x^2$，　$f_x=2x\big|_{x=1}=2$

题 3. $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=(\quad)$

$A.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ $\qquad B.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$C.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x}$ $\qquad D.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x}$

答案：B

偏导数定义公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

题 4. 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=$ ________

$A.\ f_x'(x_0,y_0)$ $\qquad B.\ 2f_x'(x_0,y_0)$ $\qquad C.\ f_y'(x_0,y_0)$ $\qquad D.\ 2f_y'(x_0,y_0)$

答案：B 解析：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\dfrac{x_0+2h-x_0}{h}f_x'(x_0,y_0)=2f_x'(x_0,y_0)$

2. 高阶偏导数

题 1. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8yx^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-16xy$

注意：

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

3. 全微分

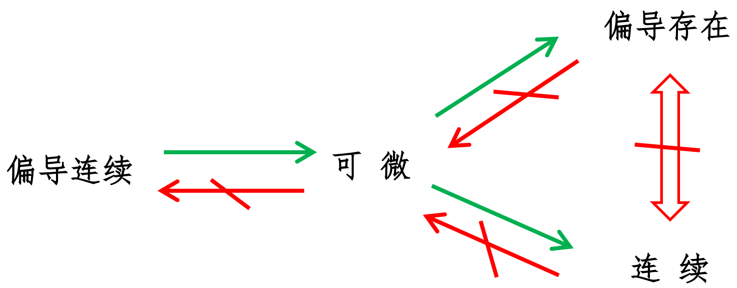
题 1. $z=\arctan\frac{y}{x}$，求 $dz|_{(1,1)}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{(1,1)}=\frac{1}{2}$$

$$dz=-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$$

4. 偏导、连续、可微之间的关系



题 1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

（1） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

（2） $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

（3） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微

（4） $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列四个选项中正确的是（　　）

$A.\ (2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　$B.\ (3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$　　$C.\ (3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　$D.\ (3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

答案：A

课时二　练习题

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在对 x,y 偏导数，则 $f_x'(x_0,y_0)=($　　$)$

$A.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x}$　　　　$B.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$C.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$　　　　$D.\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

2. 函数 $z=y^x$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

3. 设 $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$_______

4. 函数 $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $z_x(1,1),z_y(1,1)$

5. 设 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则 $dz=$_______

6. 设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz

7. 设 $u=e^{xy^2z^3}$，则 $du=$_______

8. 函数 $z=\ln(2+x^2+y^2)$ 在 $x=2,y=1$ 时的全微分。

9. 设 $z=e^x\sin(x+y)$，则 $\left.dz\right|_{(0,\pi)}=($　　$)$

$A.-dx+dy$　　　$B.dx-dy$　　　$C.-dx-dy$　　　$D.dx+dy$

10. 求函数 $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 的全微分。

11. 已知函数 $f_x'(a,b)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+a,b)-f(a-x,b)}{x}=($　　$)$

$A.-f_x'(a,b)$　　　$B.2f_x'(a,b)$　　　$C.f_x'(a,b)$　　　$D.\dfrac{1}{2}f_x'(a,b)$

12. 函数 $f(x,y)$ 偏导数存在，且 $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=-2$ ，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=$ ______

13. 求函数 $z=4x^3-xy+e^y$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

14. 求函数 $z=e^x\ln y+\sin y\cdot\ln x$ 的二阶偏导数

15. 设二元函数 $z=y^2\cos 2x$ ，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______

16. 下列有关多元函数命题错误的是（　　）

A. 函数可微是连续的充分条件　　*B.* 函数可微则偏导数必定存在

C. 偏导数存在是可微的必要条件　　*D.* 偏导数存在是连续的充分条件

17. 若用 “$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 5 条性质：

$f(x,y)$ 在点 x_0,y_0 处：①连续；②两个偏导数存在；③可微；④两个偏导数连续；⑤极限存在，则有（　　）

A. ④$\Rightarrow$③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$⑤　　*B.* ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$⑤$\Rightarrow$①

C. ③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$⑤$\Rightarrow$①　　*D.* ④$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$⑤

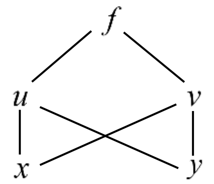
课时三 复合函数、隐函数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 复合函数求偏导	必考	6～10	大题
2. 隐函数求偏导			

1. 复合函数求偏导

题 1. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y}$， $v=3x-4y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$



$$=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2u}{y}\ln v+\frac{3u^2}{v}$$

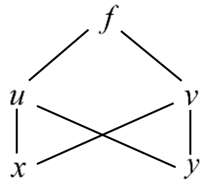
$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-4y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-4y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=2u\ln v\cdot(-\frac{x}{y^2})+\frac{u^2}{v}\cdot(-4)$$

$$=-\frac{xu}{y^2}\ln v-\frac{4u^2}{v}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-4y)-\frac{4x^2}{y^2(3x-4y)}$$

题 2. $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

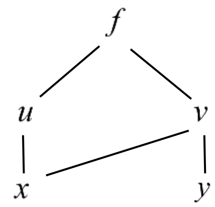


解： $u=x^2-y^2,\ v=e^{xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot ye^{xy}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot xe^{xy}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$$

题 3. 设 $z=f(x,\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$



法一：$z=f(u,v)\qquad u=x,\ v=\frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=\frac{\partial f_1'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+(-\frac{1}{y^2})f_2'+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})+(-\frac{1}{y^2})\cdot f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})$$

$$=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

f、f_1'、f_2' 具有相同的关系链

法二：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_2'\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{x}{y^2}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}\cdot(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}\cdot(f_{21}''+f_{22}''\cdot\frac{1}{y})$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

2. 隐函数求偏导

题 1. $\sin x + 3y - z^3 - e^z = 6$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：令 $F = \sin x + 3y - z^3 - e^z - 6$

$F_x = \cos x$，$F_y = 3$，$F_z = -3z^2 - e^z$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{\cos x}{3z^2 + e^z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{3}{3z^2 + e^z}$$

隐函数解题方法：

1）构造函数 $F(x, y, z)$；

2）求 F_x F_y F_z

3）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

别忘了负号

题 2. 设 $\dfrac{x}{z} = \ln \dfrac{z}{y}$，求 $dz\big|_{(0,1)}$

解：将 $(0,1)$ 点代入方程得 $z = 1$，得这个点 $(0,1,1)$

令 $F = \dfrac{x}{z} - \ln \dfrac{z}{y} = \dfrac{x}{z} - \ln z + \ln y$

$F_x = \dfrac{1}{z}\Big|_{(0,1,1)} = 1$，$F_y = \dfrac{1}{y}\Big|_{(0,1,1)} = 1$，$F_z = -\dfrac{x}{z^2} - \dfrac{1}{z} = -\dfrac{x+z}{z^2}\Big|_{(0,1,1)} = -1$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = 1,$$

则 $dz = dx + dy$

课时三　练习题

1. $z=e^{u}\ln v$，且 $u=xy, v=x^{2}+y^{2}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

2. 设$z=u\cos v$，而$u=x+y, v=xy$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

3. $z=f(\frac{y}{x},x)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^{2} z}{\partial x\partial y}$。

4. 设$z=xf(y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^{2} z}{\partial x\partial y}$。

5. $z=f(x^{2}+y^{2}, e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 一阶偏导数连续，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}}$。

6. 设$z=xy+xf(\frac{y}{x})$，且 $f(u)$ 可微，试证：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$

7. 设$z=z(x,y)$是由方程$x^{2}+y^{2}=\ln x-\ln z$确定的隐函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

8. 设函数$z=z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，计算$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$。

9. 设$e^{xy+z}=\sin(xyz)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

10. 设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求$\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}}$。

11. 设$z=f(x,y)$是由方程$\sin(xyz)-\frac{1}{z-xy}=1$所确定，求$dz\big|_{(0,1)}$。

课时四　梯度、方向导数、多元函数极值

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 梯度、方向导数	★★	0～5	选择、填空
2. 多元函数极值	必考	6～10	大题

1. 梯度、方向导数

题 1. $u = xy^2 + yz^3 + 3$ 在点 $(2,-1,1)$ 处的梯度。

解：$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2\big|_{(2,-1,1)} = 1$

$\frac{\partial u}{\partial y} = (2xy + z^3)\big|_{(2,-1,1)} = -3$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 3yz^2\big|_{(2,-1,1)} = -3$

$gradf(2,-1,1) = (1,-3,-3)$

1. 梯度 $gradf(x_0, y_0)$ 或 $\nabla f(x_0, y_0)$

$gradf = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$

（注：各偏导数组成的向量）

题 2. 函数 $u = xy - z^2$ 在点 $P(3,2,-1)$ 处沿方向 $\vec{l} = (2,3,1)$ 的方向导数为________，在点 P 处方向导数的最大值为________。

解：$\frac{\partial u}{\partial x} = y\big|_{(3,2,-1)} = 2$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x\big|_{(3,2,-1)} = 3$　　　　$gradf = (2,3,2)$

$\frac{\partial u}{\partial z} = -2z\big|_{(3,2,-1)} = 2$

$|\vec{l}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$　　$\vec{e_l} = (\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}})$

$\frac{\partial f}{\partial l} = gradf \cdot \vec{e_l} = (2,3,2) \cdot (\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}) = \frac{15}{\sqrt{14}}$

最大值 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{\max} = |gradf| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

2. 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0, y_0)}$

①求 P 点的梯度；

②求 l 的单位向量 $\vec{e_l}$；

③$\frac{\partial f}{\partial l} = gradf \cdot \vec{e_l}$

3. 方向导数最大值

$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{\max} = |gradf|$

2. 多元函数极值

一般极值求解方法：

① 求驻点：$\begin{cases} f_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)$

驻点：
满足 一阶偏导 同时 为 0 的点

② 求 $A=f_{xx}''$ $B=f_{xy}''$ $C=f_{yy}''$

③ 对每一个驻点 (x_0,y_0) 判定：

$AC-B^2>0$，有极值，且 A $\begin{cases} >0，有极小值 \\ <0，有极大值 \end{cases}$

$AC-B^2<0$，无极值

$AC-B^2=0$，无法判定

题 1：$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值 (一般极值)

解：$\begin{cases} f_x'=3x^2+6x-9=0 \\ f_y'=-3y^2+6y=0 \end{cases}$ 得驻点：$(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$

$A=f_{xx}''=6x+6$ $B=f_{xy}''=0$ $C=f_{yy}''=-6y+6$

在 $(1,0)$ 点，$AC-B^2=12\times6=72>0$，有极值，且 $A=12>0$，有极小值 $f(1,0)=-5$

在 $(1,2)$ 点，$AC-B^2<0$，无极值

在 $(-3,0)$ 点，$AC-B^2<0$，无极值

在 $(-3,2)$ 点，$AC-B^2=72>0$，有极值，且 $A=-12<0$，有极大值 $f(-3,2)=31$

选择题中常考知识点：

1. 驻点一定是极值点（×） （若 $AC-B^2<0$，则无极值）
2. 极值点一定是驻点（×） （极值点存在：1. 驻点 2. 一阶导数不存在的点）
3. 可导函数的极值点一定是驻点（√） （去掉了一阶导数不存在的情况）

题 2. 将正数 a 分为三个非负数之和，使它们乘积最大。　　（条件极值）

解：设三个数分别为 x,y,z

目标函数：$f=xyz$

条件函数：$x+y+z=a$

注意把 a 移项

构造拉格朗日函数：

$L=xyz+\lambda(x+y+z-a)$

$$\begin{cases} L_x=yz+\lambda=0 \\ L_y=xz+\lambda=0 \\ L_z=xy+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+z-a=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=\frac{a}{3}$$

因为 $(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ 为唯一极值点

故所求乘积最大：$f(x,y,z)=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}$

条件极值求法：

① 确定目标函数 $f(x,y,z)$

② 确定条件函数 $g(x,y,z)$

③ 构造拉格朗日函数

$L=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$

$$\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ L_z=0 \\ L_\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0,z_0)$$

即为所求极值点。

课时四　练习题

1. 求函数 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $(1,2,-2)$ 处梯度 $gradf(1,2,-2)=$________ 。

2. 函数 $u=3x^2y^2-2y+4x+6z$ 在原点沿方向 $l=(2,3,1)$ 的方向导数为_________。

3. $z=xe^{2y}$ 在 $P(1,0)$ 到 $K(2,1)$ 的方向导数________。

4. 求函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $P_0(1,0,-1)$ 处由 $P_0(1,0,-1)$ 指向 $P_1(2,1,-1)$ 方向的方向导数，并求函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $P_0(1,0,-1)$ 处的方向导数的最大值。

5. 求函数 $f(x,y)=4xy-x^2-y^2$ 的极值。

6. 函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 内有二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则下列为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极大值的充分条件是（　　）

   $A.$ $A<0$, $AC-B^2>0$　　　　$B.$ $A>0$, $AC-B^2>0$

   $C.$ $A<0$, $AC-B^2<0$　　　　$D.$ $A>0$, $AC-B^2<0$

7. 判断题：多元函数的极值点一定是驻点。（　　）

8. 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内偏导数存在，则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ 是 $y=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极值的（　　）

   $A.$ 必要但非充分条件　　　　$B.$ 充分但不必要条件

   $C.$ 充分必要条件　　　　$D.$既非充分也非必要条件

9. 某工厂要做一个体积为 $8m^3$ 的无盖长方体容器，已知底面材料的单位造价是侧面材料单价的 2 倍，问怎样设计才能使该长方体容器的造价最低？

10. 周长为 $2P$ 矩形，绕一边旋转一周得到圆柱，求圆柱的体积何时最大？

11. $z=x^3-3x^2-3y^2$ 在 D：$x^2+y^2\le 16$ 上的最大值和最小值。

课时五　向量与空间几何（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量的点乘	★★★	0～3	选择、填空
2. 向量的叉乘	必考	1～3	选择、填空
3. 空间平面方程	★★★★★	0～7	大题
4. 空间直线方程			

1. 向量的点乘

向量点乘公式：

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$　　$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$\vec{e}_a=\dfrac{1}{|\vec{a}|}(x_1,y_1,z_1)$

平行：$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

垂直：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

$\cos\theta=\cos 90^\circ=0$

题 1. 点 $P_1(2,-1,1)$ 和点 $P_2(-4,-1,-7)$ 之间的距离______。

解：$d=\sqrt{(-4-2)^2+(-1+1)^2+(-7-1)^2}=10$

题 2. 向量 $\vec{a}=(0,1,-1)$ 与 $\vec{b}=(1,0,-1)$ 的夹角 $\theta=$______。

解：$|\vec{a}|=\sqrt{0+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+0+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times1+1\times0+(-1)\times(-1)=1$

由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

题 3. 向量 $\vec{c}=(1,-1,1)$，则与向量 $\vec{c}$ 同向的单位向量为____________。

解：$|\vec{c}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$　　$\vec{e}_c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)=(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

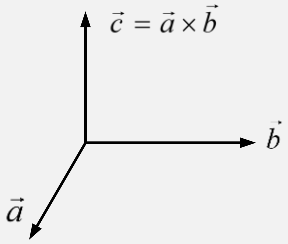
题 4. 给定向量 $\vec{a}=(-1,2,x)$，$\vec{b}=(1,y,-2)$，若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，则 $x+y=$_____。

解：$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ 可得，$\dfrac{-1}{1}=\dfrac{2}{y}=\dfrac{x}{-2}\Rightarrow x=2$，$y=-2$　　故 $x+y=0$

题 5. 若向量 $\vec{a}=(4,0,2)$，$\vec{b}=(\lambda,2,2)$ 相互垂直，则 $\lambda=$_____。

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=-1$

2. 向量的叉乘



① $\vec{c}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{c}\perp\vec{b}$ （即垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所在平面）

② $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

③ $\vec{a}\times\vec{b}$ 经常用于求平面法向量

题 1. 计算 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$， $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$， 求 $\vec{a}\times\vec{b}$

解：$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}=(5,1,7)$

题 2. 已知三个点 $A(1,2,3)$， $B(2,3,4)$， $C(3,4,6)$，则 ΔABC 的面积为____________。

解：$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$　　$\overrightarrow{AC}=(2,2,3)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2+1\times2+1\times3=7$

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{7}{\sqrt{3}\times\sqrt{17}}=\dfrac{7}{\sqrt{51}}$

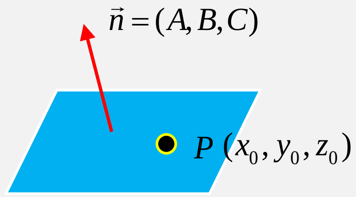
$S_\Delta=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}\times\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sqrt{51}}{2}\times\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{\sqrt{51}}\right)^2}\quad=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. 空间平面方程

$$\begin{cases} P(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{n} = (A, B, C) \end{cases} \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$ （点法式方程）



化简得 $Ax+By+Cz\underline{-Ax_0-By_0-Cz_0}=0$

$Ax+By+Cz+\underline{D}=0$（一般式）

题 1. 求过点 $(1,2,4)$，且平行于平面 $3x+2y+z-7=0$ 的平面方程____________。

解： $\vec{n}=(3,2,1)$ ， $P(1,2,4)$

$3(x-1)+2(y-2)+(z-4)=0$

$3x+2y+z-11=0$

题 2. 求过 3 个点 $A(1,1,1)$， $B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 的平面方程。

解： $\overrightarrow{AB}=(-3,-3,1)$ $\quad \overrightarrow{AC}=(0,-2,1)$ 故 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 就是该平面的一个法向量。

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,3,6)$$

平面方程为：$-(x-1)+3(y-1)+6(z-1)=0$

即 $x-3y-6z+8=0$

题 3. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离。

解： 由距离公式知：

$$d=\frac{|1\times1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$$

点到平面的距离公式：

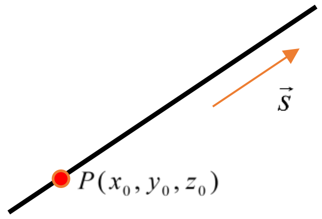
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

4. 空间直线方程

1）对称式方程

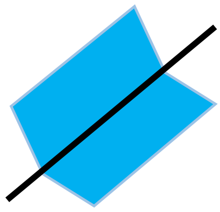
对称式方程

$$\left.\begin{aligned} P(x_0,y_0,z_0) \\ \vec{s}=(A,B,C) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$



2）一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

两个平面的交线



3）参数方程 $\begin{cases} x=At+x_0 \\ y=Bt+y_0 \\ z=Ct+z_0 \end{cases}$

题 1. 已知平面 $x-y+z+5=0$ 和 $5x-8y+4z+36=0$，求其交线的对称式方程和参数方程。

解：$\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=(1,-1,1) \\ \vec{n}_2=(5,-8,4) \end{cases}$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \end{vmatrix}=4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

求出方向向量

令 $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x+z+5=0 \\ 5x+4z+36=0 \end{cases}$ 解方程得 $\begin{cases} x=-16 \\ z=11 \end{cases} \Rightarrow (-16,0,11)$ 求出一点

直线方程：$\dfrac{x+16}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-11}{-3}$

令：$\dfrac{x+16}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-11}{-3}=t$，得参数方程为 $\begin{cases} x=4t-16 \\ y=t \\ z=-3t+11 \end{cases}$

题 2. 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ 与平面 $x+y+3z=0$ 的交点坐标。

解： $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}=t$

得 $\begin{cases} x=t+2 \\ y=3t \\ z=-t-1 \end{cases}$ 代入平面方程得 $t+2+3t+3(-t-1)=0 \quad \Rightarrow t=1$

故交点为 $(3,3,-2)$

课时五　练习题

1. 空间两点 $P(2,0,-1)$，$Q(0,5,1)$ 的距离为__________。

2. 已知向量 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=($　　$)$

$A.0$　　　　$B.\sqrt{7}$　　　　$C.7$　　　　$D.1$

3. 设 $\vec{a}=(1,1,-1)$，$\vec{b}=(-1,-1,1)$，则有 $($　　$)$

$A.\vec{a}//\vec{b}$　　　　$B.\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$　　　　$C.\vec{a}\perp b$　　　　$D.a,b$ 夹角为 $\frac{2\pi}{3}$

4. 设向量 $\vec{a}=(\lambda,-3,2)$ 和 $\vec{b}=(1,2,-\lambda)$ 垂直，则 $\lambda=$__________。

5. 设 $\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________，$\vec{a}\times\vec{b}=$__________。

6. 已知两点 $A(1,0,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，O 为坐标原点，则 ΔAOB 的面积为 $($　　$)$

$A.\sqrt{6}$　　　　$B.\frac{\sqrt{14}}{2}$　　　　$C.\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　$D.\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. 平面 $x+\sqrt{26}y+3z-3=0$ 与 xoy 面夹角为 $($　　$)$

$A.\frac{\pi}{4}$　　　　$B.\frac{\pi}{3}$　　　　$C.\frac{\pi}{6}$　　　　$D.\frac{\pi}{2}$

8. 求通过$M(1,2,3)$，$N(1,1,1)$，$O(1,0,2)$三点的平面方程。

9. 点$(2,1,1)$到平面$x+y-z+1=0$的距离为_________。

10. 求直线$\begin{cases}x-5y+2z-1=0\\z=2+5y\end{cases}$的点向式方程和参数方程。

11. 求过点$M_1(1,2,1)$且平行直线$\begin{cases}x-5y+2z=1\\5y-z=2\end{cases}$的直线方程为_________。

12. 过点$M_1(1,1,1)$与直线$\begin{cases}x=-t+2\\y=3t-4\\z=t-1\end{cases}$垂直的平面方程为_________。

13. 直线$L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$与平面$\pi:6x-2y+8z=7$的位置关系是(　　)

$A.$直线L与平面π平行　　$B.$直线L与平面π垂直

$B.$直线L在平面π上　　$D.$直线L与平面π只有一个交点，但不垂直

14. 设有直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$与$L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则$L_1$与$L_2$夹角为(　　)

$A.\dfrac{\pi}{2}$　　$B.\dfrac{\pi}{3}$　　$C.\dfrac{\pi}{4}$　　$D.\dfrac{\pi}{6}$

15. 求直线$\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=z$与平面$x+2y+2z+6=0$的交点。

课时六　向量与空间几何（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 空间曲面及其方程	★★	0～3	选择、填空
2. 空间曲面的法线与切平面	★★★★	3～5	大题
3. 空间曲线的切线与法平面			

1. 空间曲面及其方程

题 1. 将 xoy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程 ____________。

解：$4x^2-9(y^2+z^2)=36$

题 2. 方程 $x^2+y^2=4$ 在空间直角坐标系中表示（　　）

A. 圆　　　*B.* 圆柱面　　　*C.* 点　　　*D.* 旋转抛物面

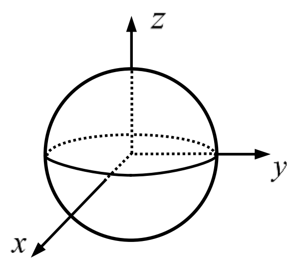
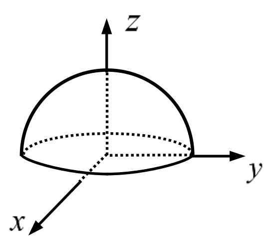
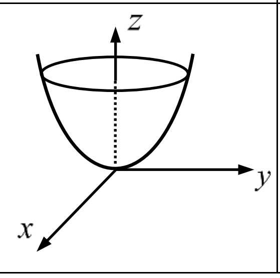
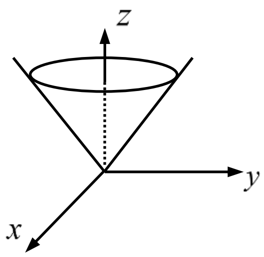
答案：*B.*

题 3. 曲线 $\Gamma:\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影方程是____________。

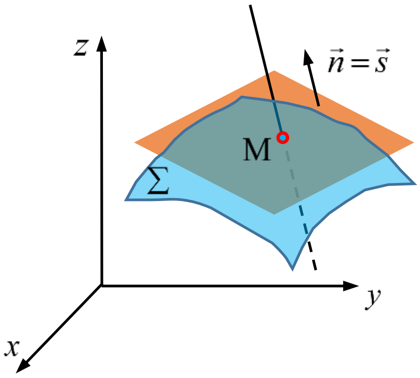
解：联立 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 消 z　可得 $2-x^2=x^2+2y^2$

整理 $x^2+y^2=1$

★常用空间曲面（必考，必须记住，而且要会画）

$x^2+y^2+z^2=R^2$	$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	$z=x^2+y^2$	$z=\sqrt{x^2+y^2}$
			

2. 空间曲面的法线与切平面



M 点求出的切平面的法向量 $\vec{n}$ 即是法线的方向向量 $\vec{s}$

题 1. 求 $2e^z - z + xy = 4$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面与法线

法向量和方向向量求法:
① 构造 F
② 求 F_x, F_y, F_z
③ $\vec{n}=\vec{s}=(F_x, F_y, F_z)$

解: 设 $F = 2e^z - z + xy - 4$

则 $\begin{cases} F_x = y = 1 \\ F_y = x = 2 \\ F_z = 2e^z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{s}=\vec{n}=(1,2,1)$

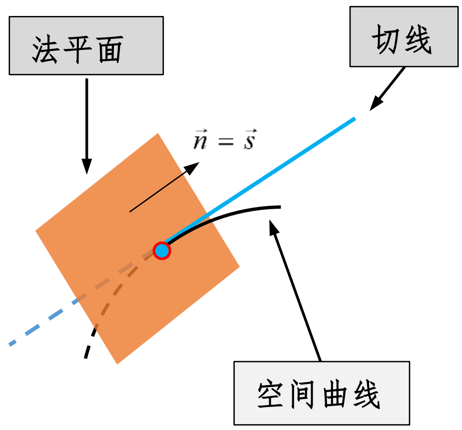
即切平面为 $(x-2)+2(y-1)+z=0$　　　法线为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=z$

3. 空间曲线的切线与法平面

题 1. 求曲线 $x=t, y=2t^2, z=3t^2+t$ 在 $t=1$ 处的切线和法平面

解: 当 $t=1$ 时，得点 $P(1,2,4)$

$\begin{cases} x'=1 \\ y'=4t=4 \\ z'=6t+1=7 \end{cases}$　　则 $\vec{s}=\vec{n}=(1,4,7)$



故切线为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-4}{7}$

法平面为 $(x-1)+4(y-2)+7(z-4)=0$

题 2. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3x \\ 2x-4y+6z=4 \end{cases}$在$M_0(1,1,1)$处的切线方程和法平面方程。

解：$F=x^2+y^2+z^2-3x$

$F_x=2x-3\big|_{(1,1,1)}=-1$

$F_y=2y\big|_{(1,1,1)}=2$

$F_z=2z\big|_{(1,1,1)}=2$

$\vec{n}_1=(-1,2,2)$

$\vec{n}_2=(2,-4,6)$

$$\vec{s}=\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}=(20,10,0)$$

切线方程：$\begin{cases} \dfrac{x-1}{20}=\dfrac{y-1}{10} \\ z-1=0 \end{cases}$

法平面方程：$20(x-1)+10(y-1)=0$

整理　$2x+y-3=0$

课时六　练习题

1. 将 xoy 坐标面上的椭圆 $x^2+4y^2=9$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为__________。

2. 面 yoz 的抛物线 $y^2=3z$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面为__________。

3. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是由（　　）

   $A.$ xoz 平面上曲线 $z=x$ 绕 z 轴旋转而成

   $B.$ yoz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 z 轴旋转而成

   $C.$ xoz 平面上曲线 $z=x$ 绕 x 轴旋转而成

   $D.$ yoz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 y 轴旋转而成

4. 空间直角坐标系中，方程 $y=x^2$ 表示（　　）

   $A.$ 椭球面　　$B.$ 圆柱面　　$C.$ 抛物线　　$D.$ 抛物柱面

5. 方程 $x^2+y^2=4$ 在空间解析几何中表示__________。

6. 曲线 r：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1\\ x-2z+3=0\end{cases}$，关于 xoy 面的投影柱面方程为（　　）

   $A.$ $x^2+20y^2-24x-116=0$　　$B.$ $4y^2+4z^2-16z-9=0$

   $C.$ $\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0\\ z=0\end{cases}$　　$D.$ $\begin{cases}4y^2+4z^2-16z-9=0\\ x=0\end{cases}$

7. 求曲面 $x^2-y^2-z^2+1=0$ 在点 $M(4,2,1)$ 处的切平面与法线方程。

8. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程。

9. 过曲线 $\begin{cases}x=t^2+2t-2\\ y=e^t+t\\ z=2t-1\end{cases}$ 上对应 $t=0$ 的点切线与法平面方程。

10. 求曲线 $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处的切线及法平面方程。

课时七　二重积分—直角坐标系

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10～15	大题
2. 极坐标下计算			

1. 直角坐标系下计算

记作：$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$　　$f(x,y)$ 被积函数　$d\sigma = dxdy$ 面积元素　D 为积分区

直角坐标系下计算二重积分步骤：

1）画出区域 D 的图形

2）写出 x，y 的范围（重点）

3）代入计算（注：被积函数保留至第三步计算）

x 型

x：$x_{左} \to x_{右}$（常数 $\to$ 常数）

y：$y_{下} \to y_{上}$（函数 $\to$ 函数）

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_{x_{左}}^{x_{右}} dx \int_{y_{下}=f(x)}^{y_{上}=f(x)} f(x,y)dy$$

y 型

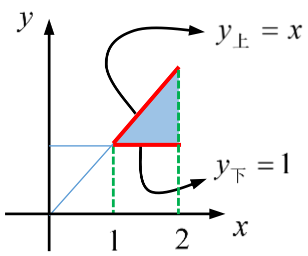
y：$y_{下} \to y_{上}$（常数 $\to$ 常数）

x：$x_{左} \to x_{右}$（函数 $\to$ 函数）

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_{y_{下}}^{y_{上}} dy \int_{x_{左}=f(y)}^{x_{右}=f(y)} f(x,y)dx$$

题 1. 计算 $\iint\limits_{D} xydxdy$，其中 D 的 $y=1$，$x=2$，$y=x$ 围成.

1. 画出区域 D　　2. 写范围　　3. 代入计算

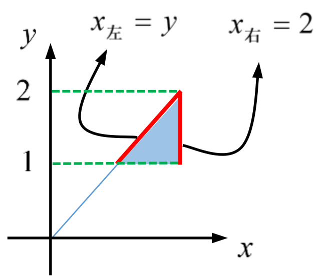


x 型：

$x:1 \to 2$

$y:1 \to x$

$$\iint\limits_{D} xydxdy = \int_1^2 dx \int_1^x xydy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x\right)dx$$



y 型：

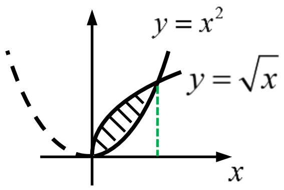
$y:1 \to 2$

$x:y \to 2$

$$\iint\limits_{D} xydxdy = \int_1^2 dy \int_y^2 xydx = \int_1^2 \left(2y - \frac{1}{2}y^3\right)dy \quad = \frac{9}{8}$$

题 2. 写区域范围专项练习：计算 $\iint_D f(x,y)d\sigma$

（1） D 为 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 围成

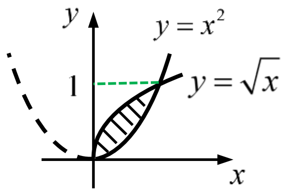


x 型：

$x:0\to 1$

$y:x^2\to\sqrt{x}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



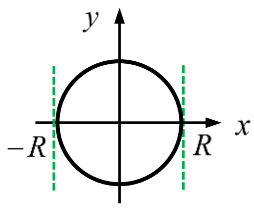
y 型：

$x:y^2\to\sqrt{y}$

$y:0\to 1$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

（2） D 为 $x^2+y^2=R^2$ 围成

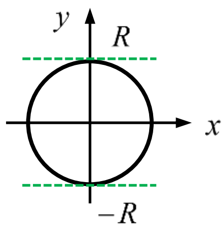


x 型：

$x:-R\to R$

$y:-\sqrt{R^2-x^2}\to\sqrt{R^2-x^2}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-R}^{R} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$$



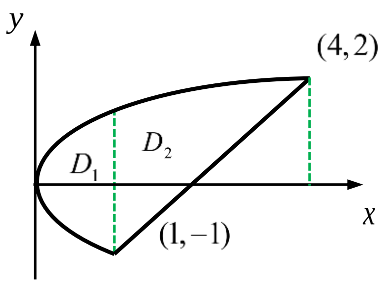
y 型：

$y:-R\to R$

$x:-\sqrt{R^2-y^2}\to\sqrt{R^2-y^2}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-R}^{R} dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$$

（3） D 为 $y^2=x$， $y=x-2$ 围成

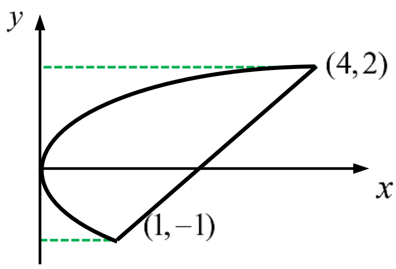


x 型：

$D_1:\begin{cases}x:0\to 1\\ y:-\sqrt{x}\to\sqrt{x}\end{cases}$

$D_2:\begin{cases}x:1\to 4\\ y:x-2\to\sqrt{x}\end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$
$$=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$
$$=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



y 型：

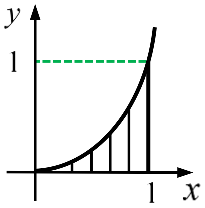
$D:\begin{cases}y:-1\to 2\\ x:y^2\to y+2\end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{2} dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$$

题 3. 交换下列二次积分的积分次序.

① $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$ ② $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$

解： ①

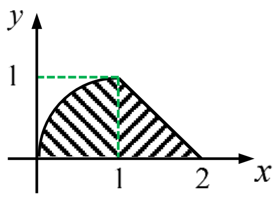


$y:0\to 1$

$x:\sqrt{y}\to 1$

原式$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

②



$y:0\to 1$

$x:1-\sqrt{1-y^2}\to 2-y$

原式$=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

题 4. 计算 $\iint\limits_D(\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2)dxdy$，其中 D 由 $x^2+y^2=1$ 围成.

解：$\iint\limits_D(\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2)dxdy=\iint\limits_D\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\iint\limits_D 2dxdy$

$$=\iint\limits_D 2dxdy=2\iint\limits_D dxdy=2\cdot\pi\cdot 1^2=2\pi$$

1） 若被积函数 $f(x,y)=1$，则 $\iint\limits_D dxdy=A$（区域 D 的面积）

2） $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}0 & D\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为奇}\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & D\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为偶}\end{cases}$

题 5. 环形区域 $D\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$，设 $I_1=\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma$， $I_2=\iint\limits_D(x^2+y^2)^2d\sigma$，则（ ）

$A.\,I_1<I_2$ $B.\,I_1>I_2$ $C.\,I_1=I_2$ $D.\,I_1\ge I_2$

答案： $A.$ 若在区域 D 上， $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy\le\iint\limits_D g(x,y)dxdy$

课时七　练习题

1. 求$\iint\limits_{D} x\sqrt{y}d\sigma$，$D$是由$y=\sqrt{x}$, $y=x^2$所围成的封闭区域.

2. 计算$\iint\limits_{D} xydxdy$，其中D是由$y=x$, $xy=1$, $x=3$所围成的封闭区域.

3. 计算$\iint\limits_{D} xydxdy$，其中D是由$y^2=x$, $y=x-2$所围成的封闭区域.

4. 交换下列积分次序：

①$\int_1^3 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy$　　②$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$　　③$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

5. 求$I=\iint\limits_{D}\frac{\sin x}{x}dxdy$，其中$D$是由$y=2x$, $x=2y$及$x=2$所围成的封闭区域.

6. 求$\iint\limits_{D} e^y dxdy$，其中$D$是由$y=x$, $y=1$及y轴所围成的封闭区域.

7. 设区域D为$|x|\le 2, |y|\le 1$，则$\iint\limits_{D}(1+x^2y)dxdy=$________

8. 设$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 4x\right\}$，则二重积分$\iint\limits_{D} 2dxdy=$________

9. 设D是xoy面上以$(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$为顶点的三角形区域，D_1是D中在第一象限的部分，

则积分$\iint\limits_{D}(x^3y+\cos^3 x\sin y)d\sigma=(\quad)$

$A.\ 2\iint\limits_{D_1}\cos^3 x\sin yd\sigma$　　$B.\ 2\iint\limits_{D_1}x^3yd\sigma$　　$C.\ 4\iint\limits_{D_1}(\cos^3 x\sin y+x^3y)d\sigma$　　$D.\ 0$

10. 设$I_k=\iint\limits_{D}(x+y)^k d\sigma\ (k=1,2,3)$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+(y-1)^2\le 1\right\}$，则$I_1, I_2, I_3$间的大小

关系是（　　）

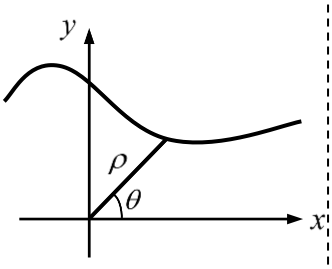
$A.\ I_1<I_2<I_3$　　$B.\ I_2<I_1<I_3$　　$C.\ I_2<I_3<I_1$　　$D.\ I_3<I_2<I_1$

课时八　二重积分—极坐标

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算 2. 极坐标下计算	必考	10～15	大题

2. 极坐标系下计算

补充知识点：极坐标



1）什么是极坐标？

① 用 θ 和 ρ 表示的函数

② ρ 是原点到函数上点的长度

③ θ 是和 x 轴的夹角

2）直角坐标转化极坐标

令 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$　例 $x^2+y^2=4$

$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=4$

得 $\rho=2$（极坐标）

极坐标求解：

①画出区域 D → 根据直角坐标方程画图

②写出 θ 和 ρ 范围：

$\theta: \theta_1 \to \theta_2$（常数）→ θ 的范围覆盖且只能覆盖区域 D

ρ： $\rho_1(\theta)\to\rho_2(\theta)$（函数）→ ρ 必须从原点出发

③代入公式

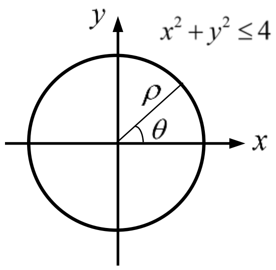
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

被积函数 x,y　用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 替换

不要忘了这里的 ρ 因子

题 1：求 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le 4$

解：①画出区域 D



②写出 θ 和 ρ 范围

$\theta:0\to 2\pi$

（覆盖整个圆区域）

$\rho:0\to 2$

（任意角度 θ，画出 ρ）

③利用公式带入计算

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

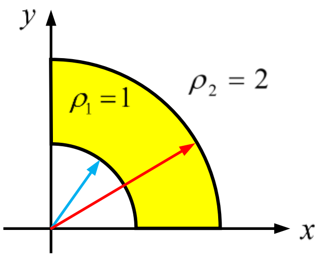
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2 d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\theta$$

$$=\frac{16\pi}{3}$$

题 2. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$， D 为 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 围成的第一象限的部分.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③代入公式计算



$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$

$\rho: 1 \to 2$

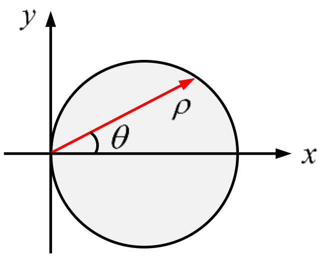
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho \ =\frac{7\pi}{6}$$

题 3. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$D$ 为 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的区域.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③代入公式计算



$\theta: -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

$\rho: 0 \to 2\cos\theta$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

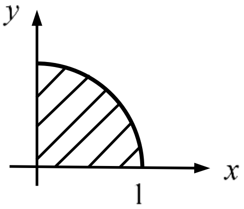
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{9}$$

题 4. 积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$ 化为极坐标形式为____________.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③化为极坐标形式



$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$

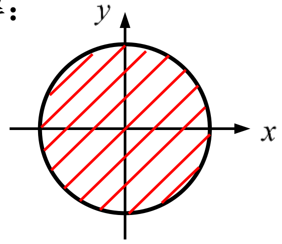
$\rho: 0 \to 1$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho\cdot\rho d\rho$$

题 5. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (y^2-3x+6y+9)d\sigma=$______.

解：



$\theta:0\to 2\pi$

$\rho:0\to 1$

$$原式=\iint\limits_D y^2d\sigma+9\iint\limits_D d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma+9D$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho+9\pi=\frac{37}{4}\pi$$

若 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dxdy$，

故 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D [f(x,y)+f(y,x)]dxdy$

课时八　练习题

1. 求 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le a^2$ 围成的区域.

2. 计算 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=4$，$y=0$ 及 $y=x$ 所围成的封闭区域.

3. 计算 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆环形闭区域：$\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2a,0\le y\le\sqrt{2ax-x^2}\}$.

5. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+(y-1)^2=1$ 围成的区域.

6. 设有区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$，则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=$（　　）

A. $2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$

B. $2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr-2\pi\int_1^2 rf(r)dr$

C. $2\pi\int_1^2 rf(r)dr$

D. $2\pi\int_1^2 rf(r)dr-2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$

7. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=$______

8. 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+5y^2-3xy+2x-y)dxdy=$______

课时九　三重积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10～15	大题
2. 柱坐标下计算			
3. 球坐标下计算	★★★	0～8	大题

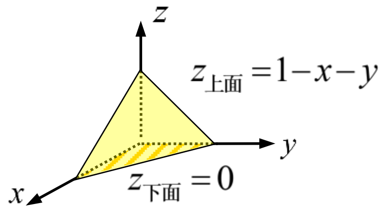
1. 直角坐标下计算

记作：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$

$f(x,y,z)$是被积函数，Ω为积分区域，$dv=dxdydz$

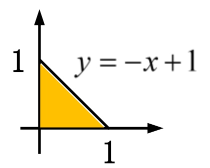
题 1. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv$，其中$\Omega$为平面，$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$在第一象限部分.

①画出立体图，确定 z 的范围



$z:0\rightarrow 1-x-y$

②投影到 xoy 面，确定 x 和 y 的范围



$x:0\rightarrow 1$
$y:0\rightarrow 1-x$

③代入计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y)dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)(1-x-y)dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x-x^2-2xy+y-y^2)dy$$

$$=\int_0^1(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6})dx$$

$$=\frac{1}{12}$$

直角坐标下计算：

① 画立体图

确定 z 的范围（$z_{下}\rightarrow z_{上}$）

② 投影图

确定区域 D 的范围（同二重积分）

③ 代入公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=$$

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1=f(x)}^{y_2=f(x)}dy\int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)}f(x,y,z)dz$$

2. 柱坐标下计算

柱坐标下计算：

① 画立体图

确定 z 的范围 $(z_{下} \to z_{上})$

② 投影图确定区域 D

θ 和 ρ 的范围

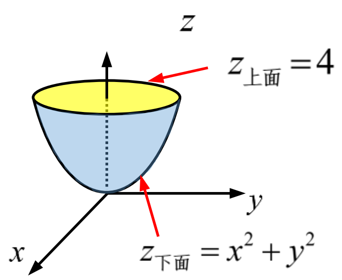
③ 代入公式

被积函数 x, y 用 $x=\rho\cos\theta$ ， $y=\rho\sin\theta$ 替换

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \underbrace{\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho}_{\text{二重积分极坐标}} \int_{z_{下}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_{上}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$

题 1. 计算 $\iiint_{\Omega} zdxdydz$. 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与曲面 $z=4$ 围成.

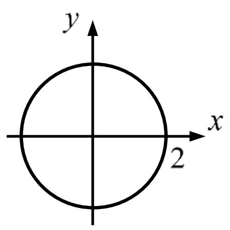
① 画出立体图，确定 z 的范围



z： $x^2+y^2 \to 4$

z： $\rho^2 \quad \to 4$

②投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



$\theta: 0 \to 2\pi$

$\rho: 0 \to 2$

③代入公式

$$\iiint_{\Omega} zdxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 z\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{1}{2}(16-\rho^4)\rho d\rho$$

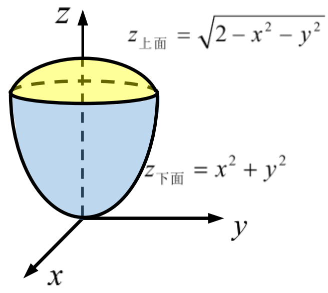
$$= \frac{64}{3}\pi$$

求投影区域的方法：<u>消去 z</u>

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 4$$

题 2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$. 其中 Ω 是由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 围成.

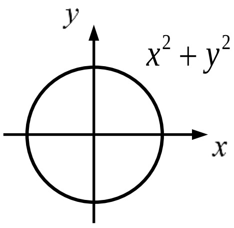
① 画出立体图，确定 z 的范围



z：$x^2+y^2 \to \sqrt{2-x^2-y^2}$

z：$\rho^2 \to \sqrt{2-\rho^2}$

② 投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



$\theta:0\to 2\pi$

$\rho:0\to 1$

③ 代入公式

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$$

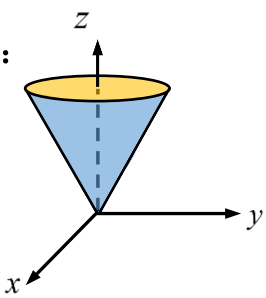
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} zdz$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$$

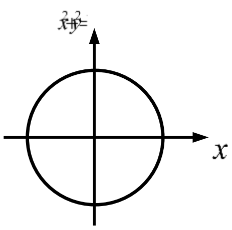
$$=\frac{7\pi}{12}$$

题 3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+xy+3)dv$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 围成.

解：



z：$\rho \to 1$



$x^2+y^2=1$

$\rho:0\to 1$

$\rho:0\to 1$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+xy+3)dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}x^2dv+\iiint\limits_{\Omega}xydv+3\iiint\limits_{\Omega}dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}x^2dv+3V$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv+\pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho}^{1}\rho^2\,dz+\pi$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\int_0^1\rho(\rho^2-\rho^3)d\rho+\pi$$

$$=\frac{21}{20}\pi$$

①若 $f(x,y,z)=1$，则 $\iiint\limits_{\Omega} dv=V$（区域Ω的体积）

②$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\begin{cases}0 & 若\Omega关于xoy/yoz/xoz对称，f(x,y,z)关于z/x/y为奇\\ 2\iiint\limits_{\Omega'} f(x,y,z)\,dv & 若\Omega关于xoy/yoz/xoz对称，f(x,y,z)关于z/x/y为偶\end{cases}$

③若积分区域Ω关于 x,y,z 具有轮换对称性（即 x 换 y，y 换 z，z 换 x，Ω不变）

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$。

3. 球坐标下计算

球坐标下解题步骤：

① 画立体图

确定 φ 和 r 的范围。（$0\le\varphi\le\pi$）

② 投影图确定 θ 的范围

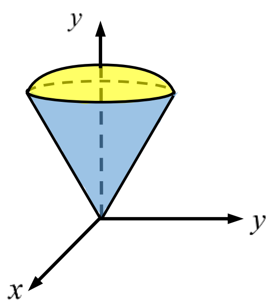
③ 代入公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r,\varphi,\theta)\,r^2\sin\varphi dr$$

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$
$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

题 1. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中Ω由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成.

解：



$\varphi:0\to\dfrac{\pi}{4}$

$\theta:0\to2\pi$

$r:0\to\sqrt{2}$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi dr$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin2\varphi d\varphi$$
$$=2\pi\times\frac{1}{4}\quad=\frac{\pi}{2}$$

课时九　练习题

1. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，其中$\Omega$为三个坐标平面与$x+y+\dfrac{z}{3}=2$围成.

2. 计算$\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中$\Omega$为平面$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$围成.

3. 求三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是曲面$2z=x^2+y^2$与平面$z=2$所围成的立体.

4. 设空间区域Ω是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=\sqrt{8-x^2-y^2}$所围成，计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} zdv$.

5. 求曲面$z=2x^2+y^2$和$z=3-x^2-2y^2$所围成的几何体体积.

6. 已知区域Ω：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(1+xy)dv=$________.

7. 设空间区域$V_1: x^2+y^2+z^2\le R^2$，$z\ge 0$，$V_2: x^2+y^2+z^2\le R^2$，$x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$，则有（　）

$A.\iiint\limits_{V_1} xyzdv=4\iiint\limits_{V_2} xyzdv$　　$B.\iiint\limits_{V_1} xdv=4\iiint\limits_{V_2} xdv$

$C.\iiint\limits_{V_1} ydv=4\iiint\limits_{V_2} ydv$　　$D.\iiint\limits_{V_1} zdv=4\iiint\limits_{V_2} zdv$

课时十　第一类曲线积分

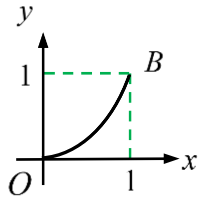
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★	0～5	选择、填空、大题
2. 第二类曲线积分			
3. 格林公式	必考	6～10	大题

1. 第一类曲线积分　记作：$\int_L f(x,y)ds$

①画图确定 L 的函数	②计算 ds	③代入公式计算 $\int_L f(x,y)ds$
$y=f(x)$	$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}dx$	$=\int_{x_1}^{x_2} f[x,f(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx \qquad (x_1<x_2)$
$x=f(y)$	$ds=\sqrt{1+x'^2(y)}dy$	$=\int_{y_1}^{y_2} f[f(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}dy \qquad (y_1<y_2)$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$	$=\int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \quad (t_1<t_2)$

题 1. L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 之间的一段弧，则 $\int_L\sqrt{y}ds=$ ________ .

①画图确定 L



$L: y=x^2$

②计算 ds

$$y'=2x$$

$$ds=\sqrt{1+(2x)^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx$$

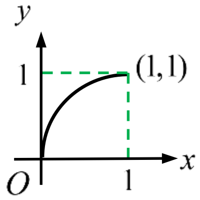
③代入公式计算

$$\int_L\sqrt{y}ds=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^1(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2)=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

注：积分区间只论大小，不论起点和终点

题 2. $\int_L\sqrt{x}ds$，其中 L 为抛物线 $x=y^2$ 所从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧

①画图确定 L



$L: x=y^2$

②计算

$$L: x'=2y$$

$$ds=\sqrt{1+(2y)^2}dy=\sqrt{1+4y^2}dy$$

③代入公式计算

$$\int_L\sqrt{x}ds=\int_0^1\sqrt{y^2}\sqrt{1+4y^2}dy=\int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}dy=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

题 3. 设 L 为周长为 a 的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=(\quad)$.

$A.12a$ $\qquad$ $B.6a$ $\qquad$ $C.12$ $\qquad$ $D.0$

答案：A $\quad \oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=\oint_L (3x^2+4y^2)ds=12\oint_L ds=12a$

第一类曲线积分的性质

1）若 $f(x,y)=1$，则 $\int_L f(x,y)ds=L$（积分曲线的长度）

2）$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0 & L\text{ 关于 } x/y \text{ 轴对称，} f(x,y)\text{ 关于 } y/x \text{ 为奇函数.}\\ 2\int_{L_{正}} f(x,y)\,ds & L\text{ 关于 } x/y \text{ 轴对称，} f(x,y)\text{ 关于 } y/x \text{ 为偶函数.}\end{cases}$

题 4. 计算 $\oint_L x^2ds$，其中 L 为圆周：$x^2+y^2=4$.

解：$\oint_L x^2ds=\dfrac{1}{2}\oint_L (x^2+y^2)ds=\dfrac{1}{2}\oint_L 4ds=2\oint_L ds=2\times 2\pi\times 2=8\pi$

若积分曲线 L 具有轮换对称性：x 换 y，y 换 x，L 不变，

则 $\int_L f(x)ds=\int_L f(y)ds$，即 $\int_L f(x)ds=\dfrac{1}{2}[\int_L f(x)ds+\int_L f(y)ds]$

课时十　练习题

1. 设 $I=\int_L y^2ds$，其中 L 为 $y=2x$，$0\le x\le 1$，则 $I=$____________.

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L xds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界。

3. 设平面曲线 $L:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$，则 $\oint_L (4x+3y)^2ds=$____________（设曲线长为 a）

4. $L=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|=1\}$，则由 $\oint_L (xy+|x|)ds=$____________

课时十一　第二类曲线积分

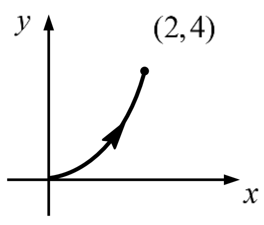
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★	0～5	选择、填空、大题
2. 第二类曲线积分			
3. 格林公式	必考	6～10	大题

2. 第二类曲线积分　记作：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

①画图确定 L 的函数	②化变量为统一，计算 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$
$y=f(x)$	将 y 换成 x：　$=\int_{x_{起}}^{x_{终}}\{P[x,f(x)]+Q[x,f(x)]\cdot f'(x)\}dx$
$x=f(y)$	将 x 换成 y：　$=\int_{y_{起}}^{y_{终}}\{P[f(y),y]\cdot f'(y)+Q[f(y),y]\}dy$
$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$	将 x,y 换成 t：　$=\int_{t_{起}}^{t_{终}}\{P[x(t),y(t)]\cdot x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$

题 1. 计算 $\int_L (x-y)dx+(x+y)dy$，其中 L 从 $(0,0)$ 沿 $y=x^2$ 到 $(1,1)$

解：①画图确定 L



$L: y=x^2$

$x: 0\to 1$

②统一变量代入公式计算

$$\int_L (x-y)dx+(x+y)dy$$

$$=\int_0^1 (x-x^2)dx+(x+x^2)2xdx$$

$$=\int_0^1 \left[(x-x^2)+(x+x^2)2x\right]dx$$

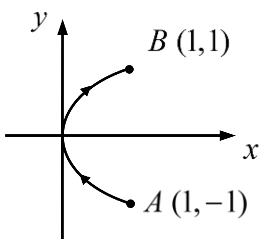
$$=\int_0^1 (x+x^2+2x^3)dx$$

$$=\frac{4}{3}$$

注：积分区间只论起点和终点，不论大小

题 2. 计算 $\int_L xydx$，其中 L 是抛物线 $y^2=x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 上的一段弧

解：①画图确定 L



$L: x=y^2$

$y:-1\to 1$

②统一变量代入公式计算

$$\int_L xydx=\int_{-1}^{1}y^2\cdot y\cdot 2ydy=2\int_{-1}^{1}y^4dy=\frac{4}{5}$$

注：没有 $Q(x,y)dy$ 项，默认为 0，不用管

课时十一　练习题

1. 计算曲线积分 $\int_L (2xy-x^2)dx+(x^2+y)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

2. 计算 $\int_L (x^2-\sqrt{y})dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧.

3. 计算 $\int_L ydx+xdy$，其中 L 为圆周 $x=R\cos\varphi$， $y=R\sin\varphi$ 上由 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 的一段弧.

课时十二　格林公式

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★	0～5	选择、填空、大题
2. 第二类曲线积分			
3. 格林公式	必考	6～10	大题

3. 格林公式（可以看做第二类曲线积分的简便算法）

若积分弧段 L 为 <u>*封闭*</u> 的曲线，则 $\int_L Pdx+Qdy=\pm\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

1)　D 是 L 围成的区域

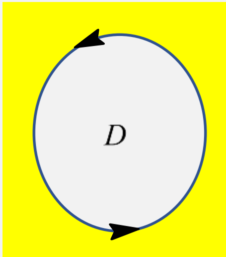
2)　注意 P 和 Q 对应的位置

3)　积分路径有正负

①　人沿 L 方向走，区域 D 在左手一侧则为正，反之为负

②　对于单连通区域（无洞的），逆时针为正，顺时针为负

③　若积分路径为负，则 $\int_L Pdx+Qdy=-\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$



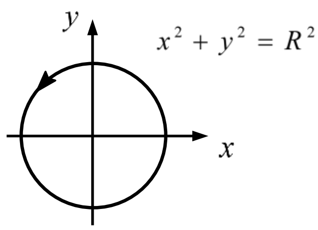
题型 1：常规型

例：计算曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=R^2$， L 为逆时针

解：L 为封闭圆周曲线

$P=2xy-2y$　　　$Q=x^2-4x$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4$　　　$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2$



由格林公式得

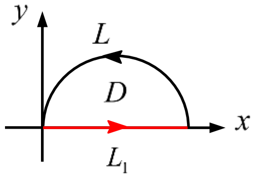
$$\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D[(2x-4)-(2x-2)]dxdy$$

$$=-2\iint\limits_D dxdy=-2A=-2\pi R^2$$

题型 2：缺线补线型

例：计算 $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$. 其中 L 为逆时针上半圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$，$y \geq 0$.

解：补齐有向线段 L_1 ，构成封闭曲线。



$P = e^x \sin y - 2y \qquad Q = e^x \cos y - 2$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - 2$

在 $L + L_1$ 上：

$$\oint_{L+L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2)dxdy$$

$$= \iint_D 2dxdy = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 = \pi a^2$$

在 L_1 上：

代入 $y = 0$，被积函数为 0

$L_1 : y = 0$， $x : 0 \to 2a$

$$\int_{L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = 0$$

代入 $y = 0$ 为常数，故 $dy = 0$，含 dy 的项为 0

在 L 上：

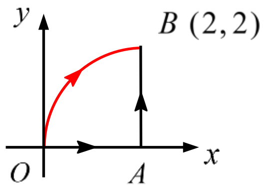
$$\int_L = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1} = \pi a^2 - 0 = \pi a^2$$

题型 3：积分与路径无关型

（若 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，则 $\int_L Pdx + Qdy$ 与积分路径无关，只与起点和终点有关）

例：设 L 为圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段弧，求 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin y)dy$.

解：



$P=x^2-y \qquad Q=-(x+\sin y)$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$ 　　故积分与路径无关

取 $O\to A\to B$ 路径

在 OA 上积分 　$OA:\begin{cases} y=0 \\ x:0\to 2\end{cases} \Rightarrow \int_{OA}(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy=\int_0^2 x^2dx=\dfrac{8}{3}$

在 AB 上积分 　$AB:\begin{cases} x=2 \\ y:0\to 2\end{cases} \Rightarrow \int_{AB}(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy=\int_0^2 -(2+\sin y)dy=\cos 2-5$

则 $\int_L=\int_{OA}+\int_{AB}=\dfrac{8}{3}+\cos 2-5=\cos 2-\dfrac{7}{3}$

课时十二 练习题

1. 计算曲线积分 $\oint_L (xy^2+e^y)dy-(x^2y+e^x)dx$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\,(a>0)$，取逆时针.

2. 计算 $\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，其中 L 由 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 围成，取逆时针方向.

3. 用格林公式计算 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是上半圆 $x^2+y^2=2x$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的一段有向弧.

4. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$ 的一段弧，求曲线积分 $\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$（取逆时针方向为正方向）.

5. 计算 $\int_L (6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$，其中 L 为 $(1,2)$ 到 $(3,4)$ 的直线.

6. 计算 $\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(3x^2y^2-2y\sin x)dy$，其中 L 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由 $(0,0)$ 到 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.

课时十三　第一类曲面积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0～5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6～15	大题
3. 高斯公式			

1. 第一类曲面积分

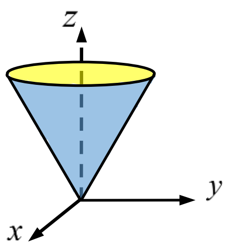
记作：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$

题 1. $\iint\limits_{\Sigma} zdS$. 其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上对应 $0\le z\le 1$ 的部分

解：

①积分面函数

Σ: $z=\sqrt{x^2+y^2}$



②计算 ds

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

第一类曲面积分解题步骤：

① 确定积分曲面 Σ： $z=z(x,y)$

② 计算 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

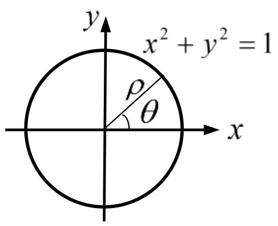
③ 投影确定区域 D_{xy}

④ 代入公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds=$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

③投影确定区域 D_{xy}



$\theta:0\to 2\pi$

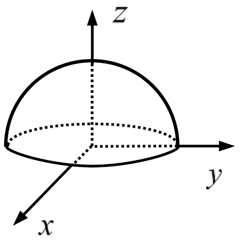
$\rho:0\to 1$

④代入公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{2}\ dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\cdot\rho d\rho=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

题 2. 设曲面$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$，则求$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+yz)dS=$________.

解：



$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+yz)dS=\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}a^2dS=\frac{a^2}{3}\cdot S=\frac{a^2}{3}\cdot\frac{1}{2}\times 4\pi a^2=\frac{2}{3}\pi a^4$$

第一类曲面积分的性质

1）若$f(x,y,z)=1$时，$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=S$（积分曲面的面积）.

2）$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & \text{若}\Sigma\text{关于}xoy/yoz/xoz\text{对称，}f(x,y,z)\text{关于}z/x/y\text{为奇}\\ 2\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS & \text{若}\Sigma\text{关于}xoy/yoz/xoz\text{对称，}f(x,y,z)\text{关于}z/x/y\text{为偶}\end{cases}$

3）若Σ具有轮换对称性（即x换y，y换z，z换x，Σ不变），

则$\iint\limits_{\Sigma}f(x)dS=\iint\limits_{\Sigma}f(y)dS=\iint\limits_{\Sigma}f(z)dS$

课时十三 练习题

1. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$所截得的部分.

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}zdS$，其中Σ为上半球面$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

3. 求旋转抛物面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于$z=0$与$z=\frac{1}{2}$之间的面积.

4. 设S为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一象限的部分，则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=$__________.

5. 设曲面Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，则$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(2x^2+y^2)dS=$__________.

课时十四　第二类曲面积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0 ~ 5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6 ~ 15	大题
3. 高斯公式			

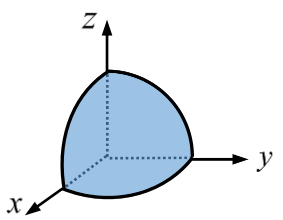
2. 第二类曲面积分（一般不会单独考，在高斯公式中涉及）

记作：$\iint\limits_{\Sigma} \underline{P(x,y,z)dydz} + \underline{Q(x,y,z)dzdx} + \underline{R(x,y,z)dxdy}$

> 要在积分曲面上对以上三部分分别计算，三部分解题思路和步骤是一样的，因为过程太过麻烦，所以基本不考，即使考到，也只考其中一部分。

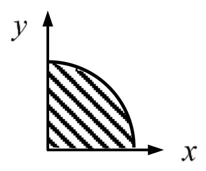
题 1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上侧在 $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 部分.

解：



1）　积分曲面

$\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



2）　投影确定 D_{xy}

$\theta: 0 \to \dfrac{\pi}{2}$

$\rho: 0 \to 1$

3）　代入计算

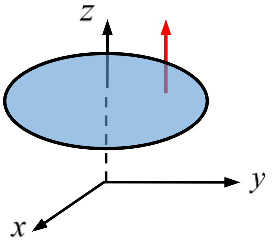
$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho \quad = \frac{\pi}{6}$$

> 解题步骤：
>
> 例：$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$
>
> ① 确认积分曲面 Σ：$z=z(x,y)$
>
> ② 投影，将 $\Sigma \to xoy$ 面，确定 D_{xy}
>
> ③ 代入公式计算
>
> $$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]dxdy$$
>
> （注：若沿 Σ 的上、前、右方积分，为正反之为负）

题 2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^{2}dydz+y(z^{2}+1)dzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$是沿曲面$\begin{cases}x^{2}+y^{2}=1\\ z=4\end{cases}$上侧.

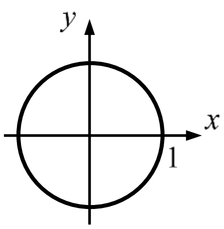
解：



①积分曲面Σ： $z=4$

（因为 $z=4$ 为常数，所以 $dz=0$ ）

$$I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^{2}dydz+y(z^{2}+1)dzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma}zdxdy$$



②将曲面$z=4$投影到 xoy 面确定 D_{xy}

③代入计算

$$\iint\limits_{\Sigma}zdxdy=\iint\limits_{D}4dxdy=4\cdot\pi\cdot1^{2}=4\pi$$

课时十五　高斯公式

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0～5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6～15	大题
3. 高斯公式			

3. 高斯公式（可以看做第二类曲面积分的简单算法，经常考）

若积分曲面Σ为 封闭曲面 的 外侧

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

1)　Ω是封闭曲面Σ围成的空间区域

2)　高斯公式是把第二类曲面积分转化成了三重积分计算其结果

3)　注意 P、Q、R 对应的位置

4)　沿曲面外侧为正，内侧为负（一般都是外侧）

题型一：常规型

例：计算 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中Σ是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧

解：积分曲面Σ为封闭的

$P = x$　　$Q = y$　　$R = z$

$\frac{\partial P}{\partial x}=1$　　$\frac{\partial Q}{\partial y}=1$　　$\frac{\partial R}{\partial z}=1$

球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

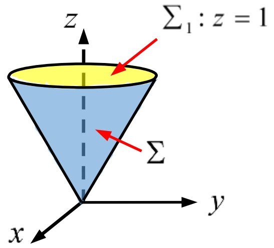
由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega}(1+1+1)dxdydz$$

$$=3\iiint_{\Omega} dxdydz = 3V = 3\times\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

题型二：缺面补面型

例：设Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=0$和$z=1$所截得部分的下侧，利用高斯公式计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy$



解：补齐Σ_1面形成封闭曲面

$P=x \qquad Q=y \qquad R=z^2-2z$

$\frac{\partial P}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=2z-2$

在$\Sigma+\Sigma_1$上的积分

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+2z-2)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}2zdxdydz$$

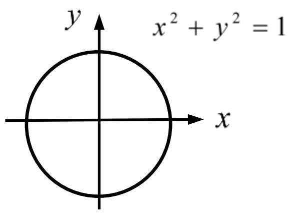
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 2zdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{2}$$

在Σ_1上的积分

Σ_1： $z=1$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2-2z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(1-2)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(-1)dxdy$$

将Σ_1投影到xoy面上



根据第二类曲面积分公式计算：

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(-1)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(-1)dxdy=-\pi$$

在Σ上的积分

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$$

课时十五 练习题

1. 计算Σ是球面$x^2+y^2+z^2=9$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydxdz+zdxdy=$__________.

2. 计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+x(y-z)dydz$，其中闭曲面$\Sigma$由$x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=3$所围成的外侧。

3. 计算第二类曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+yz^2)dydz+(4y+1)dzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$的下侧。

4. 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2+1$ $(1\le z\le 2)$，取下侧。

5. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$，设其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=2z$被平面$z=2$所截得部分的下侧。

6. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$，其中$\Sigma$是抛物面$z=2-x^2-y^2$位于$z\ge 0$部分的上侧。

课时十六　常数项级数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 级数概念	★★	0~3	选择、填空
2. 审敛法	必考	3~5	选择、填空、大题
3. 交错级数	★★★★★	0~3	
4. 绝对/条件收敛	★★★	0~6	

1.1 认识级数

记作：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$　　　展开式：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+...+u_n+...$

令 $S(n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}S(n)=A$ 有极限，则级数收敛。反之发散。

题 1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的和为________.

解：$S(n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}\right)^n=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}S(n)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=1$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$

题 2. 级数 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$ 的和 $S=$________.

解：$S(n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

1.2 无穷级数的性质

1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$；但$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$不一定是收敛的

2）级数$\sum_{n=1}^{\infty}kU_n$和级数$k\sum_{n=1}^{\infty}U_n$具有相同敛散性

3）

$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$	$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$	$\sum_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)$
收	收	收
收	发	发
发	发	不确定

题 1. 判断正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}$的敛散性.

解：$u_n=\frac{2n^2}{n^2+n}$　　$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=2\neq 0$　　故级数发散

题 2. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=(\quad)$

A. 收敛　　*B.* 发散　　*C.* 敛散性不确定　　*D.* 绝对收敛

答案：*B.*

1.3 两个常用的参照级数

1）几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ $\begin{cases}|q|<1 & \text{级数收敛}\\ |q|\geq 1 & \text{级数发散}\end{cases}$

2）调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$　是发散　　扩展：对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}p>1 & \text{级数收敛}\\ p\leq 1 & \text{级数发散}\end{cases}$

两种参照级数，经常用到，可以作为结论，直接使用

2. 正项级数审敛法

题 1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$ 的敛散性.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & 收敛\\ \rho>1 & 发散\\ \rho=1 & 不确定\end{cases}$$

解：$u_n=\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1}\right)=\frac{2}{3}<1$$

故级数收敛.

题 2. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & 收敛\\ \rho>1 & 发散\\ \rho=1 & 不确定\end{cases}$$

解：$u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n+1)}=\frac{1}{2}<1$$

故级数收敛.

题 3. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 的敛散性

如果可以用等价无穷小替换，
则他们有相同的敛散性

解：$n\to\infty$ 时，$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$ （等价无穷小）

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 有相同的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，发散　　故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 也是发散的

3. 交错级数

记作：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots\cdots + (-1)^n u_n \cdots$ （正负项交错）

题 1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 敛散性

交错级数判定方法：

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \\ u_{n+1} \le u_n\end{cases} \Rightarrow \text{收敛}$$

注：u_n 不包括 (-1) 项

解：$u_n = \frac{1}{n}$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$　且 $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = u_n$

故交错级数是收敛的

4. 绝对收敛和条件收敛

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定也收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

题 1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛.

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$　是调和级数　发散

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为交错级数，满足 $\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\end{cases}$　收敛

故级数为条件收敛

课时十六　练习题

1. 求级数的和：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=$________.

2. 级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$的和等于________.

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{q^n}$收敛（$a$为常数），则$q$满足的条件是（　　）.

$A.\ q=1$　　$B.\ |q|<1$　　$C.\ q=-1$　　$D.\ |q|>1$

4. 当（　　）时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (p>0)$是收敛的.

$A.\ p=1$　　$B.\ p<1$　　$C.\ p>1$　　$D.\ p\neq 1$

5. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=2$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(3u_n-\frac{5}{2^n})$________

$A.$收敛到-4　　$B.$收敛到1　　$C.$发散　　$D.$无法求和

6. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性.

7. 判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n}$的敛散性.

8. 判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性.

9. 判断正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\tan(\frac{\pi}{3^n})$的敛散性.

10. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$的敛散性为________.

11. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$的敛散性.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{n}$的收敛性为___________（绝对收敛、条件收敛、发散）.

13. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e^{\frac{1}{n}}-1)$的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛。（写出判别过程）

14. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\cdot 6^{n}}$是否收敛，若收敛，指出绝对收敛还是条件收敛。

课时十七 幂级数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 收敛域	必考	6~10	大题
2. 和函数			
3. 幂级数展开	★★★★★	0~8	
4. 傅里叶级数	★★	0~3	选择、填空

1. 收敛域

幂级数记作：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

展开式：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$（含 x 项，且敛散性随 x 的取值不同而不同）

题 1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

解：$u_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = |x| < 1$$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

收敛半径：$R = 1$

收敛区间：$x \in (-1,1)$

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为交错级数，

满足 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{cases}$，故收敛

则收敛域为 $x \in (-1,1]$

收敛域解题步骤：

1） $u_n = a_n x^n$

2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$

3） $a < x < b$

收敛半径：$R = \frac{b-a}{2}$

收敛区间：$x \in (a,b)$

收敛域：验证端点 $x=a$，$x=b$ 的敛散性。

题 2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$ 的收敛域.

解：$u_n=\frac{(x-2)^n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}|x-2|<1$$

$\Rightarrow\ 0<x<4$

收敛半径：$R=2$　　　收敛区间：$x\in(0,4)$

$x=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散

$x=4$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散

则收敛域为 $x\in(0,4)$

题 3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$ 的收敛域.

解：$u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)x^{2n+2}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}x^2<1$$

$\Rightarrow\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

收敛半径：$R=\sqrt{2}$　　　收敛区间：$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$x=-\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)$ 发散

$x=\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)$ 发散　　　则收敛域为 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

2. 和函数

记作：$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ （对幂级数求和）

性质1：可导并逐项可导 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$

性质2：可积并逐项可积 $\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

✧ 麦克劳林公式，最常考 $\frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n$	$(-1<x<1)$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2+\ldots\ldots+(-1)^nx^n$	$(-1<x<1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-1<x\le 1)$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}$	$(-\infty<x<+\infty)$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty<x<+\infty)$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2}+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty<x<+\infty)$

题 1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数

和函数 $S(x)$ 解题步骤：

①先求收敛域

②先积后导/先导后积

③利用麦克劳林公式

解：$u_n = nx^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{n}\cdot x\right| = |x| < 1$$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

收敛区间：$x \in (-1,1)$

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散

$x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散

则收敛域为 $x \in (-1,1)$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

先积：$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} - 1$

后导：$S(x) = \left[\int_0^x S(x)dx\right]' = \left[\frac{1}{1-x} - 1\right]' = \frac{1}{(1-x)^2}$

题 2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}$ 的和函数

解：$u_n=\frac{x^{2n+1}}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+2}\cdot\frac{2n}{x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n}{2n+2}\cdot x^2\right|=x^2<1$$

$\Rightarrow -1<x<1$

收敛区间：$x\in(-1,1)$

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n}$ 发散

$x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散

则收敛域为 $x\in(-1,1)$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

再令 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^{n-1}=x\left[1+x^2+(x^2)^2+...+(x^2)^n\right]=\frac{x}{1-x^2}$$

$$S_1(x)=\int_0^x S_1'(x)dx=\int_0^x\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

$$S(x)=x\cdot S_1(x)=-\frac{x}{2}\ln(1-x^2)$$

题 3. 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$的和.

解：先求$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

$$u_n=(n+1)x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\cdot x\right|=|x|<1$$

$$\Rightarrow\ -1<x<1$$

$x=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$发散

$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$发散

则收敛域为$x\in(-1,1)$

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1}{1-x}-1$$

$$S(x)=\left(\int_0^x S(x)dx\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4$$

3. 幂级数展开

题 1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2+(x-1)}-\dfrac{1}{3+(x-1)}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+\cdots(-1)^n x^n+\cdots}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

$$\frac{(x-1)}{2}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-1,3)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

$$\frac{(x-1)}{3}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-2,4)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n\qquad x\in(-1,3)$$

4. 傅里叶级数

题 1. 设有周期为 2π 的函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$，其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛到__________.

解：$\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}(1+x^2)=1+\pi^2$

$\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi^+}(-1)=-1$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)+\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)}{2}=\frac{1+\pi^2-1}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

则傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛到 $\dfrac{\pi^2}{2}$

课时十七 练习题

1. 求无穷级数的和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$ 的收敛半径和收敛域.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛半径与收敛域.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n^2}$ 的收敛域.

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}\cdot x^{2n}$ 的收敛半径是________.

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域与和函数.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域与和函数.

8. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

9. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$ 的收敛域及和函数 $S(x)$，并计算数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

10. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成关于 $(x+4)$ 的幂级数.

11. 将函数 $f(x)=\ln(3+x)$ 展开成关于 $(x-1)$ 的幂级数.

12. 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}3x^2+2 & (0<x<1)\\ x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于__________.

13. 设 $f(x)$ 为周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\le x<0\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=2\pi$ 处收敛于______.