《线性代数》模拟试题 04 参考答案

专业：______________ 班级：______________ 姓名：______________ 学号：______________

题号		得分	合计	总分
一	1	2	20	100
	2	2		
	3	2		
	4	2		
	5	2		
	6	2		
	7	2		
	8	2		
	9	2		
	10	2		
二	11	3	15	
	12	3		
	13	3		
	14	3		
	15	3		
三	16	9	54	
	17	9		
	18	9		
	19	9		
	20	9		
	21	9		
四	22	11	11	

一、填空题：1～10 小题，每小题 2 分，共 20 分.

1. 如果行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=$ $\underline{-16}$.

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$$

提示：$\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-16$

2. 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，则 $A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=$ $\underline{0}$.

提示：$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性 <u>无关</u>（填写相关或无关）.

4. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 均为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=$ $\underline{0}$

（这里 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 均为三维列向量）.

提示：$|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|(2\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=|2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|=0$

5. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵是 $\underline{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}}$.

提示：$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$

6. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=$ $\underline{8}$.

7. $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{b}$ 为 n 维向量，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是 $\underline{|\boldsymbol{A}|\neq 0 \text{ 或 } R(\boldsymbol{A})=n}$.

8. 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1、2、3，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ $\underline{24}$.

提示： $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda+1$

9. 已知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$，经化简可得 $\boldsymbol{X}=$ $\underline{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-2}}$.

提示： $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$， 所以 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}-\boldsymbol{AXB}-\boldsymbol{BXA}=\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$， 从而 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$， 于是 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-2}$

10. 若 $f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值范围是 $\underline{-\sqrt{\frac{5}{3}}<t<\sqrt{\frac{5}{3}}}$.

二、单项选择题：11～15 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有（ D ）.

(A) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$　　(B) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(C) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$　　(D) $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，则正确的是（ C ）.

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$　　(D) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$

13. 下列命题正确的是（ B ）.

(A) 若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关， $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关

(B) 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示

(C) 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 一定线性无关

(D) 若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_r$ 秩相等，则这个两个向量组一定等价

14. n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 系数矩阵的秩为 r，则其有非零解的充分必要条件是（ B ）.

(A) $r>n$　　(B) $r<n$　　(C) $r\ge n$　　(D) $r=n$

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ （ B ）.

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 既不合同也不相似

提示：$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $|f(\lambda)|=\lambda(\lambda-3)^2$，即特征值为 3、3、0

三、计算题：16～21 小题，每小题 9 分，共 54 分.

16. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$$

17. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

记 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^n \end{pmatrix}$

因为 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -2 \end{pmatrix}$，所以

$$A_1^n = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -2 \end{pmatrix}}^{n\text{组}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}5^{n-1}\begin{pmatrix} 1, & -2 \end{pmatrix}$$
$$= 5^{n-1}A_1$$

再由 $A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A_2^3 = A_2^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可以看出 $A_2^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，因此 $A^n = \begin{pmatrix} 5^{n-1} & -2\times 5^{n-1} & 0 & 0 \\ -2\times 5^{n-1} & 4\times 5^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$，$\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的秩以及它的一个极大线性无关组；

(2) 将其余向量用所求的极大线性无关组线性表示.

由于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$，其极大线性无关组可以取为 α_1、α_2、α_5，且

$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_5$，$\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_5$

19. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的所有特征值，判断 A 能否与对角矩阵相似，说明理由.

由于 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$，所以 A 的所有特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，

$\lambda_3=2$. 对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由于

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2\neq 3-2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似.

20. λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\lambda\\ \lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+\lambda x_3=1\end{cases}$ 有解？并求其解（有无穷多解时用通解表示其解）

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\lambda r_1,\,r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda^2\\0&0&\lambda-1&1-\lambda\end{pmatrix}$$

当 $\lambda\neq 1$ 时，由于

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda^2\\0&0&\lambda-1&1-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{1-\lambda}\times r_2,\,\frac{1}{\lambda-1}\times r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\0&1&1&1+\lambda\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3,\,r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&\lambda+1\\0&1&0&2+\lambda\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2+\lambda\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组有惟一解，其解为 $x_1=-1$，$x_2=2+\lambda$，$x_3=-1$.

当 $\lambda=1$ 时，由于

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda^2\\0&0&\lambda-1&1-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=1$，方程组有无穷多解，对应的齐次方程 $x_1=-x_2-x_3$，基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，非齐次方程 $x_1=1-x_2-x_3$ 的特解为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，通解为

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

21. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_2x_3$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值等于 1．求

(1) 求 a 的值；(2) 将该二次型化为标准形，并写出所对应的可逆线性变换．

二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&a\end{pmatrix}$，由于 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，因此

$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(2-a)=0$，所以 $a=2$．对二次型配方得

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3=2x_1^2+2\left(x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}x_3^2$

令 $y_1=x_1$， $y_2=x_2+\frac{1}{2}x_3$， $y_3=x_3$，二次型化为标准形

$$f=2y_1^2+2y_2^2+\frac{3}{2}y_3^2$$

可逆线性变换为 $\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2-\frac{1}{2}y_3\\x_3=y_3\end{cases}$ ．

四、证明题：本题满分 11 分．

22. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

的解，(1) 求 λ 的值；(2) 证明 $|\boldsymbol{B}|=0$．

(1) 因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，所以齐次线性方程组有非零解，故其方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=5\lambda=0$$

所以 $\lambda=0$．

(2) 由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&0\\3&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-5&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $R(\boldsymbol{A})=2$，因此齐次线性方程组的基础解系所含解的个数为$3-2=1$，故 $R(\boldsymbol{B})\leq 1$，因而$|\boldsymbol{B}|=0$.