高等数学下册试题库

一、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．已知 A(1,0,2), B(1,2,1)是空间两点，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模是：（ A ）

A ） $\sqrt{5}$　　B） 3　　C） 6　　D）9

解 $\overrightarrow{AB}$ ={1-1，2-0，1-2}={0，2，-1}，

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}.$$

2．设 **a**={1,-1,3}, **b**={2,-1,2}，求 **c**=3**a**-2**b** 是：（ B ）

A ）{-1,1,5}.　　B） {-1,-1,5}.　　C） {1,-1,5}.　　D）{-1,-1,6}.

解 (1) **c**=3**a**-2**b** =3{1,-1,3}-2{2,-1,2}={3-4,-3+2,9-4}={-1,-1,5}.

3．设 **a**={1,-1,3}, **b**={2, 1, -2}，求用标准基 **i**, **j**, **k** 表示向量 **c=a-b**; （ A ）

A ）-**i**-2**j**+5**k**　B）-**i**-**j**+3**k**　C）-**i**-**j**+5**k**　D）-2**i**-**j**+5**k**

解 **c**={-1,-2,5}=-**i**-2**j**+5**k** .

4．求两平面 $x+2y-z-3=0$ 和 $2x+y+z+5=0$ 的夹角是：（C）

A ） $\frac{\pi}{2}$　　B） $\frac{\pi}{4}$　　C） $\frac{\pi}{3}$　　D） π

解　由公式（6-21）有

$$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|1\times2+2\times1+(-1)\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

因此，所求夹角 $\alpha=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

5．求平行于 z 轴，且过点 $M_1(1,0,1)$ 和 $M_2(2,-1,1)$ 的平面方程．是：（D ）

A） 2x+3y=5=0　　B） x-y+1=0

C） x+y+1=0　　D） $x+y-1=0$.

解　由于平面平行于 z 轴，因此可设这平面的方程为

$$Ax+By+D=0$$

因为平面过 M_1、M_2 两点，所以有

$$\begin{cases}A+D=0\\2A-B+D=0\end{cases}$$

解得 $A=-D, B=-D$，以此代入所设方程并约去 $D(D\neq0)$，便得到所求的平面方程

$$x+y-1=0$$

6．微分方程 $xyy''+x(y')^3-y^4y'=0$ 的阶数是(D)。

A．3　　B．4　　C．5　　D． 2

7．微分方程 $y''' - x^2 y'' - x^5 = 1$ 的通解中应含的独立常数的个数为(A)。

A．3　　B．5　　C．4　　D． 2

8．下列函数中，哪个是微分方程 $dy - 2xdx = 0$ 的解(B)。

A． $y = 2x$　　B． $y = x^2$　　C． $y = -2x$　　D． $y = -x$

9．微分方程 $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ 的一个特解是(B)。

A． $y = x^3 + 1$　　B． $y = (x+2)^3$　　C． $y = (x+C)^2$　　D． $y = C(1+x)^3$

10．函数 $y = \cos x$ 是下列哪个微分方程的解(C)。

A． $y' + y = 0$　　B． $y' + 2y = 0$　　C． $y_n + y = 0$　　D． $y'' + y = \cos x$

11． $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 是方程 $y'' - y = 0$ 的(A)，其中 C_1， C_2 为任意常数。

A．通解　　B．特解　　C．是方程所有的解　　D． 上述都不对

12． $y' = y$ 满足 $y|_{x=0} = 2$ 的特解是(B)。

A． $y = e^x + 1$　　B． $y = 2e^x$　　C． $y = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$　　D． $y = 3 \cdot e^x$

13．微分方程 $y'' + y = \sin x$ 的一个特解具有形式(C)。

A． $y^* = a\sin x$　　B． $y^* = a \cdot \cos x$

C． $y^* = x(a\sin x + b\cos x)$　　D． $y^* = a\cos x + b\sin x$

14．下列微分方程中，(A)是二阶常系数齐次线性微分方程。

A． $y'' - 2y = 0$　　B． $y'' - xy' + 3y^2 = 0$

C． $5y'' - 4x = 0$　　D． $y'' - 2y' + 1 = 0$

15．微分方程 $y' - y = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解为(A)。

A． e^x　　B． $e^x - 1$　　C． $e^x + 1$　　D． $2 - e^x$

16．在下列函数中，能够是微分方程 $y'' + y = 0$ 的解的函数是(C　)。

A． $y=1$　B． $y=x$　C． $y=\sin x$　D． $y=e^x$

17．过点 $(1,3)$ 且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程 $y=y(x)$ 应满足的关系是(C)。

A． $y'=2x$　B． $y''=2x$　C． $y'=2x$， $y(1)=3$　D． $y''=2x$， $y(1)=3$

18．下列微分方程中，可分离变量的是(B)。

A． $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e$　B． $\frac{dy}{dx}=k(x-a)(b-y)$ (k , a , b 是常数)

C． $\frac{dy}{dx}-\sin y=x$　D． $y'+xy=y^2\cdot e^x$

19．方程 $y'-2y=0$ 的通解是(C)。

A． $y=\sin x$　B． $y=4\cdot e^{2x}$　C． $y=C\cdot e^{2x}$　D． $y=e^x$

20．微分方程 $\frac{dx}{y}+\frac{dy}{x}=0$ 满足 $y|_{x=3}=4$ 的特解是(A)。

A． $x^2+y^2=25$　B． $3x+4y=C$　C． $x^2+y^2=C$　D． $x^2-y^2=7$

21．微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y=0$ 的通解是 $y=$(B)。

A． $\frac{C}{x}$　B． Cx　C． $\frac{1}{x}+C$　D． $x+C$

22．微分方程 $y'+y=0$ 的解为(B)。

A． e^x　B． e^{-x}　C． e^x+e^{-x}　D． $-e^x$

23．下列函数中，为微分方程 $xdx+ydy=0$ 的通解是(B)。

A． $x+y=C$　B． $x^2+y^2=C$　C． $Cx+y=0$　D． $Cx^2+y=0$

24．微分方程 $2ydy-dx=0$ 的通解为(A)。

A． $y^2-x=C$　B． $y-\sqrt{x}=C$　C． $y=x+C$　D． $y=-x+C$

25．微分方程 $\cos ydy=\sin xdx$ 的通解是(D)。

A. $\sin x+\cos y=C$　　B. $\cos y-\sin x=C$

C. $\cos x-\sin y=C$　　D. $\cos x+\sin y=C$

26. $y''=e^{-x}$的通解为 $y=$(C)。

A. $-e^{-x}$　　B. e^{-x}　　C. $e^{-x}+C_1x+C_2$　　D. $-e^{-x}+C_1x+C_2$

27. 按照微分方程通解定义， $y''=\sin x$的通解是(A)。

A. $-\sin x+C_1x+C_2$　　B. $-\sin x+C_1+C_2$

C. $\sin x+C_1x+C_2$　　D. $\sin x+C_1+C_2$

一、单项选择题

2. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点可偏导的 (D)

(A) 充分而不必要条件;　　(B) 必要而不充分条件;

(C) 必要而且充分条件;　　(D) 既不必要也不充分条件.

3. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在是函数在该点可微分的 (B).

(A) 充分而不必要条件;　　(B) 必要而不充分条件;

(C) 必要而且充分条件;　　(D) 既不必要也不充分条件.

4. 对于二元函数 $z=f(x,y)$，下列结论正确的是 ( ). C

A. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$ 且有 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$；

B. 若在 (x_0,y_0) 处 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，则在点 (x_0,y_0) 处 $z=f(x,y)$ 可微;

C. 若在 (x_0,y_0) 处 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在且连续，则在点 (x_0,y_0) 处 $z=f(x,y)$ 可

微;

D. 若$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$都存在，则. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

6.向量$a=(3,-1,-2)$, $b=(1,2,-1)$，则$a\cdot b=$ (A)

(A) 3 (B) -3

(C) -2 (D) 2

5．已知三点 M（1，2，1），A（2，1，1），B（2，1，2），则$\vec{MA}\bullet\vec{AB}$ = (C)

(A) -1； (B) 1；

(C) 0 ； (D) 2；

6．已知三点 M（0，1，1），A（2，2，1），B（2，1，3），则$|\vec{MA}+\vec{AB}|=$ (B)

(A) $-\sqrt{2}$; (B) $2\sqrt{2}$；

(C) $\sqrt{2}$； (D)-2;

7．设D为园域$x^2+y^2\le 2ax\ (a>0)$，化积分$\iint_D F(x,y)d\sigma$为二次积分的正确方法

是________. D

A. B. $2\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2a-x^2}}f(x,y)dy$

C. $\int_0^{a}d\theta\int_{-a}^{2a\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

8．设，改变积分次序，则$I=$______. B

A. $\int_0^{\ln 3}dy\int_0^{e^y}f(x,y)dx$ B.

C. D.

9． 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$ 可以写成__________.

D

A. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y)dx$　　　　B. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$

C.　　　　　　　　D. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y)dy$

10． 设Ω是由曲面$x^2+y^2=2z$和$z=2$所围成的空间区域，在柱面坐标系下将三重积分

$I=\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$表示为三次积分，$I=$________.　　　C

A． $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\rho^2}{2}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,dz$

B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_0^{\frac{\rho^2}{2}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho dz$

C． $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho dz$

D． $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_0^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho dz$

11．设L为$x0y$面内直线段，其方程为$L: x=a,\ c\le y\le d$，则 $\int_L P(x, y)dx=$

(　C　)

(A)　a　　　　(B)　c

(C)　0　　　　(D)　d

12.设L为$x0y$面内直线段,其方程为$L: y=a,\ c\le x\le d$,则$\int_L P(x, y)dy=$

(　C　)

(A)　a　　　　(B)　c

(C)　0　　　　(D)　d

13 ． 设 有 级 数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，则 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 是 级 数 收 敛 的

(　D　)

(A) 充分条件； (B) 充分必要条件；

(C) 既不充分也不必要条件； (D) 必要条件;

14．幂级数 $\sum_{n=1} nx^n$ 的收径半径 R = (D)

(A) 3 (B) 0

(C) 2 (D) 1

15．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 的收敛半径 $R =$ (A)

(A) 1 (B) 0

(C) 2 (D) 3

16．若幂级数 $\sum_{n=0} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum_{n=0} a_n x^{n+2}$ 的收敛半径为 (A)

(A) R (B) R^2

(C) $\sqrt{R}$ (D) 无法求得

17. 若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1} u_n$ ( ) D

A. 收敛且和为 B. 收敛但和不一定为

C. 发散 D. 可能收敛也可能发散

18. 若 $\sum_{n=1} u_n$ 为正项级数，则( )

A. 若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\sum_{n=1} u_n$ 收敛 B. 若 $\sum_{n=1} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1} u_n^2$ 收敛

B

C. 若 $\sum_{n=1} u_n^2$，则 $\sum_{n=1} u_n$ 也收敛 D. 若 $\sum_{n=1} u_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$

19. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ 在点 $x = 3$ 处收敛，则该级数在点 $x = -1$ 处( )

A

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 敛散性不定

20. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}\ (x\neq 0)$，则该级数(　　　　　)　　B

A. 是发散级数　　　　B. 是绝对收敛级数

C. 是条件收敛级数　　　　D. 可能收敛也可能发散

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. **a**·**b**=（公式）

答案 | **a** | · | **b** | $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

2. **a**=(a_x，a_y, a_z)，**b=**(b_x，b_y，b_z)则 **a** · **b** = （计算）

答案 $a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

3. $\vec{a}\times\vec{b}=.$

答案$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

4. $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=$

答案$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$

5.平面的点法式方程是

答案$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

6.设$z=\frac{\arcsin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$，其定义域为($\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1, y>\sqrt{x}\ge 0\right\}$)

7.设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{xy} & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$，则 $f_x(0,1)=$ ($f_x(0,1)=1$)

8. $f(x,y)$在点(x,y)处可微分是 $f(x,y)$在该点连续的的条件， $f(x,y)$在点(x,y)处连续是$f(x,y)$在该点可微分的的条件.(充分，必要)

9. $z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$在该点可微分的条件.(必要)

10.在横线上填上方程的名称

①$(y-3)\cdot\ln x dx - x dy = 0$方程的名称是

答案　可分离变量微分方程；

②$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$方程的名称是

答案　可分离变量微分方程；

③$x\dfrac{dy}{dx}=y\cdot\ln\dfrac{y}{x}$方程的名称是

答案　齐次方程；

④$xy'=y+x^2\sin x$方程的名称是

答案　一阶线性微分方程；

⑤$y''+y'-2y=0$方程的名称是

答案　二阶常系数齐次线性微分方程.

11．在空间直角坐标系{O;$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$}下，求 P(2,－3,－1)，M(a, b, c)关于(1) 坐标平面；(2) 坐标轴；(3) 坐标原点的各个对称点的坐标.

[解]：M (a, b, c)关于 xOy 平面的对称点坐标为(a, b, －c)，

M (a, b, c)关于 yOz 平面的对称点坐标为(－a, b, c)，

M (a, b, c)关于 xOz 平面的对称点坐标为(a,－b, c)，

M (a, b, c)关于 x 轴平面的对称点坐标为(a,－b,－c)，

M (a, b, c)关于 y 轴的对称点的坐标为(－a, b,－c)，

M (a, b, c)关于 z 轴的对称点的坐标为(－a,－b, c).

类似考虑 P (2,－3，－1)即可.

12.要使下列各式成立，矢量$\vec{a},\vec{b}$应满足什么条件?

（1） $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; （2） $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

（3） $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$; （4） $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

（5） $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

[解]:（1） $\vec{a},\vec{b}$所在的直线垂直时有$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；

（2） $\vec{a},\vec{b}$同向时有$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

（3） $|\vec{a}|\geq|\vec{b}|$, 且$\vec{a},\vec{b}$反向时有$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

（4） $\vec{a},\vec{b}$反向时有$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

（5） $\vec{a},\vec{b}$同向，且$|\vec{a}|\geq|\vec{b}|$时有$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

13.下列情形中的矢量终点各构成什么图形?

（1）把空间中一切单位矢量归结到共同的始点；

（2）把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点；

（3）把平行于某一直线的一切矢量归结到共同的始点；

（4）把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点.

[解]:（1）单位球面； （2）单位圆

（3）直线； （4）相距为 2 的两点

二、填空题

1．设 $f(x,y)=\sin x+(y-1)\ln(x^2+y^2)$，则 $f'_x(0,1)=$ ___1___.

2．设 $f(x,y)=\cos x+(y-1)\ln(x^2+y^2)$，则 $f'_x(0,1)=$ ___0___.

3．二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标的公式是

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

4．三重积分的变量从直角坐标变换为柱面坐标的公式是

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

5．柱面坐标下的体积元素 $\underline{dv = \rho\, d\rho\, d\theta\, d\, z}$

6．设积分区域 $D: x^2 + y^2 \le a^2$，且 $\iint_D dxdy = 9\pi$，则 $a =$ ___3___ 。

7． 设 D 由曲线 $\rho = a\sin\theta$， $\rho = a$ 所围成，则 $\iint_D dxdy = \underline{\frac{3}{4}\pi a^2}$

8． 设积分区域 D 为 $1 \le x^2 + y^2 \le 4$，$\iint_D 2dxdy = \underline{6\pi}$

9．设 $f(x, y)$ 在[0， 1]上连续，如果，
 则=_____9________.

10．设 L 为连接(1, 0)与(0, 1)两点的直线段，则

$\int_L (x+y)ds = \underline{\sqrt{2}}$.

11．设 L 为连接(1, 0)与(0, 1)两点的直线段，
 则 $\int_L (x-y)ds =$ ___________． 0

12．等比级数 $\sum_{n=1} aq^n\ (a \ne 0)$ 当 $\underline{|q| < 1}$ 时，等比级数 $\sum_{n=1} aq^n$ 收敛.

13．当__$\rho > 1$__时，$p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 是收敛的.

14．当_________时,级数 $\sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ 是绝对收敛的. $\rho > 1$

15．若 $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$，则 $f_x(2,1) =$ _________. $\frac{1}{2}$,

16．若 $f(x, y) = xy^3 + (x-1)\arccos\frac{y^2}{2x}$，则 $f_y(1, y) =$ _________. $3y^2$

17．设 $u = z^{xy}$，则 $du =$ _________. $z^{xy}\left(y\ln x dx + x\ln z dy + \frac{xy}{z}dz\right)$

18．设 $z=y^{\ln x}$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ ________. $\frac{\ln y(\ln y-1)}{x^2}y^{\ln x}$

19．积分的值等于 ______. $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$，

20. 设 D 为园域 $x^2+y^2\le a^2$，若 $\iint_D (x^2+y^2)dxdy=8\pi$，则 $a=$ ______.

2

21．设 $I=\iiint_\Omega 2dxdydz$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2,\ z\ge 0$，则 $I=$ ______. $\frac{4}{3}\pi a^3$

三、是非题（每题 4 分，共 20 分）

1．初等函数的定义域是其自然定义域的真子集.（ x ）

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$.（ x ）

3．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+3}=-\frac{2}{3}$.（x ）

4．对于任意实数 x，恒有 $\sin x\le x$ 成立.（x ）

5． $y=0^x$ 是指数函数.（ x ）

6．函数 $y=\log_a x\ (0<a<1)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.（x ）

7．$\log_2 3\cdot\log_3 2=1$.（√ ）

8．如果对于任意实数 $x\in R$，恒有 $f'(x)=0$，那么 $y=f(x)$ 为常函数.

（√ ）

9．存在既为等差数列，又为等比数列的数列.（ √ ）

10．指数函数是基本初等函数.（√ ）

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x}}=0$. (√)

12. 函数 $y=x^3+3x^2+4$ 为基本初等函数. (√)

13. $\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$. (x)

14. $\arcsin(x+\pi)$是基本初等函数. (x)

15. $\sin x$ 与 x 是等价无穷小量. (x)

16. e^x-1与 x 为等价无穷小量. (x)

17. 若函数 $f(x)$在区间 $[a,b]$上单调递增，那么对于任意 $x\in[a,b]$，恒有 $f'(x)>0$. (x)

18. 存在既为奇函数又为偶函数的函数. (x)

19. 当奇函数 $f(x)$在原点处有定义时，一定成立 $f(0)=0$. (√)

20. 若偶函数 $y=f(x)\left(x\in[-1,1]\right)$连续，那么函数 $y=f'(x)\left(x\in(-1,1)\right)$为奇函数. (√)

21. 若奇函数 $y=f(x)\left(x\in[-1,1]\right)$连续，那么函数 $y=f'(x)\left(x\in(-1,1)\right)$为偶函数. (√)

22. 偶函数与奇函数的乘积为奇函数. (√)

23. 奇函数与奇函数的乘积为偶函数. (√)

24. 若函数 $f(x)$为奇函数，那么一定成立 $f(0)=0$. (√)

25. 若函数 $f(x)$为偶函数，那么一定成立 $f'(0)=0$. (x)

26. $\left(\sin(x+\pi)\right)'=\cos x$. (x)

27. $\sin x\cos x=\sin 2x$. (x)

28. $\left(a^x\right)'=a^x$. (x)

29. $\sin x(x+\pi)=\sin x$. (x)

30. 单调函数一定存在最大值与最小值. (x)

31. 单调函数一定存在反函数. (√)

32. 互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称. (√)

33. 若定义域为 $[0,1]$ 的函数 $f(x)$ 存在反函数，那么 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调. (√)

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+x}{2n^2+1}=\frac{1}{2}$. (√)

35. 对于任意的 $a,b\in R_+$，恒有 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$. (√)

36. 函数的三要素为：定义域，对应法则与值域. (√)

37. 若函数 $f(x)$ 在其定义域内处处有切线，那么该函数在其定义域内处处可导. (x)

38. 空集是任意初等函数的定义域的真子集. (x)

39. $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sin^i x$ 为初等函数. (x)

40. 对于任意的 $x\in R$，恒有 $x+1\geq 2\sqrt{x}$. (x)

41. 左右导数处处存在的函数，一定处处可导. (x)

下列题（1．×；2．×；3． √；4．×；5．√）

1．任意微分方程都有通解。(×)

2．微分方程的通解中包含了它所有的解。(×)

3．函数 $y=3\sin x-4\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的解。(√)

4．函数 $y=x^2\cdot e^x$ 是微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的解。(×)

5．微分方程 $xy'-\ln x=0$ 的通解是 $y=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$ (C 为任意常数)。(√)

下列是非题（1．×；2．√；3．√；4．×；5．×）

1．可分离变量微分方程不都是全微分方程。(　　)

2．若 $y_1(x)$，$y_2(x)$都是 $y'+P(x)y=Q(x)$的特解，且 $y_1(x)$与 $y_2(x)$线性无关，则通解可表为 $y(x)=y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$。(　　)

3．函数 $y=e^{\lambda_1 x}+e^{\lambda_2 x}$是微分方程 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$的解。(　　)

4．曲线在点(x,y)处的切线斜率等于该点横坐标的平方，则曲线所满足的微分方程是 $y'=x^2+C$ (C 是任意常数)。(　　)

5．微分方程 $y'=e^{2x-y}$，满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解为 $e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+1$。

(　　)

是非题（1．×；2．√;）

1．只要给出n阶线性微分方程的n个特解，就能写出其通解。

2．已知二阶线性齐次方程 $y''+P(x)\cdot y'+Q(x)\cdot y=0$的一个非零解 y，即可

四、计算证明题（每题 10 分，共 40 分）

1、判断积数收敛性$\sum\limits_{n=1}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n^2}}{n!}}{\frac{2^{(n-1)^2}}{(n-1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}}{n}=\infty>1$

由比值法，级数$\sum\limits_{n=1}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$ 发散

2．$ydx-xdy=x^2ydy$

解：两边同除以x^2，得：

$$\frac{ydx-xdy}{x^2}=ydy$$

$$d\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}y^2+c$$

即 $\frac{y}{x}+\frac{1}{2}y_2=c$

3． $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$

解：两边同除以 x ，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

令 $\frac{y}{x}=u$

则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

即 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-\sqrt{u}}$

得到 $\frac{1}{u}=\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)_2$，

即 $x=y\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2$

另外 $y=0$ 也是方程的解。

4． $(xy+1)ydx-xdy=0$

解： $ydx-xdy+xydx=0$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=-xdx$$

得到 $d\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{2}x2+c$

即 $\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x2=c$

另外 $y=0$ 也是方程的解。

5．求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解: 所给方程的特征方程为

$$r^2+2r+5=0$$

$$r_1=-1+2i, r_2=-1-2i$$

所求通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

6.求 $\iint\limits_D (x+y)d\sigma \quad D: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$.

解

$$\iint\limits_D (x+y)d\sigma \quad D: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$$

$$\iint\limits_D (x+y)d\sigma=\int_0^1 dx\left[\int_1^2 (x+y)dy\right]$$

$$=\int_0^1 dx\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]\Big|_1^2=\int_0^1\left(x+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=2$$

7．求方程 $y''+2y'-3y=0$ 的通解.

解 所给方程的特征方程为 $r^2+2r-3=0$

其根为 $r_1=-3, r_2=1$

所以原方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$

8.证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 极限不存在

8)因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x=y}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=1$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=2x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$ 所以极限不存在

9.证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 极限不存在

9)设 $y^2=kx$，$\lim\limits_{\substack{y\to0\\x=ky^2}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\dfrac{k}{k^2+1}$ 不等于定值，极限不存在

10.计算 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中 D 是由直线 y=1、x=2 和 y=x 所围成的闭区域.

解：画出区域 D.

可把D看成是X--型区域: 1 x 2, 1 y x . 于是

$$\iint_D xyd\sigma = \int_1^2[\int_1^x xydy]dx = \int_1^2[x\cdot\frac{y^2}{2}]_1^x dx = \frac{1}{2}\int_1^2(x^3-x)dx = \frac{1}{2}[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

注　积分还可以写成 $\iint_D xyd\sigma = \int_1^2 dx\int_1^x xydy = \int_1^2 xdx\int_1^x ydy$

11. $\frac{dy}{dx}$=2xy,并满足初始条件：x=0,y=1 的特解。

解：$\frac{dy}{y}$=2xdx　两边积分有：ln|y|=x^2+c

$y=e^{x^2}+e^c=ce^{x^2}$ 另外 y=0 也是原方程的解，c=0 时，y=0

原方程的通解为 y= ce^{x^2},x=0 y=1 时 c=1

特解为 y= e^{x^2}.

12. y^2dx+(x+1)dy=0 并求满足初始条件：x=0,y=1 的特解。

解：y^2dx=-(x+1)dy　$\frac{dy}{y^2}$dy=-$\frac{1}{x+1}$dx

两边积分: -$\frac{1}{y}$=-ln|x+1|+ln|c|　y=$\frac{1}{\ln|c(x+1)|}$

另外 y=0,x=-1 也是原方程的解　x=0,y=1 时 c=e

特解：y=$\frac{1}{\ln|c(x+1)|}$

13. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$

解：　$\frac{\partial M}{\partial y}=1$，$\frac{\partial N}{\partial x}$=1 .

则 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

所以此方程是恰当方程。

凑微分，$x^2dx-2ydy+(ydx+xdy)=0$

得 ：$\frac{1}{3}x^3+xy-y^2=C$

14． $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$

解: $\frac{\partial M}{\partial y}=1$，$\frac{\partial N}{\partial x}=1$ ．

则 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ．

所以此方程为恰当方程。

凑微分，$ydx+xdy-3x^2dx-4ydy=0$

得 $x^3-xy+2y^2=C$

15. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}$.

16. 求 $z=x^2 \quad 3xy \quad y^2$ 在点(1, 2)处的偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$. $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2.1+3.2=8$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3.1+2.2=7$.

17.设 $z=x^3y^2 \quad 3xy^3 \quad xy \quad 1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2$，$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6y^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1$　$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1$

18. 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证 因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

因此 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=0$.

19.计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分.

解因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$，

所以 $dz=2xydx+(x^2+2y)dy$.

20. 函数 $z=3x^2+4y^2$ 在点(0, 0)处有极小值.

当(x,y)=(0,0)时, z=0，而当(x,y) (0,0)时, z 0. 因此 z=0 是函数的极小值.

21.函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)处有极大值.

当(x,y)=(0,0)时, z=0，而当(x,y) (0,0)时, z 0. 因此 z=0 是函数的极大值.

22.已知三角形 ABC 的顶点分别是 A (1, 2, 3)、B (3, 4, 5)、C (2, 4, 7)，求三角形 ABC 的面积.

解根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|.$$

由于 $\vec{AB}$ =(2, 2, 2)，$\vec{AC}$ =(1, 2, 4)，因此

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}.$$

于是 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$.

23.设有点 A(1, 2, 3)和 B(2, -1, 4)，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解由题意知道，所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹．设 M(x, y, z)为所求平面上的任一点，则有

$$|AM|=|BM|,$$

即 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$.

等式两边平方，然后化简得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程，而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程，所以这个方程就是所求平面的方程.

24.求过点(2, -3, 0)且以 **n**=(1, -2, 3)为法线向量的平面的方程.

解根据平面的点法式方程，得所求平面的方程为

$$(x-2)-2(y+3)+3z=0,$$

即 x-2y+3z-8=0.

25.求通过 x 轴和点(4, -3, -1)的平面的方程.

解平面通过 x 轴，一方面表明它的法线向量垂直于 x 轴，　　即 A=0；另一方面表明　它必通过原点，即 D=0．因此可设这平面的方程为

By+Cz=0.

又因为这平面通过点(4, -3, -1)，所以有

$$-3B-C=0,$$

或 C=-3B .

将其代入所设方程并除以 B (B¹0)，便得所求的平面方程为

y-3z=0.

26.求直线 L_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 和 L_2: $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 的夹角.

解两直线的方向向量分别为 $\mathbf{s}_1$ = (1, -4, 1)和 $\mathbf{s}_2$ = (2, -2, -1). 设两直线的夹角为 ，则

$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

例 1　求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

的收敛半径与收敛域.

解因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$,

所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=1$.

当 x=1 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，是收敛的;

当 x=-1 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$，是发散的. 因此，收敛域为(-1, 1].

例 2　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛域.

解因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0$,

所以收敛半径为 R=+¥，从而收敛域为(-¥, +¥).

例 3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 的收敛半径.

解 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty,$$

所以收敛半径为 R=0，即级数仅在 x=0 处收敛.

例 5 计算 $\int_L 2xydx+x^2dy$，其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从 O(0，0)到 B(1，1)的一段弧.

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$ 在整个 xOy 面内都成立,

所以在整个 xOy 面内，积分 $\int_L 2xydx+x^2dy$ 与路径无关.

$$\int_L 2xydx+x^2dy=\int_{OA} 2xydx+x^2dy+\int_{AB} 2xydx+x^2dy$$

$$=\int_0^1 1^2dy=1.$$

讨论： 设 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向，问 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$ 是否一定成立?

提示:

这里 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$ 和 $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)不连续.

因为当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以如果(0，0)不在 L 所围成的区域内，则结论成立，而当(0, 0)在 L 所围成的区域内时，结论未必成立.

例 6 验证: 在整个 xOy 面内, xy^2dx+x^2ydy 是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

解这里 $P=xy^2$, $Q=x^2y$

因为 P、Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数 且有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy=\frac{\partial P}{\partial y}$$

所以在整个 xOy 面内, xy^2dx+x^2ydy 是某个函数的全微分.

取积分路线为从 O(0 0)到 A(x 0)再到 B(x y)的折线 则所求函数为

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}xy^2dx+x^2ydy=0+\int_0^y x^2ydy=x^2\int_0^y ydy=\frac{x^2y^2}{2}\cdot$$