概率论与数理统计期末考试模拟题

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且$P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，则$P(A\cup B)$的值为（ ）

A. 0.7 B. 0.8 C. 0.9 D. 1.0

2. 设随机变量 X 服从参数为λ的泊松分布，且$E(X^2)=6$，则λ的值为（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 设(X,Y)是二维随机变量，$D(X)=4$，$D(Y)=9$，相关系数$\rho_{XY}=0.5$，则$D(X - Y)$等于（ ）

A. 7 B. 13 C. 19 D. 25

4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}$是样本均值，S^2是样本方差，则（ ）

A. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim t(n - 1)$ B. $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n - 1)$

C. $\frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2}\sim \chi^2(n)$ D. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

5. 在假设检验中，显著性水平α的意义是（ ）

A. 原假设H_0成立，经检验被拒绝的概率

B. 原假设H_0成立，经检验不能被拒绝的概率

C. 原假设H_0不成立，经检验被拒绝的概率

D. 原假设H_0不成立，经检验不能被拒绝的概率

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 已知随机事件 A 与 B 互斥，且$P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ =______。
2. 设随机变量 X 的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}ax^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则常数a =______。
3. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，则$P\{a<X\leq b,c<Y\leq d\}$ =______。
4.

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3是来自总体 X 的样本，$\hat{\mu}_1=\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$，则较有效的无偏估计是______。

5. 设总体$X\sim N(\mu,1)$，μ未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的样本，对于给定的显著性水平α，检验假设$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$的拒绝域为______。

三、解答题（每题 16 分，共 80 分）

1. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数 X 的概率分布；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

2. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}6xy, & 0<x<1,0<y<1-x \\ 0, & 其他\end{cases}$

(1) 求边缘概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$；

(2) 判断 X 与 Y 是否相互独立，并说明理由。

3. 设随机变量 X 的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ Ax^2, & 0\leq x<1 \\ 1, & x\geq1\end{cases}$

(1) 求常数 A；

(2) 求$P\{0.3<X<0.7\}$；

(3) 求 X 的概率密度函数$f(x)$。

4. 设总体 X 的概率密度函数为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\leq0\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的样本。

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$；

(2) 求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_2$。

5. 某厂生产的某种零件，其重量服从正态分布$N(\mu,0.09)$（单位：kg）。从生产的一批零件中随机抽取 9 个，测得样本均值$\bar{x}=5.11$kg。问在显著性水平$\alpha = 0.05$下，能否认为这批零件的平均重量为 5kg？（$z_{0.025}=1.96$）

参考答案

一、单项选择题

1. A
2. B
3. A
4. B
5. A

二、填空题

1. 0.3
2. 3
3. F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)
4. $\hat{\mu}_2$
5. $|\frac{\bar{X}-\mu_0}{1/\sqrt{n}}|>z_{\alpha/2}$

三、解答题

(1) X 的可能取值为 0，1，2，3。

$P(X=0)=\frac{C_{3}^{3}}{C_{6}^{3}}=\frac{1}{20}$；

$P(X=1)=\frac{C_{3}^{1}C_{3}^{2}}{C_{6}^{3}}=\frac{9}{20}$；

$P(X=2)=\frac{C_{3}^{2}C_{3}^{1}}{C_{6}^{3}}=\frac{9}{20}$；

$P(X=3)=\frac{C_{3}^{3}}{C_{6}^{3}}=\frac{1}{20}$。

所以 X 的概率分布为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$
(2) 设 A 表示 “从乙箱中任取一件产品是次品”				

，由全概率公式：				
$P(A)=\sum_{k = 0}^{3}P(X = k) P(A	X = k)=\frac{1}{20}\times0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$。			

(1) 当0<x<1时，f_X(x)=\int_{0}^{1 - x}6xy\ dy = 3x(1 - x)^2，所以f_X(x)=\begin{cases}3x(1 - x)^2, & 0<x<1 \\ 0, & 其他\end{cases}。

当0<y<1时，f_Y(y)=\int_{0}^{1 - y}6xy\ dx = 3y(1 - y)^2，所以f_Y(y)=\begin{cases}3y(1 - y)^2, & 0<y<1 \\ 0, & 其他\end{cases}。

(2) 因为f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)，所以 X 与 Y 不相互独立。

3.

(1) 由分布函数的连续性，\lim_{x\rightarrow1^{-}}F(x)=F(1)，即\lim_{x\rightarrow1^{-}}Ax^2 = 1，解得A = 1。

(2) P\{0.3<X<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2 - 0.3^2 = 0.4。

(3) 当0<x<1时，f(x)=F^\prime(x)=2x，所以f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1 \\ 0, & 其他\end{cases}。

4.

(1) E(X)=\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta，令\bar{X}=E(X)，得\theta的矩估计量\hat{\theta}_1=\bar{X}。

(2) 似然函数L(\theta)=\prod_{i = 1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i = 1}^{n}x_i}，

取对数得\ln L(\theta)= - n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i = 1}^{n}x_i，

令\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i = 1}^{n}x_i = 0，解得\theta的极大似然估计量\hat{\theta}_2=\bar{X}。

5. 提出假设H_0:\mu = 5，H_1:\mu\neq5。

检验统计量$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{5.11 - 5}{0.3/\sqrt{9}} = 1.1$。

因为$|Z| = 1.1<z_{0.025}=1.96$，所以不拒绝原假设H_0，即在显著性水平$\alpha = 0.05$下，可以认为这批零件的平均重量为 5kg。

> （注：文档部分内容可能由 AI 生成）