《线性代数》模拟试题 02 参考答案

专业：______________ 班级：______________ 姓名：______________ 学号：______________

题号		得分	合计	总分
一	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			
	8			
	9			
	10			
二	11			
	12			
	13			
	14			
	15			
三	16			
	17			
	18			
	19			
	20			
	21			
四	22			

一、填空题：1～10 小题，每小题 2 分，共 20 分.

1. 若五元排列 $12i4j$ 的逆序数等于 3，则排列 $j4i21$ 的逆序数等于 <u>7</u> .

提示：因为 $12i4j$ 的逆序数等于 3，显然 $i=5$， $j=3$.

2. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的第 3、4 行元素代数余子式的和为 <u>-24</u> .

提示：根据行列式按行展开法则，$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$ 等于用 1、1、1、1 替代 D 中的第 3 行元素后所得的行列式，即

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 等于用 1、1、1、1 替代中的第 4 行元素后所得的行列式，即

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-24$$

因此答案为 -24.

3. 设 A 为 4 阶方阵， A^* 是 A 的伴随矩阵，若 $|A|=-2$，则 $|-A^*|=$ <u>-8</u> .

提示：因为 $|-A^*|=|A^*|=|A|^3$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，则 $A^5=$ <u>$10^4A=10^4\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \\ -4 & 20 & 10 \end{pmatrix}$</u> .

5. 求满足等式 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2+ka_3 & a_3 \\ b_1 & b_2+kb_3 & b_3 \\ c_1 & c_2+kc_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 的矩阵 $B=$ <u>$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$</u> .

<u>$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$</u> .

提示：对矩阵作第 3 列乘以 k 加到第 2 列上去的初等变换，相当于 $\boldsymbol{B}$ 为对单位矩阵作同样的列变换所得.

6. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ <u>$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$</u>.

提示：由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，因此 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解可表示为 <u>$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$</u>.

提示：$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $R(\boldsymbol{A})=2$，且齐次方程组基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，又因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，非齐次方程的特解为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

8. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 $\theta=$ <u>$\dfrac{\pi}{2}$</u>.

提示：$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

9. 若 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有 1、2、0，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 <u>$0,1,-1$</u>，$\boldsymbol{A}$ 是否可逆 <u>不可逆</u>（填写可逆或不可逆）.

10. 若 $\begin{pmatrix}a-1&1&0\\1&1&0\\0&0&a+3\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的值为 <u>$2<a<3$</u>.

二、单项选择题：11～15 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第三列的元素依次为1、3、-2、2，它们的余子式的值分别为3、-2、1、1，则$|\boldsymbol{A}|=$(A).

(A) 5　　(B) -5　　(C) -3　　(D) 3

12. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为n阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则下列结论正确的是 (B).

(A) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(B) $|\boldsymbol{B}|=0$或$|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$　　(D) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$

13. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关的充分必要条件是 (C).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$都不是零向量

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$中任意两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$中任意一个向量都不能用其余向量线性表出

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$中任意$s-1$个向量都线性无关

14. 若非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ (D).

(A) 必有无穷多解　　(B) 必有唯一解

(C) 必定无解　　(D) 上述选项均不对

15. 对于n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，以下结论正确的是 (C).

(A) 一定有n个不同的特征根

(B) 它的特征根一定是整数

(C) 存在正交矩阵$\boldsymbol{P}$， 使$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$成对角形

(D) 属于不同特征根的特征向量必线性无关，但不一定正交

三、计算题：16～21 小题，每小题 9 分，共 54 分.

16. 设$a_1a_2\cdots a_n\neq0$，计算n阶行列式$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1,\,r_3-r_1,\,\ldots,\,r_n-r_1}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+\frac{a_1}{a_2}\times c_2,\ c_1+\frac{a_1}{a_3}\times c_3,\ \dots,\ c_1+\frac{a_1}{a_n}\times c_n}\begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)a_2a_3\cdots a_n$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2a_3\cdots a_n$$

17. 给定矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\left|\boldsymbol{A}^2\right|$ 以及 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}$.

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，由于

$$\left(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{E}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1,\frac{1}{3}r_2,\frac{1}{3}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{3}r_3,\ r_1-\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

因此 $B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，$C^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$，于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}，\ \left|A^2\right|=\left|A\right|^2=3^6，\ \left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{27}A.$$

18. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$X$ 是 3 阶未知方阵，解矩阵方程 $AX=A+2X$.

由条件 $AX=A+2X$ 可知，$\left(A-2E\right)X=A$，且 $A-2E=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 由于

$$\left(A-2E \mid E \right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array}\right)$$

因此 $X=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

19. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$，求：(1) 矩阵 A 的秩，并给出 A 的一个最高阶非零子式；(2) 矩阵 A 列向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组表示.

由于

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1&5&-3\\3&-2&3&6&-1\\1&6&-4&-1&4\\3&2&0&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{7}{2}\\0&1&-\frac{3}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $R(A)=3$，可选取前 3 行，与第 1、2、4 列得到的 3 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&5\\3&-2&6\\1&6&-1\end{vmatrix}$ 为最高阶非零子式；

设列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$、$\boldsymbol{\alpha}_5$，可选取 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为极大线性无关组，且

$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{3}{4}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\frac{7}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_4$

20. 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3\\x_1-5x_2-10x_3+9x_4=a\end{cases}$. (1) a 为何值时方程组有解；(2) 当方程组有解时求出它的全部解（用解的结构表示）.

由于

$$\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\1&-5&-10&9&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-6&-12&6&a-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&4&0\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&0&a+5\end{pmatrix}$$

当 $a=-5$ 时，线性方程组有解，与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=-4x_4\\x_2=1-2x_3+x_4\end{cases}$$

非齐次方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. 其导出组为 $\begin{cases}x_1=-4x_4\\x_2=-2x_3+x_4\end{cases}$，基础解系为

$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

因此非齐次方程组的通解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$k_1$、$k_2$为任意常数.

21. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，求正交变换将该二次型化为标准形，并给出标准形（要求：写出计算步骤）.

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，对应矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&-1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，方程组为$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，系数矩阵为$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，对应方程组为

$x_1+x_2+x_3=0$，对应特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=4$时，方程组为$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，系数矩阵为$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$. 由于

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1,\, r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2,\, \frac{1}{3} \times r_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2,\, -1 \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程组为方程$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$，对应特征向量为$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，正交化

$$\beta_1 = \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \xi_2 - \frac{[\xi_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

规范化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\quad \gamma_3 = \frac{1}{\|\xi_3\|} \xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

所求正交矩阵为$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，正交变换$x = Qy$使$f$化为$f = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$.

四、证明题：本题满分 11 分.

22. (1) 设$A = (a_{ij})$为 3 阶可逆阵，且$A_{ij} = a_{ij}$（这里A_{ij}表示$|A|$中a_{ij}的代数余子式）. 证明

$\left|\boldsymbol{A}\right|=1$.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 为可逆阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 必为行满秩矩阵，$\boldsymbol{B}$ 必为列满秩矩阵.

(1) 由于

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

而$\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{*}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{2}$，$\left|\boldsymbol{A}\right|^{2}-\left|\boldsymbol{A}\right|=0$，所以$\left|\boldsymbol{A}\right|=1$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}=\boldsymbol{C}_{m\times m}$，因为$\boldsymbol{C}_{m\times m}$可逆，因此$R\left(\boldsymbol{C}_{m\times m}\right)=m$. 又因为

$$m=R\left(\boldsymbol{C}_{m\times m}\right)\leq R\left(\boldsymbol{A}\right)\leq \min\left\{m,n\right\}$$
$$m=R\left(\boldsymbol{C}_{m\times m}\right)\leq R\left(\boldsymbol{B}\right)\leq \min\left\{m,n\right\}$$

因此 $R\left(\boldsymbol{A}\right)=m$，$R\left(\boldsymbol{B}\right)=m$，从而 $\boldsymbol{A}$ 必为行满秩矩阵，$\boldsymbol{B}$ 必为列满秩矩阵.