中国石油大学（北京）2021-2022学年春季学期

《高等数学 A（II）》本科期末考试试卷

（A 卷）

考试方式（闭卷考试）

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、填空题（在下列各题的横线处填写正确答案,共 5 小题,每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________ .

2、设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，则曲线积分 $\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$ ________ .

3、设 $\sum$ 为 $x+y+z=1$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=$ ________ .

4、求过点 $(1,1,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases}x-4z=3,\\2x-y-5z=1\end{cases}$ 的直线方程为 ________ .

5、设函数 $f(x)=x^2, 0\le x<1$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\quad -\infty<x<+\infty$，其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,3,\cdots$，则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=$ ______ .

答案 1. $\underline{0}$， 2. $\underline{2\pi a\cos a}$ ， 3. $\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 、 4. $\underline{\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}}$， 5. $\underline{-\frac{1}{4}}$

二、选择题（请将下列各题的正确答案填在题后的括号内，共 5 题，每小题 3 分，共 15 分）

1、曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为(　　).

(A) $x-y+z=-2$　(B) $x+y+z=0$　(C) $x-2y+z=-3$　(D) $x-y-z=0$

2、已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则(　　).

(A) $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 都存在　　(B) $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在

(C) $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在　　(D) $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 都不存在

3、设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于(　　).

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

4、函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　).

(A) $\vec{i}$　　(B) $-\vec{i}$　　(C) $\vec{j}$　　(D) $-\vec{j}$

5、设 $u_n=(-1)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则级数(　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 都收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 收敛

答案 1.(A)　2.(B)　3.(C)　4.(A)　5.(C).

三、(本题满分 10 分)

设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法 1　$\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$，两端同时对 x 求导(注意：$z=z(x,y)$)，

$$\frac{1\cdot z-x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{y}=0\Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot(x+z)-z(1+\dfrac{\partial z}{\partial x})}{(x+z)^2}=-\frac{z^2}{(x+z)^3}$$

解法 2　令 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}$，$F_x'=\dfrac{1}{z}$，$F_z'=-\dfrac{x+z}{z^2}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{z}{x+z},\quad \ldots\ldots$$

解法 3　利用微分形式不变性，对 $\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$ 两边微分，

$$\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{y\,\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2}=0\Rightarrow \mathrm{d}z=\frac{z}{x+z}\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y(x+z)}\mathrm{d}\,y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\quad\ldots\ldots$$

四、(本题满分 10 分)

设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x\right\}$，计算 $\iint\limits_D \sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解法 1 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,\ -\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{x-x^2}\right\}$,

所以 $\iint\limits_D \sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$$\overset{\sqrt{1-x}=t}{=\!=\!=\!=} 4\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}\,t=4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{15}$$

解法 2 $\iint\limits_D \sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}\ r\,\mathrm{d}\,r=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{8}{15}$.

五、(本题满分 12 分)

求 $f(x,y)=x^2-\dfrac{y^2}{2}+1$ 在圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

解 由题设知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-y$，令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，得 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点 $(0,0)$，且 $f(0,0)=1$.

再考虑 $f(x,y)$ 在 D 的边界曲线 $x^2+y^2=1$ 上的情形.

法 1 设拉格朗日函数为 $F(x,y,\lambda)=x^2-\dfrac{y^2}{2}+1+\lambda(x^2+y^2-1)$，

解方程组 $\begin{cases}F_x'=2(1+\lambda)x=0,\\ F_y'=-y+2\lambda y=0,\\ F_\lambda'=x^2+y^2-1=0,\end{cases}$ 得 4 个驻点 $(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$，并计算其函数值为

$f(0,1)=f(0,-1)=\dfrac{1}{2}$，$f(1,0)=f(-1,0)=2$.

可见 $z=f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$ 内的最大值为 2，最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

法 2 $x^2=1-y^2$，$h(y)=2-\dfrac{3y^2}{2},\ -1\le y\le 1$，$h'(y)=-3y\triangleq 0\Rightarrow y=0$，

$h(0)=f(\pm 1,0)=2,\ h(\pm 1)=f(0,\pm 1)=\dfrac{1}{2}$，故 $z=f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$ 内的最大值为 2，最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

六、(本题满分 12 分)

设曲线积分 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$. 求 $\varphi(x)$ 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$ 的值.

解 由 $P(x,y)=xy^2$，$Q(x,y)=y\varphi(x)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得 $2xy=y\varphi'(x),\ \varphi(x)=x^2+C$，再由 $\varphi(0)=0$ 得 $C=0$，故 $\varphi(x)=x^2$，所以 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,\mathrm{d}x+yx^2\,\mathrm{d}y=\dfrac{x^2y^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$.

七、(本题满分 11 分)

设有界区域Ω由平面$x+y+z=1$与三个坐标平面围成，Σ为Ω整个表面的外侧，计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(2z+x^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 $\Sigma: x+y+z=1$,

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(2z+x^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(2x-2+2)\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}2x\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$$

八、(本题满分 10 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$的收敛域及和函数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

解 先求收敛域.由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$得收敛半径$R=1$，收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，该级数收敛；当$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$，该级数发散.故幂级数的收敛域为$(-1,1]$.

设和函数为$s(x)$，即$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$，$(-1,1)$. 显然$s(0)=0$，

对$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$的两边求导,得 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}$.

对上式从0到x积分，得 $s(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)$.

由和函数在收敛域上的连续性，$s(1)=\lim\limits_{x\to1^-}s(x)=\ln 2$.

所以$s(x)=\ln(1+x)$. $(-1,1]$；故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=s(1)=\ln 2$

九、(本题满分 5 分)

设正数u_n满足方程$x^n+nx-1=0$，(n为正整数)，证明：当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{\alpha}$收敛.

证明 由已知$u_n=\dfrac{1-u_n^{\ n}}{n}$,因为$u_n$为正数，故有$u_n<\dfrac{1}{n}\Rightarrow u_n^{\ \alpha}<\dfrac{1}{n^{\alpha}}$，

当$\alpha>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{\ \alpha}$收敛.