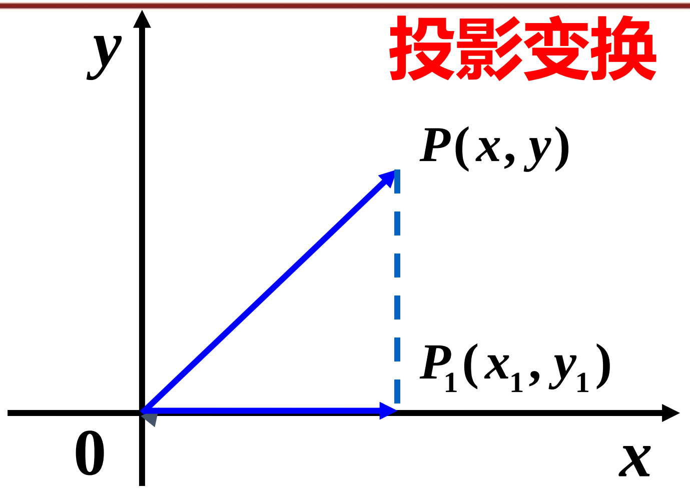
§5.5 二次型及其标准形

§5.5 二次型及其标准形

例 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

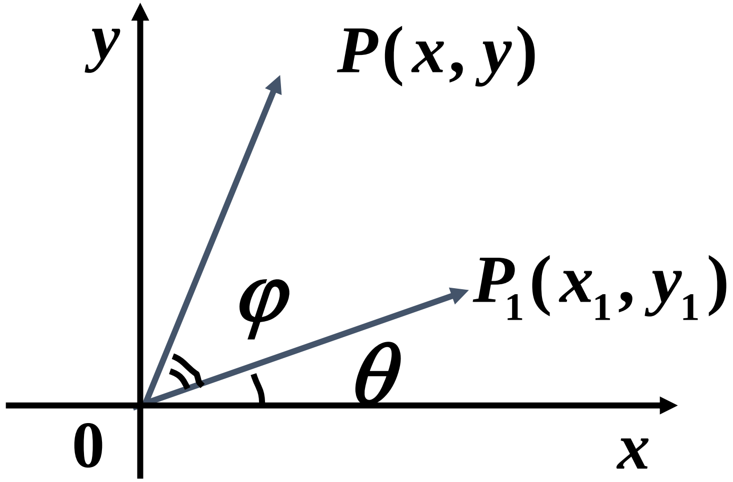
投影变换



例 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的旋转变换



§5.5 二次型及其标准形

- 解析几何中，为了便于研究二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2=1 \qquad (1)$$

的几何性质，可以选择适当的的旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

把方程（1）化为标准形 $mx'^2+ny'^2=1$.

(1) 式左边是一个二次齐次多项式，化标准形的过程即通过变量的线性变换化简一个二次齐次多项式，使它只有平方项.

一、二次型的概念

定义5.1 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

当 a_{ij} 是复数时，f 称为复二次型；

当 a_{ij} 是实数时，f 称为实二次型.

§5.5 二次型及其标准形

例如 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2$.

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$,

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$,

都为二次型 .

二、二次型的表示方法

1、用和号表示

对二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$

$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$,

取 $a_{ji}=a_{ij}$, 则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,

于是 $f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$

$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$

$+\cdots\ +a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ .$$

2、用矩阵表示

$$
\begin{aligned}
f &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
&\quad + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&= x_1\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right) \\
&\quad + x_2\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\right) \\
&\quad + \cdots + x_n\left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\right)
\end{aligned}
$$

$$
= \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n,$$

取 $a_{ji}=a_{ij}$，

$$f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x^TAx$$

二次型 f 的矩阵

则二次型可记作 $f=x^TAx$，其中 A 为对称阵．

f 叫做对称矩阵 A 的二次型；对称矩阵 A 的秩叫做二次型 f 的秩．

例 5.1 写出二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$$

的矩阵．

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

§5.5 二次型及其标准形

例 5.2 求 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2&0\\0&4&2\end{pmatrix}x$ 的秩.

解：上述二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&2&2\end{pmatrix},\quad 而\ R(A)=2.$$

三、化二次型为标准形

对二次型 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$

$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$,

我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记可逆阵 $C = \left(c_{ij}\right)$,

则 $x = Cy$.

将二次型化简为只含有平方项，即

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2 .$$

§5.5　二次型及其标准形

定义 5.2　只含有平方项的二次型

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

称为二次型的标准形（或法式）．

若标准形的系数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 只在 1, −1, 0 三个数中取值，即

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 \cdots - y_r^2$$

称为二次型的规范形．

把可逆变换 $x = Cy$ 代入二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$,

则 $f = x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T C^T ACy = y^T (C^T AC) y$.

定义5.3 设 A 和 B 为 n 阶矩阵，若有可逆阵 C，使得 $B = C^T AC$，则称矩阵 A 与 B 合同.

说明 ① 若 A 与 B 合同， 则 A 与 B 等价，故 $R(A) = R(B)$;

② 若 A 与 B 合同，且 A 为对称阵，则 B 也为对称阵；

③ 经可逆的线性变换 $x = Cy$ 后，二次型 f 的矩阵由 A 变为 $C^T AC$，但变换后二次型的秩不变.

④ 要使二次型 f 经可逆线性变换 $x=Cy$ 变成标准形，就是要使

$$f=x^TAx=(Cy)^TA(Cy)=y^T\left(C^TAC\right)y.$$

$$=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

$$=(y_1,y_1,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

也就是找可逆阵 C，使得 C^TAC 成为一个对角阵.

定理 4.3 设 A 为 n 阶对称阵，则必有正交阵 P，使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

定理 5.1 任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \ (a_{ij} = a_{ji})$，总有正交

变换 $x = Py$，使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值.

注意 f 的秩 = 其标准形中非零平方项的个数.

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤:

1、将二次型表示成矩阵形式 $f = x^T Ax$，求出 A；

2、求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

3、求出对应于特征值的线性无关的特征向量

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n;$$

4、将属于特征值 λ_i 的特征向量正交化，单位化，得 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，记 $P = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$；

5、作正交变换 $x = Py$，则得到 f 的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

例 5.2 将二次型

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

通过正交变换 $x=Py$，化为标准形．

解： 1、写出对应的二次型矩阵，并求其特征值，

二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$，

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}17-\lambda & -2 & -2\\ -2 & 14-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 14-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-9)(\lambda-18)^2$，

从而得 A 特征值 $\lambda_1=9, \lambda_2=\lambda_3=18$．

从而得 A 特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18$.

2、求特征向量；

将 $\lambda_1 = 9$ 代入 $(A - \lambda E)x = 0$，得基础解系 $\xi_1 = (1/2, 1, 1)^T$.

将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ 代入 $(A - \lambda E)x = 0$，得基础解系

$$\xi_2 = (-2, 1, 0)^T, \quad \xi_3 = (-2, 0, 1)^T.$$

3、将特征向量正交化；

$$\alpha_1 = \xi_1, \quad \alpha_2 = \xi_2, \quad \alpha_3 = \xi_3 - \frac{[\alpha_2, \xi_3]}{[\alpha_2, \alpha_2]}\alpha_2.$$

得正交向量组

$$\alpha_1 = (1/2, 1, 1)^T, \ \alpha_2 = (-2, 1, 0)^T, \ \alpha_3 = (-2/5, -4/5, 1)^T.$$

得正交向量组

$$\alpha_1=(1/2,1,1)^T,\ \alpha_2=(-2,1,0)^T,\ \alpha_3=(-2/5,-4/5,1)^T.$$

4、将正交向量组单位化，得正交矩阵 P.

令 $\eta_i=\dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|},\quad (i=1,2,3),$

得 $\eta_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\ \eta_3=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{45}\\-4/\sqrt{45}\\5/\sqrt{45}\end{pmatrix}.$

从而得 A 特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18$.

得正交矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

于是，所求正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

而且标准形为 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$.

§5.5 二次型及其标准形

定理 5.1 任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\left(a_{ij}=a_{ji}\right)$，总有正交变换 $x=Py$，使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 的特征值.

推论 5.2 任给二次型 $f=x^TAx$，总有可逆变换 $x=Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范形.

推论 5.2 任给二次型 $f = x^T Ax$，总有可逆变换 $x = Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范形．

证明： 由定理 5.1 可知，存在正交变换 $x = Py$，使得

$$f(Py) = (Py)^T A(Py) = y^T (P^T A P) y$$

$$= y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

若二次型的秩为 r，则特征值 λ_i 中恰有 r 个不为零，不妨设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 不为零，而 $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$，令

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}} z_1,\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}} z_2, \cdots,\ y_r = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}} z_r,\quad y_{r+1} = z_{r+1}, \cdots,\ y_n = z_n.$$

则

$$f = \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} z_1^2 + \cdots + \frac{\lambda_r}{|\lambda_1|} z_r^2.$$

推论 5.2 任给二次型 $f=x^TAx$，总有可逆变换 $x=Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范形．

P 可逆， $f(Py)=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$， 而 $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$，

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}z_1,\ y_2=\frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}z_2,\cdots,\ y_r=\frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}}z_r,\quad y_{r+1}=z_{r+1},\cdots,\ y_n=z_n.$$

则 $$f=\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}z_1^2+\cdots+\frac{\lambda_r}{|\lambda_1|}z_r^2.$$

故 $y=Kz$， 其中

$$K=\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix},\quad \text{而}\quad k_i=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i\le r\\ 1, & i>r\end{cases}$$

$$K=\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix},\quad \text{其中}\quad k_i=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i\le r\\ 1, & i>r\end{cases}$$

$y=Kz,$ 显然 K 可逆，于是

$$f(x)\xlongequal{x=Py} f(Py)=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_r y_r^2$$

$$\xlongequal{y=Kz} f(PKz)=\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}z_1^2+\cdots+\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}z_r^2 .$$

记 $C=PK$，则可逆变换 $x=Cz$ 把二次型化为规范形

$$f(Cz)=f(PKz)=\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}z_1^2+\cdots+\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}z_r^2 .$$

□

例 5.3　将二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

通过正交变换 $x=Py$，化为标准形．

解：　1、写出对应的二次型矩阵，并求其特征值，

二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

它的特征多项式为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$，

计算得 $|A-\lambda E|=(\lambda+3)(\lambda-1)^3$,

从而得 A 特征值 $\lambda_1=-3, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$.

2、求特征向量；

将 $\lambda_1=-3$ 代入 $(A-\lambda E)x=0$，得基础解系

$$\xi_1=(1,-1,-1,1)^T,$$

将 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_3=1$ 代入 $(A-\lambda E)x=0$，得基础解系

$$\xi_2=(1,1,0,0)^T, \xi_3=(0,0,1,1)^T, \xi_4=(1,-1,1,-1)^T.$$

3、将特征向量正交化；

易证 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 两两正交.

$$\xi_1=(1,-1,-1,1)^T,$$

$$\xi_2=(1,1,0,0)^T, \xi_3=(0,0,1,1)^T, \xi_4=(1,-1,1,-1)^T.$$

4、将正交向量组单位化，得正交矩阵 P.

令 $\eta_i=\dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$，$(i=1,2,3)$,

得 $\eta_1=\dfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$, $\eta_2=\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0\right)^T$,

$\eta_3=\left(0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)^T$, $\eta_4=(1/2,-1/2,1/2,-1/2)^T$.

从而得 A 特征值 $\lambda_1=-3, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_3=1$.

得 $\eta_1=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$, $\eta_2=\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0\right)^T$,

$\eta_3=\left(0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)^T$, $\eta_4=\left(1/2, -1/2, 1/2, -1/2\right)^T$.

于是，所求的正交变换 $x=Py$ 为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

而且标准形为 $f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

从而得 A 特征值 $\lambda_1=-3, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_3=1$.

而且标准形为 $f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

令
$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}z_1 \\ y_2=z_2 \\ y_3=z_3 \\ y_4=z_4 \end{cases},$$

得到规范形 $f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$.