高斯课堂系列课程

《线性代数》

习题答案

（微信扫一扫）

课时一　行列式（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1)　逆序数	★★★	0-3	选择、填空
2)　行列式性质及计算	必考	6-15	大题

1、逆序数

题 1：排列 2　3　6　1　4　5 的逆序数为_______

解：排列：2　3　6　1　4　5

逆序：0　0　0　3　1　1

逆序数：$t=0+0+0+3+1+1=5$

题 2：在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取_______

解：行排列：1　3　5　4　2，逆序数 $t_1=0+0+0+1+3=4$

列排列：2　1　4　3　5，逆序数 $t_2=0+1+0+1+0=2$

$t=t_1+t_2=4+2=6$ 为偶，故应取正号

2、行列式性质及计算

①互换行（列），变号

例：$\begin{vmatrix}3&1&4\\2&2&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&2&2\\3&1&4\\1&2&3\end{vmatrix}$

②提公因子

例：$\begin{vmatrix}3&1&4\\2&2&2\\1&2&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&1&4\\1&1&1\\1&2&3\end{vmatrix}$

③倍加

例：$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+2a_{11}&a_{22}+2a_{12}&a_{23}+2a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$

④拆分

例：$\begin{vmatrix}a_1&b_1+d_1&c_1\\a_2&b_2+d_2&c_2\\a_3&b_3+d_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$

⑤对应成比例，值为零

例：$\begin{vmatrix}3&1&4\\2&4&6\\1&2&3\end{vmatrix}=0$，例：$\begin{vmatrix}3&1&4\\0&0&0\\1&2&3\end{vmatrix}=0$

题 1：计算$\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=1\times1-2\times2=-3$

上三角行列式公式：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}$$

题 2：计算$D=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}$

解：$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-2r_1}\begin{vmatrix}1&-1&1\\2-2\times1&1-(-1)\times2&0-1\times2\\2&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-2\\2&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-2\\0&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=1\times3\times(-1)=-3$$

题 3：计算$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$

解：$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}\xlongequal[r_4\div5]{r_3\div2}2\times5\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&-2&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+1/2\,r_3}10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$=10\times1\times2\times4\times\frac{1}{2}=40$$

题 4：计算 $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

解：$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1,\ r_4-r_1]{r_2-r_1}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times2\times2\times2=48$

题 5：箭型 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\3&0&3&0\\4&0&0&4\end{vmatrix}$

解：$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\3&0&3&0\\4&0&0&4\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2}\begin{vmatrix}-1&2&3&4\\0&2&0&0\\3&0&3&0\\4&0&0&4\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_3}\begin{vmatrix}-4&2&3&4\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\4&0&0&4\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_4}\begin{vmatrix}-8&2&3&4\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}$

$=-8\times2\times3\times4=-192$

课时一　练习题

1. 排列3　6　2　5　1　4的逆序数为________

2. 四阶行列式 $a_{13}\quad a_{32}\quad a_{24}\quad a_{41}$ 的符号为

3. 三阶方阵 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且 $|A|=5$，又设 $|B|=(\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,\alpha_2)$，则 $|B|=$

4. 计算下列行列式的值

（1）$\begin{vmatrix}1&1&2\\5&1&4\\3&1&5\end{vmatrix}$　（2）$\begin{vmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\2&2&3&4\end{vmatrix}$　（3）$D_n=\begin{vmatrix}2&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$　（4）$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&&&\\1&&3&&\\\vdots&&&\ddots&\\1&&&&n\end{vmatrix}$

课时二　行列式（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 行列式展开	★★★★★	4−6	填空，大题
2. 范德蒙行列式	★★★	0−6	大题

1、行列式展开

1）余子式记作 M_{ij}：去掉 a_{ij} 所在的行与列　　　代数余子式　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

题 1. $D=\begin{vmatrix}1&3&-2\\2&4&1\\3&1&2\end{vmatrix}$，求 $M_{11},M_{23},A_{11},A_{23}$

解：$M_{11}=\begin{vmatrix}4&1\\1&2\end{vmatrix}=4\times2-1\times1=7$　　　$M_{23}=\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}=1\times1\text{-}3\times3=-8$

$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=7$　　　$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=8$

题 2：用行列式展开计算 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&3&2\end{vmatrix}$

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,3\ldots n)$$
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (i=1,2,3\ldots n)$$

解：按第一行展开

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&3&2\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=-1-6+15=8$$

若按第二列展开：$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&3&2\end{vmatrix}=2A_{12}+A_{22}+3A_{32}=-2\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=8$

题 3. $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$

求①$3A_{31}-5A_{32}+2A_{33}+A_{34}$　　②$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$　　③$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$

定理：某行(列)元素与另一行(列)的代数余子式乘积之和等于0

解：①$3A_{31}-5A_{32}+2A_{33}+A_{34}=0$

② $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=1\times A_{11}+1\times A_{12}+1\times A_{13}+1\times A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_2-r_1 \atop r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&-6\\0&4&2&4\\0&-6&-3&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&2&4\\0&0&-1&-6\\0&-6&-3&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\div 2}-2\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&2\\0&0&-1&-6\\0&-6&-3&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+3r_2}-2\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&2\\0&0&-1&-6\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-2\times1\times2\times(-1)\times1=4$$

③$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=(-1)^{1+1}A_{11}+(-1)^{2+1}\cdot A_{21}+(-1)^{3+1}A_{31}+(-1)^{4+1}A_{41}$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_1]{r_2+r_1 \atop r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\0&-4&2&-4\\0&8&-1&2\\0&-9&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-\frac{9}{4}r_2]{r_3+2r_2}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\0&-4&2&-4\\0&0&3&-6\\0&0&-\frac{7}{2}&7\end{vmatrix}=0$$

2、范德蒙行列式

题 1. 求 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$ 的值

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}=(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$

题 2：求 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\\1^3&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}$ 的值

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\\1^3&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)=1\times2\times3\times1\times2\times1=12$

课时二　练习题

1. 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&2\\1&1&3&0\\2&3&0&0\end{vmatrix}$ 的值，并计算 $-2M_{21}+M_{31}-3M_{41}$

3. 求 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$ 的值

课时三　矩阵

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 矩阵的三则运算	必考	3～8	填空、大题
2. 转置矩阵、伴随矩阵 单位矩阵、逆矩阵	★★★	6～8	选择、填空、大题
3. 矩阵的行列式计算	必考	3～5	选择、填空

1、矩阵的三则运算

	行列式	矩阵
形式	$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&4\\3&1&2\end{vmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\3&1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\3&1\end{pmatrix}$
区别	1) 行列式是一个数，矩阵是一个表 2) 行列式是$n\times n$阶，矩阵是$n\times m$阶（n和m可以不相等也可以相等） 3) $\lambda\|A\|$是把行列式某行（列）乘以λ；λA是把矩阵里每个元素都乘以λ 4) 行列式加减是数的运算；矩阵的加减只能是同型矩阵，对应元素的加减 5) 矩阵如果是方阵（$n=m$）的时，有行列式值	

题 1. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 求 $A+B$, $2A$

矩阵的加减
1. 同型矩阵（同行同列的矩阵）
2. 对应元素相加减

解：$A+B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&1+1&1+1\\1+1&2+1&3+1\\1+1&1+1&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&3&4\\2&2&2\end{pmatrix}$

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2&1\times2&1\times2\\1\times2&2\times2&3\times2\\1\times2&1\times2&1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&4&6\\2&2&2\end{pmatrix}$$

矩阵的数乘
每个元素均要乘以k

$$2|A|=2\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1\times2&2\times2&3\times2\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&6\\1&1&1\end{vmatrix}$$

行列式的数乘
某行或者某列乘以k

题 2. $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\\1&-3\end{pmatrix}$，求 AB，BA

前行乘后列

$A_{m\times n}\cdot B_{n\times s}=C_{m\times s}$

解：$AB=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+1\times0+0\times1&2\times3-1\times1-0\times3\\1\times1-1\times0+3\times1&1\times3+1\times1-3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\4&-5\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+3\times1&1\times1+3\times(-1)&1\times0+3\times3\\0\times2+(-1)\times1&0\times1+(-1)(-1)&0\times0+(-1)\times3\\1\times2+(-3)\times1&1\times1+(-3)\times(-1)&1\times0+(-3)\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&9\\-1&1&-3\\-1&4&-9\end{pmatrix}$$

$AB\neq BA$　$(A\pm B)^2\neq A^2\pm2AB+B^2$　$A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$

2. 转置矩阵、伴随矩阵、单位矩阵、逆矩阵

1）转置矩阵 A^{T}。（行变列，列变行。）

题：设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，求，$\alpha^{\mathrm{T}}\beta,\alpha\beta^{\mathrm{T}}$

例：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\3&1&2\end{pmatrix}$　$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&1\\3&4&2\end{pmatrix}$

$$\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1\times1+2\times0+3\times1=4$$

$$\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1&1\times0&1\times1\\2\times1&2\times0&2\times1\\3\times1&3\times0&3\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\3&0&3\end{pmatrix}$$

$\alpha^{\mathrm{T}}\beta\neq\alpha\beta^{\mathrm{T}}$

2）伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$

3）单位矩阵 E：二阶 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$　三阶 $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　$|E|=1$　$EA=AE=A$

4）逆矩阵 A^{-1}：$AB=BA=E$ 则 B 为 A 得逆矩阵，记 $B=A^{-1}$；　即：$AA^{-1}=E$

公式：$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，　可逆得充要条件 $|A|\neq0$

3. 矩阵的行列式计算

1）转置矩阵性质：A^T

①$(AB)^T=B^TA^T$　②$(A^T)^T=A$　③$(kA)^T=kA^T$　④$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

2）伴随矩阵性质：A^*

①$|A^*|=|A|^{n-1}$　②$(AB)^*=B^*A^*$　③$A^*=|A|A^{-1}$（A 可逆）　④$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

3）逆矩阵性质：A^{-1}

①$(A^{-1})^{-1}=A$　②$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$　③$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　④$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

4）矩阵的行列式（A 为方阵）

①$|A^T|=|A|$　②$|kA|=k^n|A|$　③$|AB|=|A||B|$　④$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

题 1. 设 A 为三阶矩阵，已知 $|A|=2$．求 $|3A|$, $|A^{-1}|$, $|A^*|$

解：$|3A|=3^3|A|=27\times 2=54$　$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{2}$　$|A^*|=|A|^{3-1}=2^2=4$

题 2. 设 A,B 都是 n 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2$，则 $\left|\frac{1}{3}A^*B^{-1}\right|$

解：$\left|\frac{1}{3}A^*B^{-1}\right|=\left|\frac{1}{3}A^*\right||B^{-1}|=\left(\frac{1}{3}\right)^n|A^*||B^{-1}|=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot|A|^{n-1}\cdot\frac{1}{|B|}=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot 3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

题 3. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $\left|\left(-\frac{1}{4}A\right)^{-1}+A^*\right|$

解：$\left|\left(-\frac{1}{4}A\right)^{-1}+A^*\right|=\left|-4A^{-1}+|A|A^{-1}\right|=\left|-4A^{-1}+2A^{-1}\right|=\left|-2A^{-1}\right|=(-2)^n\cdot\frac{1}{|A|}=(-2)^n\cdot\frac{1}{2}=(-1)^n\cdot 2^{n-1}$

课时三　练习题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&3&0\\0&1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 求 $AB-BA$

2. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2,|B|=3$，则 $|2A^*B^{-1}|=$

3. 设 A 为 n 阶矩阵，A^*是A 的伴随矩阵，则 $\left||A|A^*\right|=$ ____

4. 若 A,B 是两个三阶矩阵，且 $|A|=-1,|B|=2$, 求 $|2(A^TB^{-1})^2|$

课时四　初等行变换

考点	重要程度	分值	常见题型
1.初等行变换	必考	不单独考	大题
2.求逆矩阵		6-10	
3.矩阵的秩	★★★	3-6	选择、填空

1、初等行变换

①换行　②倍乘　③倍加

$$A=\begin{pmatrix}0&4&-12&2\\3&-1&-6&-2\\-1&-1&6&2\\2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-1&-1&6&2\\3&-1&-6&-2\\0&4&-12&2\\2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\3&-1&-6&-2\\0&4&-12&2\\2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\0&-4&12&4\\0&4&-12&2\\0&-4&12&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\0&-4&12&4\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 6]{r_2\div(-4)}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形
①若有全零行，则全零行位于最下方
②每个阶梯首项为主元，主元依次往右
③阶梯形不唯一

最简形
①主元为 1
②主元所在列的其他元素都为 0
③最简形是唯一

2、求逆矩阵

题 1.若 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

解：$$(A\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-1&2&-2&1&0\\0&-2&1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-1&2&-2&1&0\\0&0&-3&3&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&-1&1&0\\0&-1&2&-2&1&0\\0&0&-3&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+\frac{2}{3}r_3]{r_1+\frac{1}{3}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-3&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_3]{-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right)=(E\vdots A^{-1})$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

题 2. 若 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

口诀：
主对调，次反号，除以值

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

解：$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4$ $\quad A^{-1}=\dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

题 3. 设 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，且 $AX=A+2X$，求 X

解：$AX=A+2X \quad \Rightarrow AX-2X=A \quad \Rightarrow (A-2E)X=A$

$$(A-2E\vdots A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9\end{array}\right)\xrightarrow[-r_3]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9\end{array}\right) \qquad \Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & -8 & -6\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 12 & 9\end{pmatrix}$$

3、矩阵的秩

题 1：已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，求 A 的秩

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 即 $R(A)=2$

题 2：设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$，试求矩阵 A 的秩

解：$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & -(x-1) \\ 0 & -(x-1) & 1-x^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & -(x-1) \\ 0 & 0 & -(x+2)(x-1) \end{pmatrix}$

①当 $x\neq 1$ 且 $x\neq -2$ 时 $R(A)=3$；

②当 $x=-2$ 时，$R(A)=2$；

③当 $x=1$ 时，$R(A)=1$；

秩的性质

① $A_{m\times n}$，$R(A)\leq \min\{m,n\}$

② A 为方阵，$R(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0$，$R(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$

③ $R(A^T)=R(A)=R(kA)$，$(k\neq 0)$

④ $R(AB)\leq R(A)$，$R(AB)\leq R(B)$

课时四　练习题

1. 将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 化为最简形

2. 若 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

3. 若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $AB-E=A+B$，求 B

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$4X=B+2AX$，求 X

6. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$，已知 $R(A)=2$，求 λ 与 μ 的值

课时五　向量

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量组	必考	6～15	大题
2. 线性相关			

1. 向量组

$a=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 二维向量　　$b=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 三维向量　　$c=(2,0,1,4)^{\mathrm{T}}$ 四维向量

$a_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$　$a_2=(3,2,0)^{\mathrm{T}}$　$a_3=(3,6,8)^{\mathrm{T}}$　　向量组 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&3&3\\2&2&6\\-1&0&8\end{pmatrix}$

题 1. $\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\beta=(0,5,-9)^{\mathrm{T}}$，用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 β？

解：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\-9\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}k_1\times1+k_2\times0+k_3\times(-1)=0\\k_1\times0+k_2\times1+k_3\times0=5\\k_1\times0+k_2\times0+k_3\times1=-9\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k_1=-9\\k_2=5\\k_3=-9\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\beta=-9\alpha_1+5\alpha_2-9\alpha_3$$

2、线性相关

①存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$，使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$，则称向量组 $A:a_1,a_2,\cdots a_m$ 线性相关，否则线性无关

②若 $R(a_1,a_2,\cdots a_m)<m$，则向量线性相关；若 $R(a_1,a_2,\cdots a_m)=m$，则向量线性无关

③极大无关组

例：三维坐标中 $a_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},a_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},a_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$

任给一个三维向量 $a_4=(2,3,6)^{\mathrm{T}}$　都可以用 a_1，a_2，a_3 表示 $a_4=2a_1+3a_2+6a_3$

所以任意一组三维向量中 $a_1,a_2,a_3\cdots a_m$ 的一个极大无关组是 a_1,a_2,a_3

题 1. 已知 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(-1,2,2)^T,\alpha_3=(1,2,4)^T$，判断 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是否线性相关

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{3}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=2,\qquad \because R(A)=2<$ 向量个数 $\therefore$ 线性相关

题 2. 求向量组 $\alpha_1=(-2,1,0,3)^T,\alpha_2=(1,-3,2,4)^T,\alpha_3=(3,0,2,-1)^T,\alpha_4=(2,-2,4,6)^T$ 的秩及一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示。

解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}-2&1&3&2\\1&-3&0&-2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\-2&1&3&2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\0&-5&3&-2\\0&2&2&4\\0&13&-1&12\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\0&1&1&2\\0&-5&3&-2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&4\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&4\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

① $R(A)=3$

②极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

③ $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

例：$A=\begin{pmatrix}1&0&3&4\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

秩 $R(A)=2$

极大无关组：a_1,a_2

$a_3=3a_1+2a_2\qquad a_4=4a_1+a_2$

例：$A=\begin{pmatrix}1&0&2&0&4\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

秩 $R(A)=3$

极大无关组：a_1,a_2,a_4

$a_3=2a_1+2a_2+0\cdot a_4$

$a_5=4a_1+3a_2-8a_4$

题 3. 设 $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_1$，且向量 a_1, a_2, a_3 线性无关，证明 b_1, b_2, b_3 线性无关

证明：设存在一组不全为 0 的 k_1, k_2, k_3

使 $k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0$

$k_1(a_1 + a_2) + k_2(a_2 + a_3) + k_3(a_3 + a_1) = 0$

$(k_1 + k_3)a_1 + (k_1 + k_2)a_2 + (k_2 + k_3)a_3 = 0$

因为 a_1, a_2, a_3 线性无关

故 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$ 矛盾

故 b_1, b_2, b_3 线性无关

课时五　练习题

1. $\alpha_1 = (1,1,0)^T, \alpha_2 = (1,0,1)^T, \alpha_3 = (0,1,0)^T, \beta = (2,2,1)^T$，用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 β

2. 已知 $\alpha_1 = (1,1,2,2)^T, \alpha_2 = (1,2,1,3)^T, \alpha_3 = (1,-2,4,0)^T, \alpha_4 = (1,0,3,1)^T$，判断 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是否线性相关

3. 设有向量组，$\alpha_1 = (1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}, a_2 = (2,5,-3,-3)^{\mathrm{T}}, a_3 = (-1,-1,1,2)^{\mathrm{T}}, a_4 = (-4,-3,2,1)^{\mathrm{T}}$，
$a_5 = (6,11,-9,-9)^{\mathrm{T}}$ 求此向量组的秩及一个极大无关组，将其余向量用此极大无关组线性表示。

课时六 解方程组

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 齐次线性方程组 2. 非齐次线性方程组	必考	6~12	大题

1. 齐次线性方程组 $Ax=0$

题 1. 求下面齐次方程组得通解。

$$\begin{cases} 3x_1-6x_2-4x_3+x_4=0 \\ x_1-2x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1-4x_2-6x_3+2x_4=0 \\ x_1-2x_2+7x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

> 判定：系数矩阵 A.
>
> $R(A)=n$ 只有零解
>
> $R(A)<n$ 无穷多解且有 $n-R(A)$ 个解向量

解：写出系数矩阵 A，并进行初等行变换，直至转化为最简形矩阵。

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2<4$ 方程组有无穷多解，且有 $4-2=2$ 个解向量

由：$\begin{cases} x_1-2x_2-\frac{1}{5}x_4=0 \\ x_3-\frac{2}{5}x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2x_2+\frac{1}{5}x_4 \\ x_3=\frac{2}{5}x_4 \end{cases}$

$x_2=1, x_4=0 \quad \Rightarrow x_1=2, x_3=0$ 得解向量：$\eta_1=(2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$

$x_2=0, x_4=1 \quad \Rightarrow x_1=\frac{1}{5}, x_3=\frac{2}{5}$ 得解向量：$\eta_2=(\frac{1}{5},0,\frac{2}{5},1)^{\mathrm{T}}$

所以齐次方程通解为：$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1(2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(\frac{1}{5},0,\frac{2}{5},1)^{\mathrm{T}}$ （$k_1\ \ k_2\ \in R$）

2. 非齐次线性方程组 $Ax=\beta$

题 2. 非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=6 \\ x_1+2x_2-4x_3-4x_4=-1 \end{cases}$，问方程组是否有无穷解，如有，用其导出组基础解系表示同解。

解：写出增广矩阵 $(A:\beta)$，并进行初等行变换。

$$(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -4 & -4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

> 判定：增广矩阵 $(A:\beta)$
>
> $R(A)=R(A:\beta)=n$ 方程组有唯一解
>
> $R(A)=R(A:\beta)<n$ 方程组有无穷解
>
> $R(A)\neq R(A:\beta)$ 方程组无解

$R(A)=2, R(A:\beta)=2, \therefore R(A)=R(A:\beta)=2<4$ 所以方程组有无穷解。

①齐次通解（如题 1）

> 非其次方程通解 X
> $X=$(齐次通解+非齐次特解)

由上得 $\begin{cases} x_1+2x_3+2x_4=0 \\ x_2-3x_3-3x_4=0 \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x_1=-2x_3-2x_4 \\ x_2=3x_3+3x_4 \end{cases}$

令：$x_3=1, x_4=0$ 得 $x_2=3, x_1=-2$，解向量 $\eta_1=(-2,3,1,0)^{\mathrm{T}}$

令：$x_3=0, x_4=1$ 得 $x_2=3, x_1=-2$，解向量 $\eta_2=(-2,3,0,1)^{\mathrm{T}}$

所以：齐次 $Ax=0$ 通解为 $x=k_1(-2,3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,3,0,1)^{T}$

②非齐次特解

由上得 $x=(3,-2,0,0)^{\mathrm{T}}$

所以：非齐次方程通解 $X=k_1(-2,3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,3,0,1)^{\mathrm{T}}+(3,-2,0,0)^{\mathrm{T}}$（$k_1\ \ k_2\ \in R$）

题 3. 设线性方程 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$ 问 λ 取何值时次方程组（1）有唯一解，（2）无解，（3）有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

解：对增广矩阵 $(A\vdots\beta)$ 作初等行变换把它变成行阶梯形矩阵，有

$$(A\vdots\rho)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & \vdots 0\\1 & 1+\lambda & 1 & \vdots 3\\1 & 1 & 1+\lambda & \vdots\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \vdots\lambda\\1 & 1+\lambda & 1 & \vdots 3\\1+\lambda & 1 & 1 & \vdots 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \vdots & \lambda\\0 & \lambda & -\lambda & \vdots & 3-\lambda\\0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & \vdots & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \vdots & \lambda\\0 & \lambda & -\lambda & \vdots & 3-\lambda\\0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & \vdots & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

（1）有唯一解 $R(A)=R(A\vdots\beta)=3$ 则 $-\lambda(3+\lambda)\neq0$ $\Rightarrow\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$

（2）无解 $R(A)\neq R(A\vdots\beta)$ $\begin{cases}-\lambda(3+\lambda)=0\\(1-\lambda)(3+\lambda)\neq0\end{cases}$ $\Rightarrow\lambda=0$

（3）有无穷多解 $R(A)=R(A\vdots\beta)<3$ $\begin{cases}-\lambda(3+\lambda)=0\\(1-\lambda)(3+\lambda)=0\end{cases}$ $\Rightarrow\lambda=-3$

当 $\lambda=-3$ 时，$(A\vdots\beta)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & \vdots -3\\0 & -3 & 3 & \vdots 6\\0 & 0 & 0 & \vdots 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots -1\\0 & 1 & -1 & \vdots -2\\0 & 0 & 0 & \vdots 0\end{pmatrix}$

齐通：$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$ 令 $x_3=1,$ 则 $x_1=1,x_2=1$ 得解向量：$x=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$

非特：由上可得：$x=(-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$

所以非齐次方程通解 $X=k(1,1,1)^{\mathrm{T}}+(-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$ （$k\in R$）

课时六　练习题

1. 解线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

2. 解线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$

3. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = b \end{cases}$问，$a,b$当取何值时，方程组无解？有解？再有解时求出其通解。

课时七　特征值

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 求特征值，特征向量	必考	6～15	大题
2. 相似对角化			
3. 正交相似对角化			
4. 特征值的性质	★★★★	3～6	选择、填空

1、求特征值、特征向量

题 1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$ 的特征值

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)=0$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4$

题 2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量

> 特征值、特征向量求解步骤：
> 1. 求特征值 λ_i
> 2. 求 $(A-\lambda_i E)x=0$ 基础解系

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&-1\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(1-\lambda)=0$

故特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$

当 λ_1=1时，解 $(A-E)x=0$　　$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\end{cases}$　令 $x_3=1$，得解向量 $a_1=(0,1,1)^T$，则 $\lambda_1=1$ 对应的全部特征向量为 $k_1(0,1,1)^T\ (k_1\neq0)$

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解 $(A-2E)x=0$　　$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 $x_1=x_3$　令 $x_2=1,x_3=0$　　得解向量：$a_2=(0,1,0)^T$

令 $x_2=0,x_3=1$　　得解向量：$a_3=(1,0,1)^T$

则 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的全部特征向量为 $k_2(0,1,0)^T+k_3(1,0,1)^T$（$k_2,k_3$ 不全为零）

2、相似对角化

题 1. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 P，使 $P^{-1}AP$ 对角化

解：①特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$

②$a_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$　$a_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$　$a_3=(1,0,1)^{T}$

③$P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

解题方法：

①求特征值 λ_1，$\lambda_2\cdots\lambda_m$

②求基础解系 a_1，$a_2\cdots a_m$

③$P=(a_1,\ a_2\cdots a_m)$

使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$

题 2：矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 判断 A 能否对角化？若能，求相似变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 对角化

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(4-\lambda)=0$　得特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=4$ 时，解 $(A-\lambda E)x=0$　$A-4E=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$\Rightarrow\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}x_3 \\ x_2=0 \end{cases}$

令 $x_3=3$　得解向量 $a_1=(1,0,3)^{\mathrm{T}}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解 $(A-E)x=0$　$A-E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$\Rightarrow x_2=-x_3$

令 $x_1=1,x_3=0$　得解向量 $a_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$

令 $x_1=0,x_3=1$　得解向量 $a_3=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$

因为矩阵有三个线性无关的特征向量，所以 A 能相似对角化

$P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

判断能否对角化：
n 个特征值对应有 n 个特征向量，就可以对角化

（注：解向量是全部特征向量的一个，所以就认为是特征向量）

3、正交相似对角化

题 1：设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵

解：由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$　特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1\quad\lambda_3=-2$

对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解 $(A-E)X=0$，由 $A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $a_1=(-1,1,0)^T\quad a_2=(1,0,1)^T$

对应 $\lambda_3=-2$，解 $(A+2E)X=0$，由 $A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $a_3=(-1,-1,1)^T$

正交化：

$b_1=a_1=(-1,1,0)^T$

$$b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{[b_1,b_1]}\cdot b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T$$

$b_3=a_3=(-1,-1,1)^T$（a_3 和 a_1， a_2 已经正交，不用再正交化）

单位化：

$$e_1=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)^T,\quad e_2=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)^T,\quad e_3=\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^T$$

将 e_1,e_2,e_3 构成正交矩阵

$$P=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$

1. 正交：两个向量垂直，即乘积为 0

2. 不同特征值对应的特征向量（基础解系）一定是正交化的，所以只需要对重根对应的特征向量（基础解系）进行正交化

3. 正交化使用的公式：

施密特正交化：$a_1\ \ a_2$

$b_1=a_1$

$b_2=a_2-\dfrac{[a_2,\ b_1]}{[b_1,\ b_1]}b_1$

单位化：$e=\dfrac{b}{\|b\|}$

4、特征值的性质

①$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

②$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

③若 A 的特征值为 λ，则

矩阵	kA	A^2	$aA+bE$	A^m	A^{-1}	A^*
特征值	$k\lambda$	λ^2	$a\lambda+b$	λ^m	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$

题 1、已知 A 的三个特征值为 $1,2,3$, 则 $|A|=$ _____

解：$|A|=1\times2\times3=6$

题 2、设三阶方阵 A 的特征值为 $1,-2,3$, 则 $|A^2+A-E|=$ _____

解：$A^2+A-E\to\lambda^2+\lambda-1$

$\lambda=1$ 时 $\lambda^2+\lambda-1=1$

$\lambda=-2$ 时 $\lambda^2+\lambda-1=1$ $\Rightarrow A^2+A-E$ 的特征值为 $1,1,11$

$\lambda=3$ 时 $\lambda^2+\lambda-1=11$

故 $|A^2+A-E|=1\times1\times11=11$

课时七 练习题

1、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{pmatrix}$ ①求特征值、特征向量 ②判断 A 能否对角化，若能对角化，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$ 求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵

2、已知 A 的特征值为 $1,-1,2$, 求 $|A^{-1}+2A-E|=$ _____

课时八　二次型

考点	重要程度	分值	常见题型
3）二次型	★★	0-3	大题
4）求正交变换，化标准型	必考	8-10	
5）顺序主子式	★★★★	3-6	填空

1、二次型

题 1：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3$ 写出二次型矩阵 A

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$

题 2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2+6x_2x_3$ 写出二次型矩阵 A

解：$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&3\\0&3&0\end{pmatrix}$

2、求正交变换，化标准型

题：求一个正交变换 $x=py$，把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准型，是否正定？

解：$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$　　特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1\quad\lambda_3=-2$

对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解 $(A-E)X=0$，由 $A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $a_1=(-1,1,0)^T\quad a_2=(1,0,1)^T$

对应 $\lambda_3=-2$，解 $(A+2E)X=0$，由 $A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $a_3=(-1,-1,1)^T$

正交化：

$b_1 = a_1 = (-1,1,0)^T$

$$b_2 = a_2 - \frac{[a_2, \mathrm{b}_1]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$b_3 = a_3 = (-1,-1,1)^T$（a_3 和 a_1，a_2 已经正交，不用再正交化）

单位化：

$e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$，$e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$，$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

将 e_1, e_2, e_3 构成正交矩阵 $P = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

使得二次型换成标准型：$f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$　　不是正定

3、顺序主子式

题 4：判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是否正定

解：写出二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|2| = 2 > 1$　　$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$　　$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$　　$\therefore$ 二次型 f 正定

题 5：设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定二次型，则 t 满足________

解：写出二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} > 0$　　即 $-2 < t < 2$　　$\begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$　　即 $-2t^2 + 4 > 0$　　$\Rightarrow -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

$\therefore -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

课时八　练习题

1. 写出二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3$ 对应的矩阵 A

2. 二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$，求一个正交矩阵 P，化二次型为标准型，并判断是否正定。

3. 求二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 的标准型与规范型

4. 设 $f\left(x_1,x_2,x_3\right) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为正定二次型，则 a 的值_______