《高等数学》最新模拟试题（一）及答案

一、单项选择题（本大题共 **5** 小题，每小题 **2** 分，共 **10** 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1．设 $f(x)=\ln x$，且函数 $\varphi(x)$ 的反函数 $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$，则 $f[\varphi(x)]=$（　　）

$A.\ln\dfrac{x-2}{x+2}$　　$B.\ln\dfrac{x+2}{x-2}$　　$C.\ln\dfrac{2-x}{x+2}$　　$D.\ln\dfrac{x+2}{2-x}$

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^0\left(e^t+e^{-t}-2\right)dt}{1-\cos x}=$（　　）

A．0　　B．1　　C．-1　　D．∞

3．设 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 且函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则必有（　　）

$A.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$　　$B.\Delta y=0$　　$C.dy=0$　　$D.\Delta y=dy$

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 1\\ 3x-1, x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 x=1 处（　　）

A.不连续　　B.连续但左、右导数不存在　　C.连续但不可导　　D.　可导

5．设 $\int xf(x)dx=e^{-x^2}+C$，则 $f(x)=$（　　）

A. xe^{-x^2}　　B. $-xe^{-x^2}$　　C. $2e^{-x^2}$　　D. $-2e^{-x^2}$

二、填空题（本大题共 **10** 小题，每空 **3** 分，共 **30** 分）

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

6.设函数 f(x)在区间[0，1]上有定义，则函数 $f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域是__________.

7．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+aq+aq^2+\cdots+aq^n\right)\left(|q|<1\right)=$__________

8．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=$__________

9. 已知某产品产量为 g 时，总成本是 $C(g)=9+\dfrac{g^2}{800}$，则生产 100 件产品时的边际成本 $MC|_{g=100}=$ __

10. 函数 $f(x)=x^3+2x$ 在区间[0，1]上满足拉格朗日中值定理的点 ξ 是__________.

11. 函数 $y=2x^3-9x^2+12x-9$ 的单调减少区间是__________.

12.微分方程 $xy'-y=1+x^3$ 的通解是__________.

13.设 $\int_a^{2\ln 2}\dfrac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\dfrac{\pi}{6}$，则 $a=$__________.

14.设 $z=\dfrac{\cos^2 x}{y}$ 则 dz=__________.

15.设 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D xe^{-2y}dxdy=$__________.

三、计算题（一）（本大题共 **5** 小题，每小题 **5** 分，共 **25** 分）

16.设 $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x}$，求 dy.

17.求极限 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$

18.求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{(5x+1)\sqrt{\ln(5x+1)}}dx.$

19.计算定积分 I=$\displaystyle\int_{0}^{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}dx.$

20.设方程 $x^{2}y-2xz+e^{z}=1$ 确定隐函数 z=z(x,y)，求 z'_{x},z'_{y}。

四、计算题（二）（本大题共 **3** 小题，每小题 **7** 分，共 **21** 分）

21．要做一个容积为 v 的圆柱形容器，问此圆柱形的底面半径 r 和高 h 分别为多少时，所用材料最省？

22.计算定积分 $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\sin^{2}x dx$

23.将二次积分 $I=\displaystyle\int_{0}^{\pi}dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi}}\frac{\sin y^{2}}{y}dy$ 化为先对 x 积分的二次积分并计算其值。

五、应用题（本题 **9** 分）

24.已知曲线 $y=x^{2}$，求

（1）曲线上当 x=1 时的切线方程;

（2)求曲线 $y=x^{2}$ 与此切线及 x 轴所围成的平面图形的面积，以及其绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V_{x} .

六、证明题（本题 **5** 分）

25．证明：当 x>0 时，$x\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})>\sqrt{1+x^{2}}-1$

高等数学（一）模拟试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 **5** 小题，每小题 **2** 分，共 **10** 分）

1．答案：B

2．答案：A

3．答案：A

4．答案：C

5．答案：D

二、填空题（本大题共 **10** 小题，每空 **3** 分，共 **30** 分）

6．答案：$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

7．答案：$\frac{a}{1-q}$

8．答案：0

9．答案：$\frac{1}{4}$

10．答案：$\frac{1}{\sqrt{3}}$

11．答案：（1，2）

12．答案：$\frac{x^3}{2}-1+Cx$

13．答案：$a=\ln 2$

14．答案：$-\frac{1}{y}\left(\sin 2x dx+\frac{\cos^2 x}{y}dy\right)$

15．答案：$\frac{1}{4}\left(1-e^{-2}\right)$

三、计算题（一）（本大题共 **5** 小题，每小题 **5** 分，共 **25** 分）

16．答案：$-(\ln x+1)\left(\frac{1}{x}\right)^x dx$

17．答案：-1

18．答案：$\frac{2}{5}\sqrt{\ln(5x+1)}+C$

19. 答案：$\frac{\pi}{4}a^2$

20. 答案：$Z_x' = \frac{2xy-2z}{2x-e^z}$，$Z_y' = \frac{x^2}{2x-e^z}$

四、计算题（二）（本大题共 **3** 小题，每小题 **7** 分，共 **21** 分）

21. 答案：$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

22. 答案：$\frac{\pi^2}{4}$

23. 答案：1

五、应用题（本题 **9** 分）

24. 答案：（1） y=2x−1 （2） $\frac{1}{12}$，$\frac{\pi}{30}$

（2） 所求面积$S = \int_0^1 (\frac{y+1}{2} - \sqrt{y})dy = \left[\frac{1}{4}(y+1)^2 - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

所求体积$V_x = \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{30}$

六、证明题（本题 **5** 分）

25. 证明：

$$\because f(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + 1$$

$$\therefore f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\because x > 0$$

$$\therefore x + \sqrt{1+x^2} > 1$$

$$\therefore f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) > 0$$

故当 $x>0$ 时 $f(x)$ 单调递增，则 $f(x) > f(0)$, 即

$$x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} - 1$$

三．解答题（每小题 7 分 共 28 分）

16 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2^x+3^x+4^x}{3})^{\frac{1}{x}}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(2^x+3^x+4^x\right)-\ln 3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0} A}$

$$\lim_{x\to 0} A=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3+4^x\ln 4}{2^x+3^x+4^x}=\frac{\ln 2+\ln 3+\ln 4}{3}=\ln\sqrt[3]{24}$$

原式$==\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$

17．设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$

解 显然 $f(1)=0, f'(x)=\frac{2x\sin x^2}{x^2}=\frac{2\sin x^2}{x}$

原式$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2 dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2=\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1)$$

18．设 $w=f\left(x+2y+3z,xyz\right)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$

解 令 $u=x+2y+3z, v=xyz$，则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+f_2'yz$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f_1'}{\partial y}+zy\frac{\partial f_2'}{\partial y}+1\cdot zf_2'=\left(2f_{11}''+f_{12}''xz\right)+zy\left(2f_{21}''+f_{22}''xz\right)+zf_2'$$

$$=2f_{11}''+\left(x+2y\right)zf_{12}''+xyz^2 f_{22}''+zf_2'$$

19．求摆线 $\begin{cases}x=\vartheta-\sin\vartheta\\ y=1-\cos\vartheta\end{cases},(-\pi\le\vartheta\le\pi)$ 的弧长 L

解

$$L=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\left(x_\theta'\right)^2+\left(y_\theta'\right)^2}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\left(1-\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{2\left(1-\cos\theta\right)}d\theta=4\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8$$

四 综合题（共 18 分）

20．修建一个容积等于 $108m^3$ 的无盖长方体蓄水池，应如何选择水池长、宽、高尺寸，才使它的表面积最小，并求出它的最小表面积。

解 设水池长、宽、高分别为 $x,y,z\quad(m)$，则问题是在条件 $\varphi\left(x,y,z\right)=xyz-108$ 下，求函数 $S=xy+2yz+2zx\quad\left(x>0,y>0,z>0\right)$ 的最小值，作 Lagrange 函数

$$L\left(x,y,z\right)=xy+2yz+2zx+\lambda\left(xyz-108\right)$$

解方程组 $\begin{cases}L_x=y+2z+\lambda yz=0\\ L_y=x+2y+\lambda xz=0\\ L_z=2x+2y+\lambda xy=0\\ xyz=108\end{cases}$

得唯一可能极值点 $\left(6,6,3\right)$，由实际问题知表面积最小值存在，所以在长为 6 m，宽为 6 m，高为 3 m 时，

表面积最小,最小值为 108 m^2 .

21．21、若 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内有二阶导数，求证

（1）存在 $\xi\in\left(0,1/2\right)$，使 $f(1)-2f(1/2)+f(0)=\left[f'(\xi+1/2)-f'(\xi)\right]/2$

（2）存在 $\lambda\in\left(0,1\right)$，使 $f(1)-2f(1/2)+f(0)=f''(\lambda)/4$

证明 （1）设 $F\left(x\right)=f(x+1/2)-f(x)\quad x\in\left[0,1/2\right]$，则 $F(x)$ 在 $\left[0,1/2\right]$ 上

满足 Lagrage 中值定理条件，所以，存在 $\xi\in\left(0,1/2\right)$，使

$$\begin{aligned}F\left(1/2\right)-F(0)&=F'(\xi)/2=\left[f(1)-f(1/2)\right]-\left[f(1/2)-f(0)\right]\\&=f(1)-2f(1/2)+f(0)=\left[f'(\xi+1/2)-f'(\xi)\right]/2\end{aligned}$$

（2）由已知还有，$f'(x)$ 在 $\left(\xi,\xi+1/2\right)\subset\left(0,1\right)$ 内可导，再次用 Lagrage 中值定理

所以，存在 $\lambda\in\left(\xi,\xi+1/2\right)\subset\left(0,1\right)$，使

$$f'(\xi+1/2)-f'(\xi)=f''(\lambda)/2$$

结合（1）有

$$f(1)-2f(1/2)+f(0)=\left[f'(\xi+1/2)-f'(\xi)\right]/2=f''(\lambda)/4$$

高等数学（下）试题及答案

一、单项选择题

1．设 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处的偏导数存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}$ =________。

A、0； B、$f_x(2a,b)$； C、$f_x(a,b)$； D、$2f_x(a,b)$。

2．设曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 $(x_0,y_0,f(x_o,y_0))$ 处的切线与 x 轴正向所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$，则__________。

A、$f_x(x_0,y_0)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$； B、$f_y(x_0,y_0)=\cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$；

C、$f_x(x_0,y_0)=tg\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$； D、$f_y(x_0,y_0)=tg(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6})=\sqrt{3}$。

3．$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 发散的__________。

A、必要条件； B、充分条件； C、充要条件； D、既非充分又非必要。

4．在区域 D：$0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}$ 上的 $\iint\limits_D xy^2d\sigma$ 值为__________。

A、πR^2； B、$4\pi R^2$； C、$\dfrac{2}{3}\pi R^3$； D、0。

5．下列函数中，哪个是微分方程 $dy-2xdx=0$ 的解__________。

A、$y=2x$； B、$y=x^2$； C、$y=-2x$； D、$y=-x^2$。

二、 是非判断题（**15** 分）

1．$\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$=0，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$ 按逆时针转一周（ ）

2．如果 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ 均存在，则 $\varphi=\varphi(x,y)$ 沿任何方向的方向导数均存在（ ）

3．以 $f(x,y)$ 为面密度的平面薄片 D 的质量可表为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$。（ ）

4．$f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上连续且符合狄利克雷条件，则它的余弦级数处处收敛，且 $[0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$。（ ）

1．微分方程的通解包含了所有的解。（ ）

三、计算题（**16** 分）

1．设 $\mu=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}$。

2．已知 $yz+zx+xy=1$，确定的 $z=z(x,y)$，求 dz。

四、(10 分）求 $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dxdydz$的值，其中 Ω 为曲面 $x^2+y^2=2z$ 和平面 $z=2$ 所围成的区域。

五、(12 分）验证：$\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $(x>0)$ 内是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数。

六、(10 分）求 $\oiint\limits_\Sigma x^2dydz+z^2dxdy$，其中 Σ 为 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 所围立体边界的外侧。

七、(12 分）求微分方程 $\begin{cases}y''+y+\sin 2x=0\\ y(\pi)=1\\ y'(\pi)=1\end{cases}$ 的特解。

八、（10 分）求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数。

参考答案

一、 单项选择题（15 分，每题 3 分）

1、D； 2、C； 3、A； 4、D； 5、B。

二、是非判断题（15 分，每题 3 分）

1、×； 2、×； 3√、； 4、√； 5、×。

三、计算题（16 分）

1． $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'ye^{xy}$……4 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x[f_{11}''(-2y)+f_{12}''\cdot xe^{xy}]+ye^{xy}[f_{21}''(-2y)+f_{22}''xe^{xy}]+f_2'e^{xy}+f_2'xye^{xy}$$

$=-2xyf_{11}''+2x^2e^{xy}f_{12}''-2y^2e^{xy}f_{21}''+xye^{2xy}f_{22}''+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'$……10 分

2． $F=yz+zx+xy-1$……1 分

$$\begin{cases}F_x=z+y\\F_y=z+x\\F_z=y+x\end{cases}$$……3 分

$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{z+y}{y+x}$

$\therefore\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{z+x}{y+x}$……5 分

$\therefore dz=-\frac{1}{x+y}[(y+z)dz+(x+z)dy]$……6 分

四、(10 分) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^3dz$……6 分

$=\frac{16\pi}{3}$……10 分

五、（12 分） $P=\frac{-y}{x^2+y^2}\quad\theta=\frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial\theta}{\partial x}$……4 分

在右半平面内恒成立，因此在右半平面内$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$是某个函数的全微分……6 分

$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$……8 分

$=\int_0^y\frac{xdy}{x^2+y^2}=arctg\frac{y}{x}\Big|_0^y=arctg\frac{y}{x}$……12 分

六、（10 分） $\oiint\limits_{\Sigma}x^2dydz+z^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2z)dxdydz$……4 分

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1(r\cos\theta+z)dz$……8 分

$=\frac{2\pi}{3}$ ……10 分

七、（12 分）$\because r^2+1=0$

$\therefore r=\pm i$ ……2 分

设此方程的特解为：$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$ 代入原方程得

$-3A\cos 2x-3B\sin 2x=-\sin 2x$

$\therefore\begin{cases}A=0\\B=\frac{1}{3}\end{cases}$ ……6 分

故此方程的通解为：$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$ ……10 分

代入初始条件 $c_1=-1,c_2=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ 特解为：$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$ ……12 分

八、（10 分）$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1 \quad \therefore R=1$ ……2 分

从而收敛域为 $[-1,1)$

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

$\therefore x\sin(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\therefore (xS(x))'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1)$

$\therefore xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x) \qquad (-1\le x\le 1)$ ……8 分

$\therefore$ 当 $x\neq 0$ 时，有 $S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$

$S(0)=\lim\limits_{x\to 0}S(x)=1$

$\therefore S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x),x\in[-1,0)\cup(0,1)\\1,x=0\end{cases}$ ……10 分

三、计算题（每小题 7 分，共 49 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})$.

$$\text{解}:\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\ln x+1}=\frac{1}{2}$$

2、求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$.

解: 设$y=\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$

则$\lim\limits_{x\to 1}\ln y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x-1}\cdot\ln\frac{2x}{x+1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\frac{2x}{x+1}}{\frac{x-1}{2x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}=1$$

故原式$=e$

3、设 $y=\sin x-\cos x+\tan x-\cot x+\csc x.$求$y'$

$y'=\cos x+\sin x+sce^2x+\csc^2 x-\csc x\cdot\cot x$

4、设 $y(x)=\cos(\sin\frac{1}{x})$，求$dy$.

$dy=y'(x)dx=\frac{1}{x^2}\cdot\sin(\sin\frac{1}{x})\cdot\cos\frac{1}{x}dx$

7、求函数$y=x^5-5x^4+5x^3+1$在$[-1,2]$上的最大值,最小值

$y'=5x^2(x-1)(x-3)$

在$[-1，2]$上的驻点：$x_1=0$，$x_2=1$

而$y(0)=1$，$y(1)=2$，$y(-1)=-10$，$y(2)=-7$

$\therefore\quad y_{\max}=y(1)=2$

$\quad\quad y_{\min}=y(-1)=-10$

四、问答题（每小题 6 分，共 12 分）

1、指出$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x}$的间断点，并判别其类型.

$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}$，$x=0$与$x=1$是$f(x)$的间断点

因为：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=\infty$ 所以$x=0$是$f(x)$的无穷间断点

而$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=2$ 所以$x=1$是$f(x)$的可去间断点

2、设函数$y=\frac{x^3+4}{x^2}$讨论下列问题

(1)函数的单调增减区间及极值

(2)函数图形的凹凸及拐点

(3)函数图形的渐近线

(1) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ $y'=1-\frac{8}{x^3}$ 仅当$x=2$时，$y'=0$

当$-\infty<x<0$ $y'>0$ 函数单调增

当$0<x\le 2$ $y'<0$ 函数单调减

当$x\ge 2$ $y'>0$ 函数单调增

$x=2$时，y取得极小值 $y(2)=3$

(2) $y''=\frac{24}{x^4}>0$ 函数图形在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$都向上凹

无拐点

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=0$

函数图形有斜渐近线$y=x$

$\lim\limits_{x\to 0}y=\infty$，函数图形有铅直渐近线 $x=0$

五、应用题（本题共 9 分）

设有一块边长为a的正方形铁皮,从四个角截去同样的小方块,作成一个无盖的方盒子,问小方块的边长为多少才使盒子的容积最大?

设小方块的边长为x,则盒子的容积为

$$V=x(a-2x)^2=ax^2+4x^3-4ax,\qquad 0<x<\frac{a}{2}$$

$$V'=a^2+12x-8ax$$

唯一驻点：$x=\frac{a}{6}$

$$V''\Big|_{x=\frac{a}{6}}=(24x-8a)\Big|_{x=\frac{a}{6}}=-4a<0$$

即$x=\frac{a}{6}$为极大值点,也是最大值,所以小方块边长为 $\frac{a}{6}$时,盒子的容积最大