

## 第十四章 稳定状态模型

虽然动态过程的变化规律一般要用微分方程建立的动态模型来描述,但是对于某些实际问题,建模的主要目的并不是要寻求动态过程每个瞬时的性态,而是研究某种意义上稳定状态的特征,特别是当时间充分长以后动态过程的变化趋势。譬如在什么情况下描述过程的变量会越来越接近某些确定的数值,在什么情况下又会越来越远离这些数值而导致过程不稳定。为了分析这种稳定与不稳定的规律常常不要求解微分方程,而可以利用微分方程稳定性理论,直接研究平衡状态的稳定性就行了。

本章先介绍平衡状态与稳定性的概念,然后列举几个这方面的建模例子。

### §1 微分方程稳定性理论简介

定义1 称一个常微分方程(组)是自治的,如果方程(组)

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, t) \\ \vdots \\ f_N(x, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

中的  $F(x, t) = F(x)$ , 即在  $F$  中不含时间变量  $t$ 。

事实上,如果增补一个方程,一个非自治系统可以转化自治系统,就是说,如果定义

$$y = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}, \quad G(y) = \begin{bmatrix} F(x, t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

且引入另一个变量  $s$ , 则方程(1)与下述方程

$$\frac{dy}{ds} = G(y)$$

是等价的。这就是说自治系统的概念是相对的。下面仅考虑自治系统,这样的系统也称为动力系统。

定义2 系统

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (2)$$

的相空间是以  $(x_1, \dots, x_n)$  为坐标的空间  $R^n$ , 特别,当  $n=2$  时,称相空间为相平面。

空间  $R^n$  中的点集

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_i(t) \text{ 满足 (2), } i=1, \dots, n\}$$

称为系统(2)的轨线,所有轨线在相空间中的分布图称为相图。

定义3 相空间中满足  $F(x_0) = 0$  的点  $x_0$  称为系统(2)的奇点(或平衡点)。

奇点可以是孤立的,也可以是连续的点集。例如,系统

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax + by \\ \frac{dy(t)}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (3)$$

当  $ad - bc = 0$  时,有一个连续的奇点的集合。当  $ad - bc \neq 0$  时,  $(0,0)$  是这个系统的唯一的奇点。下面仅考虑孤立奇点。为了知道何时孤立奇点,给出下述定理:

定理 1 设  $F(x)$  是实解析函数, 且  $x_0$  系统 (2) 的奇点。若  $F(x)$  在点  $x_0$  处的 Jacobian 矩阵

$$J(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

是非奇异的, 则  $x_0$  是该系统的孤立奇点。

定义 4 设  $x_0$  是 (2) 的奇点, 称

(i)  $x_0$  是稳定的, 如果对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在一个  $\delta > 0$ , 使得如果  $|x(0) - x_0| < \delta$ , 则  $|x(t) - x_0| < \varepsilon$  对所有的  $t$  都成立。

(ii)  $x_0$  是渐近稳定的, 如果它是稳定的, 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_0| = 0$ 。

这样, 如果当系统的初始状态靠近于奇点, 其轨线对所有的时间  $t$  仍然接近它, 于是说  $x_0$  是稳定的。另一方面, 如果当  $t \rightarrow \infty$  时这些轨线趋于  $x_0$ , 则  $x_0$  是渐近稳定的。

定义 5 一个奇点不是稳定的, 则称这个奇点是不稳定的。

对于常系数齐次线性系统 (3) 有下述定理。

定理 2 设  $x = x(t)$  是系统 (3) 的通解。则

(i) 如果系统 (3) 的系数矩阵  $A$  的一切特征根的实部都是负的, 则系统 (3) 的零解是渐近稳定的。

(ii) 如果  $A$  的特征根中至少有一个根的实部是正的, 则系统 (3) 的零解是不稳定的。

(iii) 如果  $A$  的一切特征根的实部都不是正的, 但有零实部, 则系统 (3) 的零解可能是稳定的, 也可能是不稳定的, 但总不会是渐近稳定的。

定理 2 告诉我们: 系统 (3) 的零解渐近稳定的充分必要条件是  $A$  的一切特征根的实部都是负的。

对于非线性系统, 一般不可能找出其积分曲线或轨迹, 也就不可能直接导出奇点的稳定性。为克服这一困难, 在奇点附近用一个线性系统来近似这个非线性系统, 用这个近似系统的解来给出这个奇点的稳定解。

定义 6 设  $x_0$  是系统 (2) 的一个孤立奇点。称系统在  $x_0$  点几乎是线性的, 如果  $F$  在  $x_0$  的 Jacobian 矩阵是非奇异的, 即  $\det J(x_0) \neq 0$ 。

设  $F(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内连续, 并有直到二阶连续偏导数, 则由多元函数的 Taylor 公式, 可将  $F(x)$  展开成  $F(x) = Ax + O(|x|^2)$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

是一个常数矩阵, 这样得到的线性系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4)$$

称为系统 (2) 的线性近似。一开始, 人们以为总可以用线性近似系统来代替所研究的

原系统。但后来人们发现，这种看法是不对的，或至少说是不全面的，非线性系统中的许多性质，在它的线性近似中不再保留。即使象零解稳定性这样一个问题，也要在一定条件下，才可用它的线性近似系统代替原系统来研究。关于这个问题，我们有下述定理：

定理 3 如果系统 (4) 的零解是渐近稳定的，或不稳定的，则原系统的零解也是渐近稳定的或不稳定的。然而，如果系统 (4) 的零解是稳定的，则原系统的零解是不定的，即此时不能从线性化的系统来导出原系统的稳定性。

系统 (3) 在其系数矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  的行列式  $\det A \neq 0$  的条件下，可知  $(0,0)$  是

系统 (3) 的唯一的平衡点，它的稳定性由特征方程：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

的根  $\lambda$  (特征根) 决定。

定理 4 设线性系统 (3) 所对应的特征方程是

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

其中  $p = -(a+d)$ ,  $q = ad - bc$ 。设  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是它的根，则当  $q \neq 0$  时关于奇点  $O(0,0)$  有下述结论：

- (i)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ,  $O$  是稳定结点；
- (ii)  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ,  $O$  是稳定退化结点；
- (iii)  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ,  $O$  是不稳定结点；
- (iv)  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ,  $O$  是不稳定退化结点；
- (v)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ,  $O$  是不稳定鞍点；
- (vi)  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha < 0$ ,  $O$  是稳定焦点；
- (vii)  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha > 0$ ,  $O$  是不稳定焦点；
- (viii)  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha = 0$ ,  $O$  是不稳定中心。

定理 5 设非线性系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + \varphi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

中的  $\varphi$  和  $\psi$  满足条件：

- (i) 在点  $O$  的某邻域内存在连续的一阶偏导数。
- (ii) 存在常数  $\delta > 0$ , 使得

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y)}{r^{1+\delta}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi(x, y)}{r^{1+\delta}} = 0, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

又设系统 (5) 的一次近似系统 (3) 的特征方程的根没有零实部，则 (5) 式与 (3) 式的奇点  $O$  的类型相同，并有相同的稳定性或不稳定性。

## § 2 再生资源的管理和开发

渔业资源是一种再生资源，再生资源要注意适度开发，不能为了一时的高产“竭泽而渔”，应该在持续稳产的前提下追求最高产量或最优的经济效益。

这是一类可再生资源管理与开发的模型,这类模型的建立一般先考虑在没有收获的情况下资源自然增长模型,然后再考虑收获策略对资源增长情况的影响。

## 2.1 资源增长模型

考虑某种鱼的种群的动态。在建立模型之前,做如下的基本假设:

(i) 鱼群的数量本身是离散变量,谈不到可微性。但是,由于突然增加或减少的只是单一个体或少数几个个体,与全体数量相比,这种增长率是微小的。所以,可以近似地假设鱼群的数量随时间连续地,甚至是可微地变化。

(ii) 假设鱼群生活在一个稳定的环境中,即其增长率与时间无关。

(iii) 种群的增长是种群个体死亡与繁殖共同作用的结果。

(iv) 资源有限的生存环境对种群的繁衍,生长有抑制作用,而且这一作用与鱼群的数量是成正比的。

记时刻  $t$  渔场中鱼量为  $x(t)$ , 我们可以得到  $x(t)$  所满足的 Logistic 模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(1 - \frac{x}{N}) \\ x(0) = N_0 \end{cases} \quad (6)$$

其中  $r$  是固有增长率,  $N$  是环境容许的最大鱼量。由分离变量法求得方程 (6) 解为

$$x(t) = \frac{N}{1 + e^{-rt}(N - N_0)/N_0}$$

(6) 式有两个平衡点, 即  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = N$ , 其中  $x_1$  是不稳定的,  $x_2$  在正半轴内全局稳定。

## 2.2 资源开发模型

建立一个在捕捞情况下渔场鱼量遵从的方程, 分析鱼量稳定的条件, 并且在稳定的前提下, 讨论如何控制捕捞使持续产量或经济效益达到最大。

设单位时间的捕捞量与渔场鱼量  $x(t)$  成正比, 比例系数  $k$  表示单位时间捕捞率,  $k$  可以进一步分解分解为  $k = qE$ ,  $E$  称为捕捞强度, 用可以控制的参数如出海渔船数来度量;  $q$  称为捕捞系数, 表示单位强度下的捕捞率。为方便取  $q = 1$ , 于是单位时间的捕捞量为  $h(x) = Ex(t)$ 。  $h(x) = \text{常数}$ , 表示一个特定的捕捞策略, 即要求捕鱼者每天只能捕捞一定的数量。这样, 捕捞情况下渔场鱼量满足方程

$$\dot{x}(t) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex \quad (7)$$

这是一个一阶非线性方程, 且是黎卡提型的。也称为 Scheafer 模型。

希望知道渔场的稳定鱼量和保持稳定的条件, 即时间  $t$  足够长以后渔场鱼量  $x(t)$  的趋向, 并且由此确定最大持续产量。在平衡点处有  $\frac{dx}{dt} = 0$ , 方程 (7) 有两个平衡点

$x_1 = 0$ ,  $x_2 = N(1 - \frac{E}{r})$ 。显然, 它们均是方程的解。

在  $E < r$  的情况下,  $x_2$  是一正平衡点。(7) 式可改写为

$$\dot{x}(t) = -x(x - x_2) \quad (8)$$

易知, 当  $0 < x < x_2$  时,  $\dot{x}(t) > 0$ ;  $x > x_2$  时,  $\dot{x}(t) < 0$ , 即平衡解  $x_1$  是不稳定的, 而  $x_2$  是稳定平衡解。即在捕捞强度  $E < r$  的情况下, 渔场鱼量将稳定在  $x_2$  的水平, 因此

产量（单位时间的捕捞量）也将稳定在  $Ex_2$  的水平，即此时可获得持续收获量。

当然，当  $E > r$  时， $\dot{x}(t) < 0$ ，渔场鱼量将逐渐减少至  $x_1 = 0$ ，这时的捕捞其实是“竭泽而渔”，当然谈不上获得持续产量了。

如何才能做到渔资源在持续捕捞的条件下为我们提供最大的收益？从数学上说，就是在  $\dot{x}(t) = 0$  或  $rx(t)(1 - \frac{x(t)}{N}) = Ex(t)$  的条件下极大化所期望的“收益”，这里的“收益”可理解为产量  $h = Ex(t)$ ，则问题就可以数学地叙述为下述优化问题：

$$h_{\max} = \max Ex(t)$$

约束条件为  $rx(t)(1 - \frac{x(t)}{N}) - Ex(t) = 0$ 。

这里它可以归结为  $E$  的二次函数  $h(E) = NE(1 - \frac{E}{r})$  的最大值问题。简单的推导不

难得到最大持续捕捞强度为  $E_{\max} = \frac{r}{2}$ ，最大持续产量为  $h_{\max} = \frac{rN}{4}$ 。捕捞强度  $E_{\max}$  是得到最大持续捕鱼量的策略。

### 2.3 经济效益模型

当今，对鱼类资源的开发和利用已经成为人类经济活动的一部分。其目的不是追求最大的渔产量而是最大的经济收益。因而一个自然的想法就是进一步分析经济学行为对鱼类资源开发利用的影响。

如果经济效益用从捕捞所得的收入中扣除开支后的利润来衡量，并且简单地设鱼的销售单价为常数  $p$ ，单位捕捞强度（如每条出海渔船）的费用为常数  $c$ ，那么单位时间的收入  $T$  和支出  $S$  分别为

$$T = ph(x) = pEx, \quad S = cE$$

单位时间的利润为

$$R = T - S = pEx - cE$$

利润是渔民所关注的焦点。因此在制定管理策略时所期望极大化的“收益”，这时就应理解为经济利润或净收入而不是鱼的产量  $h$ 。因而所讨论的问题就变成了在使鱼量

稳定在  $x = x_2 = N(1 - \frac{E}{r})$  的约束条件下的  $R_{\max}$ 。即求

$$R(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$$

的最大值。容易求出使  $R(E)$  达到最大的捕捞强度为

$$E_{\max} = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN})$$

最大利润下的渔场稳定鱼量

$$x_{\max} = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}$$

最大利润下渔场单位时间的持续产量为

$$h_{\max} = rx_{\max}(1 - \frac{x_{\max}}{N}) = \frac{rN}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2N^2})$$

最大可持续净收益

$$R_{\max} = \frac{prN}{4} \left(1 - \frac{c}{pN}\right)^2$$

与前一模型相比较可以看出,在最大效益原则下捕捞强度和持续产量均有减少,而渔场的鱼量有所增加。并且,减少或增加的比例随着捕捞成本  $c$  的增长而变大,随着销售价格  $p$  的增长而变小,这显然是符合实际情况的。

#### 2.4 种群的相互竞争模型

有甲乙两个种群,当它们独自在一个自然环境中生存时,数量的演变均遵从 Logistic 规律。记  $x_1(t), x_2(t)$  是两个种群的数量,  $r_1, r_2$  是它们的固有增长率,  $N_1, N_2$  是它们的最大容量。

于是,对于种群甲有

$$\dot{x}(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right)$$

其中,因子  $\left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right)$  反映由于甲对有限资源的消耗导致的对它本身增长的阻滞作用,  $\frac{x_1}{N_1}$

可解释为相对  $N_1$  而言单位数量的甲消耗的食物量(设食物总量为 1)。当两个种群在同一自然环境中生存时,考察由于乙消耗同一种有限资源对甲的增长产生的影响,可以合理地因子  $\left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right)$  中再减去一项,该项与种群乙的数量  $x_2$  (相对于  $N_2$  而言)成正比,于是,种群甲增长的方程为

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad (9)$$

这里  $\sigma_1$  的意义是,单位数量乙(相对  $N_2$  而言)消耗的供养甲的食物量为单位数量甲(相对  $N_1$ ) 消耗的供养乙的食物量的  $\sigma_1$  倍,类似地,甲的存在也影响了乙的增长,种群乙的方程应该是

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right) \quad (10)$$

对  $\sigma_2$  可作相应的解释。

在两个种群的相互竞争中,  $\sigma_1, \sigma_2$  是两个关键的指标。从上面对它们的解释可知,  $\sigma_1 > 1$  表示在消耗供养甲的资源中,乙的消耗多于甲,对  $\sigma_2 > 1$  可作相应的理解。一般来说,  $\sigma_1, \sigma_2$  之间没有确定的关系,在此我们仅讨论  $\sigma_1, \sigma_2$  相互独立的情形。

目的是研究两个种群相互竞争的结局,即  $t \rightarrow \infty$  时,  $x_1(t), x_2(t)$  的趋向,不必要解方程组 (9) 和 (10),只需对它的平衡点进行稳定性分析。为此我们解代数方程

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) = 0 \\ g(x_1, x_2) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

得到四个平衡点分别为  $P_1(N_1, 0)$ ,  $P_2(0, N_2)$ ,  $P_3(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2})$ ,  $P_4(0, 0)$ 。

为分析这些点的稳定性, 需使用相空间的技巧。首先找出在  $x_1x_2$  平面上使  $\dot{x}_i(t) > 0$  或  $\dot{x}_i(t) < 0$  ( $i=1, 2$ ) 的区域。注意到, 当  $r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}) > 0$  时  $\dot{x}_1(t) > 0$ , 但要使  $x_1 > 0$  和  $\dot{x}_1(t) > 0$ , 当且仅当

$$1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} > 0, \quad x_1 > 0$$

类似地  $\dot{x}_1(t) < 0$ , 当且仅当

$$1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} < 0, \quad x_1 > 0$$

这样我们得到在  $x_1x_2$  平面中, 直线

$$\varphi = 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} = 0 \quad (12)$$

把平面划分为  $\dot{x}_1(t) > 0$  和  $\dot{x}_1(t) < 0$  两个区域。类似地, 对  $x_2$  进行分析得到

(i)  $\dot{x}_2(t) > 0$ , 当且仅当

$$1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} > 0, \quad x_2 > 0$$

(ii)  $\dot{x}_2(t) < 0$ , 当且仅当

$$1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} < 0, \quad x_2 > 0$$

(iii) 直线

$$\phi = 1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} = 0 \quad (13)$$

将  $x_1x_2$  平面划分为  $\dot{x}_2(t) > 0$  和  $\dot{x}_2(t) < 0$  两个区域。

两直线 (12) 和 (13) 之间的位置关系可以由下图的四种情况来说明。每种可能性对应于平衡点的稳定性说明如下:

(i)  $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1$ , 由图 (b) 知, 两直线将平面 ( $x_1 > 0, x_2 > 0$ ) 划分为三个区域:

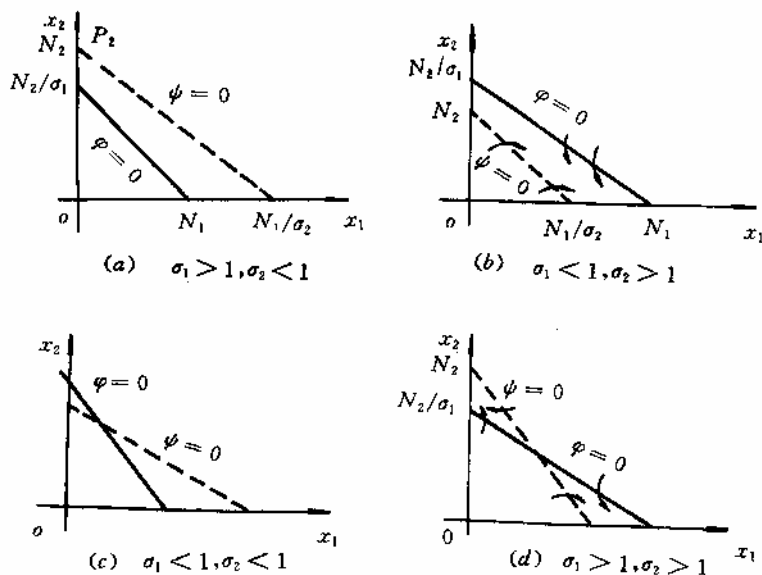
$$S_1 : \dot{x}_1(t) > 0, \dot{x}_2(t) > 0 \quad (14)$$

$$S_2 : \dot{x}_1(t) > 0, \dot{x}_2(t) < 0 \quad (15)$$

$$S_3 : \dot{x}_1(t) < 0, \dot{x}_2(t) < 0 \quad (16)$$

可以说明不论轨线从哪个区域出发,  $t \rightarrow \infty$  时都将趋向  $P_1(N_1, 0)$ 。若轨线从  $S_1$  出发, 由 (14) 式可知随着  $t$  的增加轨线向右上方运动, 必然进入  $S_2$ ; 若轨线从  $S_2$  出发, 由 (15) 式可知轨线向下方运动, 那么它或者趋向  $P_1$  点, 或者进入  $S_3$ , 但进入  $S_3$  是不可能的。因为, 如果设轨线在某时刻  $t_1$  经直线 (12) 式进入  $S_3$ , 则  $\dot{x}_1(t_1) = 0$ , 由式 (9)、

(10) 不难看出。



$$\ddot{x}_1(t_1) = -\frac{r_1 \sigma_1}{N_2} x_1(t) \dot{x}_2(t_1)$$

由式 (15)、(16) 知  $\dot{x}_2(t_1) < 0$ , 故  $\ddot{x}_1(t_1) > 0$ , 表明  $x_1(t_1)$  在  $t_1$  达到极小值, 而这是不可能的, 因为在  $S_2$  中  $\dot{x}_1(t) > 0$ , 即  $x_1(t_1)$  一直是增加的。若轨线从  $S_3$  出发, 由 (16) 式可知轨线向左下方运动, 那么它或者趋向  $P_1$  点, 或者进入  $S_2$ , 而进入  $S_2$  后, 根据上面的分析最终也将趋向  $P_1$ 。综合上述分析可以画出轨线示意图。因为直线 (12) 式上  $dx_1 = 0$ , 所以在 (12) 式上轨线方向垂直于  $x$  轴; 在 (13) 式上  $dx_2 = 0$ , 轨线方向平行于  $x_1$  轴。

(ii)  $\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$ , 类似的分析可知  $P_2(0, N)$  稳定。

(iii)  $\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$ ,  $P_3$  稳定。

(iv)  $\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1$ ,  $P_3$  不稳定 (鞍点)。

因为轨线的初始位置不同, 其走向也不同或趋于  $P_1$  或趋于  $P_2$ 。根据建模过程中  $\sigma_1, \sigma_2$  的含义, 可以说明  $P_1, P_2, P_3$  点稳定在生态学上的意义:

①  $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1$ :  $\sigma_1 < 1$  意味着在对供养甲的资源竞争中乙弱于甲,  $\sigma_2 > 1$  意味着在对供养乙的资源竞争中甲强于乙, 于是种群乙终将灭绝, 种群甲趋向最大容量, 即  $x_1(t), x_2(t)$  趋向平衡点  $P_1(N_1, 0)$ 。

②  $\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$ : 情况与①正好相反。

③  $\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$ : 因为在竞争甲的资源中乙较弱, 而在竞争乙的资源中甲较弱, 于是可以达到一个双方共存的稳定的平衡状态  $P_3$ , 这是种群竞争中很少出现的情况。

④  $\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1$ : 留作习题。

### § 3 Volterra 模型



意大利生物学家 D'Ancona 曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究，在研究过程中他无意中发现了第一次世界大战期间地中海各港口捕获的几种鱼类占捕获总量百分比的资料，从这些资料中他发现各种软骨掠肉鱼，如鲨鱼、鲑鱼等我们称之为捕食者的一些不是很理想的鱼占总渔获量的百分比，在 1914~1923 年期间，意大利阜姆港收购的捕食者所占的比例有明显的增加：

|     |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|
| 年代  | 1914 | 1915 | 1916 | 1917 | 1918 |
| 百分比 | 11.9 | 21.4 | 22.1 | 21.2 | 36.4 |
| 年代  | 1919 | 1920 | 1921 | 1922 | 1923 |
| 百分比 | 27.3 | 16.0 | 15.9 | 14.8 | 10.7 |

他知道，捕获的各种鱼的比例基本上代表了地中海渔场中各种鱼类的比例。战争中捕获量大幅度下降，当然使渔场中食用鱼（食饵）增加，以此为生的鲨鱼也随之增加。但是捕获量的下降为什么会使鲨鱼的比例增加，即对捕食者而不是对食饵有利呢？他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家 V. Volterra，希望建立一个食饵—捕食者系统的数学模型，定量地回答这个问题。

### 3.1 形成模型

为建立这样的模型，我们分别用  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  记食饵和捕食者在时刻  $t$  的数量。因为大海中鱼类的资源丰富，可以假设如果食饵独立生存则食饵将以增长率  $r_1$  按指数规律增长，即有  $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1(t)$ 。捕食者的存在使食饵的增长率降低，设降低的程度与捕食者数量成正比，于是  $x_1(t)$  满足方程

$$\dot{x}_1(t) = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2) \quad (17)$$

比例系数反映捕食者掠取食饵的能力。

捕食者离开食饵无法生存，若设它独自存在时死亡率为  $r_2$ ，即  $\dot{x}_2(t) = -r_2 x_2(t)$ ，而食饵为它提供食物的作用相当于使死亡率降低，或使之增长。设这个作用与食饵数量成正比，于是  $x_2(t)$  满足

$$\dot{x}_2(t) = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1) \quad (18)$$

比例系数  $\lambda_2$  反映食饵对捕食者的供养能力。

方程 (17) 和 (18) 是在没有人工捕获情况下自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系，是 Volterra 提出的最简单的模型。这个模型没有引入竞争项。

### 3.2 模型分析

这是一个非线性模型，不能求出其解析解，所以我们还是通过平衡点的稳定性分析，研究  $x_1(t), x_2(t)$  的变化规律。容易得到方程 (17) 和 (18) 的平衡点为

$$P_1(0,0), P_2\left(\frac{r_2}{\lambda_2}, \frac{r_1}{\lambda_1}\right) \quad (19)$$

当然，平衡解  $P_1(0,0)$  对我们来说是没有意义的。这个方程组还有一族解  $x_1(t) = C_1 e^{r_1 t}$ ， $x_2(t) = 0$  和  $x_1(t) = 0$ ， $x_2 = C_2 e^{-r_2 t}$ 。因此， $x_1$  轴和  $x_2$  轴都是方程组 (17)，(18) 的轨线。这意味着：方程 (17)、(18) 在  $t = t_0$  由第一象限  $x_1 > 0, x_2 > 0$  出发的每一个解  $x_1(t), x_2(t)$  在以后一切时间  $t \geq t_0$  都保持在第一象限内。当  $x_1, x_2 > 0$  时，方程 (17)、(18) 的轨线是一阶方程

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1(r_1 - \lambda_1 x_2)}{x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1)}$$

的解曲线。用分离变量方法解得

$$(x_1^{r_2} e^{-\lambda_2 x_1})(x_2^{r_1} e^{-\lambda_1 x_2}) = c \quad (20)$$

$c$  是任意常数。因此，方程 (17)，(18) 的轨线是由式 (20) 定义的曲线族，我们来证明这些曲线是封闭的。

**引理 1** 当  $x_1, x_2 > 0$  时，方程 (20) 定义了一组封闭曲线。

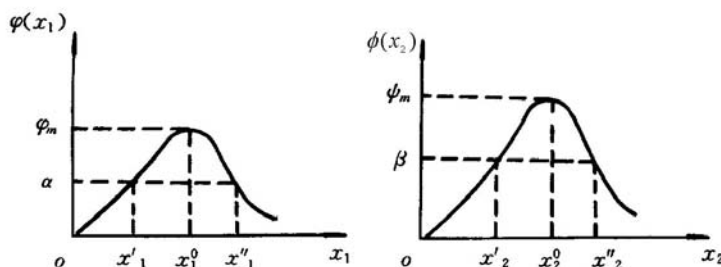
证明 我们首先来确定当  $x_1, x_2 > 0$  时函数

$$\varphi(x_1) = x_1^{r_2} e^{-\lambda_2 x_1}$$

和

$$\phi(x_2) = x_2^{r_1} e^{-\lambda_1 x_2}$$

的性状。利用微积分方法可以作出  $\varphi$  和  $\phi$  的图形。如下图所示。



若它们的极大值分别记作  $\varphi_m$  和  $\phi_m$ ，则不难确定  $x_1^0$ 、 $x_2^0$  满足

$$\varphi(x_1^0) = \varphi_m, \quad x_1^0 = \frac{r_2}{\lambda_2} \quad (21)$$

$$\phi(x_2^0) = \phi_m, \quad x_2^0 = \frac{r_1}{\lambda_1} \quad (22)$$

显然，仅当 (20) 式右端常数  $c \leq \varphi_m \phi_m$  时相轨线才有定义。

当  $c = \varphi_m \phi_m$  时， $x_1 = x_1^0$ ， $x_2 = x_2^0$ ，将式 (21) 和 (22) 与 (19) 式比较可知  $(x_1^0, x_2^0)$  正是平衡点  $P_2$ ，所以  $P_2$  是相轨线的退化点。

为了考察  $c < \varphi_m \phi_m$  时 ( $c > 0$ ) 轨线的形状，我们只需考虑  $c = \lambda \phi_m$  的情况，其中  $0 < \lambda < \varphi_m$ 。首先注意到：方程  $x_1^{r_2} e^{-\lambda_2 x_1} = \lambda$  具有一个解  $x_1 = x'_1 < x_1^0$  和另一个解  $x_1 = x''_1 > x_1^0$ 。因此，当  $x_1 < x'_1$  或  $x_1 > x''_1$  时，方程

$$\phi(x_2) = x_2^{r_1} e^{-\lambda_1 x_2} = \left( \frac{\lambda}{x_1^{r_2} e^{-\lambda_2 x_1}} \right) \phi_m$$

没有解  $x_2$ 。当  $x_1 = x'_1$  或  $x_1 = x''_1$  时，这个方程具有唯一的解  $x_2 = x_2^0$ ，而对于  $x'_1 < x_1 < x''_1$ ，则具有两个解  $x'_2(x_1)$  和  $x''_2(x_1)$ 。较小的解  $x'_2(x_1)$  总是小于  $x_2^0$ ，较大的解总是大于  $x_2^0$ 。当  $x_1$  趋于  $x'_1$  或  $x''_1$  时， $x'_2(x_1)$  和  $x''_2(x_1)$  都趋向于  $x_2^0$ 。因此，

当  $x_1$  和  $x_2$  是正数时, 由 (20) 所定义的曲线都是封闭的。而且, 这些封闭曲线中的每一条 (除  $x_1 = x_1^0$  和  $x_2 = x_2^0$  以外), 都不含 (17) 和 (18) 的任何平衡点。所以 (17) 和 (18) 的具有初始条件  $x_1(0) > 0$ ,  $x_2(0) > 0$  的所有的解  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  都是时间的周期函数。也就是说, (17) 和 (18) 的具有初始条件  $x_1(0) > 0$ ,  $x_2(0) > 0$  的每一个解  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  都具有这样的性质:

$x_1(t+T) = x_1(t)$ ,  $x_2(t+T) = x_2(t)$ , 其中  $T$  是某一正数。

D'Ancona 所用的数据实际上是捕食者的百分比在每一年中的平均值。因此, 为了把这些数据同方程组 (17) 和 (18) 的结果进行比较, 对于 (17) 和 (18) 的任何解  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , 我们必须算出  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  的“平均值”。值得注意的是, 即使还没有准确地求得  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ , 我们仍然能够算出这些平均值。

引理 2 设  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  是 (17) 和 (18) 的周期解, 其周期  $T > 0$ ,  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  的平均值定义为

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) dt$$

这时,  $\bar{x}_1 = x_1^0$ ,  $\bar{x}_2 = x_2^0$ 。换句话说,  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  的平均值是平衡解。

证明 把 (17) 的两端除以  $x_1$ , 得到  $\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1} = r_1 - \lambda_1 x_2$ , 于是

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T [r_1 - \lambda_1 x_2(t)] dt$$

由于

$$\int_0^T \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} dt = \ln x_1(T) - \ln x_1(0) = 0$$

因此,

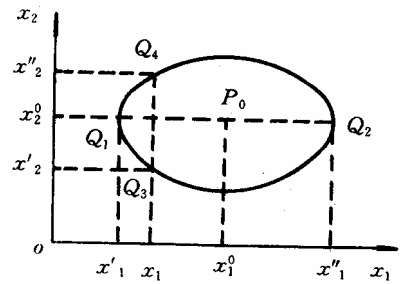
$$\frac{1}{T} \int_0^T \lambda_1 x_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T r_1 dt = r_1,$$

于是,  $\bar{x}_2 = \frac{r_1}{\lambda_1}$ 。类似地, 把 (18) 的两端除以  $T x_2(t)$ , 由 0 到  $T$  积分, 我们得到  $\bar{x}_1 = \frac{r_2}{\lambda_2}$ 。

下面, 我们考虑渔业对于上述数学模型的影响。注意到渔业使得食饵总数以速率  $\varepsilon x_1$  减少, 而使得捕食者的总数以速率  $\varepsilon x_2$  减少。常数  $\varepsilon$  反映渔业的水平; 即反映了海上的渔船数和下水的网数。因此, 真实的状态由下列修正的微分方程组来描述:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2) - \varepsilon x_1 = (r_1 - \varepsilon)x_1 - \lambda_1 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1) - \varepsilon x_2 = -(r_2 + \varepsilon)x_2 + \lambda_2 x_1 x_2 \end{cases} \quad (23)$$

这个方程组同 (17), (18) 完全一样 (当  $r_1 - \varepsilon > 0$  时), 只是其中  $r_1$  换成  $r_1 - \varepsilon$ , 而  $r_2$  换成  $r_2 + \varepsilon$ 。因此, 现在  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  的平均值是



$$\bar{x}_1 = \frac{r_2 + \varepsilon}{\lambda_2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{r_1 - \varepsilon}{\lambda_1}$$

平均说来, 中等捕鱼量 ( $\varepsilon < r_1$ ) 实际上会增加食饵的数目, 而减少捕食者的数目。相反, 捕鱼量的降低, 平均说来, 会增加捕食者的数目, 而减少食饵的数目。这个值得注意的结果称为 **Volterra** 原理, 它解释了 **D'Ancona** 的数据。

值得注意的是 **Volterra** 模型是非常粗糙的, 有兴趣的读者可以作进一步的探讨。

#### 习 题 十 四

1. 单棵树木的商品价值  $V$  是由这棵树能够生产的木材体积和质量所决定的。显然  $V = V(t)$  依赖于树木的年龄  $t$ 。假设曲线  $V(t)$  已知,  $c$  为树木砍伐成本。试给出砍伐树木 (更确切地说砍伐相同年龄的树木) 的最优年龄。如果考虑到森林轮种问题, 即一旦树木从某一处砍掉, 这块土地便可以种植新树, 假定各轮种周期具有相等的长度, 试建模讨论最优砍伐轮种的森林管理策略的问题。

2. 如果两个种群都能独立生存, 共处时又能相互提供食物, 试建立种群依存模型并讨论平衡点及稳定性, 解释稳定的意义。

3. 如果两个种群都不能独立生存, 但共处时可以相互提供食物, 试建模以讨论共处的可能性。

4. 如果在食饵—捕食者系统中, 捕食者掠夺的对象只是成年的食饵, 而未成年的食饵因体积太小免遭捕获。在适当的假设下建立这三者之间关系的模型, 求平衡点。