Дискретная математика

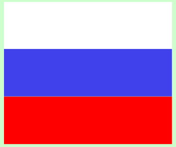
Лекция 6

Мокеев Дмитрий Борисович

Комбинаторика

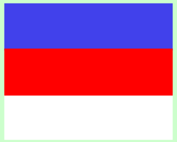
Перестановки

Государственный флаг одной страны состоит из трех цветных полос:



Переставляя полосы, можно получить другие флаги:

или



Сколько различных флагов можно получить таким образом из этих трех полос?

Перестановка элементов множества A – это последовательность, в которой каждый элемент из A встречается точно один раз.

Иначе говоря, перестановка – это расположение всех элементов множества в некотором *порядке*.

Перестановка элементов множества A – это последовательность, в которой каждый элемент из A встречается точно один раз.

Иначе говоря, перестановка – это расположение всех элементов множества в некотором *порядке*.

Пусть $A = \{1, 2, \ \ldots, n\}$.

Чему равно число перестановок из n элементов?

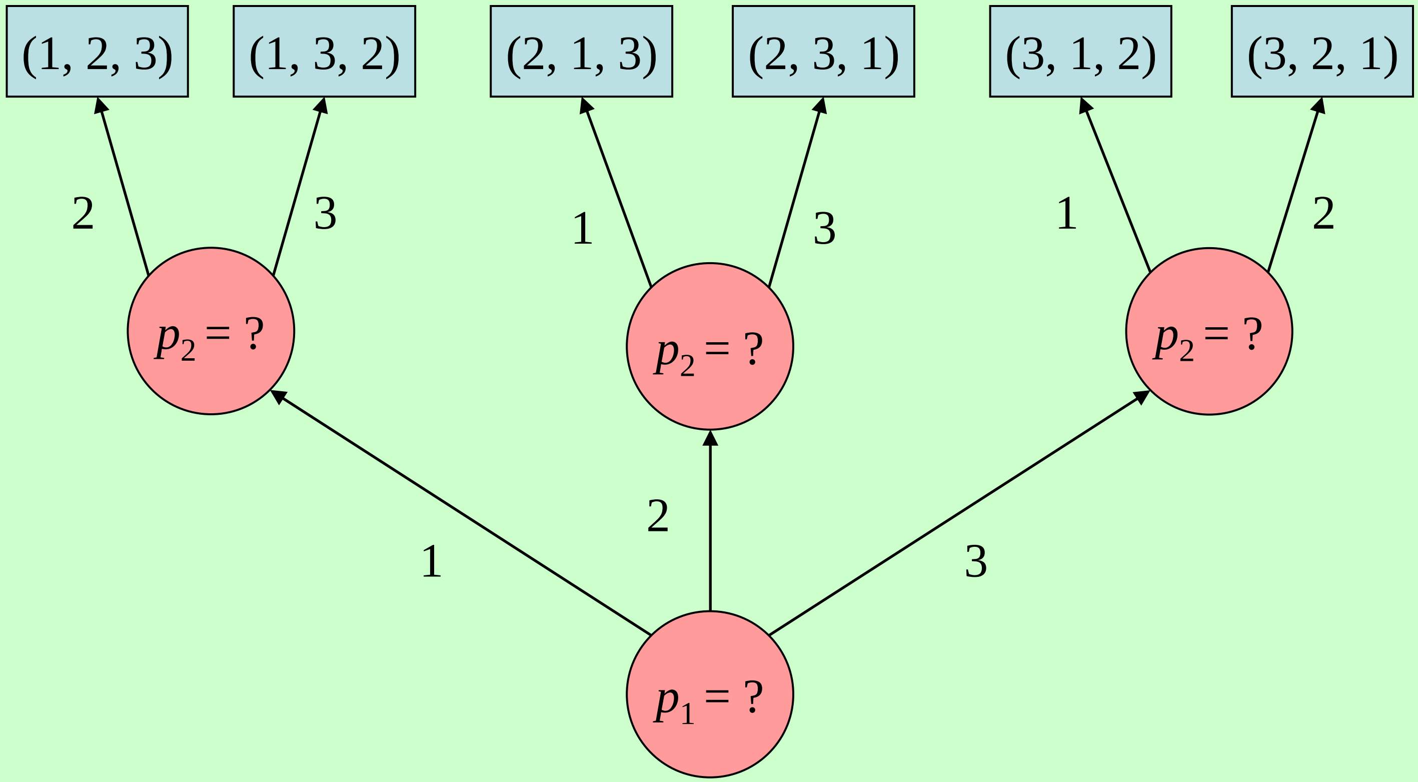
- Два элемента можно расположить в последовательность двумя способами:

(1, 2) и (2, 1)

- Для $n = 3$ имеется 6 перестановок:

(1, 2, 3)
(1, 3, 2)
(2, 1, 3)
(2, 3, 1)
(3, 1, 2)
(3, 2, 1)

Можно построить дерево решений для выбора перестановки (p_1, p_2, p_3):



Дерево решений для выбора перестановки $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ имеет n уровней.

Корень дерева (нулевой уровень) содержит вопрос: “чему равно p_1?”.

Из корня выходит n стрелок, соответствующих n возможным ответам. Они ведут в вершины первого уровня.

Каждая вершина 1-го уровня содержит вопрос: “чему равно p_2?”.

Из каждой вершины 1-го уровня выходят $n - 1$ стрелка (так как p_2 должно отличаться от p_1).

Каждая вершина уровня k содержит вопрос: "чему равно p_{k+1}?". Имеется $n-k$ возможных ответов (так как p_{k+1} должно отличаться от $p_1, \ldots, p_k$), им соответствуют $n-k$ выходящих стрелок.

После того, как на $(n-2)$-м уровне будет выбран элемент p_{n-1}, элемент p_n определяется однозначно. Вершины $(n-1)$-го уровня являются листьями дерева, каждая из них содержит некоторую перестановку.

Число перестановок равно числу листьев дерева. Посчитаем это число.

Первый уровень состоит из n вершин.

Из каждой вершины первого уровня выходят $n-1$ стрелок, значит, на втором уровне будет $n(n-1)$вершин.

На третьем уровне число вершин увеличивается в $n-2$ раз и так далее.

Принцип последовательного выбора

Пусть набор $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *образуется путем последовательного выбора элементов* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем

- *элемент* x_1 *можно выбрать* n_1 *способами;*
- *при любом* x_1 *элемент* x_2 *можно выбрать* n_2 *способами;*
- *при любых* x_1, x_2 *элемент* x_3 *можно выбрать* n_3 *способами;*

...

- *при любых* $x_1, x_2, \ldots, x_{k\text{-}1}$ *элемент* x_k *можно выбрать* n_k *способами.*

Тогда весь набор можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ *способами.*

Итог: число перестановок n элементов равно

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

Это произведение обозначается $n!$ и называется n *факториал.*

Замечание. Принято считать, что $0! = 1$

Теорема. *Число перестановок* n *элементов равно* $n!$

Размещения

Размещение из n по k (*k-размещение*) элементов множества A, где $|A| = n$ – это набор длины k, в который каждый элемент из A входит *не более* одного раза.

Например, имеется 12 размещений из 4 по 2:

(1, 2)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 2)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 3)

Число размещений из n по k обозначается $P(n, k)$.

Это число легко найти с помощью принципа последовательного выбора:

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$$

Это произведение обозначается $(n)_k$ и называется *убывающий факториал*.

Умножив и разделив правую часть на $(n-k)!$, получаем формулу:

$$P(n,k) = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетания

Нужно составить расписание группы таким образом, чтобы 3 из 5 дней (от понедельника до пятницы) группа училась удалённо. Каким числом способов можно выбрать эти дни?

Нужно выбрать 3-подмножество из множества мощности 5. Имеется 10 таких подмножеств (дни недели занумерованы числами 1,…,5):

{1, 2, 3}	{1, 4, 5}
{1, 2, 4}	{2, 3, 4}
{1, 2, 5}	{2, 3, 5}
{1, 3, 4}	{2, 4, 5}
{1, 3, 5}	{3, 4, 5}

Сочетание из n по k (*k-сочетание*) – это подмножество мощности k множества мощности n.

Все сочетания из 4 элементов $\{a, b, c, d\}$:

$k =$	0	1	2	3	4
	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c,d\}$
		$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,d\}$	
		$\{c\}$	$\{a,d\}$	$\{a,c,d\}$	
		$\{d\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c,d\}$	
			$\{b,d\}$		
			$\{c,d\}$		
	1	4	6	4	1

размещение – упорядоченная совокупность, набор.

сочетание – неупорядоченная совокупность, множество.

Любое k-размещение является перестановкой какого-либо k-сочетания. → Из одного k-сочетания можно получить $k!$ различных k- размещений:

(1,2,3)
(1,3,2)
(2,1,3)
(2,3,1)
(3,1,2)
(3,2,1)

{1,2,3}

3-сочетание

3-размещения

Число сочетаний из n по k обозначаются через $\binom{n}{k}$ или C_n^k.

Элементы каждого k-сочетания можно упорядочить $k!$ способами, получатся $k!$ различных k-размещений. Поэтому

$$\binom{n}{k} \cdot k! = P(n,k)$$

Так как $P(n,k) = (n)_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$,

получается формула для числа сочетаний:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Некоторые простые свойства чисел $\binom{n}{k}$

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$

2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n;$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$

4) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1};$

5) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$

Все эти тождества легко доказываются с помощью факториальной формулы. Докажем, например, последнее.

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-k)!}\cdot\frac{n}{k\cdot(n-k)}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Это тождество можно использовать для построения таблицы чисел $\binom{n}{k}$, известной как *треугольник Паскаля*.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

. . . .

Крайние элементы (левый и правый) в каждой строке равны 1. Каждый из остальных элементов вычисляется как сумма двух расположенных над ним элементов предшествующей строки:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$$\binom{n}{k}$$

Треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

. . . .

Бинарные слова с заданным распределением

Задача. Сколько имеется слов длины n в алфавите $\{0,1\}$, в которых символ 1 встречается ровно k раз?

Решение. Представим, что слово вписано в таблицу из n клеток, как в примере (здесь $n = 8, k = 3$):

0	1	1	0	0	0	1	0

1 2 3 4 5 6 7 8

Клетки пронумерованы $1, 2, \ldots, n$.

Чтобы указать слово с k единицами, достаточно выбрать k клеток из n.
Иначе говоря, нужно выбрать подмножество $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (в примере выбирается подмножество $\{2, 3, 7\}$).

Это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами.

Теорема. *Число слов длины n в алфавите $\{0,1\}$, содержащих ровно k единиц, равно $\binom{n}{k}$.*

Биномиальная теорема

Хорошо известны формулы: $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Нетрудно также вывести

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Если выписать коэффициенты в правых частях:

1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1

то оказывается, что эти строки совпадают со строками треугольника Паскаля. Случайно ли это? Конечно, нет!

Для вывода тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
мы раскрываем скобки в выражении $(a + b)(a + b)$.
Если при этом не группировать сомножители и слагаемые, получим

$$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb.$$

Слагаемые в правой части – это всевозможные *слова* длины 2 в алфавите $\{a, b\}$.

После группирования получаем доказываемое тождество.

Аналогично для $n = 3$:

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + abb +$$
$$+ baa + bab + bba + bbb.$$

В правой части получились все слова длины 3 в алфавите $\{a, b\}$.

Это верно для любого n: если раскрыть скобки в выражении

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b),$$

не группируя сомножителей и слагаемых, то получится сумма, в которой слагаемыми являются все слова длины n.

Это можно доказать индукцией по n.

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b).$$

Если сначала раскрыть скобки в $(a+b)^{n-1}$, то, по предположению индукции, получатся все слова длины $n-1$.
Когда мы умножим эту сумму на $(a+b)$ и раскроем скобки, из каждого слова длины $n-1$ получатся два слова длины n добавлением букв a и b.

Ясно, что получатся все слова длины n.

Группируя сомножители, получим слагаемые вида

$$a^k b^{n-k}, \text{ где } k \in \{0,1,2,\dots,n\}$$

Такое слагаемое входит в сумму столько раз, сколько имеется слов, в которые буква a входит k раз, а буква b – $n-k$ раз, то есть $\binom{n}{k}$.

Следовательно, после группирования слагаемых получим сумму

$$\binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}a^nb^0$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

Теорема (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

для любого натурального n *и вещественных* a, b.

Числа $\binom{n}{k}$ называют *биномиальными коэффициентами*.

Из биномиальной теоремы можно вывести дополнительные свойства биномиальных коэффициентов.

<u>Примеры:</u>

- При $a = b = 1$ получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

- Пусть $a = -1, b = 1$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$