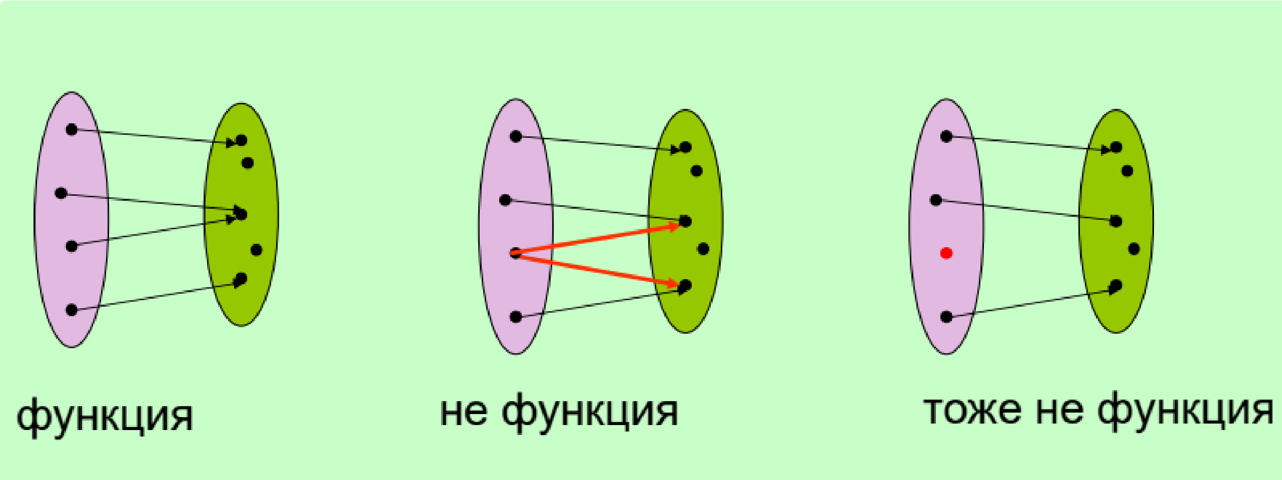
集合与关系

函数

集合 A 和 B 之间的关系 f 称为函数（映射），如果

$$\forall x \in A \ \exists! \ y \in B, xfy.$$



函数

如果 f 是函数，那么通常用 $y = f(x)$ 代替 xfy 。

这里 x 是自变量，它取自集合 A 中的值。

y 是函数值，它是集合 B 中满足 xfy 的那个（唯一的）元素。

我们说 f 是从 A 到 B 的函数，记作

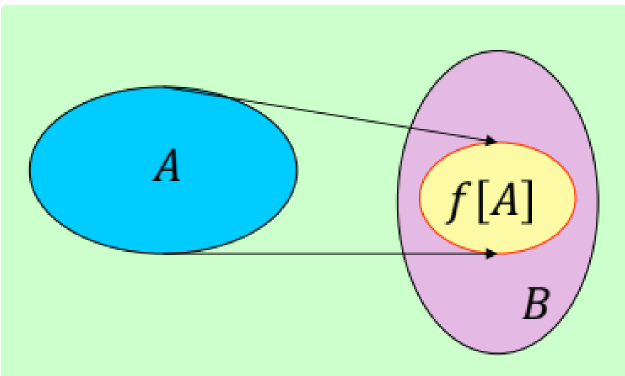
$$f : A \to B.$$

A – 函数 f 的定义域。

B – 函数 f 的值域。

如果 $X \subseteq A$，那么 $f[X] = \{y \in B : \exists x \in X, y = f(x)\}$ – 集合 X 的像。

$f(A)$ – 函数的值域。



基数幂

设 A 和 B 是集合。

基数幂 B^A – 是一种运算，其结果是所有函数 $f : A \to B$ 的集合。

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

记号 $f \in B^A$ 和 $f : A \to B$ 是等价的。

函数的性质

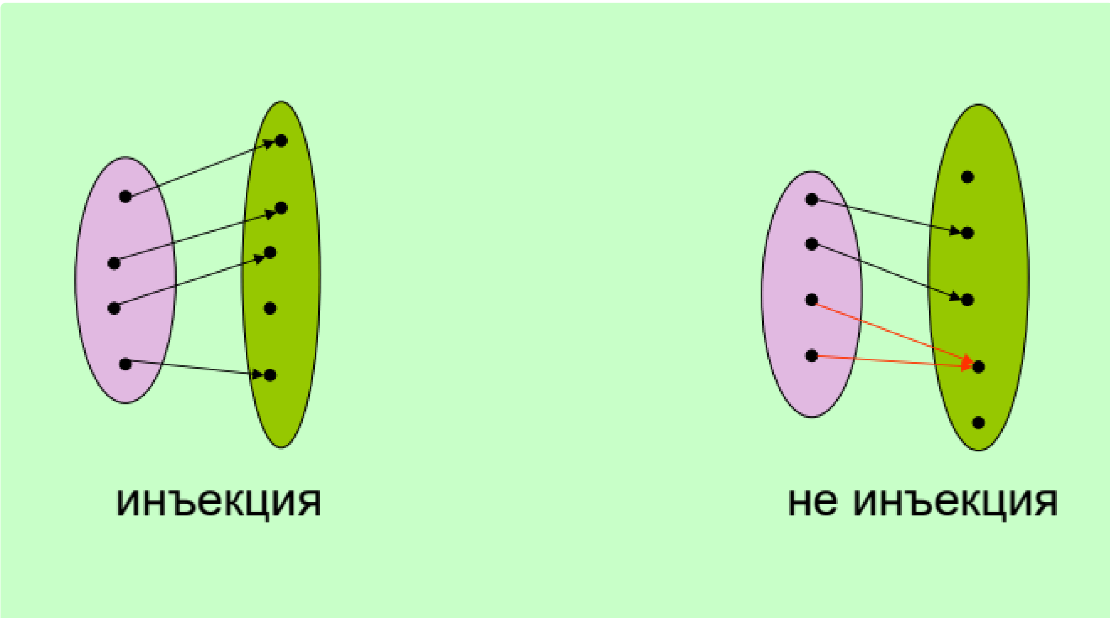
1.单射性

函数 $f : A \to B$ 称为单射（单射函数），如果

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$$

反之：

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$$

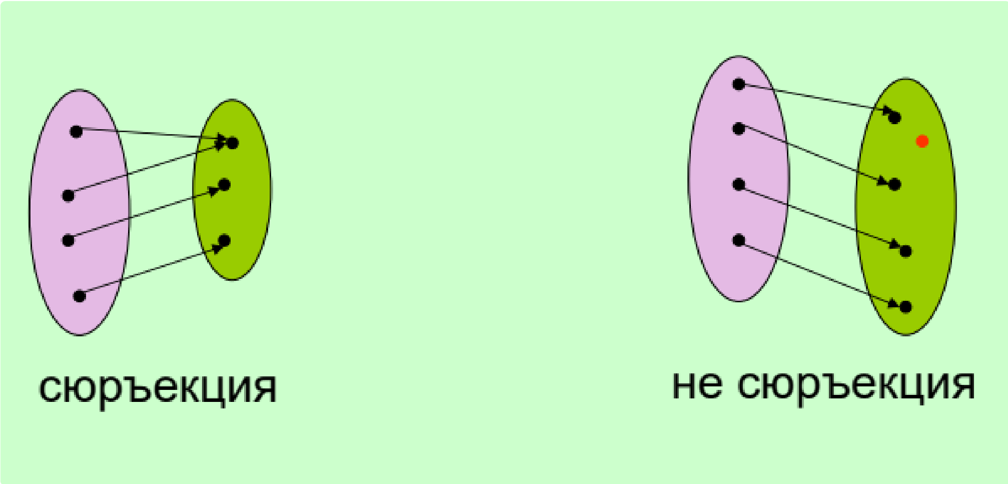


2.满射性

函数 $f : A \to B$ 是满射（满射函数），如果

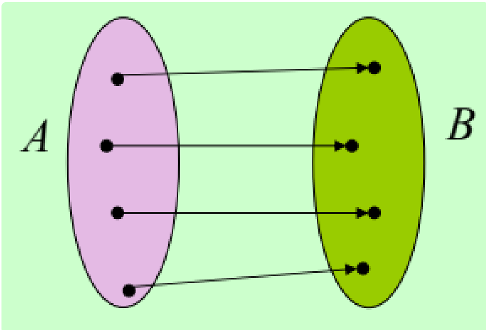
$$\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$$

换句话说， f 是满射，如果 $B = f(A)$



3.双射性

函数 $f: A \to B$ 称为双射（双射函数），如果它既是单射又是满射。

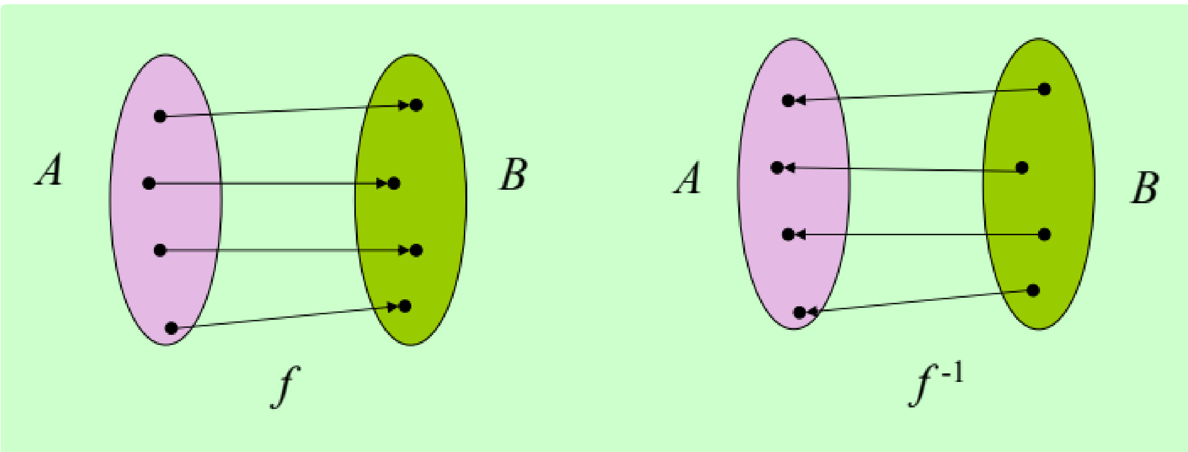


双射

双射也称为一 一对应或 1–1–соответствием。

如果 $f: A \to B$ 是双射，那么逆关系 f^{-1} 也是一个函数

$$f^{-1}: B \to A, \forall x \in A: f^{-1}(f(x)) = x.$$



集合的等势性

我们说集合 A 和 B 是等势的，记作 $A \sim B$，

如果存在双射 $f: A \to B$。

性质：

1. $A \sim A$ $\qquad (A \overset{id_A}{\sim} A)$
2. $A \sim B \to B \sim A$ $\qquad (A \overset{f}{\sim} B \to B \overset{f^{-1}}{\sim} A)$
3. $A \sim B \land B \sim C \to A \sim C$ $\qquad (A \overset{f}{\sim} B \land B \overset{g}{\sim} C \to A \overset{g \circ f}{\sim} C)$

更多性质：

- $A \sim B \to A \times C \sim B \times C, A^C \sim B^C, C^A \sim C^B$
  - 设 $A \overset{f}{\sim} B$

    则 $A \times C \overset{g}{\sim} B \times C$，其中 $g(x, y) = (f(x), y)$
  - 设 $A \overset{\varphi}{\sim} B$， $f \in A^C$ （即 $f : C \to A$ ），

    则 $A^C \overset{\psi}{\sim} B^C$，其中 $\psi(f) = \varphi \circ f$ 。
  - 设 $A \overset{\varphi}{\sim} B$， $f \in C^A$ （即 $f : A \to C$ ），

    则 $C^A \overset{\psi}{\sim} C^B$，其中 $\psi(f) = f \circ \varphi^{-1}$ 。
- $A \times B \sim B \times A$
  - $A \times B \overset{f}{\sim} B \times A$，其中 $f(x, y) = (y, x)$
- $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$
- $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$
- $\left(C^B\right)^A \sim C^{A \times B}$

例子

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

证明：

考虑函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{如果 } x \text{ 为偶数} \\ \frac{1-x}{2}, & \text{如果 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

由于函数 f 存在逆函数

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 2y, & \text{如果 } y > 0 \\ 1 - 2y, & \text{如果 } y \leq 0 \end{cases}$$

所以它是双射。

因此，$\mathbb{N} \overset{f}{\sim} \mathbb{Z}$。

15. 例子

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

证明：

考虑函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x, y) = 2^{x-1}(2y - 1)$

证明 f 是单射：

设 $f(x_1, y_1) = 2^{x_1-1}(2y_1 - 1) = 2^{x_2-1}(2y_2 - 1) = f(x_2, y_2)$

假设 $x_1 \neq x_2$。不失一般性，

假设 $x_1 > x_2$。将等式除以 2^{x_2-1}

$2^{x_1-x_2}(2y_1 - 1) = 2y_2 - 1$

等式左边是偶数，右边是奇数。

因此 $x_1 = x_2$，但此时 $2y_1 - 1 = 2y_2 - 1 \to y_1 = y_2 \to (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

例子

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

证明：

考虑函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x, y) = 2^{x-1}(2y - 1)$

证明 f 是满射：

设 $n \in \mathbb{N}$。证明 $\exists (x, y) : f(x, y) = n$

- n 为奇数 $\to 2^{x-1} = 1 \to x = 1, y = \frac{n+1}{2}$。
- n 为偶数，取最大的 k 使得

  $2^k | n$。则 $n = 2^k s$，其中 $s \in \mathbb{N}$ 为奇数，否则 k 不是

  最大的 $\to x = k + 1, y = \frac{s+1}{2}$

因此，$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \overset{f}{\sim} \mathbb{N}$

集合的嵌入

我们说集合 A 可嵌入到集合 B 中，记作 $A \lesssim B$，如果存在单射 $f : A \to B$。

性质：

0. $A \subseteq B \to A \lesssim B$ $\qquad A \overset{id_A}{\lesssim} B$

1. $A \lesssim B \rightarrow \exists C \subseteq B : A \sim C$ $\qquad A \overset{f}{\lesssim} B \rightarrow C = f[A]$

2. $A \lesssim A$ $\qquad A \overset{id_A}{\lesssim} A$

3. $A \lesssim B \wedge B \lesssim C \leftrightarrow A \lesssim C$ $\qquad A \overset{f}{\lesssim} B \wedge B \overset{g}{\lesssim} C \rightarrow A \overset{g \circ f}{\lesssim} C$

4. $A \sim B \rightarrow A \lesssim B \wedge B \lesssim A$ $\qquad A \overset{f}{\sim} B \rightarrow A \overset{f}{\lesssim} B \wedge B \overset{f^{-1}}{\lesssim} A$

5.**施罗德–伯恩斯坦定理** (Schröder–Bernstein theorem)

$A \lesssim B \wedge B \lesssim A \rightarrow A \sim B$

例子： $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

证明：

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N} \lesssim \mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{Q}$ 可唯一表示为

不可约分数 $\frac{m}{n}$，其中 $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ 。

考虑函数 $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}^3$

$f(x) = (|m| + 1, n, s(m))$，其中

$s(m) = \begin{cases} 1, \text{如果 } m > 0 \\ 2, \text{如果 } m < 0 \end{cases}$.

f –单射，即 $\mathbb{Q} \overset{f}{\lesssim} \mathbb{N}^3$ 。

根据等势性质和前面的例子：

$\mathbb{N}^3 = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ 。

因此， $\mathbb{N}^3 \overset{g}{\sim} \mathbb{N}$

所以， $\mathbb{Q} \overset{f}{\lesssim} \mathbb{N}^3 \overset{g}{\lesssim} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \overset{g \circ f}{\lesssim} \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

基数

集合 A 的基数（势） $|A|$ ——概括集合元素数量概念的集合特征。

$|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$ 。

$|A| \leq |B| \Leftrightarrow A \lesssim B$ 。

$|A| < |B| \Leftrightarrow A \lnsim B \Leftrightarrow A \lesssim B \wedge A \nsim B$ 。

记 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。

集合 A 是有限的，如果 $\exists n \in \mathbb{N}_0, A \sim \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 。

在这种情况下，我们认为 $|A| = n$ 。

集合 A 是无限的，如果 $\exists B : B \subsetneq A \wedge B \sim A$

定理

如果 A 和 B 是有限集合， $|A| = |B|$ ，则

任何单射 $f : A \to B$ 都是双射。

证明.

设 $f : A \to B$ 是单射，但不是满射。则

$f[A] \subsetneq B$ 且，由于 A 和 B 是有限的， $|f[A]| < |B|$ 。

但 $f : A \to f(A)$ 是双射，即 $A \overset{f}{\sim} f[A] \nsim B$ ，这

与 $|A| = |B|$ 的陈述矛盾。

因此， f 是满射，所以是双射。

可数集

集合 A 称为可数的，如果 $A \sim \mathbb{N}$ （即

$|A| = |\mathbb{N}|$ ），否则它是不可数的。

如果 $A \overset{f}{\sim} \mathbb{N}$ ，则集合 A 的元素可以排列成无限序列

$f(1), f(2), f(3), \ldots$ 。

反之：如果存在这样一个序列，包含集合 A 的每个元素恰好一次，则 A

是可数的。

例子

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可数的。
- $\mathbb{Q}$ 是可数的。
- $\mathbb{N}_0$ 是可数的。$\mathbb{N}_0 \overset{f}{\sim} \mathbb{N}$ ，其中 $f(x) = x + 1$ 。
- $\mathbb{Z}$ 是可数的。

  所有整数可以排列成

  序列：

  $0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots$ 。
- $\mathbb{A}$ – 代数数集 – 是可数的。

定理

如果 A 是可数的且 $A \lesssim B$ ，则 B 是无限的。

证明

设 B 是有限的，则 $\exists n \in \mathbb{N}_0 : B \sim \underline{n}$ 。

则： $\underline{n+1} \lesssim \mathbb{N} \sim A \lesssim B \sim \underline{n} \Rightarrow \underline{n+1} \lesssim \underline{n}$ 。但 $\underline{n} \subsetneq \underline{n+1} \to \underline{n} \lnsim \underline{n+1}$ 。矛盾。

定理

如果 A 是可数的且 $B \lesssim A$ ，则 B 是有限的或

可数的。

$|\mathbb{N}|$ 用符号 $\aleph_0$ （"aleph-null"）表示。

即 $\aleph_0$ 是任何可数集合的基数。

任何无限集合的势 $\geq \aleph_0$

可数集的性质

- 有限或可数个可数集的并集是可数的；

$$|A_1| = \cdots = |A_n| = \aleph_0 \Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \aleph_0$$

- 有限个可数集的直积是可数的；

$$|A_1| = \cdots = |A_n| = \aleph_0 \Rightarrow |A_1 \times \cdots \times A_n| = \aleph_0$$

- 可数集的所有有限子集的集合是可数的。

定理：实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数的

我们将证明 $\mathbb{R}$ 的子集，区间 $[0,1]$ ，是不可数的。

假设 $\mathbb{N} \overset{f}{\sim} [0,1]$ 。

$[0,1]$ 中的每个实数都可以表示为无限小数。

设 $f(n) = 0.x_1^n x_2^n x_3^n \ldots$ 。

对每个 $n = 1, 2, \ldots$ ，选择一个十进制数字 $y_n \neq x_n^n$ 。

那么 $0.y_1 y_2 y_3 \ldots$ 是一个实数，不同于序列 $f(1), f(2), \ldots$ 中的任何元素。

连续统

连续统是实数集的基数（势）。 $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$

如果一个集合的势等于 $\mathfrak{c}$ ，则称该集合为连续统势集合。

性质：

- $\mathfrak{c} > \aleph_0$
- $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$ ，即如果 $|A| = \aleph_0$ ，那么 $|2^A| = \mathfrak{c}$ 。
- $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

连续统假设

也称为希尔伯特第一问题。

连续统集合的任何无限子集要么是可数的，要么是连续统势的。

（G. 康托，1877）

换句话说，该假设认为连续统的势是大于可数集势的最小基数，

在可数集和连续统之间不存在"中间"基数。

康托定理

康托定理：对任意集合 A ， $|A| < |2^A|$ 。

证明：

定义映射 $f : A \to 2^A$ ，对每个 $x \in A$ ， $f(x) = \{x\}$ ，

这个映射是单射。

因此， $|A| \le |2^A|$ 。

证明不存在从 A 到 2^A 的双射

假设存在双射 $f : A \to 2^A$ 。

考虑集合 $M = \{x \in A : x \notin f(x)\}$

因为 f 是双射，所以存在元素 $m \in A$ ，使得 $f(m) = M$ 。

$$m \in M \text{ 还是 } m \notin M\,?$$

$m \notin M \Rightarrow m \notin f(m) \Rightarrow m \in \{x \in A : x \notin f(x)\} \Rightarrow m \in M$

同样， $m \in M \Rightarrow \cdots \Rightarrow m \notin M$ 。

矛盾。

一般关系

除了二元关系，我们还定义一般关系 —— 考虑多个（超过两个）

对象之间的联系。

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是集合。这些集合之间的 n 元（ n 目）

关系是 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的任意子集。

例子

设 A 是城市集合,

B 是交通工具集合。

我们可以定义以下关系 $R \subseteq A \times A \times B$：

$(x, y, z) \in R$ 当且仅当可以通过 z 从 x 到达 y 。

(莫斯科, 下诺夫哥罗德, 飞机) $\in R$

(下诺夫哥罗德, 里约热内卢, 滑板车) $\notin R$

例子

设 M 是平面上所有点的集合。

我们可以在 M^4 上定义以下关系 R：

$(x, y, z, u) \in R$ 当且仅当点 x 位于三角形 yzu 内部。

$(a, b, c, d) \notin R$

$(b, a, c, d) \in R$

$(b, c, d, a) \in R$