07 组合数学：划分、重复组合与容斥原理

具有指定规格的划分

设 $\binom{n}{k}$ 表示大小为 n 的集合中大小为 k 的子集的数量。

$\binom{n}{k}$ 也可以被视为将大小为 n 的集合划分为两部分的划分数，其中第一部分包含 k 个元素，第二部分包含 $n-k$ 个元素。

现在让我们考虑任意数量部分的划分。

设 A 是大小为 n 的集合，$k_1, k_2, ..., k_s \in \mathbb{N}_0$ 且 $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$ 。

划分 $A = P_1 \sqcup P_2 \sqcup ... \sqcup P_s$ 称为具有规格 $(k_1, k_2, ..., k_s)$ 的划分，如果

$|P_1| = k_1$ ，$|P_2| = k_2$ ，...，$|P_s| = k_s$ 。

让我们计算这样的划分的数量。

应用连续选择原理。

集合 P_1 可以通过 $\binom{n}{k_1}$ 种方式选择。

当选择了 P_1 后，剩下 $n-k_1$ 个元素，集合 P_2 可以通过 $\binom{n-k_1}{k_2}$ 种方式选择。

当选择了 P_1 和 P_2 后，剩下 $n-k_1-k_2$ 个元素，集合 P_3 可以通过 $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ 种方式选择。

...

当选择了 $P_1, P_2, ..., P_{s-1}$ 后，集合 P_s 被唯一确定 — 它由剩余的 $k_s = n - k_1 - k_2 - ... - k_{s-1}$ 个元素组成。

所有划分 $(P_1 \sqcup P_2 \sqcup ... \sqcup P_s)$ 可以通过

$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot ... \cdot \binom{k_{s-1}+k_s}{k_{s-1}} \cdot \binom{k_s}{k_s}$

种方式选择。应用阶乘公式，我们得到：

$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \cdot ... \cdot \frac{(k_{s-1}+k_s)!}{k_{s-1}!k_s!} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!...k_{s-1}!k_s!}$$

这个数被称为多项式系数，记作

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_s} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}$$

具有指定字母分布的词

设 $A = \{a_1, a_2, ..., a_s\}$ 是字母表，$n \in \mathbb{N}$ ，$k_1, k_2, ..., k_s \in \mathbb{N}_0$ 且 $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$ 。

问题：在字母表 A 中，有多少个长度为 n 的词，其中字母 a_1 出现 k_1 次，字母 a_2 出现 k_2 次，...，字母 a_s 出现 k_s 次?

解答：和二元情况一样，我们认为词被写入具有 n 个编号单元格的表格中。

要指定具有给定字母分布的词，我们必须为字母 a_1 选择 k_1 个单元格，为字母 a_2 选择 k_2 个单元格，...，为字母 a_s 选择 k_s 个单元格。

这等价于将所有单元格的集合 $\{1, 2, ..., n\}$ 划分为具有规格 $(k_1, k_2, ..., k_s)$ 的 s 个部分。

定理：在字母表 $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$ 中，长度为 n 的词中，字母 a_1 出现 k_1 次，字母 a_2 出现 k_2 次，...，字母 a_s 出现 k_s 次的词的数量等于 $\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_s}$ 。

多项式定理

多项式定理是牛顿二项式定理的推广。它断言：

$$(a_1 + a_2 + ... + a_s)^n = \sum_{k_1+k_2+...+k_s=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_s} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_s^{k_s}$$

这里的求和是对所有满足对每个 i 都有 $0 \leqslant k_i \leqslant n$ 且 $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$ 的组合 $(k_1, k_2, ..., k_s)$ 进行的。

这个定理可以用与二项式定理相同的方法证明。

例子：

$$(a+b+c)^3 = \binom{3}{0,0,3}c^3 + \binom{3}{0,1,2}bc^2 + \binom{3}{0,2,1}b^2c + \binom{3}{0,3,0}b^3 + \binom{3}{1,0,2}ac^2 + \binom{3}{1,1,1}abc + \binom{3}{1,2,0}ab^2 + \binom{3}{2,0,1}a^2c + \binom{3}{2,1,0}a^2b + \binom{3}{3,0,0}a^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

重复组合

重复组合是由给定集合的元素组成的多重集。

多重集的大小是元素出现的总次数。例如，多重集 $\{a, a, b, b, b, b, c, c, c\}$ 的大小等于 9。

重复组合的例子

从三个元素 a，b，c 可以构成 10 个大小为 3 的多重集：

$\{a, a, a\}$ $\{a, c, c\}$

$\{a, a, b\}$ $\{b, b, b\}$

$\{a, a, c\}$ $\{b, b, c\}$

$\{a, b, b\}$ $\{b, c, c\}$

$\{a, b, c\}$ $\{c, c, c\}$

计数问题与二进制编码

设 A 是大小为 n 的集合。

问题：由集合 A 的元素构成的大小为 k 的多重集有多少个?

解答：

设 $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ 。一个多重集可以由数列 $(k_1,k_2,...,k_n)$ 表示，其中 k_i 是元素 a_i 出现的次数， $i=1,2,...,n$ （注意 $k_1+k_2+...+k_n=k$ ）。

将每个多重集对应到一个二进制词。这个词由 n 组零组成，组之间用 1 分隔（分隔符的数量为 $n-1$ ）。

- 第一组包含 k_1 个零；
- 第二组包含 k_2 个零；

...

- 最后一组（第 n 组）包含 k_n 个零。

例如，设 $k=9$ ， $n=5$ 。$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 。

多重集	二进制词
$\{a_1,a_1,a_1,a_1,a_2,a_2,a_4,a_4,a_4\}$	0000100110001

一般情况下，我们得到一个包含 k 个零和 $n-1$ 个一的词。

每个具有这些参数的二进制词都对应一个多重集。

因此，在所有大小为 k 的多重集和所有长度为 $n+k-1$ 且恰好包含 k 个零的二进制词之间存在双射。

这样的词有 $\binom{n+k-1}{k}=\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ 个。

应用等价原理，我们得到：

定理：由大小为 n 的集合的元素构成的大小为 k 的多重集的数量等于

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

容斥原理

加法规则：对于任意两个不相交的有限集合 A 和 B ，有

$$|A\cup B|=|A|+|B|$$

如果 $A\cap B\neq\varnothing$ ，则这个等式不成立，但我们可以轻易修正它。

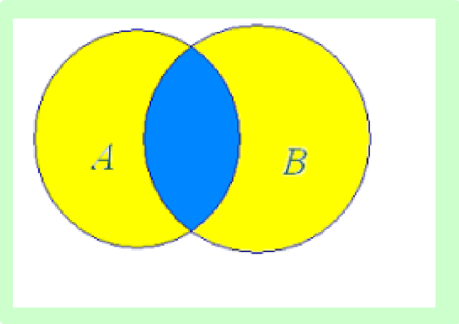
集合 $A\cap B$ 中的元素在和式 $|A|+|B|$ 中被计数两次。为了得到正确的值，需要减去 $|A\cap B|$ ：

对任意有限集合 A 和 B 都有：

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

我们先包含（include） A 和 B ，

然后排除（exclude） $A\cap B$ 。



三个集合的情况

现在考虑三个集合的情况。如何计算它们并集的大小?

如果我们写出 $|A|+|B|+|C|$ ，某些元素会被计数两次或三次。排除所有成对的交集是否正确?

让我们考虑下面的等式：

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

这个等式是否正确? 让我们验证：

如果元素 x 恰好属于一个集合，比如说 $x\in A$ 且 $x\notin B\cup C$ ，那么 x 被计数一次。

如果 x 恰好属于两个集合，比如说 $x\in A\cap B$ 且 $x\notin C$ ，那么 x 被计数 $1+1-1=1$ 次。

如果 x 属于所有三个集合，那么 x 被计数 $1+1+1-1-1-1=0$ 次，即 x 没有被计数。

因此，这个等式并不总是正确的。

要修正它，我们需要包含 $A\cap B\cap C$ 中的元素。得到等式：

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

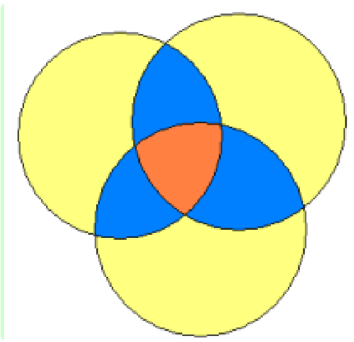
让我们验证：

$x\in$ 黄色区域 $\rightarrow$ x 被计数一次。

$x\in$ 蓝色区域 $\rightarrow$ x 被计数 $1+1-1=1$ 次。

$x\in$ 橙色区域 $\rightarrow$ x 被计数 $1+1+1-1-1-1+1=1$ 次。

这个等式对任意集合 A ， B ， C 都成立。



四个集合的情况

我们可以写出类似的四个集合的等式：

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| -$$

$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| +$$

$$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| -$$

$$-|A \cap B \cap C \cap D|$$

并用类似的推理证明它。

注意：

- 右边包含所有可能的从集合族 $\{A, B, C, D\}$ 中取出的交集；
- 奇数个集合的交集前有正号；
- 偶数个集合的交集前有负号。

一般化的容斥原理

让我们给出并证明一般形式的容斥原理。

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是有限集合。

我们称这些集合中任意 k 个集合的交集为 k –交集。

定理：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot S_i$$

其中 S_k 是所有 k –交集的大小之和。

容斥原理的证明

设 $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ 。

令 $S(x)$ 表示元素 x 在和式 $S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^n S_n$ 中的总贡献。

我们将证明对任何 $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ，都有 $S(x) = 1$ 。

设 x 恰好属于 m 个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 。

此时：

- 有 $\binom{m}{1}$ 个包含 x 的 1–交集；
- 有 $\binom{m}{2}$ 个包含 x 的 2–交集；
- 有 $\binom{m}{3}$ 个包含 x 的 3–交集；

...

一般地，对任意 $i = 1, 2, \ldots, m$ ，恰好有 $\binom{m}{i}$ 个包含 x 的 i –交集，而对 $i > m$ 则没有这样的交集。

因此，

$$S(x) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$$

依据牛顿二项式定理的一个推论：

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} + \ldots + (-1)^{m}\binom{m}{m} = 0$$

所以

$$S(x) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1$$

错排

称集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的一个置换 $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 为错排，如果对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$ 都有 $p_i \neq i$ 。

换句话说，在错排中没有任何元素停留在原位置，即没有不动点。

对三个元素的所有置换中有两个错排：

(1, 2, 3)
(1, 3, 2)
(2, 1, 3)
(2, 3, 1)
(3, 1, 2)
(3, 2, 1)

问题： n 个元素有多少个错排?

令这个数为 d_n 。

解答：应用容斥原理。

令 A_i 表示所有满足元素 i 固定的置换的集合： $p_i = i$ 。

则 $d_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ 。

例如： $n = 4$ ， $i = 2$ 时，

$$A_2 = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1)\}.$$

集合 A_i 的 k –交集是所有至少有 k 个固定点的置换的集合。

如果一个置换固定了给定的 k 个元素，那么这个置换由剩余 $n - k$ 个元素的置换决定。这样的置换恰好有 $(n-k)!$ 个。

不同的 k –交集的数量等于从 n 个集合中选择 k 个集合的方式数，即 $\binom{n}{k}$ 。

因此，在容斥原理公式中，和 S_k 包含 $\binom{n}{k}$ 项，每一项都等于 $(n-k)!$ 。所以，

$S_k = (n-k)! \cdot \binom{n}{k} = (n-k)! \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!}$

因此，

$$\begin{aligned} d_n &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

（这里需要提醒，根据定义， $0! = 1$ ）

集合的划分

如何计算将一个 n 元集合划分成若干部分的方法数?

在回答这个问题之前，需要先明确一些细节。

1. 部分的顺序是否重要? 例如，划分

> $\{1,2,3,4,5\} = \{1,3\} \sqcup \{5\} \sqcup \{2,4\}$
>
> 和
>
> $\{1,2,3,4,5\} = \{2,4\} \sqcup \{1,3\} \sqcup \{5\}$
>
> 是否被视为不同的划分?

如果"是"，我们称之为有**序划分**，否则称为**无序划分**。

1. 空集是否可以作为划分的一部分?

让我们先考虑允许空部分的有序划分。

问题：将大小为 m 的集合划分成 n 个部分（允许空部分）的方法有多少种?

解答：设 $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ 是被划分的集合。通过依次选择 $a_1, a_2, ..., a_m$ 的归属部分可以确定一个划分。对于每个元素都有 n 种选择。应用乘法原理，得到这样的划分数为：

$$n^m$$

现在，我们禁止空部分。

问题：将大小为 m 的集合划分成 n 个非空部分的有序划分的数量是多少?

解答：应用容斥原理。

设 $P_1, P_2, ..., P_n$ 是划分的部分，其中可能包含空集。令 A_i 表示所有满足 $P_i = \varnothing$ 的划分的集合。

则所求数量为

$$n^m - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| \text{ 。}$$

这些集合的 k –交集是所有至少有 k 个空部分的划分的集合。划分如果有某些固定的 k 个空部分，则由所有 m 个元素在剩余的 $n-k$ 个部分之间的分配来确定。这样的划分有 $(n-k)^m$ 种。

因此，在容斥原理公式中，和 S_k 包含 $\binom{n}{k}$ 项，每一项都等于 $(n-k)^m$ ，所以有：

$$S_k = (n-k)^m \binom{n}{k}$$

因此，将大小为 m 的集合划分成 n 个非空部分的有序划分的数量等于：

$$\begin{aligned}
&n^m - (n-1)^m \binom{n}{1} + (n-2)^m \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n (n-n)^m \binom{n}{n} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

定理：将大小为 m 的集合划分成 n 个非空部分的有序划分的数量为：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m \binom{n}{k}$$

每个有 n 个非空部分的无序划分都可以通过 $n!$ 种方式排序成有序划分。因此，无序划分的数量等于有序划分的数量除以 $n!$ 。

将大小为 m 的集合划分成 n 个非空部分的无序划分的数量记作 $S(m,n)$ 。

定理：

$$S(m,n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m \binom{n}{k}$$

这些数 $S(m,n)$ 被称为**第二类斯特林数**。

应用阶乘公式于 $\binom{n}{k}$ ，我们得到：

$$S(m,n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot (n-k)^m}{k! \cdot (n-k)!}$$

如果对固定的 m 对所有的 n 求和 $S(m,n)$ ，我们得到大小为 m 的集合的所有无序划分的数量。

这个数记作 B_m 并称为**贝尔数**。

定理：

$$B_m = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot (n-k)^m}{k! \cdot (n-k)!}$$

根据分解定理， B_m 也等于大小为 m 的集合上不同等价关系的数量。