Дискретная математика

Лекция 7

Мокеев Дмитрий Борисович

Комбинаторика

Разбиения с заданной спецификацией

$\binom{n}{k}$ – число подмножеств мощности k у множества мощности n.

$\binom{n}{k}$ можно рассматривать также как число *разбиений* множества из n элементов на *две* части, первая из которых состоит из k элементов, а вторая – из $n-k$ элементов.

Рассмотрим теперь *разбиения* на произвольное число частей.

Пусть A – множество мощности n,

$k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}_0$ и $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$.

Разбиение $A = P_1 \sqcup P_2 \sqcup \cdots \sqcup P_s$ называется *разбиением со спецификацией* $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$, если

$$|P_1| = k_1, \qquad |P_2| = k_2, \qquad \ldots, \qquad |P_s| = k_s.$$

Подсчитаем число таких разбиений.

Применим принцип последовательного выбора.

Множество P_1 можно выбрать $\binom{n}{k_1}$ способами.

После того, как P_1 выбрано, остается $n - k_1$ элементов и множество P_2 можно выбрать $\binom{n-k_1}{k_2}$ способами.

Когда выбраны P_1 и P_2, осталось $n - k_1 - k_2$ элементов и множество P_3 можно выбрать $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ способами.

…

Когда выбраны $P_1, P_2, \dots, P_{s-1}$, множество P_s определяется однозначно – оно состоит из оставшихся $k_s = n - k_1 - k_2 - \dots - k_{s-1}$ элементов.

Все разбиение $(P_1 \sqcup P_2 \sqcup \cdots \sqcup P_s)$ может быть выбрано

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \ldots \cdot \binom{k_{s-1}+k_s}{k_{s-1}} \cdot \binom{k_s}{k_s}$$

способами. Применяя факториальную формулу, получаем

$$\frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdot (n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3! \cdot (n-k_1-k_2-k_3)!} \cdot$$

$$\cdot \ldots \cdot \frac{(k_{s-1}+k_s)!}{k_{s-1}! \cdot k_s!} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_{s-1}! \cdot k_s!}$$

Это число называется *полиномиальным коэффициентом* и обозначается

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

.

Слова с заданным распределением букв

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ – алфавит, $n \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N}_0$ и $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$.

Задача. Сколько имеется слов длины n в алфавите A, в которые буква a_1 входит k_1 раз, буква a_2 – k_2 раз, ..., буква a_s – k_s раз?

Решение. Так же, как в бинарном случае, считаем, что слово вписано в таблицу с n *пронумерованными* клетками.

Чтобы указать слово с данным распределением букв, мы должны выделить k_1 клеток для буквы a_1, k_2 клеток для буквы $a_2, \ldots,$ k_s клеток для буквы a_s.

Это равносильно разбиению множества $\{1, 2, \ldots n\}$ всех клеток на s частей со спецификацией $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$.

Теорема. *Число слов длины* n *в алфавите* $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, *в которые буква* a_1 *входит* k_1 *раз*, *буква* a_2 *входит* k_2 *раз*, …, *буква* a_s *входит* k_s *раз, равно* $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_s}$.

Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема – обобщение бинома Ньютона. Она утверждает, что:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_s)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_s=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s}$$

Суммирование здесь производится по всем наборам $(k_1, k_2, \dots, k_s)$, таким, что $0 \le k_i \le n$ для каждого i и $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$.

Эта теорема может быть доказана таким же способом, как биномиальная теорема.

Пример

$$(a+b+c)^3=\binom{3}{0,0,3}c^3+\binom{3}{0,1,2}bc^2+\binom{3}{0,2,1}b^2c+\binom{3}{0,3,0}b^3+$$

$$+\binom{3}{1,0,2}ac^2+\binom{3}{1,1,1}abc+\binom{3}{1,2,0}ab^2+\binom{3}{2,0,1}a^2c+$$

$$+\binom{3}{2,1,0}a^2b+\binom{3}{3,0,0}a^3=$$

$$=a^3+b^3+c^3+$$

$$+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+$$

$$+6abc.$$

Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями – это мультимножества, составленные из элементов данного множества.

Размер мультимножества есть общее число вхождений элементов. Например, размер мультимножества

$$\{a,a,b,b,b,b,c,c,c\}$$

равен 9.

Пример

Из трех элементов a, b, c можно образовать 10 мультимножеств размера 3:

$$\{a,a,a\} \qquad \{a,c,c\}$$
$$\{a,a,b\} \qquad \{b,b,b\}$$
$$\{a,a,c\} \qquad \{b,b,c\}$$
$$\{a,b,b\} \qquad \{b,c,c\}$$
$$\{a,b,c\} \qquad \{c,c,c\}$$

Пусть A – множество мощности n.

Задача. Сколько существует *мультимножеств* размера k, состоящих из элементов множества A?

Решение.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Мультимножество можно задать *набором* чисел $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, где k_i есть число вхождений элемента a_i, $i = 1, 2, \dots, n$ (заметим, что $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$).

Каждому мультимножеству поставим в соответствие бинарное слово. Это слово будет состоять из n групп нулей, разделенных единицами (число таких разделяющих единиц равно $n-1$) .

- Первая группа состоит из k_1 нулей;
- вторая группа состоит из k_2 нулей;

…

- последняя n-тая группа состоит из k_n нулей.

Например, пусть $k = 9$, $n = 5$. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

мультимножество	слово
$\{a_1, a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_4, a_4, a_4\}$	0000**1**00**11**000**1**

В общем случае получится слово из k нулей и $n-1$ единиц.
Каждое бинарное слово с такими параметрами соответствует некоторому мультимножеству.
Таким образом, имеется биекция между множеством всех мультимножеств размера k и множеством всех бинарных слов длины $n+k-1$, содержащих ровно k нулей.
Имеется $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$ таких слов.

Остается *применить правило равенства*.

Теорема. *Число мультимножеств размера* k, *состоящих из элементов множества мощности* n, *равно*

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$$

Принцип включения и исключения

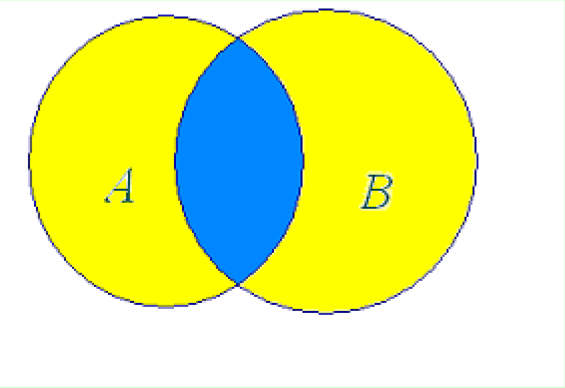
Правило суммы: для любых *непересекающихся* конечных множеств A и B справедливо равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Если $A \cap B \neq \varnothing$, то это равенство неверно, но его можно легко исправить.

Элементы множества $A \cap B$ считаются дважды в сумме $|A| + |B|$. Чтобы получить правильное значение, достаточно вычесть $|A \cap B|$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Это верно для любых конечных множеств A и B.
Мы сначала *включаем* A и B,
а затем *исключаем* $A \cap B$.

Пусть теперь есть три множества. Как можно вычислить мощность их объединения?

Если мы напишем $|A| + |B| + |C|$, то некоторые элементы считаются дважды или трижды. Будет ли правильным вычесть (*исключить*) все попарные пересечения?

Рассмотрим получающееся равенство:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

Правильно ли оно? Проверим.

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$$

Если элемент x принадлежит точно одному из множеств A, B, C, скажем, $x \in A$ и $x \notin B \cup C$, то x считается один раз.

Если x принадлежит точно двум множествам, скажем, $x \in A \cap B$ и $x \notin C$, то x считается $1+1-1=1$ раз.

Если x принадлежит всем трем множествам, то x считается $1+1+1-1-1-1=0$ раз, то есть x не сосчитан.

Значит, это равенство верно не всегда.

Чтобы его исправить, необходимо *включить* элементы из $A \cap B \cap C$. *Получаем равенство*

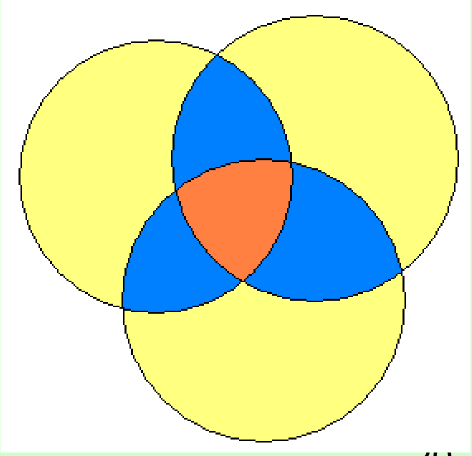
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ + |A \cap B \cap C|.$$

Проверим его.

$x \in$ $\longrightarrow$ x *сосчитан* 1 раз.

$x \in$  $\longrightarrow$ x *сосчитан* $1 + 1 - 1 = 1$ раз.

$x \in$  $\longrightarrow$ x *сосчитан* $1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 = 1$ раз.



Равенство верно для любых A, B, C.

Можно написать *аналогичное* равенство для 4 множеств:

$$|A \cup B \cup C \cup D| \;=\; |A|+|B|+|C|+|D|-$$

$$-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|+$$

$$+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|-$$

$$-|A\cap B\cap C\cap D|$$

и доказать его *аналогичными* рассуждениями.

Заметим:

- правая часто содержит всевозможные пересечения множеств из семейства $\{A, B, C, D\}$;
- пересечения нечетного числа множеств входят со знаком $+$;
- пересечения четного числа множеств входят со знаком –.

Сформулируем и докажем формулу включений и исключений в общем виде.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – конечные множества.

Пересечение k из этих множеств будем называть *k-пересечением.*

Теорема.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot S_i ,$$

где S_k есть сумма мощностей всех k-пересечений.

Доказательство.

Пусть $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Обозначим через $S(x)$ *общий вклад* элемента x в сумму $S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^n S_n$.

Покажем, что $S(x) = 1$ для каждого $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Пусть x принадлежит точно m из множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$.
Тогда

- имеется $m = \binom{m}{1}$ 1-пересечений, содержащих x;
- имеется $\binom{m}{2}$ 2-пересечений, содержащих x;
- имеется $\binom{m}{3}$ 3-пересечений, содержащих x;

…

вообще, для любого $i = 1, 2, \dots, m$ имеется ровно $\binom{m}{i}$ i-пересечений, содержащих x, а для $i > m$ таких пересечений нет.

Следовательно,

$$S(x) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$$

Итак, $S(x) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$

Одно из полученных ранее следствий бинома Ньютона гласит:

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} + \cdots + (-1)^{m}\binom{m}{m} = 0$$

Поэтому

$$S(x) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1$$

Беспорядки

Перестановка $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$ называется *беспорядком*, если $p_i \neq i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n.$

Иначе говоря, в беспорядке ни один элемент не остается на своем месте, т.е. не остается *неподвижным*.

Среди перестановок трех элементов имеется два беспорядка:

(1, 2, 3)
(1, 3, 2)
(2, 1, 3)
(2, 3, 1)
(3, 1, 2)
(3, 2, 1)

Эадача. Сколько имеется беспорядков из n элементов?

Обозначим это число через d_n.

Решение. Применяем метод включений и исключений.

Обозначим через A_i множество всех перестановок n элементов, в которых элемент i *неподвижен*: $p_i = i$.

Тогда $d_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$.

Пример: $n = 4, \quad i = 2,$

$A_2 = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (3, 2, 1, 4)$
$(3, 2, 4, 1), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1)\}.$

k-пересечение этих множеств A_i – это множество всех перестановок, имеющих не менее k неподвижных элементов.

Перестановка, оставляющая неподвижными данные k элементов, определяется перестановкой остальных $n-k$ элементов. Имеется ровно $(n-k)!$ таких перестановок.

Число различных k-пересечений равно числу способов выбрать k множеств из n множеств, то есть $\binom{n}{k}$.

Поэтому сумма S_k содержит $\binom{n}{k}$ слагаемых, каждое из которых равно $(n-k)!$. Следовательно,

$$S_k = (n-k)! \cdot \binom{n}{k} = (n-k)! \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!}$$

Получаем

$$d_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) =$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

(Здесь стоит напомнить, что, по определению, $0! = 1$)

Разбиения

Каким числом способов можно разбить множество из n элементов на части?

Прежде, чем отвечать, необходимо кое-что уточнить.

1. Порядок частей важен? Например, разбиения

$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,3\} \sqcup \{5\} \sqcup \{2,4\}$$

и

$$\{1,2,3,4,5\} = \{2,4\} \sqcup \{1,3\} \sqcup \{5\}$$

считаются различными?

Если “да”, то мы рассматриваем *упорядоченные* разбиения, в противном случае – *неупорядоченные*.

2. Пустое множество может быть частью разбиения?

Рассмотрим сначала упорядоченные разбиения,
в которых допускаются пустые части.

Задача. Сколько имеется упорядоченных разбиений множества мощности m на n частей, некоторые из которых могут быть пустыми?

Решение. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ – разбиваемое множество. Разбиение можно выбрать, последовательно выбирая части для элементов $a_1, a_2, \dots, a_m$. Для каждого элемента имеется n возможностей. Применяя правило произведения, получаем число таких разбиений:

$$n^m.$$

Теперь запретим пустые части.

Задача. Сколько имеется упорядоченных разбиений множества мощности m на n непустых частей?

Решение. Применяем метод включения и исключения.

Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ – части разбиения множества мощности m, среди которых могут быть пустые.
Обозначим через A_i множество всех разбиений, у которых $P_i = \emptyset$.

Тогда искомое число равно

$$n^m - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

k-пересечение этих множеств A_i – это множество всех разбиений, имеющих как минимум k пустых частей.

Разбиение, у которого пусты некоторые фиксированные k частей определяется разбиением всех m элементов на оставшиеся $n-k$ частей. Имеется $(n-k)^m$ таких разбиений.

Поэтому сумма S_k в формуле включений и исключений содержит $\binom{n}{k}$ слагаемых, каждое из которых равно $(n-k)^m$, и получаем

$$S_k = (n-k)^m \binom{n}{k}$$

Следовательно, искомое число равно

$$n^m - (n-1)^m \binom{n}{1} + (n-2)^m \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n (n-n)^m \binom{n}{n} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m \binom{n}{k}$$

Теорема. *Число упорядоченных разбиений множества мощности* m *на* n *непустых частей равно*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m \binom{n}{k}$$

Каждое неупорядоченное разбиение на n непустых частей можно упорядочить $n!$ способами. Поэтому число *неупорядоченных* разбиений равно числу *упорядоченных*, деленному на $n!$

Число неупорядоченных разбиений множества мощности m на n непустых частей обозначается $S(m,n)$.

Теорема. $$S(m,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)^m\binom{n}{k}$$

Числа $S(m,n)$ называются *числами Стирлинга второго рода*.

Применяя факториальную формулу для $\binom{n}{k}$, получаем

$$S(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot(n-k)^m}{k!\cdot(n-k)!}$$

Если просуммировать все числа $S(m,n)$ по n при фиксированном m, получим число всех *неупорядоченных разбиений* множества мощности m.

Это число обозначается B_m и называется *числом Белла*.

Теорема.

$$B_m = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot (n-k)^m}{k! \cdot (n-k)!}$$

По *теореме факторизации,* B_m есть число различных отношений *эквивалентности* на множестве мощности m.