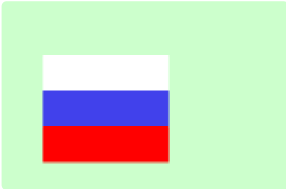
组合数学

排列

某国国旗由三条彩色条纹组成：



通过调换条纹的顺序，可以得到其他的旗帜：

用这三条条纹可以得到多少种不同的旗帜?

集合 A 的排列是一个**序列**，其中 A 中的每个元素恰好出现一次。

换句话说，排列就是将集合中所有元素按某种顺序排列。

设 $A=\{1,2,\ldots,n\}$ 。

n 个元素的排列数是多少?

- 两个元素可以通过两种方式排列成序列：

$(1,2)$ 和 $(2,1)$

- 对于 $n=3$ ，有 6 种排列：

$(1,2,3)$

$(1,3,2)$

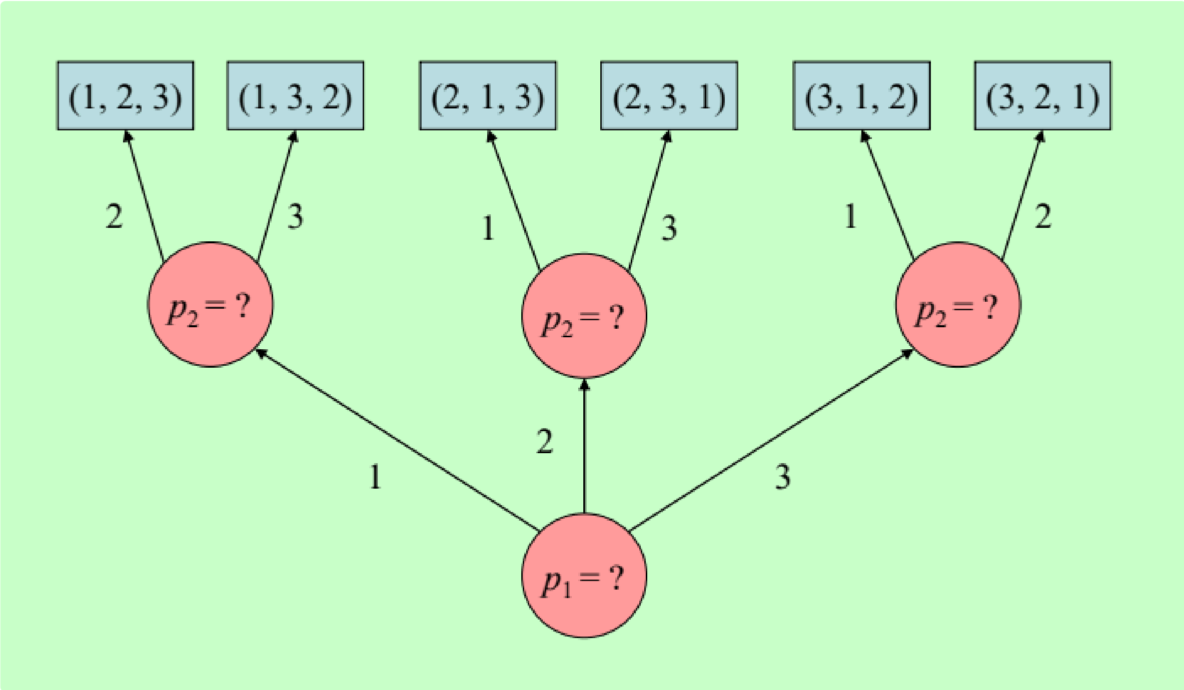
$(2,1,3)$

$(2,3,1)$

$(3,1,2)$

$(3,2,1)$

我们可以为选择排列 (p_1,p_2,p_3) 构建一个决策树：



选择元素 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的排列 $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 的决策树有 n 个层级。

树的根（第零层）包含问题："p_1 等于什么？"

从根部出发有 n 个箭头，对应 n 种可能的答案。这些箭头指向第一层的顶点。

第一层的每个顶点包含问题："p_2 等于什么？"

从第一层的每个顶点出发有 $n-1$ 个箭头（因为 p_2 必须与 p_1 不同）。

第 k 层的每个顶点包含问题："p_{k+1} 等于什么？"有 $n-k$ 种可能的答案（因为 p_{k+1} 必须与 $p_1, \ldots, p_k$ 不同），对应 $n-k$ 个出发的箭头。

在第 $(n-2)$ 层选择了元素 p_{n-1} 后，p_n 就唯一确定了。

第 $(n-1)$ 层的顶点是树的叶子，每个叶子包含一个特定的排列。

排列的数量等于树的叶子数量。

让我们计算这个数量。

第一层有 n 个顶点。

从第一层的每个顶点出发有 $n-1$ 个箭头，所以第二层将有 $n(n-1)$ 个顶点。

在第三层，顶点数量增加 $n-2$ 倍，以此类推。

顺序选择原理

假设序列 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 是通过依次选择元素 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 形成的，其中

- 元素 x_1 可以通过 n_1 种方式选择；
- 对于任意的 x_1 ，元素 x_2 可以通过 n_2 种方式选择；
- 对于任意的 x_1, x_2 ，元素 x_3 可以通过 n_3 种方式选择；

…

- 对于任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ ，元素 x_k 可以通过 n_k 种方式选择。

那么整个序列可以通过 $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ 种方式选择。

结论： n 个元素的排列数等于

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

这个乘积表示为 $n!$ 并称为 n 的阶乘。

注意：约定 $0! = 1$

定理： n 个元素的排列数等于 $n!$

排列

从 n 中取 k 个元素的排列（ k –排列）是集合 A 的元素组成的长度为 k 的序列，其中 $|A| = n$ ，且 A 中的每个元素最多出现一次。

例如，从 4 中取 2 的排列有 12 种：

$(1,2)\quad(2,1)\quad(3,1)\quad(4,1)$

$(1,3)\quad(2,3)\quad(3,2)\quad(4,2)$

$(1,4)\quad(2,4)\quad(3,4)\quad(4,3)$

从 n 中取 k 个元素的排列数记为 $P(n,k)$ 。

使用顺序选择原理可以很容易地找到这个数：

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$$

这个乘积表示为 $(n)_k$ 并称为**下降阶乘**。

将右边乘以并除以 $(n-k)!$，得到公式：

$$P(n,k)=(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

组合

需要制定一个小组的课程表，使得从周一到周五的 5 天中有 3 天是远程学习。有多少种方法可以选择这些天?

需要从一个 5 个元素的集合中选择一个 3 元子集。有 10 个这样的子集（周几用数字 1,...,5 表示）：

$\{1,2,3\}$　$\{1,4,5\}$

$\{1,2,4\}$　$\{2,3,4\}$

$\{1,2,5\}$　$\{2,3,5\}$

$\{1,3,4\}$　$\{2,4,5\}$

$\{1,3,5\}$　$\{3,4,5\}$

从 n 中取 k 个元素的组合（k –组合）是一个 n 元集的 k 元子集。

4 个元素 $\{a,b,c,d\}$ 的所有组合：

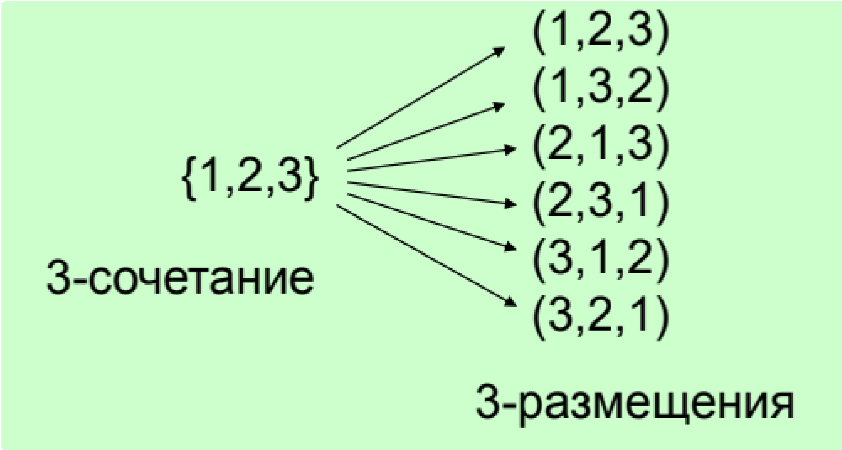
$k=$	0	1	2	3	4
	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c,d\}$
		$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,d\}$	
		$\{c\}$	$\{a,d\}$	$\{a,c,d\}$	
		$\{d\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c,d\}$	
			$\{b,d\}$		
			$\{c,d\}$		
	1	4	6	4	1

16

排列 – 有序的集合，序列。

组合 – 无序的集合。

任何 k –排列都是某个 k –组合的一个排列。$\rightarrow$ 从一个 k –组合可以得到 $k!$ 个不同的 k –排列：



从 n 中取 k 个元素的组合数记作 $\binom{n}{k}$ 或 C_n^k 。

每个 k –组合的元素可以通过 $k!$ 种方式排序，得到 $k!$ 个不同的 k –排列。

因此

$$\binom{n}{k} \cdot k! = P(n,k)$$

由于 $P(n,k) = (n)_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ ，

得到组合数的公式：

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$\binom{n}{k}$ 的一些简单性质

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;

2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$;

3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

4) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$;

5) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

所有这些恒等式都可以通过阶乘公式轻松证明。让我们以最后一个为例进行证明。

$$
\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}
$$

$$
=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)
$$

$$
=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\cdot\frac{n}{k(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}
$$

这个恒等式可以用来构建 $\binom{n}{k}$ 的表格，即著名的**杨辉三角**。

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .
\end{array}
$$

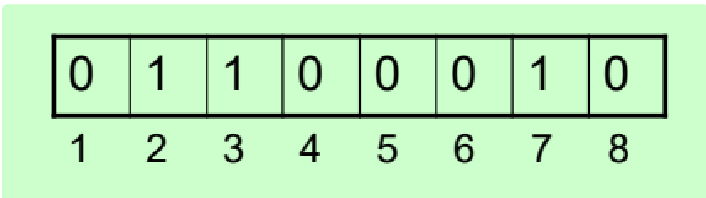
每行的边缘元素（左边和右边）等于 1。其他每个元素都是通过将上一行中位于其上方的两个元素相加得到的：

$$
\begin{array}{ccc}
\binom{n-1}{k} & + & \binom{n-1}{k-1} \\
\searrow & & \swarrow \\
& \binom{n}{k} &
\end{array}
$$

具有指定分布的二进制词

问题：在 $\{0,1\}$ 字母表中，长度为 n 的词中恰好包含 k 个 1 的词有多少个?

解决方案：假设这个词被填入一个有 n 个格子的表格中，如例子所示（这里 $n=8$，$k=3$）：



格子编号为 $1,2,...,n$。

要指定一个包含 k 个 1 的词，只需从 n 个格子中选择 k 个。

换句话说，需要从集合 $\{1,2,...,n\}$ 中选择一个子集 $\{i_1,i_2,...,i_k\}$（在例子中选择子集 $\{2,3,7\}$）。

这可以通过 $\binom{n}{k}$ 种方式完成。

定理：在 $\{0,1\}$ 字母表中，长度为 n 且恰好包含 k 个 1 的词的数量等于 $\binom{n}{k}$。

二项式定理

众所周知的公式：

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

不难推导出：

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$,

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

如果我们写出右侧的系数：

$1,2,1$

$1,3,3,1$

$1,4,6,4,1$

$1,5,10,10,5,1$

我们发现这些行与杨辉三角的行一致。这是巧合吗？当然不是！

为了推导恒等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ，我们展开 $(a+b)(a+b)$ 中的括号。

如果不对因子和加数进行分组，我们得到：

$(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb$

右侧的加数是字母表 $\{a,b\}$ 中所有长度为 2 的词。

分组后，我们得到要证明的恒等式。

同样，对于 $n=3$ ：

$(a+b)(a+b)(a+b)=aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb$

在右侧，我们得到了字母表 $\{a,b\}$ 中所有长度为 3 的词。

这对任意 n 都成立：如果我们展开表达式

$(a+b)^n=(a+b)(a+b)\dots(a+b)$,

不对因子和加数进行分组，我们将得到一个和，其中加数是所有长度为 n 的词。

这可以通过对 n 进行归纳来证明。

$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$

如果我们首先展开 $(a+b)^{n-1}$，根据归纳假设，我们将得到所有长度为 $n-1$ 的词。

当我们将这个和乘以 $(a+b)$ 并展开括号时，每个长度为 $n-1$ 的词通过添加字母 a 和 b 将产生两个长度为 n 的词。

显然，我们将得到所有长度为 n 的词。

对因子进行分组，我们将得到形如 $a^k b^{n-k}$ 的项，其中 $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

这样的项在和中出现的次数等于字母 a 出现 k 次，字母 b 出现 $n-k$ 次的词的数量，即 $\binom{n}{k}$。

因此，对加数进行分组后，我们得到和：

$$\binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}a^nb^0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

定理（牛顿二项式定理）：

对于任意自然数 n 和实数 a, b，有：

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

数 $\binom{n}{k}$ 被称为二项式系数。

从二项式定理可以推导出二项式系数的额外性质。

例子：

- 当 $a=b=1$ 时，我们得到：

  $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

- 设 $a=-1$，$b=1$。那么：

  $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$