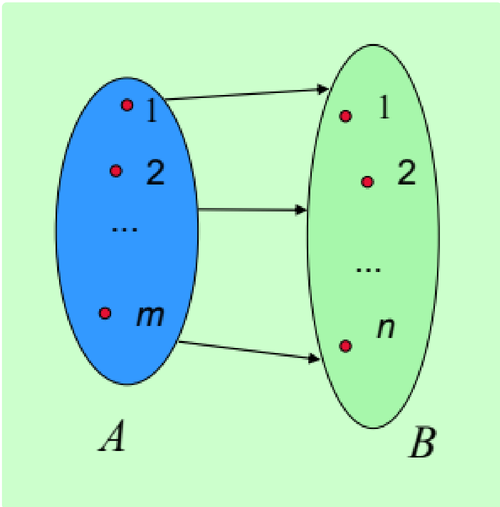
08 组合数学 函数

函数

让 $A = \{1, 2, ..., m\}$，

$B = \{1, 2, ..., n\}$。

让我们计算不同类型的函数 $f : A \to B$ 的数量。



1. 所有函数

任何函数 $f : A \to B$ 都可以用其值的序列表示：

$$(f(1), f(2), ..., f(m))$$

每个 $f(i)$ 可以是 B 中的任意元素。

这样的序列总共有

$$n^m$$

个，这就是所有函数的数量。

2. 单射函数 $(m \leqslant n)$

如果 f 是单射，那么序列

$$(f(1), f(2), ..., f(m))$$

中的所有元素都不相同。因此，这个序列是从 n 个元素中取 m 个元素的排列。

所以从 A 到 B 的单射数量等于

$$P(n,m)=(n)_m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

3. 双射函数

当且仅当 $n=m$ 时，从 A 到 B 的单射 f 是双射。

因此，大小为 n 的集合到另一个大小为 n 的集合的双射数量恰好为

$$P(n,n)=n!$$

4. 满射函数 $(m \geqslant n)$

设 f 是从集合 A 到集合 B 的满射。

对于每个 $y \in B$，定义集合

$$P(y)=\{x\in A: f(x)=y\}$$

序列 $\{P(1),P(2),...,P(n)\}$ 是集合 A 的有序分划，且不包含空集（因为 f 是满射）。满射的数量等于这样的分划数：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)^m\binom{n}{k}$$

5. 严格单调函数

考虑递增函数，即当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$。

要定义这样的函数，只需选择集合 B 的某个 m 元子集作为函数的值域。然后按升序排列这个子集的元素：

$$s_1<s_2<...s_m$$

并设定

$$f(1)=s_1,f(2)=s_2,...,f(m)=s_m$$

因此，这样的函数数量等于集合 B 的 m 元子集数量，即 $\binom{n}{m}$

非严格单调函数

考虑非递减函数，即当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$。

按照前面的思路，但现在需要选择大小为 m 的多重集作为函数 f 的值域。

这样的函数数量等于这样的多重集数量，即：

$$\left(\!\binom{n}{m}\!\right) = \binom{m+n-1}{m}$$

递推关系

设 $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ 是一个无限数列，其中前几项 $x_0, x_1, \ldots, x_k$ 已知，每个后续项按照某个规则由前面的项计算得出。

如果这个规则由关系式

$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$ 给出，则称其为递推关系（递推方程）。

求解这样的关系式就是要将数列项 x_n 用 n 表示出来。

示例 1：

初始项： $x_0 = 1$

递推关系： $x_n = n \cdot x_{n-1}$

解： $x_n = n!$

示例 2：贝尔数

初始项： $B_0 = 1$

递推关系：

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k$$

解：

$$B_n = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \cdot (m-k)^n}{k! \cdot (m-k)!}$$

示例 3：

初始项： $x_0 = 1$

递推关系： $x_n = x_{n-1} + 1$

解： $x_n = n$

示例 4：

初始项： $x_0 = 2$

递推关系： $x_n = 3 \cdot x_{n-1}$

解： $x_n = 3^n \cdot 2$

这些例子都属于常系数线性递推关系。

一阶线性递推关系

一般形式： $x_n = ax_{n-1} + b$，其中 a 和 b 是给定的常数， $n > 0$ 。

如果给定初始元素 x_0 ，就可以依次计算出其他元素：

$x_1 = ax_0 + b$

$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b$

...

任何元素 x_n （$n > 0$）都由数 a 、 b 、 x_0 唯一确定。

能否找到 x_n 的通项公式?

特殊情况

1. $a = 1$ 。方程形式为 $x_n = x_{n-1} + b$ 。

$x_1 = x_0 + b$

$x_2 = x_1 + b = x_0 + 2b$

$x_3 = x_2 + b = x_0 + 3b$

...

显然，对任意的 n ，有 $x_n = x_0 + nb$ （这可以用数学归纳法轻松证明）。

这就是一个等差数列。

2. $b = 0$ 。方程形式为 $x_n = ax_{n-1}$ 。

$x_1 = ax_0$

$x_2 = ax_1 = a^2x_0$

$x_3 = ax_2 = a^3x_0$

...

显然，对任意的 n ，有 $x_n = a^nx_0$ 。

这是一个**等比数列**。

一般情况

引入替换：

$$x_n = ax_{n-1} + b \text{ (1)}$$

设：

$$x_n = y_n + s \text{ (2)}$$

其中 y_n 是新序列，s 是常数，其值稍后确定。

将 (2) 代入 (1)，得到：

$$y_n + s = a(y_{n-1} + s) + b$$

或

$$y_n = ay_{n-1} + as + b - s$$

选择 s 使得等式成立：

$$as + b - s = 0$$

即

$$s = \frac{b}{1-a}$$

当 $a = 1$ 时此表达式无意义。

但 $a = 1$ 的情况已经在前面讨论过。

因此假设 $a \neq 1$ 。

得到方程 $y_n = ay_{n-1}$

这种类型的方程前面已经讨论过。

其解为：

$y_n = a^n y_0$

因为 $x_n = y_n + s$ ，得到：

$x_n - s = a^n(x_0 - s)$

$x_n = a^n(x_0 - s) + s$

代入 $s = \dfrac{b}{1-a}$ ：

$x_n = a^n(x_0 - \dfrac{b}{1-a}) + \dfrac{b}{1-a}$

这样，求解可以分三步完成：

1. 通过替换 $x_n = y_n + s$ 并选择适当的 s 值将方程化为最简形式。
2. 求解得到的最简方程。
3. 返回到原始未知数 x_n 。

注意，解的形式为：

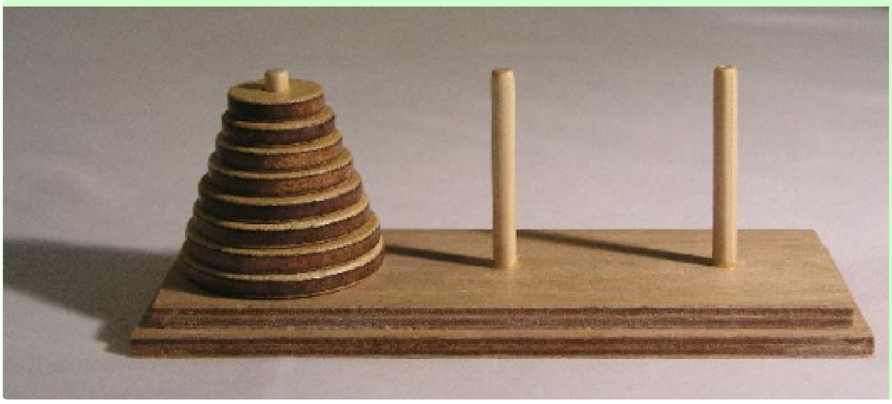
$x_n = c_1 a^n + c_2$

其中 c_1 和 c_2 是某些常数。

因此， x_n 与 n 的关系可以用指数函数表示。

汉诺塔

法国数学家卢卡（Lucas）在 1883 年提出了下面的问题：八个不同直径的圆盘按照直径递减的顺序叠放在三根柱子中的一根上。现在需要将它们以相同的顺序移动到另一根柱子上。每次只允许移动一个圆盘，且不能将大圆盘放在小圆盘上面。问最少需要多少步才能完成？（一步指移动一个圆盘）

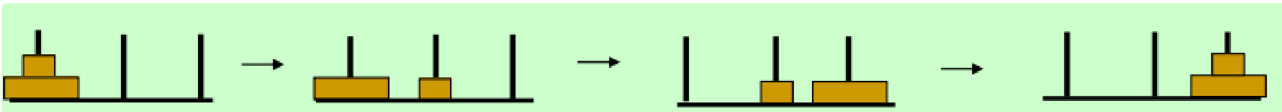


让我们考虑一般情况，即有 n 个圆盘。

设 T_n 为将 n 个圆盘从一根柱子移到另一根柱子所需的最少步数。

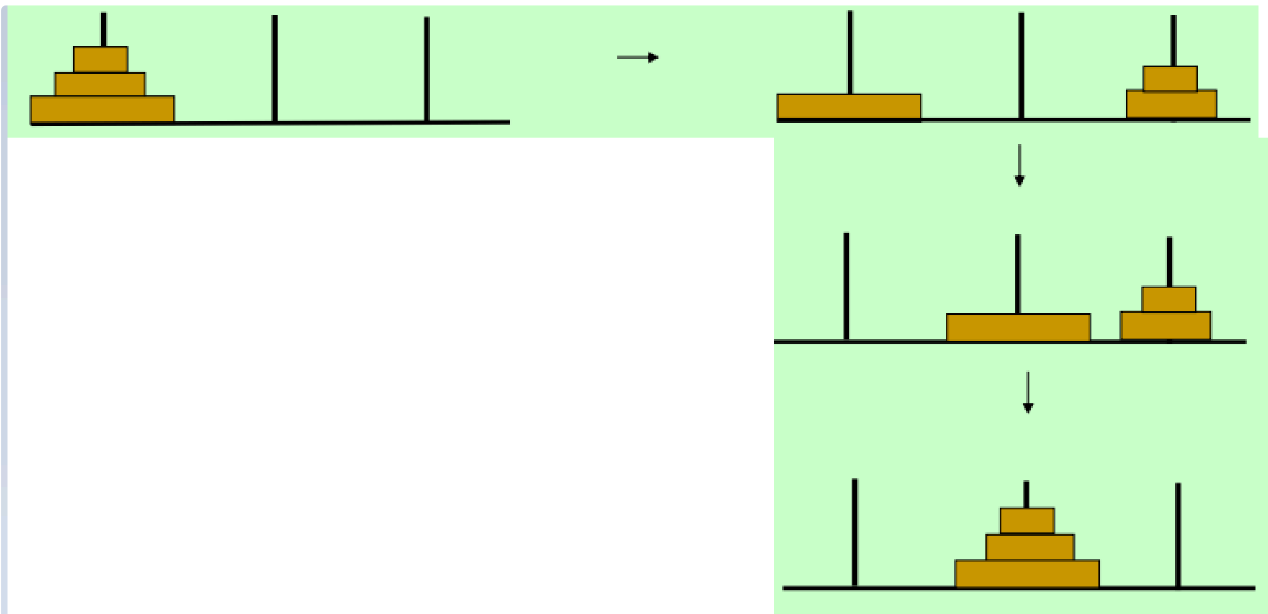
显然， $T_1 = 1$ 。

容易看出 $T_2 = 3$ 。



三个圆盘的移动方法如下：

1) 移动上面两个圆盘（3 步）



2) 移动最大的圆盘（1 步）

3) 再次移动两个较小的圆盘（3 步）

因此，$T_3 = 3 + 1 + 3 = 7$ 。

在一般情况下，要先将 $n-1$ 个较小的圆盘移到另一根柱子上，才能移动最大的圆盘。

这需要 T_{n-1} 步。

移动最大圆盘后，还需要再次移动 $n-1$ 个较小的圆盘。

这又需要 T_{n-1} 步。

得到递推方程：

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

如果设：

$$T_0 = 0$$

那么这个等式在 $n = 1$ 时也成立。

解这个方程：

1. 简化

$$T_n = y_n + s$$

$$y_n + s = 2(y_{n-1} + s) + 1$$

$$y_n = 2y_{n-1} + s + 1$$

当 $s = -1$（即 $T_n = y_n - 1$) 时得到：

$$y_n = 2y_{n-1}$$

1. 求解最简单的方程： $y_n = 2^n y_0$
2. 回到原始未知数：

$$y_n = T_n + 1; y_0 = T_0 + 1 = 1$$

$$T_n + 1 = 2^n$$

$$T_n = 2^n - 1$$

二阶线性递推关系

一般形式： $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c$ ，其中 a, b, c 是给定常数， $n > 1$ 。

首先考虑齐次方程（当 $c = 0$ 时）：

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} \quad (3)$$

如果已知前两项， x_0 和 x_1 ，则可以依次计算后续项：

$x_2 = ax_1 + bx_0$,

$x_3 = ax_2 + bx_1 = a(ax_1 + bx_0) + bx_1 = (a^2 + b)x_1 + abx_0$

等等。

可以得到 x_n 的通项公式。

生成函数

序列 a_n 的生成函数是形式幂级数：

$$A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$

生成函数的概念允许我们用解析方法处理不同的组合对象。它们提供了一种灵活的方式来描述组合数学中的关系，有时还可以帮助推导出某些类型组合对象的显式计数公式。

一般形式： $x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}$ ，其中 a,b 是给定常数， $n>1$ 。

构造 x_n 的生成函数 $X(t)$ ：

$$X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x_nt^n$$

使用(3)式，得到：

$$X(t)=x_0+x_1t+\sum_{n=2}^{\infty}(ax_{n-1}+bx_{n-2})t^n$$

$$=x_0+x_1t+\sum_{n=2}^{\infty}ax_{n-1}t^n+\sum_{n=2}^{\infty}bx_{n-2}t^n$$

$$=x_0+x_1t+at\sum_{n=1}^{\infty}x_nt^n+bt^2\sum_{n=0}^{\infty}x_nt^n$$

$$=x_0+x_1t+at(X(t)-x_0)+bt^2X(t)$$

因此， $X(t)=x_0+x_1t+at(X(t)-x_0)+bt^2X(t)$

继续得到：

$$X(t)=x_0+x_1t-atx_0+X(t)(at+bt^2)$$
$$X(t)(1-at-bt^2)=x_0+x_1t-atx_0$$
$$X(t)=\frac{x_0+x_1t-atx_0}{1-at-bt^2}$$

有两种情况：

1. $a^2+4b\neq 0$，则 $1-at-bt^2=(1-\alpha_1 t)(1-\alpha_2 t)$，其中 t_1 和 t_2 是方程 $\alpha^2-a\alpha-b=0$ 的根
2. $a^2+4b=0$ 则方程 $\alpha^2-a\alpha-b=0$ 有一个根 α_1，且 $1-at-bt^2=(1-\alpha_1 t)^2$

方程 $\alpha^2-a\alpha-b=0$ 称为关系式(3)的特征方程。

对第一种情况，我们将生成函数变形：

$$X(t)=\frac{x_0+x_1t-atx_0}{1-at-bt^2}=\frac{c_1}{1-\alpha_1 t}+\frac{c_2}{1-\alpha_1 t}$$

根据无穷等比级数求和公式：

$$\frac{c_1}{1-\alpha_1 t}=c_1\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1 t)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_1\alpha_1^n t^n$$

类似地，

$$\frac{c_2}{1-\alpha_2 t}=\sum_{n=0}^{\infty}c_2\alpha_2^n t^n$$

因此

$$X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_1\alpha_1^n t^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_2\alpha_2^n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n)t^n$$

这样，

$$X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n)t^n$$

但这意味着 $x_n=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n$

需要注意的是，这个公式对任意常数 c_1 和 c_2 都满足方程(3)。具体的常数值取决于 x_0 和 x_1 。

这个序列称为递推关系(3)的**通解**。

对第二种情况：

$$X(t)=\frac{x_0+x_1t-atx_0}{1-at-bt^2}=\frac{c_0}{1-\alpha_1 t}+\frac{c_2}{(1-\alpha_1 t)^2}$$

考虑第二个分式。注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)y^n=\sum_{n=0}^{\infty}ny^{n-1}=(\sum_{n=0}^{\infty}y^n)'_y=(\frac{1}{1-y})'_y=\frac{1}{(1-y)^2}$$

因此

$$-\frac{c_2 t}{(1-\alpha_1 t)^2} = c_2 \sum_{n=0}^{\infty} (1+n) \cdot \alpha_1^n t^n$$

即

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \alpha_1^n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (1+n) \cdot c_2 \alpha_1^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_2 + n c_2) \alpha_1^n t^n$$

因此，如果记 $c_1 = c_0 + c_2$ ，则

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 + n c_2) \alpha_1^n t^n$$

结果得到 $x_n = (c_1 + n c_2) \alpha_1^n$ 。

这个序列是此情况下递推关系(3)的**通解**。

总结：解二阶递推关系的算法

1.求特征方程的根

$\alpha^2 - a\alpha - b = 0$

2.如果 $a^2 + 4b \neq 0$，则有两个根： α_1 和 α_2 – 这时通解形式为 $x_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n$

如果 $a^2 + 4b = 0$，则有一个根： α_1 – 这时通解形式为 $x_n = (c_1 + n c_2) \alpha_1^n$

3.系数 c_1 和 c_2 在两种情况下都依赖于 x_0 和 x_1 。可以用待定系数法求出它们。

选取 c_1 和 c_2 使得序列的前两项为 x_0 和 x_1 。

为此将 $n = 0$ 和 $n = 1$ 代入通解

对第一种情况：

$n = 0$： $x_0 = c_1 \alpha_1^0 + c_2 \alpha_2^0 = c_1 + c_2$

$n = 1$： $x_0 = c_1 \alpha_1^1 + c_2 \alpha_2^1 = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2$

对第二种情况：

$n = 0$： $x_0 = (c_1 + 0 \cdot c_2) \alpha_1^0 = c_1$

$n = 1$： $x_0 = (c_1 + 1 \cdot c_2) \alpha_1^1 = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1$

对于每种情况,我们得到了两个未知数 c_1 和 c_2 的两个线性方程组:

$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = x_1 \end{cases}$ S

和

$$\begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1 = x_1 \end{cases}$$

这些方程组的行列式分别为:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

和

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}$$

它们都不等于 0,因此在这两种情况下,都存在唯一解 c_1, c_2 ,我们得到了方程(3)在给定初值 x_0, x_1 时的解。

非齐次方程

二阶非齐次线性递推方程

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c$$

可以像一阶方程那样化为齐次方程。

引入新的未知数 y_n :

$$x_n = y_n + s$$

并选取合适的 s 使常数项消失:

$$s = \frac{c}{1-a-b}$$

一般形式: $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c$,其中 a, b, c 是给定的常数, $n > 1$ 。

构造 x_n 的生成函数 $X(t)$:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$$

$$= x_0 + x_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} (ax_{n-1} + bx_{n-2} + c) t^n$$

$$= x_0 + x_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} ax_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} bx_{n-2} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} ct^n$$

$$= x_0 + x_1 t + at \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n + bt^2 \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n + c \sum_{n=2}^{\infty} t^n$$

$$= x_0 + x_1 t + at\left(X(t) - x_0\right) + bt^2 X(t) - c - ct + c \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

接下来:

$$X(t)=x_0+x_1t+at(X(t)-x_0)+bt^2X(t)-c-ct+c\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

考虑到 $\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$,我们得到

$$X(t)=X(t)(at+bt^2)+x_0+x_1t-atx_0-c-ct+\frac{c}{1-t}$$

$$X(t)(1-at-bt^2)=\frac{(1-t)(x_0+x_1t-atx_0-c-ct)+c}{1-t}$$

$$X(t)=\frac{(1-t)(x_0+x_1t-atx_0-c-ct)+c}{(1-t)(1-at-bt^2)}$$

因此:

$$X(t)=\frac{(1-t)\left(x_0+x_1t-atx_0-c-ct\right)+c}{(1-t)\left(1-at-bt^2\right)}$$

如前所述,方程 $\alpha^2-a\alpha-b=0$ (4)称为**特征方程**。这里有 4 种情况:

1. $a^2+4b\neq 0, a+b\neq 1$,则 $1-at-bt^2=(1-\alpha_1t)(1-\alpha_2t)$,其中 α_1 和 α_2 是方程(4)的根,并且 α_1 和 α_2 不同且不等于 1。
2. $a^2+4b=0, a+b\neq 1$,则方程(4)有一个根 $\alpha_1\neq 1$,且 $1-at-bt^2=(1-\alpha_1t)^2$ 。
3. $b=1-a, a\neq 2$,则方程(4)的一个根等于 1,另一个根 $\alpha_1=\frac{1}{a-1}$,即

$1-at-bt^2=(1-\alpha_1t)(1-t)$ 。

4. $a=2, b=-1$,则 $1-at-bt^2=1-2t+t^2=(1-t)^2$ 。

用类似的推理,我们可以计算出每种情况下通解的形式:

1. $x_n=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n+c_3$
2. $x_n=(c_1+nc_2)\alpha_1^n+c_3$
3. $x_n=c_1\alpha_1^n+c_2+nc_3$
4. $x_n=c_1+nc_2+n^2c_3$

根据 x_0 和 x_1 (以及由公式 $x_2=ax_1+bx_0+c$ 计算出的 x_2)的值,可以用不定系数法计算出具体的常数。

斐波那契数

莱昂纳多 · 斐波那契(Leonardo Fibonacci,1170–1250),也被称为比萨的莱昂纳多(Leonardo Pisano)。

在将阿拉伯数字十进制记数法引入欧洲方面发挥了重要作用。

发现了以他名字命名的数列。

斐波那契数是数列

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

中的元素,从第三项开始,每一项都等于前两项之和:

1 = 1 + 0,

2 = 1 + 1,

3 = 2 + 1,

5 = 3 + 2,

...

如果用 F_n 表示第 n 项($n = 0, 1, 2, \ldots$),我们得到关系式

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

这是二阶线性递推方程。

还有初值

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

可以求出斐波那契数的通项公式。

特征方程

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

有两个根

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

通解形如

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

将初值代入,得到关于 c_1 和 c_2 的方程组:

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=1 \end{cases}$$

求得

$$c_1=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

得到斐波那契数通项公式:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

例子 稀疏词

由 0,1 两个字母构成的、不含两个连续 1 的词称为稀疏词。

词 0100101000101 是稀疏的,而词 0101100011 和 0011110 不是稀疏的。

设长为 n 的稀疏词的个数为 U_n 。

对于较小的 n ,我们有:

n	0	1	2	3	4
Разреженные слова	λ	0 1	00 01 10	000 001 010 100 101	0000 0001 0010 0100 0101 1000 1001 1010
U_n	1	2	3	5	8

U_5 等于多少?

如果 α 是一个长度为 5 并以 0 开头的稀疏词,那么

$$\alpha=0\beta\,,$$

其中 β 是长度为 4 的稀疏词。

有 8 个这样的词:

00000
00001
00010
00100
00101
01000
01001
01010

如果 α 以 1 开头,那么第二个字母必须是 0,并且

$$\alpha = 10\gamma\,,$$

其中 γ 是长度为 3 的稀疏词。

有 5 个这样的词:

10000
10001
10010
10100
10101

总的来说,我们得到 $U_5 = U_3 + U_4 = 5 + 8 = 13$ 。

一般情况下,设 α 是一个长度为 n 的稀疏词。

- 如果 α 以 0 开头,那么 $\alpha = 0\beta$,其中 β 是长度为 $n-1$ 的稀疏词。有 U_{n-1} 个这样的词。
- 如果 α 以 1 开头,那么第二个字母必须是 0,并且 $\alpha = 10\gamma$,其中 γ 是长度为 $n-2$ 的稀疏词。有 U_{n-2} 个这样的词。

我们得到递推关系:

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}, \quad n \geqslant 2$$

这与斐波那契数的递推关系相同,但初始值不同: $U_0 = 1$, $U_1 = 2$ 。

可以注意到, U_0 和 U_1 恰好与两个连续的斐波那契数一致:

$$U_0 = F_2, \quad U_1 = F_3.$$

因此,

$$U_n = F_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$