Дискретная математика

Лекция 4

Мокеев Дмитрий Борисович

Множества

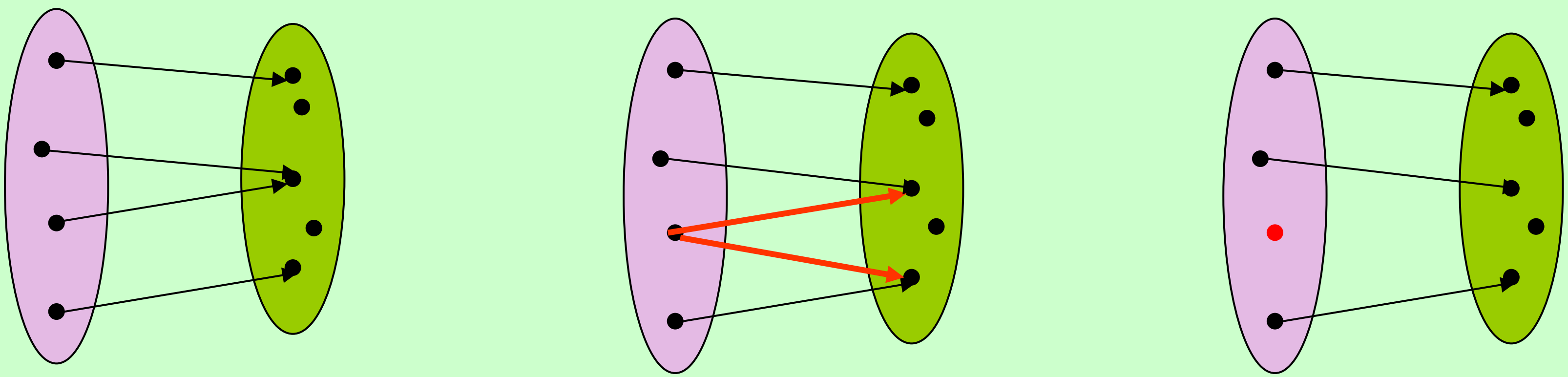
и

отношения

Функции

Отношение f между множествами A и B называется Функцией (отображением), если

$$\forall x \in A \; \exists! \, y \in B, x f y.$$



функция

не функция

тоже не функция

Функции

Если f – функция, то вместо xfy обычно пишут $y = f(x)$.

Здесь x – *аргумент*, он принимает значения из множества A.

y – *значение* функции, это тот (*единственный*) элемент из множества B, для которого выполняется xfy.

Говорят, что f есть *функция из A в B* и пишут

$$f : A \to B.$$

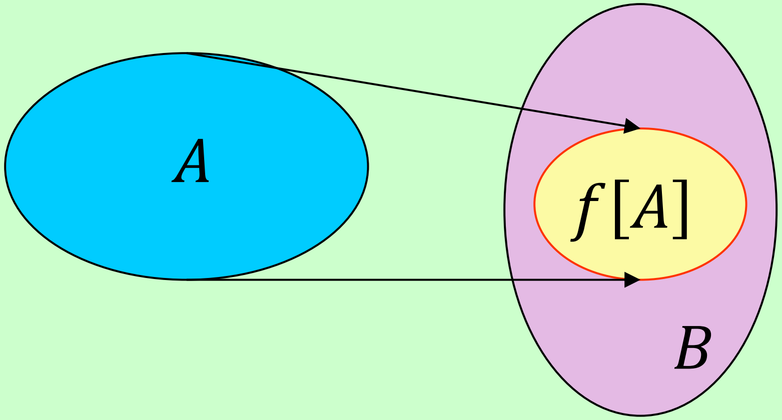
$$f: A \to B$$

A – *область определения* функции f.

B – *область допустимых значений* функции f.

Если $X \subseteq A$, то $f[X] = \{y \in B: \exists x \in X, y = f(x)\}$ – *образ множества* X.

$f[A]$ – *область значений* функции.



Кардинальная степень

Пусть A и B – множества.

Кардинальная степень B^A – операция, результатом которой является множество всех функций $f: A \to B$.

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$$

Записи $f \in B^A$ и $f: A \to B$ эквивалентны

Свойства функций

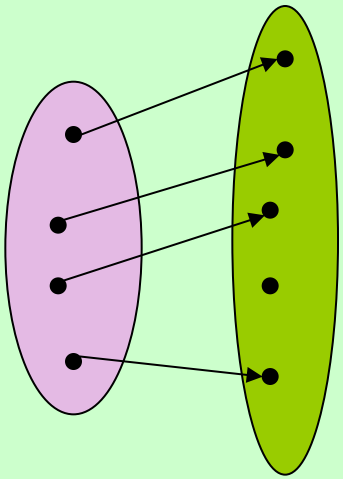
1. Инъективность

Функция $f: A \to B$ называется *инъективной* (*инъекцией*), если

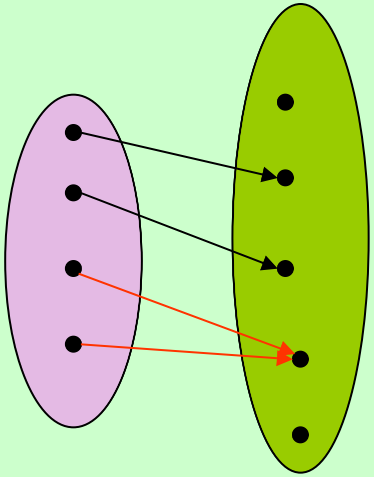
$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$$

наоборот:

$$\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$$



инъекция



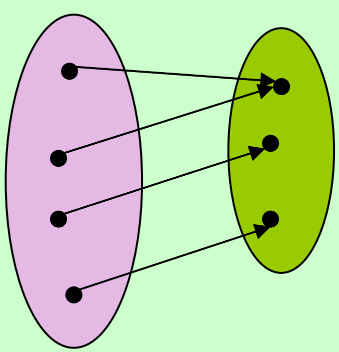
не инъекция

2. Сюръективность

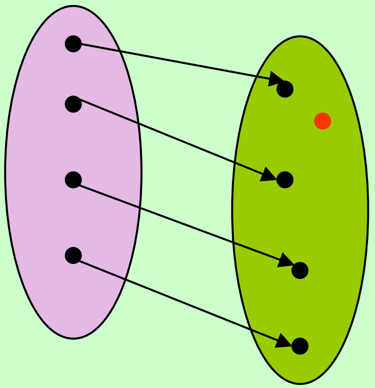
Функция $f : A \to B$ *сюръективна* (*сюръекция*), если

$$\forall y \in B \; \exists x \in A: f(x) = y$$

Иными словами, f – сюръекция, если $B = f[A]$



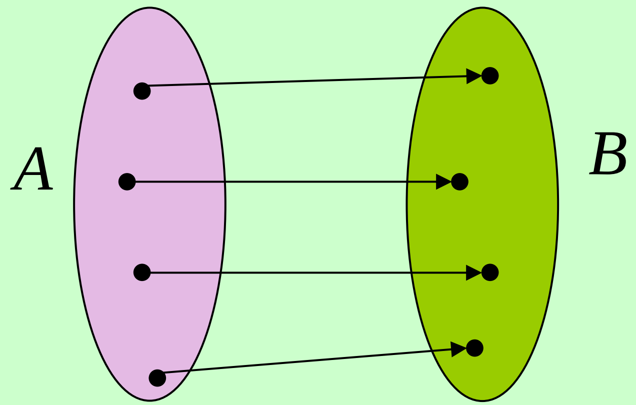
сюръекция



не сюръекция

3. Биективность

Функция $f: A \to B$ называется *биективной* (*биекцией*), если она инъективна и сюръективна.

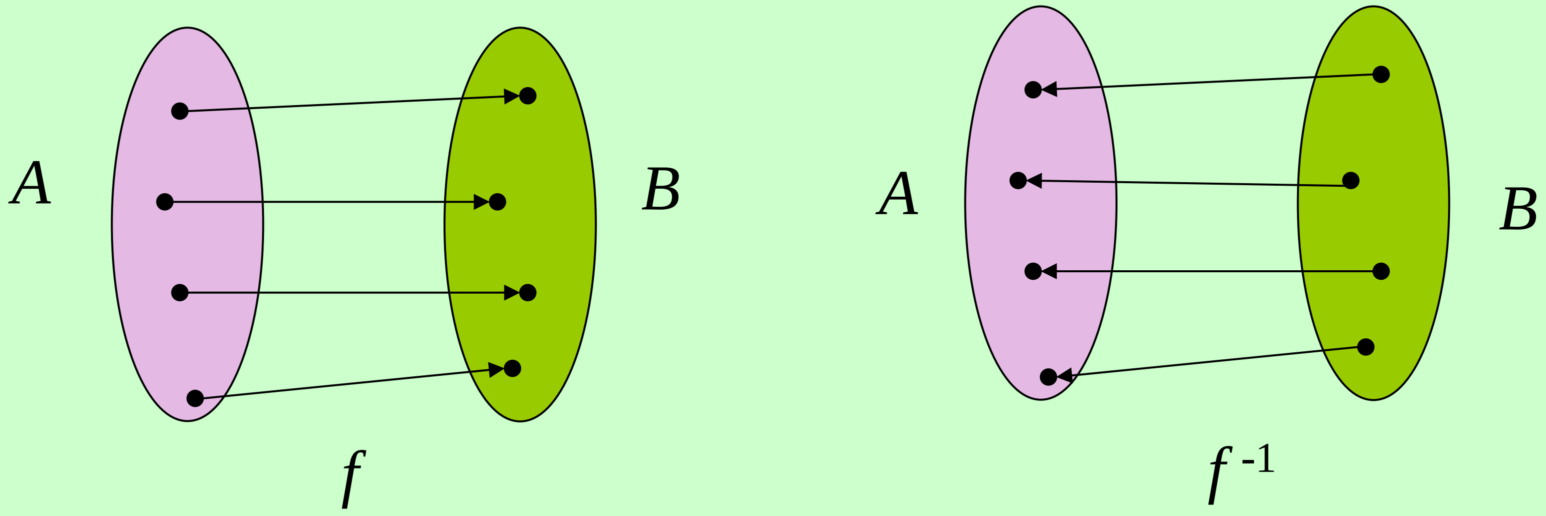


биекция

Биекцию называют также *взаимно однозначным соответствием* или 1-1-*соответствием.*

Если $f: A \to B$ – биекция, то *обратное отношение* f^{-1} также является функцией

$$f^{-1}: B \to A, \qquad \forall x \in A: f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$



Равномощность множеств

Будем говорить, что множества A и B *равномощны*, $A \sim B$, если существует биекция $f: A \to B$.

Свойства:

1. $A \sim A$ $\qquad A \overset{id_A}{\sim} A$

2. $A \sim B \ \to B \sim A$ $\qquad A \overset{f}{\sim} B \ \to B \overset{f^{-1}}{\sim} A$

3. $A \sim B \wedge B \sim C \ \to A \sim C$ $\qquad A \overset{f}{\sim} B \wedge B \overset{g}{\sim} C \to A \overset{g \circ f}{\sim} C$

Ещё свойства:

- $A \sim B \ \rightarrow A \times C \sim B \times C, A^C \sim B^C, C^A \sim C^B$
  - Пусть $A \overset{f}{\sim} B$
    тогда $A \times C \overset{g}{\sim} B \times C$, где $g(x, y) = (f(x), y)$
  - Пусть $A \overset{\varphi}{\sim} B, f \in A^C$ (то есть $f: C \rightarrow A$),
    тогда $A^C \overset{\psi}{\sim} B^C$, где $\psi(f) = \varphi \circ f$.
  - Пусть $A \overset{\varphi}{\sim} B, f \in C^A$(то есть $f: A \rightarrow C$),
    тогда $C^A \overset{\psi}{\sim} C^B$, где $\psi(f) = f \circ \varphi^{-1}$.
- $A \times B \sim B \times A$
  - $A \times B \overset{f}{\sim} B \times A$, где $f(x, y) = (y, x)$

- $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$
- $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$
- $(C^B)^A \sim C^{A \times B}$

Пример

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

Доказательство:

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{если } x \text{ чётно} \\ \dfrac{1-x}{2}, & \text{если } x \text{ нечётно} \end{cases}$$

Поскольку для функции f существует обратная функция

$f^{-1}(y) = \begin{cases} 2y, \text{если } y > 0 \\ 1 - 2y, \text{если } y < 0 \end{cases}$, то она является биекцией.

Таким образом, $\mathbb{N} \overset{f}{\sim} \mathbb{Z}$.

Пример

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Доказательство:
Рассмотрим функцию $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(x, y) = 2^{x-1}(2y - 1)$

Покажем, что f – инъекция:
Пусть $f(x_1, y_1) = 2^{x_1-1}(2y_1 - 1) = 2^{x_2-1}(2y_2 - 1) = f(x_2, y_2)$
Предположим, что $x_1 \neq x_2$. Без ограничения общности, будем считать, что $x_1 > x_2$. Разделим равенство на 2^{x_2-1}

$$2^{x_1-x_2}(2y_1 - 1) = 2y_2 - 1$$

Левая часть равенства чётна, а правая нечётна.
Значит $x_1 = x_2$, но тогда $2y_1 - 1 = 2y_2 - 1 \to y_1 = y_2 \to (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

<u>Пример</u>

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Доказательство:
Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(x, y) = 2^{x-1}(2y - 1)$

Покажем, что f – сюръекция:
Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\exists (x, y)\colon f(x, y) = n$

- n нечётное $\to 2^{x-1} = 1 \to x = 1, y = \frac{n+1}{2}$.
- n чётное, тогда выберем наибольшее k такое, что $2^k \mid n$. Тогда $n = 2^k s$, причём $s \in \mathbb{N}$ нечётно, иначе k не наибольшее $\to x = k + 1, y = \frac{s+1}{2}$

Таким образом, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \overset{f}{\sim} \mathbb{N}$

Вложенность множеств

Будем говорить, что множество A *вкладывается* в множество B, $A \precsim B$, если существует инъекция $f: A \to B$.

Свойства:

0. $A \subseteq B \to A \precsim B$ $\qquad A \overset{id_A}{\precsim} B$
1. $A \precsim B \to \exists C \subseteq B: A \sim C$ $\qquad A \overset{f}{\precsim} B \to C = f[A]$
2. $A \precsim A$ $\qquad A \overset{id_A}{\precsim} A$
3. $A \precsim B \wedge B \precsim C \leftrightarrow A \precsim C$ $\qquad A \overset{f}{\precsim} B \wedge B \overset{g}{\precsim} C \to A \overset{g \circ f}{\precsim} C$
4. $A \sim B \to A \precsim B \wedge B \precsim A$ $\qquad A \overset{f}{\sim} B \to A \overset{f}{\precsim} B \wedge B \overset{f^{-1}}{\precsim} A$

5. **Теорема Кантора-Бернштейна-Шрёдера (К.Б.Ш.)**
   $A \precsim B \wedge B \precsim A \to A \sim B$

Пример: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

Доказательство:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \lesssim \mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{Q} \leftrightarrow x$ единственным образом представляется в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^3$

$f(x) = \left(|m| + 1, n, s(m)\right)$, где $s(m) = \begin{cases} 1, \text{если } m > 0 \\ 2, \text{если } m < 0 \end{cases}$.

f – инъекция, то есть $\mathbb{Q} \overset{f}{\lesssim} \mathbb{N}^3$.

Из свойств равномощности и предыдущего примера:

$\mathbb{N}^3 = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Таким образом, $\mathbb{N}^3 \overset{g}{\sim} \mathbb{N}$

Итак, $\mathbb{Q} \overset{f}{\lesssim} \mathbb{N}^3 \overset{g}{\lesssim} \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \overset{g \circ f}{\lesssim} \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

Кардинальные числа

Кардинальное число (мощность) множества $|A|$ — характеристика множеств, обобщающая понятие количества элементов множества.

$|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$.
$|A| \leq |B| \Leftrightarrow A \lesssim B$.
$|A| < |B| \Leftrightarrow A \lnsim B \Leftrightarrow A \lesssim B \land A \nsim B$.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Множество A *конечно*, если $\exists n \in \mathbb{N}_0, A \sim \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
В этом случае считаем, что $|A| = n$.

Множество A *бесконечно*, если $\exists B: B \subsetneq A \land B \sim A$

Теорема. Если A и B конечные множества, $|A| = |B|$, то любая инъекция $f: A \to B$ является биекцией.

Доказательство.

Пусть $f: A \to B$ – инъекция, но не сюръекция. Тогда $f[A] \subsetneq B$ и, поскольку A и B конечны, $|f[A]| < |B|$.

Но $f: A \to f[A]$ – биекция, то есть $A \overset{f}{\sim} f[A] \nsim B$, что противоречит утверждению $|A| = |B|$.

Таким образом, f – сюръекция, а значит биекция.

Счётные множества

Множество A называется *счётным*, если $A \sim \mathbb{N}$ (то есть $|\mathrm{A}| = |\mathbb{N}|$), в противном случае оно *несчётное*.

Если $A \overset{f}{\sim} \mathbb{N}$, то элементы множества A можно расположить в бесконечную последовательность $f(1), f(2), f(3), \dots$.

Обратно: если существует такая последовательность, содержащая каждый элемент множества A один раз, то A счётно.

Примеры

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счётно.
- $\mathbb{Q}$ счётно.

- $\mathbb{N}_0$ счётно. $\mathbb{N}_0 \overset{f}{\sim} \mathbb{N}$, где $f(x) = x + 1$.

- $\mathbb{Z}$ счётно.

Все целые числа можно расположить в последовательность:

0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, … .

- $\mathbb{A}$ – множество *алгебраических* чисел – счётно.

Теорема. *Если A счётно и $A \lesssim B$, то B бесконечно.*

Доказательство
Пусть B конечно, тогда $\exists n \in \mathbb{N}_0 : B \sim \underline{n}$.
Тогда: $\underline{n+1} \lesssim \mathbb{N} \sim A \lesssim B \sim \underline{n} \Rightarrow \underline{n+1} \lesssim \underline{n}$. Но $\underline{n} \subsetneq \underline{n+1} \rightarrow \underline{n} \lnsim \underline{n+1}$. Противоречие.

Теорема. *Если A счётно и $B \lesssim A$, то B конечно или счётно.*

$|\mathbb{N}|$ обозначается символом $\aleph_0$ («алеф-нуль»). То есть $\aleph_0$ – это кардинальное число любого счётного множества.

Мощность любого бесконечного множества $\geq \aleph_0$

Свойства счётных множеств

- Объединения конечного или счётного числа счётных множеств счётны;

$$|A_1| = \dots = |A_n| = \aleph_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \aleph_0$$

- Прямые произведения конечного числа счётных множеств счётны;

$$|A_1| = \dots = |A_n| = \aleph_0 \quad \Rightarrow \quad |A_1 \times \dots \times A_n| = \aleph_0$$

- Множество всех *конечных* подмножеств счётного множества счётно.

Теорема. *Множество* $\mathbb{R}$ *несчётно.*

Докажем, что подмножество множества $\mathbb{R}$, интервал $[0,1]$, несчетно.

Предположим, что $\mathbb{N} \overset{f}{\sim} [0,1]$.
Каждое вещественное число из $[0,1]$ можно представить бесконечной десятичной дробью.
Пусть $f(n) = 0.x_1^n x_2^n x_3^n$ ... .

Выберем для каждого $n = 1, 2, \ldots,$ десятичную цифру $y_n \neq x_n^n$.

Тогда $0.y_1 y_2 y_3$ ... есть вещественное число, отличное от всех элементов последовательности $f(1), f(2), \ldots$.

Континуум

Континуум — мощность (кардинальное число) множества всех вещественных чисел. $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$

Множество называется *континуальным*, если его мощность равна $\mathfrak{c}$.

Свойства:

- $\mathfrak{c} > \aleph_0$
- $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$, то есть если $|A| = \aleph_0$, то $|2^A| = \mathfrak{c}$.
- $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Континуум-гипотеза

Известна также как *первая проблема Гильберта*.

Любое бесконечное подмножество континуального множества является либо счётным, либо континуальным.
(Г. Кантор, 1877)

Другими словами, гипотеза предполагает, что мощность континуума — наименьшая, превосходящая мощность счётного множества, и «промежуточных» мощностей между счетным множеством и континуумом нет.

Теорема Кантора

Теорема Кантора. $|A| < |2^A|$ *для любого множества* A.

Доказательство.

Отображение $f: A \to 2^A$, ставящее в соответствие каждому $x \in A$ множество $f(x) = \{x\}$, является инъекцией.

Значит, $|A| \leq |2^A|$.

Докажем, что не существует биекции из A в 2^A.

Пусть существует $f: A \to 2^A$ – биекция.

Рассмотрим множество $M = \{x \in A: x \notin f(x)\}$

Так как f – биекция, то существует такой элемент $m \in A$, что $f(m) = M$.

$$m \in M \quad \text{или} \quad m \notin M?$$

$$m \notin M \Rightarrow m \notin f(m) \Rightarrow m \in \{x \in A: x \notin f(x)\} \Rightarrow m \in M$$

Аналогично, $m \in M \Rightarrow \cdots \Rightarrow m \notin M$.

Противоречие.

Отношения общего вида

Помимо *бинарных* отношений, определяют также отношения общего вида – когда рассматриваются связи между несколькими (более чем двумя) объектами.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – множества. *n-арное* (*n-местное*) отношение между этими множествами – это любое подмножество множества $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

<u>Пример</u>.

Пусть A – множество городов,
B – множество видов транспорта.

Можно определить следующее отношение $R \subseteq A \times A \times B$:

$(x, y, z) \in R \quad \Leftrightarrow$ из x в y можно попасть посредством z.

$$(\textit{Москва}, \textit{Н. Новгород}, \textit{самолет}) \in R$$

$$(\textit{Н. Новгород}, \textit{Рио-де-Жанейро}, \textit{самокат}) \notin R$$

Пример.

Пусть M – множество всех точек плоскости.
Можно определить следующее отношение R на M^4:

$(x, y, z, u) \in R \Leftrightarrow$ точка x расположена внутри треугольника yzu.

$$(a, b, c, d) \notin R$$

$$(b, a, c, d) \in R$$

$$(b, c, d, a) \in R$$