Дискретная математика

Лекция 5

Мокеев Дмитрий Борисович

Комбинаторика

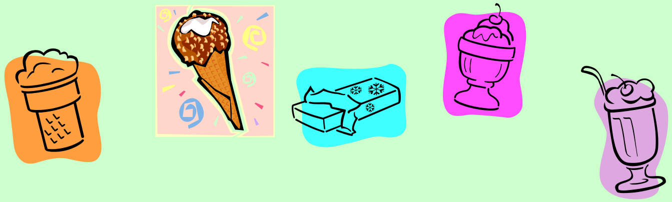
Основные принципы подсчета

1. *Правило равенства*.

Если A и B – конечные множества и существует биекция из A в B, то $|A| = |B|$

2. *Правило суммы*

Имеется 5 сортов мороженого

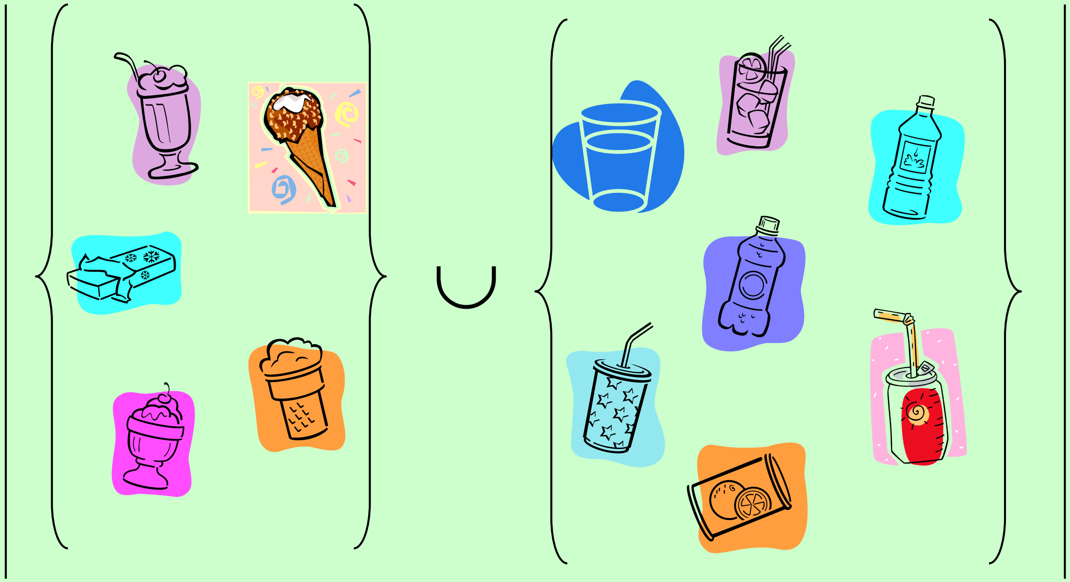


и 7 видов напитков

Каким числом способов можно выбрать что-нибудь одно?

Правило суммы

Если A *и* B *– непересекающиеся конечные множества (то есть* $A \cap B = \emptyset$*), то* $|A \quad B| = |A| + |B|$.



= 5 + 7 = 12

3. *Правило произведения*

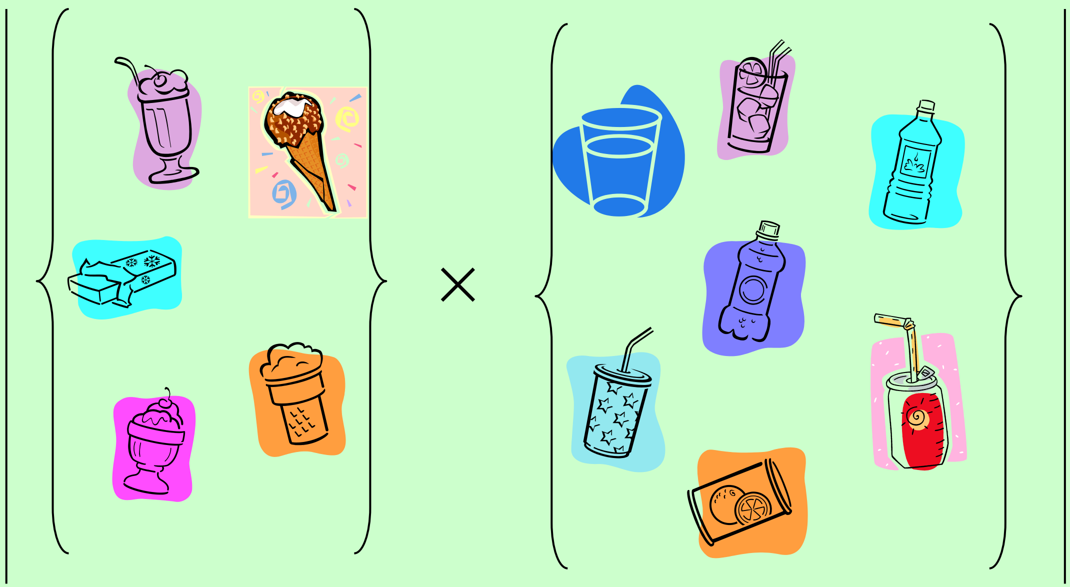
Имеется 5 сортов мороженого

и 7 видов напитков

Каким числом способов можно выбрать и мороженое и напиток?

Правило произведения

Если A *и* B *– конечные множества, то* $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.



$= 5 \cdot 7 = 35$

Для обоснования правила произведения рассмотрим два множества

$A = \{a_1, a_2, \ldots, an\}, \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, bk\}.$

⍰

Построим дерево решений для выбора пары

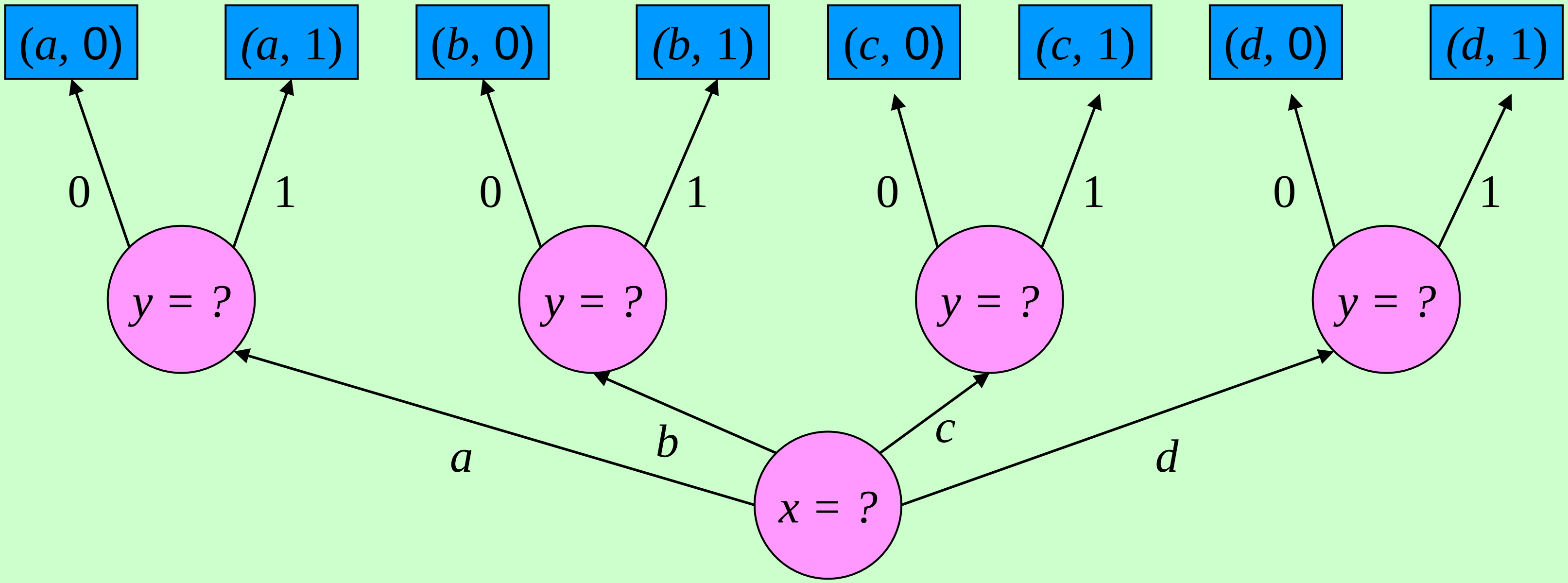
$(x, y) \quad A \times B.$

Корневой узел содержит вопрос “чему равен x?”
Из него выходят n стрелок, соответствующих возможным ответам $a_1, a_2, \ldots, an$. Они ведут в узлы 1-го уровня.
Каждый узел 1-го уровня содержит вопрос:
“чему равен y?” Из каждого из этих узлов выходят k стрелок, соответствующих возможным ответам $b_1, b_2, \ldots, bk$. Эти стрелки ведут в узлы 2-го уровня, листья.

Каждый лист соответствует некоторой паре из $A \times B$.

Имеется n 1-го уровня, из каждого из них выходят k стрелок. Значит, в дереве nk листьев.
Имеется взаимно однозначное соответствие между листьями и парами из $A \times B$. Следовательно, число пар равно $nk = |A| \cdot |B|$.

Пример: $A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{0, 1\}$



Оба правила распространяются на любое число множеств.

Если $A_1, A_2, \dots, Ak$ *– конечные попарно непересекающиеся множества, то*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ \dots \cup Ak| = |A_1| + |A_2| + \ \dots + |Ak|.$$

Если $A_1, A_2, \dots, Ak$ *– конечные множества, то*

$$|A_1 \times A_2 \times \ \dots \times Ak| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Как частный случай правила произведения при $A_1 = A_2 = \ldots = Ak$ получаем:

Теорема. *Число последовательностей длины* n, *состоящих из элементов множества* A *мощности* k *равно* k^n.

Принцип последовательного выбора

Пусть набор $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ *образуется путем последовательного выбора элементов* $x_1, x_2, \dots, x_k$, причем

- *элемент* x_1 *можно выбрать* n_1 *способами;*
- *при любом* x_1 *элемент* x_2 *можно выбрать* n_2 *способами;*
- *при любых* x_1, x_2 *элемент* x_3 *можно выбрать* n_3 *способами;*

...

- *при любых* $x_1, x_2, \dots, x_{k\text{-}1}$ *элемент* x_k *можно выбрать* n_k *способами.*

Тогда весь набор можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ *способами.*

Доказать можно с помощью дерева решений.

Слова

Алфавит – это множество *букв* (*символов*).
Выписывая буквы в некотором порядке, получаем *слово*.

Например, из букв алфавита $A = \{a, b, c\}$ можно образовать слова: acb, $aaaa$, bab, cca, b, и т.д.

Существует *пустое слово*, не содержащее ни одной буквы. Оно обозначается λ.

Фактически *слово* есть *набор* символов, записанный без скобок и запятых.

Иногда вместо термина *слово* употребляют термин *строка*.

Длина слова – это число букв в нем.

Множество всех слов длины n в алфавите A обозначается A^n.

В частности, $A^0 = \{\lambda\}$, $A^1 = A$.

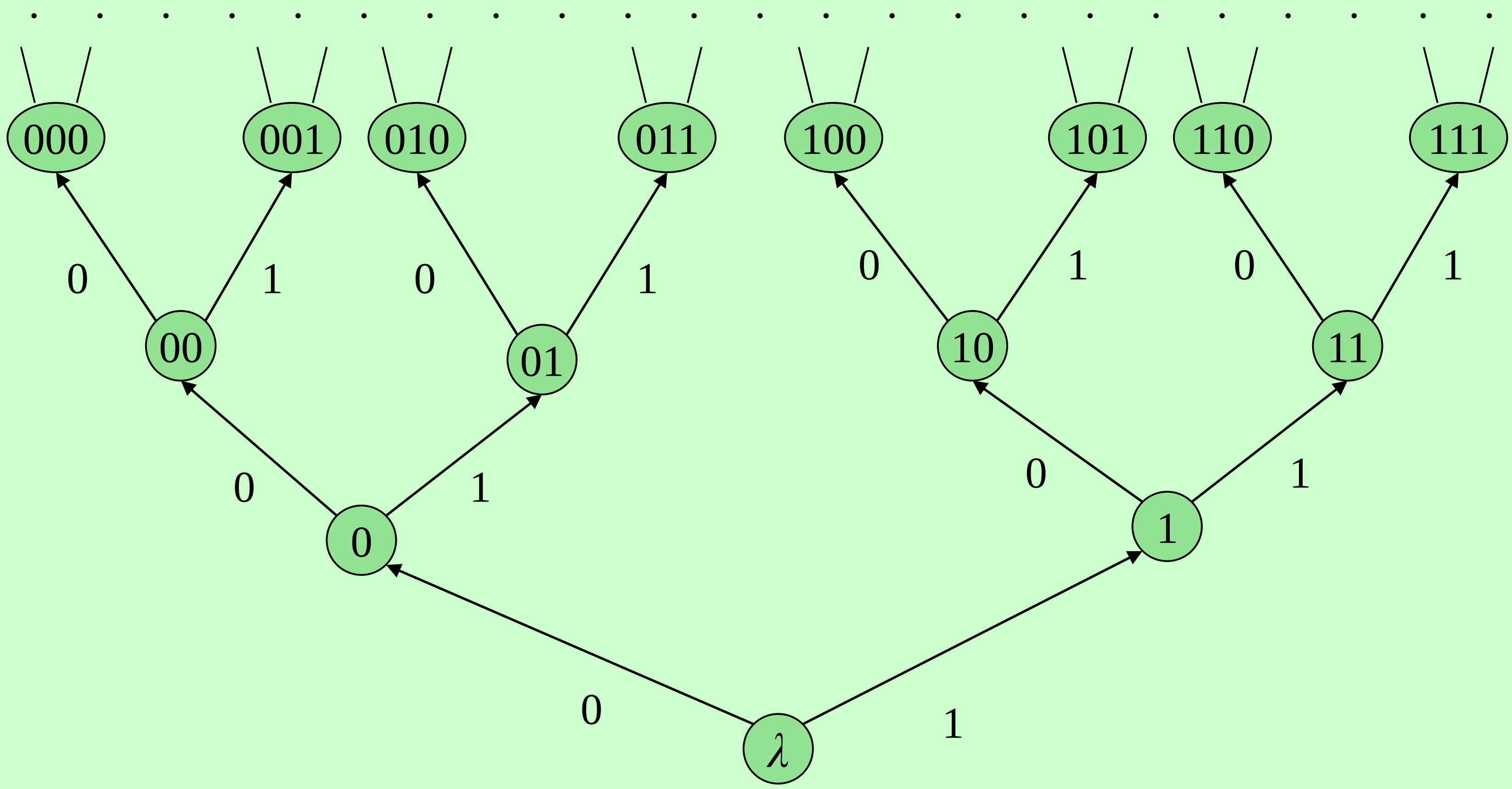
Число слов длины n в алфавите мощности k равно числу соответствующих наборов, т.е. k^n.

Множество всех слов в алфавите A обозначается A^*.

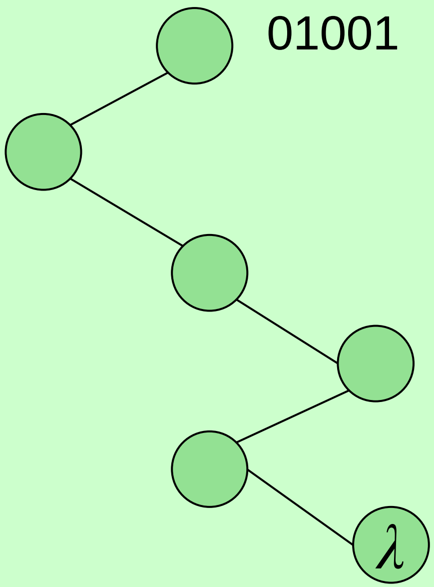
Таким образом, $A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n \cup \ldots$

Представление бинарных слов

Слова в алфавите {0,1} (*бинарные слова*) можно представлять с помощью бинарного дерева. Буквы 0, 1 сопоставляются двум стрелкам, выходящим из узла.



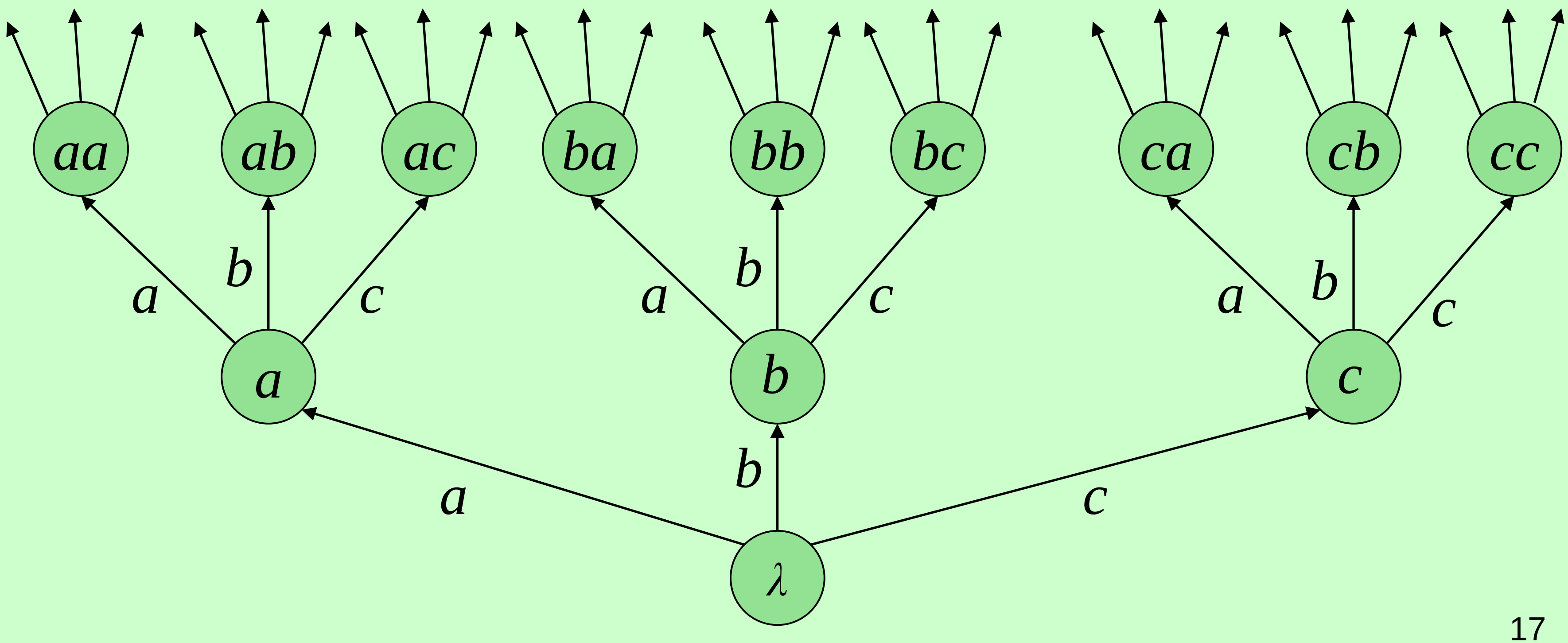
Левая стрелка – всегда 0, правая – 1. Двигаясь вдоль пути из корня в какой-нибудь узел, Можно прочитать некоторое слово. Это слово представляется данным узлом.



Множество всех бинарных слов представляется бесконечным бинарным деревом. Для каждого слова в дереве имеется единственный узел, представляющий это слово.

С помощью дерева можно представлять слова в любом алфавите. Если алфавит состоит из k букв, то используется k-*арное* дерево, в котором из каждого узла выходят k стрелок, помеченных различными буквами.

$$A = \{a, b, c\}$$



Лексикографический порядок

Почему в списке стран мира Австралия располагается раньше, чем Австрия?

Потому что список составлен в *алфавитном порядке.*

Что это значит?

Пусть A – конечный алфавит с заданным на нем линейным порядком (*алфавитный порядок на A*). Этот порядок будем обозначать $\leq$.

Если $x \leq y$ и $x \quad y$, то пишем $x < y$.

Лексикографический порядок – это распространение алфавитного порядка на множество A^*.

Для лексикографического порядка применяем те же обозначения $\leq, <$.

Сначала определим лексикографический порядок для слов одинаковой длины.

Пусть $\alpha = a_1 a_2 \ldots an$ и $\beta = b_1 b_2 \ldots bn$ – слова из A^n.

Слово α *лексикографически меньше* слова β,

$$\alpha < \beta,$$

если для некоторого i

$$a_1 = b_1, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1},$$

$$a_i < b_i.$$

Доказательство транзитивности: $\alpha \le \beta,\ \ \beta \le \gamma \ \Rightarrow\ \alpha \le \gamma$

Если $\alpha = \beta$ или $\beta = \gamma$, утверждение очевидно.
Пусть $\alpha \ne \beta$ и $\beta \ne \gamma$.

Пусть $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n,\quad \beta = b_1 b_2 \ldots b_n,\quad \gamma = c_1 c_2 \ldots c_n$.

Тогда

$\alpha \le \beta \Rightarrow$ существует такое i, что $a_1 a_2 \ldots a_{i\text{-}1} = b_1 b_2 \ldots b_{i\text{-}1}$ и $a_i < b_i$,

$\beta \le \gamma \Rightarrow$ существует такое k, что $b_1 b_2 \ldots b_{k\text{-}1} = c_1 c_2 \ldots c_{k\text{-}1}$ $b_k < c_k$.

Рассмотрим два случая: $i \le k$ и $i > k$.

- $i \le k$:

$$a_1 = b_1 = c_1,$$
$$\vdots$$
$$a_{i-1} = b_{i-1} = c_{i-1},$$
$$a_i < b_i \le c_i,$$

таким образом, $a_1 = c_1, \ldots, a_{i\text{-}1} = c_{i\text{-}1}, \ a_i < c_i,$
следовательно, $\alpha < \gamma$.

- $i > k$ аналогично:

$$a_1 = b_1 = c_1,$$
$$\vdots$$
$$a_{k-1} = b_{k-1} = c_{k-1},$$
$$a_k = b_k < c_k,$$

и опять $\alpha < \gamma$.

Лексикографический порядок является *линейным*.

Перечислим бинарные слова длины 3 в лексикографическом порядке:

Слово	Номер
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

$$Номер(a_1 a_2 a_3) = 4a_1 + 2a_2 + a_3$$

$$= 2^2 a_1 + 2^1 a_2 + 2^0 a_3$$

Общий случай: бинарные слова длины n

Со словом $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ ассоциируем целое число

$$N(\alpha) = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} a_2 + \ldots + 2^1 a_{n-1} + 2^0 a_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} a_i .$$

Наименьшее значение есть

$$N(00\ldots0) = 0,$$

а наибольшее

$$N(11\ldots1) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^0 = 2^n - 1.$$

Теорема. *Функция* N *является биекцией из* $\{0,1\}^n$ *в* $\{0,1,\ldots,2^n-1\}$.

Доказательство. Докажем сначала инъективность.

Точнее, докажем, что из $\alpha < \beta$ следует $N(\alpha) < N(\beta)$.

Действительно, пусть $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, $\beta = b_1 b_2 \ldots b_n$ и $\alpha < \beta$.
Тогда существует такое k, что $a_1 a_2 \ldots a_{k\text{-}1} = b_1 b_2 \ldots b_{k\text{-}1}$,
$a_k < b_k$, то есть $a_k = 0$, $b_k = 1$.

Тогда

$$N(\alpha) - N(\beta) = (2^{n-1} a_1 + \ldots + 2^0 a_n) - (2^{n-1} b_1 + \ldots + 2^0 b_n) =$$

$$= (2^{n-k-1} a_{k+1} + \ldots + 2^0 a_n) - (2^{n-k} + 2^{n-k-1} b_{k+1} + \ldots + 2^0 b_n) \le$$

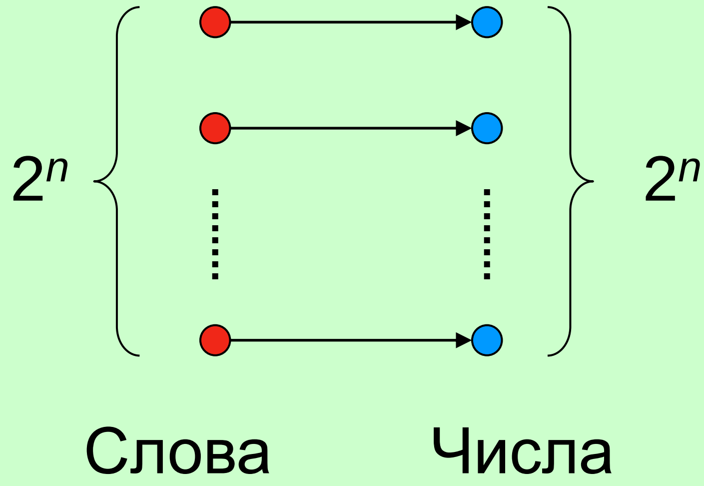
$$\le (2^{n-k-1} + \ldots + 2^0) - 2^{n-k} = 2^{n-k} - 1 - 2^{n-k} = -1.$$

Следовательно, $N(\alpha) < N(\beta)$.

Итак, функция N инъективна.

Множества $\{0,1\}^n$ и $\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ имеют одинаковую мощность 2^n.

Отсюда следует, что эта функция сюръективна.



Вычисление функции N^{-1}

Как по номеру слова вычислить само слово?
Пусть номер слова $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ равен

$$x = N(\alpha) = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} a_2 + \dots + 2^1 a_{n-1} + 2^0 a_n .$$

Нужно найти $a_1, a_2, \dots, a_n$, если известен x.

Фактически речь идет о вычислении двоичного представления числа x.

Начнем с первой буквы a_1.
Если $a_1 = 0$, то

$$N(\alpha) \le 2^{n-2} + \ldots + 2^0 = 2^{n-1} - 1,$$

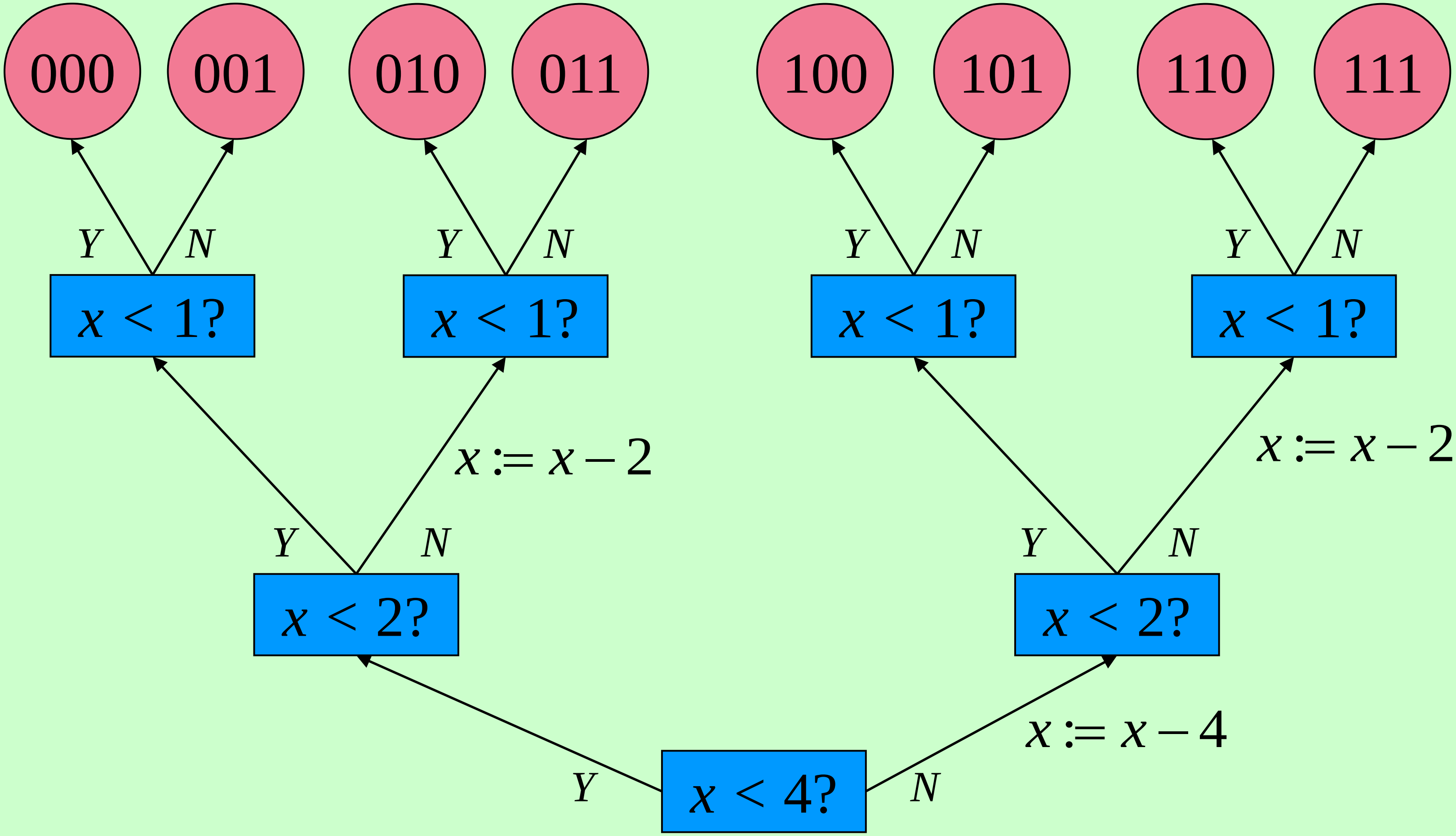
а если $a_1 = 1$, то

Таким образом, a_1 находим, сравнивая x и 2^{n-1}:

если $x \ge 2^{n-1}$, то $a_1 = 1$, иначе $a_1 = 0$.

Затем вычитаем $a_1 2^{n-1}$ из x и аналогичным образом находим a_2, сравнивая полученное число с 2^{n-2}, и т.д.

Для $n = 3$ этот алгоритм можно представить в виде дерева решений:



В общем виде его можно описать псевдокодом:

Вход: $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{N}_0$, $x < 2^n$

Выход: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_i \in \{0, 1\}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$

for $i = 1$ **to** n **do**
    if $x < 2^{n-i}$
    then $a_i := 0$
    else $\{ a_i := 1; \quad x := x - 2^{n-i} \}$

Пример: $x = 11$, $n = 4$

i	вопрос	a_i	x
1	11 < 8 ?	1	3
2	3 < 4 ?	0	3
3	3 < 2 ?	1	1
4	1 < 1 ?	1	0

Общее определение лексикографического порядка

Для слов произвольной (возможно, различной) длины лексикографический порядок определяется следующим образом.

Слово $\alpha = a_1a_2\ldots a_n$ *лексикографически меньше* слова $\beta = b_1b_2...b_m$, если
существует такое i, что $a_1 = b_1,\ldots, a_{i\text{-}1} = b_{i\text{-}1}, a_i < b_i$
или $n < m$ и $a_1 = b_1,\ldots, a_n = b_n$.

Пример: $A = \{a, b, c\}$, $a < b < c$. Тогда

$$bcabc < bcccaab,$$
$$acca < accabca.$$