Дискретная математика

Лекция 2

Мокеев Дмитрий Борисович

Множества

и

отношения

Мультимножества

Мультимножество – это коллекция элементов, в которую каждый элемент может входить больше одного раза.

$\{a, a, b, c, c, c\}$ – мультимножество, состоящее из элементов множества $\{a, b, c\}$;
$\{a, b, b, b, c, c\}$ – другое мультимножество.

Из одного элемента можно построить бесконечно много мультимножеств:

$\{1\}, \{1, 1\}, \{1, 1, 1\}, \ldots$

(a, b) будем называть *парой*, если

$$\forall\, a, b, c, d \colon [(a, b) = (c, d)] \leftrightarrow [a = c\ \wedge\ b = d].$$

$(a, b) = (b, a) \leftrightarrow a = b$

Набор (кортеж) длины n:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \Big(\big(\dots\big((a_1, a_2), a_3\big), \dots\big), a_n\Big).$$

Иными словами, *набором* можно называть коллекцию элементов, расположенных в некотором *порядке*.

Набор vs Множество

1. Порядок элементов в наборе важен:
   $(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1)$, но $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$.

2. Один и тот же элемент может входить в набор несколько раз.
   $(1, 2, 1) \neq (2, 1, 1)$, но $\{1, 2, 1\} = \{2, 1, 1\} = \{1, 2\}$

Прямое (*декартово*) *произведение* двух множеств A и B – это множество всех пар (a, b), где $a \in A, b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

$$\forall A : A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

Декартово произведение n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$:

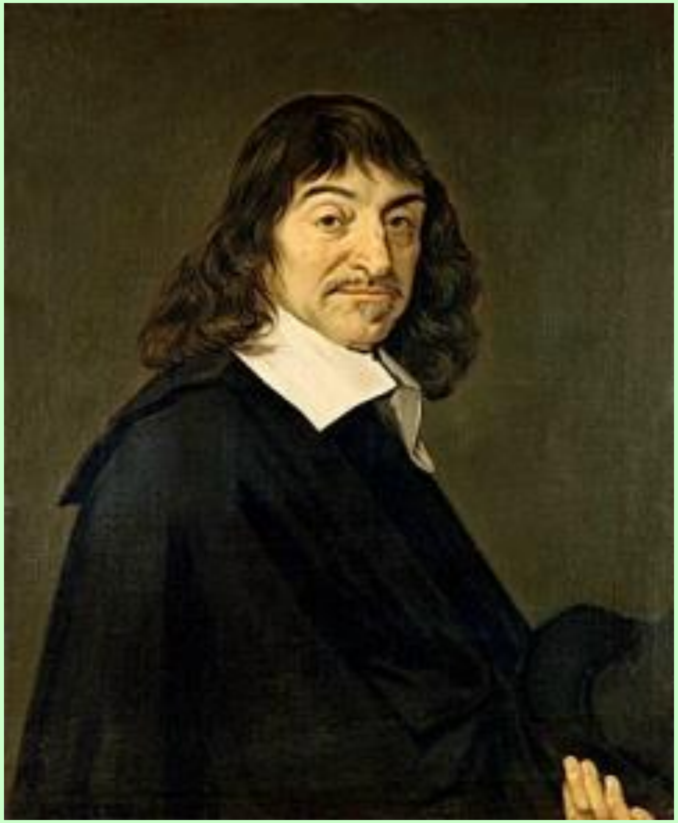
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \dots,\ x_n \in A_n\}.$$

$A \times A = A^2$ – *декартов квадрат* множества A.

$A \times A \times A = A^3$ – *декартов куб* множества A.

и т.д.

Рене Декарт (1596–1650) – французский философ, математик, механик, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.



Автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике, предтеча рефлексологии.

Его именем названа разработанная им прямоугольная система координат.

Примеры

- $A = \{a, b, c\}, \quad B = \{0,1\},$

  $A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\};$

  $A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\};$

  $B^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$

- $A = \{1, 2, \dots, 31\}, \quad B = \{\text{январь}, \text{февраль}, \dots, \text{декабрь}\}$

  $A \times B$ – множество дат типа «10 сентября»

Бинарные отношения

Пусть A и B – множества. *Бинарным отношением* между A и B называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$.

Если $R \subseteq A^2$, говорят, что R – отношение *на множестве* A.

- отношение как множество: $(a, b) \in R$
- отношение как высказывание (*предикат*):

aRb – «a находится в отношении R с b»

Примеры

- A: множество людей,
  B: множество стран,
  отношение R между A и B:
  $x\ R\ y$ означает, что x бывал в стране y.

- A: множество служащих некоторой компании,
  отношение R на A:
  $x\ R\ y$ означает, что x – начальник y.

- A: множество аккаунтов социальной сети,
  отношение R на A:
  $x\ R\ y$ означает, что x и y подписаны друг на друга.

Ещё примеры

- равенство является отношением на любом множестве A

$$id_A = \{(x, x) : x \in A\}$$
$$x = y \Leftrightarrow (x, y) \in id_A$$

- $<$ является отношением на $\mathbb{N}$ (а также на $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$).
  Число 2 находится в отношении $<$ с числом 5,
  но 5 не находится в этом отношении с 2.

Пусть L – множество всех прямых на плоскости.

- отношение $\parallel$ на L: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow l_1$ параллельна l_2;

- отношение $\times$ на L : $l_1 \times l_2 \Leftrightarrow l_1$ пересекается с l_2.

И ещё примеры

Если A – множество, то

- можно задать отношение $\in$ между A и 2^A;
- $\subseteq$ есть отношение на 2^A.

Отношение *делимости* на $\mathbb{Z}$ определяется следующим образом:

x делит y, если $\exists k \in \mathbb{Z}$: $x \cdot k = y$.

Это отношение обозначается так: $x \mid y$ *или* $y \vdots x$.

Табличное представление

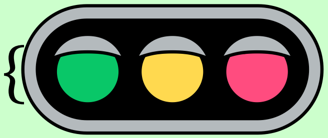
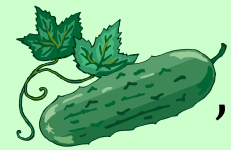
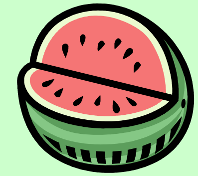
Отношение между конечными множествами можно представить матрицей (прямоугольной таблицей).

Пусть R – отношение между множествами $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Тогда матрица $M = (m_{i,j})$ этого отношения имеет размер $k \times n$.

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если } (a_i, b_j) \in R \\ 0, \text{если} (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Пример

Пусть $A = \{$, , , $\}$,

$B = \{$, , $\}$.

Рассмотрим следующее отношение $R \subseteq A \times B$:

$x\ R\ y \leftrightarrow$ цвет y встречается в x.

Для удобства, обозначим объекты и цвета буквами:

$A = \{\text{с}, \text{т}, \text{о}, \text{а}\}$,
$B = \{\text{к}, \text{ж}, \text{з}\}$.

тогда отношение R можно задать так:

$$R = \{(\text{с}, \text{к}), (\text{с}, \text{ж}), (\text{с}, \text{з}), (\text{т}, \text{к}), (\text{т}, \text{ж}), (\text{о}, \text{з}), (\text{а}, \text{з}), (\text{а}, \text{к})\}$$

или так:

$M =$

	к	ж	з
с	1	1	1
т	1	1	0
о	0	0	1
а	1	0	1

Ещё пример:

матрица отношения делимости на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$:

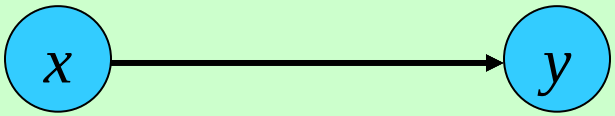
$M =$

	1	2	3	4	6	8
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	1
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	1

Графическое представление

Граф отношения дает визуальное представление отношения. Он строится следующим образом.

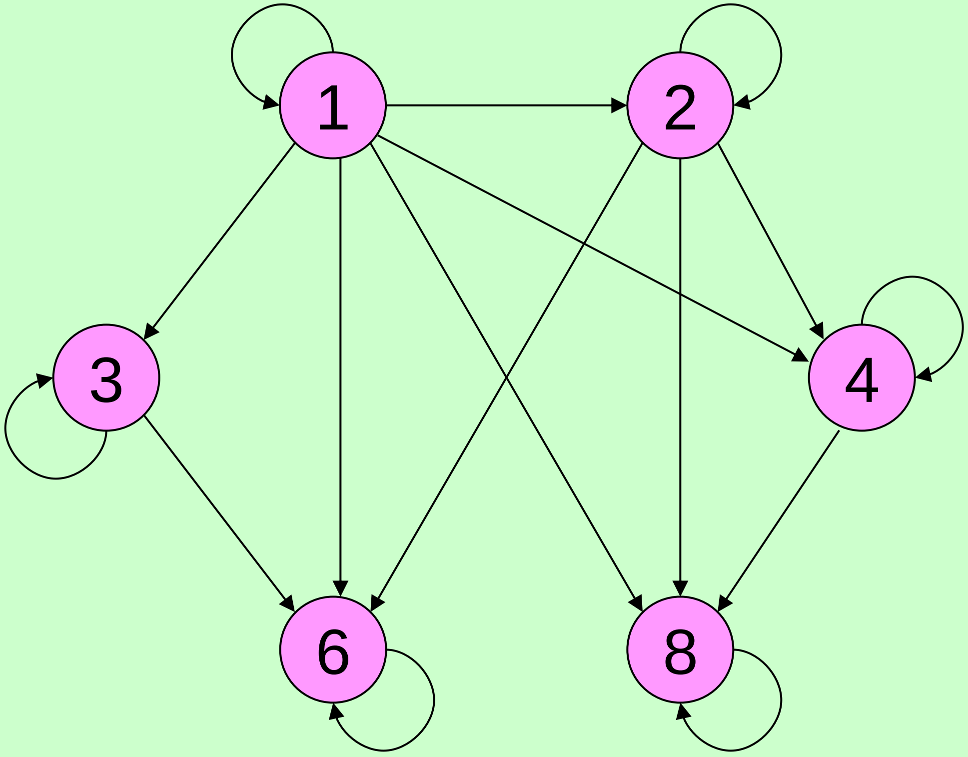
Пусть R – отношение между множествами A и B. Элементы множества $A \cup B$ представляются кружками или другими фигурами. Эти фигуры называются *вершинами* графа. Если xRy, то рисуем стрелку от x к y:



Эти стрелки называются *рёбрами* графа.

Пример:

граф отношения делимости на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$:



Операции над отношениями

1. Так как отношение есть множество (пар), то любые операции над множествами можно применять к отношениям.

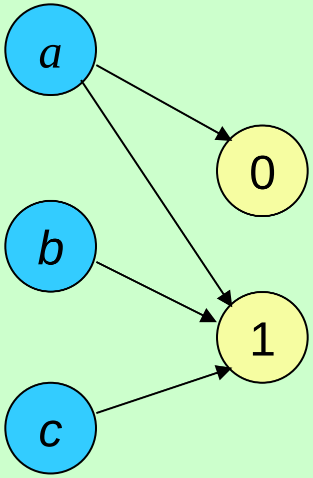
Примеры

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{0,1\}$$

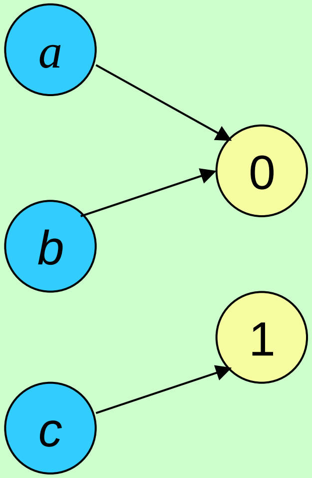
$$R_1 = \{(a,0),\ (a,1),\ (b,1),\ (c,1)\} \qquad R_2 = \{(a,0),\ (b,0),\ (c,1)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,0),\ (a,1),\ (b,0),\ (b,1),\ (c,1)\}$$

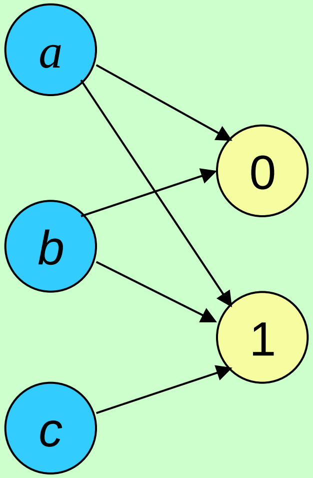
$$R_1 \cap R_2 = \{(a,0),\ \ (c,1)\}$$



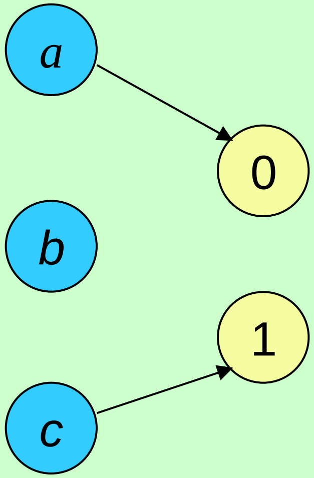
R_1



R_2



$R_1 \cup R_2$



$R_1 \cap R_2$

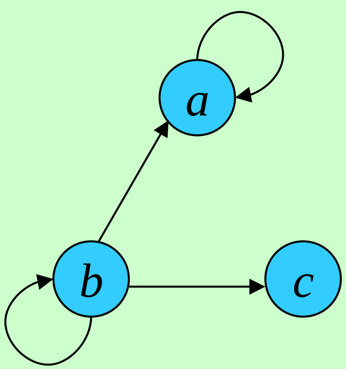
$$A = \{a, b, c\}$$

$$R_1 = \{(a,a),\ (b,a),\ (b,b),\ (b,c)\}$$

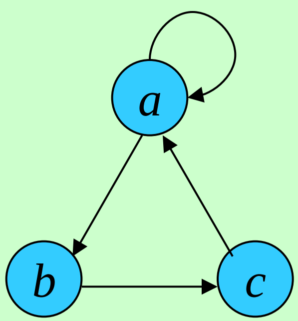
$$R_2 = \{(a,a),\ (a,b),\ (b,c),\ (c,a)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,a),\ (a,b),\ (b,a),\ (b,b),\ (b,c),\ (c,a)\}$$

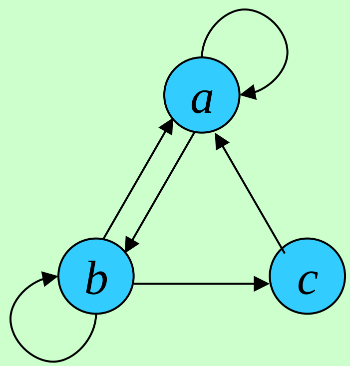
$$R_1 \cap R_2 = \{(a,a),\ \ (b,c)\}$$



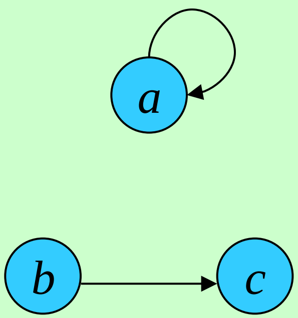
R_1



R_2



$R_1 \cup R_2$

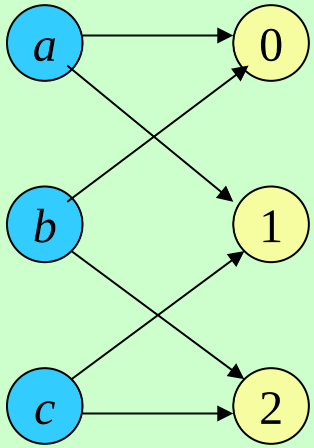


$R_1 \cap R_2$

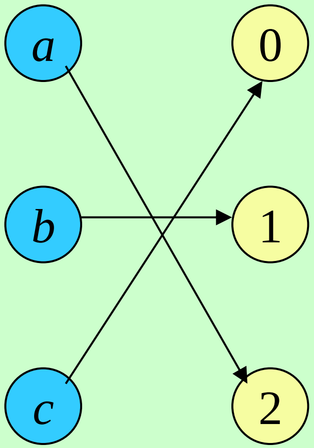
$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{0,1,2\}$$

$$R = \{(a,0),\ (a,1),\ (b,0),\ (b,2),\ (c,1),\ (c,2)\}$$

$$\overline{R} = \{(a,2),\ (b,1),\ (c,0)\}$$



R

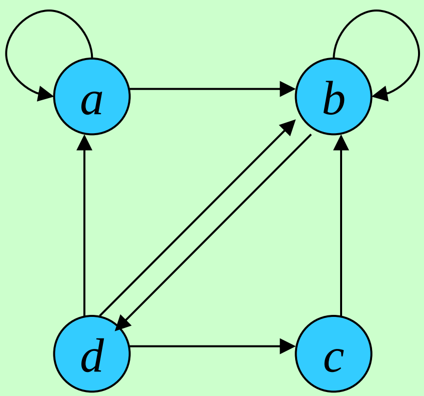


$\overline{R}$

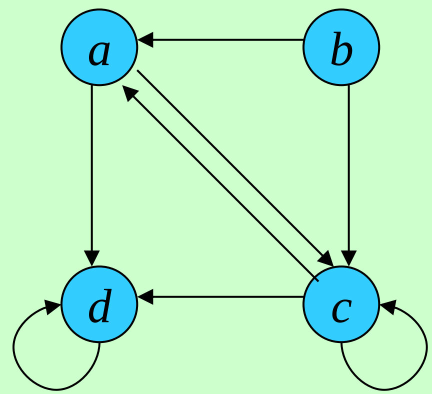
$A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,a),\ (a,b),\ (b,b),\ (b,d),\ (c,b),\ (d,a),\ (d,b),\ (d,c)\}$

$\overline{R} = \{(a,c),\ (a,d),\ (b,a),\ (b,c),\ (c,a),\ (c,c),\ (c,d),\ (d,d)\}$



R



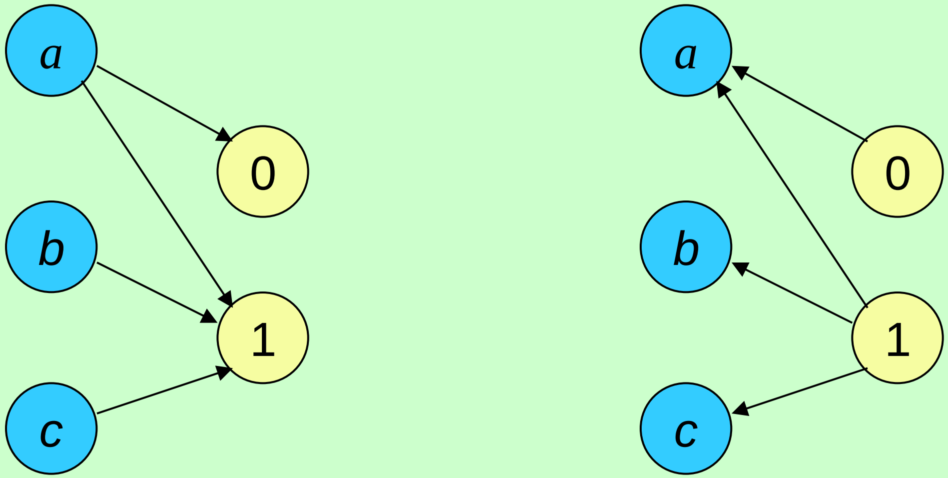
$\overline{R}$

2. Пусть $R \subseteq A \times B$.

Обратное отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$ определяется следующим образом:

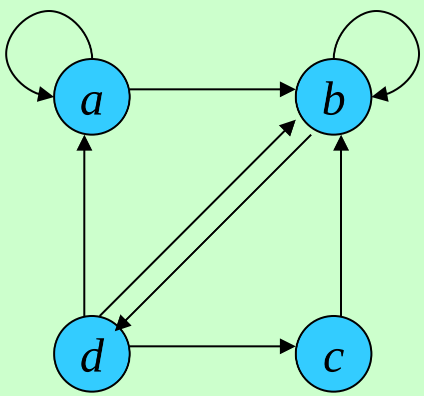
$$R^{-1} = \{(x, y): (y, x) \in R\}.$$

Пример:

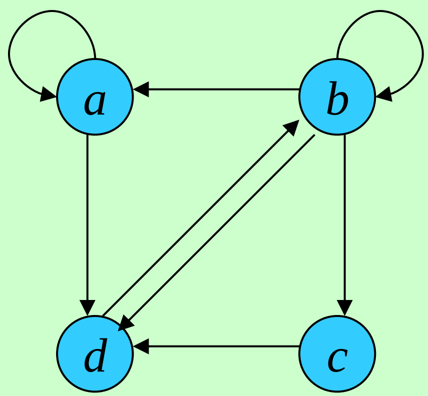


R $\qquad\qquad\qquad$ R^{-1}

Если R – отношение на A, то R^{-1} – тоже отношение на A:



R



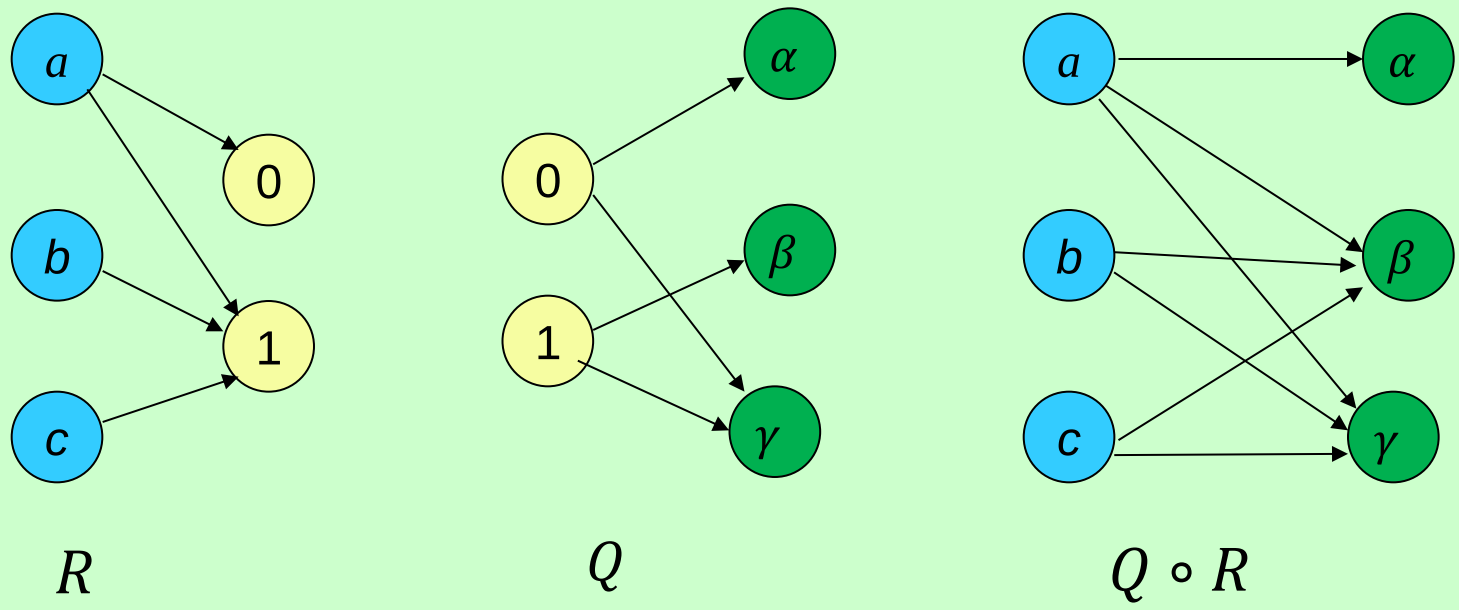
R^{-1}

3. Пусть $R \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$.

Композиция $Q \circ R \subseteq A \times C$ определяется следующим образом:

$$Q \circ R = \{(x, z): \exists y \in B\ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q\}.$$

Пример:

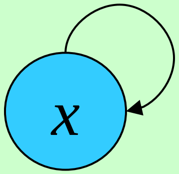


Свойства отношений на одном множестве

Пусть R – отношение на множестве A.

1. R *рефлексивно*, если $\forall x$: xRx.

В графе рефлексивного отношения у каждой вершины имеется *петля*:

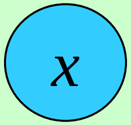


Примеры:

$$=,\ \leq,\ \vdots,\ |,\ \subseteq$$

1.1. Отношение R *антирефлексивно (иррефлексивно)*, если $\forall x$: $x \not R x$.

В графе антирефлексивного отношения ни у одной вершины нет *петли*:



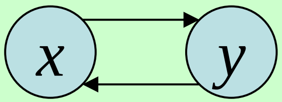
Примеры:

$\neq, <, \perp, \subsetneq$

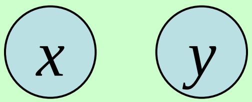
2. Отношение R *симметрично*,

если $\forall x, y$: $xRy \rightarrow yRx$

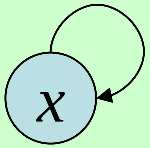
В графе симметричного отношения может быть так:



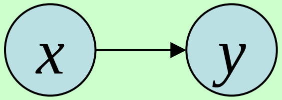
или так:



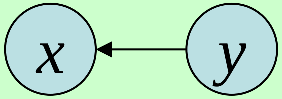
или так:



А так:



или так:



быть *не может*.

<u>Примеры:</u>

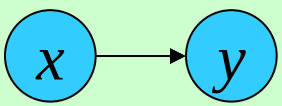
$=, \neq, \parallel, \perp$

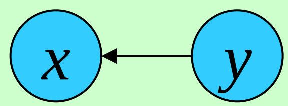
3. Отношение R *антисимметрично*,

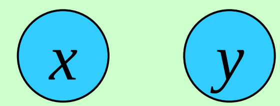
если $\forall x, y$: $xRy \wedge yRx \to x = y$.

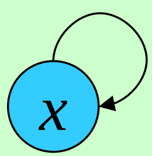
Иначе говоря, если xRy и $x \neq y$, то $y \not R x$.

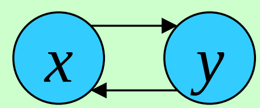
В графе асимметричного отношения может быть так:



или так: 

или так: 

или так: 

. А так: 

быть не может.

<u>Примеры:</u>

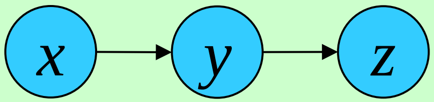
$=, \neq, <, \leq, \vdots, |, \subseteq, \subsetneq$

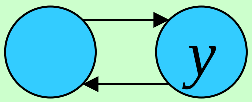
4. Отношение R *транзитивно*, если

$$\forall x, y, z\colon\ xRy \wedge yRz \to xRz.$$

В графе транзитивного отношения:

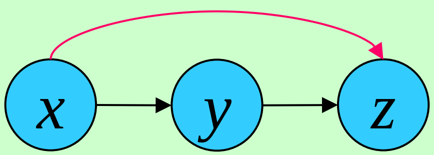
если есть два ребра, составляющие цепочку,

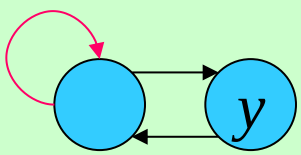




$x = z$

то есть и третье ребро





$x = z$

<u>Примеры:</u>

$$=,\ \neq,\ <,\ \leq,\ \parallel,\ \vdots,\ |,\ \subseteq,\ \subsetneq$$