Дискретная математика

Лекция 1

Мокеев Дмитрий Борисович

Множества

и

отношения

Множество

- *Множество* – это набор каких-либо объектов, рассматриваемый как одно целое.

- Объекты, составляющие множество, называют *элементами.* Все элементы множества *отличаются* друг от друга.

- Порядок элементов в множестве *не имеет значения*.

Понятие множества – одно из фундаментальных математических понятий. Оно используется в любой математической теории.

Понятие множества *не определяется*, а *поясняется* указанием (приблизительных) синонимов: коллекция, класс, совокупность, ансамбль, собрание…

Георг Кантор (1845-1918) – создатель теории множеств, немецкий математик.

Созвездие – множество звезд

Стая – множество птиц

Толпа – множество людей

Команда – множество людей

Сообщество – множество людей

Множества, рассматриваемые в математике, состоят из математических объектов:

- числа
- функции
- точки
- линии
- и т.д.

Обозначения:

- $x \in A$ означает “элемент x *принадлежит* множеству A”
- $x \notin A$ означает “элемент x *не принадлежит* множеству A”

Обозначения:

- $x \in A$ означает “элемент x *принадлежит* множеству A”

- $x \notin A$ означает “элемент x *не принадлежит* множеству A”

Пустое множество не имеет ни одного элемента, оно обозначается знаком $\varnothing$.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*.

Конечное множество может быть задано *перечислением* его элементов. Элементы перечисляются в фигурных скобках:

$A = \{1, 2, 4, 8\}$,

$B = \{x, y, z\}$,

$C = \{$красный, желтый, зеленый$\}$,

$D = \{$понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье$\}$.

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью.*

Мощность множества X обозначается $|X|$.

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью.*

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a, b, c\}| =$$

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью*.

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a, b, c\}| = 3,$$

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью.*

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a, b, c\}| = 3,$$

$$|\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}| =$$

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью*.

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a, b, c\}| = 3,$$

$$|\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}| = 5,$$

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью.*

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a, b, c\}| = 3,$$

$$|\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}| = 5,$$

$$|\emptyset| =$$

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью*.

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a, b, c\}| = 3,$$

$$|\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}| = 5,$$

$$|\emptyset| = 0,$$

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью*.

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a, b, c\}| = 3,$$

$$|\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}| = 5,$$

$$|\emptyset| = 0,$$

$$|\{\emptyset\}| =$$

Число элементов в *конечном* множестве называется его *мощностью*.

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a, b, c\}| = 3,$$

$$|\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}| = 5,$$

$$|\emptyset| = 0,$$

$$|\{\emptyset\}| = 1.$$

Примеры бесконечных множеств:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел;
- $\mathbb{N}_{\mathbf{0}} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ – множество целых чисел;
- $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел;
- множество всех точек плоскости.

Подмножество

Множество A называется ***под**множеством* множества B, если *каждый* элемент из A принадлежит B.

Отношение “A является подмножеством B” символически записывается так:

$$A \subseteq B.$$

Это можно прочитать также как “A *включено* в B”.

Подмножество

Множество A называется ***под**множеством* множества B, если *каждый* элемент из A принадлежит B.

Отношение “A является подмножеством B” символически записывается так:

$$A \subseteq B.$$

Это можно прочитать также как “A *включено* в B”.

Подмножество мощности k называют *k-подмножеством*.

Примеры:

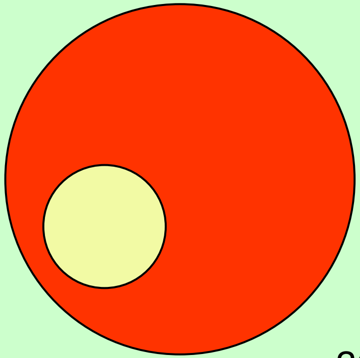
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$$

$$[5, 6) \subseteq [4, 10]$$

Множество точек малого круга есть подмножество множества точек большого круга



Некоторые свойства отношения включения

- $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A.
- $A \subseteq A$ для любого множества A.
- Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$.
- Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Иногда полезно считать, что есть некоторое *универсальное множество* (*универсальное*) U, содержащее все элементы, которые нас интересуют.

Иногда полезно считать, что есть некоторое *универсальное множество* (*универсальное*) U, содержащее все элементы, которые нас интересуют.

Например, если мы изучаем свойства натуральных чисел, то можно положить $U = \mathbb{N}$.

Если нас интересуют геометрические объекты на плоскости, то можно взять в качестве U множество всех точек плоскости.

Часто множество задают указанием свойства P, выделяющего элементы этого множества среди всех элементов универса U.
Тот факт, что элемент x имеет свойство P, записывают так: $P(x)$.
Множество всех элементов из U, имеющих свойство P, представляется в форме:

$$\{x \in U : \ P(x)\}$$

или

$$\{x : \ x \in U \ \text{ и } \ P(x)\}$$

или просто

$$\{x : \ P(x)\},$$

если ясно, о каком универсе идет речь.

Примеры:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ чётно}\}$$

Примеры:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ чётно}\}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$$

Примеры:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ чётно}\}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} = \mathbb{N}$$

Примеры:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ чётно}\}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} = \mathbb{N}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 4\} = (1, 4]$$

Примеры:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ чётно}\}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} = \mathbb{N}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 4\} = (1, 4]$$

$$\{x : x \in \mathbb{R} \text{ и } x^2 - 2 = 0\} =$$

Примеры:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ чётно}\}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} = \mathbb{N}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 4\} = (1, 4]$$

$$\{x : x \in \mathbb{R} \text{ и } x^2 - 2 = 0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Операции над множествами

Объединение множеств A и B определяется как множество

$$A \cup B = \{\, x\colon\ x \in A \ \text{или}\ x \in B \}.$$

Операции над множествами

Объединение множеств A и B определяется как множество

$$A \cup B = \{\, x\colon\; x \in A \text{ или } x \in B \}.$$

Пример:

$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}.$$

Пересечение множеств A и B определяется как множество

$$A \cap B = \{\, x : \text{ одновременно } x \in A \text{ и } x \in B \}$$

Пересечение множеств *A* и *B* определяется как множество

$$A \cap B = \{\, x : \text{ одновременно } x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Пример:

$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

$$A \cap B = \{1, 4\}.$$

Пересечение множеств A и B определяется как множество

$$A \cap B = \{\, x : \text{ одновременно } x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Пример:

$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

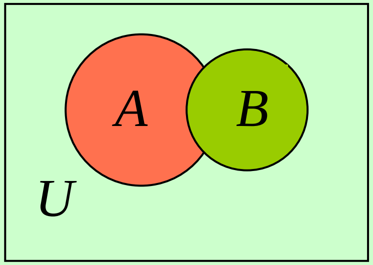
$$A \cap B = \{1, 4\}.$$

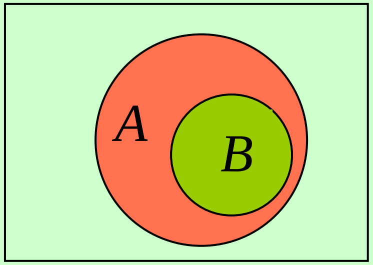
Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B *не пересекаются*.

Диаграмма Венна

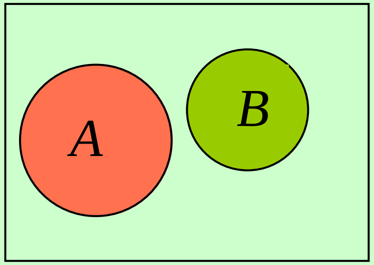
Диаграмма Венна – это способ графического представления взаимоотношений между множествами.

Универс изображается в виде *прямоугольника*, а его подмножества – в виде *кругов* (*круги Эйлера*) или *других фигур*, расположенных *внутри* этого прямоугольника.

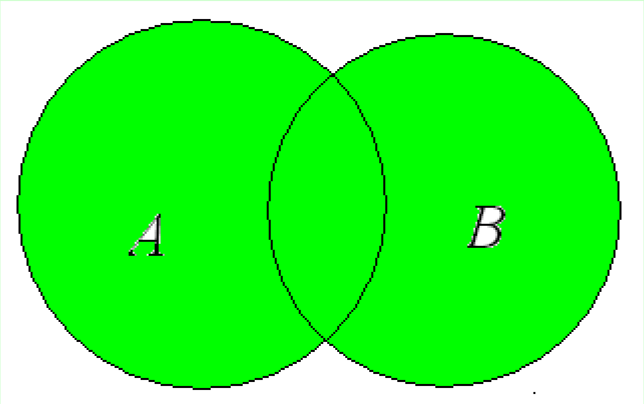




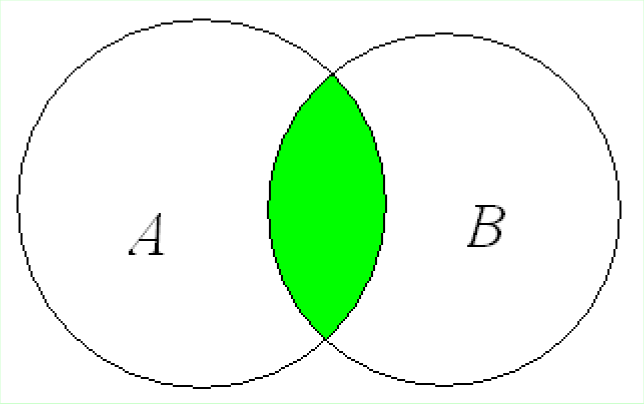
$B \subseteq A$



$A \cap B = \emptyset$



$A \cup B$



$A \cap B$

Свойства операций объединения и пересечения

Следующие равенства верны для любого множества A:

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$$

- Обе операции *коммутативны*:

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{для любых множеств } A, B.$$

- Обе операции *коммутативны*:

$A \cup B = B \cup A,$

$A \cap B = B \cap A$ для любых множеств $A, B.$

- Обе операции *ассоциативны*:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ для любых множеств $A, B.$

Благодаря ассоциативности, можно опускать скобки и писать просто:

$$A \cup B \cup C, \qquad A \cap B \cap C.$$

Можно записывать объединение или пересечение любого числа множеств, не указывая порядок действий:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \qquad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

Сокращенные обозначения:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Операции объединения и пересечения связаны между собой двумя *дистрибутивными законами*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

для любых множеств $A, B, C.$

Вывод новых тождеств

Из основных тождеств можно с помощью эквивалентных преобразований выводить новые.

Пример: $A \cup (A \cap B)$.

Так как $A = A \cap U$, можно первое вхождение A заменить на $A \cap U$:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B).$$

Пример: $A \cup (A \cap B)$.

Так как $A = A \cap U$, можно первое вхождение A заменить на $A \cap U$:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B).$$

Теперь применяем дистрибутивный закон

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$

и получаем

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B).$$

Пример: $\boldsymbol{A \cup (A \cap B)}$.

Так как $A = A \cap U$, можно первое вхождение A заменить на $A \cap U$:

$$\boldsymbol{A \cup (A \cap B)} = (A \cap U) \cup (A \cap B).$$

Теперь применяем дистрибутивный закон

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$

и получаем

$$\boldsymbol{A \cup (A \cap B)} = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B).$$

Применяя тождества $U \cup B = U$, $A \cap U = A$, получаем

$$\boldsymbol{A \cup (A \cap B)} = A \cap (U \cup B) = A \cap U = \boldsymbol{A}.$$

Тождество $A \cup (A \cap B) = A$ называют *законом поглощения*.

Имеется второй закон поглощения:

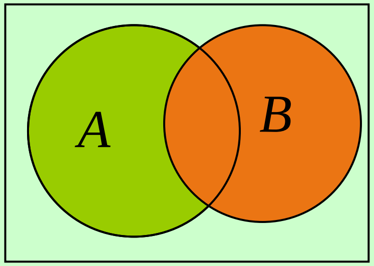
$A \cap (A \cup B) = A$,

он может быть доказан аналогично.

Другие операции

Разность множеств A и B есть множество

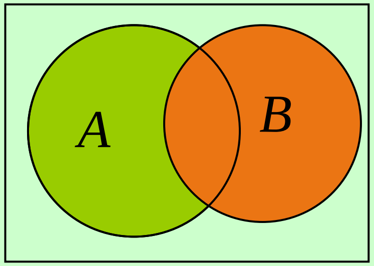
$$A - B = \{\, x: \ \ x \in A, \ \ но \ \ x \notin B \}.$$



$A - B$

Другие операции

Разность множеств A и B есть множество



$A - B$

$$A - B = \{\, x:\ \ x \in A,\ \ но\ \ x \notin B\}.$$

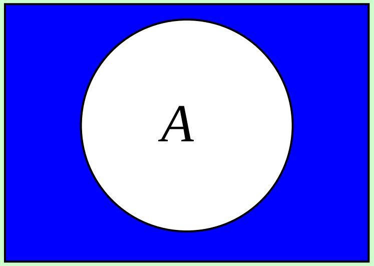
Пример:

$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

$$A - B = \{0\}.$$

Дополнение множества A до универса U – это множество

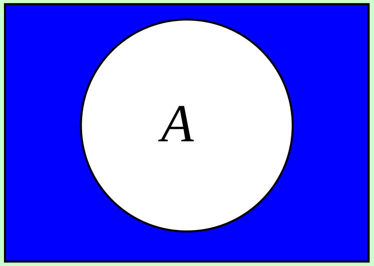
$$\overline{A} = U - A.$$



$\overline{A}$

Дополнение множества A до универса U – это множество

$$\overline{A} = U - A.$$



$\overline{A}$

Пример:

$$U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

$$A = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\},$$

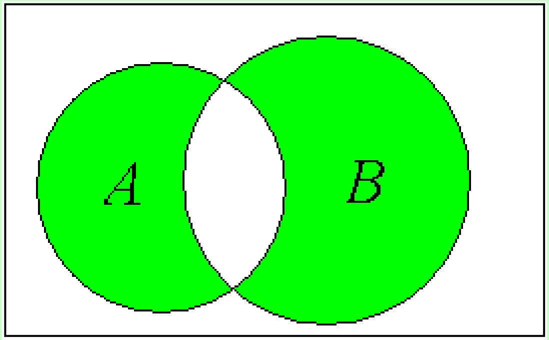
$$\overline{A} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}.$$

Операции объединения, пересечения и дополнения связаны двумя *законами де Моргана*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

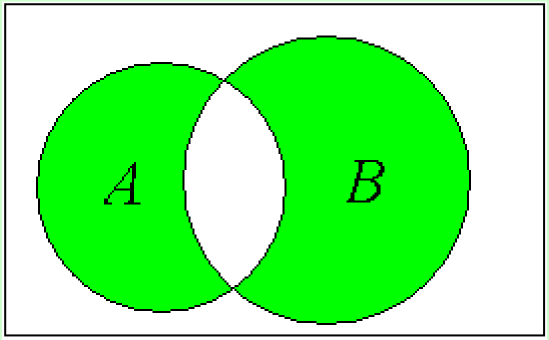
Симметрическая разность множеств A и B определяется как множество



$$A \otimes B = (A - B) \cup (B - A).$$

$A \otimes B$

Симметрическая разность множеств A и B определяется как множество



$$A \otimes B = (A - B) \cup (B - A).$$

$A \otimes B$

Пример:

$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

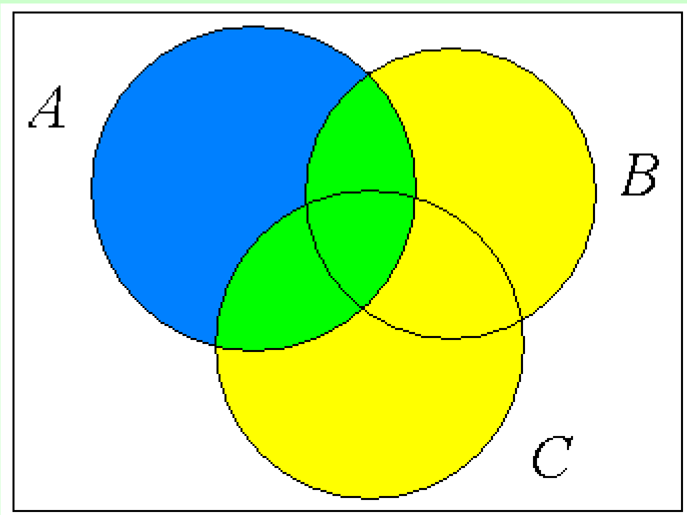
$$A \otimes B = \{0,2\}.$$

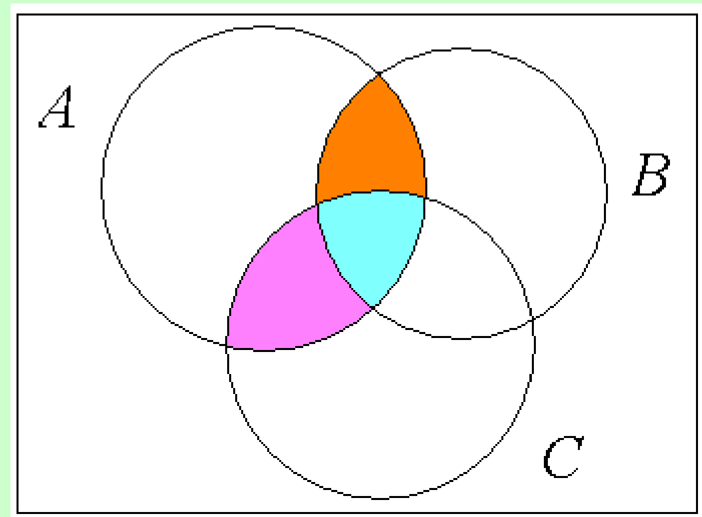
Для строгого доказательства любого из приведенных тождеств нужно показать, что любой элемент множества, записанного в левой части равенства, содержится в множестве из правой части, и наоборот.

Пример: доказательство первого закона де Моргана .

$$x \in \overline{A \cup B} \quad \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \quad x \notin A \cup B \quad \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \quad x \notin A \ \text{ и } \ x \notin B \quad \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \ \text{ и } \ x \in \overline{B} \quad \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

В справедливости тождеств *можно* также *убедиться* с помощью диаграмм Венна (но это *не является* строгим доказательством). Например, для дистрибутивного закона:





A $\quad$ $B \cup C$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \cap C$

вся окрашенная область

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Еще несколько тождеств

$$\overline{A} = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

$$A \otimes B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Отношения включения и равенства множеств могут быть выражены в терминах операций:

$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = A$$

$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad A - B = \emptyset$$

$$A = B \quad \leftrightarrow \quad A \bigotimes B = \emptyset$$