离散数学

第 2 讲

莫克耶夫 · 德米特里 · 鲍里索维奇

集合与关系

3

多重集合

多重集合是一个元素集合，其中每个元素可以出现多次。

$\{a, a, b, c, c, c\}$ – 一个由集合 $\{a, b, c\}$ 中元素组成的多重集合；

$\{a, b, b, b, c, c\}$ – 另一个多重集合。

从一个元素可以构建无限多的多重集合：

{1}, {1, 1}, {1, 1, 1}, ...

4

如果满足以下条件，我们称 (a, b) 为有序对：

$\forall a, b, c, d : [(a, b) = (c, d)] \leftrightarrow [a = c \wedge b = d]$ 。

$(a, b) = (b, a) \leftrightarrow a = b$

长度为 n 的序列（元组）：

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = \Big(\big(...((a_1, a_2), a_3), ...\big), a_n\Big)$ 。

换句话说，序列可以称为按某种顺序排列的元素集合。

5

序列 vs 集合

1. 序列中元素的顺序很重要：

   $(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1)$ ，但 $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$ 。

2. 同一个元素可以在序列中出现多次。

   $(1, 2, 1) \neq (2, 1, 1)$ ，但 $\{1, 2, 1\} = \{2, 1, 1\} = \{1, 2\}$

6

两个集合 A 和 B 的直积（笛卡尔积）是所有对 (a, b) 的集合，其中 $a \in A$ ， $b \in B$ 。

$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

$\forall A: A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

n 个集合 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的笛卡尔积：

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n\}$ 。

$A \times A = A^2$ – 集合 A 的笛卡尔平方。

$A \times A \times A = A^3$ – 集合 A 的笛卡尔立方。

依此类推。

7

笛卡尔（René Descartes，1596–1650）–

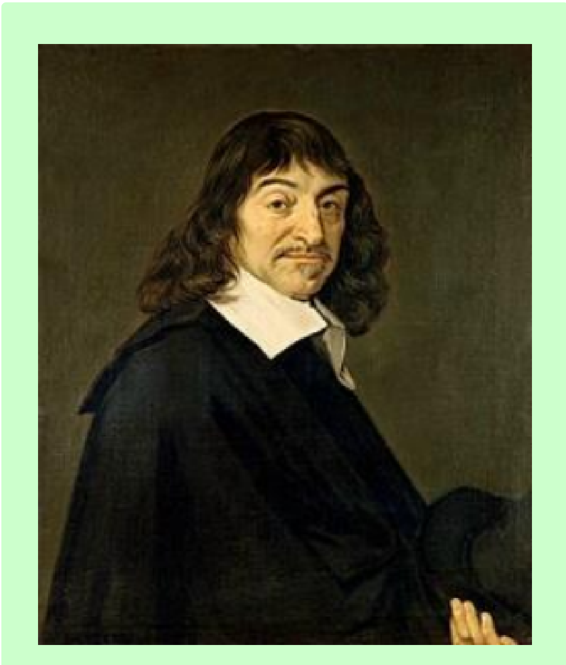
法国哲学家、数学家、力学家、物理学家和生理学家，

解析几何和现代代数符号的创始人。

哲学中激进怀疑方法的作者，

物理学中机械论的倡导者，反射学的先驱。

以他的名字命名的直角坐标系是他发明的。



8

示例

- $A = \{a, b, c\}$ ，$B = \{0, 1\}$ ，

$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$;

$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$;

$B^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ 。

- $A = \{1, 2, ..., 31\}$ ，$B = \{一月, 二月, ..., 十二月\}$

$A \times B$ – "9 月 10 日"类型的日期集合

二元关系

11

设 A 和 B 是集合。A 和 B 之间的二元关系是 $A \times B$ 的任何子集 $R \subseteq A \times B$ 。

如果 $R \subseteq A^2$ ，则称 R 为集合 A 上的关系。

• 关系作为集合：$(a, b) \in R$

• 关系作为陈述（谓词）：

aRb – " a 与 b 具有关系 R "

12

示例

• A： 人的集合，

B： 国家的集合，

A 和 B 之间的关系 R：

xRy 表示 x 曾到过国家 y 。

• A： 某公司员工的集合，

A 上的关系 R：

xRy 表示 x 是 y 的上级。

• A： 社交网络账户的集合，

A 上的关系 R：

xRy 表示 x 和 y 互相关注。

13

更多示例

• 相等是任何集合 A 上的关系

$id_A = \{(x, x) : x \in A\}$

$x = y \Leftrightarrow (x, y) \in id_A$

• $<$ 是 $\mathbb{N}$ 上的关系（也是 $\mathbb{Z}$ 、$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的关系）。

数字 2 与数字 5 具有 $<$ 关系，

但 5 与 2 不具有这种关系。

设 L 是平面上所有直线的集合。

• L 上的关系 $\|$： $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow l_1$ 平行于 l_2 ；

• L 上的关系 $\times$： $l_1 \times l_2 \Leftrightarrow l_1$ 与 l_2 相交。

14

更多示例

如果 A 是集合，那么

- 可以在 A 和 2^A 之间定义关系 $\in$；
- $\subseteq$ 是 2^A 上的关系。

整数集 $\mathbb{Z}$ 上的整除关系定义如下：

x 整除 y ，如果 $\exists k \in \mathbb{Z} : x \cdot k = y$ 。

这个关系表示为： $x | y$ 或 $y \vdots x$ 。

15

表格表示

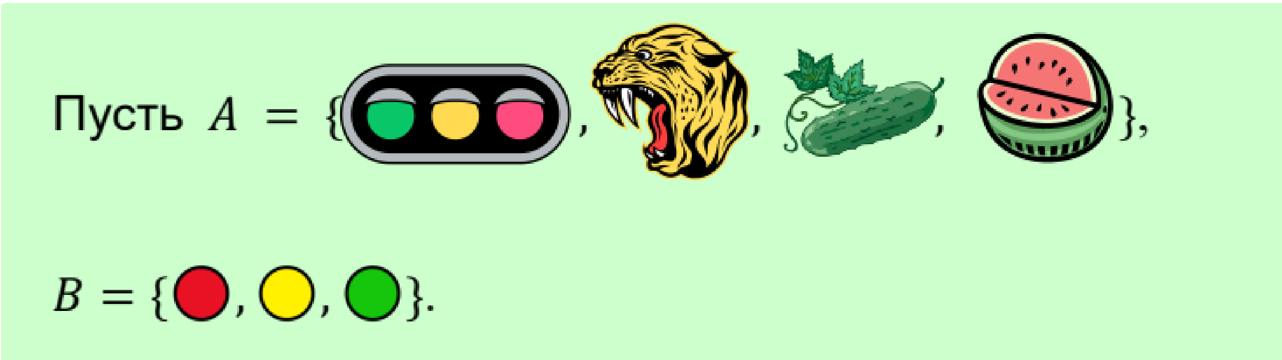
有限集合之间的关系可以用矩阵（矩形表格）表示。

设 R 是集合 $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ 和 $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ 之间的关系。

那么这个关系的矩阵 $M = (m_{i,j})$ 的大小为 $k \times n$ 。

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{如果}(a_i, b_j) \in R \\ 0, \text{如果}(a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

16



设 $A = \{\square, \triangle, \circ, \diamond\}$,

$B = \{\text{红}, \text{黄}, \text{绿}\}$ 。

考虑以下关系 $R \subseteq A \times B$ ：

xRy 表示颜色 y 出现在 x 中。

17

为方便起见，我们用字母表示对象和颜色：

$A = \{\text{с}, \text{т}, \text{о}, \text{а}\}$,

$B = \{\text{к}, \text{ж}, \text{з}\}$ 。

那么关系 R 可以这样表示：

$R = \{(с, к), (с, ж), (с, з), (т, к), (т, ж), (о, з), (а, з), (а, к)\}$

或这样：

$M =$

	к	ж	з
с	1	1	1
т	1	1	0
о	0	0	1
а	1	0	1

18

另一个示例：

集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ 上的整除关系矩阵：

$M =$

	1	2	3	4	6	8
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	1
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	1

19

图形表示

关系图提供了关系的可视化表示。它的构建方法如下。

设 R 是集合 A 和 B 之间的关系。

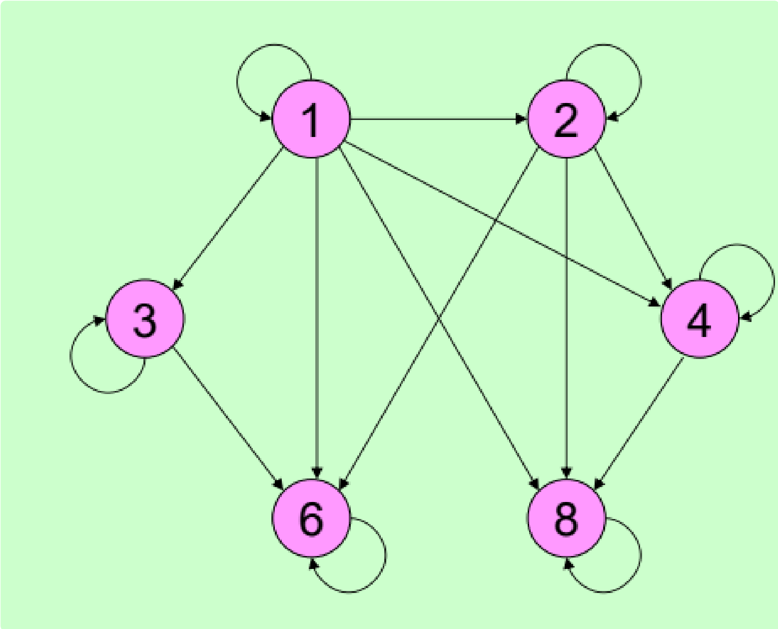
集合 $A \cup B$ 的元素用圆圈或其他图形表示。这些图形称为图的顶点。如果 xRy，则从 x 到 y 画一个箭头：

这些箭头称为图的边。

20

示例：

集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ 上的整除关系图：



21

关系的运算

1. 由于关系是（对）的集合，因此可以对关系应用任何集合运算。

22

示例

$A = \{a, b, c\}$

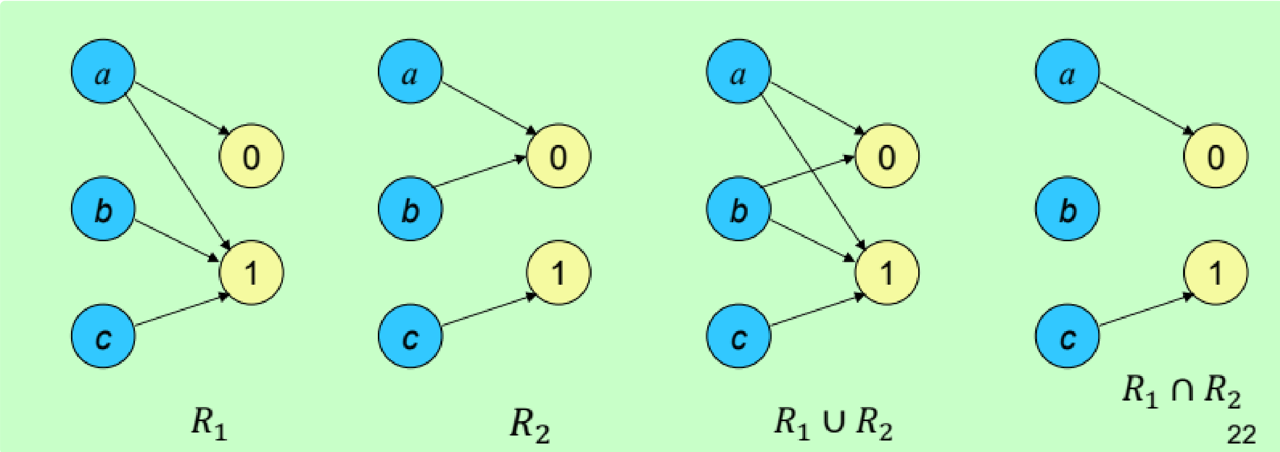
$B = \{0, 1\}$

$R_1 = \{(a, 0), (a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

$R_2 = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 1)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a, 0), (c, 1)\}$



23

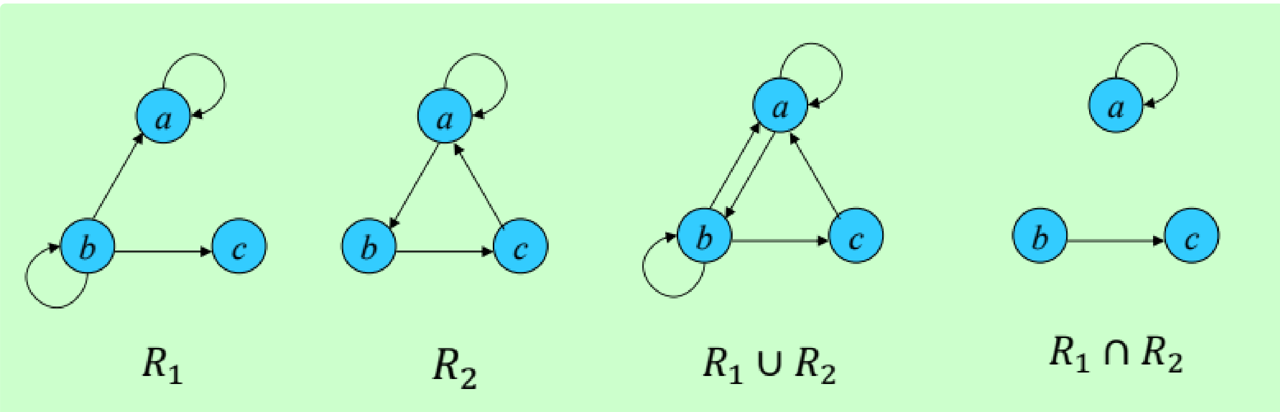
$A = \{a, b, c\}$

$R_1 = \{(a, a), (b, a), (b, b), (b, c)\}$

$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a), (b, c)\}$



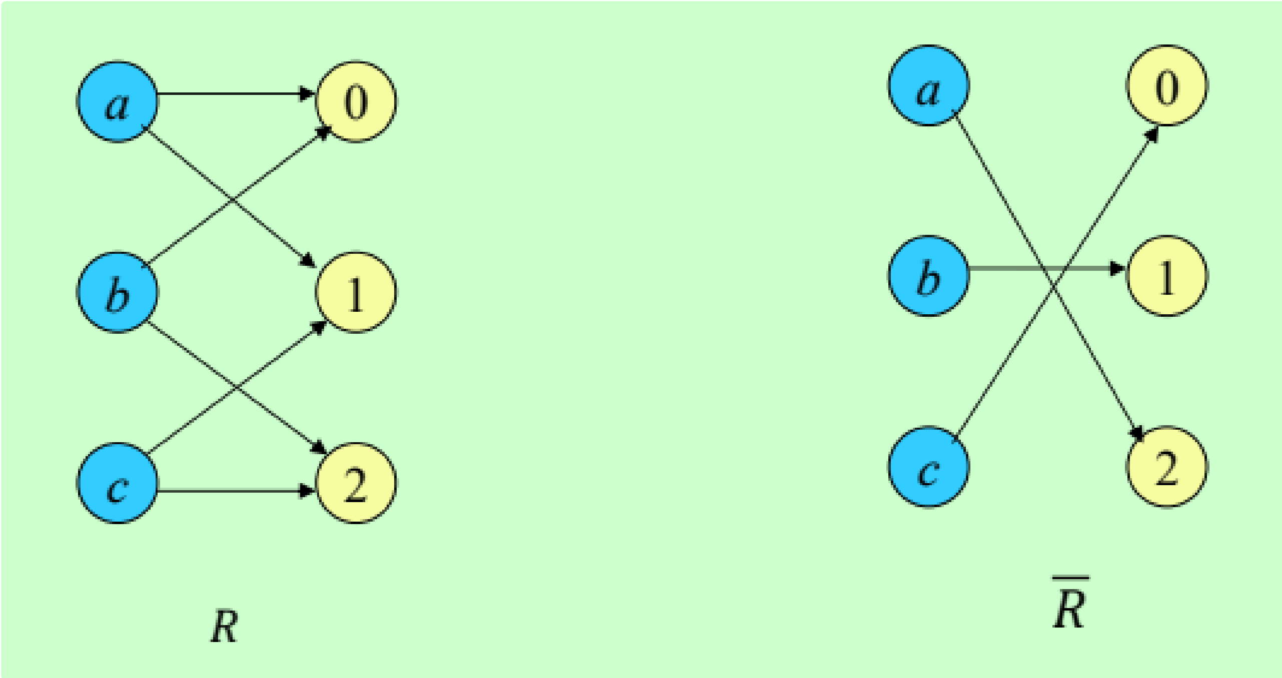
24

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{0, 1, 2\}$

$R = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

$\overline{R} = \{(a, 2), (b, 1), (c, 0)\}$

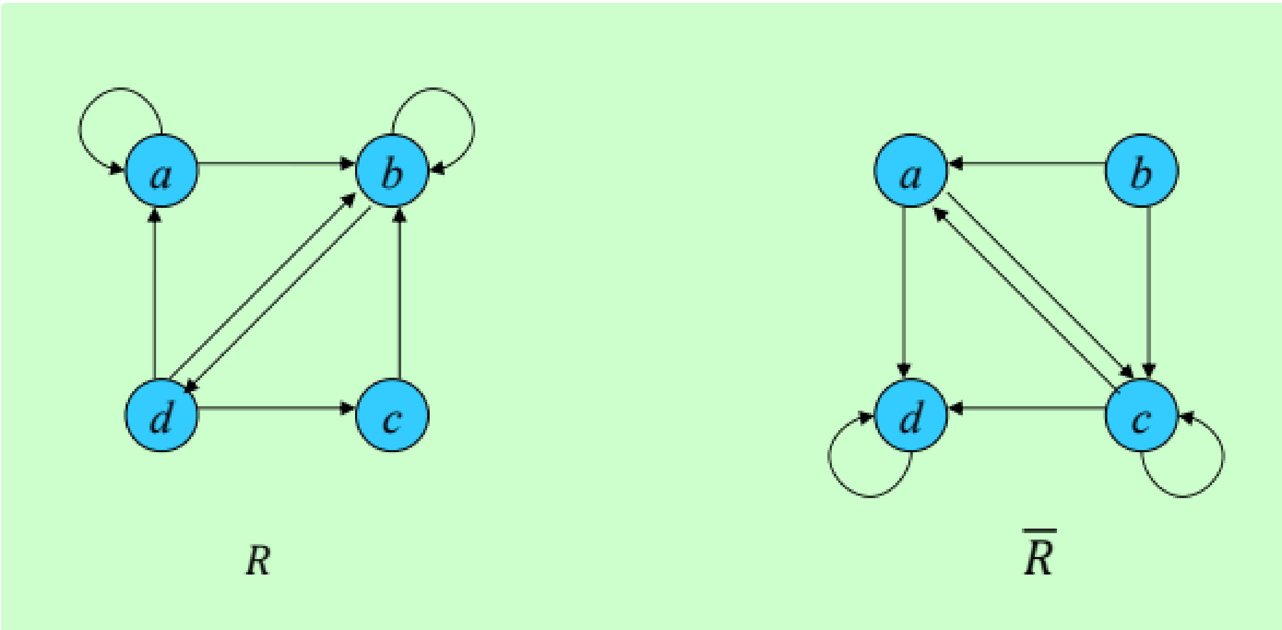


25

$A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,d),(c,b),(d,a),(d,b),(d,c)\}$

$\overline{R} = \{(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(c,a),(c,c),(c,d),(d,d)\}$



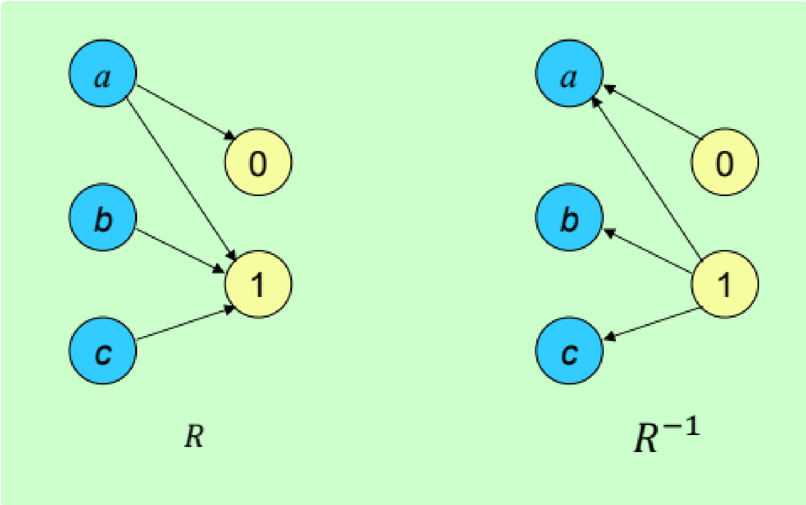
26

1. 设 $R \subseteq A \times B$ 。

逆关系 $R^{-1} \subseteq B \times A$ 定义如下：

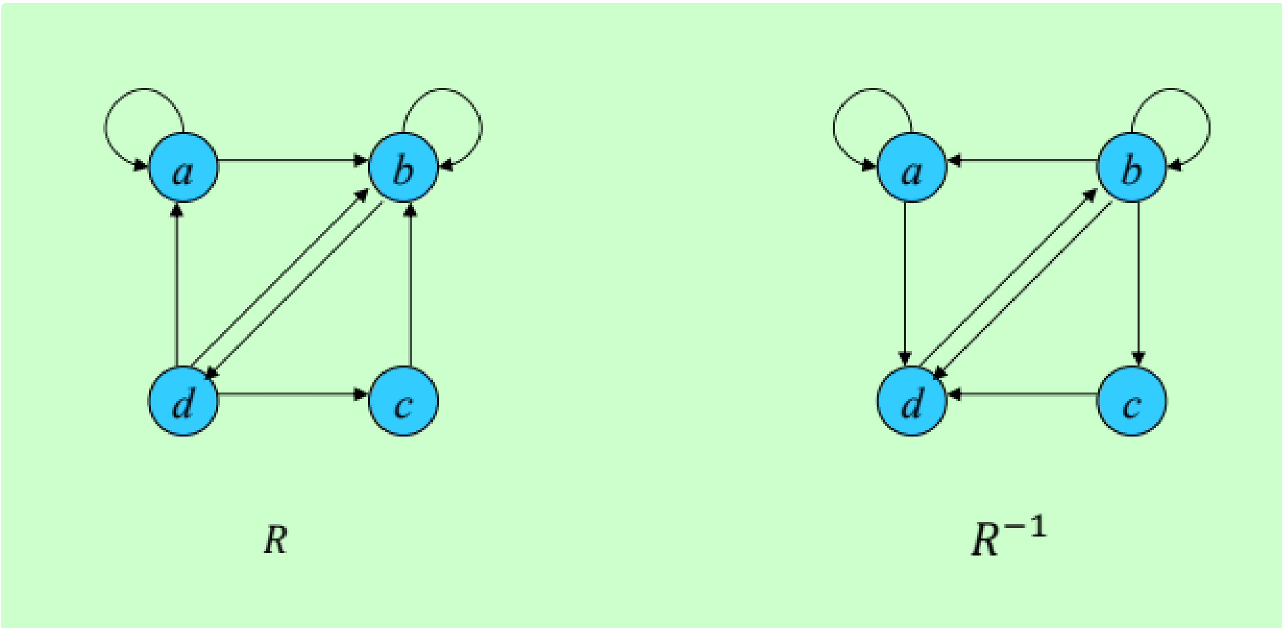
$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$ 。

示例：



27

如果 R 是 A 上的关系，那么 R^{-1} 也是 A 上的关系：



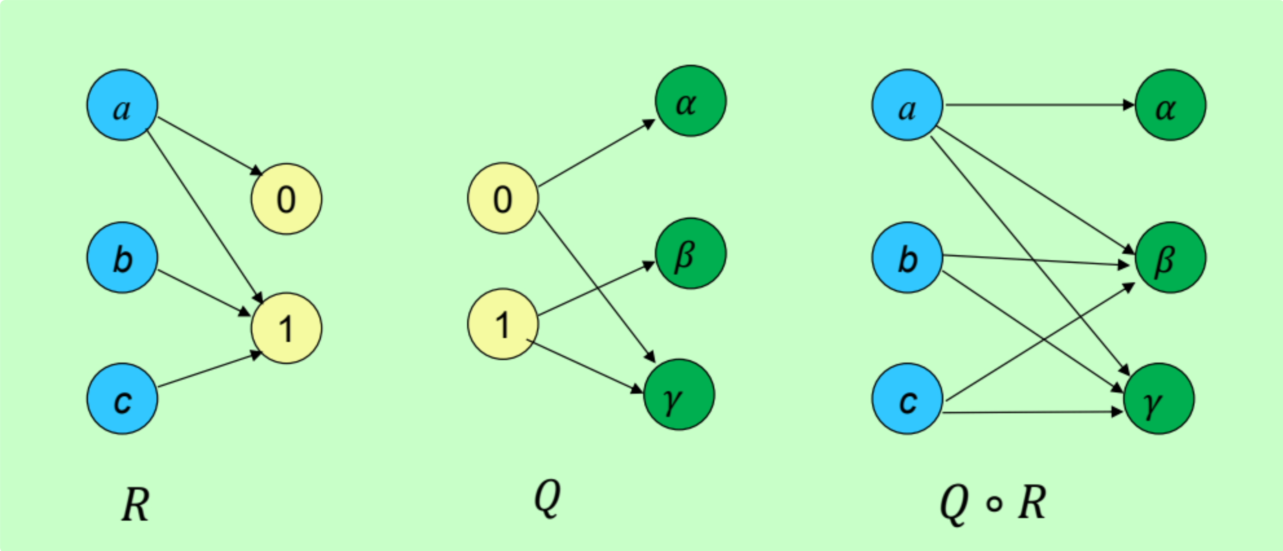
28

1. 设 $R \subseteq A \times B$， $Q \subseteq B \times C$ 。

复合关系 $Q \circ R \subseteq A \times C$ 定义如下：

$Q \circ R = \{(x, z) : \exists y \in B((x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q)\}$ 。

示例：



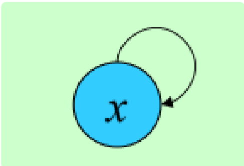
29

单集上关系的性质

设 R 是集合 A 上的关系。

1. 如果 $\forall x : xRx$ ，则 R 是自反的。

在自反关系的图中，每个顶点都有一个自环：



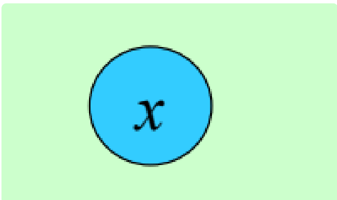
示例：

$=$，$\leq$，$\vdots$，$|$，$\subseteq$

30

1.1. 如果 $\forall x : (x \not R x)$ ，则关系 R 是反自反的（非自反的）。

在反自反关系的图中，没有任何顶点有自环：



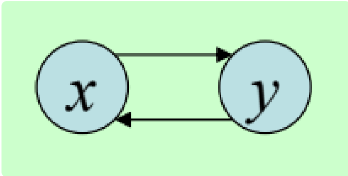
示例：

$\neq$，$<$，$\perp$，$\subsetneq$

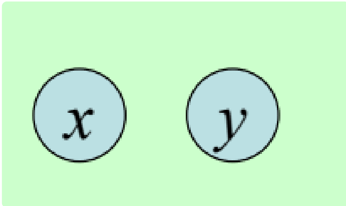
31

2. 如果 $\forall x, y : xRy \to yRx$ ，则关系 R 是对称的。

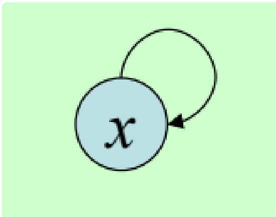
在对称关系的图中可能出现以下情况：



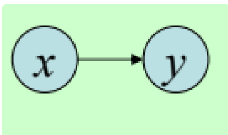
或这样：

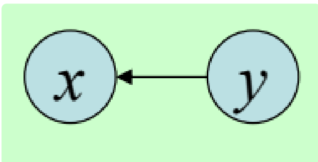


或这样：



而这样是不可能的：





示例：

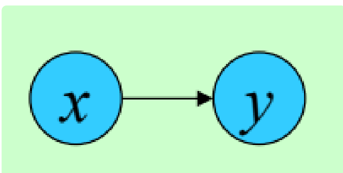
$=$，$\neq$，$\parallel$，$\perp$

32

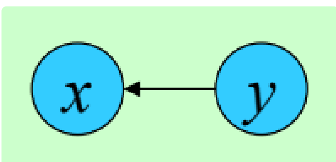
3. 如果 $\forall x, y : (xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y$，则关系 R 是反对称的。

换句话说，如果 xRy 且 $x \neq y$，则 $(y \not R x)$。

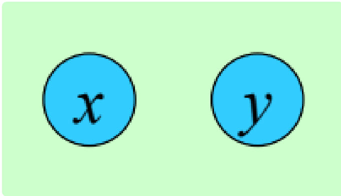
在反对称关系的图中可能出现以下情况：



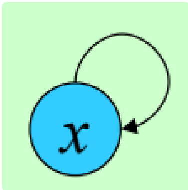
或这样：



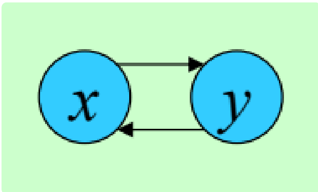
或这样：



或这样：



而这样是不可能的：



示例：

$$=,\ \neq,\ <,\ \leq,\ \vdots,\ |,\ \subseteq,\ \subsetneq$$

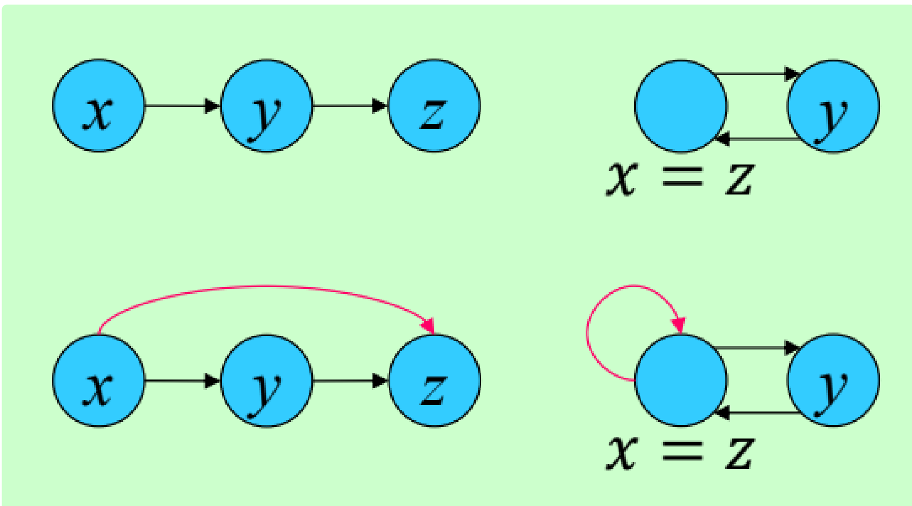
33

4. 如果 $\forall x, y, z : (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$ ，则关系 R 是传递的。

在传递关系的图中：

如果有两条边构成一个链，

那么也必须有第三条边



示例：

$$=,\ \neq,\ <,\ \leq,\ \parallel,\ \vdots,\ |,\ \subseteq,\ \subsetneq$$