第 3 讲

集合和关系

3

等价关系

如果集合 A 上的关系 R 满足以下条件，则称之为等价关系：

- 自反性
- 对称性
- 传递性

4

等价关系

如果集合 A 上的关系 R 满足以下条件，则称之为等价关系：

- 自反性
- 对称性
- 传递性

以下哪些关系是等价关系?

=, <, ⩽, ‖, |, ,

5

例子

考虑整数集　上的以下关系 R：

当且仅当 $x-y$ 为偶数时， xRy 。

R 是一个等价关系。

传递性的证明：

$xRy \Leftrightarrow x-y=2k$

$yRz \Leftrightarrow y-z=2m$

$x-z=2(k+m) \quad \Rightarrow xRz$

如果 xRy ，我们说 x 与 y 模 2 同余，

并写作

$x \equiv y \pmod 2$

6

划分

集合 A 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为 A 的划分，如果：

1）$\mathcal{P}$ 中的子集两两不相交；

2）$\mathcal{P}$ 中所有子集的并等于 A。

换句话说：

如果 A 的每个元素恰好属于 $\mathcal{P}$ 中的一个集合，

则子集族 $\mathcal{P}$ 是集合 A 的划分。

$\mathcal{P}$ 的元素称为划分的部分。

7

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$P_1 = \{0,3,6,9\}$

$P_2 = \{1,2,4\}$

$P_3 = \{5\}$

$P_4 = \{7,8\}$

$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是集合 A 的四部分划分。

$A = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$

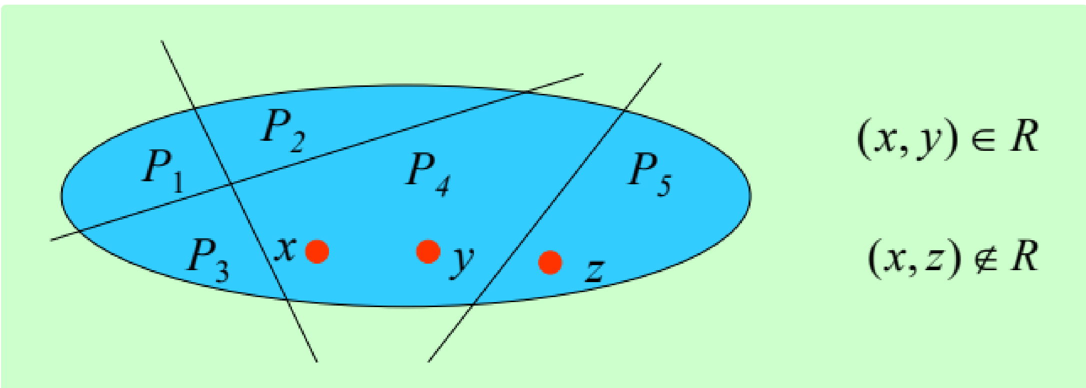
8

设 $\mathcal{P}$ 是集合 A 的划分。

在 A 上定义关系 R：

$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x$ 和 y 属于划分的同一部分。

R 是一个等价关系。



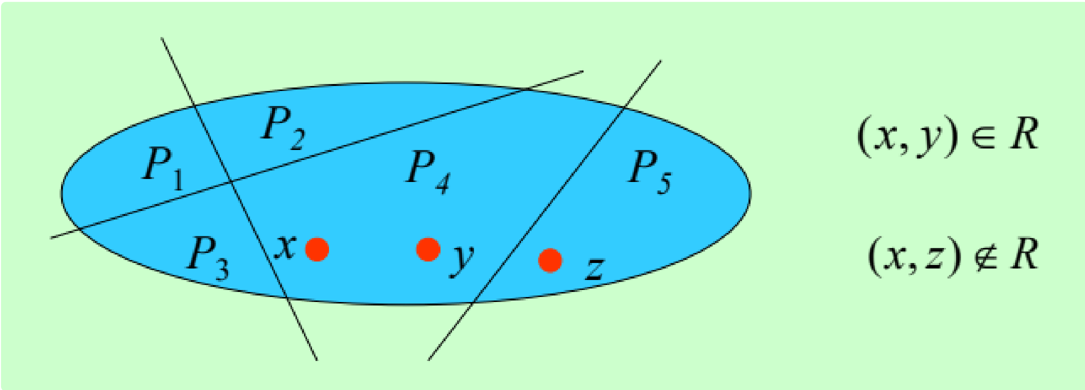
9

设 $\mathcal{P}$ 是集合 A 的划分。

在 A 上定义关系 R：

$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x$ 和 y 属于划分的同一部分。

R 是一个等价关系。



所有等价关系都以类似的方式构造！

10

因子化定理。

设 R 是集合 A 上的等价关系。存在 A 的一个划分 $\mathcal{P}$，

使得对于任意 $x, y \in A$， x R y 当且仅当它们属于划分

$\mathcal{P}$ 的同一部分。

11

因子化定理。

设 R 是集合 A 上的等价关系。存在 A 的一个划分 $\mathcal{P}$，

使得对于任意 $x, y \in A$， x R y 当且仅当它们属于划分

$\mathcal{P}$ 的同一部分。

我们将分三个步骤进行证明：

1. 构造 A 的子集族 $\mathcal{P}$ 。

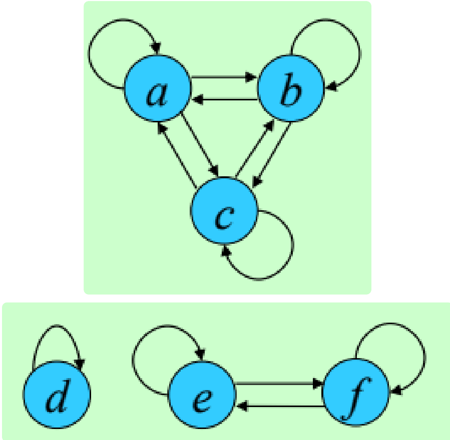
12

对 A 中的每个 x，令 $[x] = \{y : xRy\}$，

$\mathcal{P} = \{[x] : x \in A\}$ 。

注意：可能有 $x \neq y$，但 $[x] = [y]$ 。

例如，设 R 是由以下图表示的关系：



显然，这是一个等价关系。

这里 $[a]=[b]=[c]=\{a,b,c\}$ ， $[d]=\{d\}$ ，

$[e]=[f]=\{e,f\}$ ，

$\mathcal{P}=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$ 。

13

因子化定理。

设 R 是集合 A 上的等价关系。存在 A 的一个划分 $\mathcal{P}$ ，

使得对于任意 $x,y\in A$ ，x R y 当且仅当它们属于划分

$\mathcal{P}$ 的同一部分。

我们将分三个步骤进行证明：

1. 构造 A 的子集族 $\mathcal{P}$ 。
2. 证明 $\mathcal{P}$ 是 A 的划分。

14

1) 由于关系 R 是自反的，对所有 $x\in A$ ，都有 $x\in[x]$ 。

因此，A 的每个元素 x 至少属于 $\mathcal{P}$ 中的一个子集，

即 $\mathcal{P}$ 中所有集合的并等于 A：

$\bigcup_{x\in A}[x]=A$

15

2) 现在我们证明，如果 $[x]\neq[y]$ ，那么 $[x]$ 和 $[y]$ 不相交。

假设 $[x]\cap[y]\neq\emptyset$ 。那么存在

$z\in[x]\cap[y]$ ，即 z R x 且 z R y。由于关系 R

是对称的和传递的，由此可以推出 x R y。现在对于任意 $u\in A$ ，我们有：

$u\in[x]\Rightarrow uRx\Rightarrow uRy\Rightarrow u\in[y]$

反之亦然。因此， $[x]=[y]$ 。

16

因子化定理。

设 R 是集合 A 上的等价关系。存在 A 的一个划分 $\mathcal{P}$ ，

使得对于任意 $x, y \in A$ ，x R y 当且仅当它们属于划分

$\mathcal{P}$ 的同一部分。

我们将分三个步骤进行证明：

1. 构造 A 的子集族 $\mathcal{P}$ 。
2. 证明 $\mathcal{P}$ 是 A 的划分。
3. 证明 x R y $\Leftrightarrow$ x 和 y 属于 $\mathcal{P}$ 的同一部分。

17

如果 x R y，则 $y \in [x]$ 。但 $x \in [x]$ ，因此 x 和 y 都

属于 $[x]$ 。

反之，如果对于某个 z， $x \in [z]$ 且 $y \in [z]$ ，则

x R z 且 y R z。由此（根据关系 R 的对称性和传递性）可以

推出 x R y。

18

因此，如果在集合 A 上给定了等价关系 R，那么 A 可以被划分成

若干部分，使得任何一个部分中的任意两个元素都处于关系 R 中，

而不同部分中的任意两个元素都不处于这个关系中。

这些部分被称为等价类。

等价类的族被称为集合 A 关于关系 R 的商集，记为 A/R 。

19

例 1

设 $n \in \mathbb{N}$ 。在 $\mathbb{N}_0$ 上定义以下关系 R_n ：

xR_ny 意味着 n 整除 x − y，即存在整数 k 使得 x − y = kn。

（之前我们考虑了 n = 2 的特殊情况）。

对于任何 n， R_n 都是一个等价关系。

如果 x R y，我们说 x 与 y 模 n 同余，

并写作

$x \equiv y \pmod{n}$

20

两个整数模 n 同余当且仅当它们除以 n 得到相同的余数。因此，

在 R_n 中恰好有 n 个等价类：

$[0] = \{0, n, 2n, 3n, \ldots\}$

$[1] = \{1, n+1, 2n+1, 3n+1, \ldots\}$

$[2] = \{2, n+2, 2n+2, 3n+2, \ldots\}$

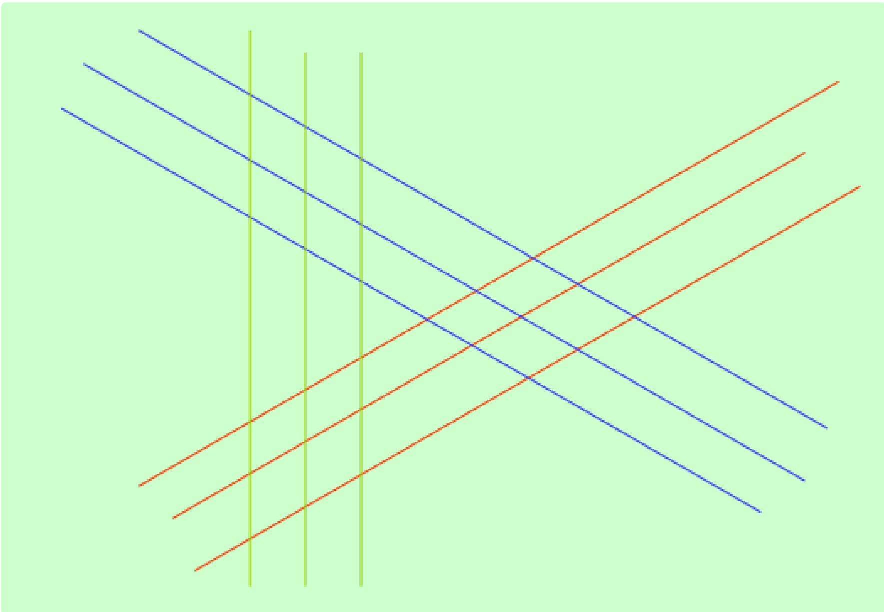
$[n-1] = \{n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \ldots\}$

21

例 2

关系 ‖ 是一个等价关系。

每个等价类由所有同一方向的直线组成。



22

序关系

如果集合 A 上的关系 R 满足以下条件，则称之为序关系：

- 自反性
- 反对称性
- 传递性

如果 R 是一个序关系且 x R y，我们说"x 先于 y"或"x 小于 y"。

23

序关系

如果集合 A 上的关系 R 满足以下条件，则称之为序关系：

- 自反性
- 反对称性

- 传递性

以下哪些关系是序关系?

=, <, ⩽, |, , , ||

如果 R 是一个序关系且 x R y，我们说"x 先于 y"或"x 小于 y"。

24

严格序关系

如果集合 A 上的关系 R 满足以下条件，则称之为严格序关系：

- 反自反性
- 反对称性
- 传递性

比较关系<和⩽。

25

严格序关系

如果集合 A 上的关系 R 满足以下条件，则称之为严格序关系：

- 反自反性
- 反对称性
- 传递性

比较关系<和⩽。

注意：严格序关系不是序关系的特例。

26

严格序关系

如果集合 A 上的关系 R 满足以下条件，则称之为严格序关系：

- 反自反性
- 反对称性
- 传递性

比较关系<和⩽。

注意：严格序关系不是序关系的特例。

关系 | 是序关系还是严格序关系?

27

有序集

具有给定序关系 R 的集合 A 称为有序集。

更准确地说，有序集是一个对(A, R)。

例如：(, ⩽);

对于任意集合 A，(2^A ,   );

(, |)。

28

(, ⩽)和(2^A ,   )之间有一个重要的区别。

对于任意 $x, y \in \mathbb{Z}$ ，至少有一个不等式 x ⩽ y 或 y ⩽ x 成立。

对于 $X, Y \in 2^A$ ，可能既不是 X   Y 也不是 Y   X。例如：

X = {a, b}，Y = {a, c}。

设(A, R)是一个有序集， $x, y \in A$ 。

如果 x R y 或 y R x，则 x 和 y 是可比的，否则它们是不可比的。

在(, ⩽)中，任意两个元素都是可比的。

在(2^A ,   )中，存在不可比的元素。

29

如果任意两个元素都是可比的，则称集合 A 上的序 R 为**线性序**，

否则称之为**偏序**。

在第一种情况下，(A, R)是一个**线性有序集**，

在第二种情况下，它是一个**偏序集**。

(, ⩽)是一个线性有序集，

(2^A ,   )是一个偏序集。

30

如果任意两个元素都是可比的，则称集合 A 上的序 R 为线性序，

否则称之为偏序。

在第一种情况下，(A, R)是一个线性有序集，

在第二种情况下，它是一个偏序集。

(, ⩽)是一个线性有序集，

(2^A ,   )是一个偏序集。

有序集(, |)是线性有序还是偏序的?

那么(, |)呢?

31

直接前继

设(A, R)是一个有序集，x R y 且 $x \neq y$ 。

如果不存在一个与 x 和 y 不同的元素 z，使得 x R z 且 z R y，

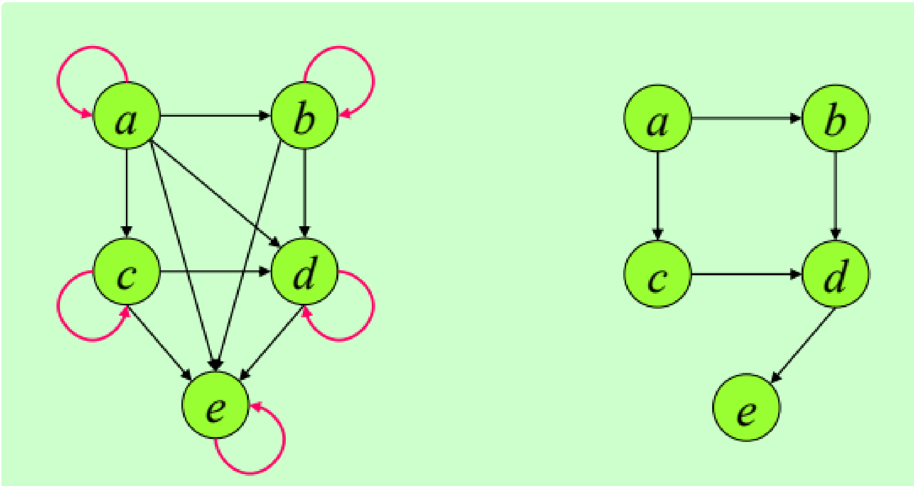
则称元素 x 直接前继于元素 y。

我们用 R*表示关系 R 的直接前继关系。

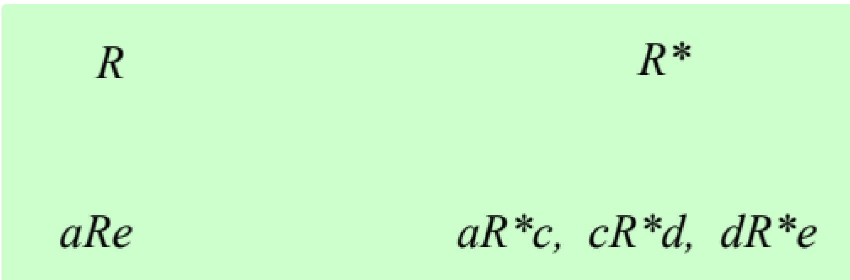
32

例子

1. (,)
2. (,)



3. 数字列表



33

有限有序集定理。

设(A, R)是一个有限有序集，a 和 b 是 A 中的不同元素，且 aRb。则

存在 A 中的元素序列 $z_1, z_2, ... z_n$, 使得 $z_1 = a$ ，$z_n = b$, 且对于 $k = 1, ..., n-1$ ，有 $z_k R^* z_{k+1}$

证明。记

$M(a, b) = \{x : aRx \text{ 且 } xRb, x \neq a, x \neq b\}$ 。

设

$|M(a, b)| = m$ 。

通过对 m 进行归纳来证明。

1) m = 0。则 aR^*b，我们取 $z_1 = a$， $z_2 = b$。

34

2) m > 0。取

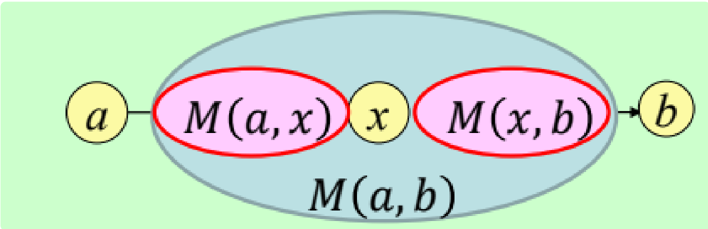
$x \in M(a, b)$。

则

$|M(a, x)| < m$

且

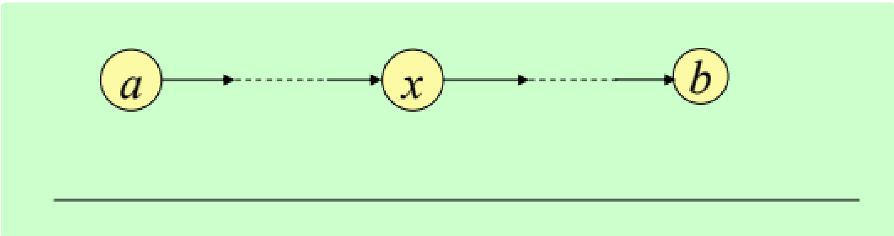
$|M(x, b)| < m$。



根据归纳假设，存在由 R*关系连接的元素序列，

分别连接 a 与 x 以及 x 与 b。

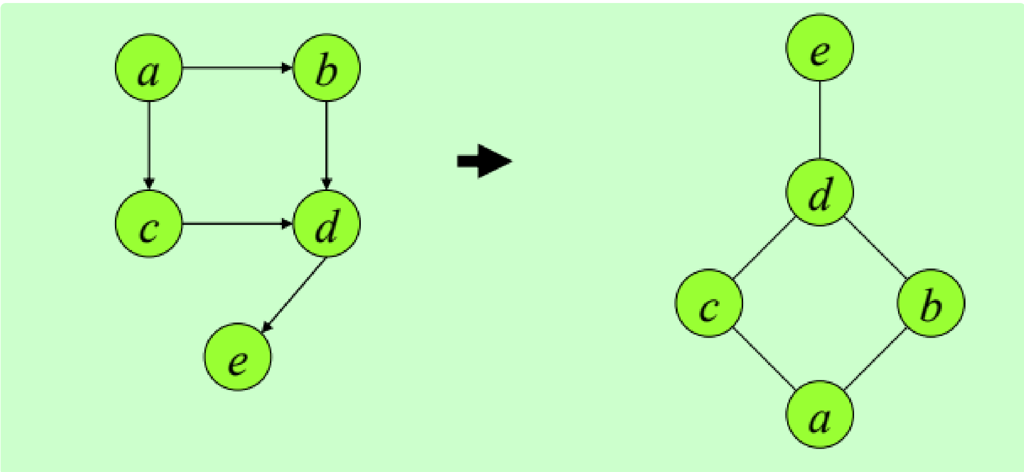
将它们连接成一个序列，就得到了连接 a 与 b 的序列。



35

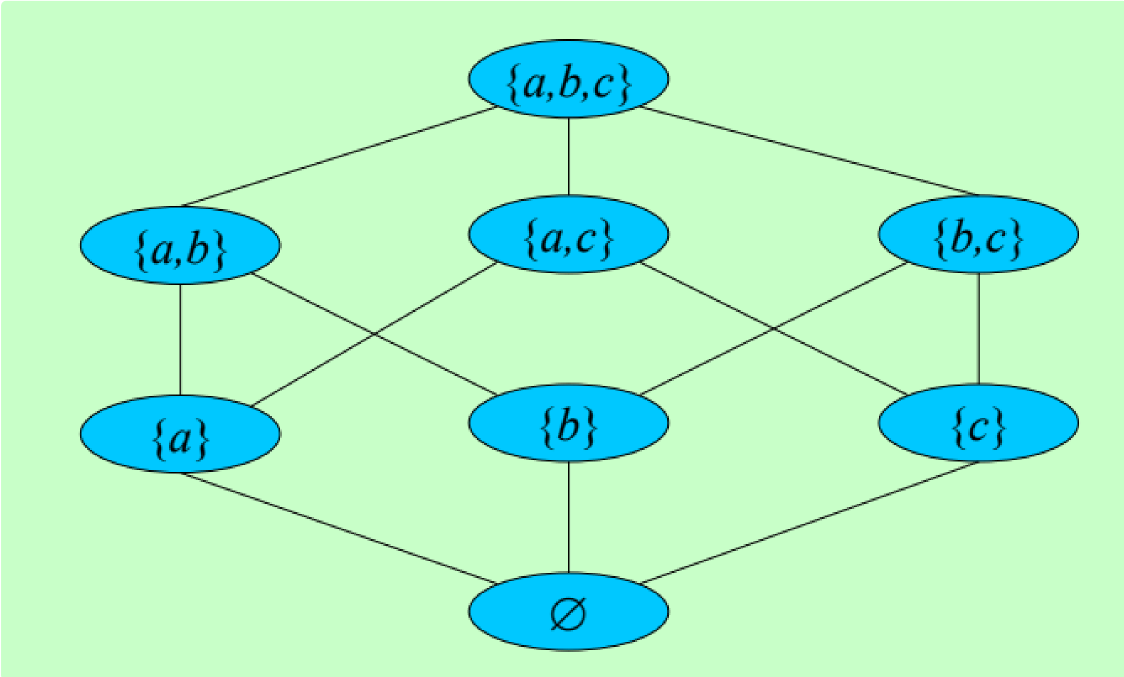
关系 R*的图称为 **Hasse 图**或**直接前继图**。

通常，图中的顶点排列方式使得较小（前继）元素位于较大元素的下方。这样，元素之间的关系可以用线段而不是箭头表示。



36

有序集 $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$ 的 Hasse 图



37

极大元和极小元

如果不存在 $y \neq x$ 使得 xRy，则称 $x \in A$ 为有序集(A, R)的极大元。

换句话说，不存在比 x 更大的元素。

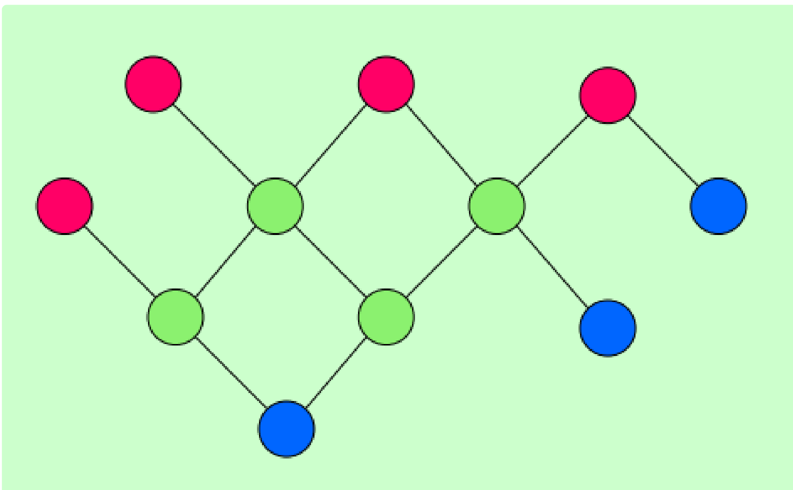
如果不存在比 x 更小的元素，则 x 为极小元。

38

(, ⩽)既没有极大元，也没有极小元。

(, ⩽)有一个极小元，但没有极大元。

每个有限有序集都有极大元和极小元。



39

定理。如果(A, R)是一个有限有序集且 $x \in A$ ，则存在一个极大元 y 使得 xRy。

证明。

如果 x 是极大元

令 y = x

如果 y_1 不是极大元

存在 $y_2 \neq y_1$ ，大于 y_1

如果 y_1 是极大元

令 y = y_1

如果 x 不是极大元

存在 $y_1 \neq x$ ，大于 x

...

依此类推

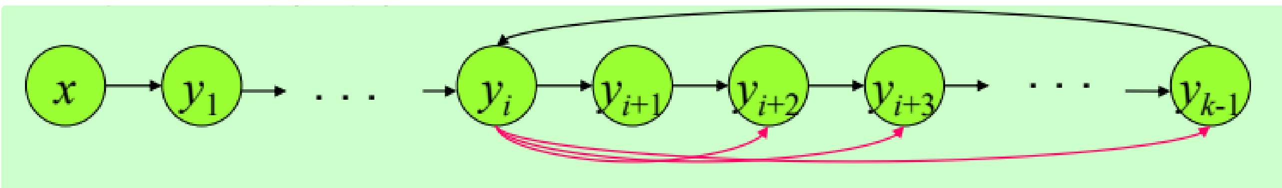
40

得到元素序列

$x, y_1, y_2, \ldots$

其中每个后续元素都大于前一个元素。我们证明这个序列中的所有元素都是不同的。

假设 $y_i = y_k$ ，i < k。



根据传递性，应该有：

$y_i R y_{i+2}, y_i R y_{i+3}, \ldots, y_i R y_{k-1}$

因为 $y_i = y_k$ ，所以 $y_k R y_{k-1}$ 。但同时 $y_{k-1} R y_k$ 。

这与反对称性矛盾。

41

因此，序列

$x, y_1, y_2, \ldots$

中的所有元素都是不同的。由于集合 A 是有限的，这个序列也是有限的：

$x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ 。

但是 y_n 是极大元，我们令 $y = y_n$ 。

42

最大元和最小元

如果对于每个 $y \in A$ 都有 yRx，则称 $x \in A$ 为有序集(A, R)的最大元。

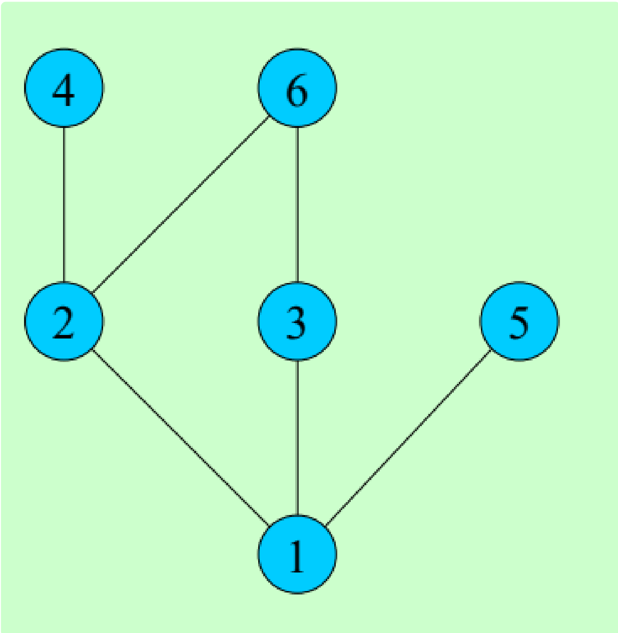
换句话说，x 大于 A 中的任何其他元素。

如果 x 小于 A 中的任何其他元素，则 x 为最小元。

43

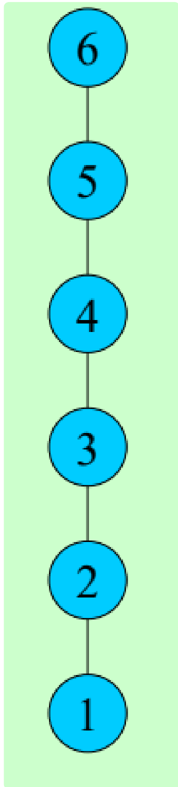
偏序集

$(\{1,2,3,4,5,6\}, |)$



线性有序集

$(\{1,2,3,4,5,6\}, \leq)$


6
5
4
3
2
1