

# 开孔有限板的孔边应力场分析

张涛 刘土光 赵耀 刘敬喜

(华中科技大学交通科学与工程学院)

**摘要:** 研究了开椭圆孔有限板的应力集中问题, 应用弹性力学的复变函数理论, 在各内边界上引入保角变换, 在外边界上采用分段函数, 通过傅立叶级数展开, 计算整个弹性板的应力场, 给出了开椭圆孔有限板的计算实例.

**关键词:** 弹性板; 孔; 应力集中

**中图分类号:** O343 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-4512(2002)01-0087-03

在机械制造、航空、造船、建筑等领域, 开椭圆孔板是一种十分常见的结构. 然而, 开孔必然引起应力集中现象, 这一直是工程技术人员十分关心的问题<sup>[1~4]</sup>. 本文基于经典弹性力学理论, 将开孔板看作有限大多连通体, 运用弹性力学的复变函数理论, 导出任意有限大弹性板的复变函数表达式, 对孔边界先运用保角变换, 随后进行复傅立叶级数展开, 代入边界条件, 通过最小二乘法确定应力函数的未知系数, 从而得到弹性板的应力场.

## 1 理论分析

对于任意的开孔板, 一般都能简化为  $K+1$  个边界 ( $K$  个内边界, 一个外边界) 的有限大多连通体的形式. 根据 Н. И. Мусхелишвили 提出的弹性力学的复变函数方法, 对于  $K+1$  个边界的有限大多连通体, 在满足位移单值条件和合力平衡的条件下, 其应力函数为如下形式:

$$\begin{cases} \Phi(z) = -P \sum_{k=1}^K (X_k + iY_k) \varphi(z) + \Phi^*(z); \\ \Psi(z) = P\nu \sum_{k=1}^K (X_k - iY_k) \varphi(z) + \Psi^*(z), \end{cases}$$

式中,  $P=1/(2\pi(1+\nu))$ , 对于平面应力问题  $\nu=(3-\mu)/(1+\mu)$ , 而对于平面应变问题  $\nu=3-4\mu$ ,  $\mu$  为材料的泊松比;  $\Phi^*(z)$  和  $\Psi^*(z)$  为多连通体上单值的解析函数;  $\varphi(z)=\ln(z-z_k)$ ,  $z_k$  是以  $S_k$  为边界的单连通体区域中的任意一点;  $X_k$  和  $Y_k$  分别为边界  $S_k$  上  $x$  和  $y$  方向面力的主矢.

$\Phi^*(z)$  可以分解为  $K$  个分别在边界  $S_k$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) 外有限大单连通区域内为单

值解析函数  $\Phi_k^*(z)$  以及在边界  $S_0$  以内的有限单连通体上为单值解析函数  $\Phi_0^*(z)$  之和.  $\Psi^*(z)$  也可以作如上的类似的分解, 将  $\Psi^*(z)$  表示成  $\Psi_k^*(z)$  与  $\Psi_0^*(z)$  之和的形式. 同时将  $\Phi_k^*(z)$  和  $\Psi_k^*(z)$  分别以  $z_k$  为中心展开成 Laurent 级数, 将  $\Phi_0^*(z)$  和  $\Psi_0^*(z)$  展开成幂级数, 形式如下:

$$\begin{cases} \Phi(z) = \sum_{k=1}^K \left[ A_k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{kn} (z - z_k)^n \right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n} z^n; \\ \Psi(z) = \sum_{k=1}^K \left[ B_k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{kn} (z - z_k)^n \right] + \sum_{n=0}^{\infty} b_{0n} z^n, \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $A_k = -[(X_k + iY_k)/(2\pi(1+\nu^*))] \ln(z - z_k)$ ;  $B_k = -[\nu^*(X_k - iY_k)/(2\pi(1+\nu^*))] \ln(z - z_k)$ ;  $a_{kn}$ ,  $b_{kn}$ ,  $a_{0n}$  和  $b_{0n}$  为展开式的系数. 对于多连通区域的椭圆内边界  $S_k$ , 引入  $K$  个变换  $z - z_k = \omega_k(\zeta_k)$ , 分别将  $\zeta_k$  平面上的单位圆以及单位圆外部映射到  $z$  平面上的以  $S_k$  为边界的无限大区域. 一般有

$$\omega_k(\zeta_k) = \frac{a_k + b_k}{2} \zeta_k + \frac{a_k - b_k}{2} \frac{1}{\zeta_k} \quad (|\zeta_k| \geq 1), \quad (2)$$

式中,  $a_k$  和  $b_k$  分别为椭圆边界的长、短半轴, 对于圆孔, 令  $a_k = b_k$  即可(下同). 同时记映射(2)的反射为如下形式:

收稿日期: 2001-05-11.

作者简介: 张涛(1976-), 男, 博士研究生, 武汉, 华中科技大学交通科学与工程学院(430074).

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_k = \{z - z_k + [(z - z_k)^2 - a_k^2 + b_k^2]^{1/2}\} / \\ (a_k + b_k) \quad (-\pi/2 < \arg(z - z_k) \leq \pi/2); \\ \zeta_k = \{z - z_k - [(z - z_k)^2 - a_k^2 + b_k^2]^{1/2}\} / \\ (a_k + b_k) \quad (\pi/2 < \arg(z - z_k) \text{ 或} \\ \arg(z - z_k) \leq -\pi/2), \end{array} \right. \quad (3)$$

式中,  $\arg(z - z_k) \in [-\pi, \pi]$ ,  $\arg$  为复数的主幅角, 式(3)中复数的开方取其幅角在  $[-\pi/2, \pi/2]$  之间的解. 将式(2)代入式(1)并化简, 去掉对应力无影响的常数项, 忽略小量, 整理后得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(z) = \\ \sum_{k=1}^K [A_k C_k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{kn} \zeta_k^n] + \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n} z^n; \\ \Psi(z) = \\ \sum_{k=1}^K [B_k C_k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{kn} \zeta_k^n] + \sum_{n=0}^{\infty} b_{0n} z^n, \end{array} \right. \quad (4)$$

式中,  $\phi_{kn}$ ,  $\psi_{kn}$ ,  $a_{0n}$  和  $b_{0n}$  为待求系数;  $C_k = \ln[(a_k + b_k)/2] \zeta_k$ , 对于多连通体区域, 其内外边界条件为

$$\left[ \Phi(z) + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right]_{S_j} = \int_{S_j} (iX - Y) ds \quad (j = 0, 1, \dots, K). \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)中, 忽略常数项, 移项并整理得

$$\left[ \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\phi_{kn} \zeta_k^n - n z \overline{\phi_{kn} \zeta_k^{n-1}} W_k + \overline{\psi_{kn} \zeta_k^n}) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{0n} z^n + n z \overline{a_{0n} z^{n-1}} + \overline{b_{0n} z^n}) \right]_{S_j} = p_j, \quad (6)$$

式中:

$$p_j = \int_{S_j} (iX - Y) ds - \sum_{k=1}^K [A_k \ln \zeta_k + A_k \ln C_k + z \overline{A_k W_k / \zeta_k} + B_k \ln \zeta_k + B_k \ln C_k].$$

对于任意内边界  $S_j$  上, 有

$$\zeta_j = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

进而有

$$z = ((a_k + b_k) \cos \theta) / 2 + i \sin \theta + [(a_k - b_k) / 2] (\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} + z_k.$$

对内边界, 将  $\zeta_k^{-n}$ ,  $n z \overline{\zeta_k^{n-1} W_k}$  和  $p_j$  在  $[0, 2\pi]$  上展开成  $\theta$  的复傅立叶级数形式. 对外边界  $S_0$ , 将  $z^n$  和  $n z \overline{z^{n-1}}$  在  $[0, 2\pi]$  上用离散复傅立叶级数形式展开, 具体形式为:

$$\left\{ \begin{array}{l} z^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{0jnm} \exp(m\theta i); \\ n z \overline{z^{n-1}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{0knm} \exp(m\theta i); \\ \zeta_k^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{kijnm} \exp(m\theta i); \\ n z \overline{\zeta_k^{n-1} W_k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{jknm} \exp(m\theta i); \\ p_j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{jm} \exp(m\theta i), \end{array} \right. \quad (7)$$

式中,  $A_{kijnm}$ ,  $B_{jknm}$ ,  $A_{0jnm}$ ,  $B_{0knm}$  和  $D_{jm}$  为傅立叶系数, 借助计算机可以计算得到. 令  $\bar{\omega} = \exp(\theta i)$ , 将式(7)代入式(6), 得

$$\sum_{k=1}^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\phi_{kn} A_{jknm} \bar{\omega}^m - \overline{\phi_{kn} B_{jknm} \bar{\omega}^m} + \overline{\psi_{kn} A_{jknm} \bar{\omega}^{-m}}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_{0n} A_{0jnm} \bar{\omega}^m - \overline{a_{0n} B_{0jnm} \bar{\omega}^m} + \overline{b_{0n} A_{0jnm} \bar{\omega}^{-m}}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{jm} \bar{\omega}^m \quad (j = 1, 2, \dots, K).$$

对  $m$  和  $n$  正负各取  $M$  项, 并忽略常数项, 比较每个等式两边  $\bar{\omega}$  的同次幂前的系数, 则可以得到如下形式线性方程组:  $[D] \{R\} = \{f\}$ . 用最小二乘法解这个方程组, 得到  $\phi_{kn}$ ,  $\psi_{kn}$ ,  $a_{0n}$  和  $b_{0n}$  的系数, 并带入式(4)中, 可以确定  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  的表达式, 则多连通体上任意点的应力可以由以下公式确定:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \operatorname{Re} \Phi'(z) = \sigma_x + \sigma_y; \\ 2[\bar{z} \Phi''(z) + \Psi(z)] = \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy}. \end{array} \right.$$

## 2 计算结果

矩形板 ( $A \times B$ ), 开一如图1所示的椭圆孔, 板边的载荷为单向拉伸、双向拉伸、四边剪切几种情况.

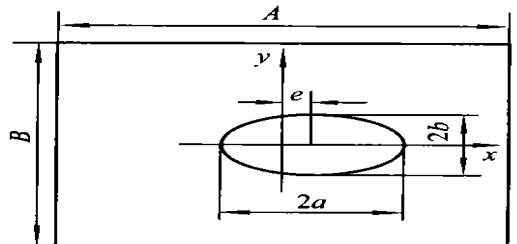


图1 椭圆开孔板示意图

在计算中, 取  $M = 10$  即可以得到满意的精度, 计算的结果与内边界条件的误差不大于  $1 \times 10^{-3}$ , 与外边界条件的误差不大于  $1 \times 10^{-2}$ .

图 2 给出了开孔板 ( $A=B=4, e=0$ )受单

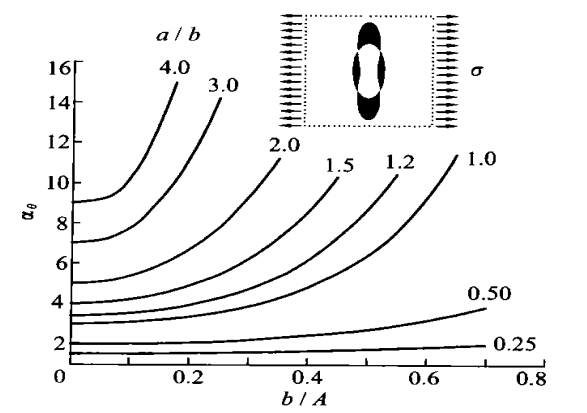


图 2 椭圆孔板单向拉伸  
向拉伸时 ( $\sigma=1$ ), 其应力集中系数  $\alpha_\theta$  ( $\alpha_\theta=\sigma_{\max}/\sigma$ ) 随比值  $b/A$  变化的曲线簇, 每条曲线上的数值对应比值  $a/b$ . 从图 3 中的计算结果可以看

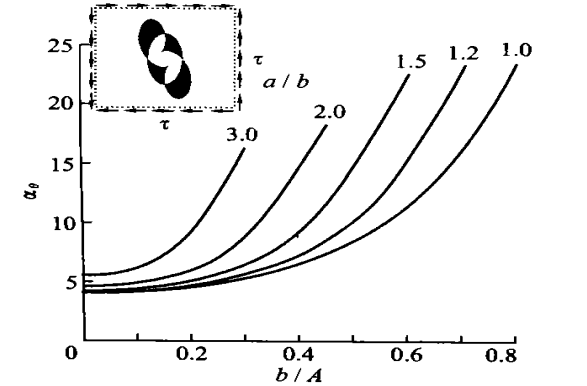


图 3 椭圆孔板四边剪切

出, 当  $b/A$  很小时, 其结果与无限大板理论所得结果很相符. 随着开孔的增大, 孔边最大应力也增大, 在一定的  $b/A$  时, 最大应力随  $a/b$  的增大而增大, 同时对椭圆孔, 长轴平行于拉(压)力方向时, 孔边的最大应力比短轴平行于拉(压)力方向时要小.

图 3 为开孔板 ( $A=B=4, e=0$ ) 受四边剪切 ( $\tau=1$ ), 其应力集中系数  $\alpha_\theta$  ( $\alpha_\theta=\sigma_{\max}/\tau$ ) 随  $b/A$  变化的曲线簇, 从图中可以看出, 在较小的  $b/A$  ( $<0.1$ ) 时, 应力集中系数随  $a/b$  的变化不太大. 从其孔边应力的分布来看, 有两个拉应力最大和两个压应力最大点, 其绝对值很接近.

本文方法简单, 精确, 对开孔的形式、位置、载荷形式没有限制, 且充分考虑了板边界的存在, 适用于大开孔结构, 因而便于工程上的应用.

参 考 文 献

[ 1 ] 萨文 T H, 杜尔契 B И. 应力集中手册. 张正国译. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.

[ 2 ] Kosmodamianskii A S, Chemic V I. Stress state of a fs-late weakened by two elliptical holes with parallel exes. Soviet Applied Mechanics, 1981, 17: 570~ 581

[ 3 ] 王林江, 林佳铿. 用多复变量应力函数计算多连通弹性平面问题. 应用数学和力学, 1994, 15(9): 657 ~ 664

[ 4 ] 王林江, 林佳铿. 含有多个混合边界椭圆孔弹性板的应力场计算. 河海大学学报, 2000, 28(6): 71~ 77

Analysis of stress field of finite plates weakened by holes

Zhang Tao   Liu Tuguang   Zhao Yao   Liu Jingxi

**Abstract:** The paper studies the stress concentration of finite plates containing multiple large holes. With the transformation, the stress functions of the finite plates are derived on the basis of the mathematical elastic theory. On the boundaries of holes, by using multiple conformal representation, the functions are developed in Fourier Series on unit circle, and on the boundary of plate edges expressed with the subsection function, the function is developed in Fourier Series by polar coordinates. The unknown coefficients of the functions are determined by comparing with the coefficient method, and the stress in the plate can be calculated. In the paper, examples are given, and the results show the method is effective and efficient.

**Key words:** finite plates; holes; stress concentration

**Zhang Tao**   Doctoral Candidate; College of Traffic. Sci. & Eng., HUST, Wuhan 430074, China.